Conteúdos do Ensino Fundamental

Medidas e proporcionalidades

Curso de Pedagogia UAB UFMG

MEDIDAS E PROPORCIONALIDADE

Maria da Penha Lopes

MEDIDAS E PROPORCIONALIDADE

Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben
Tânia Margarida Lima Costa
(organizadoras)

Belo Horizonte
CURSO DE PEDAGOGIA UAB UFMG
FAE/UFMG
2011

ORGANIZADORAS Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben
Tânia Margarida Lima Costa

ASSESSORA PEDAGÓGICA Elza Vidal de Castro

REVISORA Maria Ribeiro dos Santos

PRODUTOR EDITORIAL Marcos Alves
Projeto Gráfico, Diagramação e Capa

Ficha Catalográfica

L864c Lopes, Maria da Penha.
Conteúdos do ensino fundamental : medidas e proporcionalidades / Maria da Penha Lopes; Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben,Tânia Margarida Lima Costa (organizadoras). – Belo Horizonte : UFMG, Faculdade de Educação, 2011.
48 p. – (Conteúdos do ensino fundamental)

Obra produzida para o curso de Pedagogia da Universidade Aberta da UFMG.
Inclui bibliografia.
ISBN: 978-85-8007-031-6

1. Educação. 2. Ensino fundamental. I. Dalben, Ângela Imaculada Loureiro de Freitas. II. Costa, Tânia Margarida Lima. III. Título. IV. Série.

CDD: 370
CDU: 37

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação
Biblioteca Universitária da UFMG

FACULDADE DE EDUCAÇÃO DA UFMG
Curso de Pedagogia UAB UFMG
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 - Belo Horizonte-MG
Tel: 31 3409-7477

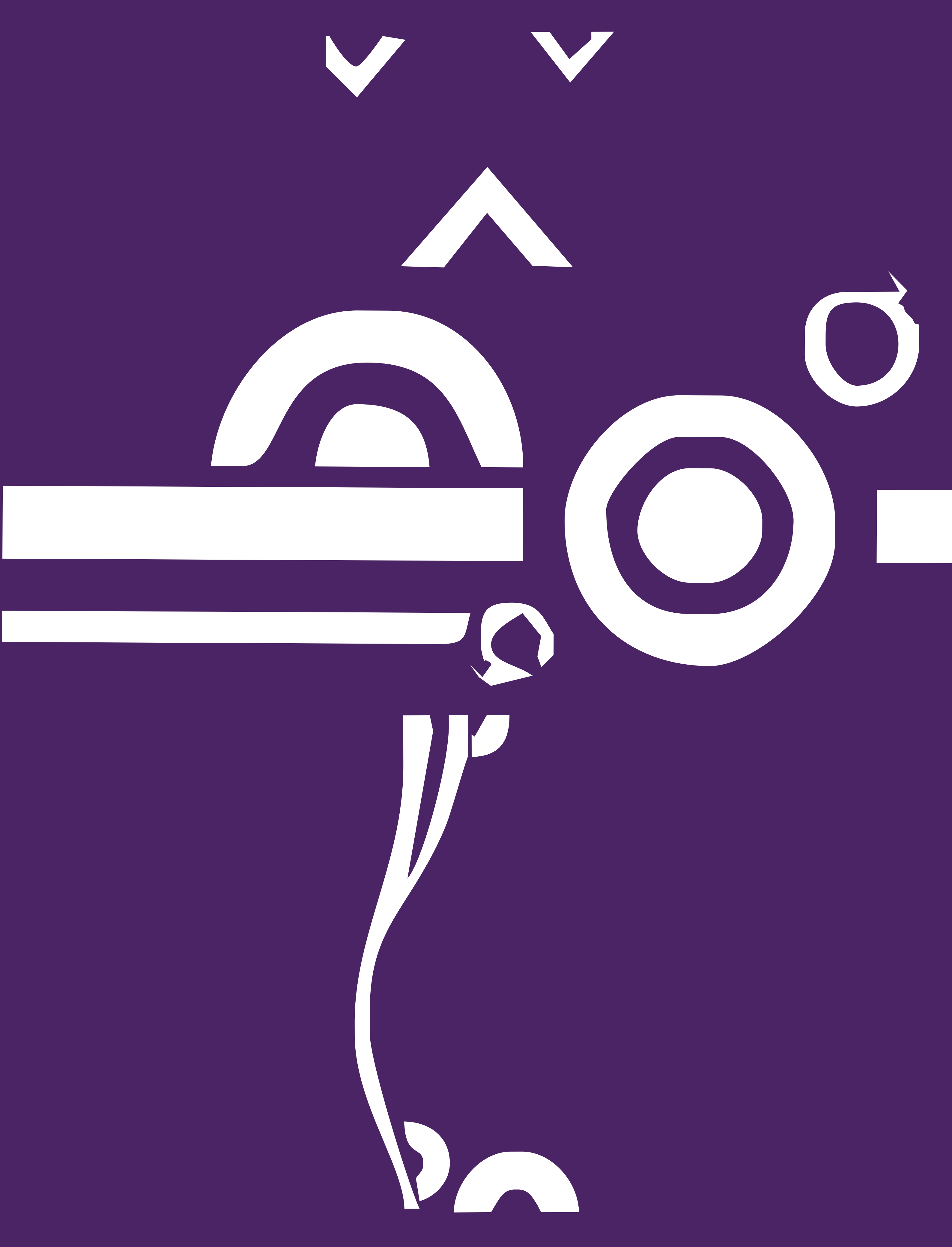
MEDIDAS E PROPORCIONALIDADE

AUTORA

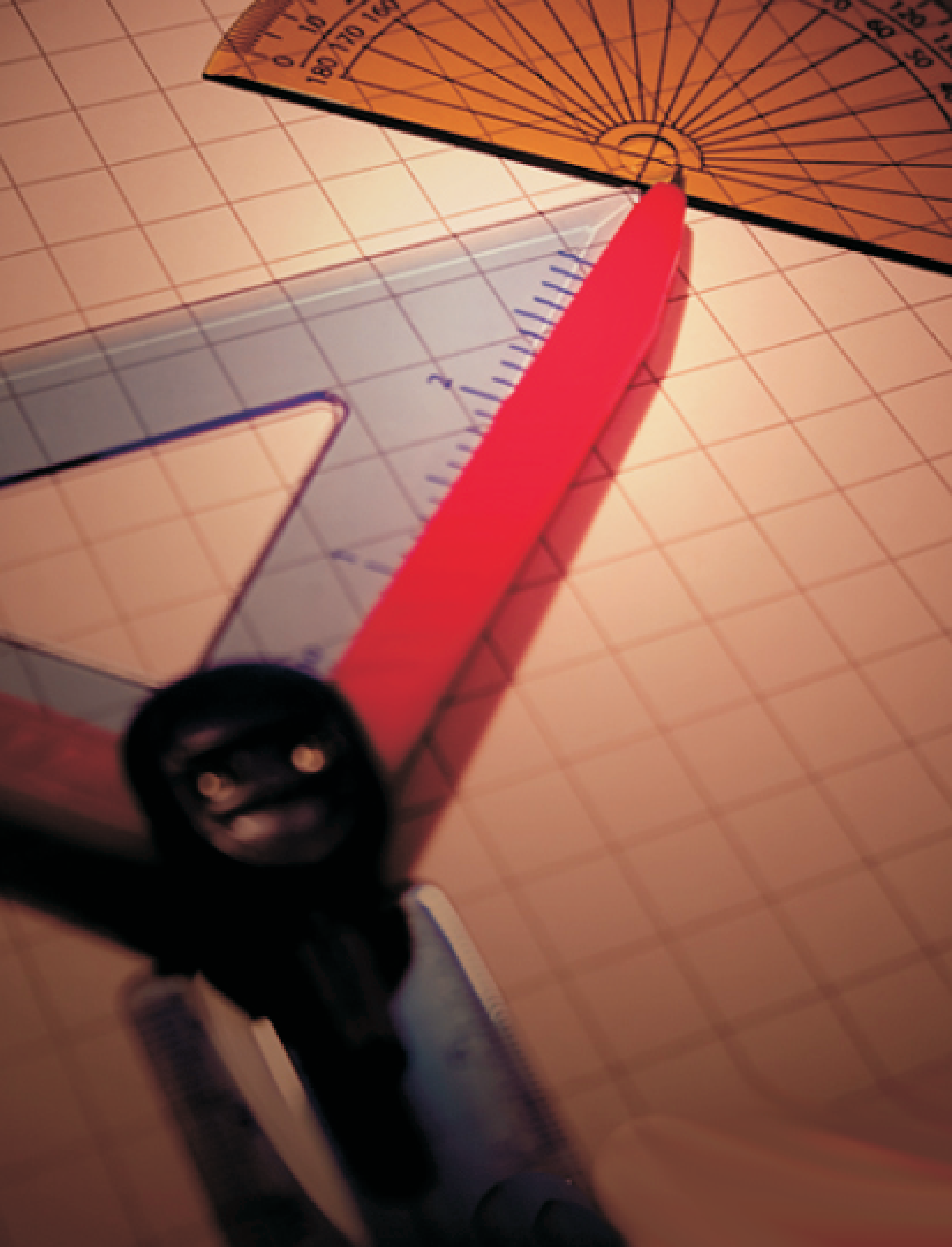
Maria da Penha Lopes
Possui graduação em Licenciatura Em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (1962) , graduação em Bacharelado Em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (1961) , mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (1979) e doutorado em doutorado em educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (2007) . Atualmente é Professor adjunto da Faculdade de Ciências Humanas de Pedro Leopoldo. Tem experiência na área de Educação , com ênfase em Ensino-Aprendizagem. Atuando principalmente nos seguintes temas: Análise de aulas.

EMENTA

Grandezas e medidas: o que é medir; unidades de medida, seus múltiplos e submúltiplos. Números racionais: frações e operações. Proporcionalidade: razões e proporções; regra de três.



SUMÁRIO



INTRODUÇÃO

Enquanto os números naturais surgiram para resolver um problema prático de registrar uma contagem, a necessidade de medir levou à extensão desse campo numérico com o surgimento dos números racionais. De fato, as necessidades do dia a dia passaram a exigir medidas de comprimentos, áreas, pesos e tempo. Ora, essas grandezas são susceptíveis de ser divididas em partes arbitrariamente pequenas e, para representá-las, outros números tornaram-se necessários: os números racionais. (COURANT; ROBBINS, 1964). Há, portanto, uma estreita ligação entre os números racionais e as medidas o que justifica estudarmos esses dois conteúdos no mesmo texto. Separá-los como na Ementa é uma necessidade de ordem didática.

Observamos, também, uma estreita relação entre os números racionais e as razões. Para Brumfiel, Eicholz e Shanks (1972) a "*razão* de dois números é o quociente do primeiro dividido pelo segundo. Assim, para cada par de números inteiros existe um número racional, que é a razão desses números inteiros." Esses autores citam, como exemplo, o seguinte problema: "Há 126 estudantes numa série. A razão de meninas para meninos é de $\frac{3}{4}$. Quantas são as meninas?" (BRUMFIEL e colegas, 1972, p. 103).

Nesse problema, a fração $\frac{3}{4}$ (três quartos) é usada como um *índice comparativo*, entre o número de meninas e o número de meninos, dado pela razão $\frac{3}{4}$, 3 meninas para 4 meninos, ou 3 para 4. Aqui, observamos uma estreita relação entre os números racionais e as razões, o que justifica incluir esses dois conteúdos no mesmo texto.

A proporção é uma igualdade entre duas razões e é usada em problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade. Neste texto, as proporções serão usadas para resolver problemas pelo método da *regra de três*.

A ideia é propormos um ensino de Matemática que promova a articulação de diferentes conteúdos. A medida é um conteúdo apropriado para fazer essa articulação, como ficará claro, ao longo deste trabalho. Partiremos do estudo das medidas e do que é medir para o número racional, que expressa o resultado de uma medida, daí para o de razão, uma das ideias representadas por uma fração (número racional). Em seguida, propomos a resolução de problemas que envolvam a ideia de proporcionalidade e que requerem o uso das proporções. Entre esses problemas, estudaremos os conhecidos *problemas de regra de três*.

