

TESE DE DOUTORADO Nº 224

**MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS AO ELETROMAGNETISMO: FORMAS
FRACAS ENFRAQUECIDAS E FUNÇÕES DE FORMA VETORIAIS**

Naísses Zoia Lima

DATA DA DEFESA: 26/02/2016

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**MÉTODOS SEM MALHA APLICADOS AO
ELETROMAGNETISMO: FORMAS FRACAS ENFRAQUECIDAS E
FUNÇÕES DE FORMA VETORIAIS**

Naísses Zoia Lima

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Renato Cardoso Mesquita

Belo Horizonte - MG

Fevereiro de 2016

L732m

Lima, Naísses Zoia.

Métodos sem malha aplicados ao eletromagnetismo [manuscrito] :
formas fracas enfraquecidas e funções de formas vetoriais / Naísses Zoia
Lima. - 2016.

xvi, 136 f., enc. : il.

Orientador: Renato Cardoso Mesquita.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Escola de Engenharia.

Bibliografia: f.130-136.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Eletromagnetismo - Teses. 3.
Funções vetoriais - Teses. I. Mesquita, Renato Cardoso. II. Universidade
Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

"Métodos Sem Malha Aplicados ao Eletromagnetismo: Formas Fracas Enfraquecidas e Funções de Forma Vetoriais"

Naísses Zoia Lima

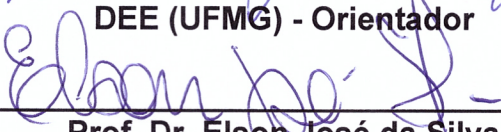
Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2016.

Por:



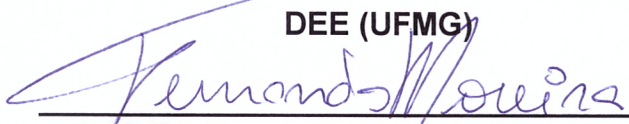
Prof. Dr. Renato Cardoso Mesquita
DEE (UFMG) - Orientador



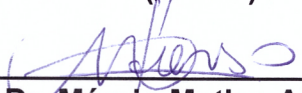
Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG)



Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano
DEE (UFMG)



Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Márcio Matias Afonso
Engenharia Elétrica (CEFET-MG)



Prof. Dr. Delfim Soares Júnior
Departamento de Estruturas (UFJF)

Agradecimentos

À minha adorável esposa Carmen, pelo apoio incondicional desde o início do doutorado, pelo incentivo nos momentos mais difíceis, pela paciência naqueles que precisei ficar ausente focado nos estudos e pelo companheirismo que fez esta jornada tornar-se mais agradável e gratificante.

À minha querida família, em especial à minha mãe Fátima pela dedicação e êxito em proporcionar os estudos que fizeram com que eu pudesse chegar até aqui. À tia Ana pelo empenho desde criança em ensinar-me que o estudo exige disciplina, e que os objetivos podem e devem ser alcançados com foco e muito empenho. Às minhas irmãs Bárbara e Viviane pelo carinho de sempre. Ao Flávio pelo exemplo de caráter e ética, pelos maravilhosos anos de convivência com muita harmonia e alegria, não medindo esforços em oferecer-me as melhores condições possíveis para os meus estudos.

Aos meus grandes professores, educadores e pesquisadores, que conduziram-me sabiamente ao longo destes anos de doutorado e são fontes inspiradoras para minha vida como docente. Ao professor Renato Cardoso Mesquita, pelo exemplo na pesquisa e docência, pela conduta tão acertiva em suas orientações e por acreditar no desenvolvimento do meu trabalho. Ao professor Elson José da Silva pelo incentivo e contribuições.

Agradeço, também, os amigos com os quais atravessei o doutorado. Em especial, Werley Gomes Facco e Alex Sander de Moura, pelos momentos de muito estudo e ajuda mútua e pelos conselhos que marcaram a minha vida. Ao Alexandre Ramos Fonseca pelas experiências nos projetos de pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, sob a coordenação do professor Rodney Rezende Saldanha, pela oportunidade concedida em aceitar-me como aluno de doutorado.

Ao CNPq pela ajuda financeira ao longo destes anos de estudo como bolsista.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento do meu doutorado.

Resumo

Esta tese apresenta o estudo e a aplicação de métodos sem malha em problemas eletromagnéticos. Pode-se dizer que os problemas escalares estão bem consolidados com os métodos existentes. Todavia, há a necessidade de desenvolver novas técnicas sem malha para contornar as dificuldades envolvidas nos problemas vetoriais tais como a não satisfação da condição do divergente nulo e o surgimento de soluções numéricas espúrias.

Uma das contribuições deste trabalho é a aplicação do Método de Interpolação de Pontos (PIM) utilizando formas fracas enfraquecidas. Formas fracas enfraquecidas surgiram com o objetivo de eliminar problemas de incompatibilidade presentes nas funções de forma PIM. Aplica-se, inicialmente, o método em problemas eletromagnéticos escalares. Após, é proposta uma formulação restrita com o método da penalidade para sua aplicação em problemas vetoriais.

Outra contribuição para resolver problemas vetoriais é desenvolvida como uma extensão das Funções de Base Radial (RBF) vetoriais, porém utilizando formas fracas. As RBF's vetoriais são baseadas em nós e, mesmo assim, geram aproximações com divergente nulo. Por isso, podem ser utilizadas com formas fracas sem a necessidade de acréscimo de restrições, ao contrário dos métodos PIM com formas fracas enfraquecidas.

Uma terceira contribuição para problemas vetoriais foi o desenvolvimento de funções de forma vetoriais construídas a partir de um conjunto de arestas ao invés de um conjunto de nós. Esta técnica permite que as aproximações satisfaçam a condição do divergente nulo sem que haja a necessidade de utilizar formulações restritas, através da escolha adequada de funções de base vetoriais. Os graus de liberdade são associados às arestas e a imposição das condições de contorno de Dirichlet é feita de maneira simplificada.

Todas as técnicas citadas são testadas em problemas eletromagnéticos vetoriais harmônicos no tempo e os resultados apresentados juntamente com as formulações matemáticas.

Abstract

This thesis presents the study and application of meshless methods in electromagnetic problems. It can be said that scalar problems are well consolidated with the existing methods. However, there is a need to develop new meshless techniques to overcome the difficulties involved in vector problems such as not satisfying the divergence free condition and the appearance of numerical spurious solutions.

One of the contributions of this work is the application of the Point Interpolation Method (PIM) using weakened weak forms. Weakened weak forms arrived in order to eliminate incompatibility issues present in PIM shape functions. The method is initially applied in scalar electromagnetic problems. Then a restricted formulation is proposed with the penalty method for application in vector problems.

Another contribution to solve vector problems is developed as an extension of the vector Radial Basis Function (RBF), but using weak forms. The vector RBF's are based in nodes and yet generate approximations with the divergence free condition. Therefore, they can be used with weak forms without the need of adding constraints, unlike the PIM methods with weakened weak forms.

A third contribution for vector problems was the development of vector shape functions constructed from a set of edges rather than a set of nodes. This technique allows the approximations to satisfy the divergence free condition without needing to use restricted formulations, by the appropriate choice of vector basis functions. The degrees of freedom are associated with the edges and the imposition of Dirichlet boundary conditions is done in a simplified manner.

All the aforementioned techniques are tested in time-harmonic vector electromagnetic problems and the results presented along with the mathematical formulations.

Sumário

Sumário	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Símbolos	xii
1 Introdução	1
2 Revisão de Conceitos Básicos	8
2.1 Aproximação de Funções	9
2.2 Funções de Forma - O Método de Interpolação de Pontos	10
2.2.1 Método de Interpolação de Pontos polinomial	10
2.2.2 Método de Interpolação de Pontos Radial	13
2.2.3 Método de Interpolação de Pontos Radial com polinômios	15
2.3 Esquemas T	19
2.4 Suavização de Gradientes	22
2.5 Construção dos Domínios de Suavização	24
2.6 Forma Fraca Enfraquecida	27
2.7 Problemas Eletromagnéticos	29
2.7.1 Problemas Eletrostáticos	30
2.7.2 Problemas Magnetostáticos	32
2.7.3 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo	34
3 Método de Interpolação de Pontos Suavizado	38
3.1 Problemas Eletrostáticos	38
3.1.1 Capacitor de Placas Paralelas	40
3.1.2 Capacitor de Placas Paralelas com Dois Dielétricos	41

3.1.3	Calha com Condição de Contorno de Dirichlet Senoidal	41
3.1.4	Calha 3D	45
3.1.5	Impacto da Qualidade da Malha na Solução	47
3.2	Problemas Magnetostáticos	50
3.2.1	Rolamento Magnético Radial	51
3.3	Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo: Guia de Onda	55
3.3.1	Suavização do Rotacional	56
3.3.2	Forma Fraca Enfraquecida e Discretizada	56
3.3.3	Resultados	57
3.3.4	Eliminação de Modos Espúrios: Método da Penalidade	59
4	Método sem Malha com RBF Vetorial	63
4.1	Funções de Forma com RBF Vetorial	63
4.2	Interpolação de Campos Vetoriais	69
4.2.1	Campo Constante	69
4.2.2	Campo Magnético Produzido Por Um Fio	70
4.2.3	Campo Elétrico em Guia de Onda	72
4.3	Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo	77
4.3.1	Propagação em Guia de Onda	79
4.3.2	Frequências de Corte em Guia de Onda	87
4.3.3	Guia de Onda com Descontinuidade	88
5	Método sem Malha de Aresta	93
5.1	Funções de Forma de Aresta	96
5.2	Interpolação de Campos Vetoriais	105
5.2.1	Campo Constante	105
5.2.2	Campo Magnético Produzido Por Um Fio	105
5.2.3	Campo Elétrico em Guia de Onda	108
5.3	Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo	109
5.3.1	Propagação em Guia de Onda	114
5.3.2	Frequências de Corte em Guia de Onda	115
5.3.3	Guia de Onda com Descontinuidade	120
5.4	Comentários	121
6	Conclusão	124
	Referências Bibliográficas	130

Lista de Figuras

1.1	Representação do domínio em diferentes métodos numéricos	2
2.1	Distribuição de nós no domínio e domínio de suporte	10
2.2	Funções de forma PIM em 1D	13
2.3	Funções de forma RPIM em 1D	16
2.4	Funções de forma RPIM em 2D	17
2.5	Funções de forma RPIMp em 1D	19
2.6	Funções de forma RPIMp em 2D	20
2.7	Seleção de nós de suporte por esquema T3	21
2.8	Seleção de nós de suporte por esquema T6/3	21
2.9	Seleção de nós de suporte por esquema T6	22
2.10	Seleção de nós de suporte por esquema T2L	23
2.11	Domínio de suavização baseado em nó	25
2.12	Domínio de suavização baseado em aresta	26
2.13	Domínio de suavização baseado em célula	26
2.14	Domínio de suavização baseado em face	27
3.1	Potencial elétrico no capacitor de placas paralelas com dois dielétricos obtida pelo NS-PIM	42
3.2	Calha quadrada com condição de contorno sonoidal	43
3.3	Potencial elétrico na calha em $x = 0,5m$ calculado utilizando métodos de suavização	43
3.4	Taxas de convergência na norma $\mathbb{L}^2$ para os métodos de suavização	44
3.5	Eficiência computacional dos métodos de suavização	46
3.6	Calha em 3 dimensões	46
3.7	Erro da solução numérica do problema da calha tridimensional na norma $\mathbb{L}^2$ usando o FS-PIM e o FEM	47

3.8	Malhas utilizadas para solucionar o problema eletrostático na análise do impacto da qualidade da malha nos métodos de suavização	49
3.9	Rolamento magnético radial de oito pólos	52
3.10	Densidade de fluxo magnético (T) no rolamento magnético calculada pelo ES-PIM com esquema T3	53
3.11	Densidade de fluxo magnético (T) calculada pelo ES-PIM com esquema T3 e pelo FEM em um segmento radial no braço superior esquerdo do rolamento magnético	54
3.12	Densidade de fluxo magnético (T) calculada pelo ES-PIM com esquema T3 e pelo FEM na região central de um segmento radial no braço superior esquerdo do rolamento magnético	54
4.1	Bases vetoriais produzidas pela RBF vetorial centrada em $(0,0)$ com RBF Gaussiana com $p = 2$	68
4.2	Interpolação de campo vetorial constante usando funções de forma com RBF's vetoriais	70
4.3	Interpolação de campo vetorial representando a densidade de fluxo magnético de um fio de raio $a = 2$ mm usando funções de forma com RBF's vetoriais	71
4.4	Erro de aproximação da densidade de fluxo magnético usando funções de forma com RBF's vetoriais em função da distância média entre nós distribuídos no domínio	72
4.5	Distribuições de nós usadas na interpolação do campo elétrico do guia de onda	73
4.6	Esquema T2L adaptado para malha com elementos quadrangulares	74
4.7	Interpolação do campo vetorial representando o campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma com RBF's vetoriais	75
4.8	Interpolação do rotacional do campo vetorial representando o rotacional do campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma com RBF's vetoriais	76
4.9	Rotacional do campo elétrico analítico correspondente ao oitavo modo do guia de onda	77
4.10	Erro de aproximação do campo elétrico do guia de onda usando funções de forma com RBF's vetoriais em função da distância nodal média	78
4.11	Guia de onda retangular	79
4.12	Distribuições de nós regulares no guia de onda retangular usadas pelo método sem malha com RBF vetorial	81

4.13	Distribuição do campo elétrico no guia de onda retangular produzida pelo método sem malha com RBF vetorial	82
4.14	Campo elétrico E_y em $y = 0,3\text{m}$ no guia de onda retangular produzido pelo método sem malha com RBF vetorial	83
4.15	Distribuição de nós irregulares no guia de onda retangular usada pelo método sem malha com RBF vetorial	84
4.16	Erro de fase do campo elétrico aproximado pelo método sem malha com RBF vetorial e função Gaussiana em função do parâmetro de controle da RBF no problema do guia de onda retangular	85
4.17	Erro de fase do campo elétrico aproximado pelo método sem malha com RBF vetorial e função multiquádrica em função do parâmetro de controle da RBF no problema do guia de onda retangular	86
4.18	Campo elétrico E_y em $y = 0,3$ no guia de onda retangular produzido pelo método sem malha com RBF vetorial e distribuição nodal irregular	87
4.19	Distribuições de nós no guia de onda usadas pelo método sem malha com RBF vetorial	89
4.20	Guia de onda retangular com obstáculo	90
4.21	Corte no guia de onda retangular com obstáculo correspondente ao plano $x = a/2$	91
4.22	Distribuição de nós no guia de onda retangular com obstáculo usada pelo método sem malha com RBF vetorial	92
5.1	Triângulo representando um elemento de aresta	94
5.2	Funções de forma de aresta do método dos elementos finitos para elemento triangular	95
5.3	Distribuição de arestas no domínio e domínio de suporte	97
5.4	Função W linear contida nas funções de forma vetoriais de aresta	99
5.5	Função W <i>spline</i> quártica contida nas funções de forma vetoriais de aresta	99
5.6	Função W exponencial contida nas funções de forma vetoriais de aresta	100
5.7	Arestas de suporte empregadas na construção das funções de forma vetoriais de aresta	102
5.8	Funções de forma vetoriais de aresta considerando 3 arestas de suporte	103
5.9	Funções de forma vetoriais de aresta considerando 4 arestas de suporte	104
5.10	Interpolação de campo vetorial constante usando funções de forma vetoriais de aresta	106
5.11	Interpolação de campo vetorial representando a densidade de fluxo magnético de um fio de raio $a = 2\text{mm}$ usando funções de forma vetoriais de aresta	107

5.12	Erro de aproximação da densidade de fluxo magnético usando funções de forma vetoriais de aresta em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio	108
5.13	Distribuições de arestas usadas na interpolação do campo elétrico do guia de onda	110
5.14	Interpolação do campo vetorial representando o campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma vetoriais de aresta	111
5.15	Campo elétrico analítico correspondente ao oitavo modo do guia de onda . . .	112
5.16	Erro de aproximação do campo elétrico do guia de onda usando funções de forma vetoriais de aresta em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio	112
5.17	Interpolação do rotacional do campo vetorial representando o rotacional do campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma vetoriais de aresta	113
5.18	Distribuição de arestas no guia de onda retangular utilizada pelo EMM	114
5.19	Distribuição do campo elétrico no guia de onda produzida pelo EMM	116
5.20	Distribuição de arestas no guia de onda utilizada pelo EMM	117
5.21	Distribuição do campo elétrico associado ao oitavo autovalor aproximado pelo EMM	118
5.22	Erro da solução numérica do EMM e do FEM usando malha regular em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio	119
5.23	Seis elementos distorcidos da malha de qualidade baixa no guia de onda utilizada pelo EMM	119
5.24	Erro da solução numérica do EMM e do FEM usando malha distorcida em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio	120
5.25	Distribuições de arestas no guia de onda retangular com obstáculo usadas pelo EMM	121

Lista de Tabelas

3.1	Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha regular em problema eletrostático	48
3.2	Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha distorcida 1 em problema eletrostático	50
3.3	Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha distorcida 2 em problema eletrostático	50
3.4	Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha distorcida 3 em problema eletrostático	50
3.5	Quatro maiores erros relativos percentuais (%) para a densidade de fluxo magnético na região central do braço superior esquerdo do rolamento magnético obtidos pelas soluções numéricas do ES-PIM e do FEM.	55
3.6	Autovalores analíticos para o problema do guia de onda	58
3.7	Autovalores para o problema do guia de onda obtidos pelo ES-PIM (T3) . . .	58
3.8	Autovalores para o problema do guia de onda obtidos pelo ES-PIM (T3) com o método da penalidade	62
4.1	Dez primeiros autovalores do problema do guia de onda calculados pelo método sem malha com RBF vetorial	88
4.2	Coeficientes de reflexão R e transmissão T calculados para o guia de onda com descontinuidade usando o método sem malha com RBF vetorial	92
5.1	Dez primeiros autovalores do problema do guia de onda calculados pelo EMM e pelo FEM	117
5.2	Coeficientes de reflexão R e transmissão T calculados para o guia de onda com descontinuidade usando o EMM, o FEM de aresta e o software CST	122

Lista de Símbolos

α_c	Fator de escalonamento para a distância nodal média
$\bar{g}_x(u)$	Derivada suavizada de u em relação a x
$\bar{g}_y(u)$	Derivada suavizada de u em relação a y
$\bar{W}(x)$	Função de suavização constante
Φ	Matriz contendo as funções de forma em um domínio de suporte
Φ_i	Função de forma com RBF vetorial do i -ésimo nó
Δ	Operador diferencial Laplaciano
ϵ	Permissividade elétrica
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
ϵ_r	Permissividade elétrica relativa
Γ	Fronteira do domínio
Γ_g	Fronteira do domínio com condições de contorno de Dirichlet
Γ_h	Fronteira do domínio com condições de contorno de Neumann
Γ_I	Interface entre materiais do domínio
Γ_n	Fronteira com condição de contorno de terceiro tipo
Γ_x^s	Fronteira do domínio de suavização
$\hat{\nabla}$	Operador diferencial nabla suavizado
$\hat{\partial}$	Operador diferencial suavizado

$\hat{t}_i$	Vetor unitário na direção da i -ésima aresta do domínio de suporte das funções de forma do EMM
$\hat{t}_{pj}$	Vetor unitário predefinido das funções de forma do EMM
$\hat{W}$	Função de suavização
$\mathbb{G}$	Espaço G
$\mathbb{G}_h^1$	Espaço G das funções de quadrado integrável
$\mathbb{G}_h^m$	Espaço G das funções com derivadas até a ordem $m - 1$ de quadrado integrável
$\mathbb{H}$	Espaço de Hilbert
$\mathbb{H}_h^1$	Espaço H das funções com derivadas de primeira ordem de quadrado integrável
$\mathbb{L}$	Espaço de Lebesgue
$\mathbb{L}^2$	Espaço L das funções de quadrado integrável
μ	Permeabilidade magnética
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
∇	Operador diferencial nabra
Ω	Domínio
ω	Frequência do campo
Ω_x^s	Domínio de suavização
$\vec{\phi}_i$	Função de forma vetorial da i -ésima aresta do EMM
$\vec{A}$	Potencial vetor magnético
$\vec{B}$	Densidade de fluxo magnético ou indução magnética
$\vec{D}$	Densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica
$\vec{E}$	Campo elétrico
$\vec{H}$	Campo magnético

$\vec{J}_l$	Densidade linear de corrente elétrica
$\vec{J}$	Densidade superficial de corrente elétrica
$\vec{n}$	Vetor normal unitário
$\vec{N}_k$	Função de forma do FEM para elemento de aresta triangular para a k -ésima aresta
$\vec{W}_t$	Função de teste vetorial do método dos resíduos ponderados
∂k	Operador diferencial na direção k
ϕ_i	Função de forma nodal relativa ao nó i
ρ	Densidade volumétrica de carga elétrica
ρ_s	Densidade superficial de carga
$\mathbf{A}$	Vetor contendo os vetores $\mathbf{A}_i$ das funções de forma com RBF vetorial
$\mathbf{a}$	Vetor de coeficientes a_i das funções de forma
$\mathbf{A}^\alpha$	Matriz de rigidez dos termos de penalidade do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas harmônicos
$\mathbf{A}_i$	Vetor contendo os coeficientes a se determinar das componentes do i -ésimo nó das funções de forma com RBF vetorial
$\mathbf{A}_z$	Vetor solução da componente z dos potenciais vetores magnéticos do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas eletromagnéticos
$\mathbf{b}$	Vetor de coeficientes b_j das funções de forma
$\mathbf{B}_Q$	Matriz de momentos das funções de forma do EMM
$\mathbf{B}_u$	Matriz com os termos de vetores nas direções das arestas das funções de forma do EMM
$\mathbf{C}_Q$	Matriz de momentos dos vetores predefinidos das funções de forma do EMM
$\mathbf{c}_s$	Vetor contendo as circulações dos campos vetoriais nas arestas
$\mathbf{C}_u$	Matriz com os termos de vetores predefinidos das funções de forma do EMM
$\mathbf{F}$	Vetor de força do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas estáticos

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$	Matriz contendo as RBF's vetoriais das funções de forma com RBF vetorial
$\mathbf{F}_i(\mathbf{x})$	RBF vetorial i -ésimo nó
$\mathbf{F}_Q$	Matriz de momentos das funções de forma com RBF vetorial
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas estáticos
$\mathbf{p}(\mathbf{x})$	Vetor de termos polinomiais das funções de forma
$\mathbf{P}_m$	Matriz de momentos de polinômios do RPIMp
$\mathbf{P}_Q$	Matriz de momentos do PIM
$\mathbf{R}(\mathbf{x})$	Vetor contendo as RBF's dos nós no domínio de suporte
$\mathbf{R}_Q$	Matriz de momentos do RPIM
$\mathbf{S}_a$	Matriz associada aos coeficientes a_i das funções de forma
$\mathbf{S}_b$	Matriz associada aos coeficientes b_j das funções de forma
$\mathbf{U}_S$	Vetor contendo os parâmetros nodais
$\mathbf{V}$	Vetor solução dos potenciais elétricos do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas eletrostáticos
W^2	Forma fraca enfraquecida
$a_i(\mathbf{x})$	i -ésimo coeficiente das funções de forma
A_x^s	Área do domínio de suavização
b_j	j -ésimo coeficiente dos termos polinomiais do RPIMp
C^k	Espaço das funções cujas derivadas até a ordem k são contínuas
c_i	Circulação do campo vetorial na i -ésima aresta
D^α	Operador de diferenciação de ordem α
d_c	Distância nodal média
e_k	Aresta k

f_i	Função de base radial escalar do i -ésimo nó das funções de forma com RBF vetorial
g	Valor da condição de contorno de Dirichlet
h	Superescrito: indica uma função aproximada por um método numérico
h	Valor da condição de contorno de Neumann
k_0	Número de onda para onda no vácuo
N_i	Função de forma do FEM para elemento noal triangular para o i -ésimo nó
n_x	Componente x do vetor normal unitário exterior
n_y	Componente y do vetor normal unitário exterior
$p_i(\mathbf{x})$	i -ésimo termo polinomial das funções de forma
R	Coeficiente de reflexão
$R_i(\mathbf{x})$	RBF centrada no nó i e avaliada no ponto $\mathbf{x}$
T	Coeficiente de transmissão
T	Superescrito: indica uma transposição de um vetor ou matriz
u_i	Parâmetro nodal relativo ao nó i
V	Potencial escalar elétrico
W_i	Função associada à i -ésima aresta das funções de forma do EMM
W_t	Função de teste escalar do método dos resíduos ponderados
A	Matriz de rigidez do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas harmônicos
B	Matriz de massa do sistema de equações dos métodos de suavização para problemas harmônicos

Capítulo 1

Introdução

Problemas em engenharia são frequentemente descritos por problemas de valor de contorno. Um problema de valor de contorno é composto por uma ou mais equações diferenciais parciais e por um conjunto de restrições adicionais, denominadas condições de contorno. A solução de um problema de valor de contorno é obtida fazendo com que as equações diferenciais parciais, assim como as condições de contorno, sejam satisfeitas simultaneamente em todo o domínio do problema.

