

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Luiz Henrique de Souza Matos

PI-álgebras e multiplicidades limitadas por 1

Belo Horizonte
2024

Luiz Henrique de Souza Matos

PI-álgebras e multiplicidades limitadas por 1

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos

Belo Horizonte
2024

2024, Luiz Henrique de Souza Matos.
Todos os direitos reservados

Matos, Luiz Henrique de Souza.

M433p PI-álgebras e multiplicidades limitadas por 1
[recurso eletrônico] / Luiz Henrique de Souza Matos.
Belo Horizonte — 2024.
1 recurso online (62 f. il.): pdf.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos.

Disertação (mestrado) - Universidade Federal de
Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,
Departamento de Matemática.

Referências: f. 61-62

1. Matemática – Teses. 2. Variedades algébricas
– Teses. 2. Identidades (Matemática) – Teses.
3. Multiplicidade (Matemática) – Teses. I. Santos,
Rafael Bezerra dos. II. Universidade Federal de Minas
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg
Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

PI-álgebras e multiplicidades limitadas por 1

LUIZ HENRIQUE DE SOUZA MATOS

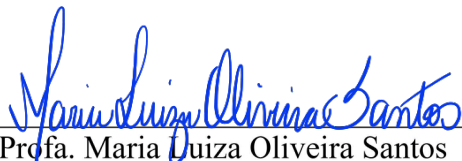
Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Documento assinado digitalmente
gov.br ANA CRISTINA VIEIRA
Data: 16/04/2024 12:43:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Ana Cristina Vieira
UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br LORENA MARA COSTA OLIVEIRA
Data: 16/04/2024 08:26:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Lorena Mara Costa Oliveira
UFSJ



Profa. Maria Luiza Oliveira Santos
UFF

Belo Horizonte, 12 de abril de 2024.

Agradecimentos

Essa jornada foi, sem dúvida, uma das mais desafiadoras que já enfrentei. Antes de agradecer nominalmente, registro meu reconhecimento a todas as pessoas que, de alguma forma, tornaram esse caminho menos árduo e, em muitos momentos, surpreendentemente leve e divertido.

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Gildete, pelo apoio incondicional e pelo colo de sempre. Aos meus irmãos, Reis, Maria, Laura e Arthur, pela paciência e pelo carinho. Aos meus tios, Glecio e Jani, por incentivarem meus passos e estarem sempre presentes.

Sou grato pelos colegas e amigos que o mestrado me trouxe. Em especial, Ana, Célio, Dandara, Douglas, Gabriel, Júlian, Solange e Wendell. À Janaíne, por ser um porto seguro desde a graduação. Ao Wesley, pelo apoio constante e pela paciência infinita. À Marcela e ao Genilson, por estarem comigo nos momentos de solidão e trazerem luz nos dias difíceis.

Agradeço também aos colegas do seminário de PI, Antônio, Pedro, Reyssila e Wesley, pelas trocas e discussões enriquecedoras.

Meu sincero agradecimento à Bianca, pelos momentos compartilhados em BH, e ao Brayner, pela presença constante.

A Rafael dos Santos, meu orientador, sou grato pela paciência e pelos ensinamentos. Às membras da banca Ana Cristina Vieira, Lorena Oliveira e Maria Luiza Santos, agradeço pela leitura atenta e pelas contribuições valiosas que ajudaram a aprimorar este trabalho. Em especial, expresso minha gratidão à professora Ana Cristina Vieira, por sua disponibilidade e atenção.

Registro também meu agradecimento às meninas da secretaria Andréa e Kelli, pelo auxílio cuidadoso e pelo carinho de sempre.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, fundamental para a realização deste trabalho.

Resumo

Uma variedade \mathcal{L} é dita distributiva se $(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \cup \mathcal{W} = (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$ para quaisquer subvariedades $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ de \mathcal{L} . Em 1976, Ananin e Kemer classificaram variedades de álgebras distributivas a partir de uma certa identidade polinomial da variedade. A relação de distributividade segue se, e somente se, as multiplicidades no n -ésimo cocaracter associado são limitadas por 1. Com isso, classificar variedades cujas multiplicidades são limitadas por 1 é equivalente a exigir uma certa identidade polinomial satisfeita pela variedade. Ao longo dos últimos anos, a classe de álgebras que satisfazem tal propriedade tem sido estudada em diferentes contextos. Nosso objetivo principal é fornecer uma demonstração original do resultado de Ananin e Kemer.

Palavras-chave: identidades; distributividade; cocaracter; multiplicidades.

Abstract

A variety \mathcal{L} is distributive if $(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \cup \mathcal{W} = (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{U} \cup \mathcal{W})$, for any subvarieties $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ of \mathcal{L} . In 1976, Ananin and Kemer classified distributive varieties of algebras based on a specific polynomial identity of the variety. The distributivity relation follows if, and only if, the multiplicities in the associated n -th cocharacter are bounded by 1. Thus, classifying varieties with multiplicities bounded by 1 is equivalent to require a specific polynomial identity satisfied by the variety. In the recent years, the class of algebras satisfying this property has been studied in different contexts. Our main goal is to provide an original proof of Ananin and Kemer's result.

Keywords: identities; distributivity; cocharacter; multiplicities.

Sumário

Introdução	9
1 PI-Álgebras	13
1.1 Preliminares	13
1.2 Definições e exemplos	16
1.3 T-ideais e variedades	20
1.4 A sequência de codimensões	27
2 O cálculo das multiplicidades	31
2.1 Representações de S_n	31
2.2 O cocaracter de uma PI-álgebra	35
2.3 Representações de GL_m	40
3 Multiplicidades limitadas por 1	46
3.1 Variedades distributivas	46
3.2 Distributividade e multiplicidades	48
3.3 Multiplicidades e identidades	51
3.4 Considerações finais	54
Bibliografia	61

Introdução

Sejam F um corpo de característica zero, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis não comutativas e denote por $F\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa gerada por X sobre F . Dizemos que um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial para uma álgebra associativa A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$ e denotamos $f \equiv 0$ em A . Se existe uma identidade polinomial não nula para A , então dizemos que A é uma **PI-álgebra**. Por exemplo, qualquer álgebra comutativa C é uma PI-álgebra, visto que C satisfaz o polinômio $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$. Além disso, verifica-se que as álgebras nilpotentes também são exemplos de PI-álgebras, bem como as álgebras de dimensão finita e, em particular, as álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_n(F)$. Um exemplo de PI-álgebra de dimensão infinita é a álgebra de Grassmann \mathcal{G} , definida por

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

É possível mostrar que o polinômio $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial para esta álgebra.

A teoria de álgebras com identidades polinomiais, como conhecemos hoje, teve seu início na década de 50. Destacam-se, por exemplo, os trabalhos de I. Kaplansky [16] e Amitsur e Levitzki [1]. Atualmente a PI-Teoria é uma área em constante desenvolvimento.

Denotemos por $Id(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A . Temos que, $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$, ou seja, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos da álgebra livre. A fim de descrever completamente as identidades de A , surge a seguinte pergunta: é possível determinar um conjunto finito que gere $Id(A)$ como T-ideal? Em 1950, Specht conjecturou que, quando F é um corpo de característica zero, então a resposta é afirmativa. Uma prova para a conjectura de Specht foi dada por Kemer [19] em 1987. No entanto, a demonstração dada não fornece um método construtivo de determinar tal base. Na verdade, isso é um problema de pesquisa na PI-teoria. Para ilustrar a dificuldade desse problema, considere as álgebras de matrizes $n \times n$. Sabemos que para $n = 2$, $Id(M_2(F))$ é gerado por dois polinômios, enquanto para $n \geq 3$, não é conhecido um conjunto gerador de $Id(M_n(F))$.

Visto que, determinar o conjunto de geradores de $Id(A)$ não é uma tarefa fácil, podemos nos perguntar se certos tipos de polinômios fornecem informações para as identidades de A . Neste sentido, utilizamos o chamado *processo de multilinearização*, que nos permite escrever qualquer polinômio como consequência de polinômios multilineares. Com isso, é possível mostrar que $Id(A)$ é gerado por uma quantidade finita de polinômios multilineares. Sendo assim, o espaço P_n dos polinômios multilineares de grau n , torna-se de suma importância. Além disso, o espaço

$$(P_1 \cap Id(A)) \dot{+} (P_2 \cap Id(A)) \dot{+} \dots \dot{+} (P_n \cap Id(A)) \dot{+} \dots ,$$

onde \dagger denota a soma direta como espaços vetoriais, descreve completamente o T-ideal de A . Observando isso, em 1976, Regev propôs estudar o crescimento das identidades polinomiais introduzindo a chamada *sequência de codimensões*, que consiste na sequência $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$, onde

$$c_n(A) := \dim_F \left(\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \right), \quad n \geq 1.$$

De forma intuitiva, observe que essa sequência mede o crescimento das identidades de A . Note que, se essa sequência cresce de forma exponencial há um indicativo de que existem muitas não identidades de A e, portanto, poucas identidades de A . Por outro lado, se essa sequência tem um crescimento lento, indica que A possui poucas não identidades. O estudo sobre tal comportamento assintótico foi iniciado por Regev [23], que mostrou que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra é sempre limitada exponencialmente, isto é, existem $\alpha, a > 0$ tais que $c_n(A) \leq \alpha a^n$.

Considerando o espaço dos polinômios multilineares, vemos que, existe uma ação natural do grupo simétrico S_n sobre P_n dada simplesmente pela permutação de suas respectivas variáveis. Com isso, o espaço P_n torna-se um S_n -módulo. Desde que $P_n \cap Id(A)$ é invariante sob esta ação, temos que

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

tem estrutura de S_n -módulo à esquerda e, como a característica de F é zero, pela teoria de representações de S_n , podemos escrever o caracter de $P_n(A)$ como

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde λ é uma partição de n , χ_λ é o S_n -caracter irredutível associado a λ e m_λ é a respectiva multiplicidade. Chamamos $\chi_n(A)$ de o n -ésimo cocaracter de A .

É sempre interessante que objetos que possuam um mesmo tipo de informação possam ser estudados sob as mesmas perspectivas. Por isso, definimos $\mathcal{V} = var(A)$, a *variedade* gerada por A , como a classe de todas as álgebras que satisfazem as identidades de A e escrevemos $Id(\mathcal{V}) = Id(A)$ e $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$. Em 1983, Berele e Regev [3], mostraram que se \mathcal{V} é uma variedade não trivial, então as multiplicidades m_λ são limitadas polinomialmente, isto é, existe $C > 0$ e t inteiro não negativo com $m_\lambda \leq Cn^t$ para cada $\lambda \vdash n$ e $n \geq 0$.

Uma maneira bastante usual de estudar PI-álgebras é através da caracterização de variedades via exclusão ou inclusão de uma determinada álgebra da variedade. Dizemos que a sequência de codimensões é limitada polinomialmente se existem uma constante a e um número inteiro não negativo k tal que $c_n(A) \leq an^k$, para n arbitrariamente grande. O resultado abaixo é bastante conhecido e caracteriza variedades de crescimento polinomial.

Teorema 0.0.1. \mathcal{V} possui crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2 \notin \mathcal{V}$.

A caracterização acima foi dada por Kemer [18] e, de forma geral, caracterizações desse tipo são ditas caracterizações do tipo Kemer. No contexto de álgebras munidas de estruturas adicionais, trabalhos nesse sentido são apresentados em [11], [12], [8], [22] e [25].

Existem também caracterizações envolvendo exclusão de álgebras da variedade, identidades e também multiplicidades. Como os resultados abaixo, que podem ser consultados em [14].

Teorema 0.0.2. $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$ se, e somente se, \mathcal{V} satisfaz alguma identidade standard, isto é, uma identidade do tipo $St_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)}$.

Teorema 0.0.3. Seja \mathcal{V} uma variedade com $\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ seu n -ésimo cocaracter. São equivalentes

- i) Existe $K > 0$ tal que $m_\lambda \leq K$, $\forall \lambda \vdash n$ e todo $n \geq 0$.
- ii) $UT_2(F) \notin \mathcal{V}$;
- iii) $f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_2^i x_1 x_2^{n-i} \equiv 0$ em \mathcal{V} .

Em relação ao contexto ordinário, temos, a partir dos teoremas acima e do Teorema de Kemer, uma caracterização de variedades de crescimento polinomial via identidades polinomiais:

Teorema 0.0.4. \mathcal{V} tem crescimento polinomial se, e somente se, \mathcal{V} satisfaz identidades do tipo $f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_2^i x_1 x_2^{n-i}$ e $St_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)}$.

Ainda no intuito de fornecer relações entre variedades e identidades polinomiais, Ananin e Kemer se interessaram no caso particular das variedades distributivas. Dizemos que uma variedade \mathcal{L} é **distributiva** se, para quaisquer subvariedades $\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{W}$ de \mathcal{L} , tivermos

$$(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \cup \mathcal{W} = (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{U} \cup \mathcal{W}).$$

Ananin e Kemer [2], forneceram uma caracterização das variedades distributivas via identidades polinomiais:

Teorema 0.0.5. \mathcal{V} é distributiva se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulas tais que $\alpha[x_1, x_2]x_1 + \beta x_1[x_1, x_2] \in Id(\mathcal{V})$.

Por outro lado, é possível mostrar que uma variedade é distributiva se, e somente se, as multiplicidades no n -ésimo cocaracter associado são limitadas por 1, como pode ser visto em [14]. Como consequência, temos uma caracterização das variedades cujo n -ésimo cocaracter associado possui as multiplicidades limitadas por 1:

Teorema 0.0.6. Seja \mathcal{V} uma variedade e

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

seu n -ésimo cocaracter. Então, para cada $\lambda \vdash n$ e $n \geq 1$, temos $m_\lambda \leq 1$ se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulas tais que

$$\alpha[x_1, x_2]x_1 + \beta x_1[x_1, x_2] \in Id(\mathcal{V}).$$

Vale mencionar que caracterizações desse tipo, que envolvam multiplicidades limitadas por 1 e identidades da variedade, tem sido empregadas a diversos contextos na PI-Teoria, como nos casos de $*$ -álgebras e superálgebras [10], álgebras graduadas [13], $*$ -superálgebras [21] e, mais recentemente, álgebras com involução grupo graduada [5]. Ainda nesse contexto, a depender do tipo de estrutura não existe a caracterização via distributividade. Os trabalhos mencionados anteriormente exemplificam quando há essa tripla relação e quando não há, em seus determinados contextos.

Visto que a relação de distributividade não necessariamente se estende a caracterizações com limitação por 1 das multiplicidades, temos por objetivo apresentar uma nova demonstração para o problema de Ananin e Kemer, no contexto ordinário. Mais especificamente, queremos relacionar limitação das multiplicidades com identidades da variedade sem que haja menção da relação distributiva da variedade. Para esse objetivo, vamos separar esse texto em três capítulos:

No Capítulo 1 apresentaremos as definições iniciais, bem como os clássicos resultados da PI-teoria, a fim de que seja um passo introdutório para a leitura. Em particular, veremos que as identidades de uma álgebra podem ser adquiridas como uma certa combinação de determinados tipos de polinômios, diremos que esse tal polinômio é consequência destes. Uma parte bastante importante e presente neste capítulo, será entender algumas consequências de certas identidades, as quais serão necessárias para a demonstração do resultado principal deste texto.

No Capítulo 2, apresentaremos uma introdução às representações de S_n e estudaremos a estrutura de S_n -módulo do espaço $P_n(A)$. Definiremos o n -ésimo cocaracter de uma PI-álgebra e veremos que, na prática, a ação de S_n não é suficiente para determinar as multiplicidades m_λ em $\chi_n(A)$. Assim, recorreremos à teoria de representações do grupo linear geral GL_m , afim de exibir um método efetivo para calcular tais multiplicidades.

Finalmente, o Capítulo 3 irá apresentar os conceitos acerca de variedades distributivas e apresentar a caracterização de Ananin e Kemer. Provaremos a relação entre distributividade e multiplicidades limitadas por 1 e, por fim, apresentaremos uma caracterização original do resultado de Ananin e Kemer na qual relacionaremos identidades polinomiais a multiplicidades limitadas por 1.

Capítulo 1

PI-Álgebras

O objetivo deste capítulo é fornecer uma base para o estudo inicial de PI-Teoria, apresentando as principais definições e exemplos.

1.1 Preliminares

Nessa seção, serão mencionados alguns conceitos acerca de representações de grupos finitos, sem que haja demonstrações. Para o leitor interessado em compreender melhor a teoria, sugerimos a referência [15].

O conjunto de todas bijeções do conjunto $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ é um grupo com a operação composição. Tal grupo possui $n!$ elementos, é chamado o *grupo simétrico de grau n* e denotado por S_n . Note que, para $n \geq 3$, S_n é um grupo não abeliano. Um elemento de S_n é dito uma *permutação* e uma forma de representar as permutações no grupo S_n é utilizando a notação em ciclos: escreva

$$\sigma = (i_1 \cdots i_r),$$

onde $i_1, \dots, i_r \in \hat{n}$, $\sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1$ e, para $k \in \hat{n} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$, $\sigma(k) = k$. Nesse caso, dizemos que σ é um r -ciclo de comprimento r . Um 2-ciclo será dito uma *transposição*. É claro que uma permutação de S_n é um produto de ciclos e que qualquer permutação pode ser escrita como produtos de transposições. Além disso, diremos que dois ciclos são *disjuntos* se eles não movem elementos em comum. Dizemos que uma permutação é *par* se ela pode ser escrita como um produto de um número par de transposições. Um importante subgrupo de S_n , denotado por A_n , é formado pelo conjunto das permutações pares de S_n . Chamamos A_n o *grupo alternado de grau n* .

O conjunto $GL_n(F)$ das matrizes invertíveis de ordem n com coeficientes em um corpo F é um grupo com a operação multiplicação. Dado um F -espaço vetorial V , se denotarmos $GL(V)$ o conjunto de todas transformações lineares invertíveis de V , então $GL(V)$ é um grupo com a operação composição. Fixada uma base de V , é possível mostrar que $GL_n(F)$ e $GL(V)$ são grupos isomorfos.

Definição 1.1.1. Seja G um grupo finito e V um F -espaço vetorial. Dizemos que um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ é uma **representação** de G . A dimensão do espaço V será dito o **grau** de φ .

Podemos estudar uma representação pelo ponto de vista matricial, isto é, considerando $GL_n(F)$, ao invés de $GL(V)$. Note que todo grupo possui uma representação de grau

arbitrário, bastando considerar o homomorfismo $\varphi(g) = I_n$, para todo $g \in G$, onde I_n é a matriz identidade. Claramente, o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow F^*$ dado por $\varphi(g) = 1$, para todo $g \in G$, é um exemplo de representação de grau 1 de um grupo G , a qual denominamos *representação trivial* de G .

Exemplo 1.1.2. Sejam $C_3 = \{1, g, g^2\}$ um grupo cíclico gerado por um elemento g de ordem 3 e $u = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ uma raiz primitiva da unidade. Então

$$\begin{aligned} \varphi : C_3 &\longrightarrow GL_2(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma representação não trivial de grau 2 de C_3 .

Recorde-se que uma ação de um grupo G num conjunto X é uma função que associa cada par (g, x) a um elemento $g \cdot x$ em X , de forma que $1 \cdot x = x$ e $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$. Perceba que o grupo S_n age sobre \hat{n} de modo natural: se $\sigma \in S_n$, então

$$\sigma \cdot i = \sigma(i).$$

Considere uma ação de G sobre um espaço vetorial V , isto é, $g \cdot v$ está definido para todo par $(g, v) \in G \times V$. Com isso, o mapa $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ definido por $g \mapsto \varphi(g) = \varphi_g$, onde $\varphi_g(v) = g \cdot v$, é uma representação de G . Reciprocamente, se $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ é uma representação de G , temos definida uma ação de G sobre V dada por $g \cdot v = \varphi_g(v)$. Com isso, obtemos uma correspondência entre ações de G sobre V e representações de G .

Definição 1.1.3. Seja G um grupo e F um corpo. Considere FG o espaço vetorial livremente gerado por G sobre F , cujos elementos são da forma

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g, \quad \text{com } \alpha_g \in F,$$

onde $\alpha_g \neq 0$ apenas para finitos elementos de G . As operações de soma e multiplicação são definidas naturalmente em FG , o que o torna um anel. Chamamos FG o **anel de grupo** de G . Há também definido uma multiplicação natural por escalares de F em FG , o que torna FG , como veremos na próxima seção, uma álgebra.

