

Dissipação e Decoerência de Átomos e Campos em Cavidades Ópticas à Temperatura Nula

Dissertação de Mestrado

por

Raphael Campos Drumond

sob orientação da

Profa. Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS
GERAIS, como requisito parcial para obtenção do grau de MESTRE EM
FÍSICA.

Junho de 2009

Resumo

Neste trabalho investigamos a dissipação de um modo de campo eletromagnético imerso em uma cavidade óptica à temperatura nula. Analisamos primeiramente a situação campo e cavidade, onde revisamos a abordagem usual para a descrição da dinâmica do campo via uma equação mestra obtida a partir de um modelo microscópico. Para certas condições iniciais do estado do campo oferecemos uma nova abordagem para o cálculo da dinâmica do sistema, que repousa em hipóteses mais claras do que as necessárias para a obtenção heurística da equação mestra. Em seguida, consideramos a interação do campo com um átomo de dois níveis, modelada pelo Modelo de Jaynes-Cummings, e sob a dissipação da cavidade, com enfoque na dinâmica da inversão de população. A partir de expressões aproximadas para a dinâmica deste sistema, aplicamos resultados prévios para análise da inversão de população. Repetimos a análise para a dinâmica do sistema sob o protocolo de eco, que consiste em reverter a dinâmica do sistema pela aplicação de um pulso elétrico no átomo.

Sumário

1	Introdução	3
2	Conceitos Básicos em Sistemas Quânticos Abertos	7
2.1	Operador Densidade	7
2.1.1	Propriedades e Interpretação do Operador Densidade	10
2.1.2	Exemplos	12
2.1.3	Operador Densidade para Partículas	13
2.1.4	Representação de Wigner	14
2.2	Sistemas Compostos	15
2.2.1	Produto Tensorial	16
2.2.2	Estado Reduzido	17
2.2.3	Emaranhamento	18
2.3	Dinâmica de Sistemas Abertos	19
2.3.1	Decoerência	22
3	Campo Eletromagnético Quantizado em uma Cavidade à Temperatura Nula	27
3.1	Estados Coerentes e Representação P	27
3.1.1	Estado Coerente de um Oscilador Harmônico	28
3.1.2	Representação P	30
3.2	Campo Eletromagnético Quantizado	31
3.3	O Modelo “Padrão” e Sua Subsequente Equação Mestra	34
3.3.1	A Equação Mestra	35
3.3.2	Decoerência à temperatura Nula	36
3.3.3	Solução da Equação Mestra à Temperatura Finita: Equação de Fokker-Planck para a Representação P	39
3.4	Solução da Dinâmica do Oscilador à Temperatura Nula	41

3.4.1	Decaimento de um Átomo de Dois Níveis	42
3.4.2	Diagonalização de Fano	44
3.4.3	Visualização Gráfica dos Auto-Valores	48
3.4.4	Evolução do Estado Inicial	48
3.4.5	Decoerência de Estados de Gato	51
4	Reversão Temporal em um Experimento de Cavidade Óptica	54
4.1	O Modelo de Jaynes-Cummings	54
4.1.1	Soluções Exatas do MJC	57
4.2	Aproximações do MJC	63
4.2.1	Dissecando as Oscilações de Rabi	63
4.2.2	As Aproximações de Banacloche	65
4.3	MJC Dissipativo	71
4.3.1	Testando a Decoerência com Reversão Temporal	72
4.3.2	Descrição da Realização Experimental	73
4.3.3	As aproximações de Gea-Banacloche para o MJC Dissipativo	77
4.3.4	Reversão Temporal no Caso Dissipativo	86
4.3.5	Dissecando as Oscilações de Rabi no Caso Dissipativo (Antes do Pulso)	87
4.3.6	Dissecando as Oscilações de Rabi no Caso Dissipativo (Após o Pulso)	90
5	Conclusão	95

Capítulo 1

Introdução

O princípio da superposição e a existência de estados emaranhados são dois dos conceitos mais controversos e interessantes da mecânica quântica. É difícil oferecer uma noção puramente física destes conceitos, mas ambos têm formulação bastante simples em termos matemáticos. Suponha que possamos descrever um dado sistema físico por um espaço de Hilbert dotado de uma correspondência biunívoca entre elementos deste espaço e estados físicos, entendendo-se, como de praxe, que múltiplos de um mesmo elemento representam o mesmo estado. Da estrutura vetorial deste objeto surge o primeiro: dados dois estados físicos distintos de um sistema, estes terão dois elementos do espaço de Hilbert correspondentes a eles. Somando-se estes elementos obteremos um terceiro, que também deverá corresponder a um estado físico. O segundo surge quando exigimos descrever um sistema composto pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert de cada sistema individual. O espaço resultante poderá conter elementos que não podem ser escritos na forma produto (i.e., como produto de elementos de cada espaço), sendo estes elementos denominados estados emaranhados.

Certamente, as controvérsias e o interesse nestes dois conceitos não residem em sua formulação matemática, mas sim quando olhamos para os resultados de medidas que podem ser previstos conhecendo-se o elemento do espaço de Hilbert correspondente ao estado físico. Este seria o caso da tentativa de se aliar a existência de estados emaranhados com o princípio da localidade. Investigações dessa natureza foram realizadas pela primeira vez pelo trio EPR [1] (Einstein, Podolsky e Rosen) e refinadas posteriormente pelas desigualdades de Bell [2] e argumentos ainda mais fundamentais [4] que dispensam o uso de outros conceitos também controversos, como o de redução de estado em uma medida, e inclusive o uso de variáveis ocultas. Estes argumentos fazem uso apenas de princípios básicos da mecânica quântica, podendo ser formulados, por exemplo, em termos de sistemas de spin

e, portanto, a inconsistência não seria restrita à teoria quântica não-relativística. Mas é importante frisar que o conceito de localidade usado nestes argumentos é ligeiramente mais forte que o conceito de impossibilidade de propagação supraluminal de informação (ou sinais), conceito este certamente vital para a teoria da relatividade e que é, de fato, compatível com a mecânica quântica [5].

Já o princípio da superposição leva a diversos fenômenos inconcebíveis classicamente, como os experimentos de interferência entre partículas massivas, os estados atômicos “escuros”, etc. Mas quando olhamos para o mundo “clássico” uma pergunta surge: porque raramente observamos determinados estados de superposição em sistemas macroscópicos? Por exemplo, porque nunca foi possível preparar e medir um estado de uma partícula muito massiva formado pela superposição de dois estados “localizados” (e.g, estados coerentes) em pontos distintos? De maneira mais fundamental, essa é uma pergunta que deve ser respondida se pretendemos entender a física clássica como um caso limite da física quântica. Recentemente, uma resposta razoável e elegante foi dada a essa pergunta, tendo como uns de seus principais pioneiros W. H. Zurek, E. Joos e H. D. Zeh (ver o clássico artigo de revisão [6] e o livro *The emergence of a Classical World from Quantum Theory* [7]) e repousa na idéia de que sistemas macroscópicos em geral interagem fortemente com o seu ambiente, ou seja, é fundamental considerá-los como sistemas quânticos abertos. Essa estratégia para obter esse aspecto do limite clássico é comumente denominada o “Programa de Decoerência”. Neste contexto, é necessário utilizar um formalismo um pouco mais geral do que o que foi mencionado acima, pois incertezas clássicas certamente irão surgir quanto ao estado do sistema, ou seja, devemos acrescentar certas probabilidades aos resultados de medida, mas que são devidas somente à ausência de um conhecimento completo a respeito do sistema. Como veremos mais adiante, para incluir essas incertezas clássicas, devemos representar o estado de um sistema por operadores do espaço de Hilbert associado ao sistema. O ponto é que, com base neste formalismo e através de modelos bastante simples para representar o “ambiente” e sua interação com um sistema macroscópico, é possível prever que estados de superposição do tipo mencionado acima, mesmo que fossem preparados, teriam um tempo de vida extremamente curto, no sentido de que as probabilidades essencialmente quânticas dariam lugar para probabilidades clássicas.

Enfim, vemos que vários problemas teórico-conceituais em Física estão fortemente relacionados ao princípio de superposição e ao emaranhamento em mecânica quântica, mas os interesses nestes conceitos não param por aí, pois já são bem conhecidas as aplicações da mecânica quântica em problemas práticos e em tecnologia. Recentemente mais um ramo da física, a computação quântica, se juntou ao panteão das possíveis aplicações da mecânica quântica e justamente, as principais novidades que a quântica traz à computação

são os estados de superposição e/ou emaranhados. Diversos problemas em computação admitem algoritmos quânticos muito mais rápidos do que os correspondentes clássicos [8] com a utilização destes estados. Mas um grande “vilão” se impõe à realização prática de computadores quânticos, e é exatamente o “ambiente” ao qual qualquer sistema está submetido e que irá introduzir incertezas indesejadas aos sistemas quânticos que constituiriam o hipotético computador. A grande dificuldade é otimizar o isolamento e a acessibilidade ao sistema pois, em geral, a melhora de um implica na piora do outro. De qualquer forma, o entendimento de sistemas quânticos sob interação com um “ambiente” ou, simplesmente, um sistema quântico aberto, deixou de ter apenas interesses teóricos-conceituais, para se tornar uma peça chave em aplicações tecnológicas.

É neste contexto então que nosso trabalho se situa. Iremos exhibir considerações teóricas a respeito de uma importante classe de experimentos realizados recentemente: a interação de átomos de Rydberg (átomos que podem ser considerados de dois níveis e com longo tempo de vida) com campos eletromagnéticos quantizados imersos em cavidades ópticas de alto fator de qualidade. Estes experimentos têm servido ao esclarecimento de diversos pontos intrincados da mecânica quântica, como: a realização de estados emaranhados entre níveis de energia de átomos espacialmente bem separados [9]; emaranhamento entre átomo e campo [10]; formação de estados de superposição de campos coerentes mesoscópicos distintos e sua subsequente decoerência [11]; a observação experimental do princípio da complementaridade [12], etc. Nesta classe de experimento, a dissipação do campo pelas imperfeições da cavidade, embora bem otimizada, nem sempre pode ser desprezada. Iremos então revisar o modelo padrão para a descrição dessa dissipação bem como seu método usual de solução. Ademais, iremos expor uma nova abordagem do problema para um caso particular que, apesar de se aplicar em situações mais restritivas, conta com a vantagem de ser obtida com base em hipóteses muito mais claras do que as assumidas na abordagem padrão.

Um procedimento comum nesta classe de experimentos consiste da passagem de um único átomo de Rydberg em uma cavidade contendo um campo coerente. O modelo usual para lidar com este sistema prevê os famosos colapsos e ressurgimentos das oscilações de Rabi da inversão de população, mas ocorre que a dissipação da cavidade é significativa o suficiente para dificultar enormemente a observação até do primeiro ressurgimento. Como a inversão de população é o único observável deste sistema que pode ser medido diretamente, essa dificuldade impõe uma barreira para se dizer, após o colapso, em qual grau a dinâmica do sistema é ainda unitária e reversível (sendo esse o tipo de dinâmica necessária para a realização de algoritmos quânticos). Em um experimento realizado por *Meunier et al.* [13], os autores fizeram uso de um “truque” para sanar essa dúvida: logo após o

colapso, um pulso de π é aplicado ao átomo. De acordo com a parte unitária da dinâmica do sistema, haverá uma reversão temporal do estado do sistema como um todo, de modo que as oscilações iniciais iriam ressurgir, ou seja, o pulso iria induzir um ressurgimento. De fato, isso foi observado, mas o ressurgimento induzido conta com um amortecimento significativo. Nesta dissertação iremos exibir soluções aproximadas para a dinâmica deste sistema com o pulso aplicado e dissipação, bem como o cálculo de certas grandezas de interesse associadas às oscilações de Rabi, como os tempos, larguras, frequências e amplitudes de cada ressurgimento.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma. No capítulo 2, *Sistemas Quânticos Abertos*, revisamos alguns conceitos e técnicas básicas na teoria de sistemas abertos que serão utilizados nos dois capítulos posteriores. No capítulo 3, *Dissipação em Cavidades Ópticas à Temperatura Nula* iremos expor a abordagem padrão para esse problema e uma nova, de nossa autoria. No capítulo 4, *Reversão Temporal em um Experimento de Cavidade Óptica* serão apresentadas soluções aproximadas para a dinâmica de um átomo de Rydberg interagindo com um campo coerente mesoscópico, na presença de dissipação e de um pulso π aplicado ao átomo em um instante arbitrário. No capítulo 5, finalmente, expomos nossas considerações finais.

Capítulo 2

Conceitos Básicos em Sistemas Quânticos Abertos

Iremos introduzir alguns conceitos vitais em teoria de sistemas quânticos abertos e que serão constantemente utilizados ao longo do trabalho. Na primeira seção iremos discutir a introdução de probabilidades clássicas em mecânica quântica através do formalismo de matrizes densidade, primeiro passo para a descrição de um sistema aberto. Em seguida, definiremos o objeto matemático utilizado para a descrição de sistemas compostos, outro passo certamente fundamental, já que sistemas abertos são, por excelência, compostos, constituídos por um sistema de “interesse” e um ambiente (ou reservatório). Finalmente, iremos discutir conceitos importantes na dinâmica de sistemas abertos em si, como a noção de mapas dinâmicos, equações mestras e o fenômeno de decoerência.

2.1 Operador Densidade

Como mencionado anteriormente, a matriz densidade, também denominada por operador densidade, possibilita a inserção de probabilidades clássicas em sistemas quânticos. Isso certamente será vital para a descrição de sistemas abertos, visto que nesta expressão queremos dizer que nosso sistema de interesse está interagindo com um segundo sistema do qual não temos toda as informações. Dito de outra forma, não teremos acesso ao estado do sistema como um todo, mas apenas da parte de interesse.

Mesmo em sistemas isolados pode ser necessário o uso de operadores densidade, visto que o estado inicial do sistema pode estar sujeito a incertezas clássicas. A título de exemplo, considere uma amostra de gás hidrogênio imersa em um recipiente em condições de temperatura e pressão suficientes para que as moléculas possam ser consideradas distin-

guíveis. Sabemos que haverá uma certa proporção de moléculas no estado *orto* e outra no estado *para*. Se retirarmos uma molécula arbitrariamente desse recipiente e a inserirmos em um ambiente isolado, vemos que ela não poderá ser descrita exclusivamente pelo estado *orto* ou *para* e nem tampouco será a simples combinação linear dos dois estados, visto que a incerteza que temos a respeito ao estado da partícula é essencialmente clássica. Em outras palavras, o que acontece é que não tínhamos pleno conhecimento dos estados das moléculas no recipiente pois, em princípio, poderíamos determinar em um dado instante o estado de cada molécula individualmente no recipiente e acompanhar suas trajetórias posteriormente de forma que, quando retirássemos uma delas, saberíamos exatamente se estaria no estado *orto* ou *para*. É exatamente esse tipo de incerteza que um reservatório irá inserir em um sistema quântico pois não teremos pleno controle do reservatório, e essas incertezas irão ser transmitidas ao sistema a medida que interagirem. Esse exemplo ilustra então, a necessidade de um objeto um pouco mais geral para a descrição de sistemas abertos.

No que se segue, $\mathcal{H}$ denota um espaço de Hilbert separável, o que quer dizer: um espaço vetorial complexo, dotado de produto interno, completo e separável. Isso tudo nos garante que o espaço possui bases ortonormais, no máximo enumeráveis, e que, dada uma base ortonormal $B = \{|\phi_n\rangle\}$, qualquer vetor de $\mathcal{H}$ admitirá uma representação:

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle, \quad \text{com} \quad \sum_n |a_n|^2 < \infty. \quad (2.1)$$

Também adotaremos a notação para a norma de um vetor:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

Agora considere um sistema que possa ser descrito por tal espaço. Admita, como no exemplo anterior, que não saibamos exatamente qual o vetor do espaço associado a ele mas sabemos, no entanto, que o sistema tem certas probabilidades de se encontrar nos estados da base ortonormal B . Em outras palavras, existem números reais p_n satisfazendo: $0 \leq p_n \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$, $\sum_n p_n = 1$, e tal que p_n representa a probabilidade de se encontrar o sistema no estado $|\phi_n\rangle$. Agora, dado qualquer observável representado pelo operador auto-adjunto A , esperamos que o valor esperado desse observável (que nos daria a média do resultado de infinitas medidas efetuadas sobre um ensemble destes sistemas) tenha a forma:

$$\langle A \rangle_{\text{estado}} = \sum_n p_n \langle A \rangle_n, \quad (2.2)$$

onde $\langle A \rangle_n = \langle \phi_n | A | \phi_n \rangle$ é o valor esperado do observável no estado $|\phi_n\rangle$. Quer dizer, essa expressão nos diz que o valor esperado do observável seria a média dos valores esperados

de cada estado $|\phi_n\rangle$, ponderada pelas respectivas probabilidades p_n , o que é uma definição extremamente razoável.

Usando a representação (2.1) para um vetor de $\mathcal{H}$, podemos definir os operadores lineares ρ e $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ pelas prescrições:

$$\begin{aligned}\rho|\psi\rangle &= \sum_n a_n p_n |\phi_n\rangle, \\ (|\psi_1\rangle\langle\psi_2|)|\psi\rangle &= (\langle\psi_2|\psi\rangle) \cdot |\psi_1\rangle.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Vemos que ρ pode ser definido em todo $\mathcal{H}$ pois $\sum_n p_n^2 |a_n|^2 \leq \sum_n |a_n|^2 = \|\psi\|^2 < \infty$ e portanto o lado direito de (2.3) está bem definido e, mais do que isso, é limitado e admitirá a norma

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1} \{\|A|\psi\rangle\|\}.\tag{2.4}$$

Claramente, argumentos análogos valem para $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$. Ademais, é fácil ver que ρ é auto-adjunto e definido não-negativo, i.e, para todo $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ pertencentes a $\mathcal{H}$, valem as propriedades:

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\rho\psi_2\rangle &= \langle\rho\psi_1|\psi_2\rangle, \\ \langle\psi_1|\rho\psi_1\rangle &\geq 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Também não é difícil mostrar que ρ admite a representação:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \\ 0 \leq p_n \leq 1, \quad \sum_n p_n &= 1,\end{aligned}\tag{2.6}$$

no sentido de que $\|\rho - \sum_{n=1}^k |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Se o espaço é de dimensão infinita, esse resultado implica que ρ , além de ser limitado, é compacto, i.e, leva conjuntos limitados em compactos, pois é o limite de operadores compactos (os operadores $\sum_{n=1}^k |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ são trivialmente compactos uma vez que suas imagens têm dimensão finita).

Antes de retomar o fio, precisaremos de mais uma definição. Um operador linear é dito de classe traço se, dada uma base ortonormal qualquer $B' = \{|\phi'_n\rangle\}_n$, a série $\sum_n \langle\phi'_n|A|\phi'_n\rangle$ converge absolutamente. O valor para o qual ela converge é denominado traço do operador A , denotado por $\text{Tr}(A)$, e não é difícil ver que o traço independe da base escolhida. Com base nisto, e escolhendo a base B mencionada acima, obtemos facilmente que o operador ρ é de classe traço e $\text{Tr}(\rho) = 1$. Finalmente, podemos observar que o valor esperado da Eq. (2.2) pode ser escrito na forma:

$$\langle A \rangle_{estado} = \text{Tr}(A\rho).$$

Como esse operador nos permite calcular o valor esperado de qualquer observável, ele aparece então como a escolha natural para representar o estado físico do sistema. Agora, dado qualquer operador auto-adjunto e de classe traço, pode-se mostrar que ele será também compacto (pelo fato de ser de classe traço), e o teorema espectral para a classe de operadores compactos nos diz que eles admitem uma representação da forma (2.6) mas com p_n sendo números reais arbitrários. Se acrescentarmos que o operador deve ser definido não-negativo e de traço 1 teremos também $0 \leq p_n \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$ e $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

Portanto, qualquer operador satisfazendo todas essas propriedades pode ser colocado na forma (2.6) e pode ser interpretado como um estado físico. A esses operadores damos o nome operadores densidade ou matrizes densidade e constituem a generalização para estados quânticos que possuem também incertezas clássicas. É importante mencionar que em muitas aplicações não se exige que o operador densidade seja de classe traço, mas que seja apenas auto-adjunto e definido não-positivo. Isso, no entanto, não é muita novidade, já que em diversas ramificações mais tradicionais da mecânica quântica como, por exemplo, a teoria de espalhamento, é comum se deparar com “funções de onda” não normalizáveis, ou seja, que não pertencem ao espaço de Hilbert que descreve as partículas. Em particular, o operador densidade associado a essas funções não será de classe traço. Deve-se entender, é claro, tais objetos apenas como boas aproximações ao real estado do sistema e que são suficientes para computar a maioria dos observáveis de interesse.

2.1.1 Propriedades e Interpretação do Operador Densidade

Se um dado sistema tem probabilidade 1 de se encontrar em um estado $|\psi\rangle$, dizemos que o estado é *puro* e sua representação como operador densidade será simplesmente $|\psi\rangle\langle\psi|$. Agora, dado um operador densidade arbitrário, diremos que ele é puro se pode ser colocado nesta forma mediante uma transformação unitária (que será exatamente a transformação que diagonaliza o operador) caso contrário o operador, ou estado, é denominado *misto*. Essa caracterização dos operadores em *puros* ou *mistos* pode ser feita, no entanto, mediante um critério mais simples computando-se o traço do quadrado do operador. Assumindo que o operador é de classe traço, ele terá a representação (2.6) e seu quadrado terá a forma:

$$\rho^2 = \sum_n p_n^2 |\phi_n\rangle\langle\phi_n|.$$

Isso nos leva a desigualdade:

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_n p_n^2 \leq \sum_n p_n = \text{Tr}(\rho) = 1,$$

valendo a igualdade se, e somente se, $p_{\bar{n}} = 1$ para algum $\bar{n}$ e $p_n = 0$ para $n \neq \bar{n}$. Em outras palavras, o estado é puro se, e somente se, o traço de seu operador densidade ao quadrado é 1. Baseado nisso, define-se o *índice de mistura* de uma estado qualquer pela expressão:

$$\delta(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2). \quad (2.7)$$

Obviamente, δ é zero se, e somente se, o estado for puro. Se o espaço de Hilbert tiver dimensão finita N , ele assumirá seu valor máximo no estado $\rho = \frac{1}{N}I_N$, onde I_N representa a matriz identidade, e teremos $\delta(\rho) = \frac{N-1}{N}$. Em dimensão infinita δ poderá assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1)$ e não terá um ponto de máximo.

Dado qualquer operador densidade ρ e um observável A que admita um conjunto ortonormal de auto-vetores $B = \{|\phi_n\rangle\}$, podemos interpretar ρ em termos dos elementos de matriz $\rho_{ij} = \langle\phi_i|\rho|\phi_j\rangle$. Vemos então que os elementos da diagonal nos dão a probabilidade de medirmos no sistema um determinado auto-valor A_i de A , pois essa probabilidade é dada por $\text{Tr}(\rho|\phi_i\rangle\langle\phi_i|) = \rho_{ii}$ onde $|\phi_i\rangle$ é o auto-vetor de A_i . Por isso, esses elementos são denominados as *populações* de ρ na base B . Inclusive, esses elementos já são suficientes para computar o valor esperado de qualquer potência de A :

$$\langle A^n \rangle_\rho = \sum_n A_i^n \rho_{ii},$$

o que nos permitiria calcular, por exemplo, os desvios de qualquer ordem desse observável. De maneira mais ampla, qualquer observável que comute com A pode ser computado conhecendo-se as *populações* do estado nesta base. Obviamente, se quisermos computar os valores esperados de um observável qualquer teremos que conhecer todos os elementos de matriz. Dito de outra forma, dado um observável A' que não comuta com A , seu valor esperado pode depender também dos elementos de fora da diagonal ρ_{ij} , com $i \neq j$:

$$\langle A' \rangle_\rho = \sum_{n,m} \langle\phi_n|A|\phi_m\rangle \rho_{mn}$$

por isso, são denominados as *correlações* de ρ na base B , já que são necessários para descrever resultados de medidas de dois observáveis que não comutam entre si. Fenômenos de interferência do observável A' são frequentemente associados a sua dependência com relação a termos da forma $\langle\phi_i|A|\phi_j\rangle$, com $i \neq j$, o que só poderá ocorrer se o respectivo ρ_{ji}

for diferente de zero. Em vista disso, estes termos são também denominados *coerências*. É bom enfatizar que as populações e correlações são conceitos dependentes de base pois, por exemplo, sempre podemos “matar” as correlações escolhendo a base que diagonaliza o operador.

Denotando por $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ o conjunto de todos os operadores densidade, vemos que o mesmo estará contido num espaço de Banach, i.e, o conjunto de todos os operadores lineares contínuos definidos no espaço $\mathcal{H}$ em questão. Mas, de maneira mais geral, o conjunto também estará contido no espaço de Hilbert-Schmidt, formado pelo conjunto de todos os operadores lineares tais que $A^\dagger A$ é de classe traço. Esse espaço é na verdade um espaço de Hilbert sob o produto interno $\langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$. Resulta, no entanto, que em ambos espaços o conjunto dos operadores densidade é fechado.

Outro ponto, este mais trivial e fácil de ser demonstrado, é que, independente de onde o situamos, $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ será convexo. Isto quer dizer que, dados números reais não-negativos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ cuja soma é um, e n operadores densidade $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, então a soma $\sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i$ resulta num operador densidade.

2.1.2 Exemplos

Gás de Hidrogênio:

Retornando ao exemplo do gás hidrogênio, suponha que tenhamos N_0 moléculas no estado *para* em um total de N . Se $p_0 = N_0/N$ vemos que o estado dos graus de liberdade internos das moléculas poderá então ser descrito pelo operador:

$$\rho = p_0 |\text{para}\rangle \langle \text{para}| + (1 - p_0) |\text{orto}\rangle \langle \text{orto}|.$$

Observe que esse estado é completamente distinto de um estado da forma:

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_0} |\text{para}\rangle + \sqrt{1 - p_0} |\text{orto}\rangle.$$

Claramente, este estado possui as mesmas probabilidades de se encontrar a molécula no estado *para* ou no estado *orto* mas eles não assumirão os mesmos valores para todos os observáveis.

Estado Térmico:

Para qualquer sistema com Hamiltoniano H pode-se definir o estado térmico à tempe-

ratura T da seguinte forma:

$$\rho_T = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tre}^{-\beta H}}. \quad (2.8)$$

onde $\beta = 1/k_B T$ e k_B a constante de Boltzmann. Para entender esse estado, basta representa-lo na base dos auto-estados $|E_n\rangle$ de H e obteremos:

$$\rho = \frac{\sum_n e^{-\beta E_n} |E_n\rangle \langle E_n|}{Z},$$

com $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$. Ou seja, é um estado tal que a probabilidade de encontra-lo no n -ésimo estado de energia é $p_n = e^{-\beta E_n}/Z$, analogamente aos estados em equilíbrio térmico da mecânica estatística. É interessante notar que, para um sistema cujo espaço é de Hilbert é de dimensão finita N , o estado térmico a temperatura infinita (com $\beta = 0$), corresponde ao estado com índice máximo de mistura $\frac{1}{N} I_N$.

2.1.3 Operador Densidade para Partículas

Vamos agora olhar para o caso específico de operadores densidade para N partículas em d dimensões, o que equivale a olhar para operadores com as mesmas propriedades definidas na seção anterior, porém, definidos no espaço $L_2(\mathbb{R}^{dN}, dx)$ (espaço das funções complexas definidas em $\mathbb{R}^{dN}$, e de quadrado integrável à Lebesgue). Como os operadores densidade serão, em particular, operadores de Hilbert-Schmidt (i.e, $\text{Tr} A^\dagger A < \infty$) eles irão admitir uma representação integral [16], quer dizer, existe uma função complexa $\tilde{\rho} \in L_2(\mathbb{R}^{2dN}, dx)$ tal que:

$$\rho\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^{dN}} \tilde{\rho}(x, y) \psi(y) dy, \quad (2.9)$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^{dN}$ e $\psi \in L_2(\mathbb{R}^{dN}, dx)$. Essa representação nos permite pensar a função $\tilde{\rho}$ como sendo o próprio operador densidade. De fato, podemos pensar que essa seria a representação do operador densidade na “base” dos “auto-estados” do operador posição das partículas

$$\tilde{\rho}(x, y) = \langle x | \rho | y \rangle$$

e $\tilde{\rho}(x, x)$ seria a densidade de probabilidade de encontrarmos as partículas nas posições dadas por x . Sendo um operador de classe traço e auto-adjunto, valem as seguintes propriedades para essa função:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho &= \int_{\mathbb{R}^{dN}} \tilde{\rho}(x, x) dx = 1, \\ \tilde{\rho}(x, y) &= \tilde{\rho}^*(y, x), \end{aligned}$$

e o valor esperado de qualquer observável A será:

$$\langle A \rangle = \int_{\mathbb{R}^{dN}} (A\rho)(x, x) dx,$$

supondo que $A\rho$ seja ainda um operador compacto.

2.1.4 Representação de Wigner

Como vimos na seção anterior, o operador densidade pode ser representado por uma função complexa com o dobro do número de variáveis reais que as funções originais (que seria a representação na base dos operadores de posição). Agora, existem várias transformações invertíveis do tipo $T : L_2(\mathbb{R}^{dN}, dx) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^{dN}, dx)$ que seriam igualmente adequadas para representar o estado. Por exemplo, poderíamos representá-lo na base dos operadores momentum das partículas, $\rho(p, p') = \langle p | \rho | p' \rangle$. Outra transformação bastante conhecida é a transformação de Wigner, que constitui um meio-termo entre as representações em momento e posição e é particularmente útil para o estudo de limite clássico pois, em geral, neste contexto, ela pode ser pensada como uma distribuição de probabilidades. Para simplificar a exposição, e por ser o caso mais estudado, iremos considerar apenas uma partícula de spin zero e massa m em uma dimensão. Neste caso ela pode ser definida como

$$\rho_W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \frac{1}{2}x | \rho | q + \frac{1}{2}x \rangle e^{ipx\hbar} dx, \quad (2.10)$$

e também pode ser obtida a partir da representação de momentum do operador

$$\rho_W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle p - \frac{1}{2}k | \rho | p + \frac{1}{2}k \rangle e^{ikx\hbar} dx. \quad (2.11)$$

Devido à simetria dessas fórmulas, dentre outros motivos, é que a representação de Wigner é considerada um meio-termo entre as representações de posição e momentum.