Problemas reais de valor de contorno, em sua grande maioria, não possuem solução analítica, recorrendo-se, assim, a métodos numéricos. Dentre as diversas técnicas numéricas existentes, o método dos elementos finitos (FEM) [Hughes 2000, Jin 2002] e o método das diferenças finitas (FDM) [Taflove 2000] são considerados tradicionais, com muitos trabalhos já desenvolvidos e em estágio de maturidade avançado. Ambos métodos utilizam uma malha para representar o domínio. No FDM clássico, a malha é estruturada (também chamada de *grid*) e de fácil geração (veja Figura 1.1a). Entretanto, um *grid* não se adapta bem a determinados tipos de geometria como as geometrias curvas, gerando erros de aproximação na solução numérica.

No FEM, a malha é geralmente não estruturada e composta de elementos, os quais usualmente são triângulos ou quadriláteros em duas dimensões, e tetraedros ou hexaedros em três dimensões, que se adaptam melhor à geometria do problema, inclusive às geometrias complexas. A Figura 1.1b ilustra um caso em que os elementos são triangulares. Entretanto, a acurácia da solução gerada pelo FEM depende da qualidade da malha, que está ligada ao formato de seus elementos [Shewchuk 2002]. A geração de malhas de boa qualidade é uma questão já resolvida em duas dimensões, e diversos geradores automáticos de malha estão disponíveis. Contudo, em três dimensões, esta ainda é uma questão em aberto, necessitando da intervenção humana na maior parte dos casos.

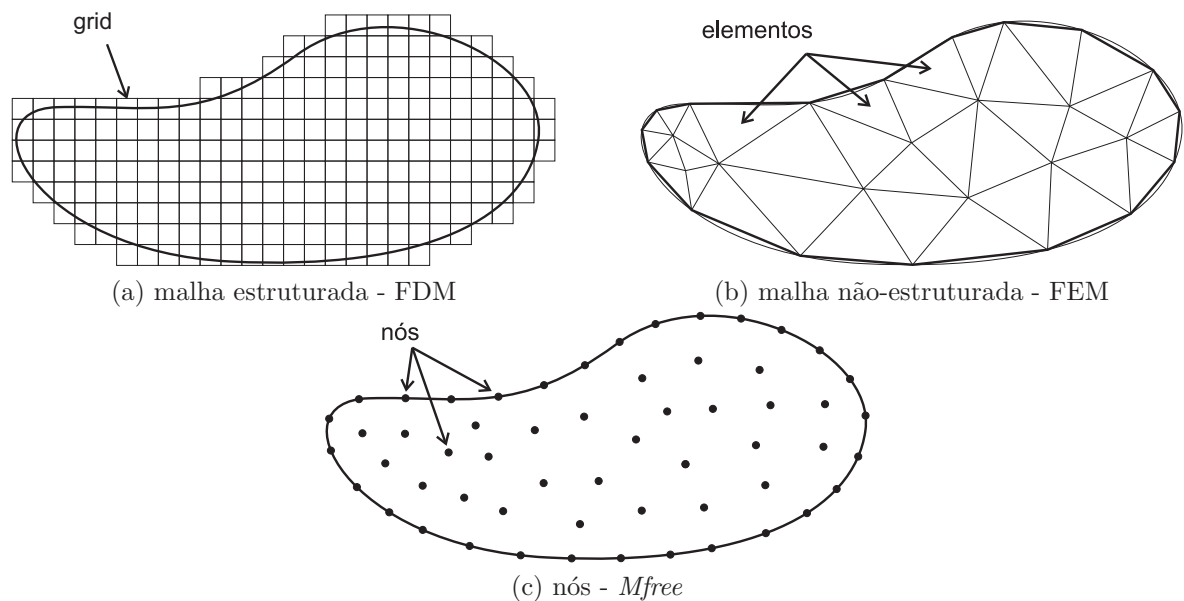


Figura 1.1: Representação do domínio em diferentes métodos numéricos. (a) Malha estruturada (*grid*) usada no FDM. (b) Malha não-estruturada usada no FEM. (c) Nos métodos sem malha, nós são distribuídos sobre o domínio e sua fronteira. Figura retirada de [Fonseca 2011].

Métodos sem malha são métodos numéricos utilizados, também, para solucionar problemas de valor de contorno. Foram desenvolvidos com o objetivo de eliminar a necessidade da geração de malhas, trabalhando apenas com um conjunto de nós distribuídos pelo domínio do problema sem uma conectividade pré-definida entre eles [Liu 2009] (Figura 1.1c), apresentando-se como uma alternativa aos métodos tradicionais das diferenças finitas e dos elementos finitos.

Dentre os métodos sem malha desenvolvidos até o momento, destacam-se o Element-free Galerkin (EFG) [Belytschko, Lu e Gu 1994], o Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) [Atluri e Zhu 1998, Atluri e Shen 2002] e os Métodos de Interpolação de Pontos (PIM) [Liu 2009]. Os métodos supracitados trabalham com as formulações dos problemas em suas *formas fracas*. A forma fraca de um problema de valor de contorno corresponde a um conjunto de equações integrais equivalente obtido a partir da formulação original do problema de valor de contorno, chamada forma forte, onde estão presentes as equações diferenciais parciais governantes. O termo *forma fraca* refere-se aos requisitos de diferenciabilidade mais fracos impostos sobre as funções de aproximação em relação aos impostos quando utiliza-se a forma forte do problema.

Historicamente, o Element-free Galerkin foi o primeiro método sem malha a surgir dentre os citados. O EFG utiliza uma *formulação fraca global*, implicando que a forma fraca deve ser satisfeita globalmente, ou seja, em todo o domínio do problema. No EFG, a integração da forma

fraca é feita por meio de uma malha de fundo, também chamada malha de integração, sendo esta independente dos procedimentos de construção das funções de aproximação. Funções de aproximação ou *funções de forma* são utilizadas para produzir a aproximação da solução do problema pelo método numérico. Em particular, o EFG constrói suas funções de forma utilizando o método dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS) [Lancaster e Salkauskas 1981, Nealen 2004]. O MLS é um procedimento bastante utilizado por métodos sem malha e caracteriza-se por gerar aproximações contínuas no domínio e com a ordem de consistência que se desejar [Liu 2009]. Todavia, tais aproximações não satisfazem a propriedade do delta de Kronecker, isto é, não são interpolantes. Como consequência, as condições de contorno essenciais presentes no problema de valor de contorno devem ser impostas utilizando métodos explícitos, por exemplo, o método dos multiplicadores de Lagrange [Parreira et al. 2006, Liu 2009] e o método das penalidades [Ikuno, Takakura e Kamitani 2007, Liu 2009]. Tais procedimentos trazem as desvantagens de aumentar a ordem do sistema matricial a ser solucionado e impor de forma aproximada as condições de contorno, respectivamente, além de perturbar o número de condição da matriz do sistema linear de equações.

Posteriormente, surgiu o Meshless Local Petrov-Galerkin. Ao contrário do Element-free Galerkin, o MLPG utiliza uma *formulação fraca local*, requerendo que a forma fraca seja satisfeita localmente em subregiões do domínio, e a união de todas as subregiões deve cobrir inteiramente o domínio do problema. Com isso, a integração da forma fraca é realizada em subdomínios locais independentes entre si, dispensando a malha de integração presente no EFG, sendo por isso considerado um método verdadeiramente sem malha. Assim como o EFG, o MLPG utiliza o método dos Mínimos Quadrados Móveis para construir suas funções de forma, herdando todos os problemas associados à característica não interpolante das aproximações produzidas.

O método de Interpolação de Pontos foi desenvolvido por Liu e Gu em 1999 [Liu e Gu 1999] com o objetivo de substituir as aproximações por MLS na construção das funções de forma. Ao contrário do MLS, as funções geradas pelo PIM são interpolantes, isto é, satisfazem a propriedade do delta de Kronecker, permitindo que as condições de contorno essenciais sejam fácil e naturalmente impostas, assim como ocorre no método dos elementos finitos. Deste modo, os problemas associados à característica não interpolante das funções produzidas pelo MLS são eliminados. Outra vantagem do método de Interpolação de Pontos é a capacidade de gerar aproximações de funções com excelente precisão [Liu 2009].

O primeiro método de Interpolação de Pontos que surgiu na literatura [Liu e Gu 1999] utilizava uma formulação fraca global assim como o EFG. As funções de forma geradas pelo PIM não são compatíveis, isto é, podem ser descontínuas em porções do domínio do problema. Isso atribui ao método a característica de não conformidade, sendo chamado assim de mé-

todo de Interpolação de Pontos Não Conforme (NPIM). Entretanto, [Liu 2002] mostra que o NPIM converge para a solução exata mesmo com a presença de problemas de compatibilidade. As taxas de convergência são ligeiramente inferiores às obtidas pelo FEM, como pode ser visto em [Lima et al. 2012] para problemas eletromagnéticos, o que é justificado pelas não conformidades.

Uma segunda vertente dos métodos PIM surgiu da necessidade de eliminar ou mitigar os efeitos de não conformidades presentes no NPIM, resultando no método de Interpolação de Pontos Local (LPIM). O LPIM utiliza uma formulação fraca local assim como o MLPG, fazendo com que os problemas de incompatibilidade das funções de forma PIM sejam amenizados [Liu 2002]. De acordo com estudos, o LPIM possui taxas de convergência maiores que o FEM, EFG e MLPG [Liu 2002], inclusive em problemas eletromagnéticos envolvendo múltiplos materiais [Lima, Fonseca e Mesquita 2012]. O LPIM, apesar de amenizar os problemas de incompatibilidade das funções de forma PIM, não os elimina de forma completa.

A terceira e mais recente vertente dos métodos PIM é resultado dos esforços para eliminar de fato o problema da incompatibilidade das funções de forma. Estes métodos utilizam formulações baseadas em *formas fracas enfraquecidas* (W^2) e na teoria do espaço $\mathbb{G}$ [Liu 2010, Liu 2010], juntamente com a operação de suavização de gradientes [Liu 2008]. Formas fracas enfraquecidas são formulações integrais para problemas de valor de contorno em que os requisitos impostos sobre as funções de forma são mais fracos que os impostos pelas formas fracas, daí o termo *enfraquecidas*. A utilização do PIM com formulações W^2 junto à teoria dos espaços $\mathbb{G}$, além de solucionar de forma eficiente os problemas de incompatibilidade, mostra que os métodos podem alcançar altas taxas de convergência (superconvergência) e soluções mais precisas que o método dos elementos finitos [Liu 2009, Lima e Mesquita 2012, Lima e Mesquita 2013].

Os métodos de Interpolação de Pontos baseados em formas fracas enfraquecidas utilizam formulações globais. Portanto, assim como o EFG e o NPIM, necessitam de uma malha de fundo para integração da forma W^2 . Uma vez que a malha está presente, esta pode ser usada, também, para selecionar os nós de suporte no processo de construção das funções de forma PIM. No caso de malhas triangulares, os esquemas T têm se mostrado um modo bem eficiente, confiável e robusto para a seleção de nós de suporte para a família dos métodos PIM [Liu 2009].

Os métodos PIM com formas W^2 e esquemas T utilizam uma malha tanto para efetuar a integração quanto para construir suas funções de forma, através da seleção dos nós de suporte. Filosoficamente, poderia-se questionar se tais classes de métodos realmente podem ser considerados métodos sem malha. Além disso, diante da existência de métodos consagrados na literatura que utilizam malha, como o FEM, qual seria a vantagem da utilização dos primeiros?

Primeiramente, na visão do autor, essa classe de métodos PIM, a rigor, não está situada na família de métodos sem malha, mas na família do que pode-se denominar *métodos de suavização de gradientes* (SPIM), na qual uma operação de suavização sobre os gradientes contidos na formulação é efetuada, operação possível graças à teoria dos espaços $\mathbb{G}$. Mas por outro lado, devido à história do PIM junto aos métodos sem malha, é natural que se considere sim os métodos SPIM como variações de métodos sem malha. Em segundo lugar, foi evidenciada uma vantagem muito importante do SPIM em relação ao FEM. Apesar de ambos utilizarem uma malha, a aproximação gerada pelo SPIM é mais insensível à qualidade da malha do que a solução gerada pelo FEM. Como já discutido, isso passa a ser um ponto crucial quando problemas tridimensionais com geometrias complexas são alvo de estudo, onde a geração de malhas de qualidade é uma questão chave.

Os métodos SPIM, assim como os outros métodos sem malha tradicionais, trabalham com funções de forma nodais, isto é, constroem suas aproximações baseadas em nós e, por isso, utilizam essencialmente formulações escalares. Para resolver problemas vetoriais, o que se faz é atribuir para cada componente vetorial um grau de liberdade, ou seja, cada componente é tratada como um escalar, tornando a solução numérica computacionalmente mais cara pois resulta em um sistema matricial a ser resolvido de ordem maior. Além disso, tais métodos não geram aproximações que garantem a condição do divergente nulo e, por isso, produzem soluções fisicamente irrealizáveis, chamadas soluções espúrias.

Trabalhos na linha de métodos sem malha nodais que geram aproximações com divergente nulo têm sido desenvolvidos recentemente. Um deles propõe-se a trabalhar com uma formulação mista através da adição de restrições com multiplicadores de Lagrange para forçar a condição do divergente nulo [Nicomedes 2015]. Na referida obra, o autor desenvolve uma adaptação de métodos destinados a problemas de mecânica dos fluidos, representados pela equação de Navier-Stokes, aos problemas de espalhamento eletromagnéticos. Como as funções são construídas a partir de nós, continua-se associando um grau de liberdade a cada componente do campo vetorial. Além disso, há um aumento na ordem do sistema matricial discretizado devido a presença da restrição com os multiplicadores de Lagrange.

Uma outra abordagem é apresentada em [Yang et al. 2014, Yang 2015]. Ao invés de utilizar formulações mistas, foi proposto um procedimento de construção de funções de forma utilizando funções de base radial (RBF) vetoriais. Tais funções são criadas a partir de nós, mas construídas de maneira a aproximar campos vetoriais atendendo a propriedade do divergente nulo. Desta maneira, não há modificação na formulação do problema, mas sim no processo de construção das funções de aproximação. O método utiliza funções de base vetoriais construídas a partir de funções de base radial escalares. As RBFs vetoriais foram originalmente propostas em [Lowitzsch 2002], mas aplicadas a problemas do eletromagnetismo pela primeira vez em

[Yang et al. 2014], especificamente em problemas no domínio do tempo. No referido trabalho, o método sem malha é um método de forma forte de colocação, onde o campo é satisfeito em cada nó distribuído no domínio do problema.

Situação semelhante é observada no método dos elementos finitos nodais em relação à presença de modos espúrios na solução numérica, e uma solução surgiu com o desenvolvimento dos elementos de aresta [Jin 2002]. Estes elementos constróem as funções de forma baseadas em arestas ao invés de nós e oferecem a vantagem de (i) produzir soluções com divergente nulo e, portanto, sem modos espúrios, (ii) não onerar computacionalmente o método numérico pois associam apenas um grau de liberdade a cada aresta da malha, ao contrário do método nodal que associa um grau de liberdade por dimensão do problema para cada nó da malha, e (iii) garantir a continuidade tangencial do campo ao longo das arestas e, conseqüentemente, entre elementos, fazendo com que as condições de continuidade na interface entre diferentes meios sejam satisfeitas de maneira simplificada.

O objetivo deste trabalho é, em suma, contribuir com o desenvolvimento dos métodos sem malha e sua aplicação em problemas eletromagnéticos, superando as deficiências que, por ventura, os impedem de ser aplicados a problemas, principalmente, de natureza vetorial.

Posto isso, pode-se dividir o trabalho em três grandes frentes. A primeira é aplicar o Método de Interpolação de Pontos utilizando formas fracas enfraquecidas em problemas eletromagnéticos. Tal método foi originalmente aplicado em problemas mecânicos, sendo assim, importante testá-lo no eletromagnetismo para validar sua generalidade e constituir-se como alternativa numérica viável. Além disso, pretende-se desenvolver formulações para solucionar problemas vetoriais, através da proposição da operação de suavização do rotacional e utilização de uma formulação restrita com adição de um termo de penalidade a fim de garantir a condição do divergente nulo da aproximação numérica.

Outro foco desta tese é criar uma extensão do método das RBF's vetoriais presente na literatura através da utilização de formas fracas ao invés de formas fortes, a fim de compor um novo método que consiga produzir soluções em que os campos vetoriais apresentem divergente nulo e não possuam modos espúrios.

Ainda na linha dos problemas eletromagnéticos vetoriais, pretende-se desenvolver funções de forma de base vetorial construídas a partir de um conjunto de arestas para resolver os problemas vetoriais. Ao invés de utilizar nós, como é feito tradicionalmente, é proposto um método que utiliza um conjunto de arestas distribuídas no domínio para criar as funções de aproximação com a devida escolha de funções de base, visando garantir a propriedade do divergente nulo. As funções de forma são obtidas forçando que a circulação seja satisfeita em cada aresta de suporte e, assim, a imposição das condições de contorno de Dirichlet é feita de maneira simplificada.

Este texto está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta os conceitos relativos aos métodos sem malha, incluindo construção de funções de forma PIM, formas fracas enfraquecidas e seleção de nós de suporte por esquemas T. O Capítulo 3 apresenta o estudo dos métodos de Interpolação de Pontos Suavizados e suas aplicações em problemas eletromagnéticos. O Capítulo 4 apresenta o método sem malha com RBFs vetoriais, juntamente com a formulação dos problemas eletromagnéticos vetoriais e aplicações. O Capítulo 5 apresenta o desenvolvimento do processo de construção das funções de forma de aresta e suas aplicações. Por fim, o Capítulo 6 traz as conclusões.

Capítulo 2

Revisão de Conceitos Básicos

Como já discutido previamente, métodos sem malha são métodos numéricos desenvolvidos para solucionar problemas de valor de contorno. Eles foram criados com o objetivo de eliminar a necessidade de geração de uma malha, por isso trabalham apenas com nós sem uma conectividade pré-estabelecida entre eles [Liu 2009].

O processo de solução de um problema de valor de contorno através de métodos sem malha consiste, basicamente, em distribuir nós sobre o domínio do problema e suas fronteiras (veja Figura 1.1c) e construir funções de forma para cada um dos nós (nesse passo um sistema de equações é montado e depois resolvido). Ao final, tem-se uma solução aproximada do problema em todo o domínio.

Existem duas grandes categorias de métodos sem malha: uma baseada em forma forte e outra em forma fraca. Métodos sem malha de forma forte discretizam e resolvem o problema diretamente como, por exemplo, o Finite Point Method [Onate et al. 1996]. Métodos sem malha de forma fraca estabelecem primeiro um sistema de equações alternativo, composto de uma forma fraca que governa o mesmo fenômeno físico, e depois o soluciona. Exemplos de métodos sem malha de forma fraca são o Element-free Galerkin, o Meshless Local Petrov-Galerkin e os Métodos de Interpolação de Pontos. Em contraste com os métodos de forma forte, os de forma fraca são geralmente mais robustos, sofrem menos com problemas de instabilidade, e fornecem soluções com maior acurácia [Liu 2002].

A forma fraca é derivada da forma forte, geralmente, de duas maneiras: através de *princípios de energia* (abordagem física) ou pelo método dos *resíduos ponderados* (abordagem matemática), sendo o último mais geral. A forma fraca exige condições de diferenciabilidade *mais fracas* que a forma forte. Isso é conseguido, matematicamente, introduzindo uma *função de teste*, na *forma integral* de uma formulação residual, para “absorver” uma derivada da

forma forte, convertendo esta em uma forma fraca. Portanto, as equações da forma fraca são expressas de modo *integral*, enquanto as da forma forte de modo *diferencial*.

Este trabalho é direcionado a métodos baseados em formas fracas enfraquecidas ou formas W^2 [Liu 2010, Liu 2010]. Formas W^2 são derivadas de formas fracas através da técnica de suavização de gradientes [Liu 2008], diminuindo os requisitos impostos sobre as funções de forma utilizadas, isto é, tornando-os mais fracos em relação à forma fraca. A utilização de funções de forma geradas pelo PIM junto com formas fracas enfraquecidas elimina os problemas de incompatibilidade e não conformidade. As formas W^2 são fundamentadas pela teoria dos espaços $\mathbb{G}$ [Liu 2010, Liu 2010].