A ação de G sobre V pode ser estendida a uma ação FG sobre V . Para ver isso, considere $\sum_{g \in G} \alpha_g g \in FG$ e $v \in V$, então

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot v := \sum_{g \in G} \alpha_g (g \cdot v).$$

Definição 1.1.4. Dizemos que um espaço vetorial V é um FG -módulo se, para cada $g \in G$ e $v \in V$, está definida uma multiplicação $g \cdot v$ que satisfaz as condições abaixo.

1. $g \cdot v \in V$;
2. $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$;
3. $1 \cdot v = v$;

4. $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$;
5. $g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w$,

para todo $h \in G$, $w \in V$ e $\lambda \in F$.

Com isso, o espaço vetorial V associado a representação φ de G é um FG -módulo, o qual diremos ser o FG -módulo correspondente à representação φ . É possível mostrar que existe uma correspondência biunívoca entre os FG -módulos de dimensão n e as representações de grau n de G . Além disso, dizemos que uma representação é **irredutível** se o FG -módulo associado é simples, isto é, seus únicos subespaços invariantes sob a ação de G são os triviais. Uma representação é dita redutível se não é irredutível. O importante teorema abaixo diz que toda representação é completamente redutível.

Teorema 1.1.5. (*Maschke*) Se G é um grupo finito e F um corpo de característica zero, então todo FG -módulo é escrito como soma direta de seus FG -submódulos simples.

Para que possamos distinguir representações com a mesma informação, definimos o conceito abaixo.

Definição 1.1.6. Duas representações $\varphi : G \rightarrow GL(V_1)$ e $\phi : G \rightarrow GL(V_2)$ de G são **equivalentes** se existir uma transformação linear bijetiva $T : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\varphi_g = T^{-1}\phi_g T$, para todo $g \in G$.

O importante teorema abaixo diz como contar a quantidade de representações irredutíveis não equivalentes, sua demonstração pode ser consultada em [15].

Teorema 1.1.7. O número total de representações irredutíveis não equivalentes de um grupo finito G sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero é igual ao número de classes de conjugação de G .

Definição 1.1.8. Um conjunto $\{V_1, \dots, V_k\}$ de representantes de FG -módulos simples não isomorfos é chamado um conjunto completo de FG -módulos simples. Perceba que k é a quantidade de classes de conjugação de G .

Se $\{V_1, \dots, V_k\}$ é um conjunto completo de FG -módulos simples, então FG se escreve como

$$FG \cong V_1^{(n_1)} \oplus \dots \oplus V_k^{(n_k)},$$

onde $n_i \geq 1$, para todo $1 \leq i \leq k$. O símbolo \cong denota um isomorfismo de FG -módulos, que nada mais é do que, uma bijeção F -linear entre dois FG -módulos. De forma geral, se M é um FG -módulo, podemos mostrar que M se decompõe como

$$M \cong V_1^{(s_1)} \oplus \dots \oplus V_k^{(s_k)}.$$

Chamamos $s_i \geq 0$ a multiplicidade do FG -módulo V_i em M , para cada $1 \leq i \leq k$.

Definição 1.1.9. Definimos o **caracter** de uma representação $\varphi : G \rightarrow GL_n(F)$ como a função $\chi_\varphi : G \rightarrow F$ definida por $\chi_\varphi(g) = \text{tr}(\varphi_g)$, onde $g \in G$ e $\text{tr}(\varphi_g)$ denota o traço da matriz φ_g .

Um caracter de G , é o caracter de alguma representação de G , o grau do caracter é o grau da representação correspondente e o caracter é dito irredutível se a representação for irredutível. Perceba que $\varphi(1) = I_n$, para qualquer representação de grau n . Assim, $\chi_\varphi(1) = n$ que é o grau da representação φ .

Se consideramos φ e ϕ representações equivalentes de G , então existe uma transformação bijetiva T , tal que $\varphi_g = T^{-1}\phi_gT$, para todo $g \in G$. Então

$$\text{tr}(\varphi_g) = \text{tr}(T^{-1}\phi_gT) = \text{tr}(T^{-1})\text{tr}(\phi_g)\text{tr}(T) = \text{tr}(\phi_g),$$

isto é, representações equivalentes possuem o mesmo caracter. Assim, a definição abaixo faz sentido.

Definição 1.1.10. Dois caracteres de um grupo G são ditos equivalentes se suas representações são equivalentes.

Considere g e h elementos conjugados de G , isto é, $g = xhx^{-1}$, para algum $x \in G$, então

$$\chi(g) = \text{tr}(\varphi_g) = \text{tr}(\varphi_{xhx^{-1}}) = \text{tr}(\varphi_x\varphi_h\varphi_{x^{-1}}) = \text{tr}(\varphi_h) = \chi(h).$$

Com isso, elementos conjugados de G possuem o mesmo caracter. Assim, sob as hipóteses do Teorema 1.1.7, temos que, a quantidade de caracteres irredutíveis não equivalentes de G é exatamente a quantidade de classes de conjugação de G .

Estudar a teoria de representações no contexto geral não é o foco desse trabalho. Entretanto, as representações do grupo S_n tem uma forte ligação com a PI-Teoria, por isso, dedicaremos o Capítulo 2 para estudar as representações de S_n com mais detalhes. Além disso, as representações do grupo $GL_m(F)$, também abordadas no Capítulo 2, fornecerão ferramentas para a demonstração do teorema principal dessa dissertação.

1.2 Definições e exemplos

Definição 1.2.1. Dizemos que um espaço vetorial A , sobre um corpo F , é uma F -álgebra se A possui uma aplicação bilinear $\cdot : A \times A \rightarrow A$.

Na definição acima, a aplicação \cdot será dita produto ou multiplicação. Para simplificar a notação, omitiremos o \cdot e, quando estiver claro o corpo em questão, chamaremos A simplesmente de álgebra.

Uma base para uma álgebra A é uma base de A como espaço vetorial e a cardinalidade de uma base é dita a dimensão de A . Dizemos que $S \subset A$ gera a álgebra A se todo elemento de A pode ser escrito como combinação linear de produtos de elementos de S e nesse caso denotamos $A = \langle S \rangle$. Uma subálgebra de A é um subespaço vetorial fechado para o produto de A . Um ideal (à esquerda, à direita, bilateral) da álgebra A é um ideal (à esquerda, à direita, bilateral) do anel A que também é um subespaço vetorial de A . Finalmente, dizemos que uma álgebra A é simples se A é simples como anel, isto é, $A^2 \neq \{0\}$ e A não possui ideais bilaterais próprios.

O espaço vetorial das matrizes $M_n(F)$ de ordem n , com coeficientes em F é uma álgebra com o produto usual de matrizes. A dimensão de $M_n(F)$ é n^2 e uma base é dada pelas matrizes elementares $\{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$. O espaço vetorial $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores $n \times n$ é uma subálgebra de $M_n(F)$. O conjunto das matrizes que possui apenas a última coluna eventualmente não nula em $M_n(F)$ forma um ideal à esquerda de $M_n(F)$. O conjunto das matrizes que possui apenas a primeira coluna eventualmente não nula forma um ideal à direita de $M_n(F)$. É possível provar que a álgebra $M_n(F)$ não possui ideais bilaterais próprios e portanto é uma álgebra simples.

Definição 1.2.2. Seja A uma álgebra. Dizemos que A é

1. unitária, se existe $1 \in A$ tal que $1a = a = a1$, para todo $a \in A$;
2. associativa, se $a(bc) = (ab)c$, para todos, $a, b, c \in A$;
3. comutativa, se $ab = ba$, para todos, $a, b \in A$;
4. nilpotente, se existe m natural tal que $a_1 \cdots a_m = 0$, para todos $a_1, \dots, a_m \in A$;
5. nil de índice limitado, se existe n tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$.

Note que, uma álgebra associativa nada mais é do que um espaço vetorial que tem uma estrutura de anel e que o escalar se comporte bem ao produto, ou seja, $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ para todos $a, b, c \in A$ e $\alpha \in F$. Todas as álgebras nesse texto serão associativas sobre um corpo F de característica zero.

Exemplo 1.2.3. O anel de grupo FG definido em 1.1.3 é uma álgebra associativa de dimensão $|G|$.

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Dizemos que uma palavra em X é um termo do tipo $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, obtido por uma colagem finita de elementos de X . Denote por $F\langle X \rangle$ o espaço vetorial formado por todas as palavras de X . Uma palavra de X será dito um monômio de $F\langle X \rangle$, enquanto um elemento de $F\langle X \rangle$ será dito um polinômio. Dados dois monômios $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ e $x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_l}$ de $F\langle X \rangle$, definimos o seu produto da seguinte forma:

$$x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k} \cdot x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_l} := x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_l}.$$

Podemos estender esse produto distributivamente aos polinômios em $F\langle X \rangle$, fornecendo para $F\langle X \rangle$ uma estrutura de F -álgebra. Chamaremos $F\langle X \rangle$ a *álgebra livre*, livremente gerada por X , ou simplesmente a *álgebra de polinômios em variáveis não comutativas*. Dizemos que o **grau** de um monômio $u = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$, denotado por $\deg u$, é o comprimento da palavra u , isto é, $\deg u = k$. Definimos também o grau de um monômio em relação à variável x_i como sendo o número de vezes que a variável x_i aparece no monômio u , o qual denotamos por $\deg_{x_i} u$. Por fim, o grau de um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n)$ será o maior dentre os graus dos monômios de f .

Exemplo 1.2.4. Na álgebra $F\langle X \rangle$, considere o ideal $I = \langle x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \geq 1 \rangle$. A álgebra $\mathcal{G} = F\langle X \rangle / I$ é chamada de *álgebra de Grassmann*. Denotando $e_i = x_i + I$ temos

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Como a característica de F é zero, temos $e_i^2 = 0$, para todo $i > 0$. Além disso, dada uma permutação $\sigma \in S_n$ temos

$$e_{\sigma(i_1)} e_{\sigma(i_2)} \cdots e_{\sigma(i_n)} = \text{sgn}(\sigma) e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n},$$

onde $\text{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ . Dessa forma, $B = \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n \text{ e } n \geq 0\}$ é um conjunto gerador de \mathcal{G} como espaço vetorial. Na verdade, B é uma base para \mathcal{G} . De fato, suponha que $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i = 0$, $\alpha_i \in F$, $g_i \in B$, $i = 1, \dots, n$, é formado por uma quantidade mínima de coeficientes α_i não nulos. Assim, certamente haverá g_i e g_j , com $i \neq j$ em que algum e_k aparece em g_i e não aparece em g_j . Sem perda de generalidade, suponha que e_k aparece em g_1 e não aparece em g_2 , então $e_k g_1 = 0$ e portanto $e_k h = \sum_{i=2}^n \alpha_i g_i = 0$ é um elemento com uma quantidade menor de coeficientes não nulos.

Definição 1.2.5. Sejam A uma álgebra e $f \in F\langle X \rangle$ um polinômio. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** de A se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Neste caso escrevemos $f \equiv 0$ em A . Quando A admite alguma identidade polinomial não nula, dizemos que A é uma **PI-álgebra**.

Exemplo 1.2.6. Se A é uma álgebra nilpotente, então existe um inteiro não negativo m tal que $A^m = \{0\}$ e, portanto, o polinômio $x_1x_2 \cdots x_m$ é uma identidade de A .

Exemplo 1.2.7. Se A é uma álgebra nil de índice n , então x^n é uma identidade de A .

Exemplo 1.2.8. Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade de A .

O polinômio $[x_1, x_2]$ é dito o *comutador de peso 2* entre as variáveis x_1 e x_2 . De forma indutiva, definimos o comutador de peso $k > 2$ por

$$[x_1, x_2, \dots, x_k] := [[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}], x_k].$$

As seguintes relações são facilmente verificadas:

1. $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$ (*anticomutatividade*);
2. $[x_1 + x_2, x_3] = [x_1, x_3] + [x_2, x_3]$ (*linearidade*);
3. $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0$ (*identidade de Jacobi*).

Exemplo 1.2.9. A álgebra de Grassmann \mathcal{G} é uma PI-álgebra. Inicialmente, vamos definir dois subespaços importantes de \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}^{(0)} = \text{span}_F\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k} \text{ e } k \geq 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = \text{span}_F\{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k+1} \text{ e } k \geq 0\}.$$

Note que, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \dot{+} \mathcal{G}^{(1)}$ e, além disso,

$$\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \text{ e } \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}.$$

Isso nos diz que $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma subálgebra de \mathcal{G} . É possível mostrar também que $\mathcal{G}^{(0)}$ é o centro de \mathcal{G} . Considere $w_1, w_2 \in \mathcal{G}^{(1)}$, temos $w_1w_2 = -w_2w_1$. Com isso, veremos que o comutador de quaisquer dois elementos de \mathcal{G} pertencem ao centro. Sejam $a = a_0 + a_1$, $b = b_0 + b_1 \in \mathcal{G}$, então

$$[a, b] = [a_0 + a_1, b_0 + b_1] = [a_0, b_0] + [a_0, b_1] + [a_1, b_0] + [a_1, b_1] = [a_1, b_1] = 2a_1b_1 \in \mathcal{G}^{(0)}.$$

Assim, o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade de \mathcal{G} .

Exemplo 1.2.10. A álgebra $M_2(F)$ é uma PI-álgebra. De fato, o polinômio característico associado a uma matriz $D \in M_2(F)$ é da forma

$$x^2 - \text{tr}(D)x + \det(D).$$

Para $D = [A, B]$ temos, por Cayley-Hamilton,

$$[A, B]^2 - \text{tr}([A, B])[A, B] + \det([A, B])I = 0$$

Como $[A, B]$ tem traço nulo, então $[A, B]^2$ é um múltiplo da identidade e portanto comuta com qualquer matriz de $M_2(F)$. Assim, $[[x_1, x_2]^2, x_3] \equiv 0$ em $M_2(F)$.

Exemplo 1.2.11. Como $M_2(F)$ é uma PI-álgebra, então $UT_2(F)$ também PI-álgebra. Além disso, $UT_2(F)$ satisfaz também o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Para ver isso, note que $[A, B]$ é uma matriz triangular estritamente superior e o produto de duas matrizes desse tipo é nulo.

De forma geral, o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ é identidade para a álgebra $UT_n(F)$.

Um polinômio bastante relevante para a PI-Teoria é o chamado *polinômio standard* de grau $n \geq 2$, definido como

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

É possível mostrar que $M_2(F)$ satisfaz o polinômio standard de grau 4. De forma geral, o polinômio standard de grau $2n$ é sempre identidade para $M_n(F)$. Esse resultado é conhecido como o *Teorema de Amitsur-Levitzki* e pode ser consultado em [1].

Definição 1.2.12. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é **linear** na variável x_i se essa variável aparece com grau 1 em cada monômio de f . Se todos os monômios de f tem o mesmo grau, então f é dito **homogêneo**. Se, em cada monômio de f a variável x_i aparece com o mesmo grau então dizemos que f é homogêneo na variável x_i . No caso em que f é homogêneo em todas suas variáveis, f é chamado de **multihomogêneo**. Por fim, um polinômio é chamado **multilinear** se f é multihomogêneo e linear em todas as suas variáveis.

Observe que se $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$, podemos escrever

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} f^{(i_1, \dots, i_n)},$$

onde $f^{(i_1, \dots, i_n)}$ é a soma de todos os monômios de f onde $\deg_{x_j} f = i_j$, para todo $j = 1, \dots, n$. Os polinômios $f^{(i_1, \dots, i_n)}$ que não são nulos serão chamados de **componentes homogêneas** de f e (i_1, \dots, i_n) será dito o **multigrau** de $f^{(i_1, \dots, i_n)}$. Um polinômio é multilinear se for multihomogêneo de multigrau $(1, \dots, 1)$.

Exemplo 1.2.13. O polinômio $x_1 \circ x_2 := x_1 x_2 + x_2 x_1$, chamado *produto de Jordan de x_1 e x_2* , é multilinear de grau 2.

Exemplo 1.2.14. O polinômio standard de grau n também é multilinear. De forma geral, um polinômio multilinear de grau n se escreve da forma

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

com $\alpha_\sigma \in F$.

Definição 1.2.15. Seja $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ um polinômio linear nas variáveis x_1, \dots, x_n . Dizemos que f é alternado nas variáveis x_1, \dots, x_n se para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, f se torna o polinômio nulo quando substituímos x_i no lugar de x_j . Um polinômio que é alternado em todas as suas variáveis é chamado simplesmente de polinômio alternado.

Pela linearidade de f nas variáveis x_1, \dots, x_n , temos que f é alternado nas variáveis x_1, \dots, x_n se

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

Perceba que se $\text{char}(F) \neq 2$, então tomando $\sigma \in S_n$, e escrevendo σ como um produto de transposições, temos que se f é alternado nas variáveis x_1, \dots, x_n , então

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_m) = \text{sgn}(\sigma) f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Exemplo 1.2.16. O polinômio standard é um exemplo de polinômio alternado, enquanto o produto de jordan é um exemplo de polinômio não alternado.

A proposição abaixo diz que para verificarmos que um polinômio multilinear é identidade para uma certa álgebra, basta que seja verificado nos elementos da uma base.

Proposição 1.2.17. Seja B um conjunto gerador de uma álgebra A , como espaço vetorial. Se f é um polinômio multilinear que se anula em B , então f é uma identidade de A .

Demonstração: Seja $\{b_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ um conjunto gerador de A sobre F e consideremos $a_1, \dots, a_n \in A$. Podemos escrever

$$a_1 = \sum \alpha_{1i} b_i, \dots, a_n = \sum \alpha_{ni} b_i$$

onde $\alpha_{ji} \in F$. Como f é multilinear, temos que

$$f(a_1, \dots, a_n) = f\left(\sum \alpha_{1i} b_i, \dots, \sum \alpha_{ni} b_i\right) = \sum \alpha_{1i_1} \cdots \alpha_{ni_n} \underbrace{f(b_1, \dots, b_n)}_0 = 0,$$

o que nos dá $f \equiv 0$ em A . ■

Observe que se $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ é um polinômio multilinear e alternado nas variáveis x_1, \dots, x_n e a_1, \dots, a_n são elementos linearmente dependentes em A , então $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0$, para quaisquer b_1, \dots, b_m . Para ver isto, considere, sem perda de generalidade, $a_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i$. Então

$$f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = f\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i a_i, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\right) = \sum_{i=2}^n \alpha_i f(a_i, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m),$$

como f é alternado em x_1, \dots, x_n , temos o resultado.

Com isso, temos o resultado abaixo, que diz que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.

Corolário 1.2.18. Seja A uma álgebra de dimensão n , então $St_{n+1} \equiv 0$ em A .

Por outro lado, o exemplo abaixo mostra que existem PI-álgebras de dimensão infinita que não satisfazem uma identidade standard.

Exemplo 1.2.19. Considere \mathcal{G} a álgebra de Grassmann, então \mathcal{G} não satisfaz nenhum polinômio standard. De fato, desde que $e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma) e_1 e_2 \cdots e_n$, temos

$$St_n(e_1, e_2, \dots, e_n) = n! e_1 e_2 \cdots e_n \neq 0.$$

1.3 T-ideais e variedades

Dizemos que um ideal I de $F\langle X \rangle$ é um T-ideal se I é invariante sob os endomorfismos de $F\langle X \rangle$, isto é, $\phi(I) \subseteq I$, onde ϕ é um endomorfismo da álgebra livre.

Considere o conjunto $Id(A)$ formado por todas as identidades de uma álgebra A . Temos que, $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$. Em suma, se $f(x_1, \dots, x_n)$ é uma identidade de A , então $h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2$ é também uma identidade de A , para quaisquer $h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$.

Perceba que a estrutura de $Id(A)$ permite construir infinitas identidades a partir de uma identidade dada.

É bastante comum chamar $Id(A)$ simplesmente de o T-ideal de A , isso se dá pelo seguinte fato:

Proposição 1.3.1. Seja I um T-ideal de $F\langle X \rangle$, então $I = Id(F\langle X \rangle/I)$.

Demonstração: Seja $A = F\langle X \rangle/I$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in I$. Se $a_1 + I, \dots, a_n + I \in A$, considere o endomorfismo ϕ da álgebra livre, tal que $\phi(x_i) = a_i$. Segue que

$$f(a_1 + I, \dots, a_n + I) = f(a_1, \dots, a_n) + I = \phi(f(x_1, \dots, x_n)) + I.$$

Como I é T-ideal, temos $f \in Id(A)$. agora, suponha que $f = f(x_1, \dots, x_n) \in Id(A)$, isto é, $f(x_1, \dots, x_n) + I = f(x_1 + I, \dots, x_n + I) = I$, logo $f \in I$. ■

O lema abaixo pode ser facilmente mostrado e apresenta propriedades de T-ideais.

