

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica das Aplicações Quadráticas Conservativas do  
Plano**

Gustavo Henrique Oliveira Salgado

Orientadora: Sylvie Oliffson Kamphorst

09 de maio de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
Departamento de Matemática

# Dinâmica das Aplicações Quadráticas Conservativas do Plano

Gustavo Henrique Oliveira Salgado

Orientadora:

Sylvie Oliffson Kamphorst

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em  
Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte  
dos requisitos para obtenção do título de Mestre na área de  
Matemática*

UFMG - BELO HORIZONTE, MAIO DE 2006

# Agradecimentos

Primeiramente, aos meus pais Antônio e Beatriz, pela oportunidade da vida e o apoio ao longo dela.

À Sylvie Kamphorst, pela orientação, carinho, apoio e compreensão.  
Aos professores Mário Carneiro e Sônia de Cavalho, pelo apoio e incentivo.  
Aos professores da graduação e pós-graduação.

Ao professor Tito Édimo, pela inspiração.

Aos colegas de graduação e pós-graduação.

Aos amigos de curso: Allan, Bruno, Geraldo, Gilberto, Juliana e Tiago.  
Agradecimentos especiais para os amigos João Paulo e Renato Rocha; sem vocês os dias teriam sido mais duros e mais tristes.

Aos amigos de “sempre”: Alan de Paula, Bruno Lambertucci, Geraldo M. Couto, Marcelo Sampaio, Tiago Guimarães e Ricardo Rocha.

Aos familiares que, mesmo à distância, sempre torceram pelas conquistas. Em especial aos meus avós Expedito e Vilma, pela lição de vida.

Agradeço a todas as pessoas que fazem parte da minha vida, ou que fizeram, mesmo por curtos instantes.

Finalmente, agradeço à qualquer ingratidão que me faça progredir.

# Resumo

Neste trabalho caracterizaremos a forma gerérica das aplicações quadráticas do plano que preservam área, preservam orientação e possuam um ponto fixo.

Avaliaremos a estabilidade linear dos pontos fixos, detectando condições para hiperbolicidade e elipticidade.

Estudaremos o comportamento do primeiro coeficiente de Birkhoff no caso Elíptico não ressonante e suas conseqüências dinâmicas, como a existência de curvas fechadas invariantes.

Descreveremos a dinâmica no caso hiperbólico, mostrando interseção das variedades estável e instável e a existência de um compacto que possui toda a dinâmica não trivial.

# Abstract

In this work will be characterized the generic form of plane quadratic applications that preserve area, orientation and that have a fixed point.

It will evaluate the linear stability of fixed points, detecting the conditions to hyperbolicity and ellipticity.

Also, will be studied the behavior of the first Birkhoff coefficient in the elliptical case not resonant and its dynamical consequences, as the existence of invariants closed curves.

The dynamics in the hyperbolic case will be described, showing the intersection of stable and unstable manifolds as well the existence of a compact that have a not trivial dynamics.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Formas Normais para aplicações quadráticas do plano preservando a área e orientação</b>	<b>10</b>
1.1 Autovalores Complexos . . . . .	12
1.2 Caso Diagonalizável . . . . .	15
1.3 Caso não Diagonalizável com Autovalores Reais . . . . .	18
1.4 Conclusão . . . . .	21
<b>2 Dinâmica local: existência e classificação de Pontos Fixos</b>	<b>24</b>
2.1 Existência de Pontos Fixos em EQ2 . . . . .	25
2.2 Existência de Pontos Fixos em HQ2 . . . . .	26
2.3 Conclusão . . . . .	28
<b>3 Dinâmica em Torno do Ponto Fixo Elíptico</b>	<b>29</b>
3.1 A Forma Normal de Birkhoff da Aplicação EQ2 . . . . .	29
3.2 A Estabilidade do Ponto Fixo Elíptico de EQ2 . . . . .	31
<b>4 Dinâmica com Ponto Fixo Hiperbólico</b>	<b>34</b>
4.1 Preliminares: Dinâmica Hiperbólica . . . . .	34
4.2 Existência de Pontos Homoclínicos . . . . .	36
4.3 Outros Aspectos da Dinâmica em HQ2 . . . . .	39

**5 A imagem completa: Conclusão**

# Lista de Figuras

3.1	Curvas em torno de ponto fixo elíptico: $\alpha \approx 0.41\pi$ ( $\epsilon = 1.5$ ) . . . . .	32
3.2	Pontos fixo elíptico com ressonância: $\alpha = \pi/3$ ( $\epsilon = 1.0$ ) . . . . .	33
4.1	Dinâmica local de $F$ em torno de $(0, 0)$ dada pela $dF_{0,0}$ . . . . .	34
4.2	Os espaços: $E^s$ e $E^u$ ; e as variedades: $W^s$ e $W^u$ . . . . .	35
4.3	Variedades instável e estável, com interseção ( $\epsilon = 0.9$ e $4/3$ ) . . . . .	39
4.4	Os pontos da região $\mathcal{B} - (0, 0)$ , tendem para $\infty$ sob $S$ . . . . .	41
4.5	Imagem inversa do espaço estável e direta do eixo $y$ sob $S$ , ( $\epsilon = 4/3$ ). . . . .	42
4.6	Várias iteradas inversas da parábola $f(x)$ ( $\epsilon = 4/3$ ) . . . . .	42
5.1	Figura representando a dinâmica de $S$ quando $(1, 0)$ é elíptico e $\epsilon = 0.9$ . . . . .	46
5.2	Figura representando a dinâmica de $S$ quando $(1, 0)$ é elíptico e $\epsilon = 4/3$ . . . . .	46
5.3	Ambos pontos fixos são hiperbólicos para $\epsilon = 4.5$ . . . . .	47
5.4	Espaço de fase da aplicação $P_1Q_2$ com $d = 0.5$ . . . . .	47
5.5	Espaço de fase da aplicação $P_1Q_2$ com $d = 0.5$ , degenerado. . . . .	48

# Introdução

Neste trabalho estudaremos aplicações quadráticas do plano que preservam área e orientação. Mais particularmente vamos analisar aplicações que tenham um ponto fixo, já que o Teorema da Translação de Brouwer [4] descreve completamente a dinâmica de aplicações sem pontos fixos (todos os pontos são errantes). Ao longo deste trabalho, tentaremos caracterizar a dinâmica e a estrutura do espaço de fase no caso em que as aplicações têm ponto fixo.

No capítulo 1 mostraremos que toda aplicação quadrática do plano preservando área e orientação e com um ponto fixo pode ser colocada em uma forma normal a um parâmetro que depende apenas da parte linear da aplicação no ponto fixo. Também mostraremos que, se o ponto fixo não for parabólico, qualquer aplicação se escreve, a menos de uma mudança de coordenadas, como

$$(x, y) \rightarrow (x + y + \epsilon x(1 - x), y + \epsilon x(1 - x)) \quad (1)$$

para algum  $\epsilon$  real positivo. Assim, o conjunto destas aplicações constitui uma família a um parâmetro, também conhecida como aplicação de Henon conservativa.

Utilizando as formas normais demonstraremos que estas aplicações possuem inversa quadrática. Este resultado é na verdade um caso particular do [8]

No capítulo 2 mostraremos que as aplicações que estamos estudando têm em geral dois pontos fixos e estudaremos a dinâmica local em torno destes. Mais especificamente mostraremos que as aplicações quadráticas do plano que preservam área e orientação têm em geral um ponto fixo hiperbólico com autovalores positivos e um segundo ponto fixo que pode ser elíptico ou hiperbólico reverso, dependendo apenas do valor do parâmetro. Esta conclusão também segue da forma (1) acima. Também mostraremos, no capítulo 3, utilizando a Forma Normal de Birkoff e o Teorema do Twist de Moser, que os pontos elípticos são estáveis salvo para valores isolados do parâmetro  $\epsilon$ . Ou seja, provaremos a existência de ilhas no espaço de fase.

A dinâmica associada aos pontos hiperbólicos será apresentada no capítulo 4, e investigaremos o comportamento global das variedades estável e instável. Demonstraremos a existência de pontos homoclínicos e de um conjunto compacto no espaço de fase que contém os pontos com dinâmica não trivial.

Finalmente, no capítulo 5 apresentaremos o comportamento global da dinâmica e o espaço de fase para aplicações quadráticas conservativas do plano.

# Capítulo 1

## Formas Normais para aplicações quadráticas do plano preservando a área e orientação

Neste capítulo tomaremos aplicações quadráticas do plano que preservam área e orientação. Veremos que existe uma mudança de coordenadas tal que uma aplicação qualquer com estas propriedades pode ser escrita em uma forma mais simples. Essas aplicações serão classificadas de acordo com certas condições que dependem apenas de seus coeficientes, sendo estas denotadas por Forma Normal HQ2, Forma Normal EQ2 ou Forma Normal PQ2, todas famílias a um parâmetro. Essas formas normais facilitarão nosso estudo do comportamento dinâmico de tais aplicações.

Seja

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

em que cada  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) é um polinômio de grau dois com coeficientes reais. Vamos supor que  $F$  preserva área e orientação, ou seja,  $dx \wedge dy = df_1 \wedge df_2$ .

Se  $F$  não possui ponto fixo a sua dinâmica é completamente determinada pelo teorema abaixo.

**Teorema 1.1 (Teorema da Translação de Brouwer [4])** *Se  $F$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  que preserva a orientação e que não possui ponto fixo, então por todo ponto  $z$  de  $\mathbb{R}^2$  passa uma curva  $C$ , imagem orientada de um mergulho próprio de  $\mathbb{R}$ , tal que  $F(C)$  esteja estritamente à esquerda de  $C$  e  $F^{-1}(C)$  estritamente à direita. Em particular todo ponto é errante.*

Assim, suporemos sempre que  $F$  possui um ponto fixo  $F(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ . Sem perda de generalidade, podemos fazer uma translação que leve  $(x_0, y_0)$  em  $(0, 0)$  e dessa forma teremos  $F(0, 0) = (0, 0)$ .

Escreveremos as funções coordenadas de  $F$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 \\ f_2 &= b_{10}x + b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Devido à condição  $dx \wedge dy = df_1 \wedge df_2$  obtemos as seguintes relações para os coeficientes de  $F(x, y)$

$$a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} = 1 \quad (1.2)$$

$$a_{10}b_{11} + a_{20}b_{01} - a_{11}b_{10} - a_{01}b_{20} = 0 \quad (1.3)$$

$$a_{11}b_{01} + a_{10}b_{02} - a_{01}b_{11} - a_{02}b_{10} = 0 \quad (1.4)$$

$$a_{20}b_{11} - a_{11}b_{20} = 0 \quad (1.5)$$

$$a_{11}b_{02} - a_{02}b_{11} = 0 \quad (1.6)$$

$$a_{20}b_{02} - a_{02}b_{20} = 0 \quad (1.7)$$

As equações (1.5), (1.6) e (1.7), permitem reescrevermos os coeficientes  $a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{20}, b_{11}, b_{02}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_{20} &= c \operatorname{sen} \beta, & b_{20} &= c \cos \beta, \\ a_{11} &= d \operatorname{sen} \beta, & b_{11} &= d \cos \beta, \\ a_{02} &= e \operatorname{sen} \beta, & b_{02} &= e \cos \beta. \end{aligned} \quad (1.8)$$

A partir da equação (1.2), observamos que a Forma Canônica de Jordan [14] da parte linear de  $F$ , ou seja,  $dF_{(0,0)}$ , se enquadra em um dos casos abaixo:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0,$$

se a parte linear de  $F$  possui autovalores reais;

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \bmod \pi \neq 0,$$

se a parte linear de  $F$  possui autovalores complexos com parte imaginária não nula; ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

se a parte linear de  $F$  possui autovalores reais e não for diagonalizável.

Nas próximas duas seções estudaremos os casos em que os autovalores da parte linear de  $F$  são complexos ou reais distintos, veremos que estas são famílias a um parâmetro, ou seja, a

menos de mudança de coordenadas lineares,  $F$  depende apenas de um parâmetro. Esta família também é conhecida como Hénon conservativo [7].

Nosso primeiro objetivo é obter formas normais globais para a família de Hénon. Obviamente, para manter o caráter quadrático das aplicações, admitiremos apenas mudanças de coordenadas (conjugações) afins ou lineares.

## 1.1 Autovalores Complexos

Vamos supor que a parte linear de  $F$  em  $(0, 0)$  possua autovalores complexos. Reescrevendo as funções coordenadas de  $F$  de maneira que sua parte linear esteja na Forma Canônica de Jordan e renomeando os coeficientes dos termos quadráticos, se necessário, teremos:

$$\begin{aligned} f_1 &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 \\ f_2 &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 \end{aligned}$$

Reescrevendo as equações (1.3) e (1.4) e utilizando as definições (1.8) obtemos

$$c \sin(\alpha + \beta) + d \cos(\alpha + \beta) = 0 \quad (1.9)$$

$$d \sin(\alpha + \beta) + e \cos(\alpha + \beta) = 0 \quad (1.10)$$

Temos, assim, duas equações relacionando quatro variáveis ( $\beta$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ ).

Se  $(\alpha + \beta) \bmod \frac{\pi}{2} \neq 0$  e  $d = 0$ , então  $c = 0$  e  $e = 0$  pelas equações (1.9) e (1.10) respectivamente. Nessas condições temos, por (1.8), que os coeficientes dos termos quadráticos são todos nulos, logo  $F$  é linear.