2.1 Aproximação de Funções

Suponha que se queira determinar a aproximação u^h de uma determinada função em um ponto arbitrário $\mathbf{x} = (x, y, z)$, pertencente ao domínio Ω do problema, e que se conheça os valores da função em alguns pontos do domínio, chamados *nós* (ver Figura 2.1). Nos métodos sem malha, a aproximação (ou interpolação) $u^h(\mathbf{x})$ é dada por

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in S_n} \phi_i(\mathbf{x}) u_i = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_S \quad (2.1)$$

onde S_n é o conjunto de nós pertencentes a um domínio local compacto referente ao ponto $\mathbf{x}$ (o domínio local é chamado de *domínio de suporte* e os nós de *nós de suporte*), u_i é o *parâmetro nodal* do i -ésimo nó do domínio de suporte, $\mathbf{U}_S$ é o vetor que contém todos os parâmetros nodais dos nós de suporte, $\phi_i(\mathbf{x})$ é a função de forma do i -ésimo nó criada usando todos os nós de suporte e é chamada de *função de forma nodal*, e $\Phi(\mathbf{x})$ é o vetor contendo as funções de forma correspondentes aos n nós do domínio de suporte:

$$\Phi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] \quad (2.2)$$

O domínio de suporte de um ponto $\mathbf{x}$ determina o número de nós usados para aproximar o valor da função em $\mathbf{x}$. Existem diversos procedimentos de determinação do domínio de suporte de um ponto, sendo geralmente baseados na densidade local de nós. Em [Lima 2011] são apresentados os procedimentos mais utilizados por métodos sem malha para se determinar domínios de suporte. Neste trabalho, domínios de suporte são obtidos por meio de uma estratégia diferente conhecida como esquemas T [Liu 2009], apresentada na Seção 2.3.

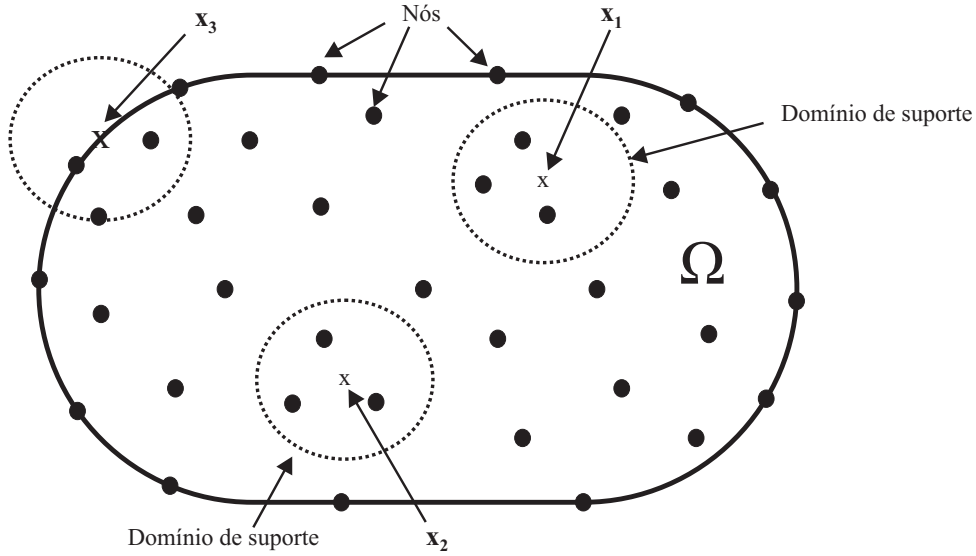


Figura 2.1: Distribuição de nós no domínio e domínio de suporte. São mostrados os domínios de suporte dos pontos x_1 , x_2 e x_3 .

2.2 Funções de Forma - O Método de Interpolação de Pontos

Como visto na Equação 2.1, *funções de forma* são funções especiais utilizadas para aproximar uma determinada função através de uma combinação linear. As propriedades da aproximação dos métodos sem malha estão diretamente relacionadas à maneira como as funções de forma são construídas, sendo este um dos pontos mais centrais e importantes da área.

Neste trabalho, utiliza-se o Método de Interpolação de Pontos para construir funções de forma. As funções de aproximação resultantes do PIM satisfazem a propriedade do delta de Kronecker. Com isso, as condições de contorno de Dirichlet são impostas de forma direta e exata, assim como ocorre no método dos elementos finitos. O PIM apresenta três variações. A primeira utiliza exclusivamente termos polinomiais como funções de base para construir as funções de forma. A segunda utiliza apenas funções de base radial (RBF). A terceira utiliza tanto termos polinomiais quanto RBFs.

2.2.1 Método de Interpolação de Pontos polinomial

O Método de Interpolação de Pontos foi originalmente desenvolvido em [Liu e Gu 1999] e, como o nome sugere, obtém uma aproximação fazendo com que a função de interpolação passe pelos valores da função a ser aproximada em cada nó localizado no domínio de suporte. Inicialmente, funções polinomiais foram utilizadas como função de base, sendo por isso deno-

minado método de Interpolação de Pontos polinomial (PIMp). Considere uma função $u(\mathbf{x})$ definida no domínio Ω . A aproximação $u^h(\mathbf{x})$ em um ponto $\mathbf{x}$ realizada pelo PIMp é dada por:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x})a_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} \quad (2.3)$$

onde a_i é o coeficiente associado ao i -ésimo termo polinomial p_i , n é o número de nós no domínio de suporte de $\mathbf{x}$, e

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \quad (2.4)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})]^T. \quad (2.5)$$

Em 1D, uma base polinomial completa de ordem m dada por

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(x) = [p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)]^T = [1, x, x^2, \dots, x^m]^T. \quad (2.6)$$

Em 2D e 3D, as bases polinomiais são construídas a partir do triângulo e da pirâmide de Pascal, respectivamente [Liu 2009]. Bases completas de ordem m para os dois espaços são mostradas abaixo:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(x, y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m]^T \quad (2.7)$$

e

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(x, y, z) = [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \dots, x^m, y^m, z^m]^T \quad (2.8)$$

Os coeficientes a_i da Equação 2.3 são calculados forçando que esta seja satisfeita nos n nós de suporte. Para cada nó i , tem-se que

$$u_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

onde u_i é o valor da função no nó i . A Equação 2.9 pode ser reescrita na forma matricial:

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{P}_Q \mathbf{a} \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{U}_S$ é um vetor contendo todos os valores u_i da função nos n nós de suporte,

$$\mathbf{U}_S = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \quad (2.11)$$

e a matriz $\mathbf{P}_Q$ é chamada *matriz de momentos*, dada por

$$\mathbf{P}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Assumindo que a inversa de $\mathbf{P}_Q$ exista, da Equação 2.10 vem

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{U}_S \quad (2.13)$$

Substituindo a Equação 2.13 na 2.3:

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_S = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{U}_S \quad (2.14)$$

Logo, as funções de forma são dadas por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_Q^{-1} = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] \quad (2.15)$$

As derivadas das funções de forma são facilmente obtidas da Equação 2.15, pois todas as funções envolvidas são polinômios. A derivada de Φ em relação à k -ésima dimensão é dada por

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial k} = \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x})}{\partial k} \mathbf{P}_Q^{-1}. \quad (2.16)$$

As funções de forma geradas pelo PIM possuem a propriedade do delta de Kronecker pela própria definição, que força a função aproximada a passar pelos valores funcionais nos nós do domínio de suporte. Por isso, elas são interpolantes e a imposição das condições de contorno essenciais é feita de forma direta nos métodos sem malha posicionando, convenientemente, os nós nas devidas fronteiras.

As funções de forma do PIMp não são compatíveis, isto é, sofrem saltos de um ponto para outro quando há mudanças no domínio de suporte, pois, ao contrário das funções de forma do MLS, nenhuma função de peso é utilizada para fazer com que os nós entrem e saiam do domínio de suporte de maneira suave entre pontos em uma vizinhança. Tal característica diminui a taxa de convergência dos métodos sem malha [Liu 2009, Lima et al. 2012] e é desejável que procedimentos para tratar as incompatibilidades ao longo do domínio sejam aplicados.

Além disso, as funções do PIMp são consistentes de acordo com a base polinomial usada: se um polinômio completo de ordem k é usado na base, então as funções de forma têm consistência C^k [Liu 2009]. Da Equação 2.3, observa-se que o número de monômios na base é igual ao número de nós contidos no domínio de suporte. Por isso os nós de suporte devem ser escolhidos de tal maneira que se garanta a consistência desejada.

Deve-se notar que é possível a matriz de momentos $\mathbf{P}_Q$ ser singular dependendo da configuração dos nós dentro do domínio de suporte, o que impede que as funções de forma sejam construídas pelo PIMp. Técnicas para evitar a singularidade da matriz de momentos foram desenvolvidas, e algumas delas são: aplicar uma pequena perturbação aleatória nos nós de suporte; utilizar o algoritmo de triangularização de matriz em $\mathbf{P}_Q$ [Liu e Gu 2003]; e utilizar funções de base radial como funções de base. Esta última estratégia leva ao surgimento de

mais duas novas vertentes de geração de funções de forma, variantes do PIM, apresentadas nas seções seguintes. Outra abordagem, desenvolvida recentemente, pode ser empregada para evitar matrizes de momentos singulares no PIMp [Liu 2009]. Para tal, introduzem-se os esquemas T para selecionar os nós de suporte de modo apropriado para construir funções do PIM em geral. Os esquemas T são apresentados na Seção 2.3.

A Figura 2.2 mostra a função de forma gerada pelo PIM e sua derivada em 1D. A função de forma em $x = 0$ foi obtida usando cinco nós igualmente distribuídos no domínio $[-1, 1]$. Note que a função satisfaz o delta de Kronecker, isto é, $\phi(0, 0) = 1$ e $\phi(-1, 0) = \phi(-0, 5) = \phi(0, 5) = \phi(1, 0) = 0$.

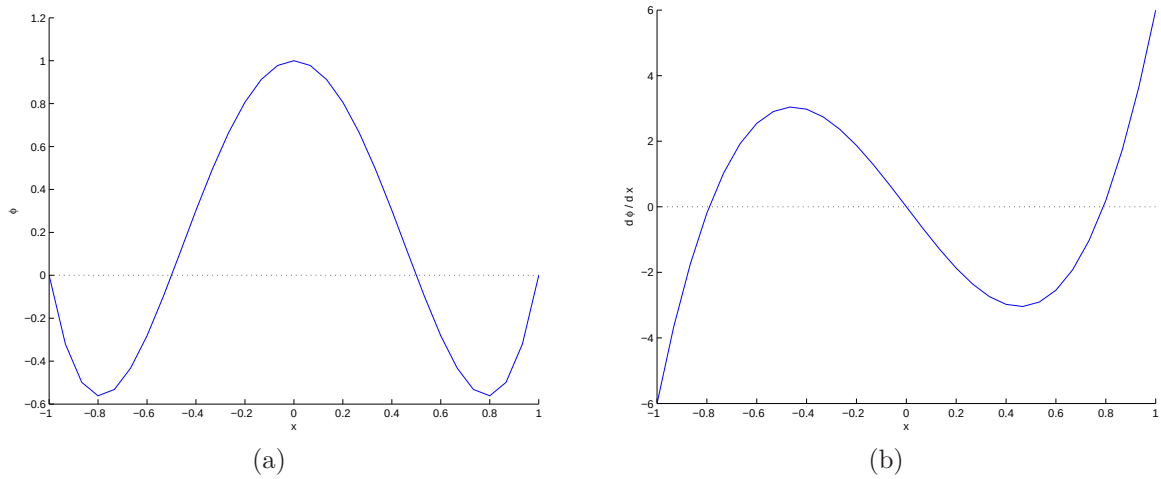


Figura 2.2: Funções de forma PIM em 1D para o nó $x = 0$ usando 5 nós igualmente distribuídos em $x \in [-1, 1]$. (a) Mostra $\phi(x)$ e (b) a derivada de $\phi(x)$ em relação a x . Note que as funções de forma construídas com o PIM satisfazem a propriedade do delta de Kronecker.

2.2.2 Método de Interpolação de Pontos Radial

Como visto na Seção 2.2.1, as funções de forma geradas através do PIM utilizando uma base polinomial possuem características interessantes como consistência e, principalmente, satisfação do delta de Kronecker, o que facilita o tratamento da imposição das condições de contorno de Dirichlet. A grande desvantagem do PIM polinomial é que problemas de singularidade da matriz de momentos podem ocorrer, comprometendo, nesse caso, o processo de construção das funções de forma. Para criar uma matriz de momentos não singular, introduz-se funções de base radial [Liu 2009] na formulação do PIM, mais especificamente, nas funções de base. O PIM utilizando RBFs é denominado Método de Interpolação de Pontos Radial (RPIM).

No RPIM, a aproximação $u^h(\mathbf{x})$ é feita escolhendo RBFs como funções de base:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} \quad (2.17)$$

onde $R_i(\mathbf{x})$ é uma RBF centrada no nó i calculada no ponto $\mathbf{x}$, e $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ é um vetor contendo todas as RBF's $R_i(\mathbf{x})$ relativas aos nós de suporte de $\mathbf{x}$, dado por

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), \dots, R_n(\mathbf{x})]^T \quad (2.18)$$

Os coeficientes a_i são calculados fazendo com que a Equação 2.17 seja satisfeita para todos os n nós do domínio de suporte. Para cada nó j , tem-se que

$$u_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_j)\mathbf{a}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

onde u_j é o valor da função no nó j . Reescrevendo a Equação 2.19 na forma matricial, vem

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{U}_S$ é um vetor como definido em 2.11, e $\mathbf{R}_Q$ é a *matriz de momentos* dada por:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(\mathbf{x}_1) & R_2(\mathbf{x}_1) & \dots & R_n(\mathbf{x}_1) \\ R_1(\mathbf{x}_2) & R_2(\mathbf{x}_2) & \dots & R_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(\mathbf{x}_n) & R_2(\mathbf{x}_n) & \dots & R_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Como $R_i(\mathbf{x}_j) = R_j(\mathbf{x}_i)$, a matriz de momentos $\mathbf{R}_Q$ é simétrica. Dessa maneira, $\mathbf{R}_Q$ é definida positiva e, portanto, tem inversa [Liu 2009]. Da Equação 2.20, vem

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_S \quad (2.22)$$

Substituindo a Equação 2.22 na 2.17, chega-se a

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_S = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}_Q^{-1}\mathbf{U}_S \quad (2.23)$$

Logo, as funções de forma são dadas por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}_Q^{-1} = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] \quad (2.24)$$

As derivadas das funções de forma são obtidas da Equação 2.24, em que é preciso tomar as derivadas apenas de $\mathbf{R}^T$, pois $\mathbf{R}_Q^{-1}$ é constante para um dado ponto $\mathbf{x}$. A derivada de Φ em relação à k -ésima dimensão é dada por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = \frac{\partial \mathbf{R}^T(\mathbf{x})}{\partial k} \mathbf{R}_Q^{-1} \quad (2.25)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{R}^T(\mathbf{x})}{\partial k} = [R_{1,k}(\mathbf{x}), R_{2,k}(\mathbf{x}), \dots, R_{n,k}(\mathbf{x})]^T \quad (2.26)$$

Da mesma forma que o PIMp, o RPIM gera funções que satisfazem o critério do delta de Kronecker. A única diferença entre eles é o uso de funções de base radial ao invés de polinomiais. Como $\mathbf{R}_Q$ é sempre inversível [Liu 2009], $\mathbf{R}_Q^{-1}$ existirá e essa é a maior vantagem de se usar RBFs ao invés de polinômios como funções de base. Entretanto, as funções de forma geradas pelo RPIM não são consistentes, isto é, não conseguem reproduzir de maneira exata polinômios de nenhum grau. A razão por trás disso encontra-se no fato de não haver polinômios nas funções de base do RPIM, apenas RBFs são usadas, e estas não conseguem reproduzir polinômios. Apesar disso, o RPIM consegue gerar aproximações para polinômios com a precisão desejada quando se refinam os nós [Liu 2009]. Note que como as funções de forma do RPIM não são consistentes, também não formam uma partição da unidade.

Uma forma de se alcançar consistência nas funções de forma do RPIM é adicionar, em sua base, termos polinomiais às RBFs. Com isso, cria-se uma variação do RPIM, que é apresentada na próxima seção.

A Figura 2.3 mostra a função de forma gerada pelo RPIM e sua derivada em 1D. A função de forma em $x = 0$ foi obtida usando cinco nós igualmente distribuídos no domínio $[-1, 1]$, e a *Spline* cúbica [Liu 2009] como RBF, com raio de suporte igual a 2. Assim como no PIMp, as funções possuem a propriedade do delta de Kronecker.

A Figura 2.4 mostra a função de forma e suas derivadas em 2D no nó $(0; 0)$. Foram usados 5×5 nós igualmente distribuídos no domínio $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

2.2.3 Método de Interpolação de Pontos Radial com polinômios

Na Seção 2.2.2 viu-se que o RPIM não é consistente e falha na construção de aproximações exatas de funções lineares (na verdade, de qualquer função polinomial). A solução para essa deficiência encontra-se na adição de termos polinomiais às funções de base do RPIM. Em geral, isso também aumenta a precisão dos resultados [Liu 2009]. Adicionar termos polinomiais às RBFs foi proposto em [Powell 1992] para aproximar funções. O uso de RBFs e polinômios de primeira ordem no RPIM foi sugerido por [Wang e Liu 2002] para que as funções de forma tivessem consistência C^1 . O RPIM incluindo termos polinomiais em suas funções de base é denominado Método de Interpolação de Pontos Radial com polinômios (RPIMp).

O RPIMp aproxima funções para um ponto de interesse $\mathbf{x}$ da seguinte forma:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} \quad (2.27)$$

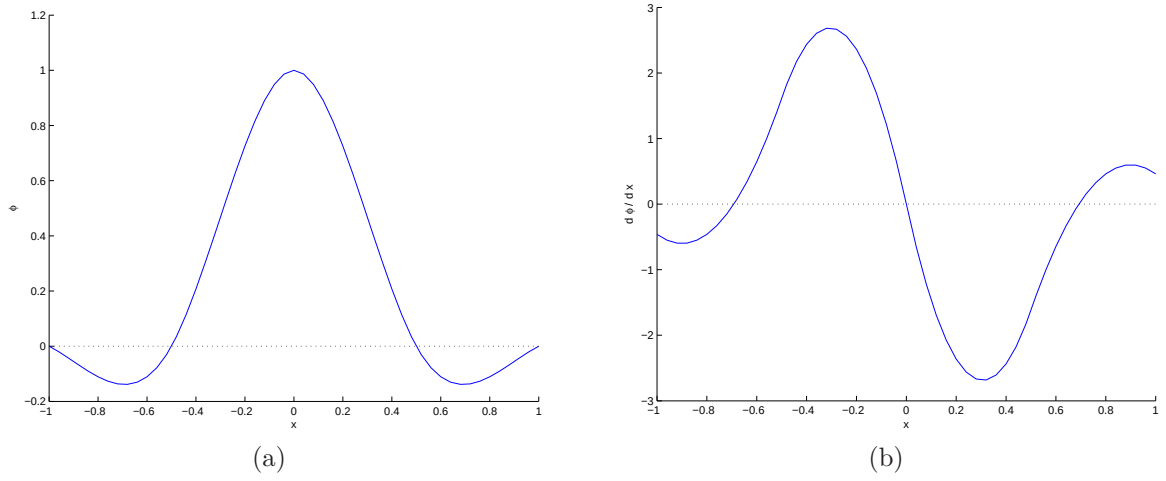


Figura 2.3: Funções de forma RPIM em 1D para o nó $x = 0$ usando 5 nós igualmente distribuídos em $x \in [-1, 1]$. *Spline* cúbica foi usada como RBF, com $r = 2$. (a) Mostra $\phi(x)$ e (b) a derivada de $\phi(x)$ em relação a x . Note que as funções de forma construídas com o RPIM satisfazem a propriedade do delta de Kronecker.

onde a_i são os coeficientes para as RBFs $R_i(\mathbf{x})$, b_i são os coeficientes para os termos polinomiais $p_j(\mathbf{x})$ (como definidos para o PIM em 2.4), n é o número de nós no domínio de suporte de $\mathbf{x}_Q$, m é o número de termos polinomiais adicionados na base, $\mathbf{R}^T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ têm a mesma definição que nas Equações 2.18 e 2.6, 2.7, 2.8, respectivamente, e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores definidos como

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \quad (2.28)$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \quad (2.29)$$

Os coeficientes a_i e b_j são calculados forçando que a Equação 2.27 seja satisfeita nos n nós do domínio de suporte. Para cada nó de suporte l , tem-se:

$$u_l = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x}_l) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_l) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_l) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_l) \mathbf{b}, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (2.30)$$

onde u_l é o valor da função no nó l . A Equação 2.30 escrita na forma matricial torna-se:

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{U}_S$ é definido como na Equação 2.11, $\mathbf{R}_Q$ é a matriz de momentos de RBFs definida na Equação 2.21, e $\mathbf{P}_m$ é a matriz de momentos de polinômios dada por:

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

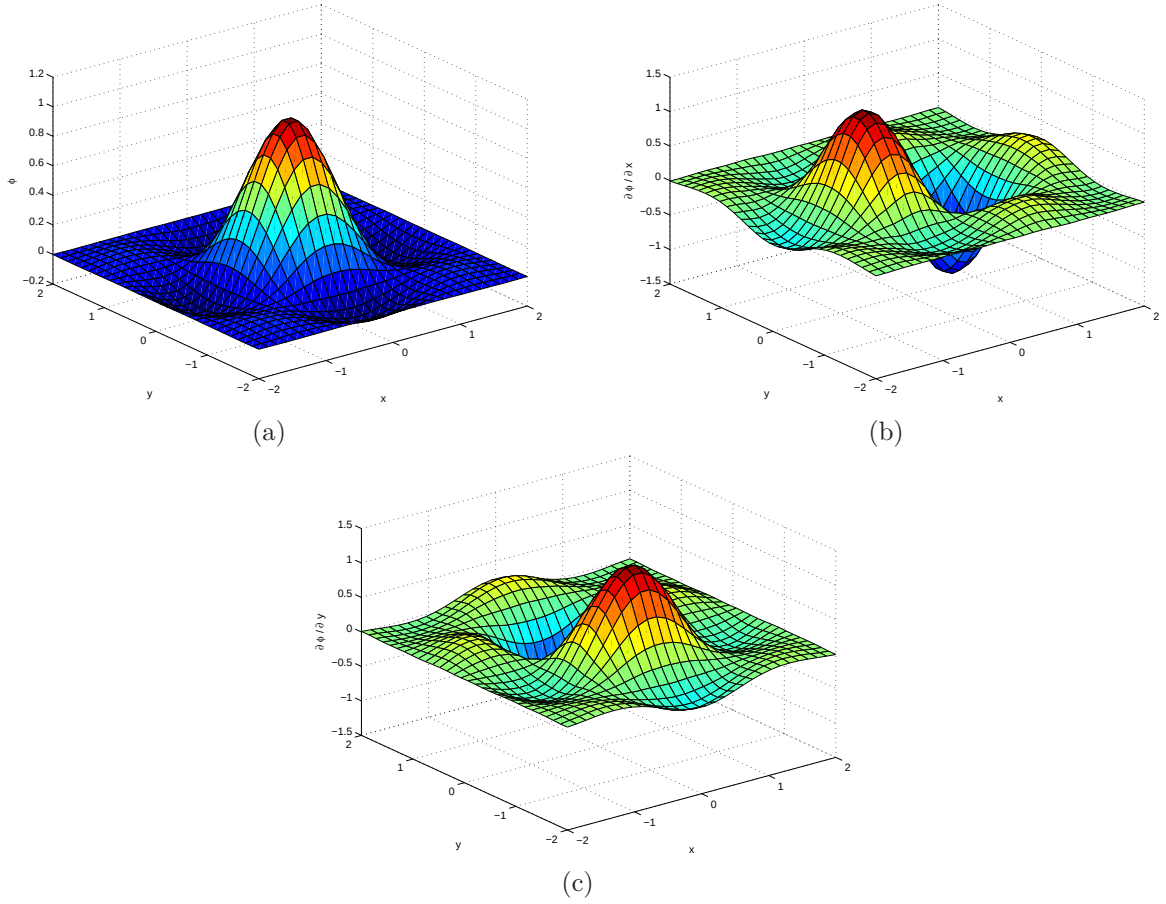


Figura 2.4: Funções de forma RPIM em 2D para o nó $\mathbf{x} = (0; 0)$ usando 5×5 nós igualmente distribuídos em $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$. *Spline* cúbica foi usada como RBF, com $r = 2$. (a) Mostra $\phi(x, y)$, (b) a derivada parcial de $\phi(x, y)$ em relação a x e (c) a derivada parcial de $\phi(x, y)$ em relação a y .