A generalização para N partículas e d dimensões é trivial, bastando considerar $x, p \in \mathbb{R}^{dN}$ e substituindo o fator $\frac{1}{2\pi\hbar}$ por $(\frac{1}{2\pi\hbar})^{dN}$. Uma propriedade importante da função de Wigner, e que sugere que seria uma quase-distribuição de probabilidade, é a de que a integração em uma de suas variáveis leva a distribuição de probabilidades na outra, i.e, vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_W dp = \langle x | \rho | x \rangle, \quad (2.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_W dx = \langle p | \rho | p \rangle. \quad (2.13)$$

Do fato de que o operador densidade é auto-adjunto, segue que ρ_W é real, no entanto, não necessariamente é não-negativa, o que impede a estrita interpretação de função de Wigner como uma distribuição de probabilidades. Neste sentido, os valores negativos assumidos pela função de Wigner seriam uma assinatura do caráter quântico do estado. Mas temos ainda mais um motivo que a torna *próxima* de uma distribuição. Podemos definir a transformação de Wigner para qualquer observável e o resultado será uma função real. Denotando por $A_W(q, p)$ a função de Wigner de um observável A , e sendo $V(\hat{q})$ e $K(\hat{p})$ operadores definidos como funções apenas dos $\hat{q}$ e $\hat{p}$, respectivamente, pode-se mostrar que valem as propriedades

$$\begin{aligned} V_W(q, p) &= V(q), \\ K_W(q, p) &= K(p), \end{aligned}$$

ou seja, a transformação de Wigner preserva a forma desses operadores. Agora, é possível mostrar que, para qualquer observável A , vale a igualdade

$$\langle A \rangle_\rho = \int dq dp \rho_W(q, p) A_W(q, p). \quad (2.14)$$

A semelhança dessa relação com a definição do valor esperado de um observável de um sistema clássico é evidente, tornando a função de Wigner de fato próxima de uma distribuição de probabilidades. Recomendamos as referências [6, 14, 15] para uma discussão mais detalhada sobre as propriedades da função de Wigner e sua conexão com o limite clássico.

2.2 Sistemas Compostos

Considere agora um sistema composto por diversos subsistemas tais que conhecemos os espaços de Hilbert de cada um (digamos, um conjunto de partículas de spin zero). A primeira pergunta que devemos fazer então é: qual o espaço de Hilbert que descreverá o sistema completo? Para motivar a definição, considere um sistema composto por dois subsistemas, X e Y , *não interagentes*, cada um com espaço de Hilbert de dimensão três. Tomando os auto-estados do Hamiltoniano de cada um, $\{|\phi_n\rangle\}_{n=1}^3$, $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1}^3$ para X e Y , respectivamente, podemos conceber todos os auto-estados de energia do sistema composto e que, ademais, devem ser ortogonais entre si, i.e, os estados $|\Psi_{i,j}\rangle$ em que o sistema X se encontra no estado $|\phi_i\rangle$ e Y no estado $|\psi_j\rangle$, cujas energias serão $E_i^X + E_j^Y$. Vemos então que o espaço de Hilbert do sistema total terá que ter dimensão nove, o produto das dimensões de cada espaço, e a condição de que eles sejam ortogonais pode ser obtida se considerarmos que

o produto interno entre os estados $|\Psi_{i,j}\rangle$ satisfaz $\langle\Psi_{i,j}|\Psi_{i',j'}\rangle = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'} = \langle\phi_i|\psi_{i'}\rangle \cdot \langle\phi_j|\psi_{j'}\rangle$. Como veremos adiante, isso motiva a definir então o espaço de Hilbert H_{X+Y} do sistema composto como o produto tensorial dos espaços de cada subsistema, i.e., $H_{X+Y} = H_X \otimes H_Y$.

2.2.1 Produto Tensorial

Há diversas formas de se construir o produto tensorial de um número *finito* de espaços de Hilbert, sendo nenhuma delas trivial, (o caso de um produto infinito é ainda mais intrincado) por isso não a faremos aqui, mas indicamos a Ref. [17] para uma exposição mais detalhada. Intuitivamente, dados os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N$, o produto tensorial entre eles conterá todas as combinações lineares possíveis entre elementos do tipo $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$, ou, em uma notação mais simples, $|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle$, onde $|\psi_i\rangle$ pertence a H_i . Ademais, dados dois elementos desse tipo $|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\rangle$ e $|\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_N\rangle$ o produto interno entre eles será:

$$\langle\psi_1|\psi'_1\rangle \cdot \langle\psi_2|\psi'_2\rangle \cdot \dots \cdot \langle\psi_N|\psi'_N\rangle. \quad (2.15)$$

Então, se os espaços $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N$ tem bases $\{|\phi_n^1\rangle\}, \{|\phi_n^2\rangle\}, \dots, \{|\phi_n^N\rangle\}$, respectivamente, o produto tensorial admitirá a base $\{|\phi_{n_1}^1, \phi_{n_2}^2, \dots, \phi_{n_N}^N\rangle\}$. Dados dois elementos arbitrários do espaço produto $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ eles poderão ser escritos como:

$$|\Phi_1\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_N} |\phi_{i_1}^1, \phi_{i_2}^2, \dots, \phi_{i_N}^N\rangle,$$

$$|\Phi_2\rangle = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N} \beta_{j_1, j_2, \dots, j_N} |\phi_{j_1}^1, \phi_{j_2}^2, \dots, \phi_{j_N}^N\rangle,$$

com $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_N}, \beta_{j_1, j_2, \dots, j_N} \in \mathbb{C}$ e $i_k, j_k \in \mathbb{N}$ de modo que podemos computar o produto interno entre eles pela relação:

$$\begin{aligned} \langle\Phi_1|\Phi_2\rangle &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_N}^* \beta_{j_1, j_2, \dots, j_N} \langle\phi_{i_1}^1|\phi_{j_1}^1\rangle \cdot \langle\phi_{i_2}^2|\phi_{j_2}^2\rangle \cdot \dots \cdot \langle\phi_{i_N}^N|\phi_{j_N}^N\rangle = \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_N}^* \beta_{i_1, i_2, \dots, i_N}, \end{aligned}$$

Alguns pontos merecem observação: (1) se todos os espaços do produto forem separáveis, o resultado é ainda um espaço separável; (2) se todos os espaços forem de dimensão finita o resultado é um espaço de dimensão finita, dada pelo produto das dimensões de cada espaço; e (3), no caso em que temos N partículas em d dimensões, cada uma descrita pelo $L_2(\mathbb{R}^d, dx)$, então o produto tensorial destes espaços será isomorfo ao $L_2(\mathbb{R}^{dN}, dx)$ que é o espaço usual para a descrição deste sistema.

Se tivermos N operadores que agem em cada espaço $A_1, A_2, \dots, A_N$ podemos definir um operador no espaço produto pela sua atuação nos elementos da base pela prescrição natural:

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_N) |\phi_n^1, \phi_n^2, \dots, \phi_n^N\rangle = |A_1 \phi_n^1, A_2 \phi_n^2, \dots, A_N \phi_n^N\rangle.$$

Em particular, os observáveis de cada sistema individual como a energia ou momento angular do i -ésimo sistema, podem ser escritos como:

$$I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes A_i \otimes \dots \otimes I_N,$$

onde I_k representa o operador identidade do k -ésimo espaço. Por exemplo, o Hamiltoniano do sistema descrito no exemplo do início desta seção seria dada por $H = H_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes H_2$, onde H_1 e H_2 seriam os Hamiltonianos de cada sistema, já que os subsistemas não interagem entre si.

Obviamente, podemos inserir incertezas clássicas em sistemas compostos da mesma forma que fizemos na seção anterior, bastando considerar o conjunto dos operadores densidade que agem no espaço produto.

2.2.2 Estado Reduzido

Vamos nos restringir a partir de agora, por simplicidade, a um sistema constituído por dois subsistemas, denominados $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, com espaços de Hilbert $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, de modo que o espaço de Hilbert do sistema composto é $\mathcal{H}_{A+B} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Considere um estado qualquer para o sistema composto, descrito pelo operador densidade ρ , mas suponha que estamos interessados apenas em computar observáveis restritos, digamos, ao sistema $\mathcal{A}$, i.e., observáveis da forma $A \otimes I_B$. Será que é possível obter, a partir de ρ , um operador densidade para o sistema $\mathcal{A}$ que nos permita calcular os valores esperados de todos esses observáveis? A resposta é sim, e a esse operador damos o nome de estado reduzido do sistema $\mathcal{A}$. Formulando de maneira mais precisa, estamos procurando uma aplicação $F : \mathcal{S}(\mathcal{H}_{A+B}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ onde $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ denota o conjunto dos operadores densidade definidos no espaço $\mathcal{H}$, e tal que F satisfaz: $\text{Tr}_A(A(F(\rho))) = \text{Tr}_{A+B}(A \otimes I_B \rho)$ para todo observável A . Para obter essa aplicação, precisamos primeiramente definir a noção de traço parcial. Considere uma base ortonormal $\{|\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle\}$ para o sistema composto, onde os vetores $\{|\phi_i^A\rangle\}$ e $\{|\phi_j^B\rangle\}$ constituem bases para os sistemas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. O traço parcial de um operador de classe traço O com relação ao sistema $\mathcal{B}$ é um operador do espaço do sistema $\mathcal{A}$ cujos elementos de matriz são dados por:

$$O_{i,j}^A = \langle \phi_i^A | O_A \phi_j^A \rangle \equiv \sum_k \langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_k^B | O | \phi_j^A \rangle \otimes | \phi_k^B \rangle$$

e essa operação é denotada por:

$$O_A = \text{Tr}_B(O).$$

Em particular, se O é um operador densidade, o resultado é um operador densidade no espaço do sistema $\mathcal{A}$, i.e., o traço parcial, restrito a $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{A+B})$, é uma aplicação do tipo $\text{Tr}_B : \mathcal{S}(\mathcal{H}_{A+B}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$. Agora observe que o valor esperado do observável $A \otimes I_B$ satisfaz:

$$\begin{aligned} \langle A \otimes I_B \rangle_\rho &= \text{Tr}(A \otimes I_B \rho) = \sum_{i,k} \langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_k^B | A \otimes I_B \rho | \phi_i^A \rangle \otimes | \phi_k^B \rangle = \\ &= \sum_{i,k} \langle A \phi_i^A | \otimes \langle \phi_k^B | \left(\sum_{j,k'} | \phi_j^A \rangle \otimes | \phi_{k'}^B \rangle \langle \phi_j^A | \otimes \langle \phi_{k'}^B | \right) \rho | \phi_i^A \rangle \otimes | \phi_k^B \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \phi_i^A | A \phi_j^A \rangle \left(\sum_k \langle \phi_j^A | \otimes \langle \phi_k^B | \rho | \phi_i^A \rangle \otimes | \phi_k^B \rangle \right) \\ &\equiv \sum_{i,j} A_{ij} \rho_{ji}^A \\ &= \text{Tr}_A(A \rho_A). \end{aligned}$$

onde $A_{ij} = \langle \phi_i^A | A \phi_j^A \rangle$ são os elementos de matriz de A . Enfim, o traço parcial satisfaz a propriedade desejada e, mais do que isso, é possível mostrar que será a única aplicação satisfazendo essa propriedade [18].

2.2.3 Emaranhamento

Como vimos anteriormente, o sistema composto admite, em particular, estados do tipo $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, denominados estados *produto* ou *separáveis*, que possuem interpretação física imediata, pois podemos pensar simplesmente que o sistema $\mathcal{A}$ se encontra no estado $|\psi_A\rangle$ e o sistema $\mathcal{B}$ no estado $|\psi_B\rangle$. Resulta ainda que um observável do sistema $\mathcal{A}$, i.e., um observável do tipo $A \otimes I_B$, é tal que seu valor esperado pode ser computado apenas com base no estado reduzido do sistema $\mathcal{A}$ (que seria o vetor $|\psi_A\rangle$), pois

$$\langle A \otimes I_B \rangle_{|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle} = \langle \psi_A \otimes \psi_B | A \otimes I_B \psi_A \otimes \psi_B \rangle = \langle \psi_A | A \psi_A \rangle = \langle A \rangle_{\psi_A}$$

o mesmo valendo para observáveis do sistema $\mathcal{B}$. De maneira geral, para qualquer observável da forma $A \otimes B$ vale

$$\langle A \otimes B \rangle_{|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle} = \langle A \rangle_{|\psi_A\rangle} \cdot \langle B \rangle_{|\psi_B\rangle},$$

e por isso dizemos que não há correlação entre as medidas do sistema $\mathcal{A}$ com as medidas do sistema $\mathcal{B}$ para este estado. É claro que, para um estado produto, essa relação valerá para todos os observáveis da forma $A \otimes B$. Agora, dado um estado ρ para o sistema composto podemos tomar os estados reduzidos $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$ e $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho)$ de cada sistema. Caso a relação

$$\langle A \otimes B \rangle_\rho = \text{Tr}(A \otimes B \rho) = \langle A \rangle_{\rho_A} \cdot \langle B \rangle_{\rho_B}$$

seja válida para todos observáveis da forma produto, pode-se demonstrar então que $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$. Isso nos mostra que não há qualquer tipo de correlações entre os dois sistemas se, e somente se, o estado é da forma produto. Claramente, se um estado é formado pela combinação convexa de estados produto, i.e, uma mistura estatística de estados não-correlacionados, ele terá correlações, mas que serão “locais”, no sentido de que podem ser construídas sem que haja interação direta entre os subsistemas, apenas correlacionando-os via comunicação clássica¹. Portanto, os estados que não podem ser escritos desta forma poderão correlações quânticas essencialmente não-locais entre os sistemas, e são denominamos *estados emaranhados*. Resumindo, um estado é *não-emaranhado* se não possui correlações ou se possui apenas correlações “locais”.

2.3 Dinâmica de Sistemas Abertos

Como foi dito anteriormente, a teoria de sistemas abertos consiste em descrever a dinâmica de um sistema de interesse S em “contato” com um segundo sistema R que, por sua vez, em geral, é considerado “grande” em algum sentido, sendo, por isso, denominado reservatório. Ou seja, o sistema total deve ser descrito por um Hamiltoniano da forma:

$$H = H_S + H_R + H_I, \quad (2.16)$$

onde, como a própria notação sugere, H_S seria o Hamiltoniano do sistema de interesse, H_R o do reservatório e H_I seria o da interação entre eles. Quando estamos lidando com estados iniciais puros, sabemos que a dinâmica do sistema será ditada pela equação de Schrodinger. Mas e se o estado inicial é *misto*? Ora, como vimos, qualquer estado inicial $\rho(0)$ pode ser

¹O que não implica, no entanto, que estas correlações sejam clássicas. Nas Refs. [19, 20] é discutido que mesmo os estados separáveis contém correlações que podem ser consideradas quânticas, através do conceito de *discórdia quântica*

colocado na forma:

$$\begin{aligned}\rho(0) &= \sum_n p_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \\ 0 \leq p_n &\leq 1, \quad \sum_n p_n = 1,\end{aligned}\tag{2.17}$$

e queremos que sua evolução seja dada por:

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_n(t)|,$$

onde $|\phi_n(t)\rangle$ é a solução da equação de Schrodinger com a condição inicial $|\phi_n\rangle$. Derivando a equação acima e utilizando que os $|\phi_n(t)\rangle$ são soluções da equação de Schrodinger

$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle,$$

obtém-se que ρ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)],\tag{2.18}$$

onde $[\bullet, \bullet]$ denota o comutador entre os operadores. Esta será, por definição, a equação que dita a dinâmica de operadores densidade. Claramente, se supusermos que $\rho(t)$ é estado puro, a equação é equivalente a equação de Schrodinger. É fácil mostrar que essa equação preserva tanto o traço de ρ como o traço de ρ^2 e, como vimos, isso implica, em particular, que se o estado inicial for puro ou misto ele preservará essa propriedade para todo t .

Em geral, a discussão da dinâmica de sistemas abertos se restringe a estados iniciais não-correlacionados entre o sistema S e o reservatório, i.e., um estado inicial da forma $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R$. Sob a ação do Hamiltoniano acima esse estado irá evoluir para um estado $\rho(t)$, não-necessariamente da forma produto. Se estamos considerando que a evolução começa a partir do instante t_0 , a dinâmica do sistema será então ditada por um família de operadores unitários $U(t_0, t)$ no espaço de Hilbert do sistema total, de modo que

$$\rho(t) = U(t_0, t) \rho(t_0) U^\dagger(t_0, t).$$

Se H é independente de t , $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$ e se H depende de t , $U(t, t_0)$ pode ser representado formalmente pela série de Dyson [21]. Na discussão que se segue supomos H independente de t .

Dizer que o sistema S é o sistema de interesse significa que queremos ser capazes de computar apenas seus observáveis, quer dizer, queremos obter, para cada instante de tempo

t , a matriz densidade $\rho_S(t) = \text{Tr}_R \rho(t)$. Fixado ρ_R podemos entender que essa dinâmica é dada por uma família de operadores $V(t_0, t) : \mathcal{S}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_S)$, denominada *mapa dinâmico*, de modo que:

$$\rho_S(t) = V(t, t_0) \rho_S(t_0),$$

ou seja,

$$V(t, t_0) \rho(t_0) = \text{Tr}_R[U(t_0, t) \rho(t_0) U^\dagger(t_0, t)].$$

Agora, a família $U(t, t_0)$ satisfaz as propriedades

$$U(t_1 + t_2, t_0) = U(t_1, t_0) U(t_2, t_0)$$

para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, e $U(t_0, t_0) = I$. Essas propriedades implicam, em particular, que se conhecemos o estado do sistema global em qualquer instante t , podemos conhecer todo o seu passado e prever todo seu futuro (pois a família $U(t, t_0)$ é determinada única e exclusivamente pelo Hamiltoniano). Mais do que isso, como os operadores são unitários e, portanto, inversíveis, fixado tempos t_1 e t_2 e se soubermos que em t_1 o estado do sistema é $\rho(t_1)$ então, em t_2 , a dinâmica associa um único estado $\rho(t_2)$, independentemente se t_1 é maior ou igual à t_2 . Isso significa que, se $t_1 < t_2$, então o sistema só poderá evoluir para este único $\rho(t_2)$ e se $t_1 > t_2$, o sistema só poderia estar neste único $\rho(t_2)$. No entanto, se soubermos apenas que, em um dado instante t_1 o estado de S é $\rho_S(t_1)$, não poderemos dizer, em geral, qual foi seu passado ou qual será seu futuro. Quer dizer, dado outro instante de tempo t_2 , maior ou igual a t_1 , essa informação não determina unicamente qual será o estado de S em t_2 . Resumindo, em geral não se pode associar uma dinâmica fechada para o estado reduzido ρ_S .

Um das abordagens para a dinâmica de sistemas abertos consiste em obter, a partir do Hamiltoniano H do sistema global e uma *série de aproximações*, uma equação fechada para o estado reduzido do sistema S , denominada *equação mestra*. Ademais, na maior parte dos casos, pode-se supor que a dinâmica é do tipo *Markoviana*. Isto quer dizer que o estado do sistema em um instante arbitrário de tempo determina todo seu *futuro* ou, dito de outra forma, não há efeitos de memória na dinâmica. Claramente, uma dinâmica unitária satisfaz essa propriedade e, portanto, é Markoviana. A diferença é que, em geral, o conhecimento do estado de um sistema Markoviano em um dado instante de tempo não nos garante que saibamos seu *passado*. Estes conceitos se refletem na seguinte propriedade do mapa dinâmico $V(t)$ (onde V está definido apenas para $t \geq 0$):

$$V(t_1)V(t_2) = V(t_1 + t_2) \tag{2.19}$$

para $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$.

Na maioria das situações a dinâmica Markoviana pode ser descrita por uma equação mestra da forma

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \mathfrak{L}\rho(t),$$

onde $\mathfrak{L}$ é um operador convexo-linear no espaço das matrizes densidade, denominado Liouvilliano, e a solução da equação pode ser escrita formalmente como

$$\rho(t) = e^{\mathfrak{L}t}\rho(0).$$

Existem várias deduções de equações mestras dependendo das aproximações utilizadas. A mais comum, e que será utilizada nesta dissertação, parte da hipótese de que a interação entre o sistema e seu ambiente seja fraca. Investigaremos no próximo capítulo equações mestras deste tipo.

2.3.1 Decoerência

Um dos efeitos mais comuns que podem ocorrer num sistema aberto, clássico ou quântico, é o decaimento, ou perda de energia do sistema para o seu ambiente. Em muitos casos, o decaimento da energia é exponencial e a taxa associada τ_R (o inverso da constante multiplicativa no argumento da exponencial) é denominada *tempo de decaimento* do sistema. Também como no caso clássico, efeitos difusivos, i.e., efeitos que levam ao aumento das incertezas (desvio padrão de observáveis) do sistema, podem ocorrer num sistema aberto quântico. Observe que efeitos difusivos normalmente implicam em transferência de energia entre sistema e reservatório, a diferença é que efeitos difusivos podem aumentar a energia do sistema, e efeitos de decaimento não levam ao aumento das incertezas de estados *típicos*. Em sistemas quânticos, pode-se distinguir ainda um terceiro efeito, independente dos anteriores, embora em geral concomitantes, chamado *decoerência*.

Como foi visto anteriormente, o índice de pureza de um sistema é constante sob a ação de uma dinâmica unitária. O mesmo, no entanto, não precisa ocorrer na dinâmica de um sistema aberto mas, pelo contrário, o ambiente tende a aumentar o índice de mistura do sistema de interesse de modo que estados inicialmente puros raramente “sobrevivem” à interação com o ambiente, i.e., tendem a se tornar uma mistura estatística. Especificamente, é comum se deparar com mapas dinâmicos que são “intolerantes” com determinados tipos de superposição *coerentes*. Por superposição *coerente*, entendemos simplesmente um estado formado pela combinação linear de estados puros e tal que os vetores que constituem essa soma formem um conjunto linearmente independente. Podemos tomar uma base para o espaço de Hilbert do sistema que contenha os vetores dessa soma e representar este estado

como uma matriz densidade nesta base. Sendo $\{|n\rangle\}$ esta base, então o estado admitirá uma representação:

$$\rho(0) = \sum_{n,m} c_{nm} |n\rangle \langle m|, \quad (2.20)$$

onde alguns c_{nm} com $n \neq m$ serão diferentes de zero, e a evolução sob um mapa dinâmico pode ser obviamente escrita na forma:

$$\rho(0) \rightarrow \sum_{n,m} c_{nm}(t) |n\rangle \langle m|. \quad (2.21)$$

Por “intolerância” do mapa dinâmico queremos dizer que os elementos fora-da-diagonal desta matriz irão decair *irreversivelmente* sob a ação do mapa, e o sistema irá tender a uma mistura estatística destes vetores. A esse processo é dado o nome *decoerência*. A decoerência pode ser *total* no sentido de que estes elementos tenderão a zero quando $t \rightarrow \infty$, i.e

$$\rho(0) \rightarrow \sum_n c_{nn} |n\rangle \langle n|. \quad (2.22)$$

A decoerência é chamada *parcial*, quando há um decaimento, mas não para zero. É possível também que apenas alguns elementos decaiam, e neste caso a decoerência seria restrita a um subespaço, sendo os subespaços restantes denominados *subespaços livres de decoerência*.

Em muitos casos o decaimento dos elementos fora-da-diagonal é exponencial e, por isso, é comum definir as funções reais $\Gamma_{nm}(t)$ por:

$$|c_{nm}(t)| = |c_{nm}| e^{\Gamma_{nm}(t)}, \quad (2.23)$$

que são chamadas *funções decoerência*. Ou seja, frequentemente,

$$\Gamma_{nm}(t) = -\lambda t, \quad (2.24)$$

onde λ pode depender inclusive do estado inicial do sistema. Já a constante $\tau_D = 1/\lambda$ é denominada *tempo de decoerência*.

Observe também que fenômenos quânticos de interferência de algum observável A em geral estão relacionados à dependência de seu valor esperado com termos da forma $\langle n|A|m\rangle$, com $m \neq n$. Se essa base de vetores for ortogonal, o processo de decoerência irá remover estes efeitos, levando o sistema a um estado mais “clássico”. Esse é o ponto chave que torna

a dinâmica de sistemas abertos importante para a compreensão do limite quântico-clássico, pois seria a candidata ideal para explicar o fato de que, no mundo clássico, determinados estados de superposição não ocorrem.

Este seria o caso, por exemplo, de um estado de uma partícula muito massiva formado de uma superposição de estados “localizados”, centrados em pontos espaciais distintos, i.e., um estado da forma:

$$\rho(0) = |\Psi\rangle \langle \Psi|, \quad (2.25)$$

com

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_0\rangle + |-x_0\rangle), \quad (2.26)$$

onde $|x_0\rangle$ e $|-x_0\rangle$ seriam estados de incerteza mínima, localizado em x_0 e $-x'_0$, respectivamente, e com momento nulo. A matriz densidade representada na base x terá quatro picos, dois ao longo da “diagonal” localizados em (x_0, x_0) e $(-x_0, -x_0)$ e dois fora-da-diagonal, localizados em $(-x_0, x_0)$ e $(x_0, -x_0)$.

O modelo típico para a descrição de uma partícula Browniana massiva em uma dimensão, quer dizer, em um ambiente que iria introduzir, ao mesmo tempo, decaimento e difusão, é implementado pela equação mestra de Caldeira-Legget [22]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - i\frac{\kappa}{\hbar}[x, \{p, \rho\}] - \frac{2m\kappa k_B T}{\hbar^2}[x, [x, \rho]]. \quad (2.27)$$

O primeiro termo desta equação descreve sua evolução livre: a soma dos termos cinético e potencial. O segundo termo é o responsável pelo decaimento, pois é análogo ao termo devido à força de fricção no caso clássico, bastando olhar para a equação diferencial que descreve a evolução do valor esperado do momentum da partícula:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle - 2\kappa \langle p \rangle.$$

O segundo, além de ser o termo difusivo, também será responsável pela decoerência dos estado (2.25). De fato, *caso esse termo seja dominante* na dinâmica, a evolução terá a forma[23]:

$$\rho(t) = e^{-\lambda(x-x')^2 t} \rho(0, x, x') \quad (2.28)$$

onde $\lambda = 2m\kappa k_B T/\hbar^2$. A equação acima nos mostra que com a evolução, e devido a decoerência, a matriz densidade se tornará aproximadamente “diagonal” (ver figura 2.1) e podendo, a partir daí, ser interpretada como uma densidade de probabilidade clássica de se encontrar a partícula.

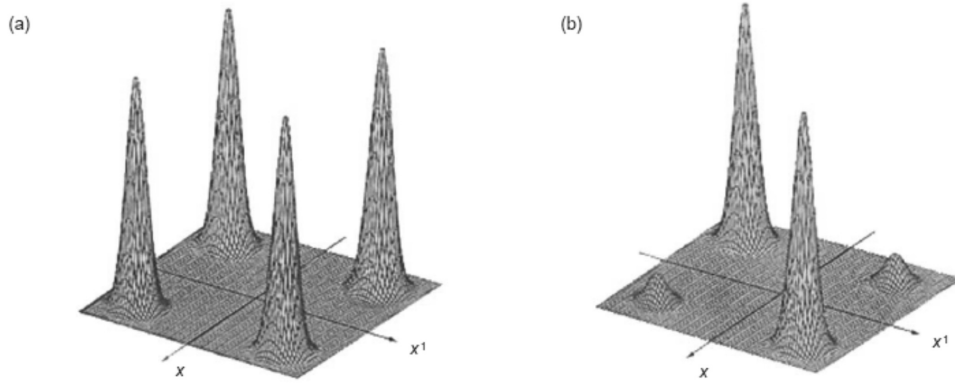


Figura 2.1: Decaimento dos elementos fora-da-diagonal da matriz densidade sob a ação do termo difusivo. a) Estado inicial da partícula contendo os picos fora-da-diagonal caracterizando a superposição. b) Decaimento rápido desses picos sob a ação da decoerência (figura retirada da Ref. [6]).

É interessante notar que o tempo de decoerência $\tau_D = \hbar^2/2\kappa m k_B T (\Delta x)^2$ dos picos fora-da-diagonal decresce com a massa da partícula e com $\Delta x = x_0 - x'_0$, condizendo com a idéia do limite clássico: partículas mais massivas devem ser mais clássicas e superposições de dois estados “localizados” separados substancialmente não são tolerados.

Outra característica interessante é a razão entre os tempos de decoerência e relaxamento:

$$\tau_D/\tau_R = \left(\frac{\hbar}{\Delta x \sqrt{2m k_B T}}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_{dB}}{\Delta x}\right)^2, \quad (2.29)$$

onde λ_{dB} é o comprimento de onda térmico de de Broglie. Para situações típicas de temperatura, massa de partícula e distâncias macroscópicas, o tempo de decoerência será substancialmente mais rápido que o tempo de relaxamento. Tal resultado é considerado uma “thumb rule” em sistemas abertos: quando tomamos uma superposição de estados, a razão entre os tempos de decoerência e relaxamento será tanto maior quanto mais clássicos e distinguíveis forem os estados que compõem a superposição. Realmente, inserindo valores típicos para essa razão: $m = 1\text{g}$, $T = 300\text{K}$, $\Delta x = 1\text{cm}$, obtemos $\tau_D/\tau_R \approx 10^{-40}!$, quer dizer, mesmo que o tempo de relaxamento fosse da ordem da idade do universo, aproximadamente 10^{17}s , o tempo de decoerência seria 10^{-23}s , um intervalo de tempo virtualmente instantâneo.

Um estudo mais realístico de decoerência foi realizado por Zeh e Joos [24] onde foi considerada a decoerência de estados da forma (2.25) para o caso em que a partícula está sujeita a colisões com partículas de um determinado ambiente, como a atmosfera

terrestre, a radiação emitida pelo Sol e vários outros. Esse estudo, no entanto, não foi feito simplesmente por equações mestras, mas por um misto de teoria de espalhamento e teoria de sistemas abertos. Seguem abaixo as estimativas obtidas para os tempos de decoerência em diversas situações. Estes resultados nos mostram que um “grão de poeira”, ou qualquer partícula razoavelmente massiva, mesmo em condições ideais como no “vácuo” espacial, teria de se comportar classicamente no sentido que essas superposições iriam perder sua coerência rapidamente. Nos próximos dois capítulos iremos nos deparar com mais exemplos de decoerência e estudá-los com mais detalhe.

	$a = 10^{-3}cm$	$a = 10^{-5}cm$	$a = 10^{-6}cm$
radiação de fundo	10^6	10^{12}	10^6
fótons a 300K	10^{19}	10^{-6}	10^{-12}
luz do Sol (na Terra)	10^{21}	10^{17}	10^{13}
moléculas de ar	10^{36}	10^{32}	10^{30}
vácuo de laboratório (10^3 part./cm ³)	10^{23}	10^{19}	10^{17}

Figura 2.2: Taxa de decoerência λ (em cm^2s^{-1}) para partículas de tamanhos (a) e em ambientes distintos (figura retirada da Ref. [24]).

