

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas - FAFICH
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Júlio Cesar da Silva

**AS IMPLICAÇÕES DO TEOREMA FORTE DE
LÖWENHEIM-SKOLEM NA DOUTRINA DA
RELATIVIDADE ONTOLÓGICA DE QUINE**

Belo Horizonte

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas - FAFICH
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Júlio Cesar da Silva

**AS IMPLICAÇÕES DO TEOREMA FORTE DE
LÖWENHEIM-SKOLEM NA DOUTRINA DA
RELATIVIDADE ONTOLÓGICA DE QUINE**

Tese apresentada ao Departamento de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito à obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador: Mauro Luiz Engelmann

Belo Horizonte

2024

100	Silva, Júlio César da, 1977-.
S586i	As implicações do teorema forte de Löwenheim-Skolem
2024	na doutrina da relatividade ontológica de Quine [manuscrito] / Júlio César da Silva. - 2024.
	116 f.
	Orientador: Mauro Luiz Engelmann.
	Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.
	Inclui bibliografia.
	1. Filosofia – Teses. 2. Ontologia - Teses. 3. Lógica - Teses. I. Engelmann, Mauro Luiz. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

AS IMPLICAÇÕES DO TEOREMA FORTE DE LÖWENHEIM-SKOLEM NA DOCTRINA DA RELATIVIDADE ONTOLÓGICA DE QUINE

JÚLIO CÉSAR DA SILVA

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Doutor em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica, Ciência, Mente e Linguagem.

Aprovada em 06 de junho de 2024, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Mauro Luiz Engelmann - Orientador (UFMG)

Prof. Antônio Mariano Nogueira Coelho (UFMG)

Prof. Rogério Passos Severo (UFRGS)

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho (UFMG)

Prof. Guilherme Araújo Cardoso (UFOP)

Belo Horizonte, 06 de junho de 2024.



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Araújo Cardoso, Usuário Externo**, em 07/06/2024, às 14:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mauro Luiz Engelmann, Professor(a)**, em 07/06/2024, às 14:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Mariano Nogueira Coelho, Professor do Magistério Superior**, em 07/06/2024, às 22:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rogério Passos Severo, Usuário Externo**, em 09/06/2024, às 11:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Abilio Azambuja Rodrigues Filho, Professor do Magistério Superior**, em 13/06/2024, às 17:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3283822** e o código CRC **79D82A08**.

Agradecimentos

Ad astra

per aspera

Primeiramente, agradeço à minha querida Livia, pelo seu apoio incondicional, compreensão e amor durante os momentos desafiadores de estudo e escrita, especialmente em meio à pandemia, quando ambos enfrentamos riscos. Seu suporte emocional foi fundamental para superar os obstáculos que surgiram ao longo dessa jornada. Amo você, Zão.

À minha mãe, Áurea, e minhas irmãs, Giselle e Denise, expresso minha gratidão por todo o incentivo e apoio fornecido ao longo dos anos. Foi em casa, em meio a grandes desafios, que aprendi o valor da educação e do pensamento crítico, graças ao exemplo e dedicação de minha mãe, que lecionou durante anos por três turnos para garantir que nossa família valorizasse o conhecimento.

Também sou imensamente grato à família von Sucro (Raquel, Herr von Sucro, vó Ziza, Edinho, Carol, Déia, Alicinha, Olguinha e cia), à família Carvalho e a todos os agregados, que me acolheram e apoiaram desde os primeiros passos em direção ao doutorado, quando ainda era apenas um jovem sonhador. Seu carinho e apoio foram fundamentais para minha jornada acadêmica.

Ao departamento de Filosofia da UFMG, em especial aos professores Abílio Azambuja Rodrigues Filho, Ernesto Perini Frizzera da Mota Santos, Telma de Souza Birchall, Lívia Mara Guimarães, Giorgia Cechinatto, Maria Cecília de Miranda Nogueira Coelho e André Joffily Abath, manifesto minha gratidão pela formação de qualidade proporcionada durante a graduação.

Também agradeço especialmente aos meus orientadores, professores Antônio Mariano Coelho (mestre que me acompanha e incentiva desde o início da graduação) e Mauro Luiz Engelmann. O apoio e orientação de ambos foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Como aluno negro oriundo do ensino público, o encorajamento que recebi de vocês foi fundamental para que eu entendesse a importância e o impacto de uma tese de qualidade.

Aos amigos de graduação e dos grupos de pesquisa, meu muito obrigado pelo apoio ao longo dos anos. Aos Barbeiros de Fregue e suas hipóteses auxiliares (Eduardo, Mateus L, Matheus P, João Vitor, José Augusto, Samuel); ao Grupo Lógica Ladeira Abaixo da UFOP; Hulian, Veronica, Amanda, Adilson, Mônica. Aos amigos de RPG e Churrasco; aos amigos Gabriel Vader, Paulo Goku, Salim Naruto, Felipe, Reinaldo,

Salomão, Hernane, Carol Yagi, Marina; aos amigos da RPG Brasil; e aos amigos de profissão Alexandre S e Paulo M. Agradeço ainda aos grandes amigos Andreia e Edmundo da Casa Matriz.

Por fim, gostaria de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido para a realização deste trabalho. Enfatizo também a importância da política brasileira de cotas para ingresso no ensino superior, garantindo o acesso de negros, pardos, indígenas, quilombolas e outras minorias à universidade pública.

A todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho, meu mais sincero agradecimento. Vida longa e próspera.

“E de onde vem os diamantes? Da lama.” (Racionais MC's, 2002)

“O interesse principal da nova lógica é porém teórico. Esta ciência, abrangendo as raízes da Matemática, constitui o meio para indagar a natureza da Matemática em geral. Ainda mais, a significação filosófica dos novos esclarecimentos lógicos não se limita à filosofia da Matemática; atinge, como veremos, questões centrais da filosofia - questões sobre a necessidade e a possibilidade e mesmo questões de índole ontológica como ‘O que há?’, ‘O que é real?’. (W.O. Quine, O sentido da nova lógica, p.21)

Resumo

Neste estudo, proponho ampliar a compreensão acerca do pensamento do filósofo Willard Van Orman Quine (1908-2000), particularmente no que se refere ao teorema de Löwenheim-Skolem em sua forma forte, no contexto de sua doutrina da relatividade ontológica. Para tanto, apresento as implicações ontológicas da adoção da teoria de conjuntos ZFC como teoria de base na interpretação quiniiana. Este objetivo desdobrou-se em uma investigação acerca dos elementos conceituais e argumentativos do projeto metafísico de Quine, relacionando-se não somente à mencionada relatividade ontológica, mas também à redução ontológica, bem como às características formais da lógica clássica de primeira ordem inerentes à ZFC e ao teorema de Löwenheim-Skolem em sua forma forte.

Palavras-chave: Quine. Ontologia. Lógica. ZFC. Teorema de Löwenheim-Skolem

Abstract

In this study, I propose to expand the understanding of the thought of philosopher Willard Van Orman Quine (1908-2000), particularly regarding the Löwenheim-Skolem theorem in its strong form, within the context of his doctrine of ontological relativity. To this end, I present the ontological implications of adopting the ZFC set theory as the foundational theory in the Quinean interpretation. This goal unfolded into an investigation of the conceptual and argumentative elements of Quine's metaphysical project, relating not only to the aforementioned ontological relativity but also to ontological reduction, as well as to the formal characteristics of classical first-order logic inherent to ZFC and the Löwenheim-Skolem theorem in its strong form.

Keywords: *Quine. Ontology. Logic. ZFC. Löwenheim-Skolem Theorem.*

Lista de ilustrações

Figura 1 – O universo	102
-----------------------------	-----

Lista de tabelas

Tabela 1 – Interpretação alternativa para linguagem da aritmética.	43
--	----

Lista de abreviaturas e siglas

SNL	O sentido da nova lógica (1942)
OI	Ontology and Ideology (1951)
ML	Mathematical logic (1952)
FLPV	From a Logical Point of View (Second Edition, revised) (1961)
WO	Word and Object (1960)
WPOE	Ways of Paradox and Other Essays (1966)
OROE	Ontological Relativity and Other Essays (1969)
WB	The Web of Belief (1970)
RR	The Roots of Reference (1974)
TT	Theories and Things (1981)
MOL	Methods of logic (1982)
RP	Review of Parsons (1984)
PT	Pursuit of Truth (1990)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	ASPECTOS FORMAIS	26
2.1	Desenvolvimento da lógica	26
2.2	Enumerabilidade	29
2.3	Lógica de Primeira Ordem	34
2.3.1	Linguagens de Primeira Ordem	35
2.3.2	Sistemas Formais e Teorias de Primeira Ordem	36
2.4	Teoremas de Löwenheim-Skolem e da Compacidade	39
2.5	Exemplo de um sistema formal para a aritmética dos números naturais	40
2.5.1	Um exemplo de teoria de primeira ordem associada ao primeiro teorema de incompletude de Gödel	42
2.5.2	Uma outra concepção de teoria	44
3	A TEORIA DE CONJUNTOS ZFC	46
3.1	Filosofia e formalismo	46
3.2	Axiomas de ZFC	50
3.3	ZFC como fundamento da matemática	65
4	O PROJETO METAFÍSICO DE QUINE	67
4.1	Naturalismo, empirismo e holismo	67
4.2	Compromisso Ontológico	71
4.3	Postulando Objetos	74
4.4	Ontologia e Relatividade Ontológica	75
5	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM NA FORMA FORTE	81
5.1	Aspectos Formais da Doutrina da Relatividade Ontológica	81
5.1.1	Estrutura de uma teoria	84
5.1.2	Economia Ontológica	88
5.2	Esboço da prova do Teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte	90
5.2.1	O paradoxo de Skolem	92
6	AS IMPLICAÇÕES PROPRIAMENTE DITAS DO TEOREMA LÖWENHEIM-SKOLEM	95
6.1	Noção de Relativização	95

6.2	Modelos de ZFC	96
6.3	Conjuntos Construtíveis	99
6.4	Modelos Não Standard da Aritmética	103
6.5	Considerações finais sobre o sistema metafísico de Quine	107
7	CONCLUSÃO	112
	REFERÊNCIAS	114

1 Introdução

O objetivo principal do presente trabalho é, por meio do exame da forma forte do teorema de Löwenheim-Skolem, analisar a importância da relatividade ontológica em programas de redução ontológica no contexto do pensamento de Quine. Para que tal objetivo seja alcançado, há a necessidade de esclarecer como os aspectos lógicos e filosóficos se articulam dentro do sistema filosófico quiniiano, isto é, compreender como devemos interpretar o uso que Quine faz das noções lógicas, o qual está atrelado ao compromisso que Quine tem com a clareza. Tal uso não é estritamente técnico, mas, ao mesmo tempo, não podemos simplesmente rejeitá-lo como confuso.

Quine é um filósofo cujo sistema tem como característica fundamental a combinação de naturalismo, empirismo e holismo. O naturalismo vai nos dizer que a ciência é o nosso melhor e mais completo projeto de um sistema empiricamente fundamentado, assim como o árbitro final da verdade e da existência. Já o empirismo sustenta que a evidência final para nossas crenças é a evidência sensorial, cabendo à epistemologia explicar o processo de transformação dos inputs que os sentidos recebem, em um farto discurso constituído por nossas teorias científicas. O holismo, por sua vez, prioriza uma construção integral do conhecimento científico, estabelecendo um sistema de crença em vez de elementos individuais. Uma vez que o empirismo de Quine se associa ao naturalismo e holismo, deve-se destacar que a evidência sensorial não é a da experiência imediata, isto é, *sense-data*, mas sim estímulos físicos, de acordo com a própria ciência.

No sistema quiniiano a evidência da existência de objetos deve ser indireta e extraída de nosso sistema de crenças, o indireto aqui utilizado não se vincula ao estímulo físico, que é uma evidência direta. Como dito anteriormente, o árbitro final de tais questões é o sistema composto por nossas teorias científicas. Um primeiro passo para esclarecer esse ponto é estabelecer um critério de assunção de compromisso ontológico por uma teoria. Quine fez isso da seguinte maneira:

(...) a theory is committed to those and only those entities to which the bound variables of the theory must be capable of referring in order that the affirmations made in the theory be true. (On what there is, em FLVP p.13-14)

Segundo tal critério, principalmente, segundo o modo como Quine considera o uso da lógica no seu projeto ontológico, para conhecer os compromissos ontológicos de uma teoria temos que formulá-la em uma linguagem de primeira ordem (isto é, regimentá-la), e apenas em uma tal linguagem. O critério não visa descobrir o que

existe, mas apenas o que uma teoria diz que existe. O que vai dizer o que existe é a nossa ciência, ou seja, o nosso sistema:

When we want to check on existence, bodies have it over other objects on the score of their perceptibility. But we have moved now to the question of checking not on existence, but on imputations of existence: on what a theory says exists. (...) To show that a theory assumes a given object, or objects of a given class, we have to show that the theory would be false if that object did not exist, or if that class were empty; hence that the theory requires that object, or members of that class, in order to be true. (OROE. p.93)

Em particular, como foi dito anteriormente, Quine argumenta que a estrutura da teoria regimentada (mais tarde trataremos de problemas envolvendo a noção de estrutura de uma teoria) é fundada na lógica de primeira ordem com identidade (e, portanto, essa teoria é extensional); e que o âmbito de variação das variáveis das sentenças dessa teoria pode ser constituído apenas por conjuntos. Assim como a ciência possui o mesmo objetivo que o conhecimento comum, mas alcança resultados melhores ao descrever a realidade, a linguagem regimentada possui a mesma empreitada que a linguagem comum, sua adoção maximiza as virtudes científicas parcialmente presentes no discurso comum — estrutura lógica, referência, facilidade de acesso a métodos algorítmicos. Portanto, a regimentação da nossa teoria científica sobre o mundo e o critério de compromisso ontológico permitem esclarecer o que a ciência diz que existe:

My point is not that ordinary language is slipshod, slipshod though it be. We must recognize this grading off for what it is, and recognize that a fenced ontology is just not implicit in ordinary language. The idea of a boundary between being and nonbeing is a philosophical idea, an idea of technical science in a broad sense. Scientists and philosophers seek a comprehensive system of the world, and one that is oriented to reference even more squarely and utterly than ordinary language. Ontological concern is not a correction of a lay thought and practice; it is foreign to the lay culture, though an outgrowth of it. (TT p.09)

Um aspecto importante a destacar aqui é que, no que tange às questões ontológicas e nossas teorias científicas, a ideia, de que a conexão entre a evidência e o modo como falamos dos objetos (em um sistema definido de objetos) não é rígida. Isso significa que podemos reinterpretar um discurso sobre certos objetos em um outro sistema de objetos, desde que se mantenha fixa a evidência do sistema original. Deste modo, temos a relatividade ontológica: “apenas em relação a uma interpretação fixa de nossas crenças há um fato que conte para as questões ontológicas” (Resnik (2005) p.413).

No ensaio *Things and Their Place in Theories* (TT), Quine escreve: *Structure¹ is what matters to a theory, and not the choice of its objects* (TT, p.20). Isso parece suscitar algum conflito com o critério quiniiano de compromisso ontológico: se os objetos não são o que importa para uma teoria, mas sim a estrutura dessa teoria, com que objetos uma teoria regimentada em uma linguagem de primeira ordem se compromete ontologicamente? A noção de estrutura de uma teoria, em Quine, também demanda esclarecimento. Outras questões ainda se colocam: os objetos são dispensáveis? Não precisamos deste ou daquele objeto em particular? A teoria diz que há algum fato acerca dos objetos com os quais está comprometida? Quando dizemos que o discurso sobre determinados objetos pode ser reinterpretado, estamos perdendo de vista tais objetos? Sendo a teoria regimentada, são os objetos que devemos considerar no domínio de uma interpretação da linguagem de uma teoria quando tratamos as questões ontológicas associadas às teorias, ou há algo mais? O que Quine está querendo nos dizer com estrutura (de uma teoria), do ponto de vista do aparato lógico que utiliza?

Parece haver necessidade de esclarecimento de uma série de questões do sistema metafísico de Quine, bem como de questões técnicas que envolvem não somente a regimentação de uma teoria em uma linguagem de primeira ordem. Também é necessário que se faça uma análise do conceito lógico de teoria, pois Quine possui uma visão particular desse conceito e isso, é claro, interfere na compreensão de seu sistema filosófico. Juntamente com a noção de teoria, Quine também faz uso da noção de modelo de uma teoria, que aparece na lógica de modo preciso, e da noção de estrutura de uma teoria, que embora tenha um conteúdo intuitivo, não é caracterizada na lógica. A presente investigação requer, não apenas a compreensão de como Quine apresenta os aspectos filosóficos acerca de como as teorias científicas podem descrever o mundo, como também quais aspectos lógicos influenciam tal descrição.

Isto nos traz, inicialmente, dois questionamentos: sobre como as teorias assumem os objetos com os quais estão comprometidas, e em seguida, sobre como Quine emprega noções, digamos, de caráter lógico de modo algo inusual.

Ainda em *Things and Their Place in Theories*, vemos Quine argumentar como a evidência acerca de um objeto pode ser traduzida em mais de um tipo de discurso acerca do objeto, garantido, entretanto, que todos esses tipos de discurso possam passar pelo mesmo tribunal da evidência inicial:

We thus seem to see a profound difference between abstract objects and concrete ones. A physical object, one feels, can be pinned down

¹ O termo "estrutura" (*structure*) aparece aqui e não há, na lógica de primeira ordem e nas questões concernentes à definição de teoria, uma correlação precisa como Quine parece considerar. Temos mais uma questão a ser ponderada no modo como o filósofo faz uso dos termos da lógica de primeira ordem em sua doutrina da relatividade ontológica.

by pointing—in many cases, anyway, and to a fair degree. But I am persuaded that this contrast is illusory. By way of example, consider again my liberalized notion of a physical object as the material content of any place-time, any portion of space-time. This was an intuitive explanation, intending no reification of space-time itself. But we could just as well reify those portions of space-time and treat of them instead of the physical objects. Or, indeed, call them physical objects. Whatever can be said from the old point of view can be paraphrased to suit the new point of view, with no effect on the structure of scientific theory or on its links with observational evidence. Wherever we had a predication 'x is a P' said of a physical object x, we would in effect read 'x is the place-time of a P'; actually we would just reinterpret the old 'P' as 'place-time of a P' and rewrite nothing. (TT, p.16)

O que devemos notar até este ponto, é o que chamaremos de processo de abstração (*Whatever can be said from the old point of view can be paraphrased to suit the new point of view*), isto é, para Quine, podemos criar um tratamento das regiões do espaço-tempo como se fossem objetos físicos em nossas teorias científicas. Esta citação unifica as passagens anteriormente citadas sobre os objetos de uma teoria: em prol da simplicidade, objetos físicos podem ser reduzidos à regiões do espaço-tempo ocupadas por eles, e não precisamos parar por aqui: tais regiões nada mais são do que conjuntos de coordenadas do espaço-tempo relativas a algum sistema fixo de coordenadas. E, mais uma vez, podemos observar que tais coordenadas de espaço-tempo são quádruplas ordenadas de números reais, e podemos então assumí-las no lugar das coordenadas do espaço-tempo. E ainda podemos reduzir os números reais e as quádruplas ordenadas a conjuntos, ficando com conjuntos de quádruplas ordenadas de números reais que substituiriam os objetos físicos, restando assim nada além de conjuntos puros (isto é, não envolvendo elementos primitivos). Quine observa que o esforço de simplificação é uma tarefa do filósofo e não do cientista. Como podemos ver em:

We have now looked at three cases in which we interpret or reinterpret one domain of objects by identifying it with part of another domain. In the first example, numbers were identified with some of the classes in one way or another. In the second example, physical objects were identified with some of the place-times, namely, the full ones. In the third example, place-times were identified with some of the classes, namely, classes of quadruples of numbers. In each such case simplicity is gained, if to begin with we had been saddled with the two domains. (TT, p.18)

Até aqui, temos em mãos como os objetos podem ser assumidos por uma teoria regimentada e, conforme observado nos parágrafos anteriores, podemos reinterpretar um discurso sobre certos objetos em um outro sistema de objetos, desde que se mantenha fixa a evidência do sistema original. Essa é a tese da relatividade ontológica. Quine observa que, de fato, estamos preservando a estrutura da teoria (o que seja estrutura

de uma teoria ainda não nos é claro), enquanto garantimos que as reinterpretações funcionem de modo similar ao fornecer uma função vicária² apropriada:

(...) we save nothing but merely change or seem to change our objects without disturbing either the structure or the empirical support of a scientific theory in the slightest. All that is needed in either case, clearly, is a rule whereby a unique object of the supposedly new sort is assigned to each of the old objects. I call such a rule³ a proxy function. (TT, p.19)

Uma função vicária mapeia cada objeto da ontologia original em um objeto da nova ontologia, o que em um arcabouço lógico, significaria reinterpretar cada sentença de uma teoria de modo que seja verdadeira para a nova ontologia, tal como é verdadeira na interpretação original. Assim, mantemos as condições de buscar em todas as reinterpretações as mesmas evidências⁴ e os mesmos resultados teóricos acerca dos objetos de cada ontologia reinterpretada.

Quine conclui que a referência é inescrutável, ou seja, não há como dizer nada em absoluto, caso nossas palavras se refiram a isso ou aquilo⁵, mas somente se elas se referirem sempre a uma interpretação fixa. A mudança de uma ontologia para outra significa que nossas palavras também mudam sua referência; não obstante, os valores de verdade das sentenças permanecem inalterados. É como dizer que os fatos⁶ permanecem os mesmos. A estrutura da teoria está preservada⁷.

Quando Quine fala de preservação da estrutura e de preservação da verdade das sentenças, uma questão que se coloca é: ele está falando de isomorfismo entre estruturas ou de equivalência elementar entre estruturas? Em ambos os casos, equivalência elementar ou isomorfismo, a regimentação não interfere no tribunal da evidência, mas o isomorfismo traz exigências mais fortes do que a equivalência elementar. Estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes, mas nem sempre estruturas elementarmente equivalentes são isomorfas. Esse é um aspecto que carece de esclarecimento, sobretudo em nosso caso, uma vez que modelos não-standard da aritmética são elementarmente equivalentes ao modelo standard mas não são isomorfos ao modelo standard. Isso é relevante quando analisamos o papel do teorema de Löwenheim-Skolem na tentativa de adoção de uma ontologia pitagórica no sentido de Quine, isto é, uma ontologia constituída exclusivamente pelos números naturais:

² No original *proxy function*.

³ Naturalmente Quine emprega a palavra "rule" apenas como um modo de dizer; uma definição rigorosa de função será apresentada no capítulo 3.

⁴ Suporte empírico.

⁵ Não há uma ontologia definitiva e a redução a conjuntos é uma redução a uma teoria extensionalista.

⁶ Quine se refere, ao que parece, aos fatos como a evidência ou evidências que inicialmente estimulam o desenvolvimento do discurso ontológico. Entretanto, este discurso poderia ser reescrito, renomeando os seus objetos, o que também significa dizer que a ontologia não se fixa numa apresentação definitiva dos objetos. A teoria diz que há algo, mas o que seja este algo, não há como fixar.

⁷ Novamente reaparece "a estrutura de uma teoria", denotando mais uma vez a necessidade de esclarecimento, como visto anteriormente.

The conclusion I draw is the inscrutability of reference. To say what objects someone is talking about is to say no more than how we propose to translate his terms into ours; we are free to vary the decision with a proxy function. The translation adopted arrests the free-floating reference of the alien terms only relatively to the free-floating reference of our own terms, by linking the two. (TT, p.19-20)

Em uma outra pista, presente na primeira versão do texto *Ontological Reduction and The World of Numbers* Quine escreve “*These cases suggest that what justifies the reduction of one system of objects to another is isomorphism*⁸”. Mais tarde o termo isomorfismo será trocado pelo autor para “*These cases suggest that what justifies the reduction of one system of objects to another is preservation of relevant structure*⁹.”. O isomorfismo entre estruturas indica uma similaridade muito forte se comparada, por exemplo, à equivalência elementar entre estruturas. Trata-se, pelo que foi descrito até aqui, de uma mudança significativa.

Neste arcabouço teórico temos em mãos também o importante teorema de Löwenheim-Skolem, que nos assegura que, se uma teoria (de primeira ordem, com uma linguagem enumerável) tem um modelo, então tem um modelo cujo domínio é enumerável (mais adiante lidaremos com a forma forte de tal teorema). O importante nestas observações é que, pelos dois requisitos apresentados até o momento (preservação do comportamento dos objetos e a preservação das relações que envolvem os objetos) para a redução ontológica, a ideia central seria a descoberta de um modelo:

There is an interesting reversal here. Our first examples of ontological reduction were Frege’s and von Neumann’s reductions of natural number to set theory. These and other examples encouraged the thought that what matters in such reduction is the discovery of a model¹⁰. (WPOE, p.201)

Não podemos deixar de lado certas questões técnicas referentes às noções de teoria e modelo de que Quine faz uso. Tecnicamente, em lógica, um modelo para um conjunto de sentenças de uma linguagem de primeira ordem é uma interpretação dessa linguagem na qual todas essas sentenças são verdadeiras. Já a noção de teoria pode ser estabelecida de duas maneiras. Na primeira, uma teoria pode ser um sistema formal, isto é, uma tripla constituída por uma linguagem, por axiomas e por regras de inferência. No caso de Quine lidamos com teorias de primeira ordem; nelas, a linguagem é uma linguagem de primeira ordem, os axiomas se dividem em lógicos e não lógicos, e as regras de inferência, assim como os axiomas lógicos, podem ser especificadas de diversos modos (o que importa é que obtenhamos o teorema da

⁸ The Journal of Philosophy, Vol. 61, No. 7 (Mar. 26, 1964), pp. 209-216

⁹ WPOE, p.201. Quine mantém este trecho inalterado na edição revisada posterior.

¹⁰ A noção de modelo na expressão “discovery of a model” aqui deve ser entendida em um sentido que não é estritamente técnico.

completude). Por um modelo de uma teoria T , queremos dizer uma estrutura para a linguagem de T na qual todos os axiomas não lógicos de T são verdadeiros. Os teoremas de T são especificados da maneira usual. Detalharemos isso no capítulo 1.

Na segunda maneira, podemos definir uma teoria de primeira ordem em uma dada linguagem (de primeira ordem, evidentemente) como um conjunto de sentenças dessa linguagem fechado por consequência lógica semântica nessa linguagem. Neste caso, os teoremas dessa teoria serão simplesmente os elementos desta teoria.

A noção de teoria, tal como usada por Quine no ensaio *Relatividade Ontológica*, por exemplo, não se enquadra completamente em nenhuma das caracterizações acima:

To talk thus of theories raises a problem of formulation. A theory, it will be said, is a set of fully interpreted sentences. (More particularly, it is a deductively closed set: it includes all its own logical consequences, insofar as they are couched in the same notation.) But if the sentences of a theory are fully interpreted, then in particular the range of values of their variables is settled. How then can there be no sense in saying what the objects of a theory are? (OROE, p.51)

Percebemos nesta passagem que há uma descrição que identificamos com a definição de teoria em uma dada linguagem como um conjunto de sentenças dessa linguagem, fechado por consequência lógica semântica nessa linguagem: *"it includes all its own logical consequences, insofar as they are couched in the same notation"*. Outro aspecto digno de nota destacado no trecho abaixo é que o próprio Quine observa que de fato os objetos que estão no domínio de uma teoria (os quais devem ser assumidos para que suas sentenças sejam verdadeiras) não são fixos se considerarmos a tese da relatividade ontológica (tudo isso, claro, depende de entendermos o que seria o domínio de uma teoria, essa não é uma noção usual de lógica; e por usual é a noção de domínio de uma estrutura para linguagem dessa teoria):

(...) The relativistic thesis to which we have come is this, to repeat: it makes no sense to say what the objects of a theory are, beyond saying how to interpret or reinterpret that theory in another. (OROE, p.50)

Quine alerta-nos, um pouco depois, que de fato, não podemos exigir que nossas teorias sejam plenamente interpretadas, pois isso tornaria necessário fixar o valor dos objetos do domínio da teoria. Quando determinamos uma teoria e fixamos os valores dos objetos do domínio (entendendo domínio intuitivamente), nós o fazemos apenas em relação a uma teoria de fundo, ou seja, a que usamos, por exemplo, para regimentar a teoria¹¹. Poderíamos reescrever a teoria, reinterpretando seus símbolos não lógicos e questionar a necessidade de fixar os objetos, pois novos objetos também podem

¹¹ No caso de escolher ZFC, além da regimentação temos os seus axiomas não lógicos.

garantir a verdade das sentenças. Evidentemente, as funções vicárias podem garantir a reinterpretação da teoria:

My answer is simply that we cannot require theories to be fully interpreted, except in a relative sense, if anything is to count as a theory. In specifying a theory we must indeed fully specify, in our own words, what sentences are to comprise the theory, and what things are to be taken as values of the variables, and what things are to be taken as satisfying the predicate letters; insofar we do fully interpret the theory, relative to our own words and relative to our overall home theory which lies behind them. But this fixes the objects of the described theory only relative to those of the home theory; and these can, at will, be questioned in turn. (OROE, p.51)

Vamos examinar tais questões técnicas mais adiante na tese. Entretanto, para reforçar o objetivo de nossa investigação devemos questionar como Quine organiza o aparato formal, ou como ele mesmo diz, o “vocabulário” de uma teoria para que a relatividade ontológica esteja devidamente assentada. O primeiro passo dessa organização envolve um vocabulário compreendido pelos símbolos lógicos (variáveis, quantificadores, conectivos e identidade,) e não lógicos (símbolos de predicado e símbolos de função, esses últimos são dispensáveis). O segundo passo envolve analisar os enunciados que compõem a teoria, isto é, os teoremas da teoria, sem considerar modelos dessa teoria, e assim determinar o que Quine chama de “forma de teoria”.

Com os passos anteriores devidamente concluídos, nosso vocabulário está preparado para lidar com os modelos de uma teoria. Na lógica, uma teoria tem modelo se há uma interpretação da linguagem dessa teoria na qual todas as sentenças dessa teoria são verdadeiras (isto é, em que todos os teoremas da teoria são verdadeiros). Segundo Quine, a teoria em questão tem uma forma e tem as condições pelas quais suas sentenças são verdadeiras:

(...) We are left with the logical form of the theory, or, as I shall say, the theory form. Now we may interpret this theory form anew by picking a new universe for its variables of quantification to range over, and assigning objects from this universe to the names, and choosing subsets of this universe as extensions of the one-place predicates, and so on. Each such interpretation of the theory form is called a model of it, if it makes it come out true. *Which of these models is meant in a given actual theory cannot, of course, be guessed from the theory form.*(...) (OROE p.54, ênfase nossa.)

Uma vez que uma teoria (de primeira ordem e com linguagem enumerável, como dissemos antes) tenha um modelo, temos, pelo teorema de Löwenheim-Skolem, que essa teoria admite um modelo nos números naturais¹². Como observa Quine,

¹² (...) according to the Lowenheim-Skolem theorem, any theory that admits of a true interpretation at all admits of a model in the natural numbers, Berry concluded that only common sense stands in the way of adopting an all-purpose Pythagorean ontology: natural numbers exclusively. WPOE, p.201

isso significaria que, uma vez que tenhamos reduzido nosso diálogo sobre números a conjuntos, observando devidamente os requisitos antes apresentados, poderíamos mais uma vez abandonar os conjuntos, e reduzir tudo a uma conversa sobre números naturais, como um certo pitagorismo em que tudo o que há, ou melhor, tudo com o que nossas teorias se comprometem ontologicamente seriam os números naturais. Entretanto, os números naturais não-standard, dos quais falaremos mais adiante, vão tornar essa questão mais complexa.