1. GRANDEZAS E MEDIDAS

1.1 MEDIDAS E MEDIR

Medir é uma atividade com a qual nos deparamos frequentemente no nosso dia a dia. Estamos sempre fazendo uso de unidades de medida, de modos de medir e de instrumentos de medida. O relógio marca as horas; compramos feijão e arroz que são vendidos em quilos e leite que é vendido em litro, o valor de um terreno depende da medida de sua área, em metros quadrados. Pagamos a água que usamos em casa pelo volume que consumimos. Na nossa conta, podemos ler que o volume faturado foi de $30m^3$, por exemplo, num espaço de tempo de 29 dias. Assim, sabemos que $30m^3$ é o volume de água que foi consumido e que transcorreram 29 dias, entre uma medição e outra.

Às vezes, nem percebemos que estamos diante de uma situação que envolve uma medida e estranhamos algumas unidades de medida que são utilizadas. Por exemplo, na nossa conta de energia elétrica, deparamos com a unidade kWh (lê-se quilowathora). Sabemos que o instrumento que mede a energia que consumimos é o relógio instalado em todas as residências.

Mas, o que medimos? Medimos grandezas. De modo geral, em vez de definir o que é uma grandeza, os autores preferem dar exemplos. As grandezas mais comuns e que são mais estudadas no Ensino Fundamental são: comprimento, área, volume, capacidade, massa (peso), tempo e valor. A propósito, Imenes e Lellis definem grandeza como algo "que pode ser medido" e explicam que comprimento, "temperatura, tempo e área são exemplos de grandeza." (IMENES; LELLIS; 1998, p. 155). Também Abrantes, Serrazina e Oliveira dizem algo semelhante, referindo-se às medidas: "Aspectos essenciais deste tema incluem a compreensão de que um atributo mensurável é uma característica de um objeto que pode ser quantificada, como, por exemplo, a amplitude, o comprimento, a área, o volume ou a temperatura." (ABRANTES e colegas, 1999, p.75).

É assim que entendemos o que é uma grandeza neste texto: um atributo de um objeto ou de um corpo, como diria um físico, que se pode aumentar ou diminuir. Mas, como poderíamos medir essa variação? O que é a medida de uma grandeza? O que é medir?

Para medir uma grandeza, escolhemos outra, da mesma espécie, que vai servir de unidade e comparamos essas duas grandezas. Portanto, medir é saber quantas vezes a unidade de medida cabe na grandeza a ser medida. O resultado dessa medida é, portanto, o número que responde à pergunta: *quantas vezes a unidade cabe na grandeza a ser medida?* Esse número é a medida da grandeza em relação à unidade escolhida. Bento de Jesus Caraça assim resume o processo: “Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos — *escolha* da unidade; *comparação* com a unidade; *expressão* do resultado dessa comparação por um número.” (CARAÇA, 2000, p. 30).

1.2 UNIDADE DE MEDIDA

O fato de utilizarmos, em nosso dia a dia, unidades de medida padronizadas (metro, quilo, grau, etc.) e de obtermos o valor de uma medida pela simples inspeção de um instrumento de medida (trena, balança, termômetro, etc.) leva-nos a distanciar do significado do processo de medir. Para perceber toda a sutileza do ato de medir, precisamos efetuar uma medida sem o uso de uma unidade padrão. Fazendo isso, podemos perceber por que precisamos dos submúltiplos de uma unidade e por que os números naturais não são mais suficientes para exprimir uma medida. Seja, por exemplo, medir o comprimento da tira A, usando como unidade, o comprimento da tira U, conforme a Figura 1, a seguir:

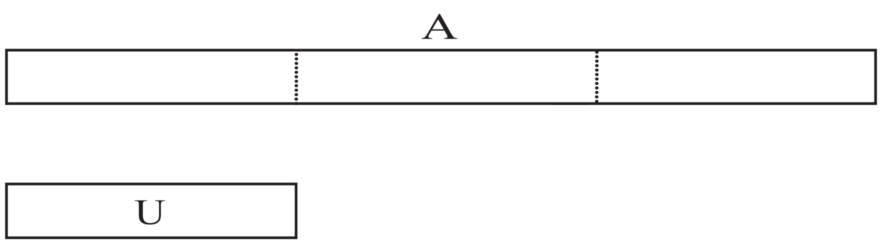


Figura 1: Medida da tira A utilizando a tira U como unidade: situação 1

Na figura 1, comparando o comprimento de U com o comprimento de A, podemos verificar duas situações:
Situação 1. A unidade U cabe exatamente três vezes em A, como se vê acima.
Situação 2. A unidade U cabe duas vezes em A e *mais um pedacinho*, como se vê abaixo.

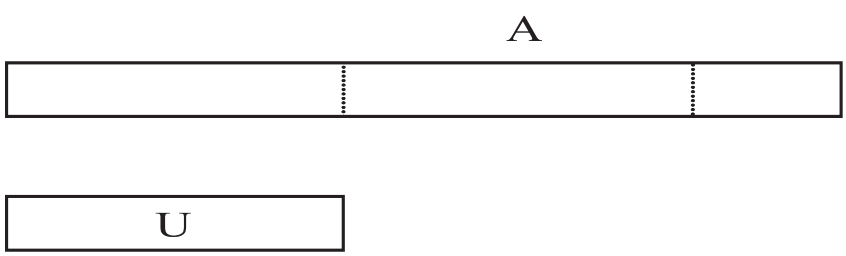


Figura 2: Medida da tira A utilizando a tira U como unidade: situação 2

Na situação 1, dizemos que a medida de A é 3U; na situação 2, dizemos que a medida de A é 2U, *mais um pedacinho*. A situação 2 é a que acontece com mais frequência. Quando medimos um comprimento, usando o metro como unidade, é muito difícil que o metro caiba um número exato de vezes no comprimento que queremos medir.

Na situação 2, na qual a unidade U não cabe um número exato de vezes no comprimento A, outro problema se coloca: medir, com a unidade U, o *pedacinho* de A que é menor do que U. Se usamos o metro como unidade, medimos o *pedacinho* com centímetros, se ainda o centímetro não der, medimos o *pedacinho* com milímetros.

No caso de uma unidade não-convencional, como a unidade U da situação 2, como proceder para medir o *pedacinho* de A? Nesse caso, dividimos U em partes menores e iguais, até encontrar uma parte de U, que caiba um número exato de vezes no *pedacinho* de A. Chamaremos a parte em que a unidade U foi dividida de U'. Portanto, U' é uma subunidade ou submúltiplo de U. Por exemplo: a relação entre U e U' é a mesma relação que existe entre o metro e o centímetro, o quilograma e o grama, o litro e o decilitro, etc. Voltando à questão da situação 2, perguntamos: qual é a relação que existe entre U e U', na situação 2? Temos que U = 5 U', conforme apresentado na figura 3 abaixo.

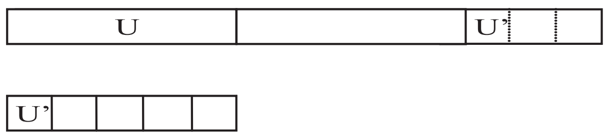


Figura 3: Relação entre U e U', na situação 2

E qual é a relação entre A e U'? A = 2 U + 3 U', logo, A = 13 U'. Isto é, U' cabe 13 vezes em A.

Vejamos outra questão: como proceder se quisermos escrever a medida do comprimento A, na unidade U?

Antes, precisamos exprimir a medida de U', na unidade U. Essas duas medidas não serão números naturais logo, precisaremos de outros números para representá-las.

1.3 MEDIDAS E NÚMEROS RACIONAIS

Historicamente, números racionais aparecem para representar o resultado de uma medida, quando a unidade escolhida não cabe um número inteiro de vezes no objeto que queremos medir. Primeiramente, eles aparecem na forma de fração e, muito mais tarde, na forma de frações decimais e números decimais. Assim, na situação representada acima, temos que U' = $\frac{1}{5}$ U e A = $\frac{13}{5}$ U. Podemos observar que a unidade U foi dividida em 5 partes iguais; U' representa uma dessas partes e a tira A contém 13 dessas partes. Neste caso, dizemos que 5 é o denominador das frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{13}{5}$ e que 1 e 13 são, respectivamente, os numeradores dessas frações.

No exemplo acima, conseguimos encontrar uma tira de comprimento U', que cabe um número inteiro de vezes na tira de comprimento U (5 vezes) e um número inteiro de vezes na tira de comprimento A (13 vezes). Nesse caso, dizemos que U e A são comensuráveis. Nem sempre é possível encontrar U' nessas condições, isto é, existem segmentos incomensuráveis. Por exemplo, o lado e a diagonal de um quadrado, de medidas λ e *d*, respectivamente, são segmentos incomensuráveis. Com isso, queremos dizer que não existe um número racional que exprima a medida da diagonal *d* do quadrado usando o lado λ, como unidade. Para mostrar isso, precisaremos de um resultado importantíssimo da Geometria: o Teorema de Pitágoras.

Consideremos o quadrado ABCD:

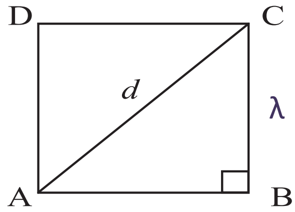


Figura 4: Quadrado de lado λ e diagonal *d*

O triângulo ABC, formado por dois lados do quadrado e uma de suas diagonais, é um triângulo retângulo e seus catetos AB e BC são iguais entre si e têm medida λ. AC é a diagonal de medida *d*.

Temos, pelo Teorema de Pitágoras que: $d^2 = 1^2 + 1^2$

$$d^2 = 21^2$$

$$d = \sqrt{2}1$$

Assim, $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal *d*, usando o lado λ como unidade e $\sqrt{2}$ não é um número racional, isto é, não pode ser escrito na forma de uma fração. Isso significa que não existe um segmento U', que caiba um número inteiro de vezes no lado do quadrado e na sua diagonal, ao mesmo tempo.

1.4 UNIDADES NÃO CONVENCIONAIS DE MEDIDA

A necessidade de medir aparece muito cedo no desenvolvimento da humanidade. Alguns historiadores remontam a necessidade de medir ao Egito, há mais de 4 000 anos. Apesar de as margens do Rio Nilo serem muito férteis, o regime do rio era bastante irregular, com períodos prolongados de cheia, quando a água invadia as margens, e períodos prolongados de seca, nos quais o rio permanecia nos limites de seu leito. Nos períodos de cheia, as terras ficavam alagadas, logo, impróprias para o plantio. Assim, os agricultores que plantavam nessas terras tinham seus terrenos medidos regularmente, para efeito de pagamento dos impostos, pagando o preço justo por eles.

Ora, esse pagamento de impostos já caracterizava uma organização complexa do Estado na sua relação com os agricultores. Muito antes disso, enquanto os homens eram nômades e viviam em cavernas, eles tinham necessidade de avaliar o tamanho da caça, para saber se ela era suficiente para matar sua fome ou a fome de sua tribo. Era uma forma primitiva, intuitiva e indireta de medir.

Até hoje, utilizamos algumas formas indiretas de avaliar uma medida, por exemplo: quando queremos saber se um determinado armário vai passar por uma porta, ou se um sofá vai caber no canto de uma sala. É claro que podemos usar um instrumento de medida para isso, mas, na maioria das vezes, fazemos isso por avaliação. Para saber se uma criança é mais alta que outra, comparamos as alturas das duas. São formas indiretas de medir.

Hoje, podemos utilizar instrumentos de medidas convencionais e já temos unidades-padrão de medidas, consagradas no mundo inteiro. Entretanto, ainda encontramos, em feiras e mercados do interior de Minas, instrumentos de medida não convencionais. Por exemplo, a farinha vendida em caixinhas de madeira, com capacidade para, aproximadamente, um quilo do produto. Os vendedores de jabuticaba utilizam uma lata de litro de óleo vazia para vender a fruta nas ruas de Belo Horizonte.

Em algumas receitas de culinária tradicionais, encontramos unidades de medida nada convencionais. A Associação das Auxiliares do Lar de Araxá editou o livro *Araxá põe a mesa*, reunindo receitas de suas associadas[1]. Na receita do BISCOITO COZIDO E ASSADO de D. Zita Paiva, por exemplo, temos: "Material usado: 1 prato bem cheio de polvilho doce, ½ prato de açúcar, ½ prato de banha, ovos." (A.A.L.A., s. d., p. 40).