Se  $(\alpha + \beta) \bmod \frac{\pi}{2} \neq 0$  e  $d \neq 0$ , o sistema pode ser resolvido para  $c$  e  $e$ . Obtemos

$$c = -d \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad e = -d \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

de tal maneira que

$$\begin{aligned} f_1 &= x \cos \alpha - y \sin \alpha - \frac{d \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{2 \sin(\alpha + \beta)} x^2 + (d \sin \beta)xy - \frac{d \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \cos(\alpha + \beta)} y^2 \\ f_2 &= x \sin \alpha + y \cos \alpha - \frac{d \cos \beta \cos(\alpha + \beta)}{2 \sin(\alpha + \beta)} x^2 + (d \cos \beta)xy - \frac{d \cos \beta \sin(\alpha + \beta)}{2 \cos(\alpha + \beta)} y^2. \end{aligned}$$

Denotamos por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{2 \sin(\alpha + \beta)} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos(\alpha + \beta)} \end{pmatrix}$$

a matriz associada a parte quadrática de  $F$ . Como a matriz  $A$  é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} 1/\operatorname{sen}(2\alpha + 2\beta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que, no sistema de coordenadas em que  $A$  é diagonal, os termos  $xy$  e  $y^2$  possuem coeficientes nulos e o único termo quadártico nessas condições será  $x^2$ . Assim, conjugando  $F(x, y)$  com a mudança de coordenadas que diagonaliza  $A$  e uma mudança de escala, encontramos uma aplicação que, renomeando as variáveis para  $(x, y)$ , é da seguinte forma:

$$EQ2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + x^2 \operatorname{sen} \alpha \\ x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - x^2 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

que chamaremos de **Forma Normal EQ2**.

Observamos, agora, que podemos escrever  $EQ2$  como uma composição de funções:

$$EQ2(x, y) = R_\alpha \circ Q(x, y)$$

em que

$$Q(x, y) = (x, y - x^2) \quad \text{e} \quad R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $EQ2^{-1} = Q^{-1} \circ R_\alpha^{-1}$ , em que

$$Q^{-1}(x, y) = (x, y + x^2) \quad \text{e} \quad R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

Ou seja, a aplicação inversa  $EQ2^{-1}$  também é uma aplicação quadrática do plano que preserva área.

Vamos analisar outros casos. Primeiramente, consideraremos o caso que  $(\alpha + \beta) \bmod \pi = 0$ . Neste caso, temos que  $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$  e  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 0$ . Então  $d = 0$  e  $e = 0$  por (1.9) e (1.10) respectivamente. Agora, se  $c = 0$  estamos no caso em que  $F$  é linear. Se  $c \neq 0$  temos por (1.8) que  $a_{20} = c \operatorname{sen} \beta$ ,  $b_{20} = c \cos \beta$  e os demais coeficientes quadráticos iguais a zero. Como  $(\alpha + \beta) \bmod \pi = 0$  temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= -\operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \cos \beta = \cos \alpha, \\ &\text{ou} \\ \operatorname{sen} \beta &= \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \cos \beta = -\cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Logo, ou  $a_{20} = -c \operatorname{sen} \alpha$  e  $b_{20} = c \cos \alpha$ , ou  $a_{20} = c \operatorname{sen} \alpha$  e  $b_{20} = -c \cos \alpha$ .

Como  $\alpha \bmod \pi \neq 0$  temos que  $a_{20} \neq 0$ . Se  $\alpha = \frac{\pi}{2} + l\pi$ ,  $l = 1, 2$  teremos  $b_{20} = 0$  e

$$F(x, y) = \left( -y \operatorname{sen} \alpha + x^2 c \operatorname{sen} \beta, \quad x \operatorname{sen} \alpha \right)$$

que ao fazermos uma mudança de coordenadas encontramos

$$F(x, y) = (-y \operatorname{sen} \alpha + x^2 \operatorname{sen} \alpha, x \operatorname{sen} \alpha)$$

que está na forma EQ2.

Se  $\alpha \bmod \frac{\pi}{2} \neq 0$  temos que  $b_{20} \neq 0$ , logo

$$F(x, y) = (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + x^2 c \operatorname{sen} \beta, x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + x^2 c \cos \beta)$$

que pela relação (1.12) podemos, através de uma mudança de coordenadas, transformá-la na forma normal EQ2.

Falta analisarmos o caso em que  $(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k = 1, 2$ . Assim, temos que  $\cos(\alpha + \beta) = 0$  e  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \neq 0$ . Logo,  $c = 0$  e  $d = 0$  por (1.9) e (1.10) respectivamente. Agora, se  $e = 0$  estamos no caso em que  $F$  é linear. Se  $e \neq 0$  temos por (1.8) que  $a_{02} = e \operatorname{sen} \beta$ ,  $b_{02} = e \cos \beta$  e os demais coeficientes quadráticos iguais a zero. Como  $(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} + k\pi = 0$  temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha \text{ e } \cos \beta = -\operatorname{sen} \alpha, \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} \beta = -\cos \alpha \text{ e } \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Logo, ou  $a_{02} = e \cos \alpha$  e  $b_{02} = -e \operatorname{sen} \alpha$ , ou  $a_{02} = -e \cos \alpha$  e  $b_{02} = e \operatorname{sen} \alpha$ .

Como  $\alpha \bmod \pi \neq 0$  temos que  $b_{02} \neq 0$ . Se  $\alpha = \frac{\pi}{2} + l\pi$ ,  $l = 1, 2$  teremos  $a_{02} = 0$  e

$$F(x, y) = (-y \operatorname{sen} \alpha, x \operatorname{sen} \alpha + ey^2 \cos \beta)$$

e, ao fazermos uma mudança de coordenadas, encontramos

$$F(x, y) = (-y \operatorname{sen} \alpha, x \operatorname{sen} \alpha - y^2 \operatorname{sen} \alpha)$$

Fazendo a conjugação<sup>1</sup> que troca  $x$  com  $y$  encontramos

$$F(x, y) = (y \operatorname{sen} \alpha - x^2 \operatorname{sen} \alpha, -x \operatorname{sen} \alpha)$$

que está na forma EQ2.

Se  $\alpha \bmod \frac{\pi}{2} \neq 0$ , temos que  $a_{02} \neq 0$ , logo

$$F(x, y) = (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha + y^2 e \operatorname{sen} \beta, x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + y^2 e \cos \beta)$$

---

<sup>1</sup> $x \rightarrow y, y \rightarrow x$

que pela relação (1.13) e através de uma mudança de coordenadas podemos transformá-la na forma normal EQ2.

Concluimos que a família das aplicações quadráticas da forma (1.1) que possui parte linear com autovalores **Complexos** é uma família que, a menos de mudança linear de coordenadas, depende apenas do parâmetro  $\alpha$  que determina os autovalores de  $dF_{(0,0)}$ . Além disso, todos os elementos dessa família possuem inversa quadrática que preserva área.

## 1.2 Caso Diagonalizável

Vamos supor que a parte linear de  $F$  possua autovalores reais  $\lambda$  e  $1/\lambda$ . Reescreveremos as funções coordenadas de  $F$  de maneira que sua parte linear esteja na Forma Canônica de Jordan. Temos, então,

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda x + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 \\ f_2 &= \frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2. \end{aligned}$$

Utilizando (1.8), as equações (1.3) e (1.4) são reescritas, neste caso, como

$$\lambda^2 d \cos \beta + c \operatorname{sen} \beta = 0 \quad (1.14)$$

$$\lambda^2 e \cos \beta + d \operatorname{sen} \beta = 0 \quad (1.15)$$

Para qualquer escolha de  $\beta \neq k\pi/2$ , o sistema acima pode ser resolvido em função de  $d$  e obtemos

$$c = -d \frac{\lambda^2 \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}, \quad e = -d \frac{\operatorname{sen} \beta}{\lambda^2 \cos \beta}$$

de tal maneira que obtemos

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda x - \frac{1}{2}(d\lambda^2 \cos \beta)x^2 + (d \operatorname{sen} \beta)xy - \frac{1}{2}\left(d \frac{\operatorname{sen} \beta^2}{\lambda^2 \cos \beta}\right)y^2 \\ f_2 &= \frac{1}{\lambda}y - \frac{1}{2}\left(d \frac{\lambda^2 \cos \beta^2}{\operatorname{sen} \beta}\right)x^2 + (d \cos \beta)xy - \frac{1}{2}\left(d \frac{\cos \beta}{\lambda^2}\right)y^2. \end{aligned}$$

Se  $d = 0$ , então  $F$  é linear. Podemos supor que  $d \neq 0$ .

Finalmente, conjugando  $F$  com a mudança de variáveis (mudança de escala)

$$x \rightarrow \frac{2x}{d \lambda \cos \beta}, \quad y \rightarrow \frac{2\lambda y}{d \operatorname{sen} \beta}$$

vemos que, nesse sistema de coordenadas,  $F$  pode ser escrita na forma

$$HQ2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x - x^2 + 2xy - y^2) \\ \frac{1}{\lambda}(y - x^2 + 2xy - y^2) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

que chamaremos **Forma Normal HQ2**.

**Proposição 1.2** *Seja  $F$  uma aplicação quadrática do plano que preserva área, tal que  $F(0, 0) = (0, 0)$ . Se um dos autovalores da parte linear de  $F$  é maior que 1, então a aplicação*

$$S(x, y) = \left( (1 + \epsilon)x + y - \epsilon x^2 \quad , \quad \epsilon x + y - \epsilon x^2 \right), \epsilon > 0. \quad (1.17)$$

*é conjugada a  $F$  por uma aplicação linear.*

**Demonstração:** A parte linear de (1.17) é dada por  $\begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$ . Como seu determinante é 1 e seu traço é igual a  $2 + \epsilon$ , possui autovalores reais

$$\lambda = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2}.$$

A função  $\lambda(\epsilon) = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}{2}$  é crescente pois

$$\lambda'(\epsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon + 2}{\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}} > 0, \forall \epsilon > 0,$$

ou seja,  $\lambda(\epsilon) > 1$  é injetiva. Nessas condições sua inversa está bem definida. Na verdade temos que  $2 + \epsilon = \lambda + 1/\lambda$

Agora, vamos mostrar que existe um sistema de coordenadas tal que (1.17) está na forma (1.16).

Os autovetores associados à  $\lambda$  e  $1/\lambda$  são respectivamente

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} \epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon} \\ 2\epsilon \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_{1/\lambda} = \begin{pmatrix} \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon} \\ 2\epsilon \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Conjugando  $S$  com a mudança de coordenadas em que a parte linear esteja na forma diagonal, encontramos as seguintes funções coordenadas

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda x - \frac{\lambda}{2(\lambda + 1)}(2(\lambda - 1)x - \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda}y)^2 \\ f_2 &= \frac{1}{\lambda}y - \frac{1}{2(\lambda + 1)}(2(\lambda - 1)x - \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda}y)^2 \end{aligned}$$

e conjugando as funções acima com a mudança de escala:

$$x \rightarrow \frac{x(\lambda + 1)}{2(\lambda - 1)^2}, \quad y \rightarrow \frac{y\lambda(\lambda + 1)}{2(\lambda - 1)^2}$$

$S$  fica da forma de (1.16).

Como  $HQ2$  é conjugada a  $F$  por uma aplicação linear e temos nossa afirmação demonstrada.  $\square$

Vamos escrever  $S$  na forma matricial

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \epsilon x^2 \end{pmatrix}$$

temos que  $S^{-1}$  é dada por

$$S^{-1}(v, w) = \begin{pmatrix} x & , & y + \epsilon x^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\epsilon & 1 + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

que renomeando  $v$  e  $w$  para as variáveis  $x$  e  $y$  respectivamente, temos

$$S^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y & , & y - \epsilon(x - y)(1 - (x - y)) \end{pmatrix}.$$

Seja  $g$  a aplicação que realiza a conjugação encontrada na proposição 1.2. Temos  $gS^{-1}g^{-1} = HQ2^{-1}$ , ou seja,  $HQ2$  possui uma inversa que também é quadrática, pois  $g$  é linear. Logo, se  $F$  possui forma normal  $HQ2$ , então  $F$  possui uma inversa que é conjugada a  $HQ2^{-1}$ .

Analisaremos agora, os casos em que  $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ou  $\beta = k\pi$ ,  $k = 0, 1$ .

Se  $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ; temos por (1.14) e (1.15) que  $c = d = 0$ . Dessa forma temos  $a_{02} = e \sin \beta = \pm e$  e os demais coeficientes dos termos quadráticos nulos. Se  $e = 0$ , temos  $F$  linear. Caso contrário, teremos

$$F(x, y) = \left( \lambda x \pm ey^2, \frac{1}{\lambda}y \right)$$

que através de uma mudança linear de coordenadas, renomeando  $F$ ,  $x$  e  $y$ , encontramos

$$F(x, y) = \left( \lambda x + y^2, \frac{1}{\lambda}y \right)$$

com

$$F^{-1}(x, y) = \left( \frac{1}{\lambda}x - \lambda y^2, \lambda y \right)$$

Se  $\beta = k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ; temos por (1.14) e (1.15) que  $d = e = 0$ . Dessa forma temos  $b_{20} = c \cos \beta = \pm c$  e os demais coeficientes dos termos quadráticos nulos. Se  $c = 0$ , temos  $F$  linear. Caso contrário, teremos

$$F(x, y) = \left( \lambda x, \frac{1}{\lambda}y \pm cx^2 \right)$$

que através de uma mudança linear de coordenadas, renomeando  $F$ ,  $x$  e  $y$ , encontramos

$$F(x, y) = \left( \lambda x, \frac{1}{\lambda}y + x^2 \right)$$

com

$$F^{-1}(x, y) = \left( \frac{1}{\lambda}x, \lambda y - \frac{x^2}{\lambda} \right)$$

Dessa forma, se  $\beta \in \Psi = \{k\frac{\pi}{2}; k = 0, 1, 2, 3\}$ , então  $F$  não pode ser escrita na forma  $HQ2$ . Contudo, além do conjunto  $\Psi$  ter medida nula em  $[0, 2\pi]$  (domínio do parâmetro  $\beta$ ), podemos reescrever  $F$  de uma maneira mais simples mesmo nesses casos.