Quine, entretanto, questionará se é verdade que tudo o que importa é um modelo, ou um modelo para uma teoria. Afinal de contas, parece que há algo mais a ser analisado e que, não se limita também a reconhecer um modelo como estágio final da redução ontológica. Deve-se ainda questionar se o teorema de Löwenheim-Skolem nos fornece um meio simples para repudiar os objetos de nossas teorias em prol “apenas” de números naturais. Quine diz que não. O papel do teorema não é o mesmo que um procedimento de redução ontológica. E veremos como Quine procede.

A definição de estrutura para Quine tem de fato uma relevância muito grande, e exige, como a presente investigação denota, uma revisão e esclarecimento da interseção entre o aparato formal e as peculiaridades do sistema metafísico quinianiano. O próprio esforço de Quine, abordando a redução e a relatividade ontológica, é filosoficamente examinado, por exemplo, por Penelope Maddy em *Naturalism in Mathematics*:

In any case, from this point of view, the job of set theoretic foundations is not to reveal the true identities of the various mathematical objects. Another possibility, championed by Quine, is that the set theoretic versions of various mathematical objects provide an 'ontological reduction', that is, they show us that we can legitimately replace a world view that countenances both natural numbers, integers, rationals, reals, etc., etc. on the one hand, and sets on the other, with a more streamlined world view that countenances only the sets. The motivation for such a replacement is twofold: first, the observation that natural science is generally chary of new entities, and secondly, the conviction that abstracta tend to generate philosophical problems, for example problems of identity and (perhaps) epistemology. Under the circumstances, a scientifically-minded philosopher would naturally prefer a more austere ontology, and the set theoretic reduction of mathematics is one way of achieving this. (MADDY (1997), p.24-25)

As questões ontológicas e formais para Quine estão imbricadas de um modo bastante específico devido, dentre outras razões, à relatividade ontológica. As considerações de Quine acerca das noções lógicas de teoria e modelo não significam uma interpretação pessoal dos respectivos conceitos, muito menos uma nova definição para os conceitos da lógica; trata-se, na verdade, de uma adequação mais ampla da lógica às questões filosóficas concernentes ao esforço do filósofo de fazer ontologia de dentro da ciência.

No capítulo 2 desta tese, apresentarei aspectos técnicos da lógica que estão presentes na argumentação de Quine e são essenciais para a compreensão do seu projeto metafísico. O capítulo 3 continuará com o tema dos aspectos formais, desta vez referentes à teoria padrão de conjuntos, ZFC. No capítulo 4, descreverei os principais argumentos de Quine referentes ao seu projeto metafísico. Já no capítulo 5, discutirei algumas das relações existentes entre o projeto metafísico de Quine e o teorema de Löwenheim-Skolem, especialmente possíveis tensões com a visão quiniiana de estrutura de uma teoria. No capítulo 6, argumentarei, finalmente, como devemos compreender em Quine o significado de modelo de uma teoria e estrutura de uma teoria, esclarecendo também o problema do suposto pitagorismo decorrente da doutrina da relatividade ontológica à luz do teorema de Löwenheim-Skolem na sua forma forte.

2 Aspectos Formais

Neste capítulo, abordaremos os principais aspectos formais da lógica de primeira ordem que são pertinentes à presente tese. Iniciaremos com uma descrição sucinta da história do desenvolvimento da lógica de primeira ordem clássica. Trataremos, em seguida, do conceito de enumerabilidade, da definição de teoria de primeira ordem, de isomorfismo, dos teoremas de Löwenheim-Skolem e da compacidade e, por fim, apresentaremos um exemplo de um sistema formal para a aritmética dos números naturais, finalizando com uma segunda concepção formal de teoria.

2.1 Desenvolvimento da lógica

Em seu trabalho filosófico, Quine sempre fez uso de uma terminologia formal visando clareza e precisão em sua análise e escrita. Os principais aspectos dessa terminologia estão relacionados ao desenvolvimento da lógica e da matemática, em fins dos séculos XIX e início do século XX. Este foi um período marcado pela busca dos fundamentos da matemática e da solução de diversos problemas e contradições que deram origem também à teoria axiomática de conjuntos ZFC. Entretanto, nem todos os aspectos formais serão apresentados neste capítulo, pois trataremos especialmente de ZFC e sua correlação com o pensamento de Quine no próximo capítulo.

Na presente tese não serão discutidos em profundidade os aspectos históricos, pois não é este o objetivo, preferindo uma breve introdução e comentários particulares nas seções subsequentes. Ainda que breve, a apresentação histórica a seguir fornece coerência às seções técnicas do presente capítulo e considerações técnicas que influenciaram o pensamento de Quine, que desde o início do seu interesse por matemática e filosofia, esteve em contato com as obras a serem citadas.

Como bem observam Halbeisen e Krapf¹, a base firme dos fundamentos da matemática é formada pela lógica, destacando as axiomatizações formais e modelos de teorias matemáticas. Este arcabouço teórico por sua vez tem toda uma história por de trás de sua criação. O desenvolvimento da lógica em direção a uma lógica matemática passa por George Boole (1815-1864), com o seu *The Laws of Thought* (1854). O trabalho continuou por meio de Charles Sanders Peirce (1839-1914) com seu *Logic as Semiotic: The Theory of Signs* (1893-1910), relacionando a linguagem da lógica e a manipulação de símbolos e por meio de F. L. Gottlob Frege (1848-1925) com suas obras o *Begriffsschrift* (1879) - com implementação do cálculo dos predicados - e

¹ Gödel's Theorems and Zermelo's Axioms - A Firm Foundation of Mathematics, Birkhäuser, 2020.

Die Grundlagen der Arithmetik (1884) e *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 vol 1, 1903 vol 2). Há vários outros trabalhos, mas aqui destacam-se estes.

O ponto culminante do desenvolvimento, que dará origem a lógica contemporânea, é o esforço de fundamentar o conhecimento da aritmética nas regras da lógica. As obras citadas de Frege destacam-se nesse projeto por meio da mudança da concepção de analiticidade como inicialmente definida por Kant. Este empreendimento ficou conhecido como o programa logicista (de Frege), abalado em sua concepção inicial pela descoberta do paradoxo de Russel, desencadeando a chamada crise dos fundamentos. Uma tentativa de continuidade do projeto, de forma ampliada, se deu com o *Principia Mathematica* de Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell (1872 – 1970).

Ainda segundo Halbeisen e Krapf, a tentativa de definir número envolveu, portanto, duas abordagens promissoras: a de Frege e a de Russell. Observa-se que esses são também projetos de redução ontológica, em que, os números em uma determinada teoria são representados em uma outra que fosse formal. Neste empreendimento destacam-se por sua vez os trabalhos de G. Cantor (1845 – 1918), que desenvolveu uma teoria de conjuntos infinitos em ato e não apenas em potência. Cantor também forneceu a base teórica para que uma teoria axiomática de conjuntos fosse depois estabelecida – ZFC; há outras teorias de conjuntos, mas ZFC é a teoria padrão. Essa teoria não só nos permite definir número como serve de fundamento para toda matemática. Há outras maneiras de fundamentar a matemática, mas essa baseada em ZFC é, de certo modo, a fundamentação padrão.

A principal característica da teoria de conjuntos ZFC é a utilização da noção de sistema axiomático formalizado para a obtenção de seus principais resultados. Entretanto, os primeiros trabalhos envolvendo a teoria de conjuntos foram feitos por G. Cantor e R. Dedekind (1831 – 1916) e se deram de forma não axiomática. Caberá a E. Zermelo (1871 – 1953), no trabalho intitulado *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I* (1908) apresentar a teoria de conjuntos de acordo com os preceitos do método axiomático. É importante ressaltar que a atual apresentação da teoria de conjuntos ZFC é distinta da que aparece no artigo de 1908. ZFC é uma teoria formalizada, cuja lógica subjacente é a lógica de primeira ordem clássica e, possui “dois” axiomas, na verdade um axioma (o do fundamento) e um esquema de axioma (o da substituição) que não se encontravam na formulação original de Zermelo.

Outra característica da axiomatização da teoria de conjuntos ZFC é o seu caráter pragmático, isto é, o de restringir os princípios desta disciplina de modo a excluir certas contradições (como o paradoxo de Russel) e desenvolver os “fundamentos lógicos de toda a aritmética e da análise”².

² ZERMELO(1908). p.200

O próprio método axiomático possui por si mesmo uma história que se une a que foi narrada até aqui. O final do século XIX também trouxe para a matemática uma série de trabalhos – desenvolvimento da álgebra, da geometria projetiva, da análise, das geometrias não euclidianas, para citar alguns – os quais geraram um consenso na comunidade matemática de que a concepção clássica do método axiomático (reportada, por exemplo, originalmente a Euclides em sua obra *Os Elementos* e a Aristóteles nos *Segundos Analíticos*) deveria mudar. Para a comunidade da época, a noção de método axiomático, tal como originalmente concebida, era incapaz de satisfazer os requisitos de rigor que as investigações matemáticas estavam demandando.

A concepção de método axiomático que vinha da antiguidade grega tinha na sua base enunciados que seriam aceitos sem demonstração por serem evidentemente verdadeiros (os axiomas) e conceitos que seriam aceitos sem definição por serem evidentemente claros (os conceitos primitivos).

A axiomática formal foi delineada aos poucos pelo trabalho de vários matemáticos da época e suas bases tratavam das relações de demonstrabilidade, estabelecendo os axiomas (de um ponto de vista formal) simplesmente como ponto de partida para demonstrações. As suposições iniciais dos sistemas ficavam estabelecidas e a adoção dos axiomas simplesmente como ponto de partida para demonstrações permitia que toda a informação relevante para os procedimentos de demonstração estaria na base do sistema que incluiria também regras de inferência (falaremos disso adiante). Escolher um sistema axiomático formal também torna desnecessário o tipo de definição adotada por Euclides. Ponto, por exemplo, torna-se qualquer coisa que satisfaça certas exigências estipuladas pelos axiomas.

É importante destacar a obra *Grundlagen der Geometrie* (1899) de David Hilbert (1862–1943) na qual o autor adota um sistema axiomático que, dentre outras axiomatizações da época (como as de Pasch e Peano), utilizavam uma formulação que solucionava o problema da consistência dos axiomas presentes na obra. Este problema surgia pelo fato de que, como as componentes que estavam na base do sistema eram arbitrárias, era importante cuidar para que elas não abrigassem contradições. Hilbert abre espaço para uma postura metateórica na qual a teoria se apresenta como objeto de estudo. Essa seria a proposta de uma nova fundamentação da matemática pelos apoiadores de Hilbert; uma fundamentação formalista. Temos aí o chamado programa de Hilbert no qual provas de consistência têm um papel central.

O programa de Hilbert exigia que a consistência da Análise e da Teoria de Conjuntos fosse demonstrada, o que significava que também era necessário, em primeiro lugar, demonstrar a consistência da Teoria Formal dos Números, conhecida como Aritmética Formal de Peano (PA), devida originalmente a Dedekind. O formalismo da teoria dos números objetiva representar os modos como raciocinamos na aritmética

básica.

Kurt Gödel (1906-1978), por meio do célebre Segundo Teorema da Incompletude, provou que a consistência da aritmética de Peano não pode ser demonstrada na própria aritmética de Peano³. Para muitos, uma de suas consequências é que não pode existir uma prova finitária da consistência da Aritmética Formal de Peano. Além das contribuições de Gödel, os trabalhos de Alan Turing (1912-1954), Stephen Cole Kleene (1909 - 1994) e Alonzo Church (1903-1995) forneceram provas de indecidibilidade, isto é, métodos para provar que um problema não é solúvel por um procedimento efetivo, isto é, por um algoritmo. O projeto de Hilbert para provar a consciência dos axiomas de Peano, tal como originalmente proposto, encontrava, segundo muitos, o seu fim; mas ele proporcionou e continua proporcionando grandes avanços na lógica matemática, com muitos importantes desdobramentos filosóficos, como é o caso da teoria da prova, para citar um exemplo.

Nas seções a seguir usaremos em nossa exposição uma mescla de elementos principalmente de Boolos e Jeffrey⁴, Boolos, Burgess e Jeffrey⁵, Shoenfield⁶, Kunen⁷, Peter Smith⁸, Moschovakis⁹, Carnielli e Epstein¹⁰ e Epstein¹¹. O aprofundamento de alguns temas e tópicos, inclusive a forma como são tecnicamente enunciados e a precisão, se fazem necessários para que possamos compreender melhor como Quine os recebe em sua obra.

2.2 Enumerabilidade

Sendo um conjunto intuitivamente determinado como uma coleção de objetos (no capítulo 3 seremos mais rigorosos quanto a isso), podemos dizer, informalmente, que ele é enumerável, ou ainda, contável se seus elementos podem ser dispostos em uma lista, tendo um primeiro item, um segundo item, e assim por diante, de modo que todo elemento do conjunto apareça mais cedo ou mais tarde na lista. O conjunto dos números naturais e o conjunto vazio são exemplos de conjuntos enumeráveis. Há muitos outros exemplos. Conjuntos podem ser enumerados por listas finitas ou intermináveis; conjuntos infinitos que são enumeráveis são ditos enumeravelmente infinitos ou denumeráveis.

³ Mas isso depende da maneira como expressamos a consistência da aritmética (ver FEFERMAN (1960))

⁴ BOOLOS, JEFFREY. (1989)

⁵ BOOLOS, BURGESS, JEFFREY (2013)

⁶ SHOENFIELD (2001)

⁷ KUNEN (1980)

⁸ SMITH (2013)

⁹ MOSCHOVAKIS (2005)

¹⁰ CARNIELLI, EPSTEIN (2022)

¹¹ EPSTEIN (2011)

Como bem nos adverte Peter Smith¹², pode ser problemático ou descuidado falar em “listar” conjuntos infinitos como se pudéssemos completar o trabalho em algum momento. Entretanto, o que de fato queremos dizer, é que qualquer membro do conjunto finalmente aparecerá na lista, se a continuarmos por tempo suficiente. Ou, deixando de lado a metáfora temporal, cada elemento do conjunto aparece em uma posição da lista.

Com alguns recursos matemáticos em mãos é possível construir uma definição mais rigorosa:

Definição 1 (Conjunto enumerável). *Um conjunto Σ é enumerável se e somente se Σ é vazio ou existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ (então Σ é a imagem de f : podemos dizer que tal função enumera Σ)¹³.*

Neste caso, usando o jargão matemático, uma lista infinita determina uma função f que toma números naturais como *argumentos* e toma elementos do conjunto Σ como *valores*. Falaremos mais desses conceitos a seguir. O valor da função f para o argumento n é denotado por $f(n)$. Esse valor é simplesmente a coisa denotada pelo n -ésimo item da lista.

Ao trabalhar com essa definição formal que apela ao conceito de função uma enumeração de um conjunto e pode ser definida não como uma lista mas como um arranjo, no qual cada elemento de um conjunto é associado a um dos números naturais $0, 1, 2, 3, \dots$. A coisa nomeada pelo primeiro item da lista é associada ao natural 0 , a coisa nomeada pelo segundo item da lista é associada ao natural 1 , e, em geral, a coisa nomeada pelo n -ésimo item da lista é associada ao natural $n - 1$ (considerando n maior do que ou igual a 1).

Aproveitemos para esclarecer um pouco mais a afirmação feita de que função é uma atribuição de *valores* a *argumentos*. No exemplo anterior, os números naturais funcionam como *argumentos* e os elementos do conjunto a ser enumerado são os *valores*. O conjunto de todos aqueles *argumentos* aos quais a função associa *valores* é denominado o *domínio* da função, assim como, o conjunto de todos aqueles valores que a função associa a seus *argumentos* é chamado *imagem* da função.

Portanto, o conjunto dos números inteiros positivos pares:

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

É enumerado, por exemplo, pela função f para a qual temos:

¹² SMITH (2013) p.10

¹³ Por ora \mathbb{N} é o conjunto dos números naturais. Adiante definiremos o que é função sobrejetiva; antecipamo-nos porque essa definição é amplamente conhecida.

$$f(0) = 2, f(1) = 4, f(2) = 6, f(3) = 8, f(4) = 10, \dots$$

Portanto, podemos falar de conjuntos como sendo enumerados tanto por funções quanto por listas. Também sabemos que, se uma função enumera um conjunto não vazio, alguma outra também o faz. Reapresentamos a definição anterior:

Um conjunto Σ é enumerável se e somente se é a imagem de alguma função cujo conjunto dos *argumentos* é o conjunto dos números naturais.

Por outro lado, nem todos os conjuntos são enumeráveis: alguns são grandes demais, num sentido que será mais bem explicado no próximo capítulo. Um exemplo é o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos. Seja P o conjunto de todos os inteiros positivos; seja P^* o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos¹⁴. Temos a seguinte versão do importante teorema de Cantor:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Cantor). *O conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos não é enumerável.*

Uma vez enunciado nesses termos, é possível extrair o corolário de que o conjunto dos números reais também não é enumerável, pois podemos representar os números reais como conjuntos ou sequências de naturais.

Cantor trabalhou na sua proposta de uma teoria de conjuntos no final do século dezenove, como brevemente apresentado na introdução deste capítulo. Sua motivação original era atuar em problemas sobre séries trigonométricas¹⁵ (séries de Fourier) e, mesmo trabalhando de modo informal – mais tarde uma formalização axiomática daria origem a ZFC – seus resultados e de outros estudiosos foram utilizados para prover os fundamentos do cálculo. Os números inteiros foram definidos como classes de equivalência de pares ordenados de números naturais, os racionais como classes de equivalência de pares ordenados de inteiros e os números reais como coleções infinitas de racionais¹⁶.

Dois conjuntos finitos possuem o mesmo número de elementos se existe uma função bijetora de um no outro. Deixando de lado complexos aspectos históricos¹⁷ e filosóficos, que embora muito importantes, não são o tema desta tese; dizemos de dois conjuntos quaisquer, finitos ou infinitos, que eles têm o mesmo número de elementos (cardinalidade) se existe uma função bijetora de um no outro.

Recorremos novamente a Smith para apresentar uma definição formal e precisa dos tipos de função e, com isso, formalizar também o que queremos dizer com função

¹⁴ Essa não é a notação padrão, mas vamos usá-la aqui, por enquanto, seguindo BOOLOS, BURGESS, JEFFREY (2013)

¹⁵ RUDIN (2006) p.182-184

¹⁶ CARNIELLI, EPSTEIN (2022) p.67

¹⁷ Veja FERREIRÓS (2000)

bijetora. A notação convencional para indicar que uma função f mapeia elementos do domínio Δ para valores no contradomínio Γ é, obviamente, $f : \Delta \rightarrow \Gamma$. Seja f uma tal função. Então dizemos:

1. A imagem de f é $\{f(x) | x \in \Delta\}$, ou seja, o conjunto de elementos em Γ que são valores de f para argumentos em Δ . A imagem de uma função não precisa ser todo o contradomínio.
2. f é *sobrejetiva* se e somente se a imagem de f é todo o contradomínio Γ – isto é, se e somente se para todo $y \in \Gamma$ existe algum $x \in \Delta$ tal que $f(x) = y$. (isto é, a função é *sobre*, uma vez que mapeia Δ sobre o todo de Γ .)
3. f é *injetiva* se e somente se f mapeia diferentes elementos de Δ para diferentes elementos de Γ – ou seja se e somente se para quaisquer x e y em Δ , sempre que $x \neq y$ temos $f(x) \neq f(y)$. (dizemos que uma tal função é *um-para-um*.)
4. f é *bijetiva* se e somente se é *sobrejetiva* e *injetiva* (dizemos que f é então uma correspondência *um-para-um* entre Δ e Γ , ou ainda que f é uma correspondência biunívoca entre Δ e Γ).

Funções sobrejetivas também são chamadas de sobrejetoras, ou ainda de sobrejeções; funções injetivas também são chamadas injetoras, ou ainda de injeções; funções bijetivas também são chamadas de bijetoras, ou ainda de bijeções.

Repetindo basicamente o que dizemos na página anterior e ajustando a notação temos que: dados os conjuntos A e B , dizemos que A e B têm a mesma cardinalidade (isto é, o mesmo tamanho) se e somente se existe uma bijeção de A em B . Neste caso, dizemos também que A e B são equipotentes e escrevemos $A \simeq B$ (claro que se existe uma bijeção de A em B , então existe uma bijeção de B em A).

Dizemos que a cardinalidade de A é menor do que a cardinalidade de B se e somente se A e B não são equipotentes e existe uma função injetora de A em B (nesse caso dizemos também que a cardinalidade de B é maior do que a de A).

Já vimos que existem conjuntos infinitos que são equipotentes ao conjunto dos números naturais; são os conjuntos infinitos enumeráveis. Uma consequência imediata da versão do teorema de Cantor apresentada anteriormente é que existe um conjunto infinito que não é equipotente ao conjunto dos números naturais, a saber, o conjunto de todos os conjuntos de inteiros positivos. É imediato constatar que a cardinalidade desse conjunto é maior que a cardinalidade do conjunto dos números naturais (basta considerar a função que a 0 associa $\{1\}$, a 1 associa $\{2\}$, a 2 associa $\{3\}$, etc). Temos, portanto, pelo menos dois níveis de cardinalidades infinitas. A versão mais geral do

teorema de Cantor que apresentaremos a seguir nos fornecerá a existência de infinitos níveis de cardinalidades infinitas.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Cantor - versão geral). *Seja A um conjunto. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto dos subconjuntos de A . $\mathcal{P}(A)$ é dito o conjunto das partes de A , ou ainda o conjunto potência de A . A cardinalidade de A é menor do que a cardinalidade de $\mathcal{P}(A)$.*

Demonstração. Suponhamos que $A \simeq \mathcal{P}(A)$.

Seja $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ uma função bijetora. Então, em particular, $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ é uma função sobrejetora.

Seja B o conjunto de todos os elementos x de A tais que $x \notin f(x)$.

Como B é um subconjunto de A , ou seja, B é um elemento de $\mathcal{P}(A)$ e f é sobrejetora, então existe $b \in A$ tal que $B = f(b)$.

Assim, temos que:

$b \in B$ se e somente se $b \notin f(b)$ (pela definição de B).

e

$b \in B$ se e somente se $b \in f(b)$ (pois $B = f(b)$).

Portanto, temos uma contradição. Assim $A \not\approx \mathcal{P}(A)$

Além disso, a função que a cada $x \in A$ associa o conjunto $\{x\}$ é uma função injetora de A em $\mathcal{P}(A)$. Com isso encerramos a demonstração e estabelecemos, como dissemos antes, a existência de infinitas cardinalidades infinitas, a saber

\mathbb{N} conjunto dos números naturais, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ...

□

O trabalho informal de Cantor parece gerar alguns resultados paradoxais, como é o caso da chamada antinomia de Cantor. Ao considerarmos o conjunto de todos os conjuntos (isto é, o conjunto universo), \mathbb{U} , temos, pelo teorema de Cantor demonstrado acima, que o conjunto potência de \mathbb{U} tem a cardinalidade maior do que cardinalidade de \mathbb{U} , mas, isso se apresenta como paradoxal pois \mathbb{U} abrangeria todos os conjuntos.

Em ZFC não existe \mathbb{U} (o conjunto de todos os conjuntos), veremos isso no capítulo 3. Mas o trabalho de Cantor, e em particular o teorema de Cantor, é anterior à axiomatização de ZFC. Cantor dividia os conjuntos em três tipos: os finitos, os transfinitos (infinitos imersíveis em conjuntos maiores; para o nosso trabalho, não é preciso mais do que uma compreensão intuitiva dessa noção de imersão) e os absolutamente infinitos, (como, por exemplo, o conjunto de todos os conjuntos). Por

meio dessa divisão, Cantor contornava o paradoxo apresentado acima, sustentando que os conjuntos absolutamente infinitos estavam além da racionalidade humana e, assim, além da matemática. Portanto, a obtenção de contradições envolvendo tais conjuntos não abalava Cantor, porque ele entendia que as leis matemáticas que produziam essas contradições não se aplicavam aos conjuntos absolutamente infinitos. Havia um certo componente teológico nas suas conclusões:

Along the way, particularly important in his endnotes, Cantor discussed all kinds of philosophical and theological questions. The notion of God or the Absolute played an important part in his thought, also in connection with set theory. Among philosophers it had been customary to identify actual infinity with the Absolute, and to deny the possibility of determining the actual infinite by numbers, since this would have amounted to the impious idea that God can be determined by human reason. Cantor took it as his duty to defend his theory of the transfinite against theological objections, and he entered into correspondence with many theologians, particularly Catholics. (...) He proposed the following maxim: "Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possum- all things finite or infinite are definite and, God excepted, can be determined by the intellect. In an endnote [1883, 205] Cantor stated that the Absolute can only be acknowledged, not known, not even approximately known. And he went on to suggest that the absolutely infinite sequence of the transfinite numbers seems to be an adequate "symbol" for the Absolute [op.cit., 205]. This served as an important background for his reaction to the set-theoretical paradoxes, since it suggested that there is no set of all ordinals, because the Absolute cannot be determined. If the totality of ordinals represents the Absolute, it should also be beyond what can be mathematically determined, beyond the transfinite. There would be no set, no collection into a whole, of all ordinals (see VIII.8) (FERREIRÓS (2000) p.261-262)

2.3 Lógica de Primeira Ordem

Em fins do século 19 e início do século 20, tivemos o surgimento de várias tendências filosóficas na matemática. Uma destas tendências foi o logicismo, que visava fornecer uma base para a aritmética, no caso de Frege, ou para a matemática como um todo, no caso de Russell, baseada apenas em princípios lógicos, ou seja, visava reduzir a aritmética ou a matemática como um todo, conforme o caso, à lógica. Isso levou ao estabelecimento da lógica contemporânea. Os fundamentos da matemática também foram explorados por matemáticos como Dedekind, Cantor e Hilbert, em áreas como aritmética, teoria dos conjuntos e geometria. Assim, o desenvolvimento da lógica alcançou novos patamares e os projetos envolvendo teorias científicas e reduções ontológicas continuaram a florescer.

Kleene em sua obra *Mathematical Logic*¹⁸ destaca que as abordagens atuais da lógica seguem seu desenvolvimento por meios matemáticos, o que nos conduz

¹⁸ KLEENE (2002)

ao seguinte questionamento: como podemos tratar a lógica matematicamente (ou em qualquer outra sistematização) sem que usemos a lógica neste tratamento? A solução do problema se dá de maneira simples, pela divisão do estudo da lógica em duas partes. A lógica que estudamos será colocada na primeira parte e a lógica que usamos para fazer o estudo será colocada na outra parte. A lógica que estudamos será considerada segundo sua própria linguagem, construída de modo artificial segundo rigores matemáticos. Essa é a linguagem-objeto. E, o estudo dessa linguagem – incluindo sua estrutura lógica – se dará em outra linguagem, a qual Kleene chama de “*observer’s language*” ou linguagem do observador. É costume atualmente usar o termo metalinguagem para a “*observer’s language*”.

Historicamente os estudos de lógica por meios matemáticos forneceram uma sintaxe e, posteriormente uma semântica para a linguagem-objeto.

Tradicionalmente a lógica tem se ocupado de relações entre enunciados, e de propriedades de enunciados, que valem apenas em virtude da “forma”, independentemente do “conteúdo”. A lógica contemporânea representa as formas de enunciados por certas expressões simbólicas chamadas de fórmulas, envolvendo símbolos específicos.

2.3.1 Linguagens de Primeira Ordem

Primeiramente, tratemos, de forma resumida, da sintaxe¹⁹. Uma linguagem de primeira ordem possui os seguintes símbolos:

- a. As variáveis: $x, y, z, w, x', y', z', x'', \dots$;
- b. Para cada n , os símbolos de função n -ária e os símbolos de predicado n -ário;
- c. Os símbolos: \neg, \vee, \exists

Para cada n , o número de símbolos de função n -ária pode ser zero ou diferente de zero, finito ou infinito. O mesmo vale para os símbolos de predicado, exceto que dentre os símbolos de predicado binário deve estar o símbolo de igualdade $=$.

Um símbolo de função 0-ária é chamado de constante. Um símbolo de função ou um símbolo de predicado diferente de $=$ é chamado de símbolo não lógico; os outros símbolos são chamados de símbolos lógicos.

Parênteses, os demais conectivos $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ e o símbolo do quantificador universal \forall podem ser introduzidos da maneira usual²⁰ por meio de definições.

¹⁹ Seguimos de perto, nesta seção e suas sub-seções SHOENFIELD (2001) quando outra referência for usada, ela será indicada

²⁰ Ver nota anterior acerca da referência para a maneira usual.

As definições de termo, fórmula atômica, fórmula, ocorrência livre de uma variável em uma fórmula, ocorrência ligada de uma variável em uma fórmula e sentença (ou fórmula fechada) são as usuais.

Passemos agora à semântica.

Faremos uma descrição precisa da semântica (interpretações do significado de símbolos ou expressões) de linguagens de primeira ordem. Um significado para uma linguagem de primeira ordem consiste em um universo, que é um conjunto não vazio, e um significado apropriado para cada símbolo não lógico. Neste sentido definimos:

Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem. Uma estrutura \mathfrak{A} para \mathcal{L} consiste nas seguintes coisas:

- (i) Um conjunto não vazio $|\mathfrak{A}|$, chamado universo de \mathfrak{A} . Os elementos de $|\mathfrak{A}|$ são chamados indivíduos de \mathfrak{A} .
- (ii) Para cada símbolo de função n -ária f de \mathcal{L} , uma função n -ária $f_{\mathfrak{A}}$ de $|\mathfrak{A}|$ para $|\mathfrak{A}|$. (Em particular, para cada constante e de \mathcal{L} , $e_{\mathfrak{A}}$ é um indivíduo de \mathfrak{A} .)
- (iii) Para cada símbolo de predicado n -ário p de \mathcal{L} diferente de $=$, um predicado n -ário $p_{\mathfrak{A}}$ em $|\mathfrak{A}|$.

A especificação do valor de verdade de uma sentença de uma linguagem de primeira ordem em uma estrutura para essa linguagem é feita da maneira usual e a noção semântica de consequência lógica também é a usual. Ver SHOENFIELD (2001).

2.3.2 Sistemas Formais e Teorias de Primeira Ordem

Um sistema formal²¹ é uma tripla constituída por uma linguagem, axiomas e regras de inferência. A linguagem de um sistema formal fica especificada quando são especificados seus símbolos e suas fórmulas (as fórmulas são certas expressões, isto é, certas sequências finitas de símbolos).

De cada axioma exigimos apenas que ele seja uma fórmula.

Cada regra de inferência diz que, sob certas condições, uma fórmula, chamada de conclusão dessa regra, pode ser inferida de outras fórmulas, chamadas de hipóteses dessa regra.

Uma regra de um sistema formal é dita finita se e somente se ela tem apenas um número finito de hipóteses.