Em outras receitas, encontramos unidades de medidas diferentes das usuais, como a libra ou arrátel e a quarta. A receita seguinte é do livro *Fogão de Lenha*, de Maria Stella Libânio Christo[2]. A autora fez uma pesquisa em documentos antigos nos quais foi buscar algumas de suas receitas. Reproduzimos a lista dos ingredientes da receita Beijinhos, um capítulo do livro, no qual a autora reúne algumas *Curiosidades* e explica, entre outras coisas, que "[...] a nomenclatura dos doces e quitutes era expressão dos sentimentos femininos: beijinhos, assoprinhos de moça ..."

Beijinhos
1 arrátel de açúcar em ponto de pasta
1 quarta de amêndoas bem pisadas

1 arrátel = 459 gramas
1 quarta = 115 gramas (CHRISTO; 1977, p. 255)

Em outra receita, a autora explica que o arrátel equivale à libra, ambos pesando 459 gramas.

1.5 UNIDADES CONVENCIONAIS DE MEDIDA

Desde o uso de unidades não convencionais de medida até à criação de um Sistema Métrico Decimal (1799), por iniciativa dos idealizadores da Revolução Francesa (1789-1796), o caminho percorrido foi longo. Uma longa história, cheia de percalços, quer pela própria instabilidade política da Europa, na época, quer pela falta de vontade política das

[1] Associação das Auxiliares do Lar de Araxá. Araxá põe a mesa. 4ª Edição. Araxá: A.A.L.A., s. d.
[2] CHRISTO, Maria Stella Libânio. Fogão de Lenha. Rio de Janeiro: Vozes, 1977.

nações de mudar os sistemas de medida que adotavam. Longa, mas muito interessante e da qual apresentaremos somente alguns marcos importantes.

Com efeito, em 1875 criou-se, em Paris, na França, o Bureau Internacional de Pesos e Medidas para centralizar as discussões em torno da criação de um sistema único de medida. O Bureau promoveu várias reuniões para tratar do assunto, mas foi somente em 1960, na XI Conferência Internacional de Pesos e Medidas, que foi adotado o Sistema Internacional de Pesos e Medidas, que definiu unidades-padrão, para cada grandeza, e seus respectivos símbolos que seriam adotados no mundo inteiro. (CENTURIÓN, 2006).

Os sistemas adotados são decimais, isto é, os submúltiplos são frações decimais e os múltiplos são as unidades-padrão multiplicadas por potências de dez. As relações entre os múltiplos e submúltiplos da unidade-padrão de medida são indicadas pelos seus prefixos, como a seguir:

Submúltiplos:
mili – 10^{-3} (um milésimo) da unidade-padrão (ex: milímetro, mililitro)
centi – 10^{-2} (um centésimo) da unidade-padrão (ex: centímetro, centilitro)
deci – 10^{-1} (um décimo) da unidade-padrão (ex: decímetro, decilitro)

Múltiplos:
deca – 10 vezes a unidade-padrão (decâmetro, decalitro)
hecto – 10^{2} vezes a unidade-padrão (hectômetro, hectolitro)
quilo – 10^{3} vezes a unidade-padrão (quilômetro, quilolitro)[3]

1.5.1 Comprimento

O comprimento é, talvez, a grandeza mais simples de ser medida. Além disso, a régua, um dos instrumentos usados para medir comprimento, é de uso corrente entre os alunos desde muito cedo e o processo utilizado para se efetuar essa medida é, também, muito simples. Portanto, Neste texto, será com a medida de comprimento que introduziremos o conceito de medida e de unidade de medida.

A unidade-padrão de medida de comprimento é o metro, que a Academia de Ciências Francesa definiu, em 1799, como medindo "a quarta parte do meridiano terrestre, dividido por 10 milhões." (TOLEDO;TOLEDO, 1997, p. 279). Em outras palavras, o metro é a medida do meridiano terrestre divido por 4 000 000. Essa unidade foi materializada por uma barra de platina iridiada, guardada no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Paris, com 1 metro de comprimento e uma seção transversal retangular, de 25,3 mm de espessura. A reprodução desse protótipo, em diferentes partes do mundo, mostrou-se pouco prática. Assim, a partir da 17ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em 1983, o

[3] Para conhecer mais a história do Sistema Métrico, leia (CENTURIÓN, 2006; TOLEDO; TOLEDO, 1997) ou consulte uma enciclopédia. Machado (1991) é um texto paradidático, bem accessível aos alunos do Ensino Fundamental. Imenes e Lellis (2007) traz um quadro com as unidades de medida do Sistema Métrico Decimal, seus múltiplos e submúltiplos e as correspondências entre eles, assim como, outras unidades de medida. Via Internet, consultem o site www.inmetro.gov.br/infotec/publicacoes/SI, do INMETRO.

metro passou a ser definido, com base na velocidade de propagação da luz como sendo "$\frac{1}{300000000}$ da distância percorrida pela luz, no vácuo, em 1 segundo." (MACHADO, 1991, p.34).

quilômetro	hectômetro	decâmetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
1*km* $10^3 m$ 1 000 *m*	1*hm* $10^2 m$ 100 *m*	1*dam* 10*m* 10*m*	**1*m***	1*dm* $10^{-1} m$ 0,1 *m*	1*cm* $10^{-2} m$ 0,01 *m*	1*mm* $10^{-3} m$ 0,001 *m*

Figura 5: O metro: seus múltiplos e sub-múltiplos

1.5.2 Área

A área de uma[4] superfície é obtida, calculando-se quantas vezes a unidade de área escolhida cabe na superfície da qual queremos calcular a área. Isso significa pavimentar a superfície com a unidade de área escolhida, sem deixar *buracos* e sem sobreposições. (PONTE; SERRAZINA; 2000). Assim, tomaremos aqui, como unidade de área, a área de um quadrado de lado 1.

A unidade-padrão de medida da grandeza área, no Sistema Métrico Decimal, é o metro quadrado, cujo símbolo é m^2 e que corresponde à área de um quadrado cujo lado mede 1m. Na figura 6 abaixo, estão representados seus múltiplos e submúltiplos, que variam de 100 em 100 e as relações entre eles.

Quilômetro quadrado	hectômetro quadrado	decâmetro quadrado	metro quadrado	decímetro quadrado	centímetro quadrado	milímetro quadrado
$1km^2$ $10^6 m^2$	$1hm^2$ $10^4 m^2$	$1dam^2$ $10^2 m^2$	$\mathbf{1m^2}$	$1dm^2$ $10^{-2} m^2$	$1cm^2$ $10^{-4} m^2$	$1mm^2$ $10^{-6} m^2$

Figura 6: O metro quadrado: seus múltiplos e submúltiplos

Para a medida da área de superfícies muito extensas, como sítios e fazendas, usamos o are e o hectare. Abaixo, temos as relações dos dois com o metro.

Are: 1a = $100m^2$.
Hectare: 1ha = 10 $000m^2$.

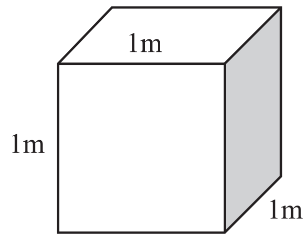
1.5.3 *Volume e capacidade*

Essas duas grandezas são muitas vezes confundidas. De fato, a capacidade se confunde com o volume, até na definição. Imenes e Lellis definem volume como "Medida do espaço ocupado por um corpo" e capacidade como "Volume interno de um recipiente" (IMENES e LELLIS, 2007; p. 328 e 50). Ponte e Serrazina esboçam uma diferença:

[4] No terceiro texto, Geometria e Tratamento da Informação, ampliaremos o estudo do conceito de área e o estudo do cálculo das áreas de figuras planas, com unidades convencionais e não convencionais. Neste texto, indicamos as unidades padrão da grandeza área, seus múltiplos e submúltiplos.

“Enquanto que volume de um objeto é a quantidade de espaço que ocupa, capacidade é a quantidade de espaço ou de líquido que pode conter” (PONTE e Serrazina, 2000, p.199). Outro fato interessante quanto à grandeza capacidade é que ela não comparece no Quadro Geral de Unidades, aprovado pela Resolução do CONMETRO nº 12/88, reproduzido pelo Instituto de Pesos e Medidas do Estado de São Paulo-SPEM[5]. A grandeza volume aparece no quadro, com a unidade *metro cúbico*, volume de um cubo cuja aresta tem 1 metro de comprimento, ou com a unidade *litro*, volume igual a 1 decímetro cúbico.

Assim, considerando um cubo de 1m (um metro) de aresta, temos:



Volume = $1m^3$

Figura 7: Cubo, com volume de $1m^3$

Se o cubo tiver 1dm (um decímetro) de aresta, teremos:

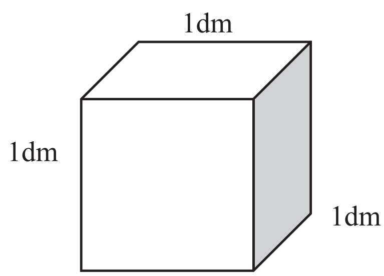


Figura 8: Cubo com volume de $1dm^3$ e capacidade de 1l

Na figura 9, abaixo, estão representados os múltiplos e submúltiplos do metro cúbico, que variam de 1 000 em 1 000 e as relações entre eles.

quilômetro cúbico	**hectômetro cúbico**	**decâmetro cúbico**	**metro cúbico**	**decímetro cúbico**	**centímetro cúbico**	**milímetro cúbico**
$1km^3$ $10^9\ m^3$	$1hm^3$ $10^6 m^3$	$1dam^3$ $10^3\ m^3$	$\mathbf{1m^3}$	$1dm^3$ $10^{-3} m^3$	$1cm^3$ $10^{-6} m^3$	$1mm^3$ $10^{-9}\ m^3$

Figura 9: O metro cúbico: seus múltiplos e submúltiplos

[5] Disponível em: <www.ipem.sp.gov.br>. Acesso 29/02/2009.

Na figura 10, abaixo, estão representados os múltiplos e submúltiplos do litro, que variam de 10 em 10, e as relações entre eles.

quilômetro	hectômetro	decâmetro	litro	decímetro	centímetro	milímetro
1 *kl* $10^3\,l$ 1 000 *l*	1 *hl* $10^2\lambda$ 100 *l*	1*dal* 10*l* 10*l*	**1*l***	1 *dl* $10^{-1}\lambda$ 0,1 *l*	1 *ml* $10^{-2}\lambda$ 0,01 *l*	1 *ml* $10^{-3}\lambda$ 0,001 *l*

Figura 10: O litro: seus múltiplos e submúltiplos

1.5.4 Massa

Encontramos algumas dificuldades, ao falar da grandeza massa. Normalmente, a massa confunde-se com o peso. Assim, calculamos o peso de uma pessoa e não a sua massa, como seria correto. Para aumentar a confusão, para calcular a massa de um corpo, usamos uma balança e pesamos esse corpo. Atualmente, as propostas curriculares e os livros didáticos insistem, apropriadamente, na diferença das duas grandezas massa e peso.

Posto isso, diríamos:

- A grandeza massa é a quantidade de matéria que um corpo possui. Assim, quando dizemos que uma pessoa pesa 60 quilos, estamos nos referindo à sua quantidade de matéria. (IMENES; LELIS; 2007).
- A grandeza peso é a intensidade da força com que a Terra atrai um corpo. Enquanto a massa de uma pessoa não varia de um lugar a outro, seu peso é menor na Lua do que na Terra, por exemplo. (IMENES; LELIS; 2007).

A esse respeito, já tivemos a oportunidade de ver, nos noticiários da televisão, os astronautas flutuando dentro das naves espaciais. Ora, sua massa continua a mesma que ele tem na Terra, mas seu peso é zero, sem a ação da gravidade sobre ele uma vez que ele está muito longe da Terra.