Vemos que a família das aplicações da forma (1.1) que possui parte linear com autovalores **Reais** também depende apenas de um parâmetro, que é o autovalor  $\lambda$  de  $dF_{(0,0)}$ . Além disso sua inversa também é uma aplicação quadrática que preserva área.

### 1.3 Caso não Diagonalizável com Autovalores Reais

Vamos supor que a parte linear de  $F$  possua autovalores reais e não seja diagonalizável. Neste caso os autovalores devem ser necessariamente idênticos e teremos  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$  pela hipótese de preservar área. Reescrevendo as funções coordenadas de  $F$  de maneira que sua parte linear esteja na Forma Canônica de Jordan, renomeando os coeficientes dos termos quadráticos, encontramos

$$F(x, y) = \left( x + y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2, y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 \right)$$

ou

$$F(x, y) = \left( -x + y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2, -y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 \right)$$

associadas ao autovalor  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$  respectivamente.

Vamos analisar, em primeiro lugar, o caso em que  $\lambda = 1$ . Reescrevendo as equações (1.3) e (1.4), utilizando (1.8), obtemos:

$$c(\sin \beta - \cos \beta) + d \cos \beta = 0 \tag{1.18}$$

$$d(\sin \beta - \cos \beta) + e \cos \beta = 0 \tag{1.19}$$

Vemos que se  $\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ; teremos  $d = e = 0$ . Se  $c = 0$ , temos que  $F$  é linear. Caso contrário,  $a_{20} = c \sin \beta = \pm \frac{c\sqrt{2}}{2}$ ,  $b_{20} = c \cos \beta = \pm \frac{c\sqrt{2}}{2}$  e os outros coeficientes dos termos quadráticos de  $F$  iguais a zero. Dessa forma

$$F(x, y) = \left( x + y \pm \frac{c\sqrt{2}}{4}x^2, y \pm \frac{c\sqrt{2}}{4}x^2 \right),$$

que ao fazermos uma mudança de escala<sup>2</sup> escrevemos

$$F(x, y) = (x + y + x^2, y + x^2) \text{ e } F^{-1}(x, y) = (x - y, y - (x - y)^2).$$

Se  $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ; teremos  $c = d = 0$ . Se  $e = 0$  temos que  $F$  é linear. Caso contrário,  $a_{02} = e \sin \beta = \pm e$  e os outros coeficientes dos termos quadráticos de  $F$  iguais a zero. Então,

$$F(x, y) = \left(x + y \pm \frac{e}{2}y^2, y\right)$$

que ao fazermos uma mudança de escala<sup>3</sup> escrevemos

$$F(x, y) = (x + y + y^2, y), \text{ em que, } F^{-1}(x, y) = (x - y - y^2, y).$$

Se  $\beta = k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ; temos  $c = d = e$ . Se  $c = 0$  temos que  $F$  é linear. Caso contrário,  $b_{20} = b_{11} = b_{02} = e \cos \beta = \pm e$  e os outros coeficientes dos termos quadráticos de  $F$  iguais a zero. Temos, então,

$$F(x, y) = \left(x + y, y \pm \frac{e}{2}(x + y)^2\right)$$

que ao fazermos uma mudança de escala<sup>4</sup> escrevemos

$$F(x, y) = (x + y, y + (x + y)^2), \text{ em que, } F^{-1}(x, y) = (x - y + x^2, y - x^2).$$

Seja  $\beta \notin \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ . Se  $d = 0$ , temos  $c = e = 0$  que é o caso em que  $F$  é linear. Se  $d \neq 0$ , temos

$$c = \frac{d \cos \beta}{\cos \beta - \sin \beta} \text{ e } e = \frac{d(\cos \beta - \sin \beta)}{\cos \beta},$$

logo, todos os coeficientes dos termos quadráticos de  $F$  são não nulos. Podemos, através da definição (1.8), escrever

$$a_{20} = b_{20} \tan \beta, \quad a_{11} = b_{11} \tan \beta \text{ e } a_{02} = b_{02} \tan \beta.$$

Substituindo as relações acima nas equações (1.3) e (1.4), encontramos as seguintes relações

$$b_{20} = \frac{b_{11}}{1 - \tan \beta} \text{ e } b_{02} = b_{11}(1 - \tan \beta).$$

Ao substituí-las nas funções coordenadas de  $F$ , damos um nova aparência como segue

---


$$^2x \rightarrow \pm 2\sqrt{2}x/c, \quad y \rightarrow \pm 2\sqrt{2}y/c$$

$$^3x \rightarrow \pm 2x/e, \quad y \rightarrow \pm 2y/e$$

$$^4x \rightarrow \pm 2x/e, \quad y \rightarrow \pm 2y/e$$

$$f_1 = x + y + \frac{b_{11} \tan \beta}{2(1 - \tan \beta)} x^2 + b_{11} \tan \beta xy + \frac{b_{11} \tan \beta (1 - \tan \beta)}{2} y^2$$

$$f_2 = y + \frac{b_{11}}{2(1 - \tan \beta)} x^2 + b_{11} xy + \frac{b_{11}(1 - \tan \beta)}{2} y^2$$

Fazendo a seguinte mudança de escala

$$x \rightarrow \frac{x}{b_{11}} \quad y \rightarrow \frac{y}{b_{11} \tan \beta}$$

no sistema de coordenadas da  $F$ , encontramos

$$P_1 Q_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{y}{\tan \beta} + \frac{\tan \beta}{2(1 - \tan \beta)} x^2 + xy + \frac{1 - \tan \beta}{2 \tan \beta} y^2 \\ y + \frac{\tan \beta}{2(1 - \tan \beta)} x^2 + xy + \frac{1 - \tan \beta}{2 \tan \beta} y^2 \end{pmatrix}$$

que chamaremos **Forma normal**  $P_1 Q_2$ .

Observamos que, nesse sistema de coordenadas, a diferença das funções coordenadas é

$$f_1 - f_2 = x + y \frac{1 - \tan \beta}{\tan \beta}$$

e que  $\frac{\tan \beta}{2(1 - \tan \beta)} (f_1 - f_2)^2$  é a parte quadrática das  $f_i (i = 1, 2)$ . Com essa observação conseguimos escrever a inversa de  $PQ_2$

$$P_1 Q_2^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{y}{\tan \beta} + \frac{(x - y)^2}{2} \\ y - \frac{\tan \beta (x - y)^2}{2(1 - \tan \beta)} \end{pmatrix}.$$

Para o caso em que os autovalores de  $F$  são iguais a  $-1$ , reescrevemos as equações (1.3) e (1.4), utilizando (1.8), obtendo:

$$c(\sin \beta + \cos \beta) + d \cos \beta = 0 \tag{1.20}$$

$$d(\sin \beta + \cos \beta) + e \cos \beta = 0 \tag{1.21}$$

Procedendo da mesma maneira em que os autovalores são iguais a  $1$ , determinamos sistemas de coordenadas em que  $F$  se escreve de maneira mais simples.

Assim, para  $\beta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ,  $k = 0, 1$ , teremos

$$F(x, y) = (-x + y + x^2, -y - x^2) \text{ e } F^{-1}(x, y) = (y - x, -y - (y - x)^2).$$

Para  $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k = 0, 1$ , teremos

$$F(x, y) = (-x + y + y^2, -y), \text{ em que, } F^{-1}(x, y) = (-x + y - y^2, -y).$$

Para  $\beta = k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ,

$$F(x, y) = (-x + y, -y + (x - y)^2), \text{ em que, } F^{-1}(x, y) = (-x - y + x^2, -y + x^2).$$

Agora, se  $\beta \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right\}$  teremos  $F$ , em um novo sistema de coordenadas, escrita da seguinte maneira

$$P_{-1}Q2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \frac{y}{\tan \beta} - \frac{\tan \beta}{2(1 + \tan \beta)} \left(x - \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta} y\right)^2 \\ -y - \frac{\tan \beta}{2(1 + \tan \beta)} \left(x - \frac{1 + \tan \beta}{\tan \beta} y\right)^2 \end{pmatrix}$$

que chamaremos **Forma normal**  $P_{-1}Q2$ . E sua inversa dada por

$$P_{-1}Q2^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - \frac{y}{\tan \beta} - \frac{(x - y)^2}{2} \\ -y + \frac{\tan \beta (x - y)^2}{2(1 + \tan \beta)} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, para cada um dos autovalores  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$  da parte linear de  $F$ , podemos, através do parâmetro  $\beta$ , determinar em qual caso se enquadra cada aplicação dessas famílias, ou seja, cada uma delas é uma família a um parâmetro. Além disso, cada membro dessas duas famílias possui uma inversa quadrática.

## 1.4 Conclusão

Vimos nesse capítulo que, se  $F$  é uma aplicação quadrática do plano, que preserva área e orientação, tal que  $F(c) = (c)$  para algum  $c \in \mathbb{R}^2$ , podemos encontrar um sistemas de coordenadas

no qual sua apresentação é mais simples. Essa apresentação é unicamente determinada pela família a qual pertence. Nos casos em que os autovalores são complexos, ou em que os autovalores são reais e sua parte linear pode ser diagonalizável, a apresentação depende apenas de seus autovalores. No caso em que os autovalores são reais e a parte linear não é diagonalizável a apresentação é determinada pela relação de seus coeficientes dos termos quadráticos. Contudo, podemos resumir o resultado mais interessante em um teorema que foi demonstrado ao longo desse capítulo.

**Teorema 1.3** *Seja  $F$  uma aplicação quadrática do plano tal que  $F(0,0) = (0,0)$ . Se  $F$  preserva área e orientação, então  $F$  possui uma inversa que também é quadrática preservando área e orientação.*

Na verdade, temos o caso mais geral

**Teorema 1.4** *Se  $F$  é uma aplicação quadrática do plano que preserva área e orientação, então  $F$  é invertível. Além disso, sua inversa também é quadrática e preserva área.*

Para demonstrar o teorema acima precisaremos do

**Lema 1.5** *Seja  $f : V \rightarrow W$  uma aplicação entre os espaços vetoriais  $V$  e  $W$ . Se  $f(x)$  possui uma inversa, então  $f(x) + c$ ,  $c$  uma constante, é inversível.*

**Demonstração:** Seja  $g(y)$  a aplicação inversa de  $f(x)$ . Definindo as funções  $F(x) = f(x) + c$  e  $G(y) = g(y - c)$ , em que  $c$  é uma constante qualquer. Temos que

$$F(G(y)) = F(g(y - c)) = f(g(y - c)) + c = y + c - c = y$$

e

$$G(F(x)) = G(f(x) + c) = g(f(x) + c - c) = g(f(x)) = x,$$

ou seja,  $f(x) + c$  é inversível e sua inversa é a aplicação  $g(y - c)$ . □

**Demonstração do Teorema 1.4:** Seja  $F$  uma função quadrática do plano que preserva área e orientação. Então ela é da forma

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + a_{00} \\ b_{10}x + b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + b_{00} \end{pmatrix}.$$

Temos que  $F$  é igual a uma função quadrática com ponto fixo  $(0,0)$  mais um vetor independente constante, ou seja,

$$F(x, y) = G(x, y) + (a_{00}, b_{00}), \text{ em que } G \text{ é quadrática e } G(0, 0) = (0, 0)$$

Como  $F$  preserva área e orientação, temos que  $G$  também preserva área e orientação, pois  $dF(x, y) = dG(x, y)$ .

Pelo que vimos ao longo do capítulo,  $G$  se enquadra em um dos nossos casos, logo  $G$  é invertível e sua inversa é quadrática e preserva área. Pelo lema 1.5 temos que  $F$  é invertível e sua inversa é dada por

$$F^{-1}(x, y) = G^{-1}(x - a_{00}, y - b_{00}).$$

Como  $G^{-1}(x, y)$  é quadrática e preserva área e orientação, temos que  $G^{-1}(x - a_{00}, y - b_{00})$  também é quadrática preservando área e orientação.  $\square$

## Capítulo 2

# Dinâmica local: existência e classificação de Pontos Fixos

Iniciaremos o estudo propriamente dito da dinâmica associada às aplicações quadráticas do plano preservando a área. Neste capítulo, estudaremos os pontos fixos e suas características. Veremos que nossas aplicações EQ2 e HQ2 possuem pontos fixos e que os pontos fixos diferentes de  $(0, 0)$  também podem ser determinados pelo parâmetro de cada família. Comearemos com algumas definições necessárias para nosso estudo.

Um sistema dinâmico em tempo discreto consiste em um conjunto não vazio  $\mathcal{X}$  e uma aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , a  $n$ -ésima iterada de  $\mathcal{F}$  é a composição  $\mathcal{F}^n = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \dots \circ \mathcal{F}$ ,  $n$  vezes. Definimos  $\mathcal{F}^0$  como a aplicação identidade, denotada por  $Id$ . Se  $\mathcal{F}$  for inversível, então  $\mathcal{F}^{-n} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ \dots \circ \mathcal{F}^{-1}$ ,  $n$  vezes.

**Definição 2.1** Se  $\mathbf{p} \in \mathcal{X}$ , definimos a semi-órbita positiva como  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^+(\mathbf{p}) = \cup_{t \geq 0} \mathcal{F}^t(\mathbf{p})$ . Caso  $\mathcal{F}$  seja inversível, definimos a semi-órbita negativa como  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^-(\mathbf{p}) = \cup_{t \leq 0} \mathcal{F}^t(\mathbf{p})$ . A órbita de  $\mathbf{p}$  é definida como  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^+(\mathbf{p}) \cup \mathcal{O}_{\mathcal{F}}^-(\mathbf{p})$ .