Seja F um sistema formal no qual todas as regras são finitas. Uma prova, ou demonstração, em F é uma sequência finita de fórmulas da linguagem de F , tal que

²¹ Em linhas gerais, continuamos nesta seção a seguir SHOENFIELD (2001).

cada uma dessas fórmulas é um axioma de F ou é a conclusão de uma regra de inferência de F , cujas hipóteses precedem essa fórmula nessa prova. Se A é última fórmula de uma prova P em F dizemos P é uma prova de A em F .

Seja A uma fórmula da linguagem de F , dizemos que A é um teorema de F se e somente se existe uma prova de A em F .

Uma teoria de primeira ordem é um sistema formal T tal que:

- (i) a linguagem de T é uma linguagem de primeira ordem;
- (ii) os axiomas de T são os axiomas lógicos na linguagem de T (a serem especificados abaixo). E, por vezes e de fato nos casos interessantes, certos axiomas adicionais chamados de axiomas não lógicos;
- (iii) as regras de inferência de T são Regra de Expansão, Regra de Contração, Regra Associativa, Regra do Corte, Regra de Introdução do \exists (a serem especificadas abaixo).

Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem

Um axioma proposicional em \mathcal{L} é uma fórmula da forma $\neg A \vee A$, em que A é uma fórmula de \mathcal{L} .

Um axioma de substituição em \mathcal{L} é uma fórmula da forma $Ax[a] \rightarrow \exists xA$ em que x é uma variável e A é uma fórmula de \mathcal{L} ($Ax[a]$ indica a substituição usual²²).

Um axioma de identidade em \mathcal{L} é uma fórmula da forma $x = x$, em que x é uma variável.

Um axioma de igualdade em \mathcal{L} é uma fórmula da forma $(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$

ou da forma

$$(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n) \rightarrow (px_1 \dots x_n \rightarrow py_1 \dots y_n)$$

Em que $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ são variáveis.

f é um símbolo de função n -ária de \mathcal{L} . E p é um símbolo de predicado de \mathcal{L} .

Um axioma lógico é uma fórmula que é um axioma proposicional em \mathcal{L} , ou um axioma de substituição em \mathcal{L} , ou um axioma de identidade em \mathcal{L} , ou um axioma de igualdade em \mathcal{L} .

Sejam A, B, C fórmulas de \mathcal{L} e x uma variável. Introduzimos agora cinco regras de inferência:

²² Veja SHOENFIELD (2001) p.17 para a notação.

- (i) Regra de Expansão. Inferir $B \vee A$ a partir de A ;
- (ii) Regra de Contração. Inferir A a partir de $A \vee A$;
- (iii) Regra Associativa. Inferir $(A \vee B) \vee C$ a partir de $A \vee (B \vee C)$;
- (iv) Regra do Corte. Inferir $B \vee C$ a partir de $A \vee B$ e $\neg A \vee C$;
- (v) Regra de Introdução do \exists . Se x não está livre em B , inferir $\exists x A \rightarrow B$ a partir de $A \rightarrow B$.

Poderemos chamar as teorias de primeira ordem simplesmente de teorias. Notemos que, para especificar uma teoria, só precisamos especificar os símbolos não lógicos de sua linguagem e seus axiomas não lógicos.

Como dissemos antes, os axiomas lógicos e as regras de inferência podem ser especificados de diversos modos. Aqui, seguindo SHOENFIELD (2001), adotamos o modo acima.

Por um modelo de uma teoria T , entendemos uma estrutura para a linguagem de T , na qual todos os axiomas não lógicos de T são verdadeiros. Uma fórmula é verdadeira em T se e somente se for verdadeira em todo modelo de T ; de forma equivalente, se e somente se for uma consequência lógica dos axiomas não lógicos de T .

É importante observar o potencial pleno do que pode ser feito com linguagens de primeira ordem. Um caso particularmente relevante é o da matemática usual, cujo discurso pode ser expresso em uma linguagem de primeira ordem, a saber, a linguagem da teoria padrão de conjuntos, ZFC. Além disso, para Quine, lógica é a lógica de primeira ordem clássica²³ e, portanto, as linguagens consideradas em procedimentos de regimentação são linguagens de primeira ordem.

A noção de isomorfismo entre estruturas também é a usual, ou seja, duas estruturas para uma mesma linguagem de primeira ordem são isomorfas se e somente se existe uma função bijetora entre os domínios dessas estruturas que preserva as relações e as operações de ambas.

Duas interpretações \mathfrak{A} e \mathfrak{B} para uma mesma linguagem de primeira ordem \mathcal{L} são ditas *elementarmente equivalentes* se e somente se para toda sentença S de \mathcal{L} temos que: S é verdadeira em \mathfrak{A} se e somente se S é verdadeira em \mathfrak{B} . Notemos que, interpretações isomorfas são elementarmente equivalentes. A recíproca disso não vale. Interpretações elementarmente equivalentes podem não ser isomorfas, e esse é um ponto importante neste trabalho, especialmente no que diz respeito aos

²³ RESNIK (2005) p.433

chamados modelos não *standard* da aritmética. Um modelo não *standard* da aritmética é uma interpretação da linguagem da aritmética que é elementarmente equivalente à interpretação padrão da aritmética, mas que não é isomorfa à interpretação padrão da linguagem da aritmética.

Também será importante no que segue o conceito de *subinterpretação* de uma interpretação de uma linguagem de primeira ordem.

Uma interpretação \mathcal{I} é chamada de subinterpretação de uma interpretação \mathcal{J} se \mathcal{I} e \mathcal{J} são interpretações de uma mesma linguagem e

1. O domínio E de \mathcal{I} é um subconjunto do domínio de \mathcal{J} ;
2. \mathcal{I} atribui aos nomes as mesmas designações de \mathcal{J} ;
3. \mathcal{I} atribui a um símbolo de função n -ária f à função g que recebe valores apenas nas sequências c_1, \dots, c_n de objetos em E e, para os quais $g(c_1, \dots, c_n) = \mathcal{J}(f)(c_1, \dots, c_n)$, onde $\mathcal{J}(f)$ é a interpretação de f em S ;
4. \mathcal{I} atribui às letras sentenciais os mesmos valores de verdade que \mathcal{J} ; e
5. \mathcal{I} especifica que um predicado n -ário R é verdadeiro de uma sequência c_1, \dots, c_n de objetos em E se e somente se \mathcal{J} especifica que R é verdadeira de c_1, \dots, c_n

2.4 Teoremas de Löwenheim-Skolem e da Compacidade

Apresentamos a seguir o enunciado do Teorema de Löwenheim-Skolem.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Löwenheim-Skolem). *Se um conjunto de sentenças de uma linguagem de primeira ordem enumerável tem um modelo, então tem um modelo cujo domínio é enumerável.*

Essa não é a chamada forma forte desse teorema. Apresentaremos a forma forte mais adiante, no capítulo 5. O teorema de Löwenheim-Skolem, na forma forte, é central para esta tese. Um esboço de sua prova e algumas de suas implicações serão discutidos com maior profundidade, como já comentado, no capítulo 5, após termos concluído as exposições da teoria de conjuntos ZFC no capítulo 3 e do sistema metafísico de Quine no capítulo 4.

Teorema 2.4.2 (Teorema da Compacidade). *Se todo subconjunto finito de um conjunto de sentenças de uma linguagem de primeira ordem tem modelo, então esse conjunto inteiro tem modelo.*

Uma consequência interessante do teorema da compacidade é a inexistência de um axioma de finitude, isto é, a inexistência de uma sentença que seja verdadeira em todas as suas interpretações cujos domínios são finitos e apenas em tais interpretações. De fato, se Γ é um conjunto de sentenças que possuem modelos finitos arbitrariamente grandes, então Γ possui um modelo cujo domínio é infinito²⁴.

2.5 Exemplo de um sistema formal para a aritmética dos números naturais

Nesta tese, quando acompanhamos os argumentos de Quine, notamos que um exemplo importante de redução ontológica é a dos números naturais a conjuntos. Quando analisamos esse procedimento, trabalhamos de dentro da ciência com a filosofia (que faz parte da ciência) esclarecendo aspectos formais do procedimento de redução, como Quine diz que devemos trabalhar. Detalhes sobre tais argumentos serão vistos adiante. Portanto, é importante fornecer um exemplo de sistema formal que nos permita trabalhar com os números naturais e sua aritmética.

A formalização axiomática da aritmética dos números naturais foi um processo longo e complexo envolvendo um grande número matemáticos e filósofos ao longo dos séculos²⁵.

Alguns consideram que o primeiro autor a tratar da aritmética de forma axiomática foi Euclides (c. 325-265 a.C.) na famosa obra "Elementos", publicada por volta de 300 a.C. Nela, Euclides apresenta um conjunto de axiomas para a geometria, mas também utiliza alguns desses axiomas para a aritmética, como o axioma da igualdade e o axioma da adição. Cabe destacar que Euclides não axiomatizou toda a aritmética, deixando, nessa área, muito trabalho para ser feito posteriormente. Lembramos também que sua abordagem axiomática para a geometria viria a ser tornada mais precisa em fins do século XIX.

No século XVII, Descartes (1596-1650) se ocupou do tema da axiomatização da aritmética, entretanto uma tal axiomatização não foi obtida por ele. No século XIX, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916) apresentou sua construção dos números reais no artigo Continuidade e Números Irracionais (1872) e depois uma axiomatização da aritmética dos números naturais, em *Was sind und was sollen die Zahlen?*(1888)²⁶.

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), no final do século XIX, também apresentou, inspirado em Dedekind, uma axiomatização para a aritmética. Uma

²⁴ BOOLOS, JEFFREY. (1989) p.144 e p.146

²⁵ Veja, por exemplo EVES (2004) e RADU (2003)

²⁶ EWALD (2007) p.787-833

versão dessa axiomatização pode ser encontrada em Russell (2007)²⁷. Os conceitos primitivos são os de 0, número e sucessor, e os axiomas são os seguintes:

- (i) 0 é um número;
- (ii) O sucessor de um número é um número;
- (iii) Não há dois números com o mesmo sucessor (isto é, números diferentes têm sucessores diferentes);
- (iv) 0 não é o sucessor de número algum;
- (v) Toda propriedade que pertença a 0 e também pertença ao sucessor de todo número que tem essa propriedade pertence a todos os números.

A quantificação sobre propriedades que aparece em (v) pode ser apresentada diretamente em lógica de segunda ordem ou pode ser tratada como um esquema de axiomas em lógica de primeira ordem. Para uma análise do pensamento de Quine, ficamos com a segunda alternativa. Este é o chamado o princípio de indução matemática.

Também no século XIX, o matemático e filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925) lidou com a aritmética, tentando mostrar que ela pode ser reduzida à lógica. Para isso, é claro, ele desenvolveu uma nova lógica e alcançou resultados muito importantes²⁸, mas, como é bem sabido, a teoria de Frege era inconsistente, conforme apontou Bertrand Russell em 1902²⁹.

A questão dos fundamentos da matemática e do paradoxo apresentado por Russell o motivou juntamente com Alfred North Whitehead (1861-1947) a desenvolverem uma nova formalização da aritmética em seu livro *Principia Mathematica* (1910-1913). Ambos utilizaram uma teoria dos tipos para evitar a inconsistência que havia sido encontrada na teoria de Frege

Um resultado muito importante para os estudos em fundamentos da aritmética foi apresentado em 1931. Kurt Gödel (1906-1978) publicou seu famoso primeiro teorema da incompletude, que enunciaremos adiante em uma forma que não é aquela originalmente publicada por Gödel.

Apresentamos a seguir um exemplo de teoria de primeira ordem, isto é, um sistema formal como visto na seção 2.3.2 da presente tese³⁰.

²⁷ RUSSELL(2007) p.22

²⁸ Ver Conceitografia (1879), Fundamentos da Aritmética (1894) e Leis básicas da Aritmética (vol 1 1893 e vol 2 1903)

²⁹ <http://nulfic.org/traducoes/gottlob-frege/carta-de-russell-a-frege-16-de-junho-de-1902/> acessado em 18/08/2023

³⁰ Adaptamos BOOLOS, JEFFREY (1989)

2.5.1 Um exemplo de teoria de primeira ordem associada ao primeiro teorema de incompletude de Gödel

A teoria Q ³¹

A linguagem da teoria Q é aquela cujos símbolos não lógicos são:

0 : constante

S : símbolo de função unária

$+$: símbolo de função binária

\cdot : símbolo de função binária

Essa é a chamada linguagem da aritmética.

Os axiomas não lógicos são os seguintes:

$$Q1) \forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$$

$$Q2) \forall x \ 0 \neq Sx$$

$$Q3) \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \ x = Sy)$$

$$Q4) \forall x \ x + 0 = x$$

$$Q5) \forall x \forall y \ x + Sy = S(x + y)$$

$$Q6) \forall x \ x \cdot 0 = 0$$

$$Q7) \forall x \forall y \ x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$$

Essa teoria de primeira ordem é a chamada aritmética de Robinson (na verdade, essa é uma versão da aritmética de Robinson).

A interpretação padrão, \mathcal{N} , da linguagem da aritmética, \mathcal{L} , é a seguinte:

$$|\mathcal{N}| = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$0_{\mathcal{N}} = 0$$

$S_{\mathcal{N}}$ = função sucessor nos números naturais.

$+_{\mathcal{N}}$ = função soma nos números naturais

$\cdot_{\mathcal{N}}$ = função multiplicação nos números naturais

³¹ BOOLOS, JEFFREY (1989), p.157

\mathcal{N} é um modelo da teoria Q , isto é, todos os axiomas não lógicos de Q são verdadeiros na interpretação \mathcal{N} . Portanto, devido a correção do sistema dedutivo da LPO aqui adotado, todos os teoremas de Q são verdadeiros em \mathcal{N} . A recíproca definitivamente não é o caso! Existem sentenças da linguagem da aritmética que são verdadeiras em \mathcal{N} , mas não são teoremas de Q .

Por exemplo

$$\forall x \forall y \ x + y = y + x$$

ou ainda

$$\forall x \forall y \ x \cdot y = y \cdot x$$

Para constatar isso basta considerar a seguinte interpretação da linguagem da aritmética³²:

- (i) Domínio: $\{a, b, 0, 1, 2, 3, \dots\}$; onde a e b são objetos distintos que não são números naturais.
- (ii) Interpretação de $0 = 0$
- (iii) As interpretações de $S, +, \cdot$ são dadas pela Tabela 1 a seguir, respectivamente

			j	a	b			0	$j \neq 0$	a	b
i	$i + 1$	i	$i + j$	b	a	0	0	0	a	b	
a	a	a	a	b	a	$i \neq 0$	0	$i \times j$	a	b	
b	b	b	b	b	a	a	0	b	b	b	
						b	0	a	a	a	

Tabela 1 – Interpretação alternativa para linguagem da aritmética.

As sentenças $\forall x \forall y \ x + y = y + x$ e $\forall x \forall y \ x \cdot y = y \cdot x$ são falsas nessa interpretação, mas essa interpretação é um modelo de Q , logo, essas sentenças não são consequências lógicas dos axiomas não lógicos de Q , e assim não são teoremas de Q .

As demonstrações dessas sentenças envolvem os axiomas de indução que estão presentes na aritmética de Peano mas não em Q . Enunciemos agora uma versão do primeiro teorema de incompletude de Gödel

Teorema 2.5.1 (Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel). *Não existe extensão consistente, completa e axiomatizável de Q .*

³² BOOLOS, JEFFREY (1989) p.169

As definições de extensão de uma teoria, de teoria consistente e de teoria completa são as usuais. A definição de teoria axiomatizável é a seguinte: uma teoria é dita axiomatizável se e somente se o conjunto dos números de Gödel de seus axiomas não lógicos é recursivo.

O significado do primeiro teorema de incompletude de Gödel pode também ser expresso como “qualquer sistema formal da aritmética (ou da matemática) que seja suficientemente forte é incompleto, a menos que seja inconsistente”. Nesta versão, o primeiro teorema de incompletude de Gödel indica uma condição para ser “suficientemente forte”, a saber, ser uma extensão de Q . É interessante notar que a definição de teoria que adotamos, aquela de teoria como sistema formal, não exige que os axiomas da teoria sejam algoritmicamente identificáveis, isto é, não exige que o conjunto dos números de Gödel dos axiomas da teoria seja recursivo. A condição de ser axiomatizável, mencionada acima, põe em causa justamente a capacidade de identificar algoritmicamente os axiomas da teoria³³.

Uma das consequências mais importantes do primeiro teorema da incompletude é o que ele diz sobre as noções de verdade (na interpretação padrão da linguagem da aritmética) e demonstrabilidade em um sistema formal nas condições acima. Essas noções não são, de modo algum, as mesmas³⁴.

Para utilização futura, introduzimos a noção seguinte; uma interpretação da linguagem da aritmética na qual as sentenças verdadeiras são as mesmas sentenças verdadeiras em \mathcal{N} , mas que não é isomorfa a \mathcal{N} , é dita um modelo não padrão (*non-standard model*) da aritmética. Existem modelos não padrão da aritmética cujos domínios são conjuntos infinitos enumeráveis. Voltaremos a este tema no capítulo 6 da presente tese.

2.5.2 Uma outra concepção de teoria

Seja \mathcal{L} uma linguagem de primeira ordem. Uma teoria em \mathcal{L} é um conjunto de sentenças de \mathcal{L} fechado por consequência lógica em \mathcal{L} . Essa concepção de teoria, também usual na literatura, é interessante no que nos diz respeito neste trabalho, para analisar certos aspectos do pensamento de Quine.

Com essa concepção, a teoria Q que apresentamos acima seria o conjunto das sentenças da linguagem da aritmética que são consequências lógicas das sentenças $Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6$ e $Q7$.

³³ Em certos contextos, é importante distinguir entre teoria axiomatizável e teoria axiomatizada; há textos nos quais a definição que demos acima é a de teoria axiomatizada, mas, ao menos por ora, não precisamos nos preocupar com isso.

³⁴ BOOLOS, JEFFREY (1989), p.179-180

O primeiro teorema de incompletude de Gödel também se aplica para teorias entendidas desse modo, com as adaptações usuais.

O conjunto das sentenças da linguagem da aritmética que são verdadeiras na interpretação padrão é uma teoria nessa concepção (também, claro, é uma teoria na concepção anterior). Uma consequência do primeiro teorema da incompletude de Gödel é que essa teoria não é axiomatizável.

3 A Teoria de Conjuntos ZFC

3.1 Filosofia e formalismo

Peter Hylton em sua obra *Quine*, observa que

Quine's assumptions are thus very different from those of most philosophers; often he simply takes them for granted, without even articulating them. This fact is no doubt another reason that his work is widely misunderstood. (HYLTON (2007) p.3)

Portanto, a leitura dos textos de Quine, ao longo de sua extensa carreira como filósofo, é frequentemente marcada pela necessidade de articular um conjunto notável de pressupostos relacionados não somente à epistemologia e metafísica, mas também a outras áreas, como a lógica contemporânea e, especialmente em seu projeto metafísico, à teoria padrão de conjuntos ZFC. No primeiro capítulo desta tese, trouxemos certa luz aos aspectos formais que permeiam seu trabalho. Neste terceiro capítulo, o objetivo é apresentar ZFC e alguns aspectos de sua relevância para o projeto metafísico de Quine.

Como veremos em mais detalhes no capítulo seguinte, Quine entende que os esforços do filósofo estão inseridos nos esforços dos cientistas para, de dentro da ciência naturalmente, esclarecer aspectos gerais que envolvem teorias científicas regimentadas em uma linguagem de primeira ordem. Por exemplo, os compromissos ontológicos justamente manifestam-se quando as teorias estão regimentadas¹. ZFC é uma teoria que se adequa muito bem a este entendimento de Quine², pois podemos representar os objetos da matemática, e muitas outras coisas, como veremos adiante, usando os recursos de ZFC.

Quine descreve o procedimento pelo qual iniciamos a nossa compreensão ontológica do mundo com corpos, mas não devemos ficar limitados a eles. O nosso discurso segue do senso comum, da ideia de corpos, rumo a uma generalização ou, mais precisamente, rumo a noção de objeto físico compreendido como conteúdo material de uma porção do espaço-tempo:

More objects are wanted, certainly, than just bodies and substances. We need all sorts of parts or portions of substances. For lack of a definable

¹ Por exemplo: "To assume objects of some sort is to reckon objects of that sort among the values of our variables." - TT p.08

² Embora o próprio Quine tenha proposto outras duas teorias de conjuntos, NF e ML, a consideração dessas outras teorias não é relevante neste trabalho.

stopping place, the natural course at this point is to admit as an object the material content of any portion of space-time, however irregular and discontinuous and heterogeneous. This is the generalization of the primitive and ill-defined category of bodies to what I call physical objects. (TT, p.10)

Essa generalização é um esforço comum no discurso científico, especialmente na formulação de teorias científicas, na qual, novamente, o filósofo poderá reconhecer os compromissos ontológicos de tais teorias. Depois de trocarmos os corpos pelos objetos físicos compreendidos como conteúdos materiais de porções do espaço-tempo, podemos desconsiderar os conteúdos materiais e ficar simplesmente com as porções do espaço-tempo e, por fim, substituir tais porções por conjuntos de quádruplas ordenadas de números reais, ficando assim no âmbito da teoria dos conjuntos, como reconhece Quine:

At this point a further transfer of ontology suggests itself: we can drop the space-time regions in favor of the corresponding classes of quadruples of numbers according to an arbitrarily adopted system of coordinates. We are left with just the ontology of pure set theory, since the numbers and their quadruples can be modeled within it. There are no longer any physical objects to serve as individuals at the base of the hierarchy of classes, but there is no harm in that. It is common practice in set theory nowadays to start merely with the null class, form its unit class, and so on, thus generating an infinite lot of classes, from which all the usual luxuriance of further infinities can be generated. (TT, p.17)

A ontologia quineana é agora composta puramente pela teoria de conjuntos, sem a necessidade de objetos físicos. Hylton assim observa:

Thus we end up in a position that Quine calls “hyper-Pythagoreanism”: our ontology contains only the abstract objects of mathematics—in particular, it contains only sets. (HYLTON (2007) p.306)

Hylton ainda observa que não se trata de uma substituição dos predicados sobre objetos físicos por números e sim sobre quais objetos aceitamos em nossa ontologia. O que dizemos sobre esses objetos não terá apenas conteúdo matemático. Hylton nota que podemos fazer afirmações não matemáticas sobre objetos matemáticos; como exemplo, ele considera a afirmação de que possui 4 irmãs como uma afirmação sobre o número 4.

Uma interessante observação presente no livro *Notes on Set Theory*, de Yiannis Moschovakis³, especificamente em 12.35, se vincula ao pensamento de Quine acerca da adoção de uma ontologia conjuntista. Moschovakis retoma a questão de se devemos assumir a ideia de átomos em nossa teoria de conjuntos, de modo que os teoremas

³ MOSCHOVAKIS (2005) p.189

de ZFC (com átomos) se apliquem diretamente a planetas, ou a sapos, assim como a conjuntos construídos a partir do vazio. O autor então descreve um exemplo no qual um físico estudando o comportamento de corpos celestes substitui esses corpos por certas funções tendo como domínio o conjunto dos números reais e assumindo valores no conjunto das 7-uplas ordenadas de números reais:

First, we can model physical objects and relations among them by structures made up of pure sets, much as we model (up to isomorphism) ordered pairs, functions, the natural numbers, etc. For example, to study the behavior of a system of heavenly bodies P_1, \dots, P_k interacting with each other under gravity, we might represent each of them by a function $\mathcal{P}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^7$, which assigns to each real number $t \in \mathbb{R}$ the mass, position and velocity of P_i , relative to some fixed coordinate system and units. The laws of gravity and motion will then determine these functions; and the physicist does not care whether the set theoretic objects which model the functions $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ are pure or not— what matters are the relations among these functions, which can then be interpreted as relations among the planets and checked against reality by observation. Second, if we value the ability to talk directly about planets within set theory, we can allow a class of atoms (...) The main point is that the physicist does not care about the difference between these two approaches, and *probably cannot even see it*: because all that matters for the application of mathematics (in the example) are the functions \mathcal{P}_i which codify the properties of the planets (...) And so, ultimately, it is most useful to “ban” atoms and accept the simpler ZFC as the “standard” axiomatic set theory, which is what is done without exception in all advanced work on our topic. (MOSCHOVAKIS (2005) p.189, ênfase nossa)

Já Kunen⁴ apresenta assim o motivo primeiro pelo qual matemáticos, lógicos e filósofos estudam ZFC (isto é, alguns matemáticos, lógicos e filósofos): “*We study set theory first because it is the foundation of everything*”. Para o autor, a fundação de tudo tem um especial significado, isto é, fundação de toda a matemática. Com isso, ele quer dizer que todos os objetos matemáticos podem ser representados na teoria ZFC, e que todos os teoremas da matemática podem, em princípio, ser demonstrados em ZFC (há várias teorias de conjuntos, mas ZFC é, digamos, a teoria padrão de conjuntos).

Para conjuntos infinitos em ato, o trabalho inicial foi feito por Cantor nas décadas de 1870, 1880 e 1890, embora a ideia de conjuntos – especialmente os finitos, tenha ocorrido muito antes. Cantor trabalhou intuitivamente e não axiomáticamente, embora estivesse ciente de que o raciocínio intuitivo poderia levar a contradições. A primeira axiomatização deveu-se a Zermelo (1908), e foi melhorada posteriormente por Fraenkel, Skolem, e von Neumann, levando ao atual sistema ZFC, que agora é considerado o sistema padrão de axiomas para a teoria dos conjuntos ou teoria padrão de conjuntos.

Informalmente, nosso universo é a classe dos objetos x que são hereditariamente conjuntos; dizemos que x é hereditariamente um conjunto se e somente se

⁴ KUNEN (2009). p.7

x é um conjunto, todos os elementos de x são conjuntos, todos os elementos dos elementos de x são conjuntos, e assim por diante (naturalmente, podemos expressar com rigor esse “e assim por diante”). Nessa formulação (estilo Zermelo-Fraenkel) dos axiomas, não existem classes próprias (em nosso domínio do discurso).

ZFC, tal como é entendida aqui, é uma teoria de primeira ordem. Isso quer dizer que a linguagem de ZFC é uma linguagem de primeira ordem, que os axiomas de ZFC são os axiomas lógicos nessa linguagem, e certos outros axiomas que chamaremos de não lógicos. Além disso, os teoremas de ZFC são demonstrados a partir dos seus axiomas por meio do uso de regras de inferência. Seguem, portanto, as definições apresentadas anteriormente.

O único símbolo não lógico que a linguagem de ZFC possui é o símbolo de predicado binário \in , que deve ser lido intuitivamente como “pertence a”, “é elemento de” ou “é membro de”. Alguns símbolos adicionais que porventura sejam convenientes serão introduzidos como símbolos definidos, e com eles poderemos construir fórmulas definidas que são abreviações de fórmulas da linguagem de ZFC⁵. De início introduzimos as seguintes notações:

- a. Variáveis x, y, z, w, x', \dots mas vamos nos permitir usar letras do alfabeto latino (a, A, B, b , etc), do grego ($\alpha, \beta, \gamma, \theta, \sigma$, etc) e do hebraico (\aleph);
- b. $x \notin y$ e $x \neq y$ são abreviações para, respectivamente, $\neg(x \in y)$ e $\neg(x = y)$;
- c. Para nos referir a uma fórmula qualquer com variáveis x_1, \dots, x_n dentre suas variáveis livres, escrevemos $\phi(x_1, \dots, x_n)$;
- d. $\exists! x \phi(x)$ é uma abreviação para $\exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi(y) \rightarrow y = x))$ onde $\phi(y)$ resulta da substituição de x por y em $\phi(x)$, submetida à restrição sintática usual.

Se ϕ é uma fórmula, então, um fecho universal de ϕ é uma sentença obtida pela quantificação universal de todas as variáveis livres de ϕ . Por exemplo, se ϕ for $x = y$, então $\forall x \forall y (x = y)$ é um dos fechos universais de ϕ . Todos os fechos universais de uma dada fórmula são logicamente equivalentes; daí falarmos, em um abuso de linguagem, no fecho universal de uma fórmula.

Listaremos a seguir os axiomas de ZFC e apresentaremos definições e resultados que serão úteis para a compreensão do processo de como noções e entidades matemáticas usuais encontram definições precisas em termos conjuntistas. Estabeleceremos também conexões com o projeto metafísico de Quine. As formulações e definições acompanham as formulações originais de Kunen⁶.

⁵ SHOENFIELD (2001) p.6

⁶ KUNEN (1980) e KUNEN (2009)

3.2 Axiomas de ZFC

Axioma 1 (Extensionalidade).

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Este axioma é o critério de identidade para conjuntos. Ele afirma que dois conjuntos, x e y , são iguais se têm a mesma extensão, isto é, se todo elemento de x é elemento de y e vice-versa. Ou seja, um conjunto é completamente determinado por seus elementos. O axioma da Extensionalidade também nos permite usar a notação de conjuntos de maneira clara e inequívoca. A recíproca do enunciado acima é uma lei da lógica.

Axioma 2 (Esquema de axiomas Separação ou Esquema de axiomas de Compreensão). *Para cada fórmula ϕ , da linguagem de ZFC, na qual a variável y não ocorra livre, o fecho universal do que segue é um axioma.*

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi))$$

Notemos que a fórmula ϕ pode ter outras variáveis livres que não estão quantificadas acima. Daí falarmos o fecho universal. Notem que não foi permitido que a variável y ocorresse livre na fórmula ϕ para que se evitassem definições autorreferenciáveis de conjuntos; o exemplo, dado em KUNEN (1980, p.11) é o seguinte: sem essa restrição e com a fórmula ϕ sendo $x \notin y$ ficaríamos com o seguinte “axioma”

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge x \notin y))$$

Isso é inconsistente com a existência de um conjunto não vazio z (estamos assumindo que as pessoas lendo esta tese têm conhecimento de teoria intuitiva dos conjuntos).

Este esquema de axiomas dá origem a infinitos axiomas (daí falamos em “esquema”), que exprimem a seguinte ideia: dados um conjunto z e uma propriedade P , expressa pela fórmula ϕ , temos assegurada a existência de um conjunto y cujos elementos são precisamente os elementos de z que têm a propriedade P . Tal conjunto y é, pelo axioma da extensionalidade, único. Nós o denotamos por $\{x : x \in z \wedge \phi\}$ ou por $\{x \in z : \phi\}$.

O axioma de compreensão ingênuo permite que colemos no universo os elementos que satisfazem ϕ , enquanto que o esquema de axiomas de separação exige que esses elementos sejam coletados somente dentro de conjuntos z “previamente

existentes”. Esse é o ponto que surge na axiomatização de Zermelo e que evita paradoxos, dentre o mais notável, o de Russell, citado anteriormente (páginas 23-24).