Capítulo 3

Campo Eletromagnético Quantizado em uma Cavity à Temperatura Nula

Neste capítulo iremos discutir a dissipação de um modo de campo eletromagnético devido à imperfeições da cavidade que o aprisiona. Para cavidades com dissipação moderada, há um modelo fenomenológico padrão que a descreve, supondo que o Hamiltoniano da cavidade seria constituído por um conjunto de osciladores harmônicos, que representariam os modos de campo que escapam da cavidade. Como o interesse primordial é entender o comportamento do campo, e não da cavidade, a abordagem usual é obter, por procedimentos mencionados no capítulo anterior, uma equação mestra para a dinâmica do campo. A equação resultante permite-nos estudar os efeitos da temperatura da cavidade na dissipação do campo (na dedução da equação toma-se para a cavidade um estado de equilíbrio térmico) e pode ser facilmente resolvida para quaisquer condições iniciais. No entanto, para o caso em que a cavidade se encontra inicialmente à temperatura nula e o campo em um estado coerente, uma outra abordagem é possível, sem passar pelas hipóteses não-fundamentadas da dedução heurística da equação mestra, e que também nos permite computar a dinâmica em regimes não-Markovianos. Iremos expor primeiramente, no que se segue, algumas preliminares, a abordagem padrão, via equação mestra, e depois, essa nova abordagem.

3.1 Estados Coerentes e Representação P

Nesta seção iremos relembrar a definição de estados coerentes, dos operadores de criação e destruição, e definir mais um exemplo de representação de operadores densidade, a

representação P ou representação por estados coerentes. Ela é particularmente útil para lidar com estados coerentes e valores esperados de operadores de criação e destruição e será usada para obter a solução da equação mestra para um campo em uma cavidade à temperatura finita.

Seja $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ uma base ortonormal para um espaço de Hilbert de dimensão infinita. Para um $\alpha \in \mathbb{C}$ qualquer definimos o estado:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3.1)$$

denominado *estado coerente* e sendo α o *parâmetro de coerência* ou *amplitude* (termo geralmente utilizado quando estamos pensando em campos eletromagnéticos). Introduzido na década de 60 por Glauber[26], os estados coerentes têm sua origem na óptica quântica. Neste contexto os elementos desta base seriam os estados de Fock, ou auto-estados do operador que mede o número de fótons de um modo de campo eletromagnético quantizado. A luz gerada por lasers pode ser descrita por um estado coerente e pode-se mostrar que uma corrente clássica também gera um campo coerente. Da definição segue imediatamente que o produto interno entre dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ será

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta}. \quad (3.2)$$

Lembremos também a definição dos operadores de destruição e criação, a e $a^\dagger$:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ para } n > 0, & a|0\rangle &= 0, \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned}$$

Vê-se imediatamente então que $|\alpha\rangle$ é um auto-vetor de a com auto-valor α . Podemos também escrever um estado coerente na forma

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle,$$

onde o operador $D(\alpha)$, chamado *operador deslocamento* (mais adiante veremos o porque do nome), é definido por

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}.$$

3.1.1 Estado Coerente de um Oscilador Harmônico

Uma situação típica onde encontramos estados coerentes e operadores de criação e destruição como definimos acima é a de um oscilador harmônico em uma dimensão. Sendo

x e p os operadores de posição e momentum da partícula, m e ω sua massa e frequência, é bem conhecido que os operadores definidos por

$$a = \frac{q + iw}{\sqrt{2}}, \quad (3.3)$$

$$a^\dagger = \frac{q - iw}{\sqrt{2}}, \quad (3.4)$$

onde

$$q = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x, \quad (3.5)$$

$$w = \left(\frac{1}{m\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}} p, \quad (3.6)$$

são os operadores de criação e destruição dos auto-estados do Hamiltoniano do oscilador harmônico:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2.$$

O estado fundamental deste Hamiltoniano (o estado que é aniquilado pelo operador destruição) na representações dos operadores posição e momentum adquire a forma

$$\begin{aligned} \langle x|0\rangle &= \psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}, \\ \langle p|0\rangle &= \phi_0(p) = \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}\sigma'}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{\sigma'}\right)^2}, \end{aligned}$$

onde $\sigma = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ e $\sigma' = \hbar/2\sigma$. É trivial verificar que os valores esperados da posição e do momentum são nulos, i.e.

$$\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0.$$

Como sabemos, esse é um pacote de onda mínimo, i.e., esse estado minimiza a relação de incerteza de Heisenberg

$$\sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle} \sqrt{\langle (p - \langle p\rangle)^2\rangle} = \Delta x \Delta p = \sigma \sigma' = \frac{\hbar}{2}.$$

Agora, se definirmos

$$\alpha = \frac{m\omega x_0 + ip_0}{\sqrt{2\hbar m\omega}},$$

então o operador deslocamento $D(\alpha)$, aplicado neste estado, levará ao estado coerente $|\alpha\rangle$ que, nas bases x e p , terá as formas

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{p_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2} \quad (3.7)$$

$$\langle p|\alpha\rangle = \phi_\alpha(p) = \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}\sigma'}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}e^{-i\frac{p}{x_0}}\left(\frac{p-p_0}{\sigma'}\right)^2}, \quad (3.8)$$

i.e., o operador deslocamento preserva as incertezas do estado fundamental mas desloca os valores esperados de posição e momentum da partícula para x_0 e p_0 , respectivamente, daí o nome operador deslocamento. Enfim, na base dos auto-estados de um oscilador harmônico, um estado coerente nada mais é do que um estado que minimiza a relação de incerteza de Heisenberg em x e p . É interessante também tomar a representação de Wigner (2.10) de tais estados

$$\rho_W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\left(\frac{q-q_0}{\sigma}\right)^2} e^{-\left(\frac{p-p_0}{\sigma'}\right)^2}. \quad (3.9)$$

Vê-se que a função é não-negativa em todos os pontos e é simplesmente o produto das distribuições de momento e posição. Este, na verdade, é um resultado atípico, pois pode-se mostrar que esses são os únicos estados puros não-negativos em todos os pontos [25]. Neste sentido, o estado coerente seria então o estado puro de uma partícula mais clássico possível.

3.1.2 Representação P

Com base na definição de um estado coerente, define-se a representação P , ou *representação por estados coerentes*, pela prescrição [27, 28]:

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha, \quad (3.10)$$

quer dizer, enxergamos um dado estado como uma mistura estatística de estados coerentes. É possível mostrar que cada estado define unicamente a função P e que

$$P(\alpha, \alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi} \int \langle -\beta | \rho | \beta \rangle e^{|\beta|^2} e^{-\beta\alpha^* + \beta^*\alpha} d^2\beta.$$

No entanto, essa função também não pode ser pensada estritamente como uma distribuição de probabilidades pois pode adquirir valores negativos e, ademais, pode ser fortemente singular. De fato, vê-se facilmente que a representação P de um estado coerente $|\alpha_0\rangle$ seria

$$P(\alpha, \alpha^*) = \delta(\alpha - \alpha_0).$$

onde no lado direito da equação temos uma função delta de Dirac.

Um produto normalmente ordenado de operadores a e $a^\dagger$ é um produto onde todos os operadores $a^\dagger$ aparecem à esquerda dos operadores a , i.e., é um operador da forma $(a^\dagger)^m a^n$. Uma propriedade importante da representação P é a de que o valor esperado de qualquer produto *normalmente ordenado* $(a^\dagger)^m a^n$ é igual ao m -ésimo momento em α^* e o n -ésimo em α da “distribuição” P . Explicitamente,

$$\text{Tr}[(a^\dagger)^m a^n \rho] = \langle (a^\dagger)^m a^n \rangle = \int (\alpha^*)^m \alpha^n P_\rho(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha.$$

3.2 Campo Eletromagnético Quantizado

Antes de passarmos à descrição da dissipação de campos eletromagnéticos quantizados é lícito explicitar o que exatamente significa um campo quantizado. Nesta seção iremos expor de maneira sucinta como isso pode ser feito, seguindo a abordagem dada na Ref. [29].

Uma abordagem simples, mas de aplicação restrita, para encontrar o Hamiltoniano quântico de um sistema de N partículas é partir de seu Hamiltoniano clássico em coordenadas cartesianas $H(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)$, $x_j, p_j \in \mathbb{R}^3$, e efetuar as substituições canônicas

$$x_j \rightarrow \hat{x}_j, \quad (3.11)$$

$$p_j \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad (3.12)$$

i.e., promovendo números a operadores de um espaço de Hilbert. Um procedimento análogo é utilizado para encontrar a expressão do Hamiltoniano quântico de um campo eletromagnético *no vácuo*. O ponto de partida é, claro, as equações de Maxwell para os campos elétrico e magnético:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.16)$$

Tomando o rotacional dos dois lados da primeira equação, usando a segunda para substituir o campo magnético, e a propriedade de campos vetoriais $\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) - \nabla^2 V$, obtemos a equação de onda para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

Pelo método de separação de variáveis, podemos expressar uma solução qualquer para $\mathbf{E}(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}^3$) na forma

$$\mathbf{E}(x, t) = \sum_m f_m(t) \mathbf{u}_m(x), \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{u}_m(x) \in \mathbb{R}^3$ deverá satisfazer a equação

$$\nabla^2 \mathbf{u}_m(x) = -k_m^2 \mathbf{u}_m(x), \quad (3.19)$$

e k_m seria a constante que surge no processo de separação de variáveis. Da segunda equação de Maxwell vem ainda

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_m(x) = 0, \quad (3.20)$$

e supondo que o campo é restrito a uma região limitada do espaço por um condutor, teremos também

$$\mathbf{u}_m(x) = 0 \quad (3.21)$$

sobre a superfície do condutor.

Esse conjunto de condições para $\mathbf{u}_m(x)$ é equivalente a um problema de autovetor-autovalor para o operador ∇^2 e as duas condições adicionais irão garantir que ele seja hermitiano. E, de fato, para condutores com as formas de interesse (formas simples como uma caixa ou uma esfera) o conjunto solução será discreto e ortogonal (no sentido de que a integral em todo o espaço, do produto interno entre duas soluções distintas, será zero).

A equação para $f_m(t)$ será

$$\frac{d^2 f_m}{dt^2} = -c^2 k_m^2 f_m.$$

Inserindo essa solução na primeira equação de Maxwell, obtemos $\mathbf{B}(x, t)$:

$$\mathbf{B}(x, t) = \sum_m h_m(t) \nabla \times \mathbf{u}_m(x), \quad (3.22)$$

onde

$$\frac{dh_m}{dt} = -c f_m(t).$$

Da equação satisfeita por $\mathbf{u}_m(x)$ e da condição de contorno imposta pelo condutor segue que as funções $\nabla \times \mathbf{u}_m(x)$ também formam um conjunto ortogonal. Também da condição de contorno segue que $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_m(x)) = 0$ na superfície do condutor se $\mathbf{n}$ é um vetor normal a superfície e, portanto, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, ou seja, a condição dinâmica de contorno para $\mathbf{B}$ é automaticamente satisfeita. Substituindo as expressões para os campos elétrico e magnético, (3.18) e (3.22), na segunda equação de Maxwell, obtemos

$$\frac{df_m}{dt} = c k_m^2 h_m, \quad (3.23)$$

o que nos leva à equação para h_m

$$\frac{d^2 h_m}{dt^2} = -c^2 k_m^2 h_m(t).$$

Esses resultados nos mostram que, resolvida a configuração espacial do campo, a parte restante referente a dinâmica é equivalente ao problema de infinitos osciladores harmônicos independentes. Agora vem o ponto que nos interessa, a energia total do campo tem a forma:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) dx. \quad (3.24)$$

Fazendo uso das expressões (3.18) e (3.22) para os campos elétrico e magnético e a ortogonalidade dos conjuntos de funções $\mathbf{u}_m(x)$ e $\nabla \times \mathbf{u}_m(x)$ resulta que

$$H = \frac{1}{8\pi} \sum_m (f_m^2(t) + k_m^2 h_m^2(t)). \quad (3.25)$$

Usando ainda (3.23) e efetuando a transformação de coordenadas $q_m = f_m/2\omega_m\sqrt{\pi}$ podemos escrever finalmente

$$H = \frac{1}{2} \sum_m (p_m^2 + \omega_m^2 q_m^2) \quad (3.26)$$

onde $p_m = \frac{dq_m}{dt}$ e $\omega_m = ck_m$.

A similaridade dessa expressão com a expressão para a energia de vários osciladores harmônicos de massa 1 nos leva a efetuar a substituição canônica (passando logo aos operadores de criação e destruição):

$$q_m(t) = \left(\frac{\hbar}{2\omega_m}\right)^{1/2} (a_m^\dagger(t) + a_m(t)), \quad (3.27)$$

$$p_m(t) = i\left(\frac{\hbar\omega_m}{2}\right)^{1/2} (a_m^\dagger(t) - a_m(t)), \quad (3.28)$$

onde os operadores deverão satisfazer as relações de comutação

$$[a_{\bar{m}}(t), a_m(t)] = \delta_{\bar{m},m},$$

de modo que o Hamiltoniano poderá ser escrito na forma

$$H = \sum_m \hbar\omega_m \left(a_m^\dagger(t)a_m(t) + \frac{1}{2}\right). \quad (3.29)$$

Note que soma das energias de ponto zero de cada modo certamente irá divergir e, por isso, na maioria das aplicações, elas são desconsideradas (apesar de que em outras, como o efeito Casimir, elas são vitais). É claro que isso coloca em profunda suspeita o processo de quantização mas, apesar dessa inconsistência, é bem reconhecido que a eletrodinâmica quântica têm se mostrado excelente para a descrição de vários fenômenos, como os experimentos que serão mencionados nessa dissertação.

Da mesma forma, o *campo de operadores* campo elétrico poderá ser escrito:

$$E(x, t) = \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} [a_m^\dagger(t) + a_m(t)] \mathbf{u}_m(x). \quad (3.30)$$

Observe que aqui que x não é um operador, mas um parâmetro para definir o operador campo elétrico em cada ponto do espaço, daí o nome campo de operadores. Já a evolução

dos operadores $a_m^\dagger$ e a_m com o tempo (e, portanto, do campo elétrico) é interpretada como se fossem operadores na representação de Heisenberg. Isso nos permite então obter a equação diferencial para eles

$$\dot{a}_m(t) = \frac{i}{\hbar}[H, a_m(t)] = -i\omega_m a_m(t), \quad (3.31)$$

logo

$$a_m(t) = a_m e^{-i\omega_m t},$$

onde a_m seria o operador na representação de Schrodinger. Analogamente, para $a_m^\dagger$:

$$a_m^\dagger(t) = a_m^\dagger e^{i\omega_m t},$$

portanto, H é de fato independente do tempo

$$H = \sum_m \hbar\omega_m (a_m^\dagger(t)a_m(t) + \frac{1}{2}) = \sum_m \hbar\omega_m (a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2}). \quad (3.32)$$

Olhando agora apenas para um modo do campo, um dado vetor da base definida pelo operador $a_m^\dagger a_m$, $\{|n\rangle\}_{n=0}^\infty$, denominada base de Fock, é interpretado como um estado onde o campo possui exatamente (i.e., sem dispersão) n excitações, ou fótons, e os operadores a_m e $a_m^\dagger$ seriam os operadores de destruição e criação, respectivamente. O operador $a_m^\dagger a_m$ é então chamado operador número pois corresponde ao observável *número de fótons do modo*.

3.3 O Modelo “Padrão” e Sua Subsequente Equação Mestra

Como dito anteriormente, o reservatório que será responsável pela dissipação do campo pode ser descrito por um conjunto de osciladores harmônicos que podem ser entendidos como os modos de campo fora da cavidade. O Hamiltoniano padrão para modelar a dissipação de um modo de campo em uma cavidade óptica pode ser escrito da seguinte forma:

$$H = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \hbar \sum_k \gamma_k (ab_k^\dagger + a^\dagger b_k), \quad (3.33)$$

onde a e $a^\dagger$ são os operadores de destruição e criação do campo; b_k e $b_k^\dagger$ os operadores de criação e destruição do k -ésimo oscilador do reservatório; ω_0 é a frequência do campo,

ω_k a frequência do k -ésimo oscilador do reservatório; finalmente, os γ_k 's são constantes de acoplamento.

A forma da interação entre cavidade e campo não tem justificativa muito precisa. Talvez possa ser pensada como uma aproximação em primeira ordem no Hamiltoniano, já que, por hipótese, a interação deve ser fraca. Mas, em última instância, é um bom Hamiltoniano porque irá levar à uma equação mestra para o campo satisfatória para descrição de experimentos.

3.3.1 A Equação Mestra

A dedução heurística usual da equação mestra para a dinâmica do estado reduzido do campo é um tanto longa e pode ser encontrada em muitas referências (e.g., [52, 32]), portanto, não iremos reproduzi-la aqui. No entanto, a primeira aproximação realizada na dedução merece atenção, sendo conhecida como a aproximação de Bohr: supõe-se, para cômputo da dinâmica de $\rho_S(t)$, que o estado global será da forma $\rho(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_R$, permitindo obter uma equação fechada para S . Nesta hipótese está implícito que a interação entre sistema e reservatório é fraca o suficiente para o efeito do sistema sobre o reservatório possa ser menosprezado e, em particular, despreza-se a possibilidade de serem formados estados emaranhados entre campo e reservatório. O problema é que não há nenhum controle sobre essa aproximação e, intuitivamente, é de se esperar que ela seja válida apenas para temperaturas altas. No entanto, a equação mestra é utilizada em qualquer temperatura, inclusive a temperatura nula. Veremos adiante que, pelo menos neste último caso, o emaranhamento entre os sistemas não pode ser desprezado mas, apesar disso, e surpreendentemente, a equação mestra ainda é válida.

É importante mencionar que uma dedução rigorosa da equação mestra pode ser efetuada [30]. Nesta dedução não há a hipótese de Bohr, somente as hipóteses de acoplamento fraco, escala de tempo granulada e decaimento rápido dos tempos de correlação do reservatório. Especificamente, a parte do Hamiltoniano correspondente à interação entre sistema e reservatório é multiplicado por um fator adimensional λ . A equação será então obtida na representação de interação, no limite $\lambda \rightarrow 0$ (acoplamento fraco), e numa nova escala de tempo (escala de tempo granulada) dada por $\tau = \lambda^2 t$, sendo t correspondente à escala de tempo original. Finalmente, para a obtenção do limite, é exigido que uma certa integral sobre a parte do reservatório seja finita, correspondendo à hipótese de decaimento rápido dos tempos de correlação do reservatório.

De qualquer forma, a equação mestra será, na representação de Schrodinger,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = & -\frac{i}{\hbar}[\hbar\omega_0 a^\dagger a, \rho(t)] - \frac{\kappa}{2}\bar{n}_{\omega_0}(aa^\dagger\rho(t) - 2a^\dagger\rho(t)a + \rho(t)aa^\dagger) - \\ & -\frac{\kappa}{2}(\bar{n}_{\omega_0} + 1)(a^\dagger a\rho(t) - 2a\rho(t)a^\dagger + \rho(t)a^\dagger a\rho(t)), \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde

$$\bar{n}_{\omega_0} = \frac{1}{e^{-\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - 1}$$

é o número médio de excitações do reservatório na frequência do oscilador principal; κ é a constante de decaimento de energia do sistema e depende do valor da constante de acoplamento associada à frequência do oscilador principal. O primeiro termo da equação é um termo difusivo e representa o fluxo de energia do reservatório para o sistema, já o segundo, a perda de energia do sistema para o reservatório, sendo formada por duas contribuições: uma difusiva (o termo proporcional a $\bar{n}_{\omega_0}$) e uma responsável pelo decaimento (o termo proporcional a 1). Para ver que κ é de fato a constante de decaimento, basta tomar a equação diferencial para o valor esperado da energia, fazendo $E(t) = \langle H_S \rangle(t)$:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\kappa E(t) + \kappa\hbar\omega_0\bar{n}_{\omega_0},$$

com a solução trivial:

$$E(t) = \hbar\omega_0\bar{n}_{\omega_0} + (E(0) - \hbar\omega_0\bar{n}_{\omega_0})e^{-\kappa t}.$$

Quer dizer, a energia do oscilador decai (ou cresce) exponencialmente até atingir a energia de um estado em equilíbrio térmico com o reservatório. Mais ainda, é de se esperar que, qualquer que seja o estado inicial, ele irá convergir para um estado térmico à temperatura T quando $t \rightarrow \infty$.

3.3.2 Decoerência à temperatura Nula

A equação mestra para a dissipação do campo em uma cavidade à temperatura nula pode ser obtida fazendo-se $\bar{n}_{\omega_0} = 0$ em (3.33) restando apenas o termo de decaimento:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hbar\omega_0 a^\dagger a, \rho(t)] - \frac{\kappa}{2}(a^\dagger a\rho(t) - 2a\rho(t)a^\dagger + \rho(t)a^\dagger a\rho(t)). \quad (3.35)$$

Vamos considerar então a evolução de um estado inicial da forma:

$$|\Psi(0)\rangle = c(|\alpha_0\rangle + |\beta_0\rangle),$$

onde $c = (2 + 2\text{Re} \langle \alpha_0 | \beta_0 \rangle)^{-\frac{1}{2}}$.

Quando tanto α_0 quanto β_0 são grandes e, portanto, na fronteira entre um campo clássico e um quântico (sendo por isso denominados *mesoscópicos*) e, ademais, são substancialmente distintos entre si, o resultado é um estado quântico análogo ao estado proposto no experimento imaginário de Schrodinger do gato morto-vivo. Por isso tais estados são denominados *estados de gato*.

Primeiramente, devemos escrever este estado como um operador densidade:

$$\rho(0) = c^2(|\alpha_0\rangle \langle \alpha_0| + |\beta_0\rangle \langle \beta_0| + |\alpha_0\rangle \langle \beta_0| + |\beta_0\rangle \langle \alpha_0|).$$

Como a equação mestra é linear, basta considerar a evolução termo a termo. A solução dos dois primeiros é trivial, que seria a evolução sobre um estado inicial coerente, e nos mostra novamente o caráter dissipativo dessa equação mestra:

$$\rho(t) = |\alpha_0 e^{-(i\omega_0 + \kappa)t}\rangle \langle \alpha_0 e^{-(i\omega_0 + \kappa)t}|.$$

Ou seja, a dissipação preserva a “coerência” do estado e apenas diminui sua energia, de modo que a amplitude executa um movimento em forma de espiral no plano complexo, correspondente à trajetória, no espaço de fase, de um oscilador amortecido. Para os termos restantes, tendo visto o quanto estados coerentes são bem comportados sob essa dissipação, e já esperando que este termo estará sujeito à decoerência, tentamos uma solução da forma:

$$|\alpha_0\rangle \langle \beta_0| \rightarrow F(t) |\alpha(t)\rangle \langle \beta(t)|,$$

onde $F(t)$ é uma função complexa que deverá decair rapidamente. Substituindo este *ansatz* na equação mestra, e usando que

$$\frac{d|\alpha(t)\rangle}{dt} = \left(\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} - \frac{1}{2} \frac{d|\alpha(t)|^2}{dt} \right) |\alpha(t)\rangle,$$

assim como o fato de que estados coerentes são auto-estados do operador aniquilação, obtém-se que o *ansatz* é de fato solução, desde que:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} &= \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta(t)} = -(i\omega_0 + \kappa), \\ \frac{\dot{F}(t)}{F(t)} &= \frac{1}{2}(|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2) + 2\kappa\beta^*(t)\alpha(t). \end{aligned}$$

A solução dessas equações é imediata:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 e^{-(i\omega_0 + \kappa)t}, \\ \beta(t) &= \beta_0 e^{-(i\omega_0 + \kappa)t}, \\ F(t) &= e^{[(1 - e^{-\gamma t})(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \beta^* \alpha) - \langle \beta | \alpha \rangle (1 - e^{-\kappa t})]}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Finalmente, a evolução tem a forma:

$$\rho(t) = c^2(|\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| + |\beta(t)\rangle \langle \beta(t)| + F(t) |\alpha(t)\rangle \langle \beta(t)| + F^*(t) |\beta(t)\rangle \langle \alpha(t)|),$$

com as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $F(t)$ dadas pelas equações (3.36). Vemos então que para tempos grandes os elementos fora-da-diagonal são multiplicados por um fator cujo módulo é $|\langle \alpha|\beta \rangle| = e^{-|\alpha_0 - \beta_0|}$, que será extremamente pequeno para estados de gato, de modo que o processo de decoerência será praticamente total. Ademais, podemos identificar a função

$$\Gamma(t) = \ln|F(t)| = [(1 - e^{-\gamma t})](-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \beta^* \alpha) = \langle \beta|\alpha \rangle^{(1-e^{-\kappa t})}$$

com a função decoerência. Para entender melhor o decaimento dos elementos fora-da-diagonal da matriz densidade notamos que, para $\kappa t \ll 1$, ele será aproximadamente exponencial ou, dito de outra forma, que a função decoerência é linear:

$$\Gamma(t) \approx -\kappa |\alpha_0 - \beta_0|^2 t.$$

Assim, nesta escala de tempo, podemos definir o tempo de decoerência τ_D como o inverso do fator que multiplica t , de modo que a razão entre os tempos de decoerência e dissipação será

$$\frac{\tau_D}{\tau_R} = \frac{1}{|\alpha - \beta|^2},$$

sendo extremamente pequena para estados de gato, constituindo mais um exemplo onde a escala de tempo em que a decoerência ocorre é muito menor que a escala de tempo em que a dissipação ocorre.

É interessante entender o processo sob a luz da representação de Wigner para o estado do sistema. No instante inicial ela é composta de dois picos localizados em (q_0, p_0) e (q'_0, p'_0) , onde (aqui, fazendo uso da analogia entre as descrições de um oscilador harmônico e um modo de campo quantizado)

$$q_0 = (2\hbar/\omega_0)^{1/2} \text{Re}\alpha_0, \quad (3.37)$$

$$p_0 = (2\hbar\omega_0)^{1/2} \text{Im}\alpha_0, \quad (3.38)$$

$$q'_0 = (2\hbar/\omega_0)^{1/2} \text{Re}\beta_0, \quad (3.39)$$

$$p'_0 = (2\hbar\omega_0)^{1/2} \text{Im}\beta_0, \quad (3.40)$$

e contém oscilações que assumem valores negativos entre eles, caracterizando o caráter “quântico” do estado. Porém, para $\tau_R \gg t \gg \tau_D$, i.e., se temos um estado de gato que

permita distinguir duas escalas de tempo, essas oscilações são substancialmente amortecidas enquanto os picos quase não são alterados. Tal função pode então ser interpretada classicamente e como uma distribuição de probabilidades (ver figura 3.1), quer dizer, o ambiente remove as propriedades essencialmente quânticas do sistema muito rapidamente. Observe também que exatamente a mesma situação ocorrerá para a partícula Browniana mencionada no capítulo anterior.

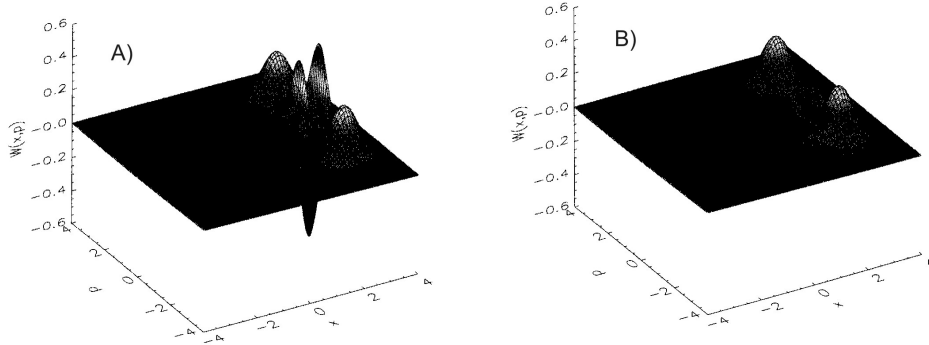


Figura 3.1: A) Distribuição de Wigner para o estado inicial de gato com $\alpha(0) = \alpha_0 \exp(i\phi)$ e $\beta(0) = \alpha_0 \exp(-i\phi)$ com $\alpha_0 = \sqrt{10}$ e $\phi = 0.7$. B) Função de Wigner no instante $t = 0.015/\kappa$, exibindo o rápido amortecimento das oscilações entre os dois picos (figura retirada da Ref. [31]).

3.3.3 Solução da Equação Mestra à Temperatura Finita: Equação de Fokker-Planck para a Representação P

Como foi visto na primeira seção, qualquer operador densidade para o campo (ou oscilador harmônico) pode ser escrito na forma:

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) d\alpha d\alpha^*,$$

onde a função P é unicamente definida pelo estado ρ e vice-versa. Isso nos permite expressar a solução da equação na forma

$$\rho(t) = \int P(\alpha, \alpha^*, t) d\alpha d\alpha^*,$$

e substituindo essa representação na equação mestra encontraremos a equação subsequente para $P(t)$, que será particularmente útil para calcular sua evolução sobre um estado inicial

coerente. Para fazer isso, basta observar as seguintes propriedades de estados coerentes:

$$\begin{aligned} a |\alpha\rangle \langle \alpha| &= \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|, \\ |\alpha\rangle \langle \alpha| a^\dagger &= \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha|, \\ a^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha| &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha^* |\alpha\rangle \langle \alpha|\right), \\ |\alpha\rangle \langle \alpha| a &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha\right) |\alpha\rangle \langle \alpha|. \end{aligned}$$

As duas primeiras são consequências imediatas do fato de que um estado coerente é auto-estado do operador de aniquilação sendo o parâmetro de coerência o auto-valor. As duas últimas podem ser facilmente verificadas utilizando a definição de estado coerente. De posse dessas relações é fácil obter a equação para $P(t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [(-i\omega_0 - \kappa) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + (i\omega_0 - \kappa) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^*] P + 2\kappa \bar{n}_{\omega_0} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} P. \quad (3.41)$$

Note que essa equação tem a mesma estrutura das equações do tipo Fokker-Plank encontradas frequentemente na mecânica estatística de sistemas clássicos, no contexto de processos difusivos, sendo o primeiro termo a contribuição responsável pelo decaimento e o segundo, a difusiva.