Os termos polinomiais devem satisfazer um critério extra para garantir uma aproximação única para a função, e as seguintes restrições são impostas [Liu 2009]:

$$\sum_{i=1}^n p_j(\mathbf{x}_i) a_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.33)$$

ou na forma matricial:

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

Combinando as Equações 2.31 e 2.34, chega-se ao sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

ou

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Como $\mathbf{R}_Q$ é simétrica, a matriz $\mathbf{G}$ também simétrica. Se $\mathbf{G}$ for inversível, então uma solução única para os vetores de coeficientes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é obtida como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Em vez de tentar resolver o sistema desta maneira, parte-se da Equação 2.31 para escrever $\mathbf{a}$ como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_S - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (2.38)$$

Substituindo a Equação 2.38 na 2.34, tem-se que

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{U}_S \quad (2.39)$$

onde

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \quad (2.40)$$

Substituindo a Equação 2.39 em 2.38, obtém-se

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{U}_S \quad (2.41)$$

onde

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{R}_Q^{-1} [1 - \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b] = \mathbf{R}_Q^{-1} - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b \quad (2.42)$$

Finalmente, a Equação 2.27 é escrita como

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_S = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b] \mathbf{U}_S \quad (2.43)$$

Logo, as funções de forma são dadas por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] \quad (2.44)$$

As derivadas das funções de forma são obtidas da Equação 2.44 derivando $\mathbf{R}^T$ e $\mathbf{p}^T$:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial k} = \frac{\partial \mathbf{R}^T(\mathbf{x})}{\partial k} \mathbf{S}_a + \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x})}{\partial k} \mathbf{S}_b \quad (2.45)$$

Para que a matriz $\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m$, definida na Equação 2.40, tenha inversa, é necessário que $n \gg m$, isto é, o número de nós no domínio de suporte deve ser muito maior que o número de termos polinomiais na base do RPIMP [Liu 2009]. Normalmente são usados polinômios de primeira ordem, o que corresponde a um valor pequeno para m .

Com o RPIMP consegue-se gerar funções de forma consistentes (de acordo com a ordem polinomial usada nas funções de base). Como geralmente usa-se polinômios de grau um, a

aproximação possui consistência C^1 . As outras propriedades do PIM são preservadas: satisfação do delta de Kronecker, partição da unidade (se termos polinomiais de ordem zero estiverem na base) e suporte compacto. As funções do RPIMp também são incompatíveis devido aos saltos da aproximação que ocorrem quando o domínio de suporte sofre mudanças em regiões vizinhas.

A Figura 2.5 mostra a função de forma gerada pelo RPIMp e sua derivada em 1D. A função de forma em $x = 0$ foi obtida usando cinco nós igualmente distribuídos no domínio $[-1, 1]$, a *Spline* cúbica [Liu 2009] como RBF, com raio de suporte igual a 2, e polinômios de primeira ordem. Assim como no PIMp e no RPIM, as funções possuem a propriedade do delta de Kronecker.

A Figura 2.6 mostra a função de forma e suas derivadas em 2D no nó $(0; 0)$. Foram usados 5×5 nós igualmente distribuídos no domínio $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

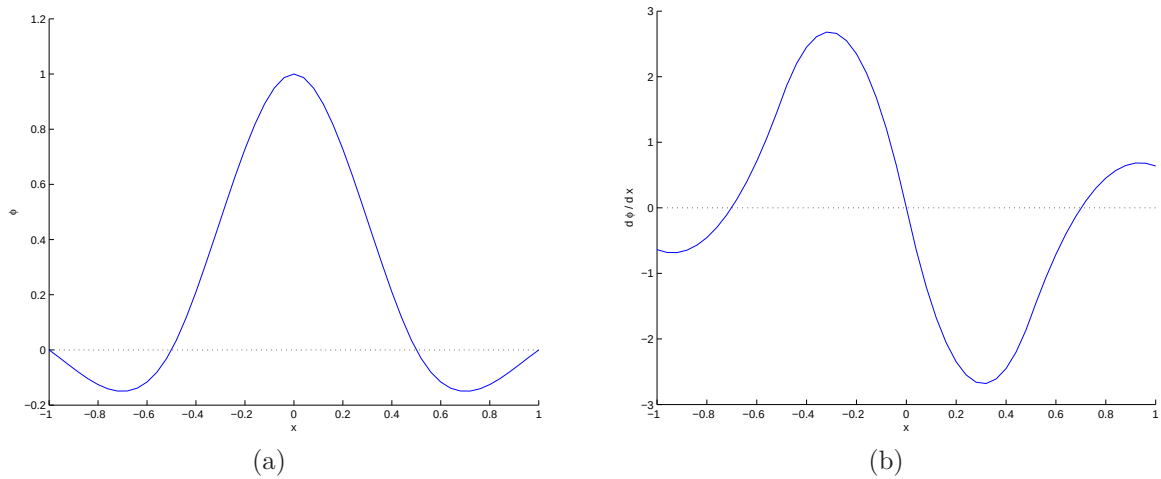


Figura 2.5: Funções de forma RPIMp em 1D para o nó $x = 0$ usando 5 nós igualmente distribuídos em $x \in [-1, 1]$ e polinômios de primeira ordem na base. *Spline* cúbica foi usada como RBF, com $r = 2$. (a) Mostra $\phi(x)$ e (b) a derivada de $\phi(x)$ em relação a x . Note que as funções de forma construídas com o RPIMp satisfazem a propriedade do delta de Kronecker.

2.3 Esquemas T

Assim como a forma fraca, a forma fraca enfraquecida é uma forma integral. Para efetuar sua integração, utiliza-se uma malha de fundo. Uma vez que tal malha encontra-se disponível, podemos usá-la também na seleção dos nós de suporte para construir as funções de forma. Caso a malha seja composta de células triangulares, em duas dimensões, ou de células tetraédricas, em três dimensões, pode-se lançar mão dos esquemas T propostos em [Liu et al. 2009], que

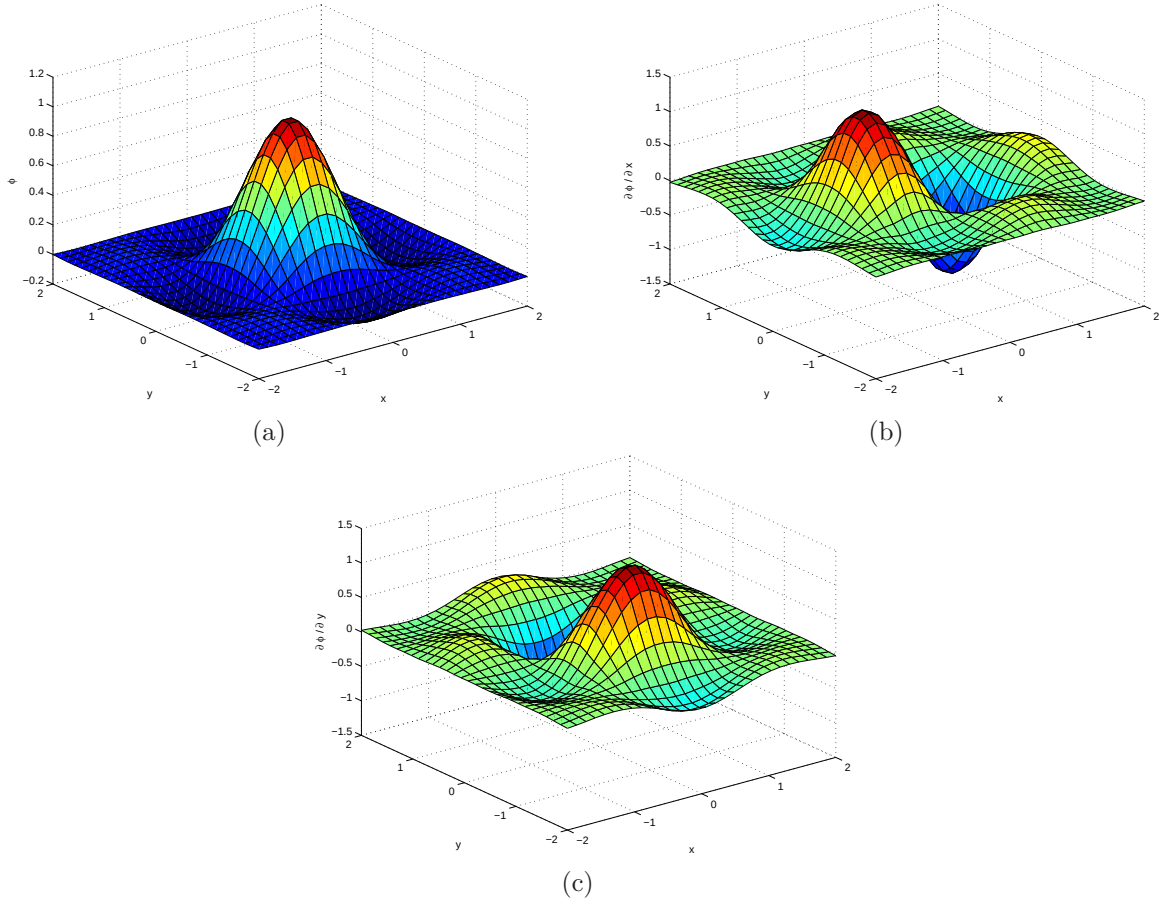


Figura 2.6: Funções de forma RPIMp em 2D para o nó $\mathbf{x} = (0; 0)$ usando 5×5 nós igualmente distribuídos em $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ e polinômios de primeira ordem na base. *Spline* cúbica foi usada como RBF, com $r = 2$. (a) Mostra $\phi(x, y)$, (b) a derivada parcial de $\phi(x, y)$ em relação a x e (c) a derivada parcial de $\phi(x, y)$ em relação a y .

selecionam um conjunto de nós de acordo com as células de integração disponíveis. Os esquemas T funcionam particularmente bem para a família dos métodos de interpolação de pontos. Ressalta-se que o tipo de função de forma a ser utilizada com cada um dos esquemas T é particular, mas serão aqui indicados os tipos sugeridos em [Liu 2009].

No esquema T3 os nós de suporte correspondem aos vértices da célula, sendo indicado para construir funções PIM lineares em duas dimensões (Fig. 2.7). As funções PIMp geradas utilizando o esquema T3 são idênticas às geradas pelo método dos elementos finitos. Como o número de nós de suporte é pequeno o tempo de computação do método sem malha será reduzido. Trata-se do esquema T mais simples.

O esquema T4 é análogo ao T3, mas aplicado a domínios tridimensionais nos quais a malha de integração é composta por tetraedros.

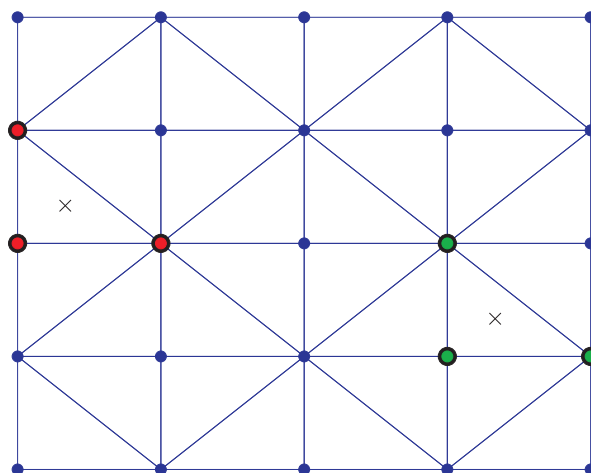


Figura 2.7: Seleção de nós de suporte por esquema T3. Nós vermelhos são suporte para célula de fronteira e nós verdes para célula interior.

O esquema T6/3 seleciona 6 nós para interpolação em células que estão no interior do domínio e 3 nós para células localizadas na fronteira (Fig. 2.8). Para células de fronteira, os 3 nós correspondem aos vértices. Para uma célula de interior, são selecionados seus 3 vértices mais os vértices opostos pertencentes às três células vizinhas. O esquema T6/3 é indicado para construir funções de forma PIM de mais alta ordem em duas dimensões, sendo as interpolações na fronteira lineares e as no interior do domínio quadráticas.

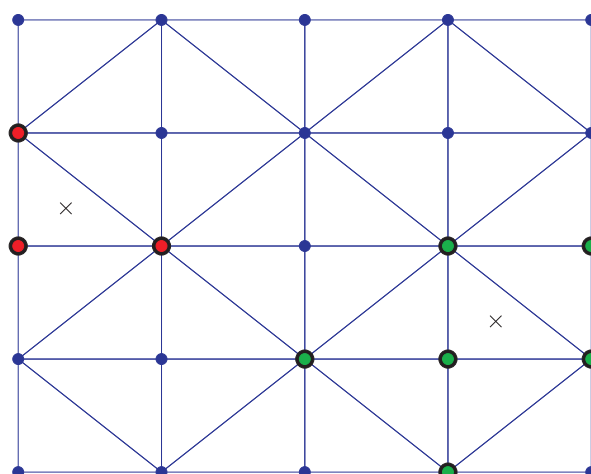


Figura 2.8: Seleção de nós de suporte por esquema T6/3. Nós vermelhos são suporte para célula de fronteira e nós verdes para célula interior.

O esquema T6 (Fig. 2.9) é similar ao esquema T6/3 pois seleciona da mesma forma 6 nós de suporte para as células do interior. Entretanto, 6 nós são selecionados para as células da

fronteira: os 3 vértices, 2 (ou 1) vértices opostos pertencentes às células vizinhas e 1 (ou 2) nó mais próximo ao centróide da célula que deseja-se determinar o domínio de suporte. Este esquema é indicado para construir funções de forma PIM com funções de base radial (RBF) em duas dimensões objetivando gerar aproximações com acurácia e eficiência.

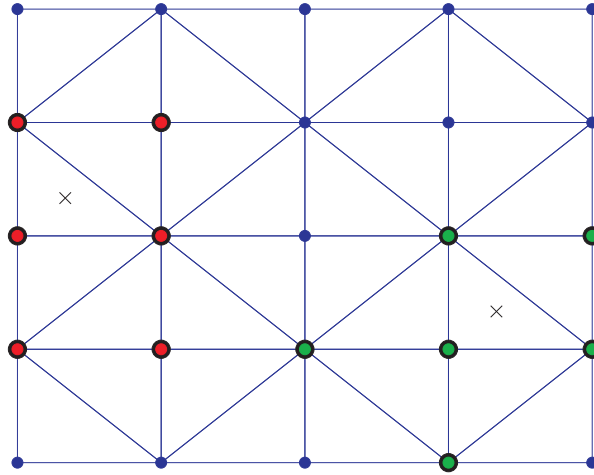


Figura 2.9: Seleção de nós de suporte por esquema T6. Nós vermelhos são suporte para célula de fronteira e nós verdes para célula interior.

O esquema T2L é aplicado a problemas em duas dimensões e seleciona duas camadas de nós (Fig. 2.10). A primeira camada corresponde aos 3 vértices da célula e a segunda camada aos nós conectados diretamente aos da primeira camada. Este esquema, geralmente, seleciona um número maior de nós que o esquema T6 e, por isso, leva a um maior tempo de computação. É indicado para construir funções de forma PIM com funções de base radial com maior grau de consistência e quando a distribuição nodal é muito irregular. O esquema T2L pode ser usado também para construir funções de forma MLS.

2.4 Suavização de Gradientes

A forma fraca enfraquecida é uma forma integral em que os gradientes são calculados através da operação de suavização. Esta seção apresenta a dedução do gradiente suavizado, na qual o gradiente é aproximado por uma representação integral.

Uma função F pode ser aproximada sobre um domínio de suavização Ω_x^s pré-definido pela seguinte forma integral [Liu 2009]:

$$\hat{F} = \int_{\Omega_x^s} F \hat{W} d\Omega \quad (2.46)$$

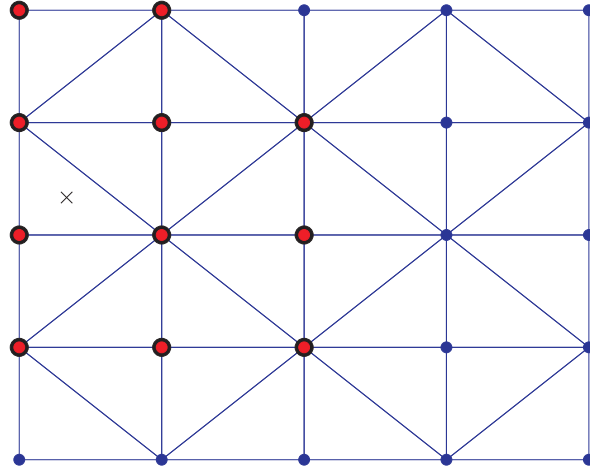


Figura 2.10: Seleção de nós de suporte por esquema T2L.

sendo $\hat{W}$ a função núcleo, ou função de suavização, continuamente diferenciável em Ω_x^s . Numa representação integral, a função núcleo muitas vezes deve satisfazer certas condições [Liu 2009]:

1. Positividade: $\hat{W} > 0$ em Ω_x^s .
2. Suporte compacto: $\hat{W} = 0$ fora de Ω_x^s .
3. Unidade: $\int_{\Omega_x^s} \hat{W} d\Omega = 1$.
4. Monotonicamente decrescente.
5. Comportamento da função delta de Dirac: $\hat{W} \rightarrow \delta$ quando $h \rightarrow 0$, sendo h o fator que controla o tamanho de Ω_x^s .

Utilizando esta ideia, pode-se aproximar o gradiente de uma função escalar u por meio da representação integral 2.46:

$$\hat{\nabla} u = \int_{\Omega_x^s} \nabla u \hat{W} d\Omega = \int_{\Omega_x^s} \nabla(u \hat{W}) d\Omega - \int_{\Omega_x^s} u \nabla \hat{W} d\Omega \quad (2.47)$$

onde supõe-se que u é contínua em Ω_x^s e, portanto, diferenciável por partes.

De acordo com o teorema do gradiente, tem-se que:

$$\int_{\Omega_x^s} \nabla(u \hat{W}) d\Omega = \int_{\Gamma_x^s} u \hat{W} \vec{n} d\Gamma \quad (2.48)$$

onde $\Gamma_x^s = \partial\Omega_x^s$ e $\vec{n}$ é a normal unitária em Γ_x^s apontando para fora do domínio de suavização.

Aplicando o teorema do gradiente 2.48 na Equação 2.47, chega-se a:

$$\hat{\nabla}u = \int_{\Gamma_x^s} u \hat{W} \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega_x^s} u \nabla \hat{W} d\Omega \quad (2.49)$$

A igualdade da Equação 2.49 não é válida caso o gradiente de u não exista em todo o subdomínio Ω_x^s , isto é, caso u seja descontínua em Ω_x^s . Entretanto, ainda assim pode-se aproximar o gradiente de u por:

$$\hat{\nabla}u \approx \int_{\Gamma_x^s} u \hat{W} \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega_x^s} u \nabla \hat{W} d\Omega \quad (2.50)$$

Esta é a operação de suavização do gradiente generalizada [Liu 2010, Liu 2010]. A generalização dada pela Equação 2.50 não é rigorosa em teoria, mas possível de ser aplicada devido ao fato de que nenhuma diferenciação em u é realizada do lado direito da equação. Feita esta observação, será utilizado o sinal de igualdade para a aproximação 2.50 ao longo do trabalho.

Por questões de simplicidade, define-se a função de suavização como localmente constante em Ω_x^s :

$$\hat{W}(x) = \bar{W}(x) = \begin{cases} 1/A_x^s & \text{se } x \in \Omega_x^s \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_x^s \end{cases} \quad (2.51)$$

onde A_x^s corresponde à área do domínio de suavização Ω_x^s no ponto x . Note que a função $\hat{W}$ definida pela Equação 2.51 satisfaz as condições de unidade, positividade e decaimento anteriormente definidas, propriedades necessárias da função núcleo para que a representação integral de uma função (Equação 2.46) seja válida [Liu 2009].

Usando a Equação 2.51, a Equação 2.49 é escrita como:

$$\hat{\nabla}u = \frac{1}{A_x^s} \int_{\Gamma_x^s} u \vec{n} d\Gamma \quad (2.52)$$

que é a equação do gradiente suavizado em um subdomínio de suavização Ω_x^s . Deve ser notado que o gradiente suavizado é constante em um determinado domínio de suavização Ω_x^s . Esta informação é utilizada para derivar a forma fraca enfraquecida.

2.5 Construção dos Domínios de Suavização

Como visto na Seção 2.4, os gradientes suavizados são calculados com base nos domínios de suavização. O procedimento de construção destes domínios leva a diferentes características da aproximação numérica resultante. Para tal, dois requisitos são impostos sobre os domínios de suavização:

- (I) a interseção entre dois subdomínios de suavização quaisquer deve ser vazia, isto é, não deve haver superposição entre eles;
- (II) a união dos subdomínios de suavização deve cobrir completamente o domínio do problema.

Quatro diferentes métodos de interpolação de pontos baseados em suavização de gradientes são gerados a partir de diferentes maneiras de se construir os domínios de suavização: NS-PIM, ES-PIM, CS-PIM e FS-PIM.

O Método de Interpolação de Pontos Suavizado por Nó (NS-PIM) [Wu et al. 2009] constrói domínios de suavização a partir dos nós da malha triangular. Para cada nó i , um domínio de suavização Ω_i^s é criado da seguinte maneira: unem-se os segmentos formados pelos centróides das células triangulares incidentes ao nó i e pelos pontos médios das arestas destas células, como pode ser visto na Fig. 2.11 para duas dimensões. Portanto, o número de subdomínios de suavização é igual a número de nós e as restrições exigidas (I) e (II) são atendidas.