**Definição 2.2** Um ponto  $\mathbf{p} \in \mathcal{X}$  é dito periódico de período  $n > 0$ , se  $\mathcal{F}^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ .

A órbita de um ponto periódico é chamada de órbita periódica. Se  $\mathcal{F}^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$  para todo  $n$ , então dizemos que  $\mathbf{p}$  é um ponto fixo. Se  $\mathbf{p}$  não for um ponto fixo, mas periódico, então o menor  $n$  positivo tal que  $\mathcal{F}^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$  é chamado período mínimo de  $\mathbf{p}$ .

Vamos caracterizar um ponto periódico  $\mathcal{F}^n(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$  de acordo com os autovalores de sua derivada no ponto,  $d\mathcal{F}_{\mathbf{p}}^n$ .

**Definição 2.3** Seja  $\mathcal{F}$  uma aplicação diferenciável,  $\mathbf{p}$  um ponto periódico de período  $n$  e  $\lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , os os autovalores de  $d\mathcal{F}_{\mathbf{p}}^n$

- (i) Se, para todo  $i$ ,  $|\lambda_i| \neq 1$ , então dizemos que  $\mathbf{p}$  é **hiperbólico**;
- (ii) Se, para todo  $i$ ,  $\lambda_i$  for **Complexo** com parte imaginária não nula e  $|\lambda_i| = 1$ , então dizemos que  $\mathbf{p}$  é **elíptico**;
- (iii) Se, para todo  $i$ ,  $\lambda_i$  for **Real** e  $|\lambda_i| = 1$ , então dizemos que  $\mathbf{p}$  é **parabólico**.

Com a definição 2.3 e a hipótese de preservar área da aplicação quadrática  $F$ , como em (1.1), vemos que se o ponto fixo  $\mathbf{p}$  de  $F$  for

- (a) hiperbólico, então os autovalores de  $dF_{\mathbf{p}}$ ,  $\lambda$  e  $\frac{1}{\lambda}$ , são ambos **Reais** e não pertencem ao conjunto  $\{-1, 1\}$ ;
- (b) elíptico, então os autovalores de  $dF_{\mathbf{p}}$  são  $\lambda = \cos \alpha + i \sin \alpha$  e  $\bar{\lambda}$  com  $\alpha \bmod \pi \neq 0$ ;
- (c) parabólico, então os autovalores de  $dF_{\mathbf{p}}$  são  $\lambda_{1,2} = 1$  ou  $\lambda_{1,2} = -1$ .

Como  $F(0, 0) = (0, 0)$ , de acordo com a definição de ponto periódico,  $(0, 0)$  possui período um, ou seja, ponto fixo da aplicação quadrática  $F$ .

Podemos ainda perguntar se  $F$  possui outros pontos periódicos. Contudo, o interesse principal desse trabalho consiste em estudar apenas a dinâmica em torno dos pontos fixos e as relações entre eles. Seguindo essa idéia, investigaremos nas próximas seções a existência de outros pontos fixos e suas propriedades. Veremos que, utilizando as formas normais, classificaremos os pontos fixos e inferiremos sobre sua estabilidade.

## 2.1 Existência de Pontos Fixos em EQ2

Seja  $F$  uma aplicação quadrática que preserva área tal que  $F(0, 0) = (0, 0)$  e que a parte linear de  $F$  possua autovalores complexos. Como mostramos no capítulo anterior, a forma normal de  $F$  é dada por

$$EQ2(x, y) = R_{\alpha} \circ Q(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - x^2 \end{pmatrix}.$$

vemos que  $dEQ2_{(0,0)}$  possui autovalores  $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$ ,  $\alpha \bmod \pi \neq 0$  e pela definição 2.3,  $(0, 0)$  é um ponto fixo elíptico.

**Proposição 2.4** *A aplicação  $EQ2(x, y)$  possui outro ponto fixo  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (0, 0)$ . Além disso,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é hiperbólico.*

**Demonstração:** Resolvendo  $R_\alpha \circ Q(x, y) = (x, y)$ , temos

$$Q(x, y) = R_{-\alpha}(x, y)$$

e o sistema

$$\left( \begin{array}{c} x \\ y - x^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{array} \right)$$

tem como solução  $\{x = 0, y = 0\}$  ou  $\left\{ x = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha}, y = \frac{2(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha} \right\}$ .

Chamaremos  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  o ponto fixo diferente de  $(0, 0)$ . Calculando  $dEQ2_{(\tilde{x}, \tilde{y})}$  encontramos

$$dEQ2_{(\tilde{x}, \tilde{y})} = R_\alpha Q'(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left( \begin{array}{cc} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2\tilde{x} & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \cos \alpha + \frac{4 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} & -\sin \alpha \\ \sin \alpha - \frac{4 \cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} & \cos \alpha \end{array} \right).$$

Como o traço de  $dEQ2_{(\tilde{x}, \tilde{y})}$  é igual a  $4 - 2 \cos \alpha$ ,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é hiperbólico. Mais precisamente os autovalores são dados por  $\lambda_{1,2} = 2 - \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 3}$  com  $\lambda_1 \in (1, 3 + 2\sqrt{2})$ .  $\square$

## 2.2 Existência de Pontos Fixos em HQ2

Seja  $F$  uma aplicação quadrática que preserva área e orientação tal que  $F(0, 0) = (0, 0)$ . Nos casos que  $F$  possua parte linear com autovalores reais e não possui forma normal HQ2, a aplicação  $F$  possui apenas  $(0, 0)$  como ponto fixo. Logo,  $(0, 0)$  é ponto fixo hiperbólico se os autovalores forem distintos. Caso contrário,  $(0, 0)$  é parabólico.

Tomaremos os casos em que  $F$  pode ser escrita no Forma Normal HQ2

$$HQ2(x, y) = \left( \begin{array}{c} \lambda(x - x^2 + 2xy - y^2) \\ \frac{1}{\lambda}(y - x^2 + 2xy - y^2) \end{array} \right)$$

Temos que  $dHQ2_{(0,0)}$  possui autovalores  $\lambda$  e  $\frac{1}{\lambda}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ , então  $(0, 0)$  é um ponto fixo hiperbólico pela definição 2.3.

**Proposição 2.5** *Se  $(0, 0)$  é ponto fixo hiperbólico da aplicação  $HQ2(x, y)$ , então  $HQ2(x, y)$  possui outro ponto fixo  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  diferente de  $(0, 0)$ .*

**Demonstração:** Vamos resolver  $HQ2(x, y) = (x, y)$ . Dessa forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^2 + 2xy - y^2 \\ y - x^2 + 2xy - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e encontramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (x - y)^2 = x \frac{\lambda - 1}{\lambda} \\ (x - y)^2 = y(1 - \lambda) \end{cases}$$

que, ao resolvê-lo, encontramos  $\{x = 0, y = 0\}$  ou  $\left\{x = \frac{\lambda^2 - \lambda}{(\lambda + 1)^2}, y = \frac{1 - \lambda}{(\lambda + 1)^2}\right\}$ .  $\square$

Chamaremos o ponto fixo diferente de  $(0, 0)$  de  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Iremos determinar se  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é elíptico, hiperbólico ou parabólico através do parâmetro  $\lambda$ . Calculando  $dHQ2_{(\tilde{x}, \tilde{y})}$ , temos

$$dHQ2_{(\tilde{x}, \tilde{y})} = \begin{pmatrix} \lambda - 2\lambda(\tilde{x} - \tilde{y}) & 2\lambda(\tilde{x} - \tilde{y}) \\ \frac{-2(\tilde{x} - \tilde{y})}{\lambda} & \frac{1 + 2(\tilde{x} - \tilde{y})}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(3 - \lambda)}{\lambda + 1} & \frac{2\lambda(\lambda - 1)}{\lambda + 1} \\ \frac{2(1 - \lambda)}{\lambda(\lambda + 1)} & \frac{\lambda + 1}{\lambda(\lambda + 1)} \end{pmatrix}$$

E seus autovalores são as raízes do polinômio

$$p(k) = k^2 + \frac{\lambda^2 - 4\lambda + 1}{\lambda}k + 1$$

que são  $k_{1,2} = -\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 1}{2\lambda} \pm \frac{\sqrt{(\lambda - 1)^2(\lambda - 3 + 2\sqrt{2})(\lambda - 3 - 2\sqrt{2})}}{2\lambda}$ . Assim, para  $\lambda \neq \pm 1$  e

- se  $\lambda < 3 - 2\sqrt{2}$  ou  $\lambda > 3 + 2\sqrt{2}$ , então  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é hiperbólico;
- se  $3 - 2\sqrt{2} < \lambda < 3 + 2\sqrt{2}$ , então  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é elíptico;
- se  $\lambda = 3 \pm 2\sqrt{2}$ , então  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é parabólico.

Se  $\lambda = 1$ , todos os pontos da forma  $(\bar{x}, \bar{x})$  serão pontos fixos parabólicos de  $HQ2$ . Para o caso que  $\lambda = -1$ ,  $(0, 0)$  é o único ponto fixo de  $HQ2$ . Logo,  $(0, 0)$  é parabólico.

Chamamos de ponto fixo **hiperbólico reverso** os casos em que o autovalor  $\lambda$ , além de ter  $|\lambda| \neq 1$ , ser negativo, ou seja,  $\lambda < 0$  e  $\lambda \neq -1$ .

**Proposição 2.6** *Sejam  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  pontos fixos distintos de uma aplicação  $F$ , quadrática e conservativa do plano. Se  $\mathbf{q}$  é hiperbólico reverso, então  $\mathbf{p}$  é hiperbólico não reverso.*

**Demonstração:** Segue do fato que o traço de  $dF$  ser igual ao traço de  $dHQ2$  e que

$$\text{tr}(dHQ2(\mathbf{p})) = -\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 1}{\lambda}$$

como  $\mathbf{q}$  é hiperbólico reverso temos que  $\lambda < 0$ , logo  $\text{tr}(dHQ2(\mathbf{p})) > 0$  que é a soma dos autovalores de  $dF$ .  $\square$

Pela proposição acima temos que se  $F$  possui dois pontos fixos hiperbólicos, então, necessariamente, teremos que ter um hiperbólico reverso e o outro não reverso.

## 2.3 Conclusão

Uma aplicação  $F$  que é quadrática, do plano no plano, tal que  $(0, 0)$  seja ponto fixo, podem ter outros pontos fixos além de  $(0, 0)$ . Se ela possuir forma normal EQ2 ou HQ2 garantimos tal existência. Podemos também determinar sua característica através do parâmetro de sua família. O teorema abaixo enuncia condições necessárias e suficientes para termos um ponto fixo elíptico e um ponto fixo hiperbólico.

**Teorema 2.7** *Sejam  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  pontos fixos distintos de uma aplicação quadrática do plano que preserva área tal que  $\lambda$  é autovalor de  $\mathbf{p}$ . Então  $\mathbf{q}$  é elíptico se, e somente se  $\mathbf{p}$  é hiperbólico e  $\lambda \in (1, 3 + 2\sqrt{2})$ .*

**Demonstração:** Pelo que vimos na seção 2.2 temos que

Se  $\mathbf{p}$  é hiperbólico e  $\lambda \in (1, 3 + 2\sqrt{2}) \subset (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ , então  $\mathbf{q}$  é elíptico

e pela proposição 2.4 temos que

Se  $\mathbf{q}$  elíptico, então  $\mathbf{p}$  é hiperbólico e  $\lambda \in (1, 3 + 2\sqrt{2})$ .

$\square$

Dessa forma, se uma aplicação  $F$  está na forma  $S$  (1.17), determinada pela proposição 1.2, temos que  $(0, 0)$  é um ponto fixo hiperbólico. Temos, também, que  $(1, 0)$  é o outro ponto fixo de  $S$ . Pelo teorema 2.7 e pela relação entre os parâmetros  $\lambda$  e  $\epsilon$ , para termos  $(1, 0)$  elíptico é necessário e suficiente termos  $\epsilon \in (0, 4)$ .

# Capítulo 3

## Dinâmica em Torno do Ponto Fixo Elíptico

Para exprimirmos um eventual critério sobre o comportamento dinâmico em torno de um ponto fixo elíptico  $\mathbf{p}$ , de uma aplicação  $\mathcal{F}$  que preserva área, teremos que considerar os termos não lineares dessa aplicação, ou seja, deveremos considerar as derivadas de ordem superior. Neste capítulo apresentaremos condições que, com as quais, nos permitirá compreendermos o comportamento dinâmico em torno do ponto fixo elíptico de *EQ2*.

Veremos o conceito de estabilidade em torno de um ponto fixo e que a estabilidade pode ser conseguida pela existência de curvas invariantes por  $\mathcal{F}$  em torno do mesmo. O Teorema do Twist de Moser pode garantir a existência de tais curvas invariantes. A fim de aplicarmos o teorema do Twist de Moser, apresentaremos uma conjugação, introduzida por Birkhoff, em que, nesse sistemas de coordenadas, a aplicação  $\mathcal{F}$  satisfaz as hipóteses.

### 3.1 A Forma Normal de Birkhoff da Aplicação *EQ2*

Iniciaremos o seção apresentando o teorema da forma normal de Birkhoff para realizarmos a conjugação, proposta pelo teorema, em nossa aplicação *EQ2*. A forma apresentada do teorema abaixo, bem como maiores detalhes, encontra-se em [6].