Lema 1.3.2. Se A é uma F -álgebra, temos que

1. Se B é subálgebra de A , então $Id(A) \subset Id(B)$;
2. Se I é ideal de A , então $Id(A) \subset Id(A/I)$;
3. Se B é uma F -álgebra isomorficamente imersa em A , então $Id(A) \subset Id(B)$.

Lema 1.3.3. Sejam A e B duas F -álgebras, então $Id(A \oplus B) = Id(A) \cap Id(B)$.

Demonstração: Primeiramente, observe que $ab = 0$, para todo $a \in A$ e $b \in B$, já que a soma $A \oplus B$ é direta como álgebra. Logo, se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$, então

$$f(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = f(a_1, \dots, a_n) + f(b_1, \dots, b_n),$$

para todos $a_i \in A$ e $b_i \in B$, $i = 1, \dots, n$. Assim, se $f \in Id(A \oplus B)$ temos

$$\underbrace{f(a_1, \dots, a_n)}_{\in A} = - \underbrace{f(b_1, \dots, b_n)}_{\in B}.$$

Desde que, $A \cap B = \{0\}$, temos $f \in Id(A) \cap Id(B)$. Reciprocamente, se $f \in Id(A) \cap Id(B)$, então

$$f(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = f(a_1, \dots, a_n) + f(b_1, \dots, b_n) = 0,$$

para todos $a_i \in A$ e $b_i \in B$, $i = 1, \dots, n$. Assim, $f \in Id(A \oplus B)$. ■

Visto a estrutura de T-ideal de $Id(A)$, queremos saber se todas as identidades de A podem ser obtidas a partir de específicas identidades. Isso nos motiva a dizer que um T-ideal I é gerado, como T-ideal, por um conjunto $S \subset F\langle X \rangle$ se todo elemento de I pode ser escrito como uma F -combinação linear de elementos da seguinte forma:

$$h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2,$$

onde os polinômios $h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$ e $f \in S$. Nesse caso, escrevemos $I = \langle S \rangle_T$.

Em 1950, Specht conjecturou que sobre um corpo de característica zero todo T-ideal I é finitamente gerado. Esta conjectura foi provada em 1987 por Kemer, a demonstração desse fato pode ser encontrada em [17].

Definição 1.3.4. Sejam $f, g \in F\langle X \rangle$. Dizemos que f é consequência de g se $f \in \langle g \rangle_T$ e denotamos $g \rightsquigarrow f$. Se f não é consequência de g , escrevemos $g \not\rightsquigarrow f$.

Exemplo 1.3.5. É fácil ver que $[x_1, x_2] \rightsquigarrow [x_1, \dots, x_n]$, para $n \geq 2$.

Exemplo 1.3.6. Como $St_3(x_1, x_2, x_3) = x_1[x_2, x_3] - x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]$, temos $[x_1, x_2] \rightsquigarrow St_3(x_1, x_2, x_3)$.

Lema 1.3.7. Se o polinômio $[x_1, x_2^2]$ é identidade para alguma álgebra A , então os polinômios

$$[x_1, x_2x_3x_4], [x_1, x_2]x_3x_4x_5, x_1[x_2, x_3]x_4x_5, x_1x_2[x_3, x_4]x_5, x_1x_2x_3[x_4, x_5]$$

também são identidades de A .

Demonstração: Note que, módulo $Id(A)$,

$$\begin{aligned} [x_1, (x_3x_4 + x_2)^2] &\equiv 0 \\ [x_1, (x_2x_3 + x_4)^2] &\equiv 0 \\ [x_1, (x_4x_2 + x_3)^2] &\equiv 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [x_1, (x_3x_4 + x_2)^2] &\equiv [x_1, x_3x_4x_2] + [x_1, x_2x_3x_4] \\ [x_1, (x_2x_3 + x_4)^2] &\equiv [x_1, x_2x_3x_4] + [x_1, x_4x_2x_3] \\ [x_1, (x_4x_2 + x_3)^2] &\equiv [x_1, x_4x_2x_3] + [x_1, x_3x_4x_2]. \end{aligned}$$

Como

$$[x_1, (x_3x_4 + x_2)^2] + [x_1, (x_2x_3 + x_4)^2] - [x_1, (x_4x_2 + x_3)^2] \equiv 0,$$

temos

$$[x_1, x_2x_3x_4] \equiv 0.$$

Para finalizar, perceba que, $[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]$. Assim, segue que,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [x_1, x_2x_3x_4x_5] = x_2[x_1, x_3x_4x_5] + [x_1, x_2]x_3x_4x_5 \\ &\equiv [x_1, x_2]x_3x_4x_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [x_1x_2x_3, [x_4, x_5]] = x_1x_2x_3[x_4, x_5] - [x_4, x_5]x_1x_2x_3 \\ &\equiv x_1x_2x_3[x_4, x_5], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [x_1x_2[x_3, x_4], x_5] = [x_1x_2, x_5][x_3, x_4] + x_1x_2[[x_3, x_4], x_5] \\ &\equiv x_1x_2[[x_3, x_4], x_5] \\ &= x_1x_2[x_3, x_4]x_5 - x_1x_2x_5[x_3, x_4] \\ &\equiv x_1x_2[x_3, x_4]x_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [x_2, x_1x_3x_4x_5] = [x_2, x_1x_3]x_4x_5 + x_1x_3[x_2, x_4x_5] \\ &\equiv [x_2, x_1]x_3x_4x_5 + x_1[x_2, x_3]x_4x_5 \\ &\equiv x_1[x_2, x_3]x_4x_5. \end{aligned}$$

■

O resultado abaixo exemplifica a importância das componentes multihomogêneas definidas na seção anterior. Ele diz que qualquer identidade polinomial é consequência de uma quantidade finita de polinômios multihomogêneos [14].

Teorema 1.3.8. Sejam F um corpo de característica zero e f uma identidade de uma álgebra A . Então, toda componente multihomogênea de f é uma identidade de A .

Com isso, a proposição abaixo fornece uma restrição aos polinômios em $F\langle X \rangle$ que são suficientes para determinar todo um T-ideal.

Proposição 1.3.9. ([14] Teorema 1.3.7) Seja f uma identidade de A de grau k . Então A satisfaz uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k .

Esse resultado é conhecido como *Processo de Multilinearização*. Sua prova é construtível e permite que obtenhamos uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k a partir de f . Com isso, e devido ao teorema anterior, temos estabelecido que identidades polinomiais são consequências de identidades multilineares.

Para exemplificar esse processo, considere o polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2, x_2]$. Observe que f não é linear na variável x_2 . Escreva

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_2 + x_3) - f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3) \\ &= [x_1, x_2 + x_3, x_2 + x_3] - [x_1, x_2, x_2] - [x_1, x_3, x_3] \\ &= [[x_1, x_2] + [x_1, x_3], x_2 + x_3] - [x_1, x_2, x_2] - [x_1, x_3, x_3] \\ &= [x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2]. \end{aligned}$$

Temos $[x_1, x_2, x_2] \rightsquigarrow [x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2]$, como queríamos.

Lema 1.3.10. O polinômio $[x_1, x_2, x_2]$ tem como consequência $[x_1, x_2, x_3]$.

Demonstração: Seja $I = \langle [x_1, x_2, x_2] \rangle_T$, pelo comentado acima, $[x_1, x_2, x_3] \equiv -[x_1, x_3, x_2] \pmod I$, assim

$$[x_1, x_2, x_3] \equiv -[x_1, x_3, x_2] = [x_3, x_1, x_2] \equiv -[x_3, x_2, x_1] = [x_1, x_3, x_2] - [x_1, x_2, x_3].$$

Segue que, $[x_1, x_2, x_3] \equiv -2[x_1, x_2, x_3]$ e portanto $[x_1, x_2, x_2] \rightsquigarrow [x_1, x_2, x_3]$. ■

É fácil ver que $[x_1, x_2, x_3] \rightsquigarrow [x_1, x_2, x_2]$ e assim, pelo lema anterior, A satisfaz $[x_1, x_2, x_2]$ se, e somente se, A satisfaz $[x_1, x_2, x_3]$.

Definição 1.3.11. Seja $f = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in F\langle X \rangle$, um polinômio linear nas variáveis x_1, \dots, x_n . Definimos o **operador de alternância** $\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n}$, nas variáveis x_1, \dots, x_n , como sendo o polinômio

$$\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} f = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_m).$$

Exemplo 1.3.12. O operador de alternância de $f = x_1 x_2$ nas variáveis x_1, x_2 é

$$\mathcal{A}_{x_1, x_2} x_1 x_2 = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} = x_1 x_2 - x_2 x_1 = [x_1, x_2].$$

De forma geral, para $n \geq 2$,

$$\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} x_1 \cdots x_n = St_n(x_1, \dots, x_n).$$

Lema 1.3.13. Seja A uma álgebra e $f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ uma identidade multilinear de grau n de A . Se $\sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma \neq \sum_{\sigma \in S_n/A_n} \alpha_\sigma$, então $St_n \equiv 0$ em A .

Demonstração: Se $f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ é uma identidade de A , então o operador de alternância $\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} f$ nas variáveis x_1, \dots, x_n é uma identidade de A . Note que,

$$\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} f = \mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Ou seja, alternar f nas variáveis x_1, \dots, x_n é o mesmo que alternar os monômios de f nas variáveis x_1, \dots, x_n . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) x_{\tau(\sigma(1))} \cdots x_{\tau(\sigma(n))} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma)^2 \text{sgn}(\tau) x_{\tau\sigma(1)} \cdots x_{\tau\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma\tau) x_{\tau\sigma(1)} \cdots x_{\tau\sigma(n)} \\ &= \text{sgn}(\sigma) \sum_{\tau\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma\tau) x_{\tau\sigma(1)} \cdots x_{\tau\sigma(n)} \\ &= \text{sgn}(\sigma) St_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Segue que, para $\sigma \in A_n$, $\text{sgn}(\sigma) = 1$ e $\alpha_\sigma \mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} = \alpha_\sigma St_n$. Como $\sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma \neq \sum_{\sigma \in S_n/A_n} \alpha_\sigma$, temos $\mathcal{A}_{x_1, \dots, x_n} f = \alpha St_n(x_1, \dots, x_n)$, com $\alpha \neq 0$. Logo, $St_n(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$. ■

Exemplo 1.3.14. Se $f = [x_1, x_2][x_3, x_4] - x_1[x_2, x_3]x_4 \equiv 0$ em A então $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Id(A)$. De fato, basta observar que as permutações associadas aos monômios de f são (12), (23), (34), (12)(34) e depois aplicar o resultado acima para $\alpha_{(12)} = -1$, $\alpha_{(23)} = 1$, $\alpha_{(34)} = -1$ e $\alpha_{(12)(34)} = 1$.

Através do que foi apresentado acima vamos mostrar um resultado bastante importante para o teorema principal dessa dissertação.

Proposição 1.3.15. Se uma álgebra A satisfaz um polinômio da forma $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2]$, com $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha - \beta \neq 0$, então A satisfaz as identidades

$$[x_1, x_2]x_3x_4, x_1[x_2, x_3]x_4, x_1x_2[x_3, x_4].$$

Demonstração: Inicialmente, veja que, as linearizações de $[x_1, x_2]x_2$ e de $x_2[x_1, x_2]$ são, respectivamente, $[x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2$ e $x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]$. Assim, módulo $Id(A)$,

$$\alpha([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2) + \beta(x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]) \equiv 0. \quad (1.1)$$

Segue que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2 + x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]) &\equiv \beta([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2) + \\ &\alpha(x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]). \quad (1.2) \end{aligned}$$

Note que

$$(\alpha + \beta)([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2 + x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]) = (\alpha + \beta)[x_1, x_2 \circ x_3].$$

Assim, podemos reescrever (1.2) como

$$(\alpha + \beta)[x_1, x_2 \circ x_3] \equiv \beta([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2) + \alpha(x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]).$$

Somando e subtraindo $\alpha([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2) + \beta(x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2])$ do lado direito, e usando (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)[x_1, x_2 \circ x_3] &\equiv (\beta - \alpha)([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2 - x_3[x_1, x_2] - x_2[x_1, x_3]) \\ &= (\beta - \alpha)([x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2]). \end{aligned}$$

Logo,

$$[x_1, x_2 \circ x_3] \equiv a([x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2]) \quad (1.3)$$

onde $a = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$. As duas relações abaixo são imediatas de (1.1).

$$[x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2 \equiv b(x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2]) \quad (1.4)$$

$$x_2[x_1, x_3] + x_3[x_1, x_2] \equiv c([x_1, x_2]x_3 + [x_1, x_3]x_2) \quad (1.5)$$

onde $b = \frac{\beta}{\alpha}$ e $c = \frac{-\alpha}{\beta}$. Usando (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} [x_1x_4, x_2 \circ x_3] &= a([x_1x_4, x_2, x_3] + [x_1x_4, x_3, x_2]) \\ &= 2a([x_1, x_2][x_4, x_3]) + [x_1, x_3][x_4, x_2] + ax_1([x_4, x_2, x_3] + [x_4, x_3, x_2]) \\ &\quad + a([x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2])x_4 \\ &\equiv 2a([x_1, x_2][x_4, x_3] + [x_1, x_3][x_4, x_2]) + x_1[x_4, x_2 \circ x_3] + [x_1, x_2 \circ x_3]x_4 \\ &= 2a([x_1, x_2][x_4, x_3] + [x_1, x_3][x_4, x_2]) + [x_1x_4, x_2 \circ x_4], \end{aligned}$$

do qual, segue que

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_4][x_3, x_2] \equiv 0. \quad (1.6)$$

Usando (1.3) e (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} [x_1, x_2 \circ (x_3x_4)] &= a([x_1, x_2]x_3, x_4 + [x_1, x_3x_4], x_2) \\ &= a([x_1, x_2, x_3] + [x_1, x_3, x_2])t + az([x_1, x_2, x_4] + [x_1, x_4, x_2]) \\ &\quad + a([x_1, x_3][x_4, x_2] + [x_3, x_2][x_1, x_4]) \\ &\equiv [x_1, x_2 \circ x_3]x_4 + x_3[x_1, x_2 \circ x_4] \\ &\equiv [x_1, x_2 \circ (x_3x_4)] + 2(x_3[x_1, x_2]x_4 - [x_3, x_1][x_2, x_4]). \end{aligned}$$

Assim,

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv x_1[x_2, x_3]x_4. \quad (1.7)$$

Agora, pelo Exemplo 1.3.14, temos $St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$. Com isso, usando (1.6) e (1.7), é fácil verificar que

$$0 \equiv St_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv [x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv x_1[x_2, x_3]x_4. \quad (1.8)$$

Multiplicando (1.4) por x_4 à direita e usando (1.8), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\equiv [x_1, x_2]x_3x_4 + [x_1, x_3]x_2x_4 \\ &= [x_1, x_2]x_4x_3 + [x_1, x_3]x_4x_2 \\ &\equiv -[x_1, x_4]x_2x_3 - [x_1, x_4]x_3x_2 \\ &\equiv -2[x_1, x_4]x_2x_3. \end{aligned}$$

O que nos dá

$$[x_1, x_2]x_3x_4 \equiv 0. \quad (1.9)$$

De forma análoga, multiplicando x_4 à esquerda em (1.5), obtemos

$$x_1x_2[x_3, x_4] \equiv 0. \quad (1.10)$$

Como queríamos. ■

Corolário 1.3.16. Se A satisfaz $[x_1, x_2]x_2$, isto é, o caso em que $\beta = 0$, na proposição acima, então A satisfaz $[x_1, x_2]x_3x_4$ e $x_1[x_2, x_3]x_4$.

Demonstração: Veja que na prova da proposição anterior, (1.8) só depende de (1.3), enquanto (1.9) só depende de (1.8) e (1.4). ■

Analogamente, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.3.17. Se A satisfaz $x_2[x_1, x_2]$, então A satisfaz $x_1x_2[x_3, x_4]$ e $x_1[x_2, x_3]x_4$.

Veremos mais abaixo que álgebras comutativas não nilpotentes possuem o mesmo T-ideal. No entanto, desde que a dimensão dessas álgebras podem ser diferentes, percebemos não haver uma noção de isomorfismo entre elas (isto é, uma bijeção entre anéis que preserve linearidade). Com isso, álgebras não isomorfas podem ser estudadas de um mesmo ponto de vista em PI-Teoria. Ainda mais, os polinômios satisfeitos por uma determinada álgebra dialogam com a estrutura da álgebra, como pode ser visto no caso do polinômio $[x_1, x_2]$, que só é identidade para álgebras comutativas. Nesse contexto, podemos fixar uma álgebra A , observar seu T-ideal $Id(A)$ e nos perguntarmos: quais álgebras satisfazem todas as identidades de A ?

Definição 1.3.18. Seja A uma F -álgebra. Denotamos por $\mathcal{V} = var(A)$ a classe de todas as F -álgebras que satisfazem todas as identidades de A e dizemos que \mathcal{V} é a variedade gerada por A . Perceba que, em termos de identidades

$$B \in var(A) \iff Id(A) \subset Id(B).$$

Denotamos $Id(\mathcal{V}) = Id(A)$.

O caso em que A e B geram a mesma variedade, isto é, $Id(A) = Id(B)$, dizemos que A é **PI-equivalente** a B e denotamos $A \sim_{PI} B$.

Os Teoremas de Birkhoff-Poincaré-Witt e Witt, não enunciados aqui, fornecem uma base para $F\langle X \rangle$. A proposição abaixo, nos dá uma forma de escrever os polinômios multilineares de $F\langle X \rangle$. Mais informações podem ser encontradas em [7].

Proposição 1.3.19. Qualquer polinômio multilinear de grau n pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_{s_1}} \underbrace{[x_{j_1}, \dots, x_{j_{s_2}}]}_{c_1} \cdots \underbrace{[x_{l_1}, \dots, x_{l_{s_m}}]}_{c_t},$$

onde $i_1 < \cdots < i_{s_1}$, os comutadores c_1, \dots, c_t de pesos arbitrários, tais que $\sum_{k=1}^n s_k = n$.

Exemplo 1.3.20. Se A é uma álgebra comutativa e unitária, então, $Id(A)$ é gerado, como T -ideal, por $[x_1, x_2]$. De A ser comutativa, temos $[x_1, x_2] \equiv 0$ em A , ou seja, $I = \langle [x_1, x_2] \rangle_T \subseteq Id(A)$. Por outro lado, considere $f \in Id(A)$, a qual, pela Observação 1.3.9, podemos supor multilinear. Pela Proposição 1.3.19 e pelo Exemplo 1.3.5 podemos escrever

$$f \equiv \alpha x_1 \cdots x_n \pmod{I}.$$

Tomando uma avaliação $x_i = 1$, para $i = 1, \dots, n$ em f , obtemos $f = \alpha 1$. Como f é uma identidade de A , temos que $\alpha = 0$, ou seja, $f \in I$. Portanto, $Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$.

A variedade \mathcal{V} das álgebras comutativas com unidade é totalmente determinada pelo polinômio $[x_1, x_2]$, isto é $B \in \mathcal{V} \iff [x_1, x_2] \in Id(B)$.

1.4 A sequência de codimensões

Na seção anterior, vimos que as identidades polinomiais de uma álgebras são consequências de uma quantidade finita de identidades multilineares. Dessa forma, faz-se importante definir o espaço vetorial

$$P_n = \text{span}_F \{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\},$$

dos polinômios multilineares de grau n . Temos que, o T -ideal de uma PI-álgebra é completamente determinado por

$$(P_1 \cap Id(A)) \dot{+} (P_2 \cap Id(A)) \dot{+} \cdots \dot{+} (P_n \cap Id(A)) \dot{+} \cdots$$

Assim, a dimensão de $P_n \cap Id(A)$ nos fornece, de certa forma, o crescimento das identidades da álgebra A , conforme n cresce.

De forma geral, determinar o T -ideal de uma álgebra A não é uma tarefa fácil. Para exemplificar isso, considere a álgebra $M_n(F)$. Drensky mostrou em [6] que o T -ideal de $M_2(F)$ é dado por $\langle St_4, [[x_1, x_2]^2, x_3] \rangle_T$. Contudo, para $n \geq 3$, o T -ideal de $M_n(F)$ ainda não é conhecido.

Para atacar esse problema de uma nova forma, em 1972, Regev [23] introduziu a chamada *sequência de codimensões*, via o espaço quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}, \quad n \geq 1.$$

Definição 1.4.1. A n -ésima codimensão de A é definida por

$$c_n(A) := \dim_F P_n(A).$$

Além disso, se $\mathcal{V} = \text{var}(A)$ definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$, $n \geq 1$, a n -ésima codimensão da variedade \mathcal{V} .