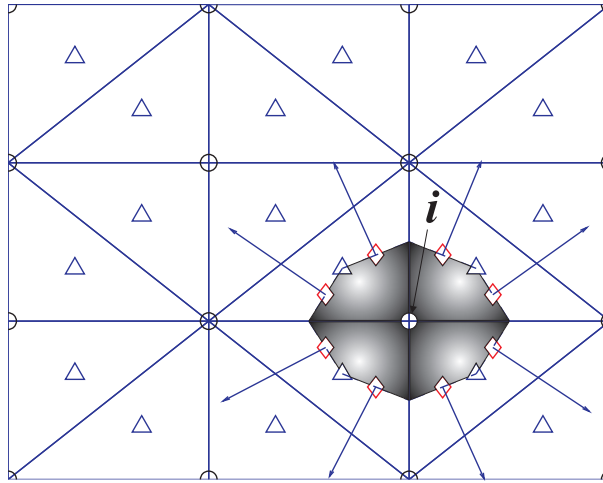


Figura 2.11: Subdomínio de suavização Ω_i^s baseado em nó em duas dimensões. Centróides das células estão representados por triângulos. As normais unitárias exteriores à fronteira Γ_i^s estão representadas por vetores.

O Método de Interpolação de Pontos Suavizado por Aresta (ES-PIM) [Wu et al. 2010] constrói seus domínios de suavização baseados nas arestas da malha de fundo. Para cada aresta m , o subdomínio de suavização Ω_m^s é criado conectando os nós dos extremos da aresta m aos centróides das duas células adjacentes à aresta, como mostra a Fig. 2.12. Claramente os requisitos de criação de subdomínios de suavização são atendidos, e o número destes corresponde ao número de arestas presente na malha.

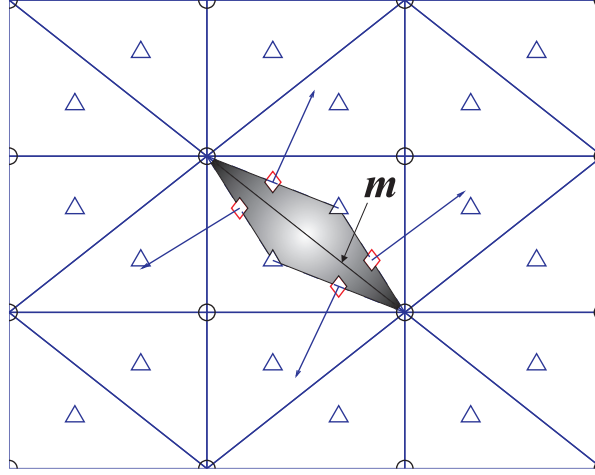


Figura 2.12: Subdomínio de suavização Ω_m^s baseado em aresta. Centróides das células estão representados por triângulos. As normais unitárias exteriores à fronteira Γ_m^s estão representadas por vetores.

O Método de Interpolação de Pontos Suavizado por Célula (CS-PIM) [Zhang e Liu 2010] constrói os domínios de suavização baseados nas células da malha de fundo, sendo estas os próprios subdomínios Ω_c^s (Fig. 2.13). Por isso, é muito semelhante ao método dos elementos finitos, inclusive nas aproximações geradas para a solução. O número de subdomínios de suavização é igual ao número de células da malha, como esperado.

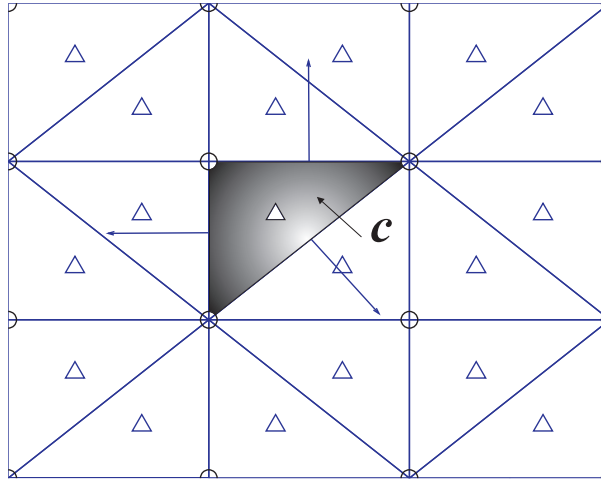


Figura 2.13: Subdomínio de suavização Ω_c^s baseado em célula em duas dimensões. As normais unitárias exteriores à fronteira Γ_c^s estão representadas por vetores.

O Método de Interpolação de Pontos Suavizado por Face (FS-PIM) [Nguyen-Thoi et al. 2009] é um análogo ao ES-PIM em três dimensões. O FS-PIM constrói os domínios de suavização baseados nas faces tetraédricas da malha de integração.

Para cada face f , o domínio de suavização Ω_f^s é criado conectando os vértices da face f aos centróides das células adjacentes a f , como mostra a Figura 2.14.

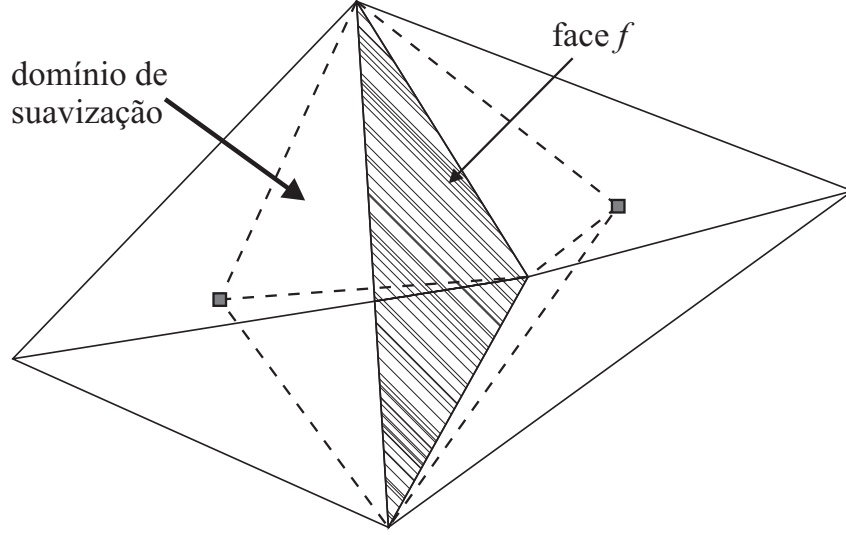


Figura 2.14: Subdomínio de suavização Ω_f^s baseado em face. Centróides das células adjacentes a face f estão representados por quadrados.

2.6 Forma Fraca Enfraquecida

A grande diferença entre formas fracas e formas fracas enfraquecidas está no espaço de funções onde procura-se a solução para o problema. Formas fracas buscam a solução no espaço de Hilbert $\mathbb{H}$, enquanto formas W^2 buscam-na no espaço $\mathbb{G}$.

Neste ponto do trabalho, torna-se necessário definir os espaços $\mathbb{G}$. Considerando m não negativo, o espaço $\mathbb{G}_h^m(\Omega)$ é definido como:

$$\mathbb{G}_h^m = \left\{ \begin{array}{l} v|v(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_n} \phi_n(\mathbf{x})d_n = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{d}, \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{N_n} \\ D^\alpha v \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq (m-1) \\ \sum_{n=1}^{N_s} \left(\int_{\Gamma_n^s} (D^\alpha v)n_i d\Gamma \right)^2 > 0, \forall v \neq 0, i = 1, \dots, d, \forall \alpha : |\alpha| \leq (m-1) \end{array} \right\} \quad (2.53)$$

onde N_n é o número total de nós, $\Phi(\mathbf{x})$ é o vetor contendo as funções de forma ϕ_n de todos os nós, $\mathbf{d}$ é o vetor dos parâmetros nodais d_n , d a dimensão do problema e D representa o operador de diferenciação, definido da seguinte maneira:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (2.54)$$

onde α é uma tupla de n inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, e $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$.

Devido ao espaço $\mathbb{G}$ ser discretizado, este é indicado com o subscrito h . Note que no espaço $\mathbb{G}$, as derivadas das funções de ordem até $(m-1)$ são de quadrado integrável em Ω . A maior diferença entre o espaço $\mathbb{G}$ e o espaço discreto de Hilbert $\mathbb{H}_h$ correspondente está justamente aí. Enquanto $\mathbb{H}$ impõe que $D^\alpha v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, para $|\alpha| = m$, o espaço $\mathbb{G}$ exige que $D^\alpha v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, para $|\alpha| = (m-1)$. Portanto, o requisito sobre a função é enfraquecido em relação ao requisito para funções no espaço $\mathbb{H}$, os quais já são enfraquecidos. Consequentemente, o espaço $\mathbb{G}$ pode ser visto como um espaço formado por um conjunto de funções com requisitos fracos enfraquecidos (W^2). Além disso, $\mathbb{H}_h^m(\Omega)$ também é um espaço $\mathbb{G}_h^m(\Omega)$, isto é, qualquer função em $\mathbb{H}_h^m(\Omega)$ é um membro de $\mathbb{G}_h^m(\Omega)$ [Liu 2010, Liu 2010].

No presente trabalho, apenas espaços $\mathbb{G}_h^1$ são usados e, por isso, dar-se-á maior ênfase a eles. Um espaço $\mathbb{G}_h^1$ é definido da seguinte maneira:

$$\mathbb{G}_h^1 = \left\{ \begin{array}{l} v|v(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_n} \phi_n(\mathbf{x})d_n = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{d}, \forall \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{N_n} \\ v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \\ \sum_{n=1}^{N_s} \left(\int_{\Gamma_n^s} v n_i d\Gamma \right)^2 > 0, \forall v \neq 0, i = 1, \dots, d \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

onde N_n , $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, ϕ_n , $\mathbf{d}$ e d são definidos como na Equação 2.53.

As funções de forma contidas em $\mathbb{G}_h^1$ devem satisfazer as seguintes condições [Liu 2009]:

- (I) Independência linear: as funções de forma nodais devem ser linearmente independentes sobre Ω de modo a formar uma base.
- (II) Limitadas: as funções construídas a partir das funções de forma devem ser de quadrado integrável em Ω , garantindo a convergência do método.
- (III) Positividade: os domínios de suavização devem ser construídos de maneira apropriada a fim de garantir que

$$\sum_{n=1}^{N_s} \left(\int_{\Gamma_n^s} v n_i d\Gamma \right)^2 > 0, \forall v \neq 0, i = 1, \dots, d. \quad (2.56)$$

Esta condição em conjunto com a condição de independência linear assegura a estabilidade do método.

Como discutido na Seção 2.2, as funções de forma geradas pelo PIM não são conformes. Consequentemente, as funções construídas, em geral, não são contínuas no domínio do problema. Tais funções não pertencem ao espaço $H_h^1(\Omega)$, mas estão no espaço $G_h^1(\Omega)$, uma vez

que as três condições acima podem ser satisfeitas, como é mostrado em [Liu 2010, Liu 2010], desde que os domínios de suavização sejam construídos conforme descrito na Seção 2.5.

A grande diferença entre os espaços $G_h^1(\Omega)$ e $H_h^1(\Omega)$ é que $H_h^1(\Omega)$ exige que o gradiente da função seja de quadrado integrável, enquanto em $G_h^1(\Omega)$ apenas a função deve ser de quadrado integrável. Portanto, o requisito sobre a função é enfraquecido, e o espaço $G_h^1(\Omega)$ pode ser visto como um conjunto de funções com requisitos fracos enfraquecidos (W^2) em relação à continuidade das funções. Deve ser notado, também, que:

$$H_h^1(\Omega) \subset G_h^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) . \quad (2.57)$$

As formulações fracas enfraquecidas são mostradas no Capítulo 3 a medida que os problemas a serem solucionados são apresentados.

2.7 Problemas Eletromagnéticos

Problemas eletromagnéticos são descritos pela teoria eletromagnética cujos postulados são matematicamente expressos por um conjunto de equações fundamentais: as equações de Maxwell, as relações constitutivas e a equação da força de Lorentz [Macedo 1988].

A estática é uma área do eletromagnetismo que enquadra diversos problemas, podendo ser dividida em eletrostática e magnetostática. Nela, as condições são estáticas, isto é, as grandezas físicas são constantes no tempo e as equações de Maxwell tornam-se mais simples.

Outra área de muito interesse no eletromagnetismo é a que envolve problemas de propagação de ondas. Nesta área, é comum trabalhar com os campos variando harmonicamente no tempo e, sob tais circunstâncias, os problemas são chamados de problemas harmônicos no tempo. Normalmente, resolvem-se problemas harmônicos no tempo no domínio da frequência.

Esta seção apresenta, resumidamente, a formulação de problemas eletromagnéticos eletrostáticos, magnetostáticos e harmônicos no tempo. São apresentadas as formas fortes e derivadas as formas fracas para cada classe de problema.

2.7.1 Problemas Eletrostáticos

A eletrostática lida com problemas onde apenas o campo elétrico está presente e este é estático, ou seja, constante no tempo. Considerando um meio isotrópico e desprezando as variações temporais, as equações da eletrostática são

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.58)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.59)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.60)$$

onde $\vec{E}$ representa o campo elétrico, $\vec{D}$ a indução elétrica, ρ a densidade volumétrica de carga elétrica e ϵ a permissividade elétrica do meio.

Se o domínio for composto por dois materiais com propriedades físicas diferentes, então na interface entre os materiais o campo é descrito por:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (2.61)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (2.62)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se a qual material a grandeza física está associada, ρ_s é a densidade superficial de carga e $\vec{n}$ é o vetor unitário normal à interface de materiais, sendo dirigida, por convenção, do meio 1 para o meio 2.

A Equação 2.59 mostra que o campo elétrico é irrotacional, por isso é conservativo. Logo, pode-se expressá-lo como o gradiente de uma função escalar V , denominada *potencial escalar elétrico*:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\nabla V \quad (2.63)$$

Substituindo 2.60 em 2.58

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \implies \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho$$

e usando a Equação 2.63, chega-se a

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad (2.64)$$

que é uma equação de Poisson em V e ρ . Através das Equações 2.58, 2.60, 2.61 e 2.63 pode-se mostrar que na interface entre dois meios o potencial escalar elétrico é descrito por:

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = \rho_s \quad (2.65)$$

É apresentada, abaixo, a forma forte para problemas eletrostáticos, estabelecidos da seguinte maneira:

Forma forte

Dados ϵ , ρ e ρ_s , determinar o potencial escalar elétrico V que satisfaça:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad \text{em } \Omega \quad (2.66a)$$

$$V = g \quad \text{em } \Gamma_g \quad (2.66b)$$

$$-\epsilon \frac{\partial V}{\partial n} = h \quad \text{em } \Gamma_h \quad (2.66c)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = \rho_s \quad \text{em } \Gamma_I \quad (2.66d)$$

onde g e h são os valores impostos pelas condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente, sobre as fronteiras Γ_g e Γ_h , sendo $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$, $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset$ e Γ_I a interface entre dois meios.

Forma fraca

A forma fraca é derivada da forma forte utilizando o método dos resíduos ponderados. Aqui, supõe-se que as funções de forma utilizadas no método numérico possuem a propriedade do delta de Kronecker, assim, as condições de contorno essenciais são naturalmente impostas. Além disso, considera-se que não há acúmulo de cargas elétricas na interface entre diferentes materiais, isto é, $\rho_s = 0$.

Sejam S e U os espaços das funções admissíveis e de testes, respectivamente, definidos da seguinte maneira:

$$S = \{V \mid V \in \mathbb{H}^1(\Omega), V(\mathbf{x}) = g, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \quad (2.67)$$

$$U = \{W_t \mid W_t \in \mathbb{H}^1(\Omega), W_t(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \quad (2.68)$$

onde $\mathbb{H}^1(\Omega)$ é o espaço de Hilbert de funções com derivada de primeira ordem de quadrado integrável.

Através do método dos resíduos ponderados, a partir da Equação 2.66a escreve-se:

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) + \rho] W_t \, d\Omega = 0 \quad \forall W_t \in U \quad (2.69)$$

Reescrevendo a Equação 2.69, tem-se que

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\epsilon \nabla V)] W_t \, d\Omega = - \int_{\Omega} \rho W_t \, d\Omega \quad \forall W_t \in U \quad (2.70)$$

Considere a identidade verotial:

$$\nabla \cdot (W_t \epsilon \nabla V) = \nabla W_t \cdot \epsilon \nabla V + W_t \nabla \cdot \epsilon \nabla V \quad (2.71)$$

Substituindo a Equação 2.71 na Equação 2.70:

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (W_t \epsilon \nabla V)] d\Omega - \int_{\Omega} [\epsilon \nabla W_t \cdot \nabla V] d\Omega = - \int_{\Omega} \rho W_t d\Omega \quad \forall W_t \in U \quad (2.72)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo da Equação 2.72, tem-se que

$$\int_{\Gamma} [W_t \epsilon \nabla V \cdot \vec{n}] d\Gamma - \int_{\Omega} [\epsilon \nabla W_t \cdot \nabla V] d\Omega = - \int_{\Omega} \rho W_t d\Omega \quad \forall W_t \in U \quad (2.73)$$

Considerando que $\nabla V \cdot \vec{n} = \frac{\partial V}{\partial n}$, a Equação 2.73 é reescrita como:

$$- \int_{\Omega} [\epsilon \nabla W_t \cdot \nabla V] d\Omega = - \int_{\Omega} \rho W_t d\Omega - \int_{\Gamma} W_t \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma \quad \forall W_t \in U \quad (2.74)$$

Como $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$, $W_t = 0$ em Γ_g e pela condição de contorno de Neumann da Equação 2.66, a 2.74 pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} [\epsilon \nabla W_t \cdot \nabla V] d\Omega = \int_{\Omega} \rho W_t d\Omega - \int_{\Gamma_h} h W_t d\Gamma \quad \forall W_t \in U \quad (2.75)$$

Pode-se, então, escrever a forma fraca para problemas eletrostáticos como:

Dados ϵ , ρ , g e h , determinar o potencial escalar elétrico $V \in S$, tal que:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla W_t \cdot \nabla V d\Omega = \int_{\Omega} W_t \rho d\Omega - \int_{\Gamma_h} W_t h d\Gamma \quad \forall W_t \in U \quad (2.76)$$

2.7.2 Problemas Magnetostáticos

Assim como a eletrostática, a magnetostática é uma área do eletromagnetismo em que as grandezas eletromagnéticas são constantes no tempo. Entretanto, aqui há presença de um campo magnético ao invés de um campo elétrico. Na magnetostática pode ou não haver correntes elétricas, mas, são constantes no tempo quando estas existem. Considerando um meio isotrópico e desprezando as variações temporais, as equações da magnetostática são

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.77)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.78)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.79)$$

onde $\vec{H}$ representa o campo magnético, $\vec{B}$ a indução magnética, $\vec{J}$ a densidade superficial de corrente elétrica e μ a permeabilidade magnética do meio.

Se o domínio for composto por dois materiais com propriedades físicas diferentes, então na interface entre os materiais o campo é descrito por:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.80)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_l \quad (2.81)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se a qual material a grandeza física está associada, $\vec{J}_l$ é a densidade linear de corrente elétrica e $\vec{n}$ é o vetor unitário normal à interface de materiais, sendo dirigida, por convenção, do meio 1 para o meio 2.

Através da Equação 2.77, vê-se que a indução magnética possui divergente nulo, por isso é solenoidal. É possível, portanto, expressá-la como o rotacional de uma função vetorial $\vec{A}$, denominada *potencial vetor magnético*:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.82)$$

Substituindo 2.79 em 2.78

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \implies \nabla \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{J}$$

e usando a Equação 2.82, chega-se a

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J} \quad (2.83)$$

Para problemas em duas dimensões, o campo magnético tem componentes apenas nas direções x e y . Pela lei de Ampère (Equação 2.78), a densidade de corrente elétrica deve ter componentes apenas em z , ou seja, $\vec{J} = J_z \hat{z}$. Pela definição 2.82, o potencial vetor magnético $\vec{A}$ também deve possuir componentes apenas na direção z , isto é, $\vec{A} = A_z \hat{z}$. Deste modo, a Equação 2.83 pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A_z \right) = -J_z \quad (2.84)$$

que é uma equação de Poisson em A_z e J_z . Através das Equações 2.79, 2.81 e 2.82 pode-se mostrar que na interface de materiais

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} = J_l \quad (2.85)$$

onde J_l é a componente z da densidade linear de corrente elétrica $\vec{J}_l$.

É apresentada, abaixo, a forma forte para problemas magnetostáticos, estabelecidos da seguinte maneira:

Forma forte

Dados μ , J_z e J_l , determinar a componente A_z do potencial vetor magnético que satisfaça:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla A_z \right) = -J_z \quad \text{em } \Omega \quad (2.86a)$$

$$A_z = g \quad \text{em } \Gamma_g \quad (2.86b)$$

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial n} = h \quad \text{em } \Gamma_h \quad (2.86c)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} = J_l \quad \text{em } \Gamma_I \quad (2.86d)$$

onde g e h são os valores impostos pelas condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente, sobre as fronteiras Γ_g e Γ_h , sendo $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$, $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset$ e Γ_I a interface entre dois meios.

A forma forte para problemas magnetostáticos em duas dimensões 2.86 é similar à forma forte para problemas eletrostáticos 2.66. Considera-se que não há correntes na interface entre materiais, isto é, $\vec{J}_l = 0$. Executando os mesmos procedimentos da Seção 2.7.1, chega-se a forma fraca para problemas magnetostáticos em duas dimensões.

Forma fraca

Dados μ , J_z , g e h , determinar a componente $A_z \in S$ do potencial vetor magnético, tal que:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla W_t \cdot \nabla A_z \, d\Omega = \int_{\Omega} W_t J_z \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} W_t h \, d\Gamma \quad \forall W_t \in U \quad (2.87)$$

2.7.3 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo

Considere que os campos elétricos e magnéticos variem harmonicamente no tempo a uma frequência ω e que não existam fontes em um certo domínio Ω . Os meios são lineares e isotrópicos. Dessa maneira, as equações de Maxwell podem ser escritas no domínio complexo como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.88)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.89)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\vec{E}) = 0 \quad (2.90)$$

$$\nabla \cdot (\mu\vec{H}) = 0 \quad (2.91)$$

onde aqui $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são representações fasoriais dos campos elétrico e magnético, respectivamente.