**Teorema 3.1 (Forma Normal de Birkhoff)** *Seja  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação que preserva área,  $C^k$ , com um ponto fixo elíptico na origem. Escreveremos  $\mu = \cos \theta + i \sin \theta$  o autovalor na forma complexa. Se existe algum inteiro  $q$  com*

$$4 \leq q \leq n + 1$$

e que

$$\mu^l \neq 1 \text{ para } l = 1, 2, \dots, q,$$

então existe um sistema de coordenadas complexo de tal forma que  $\mathcal{F}$  se escreve como

$$z \mapsto \mathcal{F}(z, \bar{z}) = \mu z e^{ia(z\bar{z})} + g(z, \bar{z}),$$

em que

$$a(z\bar{z}) = a_1|z|^2 + \dots + a_s|z|^{2s}, s = \left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil - 1,$$

( $\lceil \cdot \rceil$  representa o menor inteiro maior ou igual) é um polinômio real em  $|z|^2$  e  $g$  se anula, assim como suas derivadas de ordem maior que  $q - 1$ , em  $z = \bar{z} = 0$ .

O primeiro coeficiente de Birkhoff,  $a_1$ , pode ser calculado através da equação

$$a_1 = \Im(c_{2,1}) + \frac{\text{sen } \theta}{2 \cos \theta - 1} \left( 3|c_{2,0}|^2 + \frac{(2 \cos \theta - 1)|c_{0,2}|^2}{2 \cos \theta + 1} \right), \quad (3.1)$$

em que  $\Im(z)$  é a parte imaginária do número complexo  $z$  e  $c_{i,j}$  é o coeficiente do termo  $z^i \bar{z}^j$  da primeira função coordenada na complexificação de  $\mathcal{F}$ . Os cálculos dessa equação encontram-se em [3].

Faremos agora a complexificação de  $EQ2$ , como em (1.11), caso em que  $(0, 0)$  é um ponto fixo elíptico, ou seja, introduziremos uma mudança em coordenadas complexas  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ . Teremos como finalidade calcular o primeiro coeficiente de Birkhoff e aplicar o *Teorema da Forma Normal de Birkhoff*.

Explicitando  $x$  e  $y$  em função de  $z$  e  $\bar{z}$ , temos

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Dessa forma, após algumas simplificações, encontramos

$$EQ2(z) = e^{i\alpha} \left( z - \frac{iz^2}{4} - \frac{iz\bar{z}}{2} - \frac{i\bar{z}^2}{4} \right).$$

Calculando o primeiro coeficiente de Birkhoff através da equação (3.1) temos

$$a_1 = \frac{1}{8} \frac{\text{sen } \alpha (4 \cos \alpha + 1)}{(\cos \alpha - 1)(2 \cos \alpha + 1)}. \quad (3.2)$$

Finalmente, se  $\alpha \notin \left\{ k\frac{\pi}{2}, l\frac{2\pi}{3}; k, l \text{ inteiros} \right\}$ , poderemos escrever  $EQ2$  como proposto no Teorema de Birkhoff

$$z \mapsto z e^{i(\alpha + a_1|z|^2)} + \mathcal{O}(|z|^4). \quad (3.3)$$

Veremos, a seguir, que o Teorema do Twist de Moser garantirá a existência de curvas invariantes em torno do ponto fixo elíptico nos casos em que  $a_1$  está definida e seja não identicamente nula. Como podemos perceber pela equação (3.2),  $a_1$  só se anula nos valores em que  $\alpha$  satisfaz  $\cos \alpha = -1/4$  e está definida se  $\cos \alpha \neq -1/2$  (já que por hipótese  $\alpha \neq k\pi$ , para algum  $k$  inteiro). Enunciaremos na próxima seção o teorema do Twist de Moser com a finalidade de determinarmos a estabilidade do ponto fixo elíptico de  $EQ2$ .

## 3.2 A Estabilidade do Ponto Fixo Elíptico de $EQ2$

Começaremos esta seção com a definição de estabilidade. Nosso objetivo é provar a estabilidade do ponto fixo elíptico para condições genéricas no parâmetro  $\alpha$  de  $EQ2$  aplicando o Teorema do Twist de Moser. Maiores detalhes podem ser encontrados em [6].

**Definição 3.2** Dizemos que um ponto fixo  $(x_0, y_0)$  de  $F$  é estável se, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que,  $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$  temos  $|F^n(x, y) - (x_0, y_0)| < \varepsilon$  para todo  $n \geq 0$ .

**Definição 3.3** Considere o anel  $a \leq r \leq b$ , em que  $0 < a < b$ , e a aplicação que preserva área dada por

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta + \gamma(r) \end{pmatrix}.$$

A aplicação acima é chamada de aplicação twist, pois esta deixa cada círculo de raio contante invariante e suas órbitas são rotações desses círculos. Faremos a restrição  $\frac{d\gamma}{dr} \neq 0$  no anel a fim de que o ângulo de rotação não seja constante e dependa do raio.

**Teorema 3.4 (Twist de Moser)** Considere a seguinte perturbação de uma aplicação twist que preserva área em coordenadas polares

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta + \gamma(r) \end{pmatrix} + \varepsilon g(\varepsilon, r, \theta) \quad (3.4)$$

definida no anel  $a \leq r \leq b$  tal que  $\frac{d\gamma}{dr} \neq 0$ , com  $g \in C^2$  e  $|\varepsilon|$  suficiente pequeno. Então dado um número  $\omega$ ,  $\gamma(a) \leq \omega \leq \gamma(b)$  e  $\omega \neq 2\pi\rho$ ,  $\rho$  racional, satisfazendo

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq c|q|^{-5/2}$$

para todo  $p, q$ , inteiros, existe uma curva fechada diferenciável

$$\begin{aligned} r(\tau) &= G_1(\varepsilon, \tau) \\ \theta(\tau) &= \tau + G_2(\varepsilon, \tau) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$G_1$  e  $G_2$  periódicas, de período  $2\pi$  em  $\tau$ , que é invariante em relação à aplicação (3.4). As órbitas positivas da curva (3.5) são dadas pela rotação  $\tau \mapsto \tau + \omega$ .

Escrevendo a aplicação (3.3) em coordenadas polares  $z = re^{i\theta}$  temos

$$z(r, \theta) = re^{i\theta} \mapsto re^{i\theta} e^{i(\alpha + a_1 r^2)} + \mathcal{O}(|r|^4) = (r, \theta + \alpha + a_1 r^2) + \mathcal{O}(|r|^4)$$

e vemos que está na forma (3.4).

Para os casos que

$$\alpha \notin \Xi = \left\{ k\frac{\pi}{2}, l\frac{2\pi}{3}, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2m\pi, \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi; k, l, m \text{ e } n \text{ inteiros} \right\}$$

temos, pelo Teorema do Twist de Moser, a existência de curvas invariantes em torno do ponto fixo elíptico  $(0, 0)$  da aplicação  $EQ2$ .

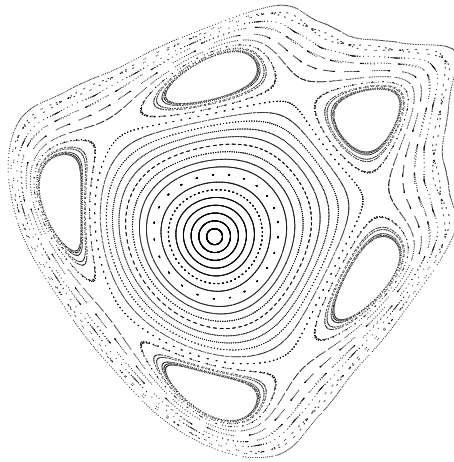


Figura 3.1: Curvas em torno de ponto fixo elíptico:  $\alpha \approx 0.41\pi$  ( $\epsilon = 1.5$ )

Mostraremos que a estabilidade em torno do ponto fixo elíptico é uma consequência da existência de curvas invariantes em torno do mesmo.

**Teorema 3.5** *Seja  $F$  uma aplicação quadrática do plano que preserva área e orientação. Se  $\mathbf{p}$  é um ponto fixo elíptico de  $F$  e o parâmetro  $\alpha \notin \Xi$ , então existe um compacto invariante por  $F$  em torno de  $\mathbf{p}$ .*

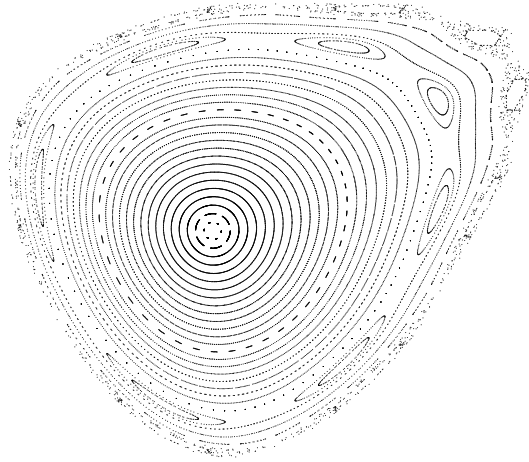


Figura 3.2: Pontos fixo elíptico com ressonância:  $\alpha = \pi/3$  ( $\epsilon = 1.0$ )

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{p}$  ponto fixo elíptico de  $F$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $(0, 0)$  é o ponto fixo elíptico. Dessa forma, como visto acima, temos a existência de curvas fechadas invariantes em torno de  $(0, 0)$ . Seja  $\gamma(s)$  uma das curvas fechadas invariantes em torno de  $(0, 0)$  e  $\Gamma$  a região compacta que ela determina, logo  $\mathbf{p} \in \Gamma$ .  $\Gamma$  possui medida positiva, pois  $\gamma$  está contida num anel. Como  $F$  é um difeomorfismo, temos que  $F(\Gamma)$  é um compacto tal que  $\gamma = F(\gamma) \subset F(\Gamma)$ . Vamos provar que  $F(\Gamma) = \Gamma$ .

Seja  $X \in \text{int}\Gamma$  que é conexo por caminhos. Suponha que  $F(X) \notin \Gamma$ . Para toda curva  $\ell(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , tal que  $\ell(0) = (0, 0)$  e  $\ell(1) = X$ ,  $F(\ell)$  intercepta  $\gamma$  em pelo menos um ponto. Logo, toda curva  $l$  também deveria interceptar  $\gamma$ , o que é um absurdo. Como  $\Gamma \subset F(\Gamma)$ ,  $F(\gamma) = \gamma$  e  $F$  é um difeomorfismo que conserva área, temos  $F(\Gamma) = \Gamma$ .  $\square$

Pelo teorema (3.5), acima, e pela definição 3.2 de estabilidade de um ponto fixo, temos que, se  $\alpha \notin \Xi$ , então o ponto fixo elíptico de  $EQ2$  é estável.

# Capítulo 4

## Dinâmica com Ponto Fixo Hiperbólico

### 4.1 Preliminares: Dinâmica Hiperbólica

O teorema de Hartman e Grobman afirma que o comportamento dinâmico de  $\mathcal{F}$  em torno de um ponto fixo hiperbólico  $\mathbf{p}$  é localmente conjugado à parte linear  $d\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ . Para a compreensão do comportamento dinâmico global de um difeomorfismo  $\mathcal{F}$ , estudaremos como se comportam as variedades Estável e Instável, que apresentaremos no teorema 4.2, associadas à um ponto fixo hiperbólico.

**Teorema 4.1 (Hartman-Grobman [11])** *Seja  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^k$ , e  $\mathbf{p}$  um ponto fixo hiperbólico. Então existem vizinhanças  $V(\mathbf{p})$  e  $U(0)$  no espaço tangente e um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que*

$$h \circ d\mathcal{F}_{\mathbf{p}} = \mathcal{F} \circ h.$$

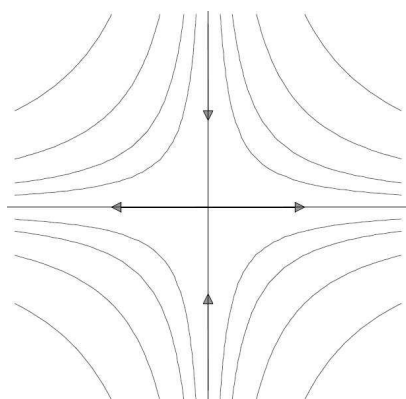


Figura 4.1: Dinâmica local de  $F$  em torno de  $(0, 0)$  dada pela  $dF_{0,0}$

Agora, seja  $F$  da forma (1.1) e  $(0, 0)$  hiperbólico. Pelo teorema de Hartman-Grobman temos que a dinâmica em torno do ponto fixo  $(0, 0)$  pode ser estudada pela derivada  $dF_{(0,0)}$ , pois  $F$  é

localmente conjugada em torno de  $(0, 0)$  a

$$dF_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Na figura 4.1 esquematizamos este comportamento.

**Teorema 4.2 (Teorema da Variedade Estável [13])**

Seja  $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^k$  com  $1 \leq k \leq \infty$  e  $\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ . Além disso,  $\mathbb{R}^n$  decompõe-se em autoespaços de  $D\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ , que correspondem aos autovalores de  $D\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$  maiores que um, igual a um e menores que um. Existe um vizinhança de  $\mathbf{p}$ ,  $V \subset U$ , tal que  $W^s(\mathbf{p}, V, \mathcal{F})$  e  $W^u(\mathbf{p}, V, \mathcal{F})$  são variedades  $C^k$ , tangentes aos espaços  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente, e são caracterizadas pelo raio de convergência exponencial das órbitas de  $\mathbf{p}$  como se segue: Assumindo que  $0 < \mu < 1 < \lambda$  e as normas em  $E^s$  e  $E^u$  são escolhidas de tal forma que  $\|D\mathcal{F}_{\mathbf{p}}|_{E^s}\| < \mu$  e  $m(D\mathcal{F}_{\mathbf{p}}|_{E^u}) > \lambda$ . Então

$$\begin{aligned} W^s(\mathbf{p}, V, \mathcal{F}) &= \{ \mathbf{q} \in V : d(\mathcal{F}^j(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \leq \mu^j d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \forall j \geq 0 \} \\ W^u(\mathbf{p}, V, \mathcal{F}) &= \{ \mathbf{q} \in V : d(\mathcal{F}^{-j}(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \leq \lambda^{-j} d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \forall j \geq 0 \} \end{aligned}$$

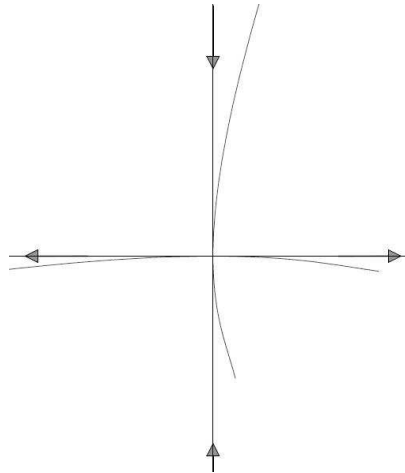


Figura 4.2: Os espaços:  $E^s$  e  $E^u$ ; e as variedades:  $W^s$  e  $W^u$ .