Observe que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $\dim_F P_n(A) < n!$, para algum n .

Exemplo 1.4.2. Seja A uma álgebra comutativa e unitária. Do Exemplo 1.3.20, $Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$ e $\{x_1 \cdots x_n\}$ é uma base de P_n módulo $P_n \cap Id(A)$. Desse modo, $c_n(A) = 1$, para todo $n \geq 1$.

Exemplo 1.4.3. Se A é uma álgebra nilpotente de índice m então, qualquer monômio de P_n contendo pelo menos m variáveis é uma identidade de A . Assim sendo, $c_n(A) = 0$, para todo $n \geq m$. Note que, se A é uma PI-álgebra não nilpotente, então $c_n(A) \neq 0$ para $n \geq 1$.

Exemplo 1.4.4. Se A é uma álgebra satisfazendo as identidades $[x_1, x_2]x_3x_4$, $x_1[x_2, x_3]x_4$ e $x_1x_2[x_3x_4]$, então $c_n(A) \leq 1$, para cada $n \geq 4$. Note que, módulo o T-ideal gerado por tais identidades, qualquer polinômio multilinear de grau $n \geq 4$ se reduz a $x_1x_2 \cdots x_n$.

Exemplo 1.4.5. Se A é uma álgebra satisfazendo $[x_1, x_2^2]$, então, usando o Lema 1.3.7, $c_n(A) \leq 1$, para $n \geq 5$.

A proposição abaixo compara sequências de codimensões via álgebras numa variedade.

Proposição 1.4.6.

1. Se $B \in var(A)$ então $c_n(B) \leq c_n(A)$, para todo $n \geq 1$.
2. Se $Id(A) \subset Id(B)$ e, para todo $n \geq 0$, $c_n(A) = c_n(B)$ então $A \sim_{PI} B$.

Demonstração:

1. Se $B \in var(A)$ então $Id(A) \subset Id(B)$, logo $(P_n \cap Id(A)) \subset (P_n \cap Id(B))$, o que garante $c_n(B) \leq c_n(A)$, para cada $n \geq 1$.
2. Temos, $(P_n \cap Id(A)) \subset (P_n \cap Id(B))$ e assim $P_n(B) \subseteq P_n(A)$. Como $c_n(A) = c_n(B)$ então $P_n(B) = P_n(A)$.

■

Em 1973, Krakowski e Regev [20] determinaram o T -ideal da álgebra de Grassmann e exibiram sua sequência de codimensões.

Teorema 1.4.7. Seja \mathcal{G} a Grassmann de dimensão infinita. Então, $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ e $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Sejam $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ e $P_n(I) = \frac{P_n}{P_n \cap I}$. Pelo Exemplo 1.2.9, $[x_1, x_2, x_3] \in Id(\mathcal{G})$, portanto $I \subseteq Id(\mathcal{G})$. Com isso, observamos que

$$c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F P_n(I).$$

Para a igualdade, considere $g \in P_n$. Pela Proposição 1.3.19, módulo I , g é combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}],$$

onde $i_1 < \cdots < i_r$, $r + 2m = n$. Também podemos supor $j_1 < j_2, \dots, j_{2m-1} < j_{2m}$. Além disso, observe que, para todos $a, b, c, d \in F\langle X \rangle$, temos satisfeitas as seguintes relações:

1. $[a, b, [c, d]] = [a, b][c, d] - [c, d][a, b]$;

$$2. [a, c][b, d] = -[a, b][c, d] + [ab, c, d] + [ac, b, d] - [a, b, d]c - [a, c, d]b.$$

Isto é, módulo I , comutadores de peso 2 comutam e as variáveis nesses produtos podem ser trocadas de lugar a menos de sinais. Com isso, podemos considerar

$$j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m}.$$

Existem então, 2^{n-1} elementos da forma desejada e assim, uma base de $P_n(I)$ tem no máximo 2^{n-1} elementos. Isto é,

$$c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F P_n(I) \leq 2^{n-1}.$$

Vamos ver que tais elementos são linearmente independentes módulo $Id(\mathcal{G})$.

Para isso, tome

$$h = \sum_{s \in S} \alpha_s x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] \equiv 0 \pmod{Id(\mathcal{G})},$$

onde S consiste em todas as n -uplas $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{2m})$ satisfazendo $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m}$ e $r + 2m = n$. Suponha por absurdo que exista um coeficiente $\alpha_{s'}$ não nulo, onde $s' = (i_1, \dots, i_{r'}, j_1, \dots, j_{2m'}) \in S$, $i_1 < \dots < i_{r'}$, $r' + 2m' = n$, $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m'}$, com s' escolhido de forma que a quantidade de elementos $\{j_1, \dots, j_{2m'}\}$ seja a menor possível. Considere a avaliação $x_{i_1} = \dots = x_{i_{r'}} = 1$ e $x_{j_l} = e_l$, onde $1 \leq l \leq 2m'$. Obtemos

$$2^{m'} \alpha_{s'} e_1 \cdots e_{2m'}.$$

Desde que $h \equiv 0$, devemos ter $\alpha_{s'} = 0$, uma contradição. Segue que

$$2^{n-1} \leq c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F P_n(I) \leq 2^{n-1},$$

o que resulta $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$ e $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$. ■

Observação 1.4.8. Pelo Lema 1.3.10, se uma álgebra A admite a identidade $[x_1, x_2, x_2]$ então $A \in var(\mathcal{G})$ e, pela Proposição 1.4.6, $c_n(A) \leq c_n(\mathcal{G})$, para cada $n \geq 1$.

Teorema 1.4.9. Considere a álgebra M_4 abaixo,

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Vamos ver que $Id(M_4) = \langle [x_1, x_2]x_3x_4 \rangle_T$ e que $c_n(M_4) = n(n-1)$, para $n \geq 4$.

Demonstração: É fácil ver que o polinômio $[x_1, x_2]x_3x_4$ é identidade para M_4 e que M_4 não possui identidades multilineares de grau menor que 4. Considere $I = \langle [x_1, x_2]x_3x_4 \rangle_T$. A identidade $[x_1, x_2]x_3x_4$ significa que, módulo I , qualquer polinômio multilinear em pelo menos 4 variáveis tem sempre as primeiras posições ordenadas e as duas últimas livres. Com isso, $f \in P_n$ se reduz a

$$f = \sum_{\substack{i, j=1, \\ i \neq j}}^n \alpha_{ij} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} x_i x_j \pmod{I}.$$

Assim, $c_n(M_4) \leq n(n-1)$. Vamos ver que para cada $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, os monômios $x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} x_i x_j$ são linearmente independentes módulo $Id(M_4)$. Considere

$$f = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_{ij} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} x_i x_j \equiv 0 \pmod{Id(M_4)}.$$

Agora, fixe i, j e tome $x_{i_1} = \cdots = x_{i_{n-2}} = e_{11}$, $x_i = e_{12}$ e $x_j = e_{23}$. Como $e_{11}e_{12}e_{23} = e_{13}$ e $f = \alpha_{i,j}e_{13} \equiv 0$ temos $\alpha_{i,j} = 0$. Variando a escolha de i, j , teremos $\alpha_{i,j} = 0$, para cada $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$.

Com isso, mostramos que $c_n(M_4) = n(n-1)$ e $Id(M_4) = \langle [x_1, x_2]x_3x_4 \rangle_T$, como queríamos. ■

O teorema abaixo segue de forma completamente similar ao que foi apresentado acima.

Teorema 1.4.10. Considere a álgebra M_5 abaixo,

$$M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Então $Id(M_5) = \langle x_1x_2[x_3, x_4] \rangle_T$ e $c_n(M_5) = n(n-1)$, para $n \geq 4$.

Os dois teoremas acima são de autoria de Giambruno e La Mattina e podem ser vistos em [9].

Capítulo 2

O cálculo das multiplicidades

O objetivo desse capítulo é apresentar uma ferramenta efetiva para o cálculo das multiplicidades que aparecem no n -ésimo cocaracter de uma dada PI-álgebra.

2.1 Representações de S_n

Nesta seção estudaremos as representações do grupo simétrico S_n através da teoria desenvolvida por Alfred Young. Essa teoria é de grande importância no estudo de PI-álgebras e pode ser vista com mais detalhes em [24].

Seja $n \geq 1$ um inteiro, uma partição λ de n é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$. Escrevemos $\lambda \vdash n$.

Exemplo 2.1.1. $\lambda = (4, 1, 1) \vdash 6$ e $\mu = (5, 2, 1, 1) \vdash 9$.

Observação 2.1.2. Quando $\lambda_i = \dots = \lambda_{i+j-1}$ escrevemos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i^j, \lambda_{i+j}, \dots, \lambda_k)$.

Lembre-se que, dada uma permutação $\alpha \in S_n$, α pode ser escrita unicamente como produto de ciclos disjuntos, a menos da ordem dos fatores. Assim, se $\alpha \in S_n$ e $\alpha = (a_{11} \dots a_{1\lambda_1}) \dots (a_{r1} \dots a_{r\lambda_r})$ é uma decomposição em ciclos disjuntos com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ dizemos que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ é a estrutura cíclica de α . É fato que, duas permutações em S_n são conjugadas se, e somente se, possuem a mesma estrutura cíclica. Isto é, as classes de conjugação de S_n são caracterizadas por suas estruturas cíclicas. Assim, a partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ determina unicamente a classe de conjugação de α . Temos então uma relação biunívoca entre as partições de n e as classes de conjugação de S_n . Agora, desde que o número de S_n -caracteres irredutíveis é igual ao número de classes de conjugação de S_n , os caracteres irredutíveis de S_n podem ser indexados por partições de n .

Em suma, ao considerarmos F um corpo de característica zero e algebricamente fechado, a álgebra de grupo FS_n tem uma decomposição dada por

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F),$$

onde I_λ é um ideal bilateral minimal e d_λ é a dimensão de I_λ . Para mais detalhes, consulte o Capítulo 2 de [4].

Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$, associamos um diagrama que consiste de λ_1 boxes na primeira linha, λ_2 boxes na segunda linha, e assim por diante. Dizemos que esse é o *diagrama de Young* associado a λ e denotamos D_λ .

Exemplo 2.1.3. Para $\lambda = (4, 2, 1) \vdash 7$ e $\mu = (2, 1) \vdash 3$ temos

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \quad D_\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}.$$

Dado um diagrama de Young do tipo $\lambda \vdash n$, chamaremos de *altura de λ* a quantidade de boxes na primeira coluna de D_λ . Denotaremos a altura de λ por $h(\lambda)$. Perceba que a altura é simplesmente a quantidade de fatores que aparecem na partição λ .

Para uma partição $\lambda \vdash n$ consideramos $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s) \vdash n$, onde λ'_i é a quantidade de boxes na coluna i de λ . Dizemos que λ' é a partição conjugada de λ . Perceba que as linhas do diagrama $D_{\lambda'}$ consiste nas colunas de D_λ .

Exemplo 2.1.4. Para $\lambda = (4, 2, 1)$ temos $\lambda' = (3, 2, 1, 1)$ e

$$D_{\lambda'} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

Assim, $h(\lambda) = 3$ e $h(\lambda') = 4$.

Uma *tabela de Young* T_λ é um preenchimento dos boxes de D_λ com os inteiros $1, 2, \dots, n$. Podemos também escrever $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro localizado na linha i e coluna j , isto é no box (i, j) .

Exemplo 2.1.5. Para $\lambda = (2, 1)$ temos as tabelas T_λ como

$$\begin{array}{ccc} T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \\ T_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & T_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} & T_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

são todas as tabelas do tipo λ . Perceba que a quantidade de tabelas do tipo $\lambda \vdash n$ é $n!$.

Definição 2.1.6. Uma tabela T_λ do tipo $\lambda \vdash n$ é dita **standard** se os inteiros $1, \dots, n$ são colocados de forma crescente de cima para baixo e da esquerda para a direita.

Exemplo 2.1.7. As tabelas T_1 e T_2 acima são standard enquanto as demais não são.

O grau dos S_n -caracteres irredutíveis estão associados as tabelas standard, como podemos ver no teorema abaixo [24].

Teorema 2.1.8. Seja φ_λ a representação irredutível associada a λ , então seu grau d_λ é exatamente a quantidade de tabelas standard do tipo λ .

Definição 2.1.9. Seja D_λ um diagrama do tipo $\lambda \vdash n$. Definimos o **gancho** do box (i, j) como sendo a soma da quantidade de boxes à direita de (i, j) com a quantidade de boxes abaixo de (i, j) mais 1. Denotamos o gancho de (i, j) por h_{ij} .

Exemplo 2.1.10. Para $\lambda = (4, 2, 1) \vdash 7$, preenchemos cada box com o seu respectivo gancho.

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

O cálculo explícito de d_λ é a conhecida *Fórmula do Gancho*, que será apresentada a seguir e que pode ser consultada em [24], Teorema 2.3.21.

Teorema 2.1.11. (Fórmula do Gancho). Seja $\lambda \vdash n$ e D_λ o diagrama de Young associado. Então

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$$

onde h_{ij} é o gancho do box (i, j) .

Exemplo 2.1.12.

1. Pelo Exemplo 2.1.10,

$$d_{(4,2,1)} = \frac{7!}{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2} = 35.$$

2. Para $\lambda = (n)$, temos

$$D_{(n)} = \boxed{} \boxed{} \cdots \boxed{},$$

$$d_{(n)} = \frac{n!}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} = 1.$$

3. Para $\lambda = (k, 1^{n-k})$ temos

$$D_{(k, 1^{n-k})} = \begin{array}{cccc} \boxed{} & \boxed{} & \cdots & \boxed{} \\ \boxed{} & & & \\ \vdots & & & \\ \boxed{} & & & \end{array}$$

e então, segue que

$$d_{(k, 1^{n-k})} = \frac{n!}{n(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Dado $\lambda \vdash n$ vamos definir importantes subgrupos de S_n definidos a partir de uma tabela de Young T_λ .

Definição 2.1.13. Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$, o subgrupo **estabilizador-linha** de uma tabela de Young T_λ é dado pelo subgrupo de S_n

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{r\lambda_r})$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i\lambda_i})$ denota o grupo simétrico agindo sobre os inteiros $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i\lambda_i}$. O subgrupo **estabilizador-coluna** é dado por

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, \dots, a_{\lambda'_s \lambda_1})$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ .

Note que R_{T_λ} permuta os elementos nas linhas de T_λ e C_{T_λ} permuta os elementos nas colunas de T_λ .

Exemplo 2.1.14. Considere a partição $(4, 2, 1)$ e a tabela

$$T_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 3 & 6 & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}$$

Temos $R_{T_\lambda} = S_4(1, 4, 5, 7) \times S_2(3, 6) \times S_1(2)$ e $C_{T_\lambda} = S_3(1, 3, 2) \times S_2(4, 6) \times S_1(5) \times S_1(7)$.

Nosso objetivo agora é definir um elemento em FS_n que gere os ideais minimais à esquerda de FS_n . Para isso, fixemos uma partição $\lambda \vdash n$ e uma tabela de Young T_λ , definimos o elemento $e_{T_\lambda} \in FS_n$ como

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} \text{sgn}(\tau) \sigma \tau,$$

Pode-se provar que o elemento e_{T_λ} é um *idempotente essencial*, isto é, $e_{T_\lambda}^2 = ae_{T_\lambda}$, onde $a = \frac{n!}{d_\lambda} \in F$. Agora, como $a \in F$ temos que e_{T_λ} e $\frac{e_{T_\lambda}}{a}$ geram o mesmo ideal à esquerda, isto é, $FS_n e_{T_\lambda} = FS_n \frac{e_{T_\lambda}}{a}$.

Exemplo 2.1.15. Considere a tabela $T_{(2,1)}$ abaixo e calculemos o idempotente essencial $e_{T_{(2,1)}}$ associado.

$$T_{(2,1)} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}.$$

Temos que, $R_{T_{(2,1)}} = S_2(13) = \{1, (13)\}$ e $C_{T_{(2,1)}} = S_2(1, 2) = \{1, (12)\}$. Assim,

$$e_{T_{(2,1)}} = 1 + (13) - (12) - (13)(12) = 1 + (13) - (12) - (123).$$

Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o grupo simétrico S_n age sobre conjunto das tabelas de Young do tipo λ da seguinte maneira: se $\sigma \in S_n$ e $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ então $\sigma T_\lambda = D_\lambda(\sigma(a_{ij}))$.

Exemplo 2.1.16. Considere a tabela $T_{(4,2,1)}$ abaixo e $\sigma = (15462)$, então

$$T_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 3 & 6 & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma T_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 2 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

Agora, veremos que duas tabelas de Young do mesmo tipo geram ideais minimais à esquerda isomorfos.

Afirmamos que se $\lambda \vdash n$ e $\sigma \in S_n$, então $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1}$. De fato, considerando $\{b_1, \dots, b_r\} \subseteq \{a_1, \dots, a_k\}$ e $\eta = (b_1 \dots b_r)$ um r -ciclo em S_k então $(\sigma(b_1) \dots \sigma(b_r)) = \sigma \eta \sigma^{-1}$. Assim,

$$S_k(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k)) = \sigma S_k(a_1, \dots, a_k) \sigma^{-1}.$$

Com isso, $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda} \sigma^{-1}$ e $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda} \sigma^{-1}$, logo

$$\begin{aligned}
 \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1} &= \sigma \left(\sum_{\rho \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (\text{sgn } \tau) \rho \tau \right) \sigma^{-1} = \left(\sum_{\rho \in R_{T_\lambda}} \sigma \rho \sigma^{-1} \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (\text{sgn } \sigma \tau \sigma^{-1}) \sigma \tau \sigma^{-1} \right) \\
 &= \left(\sum_{\rho' \in \sigma R_{T_\lambda} \sigma^{-1}} \rho' \right) \left(\sum_{\tau' \in \sigma C_{T_\lambda} \sigma^{-1}} (\text{sgn } \tau') \tau' \right) \\
 &= \left(\sum_{\rho' \in R_{\sigma T_\lambda}} \rho' \right) \left(\sum_{\tau' \in C_{\sigma T_\lambda}} (\text{sgn } \tau') \tau' \right) \\
 &= \sum_{\rho' \in R_{\sigma T_\lambda}} \sum_{\tau' \in C_{\sigma T_\lambda}} (\text{sgn } \tau') \rho' \tau' \\
 &= e_{\sigma T_\lambda}.
 \end{aligned}$$

Segue que, se T_λ e T_λ^* são duas tabelas do mesmo tipo então $T_\lambda^* = \sigma T_\lambda$, para algum $\sigma \in S_n$, o que implica $e_{T_\lambda^*} = e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1}$. Portanto

$$FS_n e_{T_\lambda^*} = FS_n \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1} = FS_n e_{T_\lambda} \sigma^{-1}.$$

Assim, a função

$$\begin{aligned}
 \phi : FS_n e_{T_\lambda} &\longrightarrow FS_n e_{T_\lambda^*} \\
 a &\longmapsto a \sigma^{-1}
 \end{aligned}$$

determina um isomorfismo de FS_n -módulos entre $FS_n e_{T_\lambda}$ e $FS_n e_{T_\lambda^*}$. Pode-se provar também que $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal à esquerda minimal de FS_n . Com isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.17. Para qualquer tabela de Young T_λ do tipo $\lambda \vdash n$, o elemento e_{T_λ} é um idempotente essencial minimal de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal à esquerda minimal de FS_n com caracter χ_λ . Se T_λ e T_λ^* são tabelas de Young do mesmo tipo então e_{T_λ} e $e_{T_\lambda^*}$ são conjugados em FS_n através de algum $\sigma \in S_n$. Além disso, $\sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1} = e_{\sigma T_\lambda}$.

Obtemos também uma decomposição para os ideais bilaterais minimais I_λ que aparecem na decomposição de FS_n .

Proposição 2.1.18. Seja I_λ o ideal bilateral minimal de FS_n correspondente à partição $\lambda \vdash n$. Então

$$I_\lambda = \sum_{T_\lambda} FS_n e_{T_\lambda},$$

onde a soma percorre todas as tabelas de Young do tipo λ . Ainda, se $T_1, \dots, T_{d_\lambda}$ são todas as tabelas standard do tipo λ , então

$$I_\lambda = \dot{+}_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i}.$$

2.2 O cocaracter de uma PI-álgebra

Na Seção 1.3, vimos a importância do espaço P_n , dos polinômios multilineares de grau n , para uma PI-álgebra A . Em particular, o espaço $P_n(A)$ possibilita o estudo do crescimento das identidades polinômiais de A conforme n cresce.