Com os Axiomas 1 e 2 podemos provar dois teoremas:

$$\exists y \forall x (x \notin y) \text{ e } \neg \exists z \forall x (x \in z),$$

como veremos a seguir:

Teorema 3.2.1 ($\exists y \forall x (x \notin y)$). *Pela lógica subjacente a ZFC – lógica clássica de primeira ordem – sabemos que o domínio de uma estrutura não pode ser vazio, e, por consequência, a sentença $\exists z (z = z)$ é válida, ou seja, é um teorema da lógica. Informalmente, essa sentença nos diz que existe pelo menos um conjunto z .*

Aplicando o Esquema de Separação sobre z com a propriedade $x \neq x$, isto é, com a fórmula ϕ sendo $x \neq x$, obtemos um conjunto sem elemento algum. Portanto, este teorema diz que existe um conjunto sem elemento algum. Pelo axioma da extensionalidade, temos que esse conjunto é único. Vamos chama-lo de conjunto vazio.

Denotando o conjunto vazio por \emptyset temos que $\emptyset = \{x \in z : x \neq x\}$.

Teorema 3.2.2 ($\neg \exists z \forall x (x \in z)$). *Este teorema nos diz que não existe conjunto universal, isto é, não existe o conjunto de todos os conjuntos. De fato, se existisse um conjunto de todos os conjuntos teríamos uma contradição; novamente o paradoxo de Russell.*

Com os axiomas disponíveis até agora, podemos provar apenas a existência do conjunto vazio. De fato,

Demonstração. Consideremos a seguinte interpretação I da linguagem de ZFC.

Domínio de $I = \{\emptyset\}$

$I(\in) = \emptyset$, isto é \in é interpretado como a relação vazia.

Nessa interpretação os axiomas 1 e 2 são verdadeiros, e a sentença $\exists y (y \neq \emptyset)$ é falsa.

Portanto, a sentença $\exists y (y \neq \emptyset)$ não é consequência lógica dos axiomas 1 e 2. Consequentemente essa sentença não pode ser demonstrada a partir dos axiomas 1 e 2. □

Para utilização futura, usaremos $A \subset B$ abreviando $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$, nesse caso dizemos que A é um subconjunto de B , ou ainda que A está contido em B ; se A é um subconjunto B e A é diferente de B , dizemos que A é um subconjunto próprio de B . Notemos que para todo conjunto A temos $A \subset A$ e $\emptyset \subset A$.

Concluimos, portanto, que precisamos de mais axiomas, presumivelmente seguros e que nos permitam provar a existência de mais conjuntos, muitos conjuntos mais na verdade.

Axioma 3 (Do Par).

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

O axioma 3, do par, afirma que, dados dois conjuntos x e y quaisquer, existe um conjunto z que tem x e y dentre seus elementos. Pelo esquema de axiomas de separação, existe um conjunto cujos elementos são exatamente x e y : $\{w \in z : w = x \vee w = y\}$. Pela extensionalidade, tal conjunto é único, e o denotamos por $\{x, y\}$ e o chamamos de par (não ordenado) de x e y .

De fato pelo axioma do par, ao associarmos x e y podemos permitir que z seja qualquer conjunto tal que $x \in z \wedge y \in z$;

então

$\{w \in z : w = x \vee w = y\}$ é o conjunto (único pelo axioma da Extensionalidade) cujos elementos são precisamente x e y .

Se $x = y$, $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$ chamamos esse conjunto do unitário de x , UNIT x .

Já podemos definir $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$\langle x, y \rangle$ é dito o par ordenado de x e y demonstra-se que $\forall x \forall y \forall x' \forall y' (\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \rightarrow x = x' \wedge y = y')$

Com os axiomas anteriormente apresentados podemos provar a existência de infinitos conjuntos, cada um dos quais com, no máximo, 2 elementos, como visto nos exemplos abaixo. Notemos ainda que isso é diferente de provar a existência de um conjunto com infinitos elementos.

Por exemplo, $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$, etc.

Ou ainda, $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.

O axioma do Par tem relações importantes com o projeto metafísico de Quine, o qual está inserido no seu sistema filosófico. Em *Word and Object* Quine apresentou o par ordenado como um modelo exemplar de explicação filosófica:

This construction is paradigmatic of what we are most typically up to when in a philosophical spirit we offer an “analysis” or “explication” of some hitherto inadequately formulated “idea” or expression. We do not claim synonymy. We do not claim to make clear and explicit what the users of the unclear expression had unconsciously in mind all along. We do not expose hidden meanings, as the words ‘analysis’ and ‘explication’

would suggest; we supply lacks. We fix on the particular functions of the unclear expression that make it worth troubling about, and then devise a substitute, clear and couched in terms to our liking, that fills those functions. Beyond those conditions of partial agreement, dictated by our interests and purposes, any traits of the explicans come under the head of “don’t-cares” (§ 38). Under this head we are free to allow the explicans all manner of novel connotations never associated with the explicandum. (WO, p.238)

O par ordenado oferece um modelo no qual interesses e propósitos indicam como fixar funções relevantes de expressões que não eram claras, isto é, sem recorrer a significados que estejam obscurecidos em nossas mentes e sejam então esclarecidos. A obscuridade abaixo, em Peirce, é citada por Quine:

The Dyad is a mental Diagram consisting of two images of two objects, one existentially connected with one member of the pair, the other with the other; the one having attached to it, as representing it, a Symbol whose meaning is “First,” and the other a Symbol whose meaning is “Second.” (WO, p.237)

Quine não tem apreço pela abordagem que considera questões relacionadas ao significado, tampouco acredita que há um compartimento em nossas mentes onde os significados possam residir. Como veremos mais adiante nesta tese, o conhecimento está intimamente ligado ao nosso uso da linguagem, isto é, um aspecto comportamental (não será objetivo da presente tese discutir se o par ordenado, segundo Quine, tem ou não um caráter behaviorista). Este procedimento, em que o significado contido no *explicans* passa a importar menos, é alcançado ao estabelecermos uma função que assegura os parâmetros necessários a compreensão. Podemos ilustrar melhor tais questões considerando a propriedade fundamental do par ordenado, $\forall x \forall y \forall x' \forall y' (\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \rightarrow x = x' \wedge y = y')$, e, em seguida, como a definição de par ordenado é apresentada de formas diferentes, preservando sempre a propriedade fundamental, pelos matemáticos N. Wiener (1894 — 1964) e F. Hausdorff (1868 — 1942).

Quine destaca que:

For illustrative purposes a special virtue of the notion of ordered pair is that mathematicians pretty deliberately introduced it, subject in effect to the single postulate:

(1) If $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$ then $x = z$ and $y = w$. (...) Yet it is central to the purposes of the notion of ordered pair to admit ordered pairs as objects. If relations are to be assimilated to classes as classes of ordered pairs, ordered pairs must be available on a par with other objects as members of classes. (WO, p.237)

Já a definição de Wiener [1914] para o par ordenado $\langle x, y \rangle$ é a seguinte⁷:

$$\{\{\{x\}, \Lambda\}, \{\{y\}\}\}$$

Wiener trabalhou no contexto da teoria dos tipos e forneceu uma definição do par ordenado em termos apenas de pares não ordenados de classes, reduzindo assim as relações a classes. Nesse sentido, x e y são do mesmo tipo e Λ é a classe nula (do próximo tipo). Essa definição satisfaz a propriedade fundamental. Wiener a utilizou para eliminar do sistema do Principia Mathematica, de Whitehead e Russell, o Axioma da Redutibilidade para funções proposicionais de duas variáveis⁸.

Hausdorff no clássico texto *Grundzüge der Mengenlehre* [1914], definiu um par ordenado em termos de pares não ordenados, formulou funções em termos de pares ordenados e relações de ordem como coleções de pares ordenados. (Ele não definiu uma relação arbitrária dessa forma, pois naquela época não havia uso matemático para isso, mas foi o primeiro a considerar ordenações parciais gerais, como em seu princípio de maximalidade⁹) Hausdorff assim seguiu as propostas tanto de Peano [1911, 1913] quanto de Wiener [1914] na prática matemática, completando a redução de funções a conjuntos. Ele também se orientou pelo trabalho pioneiro de Dedekind e Cantor, no auge de uma grande mudança na matemática, da qual a transição de uma concepção intensional e governada pela ideia de função como regra para uma concepção extensional e arbitrária era uma parte importante¹⁰.

Em sua definição, Hausdorff considerou o par ordenado de x e y como

$$\{\{x, 1\}, \{y, 2\}\}$$

onde 1 e 2 eram objetos distintos, alheios à situação. Deve-se destacar que a definição funciona mesmo quando x ou y são 1 ou 2, para novamente manter a propriedade instrumental fundamental dos pares ordenados.

A definição agora padrão é a mais intrínseca¹¹:

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Ela é devida a Kazimierz Kuratowski [1921:171]. É importante destacar, que a definição de Kuratowski é um subproduto de sua análise da prova do Teorema da

⁷ A. Kanamori. The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair em: The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 3 (Sep., 2003), pp. 273-298

⁸ A. Kanamori. The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair em: The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 3 (Sep., 2003), pp. 280

⁹ Ver Kunen 2013 p.71

¹⁰ KANAMORI (2003)

¹¹ KANAMORI (2003)

Boa Ordenação de Zermelo [1904]¹². Não apenas a definição satisfaz a propriedade fundamental, mas também requer apenas a combinação de x e y em pares.

Percebemos, portanto, que a definição de par ordenado estabelece o que é necessário para sanar quaisquer outras dúvidas. É possível identificar que, mesmo sendo diferentes, todas as definições apresentadas anteriormente podem ser reconhecidas como em conformidade, no que importa, com a definição original. Identificamos ainda o que deve ser explicado quando precisamos compreender o que é um par ordenado.

Quine não se aprofunda sobre a questão no *Word and Object*, entretanto, a noção de par ordenado também traz sérias consequências para as questões de redução ontológica, outro tema da presente tese. Vejamos o caso de P. Hylton que escreve ao analisar a caracterização de par ordenado como paradigma filosófico:

When translated via the definition, the fundamental postulate becomes simply a theorem of ordinary set-theory. This is all we need; to justify identifying a given kind of entity with ordered pairs nothing more is necessary than that we be able to prove that this postulate holds of that kind of entity. (HYLTON, p.247)

O que nos chama atenção nesta passagem é que a noção de par ordenado deve ser tal que permita definir produto cartesiano $A \times B$, o que ainda não temos condições de fazer com os axiomas apresentados até o momento. E justamente a incorporação de outros axiomas tem repercussão nos domínios das interpretações da teoria considerada e, conseqüentemente, segundo o sistema de Quine, na ontologia. Isso vai além do que é necessário para assegurar a obtenção da propriedade fundamental.

Portanto, o que Hylton fala requer que mais elementos sejam colocados no contexto. E tais elementos são vinculados, como dissemos acima, à noção de produto cartesiano, pois com o produto cartesiano poderemos formar conjunto de pares ordenados e assim, segundo Quine, reconhecer pares ordenados como objetos. Ele é sucinto em *Word and Object*, entendemos, por uma questão pedagógica, isto é, seu interesse é mostrar o par como modelo de explicação e, portanto, não precisa ali explorar outros aspectos.

Entretanto, para examinar o projeto metafísico de Quine, além de conseguir provar que a propriedade fundamental vale, também temos de provar que existe o produto cartesiano de dois conjuntos. A necessidade de estabelecer o produto cartesiano de dois conjuntos tem repercussões ontológicas substanciais.

Quando fazemos teoria axiomática de conjuntos, em particular com o objetivo de abordar questões filosóficas mais gerais e abstratas, temos que saber que axiomas são

¹² Ver A. Kanamori. The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair em: The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 9, No. 3 (Sep., 2003), pp. 285

usados para provar quais teoremas. E é esse o aspecto que o par ordenado nos lembra quando pensamos no produto cartesiano, indo muito além da propriedade fundamental. Não é apenas uma questão matemática, mas ontológica, por causa de certas provas de existência, que dependem de tais ou quais axiomas, sobretudo quando temos a redução ontológica em mente.

Antecipando, por exemplo, Kunen¹³ ao comentar sobre o Axioma do Conjunto das Partes e sobre BST (*Basic Set Theory* ou Teoria Básica dos Conjuntos) demonstra que o Axioma do Conjunto das Partes pode ser usado no lugar do Esquema de Substituição para provar a existência de \mathbb{N}^* , para $\mathbb{N}^* = \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$, uma vez que $\mathbb{N}^* = \{y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \exists x[x \in \mathbb{N} \wedge y = \{x\}]\}$. Segundo Kunen essa prova é um pouco deselegante, pois requer a existência do conjunto não enumerável $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ para construir o conjunto enumerável \mathbb{N}^* . Para Quine, preocupado com economia ontológica, isso pode ser pior do que uma ligeira deselegância.

O que nos salta aos olhos, quando pensamos sobre as questões ontológicas em Quine e em ZFC, é que a prova, caracterizada por Kunen acima como algo deselegante, nos indica que devemos ir a uma ontologia menos econômica, representada pelo conjunto não enumerável $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, para então encontrar um membro de uma ontologia mais econômica, a saber, o conjunto enumerável \mathbb{N}^* . A situação piora quando consideramos que o cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pode ser qualquer cardinal infinito que não seja proibido pelo teorema de Cantor ou pelo teorema de König (essa é uma consequência da prova de Cohen da independência da hipótese do continuum). Isso problematiza muito a economia que Quine almeja para as ontologias em seu projeto metafísico. Nota-se também, como dito anteriormente, que as questões relativas aos axiomas têm impactos muito maiores do que se percebia antes, quando o assunto era apenas o par ordenado como um paradigma filosófico. Na verdade, a consideração dos modelos de ZFC, dos quais falaremos adiante, já se mostra, aqui, muito importante.

Axioma 4 (Da união).

$$\forall w \exists z \forall y \forall x (x \in y \wedge y \in w \rightarrow x \in z)$$

O axioma da união diz que, dado qualquer conjunto w , existe um conjunto z ao qual pertencem os elementos dos elementos de w .

Assim, com os axiomas de que dispomos podemos formar o conjunto cujos elementos são precisamente os elementos dos elementos de w . Denotaremos esse conjunto por $\cup w$ e o chamaremos de união de w . De fato,

$$\cup w = \{x \in z : \exists y \in w (x \in y)\}$$

¹³ KUNEN(2013), p.18,22,25 e 127

Dados os conjuntos A e B , definimos $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

Agora podemos formar conjuntos com quaisquer números finitos de elementos. Por exemplo, suponha que A , B e C sejam conjuntos, já podíamos formar o conjunto $\{A, B\}$ e o conjunto $\{C\}$ e a partir desses formar o conjunto $\{\{A, B\}, \{C\}\}$. Agora, usando também o axioma da união, podemos formar o conjunto $\cup\{\{A, B\}, \{C\}\}$, isto é, podemos formar o conjunto $\{A, B\} \cup \{C\}$, cujos elementos são precisamente A , B e C . Denotaremos esse conjunto por $\{A, B, C\}$. O mesmo raciocínio poderia ser usado, dados os conjuntos A , B , C e D para formar o conjunto cujos elementos são precisamente A , B , C e D . Denotaremos esse conjunto por $\{A, B, C, D\}$, etc.

Com os axiomas já apresentados podemos definir as seguintes noções conjuntistas: intersecção, diferença e sucessor, como segue.

Definição 2 (Intersecção). *Qualquer que seja o conjunto $A \neq \emptyset$, definimos o conjunto intersecção de A , denotado por $\cap A$, como $\{x : \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$.*

Se $A = \emptyset$, então $\cup A = \emptyset$ e a $\cap A$ “deveria ser” o conjunto de todos os conjuntos, o qual não existe, isto é, não existe o conjunto universo. Para C e D quaisquer, $C \cap D$ é definido como $\cap\{C, D\}$. Se $A \neq \emptyset$, $\cap A$ existe porque podemos escolher um conjunto B tal que $B \in A$ e separar dele o conjunto $\cap A : \{x \in B : \forall y(y \in A \rightarrow x \in y)\}$.

Definição 3 (Diferença). *Quaisquer que sejam A e B , definimos o conjunto diferença de A e B – nessa ordem e denotado por $A - B$ como $\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$, isto é, $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$*

Definição 4 (Sucessor). *Dado um conjunto x , o conjunto sucessor de x , denotado por $S(x)$, é definido como $S(x) = x \cup \{x\}$. Podemos justificar essa definição usando os axiomas de que já dispomos.*

Axioma 5 (Esquema de Substituição). *Para cada fórmula $\phi(x, y)$, da linguagem de ZFC, na qual z não ocorra livre, o fecho universal do que segue é um axioma:*

$$\forall x \in w \exists! y \phi(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \in w \exists y \in z \phi(x, y)$$

Esse é, como o nome diz, um esquema de axiomas, um axioma para cada fórmula ϕ , da linguagem de ZFC, na qual z não ocorra livre. A ideia, entretanto, que esse esquema exprime é uma só, a saber, dada uma relação funcional (definiremos função adiante, mas contamos com uma compreensão intuitiva desse conceito), expressa pela fórmula ϕ , os correspondentes dos elementos de w por essa relação funcional estão em um conjunto z .

Definição 5 (Produto cartesiano). *Para quaisquer A e B , definimos o produto cartesiano de A por B , denotado por $A \times B$:*

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

Para justificar essa definição, devemos usar os axiomas de substituição duas vezes. Primeiro, para qualquer $y \in B$ temos

$$\forall x \in A \exists! z (z = \langle x, y \rangle)$$

Então, pelos axiomas de substituição (e compreensão) nós podemos definir

$$prod(A, y) = \{z : \exists x \in A (z = \langle x, y \rangle)\}$$

E em seguida

$$\forall y \in B \exists! z (z = prod(A, y)),$$

Então, pelo axioma de substituição podemos definir

$$prod'(A \times B) = \{prod(A, y) : y \in B\}$$

Por fim definimos $A \times B = \cup prod'(A, B)$

Poderíamos provar a existência do produto cartesiano $A \times B$ usando o axioma do conjunto das partes (que introduziremos adiante) e os axiomas de que já dispomos (união, esquema de compreensão, etc), entretanto, isso pode ser uma desvantagem para alguém que, como Quine, goste de “paisagens desertas”:

Wyman's overpopulated universe is in many ways unlovely. It offends the aesthetic sense of us who have a taste for *desert landscapes*(...). (FLPV, p.4, ênfase nossa)

Discutiremos isso com um pouco mais de detalhe no que segue.

Definição 6 (Relação). *Uma relação R é um conjunto de pares ordenados.*

Definição 7 (O domínio de R). $Dom(R) = \{x \in \cup \cup R : \exists y (\langle x, y \rangle \in R)\}$, notemos que assim está justificada a existência do domínio de uma relação.

Definição 8 (A imagem de R). $Im(R) = \{y \in \cup \cup R : \exists x (\langle x, y \rangle \in R)\}$, notemos que assim está justificada a existência da imagem de uma relação.

Sendo R uma relação temos que $R \subset Dom(R) \times Im(R)$.

Definição 9 (Inversa de R). *Definimos também a inversa de uma relação R ,*

$$R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \in Im(R) \times Dom(R) : \langle y, x \rangle \in R\}.$$

Sendo R uma relação, temos que $(R^{-1})^{-1} = R$.

Definição 10 (Função). *Definimos função: f é uma função se e somente se f é uma relação e*

$$\forall x \in dom(f) \exists! y \in Im(f) (\langle x, y \rangle \in f)$$

$f : A \rightarrow B$ significa que f é uma função, $A = dom(f)$ e $Im(f) \subset B$.

Se $f : A \rightarrow B$ e $x \in A$, $f(x)$ é o único y tal que $\langle x, y \rangle \in f$.

$f : A \rightarrow B$ é injetora se e somente se f^{-1} é uma função (notemos que a existência de f^{-1} não pressupõe, aqui, que f seja bijetora).

$f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se e somente se $Im(f) = B$.

$f : A \rightarrow B$ é bijetora se e somente se f é injetora e f é sobrejetora.

Definição 11 (Ordem Total). *(Uma ordem total (no sentido estrito) é um par $\langle A, R \rangle$, em que A é um conjunto qualquer e R é uma relação, tal que R ordena totalmente A , isto é:*

- a. R é transitiva em A , ou seja, $\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
- b. R é tricotômica em A ou seja, $\forall x \in A \forall y \in A (xRy \vee x = y \vee yRx)$
- c. R é irreflexiva em A ou seja, $\forall x \in A (\neg(xRx))$

Escrevemos acima, e continuaremos escrevendo, xRy para abreviar $\langle x, y \rangle \in R$.

Se $\langle A, R \rangle$ é uma ordem total e $B \subset A$, então $\langle B, R \rangle$ também é uma ordem total, pois a definição não exige que $R \subset A \times A$.

Podemos exemplificar intuitivamente que no conjunto dos inteiros (\mathbb{Z}) a ordem menor que é uma ordem total pois é transitiva, tricotômica e irreflexiva em \mathbb{Z} .

Definição 12 (Isomorfismo, no contexto específico que estamos tratando agora). *Quaisquer que sejam A e B conjuntos, e R e S relações, dizemos que $\langle A, R \rangle$ é isomorfo a $\langle B, S \rangle$, simbolicamente $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$, se e somente se há uma função bijetora $f : A \rightarrow B$ tal que, $\forall x \in A \forall y \in A (xRy \leftrightarrow f(x)Sf(y))$. Uma tal função f é dita um isomorfismo de $\langle A, R \rangle$ em $\langle B, S \rangle$.*

Intuitivamente, a existência de um isomorfismo de $\langle A, R \rangle$ em $\langle B, S \rangle$ (e consequentemente a existência de um isomorfismo de $\langle B, S \rangle$ em $\langle A, R \rangle$, pois basta considerarmos a função inversa) nos diz que $\langle A, R \rangle$ e $\langle B, S \rangle$ são estruturalmente similares.

Definição 13 (Menor Elemento). *Seja $\langle A, R \rangle$ uma ordem total. Seja $X \subset A$, dizemos que a é o menor elemento de X com respeito a R , se e somente se,*

$$a \in X \wedge \forall x \in X (aRx \vee a = x).$$

Definição 14 (Boa Ordem). *Um par $\langle A, R \rangle$ é uma boa ordem se e somente se é uma ordem total e todo subconjunto não vazio de A tem um menor elemento com respeito a R . Em uma situação como essa, dizemos que R bem ordena A .*

Intuitivamente, o conjunto dos números naturais e a relação de menor que constituem um par que é uma boa ordem. O mesmo não ocorre com o conjunto dos números inteiros e a relação de menor que, pois, nem todo subconjunto seu tem um menor elemento. Basta considerar o próprio conjunto dos números inteiros.

Propriedades básicas de boas ordens são apresentadas nas páginas 14 e 15 de KUNEN(1980). Dispondo da noção de boa ordem, podemos enunciar o axioma da escolha na seguinte forma

Axioma 6 (Escolha (Choice)).

$$\forall A \exists R \langle A, R \rangle \text{ é uma boa ordem.}$$

Esse axioma nos diz que todo conjunto pode ser bem ordenado. Essa formulação é, na verdade, o chamado teorema da boa ordenação, demonstrado por Zermelo em 1904. Esse teorema é equivalente em ZF ao axioma da escolha, digamos, propriamente dito do qual apresentaremos uma versão abaixo. Essa equivalência permite que, seguindo KUNEN(1980), enunciemos o axioma da escolha como acima.

Uma formulação mais usual do axioma da escolha é a seguinte

$$\forall z ((\emptyset \notin z \wedge \forall x, y \in z (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)) \rightarrow \exists w \forall x \in z (UNIT(w \cap x)))$$

Nessa formulação, o axioma da escolha afirma que, qualquer que seja o conjunto z ao qual não pertença o conjunto vazio e cujos elementos sejam dois a dois disjuntos, existe um conjunto w cuja intersecção com qualquer elemento de z é um conjunto unitário. A ideia intuitiva é que o conjunto w , chamado de conjunto escolha, escolhe um elemento de cada elemento de z .

Definição 15 (Conjunto transitivo). *Um conjunto x é transitivo se e somente se todo elemento de x é um subconjunto de x , isto é $\forall y \in x (y \subset x)$.*

Seguindo Kunen, temos os seguintes exemplos

\emptyset $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

São conjuntos transitivos.

Já $\{\{\emptyset\}\}$ não é um conjunto transitivo, pois o $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, mas $\{\emptyset\}$ não é subconjunto do $\{\{\emptyset\}\}$, uma vez que $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

Definição 16 (Ordinal). *Um conjunto x é um ordinal se e somente x é transitivo e x é bem-ordenado por \in .*

Formalmente, dizer que x é bem ordenado por \in significa dizer que $\langle x, \in_x \rangle$ é uma boa ordem onde $\in_x = \{\langle y, z \rangle \in x \times x : y \in z\}$.

Os conjuntos \emptyset , $\{\emptyset\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ são exemplos de ordinais enquanto o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ não o é.

Para propriedades básicas de ordinais, veja KUNEN(1980) página 16.

Vale notar que não existe o conjunto de todos os ordinais. Supor que exista um tal conjunto nos leva ao paradoxo de Burali-Forti, pois se existisse o conjunto de todos os ordinais, ele seria um ordinal e assim pertenceria a si mesmo; isso não é possível para um ordinal, mesmo sem considerar o axioma do fundamento do qual falaremos adiante.

Um outro ponto importante a ressaltar é que se $\langle A, R \rangle$ é uma boa ordem, então existe um único ordinal C tal que $\langle A, R \rangle$ é isomorfo a C (para provar isso, usamos o esquema de axiomas de substituição, veja Kunen(1980) página 17).

Definição 17 (Tipo de Boa Ordem). *Se $\langle A, R \rangle$ é uma boa ordem, então $\text{tipo}(A, R)$ é o único ordinal C tal que $\langle A, R \rangle$ é isomorfo a C .*

Na exposição a seguir, utilizamos letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ para variar sobre ordinais, o que nos permite, por exemplo, escrever $\forall \alpha \dots$ em vez de $\forall x(x \text{ é ordinal} \rightarrow \dots)$ e escrever $\exists \alpha \dots$ em vez de $\exists x(x \text{ é ordinal} \wedge \dots)$. Outro ponto é que, dado que \in bem ordena os ordinais, então escrevemos $\alpha < \beta$ em vez de $\alpha \in \beta$. Do mesmo modo, $\alpha \leq \beta$ abrevia $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ e $\alpha \geq \beta$ abrevia $\beta \in \alpha \vee \beta = \alpha$.

Definição 18 (Ordinal sucessor e ordinal limite). *α é um ordinal sucessor se e somente se $\exists \beta(\alpha = S(\beta))$. α é um ordinal limite se e somente se $\alpha \neq \emptyset$ e α não é um ordinal sucessor.*

Podemos definir como abaixo, os primeiros números naturais.

Definição 19 (Primeiros Números Naturais).

$$0 = \emptyset$$

$$1 = S(0) = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = S(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = S(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}, \text{ etc...}$$

Intuitivamente cada natural é definido como o conjunto dos números naturais menores que ele. Mais precisamente temos:

Definição 20 (Números Naturais). α é um número natural se e somente se $\forall \beta \leq \alpha (\beta = 0 \vee \beta \text{ é um ordinal sucessor})$.

Essa é uma das maneiras de definir os números naturais.

É importante notar que, até o momento, não temos o conjunto dos números naturais, isto é, não podemos provar a existência do conjunto dos números naturais. Isso poderá ser feito com o axioma seguinte adicionado aqueles já apresentados.

Axioma 7 (Infinito).

$$\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x))$$

O axioma 7 nos diz, intuitivamente, que existe um conjunto infinito. Esse conjunto será obtido afirmando que existe um conjunto x tal que, se y é elemento de x , o sucessor de y , $S(y)$ também o é. Isso vale para $S(S(y))$, e assim por diante. Portanto, x será infinito (estamos trabalhando, por ora, com uma noção intuitiva de conjunto infinito) se assegurarmos que há pelo menos um elemento em x , o que é providenciado pela condição de que $0 \in x$.

A partir do conjunto x acima e usando o esquema de axiomas de compreensão, podemos estabelecer a existência do conjunto dos números naturais¹⁴. Denotaremos esse conjunto por ω (essa é uma das maneiras de obter o conjunto dos números naturais). Notamos ainda, que ω é o menor ordinal limite.

Os postulados de Peano listados abaixo são teoremas da teoria de conjuntos.

$$0 \in \omega$$

$$\forall n \in \omega (S(n) \in \omega)$$

$$\forall n \in \omega \forall m \in \omega (n \neq m \rightarrow S(n) \neq S(m))$$

$$\text{Indução: } \forall X \subset \omega ((0 \in X \wedge \forall n \in X (S(n) \in X)) \rightarrow X = \omega)$$

¹⁴ KUNEN (1980) p.19

Com o que já temos, podemos ainda fazer provas por indução transfinita e apresentar definições por recursão transfinita¹⁵.

Central para esta tese é a noção de cardinal. Passemos a examiná-la.

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que a cardinalidade de A é menor ou igual à cardinalidade de B se e somente se existe uma função injetora de A em B . Dizemos que a cardinalidade de A é igual à cardinalidade de B se e somente se existe uma função bijetora de A em B (nesse caso também dizemos que A é equipotente a B). Dizemos que a cardinalidade de A é menor do que a cardinalidade de B se e somente se existe uma função injetora de A em B e não existe uma função bijetora de A em B .

Definição 21 (Cardinal de um conjunto). *Seja A um conjunto. Pelo axioma da escolha temos que A pode ser bem ordenado. Consideremos A bem ordenado. O cardinal de A é o menor ordinal α tal que a cardinalidade de A é igual à cardinalidade de α (ou seja, o cardinal de um conjunto A é o menor ordinal equipotente a A). A existência do cardinal de A está garantida pelos axiomas de que já dispomos.*

Definição 22 (Cardinal). *Um cardinal é um conjunto α tal que: α é um ordinal e α não é equipotente a nenhum ordinal menor do que ele.*

Notemos que o conjunto dos números naturais, ω , é um cardinal e todo número natural, isto é, todo $n \in \omega$, é um cardinal.

Definição 23 (Conjunto finito, conjunto enumerável e conjunto infinito). *Seja A um conjunto. Dizemos que A é finito se e somente se cardinal de $A < \omega$. Dizemos que A é enumerável (contável) se e somente se cardinal de $A \leq \omega$. Dizemos que A é infinito se e somente se A não é finito.*

Notemos que ω é um cardinal infinito e que os axiomas apresentados até agora são consistentes com uma situação em que ω é o único cardinal infinito. Esse quadro será alterado radicalmente pelo axioma seguinte.

Axioma 8 (Conjunto das partes ou Conjunto potência).

$$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \rightarrow z \in y)$$

Segundo este axioma, qualquer que seja o conjunto x , existe um conjunto y ao qual pertencem todos os subconjuntos de x . Aplicando o esquema de axiomas de compreensão ao conjunto y , obtemos $\wp(x)$, o conjunto das partes de x , ou ainda o conjunto potência de x , $\wp(x) = \{w \in y : w \subset x\}$. $\wp(x)$ é o conjunto cujo os elementos são precisamente todos os subconjuntos de x .

¹⁵ Veja por exemplo KUNEN (1980), páginas 24-25.

O teorema de Cantor, já apresentado na página 30, diz que para todo conjunto x , o cardinal de x é menor que o cardinal de $\wp(x)$. Assim, aplicando sucessivamente o conjunto potência, obtemos cardinais cada vez maiores.

Definição 24 (Cardinal sucessor e Cardinal limite). α^+ é o menor cardinal $> \alpha$. κ é um cardinal sucessor se e somente se $\kappa = \alpha^+$ para algum α . κ é um cardinal limite se e somente se $\kappa > \omega$ e κ não é um cardinal sucessor.