A unidade-padrão de medida de massa é o quilograma, cujo símbolo é kg e que chamamos abreviadamente de quilo. É a massa de um protótipo internacional, um cilindro construído em platina iridiada, existente no Bureau Internacional de Pesos e medidas, em Paris. Corresponde, aproximadamente, à massa de 1 litro de água destilada a 4º. Um submúltiplo muito utilizado do quilograma é o grama, 1kg = 1000g. Para medidas menores, como por exemplo, a de doses de remédio, utilizamos também o miligrama, 1g = 1000mg. Um múltiplo do quilograma muito utilizado comercialmente é a tonelada, 1t = 1000kg. Apresentamos, no quadro abaixo (Figura 11), as outras subunidades do quilograma, apesar de não serem utilizadas na prática.

quilograma	hectograma	decagrama	grama	decigrama	centigrama	miligrama
1*kg*	1*hg*	1*dag*	1*g*	1*dg*	1*cg*	1*mg*
$10^3\,g$	$10^2\,g$	10*g*		$10^{-1}\,g$	$10^{-2}\,g$	$10^{-3}\,g$
1 000 *g*	100 *g*	10*g*		0,1 *g*	0,01 *g*	0,001 *g*

Figura 11: O quilograma: seus múltiplos e submúltiplos

1.5.5 Tempo

O tempo, como o valor monetário (dinheiro), não é percebido, normalmente, como uma grandeza. Percebemos o tempo pela repetição de intervalos periódicos – o dia, a noite, o intervalo entre uma lua cheia e outra, etc. – ou pelo intervalo de tempo ocupado por uma atividade – o período em estamos na escola, em que estamos no escritório, a duração de uma viagem, etc. Assim, um dia corresponde ao intervalo de tempo decorrido em uma rotação completa da Terra em torno do seu eixo.

A unidade de tempo padrão no Sistema Internacional de Medida é o segundo, tempo equivalente a 1/86 400 do dia. As relações do segundo com seus múltiplos – o minuto, a hora e o dia – são dadas no quadro abaixo.

Dia **d**	**Hora** **h**	**Minuto** **min**
1d = 24h = 24 x 60min 1d = 1 440min 1d = 1 440 x 60s 1d = 86 400s	1h = 60min = 60 x 60 s 1h = 3 600s	1min = 60seg

Figura 12: Os múltiplos do segundo

Podemos observar que as medidas de tempo não pertencem ao Sistema Métrico Decimal, isto é, a relação entre as unidades de tempo não são decimais. Entretanto, para medidas de tempo menores do que o segundo, falamos de décimos, centésimos ou milésimos de segundo. Recorremos, por exemplo, aos submúltiplos do segundo para cronometrar o tempo gasto por um corredor em uma corrida.

Outras medidas de tempo conhecidas são a semana (7 dias), o mês (30 dias) e seus múltiplos: o bimestre (2 meses), o trimestre (3 meses) e o semestre (6 meses), para citar só os mais usados. Essas medidas são bastante conhecidas e fazem parte da vivência do aluno, uma vez que o ano letivo nas escolas é dividido em bimestres ou trimestres e a maioria das universidades adota o regime semestral para a distribuição das disciplinas na sua proposta curricular.

O ano é o intervalo de tempo que a Terra gasta para realizar seu movimento de translação em torno do Sol. Nesse movimento, a Terra gasta 365 dias e 6 horas. Esse tempo marca o ano civil e tem início em 1º de janeiro de cada ano e finda em 31 de dezembro. Como consideramos que o ano tem 365 dias, a cada 4 anos faz-se um acerto de mais um dia e, então, temos o ano bissexto, de 366 dias. Esse dia a mais é acrescentado no mês de fevereiro, que passa a ter 29 dias em vez de 28. Com o objetivo de facilitar as transações comerciais, instituiu-se o ano comercial, com 360 dias ou 12 meses de 30 dias, com início e fim do ano civil.

Os múltiplos do ano são o biênio (2 anos), o triênio (3 anos), o quadriênio (4 anos), o quinquênio (5 anos)[6], a década (10 anos), o século (100 anos) e o milênio (1000 anos).

1.5.6 Valor Monetário

De 1942 a 1994, foram sete as mudanças de unidade monetária, no Brasil. A de 1994 instituiu o Real, com a conversão de 2 750 Cruzeiros Reais (CR 2 750,00) em 1 real (R$ 1,00), mantidos os centavos como moeda divisionária.

Atualmente, no Brasil, temos em circulação as seguintes notas e moedas:

- notas de R$ 1,00; R$ 2,00; R$ 5,00; R$ 10,00; R$ 20,00; R$ 50,00 e R$ 100,00;
- moedas de R$ 0,01; R$ 0,05: R$ 0,10; R$ 0, 25; R$ 0,50 e R$ 1,00.

As crianças muito novas já têm contato com quantias pequenas de dinheiro. Assim, os problemas envolvendo situações de compra e venda e de trocas entre notas e moedas favorecem o desenvolvimento de estratégias importantes para a manipulação dos números naturais e dos números racionais na forma decimal, promovendo uma aprendizagem significativa desses números. Problemas envolvendo dinheiro são também propícios à prática da estimativa, importante para a previsão de um resultado e para o desenvolvimento do cálculo mental.

[6] O servidor público recebe um adicional por tempo de serviço, ao final de 5 anos de exercício no cargo, a título de quinquênio.

2. NÚMEROS RACIONAIS

Quando introduzimos as unidades de medida, observamos que, ao efetuar uma medição, duas situações podiam ocorrer: a unidade escolhida cabia um número exato de vezes na grandeza a ser medida (Figura 2: situação 1); ou a unidade escolhida não cabia um número exato de vezes na grandeza a ser medida (Figura 3: situação 2). Na primeira situação, o resultado da medida era um número natural e, na segunda, não era um número natural. Queremos dizer com isso que, para realizar a medida na situação 2, tornou-se necessário ampliar o campo numérico ou, segundo Caraça (2000), tornou-se necessário ampliar o conjunto dos números naturais e criar novos números: os números racionais.

Historicamente, os números racionais apareceram para resolver um problema prático como representar o resultado de uma medida quando a unidade escolhida não couber um número exato de vezes na grandeza a ser medida. Voltando às medidas e, mais especificamente, à Figura 3: situação 2, observamos que a unidade U foi subdividida em 5 partes iguais, e U' representava uma dessas partes. Ou seja, não existe um número natural que seja a medida de U', usando U como unidade. De fato, escrevemos que U' = $\frac{1}{5}$U.

Criados como resposta à necessidade prática de expressar uma medida, com a evolução da Matemática, os números racionais ganharam o *status* de números e a questão da ampliação do conjunto dos números naturais passou a ser necessidade da própria Matemática. Foi preciso ampliar o conjunto dos números naturais para ser sempre possível dividir um número natural por outro, diferente de zero. De fato, a soma e o produto de dois números naturais constituem, sempre, um número natural. Mas, o quociente de dois números naturais só é um número natural se o dividendo for múltiplo do divisor. Assim, quando escrevemos que U' = $\frac{1}{5}$ U e que A = $\frac{13}{5}$ U, os números $\frac{1}{5}$ e $\frac{13}{5}$ não são números naturais porque 1 não é divisível por 5[7], e 13 não é divisível por 5 . Desse modo, $\frac{1}{5}$ e $\frac{13}{5}$ vão representar, respectivamente, o quociente de 1 por 5 e de 13 por 5. E, a subtração de dois números naturais só será um número natural se o minuendo for maior que o subtraendo. Isto é, 3 – 8 não é um número natural[8].

Segundo Courant e Robbins (1964), a grande importância dos Números Racionais reside nesses dois fatos: ampliar o conjunto dos Números Naturais tornando, sempre possível, o quociente de dois números naturais; atender à necessidade prática de representar o resultado de uma medida.

---

[7] A divisão por zero não existe no conjunto dos números racionais: as expressões 5/0 ou 0/0 não têm sentido matemático. (COURANT; ROBBINS; 1964)

[8] Os números inteiros negativos não serão objeto de estudo deste texto, assim como os números racionais negativos.

2.2 DIFERENTES SIGNIFICADOS DAS FRAÇÕES

Até aqui, exploramos dois significados das frações. No primeiro caso a fração indica uma medida. Por exemplo, quando um terreno é deixado de herança a quatro filhos, com a recomendação de ser dividido em partes iguais, cada um vai receber um quarto do terreno. Isto é, estamos comparando o terreno que cada um recebeu com o terreno todo – estamos medindo – e o resultado da medida é 1/4 de terreno destinado a cada herdeiro.

No segundo caso, a fração indica o resultado de uma divisão. Esse é o significado de uma fração que indica uma partilha. Por exemplo, quando dividimos duas barras de chocolate por três crianças, dizemos que cada uma recebeu 2/3 do chocolate, que indica a divisão de duas barras por três crianças. Assim, 2/3 é o quociente da divisão de 2 por 3.

Há, ainda, um terceiro significado das frações que é muito explorado: trata-se do seu uso como razão de dois números. Com esse significado, a fração expressa um índice comparativo. Por exemplo, na sala de aula, a relação de meninos para meninas é de 3 para 4, ou seja, é de 3/4. Isso significa que, em cada 7 alunos, 3 são meninos e 4 são meninas. As escalas estão incluídas nesse caso. Uma escala de 1 : 100 000 significa que, a cada centímetro no mapa, corresponde 100 000 cm = 1 km, na realidade. Quando a comparação se dá com 100, esse índice é representado por uma porcentagem. Assim, por exemplo, 30% ($\frac{30}{100}$) dos alunos da sala usam óculos. (DAVID; FONSECA; 2005).

2.3 DEFINIÇÃO, LEIS OPERATÓRIAS E PROPRIEDADES

Quando escrevemos $A = \frac{13}{5}U$, o símbolo $\frac{13}{5}$ é uma fração. O 5 é o denominador e indica em quantas partes a unidade foi dividida (U = 5 U'), isto é, 5 *denomina* o tipo de fração: quintos. E 13 é o numerador e indica quantas vezes U' cabe em A (A = 13 U'), isto é, 13 conta ou *enumera* o número de quintos. (BRUMFIEL; EICHOLZ; SHANKS; 1972).

Resumindo, o número racional é todo número que pode escrever na forma $\frac{a}{b}$, com a e b números naturais e $b \neq 0$. Se a é um número natural, $\frac{a}{1} = a$ e $\frac{a}{a} = 1$, para $a \neq 0$. A primeira dessas igualdades nos diz que todo número natural pode ser escrito na forma de fração. Assim, ao definir as operações no conjunto dos números racionais, observamos que elas devem ser coerentes com as operações definidas no conjunto dos números naturais e as propriedades dessas operações devem ser mantidas. (CARAÇA, 2000).

2.3.1 Representação geométrica dos Números Racionais

A representação dos números racionais na reta numérica nos dá uma boa ideia desses números. Para isso, marcamos numa reta o número 0 e, à direita do 0, o número 1. O segmento de extremos nesses pontos – segmento unitário – será escolhido como unidade de comprimento. Reproduzindo esse segmento à direita de 0, teremos os números naturais representados na reta numérica, como se vê abaixo.

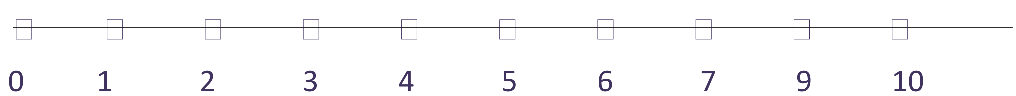


Figura 13: Reta numérica

Para representar, nessa reta numérica, os Números Racionais, não naturais, observamos os significados dos termos de uma fração. Por exemplo, para representar a fração $\frac{1}{3}$, dividimos a unidade em 3 partes iguais, tomamos uma dessas partes e marcamo-la na reta, como exemplificado abaixo.

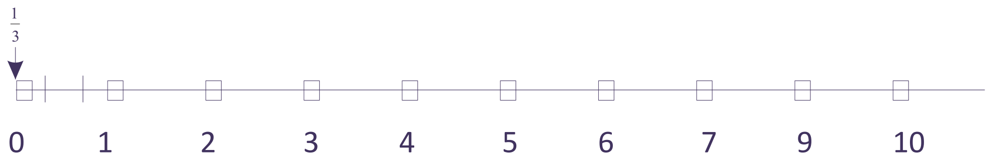


Figura 14: Reta numérica

Para representar o número $\frac{5}{2}$, dividimos a unidade em duas partes iguais, tomamos 5 dessas partes e marcamo-las na reta. Observe que $\frac{5}{2}$ está entre 2 e 3. De fato $\frac{5}{2}$, $= 2 + \frac{1}{2}$.