Vamos agora fixar o inteiro n e estudar o espaço $P_n(A)$ visto como S_n -módulo. Inicialmente, perceba que existe um isomorfismo de espaços vetoriais entre P_n e FS_n . De fato, considere ϕ definida por

$$\phi : \begin{array}{ccc} FS_n & \longrightarrow & P_n \\ \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \end{array}$$

Este isomorfismo torna P_n um S_n -módulo. Onde a ação à esquerda de S_n em P_n é dada pela permutação das variáveis de um polinômio. Isto é, se $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ e $\sigma \in S_n$ temos que

$$\sigma \cdot f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Considere uma PI-álgebra A e $Id(A)$ o T-ideal das identidades. Sabemos que, dado $f(x_1, \dots, x_n) \in Id(A)$, temos $f(g_1, \dots, g_n) \in Id(A)$, para $g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$. Assim, se f é uma identidade multilinear de A , o polinômio $\sigma \cdot f$ é também uma identidade multilinear de A . Isto é, $P_n \cap Id(A)$ é um S_n -módulo à esquerda de P_n . Portanto

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

tem uma estrutura de S_n -módulo à esquerda.

Perceba que, para se obter uma decomposição de FS_n em termos de ideais bilaterais associados às partições $\lambda \vdash n$, utilizamos o fato de F ser um corpo algebricamente fechado. Assim, uma decomposição desse tipo para o S_n -módulo $P_n(A)$ só faz sentido com as determinadas hipóteses sobre F . Contudo em [14], é provado que a sequência de codimensões de uma F -álgebra A pode ser considerada, sem perda de generalidade, sobre um corpo algebricamente fechado, que não haverá alteração. Segue que, pela teoria de representações de S_n , podemos considerar o S_n -caracter associado a $P_n(A)$.

Definição 2.2.1. Para $n \geq 1$, o S_n -caracter de $P_n(A)$ é chamado o n -ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$, cuja a decomposição em caracteres irredutíveis é dado por

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n -caracter irredutível associado à $\lambda \vdash n$ e m_λ a sua respectiva multiplicidade.

Em termos de variedades, se $\mathcal{V} = var(A)$, definimos o n -ésimo cocaracter associado a \mathcal{V} por $\chi_n(\mathcal{V}) = \chi_n(A)$.

Como vimos na seção anterior a álgebra de grupo FS_n pode ser decomposta em ideais bilaterais minimais da seguinte forma

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda.$$

Por outro lado, se \mathcal{T} denota o conjunto de todas as tabelas standard do tipo λ , pela Proposição 2.1.18, cada I_λ se decompõe como

$$I_\lambda = \sum_{T_\lambda} FS_n e_{T_\lambda} = \sum_{T \in \mathcal{T}} FS_n e_T.$$

Agrupando os módulos isomorfos e chamando $M_\lambda = FS_n e_{T_\lambda}$, temos que $I_\lambda \cong d_\lambda M_\lambda$. Portanto,

$$FS_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (d_\lambda M_\lambda).$$

Lembrando que $P_n \cap Id(A)$ é um S_n -submódulo de P_n , temos

$$P_n \cong J \oplus (P_n \cap Id(A)),$$

nde $J \cong P_n(A)$, com isso, temos o lema abaixo provado.

Lema 2.2.2. Se d_λ denota o grau do caracter associado a λ em FS_n e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o n -ésimo cocaracter de A , então $m_\lambda \leq d_\lambda$.

O teorema abaixo fornece uma condição necessária e suficiente para que a multiplicidade m_λ no n -ésimo cocaracter de A seja diferente de zero.

Teorema 2.2.3. Seja A uma PI-álgebra com n -ésimo cocaracter $\chi_n(A)$. Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T_μ do tipo μ e qualquer polinômio multilinear $f = f(x_1, \dots, x_n)$, temos $e_{T_\mu} f \equiv 0$.

Demonstração: Fixando $\mu \vdash n$ temos $I_\mu P_n(A)$ como

$$I_\mu P_n(A) \cong I_\mu \left(\bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda M_\lambda \right) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda I_\mu M_\lambda.$$

Agora, $m_\mu = 0$ se, e só se, $I_\mu P_n(A) = \{0\}$. De fato, como $I_\mu M_\lambda \subseteq I_\mu I_\lambda$ segue que $I_\mu M_\lambda = \{0\}$ se $\mu \neq \lambda$. Portanto, $I_\mu P_n(A) \cong m_\mu I_\mu M_\mu$. Uma vez que $e_{T_\mu} \in I_\mu$, $e_{T_\mu} \in M_\mu$ e $e_{T_\mu}^2 \neq 0$ temos que $I_\mu M_\mu \neq \{0\}$ e assim $I_\mu P_n(A) = \{0\}$ se, e somente se, $m_\mu = 0$.

Por outro lado, temos claramente que $I_\mu P_n(A) = \{0\}$ se, e somente se, $I_\mu P_n \subseteq P_n \cap Id(A)$, ou seja, se e somente se

$$\left(\sum_{T_\mu} FS_n e_{T_\mu} \right) P_n \subseteq P_n \cap Id(A).$$

Por sua vez, isso acontece se, e somente se, $e_{T_\mu} f \in Id(A)$ para todo $f \in P_n$ e toda tabela T_μ do tipo μ . O que finaliza a prova. ■

Exemplo 2.2.4. Se A é uma álgebra comutativa e unitária, então pelo Exemplo 1.4.2, $c_n(A) = 1$. Vamos ver que, o único caracter irredutível que aparece em $\chi_n(A)$ é $\chi_{(n)}$. De fato, considere a partição $(n) \vdash n$, o polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ e a tabela

$$T_{(n)} = \boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid n}$$

Temos que $e_{T_{(n)}} f = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ não é uma identidade de A . Portanto, $m_{(n)} \geq 1$. Além disso, pelo item 2 do Exemplo 2.1.12, temos que $d_{(n)} = 1$. Assim,

$$1 = c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \geq m_{(n)} d_{(n)} = m_{(n)} \geq 1$$

Logo, $m_{(n)} = 1$ e $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$.

Considere a álgebra de Grassmann \mathcal{G} . Vimos no Teorema 1.4.7 que $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_2] \rangle_T$ e $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$. Vamos provar no lema abaixo que as multiplicidades associadas às partições $(k, 1^{n-k})$ são não nulas em $\chi_n(\mathcal{G})$.

Lema 2.2.5. Seja \mathcal{G} a álgebra de Grassmann e $\lambda = (k, 1^{n-k}) \vdash n$, então para cada $k = 1, \dots, n$ temos $m_\lambda \neq 0$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.3, basta exibir uma tabela de Young do tipo $\lambda = (k, 1^{n-k})$ e um polinômio multilinear f tal que $e_{T_\lambda} f \neq 0$. Considere a tabela abaixo

$$T_{(k, 1^{n-k})} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & k \\ \hline k+1 & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array}$$

e o polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$. Temos que, $R_{T_\lambda} = S_k(1, \dots, k)$ e $C_{T_\lambda} = S_{n-k+1}(1, k+1, \dots, n-1, n)$. Assim,

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} f &= \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (\text{sgn } \tau) \tau \right) x_1 \cdots x_n \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_k} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in S_{n-k+1}(1, k+1, \dots, n-1, n)} (\text{sgn } \tau) x_{\tau(1)} x_2 \cdots x_k x_{\tau(k+1)} \cdots x_{\tau(n)} \right). \end{aligned}$$

Vamos agora substituir x_1, \dots, x_n por $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, respectivamente, onde

$$\bar{x}_1 = e_1, \bar{x}_{k+1} = e_2, \dots, \bar{x}_n = e_{n-k+1}$$

$$\bar{x}_2 = e_{n-k+2} e_{n-k+3}, \bar{x}_3 = e_{n-k+4} e_{n-k+5}, \dots, \bar{x}_k = e_{n+k-2} e_{n+k-1}.$$

Note que $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $\bar{x}_1, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n \in \mathcal{G}^{(1)}$. Portanto $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k$ são elementos centrais e $\bar{x}_1, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n$ são elementos que anti-comutam. Desta forma, obtemos

$$e_{T_\lambda} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_k} \sigma \right) \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_k}_{(*)} \underbrace{\left(\sum_{\tau \in S_{n-k+1}(1, k+1, \dots, n-1, n)} \text{sgn}(\tau) \bar{x}_{\tau(1)} \bar{x}_{\tau(k+1)} \cdots \bar{x}_{\tau(n)} \right)}_{(**)}.$$

Note que $(*)$ é igual a $k! \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_k$ e $(**)$ é igual a $(n-k+1)! \bar{x}_1 \bar{x}_{k+1} \cdots \bar{x}_n$. Segue então que

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) &= (n-k+1)! k! \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_k \bar{x}_1 \bar{x}_{k+1} \cdots \bar{x}_n \\ &= (n-k+1)! k! \bar{x}_1 \bar{x}_{k+1} \cdots \bar{x}_n \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_k \\ &= (n-k+1)! k! e_1 e_2 \cdots e_{n-k+1} e_{n-k+2} e_{n-k+3} \cdots e_{n+k-2} e_{n+k-1} \neq 0. \end{aligned}$$

■

O teorema abaixo fornece o cálculo do n -ésimo cocaracter de \mathcal{G} .

Teorema 2.2.6. O n -ésimo cocaracter da álgebra de Grassmann \mathcal{G} é dado por

$$\chi_n(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^n \chi_{(k, 1^{n-k})}.$$

Demonstração: Pelo item 3 do Exemplo 2.1.12, temos

$$d_{(k, 1^{n-k})} = \binom{n-1}{k-1},$$

e como $m_\lambda \leq d_\lambda$ temos

$$c_n(\mathcal{G}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda(1) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \geq \sum_{k=1}^n d_{(k, 1^{n-1})}.$$

Assim, desde que $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$ e

$$\sum_{k=1}^n d_{(k, 1^{n-1})} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

segue que

$$\chi_n(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^n \chi_{(k, 1^{n-k})}.$$

■

Perceba que, de forma geral, a estrutura de S_n -módulo de $P_n(A)$ não fornece uma maneira efetiva de calcular as multiplicidades no n -ésimo cocaracter de uma PI-álgebra A . Vamos ver mais um exemplo de cálculo de multiplicidades, agora para um n fixo.

Exemplo 2.2.7. Considere a álgebra M_1 abaixo e $n = 3$

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Temos que,

$$\chi_3(M_1) = m_{(3)}\chi_{(3)} + m_{(2,1)}\chi_{(2,1)} + m_{(1^3)}\chi_{(1^3)}.$$

Veja que se $m_{(3)}$ e $m_{(1^3)}$ forem diferentes de zero, então devem ser 1, pela limitação do grau do caracter associado. Vamos ver que, de fato $m_{(3)} = 1 = m_{(1^3)}$.

Para a partição (3) considere a tabela

$$T_{(3)} = \boxed{1 \mid 2 \mid 3}$$

e o polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$. Temos que $R_{T_{(3)}} = S_3$ e $C_{T_{(3)}} = \{1\}$. Assim,

$$e_{T_{(3)}} f = \sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}.$$

Tomando $x_i = e_{11} + e_{33}$, para $i = 1, 2, 3$, temos

$$e_{T_{(3)}} f(e_{11} + e_{33}, e_{11} + e_{33}, e_{11} + e_{33}) = 6(e_{11} + e_{33}) \neq 0.$$

Portanto, $m_{(3)} = 1$.

Para a partição (1^3) , considere a tabela

$$T_{(1^3)} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

e o polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$. Temos que $R_{T_{(1^3)}} = \{1\}$ e $C_{T_{(1^3)}} = S_3$. Assim,

$$e_{T_{(1^3)}}f = \sum_{\tau \in S_3} (\text{sgn}\tau)x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}x_{\tau(3)} = St_3(x_1, x_2, x_3).$$

Tomando $x_1 = e_{11} + e_{33}$, $x_2 = e_{12}$ e $x_3 = e_{23}$, temos

$$e_{T_{(1^3)}}f(e_{11} + e_{33}, e_{12}, e_{23}) = 2e_{13} \neq 0.$$

Portanto, $m_{(1^3)} = 1$.

Para a partição $(2, 1)$, considere a tabela

$$T_{(2,1)} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

e o polinômio $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$. Pelo Exemplo 2.1.15, temos

$$e_{T_{(2,1)}} = 1 - (12) + (13) - (123).$$

Assim,

$$e_{T_{(2,1)}}f = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 + x_3x_2x_1 - x_2x_3x_1.$$

Tomando $x_1 = e_{11} + e_{33}$, $x_2 = e_{12}$ e $x_3 = e_{23}$ temos

$$e_{T_{(2,1)}}f(e_{11} + e_{33}, e_{23}, e_{12}) = e_{13} \neq 0.$$

Portanto, $m_{(2,1)} \neq 0$. Pela fórmula do gancho $d_{(2,1)} = 2$ e assim, $m_{(2,1)} \in \{1, 2\}$.

2.3 Representações de GL_m

Na seção anterior vimos que a ação de S_n sobre $P_n(A)$ possibilita escrever o n -ésimo cocaracter de uma PI-álgebra como

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n -caracter associado a partição λ e m_λ sua respectiva multiplicidade. No entanto, dada uma PI-álgebra, obter o cálculo efetivo de suas multiplicidades não é uma tarefa fácil, por exemplo, em 2.2.7, não foi possível dizer se $m_{(2,1)}$ era 1 ou 2. Nessa seção apresentaremos a teoria de GL_m -módulos e a relacionaremos à PI-Teoria. Veremos que um determinado GL_m -módulo fornece o cálculo das multiplicidades m_λ em $\chi_n(A)$. Para mais detalhes e para as demonstrações aqui não provadas, sugerimos a referência [7] que, na Seção 12.4 contempla a teoria detalhada.

Definição 2.3.1. Seja $\phi : GL_m(F) \rightarrow GL_s(F)$ uma representação do grupo $GL_m(F)$, para algum $s \in \mathbb{N}$. Dizemos que a representação ϕ é **polinomial** se cada entrada de $\phi(g)$ é um polinômio envolvendo as entradas de $g \in GL_m(F)$. Uma representação polinomial ϕ é dita **homogênea** de grau d se as entradas de $\phi(g)$ forem polinômios homogêneos de grau d nas entradas de $g \in GL_m(F)$.

Dizemos que um $GL_m(F)$ -módulo é polinomial (homogêneo) se a representação correspondente for polinomial (homogênea).

Nessa seção, estamos interessados em $GL_m(F)$ -módulos polinomiais, por isso, chamaremos simplesmente $GL_m(F)$ -módulos, quando estes forem polinomiais. Além disso, F denota um corpo de característica zero e escreveremos $GL_m(F)$ simplesmente como GL_m .

Denote por U_m o F -espaço vetorial gerado por x_1, \dots, x_m , $F_m := F \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ a álgebra livre, livremente gerada por x_1, \dots, x_m e F_m^n o subespaço dos polinômios homogêneos de grau n em F_m . Podemos identificar F_m como sendo um subespaço de $F\langle X \rangle$.

O grupo $GL_m \cong GL(U_m)$ age naturalmente à esquerda no espaço U_m e essa ação pode ser estendida para o espaço F_m da seguinte forma: dado um monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_l} \in F_m$ e $g \in GL_m$

$$g(x_{i_1} \cdots x_{i_l}) := g(x_{i_1}) \cdots g(x_{i_l}).$$

Com essa ação, F_m é um GL_m -módulo à esquerda. Note que, GL_m age sobre o subespaço F_m^n , tornando-o um GL_m -módulo. Além disso, dada uma PI-álgebra A , $f \in Id(A)$ e $g \in GL_m$ temos

$$gf(x_1, \dots, x_n) = f(g(x_1), \dots, g(x_n)) \equiv 0,$$

o que torna $F_m \cap Id(A)$ invariante sob a ação de GL_m . O mesmo acontece se considerarmos o subespaço F_m^n . Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.2. A componente homogênea de grau n , F_m^n é um GL_m -módulo e

$$F_m = \bigoplus_{n \geq 0} F_m^n.$$

E, para cada T -ideal $T \subset F\langle X \rangle$, temos que $F_m \cap T$ e $F_m^n \cap T$ são GL_m -submódulos de F_m .

Também é possível mostrar que cada GL_m -submódulo $W \subset F_m$ é soma direta das componentes homogêneas $W \cap F_m^n$.

Teorema 2.3.3. Os GL_m -módulos e os S_n -módulos se relacionam da seguinte maneira:

1. Quaisquer GL_m -módulos irredutíveis de grau $n \geq 0$ estão (a menos de isomorfismo) em correspondência biunívoca com as partições $\lambda \vdash n$. Denota-se por $W_m(\lambda)$ o GL_m -módulo irredutível associado a λ .
2. Seja λ uma partição de n . O GL_m -módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de F_m^n . O GL_m -módulo F_m^n admite decomposição

$$F_m^n \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda)$$

em que d_λ é a dimensão do S_n -módulo irredutível associado a partição λ cuja altura no diagrama de Young associado não é maior que m .

Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, definimos $h_i(\lambda)$ como a quantidade de boxes na i -ésima coluna de D_λ , isto é, a altura da i -ésima coluna em D_λ . Definimos o polinômio s_λ em F_m por

$$s_\lambda = s_\lambda(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)}) = \prod_{i=1}^{\lambda_1} St_{h_i(\lambda)}(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)}),$$

onde $St_{h_i(\lambda)}(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)})$ é o polinômio standard de grau $h_i(\lambda)$.

O resultado abaixo fornece um método de gerar os GL_m -submódulos de F_m^n , bem como uma condição sob os submódulos irredutíveis via os geradores. Além disso, define um importante polinômio na PI-Teoria, o chamado vetor de altura máxima.

Teorema 2.3.4. ([7] Teorema 12.4.12) Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ cuja a altura no diagrama de Young associado não ultrapasse m e s_λ o polinômio acima. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. O elemento s_λ gera um GL_m -módulo irredutível isomorfo a $W_m(\lambda)$.
2. Cada GL_m -módulo irredutível $W \subset F_m^n$, com $W \simeq W_m(\lambda)$, é gerado por um elemento não nulo da forma

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)}) = s_\lambda(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)}) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \right),$$

onde $\alpha_\sigma \in F$ e a ação à direita de S_n é dada por

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} \sigma := x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(n)}}.$$

Chamamos o elemento f_λ de **vetor de altura máxima** de W . A menos de constante multiplicativa, f_λ é único e está contido no espaço unidimensional dos elementos multi-homogêneos de multigrado $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ em W .

3. Se dois GL_m -submódulos W', W'' de F_m^n são isomorfos a $W_m(\lambda)$, com f' e f'' os vetores de altura máxima, respectivamente, então cada aplicação $\phi_\alpha : f' \rightarrow \alpha f''$, para cada $\alpha \in F, \alpha \neq 0$, pode ser estendido unicamente a um isomorfismo de GL_m -módulos. Cada isomorfismo $W' \simeq W''$ é obtido desta maneira.

A ação à direita definida no item 2 do teorema acima permuta os lugares das variáveis. Com isso, se f é uma identidade multilinear de A e $\sigma \in S_n$, não é verdade que $f\sigma \in Id(A)$. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.5. Já sabemos que o polinômio $f = [x_1, x_2]x_3x_4$ é identidade para a álgebra M_4 definida no Teorema 1.4.9. Considere a permutação $\sigma = (23)$, temos

$$f\sigma = [x_1, x_2]x_3x_4\sigma = x_1x_3x_2x_4 - x_2x_3x_1x_4$$

Tome $x_1 = e_{11}, x_2 = e_{12}, x_3 = e_{11}$ e $x_4 = e_{23}$, então $f(e_{11}, e_{12}, e_{11}, e_{23})\sigma = e_{13} \neq 0$.

Exemplo 2.3.6. Seja $m \geq 2$ e $\lambda = (2, 1)$. Sabemos, pela fórmula do gancho, que $d_\lambda = 2$ em FS_n . Pelo teorema 2.3.3, $W_m(\lambda)$ participa da decomposição de F_m^3 com multiplicidade 2. O

vetor de altura máxima s_λ gera um GL_m -módulo irredutível W' isomorfo a $W_m(\lambda)$, e é dado por

$$f_1 = s_\lambda = St_2(x_1, x_2)x_1 = [x_1, x_2]x_1.$$

Agora, tome $\sigma = (13)$. Temos

$$f_2 = s_\lambda\sigma = -x_1[x_1, x_2].$$

O GL_m -módulo W'' gerado por f_2 é isomorfo a $W_m(\lambda)$. Desde que, f_1 e f_2 são únicos, a menos de constante multiplicativa, e são linearmente independentes, obtemos $W' \cap W'' = \{0\}$ e então $W' \oplus W''$ é uma soma direta. Logo, W' e W'' participam da decomposição de F_m^3 .