Como estamos interessados em aplicações do plano no plano, veremos abaixo uma versão do Teorema 4.2 para o caso em que  $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

**Teorema 4.3** *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C^k$  com  $1 \leq k \leq \infty$ ,  $F$  preserva área e  $\mathbf{p}$  é um ponto fixo hiperbólico. Existe uma decomposição em autoespaços de  $dF_{\mathbf{p}}$ , tal que,  $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ , correspondendo aos autovalores  $\lambda^{-1}$  e  $\lambda > 1$  de  $dF_{\mathbf{p}}$ , respectivamente. Existe um vizinhança de  $\mathbf{p}$ ,  $V \subset U$ , tal que  $W^s(\mathbf{p}, V, F)$  e  $W^u(\mathbf{p}, V, F)$  são variedades  $C^k$ , tangentes aos subespaços  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente, e são caracterizadas pelo raio de convergência exponencial das órbitas*

de  $\mathbf{p}$  como se segue: As normas em  $E^s$  e  $E^u$  são escolhidas de tal forma que  $\|dF_{\mathbf{p}}|E^s\| < \lambda^{-1}$  e  $m(dF_{\mathbf{p}}|E^u) > \lambda$ . Então

$$\begin{aligned} W^s(\mathbf{p}, V, F) &= \left\{ \mathbf{q} \in V : d(F^j(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \leq (\lambda^{-1})^j d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \forall j \geq 0 \right\} \\ W^u(\mathbf{p}, V, F) &= \left\{ \mathbf{q} \in V : d(F^{-j}(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \leq \lambda^{-j} d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \forall j \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

Os teoremas 4.2 e 4.3 garantem a existência de variedades invariantes diferenciáveis, porém explicitá-las globalmente é um trabalho extremamente complicado dependendo da aplicação  $\mathcal{F}$ . No entanto, tentaremos neste trabalho dar uma descrição qualitativa global da dinâmica por aplicações quadráticas conservativas do plano.

## 4.2 Existência de Pontos Homoclínicos

Vimos na sessão 2.3 que quando  $(0, 0)$  é ponto fixo hiperbólico da aplicação  $F$ , em que  $F$  está definida como em (1.1), podemos colocá-la, salvo alguns casos, na forma HQ2. Pelo Teorema 4.3 temos a existência dessas variedades  $W^s$  e  $W^u$  em torno de  $(0, 0)$ . Veremos nesta seção a existência de interseções das variedades e suas consequências na dinâmica.

**Definição 4.4** *Seja  $\mathbf{p}$  um ponto hiperbólico de um difeomorfismo  $\mathcal{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Um ponto  $\mathbf{q} \in U$  é chamado **homoclínico** de  $\mathbf{p}$ , se  $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$  e  $\mathbf{q} \in W^s(\mathbf{p}) \cap W^u(\mathbf{p})$ . Se a interseção for transversa, ou seja, se os espaços tangentes interceptarem-se transversalmente no ponto  $\mathbf{q}$ , dizemos que ele é um ponto **homoclínico transverso** [2].*

Na proposição abaixo, veremos que a órbita de um ponto homoclínico  $\mathbf{q}$  é um conjunto infinito.

**Proposição 4.5** *Seja  $\mathbf{p}$  um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo  $\mathcal{F}$ . Se as variedades interceptarem-se em um ponto  $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$  ( $\mathbf{q} \in W^s(\mathbf{p}) \cap W^u(\mathbf{p})$ ), então  $W^s(\mathbf{p}) \cap W^u(\mathbf{p})$  é um conjunto infinito.*

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{q} \in W^s(\mathbf{p}) \cap W^u(\mathbf{p})$  e  $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ . Então  $\mathcal{F}(\mathbf{q}) \in W^s(\mathbf{p}) \cap W^u(\mathbf{p})$ , pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(\mathcal{F}(\mathbf{q})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(\mathbf{q}) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-n}(\mathcal{F}(\mathbf{q})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-n}(\mathbf{q}).$$

Dessa forma temos que  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathbf{q}) \subset W^s(\mathbf{p}) \cap W^u(\mathbf{p})$ .

Agora, como  $W^s$  (respect.  $W^u$ ) não possui pontos periódicos de  $\mathcal{F}$  além de  $\mathbf{p}$ , pois do contrário  $(\mathcal{F}^n(\mathbf{q})) \neq \mathbf{p}$  (respect.  $(\mathcal{F}^{-n}(\mathbf{q})) \neq \mathbf{p}$ ), temos que  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathbf{q})$  é um conjunto infinito.  $\square$

Veremos, a seguir, a existência de pontos homoclínicos para nossas aplicações quadráticas nos casos que possuírem forma normal HQ2.

**Proposição 4.6** *Seja  $F$  uma aplicação quadrática do plano que preserva área e orientação como em (1.1). Se  $F$  possui forma normal  $HQ2$  com  $\lambda > 1$ , então as variedades  $W^s$  e  $W^u$  interceptam-se em um ponto  $\mathbf{q} = (\bar{x}, 0)$ ,  $\bar{x} \neq 0$ .*

Para demonstrarmos a proposição 4.6 utilizaremos a forma  $S$  (1.17), conjugada a  $HQ2$ , da proposição 1.2. Antes de demonstrarmos a proposição 4.6, apresentaremos alguns lemas que serão utilizados na demonstração da mesma.

**Lema 4.7** *Existe uma aplicação  $R$ , chamada reversor, tal que  $R \circ S = S^{-1} \circ R$  com  $R^2 = Id$ , em que  $Id$  representa a matriz identidade.*

**Demonstração:** Seja  $R$  definida por  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Claramente temos que  $R^2 = Id$ . Agora, se  $(R \circ S)^2 = Id$  teremos provado nossa afirmação. De fato

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 1 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \epsilon x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \epsilon x^2 \end{pmatrix}$$

e

$$(R \circ S)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \epsilon x^2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \epsilon x^2 - \epsilon x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\epsilon x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \square$$

No próximo lema mostraremos que é possível levarmos  $W^s$  em  $W^u$  através da aplicação  $R$ , o que implica uma simetria no nosso problema.

**Lema 4.8** *Seja  $R$  o reversor do Lema 4.7. Então  $R(W^s) = W^u$  e  $R(W^u) = W^s$ .*

**Demonstração:** Seja  $(x, y) \in W^s$ . Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x, y) = (0, 0)$$

Além disso, pelo Lema 4.7, temos que  $R \circ S^{-n} \circ R(x, y) = S^n(x, y)$ . Como  $R$  é um homeomorfismo linear segue que ([9]) existem  $b, c > 0$  tais que

$$b|(x, y)| \leq |R(x, y)| \leq c|(x, y)|.$$

Dessa forma

$$b|S^{-n} \circ R(x, y)| \leq |R \circ S^{-n} \circ R(x, y)| = |S^n(x, y)|$$

e quando  $n \rightarrow \infty$  temos que  $|S^{-n} \circ R(x, y)| \rightarrow 0$ , ou seja,  $R(x, y) \in W^u$ .

A demonstração de que  $R(W^u) = W^s$  é análoga.  $\square$

A seguir, demonstraremos que a variedade instável  $W^u$  passa do 1º quadrante para o 4º e, portanto, cruza o eixo  $x$  em um ponto que, pela simetria dada pelo reversor e pelo fato deste deixar o eixo  $0x$  invariante, necessariamente pertence também à variedade estável  $W^s$ .

**Lema 4.9** *Seja  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$   $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ . Então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que o iterado  $S^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$  possui coordenada  $y_n < 0$ .*

**Demonstração:** Vamos provar, primeiramente, que se  $x_0 < 1$ , então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k > 1$ . Suponhamos que o fato acima não ocorra, como  $0 < x_0 < 1$  e  $y_0 > 0$ , então pela aplicação  $S$

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + y_1 > x_0 + y_0 \\y_1 &= y_0 + \epsilon x_0(1 - x_0) > y_0\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + y_2 > x_0 + y_1 + y_2 > x_0 + 2y_0 \\y_2 &= y_1 + \epsilon x_1(1 - x_1) > y_1\end{aligned}$$

Procedendo dessa forma, temos que  $x_0 + ky_0 < x_k \leq 1$  para todo  $k$ . Isto é um absurdo, pois dado uma constante  $c \in \mathbb{N}$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_0 + ky_0 > c$ . Sendo assim, temos nossa afirmação demonstrada.

Temos que se  $x_0 < 1$  e  $y_0 > 0$ , então, para algum  $k$ , o iterado  $S^k(x_0, y_0)$  ultrapassa a reta  $x = 1$ .

Para demonstrar o lema podemos, então, supor que  $x_0 > 1$ .

Suponhamos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos  $y_n \geq 0$ . Assim, pela aplicação  $S$

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + y_1 > x_0 > 1 \\y_1 &= y_0 + \epsilon x_0(1 - x_0) < y_0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + y_2 > x_1 > x_0 > 1 \\y_2 &= y_1 + \epsilon x_1(1 - x_1) < y_0 + \epsilon x_0(1 - x_0) + \epsilon x_1(1 - x_1) < y_0.\end{aligned}$$

Como

$$x_0(1 - x_0) > x_0(1 - x_1) > x_1(1 - x_1)$$

temos

$$y_2 = y_1 + \epsilon x_1(1 - x_1) < y_0 + 2\epsilon x_0(1 - x_0).$$

Procedendo dessa forma,  $y_0 + n\epsilon x_0(1 - x_0) > y_n \geq 0$ . Como  $x_0(1 - x_0) < 0$  teremos um absurdo, pois dado  $c \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n < -c$ .

Concluimos assim a demonstração do nosso lema. □

**Demonstração da Proposição 4.6:** O autoespaço instável  $E^u$  está associado ao autovetor

$$v_1 = \begin{pmatrix} \epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon} \\ 2\epsilon \end{pmatrix}, \quad \epsilon > 0.$$

Então existe  $(x_0, y_0) \in W^u$  tal que  $(x_0, y_0) \in B_\delta(0, 0)$ ,  $\delta < 1$ ,  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ . Pelo Lema 4.9 e pela continuidade de  $W^u$  temos que existe  $n > 0$  com  $S^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ ,  $x_n > 0$  e  $y_n \leq 0$ , ou seja,  $W^u$  intercepta o eixo  $0x$ . Seja  $(\bar{x}, 0)$  o ponto de interseção. Temos que  $R(\bar{x}, 0) = (\bar{x}, 0)$ . Pelo Lema 4.8 temos que  $(\bar{x}, 0) \in W^s$ .  $\square$

Infelizmente não conseguimos demonstrar que a interseção das variedades é transversa em algum ponto. Ocorrendo este fato garantiremos a existência de conjuntos hiperbólicos tipo Ferradura de Smale [11]. Contudo, nas figuras abaixo, podemos perceber transversalidade na interseção das variedades associadas ao ponto fixo  $\mathbf{p} = (0, 0)$ .

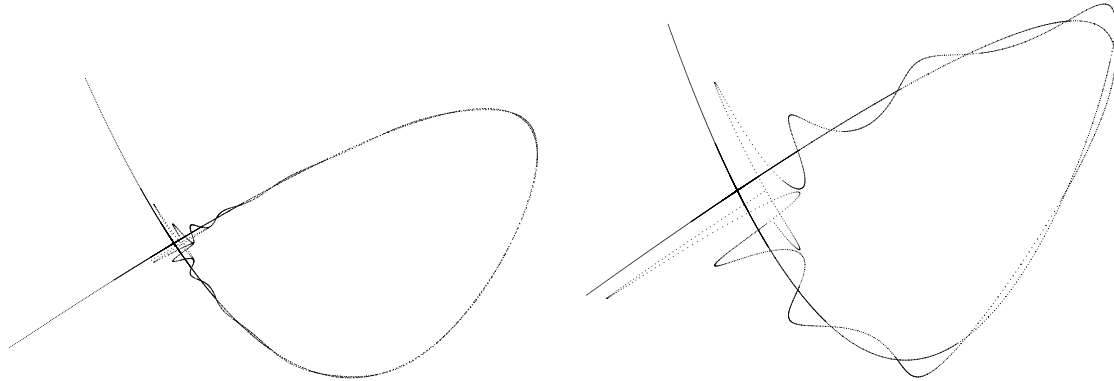


Figura 4.3: Variedades instável e estável, com interseção ( $\epsilon = 0.9$  e  $4/3$ )

### 4.3 Outros Aspectos da Dinâmica em HQ2

A existência de pontos homoclínicos (transversais) já nos diz que a dinâmica da aplicação HQ2 é bastante rica devido a existência de um conjunto tipo Ferradura de Smale. Entretanto, outras propriedades globais podem ser obtidas usando a forma normal. Nosso objetivo nesta seção é obter um subconjunto invariante que contenha a dinâmica interessante. Tal subconjunto situa-se no complementar das órbitas assintóticas ao  $\infty$ .