A Equação 2.88 pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{H} \quad (2.92)$$

Tomando o rotacional em ambos os lados da Equação 2.92:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = \nabla \times (-j\omega \vec{H}) = -j\omega \nabla \times \vec{H} \quad (2.93)$$

Substituindo a Equação 2.89 em 2.93, chega-se a

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (2.94)$$

com $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Considere que as fronteiras Γ do domínio, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$, são divididas em Γ_g e Γ_n , $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_n$, sendo Γ_g a fronteira onde são impostas as condições de contorno de Dirichlet e Γ_n a fronteira onde são impostas as condições de contorno mistas ou de terceiro tipo. Em Γ_g , considera-se um condutor elétricos perfeito:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Gamma_g \quad (2.95)$$

e em Γ_n aplica-se uma condição de contorno de terceiro tipo [Sarvas e Jarvenpaa 2004]

$$\frac{1}{\mu_r} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_n \quad (2.96)$$

Forma forte

Dados ϵ_r , μ_r , e ω , determinar o campo elétrico $\vec{E}$ que satisfaça:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.97a)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Gamma_g \quad (2.97b)$$

$$\frac{1}{\mu_r} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_n \quad (2.97c)$$

Forma fraca

A forma fraca do problema é obtida através do método dos resíduos ponderados da maneira que se segue. Suponha uma função de teste $\vec{W}_t \in \mathbb{H}(\text{curl}, \Omega)$, com $\vec{n} \times \vec{W}_t = 0$ em Γ_g . O resíduo da Equação 2.97a ponderado pela função de teste é anulado no sentido integral:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0 \quad (2.98)$$

que pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right) \cdot \vec{W}_t d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0 \quad (2.99)$$

Do teorema de Green vetorial, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \vec{W}_t \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \vec{W}_t \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) d\Omega - \int_{\Gamma=\partial\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\vec{W}_t \times \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.100)$$

Substituindo a Equação 2.100 na primeira integral da Equação 2.99, tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \vec{W}_t \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu_r} \left(\vec{W}_t \times \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (2.101)$$

Seja a identidade vetorial:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{W}_t \times \nabla \times \vec{E} \right) = \nabla \times \vec{E} \cdot \left(\vec{n} \times \vec{W}_t \right) = -\vec{W}_t \cdot \left(\vec{n} \times \nabla \times \vec{E} \right) \quad (2.102)$$

Substituindo a Equação 2.102 no último termo da Equação 2.101 e considerando que $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_n$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \vec{W}_t \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega - \\ \int_{\Gamma_g} \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \cdot \left(\vec{n} \times \vec{W}_t \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\mu_r} \left(\vec{n} \times \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Como $\vec{n} \times \vec{W}_t = 0$ em Γ_g , a Equação 2.103 resulta em

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \vec{W}_t \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\mu_r} \left(\vec{n} \times \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0 \quad (2.104)$$

Aplicando a condição de contorno 2.97c na Equação 2.104, chega-se a

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \vec{W}_t \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \left(\vec{U} - \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) \right) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0 \quad (2.105)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} \left(\nabla \times \vec{W}_t \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{E} \right) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot \left(\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot \vec{U} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.106)$$

Portanto, a forma fraca para o problema vetorial harmônico no tempo 2.97 é escrita como:

Dados ϵ_r , μ_r , ω , γ_e e $\vec{U}$, determinar o campo elétrico $\vec{E} \in \mathbb{H}(\text{curl}, \Omega)$, tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot \vec{U} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.107)$$

Capítulo 3

Método de Interpolação de Pontos Suavizado

No Capítulo 2 foram apresentados os principais conceitos relativos aos métodos sem malha, em especial aos métodos de suavização de gradientes que utilizam funções de forma construídas pelo Método de Interpolação de Pontos. A essa classe de métodos atribui-se o nome Métodos de Interpolação de Pontos Suavizados (SPIM). O SPIM é um método recente e foi originalmente aplicado em problemas de mecânica, como pode ser visto em [Liu, Nguyen-Thoi e Lam 2009, Liu et al. 2009, Liu et al. 2009, Liu et al. 2008, Liu 2008, Liu e Xu 2008, Liu e Zhang 2009, Liu e Zhang 2009, Liu e Zhang 2008].

Este capítulo apresenta a aplicação do SPIM em problemas eletromagnéticos. Primeiramente, são apresentadas aplicações em problemas escalares nas áreas de eletrostática e magnetostática. Em seguida, o SPIM é testado em um problema harmônico no tempo de autovalor em um guia de onda com formulação do tipo vetorial. As formulações dos problemas em termos das formas fracas enfraquecidas e discretizadas são mostradas ao longo do capítulo.

3.1 Problemas Eletrostáticos

Na Seção 2.7.1, apresentou-se a formulação de problemas eletrostáticos em termos das formas forte e fraca. A solução da forma fraca, dada pela Equação 2.66, deve estar contida em $\mathbb{H}^1(\Omega)$, isto é, deve possuir derivadas de quadrado integrável. A forma fraca enfraquecida afrouxa esse requisito e busca a solução em um espaço diferente: o espaço $\mathbb{G}_h^1$. Sejam S e U os espaços das funções admissíveis e de teste, respectivamente, definidos agora da seguinte maneira:

$$S = \{V \mid V \in \mathbb{G}_h^1(\Omega), V(\mathbf{x}) = g, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \quad (3.1)$$

$$U = \{W_t \mid W_t \in \mathbb{G}_h^1(\Omega), W_t(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \quad (3.2)$$

onde $\mathbb{G}_h^1(\Omega)$ é o espaço $\mathbb{G}$ definido na Equação 2.55.

A operação de suavização do gradiente, mostrada na Equação 2.52, fornece uma aproximação suave constante para o gradiente em cada subdomínio Ω_x^s . Se o domínio do problema for inteiramente dividido em N_s subdomínios de suavização, como descrito na Seção 2.5, então o gradiente suavizado pode ser calculado em todo o domínio Ω do problema. Reescrevendo a Equação 2.52 em termos de suas componentes (para o caso bidimensional), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{A_x^s} \int_{\Gamma_x^s} u n_x d\Gamma, \frac{1}{A_x^s} \int_{\Gamma_x^s} u n_y d\Gamma \right) \\ &= (\bar{g}_x(u), \bar{g}_y(u))\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde n_x e n_y são as componentes x e y da normal unitária exterior em Γ_x^s , respectivamente. Para o caso tridimensional, acrescentaríamos ao gradiente a componente z .

O termo bilinear $a(W_t, V)$ da forma fraca é:

$$a(W_t, V) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla W_t \cdot \nabla V \, d\Omega \quad (3.4)$$

O gradiente da forma fraca é então aproximado pelo gradiente suavizado 3.3, e o termo bilinear 3.4 pode ser reescrito como:

$$\bar{a}_D(W_t, V) = \int_{\Omega} \epsilon \hat{\nabla} W_t \cdot \hat{\nabla} V \, d\Omega \quad (3.5)$$

onde $\bar{a}_D(W_t, V)$ corresponde ao novo termo bilinear calculado com os gradientes suavizados.

Levando em conta que o gradiente suavizado é constante em cada subdomínio de suavização, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{a}_D(W_t, V) &= \int_{\Omega} \epsilon \hat{\nabla} W_t \cdot \hat{\nabla} V \, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^{N_s} \epsilon A_i^s \hat{\nabla} W_t \cdot \hat{\nabla} V \\ &= \sum_{i=1}^{N_s} \epsilon A_i^s (\bar{g}_x(W_t) \bar{g}_x(V) + \bar{g}_y(W_t) \bar{g}_y(V))\end{aligned}\quad (3.6)$$

onde A_i^s é a área do i -ésimo subdomínio de suavização. Finalmente, pode-se escrever a forma fraca enfraquecida para o problema eletrostático como:

Dados ϵ , ρ , g e h , determinar o potencial escalar elétrico $V \in S$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{N_s} \epsilon A_i^s \hat{\nabla} W_t \cdot \hat{\nabla} V = \int_{\Omega} W_t \rho \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} W_t h \, d\Gamma \quad \forall W_t \in U \quad (3.7)$$

Note que V e W_t pertencem a $\mathbb{G}_h^1$ e, por isso, o requisito de diferenciabilidade existente quando utilizada a forma fraca não existe mais. Isso elimina o problema da não compatibilidade das funções de forma PIM, descontínuas em partes do domínio do problema. Nas regiões de descontinuidade, a rigor o gradiente não existe e não pode ser calculado. Como na forma W^2 não há mais operação de diferenciação, dada a operação de suavização do gradiente, tem-se agora uma formulação conforme.

Discretização da forma fraca enfraquecida

O SPIM utiliza o método de Bubnov-Galerkin para obter as equações discretas da forma fraca enfraquecida, isto é, as mesmas funções são usadas para gerar as aproximações das funções admissíveis e de teste. Dessa maneira, tem-se as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\approx V^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in S_n} \phi_j(\mathbf{x}) V_j \\ W_t(\mathbf{x}) &\approx W_t^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in S_n} \phi_j(\mathbf{x}) W_{tj} \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde S_n é o conjunto de nós pertencente ao domínio de suporte do ponto $\mathbf{x}$, usado para construir as funções de forma PIM $\phi_j(\mathbf{x})$, e V_j é o potencial escalar elétrico do j -ésimo nó de S_n . Os nós de suporte são obtidos utilizando os Esquemas T apresentados na Seção 2.3.

Substituindo as expressões da Equação 3.8 na forma fraca enfraquecida 3.7, chega-se, após desenvolvimentos, ao sistema linear:

$$\mathbf{KV} = \mathbf{F} \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_s} \epsilon A_i^s [\hat{\nabla} \Phi]^T [\hat{\nabla} \Phi] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{F} = - \int_{\Omega} \Phi f \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} \Phi h \, d\Gamma \quad (3.11)$$

e

$$[\hat{\nabla} \Phi] = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma_x^s} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \Phi \, d\Gamma \quad (3.12)$$

3.1.1 Capacitor de Placas Paralelas

O primeiro problema a ser investigado é o do capacitor de placas paralelas com um dielétrico em duas dimensões. O objetivo é verificar se os métodos de suavização conseguem reproduzir

um potencial escalar elétrico linear. As placas estão localizadas em $x = 0$ e $x = 1\text{m}$ e possuem tensões de 100V e 10V, respectivamente. A solução analítica do problema é:

$$V^a = -90x + 100 \text{ [V]}. \quad (3.13)$$

Utilizou-se uma distribuição de 5×5 igualmente espaçados nós no domínio quadrado de dimensão $1\text{m} \times 1\text{m}$. Testou-se os métodos NS-PIM, ES-PIM e CS-PIM com esquema T3. Os erros obtidos na norma $\mathbb{L}^2$ foram $3,67 \times 10^{-16}$, $2,04 \times 10^{-16}$ e $1,86 \times 10^{-16}$, respectivamente. Este exemplo demonstra, numericamente, que os métodos conseguem reproduzir campos lineares de forma exata (a precisão de máquina), o que garante uma convergência de segunda ordem na norma $\mathbb{L}^2$ [Liu 2009].

3.1.2 Capacitor de Placas Paralelas com Dois Dielétricos

O problema do capacitor de placas paralelas é novamente testado, porém com a presença de dois dielétricos de permissividades elétricas relativas iguais a 1 e 5. A interface entre os dielétricos encontra-se em $x = 0,5\text{m}$. O objetivo deste exemplo é testar se os métodos conseguem tratar a descontinuidade existente no campo elétrico devido a presença de diferentes meios no domínio. A solução analítica V^a do problema é:

$$V^a = \begin{cases} -150x + 100 \text{ [V]} & \text{se } 0,0 \leq x \leq 0,5 \\ -30x + 40 \text{ [V]} & \text{se } 0,5 \leq x \leq 1,0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Novamente, uma distribuição de 5×5 nós igualmente espaçados foi utilizada. Os métodos NS-PIM, ES-PIM e CS-PIM com esquema T3 foram testados. Os erros na norma $\mathbb{L}^2$ foram 1.16×10^{-16} , 7.12×10^{-17} e 5.36×10^{-17} . Como as soluções são graficamente semelhantes, é apresentada na Figura 3.1 apenas a solução obtida pelo NS-PIM para o potencial elétrico. Os resultados mostram que todos os métodos conseguiram reproduzir de forma exata (a precisão de máquina) a descontinuidade do campo elétrico na interface de materiais.

3.1.3 Calha com Condição de Contorno de Dirichlet Senoidal

Neste exemplo, são investigados os métodos de suavização frente a um problema com condição de contorno essencial senoidal. A calha é um quadrado de dimensões $1\text{m} \times 1\text{m}$, como mostra a Figura 3.2. As paredes $x = 0$, $x = 1\text{m}$ e $y = 0$ estão a um potencial de 10V. A parede superior ($y = 1\text{m}$) tem um potencial dado por uma função senoidal com um valor máximo igual a 100V. Testam-se os NS-PIM, ES-PIM e CS-PIM com seleção de nós suporte por esquemas

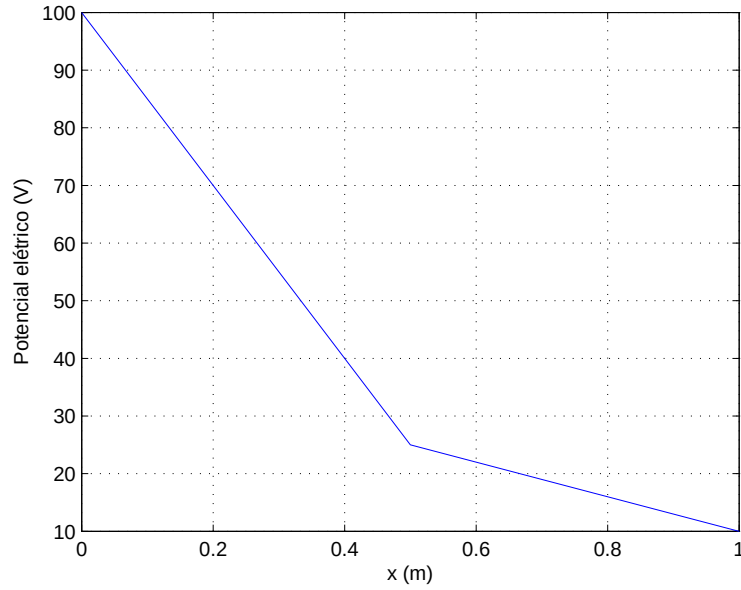


Figura 3.1: Potencial elétrico no capacitor de placas paralelas com dois dielétricos obtida pelo NS-PIM.

T e funções de forma geradas pelo PIMp e RPIMp com RBF do tipo Multiquádrica [Liu 2009]. A solução analítica do problema é dada por:

$$V^a = \frac{90 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{senh}(\pi y)}{\operatorname{senh}(\pi)} + 10 \quad [\text{V}]. \quad (3.15)$$

O primeiro passo foi verificar se os modelos conseguem aproximar corretamente o potencial elétrico. Para isso, a solução é calculada ao longo da linha $x = 0,5\text{m}$ para os modelos NS-PIM com esquema T6/3, ES-PIM com esquemas T3 e T6/3 e, finalmente, ES-PIM com funções RPIMp (ES-RPIM) e esquema T2L para seleção de nós de suporte. A Fig. 3.3 mostra a solução analítica e as produzidas pelos modelos para efeito de comparação. Pode ser notado que os resultados numéricos de todos os modelos estão em conformidade com a solução analítica.

Com intuito de investigar a taxa de convergência dos métodos para a solução exata, quatro distribuições de nós são utilizadas para calcular o erro na norma $\mathbb{L}^2$. Para efeito de comparação, o método dos elementos finitos também é testado. Todos os modelos utilizam os mesmos conjuntos de nós e as mesmas malhas. A Fig. 3.4 mostra o erro da solução em escala logarítmica para as diferentes densidades de nós, representadas pelo espaçamento nodal h . Como esperado, o FEM alcança uma taxa de convergência em torno de 2,0 (2,04), igual ao valor teórico esperado para modelos lineares baseados em formas fracas. A solução produzida pelo CS-PIM(T3) é exatamente a mesma que a produzida pelo FEM, o que é esperado dado que seus domínios de suavização são os triângulos das malhas. Com exceção

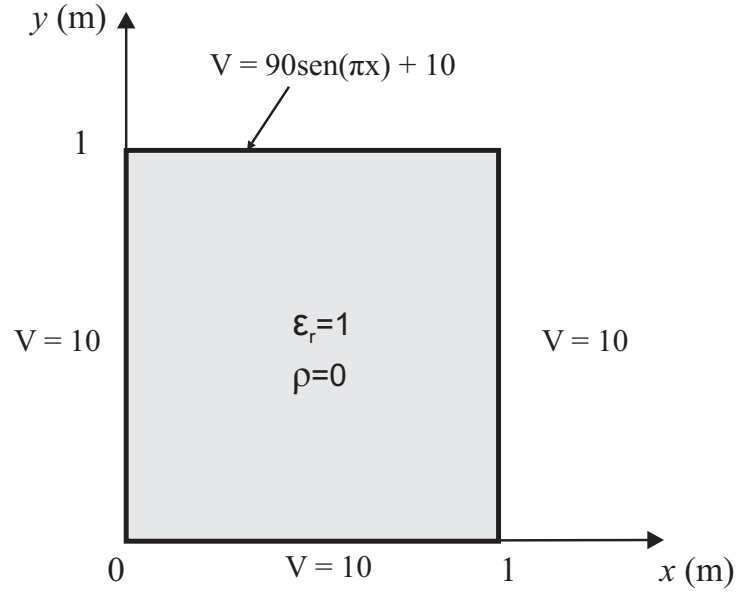


Figura 3.2: Calha quadrada com condição de contorno sonoidal na parte superior.

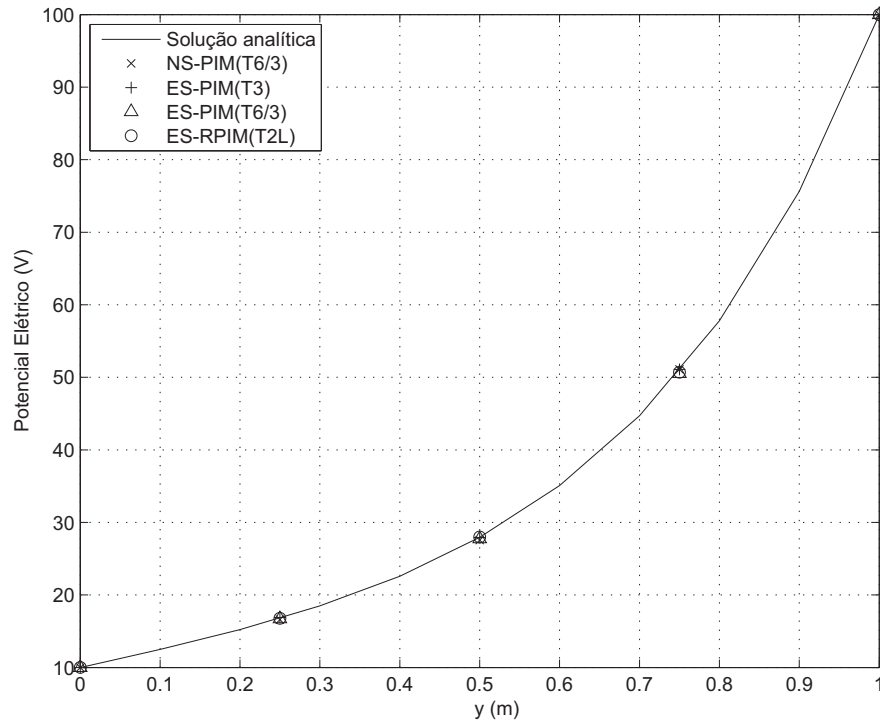


Figura 3.3: Potencial elétrico na calha em $x = 0,5\text{m}$ calculado utilizando métodos de suavização.

do ES-PIM quadrático, que obteve uma taxa de 1,94, todos os outros modelos tiveram taxas de convergência superiores à do método dos elementos finitos. Pode ser observado que os

métodos de suavização baseados em nós possuem acurácia inferior ao FEM. Por outro lado, os métodos de suavização baseados em aresta geraram os melhores resultados, em especial quando constroem suas funções de forma PIM utilizando funções de base radial. Isso também é esperado uma vez que estes modelos utilizam os esquemas T6 e T2L, que selecionam um número de nós de suporte maior para construir suas funções de forma, aumentando a precisão da aproximação.

A maior taxa de convergência (2,36) foi obtida pelo ES-RPIM com esquema T2L, indicando a presença de superconvergência [Liu 2009]. Outro modelo que também alcançou uma boa taxa (2,24) foi o ES-PIM com esquema T3, cuja solução também é mais precisa que a do método dos elementos finitos. Este método é particularmente interessante pois utiliza poucos nós de suporte, o que lhe concede boa eficiência computacional em termos de uso de memória e tempo de execução, além de não possuir parâmetros a serem ajustados como ocorre com os modelos que utilizam as funções de base radial. De acordo com a experiência do autor, determinar esses parâmetros é uma tarefa difícil pois estes podem variar de problema para problema e os valores adotados podem impactar significativamente a qualidade da solução numérica. Além disso, não há uma fórmula geral para obter seus valores ótimos.

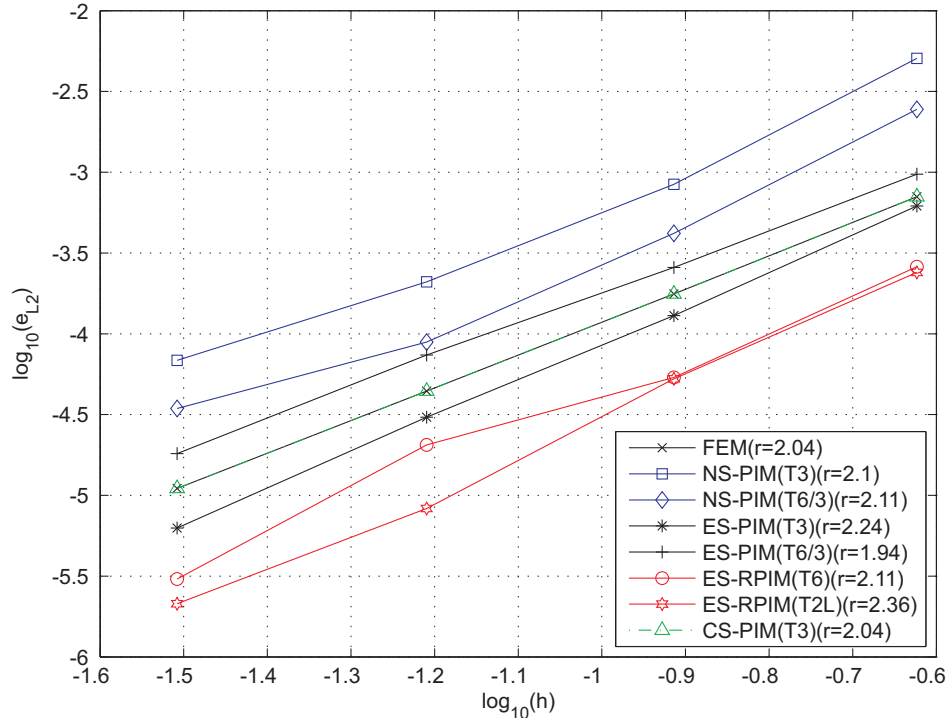


Figura 3.4: Taxas de convergência na norma L^2 dos métodos de suavização. Para comparação, é apresentada a solução com método dos elementos finitos.

Prosseguindo com a investigação das características dos métodos de suavização, uma avaliação da eficiência computacional dos modelos foi realizada. Uma vez que os métodos de suavização por aresta apresentaram os melhores resultados para taxa de convergência e precisão, foram os únicos incluídos no teste.