Como todos os GL_m -isomorfismos de W' e W'' são dados por $f_1 \rightarrow \alpha f_2$, para $\alpha \neq 0$, temos que $W \cong W_m(\lambda)$ está contido em $W' \oplus W''$. Portanto, o vetor de altura máxima w de W é dado por $w = \beta f_1 + \gamma f_2$, $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$.

Pelo item 2 do Teorema 2.3.3, a multiplicidade de $W_m(\lambda)$ em F_m^n é igual a dimensão d_λ do S_n -módulo irredutível correspondente a partição λ em FS_n . Então cada submódulo $W \cong W_m(\lambda)$ está contido em uma soma direta de d_λ cópias de $W_m(\lambda)$. A pergunta agora é como determinar esses d_λ vetores de altura máxima.

Antes de apresentarmos o resultado que fornece os d_λ vetores de altura máxima, vamos definir a chamada *tabela inicial* \tilde{T} como a tabela de Young do tipo λ cujos elementos $1, \dots, n$ são colocados de forma crescente de cima para baixo, coluna a coluna. É claro que, dada uma tabela de Young T do tipo λ , existe uma única permutação que transforma \tilde{T} em T .

Proposição 2.3.7. ([7] Proposição 12.4.14) Seja $\lambda \vdash n$ e $W_m(\lambda) \subset F_m^n$, então o vetor de altura máxima f_λ de $W_m(\lambda)$ pode ser expresso unicamente como combinação linear de polinômios $f_{T_\lambda}^\sigma = s_\lambda\sigma^{-1}$, onde T_λ é uma tabela standard e σ é a única permutação que transforma T_λ em \tilde{T} .

O resultado acima fornece um método de obter os geradores de cada $W_m(\lambda)$ a partir do vetor de altura máxima associado à tabela inicial \tilde{T} , observando a sua transformação em tabelas standard via a ação de S_n .

Como as tabelas standard do tipo λ são dadas a partir do diagrama de λ , escrevemos $f_{T_\lambda}^\sigma$ simplesmente como f_λ^σ ou f_{T_λ} .

Exemplo 2.3.8. Para a partição $(2, 1)$ temos as tabelas standard

$$T_{(2,1)}^{id} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad T_{(2,1)}^{(23)} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Cujo os vetores de altura máxima são respectivamente

$$\begin{aligned} f_{(2,1)}^{id} &= [x_1, x_2]x_1(id) = x_1x_2x_1 - x_2x_1x_1 \\ f_{(2,1)}^{(23)} &= [x_1, x_2]x_1(23) = x_1x_1x_2 - x_2x_1x_1. \end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, GL_m -submódulos isomorfos são precisamente obtidos por uma combinação linear de seus vetores de altura máxima. Para expressarmos os isomorfos diferentes devemos obter uma combinação linearmente independente. Assim:

Corolário 2.3.9. Se A é uma PI-álgebra, então para $n \geq m$, o espaço

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap Id(A)}$$

é um GL_m -módulo e as multiplicidades \bar{m}_λ em $F_m^n(A) \cong \sum \bar{m}_\lambda W_m(\lambda)$ são dados pela quantidade máxima de vetores de altura máxima linearmente independente módulo $Id(A)$. Além disso, $\bar{m}_\lambda \neq 0$ se, e somente se, $f_{T_\lambda} \notin Id(A)$, para alguma tabela de Young T_λ .

O próximo resultado é muito parecido com um existente entre S_n -módulos.

Teorema 2.3.10. Sejam f_1 e $f_2 \in F_m^n$. Então f_2 é consequência de f_1 se, e somente se, $f_2 \in GL_m f_1$.

Como consequência, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.3.11. Dado $W_m(\lambda)$ um GL_m -submódulo irredutível e $f(x_1, \dots, x_m) \in W_m(\lambda)$, então a linearização de f pertence a $W_m(\lambda)$.

O resultado a seguir caracteriza os S_n -módulos irredutíveis por meio de GL_m -módulos irredutíveis de grau n .

Teorema 2.3.12. ([7] Proposição 12.4.18) Sejam $m \geq n, \lambda \vdash n$ e $W_m(\lambda) \subset F_m$. Então o conjunto $W_m(\lambda) \cap P_n$ de todos os polinômios multilineares nas primeiras n variáveis em $W_m(\lambda)$ é um S_n -submódulo de P_n isomorfo a $FS_n e_{T_\lambda}$. Além disso, todo S_n -submódulo irredutível de P_n pode ser obtido desta maneira.

Finalmente, o resultado mais importante dessa seção, possibilita calcular as multiplicidades m_λ no n -ésimo cocaracter de uma PI-álgebra.

Teorema 2.3.13. Seja A uma PI-álgebra com

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

seu n -ésimo cocaracter. Se

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap Id(A)} \cong \sum \bar{m}_\lambda W_m(\lambda),$$

então $m_\lambda = \bar{m}_\lambda$, para todo $\lambda \vdash n$ tal que $h(\lambda) \leq m$.

O Teorema abaixo resume o que foi apresentado ao longo dessa seção acerca das multiplicidades m_λ e tem um papel bastante importante na PI-Teoria.

Teorema 2.3.14. Sejam A uma PI-álgebra,

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \quad \text{e} \quad \psi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ h(\lambda) \leq m}} \bar{m}_\lambda \psi_\lambda,$$

o n -ésimo cocaracter de A e o GL_m -caracter de $F_m^n(A)$, respectivamente. Então, são válidas as afirmações abaixo:

- $m_\lambda = \bar{m}_\lambda$, para todo $\lambda \vdash n$ tal que $h(\lambda) \leq m$;
- $\bar{m}_\lambda \neq 0$ se, e somente se, existe uma tabela de Young T_λ tal que $f_{T_\lambda} \notin Id(A)$;
- \bar{m}_λ é igual ao número máximo de vetores de altura máxima f_{T_λ} linearmente independente módulo $Id(A)$.

Exemplo 2.3.15. Retornamos ao Exemplo 2.2.7 afim de determinar o valor da multiplicidade $m_{(2,1)}$. No Exemplo 2.3.8, explicitamos os vetores de altura máxima associados a partição $(2, 1)$, são eles:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{(2,1)}^{id} = [x_1, x_2]x_1(id) = x_1x_2x_1 - x_2x_1x_1 \\ f_2 &= f_{(2,1)}^{(23)} = [x_1, x_2]x_1(23) = x_1x_1x_2 - x_2x_1x_1. \end{aligned}$$

Afirmamos que f_1 e f_2 são linearmente independentes módulo $Id(A)$. De fato, considere

$$\alpha f_1 + \beta f_2 = 0 \quad \text{mod } Id(A).$$

Então, tomando $x_1 = e_{11}$ e $x_2 = e_{12}$ temos $\beta f_2 = \beta e_{12} = 0$, e portanto $\beta = 0$. Para $x_1 = e_{33}$ e $x_2 = e_{13}$ temos $\alpha f_1 = -\alpha e_{13} = 0$, portanto $\alpha = 0$. Assim, f_1 e f_2 são linearmente independente módulo $Id(A)$ e, pelo Teorema 2.3.14, temos $m_{(2,1)} = 2$.

Capítulo 3

Multiplicidades limitadas por 1

O objetivo desse capítulo é fornecer uma nova demonstração para o resultado de Ananin e Kemer [2] de 1976. No texto original, os autores mostraram a Proposição 1.3.15, sendo ainda útil para nossa prova. O caminho diferente é a utilização imediata das consequências dadas nessa proposição a partir de álgebras que tivessem como T -ideal essas consequências. Utilizamos então o resultado de Giambruno e La Mattina [9] que fornecia tais álgebras e seus respectivos cocaracteres. Com os cocaracteres dados, buscamos limitar as multiplicidades de forma a obter o resultado.

3.1 Variedades distributivas

A partir de agora, chamaremos \mathcal{V} simplesmente de *variedade*, deixando implícito que \mathcal{V} é gerado por alguma F -álgebra A .

Proposição 3.1.1. Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} duas variedades, então

$$Id(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = Id(\mathcal{U}) + Id(\mathcal{V}).$$

Demonstração: É claro que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Assim, $Id(\mathcal{U}) \subset Id(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ e $Id(\mathcal{V}) \subset Id(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$. Segue que, $Id(\mathcal{U}) + Id(\mathcal{V}) \subseteq Id(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$.

Considere \mathcal{W} uma variedade que tem como T -ideal $Id(\mathcal{U}) + Id(\mathcal{V})$ e $A \in \mathcal{W}$. Então $Id(\mathcal{U}) + Id(\mathcal{V}) \subset Id(A)$. Com isso, $Id(\mathcal{U}) \subset Id(A)$ e $Id(\mathcal{V}) \subset Id(A)$. Segue que, $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ e portanto $Id(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subseteq Id(\mathcal{U}) + Id(\mathcal{V})$, o que garante o resultado. ■

Dadas duas variedades \mathcal{U} e \mathcal{V} , definimos $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ como sendo a menor variedade que contém \mathcal{U} e \mathcal{V} . A proposição abaixo, mostra que se tomarmos a soma direta das álgebras que geram as variedades \mathcal{U} e \mathcal{V} , então as identidades de $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ coincidem com as da soma direta das álgebras geradoras.

Proposição 3.1.2. Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} duas variedades, então

$$Id(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = Id(\mathcal{U}) \cap Id(\mathcal{V}).$$

Demonstração: Como $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, temos $Id(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \subseteq Id(\mathcal{U}) \cap Id(\mathcal{V})$. Por outro lado, $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ é a menor variedade que contém \mathcal{U} e \mathcal{V} , e portanto $Id(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})$ é o maior T -ideal que contém $Id(\mathcal{U})$ e $Id(\mathcal{V})$. Logo, $Id(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = Id(\mathcal{U}) \cap Id(\mathcal{V})$. ■

Considere A e B duas álgebras com $\mathcal{U} = \text{var}(A)$, $\mathcal{V} = \text{var}(B)$ e $\mathcal{W} = \text{var}(A \oplus B)$, pelo Lema 1.3.3 e pela Proposição 3.1.2,

$$\text{Id}(\mathcal{W}) = \text{Id}(\mathcal{U}) \cap \text{Id}(\mathcal{V}) = \text{Id}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}).$$

Dada uma variedade \mathcal{L} , dizemos que \mathcal{W} é uma *subvariedade* de \mathcal{L} se \mathcal{W} é uma variedade contida em \mathcal{L} . Olhando para subvariedade de uma variedade, faz sentido querer obter condições para que uma distribuição, como ocorre na teoria de conjuntos, aconteça quando olhamos para a menor variedade contendo $(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ e \mathcal{W} . O resultado abaixo fornece uma inclusão em relação a isso.

Proposição 3.1.3. Sejam \mathcal{U} , \mathcal{V} e \mathcal{W} subvariedades de uma variedade \mathcal{L} , então

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{W} \subseteq (\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}).$$

Demonstração: Considere $\mathcal{U} = \text{var}(A)$, $\mathcal{V} = \text{var}(B)$, $\mathcal{W} = \text{var}(C)$, então

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{W} = (\text{var}(A) \cap \text{var}(B)) \cup \text{var}(C).$$

Desde que A está isomorficamente imerso em $A \oplus C$, pelo item 3 do Lema 1.3.2, temos $\text{Id}(A \oplus C) \subset \text{Id}(A)$ e assim $\text{var}(A) \subseteq \text{var}(A \oplus C)$. Analogamente, $\text{var}(B) \subseteq \text{var}(B \oplus C)$. Assim,

$$(\text{var}(A) \cap \text{var}(B)) \subseteq (\text{var}(A \oplus C) \cap \text{var}(B \oplus C)).$$

Agora, pelo mesmo argumento, $\text{var}(C) \subseteq (\text{var}(A \oplus C) \cap \text{var}(B \oplus C))$ e portanto

$$(\text{var}(A) \cap \text{var}(B)) \cup \text{var}(C) \subseteq (\text{var}(A \oplus C) \cap \text{var}(B \oplus C)).$$

Assim,

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{W} \subseteq (\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}).$$

■

Em termos de identidades, temos $\text{Id}((\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{W})) \subseteq \text{Id}((\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{W})$. Usando as Proposições 3.1.1 e 3.1.2, temos

$$\begin{aligned} \text{Id}((\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{W})) &= (\text{Id}(\mathcal{U}) + \text{Id}(\mathcal{V})) \cap \text{Id}(\mathcal{W}), \\ \text{Id}((\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{W}) &= (\text{Id}(\mathcal{U}) \cap \text{Id}(\mathcal{W})) + (\text{Id}(\mathcal{V}) \cap \text{Id}(\mathcal{W})). \end{aligned}$$

Isto é,

$$(\text{Id}(\mathcal{U}) + \text{Id}(\mathcal{V})) \cap \text{Id}(\mathcal{W}) \subseteq (\text{Id}(\mathcal{U}) \cap \text{Id}(\mathcal{W})) + (\text{Id}(\mathcal{V}) \cap \text{Id}(\mathcal{W})).$$

Assim, a Proposição 3.1.3 pode ser escrita, em termos de T-ideais, da seguinte forma:

Proposição 3.1.4. Seja \mathcal{L} uma variedade e Q, S, T T-ideais quaisquer contendo $\text{Id}(\mathcal{L})$, então vale

$$(Q \cap T) + (S \cap T) \subseteq (Q + S) \cap T.$$

O exemplo a seguir mostra que a inclusão contrária, na expressão acima, não necessariamente acontece.

Exemplo 3.1.5. Considere a álgebra M_4 do Exemplo 1.4.9 e $\mathcal{L} = \text{var}(M_4)$. Sabemos que $\text{Id}(\mathcal{L}) = \langle [x_1, x_2]x_3x_4 \rangle_T$. Considere $Q, S, T \supseteq \text{Id}(\mathcal{L})$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q &= \langle [x_1, x_2]x_3x_4, [x_1^2, x_2]x_1 \rangle_T \\ S &= \langle [x_1, x_2]x_3x_4, [x_1^3, x_2] \rangle_T \\ T &= \langle [x_1, x_2]x_3x_4, x_1^2[x_1, x_2] \rangle_T. \end{aligned}$$

Agora, é possível provar que os polinômios $[x_1^2, x_2]x_1$ e $x_1^2[x_1, x_2]$ não são consequência um do outro. O mesmo ocorre para os polinômios $[x_1^3, x_2]$ e $x_1^2[x_1, x_2]$. Assim,

$$Q \cap T + S \cap T = \text{Id}(\mathcal{L}).$$

Além disso, $Q + S = \langle [x_1, x_2]x_3x_4, [x_1^2, x_2]x_1, [x_1^3, x_2] \rangle_T$ e como $x_1^2[x_1, x_2] = [x_1^3, x_2] - [x_1^2, x_2]x_1$, temos $T \subseteq Q + S$ e portanto $(Q \cap T) + (S \cap T) \subsetneq (Q + S) \cap T$.

O Exemplo acima motiva a seguinte definição:

Definição 3.1.6. Seja \mathcal{L} uma variedade. Dizemos que \mathcal{L} é **distributiva** se para quaisquer subvariedades \mathcal{U}, \mathcal{V} e \mathcal{W} de \mathcal{L} tivermos

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{W} = (\mathcal{U} \cup \mathcal{W}) \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}).$$

Em termos de T-ideais, \mathcal{L} é distributiva se para quaisquer T-ideais Q, S, T contendo $\text{Id}(\mathcal{L})$ vale

$$(Q + S) \cap T = (Q \cap T) + (S \cap T).$$

Exemplo 3.1.7. Pelo Exemplo 1.4.9, a álgebra M_4 não gera uma variedade distributiva.

3.2 Distributividade e multiplicidades

Em 1976, Ananin e Kemer [2] caracterizaram variedades distributivas via identidades polinomiais, a partir do seguinte teorema:

Teorema 3.2.1. Seja \mathcal{L} uma variedade, então \mathcal{L} é distributiva se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulos tais que

$$\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2] \in \text{Id}(\mathcal{L}).$$

Exemplo 3.2.2. É claro que a variedade das álgebras comutativas é distributiva.

Exemplo 3.2.3. A álgebra de Grassmann \mathcal{G} tem como identidade o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$. Em particular, $[x_1, x_2, x_1] = [x_1, x_2]x_1 - x_1[x_1, x_2]$ é também uma identidade de \mathcal{G} e portanto, \mathcal{G} gera uma variedade distributiva.

Variedades distributivas possuem uma relação com as multiplicidades que aparecem no n -ésimo cocaracter associado. O teorema abaixo explicita essa relação.

Teorema 3.2.4. Sejam \mathcal{V} uma variedade e

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

seu n -ésimo cocaracter. Então, \mathcal{V} é distributiva se, e somente se, $m_\lambda \leq 1$ para cada $\lambda \vdash n$ e $n \geq 1$.

Demonstração: Se Q é um T-ideal de $F\langle X \rangle$, sabemos que Q está completamente determinado pelos espaços $Q \cap P_n$, $n \geq 1$. Assim, \mathcal{V} é distributiva se, e somente se,

$$(Q \cap P_n + S \cap P_n) \cap (T \cap P_n) = (Q \cap T) \cap P_n + (S \cap T) \cap P_n, \quad n \geq 1$$

para quaisquer T-ideais Q, S, T contendo $I = Id(\mathcal{V})$. Desde que $Q \cap P_n$ é um S_n -submódulo de P_n , temos

$$P_n = (I \cap P_n) \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

onde W_1, \dots, W_k são S_n -módulos irredutíveis.

Assim,

$$P_n(\mathcal{V}) \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Agora, suponha, sem perda de generalidade, que $W_1 \cong W_2$ como S_n -módulos, então é possível achar $W \subseteq W_1 \oplus W_2$ tal que $W \cong W_1$ e $W \cap W_1 = W \cap W_2 = \{0\}$. Considere Q, S, T os T-ideais gerados por $I + W_1$, $I + W_2$, e $I + W$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} (Q \cap P_n + S \cap P_n) \cap (T \cap P_n) &= T \cap P_n = I \cap P_n \oplus W, \\ (Q \cap T) \cap P_n + (S \cap T) \cap P_n &= W_1 \cap W + W_2 \cap W + I \cap P_n = I \cap P_n. \end{aligned}$$

Isto é, $(Q \cap P_n + S \cap P_n) \cap (T \cap P_n) \neq (Q \cap T) \cap P_n + (S \cap T) \cap P_n$, o que contradiz a distributividade de \mathcal{V} . Logo, $m_\lambda \leq 1$.

Reciprocamente, se $m_\lambda \leq 1$ para todo $\lambda \vdash n$, então W_1, \dots, W_k , como acima, são dois a dois não isomorfos e cada S_n -submódulo de P_n contendo $I \cap P_n$ deve ser do tipo

$$(I \cap P_n) \oplus W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_p},$$

para algum subconjunto $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, k\}$. Agora, considere os T-ideais $Q, S, T \supseteq I$, então

$$\begin{aligned} Q \cap P_n &= (I \cap P_n) \oplus W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_a}, \\ S \cap P_n &= (I \cap P_n) \oplus W_{j_1} \oplus \cdots \oplus W_{j_b}, \\ T \cap P_n &= (I \cap P_n) \oplus W_{l_1} \oplus \cdots \oplus W_{l_c}. \end{aligned}$$

Se denotarmos $A = \{i_1, \dots, i_a\}$, $B = \{j_1, \dots, j_b\}$ e $C = \{l_1, \dots, l_c\}$, então

$$\begin{aligned} (Q \cap T) \cap P_n &= (I \cap P_n) \oplus_{i \in A \cap C} W_i, \\ (S \cap T) \cap P_n &= (I \cap P_n) \oplus_{i \in B \cap C} W_i \end{aligned}$$

e

$$(Q \cap P_n + S \cap P_n) \cap (T \cap P_n) = (I \cap P_n) \oplus_{i \in (A \cup B) \cap C} W_i.$$

Assim, desde que, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, temos

$$(Q \cap T) \cap P_n + (S \cap T) \cap P_n = (Q \cap T) \cap P_n + (S \cap T) \cap P_n,$$

o que completa a demonstração. ■

Exemplo 3.2.5. Já sabemos que a variedade gerada pela álgebra de Grassmann \mathcal{G} é distributiva. Mas, além disso, no Teorema 2.2.6 expressamos $\chi_n(\mathcal{G})$ como

$$\chi_n(\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^n \chi(k, 1^{n-k}),$$

o que condiz com o resultado acima.