Agora podemos definir, por recursão transfinita sobre os ordinais α , os alephs.

1. $\aleph_0 = \omega$
2. $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$, onde $\alpha + 1 = S(\alpha)$
3. Para γ limite, $\aleph_\gamma = \bigcup \{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\}$ ¹⁶

Axioma 9 (Fundação ou Fundamento ou Regularidade).

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x(y \cap x = \emptyset))$$

Este axioma afirma que todo conjunto x não vazio possui ao menos um elemento y do qual ele é disjunto. Isso bloqueia a existência de conjuntos que pertençam a si mesmos e de ciclos fechados de pertinência.

Vejamos,

se existisse um conjunto x tal que $x \in x$, então o conjunto $\{x\}$ violaria o axioma do fundamento;

se existissem conjuntos x e y tais que $x \in y$ e $y \in x$, o conjunto $\{x, y\}$ violaria o axioma do fundamento;

se existissem conjuntos x , y e z tais que $x \in y$, $y \in z$ e $z \in x$, o conjunto $\{x, y, z\}$ violaria o axioma do fundamento, etc.

Também fica bloqueada a existência de cadeias de pertinência descendentes infinitas.

Concluída a listagem dos axiomas, é interessante especificar que:

- ZFC : axiomas 1–9
- ZF : ZFC menos o axioma da escolha.
- ZC e Z são ZFC e ZF, respectivamente menos o esquema de axiomas de substituição.

¹⁶ Veja, por exemplo, KUNEN (1980), p.30 (foram feitas algumas adaptações de notação)

- Z-, ZF-, ZC-, ZFC- são Z, ZF, ZC, ZFC, respectivamente, menos o axioma da fundação.

3.3 ZFC como fundamento da matemática

Moschovakis apresenta uma interessante abordagem do fato de ZFC ser um dos fundamentos da matemática e que, em certa medida se aproxima muito da importância de ZFC para o presente trabalho:

The theory of sets is a vibrant, exciting mathematical theory, with its own basic notions, fundamental results and deep open problems, and with significant applications to other mathematical theories. At the same time, axiomatic set theory is often viewed as a foundation of mathematics: it is alleged that all mathematical objects are sets, and their properties can be derived from the relatively few and elegant axioms about sets. Nothing so simple-minded can be quite true, but there is little doubt that in standard, current mathematical practice, “making a notion precise” is essentially synonymous with “defining it in set theory”. Set theory is the official language of mathematics, just as mathematics is the official language of science. (MOSCHOVAKIS (2005), p.vii)

Por fim, ZFC também carrega consigo aspectos filosóficos de suma importância, como podemos perceber nesta passagem de Maddy:

Furthermore, the set theoretic axioms developed in this process are so broad and fundamental that they do more than reproduce the existing mathematics; they have strong consequences for existing fields and produce a mathematical theory that is immensely fruitful in its own right. Finally, perhaps most fundamentally, this single, unified arena for mathematics provides a court of final appeal for questions of mathematical existence and proof: if you want to know if there is a mathematical object of a certain sort, you ask (ultimately) if there is a set theoretic surrogate of that sort; if you want to know if a given statement is provable or disprovable, you mean (ultimately), from the axioms of the theory of sets. (MADDY (1997), p.26)

A partir da perspectiva de Moschovakis, a teoria dos conjuntos é apresentada como uma teoria matemática “vibrante e empolgante”, com noções básicas, resultados fundamentais e problemas abertos profundos. A ideia de que a matemática pode ser reduzida a definições dentro da teoria dos conjuntos ressalta a força da teoria dos conjuntos ZFC como linguagem oficial da matemática. Isso nos leva a uma compreensão de que, na prática matemática padrão, precisar uma noção é quase sinônimo de defini-la em termos da teoria dos conjuntos. Esta visão tem uma associação forte com a abordagem filosófica de Quine à relatividade ontológica, na qual o aparato conceitual escolhido (neste caso, a teoria dos conjuntos ZFC) determina o campo ontológico de discussão. Quine argumentaria que os compromissos ontológicos de um cientista são

aqueles que sua teoria assume, e, de acordo com Moschovakis, no contexto matemático, esses compromissos podem ser expressos por meio da linguagem da teoria dos conjuntos. Quine também enfatiza esse ponto, por exemplo:

At this point a further transfer of ontology suggests itself: we can drop the space-time regions in favor of the corresponding classes of quadruples of numbers according to an arbitrarily adopted system of coordinates. We are left with just the ontology of pure set theory, since the numbers and their quadruples can be modeled within it. There are no longer any physical objects to serve as individuals at the base of the hierarchy of classes, but there is no harm in that. It is common practice in set theory nowadays to start merely with the null class, form its unit class, and so on, thus generating an infinite lot of classes, from which all the usual luxuriance of further infinities can be generated. (TT, p.17-18)

Por outro lado, Maddy enfatiza a capacidade da teoria dos conjuntos ZFC de não apenas reproduzir a matemática existente, mas também de ter consequências significativas para campos existentes e produzir uma teoria matemática que é frutífera por direito próprio. Essa visão destaca o papel da teoria dos conjuntos como uma “corte de apelação final” para questões de existência matemática e fornece um ponto que se conecta intimamente com o conceito de relatividade ontológica de Quine. Para Quine, perguntas sobre a existência ou prova de uma entidade matemática são, em última análise, questões sobre a existência de um “substituto teórico-conjuntista” dessa entidade dentro de um esquema conceitual particular (neste caso, ZFC). Assim, o papel atribuído à teoria dos conjuntos ZFC por Maddy alinha-se perfeitamente com a ideia de que ontologia depende do sistema teórico adotado.

Ao unificar essas passagens com os aspectos filosóficos da teoria dos conjuntos ZFC e a relatividade ontológica de Quine, podemos ver como a teoria dos conjuntos não é apenas uma fundação para a matemática, mas também um campo fértil para a exploração filosófica sobre a natureza da existência matemática e a estrutura da realidade científica. A posição de Quine sobre a relatividade ontológica, quando aplicada ao contexto da teoria dos conjuntos ZFC, oferece um modo poderoso de entender como os compromissos ontológicos na matemática são moldados e justificados dentro de um esquema conceitual específico. Isso não apenas sublinha a importância de escolher cuidadosamente nossas teorias fundamentais, mas também destaca um aspecto intrinsecamente filosófico da prática matemática.

Concluimos, em certa medida, os aspectos formais necessários para que possamos nos aprofundar nas questões ontológicas do pensamento de Quine. No próximo capítulo, o projeto metafísico do filósofo será nosso tema principal, e também poderemos revisitar os aspectos formais apresentados nos capítulos 2 e 3.

4 O Projeto metafísico de Quine

Neste capítulo, apresenta-se os principais aspectos referentes ao projeto metafísico de Quine. A seguir veremos como as teses do naturalismo, holismo, compromisso ontológico, a postulação de objetos e da relatividade ontológica são concatenadas a partir da questão ontológica e lógica do sistema metafísico de Quine.

4.1 Naturalismo, empirismo e holismo

A principal característica do sistema filosófico de Quine é a combinação de três elementos: o naturalismo, o empirismo e o holismo, o que, por sua vez, faz com que o trabalho do filósofo seja visto como um esforço feito de dentro da rede de conhecimento que constitui a ciência, isto é, nossa melhor maneira de conhecer o mundo. Examinemos como cada um desses elementos se articula no pensamento do filósofo.

Na visão de Quine, a ciência é o melhor e mais complexo desenvolvimento de um sistema de crenças empiricamente fundamentado. Devemos considerar esse sistema de crenças do seguinte modo: nenhuma sentença da ciência teórica pode ser confirmada ou refutada isoladamente, mas apenas como parte de um sistema de sentenças. Esse é o ponto do holismo que veremos mais adiante.

A questão, por enquanto, é que as decisões acerca dos objetos do mundo, do modo como os conhecemos, são tratadas pela ciência. Isso também significa que questões epistemológicas, acerca da fundamentação do conhecimento, devem ser naturalizadas; não é um esforço exclusivo dos filósofos, mas, pelo contrário, uma atividade conjunta das áreas de conhecimento que constituem a ciência:

Epistemology, or something like it, simply falls into place as a chapter of psychology and hence of natural science. It studies a natural phenomenon, viz., a physical human subject. The human subject is accorded a certain experimentally controlled input—certain patterns of irradiation in assorted frequencies, for instance—and in the fullness of time the subject delivers as output a description of the three dimensional world and its history. The relation between the meager input and the torrential output is a relation that we are prompted to study for somewhat the same reasons that have always prompted epistemology; namely, in order to see how evidence relates to theory, in what ways one's theory of nature transcends any available evidence. (OROE, p.82-83)

Nesta passagem percebe-se que o verdadeiro trabalho da epistemologia é desvendar como o recebimento de estímulos por nossos sentidos (um input mais

parco - “meager”) se transforma em um discurso muito mais amplo e muitas vezes complexo (isto é, “torrential output”). Não há outro âmbito para que tais questões de fato sejam analisadas que não de dentro da ciência, que nos fornece um tratamento robusto e sistêmico do processo através de diversas áreas como é o caso da psicologia, neurociência etc.

Apenas nesse ambiente temos condições de lidar com as questões empíricas, e são elas que de fato promovem o conhecimento do mundo. A ciência é como um tribunal da verdade, determinando que afirmações devemos aceitar ou recusar acerca da realidade. Como Quine mesmo nos diz:

(...) naturalism: abandonment of the goal of a first philosophy. It sees natural science as an inquiry into reality, fallible and corrigible but not answerable to any supra-scientific tribunal, and not in need of any justification beyond observation and the hypothetico-deductive method. (TT, p.72)

Também podemos ler que:

(...) naturalism: the recognition that it is within science itself, and not in some prior philosophy, that reality is to be identified and described. (TT, p.21)

Segundo a tese do naturalismo, a filosofia deve ser contínua com a ciência, pois não há uma perspectiva filosófica isolada para determinar a veracidade ou a justificação de nossas teorias científicas ou, como veremos mais à frente, a existência das entidades postuladas por elas. O filósofo naturalista aborda questões tradicionais de sua área visando “melhorar, esclarecer e entender” de dentro do sistema que é a ciência. Portanto, certas questões metafísicas tradicionais podem ser respondidas de dentro de nosso sistema empírico e científico do mundo:

The naturalistic philosopher begins his reasoning within the inherited world theory as a going concern. He tentatively believes all of it, but believes also that some unidentified portions are wrong. He tries to improve, clarify, and understand the system from within. He is the busy sailor adrift on Neurath’s boat¹. (TT, p.72)

Sendo a naturalização da epistemologia o recurso para determinar quais sentenças são verdadeiras acerca do mundo, devemos questionar como ela articula as sentenças do nosso farto discurso científico oriundas dos estímulos recebidos por

¹ Wie Schiffer sind wir, die ihr Schiff auf offener See umbauen müssen, ohne es jemals in einem Dock zerlegen und aus besten Bestandteilen neu errichten zukönnen.— Otto Neurath (WO, viii) - Somos como marinheiros, que têm de reconstruir seu navio em mar aberto, sem jamais poder decompô-lo em uma doca e erigi-lo novamente a partir de suas melhores partes. (Palavra e Objeto, Editora Vozes, Tradução de Sofia Inês Albornoz Stein e Desidério Murcho, p.12)

nossas terminações nervosas. Na base do processo, de uma perspectiva empirista, temos esses estímulos, pois, segundo o empirismo, a base do conhecimento está na experiência dos sentidos. Uma vez que o ponto de partida é o empirismo, o próximo ponto de parada será o tratamento dado às sentenças que dele decorrem, isto é, o holismo.

O holismo é a tese de que raramente as afirmações de qualquer ramo da ciência teórica implicam afirmações observacionais quando tomadas isoladamente ou por si mesmas². O que de fato ocorre é que as sentenças o fazem em conjunto com outras afirmações chamadas de hipóteses auxiliares.

O holismo é constituído, portanto, de dois aspectos: uma observação acerca da ciência e uma característica lógica. O primeiro pode ser exemplificado (adaptado de Michael D. Resnick³) através da afirmação isolada de que “a água e óleo não se misturam” não implica que sempre que eu misturar os dois componentes, os observaremos separados. Para que essa implicação aconteça, devemos assumir (informação auxiliar) que o recipiente não contém nenhum produto químico que permita homogeneização e que o recipiente também é suficientemente transparente para que observemos os fluidos após a mistura, e assim por diante. Consequentemente é essa a característica da lógica que fundamenta o holismo, se uma hipótese H implica uma afirmação observacional O , então ela somente o faz quando combinada com suposições auxiliares. As hipóteses e as afirmações auxiliares formam um sistema de hipóteses ou crenças, em vez de afirmações individuais, às quais as noções dedutivamente caracterizadas de conteúdo empírico (confirmações e falsificações) devem ser aplicadas.

Quine inicialmente assim nos apresenta o seu holismo, com destaque para a integração das áreas do conhecimento (*web of belief*) formando o que seria de fato a ciência e a sua dependência do empirismo, isto é, as confirmações de suas teorias (*boundary conditions*):

The totality of our so-called knowledge or beliefs, from the most casual matters of geography and history to the profoundest laws of atomic physics or even of pure mathematics and logic, is a man-made fabric which impinges on experience only along the edges. Or to change the figure, total science is like a field of force whose boundary conditions are experience. (FLPV, p.42)

Em sua obra *Word and Object*, Quine retoma a questão de modo a esclarecer as conexões em sua *web of belief* o que também nos permite uma imagem do aspecto lógico ali imbricado:

² RESNIK (2005) p.414.

³ RESNIK (2005) p.414.

(...) this structure of interconnected sentences is a single connected fabric including all sentences, and indeed everything we ever say about the world; for the logical truths at least, and no doubt many more commonplace sentences too, are germane to all topics and thus provide connections. However, some middle-sized scrap of theory will embody all the connections that are likely to affect our adjudication of a given sentence. (WO, p.11)

Quine também afirma que o conjunto de crenças que enfrenta o tribunal da experiência (e, por consequência, a empiria), poderá ser revisto caso falhe. Nenhuma de nossas crenças é imune a um processo sistemático de revisão quando confrontada com novos resultados. Podemos nos perguntar o que ocorrerá com a matemática e a lógica que fazem parte do sistema de crenças que confronta a realidade e pode ter seus componentes revistos. Devemos esperar abandonar ambos em algum momento? Para Quine, desistir de uma verdade lógica para reparar uma sentença, por exemplo S , é algo inútil. Pois seja L uma verdade lógica e W qualquer sentença ou conjunção delas. Então, a conjunção de W e L implica uma sentença O somente se W sozinho implica O . Para desativar a implicação fatídica, devemos renovar a lógica pelo menos a ponto de nos recusarmos a reconhecer que S tem a implicação em questão⁴. Um esforço demasiadamente grande para a recompensa que é esperada:

Over-logicizing, we may picture the accommodation of a failed observation categorical⁵ as follows. We have before us some set S of purported truths that was found jointly to imply the false categorical. Implication may be taken here simply as deducibility by the logic of truth functions, quantification, and identity. (We can always provide for more substantial consequences by incorporating appropriate premisses explicitly into S.) Now some one or more of the sentences in S are going to have to be rescinded. We exempt some members of S from this threat on determining that the fateful implication still holds witho ut their help. Any purely logical truth is thus exempted, since it adds nothing to what S would logically imply anyway ; and sundry irrelevant sentences in S will be exempted as well. Of the remaining members of S, we rescind one that seems most suspect, or least crucial to our o verall theory. We heed a maxim of minimum mutilation. (PT, p.14)

O que se apresentou até aqui é uma breve visão da filosofia de Quine. Ela será uma filosofia contínua com a ciência, o que também significa uma combinação forte de empirismo e holismo. A evidência final para nossas crenças é a evidência sensorial que se aplica a todo nosso sistema de crenças, ao invés de seus elementos individuais (*Web of Belief*). Isso também significa que nossa evidência de objetos deve ser indireta e extraída da evidência de nosso sistema de crenças. Sendo a ciência o árbitro final da existência e da verdade, e a matemática e lógica partes indispensáveis da ciência,

⁴ RESNIK(2005) p.418.

⁵ Ver mais em PT, p.9-11.

Quine concluirá que devemos aceitar como verdadeiras não apenas a ciência, mas também aquelas afirmações da matemática e da lógica que a ciência requer.

Tanto o naturalismo, o holismo e o critério de assunção de compromisso ontológico por uma teoria possuem reflexos importantes na filosofia da matemática de Quine (e assim na filosofia de Quine como um todo), em especial no que diz respeito aos objetos matemáticos postulados pelas teorias científicas. Ainda que o sucesso empírico das teorias não confirme as afirmações matemáticas individuais, há uma justificativa pragmática para se postularem objetos matemáticos, bem como estipular princípios para se aplicar as leis da matemática à experiência. Pois exigir que os matemáticos forneçam provas aumenta a confiabilidade de seus teoremas e diminui sua suscetibilidade à refutação experimental⁶. Além disso, normalmente é muito mais simples preservar a matemática de uma teoria da refutação, como vimos no exemplo da lógica, concluindo que se uma teoria falhou em exibir a estrutura adequada, o melhor é tentar uma nova formulação ou interpretação dessa teoria. Teorias matemáticas não precisam de reinterpretação, uma vez que não afirmam que as estruturas que são seus modelos são instanciadas no mundo empírico.

Tal conclusão demandou que Quine desenvolvesse um critério para determinar com quais objetos nosso sistema nos compromete e este critério, por sua vez, terá impacto nos objetos matemáticos pressupostos nas sentenças de nossas teorias científicas. Esse será o tema da próxima seção.

4.2 Compromisso Ontológico

Uma das consequências da articulação do sistema quiniiano em torno dos conceitos de naturalismo, empirismo e holismo é que a ciência será o árbitro final acerca da evidência da existência de objetos, inclusive os matemáticos. Isso se deve à essencialidade de partes da matemática ao empreendimento científico. Um primeiro passo para esclarecer esse ponto é estabelecer um critério de assunção de compromisso ontológico por uma teoria. Assim Quine nos apresenta esse critério:

(...) a theory is committed to those and only those entities to which the bound variables of the theory must be capable of referring in order that the affirmations made in the theory be true. (FLPV p.13-14)

Para que possamos conhecer os compromissos ontológicos de uma teoria será necessário formulá-la em uma linguagem de primeira ordem. Apenas em uma tal linguagem saberemos quais são suas variáveis ligadas e, conseqüentemente, o que assumir para que as sentenças que contenham essas variáveis sejam verdadeiras. O

⁶ RESNIK(2005) p.422

critério não visa descobrir o que existe, mas apenas o que uma teoria diz que existe. A ontologia de uma teoria corresponde ao que existe de acordo com essa teoria, isto é, por enquanto, objetos (ou corpos, etc.) para que suas sentenças sejam verdadeiras. Quem vai dizer o que existe (atestar a verdade das sentenças da teoria) é a nossa ciência:

When we want to check on existence, bodies have it over other objects on the score of their perceptibility. But we have moved now to the question of checking not on existence, but on imputations of existence: on what a theory says exists. (...) To show that a theory assumes a given object, or objects of a given class, we have to show that the theory would be false if that object did not exist, or if that class were empty; hence that the theory requires that object, or members of that class, in order to be true. (OROE. p.93)

Outro aspecto contido nessa proposta é ainda concernente à necessidade de a teoria ser regimentada em uma linguagem de primeira ordem com identidade (na verdade uma teoria extensional). Isso, ao fim, vai significar que as variáveis das sentenças dessa teoria podem variar apenas sob conjuntos. Quine nos dirá que, assim como a ciência possui o mesmo objetivo que o conhecimento comum, com a diferença de alcançar resultados melhores e muito mais sistemáticos ao descrever a realidade, a linguagem regimentada tem o mesmo objetivo da linguagem comum, mas alcançará resultados também melhores e muito mais sistemáticos quando tratar de questões ontológicas. Sua adoção maximiza as virtudes científicas, já parcialmente presentes no discurso comum, tais como, estrutura lógica, referência, a facilidade de acesso a métodos algorítmicos. Portanto, a regimentação da nossa teoria científica sobre o mundo e o critério de compromisso ontológico permitem esclarecer o que a ciência diz que existe:

My point is not that ordinary language is slipshod, slipshod though it be. We must recognize this grading off for what it is, and recognize that a fenced ontology is just not implicit in ordinary language. The idea of a boundary between being and nonbeing is a philosophical idea, an idea of technical science in a broad sense. Scientists and philosophers seek a comprehensive system of the world, and one that is oriented to reference even more squarely and utterly than ordinary language. Ontological concern is not a correction of a lay thought and practice; it is foreign to the lay culture, though an outgrowth of it. (TT p.09)

Como ocorre, de fato, a postulação de objetos em nossas teorias? Quando observamos um objeto e já o nomeamos é porque este, de algum modo, já existe em nosso sistema de crenças. Alguém que percebe um coelho, traz em seu sistema de crenças fatos que lhe permitem inferir que é um coelho. Assim, de acordo com o holismo, reconhecer o coelho é uma questão de alterar o nosso sistema de crenças de certas maneiras para acomodá-lo em um conjunto prévio de outros itens já observados.

Portanto, a nossa evidência da existência do coelho remonta, em última análise, à nossa evidência de um sistema de crenças a respeito dele. Este é um processo geral, de modo que, o que vale para coelhos, vale para objetos em geral: nossa evidência para os objetos depende de nossa evidência de que nossas crenças os apoiem. Por essa razão, é essencial que tenhamos um meio de determinar com quais objetos nos comprometemos ao manter um sistema de crenças. O critério de Quine de compromisso ontológico serve a este propósito⁷.

De modo mais direto, o critério pode ser colocado de forma bastante simples: um conjunto de sentenças é comprometido com aquelas entidades que devem existir para que os membros do conjunto sejam verdadeiros. Isso ocorre quando as sentenças em questão afirmam a existência de coisas por meio do uso de quantificadores:

(...) The variables of quantification, “something”, “nothing”, “everything”, range over our whole ontology, whatever it may be; and we are convicted of a particular ontological presupposition if, and only if, the alleged presuppositum has to be reckoned among the entities over which our variables range in order to render one of our affirmations true. (FLPV p.13)

Mais uma vez o papel da regimentação é essencial, em complemento a linguagem comum, para que os compromissos ontológicos de nossas teorias sejam evidenciados:

The common man's ontology is vague and untidy in two ways. It takes in many purported objects that are vaguely or inadequately defined. But also, what is more significant, it is vague in its scope; we cannot even tell in general which of those vague things to ascribe to a man's ontology at all, which things to count him as assuming. (...) a fenced ontology is just not implicit in ordinary language. The idea of a boundary between being and nonbeing is a philosophical idea, an idea of technical science in a broad sense (...) We can draw explicit ontological lines when desired. We can regiment our notation (...) Then it is that we can say the objects assumed are the values of the variables (...) Various turns of phrase in ordinary language that seem to invoke novel sorts of objects may disappear under such regimentation. At other points new ontic commitments may emerge. There is room for choice, and one chooses with a view to simplicity in one's overall system of the world. (TT p.9)

Não é apenas na identificação dos compromissos ontológicos das teorias que a regimentação e critério de assunção de compromisso ontológico por uma teoria atuam. Os aspectos técnicos e filosóficos também possibilitam que a paráfrase, na notação canônica da lógica extensional de primeira ordem, nos forneça a possibilidade de avaliar e reduzir os compromissos ontológicos:

⁷ RESNIK(2005) p.423

(...) But the simplification and clarification of logical theory to which a canonical logical notation contributes is not only algorithmic; it is also conceptual. Each reduction that we make in the variety of constituent constructions needed in building the sentences of science is a simplification in the structure of the inclusive conceptual scheme of science. Each elimination of obscure constructions or notions that we manage to achieve, by paraphrase into more lucid elements, is a clarification of the conceptual scheme of science. The same motives that impel scientists to seek ever simpler and clearer theories adequate to the subject matter of their special sciences are motives for simplification and clarification of the broader framework shared by all the sciences. Here the objective is called philosophical, because of the breadth of the framework concerned; but the motivation is the same. The quest of a simplest, clearest overall pattern of canonical notation is not to be distinguished from a quest of ultimate categories, a limning of the most general traits of reality. (WO, p.146-147)

Para Quine, dentre as contribuições do filósofo, uma das principais, é o esclarecimento da linguagem da ciência e da matemática, a fim de avaliar e reduzir os compromissos ontológicos de nossas teorias do mundo. Embora o critério de Quine possa ser trivial em si, as aplicações que se podem fazer dele estão longe de serem triviais⁸:

The philosopher's task differs from the others', then, in detail; but in no such drastic way as those suppose who imagine for the philosopher a vantage point outside the conceptual scheme that he takes in charge. There is no such cosmic exile. He cannot study and revise the fundamental conceptual scheme of science and common sense without having some conceptual scheme, whether the same or another no less in need of philosophical scrutiny, in which to work. He can scrutinize and improve the system from within, appealing to coherence and simplicity; but this is the theoretician's method generally. (WO p.254)

Como podemos observar na citação anterior, embora os filósofos não possam transcender a ciência, podem, no entanto, trabalhar de dentro da ciência propondo esclarecimentos e reduções ontológicas. É com esse espírito que Quine considera suas próprias propostas para reduzir a ontologia como um todo à teoria dos conjuntos.

4.3 Postulando Objetos

Vimos até aqui que, segundo Quine, podemos justificar a aprovação de objetos em uma ontologia recorrendo à evidência e apelando tacitamente para o sucesso de um sistema mais amplo comprometido com o objeto em questão. Isso vale para o reconhecimento de um coelho quanto para conjuntos da matemática. Podemos sempre apelar aos benefícios de conjuntos e, conseqüentemente, da matemática para a ciência.

⁸ RESNIK(2005) p.425

Um grupo de cientistas pode ainda postular uma teoria comprometida com um conjunto maior de objetos, quando comparada com uma observação feita pelo senso comum. Por exemplo, ao observar o mesmo céu, astrônomos, em comparação com um leigo, podem conceber uma teoria ontologicamente mais rica que a proporcionada pela visão a olho nu do leigo. A diferença reside em que o astrônomo levanta hipóteses ontologicamente mais ricas (isto é, contendo mais objetos no domínio das teorias) que o leigo, juntamente com uma teoria acerca do comportamento de seus membros e seus efeitos observáveis⁹. Apresentar uma ontologia dessa maneira é postulá-la. Quine, portanto, não admite a existência de objetos por decreto, nem a verdade por decreto:

Considered relative to our surface irritations, which exhaust our clues to an external world, the molecules and their extraordinary ilk are thus much on a par with the most ordinary physical objects. The positing of those extraordinary things is just a vivid analogue of the positing or acknowledging of ordinary things: vivid in that the physicist audibly posits them for recognized reasons, whereas the hypothesis of ordinary things is shrouded in prehistory. Though for the archaic and unconscious hypothesis of ordinary physical objects we can no more speak of a motive than of motives for being human or mammalian, yet in point of function and survival value it and the hypothesis of molecules are alike. So much the better, of course, for the molecules. *To call a posit a posit is not to patronize it.* A posit can be unavoidable except at the cost of other no less artificial expedients. Everything to which we concede existence is a posit from the standpoint of a description of the theory-building process, and simultaneously real from the standpoint of the theory that is being built. (WO p.20, ênfase nossa)

A postulação assegura também que não há nenhum mistério em nossas teorias que postulam objetos matemáticos, pois a elaboração de teorias em si não requer compromisso com as coisas que a teoria pretende abordar; o compromisso surge depois de sua elaboração, em função da verdade de suas sentenças. E se a teoria colabora para o nosso sistema geral da ciência, não importando qual seja o seu assunto, logo, as entidades com as quais está comprometida (por meio do critério de assunção de compromisso ontológico por uma teoria) têm tanto título de existência quanto os objetos cotidianos percebidos pelo senso comum.

4.4 Ontologia e Relatividade Ontológica

Nesta seção, exploramos algumas questões emergentes da discussão apresentada neste capítulo até o momento. Uma delas é como o filósofo pode simplificar a ontologia matemática empregada na ciência, recorrendo apenas a conjuntos (Quine frequentemente usa o termo 'classes'). Outra questão é como podemos reduzir os objetos que observamos a conjuntos, levando-nos a questionar se tudo o que existe são, de fato, conjuntos.

⁹ RESNIK(2005) p.428-429

Em *Roots of Reference* (1974), Quine afirma que nossa empreitada ontológica se inicia quando assumimos os corpos, em um sentido semelhante ao da física. Os corpos seriam, por exemplo, o computador, a mesa, a tela e assim por diante. A ontologia nesse momento é uma generalização dos corpos ou, de uma somatologia, mas essa percepção é meramente o ponto de partida da investigação ontológica:

Putting our house in ontological order is not a matter of making an already implicit ontology explicit by sorting and dusting up ordinary language. It is a matter of devising and imposing. Genetically what we have beforehand is just a play of grammatical analogies that mask differences in learning patterns. Centrally situated there is what we retrospectively classify as talk of bodies. Here is where the apparatus of objective reference gets its first development. Bodies are the prime reality, the objects par excellence. Ontology, when it comes, is a generalization of somatology. (...) Grammar is thereby simplified, while ontology is multiplied. (RR, p.88)

Se o primeiro passo na empreitada ontológica se deu pela identificação dos corpos, para o sistema quiniiano essa noção deve ser abandonada em prol da noção de objeto físico, isto é, o conteúdo material de uma porção do espaço tempo. Esse procedimento atende melhor à ciência, sem apelar a critérios vagos inerentes aos corpos, tais como deslocamento, distorção, descoloração etc.:

A body is a special kind of physical object, one that is roughly continuous spatially and rather chunky and that contrasts abruptly with most of its surroundings and is individuated over time by continuity of displacement, distortion, and discoloration. These are vague criteria, especially so in view of molecular theory, which teaches that the boundary of a solid is ill defined and that the continuity of a solid is only apparent and properly a matter of degree. The step of generalization from body to physical object follows naturally, we saw, on the reification of portions of stuff. (TT, p.13)

Substituindo corpos por objetos físicos, é possível realizar um processo de abstração dos corpos em um aparato conjuntista e filosófico. Os objetos matemáticos como funções, vetores, grupos, espaços e assim por diante, podem ser reduzidos a conjuntos de modo familiar. Desta maneira, a ontologia da matemática passaria a ser constituída apenas por conjuntos. E não é apenas no processo de redução da matemática a conjuntos que estas se mostram úteis. Usamos conjuntos tanto em propósitos matemáticos quanto não matemáticos. E o ganho com uma ontologia mais simples, contendo apenas conjuntos, é coerente com o esforço do filósofo que, trabalhando de dentro da ciência, simplifica e esclarece aspectos das teorias:

The versatility of classes in thus serving the purposes of widely varied sorts of abstract objects is best seen in mathematics, but it spills over, as illustrated by relations. Again, consider a disease; it can be taken as the class of all the appropriately afflicted temporal segments of its victims. Correspondingly for anger and other states. Intensional objects

aside, the abstract objects that it is useful to admit to the universe of discourse at all seem to be adequately explicable in terms of a universe comprising just physical objects and all classes of the objects in the universe (hence classes of physical objects, classes of such classes, etc.)[haverá mais simplificações, como veremos adiante]. At any rate I think of no persuasive exceptions. Such is the power of the notion of class to unify our abstract ontology. To surrender this benefit and face the old abstract objects again in all their primeval disorder would be a wrench, worth making if it were all. (WO, P.246)

O trabalho de esclarecer e reduzir os requisitos ontológicos da filosofia e da matemática é o mesmo tipo de trabalho que os cientistas em outros campos fazem quando esclarecem e simplificam as teorias em suas disciplinas de origem. O trabalho de Frege, Russell, Quine e outros na unificação dos fundamentos da matemática, usando a teoria de conjuntos é tanto uma peça de ciência teórica quanto a reformulação da mecânica quântica de von Neumann, usando espaços de Hilbert¹⁰.