Sabe-se que o método dos elementos finitos possui um tempo de processamento consideravelmente inferior ao dos métodos sem malha tradicionais, como o EFG e o MLPG, quando utilizam a mesma distribuição de nós. Todavia, uma comparação mais justa é avaliar o custo computacional em relação à precisão da solução numérica dos modelos. Seguindo essa linha, o método dos elementos finitos ainda assim supera os métodos sem malha tradicionais. Esse cenário muda quando compara-se o FEM com os métodos de suavização de gradiente. Os erros na norma $\mathbb{L}^2$ em função do tempo de processamento gasto pelos modelos são mostrados na Figura 3.5. Todos os métodos de suavização, exceto o ES-PIM (T6/3), possuem eficiência computacional comparável ao métodos dos elementos finitos. Em particular, o ES-PIM com esquema T3 mostrou ser o método computacionalmente mais eficiente em termos de tempo de processamento, como colocado anteriormente, superando inclusive o FEM em todo o cenário considerado. Este resultado deve-se ao fato do ES-PIM (T3) gerar soluções com menor erro que o FEM para a mesma malha, mas gastando um tempo de processamento não muito maior, isto é, as diferenças de tempo de processamento entre os dois é compensada por uma precisão maior do método de suavização.

3.1.4 Calha 3D

Os exemplos anteriores solucionaram problemas em duas dimensões. Nesta seção, um problema eletrostático tridimensional é solucionado pelo Método de Interpolação de Pontos Suavizado por Face (FS-PIM). Como visto na Seção 2.5, o FS-PIM cria os domínios de suavização baseados nas faces tetraédricas da malha de integração.

O problema em questão possui um domínio cúbico de lado unitário, mostrado na Figura 3.6. A face de cima está a um potencial elétrico que varia senoidalmente de 0 a 10V conforme Figura 3.6. As outras faces do cubo estão a um potencial nulo. No problema não há cargas elétricas. A solução analítica para o problema é:

$$V^a = \frac{10 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sinh(z\pi\sqrt{2})}{\sinh(\pi\sqrt{2})} \text{ [V]} \quad (3.16)$$

A solução é computada usando 5 diferentes malhas tetraédricas com nós igualmente espaçados. O FS-PIM utiliza o PIMp para construir suas funções de forma e esquema T4 para seleção dos nós de suporte. A solução também é calculada pelo método dos elementos finitos

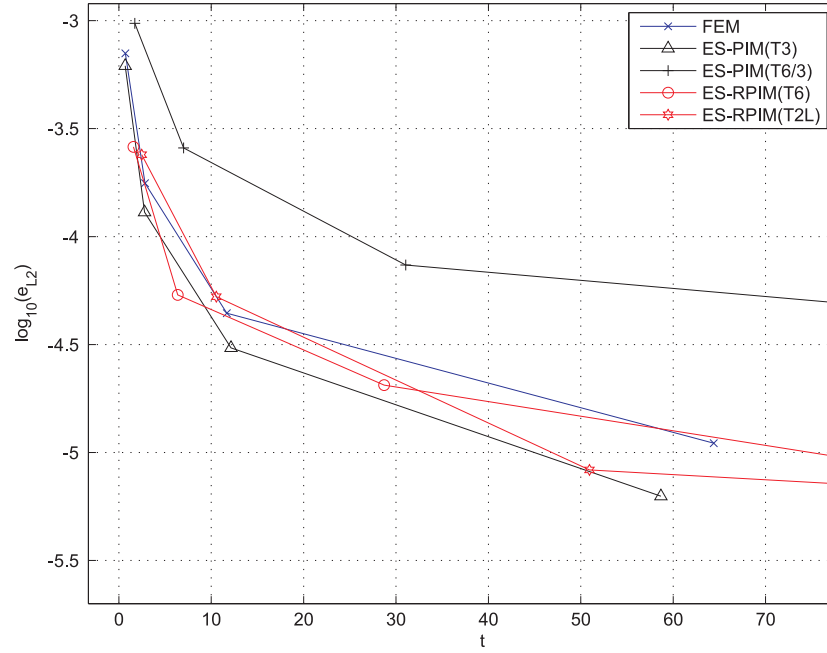


Figura 3.5: Eficiência computacional dos métodos de suavização. Para comparação, é apresentada a solução com o método dos elementos finitos. Tempo de processamento em segundos *versus* erro na norma $\mathbb{L}^2$.

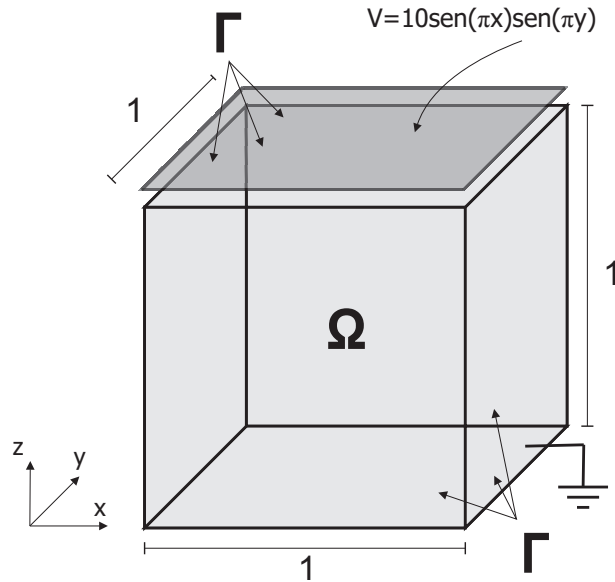


Figura 3.6: Calha em três dimensões.

utilizando as mesmas malhas para comparação. A Figura 3.7 mostra os erros na norma $\mathbb{L}^2$ para ambos métodos.

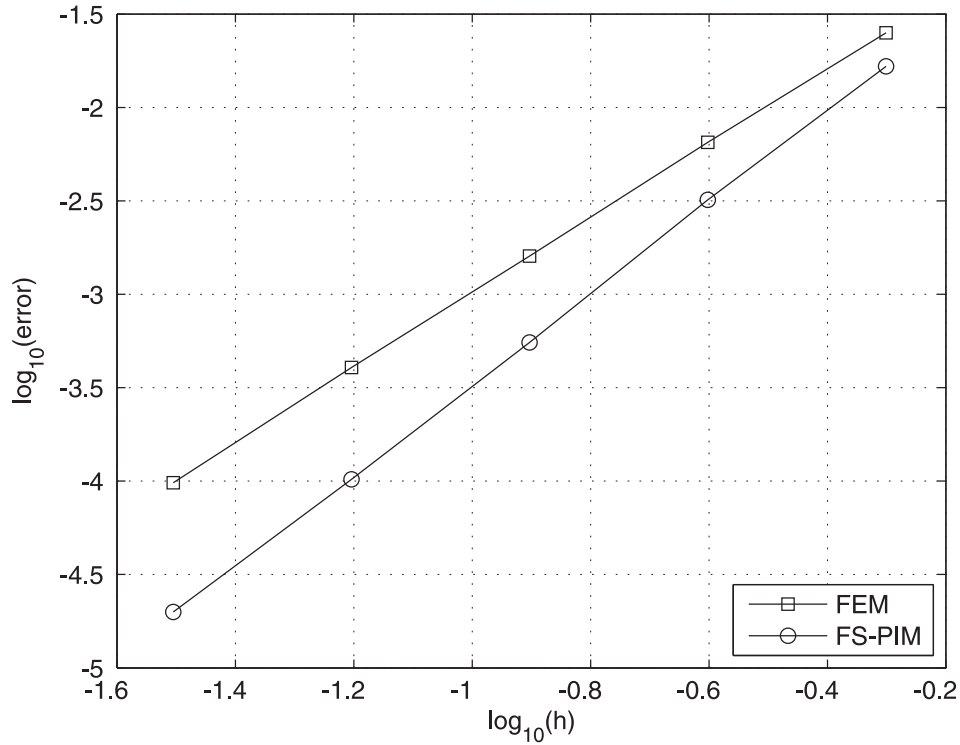


Figura 3.7: Erro da solução numérica do problema da calha tridimensional na norma L^2 usando o FS-PIM e o FEM. h é a distância média entre os nós.

Nota-se que o FS-PIM gera aproximações superiores ao FEM, tanto em precisão quanto em taxa de convergência. O FEM apresenta uma taxa convergência de 2,0, valor esperado para modelos lineares baseados em formas fracas, enquanto o FS-PIM apresenta uma taxa de convergência de 2,4, confirmando a presença da superconvergência para modelos baseados em formas W^2 [Liu 2009].

3.1.5 Impacto da Qualidade da Malha na Solução

Os métodos PIM baseados em suavização de gradientes utilizam uma malha para efetuar a integração da forma W^2 e para selecionar os nós de suporte no processo de construção das funções de forma. O método dos elementos finitos também utiliza uma malha para integração da forma fraca e para construir suas funções de forma. Então qual seria a vantagem de se utilizar o SPIM? A resposta a essa pergunta está em quão sensível à qualidade da malha é o SPIM. Sabe-se que a precisão da solução obtida pelo método dos elementos finitos é fortemente influenciada pela qualidade da malha utilizada: quanto pior a malha, isto é, quanto maior a presença de elementos degenerados, pior a solução numérica. Isso também acontece com o SPIM, mas de forma mais amena.

Nesta seção investiga-se a influência da qualidade da malha nos métodos SPIM comparados ao FEM. Como os métodos de suavização por aresta apresentaram os melhores resultados nos exemplos anteriores, foram os únicos incluídos no teste.

Um problema eletrostático é utilizado como base para os resultados. O domínio do problema é $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, onde uma densidade de carga elétrica ρ está presente com a seguinte distribuição:

$$\rho = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \text{ [C/m}^3\text{]} \quad (3.17)$$

Além disso, a fronteira do domínio está a um potencial elétrico de 0V. Quatro diferentes tipos de malhas são utilizados, como mostra a Figura 3.8:

- Malha regular: triângulos isósceles retângulos.
- Malha distorcida 1: ângulos dos triângulos se aproximam de 0 e $\pi/2$.
- Malha distorcida 2: ângulos dos triângulos se aproximam de 0, $\pi/2$ e π .
- Malha distorcida 3: ângulos dos triângulos se aproximam de 0 e π . É a pior dentre as malhas.

O ES-PIM com esquema T3 e funções de forma geradas com o PIMp é utilizado para solucionar o problema. Para comparar o efeito da qualidade da malha na solução, o FEM também é utilizado para os mesmos conjuntos de malhas e nós. As Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 mostram os erros nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando as malhas regular, distorcida 1, distorcida 2 e distorcida 3, respectivamente.

Tabela 3.1: Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha regular em problema eletrostático. h_{max} é dado em metros.

Malha		Erro			
		$\mathbb{L}_2$		Energia	
#Nós	h_{max}	FEM	ES-PIM	FEM	ES-PIM
25	3,54E-01	3,90E-03	1,70E-03	2,30E-02	1,41E-02
81	1,77E-01	1,00E-03	3,14E-04	1,16E-02	4,60E-03
289	8,84E-02	2,66E-04	6,72E-05	5,80E-03	1,50E-03
1089	4,42E-02	6,69E-05	1,55E-05	2,90E-03	5,28E-04
4225	2,21E-02	1,67E-05	3,74E-06	1,50E-03	1,84E-04
16641	1,10E-02	4,19E-06	9,17E-07	7,28E-04	6,46E-05
Taxa de Convergência:		1,97	2,16	0,99	1,55

Nota-se que em todos os casos, os erros tanto na norma $\mathbb{L}^2$ quanto na norma de energia são menores para o ES-PIM. Quando comparam-se os resultados utilizando a malha regular e

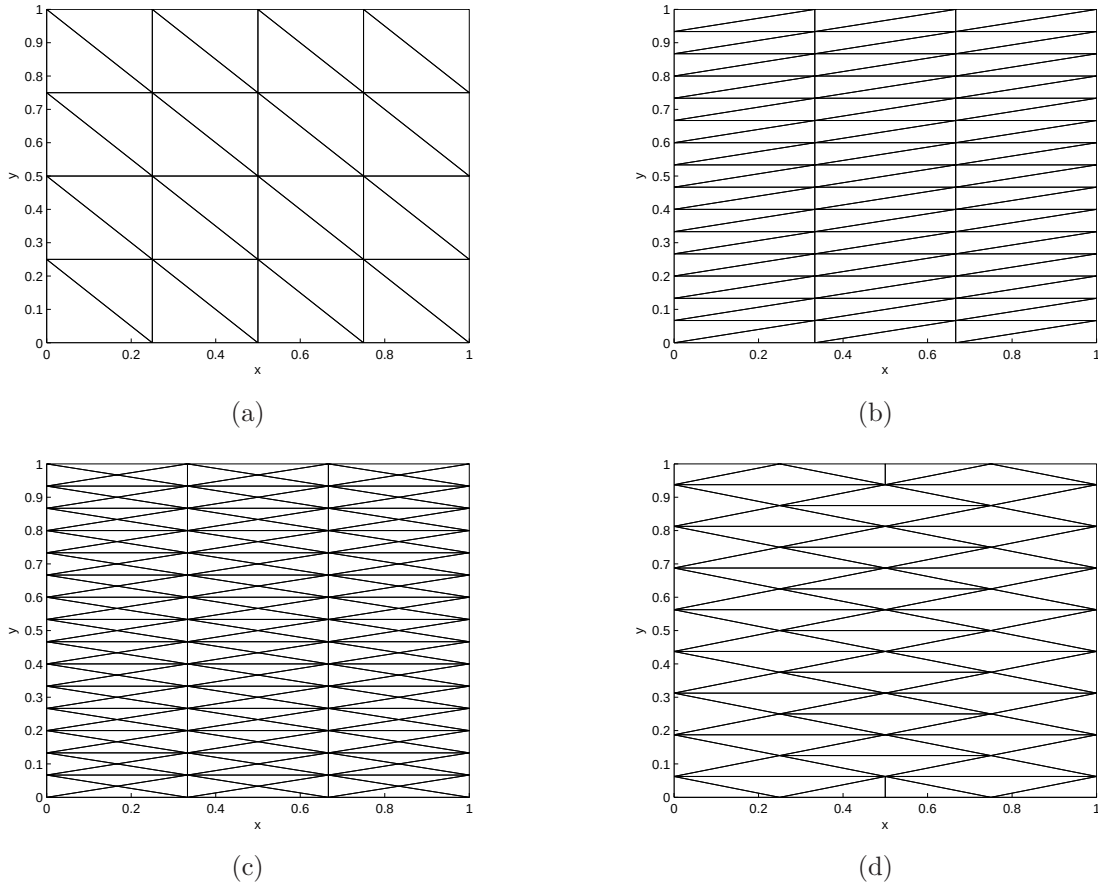


Figura 3.8: Malhas utilizadas para solucionar o problema eletrostático na análise do impacto da qualidade da malha nos métodos de suavização. (a) Malha regular. (b) Malha distorcida 1. (c) Malha distorcida 2. (d) Malha distorcida 3.

a malha distorcida 1, não se vê mudança significativa nas taxas de convergência. Para a malha distorcida 2, há uma queda nas taxas de convergência do ES-PIM, mas elas ainda se mantêm acima das taxas do FEM. O cenário se torna interessante quando analisa-se a malha distorcida 3. Esta malha é a de pior qualidade dentre todas. Com ela, o método dos elementos finitos é profundamente atingido, e o erro praticamente estabiliza-se mesmo com o refinamento da malha. Isso implica que o FEM, neste caso, não está convergindo para a solução exata do problema. Em contrapartida, o ES-PIM praticamente mantém as taxas de convergência, tanto para o potencial quanto para o campo, mostrando que o ES-PIM possui menor sensibilidade a malhas distorcidas que o FEM. Isso é uma característica muito importante, principalmente em problemas com geometrias complexas em três dimensões, onde a geração de malhas de boa qualidade é uma tarefa mais complicada.

Tabela 3.2: Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha distorcida 1 em problema eletrostático. h_{max} é dado em metros.

Malha		Erro			
		L_2		Energia	
		FEM	ES-PIM	FEM	ES-PIM
#Nós	h_{max}				
64	3,40E-01	3,50E-03	1,00E-03	2,24E-02	1,15E-02
512	1,44E-01	6,55E-04	1,42E-04	9,50E-03	2,90E-03
4096	6,68E-02	1,42E-04	2,91E-05	4,40E-03	8,74E-04
32768	3,23E-02	3,32E-05	6,71E-06	2,10E-03	2,86E-04
Taxa de Convergência:		1,98	2,12	1,01	1,57

Tabela 3.3: Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha distorcida 2 em problema eletrostático. h_{max} é dado em metros.

Malha		Erro			
		L_2		Energia	
		FEM	ES-PIM	FEM	ES-PIM
#Nós	h_{max}				
109	3,33E-01	1,90E-03	1,10E-03	1,54E-02	1,05E-02
953	1,43E-01	3,60E-04	2,00E-04	6,60E-03	3,90E-03
7921	6,67E-02	7,87E-05	4,38E-05	3,10E-03	1,70E-03
64481	3,23E-02	1,84E-05	1,03E-05	1,50E-03	8,31E-04
Taxa de Convergência:		1,99	2,00	1,00	1,09

Tabela 3.4: Erros do ES-PIM e FEM nas normas $\mathbb{L}^2$ e de energia utilizando malha distorcida 3 em problema eletrostático. h_{max} é dado em metros.

Malha		Erro			
		L_2		Energia	
		FEM	ES-PIM	FEM	ES-PIM
#Nós	h_{max}				
48	5,00E-01	1,55E-02	3,80E-03	6,03E-02	3,16E-02
302	2,50E-01	1,44E-02	8,85E-04	5,94E-02	1,49E-02
2202	1,25E-01	1,41E-02	2,16E-04	5,92E-02	7,20E-03
16946	6,25E-02	1,40E-02	5,37E-05	5,92E-02	3,60E-03
Taxa de Convergência:		0,05	2,05	0,01	1,05

3.2 Problemas Magnetostáticos

A Seção 2.7.2 apresentou a formulação de problemas magnetostáticos em duas dimensões em termos das formas forte e fraca. Como os procedimentos para dedução da forma fraca enfraquecida são os mesmos executados para problemas eletrostáticos, vistos na Seção 3.1, apresenta-se diretamente a forma fraca enfraquecida para problemas magnetostáticos bidimensionais:

Dados μ , J_z , g e h , determinar a componente $A_z \in S$ do potencial vetor magnético, tal que:

$$\sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{\mu} A_i^s \hat{\nabla} W_t \cdot \hat{\nabla} A_z = \int_{\Omega} W_t J_z d\Omega - \int_{\Gamma_h} W_t h d\Gamma \quad \forall W_t \in U \quad (3.18)$$

onde

$$S = \{A_z \mid A_z \in \mathbb{G}_h^1(\Omega), A_z(\mathbf{x}) = g, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \quad (3.19)$$

$$U = \{W_t \mid W_t \in \mathbb{G}_h^1(\Omega), W_t(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g\} \quad (3.20)$$

Discretização da forma fraca enfraquecida

O procedimento de discretização da forma fraca enfraquecida de problemas magnetostáticos é análogo ao procedimento adotado para problemas eletrostáticos, visto na Seção 3.1. Utilizando as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} A_z(\mathbf{x}) &\approx A_z^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in S_n} \phi_j(\mathbf{x}) A_{zj} \\ W_t(\mathbf{x}) &\approx W_t^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in S_n} \phi_j(\mathbf{x}) W_{tj} \end{aligned} \quad (3.21)$$

e substituindo na forma fraca enfraquecida 3.18, chega-se, após desenvolvimentos, ao sistema linear:

$$\mathbf{K} \mathbf{A}_z = \mathbf{F} \quad (3.22)$$

onde

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_s} \epsilon A_i^s [\hat{\nabla} \Phi]^T [\hat{\nabla} \Phi] \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \Phi J_z d\Omega - \int_{\Gamma_h} \Phi h d\Gamma \quad (3.24)$$

e

$$[\hat{\nabla} \Phi] = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma_x^s} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \Phi d\Gamma \quad (3.25)$$

3.2.1 Rolamento Magnético Radial

Este exemplo trata de um rolamento magnético radial de oito pólos obtido de [Meeker 1999]. Como mostra a 3.9, é um problema com uma geometria mais complexa que os anteriormente

tratados neste trabalho. No exemplo original, o material ferromagnético possui uma curva $B-H$ não linear. Neste trabalho, a não linearidade é desconsiderada para simplificação. As bobinas possuem 80 voltas cada e são excitadas por correntes elétricas de intensidade da seguinte maneira: as bobinas dos quadrantes da esquerda e da direita possuem corrente de 6A, as do quadrante de cima possuem corrente de 12A, e as do quadrante de baixo possuem corrente de 0A.

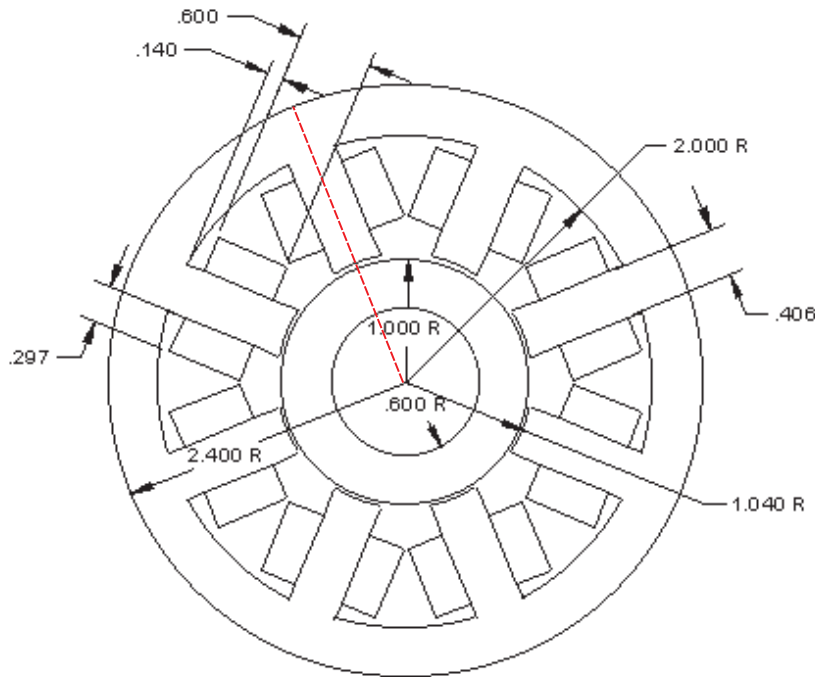


Figura 3.9: Rolamento magnético radial de oito pólos. As dimensões estão em polegadas e R indica uma medida radial. A linha tracejada vermelha no braço superior esquerdo é utilizada para cálculos de pós processamento. Figura adaptada de [Meeker 1999].

Este é um problema magnetostático cuja variável a ser determinada é a componente z do vetor potencial magnético A (Equação 2.86). A densidade de fluxo magnético B é computada em todo o domínio usando o ES-PIM com esquema T3 e uma malha de 20.513 nós e 40.464 elementos triangulares, e mostrada na Fig. 3.10. As linhas de fluxo concentram-se, em maior parte, no material ferromagnético e os níveis de B estão de acordo com [Meeker 1999].