Vimos também que a variedade gerada pela álgebra M_4 não é distributiva. De fato, provaremos que a multiplicidade $m_{(n-1,1)} = 2$, para cada $n \geq 4$.

Proposição 3.2.6. Considere a F -álgebra M_4

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Então, para $n \geq 4$, temos

$$\chi_n(M_4) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-2,1,1)}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.4.9 já sabemos que $c_n(M_4) = n(n-1)$. Além disso

$$\begin{aligned} \chi_{(n)}(1) + 2\chi_{(n-1,1)}(1) + \chi_{(n-2,2)}(1) + \chi_{(n-2,1,1)}(1) &= 1 + 2n(n-1) + \frac{n(n-3)}{2} \\ &\quad + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = n(n-1). \end{aligned}$$

Assim, só precisamos ver que $m_{(n-1,1)} \geq 2$ e que as multiplicidades $m_{(n)}$, $m_{(n-1,1)}$, $m_{(n-2,2)}$ e $m_{(n-2,1,1)}$ são não nulas. Para $m_{(n-1,1)}$ considere as tabelas

$$T^{(n)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array} \quad T^{(n-1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-2 & n \\ \hline n-1 & & & & \\ \hline \end{array}.$$

Seus vetores de altura máxima são, respectivamente,

$$\begin{aligned} f_{T^{(n)}} &= [x_1, x_2]x_1^{n-2}(2 \cdots n) \\ &= x_1^{n-1}x_2 - x_2x_1^{n-1} \\ f_{T^{(n-1)}} &= [x_1, x_2]x_1^{n-2}(2 \cdots n-1) \\ &= x_1^{n-2}x_2x_1 - x_2x_1^{n-1}. \end{aligned}$$

Os vetores $f_{T^{(n)}}$ e $f_{T^{(n-1)}}$ não são identidades, para ver isso, considere $x_1 = e_{11} + e_{23}$ e $x_2 = e_{12}$, com isso $f_{T^{(n)}} = e_{12}$ e $f_{T^{(n-1)}} = e_{13}$. Agora, vamos provar que tais vetores de altura máxima são linearmente independente módulo $Id(M_4)$. Para isso, considere

$$\alpha f_{T^{(n)}} + \beta f_{T^{(n-1)}} = 0 \text{ mod } (Id(M_4)).$$

Fazendo $x_1 = e_{11}$ e $x_2 = e_{12}$, obtemos $\alpha = 0$. Fazendo $x_1 = e_{11} + e_{23}$ e $x_2 = e_{12}$, obtemos $\beta = 0$. Assim, $m_{(n-1,1)} \geq 2$.

Associado a (n) temos um único vetor de altura máxima $f_{(n)}$. Como M_4 não é nilpotente, temos $f_{(n)} \notin Id(A)$ e assim $m_{(n)} \geq 1$. Para $m_{(n-2,2)}$, considere a tabela

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \hline n-1 & n & & \\ \hline \end{array}$$

cujo vetor de altura máxima é

$$\begin{aligned} f_{(n-2,2)} &= [x_1, x_2]^2 x_1^{n-4} (235 \cdots n-3 \ n-1) (46 \cdots n-2 \ n) \\ &= x_1 x_1 x_1^{n-4} x_2 x_2 - x_1 x_2 x_1^{n-4} x_2 x_1 - x_2 x_1 x_1^{n-4} x_1 x_2 + x_2 x_2 x_1^{n-4} x_1 x_1. \end{aligned}$$

Fazendo $x_1 = e_{11}$ e $x_2 = e_{12} + e_{23}$, obtemos $f_{(n-2,2)} = e_{13}$ e portanto $f_{(n-2,2)} \notin Id(M_4)$ e então $m_{(n-2,2)} \geq 1$. Finalmente, para $m_{(n-2,1,1)}$, considere a tabela

1	2	...	$n-2$
$n-1$			
n			

cujo vetor de altura máxima é

$$\begin{aligned} f_{(n-2,1,1)} &= St_3(x_1, x_2, x_3)x_1^{n-3}(24 \cdots n - 3 \ n - 1)(35 \cdots n - 2 \ n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma)x_{\sigma(1)}x_1^{n-3}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}. \end{aligned}$$

Fazendo $x_1 = e_{11}$, $x_2 = e_{12}$ e $x_3 = e_{23}$, obtemos $f_{(n-2,1,1)} = e_{13}$. Portanto, $f_{(n-2,1,1)} \notin Id(A)$ e então $m_{(n-2,1,1)} \geq 1$. Como queríamos provar. ■

Observação 3.2.7. Usando as ideias da proposição anterior, podemos mostrar que

$$\chi_n(M_5) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-2,1,1)}.$$

Com isso, pelo Teorema 3.2.4, M_4 e M_5 não geram variedades distributivas. O cálculo de tais cocaracteres se deve a Ciamb Bruno e La Mattina e pode ser encontrado em [9].

3.3 Multiplicidades e identidades

Os Teoremas 3.2.1 e 3.2.4 fornecem uma caracterização para PI-álgebras cujas multiplicidades são limitadas por 1 via identidades polinomiais. O objetivo dessa seção é apresentar uma prova para tal caracterização sem que façamos uso de distributividade e das equivalências apresentadas acima.

Começemos considerando $B \in var(A)$, temos que $P_n \cap Id(A) \subset P_n \cap Id(B)$, assim podemos imergir o espaço $P_n(B)$ em $P_n(A)$. A partir do que comentamos no segundo capítulo, se

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \quad \text{e} \quad \chi_n(B) = \sum_{\lambda \vdash n} \tilde{m}_\lambda \chi_\lambda$$

denotam os cocaracteres de A e B , respectivamente, então as multiplicidades em $\chi_n(A)$ controlam as em $\chi_n(B)$, isto é $\tilde{m}_\lambda \leq m_\lambda$, para cada $\lambda \vdash n$ e $n \geq 1$.

Abaixo, vamos apresentar alguns lemas importantes.

Lema 3.3.1. Se A é uma álgebra satisfazendo $[x_1, x_2]x_2$, então o cocaracter de A é dado por

$$\chi_n(A) = m_{(n)}\chi_{(n)} + m_{(n-1,1)}\chi_{(n-1,1)} + m_{(n-2,2)}\chi_{(n-2,2)} + m_{(n-2,1,1)}\chi_{(n-2,1,1)},$$

onde $m_\lambda \in \{0, 1\}$, para $\lambda \in \{(n), (n-1, 1), (n-2, 2), (n-2, 1, 1)\}$ e $n \geq 4$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.3.16, $[x_1, x_2]x_3x_4 \in Id(A)$, logo $A \in var(M_4)$. Assim, pela Proposição 3.2.6, os possíveis caracteres irredutíveis com multiplicidade não nula que aparecem em $\chi_n(A)$ são $\chi_{(n)}$, $\chi_{(n-1,1)}$, $\chi_{(n-2,2)}$ e $\chi_{(n-2,1,1)}$. E, como as multiplicidades em $\chi_n(A)$ são controladas pelas de $\chi_n(M_4)$, basta verificarmos $m_{(n-1,1)} \leq 1$ em $\chi_n(A)$. Note que, todas as tabelas standard do tipo $(n-1, 1)$ são da forma:

$$T^{(i)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ \hline i & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

com $i = 2, \dots, n$. Agora, fixado i , veja que a única permutação que transforma \tilde{T} em $T^{(i)}$ é $\sigma = (2 \ i \ i-1 \ \cdots \ 3)$ e assim $\sigma^{-1} = (23 \ \cdots \ i-1 \ i)$. Assim, os vetores de altura máxima são todos da forma

$$\begin{aligned} f_{T^{(i)}} &= [x_1, x_2] x_1^{n-2} \sigma \\ &= x_1 x_2 x_1^{n-2} - x_2 x_1^{n-1} (23 \ \cdots \ i) \\ &= x_1^{i-1} x_2 x_1^{n-i} - x_2 x_1^{n-1}. \end{aligned}$$

Desde que, $[x_1, x_2] x_1$ é identidade de A , temos $x_1 x_2 x_1 \equiv x_2 x_1 x_1$. Assim,

$$f_{T^{(i)}} = x_1^{i-1} x_2 x_1^{n-i} - x_2 x_1^{n-1} \equiv x_2 x_1^{n-1} - x_2 x_1^{n-1} = 0.$$

Para $i = 2, \dots, n-1$. Portanto, $m_{(n-1,1)} \leq 1$. ■

Observação 3.3.2. De forma similar, pelo Corolário 1.3.17, se A satisfaz $x_2[x_1, x_2]$, então $A \in \text{var}(M_5)$ e pela Observação 3.2.7 podemos usar um raciocínio análogo para ver que toda multiplicidade em $\chi_n(A)$ é limitada por 1.

Lema 3.3.3. Se A satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_2]$, então as multiplicidades de $\chi_n(A)$ são limitadas por 1.

Demonstração: Basta ver que, pelo Lema 1.3.10, $A \in \text{var}(\mathcal{G})$. Mas, pela Proposição 2.2.6, temos as multiplicidades de \mathcal{G} limitadas por 1, do qual segue o resultado. ■

Lema 3.3.4. Se A satisfaz $[x_1, x_2^2]$, então, para $n \geq 4$, as multiplicidades em $\chi_n(A)$ são limitadas por 1.

Demonstração: Pelo Exemplo 1.4.5, temos $c_n(A) \leq 1$ para $n \geq 5$. Assim, só precisamos verificar para $n = 4$, isto é, devemos mostrar que os vetores de altura máxima associados às partições $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$ e $(3, 1)$, módulo $[x_1, x_2^2]$, são no máximo 1. As tabelas standard do tipo $(2, 2)$ são

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

e os vetores de altura máxima associados são

$$\begin{aligned} f_1 &= [x_1, x_2][x_1, x_2] \\ &= x_1 x_2 x_1 x_2 - x_1 x_2 x_2 x_1 - x_2 x_1 x_1 x_2 + x_2 x_1 x_2 x_1, \\ f_2 &= [x_1, x_2][x_1, x_2](23) \\ &= x_1 x_1 x_2 x_2 - x_1 x_2 x_2 x_1 - x_2 x_1 x_1 x_2 + x_2 x_2 x_1 x_1. \end{aligned}$$

Pela identidade $[x_1^2, x_2]$ temos $x_1 x_1 x_2 \equiv x_2 x_1 x_1$. É fácil ver que $f_2 \equiv 0$ e portanto $m_{(2,2)} \leq 1$. As tabelas standard do tipo $(3, 1)$ são

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

e os vetores de altura máxima associados são

$$\begin{aligned}
 f_1 &= [x_1, x_2]x_1x_1 = x_1x_2x_1x_1 - x_2x_1x_1x_1 \\
 &\equiv x_1x_2x_1x_1 - x_1x_1x_2x_1, \\
 f_2 &= [x_1, x_2]x_1x_1(23) = x_1x_1x_2x_1 - x_1x_2x_1x_1 \\
 &= -f_1, \\
 f_3 &= [x_1, x_2]x_1x_1(243) = x_1x_1x_2x_1 - x_2x_1x_1x_1 \\
 &\equiv x_2x_1x_1x_1 - x_2x_1x_1x_1 \equiv 0
 \end{aligned}$$

e portanto $m_{(3,1)} \leq 1$.

As tabelas standard do tipo $(2, 1, 1)$ são

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Para vermos que os vetores de altura máxima associados às tabelas acima são linearmente dependentes, considere a relação $x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 \equiv x_2x_3x_1 - x_3x_1x_2$ fornecida pela linearização da identidade $[x_1^2, x_2]$. Segue que,

$$\begin{aligned}
 f_1 &= St_3(x_1, x_2, x_3)x_1 \\
 &= x_1x_2x_3x_1 - x_1x_3x_2x_1 - x_2x_1x_3x_1 - x_3x_2x_1x_1 + x_3x_1x_2x_1 + x_2x_3x_1x_1 \\
 &\equiv x_1x_2x_3x_1 - x_3x_2x_1x_1 - 2x_1x_3x_2x_1 + 2x_2x_3x_1x_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= x_1x_3x_1x_2 - x_1x_2x_1x_3 - x_2x_3x_1x_1 - x_3x_1x_1x_2 + x_3x_2x_1x_1 + x_2x_1x_1x_3 \\
 &\equiv x_1x_3x_1x_2 - x_1x_2x_1x_3 \\
 &\equiv x_1x_2x_3x_1 - x_1x_1x_3x_2 \\
 &\equiv x_1x_2x_3x_1 - x_3x_2x_1x_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3 &= x_1x_1x_2x_3 - x_1x_1x_3x_2 - x_2x_1x_1x_3 - x_3x_1x_2x_1 + x_3x_1x_1x_2 + x_2x_1x_3x_1 \\
 &\equiv x_2x_1x_3x_1 - x_3x_1x_2x_1 \\
 &\equiv x_1x_3x_2x_1 - x_2x_3x_1x_1.
 \end{aligned}$$

Com isso, obtemos $f_1 \equiv f_2 - 2f_3$. Agora, pelo Lema 1.3.7, $[x_1, x_2x_3x_4]$ é identidade de A , assim $f_2 \equiv -f_3$ e portanto $m_{(2,1,1)} \leq 1$. ■

Finalmente, podemos apresentar uma nova demonstração para o resultado de Ananin e Kemer, como segue abaixo.

Teorema 3.3.5. Se \mathcal{V} é uma variedade gerada por uma PI-álgebra e

$$\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

é seu n -ésimo cocaracter. Então, para cada $\lambda \vdash n$ e $n \geq 1$, $m_\lambda \leq 1$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulos tais que

$$\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_1[x_1, x_2] \in Id(\mathcal{V}).$$

Demonstração: Suponha $m_\lambda \leq 1$, para todo $\lambda \vdash n$ e $n \geq 1$. Em particular, para $(2, 1) \vdash 3$ vimos no Exemplo 2.3.8 que os vetores de altura máxima são

$$\begin{aligned} f_1 &= [x_1, x_2]x_1 \\ f_2 &= [x_1^2, x_2] = x_1[x_1, x_2] + [x_1, x_2]x_1. \end{aligned}$$

Note que, se $f_1 \equiv 0$ o resultado se torna válido tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Se $f_2 \equiv 0$ então basta tomar $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Como $m_{(2,1)} \leq 1$, o caso em que f_1 e f_2 não são identidades fornece a existência de α' e β' não nulos tais que

$$\alpha' f_1 + \beta' f_2 \equiv 0,$$

isto é,

$$\alpha' x_1[x_1, x_2] + \beta'(x_1[x_1, x_2] + [x_1, x_2]x_1) = \alpha[x_1, x_2]x_1 + \beta x_1[x_1, x_2] \equiv 0$$

para $\alpha = \alpha' + \beta'$ e $\beta = \beta'$. Desde de que, a expressão acima é identidade, podemos trocar x_1 por x_2 e obter o que queríamos.

Reciprocamente, suponha que \mathcal{V} satisfaz uma identidade do tipo $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2]$, com α e β não simultaneamente nulos. Para $n = 1$ o resultado é válido desde que o espaço tem dimensão 1. Para $n = 2$ os caracteres associados a $FS_2 \cong P_2$ são $\chi_{(2)}$ e $\chi_{(1^2)}$ que possuem multiplicidades 1, o que fornece o resultado a $P_n(A)$. Para $n = 3$, as partições (3) e (1^3) possuem um único vetor de altura máxima associado. A partição $(2, 1)$, por outro lado, possui dois vetores de altura máxima, f_1 e f_2 definidos acima. Suponha, sem perda de generalidade que $\beta \neq 0$. Então

$$x_1[x_1, x_2] \equiv \gamma[x_1, x_2]x_1$$

onde $\gamma = \frac{-\alpha}{\beta}$. Assim, módulo $Id(A)$, $f_2 = \gamma f_1 + f_1 = (\gamma + 1)f_1$ e portanto $m_{(2,1)} \leq 1$.

Considere $n \geq 4$, vamos considerar quatro casos e mostrar que em todos, as multiplicidades m_λ são limitadas por 1.

Para $\beta = 0$, temos $[x_1, x_2]x_2 \in Id(\mathcal{V})$ e assim $\mathcal{V} \subset var(M_4)$. Logo, pelo Lema 3.3.1, cada $m_\lambda \leq 1$. Se $\alpha = 0$, então a Observação 3.3.2 fornece o resultado. Quando $\alpha = -\beta$, então $[x_1, x_2, x_2] \in Id(\mathcal{V})$ e, pelo Lema 3.3.3, vale o resultado. O caso em que $\alpha = \beta$ nos fornece $[x_1, x_2^2] \in Id(\mathcal{V})$ e, pelo Lema 3.3.4, o resultado é válido. Finalmente, quando $\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha - \beta \neq 0$, pela Proposição 1.3.15 e Exemplo 1.4.4, $c_n(A) \leq 1$ e portanto segue o resultado. ■

3.4 Considerações finais

Resultados que caracterizam multiplicidades limitadas por 1 via identidades polinomiais foram trabalhados em diferentes contextos, em particular, considerando álgebras munidas de estruturas adicionais, o que evidencia a relevância desse tipo de problema. O objetivo dessa seção é apresentar, brevemente, o resultado de Ananin e Kemer nos contextos estudados em álgebras com involução e superálgebras [10], álgebras graduadas [13], $*$ -superálgebras [21] e $(G, *)$ -álgebras [5].

Definição 3.4.1. Uma aplicação linear $*$: $A \rightarrow A$ sobre uma álgebra A é dito uma *involução* se satisfaz

1. $(ab)^* = b^*a^*$;
2. $(a^*)^* = a$,

para todos $a, b \in A$.

Uma álgebra A munida de uma involução $*$ será chamada de álgebra com involução ou uma $*$ -álgebra. Note que $*$ é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2. É bastante conhecido que se A é uma $*$ -álgebra, então podemos escrever $A = A^+ \dot{+} A^-$, onde $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ é o subespaço dos elementos simétricos e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ é o subespaço dos elementos antissimétricos.

Definição 3.4.2. Dizemos que uma álgebra é uma *superálgebra* se existem dois subespaços vetoriais A_0 e A_1 tais que $A = A_0 \dot{+} A_1$,

$$A_0A_0 + A_1A_1 \subseteq A_0 \quad \text{e} \quad A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1.$$

Os subespaços A_0 e A_1 são chamados, respectivamente, componente par e componente ímpar.

Se considerarmos uma superálgebra $A = A_0 \dot{+} A_1$ e, para cada $a = a_0 + a_1$, tal que $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$, então $\varphi : A \rightarrow A_0 \dot{+} A_1$, definido por $a \mapsto a_0 - a_1$, é um automorfismo de ordem no máximo 2 de A . Por outro lado, se φ um automorfismo de ordem no máximo 2 de A então $A = A_0 \dot{+} A_1$ é uma superálgebra, onde

$$A_0 = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\} \quad \text{e} \quad A_1 = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\}.$$

Dizemos que A é uma φ -álgebra se A é uma álgebra munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2. Assim, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, será uma φ -álgebra. Se A é uma φ -álgebra, então podemos escrever $A = A_\varphi^+ \dot{+} A_\varphi^-$, onde $A_\varphi^+ = \{a \in A \mid a^\varphi = a\}$ e $A_\varphi^- = \{a \in A \mid a^\varphi = -a\}$.

Considere $F\langle Y \cup Z \rangle$ a φ -álgebra livre livremente gerada por $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$. Os elementos de $F\langle Y \cup Z \rangle$ são chamados de φ -polinômios.

Definição 3.4.3. Um φ -polinômio $f(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n) \in F\langle Y \cup Z \rangle$ é uma φ -identidade para uma φ -álgebra A se $f(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = 0$, para todos $a_1, \dots, a_m \in A_\varphi^+$ e $b_1, \dots, b_n \in A_\varphi^-$.

O conjunto $Id^\varphi(A)$ de todas as φ -identidades de uma φ -álgebra A é um T_φ -ideal de $F\langle Y \cup Z \rangle$, ou seja, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z \rangle$ que comutam com φ . Quando F é um corpo de característica zero, é possível mostrar que $Id^\varphi(A)$ é gerado por suas φ -identidades multilineares. Consideramos assim, P_n^φ o espaço vetorial dos φ -polinômios multilineares de grau n e

$$P_n^\varphi(A) = \frac{P_n^\varphi}{P_n^\varphi \cap Id^\varphi(A)}.$$

Definimos a n -ésima φ -codimensão de A como sendo $c_n^\varphi = \dim_F P_n^\varphi(A)$.