Agora suponha um estado inicial coerente $|\alpha_0\rangle$ que, como vimos, tem a representação P da forma

$$P(\alpha, \alpha^*, t) = \delta(\alpha - \alpha_0).$$

Novamente, a solução pode ser encontrada supondo um *ansatz*, neste caso supomos

$$P(\alpha, \alpha^*, t) = \frac{1}{\pi \sigma^2(t)} e^{-\frac{|\alpha - \beta(t)|^2}{\sigma^2(t)}},$$

e vemos que, de fato, é solução da equação desde que

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= -(i\omega_0 + \kappa)\beta(t), \\ (\dot{\sigma}^2) &= -2\kappa(\sigma^2 - \bar{n}_{\omega_0}), \end{aligned}$$

com as soluções triviais

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \alpha_0 e^{-(i\omega_0 + \kappa)t}, \\ \sigma^2(t) &= \bar{n}_{\omega_0}(1 - e^{-2\kappa t}). \end{aligned}$$

Vemos que, além do movimento em forma de espiral da amplitude, devido à dissipação e à parte unitária, a temperatura induz um “alargamento” do estado coerente que tenderá

a $\bar{n}_{\omega_0}$ para tempos grandes e o sistema tenderá a um estado térmico, i.e., entrará em equilíbrio térmico com o reservatório. O cálculo da dinâmica sobre um estado de gato é mais complicado e não será reproduzido aqui, mas é de se esperar que a temperatura irá reforçar o processo de decoerência. Realmente, é possível mostrar que a razão dos tempos de coerência e relaxamento, numa escala de tempo em que $\kappa t \ll 1$, será diminuída por um fator $(2\bar{n}_{\omega_0} + 1)$, ou seja, se τ_D é o tempo de decoerência à temperatura nula, e τ_D^T à temperatura T , então

$$\tau_D^T = \frac{\tau_D}{2\bar{n}_{\omega_0} + 1}.$$

3.4 Solução da Dinâmica do Oscilador à Temperatura Nula

Nesta seção iremos propor uma nova maneira de solucionar o problema, sem recorrer à equação mestra, para o caso em que os osciladores do reservatório se encontram inicialmente no estado fundamental (ou à temperatura nula) e o campo em um estado coerente. Explicitamente, estamos olhando para o estado inicial

$$|\Psi(t)\rangle = |\alpha_0\rangle \otimes \prod_k |0_k\rangle. \quad (3.42)$$

O ponto é que, nesta situação bem específica, a solução da equação de Schrodinger com o Hamiltoniano (3.33) terá a forma

$$|\Psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k |\beta_k(t)\rangle, \quad (3.43)$$

ou seja, tanto os estados do oscilador principal quanto dos osciladores do reservatório se manterão coerentes e as amplitudes dos osciladores irão satisfazer as equações diferenciais (obtidas inserindo-se a solução acima na equação de Schrodinger):

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\alpha(t) &= \hbar\omega\alpha(t) + \hbar\sum_k \gamma_k\beta_k(t), \\ i\frac{d}{dt}\beta_k(t) &= \hbar\omega_k\beta_k(t) + \hbar\gamma_k\alpha(t). \end{aligned} \quad (3.44)$$

É interessante notar que, nesta situação, a hipótese de Bohr é parcialmente válida, no sentido de que o estado do sistema permanecerá na forma produto.

Resolveremos este problema mediante um mapeamento do mesmo com outros dois problemas de mecânica quântica: decaimento de um átomo de dois níveis no vácuo do

campo eletromagnético e o decaimento de um estado quântico discreto em um contínuo de estados quânticos (diagonalização de Fano [33]). Estas associações permitem inclusive resolver o problema *fora* do regime Markoviano, e discutiremos como isso é feito no primeiro contexto.

3.4.1 Decaimento de um Átomo de Dois Níveis

Primeiramente, passemos o problema para a representação de interação, de forma que as Eqs. 3.44 assumirão a forma:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\alpha(t) &= \sum_k \gamma_k e^{-i\Delta_k t} \beta_k(t), \\ i\frac{d}{dt}\beta_k(t) &= \gamma_k e^{i\Delta_k t} \alpha(t), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $\Delta_k = \omega_0 - \omega_k$ é a dessintonia entre o oscilador principal e o k -ésimo oscilador do banho.

Agora notamos que essas equações diferenciais (na representação de Schrodinger ou de interação), escritas em termos das variáveis $c_0(t) = \alpha(t)/\alpha_0$ e $c_k(t) = \beta_k(t)/\alpha_0$ tem exatamente a mesma forma das equações diferenciais que descrevem o decaimento de um átomo de dois níveis no vácuo. Neste último caso essas variáveis representam os coeficientes do estado global do sistema (átomo mais modos de campo) quando expandido na base produto (estados de energia do átomo multiplicado pelos estados de Fock dos modos). O coeficiente $c_0(t)$ corresponde então ao estado com o átomo no estado excitado e todos os modos de campo vazios, enquanto os $c_k(t)$'s correspondem ao átomo no estado fundamental, o campo com um fóton no modo k e todos os outros vazios [34]. Podemos aplicar então os resultados deste problema para resolver a dinâmica do oscilador principal, descrita pela evolução de $|\alpha(t)|^2$, para diversas “estruturas” para o reservatório (dependência das constantes γ_k com as frequências ω_k) como veremos abaixo.

A abordagem usual para este problema consiste em resolver formalmente a equação para os coeficientes (ou parâmetros de coerência, no caso dos osciladores) $c_k(t)$ e substituindo na equação para $c_0(t)$:

$$\dot{c}_0(t) = - \int_0^t dt' F(t') c_0(t'). \quad (3.46)$$

O comportamento de $c_0(t)$ dependerá então do *kernel*

$$F(t') = \sum_k |\gamma_k|^2 e^{-i\Delta_k t'}. \quad (3.47)$$

Em ambos os problemas, no entanto, além da estrutura idêntica para as equações, estamos interessados no limite de um contínuo de graus de liberdade para o reservatório. Uma densidade de modos $\rho(\omega)$ é introduzida então, e assumida uma função contínua, correspondendo ao contínuo de modos, enquanto os acoplamentos γ_k são assumidos como funções de ω_k somente, i.e. $\gamma_k = \gamma(\omega_k)$, de forma que o *kernel* pode ser escrito na forma:

$$F(t') = \int d\omega_k \rho(\omega_k) |\gamma_k|^2 e^{-i\Delta_k t'} \quad (3.48)$$

e portanto determinado pela denominada *função de estrutura do reservatório*:

$$D(\omega_k) = \frac{2\pi}{g^2} \rho(\omega_k) |\gamma_k|^2, \quad (3.49)$$

onde g é escolhido de forma que $D(\omega_k)$ é normalizado em 2π .

Se essa função de estrutura é suficientemente constante (“plana”) ao redor da frequência do oscilador principal, a equação diferencial-integral para $c_0(t)$ irá simplificar significativamente, tornando-se simplesmente uma equação diferencial, levando a um comportamento Markoviano para o sistema, com o parâmetro de coerência do oscilador principal, e portanto, sua energia, decaindo exponencialmente [34].

Se, por outro lado, o reservatório é estruturado, i.e., se sua função de estrutura varia apreciavelmente ao redor da frequência da oscilador principal, a solução da equação diferencial-integral pode ser obtida assumindo algumas propriedades analíticas para a função de estrutura, considerando ω uma variável complexa. Especificamente, é assumido que $D(\omega)$ tem pólos simples na parte inferior do plano complexo, e que a função decai rápido o suficiente, de forma que a integral definindo o *kernel* pode ser resolvida pelo método dos resíduos [36]. O *kernel* adquire a forma então de uma soma de exponenciais $\exp(-z_i t')$, sendo z_i números complexos determinados pelos pólos, e a equação diferencial resultante pode ser resolvida mediante transformadas de Laplace. Se Γ é um valor típico para a parte real de z_i , essas soluções podem ser divididas em dois regimes: um regime de acoplamento forte, com $g \gg \Gamma$, levando a um comportamento não-Markoviano para o oscilador principal, e um regime de acoplamento fraco, com $g \ll \Gamma$, onde uma evolução Markoviana é novamente obtida [35].

Algumas funções de estrutura relevantes surgem no contexto da denominada teoria de *pseudo-modos* [35] onde, no caso de decaimento atômico, quando o mesmo (ou o oscilador principal, no nosso caso) interage com um número finito de modos discretos, que, por sua vez, interagem com um contínuo de modos cuja função de estrutura é *plana*. Sob certas condições, a função de estrutura resultante pode ser uma Lorentziana, levando a uma equação que pode ser resolvida exatamente. Sob outras condições, pode-se obter uma

subtração de Lorentzianas, um modelo que pode ser usado para a descrição do decaimento atômico imerso em um “gap” fotônico (material que inibe a excitação de modos de campo eletromagnético em uma determinada faixa, ou banda, de frequências) [36].

Comportamentos interessante surgem para ambas as funções. A primeira pode levar a um decaimento não monótono da energia do oscilador principal, i.e., a energia pode fluir do *reservatório* para o oscilador. A segunda pode levar ao “armadilhamento da população atômica” [37], correspondendo no nosso caso à uma dissipação parcial da energia do oscilador, i.e., ela não necessariamente decai a zero para tempo infinito. Muitas funções de estrutura podem ser escolhidas para modelar um *gap* fotônico e em geral levam ao fenômeno de armadilhamento [38]. De qualquer forma, em ambos os casos o comportamento do oscilador será não-Markoviano e o ilustramos na Fig.(3.2).

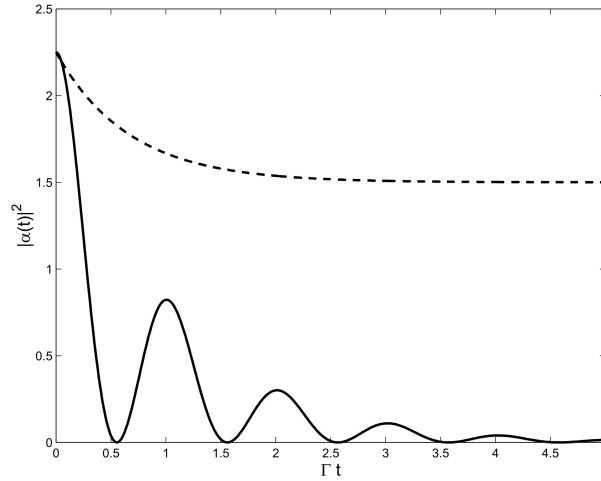


Figura 3.2: Decaimento da energia do oscilador principal, $|\alpha(t)|^2$, para dois tipos de reservatório, um dado por uma função de estrutura Lorentziana (linha contínua) e o outro (linha tracejada) por uma subtração de Lorentzianas. Para o primeiro caso tomamos $D(\omega) = g\Gamma^2/2\pi((\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2)$, com $g/\Gamma = 20$ (regime de acoplamento forte). Já para o segundo, $D(\omega) = A_1/((\omega - \omega_0)^2 + \Gamma_1^2) - B_1/((\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2)$ no limite $\Gamma_1 \rightarrow \infty$, de forma que $A_1 = \Gamma_1/(\Gamma_1 + \Gamma)$, $A_2 = \Gamma/(\Gamma_1 - \Gamma)$ e $\gamma' = 4g^2/\Gamma_1$ permanecem constantes. Na figura, $\gamma'/\Gamma = 2$.

3.4.2 Diagonalização de Fano

Vamos ver agora como que nosso problema se relaciona ao de diagonalização de Fano. Pelo fato de que esse Hamiltoniano do sistema oscilador principal + reservatório conserva o número total de excitações no sistema $\hat{N} = a^\dagger a + \sum_k b_k^\dagger b_k$, a quantia $\alpha(t) + \sum_k \beta_k(t)$

também será constante e igual a α_0 . Agora observe que o conjunto de Eqs. 3.44 pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_{ef} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V) |\psi(t)\rangle, \quad (3.50)$$

com

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha_0} & \frac{\beta_1}{\alpha_0} & \dots & \frac{\beta_N}{\alpha_0} \end{pmatrix},$$

de modo que esse será um vetor normalizado para todo t , e

$$H_0 = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \omega_N \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_N \\ \gamma_1 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & \\ \gamma_N & & & \end{pmatrix}.$$

Ou seja, esse problema é formalmente idêntico a qualquer problema de dinâmica quântica: a solução de uma equação de Schrodinger. Somando a constante $-\omega_0$ ao Hamiltoniano H_{ef} e absorvendo-a em H_0 obteremos um novo Hamiltoniano:

$$H'_{ef} = H'_0 + V, \quad (3.51)$$

onde $H'_0 = H_0 - \omega_0$. Mas, de qualquer forma, se $|\psi(t)\rangle_0$ é a solução de (3.50), e $|\psi(t)\rangle$ é a solução da equação de Schrodinger com o hamiltoniano (3.51), então:

$$|\Psi(t)\rangle_o = e^{-i\omega_0 t} |\Psi(t)\rangle.$$

Vamos supor, a partir de agora, que temos infinitos osciladores no banho e com frequências dadas pela relação $\hbar\omega_k = \hbar\omega_0 + \delta k$, para k inteiro. É claro que, no modelo original, não podemos ter $\omega_k < 0$, mas a extensão das frequências para $-\infty$ simplificará os resultados e será justificada *a posteriori*. Denominando por $|\phi\rangle$ o auto-estado de “energia” 0 de H'_0 relacionado ao oscilador principal e $|k\rangle$ os auto-estados de “energia” δk relacionados aos osciladores do banho, teremos as seguintes propriedades para H'_0 e V :

$$\begin{aligned} \langle k| V |\phi\rangle &= \gamma_k, \\ \langle k| V |k\rangle &= 0, \\ \langle \phi| V |\phi\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Vamos supor, ainda, que γ_k não depende de k , i.e., $\gamma_k = \gamma$ (estrutura “plana” para o reservatório). Espera-se que, numa situação real, o reservatório tenha um número enorme e denso de graus de liberdade, de modo que estaremos interessados no limite de um contínuo de osciladores. Portanto, iremos basicamente procurar o limite em que δ vai para zero. O ponto é que, se olharmos para esse limite visto pelo Hamiltoniano (3.51), recaímos num problema estruturalmente idêntico ao trabalhado por Fano[33] em um estudo sobre o efeito de um contínuo de estados quânticos sobre um estado discreto, sendo tais estados acoplados via um Hamiltoniano idêntico ao Hamiltoniano (3.51). Basta, portanto, reproduzir tais resultados para computar a dinâmica do oscilador principal, ditada pelo comportamento do seu parâmetro de coerência. Veremos agora como isso é feito, seguindo a exposição de Cohen na Ref. [39].

Observe primeiramente que

$$\frac{\alpha(t)}{\alpha_0} = \langle \phi | \psi(t) \rangle_0 = e^{-i\omega_0 t} \langle \phi | \psi(t) \rangle, \quad (3.53)$$

de modo que, para obter a dinâmica do oscilador principal, estamos interessados em calcular o limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\langle \phi | \psi(t) \rangle].$$

No processo de limite é claro que não podemos simplesmente mandar δ para zero mantendo impune os parâmetros do Hamiltoniano pois, quando diminuimos δ , aumentamos a densidade de osciladores e, conseqüentemente, a energia de interação entre reservatório e oscilador principal. Olhando o processo limite pelo Hamiltoniano (3.51) e tendo em mente que ele irá levar a um contínuo de estados quânticos, a regra áurea de Fermi nos diz que a taxa de transição entre o estado discreto e o contínuo será:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \gamma^2 \frac{1}{\delta}, \quad (3.54)$$

onde γ é o elemento de matriz entre o estado discreto e os estados do contínuo de mesma energia. Isso nos dá a prescrição de como devemos alterar os parâmetros do hamiltoniano no processo limite: devemos manter $\frac{\gamma^2}{\delta}$ constante e igual a $\frac{\Gamma}{2\pi}$. Posteriormente o significado de Γ na dinâmica do oscilador ficará claro.

O primeiro passo para obter a dinâmica do sistema é diagonalizar o Hamiltoniano total (3.51) no limite. Denotando por E_μ e $|\psi_\mu\rangle$ os auto valores e auto-vetores, temos

$$H'_{ef} |\psi_\mu\rangle = E_\mu |\psi_\mu\rangle.$$

Projetando essa equação nos vetores da base $|k\rangle$ e $|\phi\rangle$ e utilizando as relações (3.52) obtemos

$$E_k \langle k|\psi_\mu\rangle + \gamma \langle \phi|\psi_\mu\rangle = E_\mu \langle k|\psi_\mu\rangle \quad (3.55)$$

$$\sum_k \gamma \langle k|\psi_\mu\rangle = E_\mu \langle \phi|\psi_\mu\rangle. \quad (3.56)$$

A primeira destas equações nos dá

$$\langle k|\psi_\mu\rangle = \gamma \frac{\langle \phi|\psi_\mu\rangle}{E_\mu - E_k}. \quad (3.57)$$

Substituindo esse resultado na segunda relação de (3.55) obtemos a equação que define os auto-valores:

$$\sum_k \frac{\gamma^2}{E_\mu - E_k} = E_\mu. \quad (3.58)$$

Usando a condição de normalização

$$\sum_k |\langle k|\psi_\mu\rangle|^2 + |\langle \phi|\psi_\mu\rangle|^2 = 1,$$

bem como (3.57), obtemos as projeções de $|\psi_\mu\rangle$ na base de H'_0

$$\langle \phi|\psi_\mu\rangle = [1 + \sum_{k'} (\frac{\gamma^2}{E_\mu - E_{k'}})]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.59)$$

$$\langle k|\psi_\mu\rangle = \frac{\gamma}{E_\mu - E_k} [1 + \sum_{k'} (\frac{\gamma^2}{E_\mu - E_{k'}})]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.60)$$

Agora, considerando a expressão específica para os auto-valores de H_0 , $E_k = \delta k$, vemos que:

$$\sum_k \frac{\gamma^2}{E_\mu - E_k} = \frac{\gamma^2}{\delta} \sum_k \frac{1}{z - k}, \quad (3.61)$$

$$\sum_k \frac{\gamma^2}{(E_\mu - E_k)^2} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_k \frac{1}{(z - k)^2}, \quad (3.62)$$

onde $z = \frac{E_\mu}{\delta}$. Acontece que as séries acima são expansões de funções trigonométricas:

$$\sum_k \frac{1}{(z - k)^2} = \frac{\pi}{\text{sen}^2 \pi z}$$

e, integrando-se essa expressão,

$$\sum_k \frac{1}{z - k} = \frac{\pi}{\text{tg} \pi z}.$$

Portanto, a equação que define os autovalores pode ser escrita na forma:

$$\frac{\pi\gamma^2}{\delta \operatorname{tg}(\pi E_\mu/\delta)} = E_\mu \quad (3.63)$$

e, usando (3.54),

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi E_\mu/\delta)} = 2 \frac{E_\mu}{\hbar\Gamma}. \quad (3.64)$$

Para colocar essa expressão em uma forma mais conveniente, define-se o ângulo θ_μ pela relação

$$\theta_\mu = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\hbar\Gamma}{2E_\mu},$$

onde a inversa de tg é definida de modo que $-\frac{\pi}{2} < \theta_\mu < \frac{\pi}{2}$. Finalmente, podemos escrever as auto-energias como:

$$E_\mu = \delta m + \delta \frac{\theta_\mu}{\pi},$$

onde m é inteiro, ou seja, o segundo termo do lado direito seria a correção nos auto-valores devido a “perturbação” V .

3.4.3 Visualização Gráfica dos Auto-Valores

Para se entender qualitativamente o comportamento dos autovalores dados pela equação (3.64) podemos identificá-los graficamente. A idéia é fazer um gráfico com as funções de cada lado da equação e os pontos de intersecção entre eles corresponderão às soluções da equação, ou os auto-valores. Neste caso, do lado esquerdo temos a função $y = 1/\operatorname{tg}(\alpha x)$ e, do lado direito, simplesmente $y = x$. Na figura 3.3 temos os dois gráficos e as retas verticais passam pelos pontos correspondentes aos auto-valores de H'_0 . Vê-se claramente que, para δ pequeno, a densidade de auto-estados é aproximadamente $1/\delta$ pois temos exatamente uma auto-energia do Hamiltoniano total num intervalo de δ .

Essa figura sugere que para pontos muito distantes da origem os auto-valores não serão substancialmente modificados. De fato, se temos $2|E_\mu|/\hbar\Gamma \gg 1$ no lado direito da equação (3.64) teremos que ter, do lado esquerdo, que $\operatorname{tg}(\pi E_\mu/\delta) \approx 0$ ou $\pi E_\mu/\delta \approx k\pi$ com k inteiro.

3.4.4 Evolução do Estado Inicial

O nosso objetivo é calcular a evolução do sistema a partir do estado inicial:

$$|\psi(0)\rangle = |\phi\rangle,$$

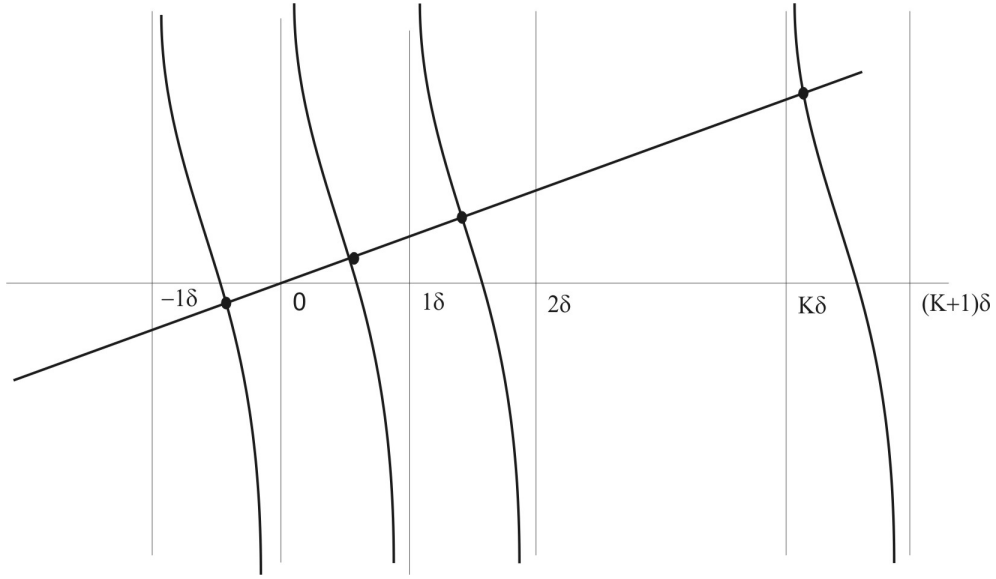


Figura 3.3: Visualização gráfica dos autovalores. As retas verticais passam pelos autovalores de H_0 . Os autovalores são determinados pela abscissa dos pontos de intersecção dos gráficos $y = x$ e $y = 1/\text{tg}(\alpha x)$. Vê-se que cada intervalo δ possui apenas um autovalor.

que corresponderia, no problema original, ao oscilador principal no estado coerente e o reservatório no estado fundamental. Para isso devemos saber expressar este estado na base dos auto-valores de H'_{ef} :

$$|\phi\rangle = \sum_k \langle\phi|\psi_\mu\rangle |\psi_\mu\rangle,$$

pois então a dinâmica subsequente será:

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_k \langle\phi|\psi_\mu\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_\mu} |\psi_\mu\rangle. \quad (3.65)$$

Primeiramente, temos que avaliar o denominador da primeira das equações (3.59)

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 \sum_k \left(\frac{1}{E_\mu - E_k} \right)^2 &= 1 + \frac{\gamma^2}{\delta^2} \sum_k \left(\frac{E_\mu}{\delta} - k \right)^{-2} = \\ &= 1 + \frac{\pi^2 \gamma^2}{\delta^2} \left[1 + \left(\text{tg} \frac{\pi E_k}{\delta} \right)^{-2} \right] = \\ &= 1 + \frac{\pi^2 \gamma^2}{\delta^2} + \frac{E_\mu}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2} \left[\gamma^2 + \left(\frac{\hbar \Gamma}{2} \right)^2 + E_\mu \right], \end{aligned}$$

onde, nos dois últimos passos utilizamos as equações (3.63) e (3.54). Resulta então que

$$\langle\phi|\psi_\mu\rangle = \frac{\gamma}{\left[\gamma^2 + \left(\frac{\hbar \Gamma}{2} \right)^2 + E_\mu \right]}. \quad (3.66)$$

Voltando agora para $|\psi(t)\rangle$, temos:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k \frac{\gamma e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}}{[\gamma^2 + (\frac{\hbar\Gamma}{2})^2 + E_\mu]^{\frac{1}{2}}} |\psi_\mu\rangle. \quad (3.67)$$

De posse de $|\Psi(t)\rangle$ poderemos avaliar sua projeção sobre $|\phi\rangle$, o que nos dará ao parâmetro de coerência do oscilador principal dividido pelo seu valor inicial, i.e., $\alpha(t)/\alpha_0$, (ver (3.53)). Temos então

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = \sum_k \frac{\gamma^2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}}{[\gamma^2 + (\frac{\hbar\Gamma}{2})^2 + E_\mu]}. \quad (3.68)$$

Substituindo o γ^2 do numerador pela relação (3.54):

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = \delta \sum_k \frac{\hbar\Gamma/2\pi e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t}}{[\gamma^2 + (\frac{\hbar\Gamma}{2})^2 + E_\mu]}. \quad (3.69)$$

Como vimos anteriormente, a densidade de auto-energias é $1/\delta$, de modo que a soma $\delta \sum_k F(E_\mu)$ tende a integral $\int F(E)dE$ e então teremos, notando que $\gamma^2 \rightarrow 0$,

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar\Gamma}{2\pi} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E t}}{(\frac{\hbar\Gamma}{2})^2 + E^2} dE. \quad (3.70)$$

Essa integral pode ser avaliada pelo método dos resíduos e nos dá

$$\langle\phi|\psi(t)\rangle = e^{-\Gamma t/2}. \quad (3.71)$$

Finalmente, usando (3.53), temos:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \langle\phi|e^{-i\omega_0 t}|\Psi(t)\rangle = e^{-(i\omega_0 + \Gamma/2)t} \quad (3.72)$$

e

$$|\alpha(t)|^2 = |\alpha_0|^2 e^{-\Gamma t}. \quad (3.73)$$

Então Γ será a constante de relaxamento do sistema. Enfim, o resultado coincide com a solução da equação mestra à temperatura nula a partir de um estado inicial coerente e nos mostra com clareza que o decaimento irreversível da energia do oscilador principal ocorre quando temos um contínuo de graus de liberdade no reservatório. Como foi discutido na seção sobre o comportamento dos auto-valores de Hamiltoniano total e como pode ser visto na integral da equação (3.70), apenas os osciladores (ou estados do contínuo) com frequências (ou energias) satisfazendo $|E| \leq \hbar\Gamma$ interagem significativamente com o oscilador principal (estado discreto). Portanto, a idéia de estender as frequências dos osciladores para $-\infty$ não é problemática desde que tenhamos $\Gamma \ll \omega_0$ o que irá nos garantir

que nenhum dos osciladores que contribuem significativamente com a dinâmica sejam não físicos (ou seja, com frequência negativa). Ademais, a hipótese de que as constantes de acoplamento independam de k pode ser relaxada para a hipótese de que não dependam significativamente de k numa região de frequências em torno de ω_0 e de largura Γ .

3.4.5 Decoerência de Estados de Gato

Apesar dessas abordagens serem altamente restritivas quanto ao estado inicial do oscilador principal, elas ainda nos permite analisar a dinâmica de uma classe importante de estados de gato. De fato, da linearidade das equações (3.44), segue que a dinâmica do sistema global sobre um estado inicial do tipo (ainda considerando um numero finito de osciladores):

$$|\Psi(0)\rangle = c(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle) \otimes \prod_k |0_k\rangle, \quad (3.74)$$

terá a forma

$$|\Psi(t)\rangle = c(|\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k |\beta_k(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle \otimes \prod_k |-\beta_k(t)\rangle). \quad (3.75)$$

Se estivermos olhando apenas para a dinâmica do oscilador principal, ou campo, devemos efetuar o traço sobre o reservatório. O operador densidade do sistema global será:

$$\begin{aligned} \rho_S = c^2 [& |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \otimes \prod_k |\beta_k(t)\rangle \langle \beta_k(t)| + |-\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \otimes \prod_k |-\beta_k(t)\rangle \langle -\beta_k(t)| + \\ & |\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \otimes \prod_k |\beta_k(t)\rangle \langle -\beta_k(t)| + |-\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \otimes \prod_k |-\beta_k(t)\rangle \langle \beta_k(t)|]. \end{aligned}$$

Tomando o traço sobre o reservatório teremos:

$$\begin{aligned} \rho_S = c^2 [& |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \prod_k \langle \beta_k(t)| \beta_k(t) \rangle + |-\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \prod_k \langle -\beta_k(t)| -\beta_k(t) \rangle + \\ & |\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \prod_k \langle \beta_k(t)| -\beta_k(t) \rangle + |-\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| \prod_k \langle -\beta_k(t)| \beta_k(t) \rangle], \end{aligned}$$

e usando a propriedade (3.2) do produto interno entre estados coerentes

$$\begin{aligned} \rho_S = c^2 [& |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \\ & |\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| e^{-2\Sigma_k |\beta_k(t)|^2} + |-\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| e^{-2\Sigma_k |\beta_k(t)|^2}]. \end{aligned}$$

Agora lembremos que essas soluções preservam o número de excitações, de modo que $\sum_k |\beta_k(t)|^2 = |\alpha_0|^2 = |\alpha(t)|^2$, e a solução fica:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) = c^2 [& |\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)| + |-\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| \\ & + F(t) |\alpha(t)\rangle \langle -\alpha(t)| + F(t) |-\alpha(t)\rangle \langle \alpha(t)|], \end{aligned} \quad (3.76)$$

com $F(t) = e^{-2(|\alpha_0|^2 - |\alpha(t)|^2)t}$.

Podemos aplicar então os métodos descritos nesta seção para obter a dinâmica da energia do oscilador, descrita por $|\alpha(t)|^2$ e de sua decoerência, descrita por $F(t)$.

Para um reservatório com função de estrutura “plana” (Markoviano) $\alpha(t)$ assume seu decaimento exponencial usual, e portanto quase completa decoerência se $\alpha_0 \gg 1$, pois então $F(t) \approx 0$ para tempos grandes. Reservatórios estruturados, no entanto, podem levar a comportamentos distintos qualitativamente para a função decoerência. Por exemplo, para um função de estrutura Lorentziana, a decoerência também será quase total, mas não irá decair monotonamente, já que $|\alpha(t)|^2 \rightarrow 0$, mas possivelmente exibindo oscilações, como vimos anteriormente. Já a função de estrutura de um *gap* fotônico pode levar, como ocorre para a dissipação de energia, a uma decoerência parcial, mesmo que $\alpha_0 \gg 1$, pois $\alpha(t)$ não irá decair a zero (ver Fig.(3.4)).