Figura 15

2.3.2 Comparação de Números Racionais

Dois números racionais são iguais se eles representarem a mesma medida, com a mesma unidade. Voltando à Figura 3, situação 2, poderíamos ter a unidade U dividida em 10 partes iguais, em vez de 5, e U', a subunidade de U, caberia 26 vezes na tira A. Nesse caso, a medida da tira A, usando a subunidade U', seria A = 26 U' e usando a unidade U, seria:

$$A = \frac{26}{10}\ U$$

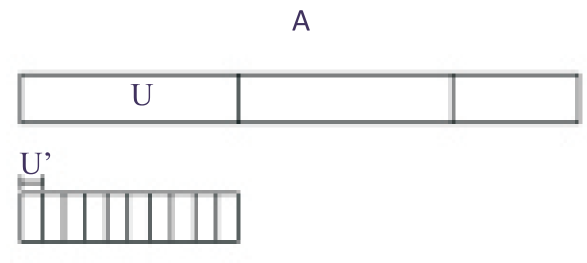


Figura 16

Ou seja, a fração $\frac{13}{5}$ representa o mesmo número racional que a fração $\frac{26}{10}$, uma vez que eles representam o resultado da mesma medida, com a mesma unidade. Repetindo o processo, poderíamos escrever: $\frac{13}{5} = \frac{26}{10} = \frac{52}{20} = \frac{260}{100} = \cdots$

Todas essas frações são equivalentes e representam o mesmo número racional. Mas, a fração $\frac{13}{5}$ é a fração mais simples que representa esse número.

Esse fato nos permitirá substituir as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ por outras duas equivalentes a cada uma delas e de mesmo denominador. De fato, temos que:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\cdots$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\cdots$$

Daí: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

O diálogo abaixo exemplifica como um aluno, da 5ª série de uma escola estadual em Belo Horizonte, fez uso desse conhecimento para comparar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

> Artur havia chegado à conclusão certa de que 1/2 é menor que 2/3.
>
> Profa.: Como é que você pensou para chegar nisso? Aí no desenho essa fração não aparece. Como é que você chegou à conclusão de que 1/2 é menor do que 2/3?
>
> Artur: Ah, professora, é difícil de explicar. Vamos supor uma pizza: eu divido em 6 pedaços. Aí cada 2 pedaços é 1/3. 3 pedaços é 1/2. Se eu pego 2/3 daria 4 pedaços e 1/2 seria 3. (DAVID; LOPES; 2000, p. 22).

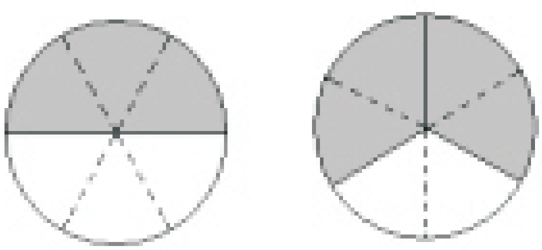


Figura 17: A explicação do aluno

Como vimos, esse aluno explicou com uma situação prática, porque a fração $\frac{1}{2}$ é menor que a fração $\frac{2}{3}$. Por que dividir a pizza em 6 partes? Porque 6 é um múltiplo comum dos denominadores 2 e 3. O aluno pôde, então, substituir as frações dadas por duas equivalentes, de mesmo denominador $\frac{3}{6}$, e $\frac{4}{6}$, respectivamente. Comparar frações de mesmo denominador é muito simples: a fração 1/6 cabe 3 vezes na fração $\frac{1}{2}$ e 4 vezes na fração $\frac{2}{3}$. Logo, $\frac{1}{2}$ é menor que $\frac{2}{3}$[9]. É claro que esse aluno não sabia isso, mas essa é a teoria que explica o que ele fez na prática.

[9] Quando dizemos que 1/2 é menor que 2/3 estamos, de fato, dizendo que o número racional representado pela fração 1/2 é menor que o número racional representado pela fração 2/3.

2.3.3 Operações com números racionais

Não pretendemos, neste texto, estudar todos os aspectos – definições e propriedades – das operações com números racionais, mas explorar alguns nem sempre presentes em sala de aula, bem com a teoria que fundamenta os procedimentos usados na manipulação desses números. Enfim, seguiremos aqui a mesma orientação quando da comparação de números racionais[10].

Uma das dificuldades ligadas ao ensino dos números racionais é a falta de relação entre os aspectos conceituais e os aspectos técnicos de manipulação dos símbolos e das regras operatórias[11]. Uma vez introduzidos, eles passam a ser manipulados como números desprovidos do seu real significado, ou seja, medir. Um exemplo disso é a resposta que se dá à pergunta: o que é uma fração própria? A resposta, é a fração que tem o numerador menor que o denominador, é correta, mas o que isso significa? Significa que a fração representa uma parte da unidade, e o número racional que ela representa é menor que a unidade. Na reta numérica esse número seria representado entre os números 0 e 1.

No episódio relatado no item anterior, o aluno conhecia a regra: *de duas frações de denominadores iguais, maior é a que tem maior numerador*. Sabia, também, proceder quando os denominadores fossem diferentes. Além disso, no momento em que ele dividiu a pizza em seis partes iguais, ele demonstrou, também, que sabia o significado do que estava fazendo. Em outras palavras, o aspecto técnico – a regra – veio ligado ao aspecto conceitual – o significado das frações 1/2 e 2/3. Assim, essas frações representam parte da unidade, que ele muito apropriadamente dividiu em 6 partes iguais.

a) Adição e subtração de números racionais

Somar e subtrair números racionais é somar e subtrair as medidas que eles representam, quando utilizamos a mesma unidade. Seja, por exemplo, somar 1/2 do comprimento da tira A, com 1/3 de seu comprimento.

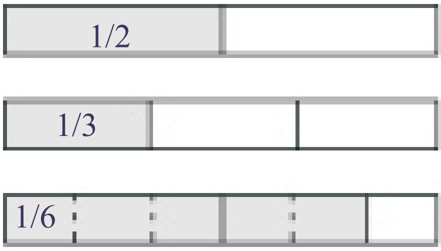


Figura 18

[10] Para um estudo sistemático das operações com números racionais, remetemos o leitor aos autores Centurión (2006) ou Toledo e Toledo (1997).

[11] HIEBERT, James e WEARNE, Diana. Procedures over concepts: the acquisition of decimal number knowledge. In HIEBERT, James (ed.) Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics. London: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.

O processo consiste em colocar 1/3 da tira ao lado de ½ de mesma, como na parte de baixo da figura. Para efetuar a adição, precisamos de uma subunidade que caiba um número inteiro de vezes em metade da tira e em sua terça parte, logo, na tira toda. Escolhemos a subunidade 1/6[12], que cabe três vezes na metade da tira, duas vezes na sua terça parte e seis vezes na tira toda. Isso significa substituir 1/2 e 1/3 pelas frações equivalentes 3/6 e 2/6, respectivamente. Efetuando a adição, temos:

$$+ \quad = \quad + \quad =$$

Com esses dados, podemos formular o seguinte problema: Mário pintou $\frac{1}{2}$ de um *muro* e Carlos pintou desse mesmo muro. Que parte do muro, os dois pintaram juntos? Como resposta teríamos: os dois pintaram 5/6 do muro.

Para subtrair $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$, procuramos quanto falta à terça parte da tira A, para completar sua metade.

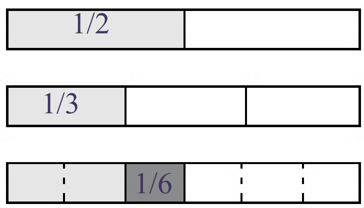


Figura 19

Efetuando a subtração, temos:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Em geral, podemos definir a adição e a subtração de números racionais do seguinte modo.

Se $r_1 = \frac{a}{b}$ e $r_2 = \frac{c}{d}$ são dois números racionais, então:

$$r_1 + r_2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d} \quad \text{e} \quad r_1 - r_2 = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d - b.c}{b.d}$$

Usando a definição de adição e subtração de números racionais no exemplo acima, teríamos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3 - 2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

[12] Podemos observar que a subunidade pode ser também 1/12, 1/18, etc. Podemos ter no denominador, qualquer múltiplo comum de 2 e 3. Escolhemos 1/6, por ser a subunidade que fornece frações de termos mais simples, uma vez que 6 é o mínimo denominador comum de 2 e 3.

Se as frações têm o mesmo denominador, usando a definição acima, efetuamos a soma da seguinte forma:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2\times 7+7\times 3}{7\times 7} = \frac{7\times(2+3)}{7\times 7} = \frac{5}{7}$$

Ficou claro nesse exemplo a seguinte regra da soma de frações que têm o mesmo denominador: para somar duas frações que têm o mesmo denominador, repetimos o denominador e somamos os numeradores. Portanto, para efetuar a soma de frações de denominadores diferentes, substituímos as frações por outras equivalentes de mesmo denominador.

b) Multiplicação de frações

Para multiplicar duas frações, a regra manda multiplicar os numeradores e os denominadores. Assim, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$.

Para dar sentido a essa regra de multiplicação de frações, no caso de um dos fatores ser um número natural, lançamos mão dos nossos conhecimentos sobre a adição de números naturais como soma de parcelas iguais:

$$3 \times \quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Também por analogia com os números naturais, para calcular o triplo de $\frac{1}{2}$, multiplicamos $\frac{1}{2}$ por 3. Por outro lado, $\frac{3}{2}$ é o resultado da divisão de 3 por 2, ou seja, $\frac{3}{2}$ é a metade de 3. Assim, a igualdade acima mostra-nos que *dividir um número por 2 é o mesmo que multiplicá-lo por* $\frac{1}{2}$. Esse fato vai servir para justificar, em um caso simples, a regra de divisão de frações.

Aqui, usamos para justificar a regra de multiplicação de frações em alguns casos simples. A figura abaixo ilustra a metade de $\frac{1}{2}$. Portanto: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

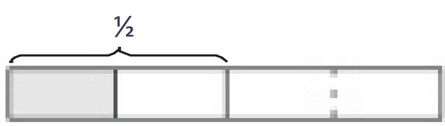


Figura 20

Assim, justificamos a regra: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1\times 1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$.

Vejamos outro exemplo, tomando como referência a figura 21, abaixo, que ilustra a metade de $\frac{2}{3}$. Portanto, $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

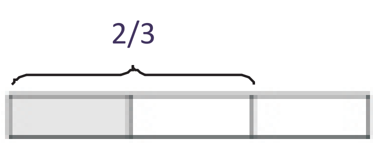


Figura 21

Assim, justificamos a regra: $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$

c) Divisão de frações

Para dividir duas frações, a regra manda multiplicar a primeira pelo inverso da segunda. Assim, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

Para interpretar essa regra, primeiramente, caracterizaremos o que é uma fração inversa da outra, apresentando alguns exemplos.

- O inverso de 2 é $\frac{1}{2}$, porque $2 \times \frac{1}{2} = 1$;
- O inverso de $\frac{1}{5}$ é 5, porque $\frac{1}{5} \times 5 = 1$;
- O inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$, porque $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = 1$.

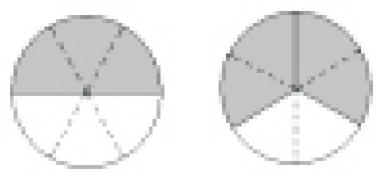
E, em geral, o inverso de uma fração $\frac{a}{b}$ é a fração $\frac{b}{a}$, que multiplicada por $\frac{a}{b}$ dá 1. Posto isso, podemos afirmar: todo número racional diferente de zero tem inverso.

Antes de prosseguir a interpretação da regra de divisão de frações, relembremos o conceito de divisão, analisando a expressão $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6}$.

Para saber o resultado dessa operação, devemos calcular quantas vezes o número representado pela fração $\frac{1}{6}$ cabe no número representado pela fração $\frac{2}{3}$. Isso significa medir $\frac{2}{3}$, utilizando-se $\frac{1}{6}$ como unidade. Foi o que fez o aluno, no episódio já relatado. Ele calculou $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$ e $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = 3$.