É possível mostrar que o grupo hiperoctaedral $H_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$, definido como o produto entrelaçado de \mathbb{Z}_2 e S_n , age sobre P_n^φ . Além disso, o espaço $P_n^\varphi \cap Id^\varphi(A)$ é invariante por essa ação, então $P_n^\varphi(A)$ é um H_n -módulo. É bastante conhecido que os H_n -caracteres possuem

uma relação biunívoca com as bipartições (λ, μ) , onde $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$, $r = 0, \dots, n$. Sendo assim, se $\chi_{\lambda, \mu}$ denota o H_n -caracter irreduzível associado à (λ, μ) , então

$$\chi_n^\varphi(A) = \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda, \mu} \chi_{\lambda, \mu},$$

onde $m_{\lambda, \mu}$ é a respectiva multiplicidade. Chamamos $\chi_n^\varphi(A)$ de o n -ésimo φ -cocaracter de A . Quando tratarmos de $*$ -álgebras, vamos denotar $\chi_n^\varphi(A)$ como sendo $\chi_n^*(A)$ e chamá-lo de n -ésimo $*$ -cocaracter de A . No caso de superálgebras, denotaremos $\chi_n^\varphi(A)$ por $\chi_n^{\mathbb{Z}_2}(A)$ e o chamamos o n -ésimo cocaracter graduado de A .

Em [10], Giamb Bruno e Mishchenko, caracterizaram φ -variedades cujas multiplicidades $m_{\lambda, \mu}$ são limitadas por 1 via identidades polinomiais, como pode ser visto nos dois resultados abaixo.

Teorema 3.4.4. Seja A uma $*$ -álgebra e

$$\chi_n^*(A) = \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda, \mu} \chi_{\lambda, \mu}$$

seu n -ésimo $*$ -cocaracter. Então $m_{\lambda, \mu} \leq 1$, para cada bipartição $(\lambda, \mu) \vdash n$, se, e somente se, A satisfaz pelo menos uma das seguintes identidades

$$\begin{aligned} y_1 \circ z_2 &\equiv 0 \\ [y_1, z_2] &\equiv 0 \\ y_1 z_2 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Teorema 3.4.5. Seja A uma superálgebra e

$$\chi_n^{\mathbb{Z}_2}(A) = \sum_{r=0}^n \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda, \mu} \chi_{\lambda, \mu}$$

seu n -ésimo cocaracter graduado. Então $m_{\lambda, \mu} \leq 1$, para cada bipartição $(\lambda, \mu) \vdash n$, se, e somente se, A satisfaz as identidades

$$\alpha y_1 z_2 + \beta z_2 y_1 \quad \text{e} \quad \gamma y_1 [y_1, y_2] + \delta [y_1, y_2] y_1,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$.

Acerca da relação de distributividade, os autores mostraram a equivalência no caso graduado e exibiram um contra exemplo no caso munido de involução.

A estrutura de superálgebra motiva a definição de uma álgebra graduada por um grupo qualquer, como veremos abaixo. Nesse contexto, Giamb Bruno, Polcino e Valenti, estenderam o resultado de Ananin e Kemer, como veremos adiante. Para isso, considere G um grupo qualquer.

Definição 3.4.6. Dizemos que uma álgebra A é G -graduada, se existem subespaços vetoriais $A_g, g \in G$, chamadas componentes homogêneas de A , tais que $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para todo $g, h \in G$. Além disso, dizemos que um elemento $a \in A_{g_i}$ é homogêneo de grau g_i .

Perceba que, quando $G = \mathbb{Z}_2$, temos que A é nada mais que uma superálgebra. Com isso, o estudo das álgebras G -graduadas generaliza o estudo de superálgebras. Considere a partir de agora, G um grupo finito e $F\langle X, G \rangle$ a álgebra livre G -graduada, livremente gerada por $X = \bigcup_{g \in G} X^g$, onde $X^g = \{x_{1,g}, x_{2,g}, \dots\}$. Os elementos de $F\langle X \rangle$ são ditos G -polinômios.

Definição 3.4.7. Dizemos que um G -polinômio $f(x_{1,g_{i_1}}, \dots, x_{n,g_{i_n}}) \in F\langle X, G \rangle$ é uma G -identidade de uma álgebra G -graduada A se $f(a_{1,g_{i_1}}, \dots, a_{n,g_{i_n}}) = 0$, para todo $a_{1,g_{i_1}} \in A_{g_{i_1}}, \dots, a_{n,g_{i_n}} \in A_{g_{i_n}}$.

O conjunto $Id^G(A)$ de todas as identidades G -graduadas de uma álgebra G -graduada A é um T_G -ideal, ou seja, é invariante sob todos os endomorfismos graduados de $F\langle X, G \rangle$. De forma similar aos casos já apresentados, é possível mostrar que $Id^G(A)$ é gerado por suas identidades G -graduadas multilineares. Assim, consideramos P_n^G o espaço vetorial dos polinômios G -graduados de grau n . O grupo $G \wr S_n$ formado pelo produto entrelaçado de G e S_n age sob P_n^G e deixa $P_n^G \cap Id^G(A)$ invariante. Assim, quando G é abeliano de ordem t , é conhecido que

$$P_n^G(A) = \frac{P_n^G}{P_n^G \cap Id^G(A)}$$

é um $G \wr S_n$ -módulo cujo o $G \wr S_n$ -caracter χ_n^G é descrito em termos das multipartições de n , isto é, se $n = n_1 + \dots + n_t$, $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq t$, considere $\langle \lambda \rangle = (\lambda(1), \dots, \lambda(t))$, a sequência de partições $\lambda(i) \vdash n_i$, e escreva $\langle \lambda \rangle \vdash n$. Então

$$\chi_n^G = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} k_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle},$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ é o $G \wr S_n$ -caracter irredutível correspondente a $\langle \lambda \rangle$ e $k_{\langle \lambda \rangle}$ sua respectiva multiplicidade.

A partir disso, em 2017, Giambruno, Polcino e Valenti [13], forneceram uma caracterização do tipo Ananin e Kemer para o contexto de álgebras G -graduadas. Os autores mostraram que:

Teorema 3.4.8. Se G é um grupo abeliano e A uma álgebra G -graduada com

$$\chi_n^G = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} k_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}.$$

Então, para cada $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, se, e somente se, A satisfaz as identidades graduadas

$$\begin{aligned} \alpha x_{1,g_1} [x_{1,g_1}, x_{2,g_1}] + \beta [x_{1,g_1}, x_{2,g_1}] x_{1,g_1} &\equiv 0 \\ \gamma x_{1,g} x_{2,h} + \delta x_{2,h} x_{1,g} &\equiv 0, \end{aligned}$$

onde $g_1 = 1$, g e h são quaisquer elementos em G e os escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são tais que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$.

Neste contexto os autores ainda mostraram que as multiplicidades $k_{\langle \lambda \rangle}$ são limitadas por 1 se, e somente se, A gera uma variedade G -graduada distributiva.

Uma outra estrutura é estudada quando consideramos uma álgebra graduada munida de uma involução que preserva as componentes homogêneas. Com esse objetivo, definimos as chamadas $(G, *)$ -álgebras. Veremos que, nesse contexto, a caracterização de Ananin e Kemer também possui êxito.

Definição 3.4.9. Uma involução $*$ sobre uma álgebra G -graduada A é dita uma *involução graduada* se $*$ preserva as componentes homogêneas de G , isto é, $(A_g)^* = A_g$, para todo $g \in G$. Uma álgebra G -graduada munida de uma involução graduada $*$, é dita uma $(G, *)$ -álgebra.

Se $*$ é uma involução graduada sobre A , então podemos decompor A como

$$A = \bigoplus_{g \in G} (A_g^+ \dot{+} A_g^-),$$

onde $A_g^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ é a componente homogênea simétrica de grau g e $A_g^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ é a componente homogênea antissimétrica de grau g . Vamos considerar a partir de agora G um grupo abeliano de ordem t . Consideremos, para cada $g \in G$, $Y = \bigcup_{g \in G} Y_g$ e

$Z = \bigcup_{g \in G} Z_g$, onde $Y_g = \{y_{1,g}, y_{2,g}, \dots\}$ é o conjunto das variáveis homogêneas simétricas de grau g e $Z_g = \{z_{1,g}, z_{2,g}, \dots\}$ é o conjunto das variáveis homogêneas antissimétricas de grau g . Seja $\mathcal{F} = F\langle Y \cup Z \mid G \rangle$ a $(G, *)$ -álgebra livre, livremente gerada por $Y \cup Z$, cujo os elementos são chamados $(G, *)$ -polinômios.

Definição 3.4.10. Seja $f = f(y_{1,1}, \dots, y_{i_1,1}, z_{1,1}, \dots, z_{j_1,1}, \dots, y_{1,g_t}, \dots, y_{i_t,g_t}, z_{1,g_t}, \dots, z_{j_t,g_t}) \in \mathcal{F}$ um $(G, *)$ -polinômio, dizemos que f é uma $(G, *)$ -*identidade polinomial* de uma $(G, *)$ -álgebra A se

$$f(a_{1,1}^+, \dots, a_{i_1,1}^+, a_{1,1}^-, \dots, a_{j_1,1}^-, \dots, a_{1,g_t}^+, \dots, a_{i_t,g_t}^+, a_{1,g_t}^-, \dots, a_{j_t,g_t}^-) = 0$$

para todos $a_{1,1}^+, \dots, a_{i_1,1}^+ \in A_1^+$, $a_{1,1}^-, \dots, a_{j_1,1}^- \in A_1^-$, \dots , $a_{1,g_t}^+, \dots, a_{i_t,g_t}^+ \in A_{g_t}^+$, $a_{1,g_t}^-, \dots, a_{j_t,g_t}^- \in A_{g_t}^-$.

O conjunto $Id^{(G,*)}(A)$ das $(G, *)$ -identidades de A , é um $\Gamma_{(G,*)}$ -ideal de \mathcal{F} invariante sob todos os endomorfismos de \mathcal{F} que preservam a graduação e comutam com a involução. É possível mostrar que $Id^{(G,*)}(A)$ é totalmente determinado pelas $(G, *)$ -identidades multilineares. Assim, considere

$$P_n^{(G,*)} = \text{span}_F \{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i \in \{y_{i,g}, z_{i,g}, g \in G\}\}$$

o espaço dos $(G, *)$ -polinômios multilineares de grau n . É possível mostrar que o grupo $(G \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$, o produto entrelaçado de $G \times \mathbb{Z}_2$ e S_n , age sobre $P_n^{(G,*)}$ e deixa $P_n^{(G,*)} \cap Id^{(G,*)}(A)$ invariante. Assim, o espaço

$$P_n^{(G,*)}(A) = \frac{P_n^{(G,*)}}{P_n^{(G,*)} \cap Id^{(G,*)}(A)}$$

é um $(G \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$ -módulo. Assim, pela teoria de representações de $(G \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$, existe uma relação biunívoca entre os $(G \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$ -caracteres irredutíveis e as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, onde $n = n_1 + \dots + n_{2t}$, $\langle n \rangle = (n_1, \dots, n_{2t})$ e $\langle \lambda \rangle = (\lambda(1), \dots, \lambda(2t))$, com $\lambda(i) \vdash n_i$. Assim, o caracter associado a $P_n^{(G,*)}(A)$ se decompõe como

$$\chi_n^{(G,*)} = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle},$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ é o $(G \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$ -caracter irredutível associado a $\langle \lambda \rangle$ e $m_{\langle \lambda \rangle}$ sua respectiva multiplicidade.

Quando o grupo $G = \mathbb{Z}_2$, temos que A é dita uma $*$ -superálgebra. Sendo assim, a estrutura de $(G, *)$ -álgebras generaliza o estudo das $*$ -superálgebras. Em 2020, Martino [21] forneceu uma caracterização das $*$ -superálgebras que possuem as suas multiplicidades limitadas por 1.

Teorema 3.4.11. Seja A uma $*$ -superálgebra com

$$\chi_n^{(\mathbb{Z}_2, *)}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}.$$

Então, para cada $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e $n \geq 1$, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ se, e somente se, A satisfaz a identidade

$$\alpha z_{1,0}[z_{1,0}, z_{2,0}] + \beta [z_{1,0}, z_{2,0}]z_{1,0} \equiv 0$$

com α, β constantes não simultaneamente nulas, e pelo menos uma identidade de cada item abaixo

- 1) $y_{1,0}y_{1,1} \equiv 0$, ou $y_{1,0} \circ y_{1,1}$ ou $[y_{1,0}, y_{1,1}]$.
- 2) $y_{1,0}z_{1,1} \equiv 0$, ou $y_{1,0} \circ z_{1,1}$ ou $[y_{1,0}, z_{1,1}]$.
- 3) $z_{1,0}y_{1,1} \equiv 0$, ou $z_{1,0} \circ y_{1,1}$ ou $[z_{1,0}, y_{1,1}]$.
- 4) $z_{1,0}z_{1,1} \equiv 0$, ou $z_{1,0} \circ z_{1,1}$ ou $[z_{1,0}, z_{1,1}]$.
- 5) $y_{1,1}z_{1,1} \equiv 0$, ou $y_{1,1} \circ z_{1,1}$ ou $[y_{1,1}, z_{1,1}]$.
- 6) $y_{1,0}z_{1,0} \equiv 0$, ou $y_{1,0} \circ z_{1,0}$ ou $[y_{1,0}, z_{1,0}]$.

Perceba que se A for uma $*$ -superálgebra com graduação trivial, isto é, $A = A \dot{+} \{0\}$, então a relação de distributividade nesse contexto também não é preservada, isso devido ao mostrado por Giambruno e Mishchenko em [10].

Recentemente, dos Santos, Vieira e Vieira [5], forneceram uma caracterização do tipo Ananin e Kemer para $(G, *)$ -álgebras. Os autores mostraram o seguinte resultado:

Teorema 3.4.12. Seja $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_t\}$ um grupo abeliano finito de ordem t com

$$\chi_n^{(G, *)} = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}.$$

Então, para cada $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e $n \geq 1$, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ se, e somente se, A satisfaz pelo menos uma identidade de cada item abaixo

$$\begin{array}{lll}
1) & y_{1,1}z_{2,1} + \gamma_1 z_{2,1}y_{1,1} & \equiv 0; \\
2) & y_{1,1}y_{2,g_2} + \gamma_2 y_{2,g_2}y_{1,1} & \equiv 0; \\
3) & y_{1,1}z_{2,g_2} + \gamma_3 z_{2,g_2}y_{1,1} & \equiv 0; \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
2k-2) & y_{1,1}y_{2,g_k} + \gamma_{2k-2}y_{2,g_k}y_{1,1} & \equiv 0; \\
2k-1) & y_{1,1}z_{2,g_k} + \gamma_{2k-1}z_{2,g_k}y_{1,1} & \equiv 0; \\
2k) & z_{1,1}y_{2,g_2} + \gamma_{2k}y_{2,g_2}z_{1,1} & \equiv 0; \\
2k+1) & z_{1,1}z_{2,g_2} + \gamma_{2k+1}z_{2,g_2}z_{1,1} & \equiv 0; \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
4k-4) & z_{1,1}y_{2,g_k} + \gamma_{4k-4}y_{2,g_k}z_{1,1} & \equiv 0; \\
4k-3) & z_{1,1}z_{2,g_k} + \gamma_{4k-3}z_{2,g_k}z_{1,1} & \equiv 0; \\
4k-2) & y_{1,g_2}z_{2,g_2} + \gamma_{4k-2}z_{2,g_2}y_{1,g_2} & \equiv 0; \\
4k-1) & y_{1,g_2}y_{2,g_3} + \gamma_{4k-1}y_{2,g_3}y_{1,g_2} & \equiv 0; \\
4k) & y_{1,g_2}z_{2,g_3} + \gamma_{4k}z_{2,g_3}y_{1,g_2} & \equiv 0; \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
6k-5) & y_{1,g_2}y_{2,g_k} + \gamma_{6k-5}y_{2,g_k}y_{1,g_2} & \equiv 0; \\
6k-6) & y_{1,g_2}z_{2,g_k} + \gamma_{6k-6}z_{2,g_k}y_{1,g_2} & \equiv 0; \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
2k^2-k) & y_{1,g_k}z_{2,g_k} + \gamma_{2k^2-k}z_{2,g_k}y_{1,g_k} & \equiv 0;
\end{array}$$

onde $\gamma_i \in \{0, 1, -1\}$ para $1 \leq i \leq 2k^2 - k$.

A partir desta exposição, esperamos ter mostrado a relevância de caracterizações do tipo introduzido por Ananin e Kemer. Percebemos que, com o passar dos estudos, condições necessárias e suficientes para se ter multiplicidades limitadas por 1 via identidades polinomiais não se restringia à clássica visão de distributividade apontada inicialmente por Ananin e Kemer. Ainda assim, este tipo de caracterização é comumente atacado sempre que consideramos estudar PI-Teoria, seja adicionando estruturas ou em classes específicas de álgebras associativas.

Bibliografia

- [1] Amitsur, A. S. e Levitzki, J. "Minimal identities for algebras". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 1.4 (1950), pp. 449–463.
- [2] Ananin, A.Z e Kemer, A.R. "Varieties of associative algebras whose lattice of subvarieties is distributive". Em: *Siberian Math. J.* 17.4 (1976), pp. 549–554.
- [3] Berele, A e Regev, Amitai. "Applications of hook Young diagrams to PI algebras". Em: *Journal of algebra* 82.2 (1983), pp. 559–567.
- [4] dos Santos, R. B. e Vieira, A. C. *PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria*. Impa, Rio de Janeiro, 2021.
- [5] dos Santos, R. B., Vieira, A. C. e Vieira, R. N. *Characterization of algebras with graded involution with multiplicities bounded by one*. Preprint.
- [6] Drensky, V. "A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0". Em: *Algebra i Logika* 20.3 (1981), pp. 282–290.
- [7] Drensky, V. *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*. 2000.
- [8] Giambruno, A., dos Santos, R. B. e Vieira, A. C. "Identities of \ast -superalgebras and almost polynomial growth". Em: *Linear Multilinear Algebra* 64.3 (2016), pp. 484–501.
- [9] Giambruno, A. e La Mattina, D. "PI-algebras with slow codimension growth". Em: *J. of Algebra* 284.1 (2005), pp. 371–391.
- [10] Giambruno, A. e Mishchenko, S. "Super-cocharacters, star-cocharacters and multiplicities bounded by one". Em: *Manuscripta Math.* 128.4 (2009), pp. 483–504.
- [11] Giambruno, A. e Mishchenko, S. "On star-varieties with almost polynomial growth". Em: *Algebra Coll.* 8.1 (2001), pp. 33–42.
- [12] Giambruno, A., Mishchenko, S. e Zaicev, M. "Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth". Em: *Comm. in Algebra* 29.9 (2001), pp. 3787–3800.
- [13] Giambruno, A., Polcino Milies, C e Valenti, A. "Cocharacters of group graded algebras and multiplicities bounded by one". Em: *Linear Multilinear Algebra* 66.8 (2018), pp. 1709–1715.
- [14] Giambruno, A. e Zaicev, M. *Polynomial identities and asymptotic methods*. 122. Amer. Math. Soc., 2005.
- [15] James, G. e Liebeck, M. *Representations and characters of groups*. Cambridge university press, 2001.
- [16] Kaplansky, I. "Rings with a polynomial identity". Em: (1948).
- [17] Kemer, A. R. *Ideals of identities of associative algebras*. Amer. Math. Soc., 1991.
- [18] Kemer, A.R. "Varieties of finite rank". Em: *Proc. 15-th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsk*. Vol. 2. 1979, p. 73.

-
- [19] Kemer, AR. "Finite basis property of identities of associative algebras". Em: *Algebra and Logic* 26.5 (1987), pp. 362–397.
- [20] Krakowski, D. e Regev, A. "The polynomial identities of the Grassmann algebra". Em: *Trans. Amer. Math Soc.* 181 (1973), pp. 429–438.
- [21] Martino, F. "Classifying Algebras with Graded Involutions or Superinvolutions with Multiplicities of their Cocharacter Bounded by One". Em: *Algebr. and Represent. Theory* 24 (2021), pp. 317–326.
- [22] Oliveira, L.M.C., dos Santos, R.B. e Vieira, A.C. "Varieties of group graded algebras with graded involution of almost polynomial growth". Em: *Algebr. and Represent. Theory* (2023), pp. 1–15.
- [23] Regev, A. "Existence of identities in $A \otimes B$ ". Em: *Israel J. of Math.* 11 (1972), pp. 131–152.
- [24] Sagan, B. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Vol. 203. Springer, 2013.
- [25] Valenti, A. "Group graded algebras and almost polynomial growth". Em: *J. of Algebra* 334.1 (2011), pp. 247–254.