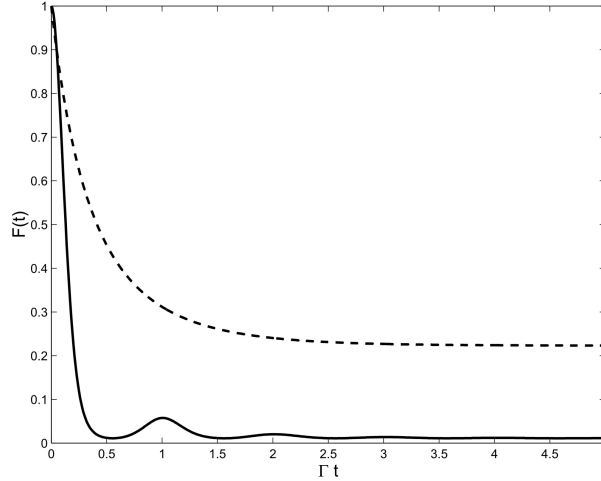


Figura 3.4: Comportamento da decoerência do oscilador principal, dada por $F(t)$, para os dois casos considerados anteriormente (ver legenda da Fig.(3.2)).

Agora observe que o estado (3.75) tem a forma:

$$|\Psi(t)\rangle = c[|C_+(t)\rangle |R_+(t)\rangle + |C_-(t)\rangle |R_-(t)\rangle], \quad (3.77)$$

onde $|C_{\pm}(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle$ são os estados do campo e $|R_{\pm}(t)\rangle = \prod_k |\pm\beta_k\rangle$ são os estados do reservatório como um todo. Ademais, temos

$$|\langle C_+(t)|C_-(t)\rangle| = e^{-2|\alpha(t)|^2}, \quad (3.78)$$

$$|\langle R_+(t)|R_-(t)\rangle| = e^{-2(|\alpha_0|^2 - |\alpha(t)|^2)}. \quad (3.79)$$

Então, se em algum instante de tempo $\bar{t}$ tivermos, por exemplo, $\alpha(\bar{t}) = \alpha_0/2$, o estado $|C_+(\bar{t})\rangle$ será aproximadamente ortogonal a $|C_-(\bar{t})\rangle$ assim como o estado do reservatório

$|R_+(\bar{t})\rangle$ será ortogonal a $|R_-(\bar{t})\rangle$. Isso implica que, neste instante, o estado do sistema campo+reservatório é fortemente emaranhado, e a hipótese de Bohr não será válida. Considerando o decaimento exponencial de $\alpha(t)$ (caso Markoviano), vemos que para valores intermediários de tempo (especificamente, quando tivermos $\kappa t \ll 1$ e $\kappa|\alpha_0|^2 t \gg 1$) o sistema estará sempre em um estado emaranhado desta natureza. No entanto, será justamente esse emaranhamento que irá levar a um comportamento para a dinâmica do estado reduzido do campo coincidente com a equação mestra. Realmente, pela equação (3.76) e as duas equações logo acima dela, notamos que o decaimento dos elementos fora-da-diagonal é devido ao fato de que cada estado do campo $|C_\pm(t)\rangle$ está associado a um estado do reservatório $|R_\pm(t)\rangle$, respectivamente, sendo que estes últimos tornam cada vez mais distintos (ou ortogonais) a medida que o tempo passa. Ou seja, para intervalos intermediários de tempo, os elementos fora-da-diagonal se tornam tão menores quanto maior for o emaranhamento entre o oscilador principal e o reservatório.

Capítulo 4

Reversão Temporal em um Experimento de Cavidade Óptica

No capítulo anterior revisamos a descrição quântica de campos eletromagnéticos no vácuo (sem a presença de cargas ou correntes) e restritos a regiões finitas do espaço por um condutor (ou cavidade óptica) dando especial atenção a situação em que apenas um modo de campo é excitado na cavidade. Vimos, através de um modelo fenomenológico, os diversos efeitos que as imperfeições da cavidade podem implicar sobre o campo, como dissipação, difusão e decoerência. Neste capítulo iremos considerar a interação do campo quantizado com a matéria na situação, possivelmente, mais simples possível: a interação do campo com um único átomo neutro de dois níveis, descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings. Investigaremos diversos aspectos da dinâmica deste sistema primeiramente desconsiderando a dissipação para obter uma noção intuitiva de interação átomo-campo e, depois, consideramos o modelo mais realístico.

4.1 O Modelo de Jaynes-Cummings

Como nesse modelo são considerados apenas átomos neutros, seus graus externos de liberdade não serão significativamente alterados pela interação com o campo e iremos nos preocupar, portanto, apenas em descrever seus graus internos de liberdade. Temos em mente, ainda, experimentos onde o tempo de decaimento do átomo τ_R é muito maior que tempo de interação entre átomo e campo, de modo que seu acoplamento com outros modos de campo pode ser desprezado. Analogamente, o tempo de decaimento do campo ($1/\kappa$, onde κ é a taxa de decaimento) será também muito maior que o tempo de duração do experimento e então, numa primeira análise, consideramos o sistema átomo+campo como

um sistema isolado. Como vimos anteriormente, isso não implica que efeitos de decoerência possam ser desprezados porque, em geral, ocorrem numa taxa muito maior que a taxa de decaimento e, a partir de certo ponto, é vital considerar as imperfeições da cavidade. De qualquer forma, o estudo do sistema isolado já é suficiente para descrever uma série de experimentos e, com certeza, é essencial entendê-lo bem antes de passar a um modelo mais realístico (e consideravelmente mais complicado).

Denotando por $|e\rangle$ e $|g\rangle$ os auto-estados de energia excitado e fundamental, respectivamente, podemos então representar o Hamiltoniano do átomo na forma

$$H_a = E_g |g\rangle \langle g| + E_e |e\rangle \langle e|.$$

Como vimos no capítulo anterior, o Hamiltoniano de um único modo de campo eletromagnético quantizado pode ser escrito

$$H_c = \hbar\omega_c a^\dagger a,$$

onde $a^\dagger$ e a são os operadores de criação e destruição de fótons, respectivamente, e desconsideramos a energia de ponto zero. Já a interação entre átomo e campo é então tomada na aproximação de dipolo:

$$H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{D}$ seria o operador momento de dipolo do átomo e $\mathbf{E}$ o operador campo elétrico. Como o momento de dipolo do átomo está associado apenas a seus graus internos de liberdade, podemos representar o operador $\mathbf{D}$ na base do hamiltoniano do átomo

$$\mathbf{D} = \sum_{m=\{e,g\}} \sum_{n=\{e,g\}} |n\rangle \langle n|\mathbf{D}|m\rangle \langle m|. \quad (4.2)$$

Supõe-se então que $\langle n|\mathbf{D}|m\rangle = 0$ para $n = m$ e, por simplicidade, $\mathbf{d}_{n,m} = \langle n|\mathbf{D}|m\rangle = \langle m|\mathbf{D}|n\rangle$, i.e, a grandeza $\mathbf{d}_{e,g}$ é um vetor com coordenadas reais e $\mathbf{d}_{g,e} = \mathbf{d}_{e,g} \equiv \mathbf{d}$. Para um átomo de apenas um elétron o fato de que os elementos da diagonal do operador dipolo são nulos é justificável. Realmente, neste caso, o operador dipolo é simplesmente $-e\mathbf{r}$ onde $\mathbf{r}$ é a posição do elétron relativa ao centro de massa do átomo. Como o potencial a que o elétron está submetido é esfericamente simétrico, os estados de energia serão invariantes por inversão espacial e, então, $\langle n|\mathbf{r}|n\rangle = \langle n|-\mathbf{r}|n\rangle = 0$. Definindo agora os operadores

$$\begin{aligned} \sigma_z &= |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|, \\ \sigma_+ &= |e\rangle \langle g|, \\ \sigma_- &= |g\rangle \langle e|, \end{aligned} \quad (4.3)$$

e podemos reescrever o Hamiltoniano do átomo da seguinte maneira:

$$H_a = \hbar\omega\sigma_z + \frac{1}{2}(E_g + E_e), \quad (4.4)$$

onde $\hbar\omega_a = E_e - E_g$. Com os operadores (4.3), o momento de dipolo do átomo ficará

$$\mathbf{D} = (\sigma_+ + \sigma_-)\mathbf{d}. \quad (4.5)$$

Note que os operadores (4.3) satisfazem, é trivial verificar, as mesmas relações de comutação dos operadores de Pauli. Lembrando que temos apenas um modo de campo e que estamos na representação de Schrodinger, a expressão (3.30) nos fornece a seguinte forma para o campo elétrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar\omega_c)^{1/2}(a^\dagger + a)\mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ descreve o perfil espacial do modo. Inserindo essa expressão no Hamiltoniano de interação e a forma (4.5) para o momento de dipolo, obtemos

$$H_I = -(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a)(2\pi\hbar\omega_c)^{1/2}\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

$$= \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_+^\dagger + \sigma_- a), \quad (4.8)$$

onde $g = -(2\pi\hbar\omega_c)^{1/2}\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})/\hbar$. O primeiro termo desse Hamiltoniano descreve o processo onde o átomo é excitado e o campo perde um fóton, e o segundo termo, o processo inverso, o átomo decai para o estado fundamental e o campo ganha um fóton. O terceiro termo leva o átomo para o estado excitado e o campo ganha um fóton, e o quarto, o processo inverso, o átomo decai e o campo perde um fóton. Tipicamente, estamos interessados na situação em que $\omega_c \approx \omega_a$ ou seja, de quase ressonância, de modo que os dois primeiros processos serão então aproximadamente conservativos e os dois últimos não o serão (o que não quer dizer que a energia do sistema não se conserve sob a interação como um todo: o sistema total é isolado e seu Hamiltoniano é independente do tempo). A denominada *aproximação de onda girante* (RWA), consiste em desprezar os dois últimos termos dessa interação. Para entender melhor essa aproximação, é conveniente expressar o Hamiltoniano total na representação de interação relativa a $H_0 = H_a + H_c$. O resultado será

$$\hat{H}_I(t) = \hbar g(\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t} + \sigma_+ a^\dagger e^{i(\omega_a + \omega_c)t} + \sigma_- a e^{-i(\omega_a + \omega_c)t}), \quad (4.9)$$

onde $\Delta = \omega_a - \omega_c$ é o *dessintonia* entre as frequências do átomo e campo. Agora observe que, se $\Delta \approx 0$, os dois últimos termos estão multiplicados por exponenciais da forma $e^{-i2\omega_c t}$. Espera-se então que eles irão contribuir com oscilações no sistema com frequências da ordem de $2\omega_c$ enquanto os dois primeiros apenas com oscilações da ordem de g . Para o caso em

que $\omega_c \gg g$ e se estivermos de posse de um aparato de medida cuja resolução temporal é da ordem de $1/g$ as oscilações geradas pelos dois últimos termos poderão então ser desprezadas. Finalmente, sob a aproximação de onda girante, chegamos ao Hamiltoniano de Jaynes Cummings

$$H_{JC} = \hbar\omega_a\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (4.10)$$

A situação experimental típica na qual o Modelo de Jaynes-Cummings é aplicado é a seguinte: um átomo neutro de Rydberg é inserido em uma cavidade óptica de alto fator de qualidade $Q \equiv \omega_c/\kappa$ e resfriada à temperaturas abaixo de $1K^0$. Antes do átomo entrar na cavidade, um modo de campo é convenientemente excitado na mesma (de forma a produzir, e.g., um campo coerente, um estado de Fock ou simplesmente o vácuo) e deixado livre, i.e., não há fonte para o campo. O átomo passa com velocidade constante na cavidade e de modo que seu tempo de permanência seja da ordem de $1/g$.

Observe que a constante g , denominada frequência de Rabi, depende da localização do átomo na cavidade, pois depende da configuração espacial do campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Na maioria dos experimentos realizados [9, 10, 12, 41], o átomo passa com velocidade constante na cavidade, de forma que g adquiere uma dependência temporal $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{v}t + \mathbf{x}_0) = g(t)$. No entanto, o usual é tratar o modelo supondo g constante no tempo e, experimentalmente, os resultados são válidos desde que se considere as soluções dadas em uma escala de tempo efetiva [41]. Resumindo, as condições mínimas de aplicabilidade do modelo são: $\Delta, g \ll \omega_c, \omega_a$, para a aplicabilidade da RWA e $1/g \ll t_R, 1/\kappa$ quer dizer, o tempo de duração do experimento é muito menor que os tempos de decaimento do átomo e do campo, para que possamos considerá-los como um sistema isolado. A condição $g \gg \kappa$ é frequentemente denominada *regime de acoplamento forte*.

4.1.1 Soluções Exatas do MJC

O Hamiltoniano de Jaynes Cummings tem a vantagem de que seus auto-estados são facilmente expressos na base dos estados de energia do átomo e dos estados de Fock do campo. Os auto-estados, denominados na literatura *dressed states*, ou “estados vestidos” são, para $n \geq 1$ [42]:

$$|+, n\rangle = \cos(\theta_n) |e, n-1\rangle - \sin(\theta_n) |g, n\rangle, \quad (4.11)$$

$$|-, n\rangle = \sin(\theta_n) |e, n-1\rangle + \cos(\theta_n) |g, n\rangle, \quad (4.12)$$

com os auto-valores

$$E_{+,n} = \hbar[(n-1)\omega_c + \frac{1}{2}\omega_a] - \frac{\hbar}{2}(\Omega_n - \Delta), \quad (4.13)$$

$$E_{-,n} = \hbar[\omega_c - \frac{1}{2}\omega_a] + \frac{\hbar}{2}(\Omega_n - \Delta), \quad (4.14)$$

onde

$$\sin(\theta_n) = \frac{\Omega_n - \Delta}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad (4.15)$$

$$\cos(\theta_n) = \frac{2g\sqrt{n}}{\sqrt{(\Omega_n - \Delta)^2 + 4g^2n}}, \quad (4.16)$$

e as frequências

$$\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n} \quad (4.17)$$

são denominadas *frequências de Rabi*. O estado fundamental é simplesmente $|g, 0\rangle$ com energia $-\frac{1}{2}\hbar\omega_0$.

Esses estados têm uma aplicação interessante em óptica quântica: são capazes de fornecer uma interpretação bastante simples do espectro de fluorescência emitido por um átomo excitado por um laser. Em um experimento típico de fluorescência, a interação entre átomo e laser é bem descrita pelo MJC, mas o átomo se encontra em “espaço aberto” e a escala de tempo em que o espectro é medido torna fundamental o acoplamento do mesmo com os outros modos de campo, então seu decaimento será essencial. Na verdade, a própria idéia do experimento é esperar que o sistema átomo+campo passe por vários ciclos de absorção e emissão espontânea. O modelo também não descreve a fonte que abastece o laser, mas o efeito dessa será basicamente fazer com que os ciclos se repitam várias vezes e tornem a medição do espectro viável. O ponto é que o laser incidente no átomo é bastante intenso, com um número médio de fótons $\langle N \rangle \gg 1$ e as transições permitidas entre os “estados vestidos”, induzidas pelo decaimento do átomo, serão [43]

$$|+, N\rangle \rightarrow |-, N-1\rangle, \quad (4.18)$$

$$|-, N\rangle \rightarrow |+, N-1\rangle, \quad (4.19)$$

$$|+, N\rangle \rightarrow |+, N-1\rangle, \quad (4.20)$$

$$|-, N\rangle \rightarrow |-, N-1\rangle. \quad (4.21)$$

As duas primeiras transições têm frequências $\omega_c + \Omega_N$ e $\omega_c - \Omega_N$, e, as duas últimas, ω_c , onde ω_c é a frequência do laser, Ω_N é dado pela equação (4.17). Isso explicaria então o espectro de fluorescência que consiste de uma linha principal, centrada em ω_c , e duas linhas

simétricas com relação a esta, de intensidade menor. A largura de cada linha é da ordem de Γ , a taxa de decaimento do átomo, de modo que só é possível resolvê-las se $\Omega \gg \Gamma$, caso contrário têm-se apenas a linha principal alargada.

Retomando o MJC, vamos analisar o caso simples onde átomo se encontra inicialmente no estado excitado e o campo em um estado de Fock:

$$|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle. \quad (4.22)$$

Observe que podemos inverter as equações (4.11) e expressar os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$ na base dos “estados vestidos”:

$$|e, n\rangle = \cos\theta_{n+1} |+, n+1\rangle + \sin\theta_{n+1} |-, n+1\rangle, \quad (4.23)$$

$$|g, n\rangle = -\sin\theta_n |+, n\rangle + \cos\theta_n |-, n\rangle, \quad (4.24)$$

e então a evolução do estado inicial (4.22) será:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\theta_{n+1} e^{-i\Omega_{+,n+1}t} |+, n+1\rangle + \sin\theta_{n+1} e^{i\Omega_{-,n+1}t} |-, n+1\rangle, \quad (4.25)$$

onde definimos $\Omega_{\pm,n} = E_{\pm,n}/\hbar$. Voltando para a base dos auto-estados de energia do átomo e campo:

$$|\Psi(t)\rangle = [\cos^2\theta_{n+1} e^{-i\Omega_{+,n+1}t} + \sin^2\theta_{n+1} e^{-i\Omega_{-,n+1}t}] |e, n\rangle \quad (4.26)$$

$$+ \sin\theta_{n+1} \cos\theta_{n+1} [e^{-i\Omega_{-,n+1}t} - e^{-i\Omega_{+,n+1}t}] |g, n+1\rangle. \quad (4.27)$$

A partir de agora vamos nos concentrar no MJC ressonante, ou seja, com $\Delta = 0$. No caso especial $n = 0$, (4.26) se reduz a

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{1}{2}\omega_a t} (\cos gt |e, 0\rangle + \sin gt |g, 1\rangle). \quad (4.28)$$

Isto é, o fóton “contido” inicialmente no átomo “oscila” harmonicamente entre átomo e campo com frequência g . Experimentalmente, tal dinâmica já foi observada [41] e a velocidade com que o átomo passa pela cavidade pode ser ajustada para que o átomo saia da cavidade em um instante de tempo predeterminado, interrompendo a interação entre átomo e campo, “congelando” o estado do sistema total (desconsiderando, é claro, efeitos dissipativos). Outro procedimento comum para interromper a interação é aplicar um campo elétrico uniforme sobre a cavidade. Esse campo irá induzir rapidamente um deslocamento significativo na energia do átomo, devido ao efeito Stark, levando o sistema a um regime longe da ressonância, onde a interação pode ser desprezada. Se esse tempo for $gt = \pi/2$ (como dito anteriormente t , experimentalmente, será um tempo efetivo) o estado será

$$|\Psi(\pi/2g)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, 0\rangle), \quad (4.29)$$

que nada mais é que um estado emaranhado do tipo EPR (no sentido de que o paradoxo EPR pode ser formulado em termos de tais estados [44]) porque, após o átomo sair da cavidade, os dois sistemas emaranhados estão separados o suficiente para que se possa desprezar com segurança qualquer interação entre eles.

O foco central desse capítulo será examinar a dinâmica do MJC para o caso em que o campo se encontra inicialmente em um estado coerente, dando especial atenção à dinâmica da chamada *inversão de população*, $\langle \sigma_z \rangle(t)$. Sendo $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, a inversão de população nada mais é do que a diferença entre as probabilidades de se encontrar o átomo nos estados excitado e fundamental. Essa grandeza é de fundamental importância por ser a mais acessível experimentalmente, bastando medir o estado de energia do átomo após sua saída da cavidade.

Pode-se obter acesso a mais observáveis do sistema inserindo-se *zonas de Ramsey* antes e depois da cavidade óptica, que têm a função de efetuar rotações no estado do átomo. Outro procedimento comum é passar uma sequência de átomos. Um exemplo interessante do que se pode ter acesso se encontra na Ref. [45], onde foi possível medir diretamente a função de Wigner de um estado de Fock de um fóton do campo, apenas fazendo uso de tais recursos.

A zona de Ramsey é também uma cavidade óptica porém, com fator de qualidade muito inferior ao da principal, e seu campo tem que ser constantemente alimentado. O interessante é que o campo dentro da zona é de baixíssima intensidade, com um número médio de cerca 1 fóton mas, apesar disso, seu comportamento é de um campo clássico, no sentido de que não são formados estados emaranhados entre átomo e campo (ao contrário do que acontece na cavidade principal, como vimos acima). Esse comportamento clássico a baixa intensidade têm sua origem na forte dissipação da cavidade. Intuitivamente, o que acontece é que a cavidade da zona, devido a sua dissipação e, portanto, a sua absorção constante de fótons, age como um instrumento de medida do campo. Então mesmo que a interação entre átomo e campo (descrita pelo MJC) emaranhasse átomo e campo, a medida do estado do campo pela cavidade iria colapsar a função de onda do sistema, destruindo rapidamente esse emaranhamento. Na Ref. [46] uma análise quantitativa da zona de Ramsey é feita considerando-se todos os fatores, inclusive a fonte do campo e a dissipação, mostrando que o efeito global sobre o átomo é simplesmente girar seu estado.

Considere então o estado inicial:

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle |\alpha_0\rangle = |e\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.30)$$

Lembrando que $\Delta = 0$, temos $\cos(\theta_n) = \sin(\theta_n) = 1/\sqrt{2}$, $\Omega_n = 2g\sqrt{2}$ e $\Omega_{\pm,n} = \omega_a(n -$

$1/2) \pm gt\sqrt{n}$. Pela equação (4.25), concluímos:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_a(n+1/2)t} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ig\sqrt{n+1}t} |+, n+1\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ig\sqrt{n+1}t} |-, n+1\rangle \right] \\
 &= e^{-i\frac{\omega_a}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ig\sqrt{n+1}t} |+, n+1\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ig\sqrt{n+1}t} |-, n+1\rangle \right],
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega_a t}$. Para calcular a evolução da inversão de população, note que o operador σ_z funciona como um operador “escada” entre dois estados vestidos de mesmo n :

$$\sigma_z |+, n\rangle = |-, n\rangle, \tag{4.32}$$

$$\sigma_z |-, n\rangle = |+, n\rangle, \tag{4.33}$$

então

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \sigma_z | \Psi(t) \rangle = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{n!} \cos(2g\sqrt{n+1}t). \tag{4.34}$$

Para $\alpha_0 \gg 1$ o gráfico da inversão de população contém o colapso, que é o rápido decaimento das oscilações iniciais, seguido de seus ressurgimentos (ver Fig.4.1).

É interessante observar que, embora o modelo tenha sido introduzido na década de 60 [40], esse padrão das oscilações de Rabi passou despercebido até a década de 80 [47]. Veremos adiante que esses ressurgimentos são periódicos no tempo, porém, com larguras cada vez maiores a medida que o tempo cresce. Acontece então que, para tempos grandes, os ressurgimentos misturam-se uns aos outros formando um padrão praticamente aleatório de oscilações. Esse comportamento da inversão de população é devido ao fato de que é composta pela superposição das oscilações geradas pela interação do átomo com cada estado de Fock, cada uma com frequência distinta e pesadas pela distribuição de Poisson do campo coerente. O colapso então seria devido à defasagem dessas oscilações e, os ressurgimentos, a restauração parcial dessas fases. Em resumo, esse comportamento constitui uma evidência direta do caráter discreto da radiação e já foi observado experimentalmente [48]. Muito embora não tenha sido possível medir, nesse experimento, o primeiro revival, a transformada de Fourier do padrão obtido (colapso) indicava realmente que era composto por frequências que variavam com $\sqrt{n}$, como prevê o modelo.

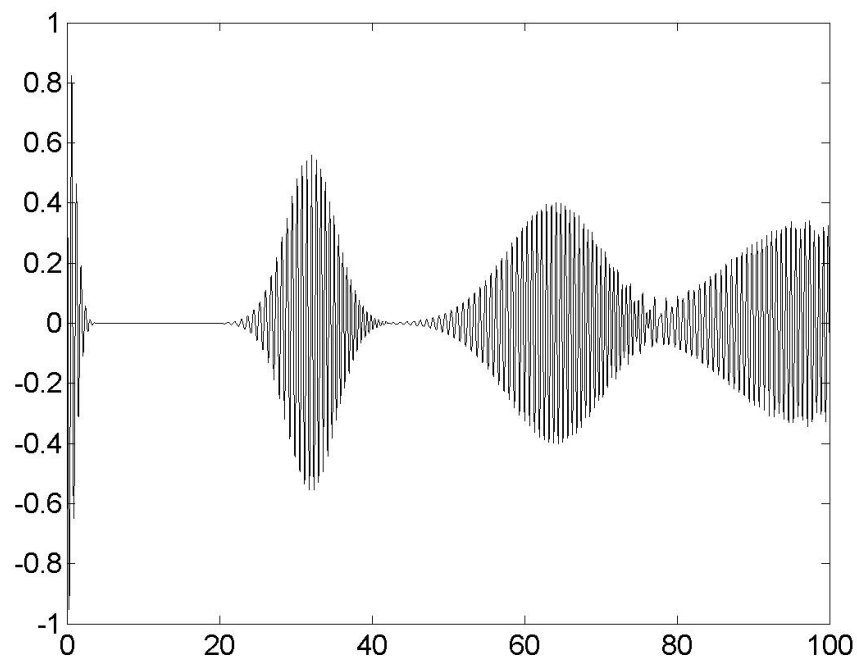


Figura 4.1: Padrão de colapsos e ressurgimentos das oscilações de Rabi para o estado inicial $|e\rangle|\alpha_0\rangle$, com $\alpha_0 = 5$, $g = 1$, $\hbar = 1$.

Note que o modelo semi-clássico que descreve essa situação pode ser obtido do Hamiltoniano de Jaynes Cummings (4.10) pela substituição [49]:

$$a \rightarrow \alpha_0 e^{-i\omega_c t}, \quad (4.35)$$

$$a^\dagger \rightarrow \alpha_0^* e^{i\omega_c t}, \quad (4.36)$$

e removendo a contribuição de energia de campo. Esse procedimento consiste em considerar o campo apenas como potencial externo. Caso o átomo se encontre inicialmente no estado excitado, a evolução subsequente será simplesmente

$$|\phi(t)\rangle = \cos(|\alpha_0|gt) |e\rangle + \text{sen}(|\alpha_0|gt) |g\rangle \quad (4.37)$$

e a inversão de população apenas iria oscilar harmonicamente no tempo, com frequência $2g|\alpha_0|$, sem colapso e sem ressurgimentos.

4.2 Aproximações do MJC

Nessa seção iremos ver duas aproximações importantes no MJC, ambas partindo da hipótese de que o campo inicial é coerente e mesoscópico. Por mesoscópico entende-se que $\alpha_0 \gg 1$ mas não o suficiente para que o campo possa ser considerado clássico. A primeira aproximação [52, 53] consiste em obter uma expressão mais transparente para a dinâmica da inversão de população (4.34), que permite distinguir com clareza cada ressurgimento e suas propriedades, como os tempos em que ocorrem, suas larguras, amplitudes e frequências. A segunda é uma aproximação da evolução como um todo [49, 50], i.e., do estado do sistema global. Essa aproximação nos fornece uma visão muito simples da dinâmica do sistema como a soma de dois estados produto, em contraposição à soma infinita de estados emaranhados da solução exata (4.31). Ainda por cima, essa aproximação permite uma interpretação simples e interessante do colapso e dos ressurgimentos como uma manifestação do princípio da complementaridade. Finalmente, tais resultados servem de base para uma aproximação da dinâmica do modelo de Jaynes Cummings dissipativo [51] que discutiremos na próxima seção.

4.2.1 Dissecando as Oscilações de Rabi

Primeiramente, a evolução da inversão de população (4.34) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \text{Re} \left[e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{n!} e^{-i2g\sqrt{n+1}t} \right]. \quad (4.38)$$

De acordo com as Refs. [52, 53], caso $\alpha_0 \gg 1$, a média de Poisson da função $e^{-i2g\sqrt{n+1}t}$, definida por

$$\langle e^{-i2g\sqrt{n+1}t} \rangle_P \equiv e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{n!} e^{-i2g\sqrt{n+1}t} \quad (4.39)$$

pode ser bem aproximada por uma soma infinita de funções de t , sendo cada uma formada pela multiplicação de um envelope gaussiano com uma função de rápidas oscilações. Explicitamente, teríamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-2igt\sqrt{n+1}} \approx w_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_{\nu}(t), \quad (4.40)$$

onde, para $\nu \geq 1$ inteiro,

$$w_{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{gt}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}} \exp \left[-\frac{g^2}{2\pi^2\nu^2} (t - t_{\nu})^2 + i \left(\frac{g^2 t^2}{2\pi\nu} - \pi/4 \right) \right], \quad (4.41)$$

com t_{ν} definido por

$$t_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{g} \sqrt{\bar{n}} \quad (4.42)$$

e

$$w_0(t) = \exp(-g^2 t^2 / 2 + i2gt\sqrt{\bar{n}}). \quad (4.43)$$

Tomando a parte real dessas funções para obter a inversão de população, vemos então que cada $w_{\nu}(t)$ identifica um ressurgimento pois, pelas Eq. (4.41), elas são multiplicadas por gaussianas em t centradas em t_{ν} , que identifica portanto os tempos de ressurgimento, e com larguras

$$\Delta t_{\nu} = \frac{\pi\nu}{g}. \quad (4.44)$$

O colapso das oscilações, por outro lado, é descrito por w_0 e seu decaimento tem a forma simples $\exp(-g^2 t^2 / 2)$, não dependendo de $\bar{n}$ (ou intensidade do campo). Com base nisso, define-se o tempo de colapso por $t_c = 1/g$.

Sendo $\delta_{\nu} = 2\pi\sqrt{\bar{n}}/g$ a separação entre os centros de dois ressurgimentos consecutivos, então podemos formular a condição para que eles não se misturem como

$$\delta_{\nu} = t_{\nu+1} - t_{\nu} \geq \Delta t_{\nu} \Rightarrow \nu \leq 2\sqrt{\bar{n}}.$$

Quer dizer, exigimos que a distância entre eles seja maior que a média de suas larguras. Enfim, a condição $\nu \leq 2\sqrt{\bar{n}}$ nos fornece uma estimativa simples de quais ressurgimentos serão resolvidos. É interessante notar que os tempos de ressurgimento (4.42) podem ser obtidos por um raciocínio mais intuitivo. A distribuição de poisson, para $\bar{n} \gg 1$, tem a forma

aproximada de uma gaussiana¹ centrada em $\bar{n}$ e de largura $\sqrt{\bar{n}}$. Como os ressurgimentos são devidos a restauração das fases entre as diferentes oscilações que contribuem para a inversão de população, é de se esperar que, levando em consideração a forma da distribuição de Poisson, será suficiente que as oscilações com frequências em torno de $2g\sqrt{\bar{n}+1}$ entrem em fase novamente. Então a condição para que frequências *adjacentes* entrem em fase seria

$$2g\sqrt{n+1} - 2g\sqrt{n} \approx 2\pi\nu, \quad (4.45)$$

com ν natural e para $n \approx \bar{n}$. Essa última condição nos permite expandir a função $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ em potências de $n - \bar{n}$ e truncar no termo de menor ordem, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx 1/2\sqrt{\bar{n}}$. Substituindo essa expansão em (4.45), obtemos

$$t_\nu = 2\pi\nu\sqrt{\bar{n}}/g,$$

que são exatamente os tempos de ressurgimento (4.42) encontrados por um formalismo mais rigoroso.