Em termos gráficos, teríamos:

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = 3$



$\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$

Figura 15

Podemos verificar que o processo utilizado por ele está coerente com a regra:

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{2 \times 6}{3 \times 1} = 4$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{1} = \frac{1 \times 6}{2 \times 1} = 3$$

Começando pois, com casos simples podemos entender o processo da divisão e da multiplicação de frações.

Utilizando o seguinte resultado: *multiplicando-se os dois termos de uma divisão, pelo mesmo número, o quociente não se altera* e a definição de fração inversa: $\frac{d}{c}$ *é a fração inversa* $\frac{c}{d}$ *de*, podemos justificar a regra da divisão com um pouco mais de formalidade.

Assim sendo, multiplicando-se os dois termos da divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, por $\frac{d}{c}$ e lembrando que $\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1$, temos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right) \div \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right) \div 1 = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} ,$$

o que justifica a regra de divisão de frações.

3. PROPORCIONALIDADE

A ideia de proporcionalidade está presente desde muito cedo tanto em situações do dia a dia das pessoas, quanto na matemática escolar. Ela está presente, por exemplo, quando a criança, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, calcula o dobro ou o triplo de um número, ou sua metade. Quando um comprador, em um supermercado, está decidindo que embalagem de um determinado produto levar, se a de 500g ou a de 2,5kg, ou se ele quer conferir se a promoção *leve 5 e pague 4* é verdadeira ele está usando a ideia de proporcionalidade. Quem quer seguir uma receita culinária, indicada para quatro pessoas, pode-se deparar com a necessidade de prepará-la para oito pessoas, ou para dez, e esse processo envolve a proporcionalidade.

O raciocínio proporcional perpassa diferentes conteúdos de diferentes áreas da Matemática, em diferentes níveis de ensino. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental ele aparece no momento em que se estudam os múltiplos de um número; no Ensino Médio essa relação matemática *ser múltiplo de* será representada pela função linear $f(x) = ax$, onde a é uma constante. A proporcionalidade ocorre em problemas que envolvem as razões. Por exemplo: na Geometria, na semelhança de figuras, na Trigonometria, na definição das razões trigonométricas, como o próprio nome indica.

Outras áreas do conhecimento também fazem uso da idéia da proporcionalidade. A Física, para definir algumas grandezas que envolvem a razão de duas outras, apesar de serem indicadas por um só número, na maioria das vezes. Por exemplo, a velocidade (espaço percorrido por unidade de tempo), a densidade (massa por unidade de volume), a vazão de um líquido em um cano (volume de água que passa por uma seção transversal do cano por unidade de tempo) ou a vazão de água de uma torneira (quantidade de água que vaza da torneira por unidade de tempo), para falar das mais conhecidas.

Na Geografia, a proporcionalidade está presente nas escalas que indicam a relação das distâncias num mapa com as distâncias reais da região que ele representa. As escalas também são usadas para indicar a relação das distâncias em uma planta com as distâncias reais da construção que a planta representa.

No âmbito escolar, a proporcionalidade só é estudada, formalmente, quando os alunos resolvem problemas envolvendo razões e proporções, regra de três e divisão em partes proporcionais. Mas, antes disso, os alunos vivenciam no seu dia a dia situações envolvendo relações proporcionais e resolvem problemas escolares envolvendo-as. É importante, portanto, que o professor identifique essas situações, de forma a lidar com o conceito intencionalmente e proponha aos alunos situações-problema variadas envolvendo a proporcionalidade, com diferentes níveis de dificuldade. Os problemas envolvendo os diferentes significados das frações podem fazer isso. Não é preciso esperar o estudo de razões e proporções para levar o aluno dos anos iniciais do Ensino

Fundamental a raciocinar, por exemplo, diante do problema:
—Dar a fração equivalente a $\frac{2}{3}$, de denominador 12.

Ao resolvê-lo, o aluno aplica a proporcionalidade.

Também não é preciso esperar o estudo de regra de três, para propor ao aluno problemas do tipo:
—Na sala de aula de D. Lia há 2 meninos para 3 meninas. Se na sala tem 5 meninas, quantos meninos há na sala de D. Lia?

O primeiro problema os alunos resolvem com o conceito de frações equivalentes e o segundo eles podem resolver até representando a situação por meio de desenho.

3.1 RAZÕES E PROPORÇÕES

O conceito de razão está muito presente no nosso dia a dia e a gente nem se dá conta. Por exemplo, na embalagem do suco de frutas concentrado, há uma indicação de preparo da seguinte forma: para cada medida de suco concentrado, use três medidas de água. Alguns sucos em pó trazem a indicação: *35g faz 1l* . Também ao preparar a água sanitária para clarear a roupa, a dona de casa dispõe da seguinte orientação: misture 1 copo (200ml) de água sanitária em 20l de água. Comparando o número de alunos e alunas de uma sala de aula, aplicamos também o conceito de razão. No problema proposto anteriormente, por exemplo, na classe de D. Lia, a razão era de 2 meninos para 3 meninas. Observe que poderíamos também ter dito que na sala daquela professora havia 2 meninos para 5 alunos ou 3 meninas para 5 alunos. A escala, que compara uma distância no mapa com uma distância real numa região, é uma razão, para indicar outro exemplo.

Quando estudamos as frações, vimos a *razão* como um dos significados da fração. De fato, o termo razão vem do latim *ratio* e indica divisão. (IMENES; LELLIS; 2007). Escrevemos $\frac{2}{3}$ ou 2:3 e se lê *dois para três.*

Dizer que na sala de aula de uma professora há 2 meninos para 3 meninas é o mesmo que dizer que naquela sala havia 4 meninos para 6 meninas. Isto é, a proporção de meninos para meninas é a mesma se indicamos *dois para três* ou *quatro para seis*. Em símbolos, escrevemos a igualdade $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e se lê *dois está para três assim como quatro está para seis*. A igualdade de duas razões é uma *proporção*. Usando a notação de proporção, a igualdade anterior deve ser escrita da seguinte maneira: 2:3::4:6 e se lê da mesma forma.

A seguir, apresentaremos problemas que demandam o uso de razões e proporções, uma vez que eles envolvem grandezas proporcionais. Para resolvê-los, aplicaremos uma *regra de três* e precisaremos da *propriedade fundamental das proporções*.

Seja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ uma proporção qualquer. Os termos *a* e *d* são os extremos da proporção e *b* e *c* são os meios. Multiplicando-se os dois termos da primeira razão por *d* e os dois termos da segunda razão por *b*, temos que $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{b \times c}{b \times d}$. Portanto, $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}$ e podemos escrever que $a \times d = b \times c$. Como também é verdade que se $a \times d = b \times c$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, podemos enunciar a propriedade das proporções do seguinte modo: em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

De fato, na proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ temos que $2 \times 6 = 3 \times 4$.

3.2 REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA

Reportando-nos às situações apresentadas nos tópicos anteriores, segundo a orientação das embalagens, por exemplo, a de suco de frutas, basta controlar a quantidade de pó, com a quantidade desejada de suco, ou seja, basta controlar a proporção de um e de outro. Desse modo, para preparar 500ml de suco, que quantidade de pó vamos utilizar? Se a dona de casa quiser preparar somente 10l da solução de alvejante, quanto de água sanitária ela vai precisar? Ou, se a dona de casa quiser utilizar somente 50ml de água sanitária, que quantidade de água ela precisará para preparar uma solução com a mesma concentração da indicada na embalagem? Ou, ainda, se 1kg de sabão em pó custa R$ 4, 80, qual será o valor de 2,5kg?

Para resolver esses problemas que envolvem proporcionalidade, utiliza-se um processo de resolução que ficou conhecido pelo nome de *regra de três*. É claro que alguns deles se resolvem por uma simples inspeção direta. Assim, para preparar 10l da solução de alvejante precisaremos de metade da quantidade de água sanitária. Mas, calcular o preço de 2,5kg de sabão em pó, será mais complicado. Portanto, devemos armar a proporção $\frac{1}{2,5} = \frac{4,80}{x}$, onde x é o preço a pagar por 2,5kg de sabão em pó. Lê-se essa proporção da seguinte forma: 1 (quilo) está para 2,5 (dois quilos e meio) assim como 4,80 (quatro reais e oitenta centavos) está para x.

Usando a propriedade fundamental das proporções, calculamos o valor de x:

$$1.x = 2,5 \times 4,8 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{2,5 \times 4,80}{1} = 2,5 \times 4,80 = 12,00.$$

E, assim, obtemos como resposta que o preço de 2,5kg de sabão em pó será R$12,00.

Mas esse problema envolveu somente duas grandezas: a massa do sabão em pó medida em quilos e o valor monetário (preço) medido em reais. Trata-se de um problema de *regra de três simples*. Mas, se o problema envolve mais de duas grandezas, ele deixa de ser um problema de regra de três simples, constituindo-se uma *regra de três composta*. Por exemplo:

> Trabalhando 8 horas por dia, 3 trabalhadores constroem um muro de 40m de comprimento em 12 dias. Se o número de horas de trabalho diário for reduzido para 6 e o número de trabalhadores aumentado para 5, qual o comprimento de um muro de mesma altura que eles construirão em 15 dias? (LIMA e outros; 2006; p.13)

Esse problema envolve as grandezas tempo de trabalho (número de horas trabalhadas) por dia, número de trabalhadores, comprimento do muro e tempo de realização do trabalho (número de dias trabalhados). Para resolvê-lo, precisamos do conceito de grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e de um resultado referente a uma grandeza proporcional a várias outras, conceitos esses abordados a seguir.

a) Grandezas diretamente proporcionais

Voltando ao exemplo do problema envolvendo a massa do sabão em pó e seu preço, observamos que a cada quantidade de sabão corresponde a um preço. Além disso, dobrando a quantidade de sabão, dobra-se o valor correspondente. Isto é, 1kg de sabão custa R$ 4,80, 2kg custam R$ 9,60, 3kg custam R$ 14,40 e assim por diante. Em geral, se a quantidade de sabão ficar multiplicada por um número k, o preço correspondente ficará multiplicado por k. Esse fato caracteriza as grandezas diretamente proporcionais e k é o fator de proporcionalidade.

Assim, se x e y são valores correspondentes de duas grandezas diretamente proporcionais, dizemos que $y = kx$, sendo k o fator de proporcionalidade. Isto é, a razão de dois valores correspondentes é constante.

b) Grandezas inversamente proporcionais

Para esclarecer o conceito de grandezas inversamente proporcionais, consideremos, como exemplo, um carro que viajando a uma velocidade média de 60 km por hora vai da cidade A para a cidade B em 2h 40min. Qual deve ser a velocidade média do carro para percorrer o mesmo trajeto em 2h? (LIMA e outros; 2006).

Aqui, a distância permanece constante e, portanto, variando o tempo de duração do percurso, varia também a velocidade. De fato, dobrando-se o tempo para ir de uma cidade a outra, a velocidade fica dividida por dois. Dizemos que as grandezas, tempo de duração do percurso da cidade A até à cidade B e a velocidade média do carro para ir de A até B são inversamente proporcionais.

Assim, se x e y são valores correspondentes de duas grandezas inversamente proporcionais, dizemos que $y = \frac{k}{x}$, sendo k o fator de proporcionalidade. É o mesmo que dizer que os valores de uma são diretamente proporcionais ao inverso dos valores da outra, como vimos no exemplo acima. Aqui, o produto de dois valores correspondentes é constante.

c) Grandeza proporcional a várias outras

Para esclarecer o conceito de grandeza proporcional a várias outras, serviremos do problema do muro a ser construído. A grandeza comprimento do muro (c) depende do número de horas trabalhadas por dia (h), do número de trabalhadores (t) e do número de dias de trabalho (d). Analisamos a relação da grandeza c (comprimento do muro) com cada uma das outras, supondo as demais constantes. Portanto, a resolução a resolução desse problema envolve as seguintes etapas:

- análise da relação de *c* com *h*, supondo-se *t* e *d* constantes: mantendo-se constante o número de trabalhadores e o número de dias de construção do muro. Nessas condições, dobrando *h*, dobra *c*;
- análise da relação de *c* com *t*, mantendo-se *h* e *d* constantes: dobrando-se *t*, eles vão construir o dobro do comprimento do muro *c*;
- análise da relação de *c* com *d*, mantendo-se *h* e *t* constantes: dobrando-se *d*, constrói-se o dobro do comprimento do muro *c*.