Em *Things and Their Place in Theories*, vemos Quine argumentar como a evidência acerca de um objeto pode ser traduzida em mais de um tipo de discurso acerca do objeto, assegurando, contudo, que todos esses tipos de discurso possam passar pelo mesmo tribunal da evidência inicial:

We thus seem to see a profound difference between abstract objects and concrete ones. A physical object, one feels, can be pinned down by pointing—in many cases, anyway, and to a fair degree. But I am persuaded that this contrast is illusory. By way of example, consider again my liberalized notion of a physical object as the material content of any place-time, any portion of space-time. This was an intuitive explanation, intending no reification of space-time itself. But we could just as well reify those portions of space-time and treat of them instead of the physical objects. Or, indeed, call them physical objects. Whatever can be said from the old point of view can be paraphrased to suit the new point of view, with no effect on the structure of scientific theory or on its links with observational evidence. Wherever we had a predication '*x* is a *P*' said of a physical object *x*, we would in effect read '*x* is the place-time of a *P*'; actually we would just reinterpret the old '*P*' as 'place-time of a *P*' and rewrite nothing. (TT, p.16)

O que devemos notar, até este ponto, é o que chamaremos de processo de abstração e, por sua vez, unifica as passagens citadas anteriores. Em prol da simplicidade, objetos físicos podem ser reduzidos às regiões do espaço-tempo ocupadas por eles, e não precisamos parar por aqui: tais regiões são nada mais que conjuntos de coordenadas do espaço-tempo relativas a algum sistema fixo de coordenadas. E, mais uma vez, podemos observar que tais coordenadas de espaço-tempo são quádruplas ordenadas de números reais, e podemos, então, assumi-las no lugar das coordenadas do espaço-tempo. E ainda podemos reduzir os números reais e as quádruplas ordenadas a conjuntos, ficando com conjuntos de quádruplas ordenadas de números reais

¹⁰ RESNIK(2005) p.433

que substituiriam os objetos físicos, restando assim nada além de conjuntos puros (isto é, não envolvendo elementos primitivos). Quine observa que:

We have now looked at three cases in which we interpret or reinterpret one domain of objects by identifying it with part of another domain. In the first example, numbers were identified with some of the classes in one way or another. In the second example, physical objects were identified with some of the place-times, namely, the full ones. In the third example, place-times were identified with some of the classes, namely, classes of quadruples of numbers. In each such case simplicity is gained, if to begin with we had been saddled with the two domains. (TT, p.18)

O resultado do processo de abstração é uma ontologia composta exclusivamente por conjuntos. O “delineamento dos traços mais gerais da realidade”, portanto, pode ser feito na teoria de conjuntos ZFC, apresentada no capítulo anterior. Em especial, o Axioma da Extensionalidade torna ZFC adequada aos objetivos extensionalistas de Quine, enquanto os demais axiomas (e o da Extensionalidade) possibilitam a construção de uma hierarquia de conjuntos. A definição de par ordenado é um exemplo, já examinado, de como isso nos permite simplificar o esquema conceitual da ciência.

No caso geral temos:

(...) We are left with just the ontology of pure set theory, since the numbers and their quadruples can be modeled within it. There are no longer any physical objects to serve as individuals at the base of the hierarchy of classes, but there is no harm in that. It is common practice in set theory nowadays to start merely with the null class, form its unit class, and so on, thus generating an infinite lot of classes, from which all the usual luxuriance of further infinities can be generated. (TT, p.17-18)

Ao considerarmos uma teoria científica que suponha a existência de objetos físicos e de objetos matemáticos, podemos concluir que ambos os tipos de objetos podem ser reduzidos a conjuntos. Dessa maneira, a teoria que se referia antes a objetos físicos e matemáticos diversos, agora alude somente a conjuntos, sem que a evidência empírica seja perturbada. O que garante que essa redução de uma ontologia de objetos e objetos matemáticos diversos a outra, somente de conjuntos de fato, não perturbe as evidências experimentais? Quine trata dessa questão e não para no processo abstração, no qual aparentemente todos os objetos poderiam ser reduzidos, por uma questão de simplicidade e parcimônia, a conjuntos. Sua investigação se debruçará sobre nas relações entre múltiplas ontologias e a possibilidade de reinterpretação dos seus objetos, isto é, a reinterpretação de nossa teoria do mundo de modo a preservar suas consequências observacionais:

(...) other sort of reinterpretation equally instructive, the sort where we save nothing but merely change or seem to change our objects without disturbing either the structure or the empirical support of a scientific

theory in the slightest. All that is needed in either case, clearly, is a rule whereby a unique object of the supposedly new sort is assigned to each of the old objects. (TT, p.19)

Para que sejamos bem-sucedidos nessa reinterpretação, será necessário estipular uma função, por Quine chamada de função vicária (*proxy function*) - que mapeia cada objeto na ontologia original para um objeto na nova ontologia (ou seja, no novo domínio ou universo da estrutura da teoria). Portanto, utilizando uma técnica bem conhecida da lógica formal, podemos reinterpretar cada predicado de nossa teoria de modo que seja verdadeiro para algo na nova ontologia se e somente se, fosse verdadeiro como originalmente interpretado:

(...) Then, instead of predicating a general term '*P*' of an old object *x*, saying that *x* is a *P*, we reinterpret *x* as a new object and say that it is the *f* of a *P*, where '*f*' expresses the proxy function. Instead of saying that *x* is a dog, we say that *x* is the lifelong filament of space-time taken up by a dog. Or, really, we just adhere to the old term '*P*', 'dog', and reinterpret it as '*f* of a *P*', 'place-time of a dog'. This is the strategy that we have seen in various examples. (TT, p.19)

Uma função vicária mapeia cada objeto da ontologia original em um objeto da nova ontologia, o que, em um arcabouço lógico, significa reinterpretar cada sentença de uma teoria de modo que seja verdadeira para a nova ontologia, tal como é verdadeira na interpretação original. Assim, mantemos as condições de buscar em todas as reinterpretações as mesmas evidências¹¹ e os mesmos resultados teóricos acerca dos objetos de cada ontologia reinterpretada. É importante destacar que usaremos a teoria padrão de conjuntos, ZFC, como teoria de fundo, e a linguagem de ZFC tem, como já vimos, o símbolo de predicado binário \in como seu único símbolo não lógico; em particular, não há símbolos de função na linguagem de ZFC; assim os únicos termos da linguagem de ZFC são as variáveis, e portanto, uma reinterpretação desses termos só se dá pela alteração do domínio de um modelo considerado. Esse é um ponto cuja importância será enfatizada no capítulo 6.

Falamos originalmente sobre o processo de abstração, que permite interpretar objetos como conjuntos. A citação seguinte aborda um processo de revisão ontológica e ideológica:

The apparent change is twofold and sweeping. The original objects have been supplanted and the general terms reinterpreted. There has been a revision of ontology on the one hand and of ideology, so to say, on the other; they go together. Yet verbal behavior proceeds undisturbed, warranted by the same observations as before and elicited by the same observations. Nothing really has changed. (TT, p.19)

¹¹ Preservando o suporte empírico

Quine conclui que a referência é inescrutável; ou seja, não há como dizer nada em absoluto caso nossas palavras se refiram a isso ou àquilo¹², mas somente se elas se referirem sempre a uma interpretação fixa. Portanto, a mudança de uma ontologia para outra significa que nossas palavras mudam sua referência; não obstante, os valores de verdade das sentenças permaneçam inalterados. A mudança ocorre em todas as sentenças da teoria. É como dizer que os fatos¹³ permanecem os mesmos. A estrutura da teoria está preservada¹⁴.

O que foi dito no parágrafo anterior indica que a doutrina da inescrutabilidade da referência coincide com a doutrina da relatividade ontológica. Conforme observa Peter Hylton (HYLTON, 2007, p. 197 e p. 378), por algum tempo, entre certos comentadores de Quine, houve dúvida se de fato haveria a coincidência entre essas doutrinas. Quine, por sua vez, nega que sejam doutrinas diferentes em sua resposta a Roth¹⁵:

Early in his essay Roth methodically sets forth seven relations (a)-(g) of implication, non-implication, or inequivalence that I have purportedly affirmed between various theses. He gets some right and some wrong. (...) (g) The inscrutability of reference implies ontological relativity. I have no quarrel here, but I do not see what difference there is between the two. (HAHN L., SCHILPP P.A., 1998, p.459)

Até aqui, temos em mãos como os objetos podem ser assumidos por uma teoria regimentada e, conforme observado nos parágrafos anteriores, como podemos reinterpretar um discurso sobre certos objetos em outro sistema de objetos, desde que se mantenha fixa a evidência original. Essa é a tese da relatividade ontológica, também chamada de tese da inescrutabilidade da referência.

Ainda há certas tensões no sistema metafísico de Quine, especialmente relacionadas ao teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte. O teorema, em sua outra forma, foi enunciado no capítulo 2. Tendo em mãos as informações fornecidas pelo capítulo sobre a teoria de conjuntos ZFC e por este, sobre as questões ontológicas do sistema quiniiano, podemos nos debruçar com mais atenção sobre o teorema de Löwenheim-Skolem, no capítulo seguinte.

¹² Não há uma ontologia definitiva e a redução a conjuntos é uma redução a uma teoria extensionalista.

¹³ Quine se refere, ao que parece, aos fatos como a evidência ou evidências que inicialmente estimulam o desenvolvimento do discurso ontológico. Entretanto, este discurso poderia ser reescrito, renomeando os seus objetos, o que também significa dizer que a ontologia não se fixa numa apresentação definitiva dos objetos. A teoria diz que há algo, mas o que seja este algo, não há como fixar.

¹⁴ O uso técnico por Quine de “a estrutura de uma teoria”, requer esclarecimento, como veremos a seguir.

¹⁵ Tanto a relatividade ontológica e quanto a inescrutabilidade da referência foram nos textos finais de Quine chamadas de indeterminação da referência.

5 Algumas considerações sobre o Teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte

Como observamos, baseados em Peter Hylton, no capítulo 3, seção 3.1, da presente tese, Quine assume certos pressupostos da lógica em seus textos, embora se permita fazer variações sobre certas formulações técnicas. Esses são elementos marcantes de sua escrita que, se não forem abordados com o devido cuidado, podem dificultar o entendimento das teses filosóficas do sistema quiniiano. Um exemplo disso pode ser encontrado no paradigma filosófico do par ordenado na seção 3.2 do capítulo 3 e sua relação com as abordagens de N. Wiener, F. Hausdorff e K. Kuratowski. O presente capítulo tem como objetivo esclarecer alguns desses elementos da escrita de Quine, especialmente os que tenham relação direta com a relatividade ontológica e com o teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte, indo, portanto, além das considerações feitas anteriormente.

Iniciaremos este capítulo com uma exposição de um trecho do artigo *Ontological Relativity* (OROE, p. 26), em que Quine apresenta alguns elementos formais da doutrina da relatividade ontológica. Em seguida, serão apresentados um esboço da prova do Teorema de Löwenheim-Skolem na sua forma forte e uma discussão sobre algumas das consequências filosóficas decorrentes do (aparente) paradoxo de Skolem.

5.1 Aspectos Formais da Doutrina da Relatividade Ontológica

Quine construiu seu projeto metafísico ao longo de toda a sua obra, como apresentado no capítulo 4 da presente tese ao citarmos suas obras e trechos ao descrever esse projeto. Tendo também abordado, ao longo desse período de publicações, várias questões relacionadas à filosofia da lógica. Nesta tese, o texto *Ontological Relativity* (OROE, p. 26) se destaca na produção de Quine por oferecer um enfoque tanto da doutrina da relatividade ontológica quanto da relação entre essa doutrina e o teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte, com trechos que discutem os aspectos formais diretamente relacionados a ambas. E nesse texto, a questão do suposto retorno ao pitagorismo, que seria ensejado pelo teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte, é examinada.

O texto possui duas seções: I e II. Farei uma breve apresentação da primeira parte, destacando o que considero ser a sua tese principal, e dedicarei um espaço maior aos aspectos lógicos contidos na segunda parte, que antecede a discussão do teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte.

Na primeira parte, Quine apresenta sua posição naturalizada da filosofia da mente, assim como sua abordagem comportamental da linguagem. Apresenta também o experimento da tradução entre diferentes linguagens sem o auxílio de um dicionário, de modo que essa discussão torna-se, ao longo dessa primeira parte, a apresentação e defesa da tese da inescrutabilidade da referência, que apresentamos no capítulo anterior na seção 4.4:

When a naturalistic philosopher addresses himself to the philosophy of mind, he is apt to talk of language. Meanings are, first and foremost, meanings of language. Language is a social art which we all acquire on the evidence solely of other people's overt behavior under publicly recognizable circumstances. Meanings, therefore, those very models of mental entities, end up as grist for the behaviorists mill. Dewey was explicit on the point: "Meaning ... is not a psychic existence; it is primarily a property of behavior". (OROE, p.26-27)

A segunda parte do texto busca continuar uma discussão de como a inescrutabilidade da referência se comporta quando temos em nosso discurso os objetos abstratos. Esta discussão exige, portanto, que não somente exemplos sejam debatidos como, também, aspectos relacionados à formulação de teorias em uma linguagem de primeira ordem e os objetos no domínio de tais teorias regimentadas. É assim que Quine inicia a segunda parte do texto:

I first urged the inscrutability of reference with the help of examples like the one about rabbits and rabbit parts. These used direct ostension, and the inscrutability of reference hinged on the indeterminacy of translation of identity and other individuating apparatus. The setting of these examples, accordingly, was radical translation: translation from a remote language on behavioral evidence, unaided by prior dictionaries. Moving then to deferred ostension and abstract objects, we found a certain dimness of reference pervading the home language itself. (OROE, p. 45-46)

Quine então conclui, mais a frente, que o discurso sobre os objetos é sempre relativo a alguma linguagem de fundo, cujas as interpretações vão especificar o que, de fato, são os objetos tratados pela teoria:

It is meaningless to ask whether, in general, our terms "rabbit", "rabbit part", "number", etc., really refer respectively to rabbits, rabbit parts, numbers, etc., rather than to some ingeniously permuted denotations. It is meaningless to ask this absolutely; we can meaningfully ask it only relative to some background language. When we ask, "Does 'rabbit'

really refer to rabbits?" someone can counter with the question: "Refer to rabbits in what sense of 'rabbits'?" thus launching a regress; and we need the background language to regress into. The background language gives the query sense, if only relative sense; sense relative in turn to it, this background language. Querying reference in any more absolute way would be like asking absolute position, or absolute velocity, rather than position or velocity relative to a given frame of reference. Also it is very much like asking whether our neighbor may not systematically see everything upside down, or in complementary color, forever undetectably. (OROE, p.48-49)

Quine apresenta a questão que deve ser respondida, quando analisamos os aspectos ontológicos de nossas teorias regimentadas:

To talk thus of theories raises a problem of formulation. *A theory, it will be said, is a set of fully interpreted sentences. (More particularly, it is a deductively closed set: it includes all its own logical consequences, insofar as they are couched in the same notation).* But if the sentences of a theory are fully interpreted, then in particular the range of values of their variables is settled. How then can there be no sense in saying what the objects of a theory are? (Destaque nosso, OROE, p.51)

A resposta apresenta a tese da relatividade ontológica, como visto no capítulo 4 desta tese:

My answer is simply that we cannot require theories to be fully interpreted, except in a relative sense, if anything is to count as a theory. (OROE, p.51)

Devemos ser cuidadosos e observar que Quine apresentará diversos aspectos formais das linguagens de primeira ordem e da formulação de teorias em uma linguagem de primeira ordem, construindo o arcabouço formal de suporte à doutrina da relatividade ontológica e a seu sistema metafísico.

Podemos destacar como tais formulações se aproximam ou reapresentam as definições vistas no capítulo 2 desta tese. Este é o caso, do conceito de teoria destacado na passagem anterior: (...) *it is a deductively closed set: it includes all its own logical consequences, insofar as they are couched in the same notation.* Como visto no capítulo 2, páginas 34,35 e 36, temos o conceito de uma teoria de primeira ordem como um sistema formal T , cuja linguagem é uma linguagem de primeira ordem, cujos axiomas lógicos são os axiomas lógicos nessa linguagem e cujos os axiomas não lógicos são especificados para que determinemos a teoria T . Lembremos que um modelo de T é uma estrutura para a linguagem de T , na qual todos os axiomas não lógicos de T são verdadeiros. Dizemos também que uma sentença é verdadeira em T se e somente se ela é verdadeira em todos os modelos de T , ou equivalentemente, se e somente se tal sentença é uma consequência lógica dos axiomas não lógicos de T . Mais à

frente, no mesmo capítulo 2 desta tese, na seção 2.6.2, apresentamos uma outra concepção de teoria, na qual, uma teoria em uma dada linguagem de primeira ordem, é um conjunto de sentenças da linguagem dessa teoria, fechado por consequência lógica, nessa linguagem ("*...couched in the same notation*"). É a isso que Quine se refere ao escrever sobre um conjunto fechado por dedução lógica em uma mesma notação¹. Ambas definições do capítulo 2 são temas das considerações posteriores de Quine no mesmo texto, como é o caso da sua formulação do conceito de forma de uma teoria:

We may picture the vocabulary of a theory as comprising logical signs such as quantifiers and the signs for the truth functions and identity, and in addition descriptive or nonlogical signs, which, typically, are singular terms, or names, and general terms, or predicates. Suppose next that in the statements which comprise the theory, that is, are true according to the theory, we abstract from the meanings of the nonlogical vocabulary and from the range of the variables. *We are left with the logical form of the theory, or, as I shall say, the theory form.* (OROE, p.53, destaque nosso)

A concepção quiniiana de forma de teoria corresponde àquela que apresentamos de teoria como um sistema formal. Na próxima seção, faremos considerações sobre a noção quiniiana de estrutura de uma teoria.

5.1.1 Estrutura de uma teoria

Como observado na introdução da presente tese, no ensaio *Things and Their Place in Theories*, página 20, Quine escreve: *Structure is what matters to a theory, and not the choice of its objects*. Isso, como dissemos, parece suscitar algum conflito com o critério quiniiano de compromisso ontológico, apresentado no capítulo 3 da presente tese: se os objetos não são o que importa para uma teoria, mas sim a estrutura dessa teoria, com que objetos uma teoria regimentada em uma linguagem de primeira ordem se compromete ontologicamente?

Há, portanto, a necessidade de esclarecer a noção de estrutura de uma teoria. E, ao adentrarmos nessas questões técnicas, outras podem surgir quando consideramos a doutrina da relatividade ontológica: os objetos são dispensáveis? Não precisamos deste ou daquele objeto em particular? Uma teoria diz que há algum fato acerca dos objetos com os quais está comprometida? Quando dizemos que o discurso sobre determinados objetos pode ser reinterpretado, estamos perdendo de vista tais objetos? Sendo uma teoria regimentada, são os objetos que devemos considerar no domínio de uma interpretação da linguagem de uma teoria quando, tratamos as questões ontológicas associadas às teorias, ou há algo mais?

¹ O teorema da completude nos permite falar tanto de consequência semântica quanto de consequência sintática

Todas essas questões parecem convergir para: o que Quine quer nos dizer com Estrutura (de uma teoria), do ponto de vista do aparato lógico que utiliza?

Ainda pontuando o que foi apresentado na introdução desta tese, Quine fala de preservação da estrutura e de preservação da verdade das sentenças; uma questão que naturalmente se coloca é: se fala de isomorfismo entre estruturas ou de equivalência elementar entre estruturas? Estes conceitos foram apresentados no capítulo dois e também formulados na teoria de ZFC no capítulo 3.

Em ambos os casos, equivalência elementar ou isomorfismo, a regimentação não interfere no tribunal da evidência, mas o isomorfismo traz exigências mais fortes do que a equivalência elementar. Como já dissemos, estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes, mas nem sempre estruturas elementarmente equivalentes são isomorfas. Este ponto apresenta a necessidade formal de se falar especialmente nos aspectos ontológicos e nas questões concernentes aos modelos de uma teoria com uma linguagem de primeira ordem. Para os nossos propósitos, não podemos ficar satisfeitos apenas com a definição de teoria como conjuntos de sentenças em uma dada linguagem fechado sobre consequência lógica nessa linguagem.

Esse é um aspecto que carece de esclarecimento, especialmente quando consideramos modelos não standard da aritmética, como veremos no capítulo seguinte e o papel do teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte na tentativa de adoção de uma ontologia pitagórica, isto é, uma ontologia constituída exclusivamente pelos números naturais.

O conceito de estrutura de uma teoria pretende lidar com a existência de modelos de uma teoria e com a doutrina da relatividade ontológica; há várias questões técnicas relativas à especificação de modelos pretendidos, assim como há interpretações na qual podemos fixar modos de dizer a que esses modelos se referem, isto é, o que exatamente são os elementos reinterpretados no domínio de cada um desses modelos. Entendemos que uma interpretação fixa, especialmente relevante, tendo em vista certos objetivos, é o que Quine considera como estrutura de uma teoria. Sabemos que a noção de isomorfismo nos dá um meio de reinterpretar os objetos, digamos, de uma teoria em outra, mas não podemos nos circunscrever a esse aspecto técnico uma vez que, como já foi dito, nem sempre estruturas elementarmente equivalentes são isomorfas. É, mais uma vez, o exemplo dos modelos não *standard* da aritmética. Esses modelos não *standard* não são isomorfos ao modelo padrão da aritmética, \mathcal{N} , isto é o modelo cujo o domínio é o conjunto dos números naturais *standard* e, no qual o número 0, a função sucessor, a função soma e a função multiplicação interpretam os símbolos esperados; entretanto, esses modelos não *standard* são elementarmente equivalentes ao modelo padrão \mathcal{N} , e, assim, neles fica preservada a verdade das sentenças da linguagem da aritmética. Notemos ainda que há modelos não *standard* cujos domínios

são enumeráveis (a aritmética não é aleph-zero ²).

Inicialmente, no texto *Ontological Reduction and The World of Numbers*³, anterior ao *Ontological Relativity*, Quine pensava em isomorfismo como uma justificativa para a redução de uma ontologia a outra. Como notamos na introdução da presente tese, mais tarde o termo isomorfismo foi alterado pelo autor para “*These cases suggest that what justifies the reduction of one system of objects to another is preservation of relevant structure*”⁴.

Quando uma teoria regimentada conforme as exigências de Quine pretende que seus objetos sejam considerados como números naturais, isto é, quando parece ser particularmente relevante a consideração de uma estrutura para a linguagem dessa teoria cujo domínio seja o conjunto dos números naturais, pela doutrina da relatividade ontológica, tal consideração não é feita de um único modo. Levando em conta simplesmente a noção isomorfismo entre estruturas temos a garantia técnica de que não há um modelo único de uma teoria da aritmética. Problemas podem surgir com a eventual multiplicidade de tais modelos, outra consideração técnica de que Quine está ciente ao exigir a regimentação das teorias em uma linguagem de primeira ordem. Ainda assim, podemos ter dúvidas sobre qual a interpretação pretendida para uma teoria. Isto é, de que modo sabemos que continuamos falando sobre números naturais? Nossa única esperança, dirá Quine, é trazer para a análise uma teoria de fundo e uma interpretação para essa teoria de fundo na qual podemos reconhecer que falamos sobre números naturais. Este é um ganho quando assumimos ZFC como teoria de fundo e quando definimos em ZFC, como fizemos no capítulo 3, os números naturais. Contudo, persistem nesse contexto os números naturais não *standard*.

Um discurso sobre número, segundo Quine, só faz sentido, face a uma teoria de fundo, e essa teoria pode ser exemplificada, digamos, pela aritmética de Peano. Lembremos que também apresentamos em ZFC, nossa teoria de fundo, como os axiomas de Peano podem ser formulados, e notamos que são teoremas de ZFC. O que garante que sentenças da linguagem de uma teoria são verdadeiras quando analisamos seus objetos, isto é, quando nos concentramos em um dado modelo dessa teoria, é precisamente a teoria de fundo. Assim, lemos o seguinte trecho:

We are finding no clear difference between specifying a universe of discourse - the range of the variables of quantification - and reducing that universe to some other. We saw no significant difference between clarifying the notion of expression and supplanting it by that of number. And now to say more particularly what numbers themselves are is in no evident way different from just dropping numbers and assigning to

² ver BOOLOS,JEFFREY, p.191-195

³ The Journal of Philosophy, Vol. 61, No. 7 (Mar. 26, 1964), pp. 209-216

⁴ WPOE, p.201. Quine mantém este trecho inalterado na edição revisada posterior.

arithmetic one or another new model, say in set theory. (OROE, p.43-44, ênfases do autor)

Como exatamente devemos compreender a aritmética como teoria de fundo? Não se trata de assumir qualquer objeto no domínio como aquele que satisfaça as propriedades da aritmética. Iniciar uma progressão pelo número 99 atenderia às propriedades básicas, por exemplo. Devemos fixar, no exemplo da aritmética como teoria de fundo, qual progressão melhor atende aos modelos de nossa teoria sobre os números. Desta maneira, percebemos que não se pode apenas elucidar as propriedades da aritmética, mas definir uma interpretação que atenda aos nossos propósitos com os números. Esse procedimento ocorre em ZFC quando no capítulo 3 definimos os números naturais com uma progressão iniciada no que consideramos como número natural 0.

Todas as demais teorias devem, em cada modelo pretendido, se orientar por uma interpretação da teoria de fundo. Foi também desta maneira que lidamos com as propriedades que nos permitem reconhecer o segmento dos modelos *não standard* que são isomorfos ao modelo *standard*. Quine assim escreve:

So, though Russell was wrong in suggesting that numbers need more than their arithmetical properties, he was right in objecting to the definition of numbers as any things fulfilling arithmetic. The subtle point is that any progression will serve as a version of number so long and only so long as we stick to one and the same progression. Arithmetic is, in this sense, all there is to number: there is no saying absolutely what the numbers are; there is only arithmetic. (OROE, p.45, ênfase nossa)

Voltamos mais uma vez ao *Ontological Relativity*:

The point is not that bare matter is inscrutable: that things are indistinguishable except by their properties. (OROE, p.50)

E um pouco mais adiante:

It is thus meaningless within the theory to say which of the various possible models of our theory form is our real or intended model. Yet even here we can make sense still of there being many models. For we might be able to show that for each of the models, however unspecifiable, there is bound to be another which is a permutation or perhaps a diminution of the first. (OROE, p.54)

A teoria de fundo nos permite, em certa medida, discernir as propriedades que definem os aspectos estruturais de uma teoria, e com isso sabemos, em certa medida, a quais objetos nossas teorias sobre números naturais se referem. Se reconhecemos na aritmética as propriedades que nos permitem teorizar sobre números, os diferentes

modelos da aritmética tornam verdadeiras sentenças a partir do que acontece na teoria de fundo.

5.1.2 Economia Ontológica

Após apresentar na segunda seção do texto *Ontological Relativity* (OROE, p. 26) as questões concernentes à estrutura de uma teoria e à teoria de fundo, Quine se debruça sobre o papel das funções vicárias em reduções ontológicas que podem significar economia ontológica para uma teoria:

A usual occasion for ontological talk is reduction, where it is shown how the universe of some theory can by a reinterpretation be dispensed with in favor of some other universe, perhaps a proper part of the first. (OROE, p.55)

Nesta subseção, os números de Gödel são citados como fornecendo um exemplo de função vicária um a um, onde temos garantia de redução ontológica:

I have treated elsewhere of the reduction of one ontology to another with help of a proxy function: a function mapping the one universe into part or all of the other. For instance, the function "Gödel number of" is a proxy function. The universe of elementary proof theory or protosyntax, which consists of expressions or strings of signs, is mapped by this function into the universe of elementary number theory, which consists of numbers. (OROE, p.55)

Lembremos que uma expressão em uma linguagem é simplesmente uma sequência finita de símbolos dessa linguagem e que uma numeração de Gödel de um conjunto de expressões (em uma linguagem) é uma função desse conjunto de expressões no conjunto dos números naturais (o número natural que essa função associa a cada expressão é dito o número de Gödel dessa expressão) satisfazendo as seguintes condições:

1. Essa função é um a um, ou seja, injetora, isto é, expressões diferentes têm números de Gödel diferentes.
2. Dada uma expressão podemos calcular efetivamente, isto é, algoritmicamente o seu número de Gödel.
3. Dado um número natural, podemos decidir efetivamente, isto é, algoritmicamente, se ele é ou não o número de Gödel de uma expressão (assim a imagem dessa função é um subconjunto recursivo do conjunto dos números naturais). E caso, esse número seja o número de Gödel de alguma expressão, podemos calcular efetivamente, isto é, algoritmicamente, a expressão da qual ele é o número de Gödel.

Há muitas maneiras de fazer numerações de Gödel de linguagens de primeira ordem (que possuam um conjunto enumerável de símbolos não lógicos algoritmicamente identificáveis), vejam-se por exemplo, p.70 e 171 de BOOLOS e JEFFREY (1989). A numeração de Gödel ali apresentada não é sobrejetora, ou seja, há números naturais que não são números de Gödel de expressão alguma.

Quine destaca a seguir que não é sempre que precisamos de uma função um a um, como especificado na condição 1 acima, em uma redução ontológica.

The proxy function used in reducing one ontology to another need not, like Godel numbering, be one-to-one. We might, for instance, be confronted with a theory treating of both expressions and ratios. We would cheerfully reduce all this to the universe of natural numbers, by invoking a proxy function which enumerates the expressions in the Godel way, and enumerates the ratios by the classical method of short diagonals. This proxy function is not one-to-one, since it assigns the same natural number both to an expression and to a ratio.

O *method of short diagonals* da citação acima é simplesmente o familiar método do zigue-zague de Cantor empregado, entre outras coisas, para mostrar que o conjunto dos números racionais é enumerável. Esse método nos permite estabelecer uma função bijetora entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números naturais.

Assim, se estivermos lidando com um domínio que inclua tanto expressões de uma linguagem de primeira ordem quanto números racionais e representarmos as expressões por seus números de Gödel e os números racionais pelos números naturais obtidos pelo zigue-zague de Cantor, teremos uma função não injetora, isto é, não um a um, entre nosso domínio, constituído por expressões e números racionais, e o conjunto dos números naturais; de fato haverá números naturais que serão imagens tanto de uma expressão como de um número racional. Esse é o ponto que Quine destaca na citação imediatamente anterior.