4.2.2 As Aproximações de Banacloche

Considere agora os seguintes estados *atômicos*:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi}|e\rangle + |g\rangle), \quad (4.46)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi}|e\rangle - |g\rangle). \quad (4.47)$$

Note que, para $\phi = 0$, esses são os auto-estados do operador momento de dipolo do átomo $\mathbf{D} = \mathbf{d}(\sigma_+ + \sigma_-)$ com auto-valores $\mathbf{d}$ e $-\mathbf{d}$, respectivamente. Mas, para qualquer ϕ , serão auto-estados do Hamiltoniano “clássico” de Jaynes-Cummings na representação de interação (com relação à $1/2\hbar\omega_a\sigma_z$):

$$\tilde{H}_{JC,classico} = \hbar g\alpha_0(\sigma_+e^{-i\phi} + \sigma_-e^{i\phi}), \quad (4.48)$$

com auto-valores $\pm\hbar g\alpha_0$, de forma eles não irão evoluir na representação de interação (exceto pela fase global). Dito de outra forma, na representação de Schrodinger o estado do átomo vai evoluir apenas segundo seu Hamiltoniano interno, como se o campo não estivesse lá. Fisicamente, repare que a amplitude do campo é proporcional à $e^{-i\phi-i\omega_a t} + e^{i\phi+i\omega_a t} \propto \cos(\phi + \omega_a t)$ enquanto que os valores esperados dos momentos de dipolo do átomo, apenas

¹Na verdade, no limite $\bar{n} \rightarrow \infty$ ela tende de fato a uma gaussiana. Tal resultado é conhecido como *aproximação gaussiana* e foi utilizado para obter essas aproximações da dinâmica da inversão de população.

devido a seu Hamiltoniano interno, serão proporcionais a $\cos(\phi + \omega_a t)$ e $\cos(\phi + \omega_a t + \pi)$ para $|+\rangle$ e $|-\rangle$, respectivamente. Então o que acontecerá aqui é que, considerando agora a interação entre eles, os momentos de dipolo do átomo e a amplitude do campo começarão a dinâmica em fase ou em π fora de fase, respectivamente, mas como ambos giram com a mesma frequência, resulta que a dinâmica do campo não afeta a dinâmica do átomo.

É claro que na abordagem totalmente quântica, via HJC, a situação não será tão simples assim, mas para $|\alpha_0| \gg 1$, e escrevendo o parâmetro de coerência do campo na forma $\alpha_0 e^{-i\phi}$, com $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, uma simplificação considerável da dinâmica de tais estados é possível [49, 50]:

$$|+\rangle |\alpha_0 e^{-i\phi}\rangle \rightarrow |\phi_+(t)\rangle |\Phi_+(t)\rangle, \quad (4.49)$$

$$|-\rangle |\alpha_0 e^{-i\phi}\rangle \rightarrow |\phi_-(t)\rangle |\Phi_-(t)\rangle, \quad (4.50)$$

onde

$$|\phi_{\pm}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi} e^{\mp i g t / 2 \sqrt{\bar{n}}} |e\rangle \pm |g\rangle) \quad (4.51)$$

$$|\Phi_{\pm}(t)\rangle = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{-i n \phi} e^{\mp i g t \sqrt{\bar{n}}} |n\rangle, \quad (4.52)$$

e estamos na representação de interação. Denominaremos esse resultado como as *aproximações de Banacloche*. A aproximação é no sentido de que a norma da diferença entre essas soluções e as soluções exatas tendem a zero quando $\bar{n} \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$ devagar o suficiente para que $g t / \bar{n} \rightarrow 0$. Essa última condição impõe uma restrição no intervalo de tempo em que a aproximação é boa: $t \ll \bar{n} / g$. No entanto, como os tempos de ressurgimento crescem com $\sqrt{\bar{n}} / g$ ela permite englobar vários dos primeiros ressurgimentos, especificamente, aqueles em que $\nu \leq \sqrt{\bar{n}}$.

Esse resultado tem várias consequências interessantes. A primeira que nos chama atenção é fato de que, em oposição ao estado emaranhado complicado que é formado quando o átomo se encontra em um auto-estado de energia (4.26), para estes estados especiais o emaranhamento é desprezível e podemos identificar o estado de cada sistema. O estado do átomo mantém uma forma similar à do caso clássico porém, a frequência de oscilação do momento de dipolo dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ é alterada em $g/2\sqrt{\bar{n}}$ e $-g/2\sqrt{\bar{n}}$, respectivamente. Já os estados do campo, apesar de preservarem a distribuição de Poisson do estado inicial, apresentam fases que dificultam sua interpretação. Mais adiante veremos como podemos ter uma interpretação mais clara da dinâmica do campo. Encarando esse sistema como um sistema aberto, onde o átomo seria o sistema de interesse e o campo, o ambiente, essa aproximação nos fornece um exemplo excelente de dinâmica não unitária. Olhando apenas para a dinâmica do átomo nas equações (4.49) e (4.50), e com base na equação (4.51),

vemos que em $t_0 = \pi\sqrt{n}/g = t_R/2$, onde t_R seria o tempo do primeiro ressurgimento, o átomo evolui para o mesmo estado (a menos de um sinal global):

$$|\phi_{\pm}(t_0)\rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-ie^{-i\phi}|e\rangle + |g\rangle). \quad (4.53)$$

Na verdade, é possível mostrar [49] que qualquer estado inicial do átomo, incluindo os mistos, irá evoluir para o estado (4.53) em t_0 . Vê-se então que o mapa dinâmico é não unitário por não fazer uma correspondência um-a-um entre os estados em $t = 0$ e t_0 mas, muito pelo contrário, esse mapa leva todos os estados atômicos em $t = 0$ para o um mesmo estado em t_0 , de forma que o átomo “esquece” inteiramente o seu estado inicial neste instante. Ora, é claro que a dinâmica do sistema total é unitária, já que se trata de um sistema isolado, e isso implica que a informação sobre o estado inicial do átomo é “armazenada” no estado do campo. Esse seria também um exemplo de efeitos de memória em sistemas abertos, pois apenas a informação do estado do átomo no instante t_0 , supondo que não tivéssemos acesso ao estado do campo, não é suficiente para prever sua evolução futura, temos que conhecer também o seu passado (o estado do átomo em algum instante de tempo menor que t_0). Obviamente, a dinâmica seria não-Markoviana.

Agora, possivelmente, um dos aspectos mais interessantes desse “cruzamento de trajetórias” em t_0 é o fato de que isso constitui um exemplo concreto (e raro [49]) de preparação de estado. Por preparação de estado aqui entendemos uma “caixa preta” na qual se insere um sistema e ele sairá do outro lado sempre no mesmo estado independentemente de seu estado anterior. O exemplo mais trivial de preparação de estado é o de preparar um átomo em seu estado fundamental: “basta” colocá-lo no vácuo do campo eletromagnético e esperar um intervalo de tempo suficientemente grande. De qualquer forma, o processo de preparação pode ser representado então por um mapa que leva todos os elementos do conjunto de estados em um único e mesmo estado, exatamente o que ocorre com o átomo em t_0 no MJC. Como tal processo é claramente irreversível, ele não pode ser realizado por um processo unitário, sendo necessário então um sistema auxiliar para executá-lo, no caso do MJC, seria o campo na cavidade, e no caso do átomo no estado fundamental, o vácuo do campo eletromagnético.

Como os estados (4.46) formam uma base para o espaço de Hilbert do átomo, podemos aplicar as aproximações de Banachloche para qualquer estado atômico inicial. Em particular, iremos retomar a evolução investigada na seção anterior em que o átomo começa no estado excitado. Para simplificar as contas faremos $\phi = 0$ nas definições (4.46), que é o mesmo que considerar o parâmetro de coerência do campo real e positivo. Teremos então

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \quad (4.54)$$

de forma que

$$|e\rangle |\sqrt{n}\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[|\phi_+(t)\rangle |\Phi_+(t)\rangle + |\phi_-(t)\rangle |\Phi_-(t)\rangle]. \quad (4.55)$$

Note que, em $t = t_0$, o estado do sistema será separável já que, como vimos, os estados do átomo $|\phi_{\pm}\rangle$ irão coincidir neste momento. É possível mostrar [56] que o estado do campo neste instante será um estado do tipo gato de Schrodinger, onde os estados da superposição têm mesma amplitude, fases opostas, e são distinguíveis (a diferença entre suas fases é maior do que a dispersão na fase de cada estado). Uma aproximação adicional pode ser feita aqui de forma a entender com mais clareza os estados do campo. Levando em consideração a forma da distribuição de Poisson, a idéia é expandir as fases $g\sqrt{n}$ que aparecem nos estados, assim como fizemos na seção anterior para obter os tempos de ressurgimento:

$$\sqrt{n} = \sqrt{\bar{n}} + \frac{(n - \bar{n})}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1}{8\sqrt{\bar{n}}} \left[\frac{n - \bar{n}}{\sqrt{\bar{n}}} \right]^2 + \dots \quad (4.56)$$

$$= \frac{\sqrt{\bar{n}}}{2} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n}}} - \frac{1}{8\sqrt{\bar{n}}} \left[\frac{n - \bar{n}}{\sqrt{\bar{n}}} \right]^2 + \dots \quad (4.57)$$

Truncando a expansão no segundo termo, e substituindo na expressão (4.52) para a evolução dos estados do campo, teremos

$$|\Phi_{\pm}\rangle(t) \approx e^{-\bar{n}} e^{\mp ig\sqrt{\bar{n}}t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha_{\pm}(t)]^n}{\sqrt{n!}} e^{\pm ig(n-\bar{n})^2/(8\bar{n}^{3/2})}, \quad (4.58)$$

onde $\alpha_{\pm}(t) = \bar{n}^{1/2} \exp(\mp igt/2\sqrt{\bar{n}})$. Devido à forma e largura da distribuição de Poisson, os termos que irão contribuir significativamente aos estados do campo são aqueles com $-\sqrt{\bar{n}} + \bar{n} < n < +\bar{n} + \sqrt{\bar{n}}$ de forma que o termo $(n - \bar{n})^2$ na expansão (4.57), será no máximo de ordem $\bar{n}$. Então, desde que

$$gt \ll 2\pi\sqrt{\bar{n}} = t_R, \quad (4.59)$$

o termo quadrático em $\bar{n}$ e seus subsequentes serão desprezíveis, de forma que os campos se manterão coerentes:

$$|\Phi_{\pm}\rangle(t) \approx e^{-\bar{n}} e^{\mp ig\sqrt{\bar{n}}t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha_{\pm}(t)]^n}{\sqrt{n!}}. \quad (4.60)$$

Analogamente ao que acontece com o átomo, as amplitude do campo, $\langle a \rangle(t) = \alpha_{\pm}(t) = \alpha_0 \exp(-i(\omega_c \pm g/2\sqrt{\bar{n}})t)$, irão girar com frequências modificadas em $\pm g/2\sqrt{\bar{n}}$. A figura 4.2, nos mostra esquematicamente a dinâmica do sistema em um diagrama de fasores. As setas representam os momentos de dipolo dos estados atômicos $+$ e $-$, e os círculos, os campos coerentes associados.

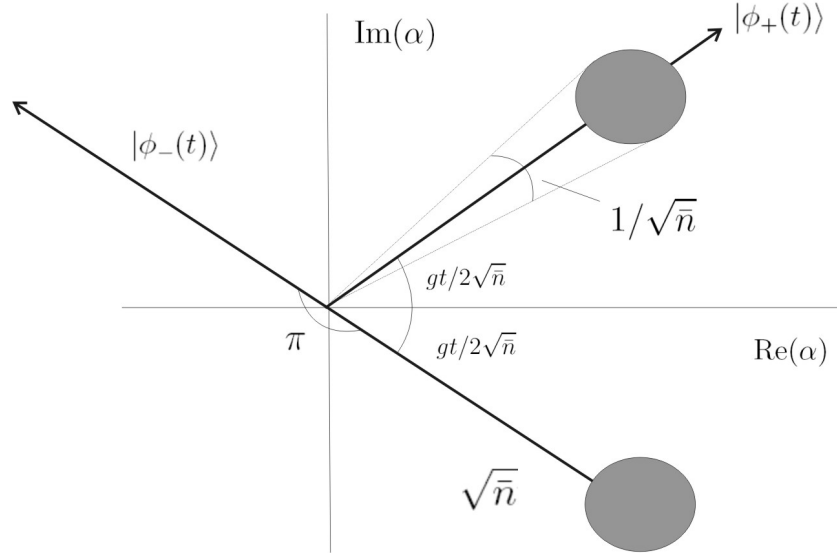


Figura 4.2: Representação esquemática da dinâmica do sistema subsequente ao estado inicial $|e\rangle |\sqrt{n}\rangle$, na representação de interação. As setas representam a rotação do momento de dipolo dos estados $+$ e $-$ e os círculos a amplitude e flutuação das duas componentes de campo coerente formadas.

Apesar dessa última aproximação não ser válida para descrever nem o primeiro revival (vide (4.59)), ela ainda nos permite descrever o colapso das oscilações de Rabi. Tomando então o valor esperado de σ_z na evolução (4.55) e com os estados de campo (4.60), teremos:

$$\langle \sigma_z \rangle (t) = \text{Re} \langle \Phi_+(t) | \Phi_-(t) \rangle \quad (4.61)$$

$$= \text{Re} e^{(-\bar{n} + \bar{n} e^{-igt/\sqrt{n}})} \quad (4.62)$$

$$= e^{[-2\bar{n} \sin^2(gt/2\sqrt{n})]} \text{Re} e^{i[gt\sqrt{n} + \bar{n} \sin(gt/\sqrt{n})]}, \quad (4.63)$$

que é o produto de duas funções: a primeira de oscilação lenta, de frequência $g/2\sqrt{n}$ e que nos dará o envelope; a segunda, de frequência $g\sqrt{n}/2$, nos fornece as oscilações rápidas. Como temos $gt/\sqrt{n} \ll 1$, podemos expandir o seno no argumento da exponencial do envelope e reter em primeira ordem, obtendo simplesmente $e^{-(gt)^2/2}$, assim como havia sido obtido na seção anterior, levando ao tempo de colapso $1/g$. É interessante observar que essa aproximação, apesar de não ser válida para descrever os ressurgimentos, nos dá os tempos corretos para eles. Realmente, vemos que a inversão de população só é substancialmente diferente de zero quando $\sin(gt/2\sqrt{n}) = 0$, ou seja, quando $t = 2\pi\nu\sqrt{n}/g$, com ν natural.

Para obter uma interpretação física do colapso, voltemos antes ao Hamiltoniano semi-clássico de Jaynes-Cummings, na representação de interação. Consideremos a evolução do átomo inicialmente no estado excitado, em termos dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Como estes são

auto-estados do hamiltoniano com auto-valores $\hbar g\alpha_0$ e $-\hbar g\alpha_0$, respectivamente, a evolução será:

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-ig\alpha_0 t} |+\rangle + e^{ig\alpha_0 t} |-\rangle). \quad (4.64)$$

Tomando a matriz densidade desse estado, obtém-se

$$\rho_c(t) = \frac{1}{2}\{|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| + [e^{-i2g\alpha_0 t} |+\rangle\langle -| + H.c.]\}. \quad (4.65)$$

Como $\langle i|\sigma_z|j\rangle = 1 - \delta_{ij}$, $i, j = +, -$, teremos

$$\langle\sigma_z\rangle(t) = \text{Re } e^{-i2g\alpha_0 t}, \quad (4.66)$$

e podemos interpretar então as oscilações de Rabi de $\langle\sigma_z\rangle(t)$ como um fenômeno de interferência, no sentido de que esse sinal só ocorre se os elementos fora da diagonal da matriz densidade forem não nulos. Em outras palavras, devido a coerência entre os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, existente no estado inicial.

Retornando ao caso quântico, escrevemos o estado reduzido do átomo na aproximação (4.60), e considerando $t \leq 1/g$, obtemos

$$\rho_q(t) = \frac{1}{2}\{|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| + [e^{-i2g\sqrt{\bar{n}}t} |+\rangle\langle -| \langle\Psi_+(t)|\Psi_-(t)\rangle + H.c.]\}, \quad (4.67)$$

onde $\Psi_{\pm}(t)$ são os estados de campo $\exp(\pm ig\sqrt{\bar{n}}t/2) |\alpha_{\pm}(t)\rangle$ e foram feitas as aproximações $|\phi_{\pm}(t)\rangle \approx |\pm\rangle$, que equivale a fazer $e^{igt/2\sqrt{\bar{n}}} \approx 1$ nestes estados, já que estamos considerando intervalos de tempo da ordem de $1/g$. O mesmo, no entanto, não pode ser feito com a fase que aparece no campo coerente, devido a sua amplitude, $\sqrt{\bar{n}}$, ser muito maior que um [50]. A inversão de população resultante será:

$$\text{Re}[e^{-i2g\sqrt{\bar{n}}t} \langle\Psi_+(t)|\Psi_-(t)\rangle]. \quad (4.68)$$

Agora finalmente estamos em posição de interpretar o colapso. Em primeira instância, considerando o átomo como um sistema aberto, onde o campo seria o ambiente, podemos ver o colapso claramente como um processo de decoerência, intolerante as superposições dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Neste caso, a função decoerência seria $\Gamma(t) = \ln(|\langle\Psi_+(t)|\Psi_-(t)\rangle|)$. Obviamente, como o ambiente em questão tem um número finito de graus de liberdade, o processo não é irreversível, e os elementos fora-da-diagonal poderão ser restaurados.

Uma visão ainda mais interessante surge quando relacionamos essa dinâmica com o esquema proposto primeiramente por von Neumann para a descrição de um processo de medida [6, 49, 50, 55]. Ora, os estados do átomo $|\pm\rangle$ estão relacionados aos estados de campo $|\Psi_{\pm}(t)\rangle$ sendo estes últimos, no limite $\bar{n} \rightarrow \infty$, estados macroscópicos. Agora, a

condição para que esses estados de campo sejam macroscopicamente distinguíveis entre si, é de que a diferença entre suas fases (o ângulo formado entre $\alpha_+(t)$ e $\alpha_-(t)$ no plano complexo (ver figura 4.2)), deve ser maior do que a flutuação das fases de cada campo, no caso $1/\sqrt{n}$, pois são campos coerentes. Isso irá ocorrer exatamente no momento do colapso, quando $t = 1/g$ e, a partir desse momento, cada estado de campo retém informação não-ambígua sobre seu respectivo estado atômico. De certa forma o campo funcionaria como um detector dos estados atômicos $|\pm\rangle$. Lembrando então que as oscilações iniciais podem ser vistas como um fenômeno de interferência devido à coerência entre os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, o colapso ocorre justamente a partir do momento em que o campo consegue registrar esses estados atômicos, pondo fim ao padrão de interferência. Dito de outra forma, o colapso seria, então, uma manifestação do princípio da complementaridade.

Olhando o que foi visto nessa seção, é impressionante como que um modelo tão simples como o MJC, além de ser adequado para descrição de experimentos, é ainda relacionado, fornece exemplos ou evidências de diversos conceitos importantes de mecânica quântica e de mecânica quântica de sistemas abertos, como o princípio da complementaridade, processos de medida, processos de preparação de estados, caráter discreto da radiação, formação de estados EPR, formação de estados de gato, decoerência e dinâmica não-Markoviana. Mais ainda, tudo isso obtido a partir de um único tipo de estado inicial para o campo.

4.3 MJC Dissipativo

Na situação experimental típica mencionada anteriormente, há duas fontes principais de dissipação: o decaimento espontâneo ao qual o átomo está submetido, devido à sua interação com os outros modos de campo (considerando a baixa temperatura da cavidade é extremamente razoável desprezar os processos de absorção e emissão estimuladas termicamente); e as imperfeições da cavidade que irão levar ao decaimento do campo.

Consideremos primeiramente a dissipação do átomo no espaço livre. Por um raciocínio idêntico ao que foi apresentado no último capítulo, pode-se derivar uma equação mestra para a descrição dessa dissipação. Neste caso, os osciladores do reservatório seriam os modos de campo e a interação entre eles seria dada pelo mesma interação do MJC. Em outras palavras, seria o modelo de Jaynes-Cummings para vários modos de campo. A diferença é que no espaço livre têm-se um contínuo de modos e a derivação de equação mestra segue sob as mesmas hipóteses. A equação resultante, na representação de interação, tem a mesma forma que a equação para o campo, fazendo as substituições $a \rightarrow \sigma_-$ e

$a^\dagger \rightarrow \sigma_+$:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{2}(2\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho(t)\sigma_+\sigma_-). \quad (4.69)$$

É fácil derivar então as equações de movimento para os elementos da matriz densidade na base dos auto-estados do átomo

$$\frac{d\rho_{ee}(t)}{dt} = -\Gamma\rho_{gg}(t), \quad (4.70)$$

$$\frac{d\rho_{eg}(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{eg}(t), \quad (4.71)$$

$$\frac{d\rho_{gg}(t)}{dt} = \Gamma\rho_{ee}(t). \quad (4.72)$$

Com base nessas equações, vemos as taxas de decaimento de todos os elementos da matriz densidade são da ordem de Γ , então, desde que o experimento seja realizado durante um intervalo tempo muito menor do que $1/\Gamma$ a dissipação do átomo pode ser inteiramente desprezada. Nos experimentos realizados pelo grupo da *Ecole Normale Supérieure*, em Paris, a velocidade com que os átomos são inseridos na cavidade, e a taxa de decaimento dos átomos (átomos de rubídio excitados nos níveis com número principal da ordem de $n = 50$) são tais que, no espaço livre, o átomo iria percorrer alguns metros antes de decair. Como o átomo percorre uma trajetória no aparato de cerca 20cm, a condição para desprezar o decaimento do mesmo é satisfeita [41].

Como já foi discutido anteriormente, a dissipação do campo, no entanto, não pode ser completamente desprezada. Nos experimentos realizados por esse mesmo grupo, a condição de acoplamento forte é obtida, i.e., $g \gg \kappa$, de modo que, no intervalo de tempo em que o experimento é realizado, da ordem de $1/g$, o decaimento, ou perda de energia do campo, pode ser desprezado. No entanto, como vimos no capítulo anterior, efeitos de decoerência podem ocorrer em uma escala de tempo menor, como é o caso da decoerência a que um estado de gato formado pela superposição de campos coerentes está sujeita. Neste caso o tempo de decaimento dos elementos fora da diagonal é da ordem de $(\kappa\bar{n})^{-1}$, onde $\bar{n}$ seria a amplitude dos campos que formam a superposição. Pelo que vimos na seção anterior, estados desse tipo serão formados na cavidade quando o átomo entra no estado fundamental encontrando um campo coerente mesoscópico, dando origem ao colapso e ressurgimentos das oscilações de Rabi. Espera-se então a decoerência seja apreciável neste caso.

4.3.1 Testando a Decoerência com Reversão Temporal

Realmente, a decoerência é a tal ponto relevante, que inviabiliza a visualização mesmo do primeiro ressurgimento das oscilações de Rabi. Como a inversão de população é o único

observável do sistema que pode ser mensurável diretamente, em um experimento realizado por esse grupo [13], um truque foi usado para discernir, experimentalmente, em qual grau a decoerência participa da dinâmica após o colapso das oscilações de Rabi. A idéia, proposta neste caso por Morigi *et al.* [57], é aplicar, após o colapso, uma rotação rápida de π no estado do átomo (representada por σ_z) através de um pulso elétrico, denominado “kick pulse”. Desprezando por um momento a dissipação da cavidade, suponha que o pulso seja aplicado em um instante $T > 0$. Então, para qualquer $T > t > 0$, o estado do sistema será dado, na representação de interação, por

$$|\Psi_0\rangle = |e\rangle |\alpha_0\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle = U(t) |e\rangle |\alpha_0\rangle, \quad (4.73)$$

onde $U(t, 0) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_{JC} t)$ é o operador de evolução, e H_{JC} é o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings na representação de interação. Imediatamente após o kick, o estado será

$$|\Psi(T)\rangle = \sigma_z U(T, 0) |e\rangle |\alpha_0\rangle \quad (4.74)$$

e, para $t > T$,

$$|\Psi(t)\rangle = U(t - T) \sigma_z U(T) |e\rangle |\alpha_0\rangle. \quad (4.75)$$

Usando agora que $\sigma_z^2 = I_2$, $\sigma_z H_{JC} \sigma_z = -H_{JC}$ e a propriedade $\sigma_z \exp(B) \sigma_z = \exp(\sigma_z B \sigma_z)$, obtemos:

$$|\Psi(t)\rangle = \sigma_z e^{-\frac{i}{\hbar} (2T - t)} |\Psi(0)\rangle \quad (4.76)$$

$$= \sigma_z U(2T - t) |\Psi(0)\rangle. \quad (4.77)$$

Essa última equação nos mostra que, para cada $t > T$, o estado do sistema será igual ao seu estado no instante de tempo anterior simétrico em relação à T , seguido de uma rotação π no átomo. Quer dizer, a menos dessa rotação, a dinâmica do sistema posterior ao pulso será a imagem espelhada com relação a T da dinâmica anterior ao pulso (ver Fig.4.3). Para a dinâmica da inversão de população é exatamente isso que irá ocorrer, pois, para $t > T$

$$\langle \sigma \rangle_z(t) = \langle \Psi(2T - T) \sigma_z | \sigma_z | \sigma_z \Psi(2T - t) \rangle = \langle \sigma \rangle_z(2T - t). \quad (4.78)$$

4.3.2 Descrição da Realização Experimental

Um diagrama da montagem experimental está representado na figura 4.4(a). Átomos de Rb^{85} saem da fonte O , passam pela câmara B onde sua velocidade é selecionada, e são preparados no número atômico principal $n = 51$ (i.e., aonde se tornam átomos de Rydberg).

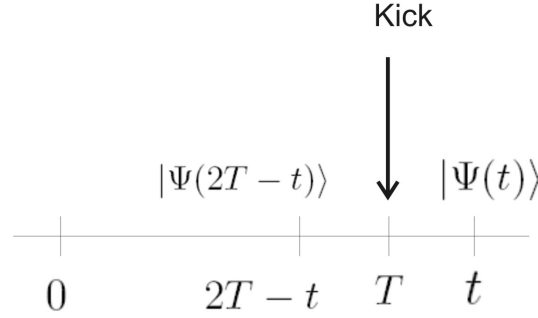


Figura 4.3: Representação esquemática da dinâmica com a presença do pulso. A menos da rotação π no estado do átomo, o estado do sistema em um instante $t > T$ é igual ao seu estado no instante de tempo simétrico em relação a T , $2T - t$. Em particular, em $t = 2T$, o sistema volta a seu estado inicial.

Antes do átomo entrar na cavidade C um campo coerente é injetado na mesma por uma fonte de microondas S . Após sair da cavidade, o estado do átomo é medido em D . O tempo de interação entre átomo e campo é controlado por um campo elétrico aplicado em toda a cavidade. Variando-se rapidamente a intensidade deste campo elétrico, pode-se colocar o átomo em ressonância ou longe-da-ressonância com o campo da cavidade, via efeito Stark quadrático, ou seja, “ligando” ou “desligando” a interação entre eles. A figura 4.4(b) exhibe o comportamento gaussiano de $g(x_0 + vt)$, onde g é a frequência de Rabi do acoplamento entre átomo e campo e v a velocidade do átomo, devido ao perfil gaussiano do modo do campo inserido na cavidade (modo M_b). Já a figura 4.4(c) nos mostra a frequência do átomo, controlada pelo campo elétrico, ao longo de sua trajetória na cavidade. Logo após o átomo entrar na cavidade a interação átomo-campo é ligada subitamente colocando-os em ressonância. No instante T , o campo elétrico é variado rapidamente (em comparação com a janela de tempo do experimento) mas de forma a efetuar a rotação de π no estado do átomo, quer dizer, em T é aplicado o pulso no átomo. Após o pulso, a interação é desligada no instante de tempo desejado.

A figura 4.5 contém a dinâmica da probabilidade de se encontrar o átomo no estado fundamental, dada pelo observável $|g\rangle\langle g| = 1/2(1 - \sigma_z)$, de modo que esse sinal é uma função linear da inversão de população $P_g(t_i) = 1/2(1 - \langle\sigma_z\rangle(t_i))$. Na parte a) têm-se apenas as oscilações sem o pulso aplicado. As partes b) e c) mostram as oscilações com o pulso aplicado em instantes diferentes, $T = 18\mu s$ e $T = 22\mu s$, respectivamente. O colapso ocorre em torno de $9\mu s$ e o campo coerente aplicado na cavidade tem número médio de fótons $\bar{n} = 13.4$. Observa-se então os ressurgimentos induzidos mas com amplitude reduzida significativamente pela decoerência pois, segundo a parte unitária da dinâmica, a amplitude

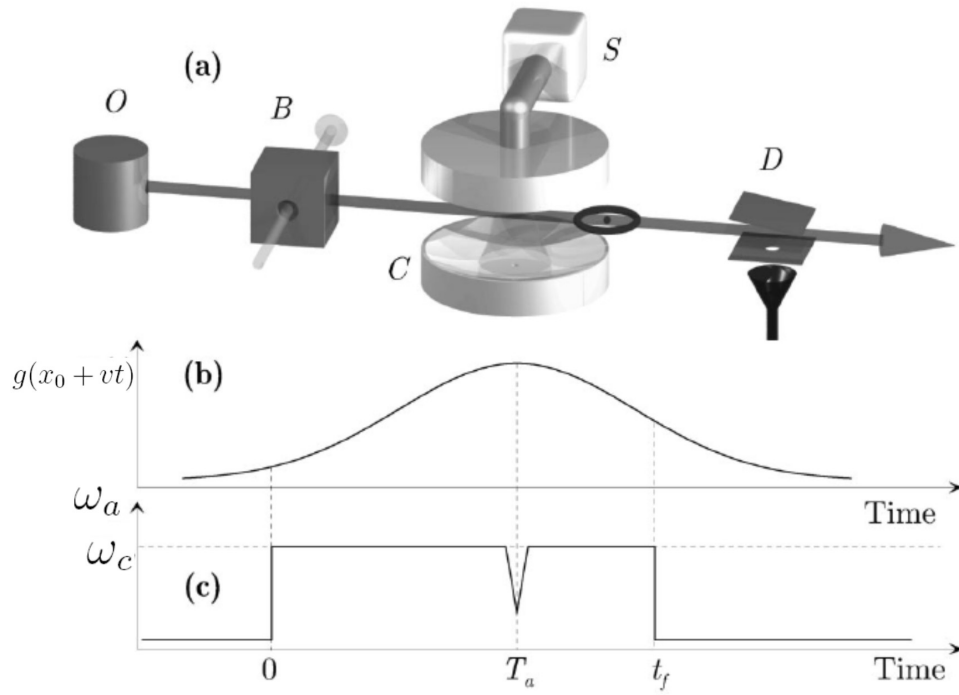


Figura 4.4: a) Diagrama da montagem experimental. b) Comportamento gaussiano da frequência de Rabi ao longo do tempo c) Efeito do campo elétrico na frequência do átomo ao longo de sua trajetória, usado para desligar e ligar a interação com o campo, bem como para aplicação do pulso (figura retirada da Ref. [13]).

do ressurgimento induzido deveria ser a mesma das oscilações do colapso.