Concluímos, então, que a grandeza comprimento do muro é diretamente proporcional às outras três: *h*, *t* e *d*.

Vencidas essas etapas, para resolver o problema vamos precisar do seguinte resultado: se uma grandeza é proporcional a várias outras ela é proporcional ao produto delas.

Daí, temos que $c = k\ h.\ t.\ d$, onde k é a constante de proporcionalidade que deverá ser calculada. Para isso, observamos que quando $h = 8$ h/d; $t = 3$ trabalhadores; $d = 12$ dias, $c =$ 40m. Daí:

$$40 = k\ 8\times3\times12$$
$$40 = 288\ k \text{ e } k = \frac{40}{288} = \frac{5}{36}$$

Portanto, para $h = 6$ h/d, $t = 5$ trabalhadores e $d = 15$ dias, temos para valor de c:

$$c = \frac{5}{36} \times6\times5\times15 = 62{,}5$$

E o comprimento do muro será de 62,5m.

O exemplo seguinte apresenta uma das grandezas inversamente proporcional a outras duas.

Um caminhão de carga, viajando a uma velocidade média de 60km/h e viajando 8 horas por dia, leva 6 dias para ir da cidade A até à cidade B. Aumentando sua velocidade para 80km/h e viajando 9 horas por dia, em quantos dias ele faria o mesmo percurso?

Observemos que o tempo de duração da viagem (*d*) depende da velocidade média do caminhão (*v*) e do número de horas que ele viaja por dia (*h*).

Nesse caso, temos:

- Relação da grandeza *d* com a grandeza *v*, mantendo-se *h* constante: se o motorista dobrar sua velocidade, *v*, ele dividirá por dois seu tempo de percurso, *d*;
- Relação da grandeza *d*, com a grandeza *h*, mantendo-se *v* constante: se o motorista dobrar o número de horas de viagem por dia, *h*, ele dividirá por dois, seu tempo de viagem, *d*.

Concluímos que a grandeza *d* é inversamente proporcional às outras duas, *v* e *h* e se escreve que $d = \frac{k}{v.h}$, onde k é a constante de proporcionalidade. Para calcular k, observamos no problema que, quando *d* = 6 dias, *v* = 60km/h e *h* = 8 horas por dia.

$$6 = \frac{k}{60 \times 8} \quad \text{e} \quad k = 6 \times 60 \times 8 = 2\,880$$

$$\text{Para } v = 80\text{km/h} \quad \text{e} \quad h = 9 \text{ horas por dia}, \quad d = \frac{2880}{80 \times 9} = 4.$$

Nessas condições, o caminhão levaria 4 dias para ir da cidade A à cidade B.

O próximo problema envolve grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais. Numa tecelagem 10 teares funcionando 6 horas por dia tecem 1200m de tecido em 8 dias. Quantos dias serão necessários para 6 teares funcionando 8 horas por dia tecerem 1440m do mesmo tecido?

Temos então:

Grandezas envolvidas: quantidade de teares (*t*), número de horas trabalhadas por dia (*h*), comprimento de tecido (*c*), tempo gasto (*d*). A grandeza *d* varia com as grandezas *t*, *h*, *c*.

- *d* e *t* são inversamente proporcionais;
- *d* e *h* são inversamente proporcionais;
- *d* e *c* são diretamente proporcionais.

Portanto, $d = k\,\frac{c}{t.h}$

Determinando o valor de k: para *d* = 8 dias, *c* = 1200m, *h* = 6h/d, *t* = 10 tem-se:

$$8 = k\,\frac{1200}{10 \times 6} \quad \text{e} \quad k = \frac{8 \times 10 \times 6}{1200} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Então, } d = \frac{2}{5} \times \frac{1440}{6 \times 8} = 12$$

Assim sendo, serão necessários 12 dias para 6 teares tecerem os 1440m de tecido.

Ao usar o processo de resolução por regra de três, precisamos estar atentos a dois fatos:

- a grandeza que se quer calcular deve depender das outras grandezas envolvidas;
- o problema deve envolver uma proporcionalidade.

4. REFERÊNCIAS

BRUMFIEL, Charles; EICHOLZ, Robert; SHANKS, Merril. *Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1972.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. (Edição revista por Paulo Almeida). Lisboa: Gradiva, 2000.

CARVALHO, Dione Lucchesi de Carvalho. Metodologia do Ensino da Matemática. *Coleção Magistério 2º Grau – Série Formação do Professor*. São Paulo: Cortez, 1990.

CENTURIÓN, Marília. Conteúdo e Metodologia da Matemática: Números e Operações. *Série Didática – Classes de Magistério*. 2ª ed. São Paulo, SP: Scipione, 2006.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *Qué es la Matemática?* 4ª ed. Madrid: Aguilar, 1964.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares, FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. Sobre o conceito de Número Racional e a Representação Fracionária. *Presença Pedagógica*. Edição Especial: Educação Matemática. Org. Samira Zaidan. Editora Dimensão. 2 005.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares, LOPES, Maria da Penha. Falar sobre Matemática é tão importante quanto fazer Matemática. *Presença Pedagógica*. V. 6, n. 32, mar/abr, 2 000. P. 16-24.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 2007.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas Elementares. *Coleção do Professor de Matemática*. 2ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LOPES, Maria da Penha. Percebendo o Espaço e Medindo. IN. SALGADO, Maria Umbelina Caiafa, MIRANDA, Glaura Vasques (Org.) *Veredas – Formação superior de professores*: módulo 1 – volume 3. Belo Horizonte: SEE – MG, 2002.

MACHADO, Nilson José. *Medindo Comprimentos*. São Paulo: Scipione, 1991.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO-Departamento da Educação Básica/Portugal. *A Matemática na Educação Básica*. ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes; OLIVEIRA, Isolina (Elab.). Lisboa: Colibri – Artes Gráficas, 1999.

PONTE, João Pedro; SERRAZINA, Maria de Lurdes. *Didáctica da Matemática do 1° Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

SMOOTHEY, Marion. Atividades e Jogos com Razão e Proporção. *Coleção Investigação Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática da Matemática, como dois e dois*: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.

SITES

www.inmetro.gov.br/infotec/publicacoes/SI
Texto técnico editado pelo INMETRO, com um histórico sobre o Bureau Internacional de Pesos e Medidas e legislação concernente, assim como todas as unidades de medida.

www.bancocentral.gov.br
Site do Banco Central, traz uma descrição de todas as notas e moedas em circulação no país e as mudanças monetárias ocorridas no Brasil.

PARADIDÁTICOS

Coleção **Pra que serve Matemática?** IMENES, Luiz Márcio, JAKUBOVIC, José & LELLIS, Marcelo. São Paulo: Editora Atual.

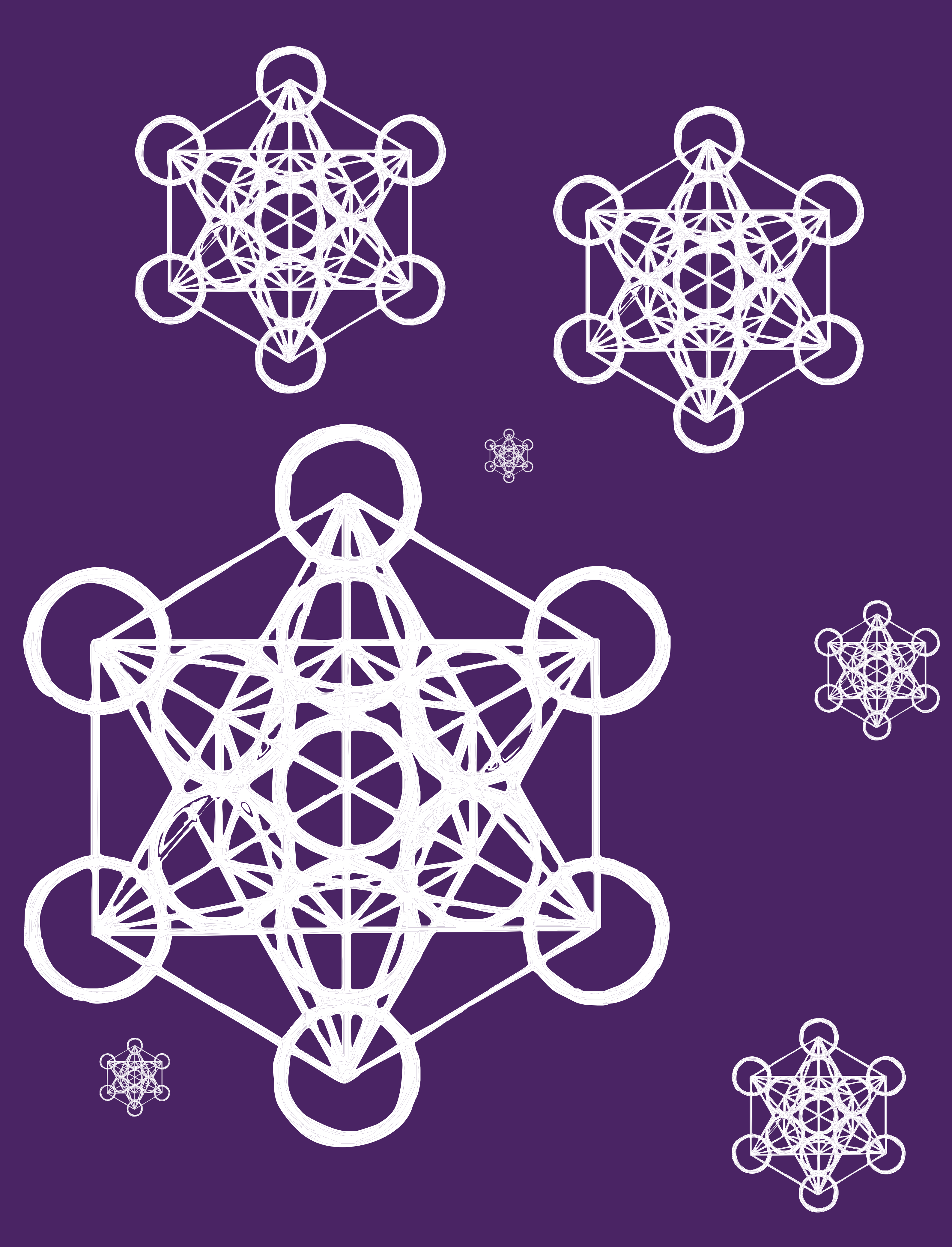
Cada livro dessa coleção aborda um tema contendo aplicações matemáticas, situações cotidianas, brincadeiras e jogos.

. Frações e números decimais.
. Proporções.

Coleção **Vivendo a Matemática**. IMENES, Luiz Márcio; MACHADO, Nilson José; JAKUBOVIC, José; WATANABE, Renate & GERDES, Paulus. São Paulo. Editora Scipione.

Cada livro dessa coleção aborda um tema, utilizando relatos históricos, quebra cabeças, problemas curiosos, aplicações práticas, aplicações matemáticas e desafios.

. Medindo os comprimentos.
. Brincando com números.
. Os números na história da civilização.
. A numeração indo-arábica.



ORIENTAÇÃO DE ESTUDO

ATIVIDADES

ATIVIDADE 1

Estudamos no texto Números e Operações, os Números Naturais que são números que expressam uma contagem e no texto Medidas e Proporcionalidade, os Números Racionais que são números que expressam uma medida. Abaixo estão listadas diferentes perguntas.

Assinale com N se a resposta à pergunta for um Número Natural e com R se a resposta for um Número Racional.

(   ) Quantos alunos tem a sala da 5ª série A?
(   ) Quantos litros de água você consome, em sua casa, em um mês?
(   ) Quantos metros quadrados tem a área de sua casa?
(   ) Quantos cômodos tem sua casa?
(   ) Qual o número de sua casa?
(   ) Quanto você mede?
(   ) Quanto custa um armário de cozinha?
(   ) Quais são as dimensões da sua mesa de jantar?
(   ) Quanto seu pai lhe dá de dinheiro por semana?
(   ) Quantos são os dias da semana?