A argumentação prossegue até o ponto culminante, destacando que uma teoria pode ser utilizada como teoria de base para que seja realizada uma redução ontológica, estabelecendo não somente a importância das funções vicárias, mas também ampliando o modo como devemos compreender o que é uma teoria de fundo e qual o seu papel na relatividade ontológica:

If the new objects happen to be among the old, so that V is a subclass of U, then the old theory with universe U can itself sometimes qualify as the background theory in which to describe its own ontological reduction. But we cannot do better than that; we cannot declare our new ontological economies without having recourse to the uneconomical old ontology.

Quine então se dirige à última seção da parte 2 do texto, na qual, em uma discussão que envolve questões referentes a modelos de uma teoria de primeira ordem,

relatividade ontológica e redução ontológica, é importante discutir as questões filosóficas envolvendo o teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte. A próxima seção da presente tese revela alguns aspectos que não estão completamente detalhados na argumentação de Quine e reforça a importância de considerar o o teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte diante dos assuntos referidos.

5.2 Esboço da prova do Teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte

O teorema já foi enunciado no capítulo 2. Podemos rerepresentá-lo na seguinte forma:

Teorema 5.2.1 (Teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte). *Qualquer interpretação \mathcal{I} , de uma linguagem de primeira ordem com um conjunto enumerável de símbolos não lógicos, tem uma subinterpretação elementarmente equivalente \mathcal{J} cujo domínio é enumerável.*

Já no texto *Relatividade Ontológica*, Quine assim apresenta o teorema:

Toward further appreciating the bearing of ontological relativity on programs of ontological reduction, it is worth while to reexamine the philosophical bearing of the Lowenheim-Skolem theorem. I shall use the strong early form of the theorem, which depends on the axiom of choice. It says that *if a theory is true and has an indenumerable universe, then all but a denumerable part of that universe is dead wood, in the sense that it can be dropped from the range of the variables without falsifying any sentences.* (OROE, p.58-59, ênfase minha)

Note-se que, o enunciado que apresentamos inicialmente é uma versão matematicamente precisa da citação de Quine; talvez cause algum estranhamento o modo como Quine parafraseia os termos técnicos. Esse tipo de paráfrase é comum na obra do filósofo. Como abordamos no capítulo 1, por um modelo de uma teoria, compreendemos uma estrutura para a linguagem dessa teoria, na qual todos os axiomas não lógicos dessa teoria são verdadeiros. Um modelo de uma sentença é uma interpretação dessa sentença que a satisfaz. As sentenças verdadeiras no modelo não enumerável e aquelas verdadeiras no submodelo enumerável são as mesmas, isto é, esses modelos são elementarmente equivalentes.

Vamos então analisar um esboço da prova do teorema para maiores esclarecimentos.

*Teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte. Esboço da prova*⁵

⁵ EPSTEIN (2011) p.184

A forma originalmente mais robusta do teorema de Löwenheim-Skolem, apresentada anteriormente nesta seção, estabelece que, partindo de um modelo infinito M de um conjunto de sentenças Σ , é possível obter um submodelo de M , que também é infinito, mas enumerável e que é um modelo de Σ . Na verdade, as sentenças verdadeiras em M e as verdadeiras no submodelo são as mesmas.

A ideia central é que, ao lidar com qualquer modelo infinito, a formação de um submodelo enumerável infinito pode ser iniciada com a escolha de um subconjunto enumerável do universo do modelo. As sentenças nas quais nenhum quantificador existencial apareça são verdadeiras quando consideramos esse subconjunto enumerável. Quanto às sentenças nas quais há ocorrência do quantificador existencial, fazemos o seguinte: adicionamos àquele subconjunto enumerável do universo do modelo elementos que tornem as afirmações existenciais feitas nessas sentenças verdadeiras. Como teremos que fazer isso apenas uma quantidade enumerável de vezes e a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável (graças ao axioma da escolha), acabamos obtendo um submodelo cujo domínio é enumerável. Essa é, como dissemos acima, a ideia central; em uma demonstração propriamente dita, detalhes técnicos têm de ser apresentados.

□

Quine, é claro, está ciente dessa demonstração e indiretamente se reporta a ela quando escreve no ensaio *Relatividade Ontológica* o seguinte:

The theorem is that all but a denumerable part of an ontology can be dropped and not be missed. One could imagine that the proof proceeds by partitioning the universe into denumerably many equivalence classes of indiscriminable objects, such that all but one member of each equivalence class can be dropped as superfluous; and one would then guess that where the axiom of choice enters the proof is in picking a survivor from each equivalence class. If this were so, then with help of Hilbert's selector notation we could indeed express a proxy function. *But in fact the Lowenheim-Skolem proof has another structure.* (OROE, p.60, ênfase nossa)

E logo em seguida ele acrescenta:

I see in the proof even of the strong Lowenheim-Skolem theorem *no reason to suppose that a proxy function can be formulated anywhere that will map an indenumerable ontology, say the real numbers, into a denumerable one.* (OROE, p.60-61, ênfase nossa)

A prova, esboçada inicialmente, nos permite compreender melhor como Quine interpreta os resultados iniciais do teorema de Löwenheim-Skolem nas questões mais técnicas de seu projeto metafísico. Especialmente, questiona-se se haveria alguma

relação direta com a redução ontológica; isto é, se o teorema indicaria uma redução ontológica de algum tipo, ou atuaria como parte de um procedimento semelhante de redução ontológica, segundo o argumento de Quine sobre a relatividade ontológica. Podemos concluir que não existe tal relação, como podemos ler nas citações, pois não se trata de reinterpretar os objetos da teoria em novos objetos em um novo domínio. Os resultados do teorema estão relacionados a uma subinterpretação do domínio original. O domínio enumerável é construído com certos objetos do domínio não enumerável da interpretação original. E, como não há uma reinterpretação de objetos de um domínio antigo em um novo domínio, também não há algum tipo de função operando como uma função vicária que, deveria assegurar algum relacionamento entre os objetos do antigo domínio e os do novo. O que existe, graças ao axioma da escolha, é o domínio enumerável da subinterpretação elementarmente equivalente à interpretação original.

Quine comenta aspectos da prova como parte da apreciação do importe da relatividade ontológica no programa de redução ontológica, conforme a citação no início da seção e também como observado anteriormente, mas ele mesmo não a apresenta em seu texto. O que fazemos nesta seção é, de acordo com a proposta da tese, examinar tais aspectos em busca de uma maior compreensão das características formais do sistema metafísico de Quine. É também oportuno lembrar que parecia haver, segundo uma certa visão do teorema de Löwenheim-Skolem, encorajamento para o retorno a um obscuro pitagorismo, como descrito no capítulo 3 da presente tese. Em certa medida, por enquanto, podemos concordar com Quine que não é este o caso. Não há uma redução ontológica em pauta, muito menos uma redução de um universo não enumerável, como o dos números reais, em um universo enumerável de números naturais. Há, entretanto, outras questões técnicas e filosóficas que ainda precisamos elucidar e que serão tema da próxima seção.

5.2.1 O paradoxo de Skolem

No próximo capítulo, veremos que a apresentação do chamado Paradoxo de Skolem pode ser feita de forma muito sucinta, quando dispomos dos recursos apropriados de teoria de conjuntos. Por ora, entretanto, examinemos a questão de uma outra perspectiva, na qual supostamente haveria algum tipo de anomalia (seguindo BOOLOS e JEFFREY, 1989, p.152-155)

O teorema de Löwenheim-Skolem pode ser considerado filosoficamente perturbador por suas consequências aparentemente anômalas, e desafia a intuição ao sugerir que, mesmo em domínios com apenas um número enumerável de conjuntos de números naturais, certas sentenças verdadeiras podem afirmar a existência de um número não enumerável desses conjuntos. Esta situação, frequentemente referida como “paradoxo de Skolem” (não é, claro, um paradoxo genuíno) levanta questões profundas

sobre a relação entre lógica de primeira ordem e a noção de enumerabilidade.

Para abordar a origem deste paradoxo, é essencial revisitar a definição de enumerabilidade. Considere-se um par ordenado (x, y) de números naturais e a função de emparelhamento J , que atribui a cada tal par um número natural único. Uma função injetora e recursiva, J facilita a definição de um “enumerador” de um conjunto E de conjuntos de números naturais, caracterizando E como enumerável se possuir um tal enumerador.

A investigação se estende à análise de uma linguagem formal específica e suas interpretações, que incorporam os numerais naturais, a função J , e predicados para números e conjuntos de números. Uma interpretação-chave, \mathcal{I} , contém todos os conjuntos de números naturais em seu domínio, e uma sentença particular dentro dessa linguagem é declarada verdadeira se não existir um enumerador para o conjunto de todos os conjuntos de números no domínio da interpretação.

A aplicação do teorema de Löwenheim-Skolem revela que \mathcal{I} possui uma subinterpretação \mathcal{J} elementarmente equivalente, cujo domínio é enumerável, levando à aparente contradição central do “paradoxo de Skolem”: a sentença é verdadeira mesmo quando interpretada em um domínio que contém apenas um número enumerável de conjuntos de números.

A resolução do paradoxo reside na compreensão de que, embora o domínio de \mathcal{J} seja enumerável, nenhum enumerador para o conjunto de todos os conjuntos de números naturais em \mathcal{J} pode existir dentro de seu próprio domínio.

Assim, como escreve Hilary Putnam em *Models and Reality* (1980, p. 465), o que é um conjunto enumerável do ponto de vista de um modelo pode ser um conjunto não enumerável do ponto de vista de outro modelo. Putnam observa que Skolem chega a afirmar que “até mesmo as noções de finito, infinito, sequência simplesmente infinita e assim por diante, revelam-se meramente relativas dentro da teoria dos conjuntos axiomática”.

No trecho a seguir, Quine discute o teorema de Löwenheim-Skolem, que parece sugerir que quase toda uma ontologia pode ser dispensada sem que seja percebida a ausência do que foi deixado de fora. Ele comenta tal possibilidade de provar o teorema dividindo o domínio da interpretação em classes de objetos indistinguíveis, dos quais apenas um de cada classe seria necessário. Aparentemente, para Quine, seguindo esse raciocínio, o teorema de Löwenheim-Skolem teria também outras implicações para a ontologia: nossas teorias precisariam apenas de modelos enumeráveis, e assim, de domínios constituídos por números naturais. Assim, seria o caso de abandonar uma ontologia não-enumerável dos números reais em prol de uma ontologia enumerável por meio do uso de uma função vicária? Como reduzir um domínio não-enumerável em

um enumerável? Quine nega a possibilidade de formulação desse procedimento de redução ontológica:

The theorem is that all but a denumerable part of an ontology can be dropped and not be missed. One could imagine that the proof proceeds by partitioning the universe into denumerably many equivalence classes of indiscriminable objects, such that all but one member of each equivalence class can be dropped as superfluous; and one would then guess that where the axiom of choice enters the proof is in picking a survivor from each equivalence class. If this were so, then with help of Hilbert's selector notation we could indeed express a proxy function. But in fact the Lowenheim-Skolem proof has another structure. I see in the proof even of the strong Lowenheim-Skolem theorem *no reason* to suppose that a proxy function can be formulated anywhere that will map an indenumerable ontology, say the real numbers, into a denumerable one. (OROE, p.60-61)

Como foi apresentado nesta seção e na anterior, o teorema de Löwenheim-Skolem não é um procedimento de redução ontológica, ao menos não da maneira como Quine o percebe quando usamos uma função vicária, como apresentado no capítulo 4 da presente tese, e sim um resultado observado quando analisamos os modelos de um ponto de vista metateórico. Há aspectos de um modelo não enumerável (como a noção de não enumerabilidade) que são exclusivos dele e se alteram quando trabalhamos com um modelo enumerável. Nesse sentido, não há que se preocupar com o aparente paradoxo, nem com a possibilidade da aceitação de um certo pitagorismo no qual tudo o que existe são ontologias enumeráveis. O teorema de Löwenheim-Skolem, sua prova e suas consequências, embora compatíveis com um procedimento de redução ontológica, onde preservamos a teoria, mas alteramos o seu domínio, não constituem um tal procedimento. As características relativas a interpretações não enumeráveis nem sempre se preservam em interpretações enumeráveis. Há alguns pontos importantes do projeto metafísico de Quine que precisaremos avaliar mais detidamente à luz da consideração dos modelos de ZFC e o faremos no próximo capítulo.

6 As implicações propriamente ditas do Teorema Löwenheim-Skolem

Neste capítulo apresentaremos implicações propriamente ditas do teorema de Löwenheim-Skolem, em sua forma forte, na doutrina da relatividade ontológica de Quine.

A implicação central do teorema de Löwenheim-Skolem, em sua forma forte, na doutrina da relatividade ontológica de Quine é que é relevante considerar explicitamente os modelos de ZFC no estudo do alcance da doutrina da relatividade ontológica. Dizer que é relevante não significa dizer que é mandatário. O próprio Quine não considerou os modelos de ZFC explicitamente, mas ao tratar do “importe da relatividade ontológica no programa da redução ontológica” por meio do teorema de Löwenheim-Skolem (em sua forma forte) abriu caminho para a consideração explícita desses modelos. As demais implicações são derivadas dessa implicação central. Por isso apresentamos um capítulo, o segundo, tratando de aspectos básicos de teoria de conjuntos; por isso, também apresentaremos neste capítulo outros tópicos de teoria de conjuntos, a saber, a noção de modelo de ZFC, a noção de caráter absoluto de uma fórmula e a noção de conjunto construtível introduzida por Gödel para provar a consistência da hipótese generalizada do contínuo. A introdução dessa noção, segundo o próprio Gödel¹, foi motivada pelo teorema de Löwenheim-Skolem.

Passemos a apresentar essas noções (vamos seguir basicamente KUNEN (1980)).

6.1 Noção de Relativização

Para apresentar a noção de modelo de ZFC precisamos da noção de relativização. Vejamos.

Seja M uma classe qualquer (em ZFC não existem classes próprias; quando falamos em classe própria estamos de fato nos referindo a uma fórmula da linguagem de ZFC). Para qualquer fórmula ϕ definimos ϕ^M , a relativização de ϕ a M , por indução sobre ϕ da seguinte maneira:

a. $(x = y)^M$ é $x = y$

b. $(x \in y)^M$ é $x \in y$

¹ Veja FERFERMAN, S. et al. (Eds.). (1986). Kurt Gödel - Collected Works: Volume I, Publications 1929-1936. New York: Oxford University Press. p.17

- c. $(\phi \wedge \psi)^M$ é $\phi^M \wedge \psi^M$
- d. $(\neg\phi)^M$ é $\neg(\phi^M)$
- e. $(\exists x\phi)^M$ é $\exists x(x \in M \wedge \phi^M)$

Observação: as relativizações de fórmulas envolvendo os demais conectivos e o quantificador universal podem, é claro, ser definidas a partir das relativizações acima.

O ponto central é que a relativização de ϕ a M é obtida substituindo-se todos os quantificadores $\exists x$ por $\exists x \in M \dots$ (isto é, $\exists x(x \in M \wedge \dots)$) e todos os quantificadores $\forall x$ por $\forall x \in M \dots$ (isto é, $\forall x(x \in M \rightarrow \dots)$). Assim, se $\phi(x_1, \dots, x_n)$ é uma fórmula na qual as variáveis x_1, \dots, x_n ocorrem livres, então para $x_1, \dots, x_n \in M$, $\phi^M(x_1, \dots, x_n)$ “diz” que a relativização de ϕ a M é verdadeira de x_1, \dots, x_n sob a interpretação segundo a qual as variáveis ligadas de ϕ variam em M . Temos assim uma sistematização de mudança no âmbito de variação das variáveis ligadas. Isso repercute no alcance da doutrina da relatividade ontológica. Na verdade, considerada a multiplicidade de modelos de ZFC (supondo que ZFC seja consistente), a repercussão é, parece-nos, muito grande. Mais uma vez, lembremos que os únicos termos da linguagem de ZFC são as variáveis, uma vez que a linguagem de ZFC não possui símbolos de função. Consequentemente, o único modo de reinterpretar termos de ZFC é alterar o âmbito de variação das variáveis, ou seja, alterar o domínio de uma interpretação.

A relativização é um processo pelo qual se adapta uma fórmula lógica para que ela opere dentro de um domínio específico, denominado M neste contexto. Isso é feito alterando os quantificadores da fórmula original para que se refiram apenas a elementos dentro de M . Isso tem implicações muito importantes na teoria dos conjuntos e na lógica, pois permite que se considere a verdade de declarações dentro de contextos restritos variados, ao invés de universalmente. Esse processo é fundamental para a construção e análise de modelos de ZFC, em que certas propriedades e relações expressas na linguagem da teoria de conjuntos podem valer ou não, dependendo do modelo específico considerado.

Passemos, agora, formalmente, à noção de modelo de ZFC.

6.2 Modelos de ZFC

Seja M uma classe qualquer.

- a. Para uma sentença ϕ , da linguagem de ZFC, “ ϕ é verdadeira em M ” significa ϕ^M
- b. Para um conjunto S de sentenças, da linguagem de ZFC, “ M é um modelo de S ” significa que cada sentença em S é verdadeira em M .

Se S é o conjunto dos axiomas de ZFC e M é um modelo de S , dizemos que M é um modelo de ZFC.

Como aponta Kunen(1980, p.112), as cláusulas a) e b), embora sejam variantes da mesma ideia, são formalmente distintas. “ ϕ é verdadeira em M ” é uma abreviação da relativização de ϕ a M , enquanto que “ M é um modelo de S ” é um enunciado na metateoria dizendo que para cada sentença ϕ em S , podemos provar a relativização de ϕ a M a partir dos axiomas que estejamos usando na ocasião.

Antes de prosseguir, vale citar observações feitas por Kunen em *The Foundations of Mathematics*, destacando que a distinção entre “*statements of faith*” e “*definitional axioms*” citada por Kunen é similar a uma feita por Feferman, mas não vamos explorar essa similaridade aqui. O autor, em seu exemplo 3, se refere à teoria de conjuntos:

A philosophical remark: In model theory, every list of sentences in formal logic forms the axioms for some (maybe uninteresting) theory, but when applied in mathematics, there are two different uses of word "axioms": as “statements of faith” and as “definitional axioms”. The first use is closest to the dictionary definition of an axiom as a “truism” or a “statement that needs no proof because its truth is obvious”. The second use is common in algebra where one speaks of the “axioms” for groups, rings, fields, etc.

Consider our three examples:

(...)

Example 3: (Classical (mid 1900s) view): these are statements of faith. ZFC is the theory of everything (...) Modern mathematics might seem to be a mess of various axiom systems: groups, rings, fields, geometries, vector spaces, etc.,etc. This is all subsumed within set theory (...) So, we postulate once and for all these ZFC axioms. After that, there are no further assumptions; we just make definitions and prove theorems.

(...)

Example 3 (Modern View): these are definitional axioms. Set theory is the study of models of ZFC. There are, for example, models in which $2^{\aleph_0} = \aleph_5$; this means that there are exactly four infinite cardinalities, called $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4$, strictly between countable (i.e., \aleph_0) and the size of \mathbb{R} . (KUNEN, 2009, p.6-7)

Ainda ao final da citação anterior, naturalmente, ao afirmar a existência de modelos de ZFC, Kunen está supondo a consistência de ZFC.

Um modelo de ZFC é uma estrutura que satisfaz os axiomas de ZFC dentro de um domínio específico. Isso significa que, para um conjunto de sentenças S (neste caso, os axiomas de ZFC), se M é um modelo de S , então todas as sentenças em S são verdadeiras quando interpretadas no contexto de M . Isso permite a existência de múltiplos “universos matemáticos”, nos quais os axiomas de ZFC são verdadeiros (permite, mas não garante), mas que podem diferir em termos de quais conjuntos existem ou como as propriedades dos conjuntos se manifestam.

Já falamos sobre a relevância da teoria dos conjuntos no projeto metafísico de Quine; em particular, no chamado hiperpitagorismo², conforme a citação de Quine no capítulo 3, seção 3.1, desta tese, há uma redução ontológica de objetos físicos a conjuntos obtidos em uma “teoria pura dos conjuntos”; naturalmente quando Quine fala em teoria pura dos conjuntos, se refere a uma teoria dos conjuntos sem elementos primitivos (*urelemente*), mas podemos entender “teoria pura dos conjuntos” como ZFC que é a teoria padrão de conjuntos e, claro, sem elementos primitivos. Mas, conforme observou Kunen na citação acima, teoria dos conjuntos é, de meados do século XX para cá, o estudo dos modelos de ZFC. Assim, uma apreciação adequada do hiperpitagorismo vai requerer, acreditamos, uma consideração explícita dos modelos de ZFC.

Passemos agora à noção de caráter absoluto de uma fórmula da linguagem de ZFC.

Seja ϕ uma fórmula com no máximo x_1, \dots, x_n livres.

1. Se $M \subset N$, ϕ é absoluto para M, N se e somente se

$$\forall x_1, \dots, x_n \in M (\phi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^N(x_1, \dots, x_n))$$

2. ϕ é absoluto para M se e somente se ϕ é absoluto para M, V equivalentemente

$$\forall x_1, \dots, x_n \in M (\phi^M(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n)).$$

Observe que se ϕ é absoluta para M e absoluta para N e $M \subset N$, então ϕ é absoluta para M, N .

Notemos que o chamado Paradoxo de Löwenheim-Skolem (repetimos que não é um paradoxo genuíno, como visto no capítulo anterior a este) resulta do fato de que a noção de cardinal não é absoluta para modelos de ZFC em geral, ou mais especificamente, a noção de “enumerável” não é absoluta para modelos de ZFC em geral.

Voltemos ao modo como Quine expressa esse aparente paradoxo:

It [o teorema Löwenheim-Skolem, na forma forte] says that if a theory is true and has an indenumerable universe, then all but a denumerable part of that universe is dead wood, in the sense that it can be dropped from the range of the variables without falsifying any sentences. (OROE, p.59)

² Ver Hylton p.304.

A expressão precisa envolve, em última análise, a noção de modelo de ZFC e a noção de carácter absoluto de uma fórmula.

As implicações filosóficas desses temas listados anteriormente são profundas, especialmente no que diz respeito à relatividade ontológica, pois sugerem que a existência (ontologia) de entidades matemáticas pode depender do modelo teórico adotado. Isso questiona a noção de verdade absoluta em matemática e levanta questões sobre a natureza da realidade matemática. Se diferentes modelos de ZFC podem ter propriedades distintas, isso sugere que a "realidade" dos objetos matemáticos é, de certa forma, relativa ao modelo escolhido, mas não vamos explorar aqui esse ponto em sua generalidade.

6.3 Conjuntos Construtíveis

Apresentemos a definição de conjuntos construtíveis:

Por recursão transfinita definimos $L(\alpha)$ para $\alpha \in \text{ON}$, a classe dos ordinais, por

- a. $L(0) = \emptyset$
- b. $L(\alpha + 1) = D(L(\alpha))$
- c. $L(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} L(\xi)$, quando α é um ordinal limite.

Definimos o universo construtível $\mathbf{L} = \bigcup \{L(\alpha) : \alpha \in \text{ON}\}$.

Notemos que $D(L(\alpha))$ é o conjunto dos subconjuntos de $L(\alpha)$ que são definíveis a partir de um número finito de elementos de $L(\alpha)$ por uma fórmula relativizada a $L(\alpha)$.

\mathbf{L} é uma classe própria (correspondente à fórmula x é construtível).

Teorema 6.3.1 (Teorema (ZF)). \mathbf{L} é um modelo de ZF.

Como indicado acima, esse é um teorema provado em ZF, e o sentido de modelo é aquele que explicamos antes, isto é, se A é um axioma qualquer de ZF, então $A^{\mathbf{L}}$ é demonstrável em ZF.

Definição 25 (Axioma da Construtibilidade). Definimos o Axioma da Construtibilidade como o enunciado $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, isto é, $\forall x \exists \alpha (x \in L(\alpha))$.

³ Supor que ON é um conjunto levaria ao chamado paradoxo Burali-Forti, de tal maneira que ON é uma classe própria, ou seja, quando falamos que $x \in \text{ON}$ estamos nos referindo à fórmula x é um ordinal (que, claro, pode ser escrita na linguagem de ZFC). Se assumirmos que ON é um conjunto, então podemos derivar uma contradição ao mostrar que $\text{ON} \in \text{ON}$, o que é impossível, mesmo sem considerar a restrição imposta pelo o axioma do fundamento.

Assim, o Axioma da Construtibilidade nos diz que todo conjunto é construtível, isto é, dado um conjunto x , existe um ordinal α tal que $x \in L(\alpha)$.

A hierarquia especificada nos itens a,b,c acima é chamada de hierarquia construtível.

Apesar de Quine manifestar simpatia pelo axioma da construtibilidade, sua opinião causa estranhamento a Penelope Maddy, quando ela a compara com a da comunidade conjuntista e, portanto, com a prática da matemática.

Vejamos primeiro a opinião de Kunen, um representante ilustre da comunidade conjuntista:

(...) Working in ZF^- , we defined **WF**⁴, and showed it was a model for ZF^- plus Foundation; this provided a formal proof of

$\text{Con}(ZF^-) \rightarrow \text{Con}(ZF^- + \mathbf{V} = \mathbf{WF})$.

But we also presented an argument that all mathematics takes place in **WF** anyway, so that we might as well add $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ as an axiom, making our basic system ZF. However, there is no reason to believe that all mathematical objects, or even all subsets of ω [o conjunto dos números naturais], lie in **L**. Thus, we do not consider $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ to be a plausible basic axiom to add to ZF, but we merely use it as a tool to obtain relative consistency results. (KUNEN(1980), p.171).

Já Maddy(1997), p.105-106, argumenta que a posição de Quine, em relação à matemática pura, tem oscilado ao longo do tempo. Ela destaca que, em alguns momentos, Quine parece negar até mesmo a significância das afirmações da matemática pura, como poderíamos ler em:

So much of mathematics as is wanted for use in empirical science is for me on a par with the rest of science. Transfinite ramifications are on the same footing insofar as they come of a simplifactory rounding out, but anything further is on a par rather with uninterpreted systems. (RP (1984), p.788)

No entanto, Maddy também observa uma mudança de postura mais recente por parte de Quine, em que ele reconhece a significância das partes mais abstratas da teoria dos conjuntos, como o axioma da construtibilidade. Ela aponta que essa mudança parece ser resultado de uma aplicação das considerações de indispensabilidade de Quine, levando-o a uma posição que contradiz a da comunidade da teoria dos conjuntos, como poderia ser lido em:

(...) higher reaches of set theory (...) We see them as meaningful because they are couched in the same grammar and vocabulary that generate the applied parts of mathematics. We are just sparing ourselves the unnatural gerrymandering of grammar that would be needed to exclude them. (PT (1990), 94).

⁴ Apresentaremos **WF** adiante.

E também em:

Further sentences such as the continuum hypothesis and the axiom of choice, which are independent of those axioms, can still be submitted to the considerations of simplicity, economy, and naturalness that contribute to the molding of scientific theories generally. Such considerations support Gödel's axiom of constructibility, $V = L$. It inactivates the more gratuitous flights of higher set theory, and incidentally it implies the axiom of choice and the continuum hypothesis. (PT (1990), 94))

Maddy destaca, portanto, a evolução do pensamento de Quine em relação à matemática pura, indo de uma posição mais radical de negação de significado para uma postura mais flexível, influenciada por considerações de indispensabilidade e em oposição a da comunidade conjuntista:

Note the oddity of this conclusion: Quine's application of indispensability considerations has led him to a stand (on $V = L$) *precisely opposite to that of the set theoretic community* (see I. 6). (Maddy(1997), p.105-106)

Conjuntos construtíveis são, portanto, uma forma de definir um universo de conjuntos de maneira que cada conjunto pode ser "construído", a partir de operações definidas sobre conjuntos anteriores. Este processo, como dissemos, é feito por meio de recursão transfinita.

Também por recursão transfinita sobre os ordinais definimos:

$$a' \quad R(0) = 0$$

$$b' \quad R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$$

$$c' \quad R(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} R(\xi) \text{ quando } \alpha \text{ é um ordinal limite}$$

$$e \quad \mathbf{WF} = \bigcup \{R(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\}$$

Em ZF^- , isto é, em ZF menos o axioma do fundamento, podemos mostrar que o axioma do fundamento é equivalente $V = \mathbf{WF}$.

A hierarquia especificada nos itens a', b', c' acima é dita a hierarquia cumulativa, ou o universo conjuntista. Naturalmente, \mathbf{WF} , a classe dos conjuntos bem fundados, é uma classe própria.

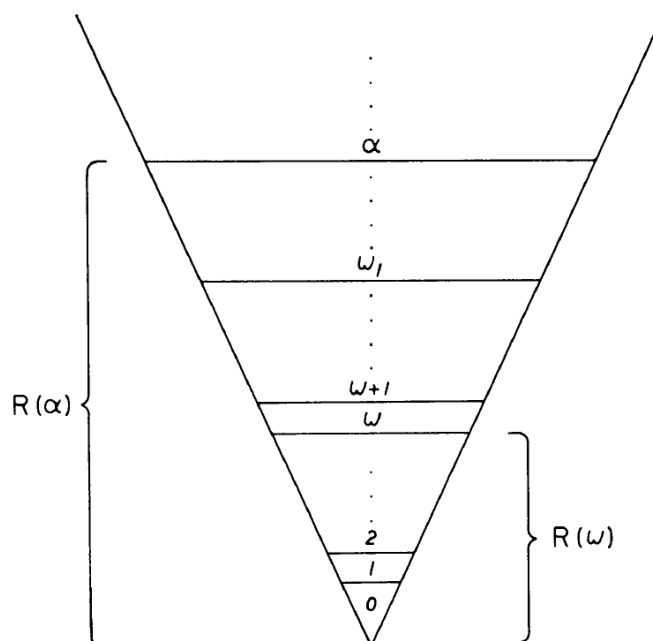


Figura 1 – O universo

Fonte: KUNEN(1980), p.101

Lembremos a parte final da citação de Quine na página 42 desta tese:

(...) It is common practice in set theory nowadays to start merely with the null class, form its unit class, and so on, thus generating an infinite lot of classes, from which all the usual luxuriance of further infinities can be generated. (TT, p.17)

Quine pode ser entendido aqui como se referindo à hierarquia cumulativa, mas considerando sua simpatia pelo axioma da construtibilidade, também podemos entendê-lo como se referindo à hierarquia construtível que apresentamos antes. A diferença de um caso para outro está nos âmbitos de variação das variáveis ligadas. É uma possível diferença ontológica⁵.

A hierarquia Construtível começa com $L(0) = \emptyset$, ou seja, o primeiro “passo” de construção é o conjunto vazio. A partir daí, $L(\alpha+1)$ é definido para cada ordinal α , como $D(L(\alpha))$, onde $D(L(\alpha))$ representa o conjunto de todos os subconjuntos definíveis (nas condições especificadas antes) de $L(\alpha)$. Para cada ordinal limite α , $L(\alpha)$ é a união de todos os $L(\xi)$ para $\xi < \alpha$. O universo construtível L é, então, a união de todos esses conjuntos $L(\alpha)$ para cada ordinal α .