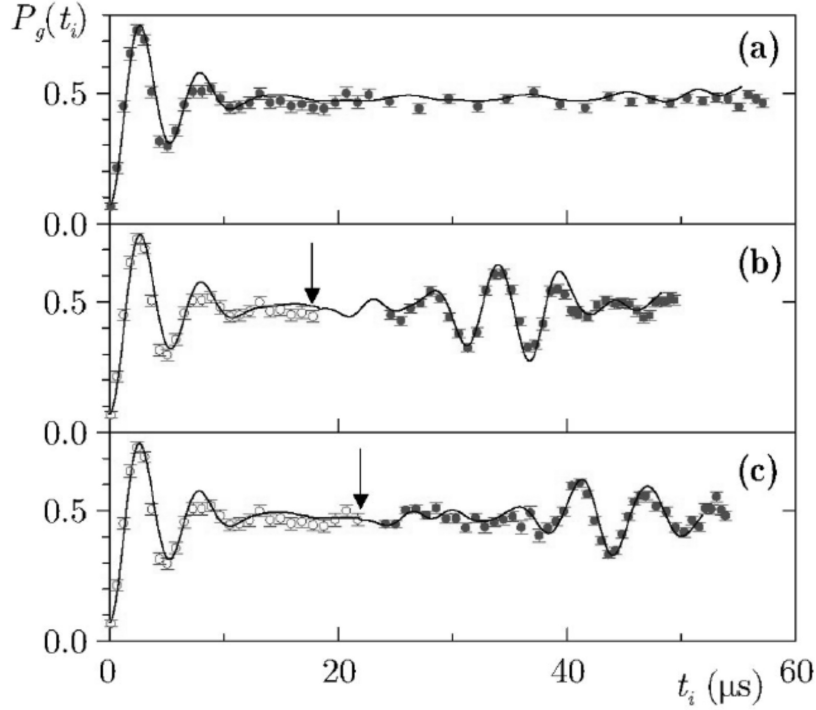


Figura 4.5: a) Sinal obtido sem pulso aplicado. b) Oscilações com o pulso aplicado em $T = 18\mu s$. c) Oscilações com o pulso aplicado em $T = 18\mu s$. O sinal em b) e c) anteriores ao pulso não são necessários de medir, apenas são reproduzidos da parte a) para melhor visualização da dinâmica (figura retirada da Ref. [13]).

A figura 4.6 mostra a distribuição de fase do campo da cavidade em três instantes diferentes de tempo da dinâmica, $t = 0$, $t = T$ e $t = 2T$. Esse sinal é obtido pela técnica *homodyne phase sensitive detection*[58]. O procedimento consiste em aplicar, após a saída do átomo que estará sujeito as oscilações de Rabi, A_1 , um campo sonda C_2 , coerente e de mesma amplitude do campo C_1 inserido anteriormente, mas de fase $\phi + \pi$. Os dois campos irão interferir construtiva ou destrutivamente entre si, dependendo de ϕ , e serão observados por uma segunda sonda, um átomo que passará na cavidade, inicialmente preparado no estado fundamental. Quando os campos interferem destrutivamente, a probabilidade do átomo permanecer no estado fundamental é maior. O sinal obtido então variando-se ϕ será proporcional a distribuição de fase do campo C_1 , que nos permite obter informação a respeito do estado do campo formado na cavidade. A parte a) nos mostra o perfil do campo inicial coerente. A parte b) indica a divisão do campo em duas componentes de fases distintas e simétricas e, c) nos mostra que, de fato, pelo menos aproximadamente, o

estado do sistema volta ao seu estado em $t = 0$, como prevê a parte unitária da dinâmica.

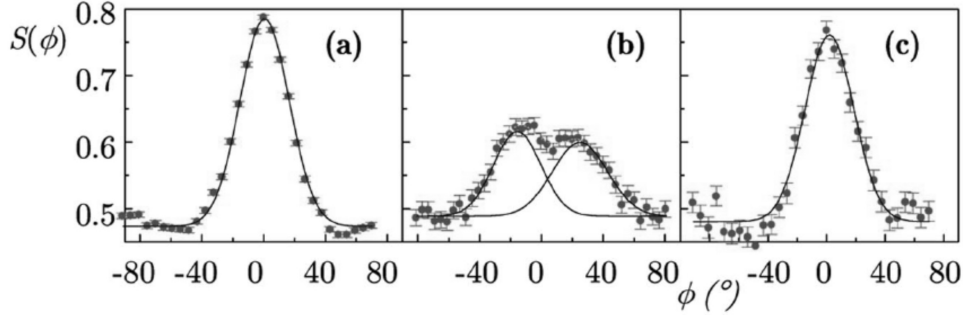


Figura 4.6: Distribuição de fases do campo em três instantes distintos. a) Em $t = 0$, do campo coerente inicial. b) Em $t = T$ exibindo a presença de duas componentes de fases distintas e simétricas, geradas pela interação com o átomo. c) Em $t = 2T$, o perfil de um campo coerente, donde infere-se que o sistema como um todo de fato volta ao seu estado em $t = 0$ (figura retirada da Ref. [13]).

4.3.3 As aproximações de Gea-Banacloche para o MJC Dissipativo

Como mencionado anteriormente, a contribuição mais importante para a dissipação nos experimentos recentes em cavidades ópticas, é das imperfeições da cavidade. Ainda, como a cavidade é colocada a temperaturas muito baixas, uma primeira abordagem para o problema seria utilizar a equação mestra do capítulo anterior para a descrição da dissipação do campo em uma cavidade à temperatura nula. Portanto, a equação mestra total para o sistema será a soma da parte unitária (HJC) com a contribuição dissipativa, dada pelo segundo termo da equação (3.35), ou seja:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_{JC}, \rho(t)] + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho(t) - \rho(t)a^\dagger a). \quad (4.79)$$

Agora, para o conjunto de condições iniciais consideradas nas aproximações no caso não dissipativo, i.e, o átomo em um estado arbitrário e o campo em um estado coerente mesoscópico, Gea-Banacloche também obteve soluções aproximadas para o caso dissipativo [51]. Toda a argumentação que se segue nesta seção está contida no artigo mencionado. Escrevendo-se o estado inicial do átomo na base dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e o estado como um todo na forma de um operador densidade,

$$\rho(t) = |\delta|^2 \rho^{++}(t) + |\gamma|^2 \rho^{--}(t) + [\gamma \delta^* \rho^{+-}(t) + H.c.], \quad (4.80)$$

com

$$\begin{aligned}\rho^{++}(0) &= |+\rangle \langle +| \otimes |\alpha\rangle \langle \alpha|, \\ \rho^{--}(0) &= |-\rangle \langle -| \otimes |\alpha\rangle \langle \alpha|, \\ \rho^{+-}(0) &= |+\rangle \langle -| \otimes |\alpha\rangle \langle \alpha|,\end{aligned}\tag{4.81}$$

e $|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. as aproximações são obtidas para cada termo separadamente, já que a equação é linear, inserindo-se um ansatz inspirado pelo caso não dissipativo. Para o primeiro termo, supõe-se:

$$\rho^{++}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} r_{n,m} e^{i[\phi_n(t) - \phi_m(t)]} |n\rangle \langle m| \otimes (e^{i[\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)]} |e\rangle + |g\rangle) \times \tag{4.82}$$

$$((e^{-i[\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)]} |e\rangle + |g\rangle)). \tag{4.83}$$

Observe que esse não é um estado genérico para o sistema e, por isso, obtém-se um conjunto *inconsistente* de equações diferenciais para os coeficientes do ansatz. No entanto, as inconsistências podem ser removidas se as razões $r_{n\pm 1,m}/r_{n,m}$, $r_{n,m\pm 1}/r_{n,m}$ puderem ser aproximadas por 1, e se a diferença entre duas fases consecutivas, $\phi_{n+1} - \phi_n$, for aproximadamente independente de n . Essa condição equivale a dizer que o campo terá uma fase bem definida. Isso quer dizer que o campo será aproximadamente um auto-estado de um “operador fase” [59] $\exp(i\hat{\phi}) = \sum_n |n-1\rangle \langle n|$. Para ver isso considere a atuação desse operador em um estado de campo arbitrário:

$$e^{i\hat{\phi}} \sum_n C_n e^{i\phi_n} |n\rangle \tag{4.84}$$

$$= \sum_n \frac{C_{n+1}}{C_n} e^{i(\phi_{n+1} - \phi_n)} C_n e^{i\phi_n}. \tag{4.85}$$

O resultado será aproximadamente o vetor original, vezes um fator de fase, desde que C_{n+1}/C_n e $\phi_{n+1} - \phi_n = \phi$. Para um campo coerente, isso de fato é válido no limite $\bar{n} \rightarrow \infty$. Neste problema, então, supõe-se que o estado do campo irá permanecer com uma fase bem definida ao longo do tempo. Finalmente, as equações obtidas para r_{nm} e ϕ_n serão:

$$\dot{r}_{nm} = -\frac{\kappa}{2}(n+m)r_{nm} + \kappa\sqrt{(n+1)(m+1)}r_{n+1,m+1}, \tag{4.86}$$

$$\dot{\phi}_n = -g\sqrt{\bar{n}} + \kappa e^{-\kappa t}(\phi_{n+1} - \phi_n). \tag{4.87}$$

Para o campo inicial coerente a solução de (4.86) será:

$$r_{n,m}(t) = \frac{e^{-\bar{n}(t)} \bar{n}(t)^{n+m}/2}{\sqrt{n!m!}}, \tag{4.88}$$

com

$$\bar{n}(t) = \bar{n}_0 e^{-\kappa t}. \quad (4.89)$$

O que ocorrerá é que a distribuição inicial de fótons não irá mudar sua forma de Poisson, apenas o número médio de fótons irá decair exponencialmente com o tempo. Mais ainda, com essa solução o estado $\rho^{++}(t)$ será puro:

$$\rho^{++}(t) = |\psi_+(t)\rangle \langle \psi_+(t)|,$$

com

$$|\psi_+(t)\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}(t)/2} \frac{\bar{n}^{n/2}(t)}{\sqrt{n!}} e^{i\phi_n(t)} \otimes (e^{i[\phi_{n+1}(t)-\phi_n(t)]} |e\rangle + |g\rangle), \quad (4.90)$$

onde as fases são dadas pela solução das equações diferenciais (4.87) com as condições iniciais $\phi_n(0) = 0$. Essa solução pode ser obtida aproximadamente considerando n uma variável contínua e fazendo $\phi_{n+1} - \phi_n = \partial\phi(n, t)/\partial n$, resultando na equação diferencial parcial

$$\frac{\partial\phi(n, t)}{\partial t} = -g\sqrt{n} + \kappa e^{-\kappa t} \frac{\partial\phi(n, t)}{\partial n}. \quad (4.91)$$

No entanto, como estaremos interessados aqui apenas na dinâmica da inversão de população, é suficiente para nós reconhecer que o termo $\rho^{++}(t)$, como dado pela equação (4.90), não irá contribuir para a mesma.

A evolução para ρ^{--} é obtida de maneira análoga:

$$\rho^{--}(t) = |\psi_-(t)\rangle \langle \psi_-(t)|,$$

com

$$|\psi_-(t)\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}(t)/2} \frac{\bar{n}^{n/2}(t)}{\sqrt{n!}} e^{-i\phi_n(t)} \otimes (e^{-i[\phi_{n+1}(t)-\phi_n(t)]} |e\rangle - |g\rangle), \quad (4.92)$$

e as fases $\phi_n(t)$ são as mesmas de $\rho^{++}(t)$ mas observe que, aqui, elas estão com sinal invertido. Ademais, esse termo também não irá contribuir para a inversão de população.

O que será importante para nossos propósitos então será a evolução de $\rho^{+-}(t)$. No caso *não* dissipativo, esse termo terá a forma $|\phi_+(t)\rangle \langle \phi_-(t)| \otimes |\Phi_+(t)\rangle \langle \Phi_-(t)|$, com os estados atômicos e do campo dados pelas equações (4.51) e (4.52), respectivamente. Observe que esse termo conterà informação da coerência entre estados de campo mesoscópicos e de fases

distintas, e sabemos, pelo capítulo anterior, que tais coerências são extremamente sensíveis a dissipação do campo que estamos considerando. Com isso em mente, o ansatz proposto por Banacloche para a evolução deste termo foi:

$$\rho^{+-}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} f_{n,m}(t) e^{i[\xi_n(t) + \xi_m(t)]} |n\rangle \langle m| \otimes (e^{i[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)]} |e\rangle + |g\rangle)_{\times} \quad (4.93)$$

$$\times (e^{-[\xi_{m+1}(t) - \xi_m(t)]} |e\rangle - |g\rangle). \quad (4.94)$$

Para simplificar a análise, essas fases são tomadas como sendo as do caso não dissipativo

$$\xi_n(t) = -\sqrt{n}gt, \quad (4.95)$$

e permitindo-se que os coeficientes $f_{nm}(t)$ sejam complexos, se necessário. A equação diferencial resultante para $f_{nm}(t)$, fazendo, como nos casos anteriores, as razões $f_{n\pm 1,m}/f_{n,m}$ e $f_{n,m+1}/f_{n,m}$ iguais a 1, será:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{nm} = & -\frac{\kappa}{2}(n+m)f_{nm} + \kappa\sqrt{(n+1)(m+1)} \times \\ & \times \exp(-igt(\sqrt{n+i-1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{m+j+1} - \sqrt{m+j})) \times f_{n+1,m+1}, \end{aligned}$$

onde $i, j = 0, 1$. Esse conjunto de equações ainda é inconsistente mas, desde que o número de fótons do campo não varie muito de seu valor inicial, o expoente pode ser expandido em potências de $n - \bar{n}_0$ e será consideravelmente simplificado:

$$-igt(\sqrt{n+i-1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{m+j+1} - \sqrt{m+j}) \approx -i \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}_0}}.$$

A solução das equações resultantes pode ser obtida pelo ansatz

$$f_{nm}(t) = F(t) e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^{n+m}/2}{n!m!} \quad (4.96)$$

e a equação para $F(t)$ será:

$$\frac{\dot{F}}{F} = -\kappa\bar{n}(t)(1 - e^{-igt/\sqrt{\bar{n}_0}}). \quad (4.97)$$

Finalmente, a evolução de $\rho^{+-}(t)$ como um todo terá a forma:

$$\rho^{+-}(t) = F(t) |\Psi_+[\bar{n}(t), t]\rangle \langle \Psi_-[\bar{n}(t), t]|, \quad (4.98)$$

onde

$$|\Psi_{\pm}[\bar{n}(t), t]\rangle = e^{-\bar{n}(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}(t)^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{\pm i\xi_n(t)} |n\rangle \otimes (e^{\pm i[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)]} |e\rangle \pm |g\rangle). \quad (4.99)$$

Na notação dos estados do lado esquerdo dessa última equação queremos distinguir a dependência do número de fótons da dependência temporal das fases, que será útil posteriormente para investigar a dinâmica sob a ação do pulso. Observe então que a evolução deste termo terá a forma de sua evolução no caso não-dissipativo, mas a dissipação irá introduzir, ao mesmo tempo, o decaimento no número de fótons, bem como uma forte decoerência. A inversão de população em função do tempo, para um estado atômico puro arbitrário, será então:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \text{Tr}(\sigma_z \rho(t)) = \frac{\gamma \delta^*}{2} \sum_{n=0} e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^n}{n!} (e^{-2igt\sqrt{n+1}} - e^{-2igt\sqrt{n}}) + c.c. \quad (4.100)$$

Vê-se que a média de Poisson aqui é sobre a soma de duas exponenciais. Para simplificar isso, tomamos a expansão de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx 1/\sqrt{\bar{n}_0}$ ao redor de $\bar{n}_0$, assim como tinha sido feito para se obter as equações dos coeficientes f_{nm} , isolamos $\sqrt{n}$, e substituímos na exponencial com esse fator, obtendo:

$$e^{-igt\sqrt{n+1}} + e^{-igt\sqrt{n}} = (1 + e^{-igt/2\sqrt{\bar{n}_0}}) e^{-igt\sqrt{n+1}}. \quad (4.101)$$

Ao redor dos colapsos e revivals, considerando que seus tempos não serão apreciavelmente modificados, podemos fazer $(1 + e^{-igt/2\sqrt{\bar{n}_0}}) \approx 2$. Fora deles, a expressão restante para a inversão de população será muito próxima de zero de qualquer forma. Enfim, de posse destas aproximações, a inversão de população toma a forma:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \frac{\gamma \delta^*}{2} \sum_{n=0} e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^n}{n!} 2e^{-2igt\sqrt{n+1}} + c.c. \quad (4.102)$$

Para o caso $\delta = \gamma = 1/\sqrt{2}$, ou o átomo no estado excitado, temos:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \text{Re}[F(t) \sum_{n=0} e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^n}{n!} e^{-2igt\sqrt{n+1}}] = \text{Re}[F(t)P(\bar{n}(t), t)]. \quad (4.103)$$

onde $P(\bar{n}(t), t) \equiv e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^n}{n!} e^{-2igt\sqrt{n+1}}$, i.e., a função que dá origem à inversão de população no caso não-dissipativo, porém, com um decaimento no número de fótons. Comparando com a expressão exata (4.38), podemos distinguir com clareza os efeitos das imperfeições da cavidade: de um lado, o decaimento do número de fótons ou energia do campo e, de outro lado, a decoerência, induzindo um forte amortecimento, devido à parte real do expoente de F , como veremos mais adiante, bem como uma perturbação nas frequências rápidas, devido à parte imaginária. A figura 4.7 nos mostra a comparação da dinâmica da inversão de população computadas por essa aproximação e por integração numérica das equações diferenciais exatas, para $\bar{n}_0 = 25$ e $\kappa = 0.002g$. É notável a eficácia destas aproximações

com a solução exata, bem como o forte decaimento das oscilações para um valor de κ 500 vezes menor do que g , i.e., em um regime onde o decaimento do número de fótons em si pode ser desprezado.

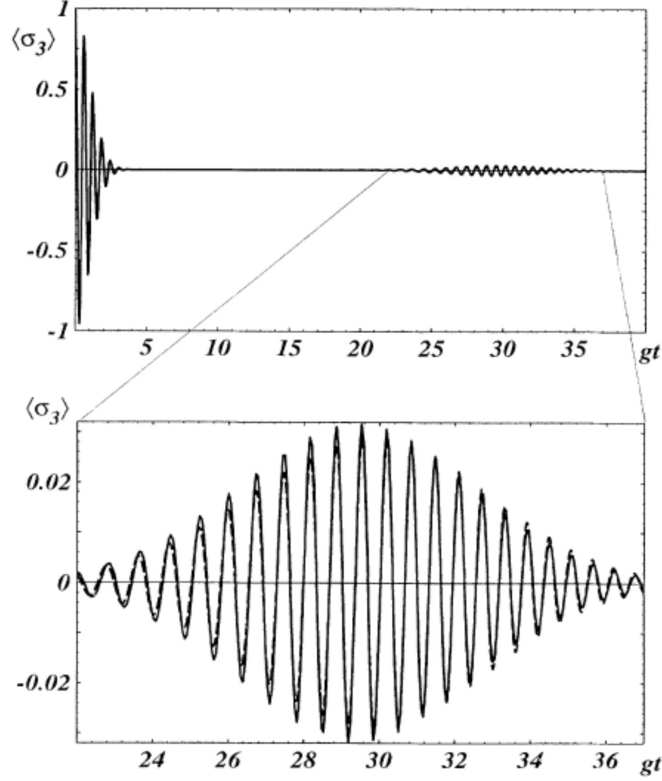


Figura 4.7: Comparação da dinâmica da inversão de população computadas pelas aproximações e por integração numérica das equações diferenciais. A linha contínua representa a solução aproximada e a linha pontilhada, a exata. Os parâmetros são $\bar{n}_0 = 25$ e $\kappa = 0.002g$, $g = 1$ (figura retirada da Ref. [51]).

A equação para $F(t)$ pode ser resolvida explicitamente:

$$F(t) = e^{\Gamma(t)}, \quad (4.104)$$

com

$$\Gamma(t) = \exp\left[\frac{\bar{n}_0}{1 - ig/\kappa\sqrt{\bar{n}_0}}(1 - e^{-(\kappa + ig/\sqrt{\bar{n}_0})t}) - \bar{n}_0(1 - e^{-\kappa t})\right] \quad (4.105)$$

e podemos identificar $\Gamma(t)$ como a função decoerência deste problema. Para entender qualitativamente o comportamento $F(t)$ é mais simples analisá-la para o caso em que podemos desprezar totalmente a variação no número de fótons. Neste caso, teremos

$$F(t) \approx \exp\left[-\kappa\bar{n}_0(t - \sqrt{\bar{n}_0}/g \sin(gt/\sqrt{\bar{n}_0})) - 2i\frac{\kappa}{g}\bar{n}_0^{3/2} \sin(gt/2\sqrt{\bar{n}_0})\right]. \quad (4.106)$$

Aqui se torna explícito que, mesmo desprezando o decaimento do campo, a decoerência ainda será bastante significativa. Vamos nos concentrar aqui no decaimento induzido pela parte real do expoente. Considerando que o segundo termo do produto que define a dinâmica da inversão de população (4.103) é exatamente igual ao caso não dissipativo, pois estamos desprezando a variação no número de fótons, esperamos que os tempos dos ressurgimentos não serão modificados. Vemos então que o expoente de $|F|$ e, portanto, $|F|$ como um todo, terá pontos de inflexão exatamente em cima dos ressurgimentos, i.e., em $t_\nu = 2\pi\sqrt{\bar{n}_0}/g$.

O gráfico de $|F|$ terá a forma de um tobogã de parque aquático, ver Fig. 4.8, onde as regiões planas são centradas nos ressurgimentos. Exibimos nessa mesma figura, para comparação visual, o comportamento exato das oscilações de Rabi no caso não dissipativo. Vemos que na região dos ressurgimentos e, logo, em torno destes pontos de inflexão de F , o processo de decoerência é praticamente interrompido, i.e., $|F|$ é quase constante ao redor dos revivals. Isso, de certa forma, já era esperado tendo em vista que a dinâmica unitária dá origem a duas componentes de campo, de mesma amplitude, mas cujas fases crescem em sentidos opostos no tempo. Imaginando que tivéssemos apenas uma superposição destes campos dentro da cavidade, a decoerência iria ser tão mais rápida quanto maior fosse a separação entre eles. Como a região entre os revivals e a região ao redor dos revivals são marcadas, como vimos no caso não dissipativo, por intervalos de tempos onde as duas componentes de campo estão, respectivamente, mais separadas e mais próximas, é natural esperar que o processo de decoerência seja mais forte fora dos ressurgimentos e mais brando ao redor deles.

Esse raciocínio poderia nos levar a pensar que a taxa instantânea de decoerência é proporcional a distância entre as componentes de campo no espaço de fase, mas isso não ocorre. A figura 4.9 nos mostra, ao mesmo tempo, as oscilações de Rabi exatas do caso não dissipativo, a distância entre as duas componentes do campo e a taxa instantânea de decoerência (i.e., escrevendo $|F(t)| = \exp(-\kappa(t)t)$) em função do tempo. Vemos que os mínimos da separação entre os campos coincidem com os centros dos ressurgimentos, como já era esperado, mas os máximos e mínimos da taxa de decoerência não coincidem, respectivamente, com os mínimos e máximos da separação entre os campos. Isso se deve, provavelmente, ao fato de que o estado do campo da cavidade não é uma simples superposição das duas componentes, mas um estado emaranhado entre átomo e campo, de forma que esse emaranhamento “esconde” da cavidade, pelo menos por algum tempo, que aquelas duas componentes de campo foram criadas. Em outras palavras, a informação a respeito da separação entre os campos chega à cavidade após algum tempo.

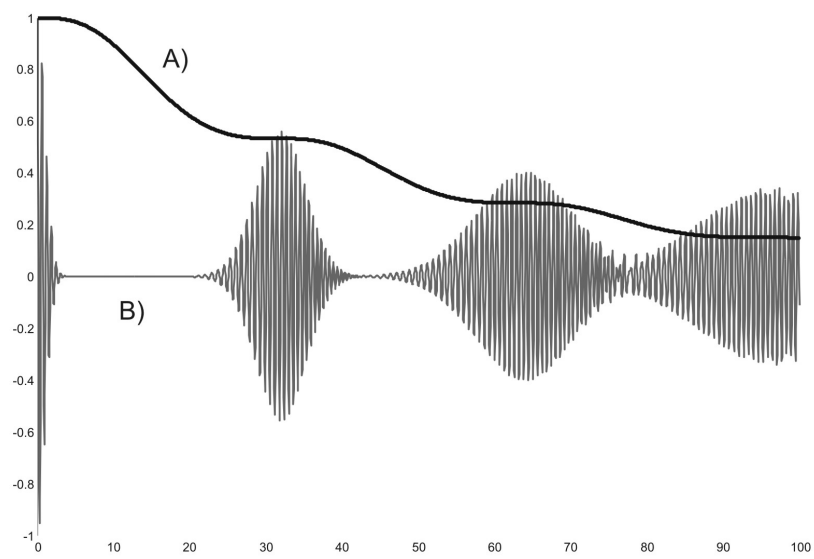


Figura 4.8: Evolução de $|F(t)|$ (curva A) e da inversão de população no caso não dissipativo (curva B). Vê-se que $|F|$ decai mais rapidamente na região entre os revivals e é aproximadamente constante ao redor deles. Isso é de certa forma esperado tendo em vista a dinâmica das duas componentes de campo formadas pela parte unitária da dinâmica, como foi discutido anteriormente.

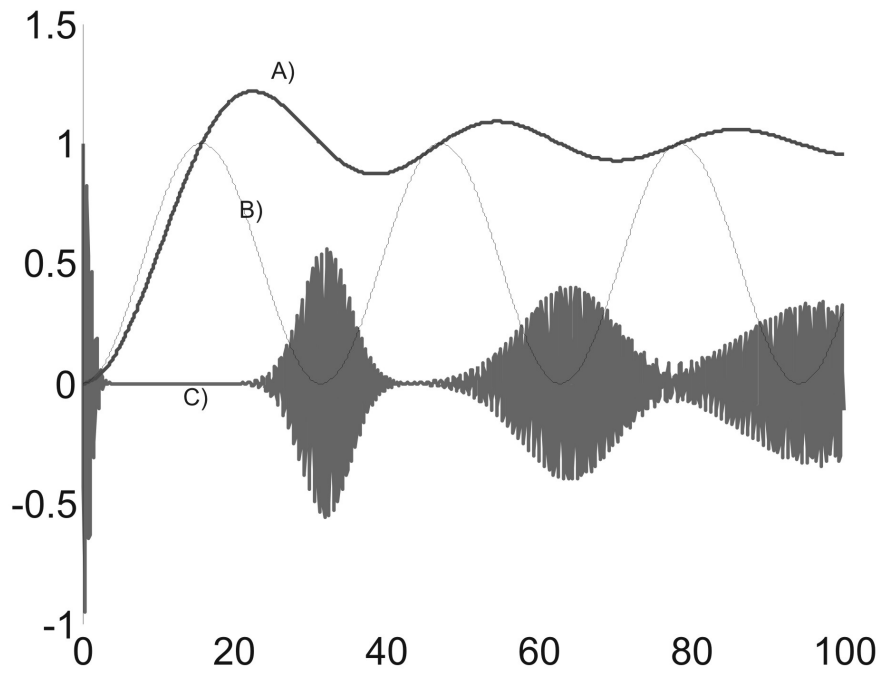


Figura 4.9: Evolução da taxa instantânea de decoerência A), separação entre as duas componentes de campo e C) da inversão de população do caso não dissipativo. Muito embora os revivas coincidam com os pontos de separação mínima entre as componentes de campo, a taxa instantânea de decoerência não é proporcional a separação instantânea destas componentes. De certa forma, então, o emaranhamento entre átomo e campo, “esconde” da cavidade, pelo menos por algum tempo, a formação dessas duas componentes

4.3.4 Reversão Temporal no Caso Dissipativo

A partir das aproximações de Banacloche da seção 3.3.2, é fácil computar a dinâmica do estado do sistema e, conseqüentemente, da inversão de população, sob atuação da dissipação. Considerando que o kick é aplicado em um instante $T > 0$ arbitrário, teremos que o estado $\rho^{++}(t)$, logo após o kick será (o estado puro):

$$|\psi_+(T)\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}(T)/2} \frac{\bar{n}^{n/2}(T)}{\sqrt{n!}} e^{i\phi_n(T)} \otimes (e^{i[\phi_{n+1}(T) - \phi_n(T)]} |e\rangle - |g\rangle),$$

e vemos que, para $t > T$ o estado será

$$|\psi_+(t)\rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}(t)/2} \frac{\bar{n}^{n/2}(t)}{\sqrt{n!}} e^{-i\tilde{\phi}_n(t)} \otimes (e^{-i[\tilde{\phi}_{n+1}(t) - \tilde{\phi}_n(t)]} |e\rangle - |g\rangle),$$

desde que as fases $\tilde{\phi}_n(t)$ satisfaçam a equação diferencial (4.91) com a condição inicial em T sendo $-\phi(T, n)$. Quer dizer, esse estado será uma solução aproximada para a dinâmica pós-kick no sentido de que irá satisfazer a aproximadamente a equação mestra, sob as mesmas hipóteses utilizadas anteriormente, e satisfará a condição inicial logo após o kick em $t = T$. Um raciocínio inteiramente análogo vale para o termo $\rho^{--}(t)$, e isso nos mostra que estes termos continuarão não contribuindo para a inversão de população após o kick. Novamente, então, iremos nos preocupar apenas com o termo $\rho^{+-}(t)$.