(Adaptado do livro Números e Operações, de Marília Centurión)

ATIVIDADE 2

Vimos que algumas unidades não convencionais de medida são usadas, popularmente, até hoje. Pergunte aos colegas ou a parentes e amigos se eles conhecem algumas dessas unidades. Registre como elas são usadas e procure saber se há relação entre elas e as medidas convencionais.

ATIVIDADE 3

Procure em livros de receitas e copie, receitas envolvendo unidades não convencionais de medida.

ATIVIDADE 4

Procure mais informações sobre a História dos Sistemas de Medida e responda às seguintes questões:

- Por que o homem sentiu a necessidade de medir?
- Qual o inconveniente de se adotar as unidades de medida que tinham como referência o corpo humano: polegada, pé, braça?
- Na sua opinião o que levou os países do mundo a adotar um Sistema Internacional de Medidas, que seria comum a todos?
- O que significa dizer que nosso Sistema de Medidas é Decimal?
- Que vantagem você vê em ter um Sistema Decimal de Medidas?

ATIVIDADE 5

Em algumas embalagens de produtos expostos nos supermercados, encontramos as expressões "peso bruto", "peso líquido" e "peso drenado".

a) Procure o significado dessas expressões;
b) Procure um produto cujo rótulo traga essas informações (as três ou duas delas). Dê o nome do produto e os valores dados para essas expressões.

ATIVIDADE 6

Numa aula de Matemática os alunos resolvem a conta $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}$, somando os numeradores e os denominadores. Que argumentos você usaria para mostrar que a lógica que eles estão usando, é falsa?

ATIVIDADE 7

Algumas características do conjunto dos números naturais não se mantêm no conjunto dos números racionais. Por exemplo, entre dois números naturais consecutivos não existe outro número natural. Esse fato não se mantém no conjunto dos números racionais: entre dois números racionais distintos quaisquer, existe sempre outro número racional. Dê dois números racionais maiores que $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ menores que.

ATIVIDADE 8

Numa certa cidade, 11 em cada 100 habitantes têm mais de 65 anos. Se a cidade tem 2 000 000 de habitantes, quantos têm 65 anos ou menos?

ATIVIDADE 9

Um tijolo e meio mais 0,9kg se equilibram com 3,9kg. Quanto pesa o tijolo?

ATIVIDADE 10

Uma fita de cetim custa R$ 2,00 o metro. Quanto vai custar um pedaço de oitenta centímetros?

ATIVIDADE 11

Temos 80dl de suco de laranja numa vasilha e 20dl em outra. Colocando tudo numa vasilha maior, quantos litros de suco terão nesta vasilha?

ATIVIDADE 12

Viajando a uma velocidade média de 42 km/h, um navio percorre a distância entre as cidades A e B em 6 horas e 30 minutos. Que velocidade deverá desenvolver para fazer o mesmo trajeto em 5h e 15 minutos?

ATIVIDADE 13

Ao se cavar um buraco para a construção de uma piscina com 25m de comprimento, 10m de largura e 3m de profundidade, foram removidos 1 200m^3 de terra. Que volume de terra será removido, ao se cavar, em um terreno com as mesmas características, outra piscina medindo 12m de comprimento, 6m de largura e 2, 5m de altura?

RESPOSTAS

ATIVIDADE 1
N, R, R, N, N, R, R, R, R, N

ATIVIDADE 2
Resposta pessoal.

ATIVIDADE 3
Resposta pessoal.

ATIVIDADE 4
O homem passa a ter necessidade de medir, no momento em que ele tem necessidade de demarcar uma área para morar, para plantar, para pagar impostos sobre a terra possuída e quando se iniciam as transações comerciais, mesmo as mais primitivas trocas.

O inconveniente de se adotar unidades de medidas relacionadas ao próprio corpo (polegada, pé, braça) era que essas unidades variavam de pessoa a pessoa e dificultava a comunicação entre as pessoas.

As relações comerciais entre os diferentes países passaram a exigir unidades de medidas que fossem as mesmas em qualquer lugar. Isso levou os países do mundo a adotar um Sistema Internacional de Medidas, que seria comum a todos.

Ter um Sistema de Medidas é Decimal significa ter um sistema em que a unidade padrão, seus múltiplos e submúltiplos variam de 10 em 10.

Uma vantagem é ter uma escrita que coincide com a escrita do Sistema de Numeração.

ATIVIDADE 5
a) Peso bruto – peso de um produto com sua embalagem.
Peso líquido – peso do produto sem a embalagem.
Pese drenado – para aquele produtos que vêm imersos em líquido, o peso do produto sem a embalagem e sem o líquido.

b) Resposta pessoal.

ATIVIDADE 6
Ao somar $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, espera-se como resultado 1 (inteiro); seguindo a ordem "somar os numeradores e os denominadores", teríamos $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, o que contraria o senso comum.

ATIVIDADE 7
1ª solução: Fazendo $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ e $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, encontramos facilmente $\frac{6}{12}$, tal que $\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$ ou seja $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$. Só que precisamos de outra fração. Para usar esse processo, vamos fazer $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$ e $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ e aí temos $\frac{8}{24} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{12}{24}$. Portanto, $\frac{1}{3} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{1}{2}$ e temos dois

números racionais $\frac{9}{24}$ e $\frac{10}{24}$, maiores que $\frac{1}{3}$ e menores que $\frac{1}{2}$.

2ª solução: Temos que a média aritmética de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ é um número racional maior que $\frac{1}{3}$ e menor que $\frac{1}{2}$. Em seguida repetimos o processo, calculando a média aritmética entre $\frac{5}{12}$ e $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$. O outro número pedido pode ser $\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{12}}{2} = \frac{\frac{9}{12}}{2} = \frac{9}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{24}$. Portanto, $\frac{1}{3} < \frac{9}{24} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ e temos dois números racionais $\frac{9}{24}$ e $\frac{5}{12}$, maiores que $\frac{1}{3}$ e menores que $\frac{1}{2}$.

ATIVIDADE 8

1ª solução: Procuramos uma fração equivalente à fração $\frac{11}{100}$ de denominador 2000000. Temos que $\frac{11}{100} = \frac{220000}{2000000}$. Portanto, 220 000 habitantes da cidade têm mais de 65 anos e 2 000 000 – 220 000 = 1 780 000 têm 65 anos ou menos.

2ª solução: Se 11 em 100 habitantes têm mais de 65 anos, então 89 em 100 têm 65 anos ou menos e procuramos uma fração equivalente à fração $\frac{89}{100}$ de denominador 2000000. Temos que $\frac{89}{100} = \frac{1780000}{2000000}$. Portanto, 1 780 000 habitantes da cidade têm 65 anos ou menos.

ATIVIDADE 9

Temos que um tijolo e meio pesa 3,9kg – 0,9kg = 3,0kg. Portanto meio tijolo pesa 1,0kg e o tijolo pesa 2,0kg.

ATIVIDADE 10

Temos que 0,80 × 2,00 = 1,60. Portanto oitenta centímetros de fita vão custar R$ 1,60.

ATIVIDADE 11

1ª solução: 80dl + 20dl = 100dl e na vasilha maior teremos 100dl de suco ou 10l.

2ª solução: 80dl = 8l e 20dl = 2l. Logo, na vasilha maior teremos 10l de suco.

ATIVIDADE 12

É um problema de regra de três simples.

	velocidade média (v)		tempo de percurso (t)
	km/h		min
$\uparrow$	42	$\downarrow$	390
	x		315

As setas em sentidos contrários indicam que as grandezas *velocidade média* e *tempo de percurso* são inversamente proporcionais. De fato, percorrendo-se o mesmo percurso com o dobro da velocidade, o tempo de percurso fica dividido por dois.

Portanto: $v = \frac{k}{t}$. Para v = 42km/h, t = 390min, então, $42 = \frac{k}{390}$ e $k = 42 \times 390$. Portanto, $v = \frac{42 \times 390}{315} = 52$ e o navio deverá desenvolver a velocidade de 52km/h.

ATIVIDADE 13

comprimento (*c*)	largura (*l*)	profundidade (*p*)	volume de terra (*v*)
m	m	m	m^3
↓ 25	↓ 10	↓ 3	↓ 1 200
12	6	2,5	x

É um problema de regra de três composta. Comparando a grandeza *volume de terra retirada* com cada uma das outras, uma a uma, mantendo as outras duas constantes, conclui-se que elas são diretamente proporcionais ao volume. Portanto:

$$v = k.c.l\ .p$$

Para v = 1 200m^3, temos c = 25m, l = 10m e p = 3m. Daí 1 200 = $k \times 25 \times 10 \times 3$ e

$$k = \frac{1200}{25 \times 10 \times 3} =$$

$$v = \frac{8}{5} \times 12 \times 6 \times 2{,}5 = 288$$

E, ao se cavar a segunda piscina, o volume de terra removido, será de 288m^3.

Obs. O problema poderia também ser resolvido por uma regra de três simples, envolvendo as grandezas *volume da piscina* e *volume de terra removida*.

Volume da 1ª piscina: v_1 = 25m × 10m × 3m =750m^3.

Volume da 2ª piscina: v_2 = 12m × 6m × 2,5m = 180m^3.

volume da piscina(*p*)	volume de terra (*v*)
m^3	m^3
↓ 750	↓ 1 200
180	x

$v = k.\ p$,   1 200 = $k \times 750$, $k = \frac{1200}{750} = \frac{8}{5}$, $v\ \frac{8}{5} = \times 180m^3 = 288m^3$.

ESTUDO COMPLEMENTAR

SITES

www.inmetro.gov.br/infotec/publicacoes/SI
Texto técnico editado pelo INMETRO, com um histórico sobre o Bureau Internacional de Pesos e Medidas e legislação concernente, assim como todas as unidades de medida.

www.bancocentral.gov.br
Site do Banco Central, traz uma descrição de todas as notas e moedas em circulação no país e as mudanças monetárias ocorridas no Brasil.

PARADIDÁTICOS

Coleção **Pra que serve Matemática?** IMENES, Luiz Márcio, JAKUBOVIC, José & LELLIS, Marcelo. São Paulo: Editora Atual.

Cada livro dessa coleção aborda um tema contendo aplicações matemáticas, situações cotidianas, brincadeiras e jogos.

. Frações e números decimais.
. Proporções.

Coleção **Vivendo a Matemática**. IMENES, Luiz Márcio; MACHADO, Nilson José; JAKUBOVIC, José; WATANABE, Renate & GERDES, Paulus. São Paulo. Editora Scipione.

Cada livro dessa coleção aborda um tema, utilizando relatos históricos, quebra cabeças, problemas curiosos, aplicações práticas, aplicações matemáticas e desafios.

. Medindo os comprimentos.
. Brincando com números.
. Os números na história da civilização.
. A numeração indo-arábica.

ISBN 978-85-8007-031-6

O Curso de Pedagogia UAB UFMG proposto pela Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais visa à formação inicial de professores para a Educação Infantil e os quatro anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de um curso a distância, com momentos presenciais, desenvolvido pela UFMG em parceria com prefeituras de municípios onde foram criados os Pólos Municipais de Apoio Presencial, nos moldes definidos no Edital SEED/MEC no 1/2005, de 16 de dezembro de 2005.

O curso de Pedagogia UAB UFMG tem como referência o curso Veredas – Formação Superior de Professores, oferecido a professores da 1ª à 4ª série do ensino fundamental, em exercício nas redes públicas de Minas Gerais. O curso foi considerado, por educadores e entidades educacionais de renome, como inovador, tanto na concepção de formação de professores quanto na organização e dinâmica de gestão.

O Curso de Pedagogia UAB UFMG foi organizado na forma de um curso de graduação plena, distribuído em oito módulos, com duração prevista de quatro anos. Habilita para o exercício do magistério na educação infantil e nos quatro primeiros anos do ensino fundamental, de acordo com os requisitos contemporâneos para os profissionais da área de educação e as determinações legais vigentes no Brasil.

UAB
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INCIPIT VITA NOVA
7 DE SETEMBRO DE 1927