A diferença entre a hierarquia construtível e a hierarquia cumulativa é que, na primeira ao passar de um nível para o seguinte, consideramos apenas os subconjuntos

⁵ Explicaremos o “possível” adiante.

definíveis (nas condições especificadas), enquanto que, na segunda, consideramos todos os subconjuntos. Assim, a hierarquia construtível representa uma possível economia ontológica em relação à hierarquia cumulativa; possível porque, como o axioma da construtibilidade é consistente com ZF não podemos provar em ZF a existência de um conjunto não construtível e, assim, pode ser o caso de não haver economia ontológica alguma, mas caso haja essa economia, que seria uma vantagem para Quine, e seria uma restrição para Kunen, Maddy e grande parte da comunidade conjuntista. Isso reflete um debate mais amplo sobre os fundamentos da matemática e a natureza dos objetos matemáticos e é, ao fim, fundamentalmente uma questão sobre relatividade ontológica.

A teoria $ZF + V = L$ (isto é, a teoria ZF acrescida do axioma da construtibilidade) é uma teoria de conjuntos muito mais forte do que ZFC (o axioma da escolha é um teorema da teoria $ZF + V = L$). Muitos enunciados que não são decididos em ZFC o são em $ZF + V = L$. Um exemplo muito relevante: a hipótese do contínuo (na verdade a hipótese generalizada do contínuo) é um teorema de $ZF + V = L$. Considerando que ZFC oferece recursos que estão muito além daqueles necessários à prática da matemática nas ciências naturais, pode de fato parecer estranha a simpatia de Quine por uma teoria ainda mais forte que ZFC, mas talvez a perspectiva de economia ontológica seja suficiente do ponto de vista de Quine para justificar uma deseconomia de teoria. A cláusula b na especificação da hierarquia construtível disciplina, digamos assim, a operação conjunto das partes e essa disciplina, podemos entender, é considerada desejável por Quine. Lembremos que, como Cohen demonstrou em 1963, usando o método de *forcing*, a potência do contínuo, isto é a cardinalidade do conjunto dos números reais, pode assumir qualquer valor infinito que não seja proibido pelo teorema de König. Assim, a cardinalidade do conjunto dos números reais pode ser por exemplo $\aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \dots$ não pode ser \aleph_ω , mas pode ser $\aleph_{\omega+1}$, etc.

A seguir, faremos algumas considerações sobre os modelos não standard da aritmética. Elas serão importantes para examinar a rejeição do pitagorismo considerada por Quine.

6.4 Modelos Não Standard da Aritmética

Uma teoria que possua um modelo, isto é, uma teoria consistente, jamais possui um único modelo, pois dado um modelo poderíamos obter outro, substituindo algum elemento do domínio do modelo original por um objeto que não esteja nesse domínio e ajustando as relações e operações conforme essa substituição.

Pode ser o caso, entretanto, que quaisquer dois modelos de uma teoria sejam isomorfos. Nesse caso dizemos que essa teoria é categórica. O teorema de Löwenheim-

Skolem, nas formas descendente, que vimos, e ascendente, impede que teorias que tenham modelos infinitos, isto é, com domínios infinitos, sejam categóricas.

Isso, dentre outras razões, nos leva a considerar a noção de \aleph_0 -categoricidade: uma teoria é dita \aleph_0 -categórica se e somente se quaisquer dois modelos dessa teoria cujos domínios sejam enumeráveis infinitos (isto é, tenham cardinalidade \aleph_0) são isomorfos.

Lembremos que a aritmética é a teoria cuja linguagem é a linguagem da aritmética e cujos teoremas são as sentenças da linguagem da aritmética verdadeiras na interpretação padrão, \mathcal{N} (como consequência do primeiro teorema de incompletude de Gödel, temos que a aritmética não é axiomatizável). Usando o teorema da compacidade e o teorema de Löwenheim-Skolem prova-se o seguinte teorema:

Teorema 6.4.1 (Teorema).

A aritmética não é \aleph_0 -categórica⁶.

Modelos da aritmética que não são isomorfos ao modelo padrão, \mathcal{N} , mas que são elementarmente equivalentes ao modelo padrão, \mathcal{N} , são ditos modelos não standard da aritmética. O teorema acima estabelece a existência de modelos não standard da aritmética com domínios infinitos enumeráveis.

Os modelos não standard da aritmética apresentam uma estrutura complexa que desafia nossa intuição sobre os números naturais. Em contraste com o modelo padrão \mathcal{N} da aritmética, que adere estritamente aos números naturais como entendidos convencionalmente, os modelos não standard incorporam elementos adicionais que não têm correspondência direta com os números naturais como entendidos da maneira usual.

Para compreender, minimamente, a aparência dos números em um modelo não standard, consideramos a ordem linear dos elementos do domínio de um tal modelo, designados como "NÚMEROS". Os NÚMEROS standard nesse modelo correspondem diretamente aos números naturais no modelo padrão e são gerados a partir de um elemento inicial (zero) aplicando-se repetidamente a operação sucessor.

Os NÚMEROS não standard são aqueles que não podem ser alcançados a partir de zero por um número finito de aplicações da operação sucessor. Esses elementos introduzem uma camada adicional de complexidade ao modelo não-padrão, pois estendem o conceito convencional de números naturais para incluir uma infinidade de novos elementos.

Um aspecto intrigante dos modelos não standard é a organização dos NÚMEROS em "blocos", definidos por uma relação de equivalência baseada na proximidade

⁶ BOOLOS,JEFFREY (1989) p.193.

finita entre NÚMEROS. Cada bloco contém um conjunto infinito de NÚMEROS que são “próximos” uns dos outros de acordo com essa relação. Os blocos não standard, aqueles que contêm pelo menos um NÚMERO não-padrão, introduzem uma hierarquia infinita de elementos que não têm paralelo no modelo padrão.

A relação de ordem entre os blocos revela uma estrutura semelhante à dos números racionais, com a propriedade de que, entre quaisquer dois blocos, existe sempre um terceiro bloco intermediário. Essa propriedade sublinha a complexidade do universo dos NÚMEROS em modelos não standard, contrastando fortemente com a aparente simplicidade dos números naturais no modelo padrão ⁷.

A existência de modelos não standard da aritmética levanta diversas questões, por exemplo: se algum modelo não standard é apenas um dentre muitos modelos possíveis, qual seria a ontologia dos números? Não sendo o modelo padrão a única opção, como lidar, de uma perspectiva ontológica, com os demais modelos? Essas questões são de suma importância e estão diretamente relacionadas ao tema desta tese, embora tenhamos decidido deixar o seu exame para estudos posteriores.

De todo modo, a consideração de números naturais não standard é obrigatória. Sem eles não podemos compreender adequadamente certos resultados básicos de lógica. Vejamos dois exemplos⁸.

Seja A um modelo de ZF . Para cada número natural n , seja n^A , no domínio de A , a interpretação do numeral para n em A . Dizemos que A é um ω -modelo se e somente se esses são os únicos naturais de A , isto é, se e somente se não existe a no domínio de A tal que a sentença “ $a \in \omega$ ” é verdadeira em A , mas $a \neq n^A$. Se existe um tal a , nos dizemos que ele é um número natural não standard ou ainda que ele é um número natural infinitamente grande.

Se A não é um ω -modelo, então existem em A fórmulas não standard, cujos comprimentos são números naturais infinitamente grandes, ou seja, números naturais não standard.

Suponhamos, como de hábito, que ZF seja consistente. Então, pelo segundo teorema de incompletude de Gödel, a consistência de ZF não pode ser provada em ZF ⁹. Assim, existe um modelo de ZF no qual a sentença da linguagem de ZF , que afirma que ZF é inconsistente é verdadeira. Mas não podemos concluir daí que ZF seja inconsistente, pois a prova existente nesse modelo de contradição em ZF envolve fórmulas não standard.

⁷ Para mais detalhes, veja BOLOS,JEFFREY (1989) p.193,194,195

⁸ KUNEN (1980), p.145-146

⁹ Desde que essa consistência seja, digamos, expressa adequadamente, veja FERFEMAN (1960), *Arithmetization of metamathematics in a general setting*.

O segundo exemplo envolve o Teorema da Reflexão¹⁰ e o teorema da compacidade.

Teorema 6.4.2 (O Teorema da Reflexão). *Dada quaisquer fórmulas ϕ_1, \dots, ϕ_n , da linguagem de ZF, é um teorema de ZF que $\forall \alpha \exists \beta > \alpha (\phi_1, \dots, \phi_n \text{ são absolutas para } R(\beta))$*

Daí, segue que, dado qualquer conjunto finito de axiomas de ZFC, podemos provar em ZFC a existência de um modelo para esse conjunto finito de axiomas (lembramos que ZFC não é finitamente axiomatizável). Não podemos combinar esse resultado com o teorema da compacidade para provar em ZFC a consistência de ZFC (novamente, o que é proibido pelo segundo teorema de incompletude de Gödel) por que há números naturais não standard envolvidos.

Sem a consideração dos números naturais não standard, os dois exemplos acima pareceriam, digamos, paradoxais.

Mais uma vez podemos retornar ao texto *Ontological Relativity* e reler com um olhar expandido o que Quine escreve sobre números e ontologia:

It will perhaps be felt that any set-theoretic explication of natural number is at best a case of *obscurum per obscurius*; that all explications must assume something, and the natural numbers themselves are an admirable assumption to start with. I must agree that a construction of sets and set theory from natural numbers and arithmetic would be far more desirable than the familiar opposite. On the other hand *our impression of the clarity even of the notion of natural number itself has suffered somewhat from Gödel's proof of the impossibility of a complete proof procedure for elementary number theory, or, for that matter, from Skolem's and Henkin's observations that all laws of natural numbers admit nonstandard models.* (OROE, p.43, ênfase nossa)

No trecho citado, devemos observar que Quine foi modesto ao escrever que nossa impressão de clareza da noção de número “sofreu algo” com os resultados que aludem aos números naturais não standard; na verdade, nossa compreensão do que é um número é muito influenciada pelos resultados do teorema de Löwenheim-Skolem aplicado aos modelos da aritmética. Portanto, o entendimento da noção de número natural se amplia consideravelmente quando observamos a existência dos modelos não standard da aritmética. A estrutura dos modelos não standard da aritmética é, de certo modo, mais complexa do que do modelo standard, com segmentos ordenados de números que são inicialmente isomorfos, mas contendo também segmentos não isomorfos. A demonstração da existência dos modelos não standard da aritmética nos assegura interpretações diferentes com ontologias diferentes, na qual não podemos relacionar os objetos de um domínio com objetos de outro domínio por meio de isomorfismo. Uma vez que ZFC é assumida como teoria de fundo, outras possibilidades

¹⁰ Veja KUNEN(1980) p.136

se apresentam para análise, ao considerarmos que a matemática pode ser reduzida à ZFC.

Com essas considerações em mãos, podemos avançar para a última seção da presente tese, examinando a recusa de Quine acerca da existência de uma ontologia à qual todas as demais se reduzem, e que é ela mesma composta de números naturais. Uma recusa a uma ontologia pitagórica, em que tudo é número.

6.5 Considerações finais sobre o sistema metafísico de Quine

Esta seção final visa reunir os fios condutores de nossa investigação sobre o entrelaçamento do teorema de Löwenheim-Skolem com a tese de relatividade ontológica de Quine, sob o prisma da teoria de conjuntos ZFC. Exploramos até aqui como esses temas se relacionam, lançando luz sobre questões fundamentais da filosofia da matemática e da lógica, segundo o projeto metafísico de Quine, e, na verdade, sobre o sistema filosófico de Quine como um todo. Nosso objetivo, agora é sintetizar aspectos da exposição anterior a esta seção e avaliar até que ponto Quine sustenta sua posição frente às implicações do teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte, principalmente em relação a uma possível ontologia composta por números naturais.

O cerne de nossa investigação centrou-se na tese da relatividade ontológica de Quine, especialmente sua interpretação de que o compromisso ontológico é sempre relativo ao esquema conceitual adotado. Esse esquema é a teoria de fundo, onde, e somente onde, faz sentido dizer com o que nossas teorias estão comprometidas ontologicamente, e para que pudéssemos exemplificar muitos pontos sobre ela, adotamos ZFC como nossa teoria de fundo.

Argumentamos que, embora o teorema de Löwenheim-Skolem estabeleça a possibilidade de múltiplos modelos e domínios – incluindo os que são contáveis como os números naturais – o teorema, por si só, não constitui um procedimento de redução ontológica, tal como estabelece a doutrina da relatividade ontológica. Quine mantém sua visão de que tais variações não minam a objetividade científica, nem implicam em um relativismo ontológico desenfreado. A teoria de fundo pode, ela mesma, ser uma teoria que fornece elementos para uma redução. As funções vicárias são essenciais para identificar como o procedimento deve ocorrer. Vimos o exemplo da numeração de Gödel para tanto.

Mas talvez houvesse dúvidas, como Quine assim descreve:

On the face of it, this theorem [Löwenheim-Skolem] declares a reduction of all acceptable theories to denumerable ontologies. Moreover, a

denumerable ontology is reducible in turn to an ontology specifically of natural numbers, simply by taking the enumeration as the proxy function, if the enumeration is explicitly at hand. And even if it is not at hand, it exists; thus we can still think of all our objects as natural numbers, and merely reconcile ourselves to not always knowing, numerically, which number an otherwise given object is. May we not thus settle for an all purpose Pythagorean ontology outright? (OROE, p.59)

Quine continua, esclarecendo como alguém poderia defender uma redução ontológica por meio dos resultados alcançados pelo teorema de Löwenheim-Skolem e que fosse esse resultado, uma ontologia de números, isto é, uma ontologia pitagórica:

Suppose, afterward, someone were to offer us what would formerly have qualified as an ontological reduction - a way of dispensing in future theory with all things of a certain sort S, but still leaving an infinite universe. Now in the new Pythagorean setting his discovery would still retain its essential content, though relinquishing the form of an ontological reduction; it would take the form merely of a move whereby some numerically unspecified numbers were divested of some property of numbers that corresponded to S.

Blanket Pythagoreanism on these terms is unattractive, for it merely offers new and obscurer accounts of old moves and old problems. On this score again, then, the relativistic proposition seems reasonable: that there is no absolute sense in speaking of the ontology of a theory. It very creditably brands this Pythagoreanism itself as meaningless. For there is no absolute sense in saying that all the objects of a theory are numbers, or that they are sets, or bodies, or something else; this makes no sense unless relative to some background theory. The relevant predicates - "number", "set", "body", or whatever - would be distinguished from one another in the background theory by the roles they play in the laws of that theory.

Quando Quine nos diz que "*unspecified numbers were divested of some property of numbers*" sabemos, pela análise mais cuidadosa do esboço da prova do teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte que não podemos simplesmente reduzir um universo composto de números reais a um universo de números naturais, o chamado paradoxo de Skolem exige considerar a relatividade, isto é, o caráter não absoluto do conceito de cardinalidade e, mais especialmente, do conceito de enumerabilidade, em modelos. Portanto, o "paradoxo de Skolem" nos indica que determinadas interpretações são relativas a um modelo e não aos modelos que dele podem ser gerados pelo teorema de Skolem-Löwenheim, conseqüentemente, não se trata de um procedimento de redução ontológica como Quine assevera, e isto é mais uma evidência a favor da relatividade.

E quanto aos modelos que envolvem conjuntos? Nos modelos com uma ontologia de conjuntos, a cardinalidade não é absoluta, o que se torna evidente ao invocarmos modelos que são menos acessíveis do que as paráfrases técnicas da prosa de Quine podem sugerir. A possibilidade de existência de uma ontologia pitagórica sobre os números naturais está na mesma situação da nossa compreensão, que foi abalada pelos

modelos não standard e fica em suspensão quando consideramos mais profundamente as considerações técnicas da relatividade ontológica. O que seriam os números a que um defensor de uma ontologia pitagórica recorre, se a própria noção de número não pode ser fixada a não ser referente às propriedades presentes na teoria de fundo? De fato, como escreve Quine, um “*case of obscurum per obscurius*”, como visto na página 98 da presente tese. Devemos proceder com cuidado ao considerar o que é um número natural no domínio de nossas teorias regimentadas e as suas consequências nos modelos dessas teorias.

ZFC, como teoria de fundo no projeto metafísico de Quine, permite que a tese da relatividade ontológica ganhe força, principalmente por causa dos modelos possíveis e pela própria noção de número, que de forma alguma pode ser fixada sem que tenhamos uma teoria à qual recorrer. Ao longo da tese, é possível perceber que o desenvolvimento da teoria dos conjuntos teve influência direta no argumento de Quine e somente não ganhou mais destaque, acreditamos, devido à complexidade do tema. Naturalmente, Quine conhece os resultados técnicos necessários para dar esse maior destaque, porém, entendemos, que ele optou por uma abordagem que torne o ensaio mais acessível à leitura. Entretanto, tratar de modelos nunca deixou de ser um aspecto importante, como podemos ler novamente na citação que apresentamos na introdução da presente tese:

There is an interesting reversal here. Our first examples of ontological reduction were Frege's and von Neumann's reductions of natural number to set theory. These and other examples encouraged the thought that what matters in such reduction is the discovery of a model¹¹. (WPOE, p.201)

Uma certa ontologia pode estar diretamente relacionada com um modelo pretendido em certas condições, e, como não há uma maneira única de propor modelos pretendidos para determinadas teorias. Isso implica, por sua vez, que não existe uma única ontologia pretendida. Podemos reduzir as ontologias, gerando novos modelos pretendidos com base em um modelo inicial de uma teoria de fundo. As funções vicárias funcionam muito bem nesse sentido. Onde antes tínhamos um predicado P correspondendo à relação $<$ (menor que) entre a e b , pertencentes à ontologia da teoria, substituímos P por R , numa função injetiva entre a velha teoria e a nova, de modo que aRb preserve a verdade. Concluimos que a teoria não fixa o seu modelo, o que é mais um aspecto favorável à relatividade ontológica. A função inclusive nos permite substituir a e b por novos objetos no domínio da nova teoria. Quine se manifesta assim sobre as possibilidades de uma função vicária:

¹¹ A noção de modelo na expressão “discovery of a model” aqui deve ser entendida em um sentido que não é estritamente técnico.

The proxy function need not exist as an object in the universe even of the background theory. It may do its work merely as what I have called a "virtual class", and Godel has called a "notion". That is to say, all that is required toward a function is an open sentence with two free variables, provided that it is fulfilled by exactly one value of the first variable for each object of the old universe as value of the second variable. But the point is that it is only in the background theory, with its inclusive universe, that we can hope to write such a sentence and have the right values at our disposal for its variables. (OROE, p.57-58)

O que esta passagem nos traz de interessante é como ZFC nos permite um olhar mais amplo sobre a afirmação de Quine, por meio de uma relação direta com o Esquema de Substituição que citamos novamente a partir da página 52 da presente tese:

Axioma 10 (Esquema de Substituição). *Para cada fórmula $\phi(x, y)$, da linguagem de ZFC, na qual z não ocorra livre, o fecho universal do que segue é um axioma:*

$$\forall x \in w \exists! y \phi(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \in w \exists y \in z \phi(x, y)$$

Quine fala de *an open sentence with two free variables*. É justamente isso que temos no axioma acima, quando falamos da fórmula $\phi(x, y)$, e este esquema nos permite, como já vimos, formar novos conjuntos, tal como a função vicária nos permite formar novos domínios para novos modelos em relação ao antigo, tomado como teoria de fundo.

Por tudo que aqui apresentamos e buscamos exemplificar, de modo a ampliar nossa compreensão do projeto metafísico de Quine, a doutrina da relatividade ontológica requer, segundo o filósofo, exigências em três graus de severidade¹²:

1. A primeira de todas as exigências é a menos severa dentre as três, pois não envolve nenhuma intenção de redução ontológica. Simplesmente explicamos a que coisas os termos de uma teoria se referem no seu domínio, isto é, segundo um determinado modelo, qual é a ontologia da teoria. Essa teoria-objeto torna-se a teoria de fundo.
2. A exigência cresce quando, para que uma redução ontológica ocorra, necessitamos de uma função vicária; e, para que tenhamos tais funções, a ontologia da teoria de fundo precisa da ontologia não reduzida.
3. Na terceira exigência, a mais severa de todas, se uma teoria tem um universo não enumerável, então não podemos ter esperança de que ela seja tomada como teoria de fundo e que uma função vicária gere uma ontologia enumerável a partir dela.

¹² OROE, p.61-62

Desta maneira, *It is a demand that simply discourages any general argument for Pythagoreanism from the Lowenheim-Skolem theorem.*(OROE, p.62). E a presente tese oferece um arcabouço lógico e filosófico adjacente à argumentação de Quine e que amplia certas considerações por ele feitas. Nossa análise revela que a interação entre o teorema de Löwenheim-Skolem e a relatividade ontológica, dentro do contexto da teoria de conjuntos ZFC, oferece uma rica tapeçaria de questões filosóficas. Demonstramos que, longe de enfraquecer a posição de Quine, o teorema de Löwenheim-Skolem na forma forte ilustra a robustez de sua abordagem filosófica, evidenciando a complexidade e a flexibilidade de seu empreendimento científico. E é possível que novos frutos possam surgir de um investigação filosófica dos modelos possíveis de ZFC. Este estudo, entendemos, não apenas aprofunda nossa compreensão das implicações filosóficas do teorema de Löwenheim-Skolem mas também reafirma a relevância da tese de relatividade ontológica de Quine.

7 Conclusão

Neste trabalho, investigamos as implicações do teorema de Löwenheim-Skolem, na forma forte, na doutrina da Relatividade Ontológica de Quine, utilizando uma abordagem que se baseou na lógica de primeira ordem e na teoria de conjuntos ZFC. Exploramos as nuances ontológicas dos modelos de uma teoria formalizada segundo as exigências de Quine e o que ele considera como a estrutura comum das teorias científicas quando estas podem ser reinterpretadas.

Nossos estudos tiveram início com o intuito de explorar as implicações do teorema de Löwenheim-Solem para a doutrina da relatividade ontológica de Quine, enfatizando a necessidade de um exame detalhado das interações entre lógica de primeira ordem e questões filosóficas do pensamento de Quine. Discutimos como a abordagem lógica de Quine em relação à ontologia é peculiar e pode requerer esclarecimentos frente ao modo tradicional de apresentação da teoria dos modelos, incluindo as mudanças técnicas no próprio texto de Quine em edições revisadas.

Em seguida, abordamos a lógica de primeira ordem e as possibilidades de formalização de uma teoria em uma dada linguagem, elementos cruciais para entender as fundações lógicas do argumento de Quine. A lógica de primeira ordem foi vinculada à análise de como os teoremas, como o de Löwenheim-Skolem e da compacidade, influenciam a compreensão filosófica das teorias formalizadas nesta linguagem. Detalhamos também a importância dos axiomas ZFC como base para toda a matemática moderna, destacando suas implicações ontológicas para uma formulação da aritmética.

Além disso, exploramos o naturalismo, empirismo e holismo de Quine, discutindo como essas visões impactam seu entendimento da ontologia e do compromisso ontológico. Analisamos também como Quine usa a lógica para estabelecer uma base empírica para suas teorias e como isso sustenta sua doutrina de relatividade ontológica. Apresentamos ainda a compreensão de Quine sobre o processo de abstração que nos leva de corpos ocupando posições no espaço-tempo em direção a uma abordagem exclusivamente composta de conjuntos.

Prosseguimos com uma investigação das implicações do teorema na forma forte e seu impacto sobre a doutrina de relatividade ontológica de Quine, discutindo como o teorema desafia a noção de cardinalidade em modelos. Argumentamos que a simplicidade teórica e ontológica pode ser mantida, apesar de supostos paradoxos. Concluimos nossa análise sobre como o teorema afeta diretamente as considerações do sistema quineano frente à adoção de ZFC como teoria de fundo e seus respectivos modelos, destacando a pluralidade de modelos científicos suportada pela relatividade

ontológica proposta por Quine.

Reiteramos que, embora o teorema de Löwenheim-Skolem inicialmente pareça minar a estabilidade ontológica das teorias científicas segundo algumas interpretações, na perspectiva de Quine, ele reforça a ideia de que nossos compromissos ontológicos são sempre relativos ao esquema conceitual adotado. Desta forma, foi possível concluir que a relatividade ontológica não é apenas uma consequência lógica, mas uma condição necessária para a interpretação e reformulação contínua de teorias científicas à luz de novos dados e interpretações, mantendo a coerência com o empirismo de Quine e seu compromisso com uma ontologia científica pragmática e flexível.

Referências

- BERGSTRÖM, Lars. “**Quine on Underdetermination**”. In: GIBSON, BARRET, R. (editors) *Perspectives on Quine*. Cambridge: Basil Blackwell, pp. 38-52. 1980.
- BOOLOS, G.S; Jeffrey R.C. **Computability and Logic**. Cambridge University Press; 3 edition. 1989.
- BOOLOS G. S., J.P. BURGESS, JEFFREY R.C. **Computabilidade e Logica**. Unesp. 2013.
- CARNAP, Rudolf. **Der logische Aufbau der Welt**. Hamburg: Felix Meiner. 1961.
- CARNAP, Rudolf. “**Empirismo, Semantica e Ontologia**”. In: *Colecao os Pensadores*. Sao Paulo: Abril Cultural. pp.119-134. 1975
- CARNAP, Rudolf. “**Testabilidade e Significado**” In: *Colecao os Pensadores*. Sao Paulo: Abril Cultural. pp.177-226. 1975.
- CARNAP, Rudolf. **The logical syntax of language**. London: Routledge & Kegan Paul. 1971.
- CARNAP, Rudolf. “**The Old and the New Logic.**”. In: Ayer, A. (ed). *Logical Positivism*. Free Press. New York, 1959
- CARNIELLI W., EPSTEIN R.L. **Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática**. - Editora Unesp DIGITAL. 2022.
- DAVIDSON, D. **Inquiries into Truth and Interpretation**. Oxford, Clarendon Press. 1984.
- EPSTEIN, R.L. **Classical mathematical logic: the semantic foundations of logic**. Princeton University Press. 2011.
- EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. UNICAMP. 2004.
- EWALD W.B. **From Kant to Hilbert v. 2**. Oxford University Press; 1st edition. 2007.
- FEFERMAN, S. **Arithmetization of metamathematics in a general setting**. In: *Fundamenta Mathematicae* 49.1. p.35-92. 1960.
- FEFERMAN, S. et al. (Eds.). **Kurt Gödel - Collected Works: Volume I**, Publications 1929-1936. New York: Oxford University Press.1986.
- FERREIRÓS J. **Labyrinth of Thought - A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics**. Second revised edition. Birkhäuser. 2000.
- FRANZÉN T. **Gödel’s Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse**. A. K.

- Peters; First Edition. 2005.
- FOGELIN, R. J. **Quine's limited naturalism**. *The Journal of Philosophy*, 95, pp. 543–63. 1997.
- GIBSON, R. **Philosophy of W.V. Quine: An Expository Essay**. Florida: University Press of Florida, 1996.
- GIBSON, R. **The Cambridge Companion to Quine**. Cambridge University Press. 2004.
- HAHN L., SCHILPP P.A. **The Philosophy of W.V. Quine** (Library of Living Philosophers). Open Court. 1998.
- HARMAN G. , LEPORE E. (edit). **Blackwell Companions to Philosophy: A Companion to W.V.O. Quine**. John Wiley e Sons. 2014.
- HYLTON, P. **Quine**. Routledge. New York. 2007.
- IWAN, S. **An Analysis Of Quine's "Ontological Reduction And The World Of Numbers"**. *Erkenntnis* 53, 195–218: 2000.
- KANAMORI A. **The Empty Set, the Singleton, and the Ordered Pair**. in: *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, No. 3, pp. 273-298. 2003.
- KLEENE S.C. **Mathematical Logic**. Dover Publications. 2002.
- KUNEN K. **Set Theory An Introduction To Independence Proofs (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 102)**. North Holland. 1980.
- KUNEN, K. **The Foundations of Mathematics**. College Publications. London. 2009.
- MADDY, P. **Naturalism in Mathematics**. Oxford University Press; 1st edition. 1997.
- MOSCHOVAKIS Y. **Notes on Set Theory**. Springer; 2nd edition. 2005.
- RADU, M. **A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Grassmann**. Elsevier. 2003.
- RUDIN W. **The Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill Publishing Company, 3rd Edition. 2006.
- RUSSELL B. **Introdução à filosofia matemática**. Zahar. Rio de Janeiro. 2007.
- SHOENFIELD J.R. **Mathematical Logic**. A K Peters/CRC Press; 1st edition. 2001.
- SMITH, P. **An Introduction to Gödel's Theorems**. Cambridge University Press; 2 edition. 2013.
- PETTERSEN, B.B. **A naturalização da epistemologia – Empirismo, Ciência e Semântica em Quine**. São Paulo: Edições Loyola, 2014.
- PUTNAM, H, **"Models and reality"**. In.: *Realism and Reason*. Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

- QUINE, W. V. **“Ontological relativity”**. In.: *Ontological Relativity and Other Essays*. New York, Columbia Press, 1969.
- QUINE, W. V. **Mathematical logic**. 3a. ed. Nova Iorque, Harper Row, 1962.
- QUINE, W. V. **Elementary logic**. 2a. ed. Cambridge, Harvard University Press, 1966
- QUINE, W. V. **O sentido da nova lógica**. 2a. ed. Curitiba, Editora da UFPR, 1996 [1944].
- QUINE, W. V. **Methods of logic**. 4a. ed. Cambridge, Harvard University Press, 1982.
- QUINE, W. V. **Pursuit of Truth**. Cambridge e London, Harvard University Press, 113 p. 1990.
- QUINE, W. V. **Review of Parsons**. *Journal of Philosophy*, 81, pp. 783-94, 1984.
- QUINE, W. V. **Word and object**. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press. 1960.
- QUINE, W. V. **Theories and things**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 1981
- QUINE, W. V. **Ontology and Ideology**. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 2(1), 11-15. Retrieved July 31, 2020.
- QUINE, W. V. **“Two Dogmas of Empiricism.”** In.: *From a Logical Point of View: Nine Logico-philosophical Essays*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 1961.
- QUINE, W. V. **On the Reasons for Indeterminacy of Translation**. *The Journal of Philosophy* 67: 178–83. 1970.
- QUINE, W. V. **“Facts of the Matter.”** In.: Shahan, R., Swoyer, C. (orgs.), *Essays on the philosophy of W. V. Quine*. Oklahoma: The Harvester Press. 1979.
- QUINE, W. V. **O sentido da nova lógica**. Curitiba: Ed. UFPR. 2016.
- QUINE, W. V. **“Three Indeterminacies.”** In.: Barrett, R., e Gibson, R. (orgs.) *Perspectives on Quine*. Cambridge, Mass.: Basil Blackwell. 1990.
- QUINE, W. V. **Two Dogmas in Retrospect**. *Canadian Journal of Philosophy* 21: 265–274. 1991.
- QUINE, W. V. **In Praise of Observation Sentences**. *The Journal of Philosophy* 90: 107–16. 1993.
- QUINE, W. V. **Progress on Two Fronts**. *The Journal of Philosophy* 93: 159–63. 1996.
- RESNIK, Michael D. **Quine and the Web of Belief**, in *The Oxford handbook of philosophy of math and logic* / edited by Stewart Shapiro. p.413. 2015.
- SANDER V. **Working from Within - The Nature and Development of Quine’s Naturalism**. New York, Oxford University Press. 2018.
- ZERMELO, **Investigations in the Foundations of Set Theory I**. p.200. 1908.