Ora, logo após o kick, ele será:

$$\rho^{+-}(T) = F(T) \sigma_z |\psi_+(\bar{n}(T), T)\rangle \langle \psi_-(\bar{n}(T), T)| \quad (4.107)$$

$$= F(T) |\psi_-(\bar{n}(T), -T)\rangle \langle \psi_+(\bar{n}(T), -T)|. \quad (4.108)$$

Pelo mesmo argumento anterior para obter a dinâmica de ρ^{++} , após o kick, teremos, para $t > T$:

$$\rho^{+-}(t) = \tilde{F}(t, T) F(T) \times |\psi_-(\bar{n}(t), t - 2T)\rangle \langle \psi_+(\bar{n}(t), t - 2T)|, \quad (4.109)$$

onde

$$\tilde{F}(t, T) = \exp[-2\kappa \int_T^{t-T} \bar{n}(t)(1 - e^{ig(t-2T)/\sqrt{\bar{n}_0}}) dt],$$

de forma que o expoente de $F(t, \tilde{T})F(T)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(t) = & -[n_0 - \bar{n}(t)] - \frac{1}{1 - i\frac{g}{2\kappa\sqrt{n_0}}}(\bar{n}(t)e^{i\frac{g(t-2T)}{\sqrt{n_0}}} - \bar{n}(T)e^{-i\frac{gT}{\sqrt{n_0}}}) - \\ & - \frac{1}{1 + i\frac{g}{2\kappa\sqrt{n_0}}}(\bar{n}(T)e^{-i\frac{gT}{\sqrt{n_0}}} - n_0). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Finalmente, a inversão de população após o kick, para o caso em que o átomo se encontra inicialmente no estado excitado, será:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \text{Re}[\tilde{F}(t, T)F(t) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^n}{n!} e^{-2ig(2T-t)\sqrt{n+1}}] = \text{Re}[\tilde{F}(t, T)F(t)P(\bar{n}(t), 2T-t)]. \quad (4.111)$$

Ora, esse sinal tem a mesma forma do sinal antes do kick, porém, com a função decoerência modificada e as fases do somatório infinito revertidas no tempo. Observe que, embora o decaimento do número médio de fótons seja insensível ao kick, a função decoerência não é. Realmente, considerando que o processo de decoerência depende da separação entre as duas componentes de campo formadas pela contribuição unitária da dinâmica, e que o kick faz com que essas componentes revertam seu movimentos, é de se esperar que o processo de decoerência irá abrandar ou se reforçar após o kick dependendo se essas componentes estavam, respectivamente, se afastando ou aproximando no instante do kick (ver Fig. 4.10).

4.3.5 Dissecando as Oscilações de Rabi no Caso Dissipativo (Antes do Pulso)

Para simplificar a exposição, continuaremos considerando apenas o caso $\delta = \gamma = 1/\sqrt{2}$ (i.e., o átomo entra inicialmente no estado excitado) apesar de que a mesma estratégia pode ser utilizada para quaisquer δ e γ , com ligeiras modificações. Usando das Eqs. (4.102) e (4.103) podemos obter um resultado análogo ao das Eqs. (4.41)-(4.43) apenas efetuando a substituição $\bar{n} \rightarrow \bar{n}(t)$, o que será válido enquanto $\bar{n}(t)$ ainda for grande:

$$P(\bar{n}(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\bar{n}(t)} \frac{\bar{n}(t)^n}{n!} e^{-2igt\sqrt{n+1}} \approx w_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} w_{\nu}(t), \quad (4.112)$$

onde, para inteiro $\nu \geq 1$,

$$w_{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{gt}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}(t)}} \exp\left[-\frac{g^2}{2\pi^2\nu^2}(t-t_{\nu})^2 + i\left(\frac{g^2 t^2}{2\pi\nu} - \pi/4\right)\right], \quad (4.113)$$

com t_{ν} definido por

$$t_{\nu} = \frac{2\pi\nu}{g} \sqrt{\bar{n}(t_{\nu})} \quad (4.114)$$

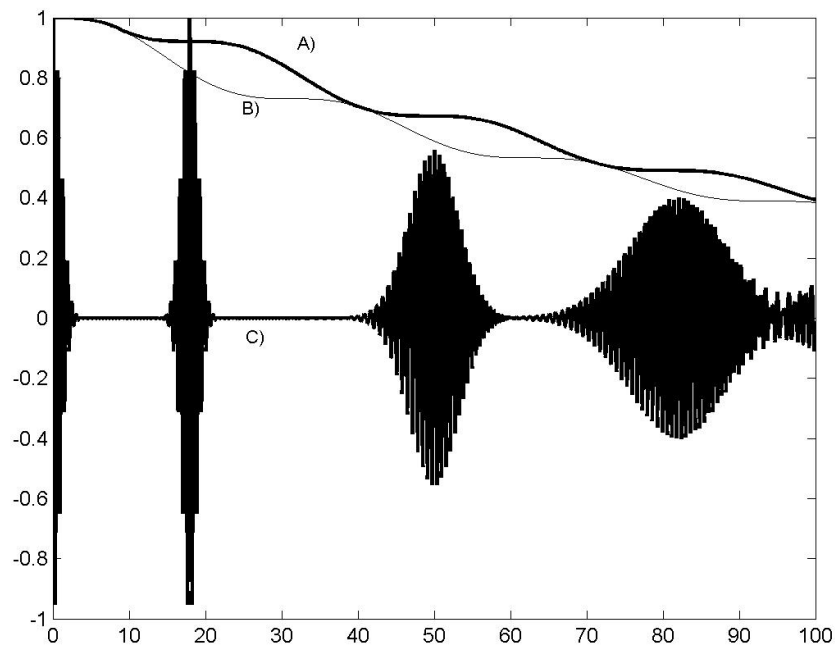


Figura 4.10: A) Evolução de $|F|$ com o pulso aplicado, B) evolução de $|F|$ *sem* o pulso C) inversão de população do caso não dissipativo com o pulso. A comparação entre os gráficos de $|F|$ sem e com o pulso nos mostra a dependência da decoerência com a separação entre as componentes de campo. Como o pulso força as componentes, neste caso, a se juntarem novamente, o processo de decoerência é amenizado.

e

$$w_0(t) = \exp(-g^2 t^2 / 2 + i 2 g t \sqrt{\bar{n}(t)}). \quad (4.115)$$

Descartando a dissipação ($F(t) = 1$ e $\bar{n}(t) = n_0$) recuperamos o resultado do caso não-dissipativo. Vemos que o efeito da dissipação já aparece nestas equações, devido à variação no número de fótons, mas o efeito mais drástico será devido à função $F(t)$, já que seu módulo irá decair rapidamente. A idéia de que cada termo da soma (4.112) para $\nu > 0$ descreve um revival e $w_0(t)$ descreve o colapso é ainda válida, mas o comportamento dessas funções será modificado devido à variação no número de fótons e da função decoerência. De fato, pela Eq. (4.103) e Eqs. (4.113)-(4.115), a inversão de população pode ser escrita:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \bar{w}_0(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{w}_{\nu}(t), \quad (4.116)$$

onde, para $\nu > 1$,

$$\bar{w}_{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{gt}{2\pi\nu \sqrt{\bar{n}(t)}} e^{[-\frac{g^2}{2\pi^2\nu^2}(t-t_{\nu})^2 + \text{Re}\Gamma(t)]} \cos\left(\frac{g^2 t^2}{2\pi\nu} - \pi/4 + \text{Im}\Gamma(t)\right) \quad (4.117)$$

e

$$\bar{w}_0(t) = e^{-g^2 t^2 / 2 + \text{Re}\Gamma(t)} \cos(2gt\sqrt{\bar{n}(t)} + \text{Im}\Gamma(t)), \quad (4.118)$$

com $\Gamma(t)$ dado pela Eq.(4.105). Com essas expressões vemos que a parte real da função decoerência, $\text{Re}\Gamma(t)$, irá amortecer e tornar assimétrico cada revival, já que é o argumento de uma exponencial e uma função negativa monotonamente decrescente. A parte imaginária, $\text{Im}\Gamma(t)$, irá alterar o comportamento das oscilações rápidas. Essas expressões permitem novamente identificar determinadas quantias de interesse na dinâmica da inversão de população. Apesar do amortecimento devido à função de decoerência, ainda podemos identificar os tempos de cada revival considerando apenas a parte gaussiana da expressão de $\bar{w}_{\nu}(t)$. Esses tempos serão dados então pelo centros de suas gaussianas, definidos pela equação

$$t_{\nu} = \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}(t_{\nu})}}{g}, \quad (4.119)$$

enquanto a largura de cada ressurgimento, pela dispersão da gaussiana,

$$\Delta t_{\nu} = \frac{\pi\nu}{g}, \quad (4.120)$$

e a largura do colapso também dada por $1/g$, como no caso não-dissipativo.

Vemos que os tempos de revival não serão modificados caso a variação no número de fótons seja desprezada, mas a largura será a mesma em qualquer caso. Como estamos

interessados para tempos curtos comparados a $1/\kappa$, podemos expandir $\sqrt{n(t)}$ na Eq. (4.119) até primeira ordem para estimar t_ν :

$$t_\nu \approx \frac{2\pi\nu n_0/g}{1 + \kappa 2\pi\nu n_0/g} = t_\nu^0/(1 + \kappa t_\nu^0), \quad (4.121)$$

onde t_ν^0 são os tempos de revival sem dissipação, de forma que o efeito do reservatório será diminuí-los ligeiramente. Podemos definir a amplitude dos ressurgimentos como o valor do envelope de cada um (a função multiplicando o cosseno) no instante do ressurgimento:

$$A_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} e^{\text{Re}\Gamma(t_\nu)}. \quad (4.122)$$

Expressões simples para $\text{Re}\Gamma(t_\nu)$ podem ser dadas desprezando-se a variação no número de fótons:

$$\text{Re}\Gamma(t_\nu) \approx -\frac{2\kappa n_0^{3/2}}{g}(2\pi\nu). \quad (4.123)$$

Como já foi discutido anteriormente, devido à função decoerência, essas amplitudes podem ser pequenas mesmo para valores extremamente baixos de κ/g . Podemos também estimar os valores para as frequências rápidas em cada ressurgimento definindo $\omega_\nu = f'(t_\nu)$, $f(t)$ sendo o argumento da função cosseno presente em $\bar{w}_\nu(t)$:

$$\omega_\nu \approx 2g\sqrt{n(t_\nu)} + \text{Im}\Gamma'(t_\nu) = 2g\sqrt{n(t_\nu)} - 2\kappa\bar{n}(t_\nu)\sin(gt_\nu/\sqrt{n_0}), \quad (4.124)$$

para $\nu > 1$ e $\omega_0 = 2g\sqrt{n_0}$. A dissipação modifica essas frequências em cada ressurgimento, enquanto no caso não dissipativo elas valem $2g\sqrt{n_0}$ para todos eles.

Apesar da dissipação modificar as oscilações rápidas como um todo quando desprezamos a variação no número de fótons, as frequências no centro de cada ressurgimento não serão modificadas (argumento das funções seno serão 2π). Enfim, vemos que as correções nos tempos e frequências rápidas dos ressurgimentos ocorrerão apenas considerando a variação no número de fótons. As únicas quantias que sofrerão modificações significativas desconsiderando essa variação serão as amplitudes. Novamente, reforçamos que todas essas considerações valem apenas para os primeiros ressurgimentos, onde o número de fótons, embora possa ter variado, ainda é grande.

4.3.6 Dissecando as Oscilações de Rabi no Caso Dissipativo (Após o Pulso)

Observando a Eq. (4.111), e notando que a inversão de população terá uma forma semelhante antes e depois do pulso, as mesmas idéias podem ser aplicadas em ambos os

casos. A contribuição para a inversão de população devido as fases na média de Poisson têm a mesma forma, porém, com a substituição $t \leftrightarrow 2T - t$. A contribuição devido à variação no número de fótons continua decaindo exponencialmente, independentemente do pulso. Acima de tudo, temos também a contribuição devido à função $\tilde{F}(t, T)F(t)$. O fato de que essas fases se situam no intervalo $(-\infty, T]$ (já que $t \in [T, \infty)$), ao invés de $[0, \infty)$ como antes, exige, de acordo com o formalismo das Refs. [52, 53], a inclusão de termos com ν negativo na soma. O resultado é:

$$\langle \sigma_z \rangle(t) = \bar{w}_0(t, T) + \sum_{\nu=-\infty, \nu \neq 0}^{\infty} \bar{w}_\nu(t, T), \quad (4.125)$$

onde, para $\nu \neq 0$,

$$\begin{aligned} \bar{w}_\nu(t, T) = & \frac{1}{\sqrt{\pi|\nu|}} \frac{g(2T-t)}{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}(t)}} e^{-\frac{g^2}{2\pi^2\nu^2}(t-\tilde{t}_\nu)^2 + \text{Re}\tilde{\Gamma}(t)} \times \\ & \times \cos\left(\frac{g^2(2T-t)^2}{2\pi\nu} - \text{sign}(\nu)\pi/4 + \text{Im}\tilde{\Gamma}(t)\right) \end{aligned} \quad (4.126)$$

e

$$\bar{w}_0(t, T) = e^{-g^2(2T-t)^2/2 + \text{Re}\tilde{\Gamma}(t)} \cos(2g(2T-t)\sqrt{\bar{n}(t)} + \text{Im}\tilde{\Gamma}(t)), \quad (4.127)$$

com $\tilde{\Gamma}(t)$ dado pela Eq.(4.110) e $\text{sign}(\bullet)$ denotando a função sinal (valendo 1 se o argumento é positivo e -1 quando negativo). Neste caso os tempos $\tilde{t}_\nu$, para $\nu \neq 0$ são definidos pelas equações:

$$\tilde{t}_\nu = 2T - \frac{2\pi\nu\sqrt{\bar{n}(\tilde{t}_\nu)}}{g}. \quad (4.128)$$

Mas, já que essas expressões têm significado físico apenas para $t > T$, devido as gaussianas em cada termo em ν , nem todos os termos serão importantes para o cômputo da inversão de população, mas apenas aqueles termos cujos centros das gaussianas se encontram no intervalo $[T, \infty)$. Por exemplo, se o pulso é aplicado logo após o primeiro ressurgimento, os termos relevantes serão aqueles em que $\nu = 1, 0, -1, -2, \dots$, onde os termos com $\nu = 1$ e $\nu = 0$ descrevem a imagem espelhada e distorcida (para $\kappa \neq 0$) do primeiro ressurgimento e o colapso, respectivamente, enquanto os restantes descrevem novos ressurgimentos (ver Fig. 4.11). De maneira geral, os ressurgimentos que aparecerão após o pulso serão descritos pelos termos da (4.126) para $\nu \leq N$, sendo N o número de ressurgimentos observados antes do pulso.

Definindo, como antes, as larguras de cada ressurgimento como a dispersão da parte gaussiana de $\bar{w}_\nu(t, T)$, obtemos, para $\nu \neq 0$,

$$\Delta_\nu = \frac{\pi|\nu|}{g} \quad (4.129)$$

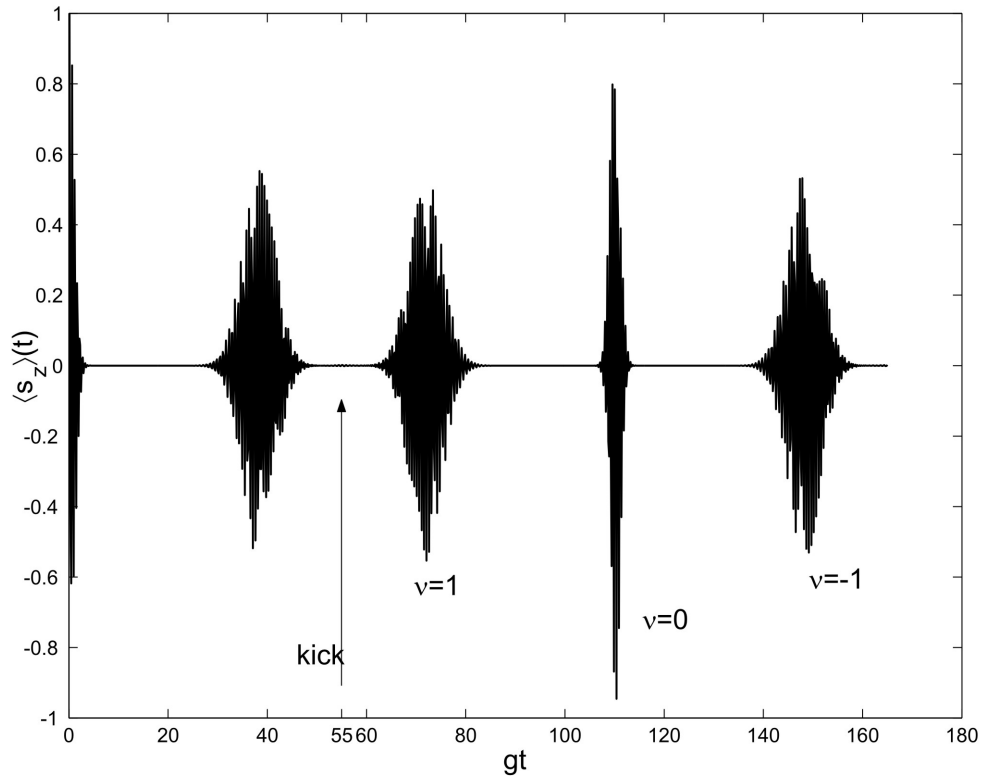


Figura 4.11: Comportamento de $\langle \sigma_z \rangle(t)$ para $\sqrt{n_0} = 6$, $\kappa = 0$ (para melhor visualização dos ressurgimentos) com o pulso aplicado em $T = 55/g$. Após o pulso, o espelho do colapso e do primeiro ressurgimento são descritos pelos termos com $\nu = 0$ e $\nu = 1$, respectivamente. Outros ressurgimentos serão descritos por termos com ν negativo.

e $\Delta_0 = 1/g$ para o termo $\bar{w}_0(t, T)$.

Estimando as frequências rápidas da mesma maneira que antes, obtemos:

$$\omega_\nu \approx 2g\sqrt{\bar{n}(\tilde{t}_\nu)} + \text{Im}\tilde{\Gamma}'(\tilde{t}_\nu) = 2g\sqrt{\bar{n}(\tilde{t}_\nu)} + 2\kappa\bar{n}(\tilde{t}_\nu) \sin[g(\tilde{t}_\nu - 2T)/\sqrt{n_0}]. \quad (4.130)$$

Finalmente, as amplitudes assumem a forma:

$$\tilde{A}_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi|\nu|}} e^{\text{Re}\tilde{\Gamma}(\tilde{t}_\nu)}, \quad (4.131)$$

onde, desconsiderando a variação no número de fótons, podemos fazer a simplificação:

$$\text{Re}\tilde{\Gamma}(\tilde{t}_\nu) \approx -2\kappa n_0(2T - \frac{\sqrt{n_0}}{g}2\pi\nu - \frac{2\sqrt{n_0}}{g} \sin \frac{gT}{\sqrt{n_0}}). \quad (4.132)$$

Por outro lado, a amplitude do termo $\bar{w}_0$ será simplesmente

$$\tilde{A}_0 \approx e^{-2\kappa n_0(2T - \frac{2\sqrt{n_0}}{g} \sin \frac{gT}{\sqrt{n_0}})}.$$

Em geral, é interessante aplicar o pulso após o colapso, mas antes do primeiro ressurgimento, como nos experimentos descritos anteriormente, i.e, com $t_1 = 2\pi\sqrt{n_0}/g \gg T > 1/g$. Esse procedimento irá induzir um ressurgimento, como discutido, pelo termo $\bar{w}_0(t, T)$, que ocorre antes do ressurgimento “natural”, e tem maior amplitude. De fato, ainda desconsiderando variação no número de fótons, a razão entre as amplitudes do primeiro ressurgimento, A_1 , e a amplitude do primeiro ressurgimento induzido, $\tilde{A}_0$, será:

$$\tilde{A}_0/A_1 \approx \sqrt{\pi} e^{-2\kappa n_0(2T - t_1 - \frac{2\sqrt{n_0}}{g} \sin \frac{gT}{\sqrt{n_0}})}, \quad (4.133)$$

onde t_1 é o tempo do primeiro ressurgimento sem o pulso. Então, se T é escolhido como mencionado acima, $t_1 \gg T$, o expoente dessa expressão pode ser positivo e essa razão pode ser bem maior que a unidade. A Fig. 4.12 mostra um gráfico dessa situação usando as aproximações obtidas nesta seção.

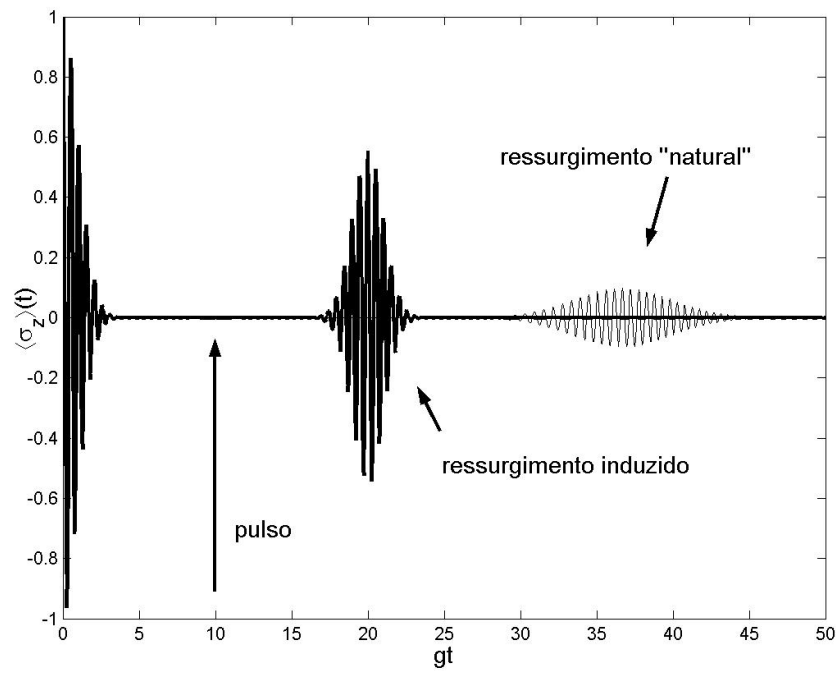


Figura 4.12: Evolução de $\langle \sigma_z \rangle(t)$ para $\sqrt{n_0} = 6$, $\kappa = 0.0005g$, desprezando a variação no número de fótons com (linha grossa) e sem (linha fina) um pulso aplicado em $T = 10$. Vemos então que o pulso induz um ressurgimento que ocorre antes do ressurgimento “natural” e com maior amplitude.

Capítulo 5

Conclusão

Investigamos neste trabalho três exemplos importantes e inter-relacionados de sistemas quânticos compostos ou abertos: um modo de campo eletromagnético quantizado sob a atuação da dissipação induzida pela cavidade óptica que o acopla; a interação do campo com um único átomo neutro de dois níveis; e o sistema átomo+campo+cavidade.

No primeiro exemplo revisamos sua abordagem usual, que consiste em obter uma dinâmica efetiva para o campo, i.e., uma equação mestra fechada para seu estado reduzido. Vimos que essa equação nos fornece um exemplo do fenômeno de decoerência, presente somente em sistemas quânticos compostos ou abertos, e discutimos brevemente a sua relação com o limite clássico-quântico. Fornecemos ainda uma nova abordagem para a solução do problema, consistente com os resultados obtidos via equação mestra e que, apesar de extremamente restritiva quanto aos estados iniciais do campo, repousa em hipóteses muito mais claras que utilizadas para a obtenção da equação mestra e permite explorar a dinâmica fora do regime Markoviano.

Discutimos em detalhe a dinâmica do sistema isolado átomo+campo, descrito pelo Modelo de Jaynes-Cummings, especialmente na situação em que o campo se encontra inicialmente em um estado coerente mesoscópico. Vimos, a partir de aproximações apropriadas, que esse é um rico exemplo de sistemas compostos, por apresentar diversos fenômenos de interesse, como: decoerência, preparação de estados, formação de estados de gato, princípio da complementaridade, dinâmica não-markoviana, etc. Estudamos em detalhe, também, a dinâmica da inversão de população, importante por ser o observável mais acessível em uma realização experimental, e vimos que pode ser aproximada por uma expressão muito mais transparente constituída por uma soma onde cada termo representa um único ressurgimento.

Passamos em seguida a considerar o sistema completo átomo+campo+cavidade, e es-

tudamos soluções aproximadas para a dinâmica do estado do sistema sob mesmo tipo de condições iniciais consideradas no caso átomo+campo. Vimos como a dissipação da cavidade pode alterar drasticamente a dinâmica via decoerência, mesmo que a perda de energia ou decaimento do campo possam ser desprezados. Essencialmente, essa forte decoerência é devida a criação de duas componentes mesoscópicas de campo dentro da cavidade, cujas amplitudes giram rapidamente e em sentido contrário. Aplicamos as aproximações para a inversão de população neste caso e obtivemos correções para diversas grandezas de interesse associadas, como os tempos, amplitudes e frequências dos ressurgimentos. Finalmente, aplicamos estes resultados para a dinâmica sob o protocolo de eco, onde um pulso elétrico rápido é aplicado ao átomo, induzindo uma rotação de π no estado do mesmo e que, sob o modelo de Jaynes-Cummings, induz o sistema a “reverter” seu movimento. Com a presença da dissipação o mesmo, é claro, não irá ocorrer: o decaimento da energia do sistema não será alterado pela aplicação do pulso e a decoerência, muito embora seja sensível ao mesmo, não será revertida. Analisamos, em especial, a dinâmica da inversão de população sob a atuação deste pulso e computamos as grandezas associadas dos ressurgimentos induzidos pela reversão temporal.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] J.S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [3] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapura, 1998); Cap. 20: *Bell's Theorem and Its Consequences*.
- [4] D. M. Greenberg, M. A. Horne, A. Shimony e A. Zeilinger *Am. J. Physics.* **58**, 1131 (1990).
- [5] L. E. Ballentine e J. P. Jarret, *Am. J. Phys.* **55**, 696 (1987).
- [6] W. H. Zurek, arXiv:quant-ph/0306072 (2003).
- [7] E. Joos, H.D. Zeh, C. Kiefer, D. Giuliani, J. Kupsch e I.-O. Stamatescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, Berlim, 1996).
- [8] M. A. Nielsen e L. I. Chuang, *Introduction to quantum computation and information* (Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2000).
- [9] A. Rauschenbeutel, G. Nogues, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J.-M. Raimond e S. Haroche, *Science* **288** 2024 (2000).
- [10] Hagley, E., X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett* **79**, 1 (1987).
- [11] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [12] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J.M. Raimond e S. Haroche, *Nature* **411**, 166 (2001).

-
- [13] T. Meunier, S. Gleyzes, P. Maioli, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 010401 (2005).
- [14] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapura, 1998); Cap. 15: *Quantum Mechanics in Phase Space*.
- [15] L. Davidovich, arXiv:quant-ph/0301129 v1 (2003).
- [16] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, v.I: *Functional Analysis* (Academic Press, 1980); pg. 210.
- [17] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, v.I: *Functional Analysis*. (Academic Press, 1980); sec. II.4: *Tensor Product of Hilbert Spaces*.
- [18] H. P. Breuer, F. Petrucione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford Univ. Press, Oxford, Reino Unido, 2001); sec. 2.2: *Composite Quantum Systems*.
- [19] H. Ollivier e W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001).
- [20] L. Henderson e V. Vedral, quant-ph/0105028 (2001).
- [21] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **85**, 631 (1952).
- [22] A. O. Caldeira e A. J. Legget, *Physica* **121A**, 587 (1981).
- [23] H. P. Breuer e F. Petrucione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford Univ. Press, Oxford, Reino Unido, 2001); sec. 3.6: *Quantum Brownian Motion*.
- [24] C. Kiefer e E. Joos, arXiv:quant-ph/9803052v1 (1998).
- [25] R. L. Hudson. *Rep. Math. Phys.* **6**, 249 (1976).
- [26] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [27] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [28] Roy J. Glauber, *Physical Review* **131**, 2766 (1963).
- [29] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapura, 1998); Cap. 19: *Quantum Mechanics of the Electromagnetic Field*.
- [30] E. B. Davies, *Commun. Math. Phys.* **39**, 91 (1974).

- [31] H. P. Breuer e F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford Univ. Press, Oxford, Reino Unido, 2001); sec. 4.6: *Damped Harmonic Oscillator*.
- [32] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (Wiley-VCH, 2004); compl. B_{IV}: *Master Equation For a Damped Harmonic Oscillator*.
- [33] U. Fano, *Nuovo Cimento* **12**, 156 (1935).
- [34] V. Weisskopf e E. Wigner, *Z. Phys.* **63**, 54 (1930).
- [35] B. J. Dalton, S. M. Barnett, B. M. Garraway, arXiv:quant-ph/0102142v1 (2001).
- [36] B. M. Garraway, *Phys. Rev. A* **55**, 2290 (1997).
- [37] R.F. Nabiev, P. Yeh e J.J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. A* **47**, 3380 (1993).
- [38] S. John e T. Quang, *Phys. Rev. A* **50**, 1764 (1994).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (Wiley-VCH, 2004); compl. C₁: *Discrete level coupled to a broad continuum: a simple model*.
- [40] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [41] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, *Rev. Mod. Phys* **73** 565 (2001).
- [42] M. O. Scully e M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, Reino Unido, 1997); p.548.
- [43] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc e G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (Wiley-VCH, 2004); cap. VI: *The Dressed Atom Approach*.
- [44] D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ), p. 614-623.
- [45] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 200402 (2002).
- [46] J. I. Kim, K. M. F. Romero, A. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes e A. F. R. Toledo, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4737 (1999).
- [47] Eberly, J. H., N. B. Narozhny e J.J. Sanchez-Mondragon, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1323 (1980).

-
- [48] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 11 (1996).
- [49] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. A* **44**, 5913 (1991).
- [50] J. Gea-Banacloche, *Opt. Commun.* **88**, 531 (1992).
- [51] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. A* **47**, 2221 (1993).
- [52] C. V. S. Lima, *Efeitos Dissipativos na inversão atômica segundo o modelo de Jaynes-Cummings*, Dissertação de Mestrado (Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, 2005).
- [53] M. Fleischhauer e W. P. Schleich, *Phys. Rev. A* **47**, 4258 (1993).
- [54] J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3385 (1990).
- [55] A. Auffeves, P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 230405 (2003).
- [56] V. Buzek, H. Moya-Cessa e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **45**, 8190 (1992).
- [57] G. Morigi, E. Solano, B. Englert e Herbert Walther, *Phys. Rev. A* **65**, 040102 (2002).
- [58] A. Rauschenbeutel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83** 5166 (1999).
- [59] R. Loudon, *The quantum theory of Light*, 2nd ed. (Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 1983); sec. 4.8.