Vamos supor que  $F$  está na forma HQ2.

**Proposição 4.10** *Seja*

$$HQ2(x, y) = (\lambda(x - (x - y)^2), \frac{1}{\lambda}(y - (x - y)^2))$$

com  $\lambda > 1$ . Se  $x \leq 0$  e  $(x, y) \neq (0, 0)$ , então a sequência  $|HQ2^n(x, y)| \rightarrow \infty$ .

**Demonstração:** Seja  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  e  $x_0 \leq 0$ , então, como  $\lambda > 1$ , temos que

$$x_1 = \lambda(x_0 - (x_0 - y_0)^2) < \lambda x_0 < 0;$$

$$x_2 = \lambda(x_1 - (x_1 - y_1)^2) < \lambda x_1 < \lambda^2 x_0 < 0;$$

$$x_n = \lambda(x_{n-1} - (x_{n-1} - y_{n-1})^2) < \lambda x_{n-1} < \dots < \lambda^n x_0 < 0.$$

Logo,  $x_n$  é decrescente. Além disso, dado um inteiro  $c > 0$  temos que existe  $n$ , natural, tal que  $\lambda^n > c$ . Dessa forma a sequência  $\lambda^n x_0$  é ilimitada inferiormente. Portanto,  $x_n$  é ilimitada inferiormente. Como basta uma das coordenadas de  $HQ2^n(x, y)$  ser ilimitada para essa ser ilimitada, temos nossa afirmação demonstrada.  $\square$

A proposição acima mostra que todos os pontos do semi plano  $x \leq 0$ , exceto por  $(0, 0)$ , possuem infinito como limite pelos iterados da aplicação  $HQ2$ . Dessa forma, vamos nos concentrar na dinâmica contida no semi-plano  $x > 0$ . Para compreender a dinâmica contida nesse conjunto, recorreremos à aplicação

$$S(x, y) = \left( (1 + \epsilon)x + y - \epsilon x^2, \epsilon x + y - \epsilon x^2 \right), \epsilon > 0$$

conjugada à  $HQ2$ , vista na proposição 1.2. Pela conjugação entre  $HQ2$  e  $S$ , temos que o eixo  $0y$  no sistema de coordenadas de  $HQ2$  é o espaço estável  $E^s$  determinado pela direção do autovetor

$$v_2 = \left( \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}, 2\epsilon \right)$$

no sistema de coordenadas de  $S$ . Definiremos o conjunto que está no semi-plano inferior a  $E^s$  (inclusive), no sistema de coordenadas de  $S$ , por

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}), y \leq 2t\epsilon, t \in \mathbb{R}\}.$$

Como a aplicação que realiza a conjugação preserva orientação, temos que o semi-plano  $x \leq 0$  no sistema de coordenadas de  $HQ2$  é o conjunto  $\mathcal{A}$ .

Dessa forma, se  $(x, y) \in \mathcal{A} - (0, 0)$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x, y) \rightarrow \infty.$$

Podemos nos perguntar quem é a imagem inversa de  $E^s$ , ou seja,  $S^{-1}(E^s)$ .

Vamos encontrar a imagem inversa da reta  $t \cdot v_2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Aplicando  $S^{-1}(t \cdot v_2)$  encontramos

$$S^{-1}(t \cdot v_2) = \left( -t\epsilon - t\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}, 2t\epsilon - \epsilon(-t\epsilon - t\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon})(1 - (-t\epsilon - t\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon})) \right)$$

que é a parametrização de uma parábola em função do parâmetro  $t$ .

Escrevendo a parábola na forma  $y = f(x)$ , temos

$$x = -t\epsilon - t\sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon} \quad \text{e} \quad f(x) = \epsilon x^2 - x \left( \epsilon + \frac{2\epsilon}{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}} \right).$$

$S^{-1}(t \cdot v_2)$  divide o plano em dois conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y\} \\ \mathcal{C} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) > y\}\end{aligned}$$

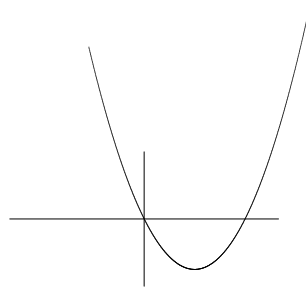


Figura 4.4: Os pontos da região  $\mathcal{B} - (0, 0)$ , tendem para  $\infty$  sob  $S$

**Proposição 4.11** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  os conjuntos definidos acima. Então  $S^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ .*

**Demonstração:** A imagem por  $S^{-1}$  de qualquer reta paralela à  $E^s$  dada por  $t \cdot v_2 - (c, c)$ ,  $c$  uma constante positiva, é a parábola  $y = f(x) - c$ , que está abaixo de  $f(x)$ .  $\square$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(B - (0, 0)) \rightarrow \infty$ .

Dessa forma, precisamos estudar a dinâmica em  $\mathcal{C}$  para entendermos toda a dinâmica envolvida em  $S$ .

**Proposição 4.12** *Existe um conjunto  $U$ , compacto, contido no semi-plano  $x \geq 0$  tal que se  $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} - U$  (complementar relativo ao semi-plano  $x \geq 0$ ), então  $S^n(x, y) \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Seja  $f(x)$  a parábola que determina os conjuntos  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Temos que  $S(0, y) = (y, y)$ , logo  $S(0, y)$  intercepta a parábola  $f(x)$  em dois pontos determinados pela equação

$$\epsilon x^2 - x \left( \epsilon + \frac{2\epsilon}{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}} \right) = x \iff x \left( \epsilon x - 1 - \epsilon - \frac{2\epsilon}{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}} \right) = 0$$

que possui raízes  $x = 0$  ou  $x = 1 + \frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}}$ .

Dessa forma temos que  $S^{-1}(f(x))$  intercepta o eixo  $0y$  nos pontos

$$(0, 0) \quad \text{e} \quad \left( 0; 1 + \frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}} \right).$$

Seja  $U = \{(x, y) \in \overline{S^{-1}(\mathcal{C})} \mid x \geq 0\}$ . O interior desse conjunto é não vazio, pois o ponto fixo  $(1, 0)$  está no interior de  $\mathcal{C}$ . Logo, existe  $B_\delta(1, 0) \subset \text{int}U$  para algum  $\delta > 0$ . Dessa forma, se  $(x, y) \in \{\mathbb{R}^2 \mid x \notin U \text{ e } x \geq 0\}$  temos que  $S(x, y) \in \mathcal{B}$ , logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x, y) \rightarrow \infty.$$

□

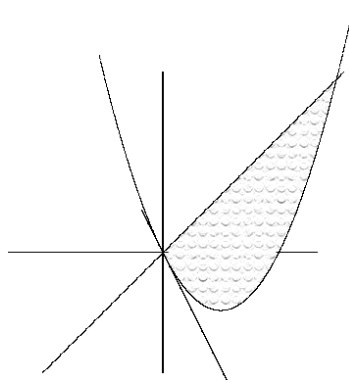


Figura 4.5: Imagem inversa do espaço estável e direta do eixo  $y$  sob  $S$ , ( $\epsilon = 4/3$ ).

A região hachurada da figura 4.5 contém todos os pontos do semiplano direito que não tendem para  $\infty$  sob  $S$ .

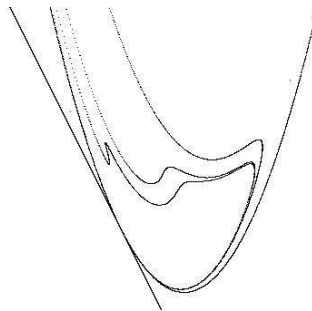


Figura 4.6: Várias iteradas inversas da parábola  $f(x)$  ( $\epsilon = 4/3$ )

Podemos interpretar a proposição acima da seguinte maneira:

*Se  $(x, y) \notin U$  e  $x \geq 0$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x, y) \rightarrow \infty$ . Além disso, se algum iterado de um dado ponto  $(x, y)$  possui coordenada  $x > 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x, y) \not\rightarrow \infty$ , então esse iterado, bem como todos os seus iterados, pertencem a  $U$ .*

Vamos analisar o conjunto limitado pela parábola  $(x, f(x))$  e o eixo  $(0, y)$ .

**Proposição 4.13** *Seja  $(x_0, y_0) \in \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x) \text{ e } x < 0\}$ .  
Se  $S^n(x_0, y_0) \in \Pi$  para todo  $n$ , então  $(x_0, y_0) \in W^s$ .*

**Demonstração:** Seja  $(x_0, y_0) \in \Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x) \text{ e } x < 0\}$ , então

$$S(x_0, y_0) = \left( x_0 + y_0 + \epsilon x_0(1 - x_0) \quad , \quad y_0 + \epsilon x_0(1 - x_0) \right) = (x_1, y_1)$$

Se  $x_1 \geq 0$ , então  $(x_1, y_1) \in U$  ou  $(x_1, y_1) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } (x, y) \notin U\}$ . Este caso foi discutido acima.

Se  $x_1 < 0$  e  $y_1 \leq f(x_1)$ , então  $(x_1, y_1) \in \mathcal{B}$ , logo  $S^n(x_0, y_0)$  tende ao infinito.

Se  $x_1 < 0$  e  $y_1 > f(x_1) > 0$ , então  $(x_1, y_1) \in \Pi$  e

$$\begin{cases} x_0 < x_0 + y_1 = x_1 < 0 \\ 0 < y_1 = y_0 + \epsilon x_0(1 - x_0) < y_0 \end{cases}$$

Seja  $S^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ , temos que  $(x_n, y_n)$  pertence a apenas um dos seguintes conjuntos

$$U, \Pi \text{ ou } (U \cup \Pi)^c,$$

pois  $U$  e  $\Pi$  são disjuntos. Como  $(U \cup \Pi)^c \subset S^{-1}(B)$ , podemos supor que  $(x_n, y_n) \in \Pi$ , para todo  $n$ , pois ainda não conhecemos o comportamento dinâmico nesse caso. Então

$$\begin{cases} x_0 < x_1 < x_1 + y_2 = x_2 < \cdots < x_n < 0 \\ y_0 > y_1 > y_1 + \epsilon x_1(1 - x_1) = y_2 > \cdots > y_n > 0 \end{cases}$$

$(x_n)$  é uma sequência crescente limitada superiormente por 0 e  $(y_n)$  é uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0. Logo, se todos os termos da sequência  $(x_n, y_n)$  pertencem a  $\Pi$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) \longrightarrow (0, 0).$$

Isto implica que  $(x_0, y_0) \in W^s$ . □

O próximo teorema nos dará informação da dinâmica de um ponto do conjunto  $U$  que possua algum itereado não pertencente a  $U$ .

**Proposição 4.14** *Seja  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $S^k(x_0, y_0) = (x_k, y_k) \in U$ . Se existe  $l > k$  tal que  $S^l(x_0, y_0) \notin U$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x_0, y_0) \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Se  $S^l(x_0, y_0) \notin U \cup \Pi$ , então  $S^n(x_0, y_0) \rightarrow \infty$ . Vamos provar que  $S^l(x_0, y_0) \notin \Pi$ . Suponha que  $(x_k, y_k) \in U$ . Pelo lema 4.9, temos que se  $x_k > 0$  e  $y_k > 0$ , então existe  $n$ , tal que  $S^n(x_k, y_k) = (x_{k+n}, y_{k+n})$ , em que  $x_{k+n} > 0$  e  $y_{k+n} < 0$ . Dessa forma, suporemos que  $S^k(x_0, y_0)$  está no quarto quadrante. Seja  $l$  tal que  $S^i(x_0, y_0) \in U$ , para  $i = k, \dots, l-1$ , e  $S^l(x_0, y_0) \notin U$ . Considere  $S^l(x_0, y_0) = (x_l, y_l)$ . Se  $y_l \geq 0$ , então  $x_l > 0$  e  $S^l(x_0, y_0) \notin \Pi$ . Agora, se  $y_l < 0$  teremos os casos em que  $|y_l| \leq x_{l-1}$  e  $|y_l| > x_{l-1}$ . No primeiro caso teremos  $x_l \geq 0$  e  $(x_l, y_l) \notin \Pi$ . No segundo caso teremos  $x_l < 0$ , mas como  $y_l < 0$ ,  $S^l(x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ .  $\square$

Dessa forma, temos que a dinâmica não trivial determinada por uma aplicação quadrática do plano, que preserva área, orientação e possua ponto fixo hiperbólico, está na variedade estável  $W^s$  ou no conjunto  $U$  da proposição 4.12. Vamos reescrever esse fato no seguinte teorema.

**Teorema 4.15** *Seja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Se  $(S^n(x, y)) \not\rightarrow \infty$ , então  $S^n(x, y) \in U$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , ou  $(x, y) \in W^s$ .*

**Demonstração:** Segue diretamente das proposições 4.12, 4.13 e 4.14.  $\square$

Pelo teorema acima, temos que se  $S$  possui pontos periódicos, então esses pontos devem pertencer à  $U$ .

Vimos na proposição 4.6 da seção anterior a existência de pontos homoclínicos associados ao ponto fixo hiperbólico  $(0, 0)$  da aplicação  $S$ , conjugada à  $HQ2$ . Encerraremos nosso capítulo com o teorema que determina o conjunto em que se encontram os pontos homoclínicos.

**Teorema 4.16** *Seja  $\mathbf{p}$  um ponto homoclínico associado ao ponto hiperbólico  $(0, 0)$  da aplicação  $S$ . Então,  $\mathcal{O}_S(\mathbf{p}) \subset U$ .*

**Demonstração:** Como  $\mathbf{p}$  é homoclínico, temos que  $\mathbf{p} \in W^s \cap W^u$ . Logo,  $(S^n(\mathbf{p})) \rightarrow (0, 0)$ . Pelo teorema 4.15, temos que  $\mathcal{O}_S(\mathbf{p}) \subset U \cup \Pi$ . Vamos provar que não existe  $q \in \mathcal{O}_S(\mathbf{p})$  tal que  $q \in \Pi$ . Seja  $q \in \mathcal{O}_S(\mathbf{p})$ , então existe  $k > 0$  tal que  $S^{-k}(q)$  pertence a  $U \cap W^u$  ou a  $\mathcal{B} \cap W^u$ , pois o espaço instável  $E^u$  está associado ao autovetor  $v_1 = (\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\epsilon}, 2\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Se  $S^{-k}(q)$  pertencesse a  $\mathcal{B}$  teríamos  $S^{-k}(q) \notin W^s$ . Logo,  $q \notin \mathcal{B} \cap W^u$ . Assim, existe  $k$  tal que  $S^{-k}(q)$  pertence a  $U$  e, pela proposição 4.14,  $q \notin \Pi$ .  $\square$

# Capítulo 5

## A imagem completa: Conclusão

Seja  $F$  uma aplicação quadrática do plano que preserva área e orientação possuindo dois pontos fixos,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Nesta primeira parte do capítulo, assumiremos  $\mathbf{p}$  hiperbólico com parâmetro  $\lambda > 1$ . Dessa forma, fazendo a conjugação que leva  $\mathbf{p}$  em  $(0, 0)$ , temos, pela proposição 1.2, que  $F$  pode ser escrita na forma

$$S(x, y) = \left( x + y + \epsilon x(1 - x) \quad , \quad y + \epsilon x(1 - x) \right), \quad \epsilon > 0, \quad (5.1)$$

de tal maneira que  $\mathbf{q}$  é levado no ponto  $(1, 0)$ . Temos, ainda,  $(1, 0)$  elíptico para  $\epsilon < 4$ , hiperbólico reverso para  $\epsilon > 4$  e parabólico para  $\epsilon = 4$ .

Observamos que, caso  $\epsilon$  seja igual a 0, a aplicação  $S$  é um cisalhamento linear (integrável) e para  $\epsilon < 0$ , o papel dos pontos fixos é invertido. De fato, fazendo a seguinte mudança de coordenadas (conjugação)

$$x \rightarrow 1 - x \qquad y \rightarrow -y$$

a qual leva  $(0, 0)$  em  $(1, 0)$  e vice-versa, encontramos

$$S(x, y) = \left( x + y - \epsilon x(1 - x) \quad , \quad y - \epsilon x(1 - x) \right), \quad \epsilon > 0.$$

que é equivalente a trocarmos  $\epsilon$  por  $-\epsilon$ . Portanto, basta considerarmos valores positivos para o parâmetro  $\epsilon$ .

Nessas circunstâncias temos, como visto no capítulo 4, a existência de pontos homoclínicos associados ao ponto  $(0, 0)$ , bem como a existência de um compacto  $U$  que contém toda a dinâmica não trivial de  $S$  (teorema 4.15). Vimos, no teorema 4.16, que os pontos homoclínicos devem estar contidos em  $U$ .

Assim, tomando  $\epsilon$  no intervalo  $(0, 4)$ , ou seja,  $\mathbf{q} = (1, 0)$  é ponto fixo elíptico, garantimos a existência de curvas invariantes em torno de  $(1, 0)$  nos casos em que o parâmetro  $\alpha$  não

pertence a  $\Xi$ , como vimos no capítulo 3. Isso é equivalente a termos  $\epsilon \in (0, 4) - \{2, \frac{5}{2}, 3\}$ . Além disso, temos, pelo teorema 3.5, a existência de um compacto  $\Gamma$ , invariante por  $S$ , em torno de  $(1, 0)$ . Logo, as curvas invariantes e o compacto  $\Gamma$  devem estar contidos em  $U$ .

Nas figuras abaixo apresentamos o espaço de fase obtido pela iteração numérica de algumas condições iniciais para dois valores distintos de  $0 < \epsilon < 4$ . Estas condições foram escolhidas para exemplificar a dinâmica dos pontos que não tendem para  $\infty$ .

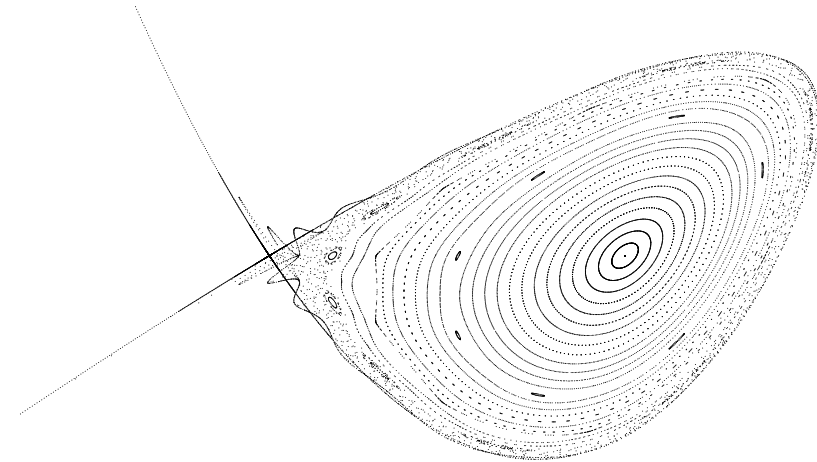


Figura 5.1: Figura representando a dinâmica de  $S$  quando  $(1, 0)$  é elíptico e  $\epsilon = 0.9$

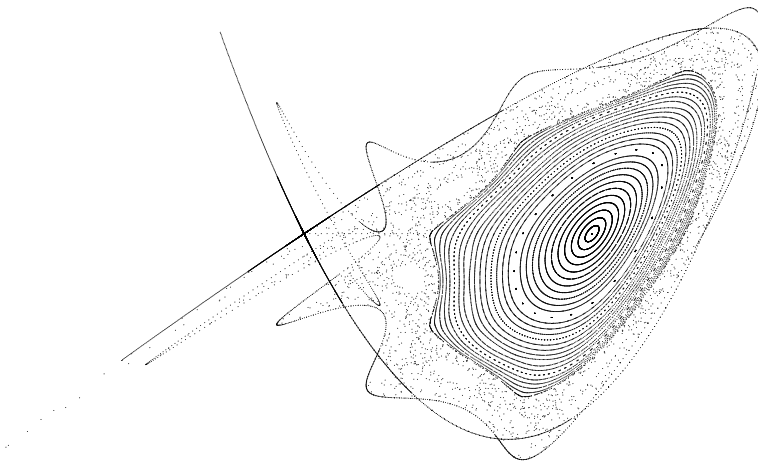


Figura 5.2: Figura representando a dinâmica de  $S$  quando  $(1, 0)$  é elíptico e  $\epsilon = 4/3$

Na figura abaixo, apresentamos o espaço de fase no caso em que os dois pontos fixos são hiperbólicos ( $\epsilon > 4$ ) para o parâmetro  $\epsilon = 4.5$ . Observamos que, para as condições iniciais escolhidas, as variedades  $W_{(1,0)}^s$  e  $W_{(1,0)}^u$  estão inteiramente contidas em  $U$ . Como nesse trabalho não priorizamos o comportamento dinâmico para o caso em que um ponto fixo fosse hiperbólico reverso, não sabemos dizer ao certo se existem pontos de  $W_{(1,0)}^j$  ( $j = u, s$ ) tais que não estejam em  $U$ . Caso haja a existência de tais pontos, poderemos ter interseção heteroclínica. Contudo, pelos aspectos dos espaços de fase observados, caso exista algum ponto de  $W_{(1,0)}^j$  ( $j = u, s$ ) não pertencente à  $U$  teríamos  $W_{(0,0)}^s \cap W_{(1,0)}^s \neq \emptyset$  ou  $W_{(0,0)}^u \cap W_{(1,0)}^u \neq \emptyset$ , que não podem ocorrer. A conclusão desse tema será deixada para um estudo futuro.

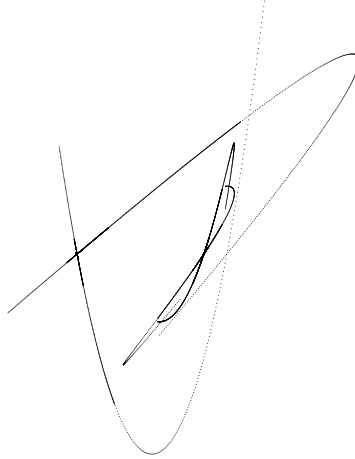


Figura 5.3: Ambos pontos fixos são hiperbólicos para  $\epsilon = 4.5$ .

Finalmente, apresentamos o espaço de fase no caso em que  $F$  está na forma  $P_1Q2$  (parte linear de  $F$  não diagonalizável com autovalores iguais a 1) para valores do parâmetro  $\beta = \arctan 1/d$  com  $d = 0.5$ . Neste caso,  $(0, 0)$  é o único ponto fixo da aplicação  $P_1Q2$ . Logo,  $(0, 0)$  é parabólico.

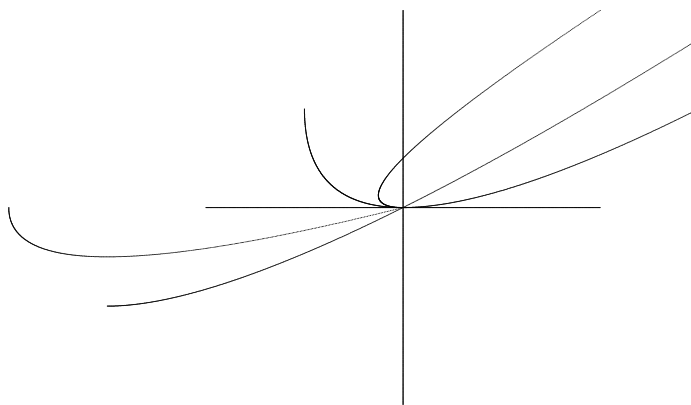


Figura 5.4: Espaço de fase da aplicação  $P_1Q2$  com  $d = 0.5$

Para o caso em que  $F$  está na forma  $P_{-1}Q2$  (parte linear de  $F$  não diagonalizável com autovalores iguais a  $-1$ ) teremos dois pontos fixos. O ponto fixo  $(0, 0)$  é parabólico e o outro

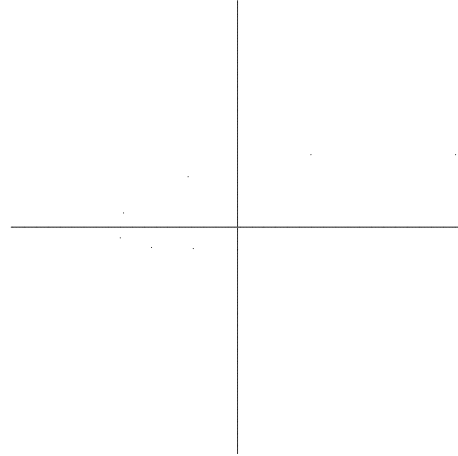


Figura 5.5: Espaço de fase da aplicação  $P_1Q_2$  com  $d = 0.5$ , degenerado.

ponto fixo  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  é hiperbólico com autovalores  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ . Nos casos que  $F$  possui dois pontos fixos, mas a parte linear de  $F$  não é diagonalizável e não possui forma  $P_{-1}Q_2$ , também teremos o ponto fixo diferente  $(0, 0)$  hiperbólico com  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$ . Nestes casos, através de uma conjugação, teremos a aplicação  $F$  escrita na forma  $S$  (5.1) com  $\epsilon = 4$ . Assim, temos a descrição da dinâmica associada à forma  $P_{-1}Q_2$  determinada pela aplicação  $S$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] D. K. Arrowsmith, C. M. Place (1990) *An introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [2] M. Brin, G. Stuck (2002) *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [3] M. J. D. Carneiro, S. Oliffson Kamphorst e S. Pinto de Carvalho. (2003) *Elliptical Islands in Stricly Convex Billiards*. Ergodic Theory Dynamical Systems. no. 3, 799-812.
- [4] P. le Calvez (1991) *Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l' anneau et du tore*. Astérisque. Vol 204.
- [5] V. L. Chernov (2005) *A stable foliation to infinity in the phase space of the Hénon map*. Journal of Mathematical Sciences. Vol. 128, N<sub>o</sub>. 2, 2005
- [6] J. Hale, H. Koçak(1991) *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.
- [7] M. Hénon (1969) *Numerical study of quadratic area-preserving mappings*. Quartely of Applied Mathematics
- [8] K. E. Lenz, H. E. Lomelí, J. D. Meiss (1998) *Quadratic volume presenving maps: an extension of a result of Moser*. Journal of Mathematical Sciences.
- [9] E. L. Lima (2002) *Análise no espaço  $R^n$* . Coleção Matemática Universitária. Associação IMPA.
- [10] S. Oliffson Kamphorst, S. Pinto de Carvalho (2005) *The First Birkhoff Coefficient and the Stability of 2-Periodic Orbits on Billiards*. Experimental Mathematics
- [11] J. Palis Jr e W. de Melo (1977) *Introdução aos sistemas dinâmicos*. IMPA, CNPq
- [12] C. G. Ragazzo, M. J. D. Carneiro, S. A. Zanata (2005) *Introdução à Dinâmica da Aplicações do Tipo Twist*. XXV Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro
- [13] C. Robinson (1995) *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press
- [14] R. J. Santos, (2002) *Álgebra Linear e Aplicações*. UFMG
- [15] C. L. Siegel, J. Moser(1971) *Curso de Mecânica Celeste*. Fundação Calouse Gulbernkian