A malha citada é usada pelo ES-PIM e FEM para obter B ao longo do segmento radial no braço superior esquerdo do rolamento mostrado em vermelho na Figura 3.9, de $(0; 0)$ a $(-0, 9; 2, 2)$. A solução de referência adotada é a aproximação numérica gerada pelo método dos elementos finitos com uma malha de 189.492 nós e 377.677 elementos triangulares. A solução de referência juntamente com as soluções do ES-PIM e do FEM são mostradas na

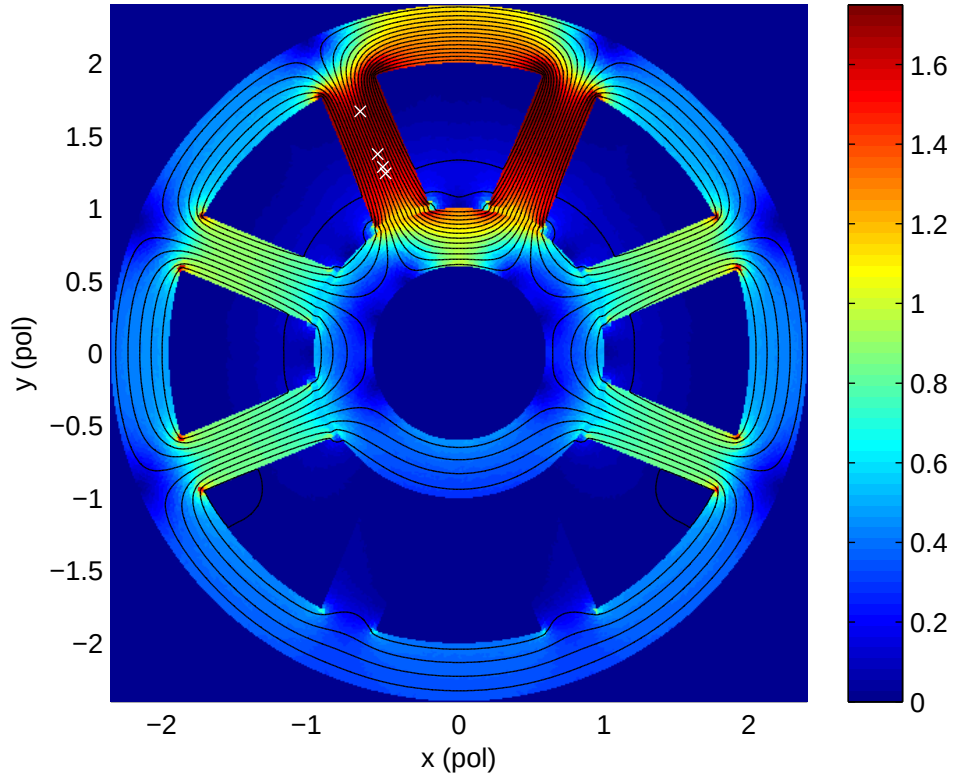


Figura 3.10: Densidade de fluxo magnético (T) no rolamento magnético calculada pelo ES-PIM com esquema T3. Linhas de fluxo também são mostradas. Os marcadores x na cor branca indicam as posições onde ocorrem os quatro maiores erros relativos percentuais da solução numérica ao longo de um segmento radial no braço superior esquerdo do rolamento, de $(0; 0)$ a $(-0,9; 2,2)$.

Figura 3.11. Na região central do braço, a solução do ES-PIM é mais precisa que a do FEM. Na Figura 3.12 são mostradas as soluções em maior detalhe na região central do braço e, indicados por círculos, os locais onde ocorrem os quatro maiores erros relativos percentuais para cada modelo, sendo seus valores listados na Tabela 3.5. Esse locais são, também, exibidos na Figura 3.10 com os marcadores x na cor branca para a solução do ES-PIM. Nota-se que os erros da solução do ES-PIM são menores que os erros da solução do FEM, e que a primeira está em maior concordância com a solução de referência.

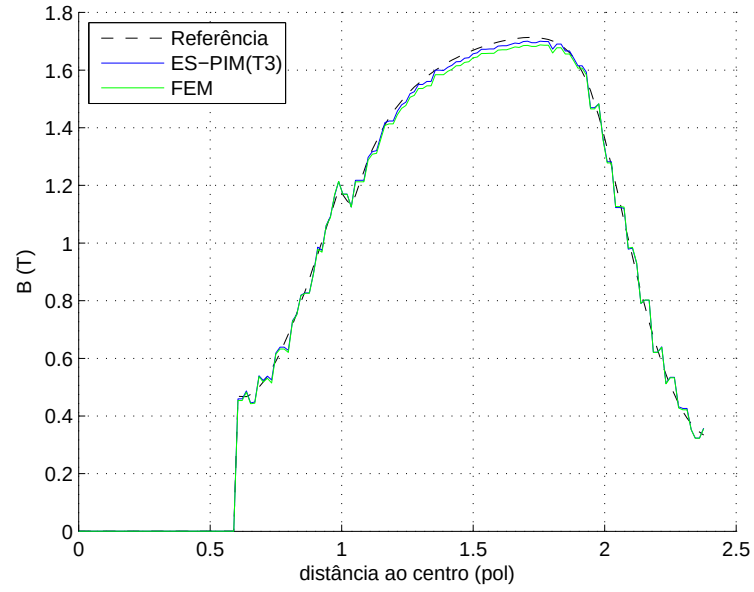


Figura 3.11: Densidade de fluxo magnético (T) calculada pelo ES-PIM com esquema T3 e pelo FEM em um segmento radial no braço superior esquerdo do rolamento magnético, de $(0; 0)$ a $(-0,9; 2,2)$.

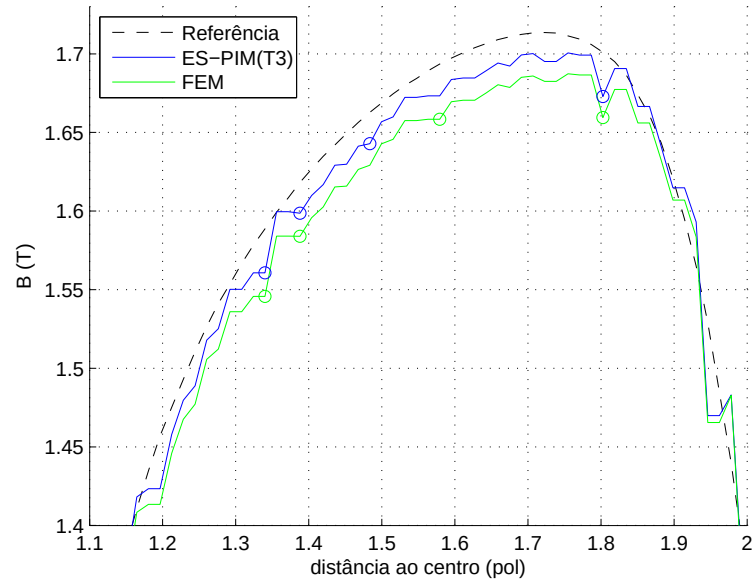


Figura 3.12: Densidade de fluxo magnético (T) calculada pelo ES-PIM com esquema T3 e pelo FEM na região central de um segmento radial no braço superior esquerdo do rolamento magnético, de $(0; 0)$ a $(-0,9; 2,2)$. Círculos indicam onde ocorrem os quatro maiores erros relativos percentuais na região central do braço para cada modelo.

Tabela 3.5: Quatro maiores erros relativos percentuais (%) para a densidade de fluxo magnético na região central do braço superior esquerdo do rolamento magnético, de (0; 0) a (−0, 9; 2, 2), obtidos pelas soluções numéricas do ES-PIM e do FEM. As posições onde ocorrem os erros são também indicadas.

Posição	ES-PIM (T3)	Posição	FEM
(−0, 51; 1, 24)	1.77	(−0, 51; 1, 24)	2.71
(−0, 68; 1, 67)	1.66	(−0, 68; 1, 67)	2.44
(−0, 53; 1, 28)	1.21	(−0, 53; 1, 28)	2.12
(−0, 56; 1, 37)	1.20	(−0, 60; 1, 46)	2.07

3.3 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo: Guia de Onda

Neste capítulo, até o presente momento, apresentou-se a aplicação do Método de Interpolação de Pontos Suavizado em problemas eletromagnéticos escalares. O SPIM funciona muito bem para esta classe de problemas. Entretanto, quando aplicado a problemas vetoriais, surgem problemas como a presença de modos espúrios na solução numérica. Para investigar tais características, esta seção traz a aplicação do SPIM a problemas eletromagnéticos vetoriais, em especial, ao problema de determinar as frequências de corte de um guia de onda. A formulação do problema é apresentada bem como a forma fraca enfraquecida e sua discretização.

Na Seção 2.7.3 apresentou-se a forma fraca para problemas vetoriais harmônicos no tempo. Com base na Equação 2.107, a forma fraca para o problema do guia de onda em um domínio Ω é

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega = \omega^2 \int_{\Omega} \epsilon \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \quad (3.26)$$

sendo aplicada a condição de contorno essencial homogênea 2.97b nas paredes Γ do guia.

Note que a forma fraca 3.26 envolve o cálculo do rotacional das funções $\vec{W}_t$ e $\vec{E}$, que deverá ser suavizado para a obtenção da forma fraca enfraquecida para o problema.

3.3.1 Suavização do Rotacional

A fim de deduzir a forma fraca enfraquecida, é necessário primeiro realizar a operação de suavização do rotacional de maneira similar à suavização do gradiente. Tomando a representação integral do rotacional de $\vec{E}$, tem-se:

$$\hat{\nabla} \times \vec{E} = \int_{\Omega_x^s} (\nabla \times \vec{E}) \hat{W} d\Omega \quad (3.27)$$

A partir de uma identidade vetorial, pode-se escrever:

$$\nabla \times (\vec{E} \hat{W}) = \hat{W} (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \times \nabla \hat{W} \quad (3.28)$$

Substituindo a Equação 3.28 em 3.27, chega-se a:

$$\hat{\nabla} \times \vec{E} = \int_{\Omega_x^s} \nabla \times (\vec{E} \hat{W}) d\Omega + \int_{\Omega_x^s} \vec{E} \times \nabla \hat{W} d\Omega \quad (3.29)$$

Aplicando o teorema do rotacional no primeiro termo do lado direito da Equação 3.29:

$$\hat{\nabla} \times \vec{E} = \int_{\Gamma_x^s} \vec{n} \times (\vec{E} \hat{W}) d\Gamma + \int_{\Omega_x^s} \vec{E} \times \nabla \hat{W} d\Omega \quad (3.30)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a Γ_x^s . Considerando a função de suavização $\hat{W}$ como descrita na Equação 2.51, a Equação 3.30 é simplificada para

$$\hat{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{A_x} \int_{\Gamma_x^s} \vec{n} \times \vec{E} d\Gamma \quad (3.31)$$

que é o rotacional suavizado em um subdomínio de suavização Ω_x^s .

Note que para o cálculo do rotacional suavizado, não é efetuada nenhuma operação de diferenciação. Portanto, é possível utilizar as funções de forma PIM sem o prejuízo de obter uma formulação não conforme. Além disso, assim como o gradiente suavizado, o rotacional suavizado é constante em Ω_x^s .

3.3.2 Forma Fraca Enfraquecida e Discretizada

O procedimento para dedução da forma fraca enfraquecida para o problema vetorial harmônico no tempo é semelhante ao visto nos problemas eletrostático e magnetostático. Desta maneira, foca-se aqui na formulação resultante.

Dividindo o domínio Ω em N_s subdomínios de suavização Ω_x^s , aplicando a suavização de rotacional sobre $\vec{E}$ e $\vec{W}_t$ e considerando que os rotacionais suavizados são constantes sobre Ω_x^s , chega-se à forma fraca enfraquecida para o problema:

$$\sum_{i=1}^{N_s} A_i \frac{1}{\mu} (\hat{\nabla} \times \vec{W}_t) \cdot (\hat{\nabla} \times \vec{E}) = \omega^2 \int_{\Omega} \epsilon \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \quad (3.32)$$

Neste trabalho, vamos considerar o campo em modo TE_z, isto é, o campo elétrico $\vec{E}$ possui componentes em x e y , enquanto a direção de propagação é z . Utilizando as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\mathbf{x}) &\approx \vec{E}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in S_n} \begin{bmatrix} \phi_j & 0 \\ 0 & \phi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xj} \\ E_{yj} \end{bmatrix} = \sum_{j \in S_n} [\Phi_j] \mathbf{E}_j \\ \vec{W}_t(\mathbf{x}) &\approx \vec{W}_t^h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in S_n} \begin{bmatrix} \phi_j & 0 \\ 0 & \phi_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{txj} \\ W_{tyj} \end{bmatrix} = \sum_{j \in S_n} [\Phi_j] \mathbf{W}_{tj}\end{aligned}\quad (3.33)$$

onde E_{xj} e E_{yj} são, respectivamente, as componentes x e y do campo elétrico $\vec{E}$ do j -ésimo nó do domínio de suporte S_n , e ϕ_j é a função de forma do j -ésimo nó calculada no ponto $\mathbf{x}$.

Substituindo as expressões da Equação 3.33 na forma fraca enfraquecida 3.32, chega-se, após desenvolvimentos, ao sistema linear:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix} = \omega^2 \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix}\quad (3.34)$$

onde $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$ são vetores que contêm as componentes x e y do campo elétrico de todos os nós presentes no domínio, respectivamente, e

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_s} A_i^s \frac{1}{\mu} [\hat{\nabla} \times \Phi]^T [\hat{\nabla} \times \Phi]\quad (3.35)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Omega} \epsilon [\Phi]^T [\Phi] d\Omega\quad (3.36)$$

com

$$[\hat{\nabla} \times \Phi] = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma_x^s} \begin{bmatrix} -n_y & n_x \end{bmatrix} [\Phi] d\Gamma\quad (3.37)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix}\quad (3.38)$$

3.3.3 Resultados

Considere que o guia de onda tenha uma seção quadrada de lado π , isto é, o domínio do problema é $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$, e que $\mu = 1$ e $\epsilon = 1$. Além disso, considere que a fronteira $\partial\Omega$ seja do tipo PEC. Deseja-se determinar os autovalores ω^2 , associados às frequências de corte do guia, que satisfazem as Equações 2.97a e 2.97b. Este problema possui solução analítica [Pozar 2005]:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= m^2 + n^2 \neq 0 \\ m, n &= 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (3.39)$$

Os primeiros 20 autovalores são mostrados na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Autovalores analíticos para o problema do guia de onda.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ω^2	1	1	2	4	4	5	5	8	9	9	10	10	13	13	16	16	17	17	18	20

O problema foi resolvido utilizando o ES-PIM com seleção de nó de suporte por esquema T3 e uma malha regular com 65×65 nós. A Tabela 3.7 mostra os primeiros 20 autovalores obtidos com a solução numérica. Para efeito de comparação, são mostrados, também, os autovalores analíticos.

Tabela 3.7: Autovalores para o problema do guia de onda obtidos pelo ES-PIM (T3). É utilizada uma malha regular com 65×65 nós.

Ordem	Analítico	Numérico	Ordem	Analítico	Numérico
1	1	1,21	11	10	7,98
2	1	1,21	12	10	7,99
3	2	2,19	13	13	9,02
4	4	2,19	14	13	9,20
5	4	2,45	15	16	9,20
6	5	4,00	16	16	10,00
7	5	4,42	17	17	10,38
8	8	4,49	18	17	10,38
9	9	5,55	19	18	11,21
10	9	5,55	20	20	13,63

Pode ser notado que na solução numérica existem autovalores espúrios, isto é, autovalores para os quais os autovetores geram soluções que não satisfazem as equações de Maxwell, portanto, não têm significado físico. Isto ocorre pois a condição do divergente

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \quad (3.40)$$

não é atendida.

Modos espúrios também são encontrados na solução numérica produzida pelo Método dos Elementos Finitos para este problema, quando elementos nodais são utilizados para aproximar o campo elétrico [Jin 2002]. Neste caso, os modos espúrios estão presentes também devido à não satisfação da condição do divergente (Equação 3.40). Para que a Equação 2.97a seja

satisfeita, é necessário que o campo $\vec{E}$ seja duplamente diferenciável, ou seja, seu rotacional $(\nabla \times \vec{E})/\mu$ deve ser contínuo. Dessa maneira, a identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0 \quad (3.41)$$

é prontamente satisfeita. Todavia, a solução do FEM obtida pela forma fraca implica que apenas as funções de forma sejam contínuas, e não suas derivadas. Com isso, o rotacional $(\nabla \times \vec{E})/\mu$ acaba por não ser contínuo e, assim, a condição do divergente não é satisfeita [Jin 2002].

De forma semelhante, os métodos SPIM buscam soluções a partir da forma fraca enfraquecida, e os requisitos de diferenciabilidade das funções de forma são ainda mais fracos. A solução encontra-se no espaço $\mathbb{G}_h^1$: as funções de forma são contínuas por partes, ocorrendo descontinuidades entre os domínios de suavização, e suas derivadas não são contínuas. Portanto, o rotacional $(\nabla \times \vec{E})/\mu$ é descontínuo e a condição do divergente não é atendida, gerando os modos espúrios.

3.3.4 Eliminação de Modos Espúrios: Método da Penalidade

Como visto na seção 3.3.3, o ESPIM gera uma solução corrompida por valores errôneos, chamados modos espúrios. Tais modos aparecem devido à não satisfação da condição do divergente (Equação 3.40). A mesma situação ocorre com o FEM. No Método dos Elementos Finitos, podemos considerar três frentes de ataque que buscam eliminar as soluções espúrias.

A primeira delas apoia-se em buscar funções de aproximação cujas derivadas são contínuas dentro e na interface dos elementos, o que garante que o rotacional do campo seja também contínuo e, assim, satisfazem a condição do divergente. Tais funções são de classe C^1 , enquanto as funções usuais são de classe C^0 . Uma desvantagem dessa abordagem é a dificuldade de se construir e implementar funções C^1 , que são mais complexas que as funções usuais C^0 [Jin 2002].

A segunda frente consiste em aplicar o método da penalidade para forçar a condição do divergente, adicionando um termo de penalidade à formulação fraca do problema [Paulsen e Lynch 1991, Jin 2002, Rahman e Davies 1984]. A formulação com o termo adicional é chamada de formulação restrita. A vantagem de se utilizar o método da penalidade é que a ordem do sistema matricial não sofre alteração. Em contrapartida, os modos espúrios não são completamente eliminados, mas reduzidos de acordo com o valor do fator de penalidade. Acrescenta-se ainda o fato de que o valor ótimo para o fator de penalidade é desconhecido. Uma outra abordagem é apresentada em [Nicomedes 2015] para métodos sem malha, na qual há, também, alteração da formulação do problema, neste caso com o acréscimo de retrições

com multiplicadores de Lagrange para forçar a condição do divergente. Esta formulação é denominada formulação mista e acarreta em aumento na ordem do sistema de equações a ser resolvido.

A terceira e mais popular abordagem é a utilização de outros tipos de elementos, chamados de elementos vetoriais ou de aresta. Nesta abordagem, os graus de liberdade são associados às arestas da malha e não mais aos nós. Portanto, as funções de forma possuem funções de base vetorial ao invés de funções de base escalares. Elementos de aresta foram inicialmente descritos por Whitney [Whitney 1957] e posteriormente por Nedelec [Nedelec 1980]. Estes elementos geram aproximações que satisfazem a condição do divergente e, por isso, livres de modos espúrios.

Neste trabalho, o autor seguirá um caminho de certa maneira semelhante às abordagens utilizadas pelo FEM para eliminar a presença de modos espúrios na solução numérica com o método da penalidade, que podem ser vistas em [Rahman e Davies 1984, Jin 2002, Paulsen e Lynch 1991]. Alternativas em métodos sem malha são propostas nos Capítulos 4 e 5 com a utilização de funções de forma com RBF vetorial e de aresta, respectivamente.

Nesta seção é proposta uma formulação restrita para a forma fraca enfraquecida do Método de Interpolação de Pontos Suavizados com a adição de um termo de penalidade. A ideia é acrescentar um termo de penalidade à forma fraca 3.26 para forçar a condição do divergente, resultando em uma formulação restrita [Rahman e Davies 1984]:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\alpha}{\mu \epsilon^2} (\nabla \cdot (\epsilon \vec{W}_t)) \cdot (\nabla \cdot (\epsilon \vec{E})) d\Omega = \omega^2 \int_{\Omega} \epsilon \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \quad (3.42)$$

onde α é o fator de penalidade.

Para deduzir a forma fraca enfraquecida, é preciso antes realizar a suavização do divergente. Tomando a representação integral do divergente de $\epsilon \vec{E}$, tem-se:

$$\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \int_{\Omega_x^s} (\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E})) \hat{W} d\Omega \quad (3.43)$$

Utilizando uma identidade vetorial, tem-se que:

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E} \hat{W}) = \hat{W} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) + \epsilon \vec{E} \cdot \nabla \hat{W} \quad (3.44)$$

Ao substituir a Equação 3.44 na representação integral do divergente 3.43, chega-se a:

$$\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \int_{\Omega_x^s} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E} \hat{W}) d\Omega - \int_{\Omega_x^s} \epsilon \vec{E} \cdot \nabla \hat{W} d\Omega \quad (3.45)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo do lado direito da Equação 3.45:

$$\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \int_{\Gamma_x^s} \vec{n} \cdot (\epsilon \vec{E} \hat{W}) d\Gamma - \int_{\Omega_x^s} \epsilon \vec{E} \cdot \nabla \hat{W} d\Omega \quad (3.46)$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a Γ_x^s . Considerando a função de suavização $\hat{W}$ como descrita na Equação 2.51, a Equação 3.46 é simplificada para

$$\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \frac{1}{A_x} \int_{\Gamma_x^s} \vec{n} \cdot (\epsilon \vec{E}) d\Gamma \quad (3.47)$$

sendo esta a operação de suavização do divergente em um domínio de suavização Ω_x^s .

Aplicando o mesmo procedimento realizado anteriormente para dedução da forma W^2 , isto é, dividindo o domínio Ω do problema em N_s subdomínios de suavização Ω_x^s , aplicando a suavização de rotacional e de divergente sobre $\vec{E}$ e $\vec{W}_t$, e considerando que tanto os rotacionais quanto os divergentes suavizados são constantes em Ω_x^s , chega-se a forma fraca enfraquecida restrita com penalidade para o problema:

$$\sum_{i=1}^{N_s} A_i^s \frac{1}{\mu} (\hat{\nabla} \times \vec{W}_t) \cdot (\hat{\nabla} \times \vec{E}) + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\alpha A_i^s}{\mu \epsilon^2} (\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{W}_t)) \cdot (\hat{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E})) = \omega^2 \int_{\Omega} \epsilon \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \quad (3.48)$$

Tomando as aproximações descritas pela Equação 3.33 e substituindo na forma fraca enfraquecida restrita 3.48, chega-se, após desenvolvimentos, ao sistema linear:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix} = \omega^2 \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são definidos pelas Equações 3.35 e 3.36, respectivamente, e

$$\mathbf{A}^\alpha = \alpha \sum_{i=1}^{N_s} A_i^s \frac{1}{\mu} [\hat{\nabla} \cdot \Phi]^T [\hat{\nabla} \cdot \Phi] \quad (3.50)$$

com

$$[\hat{\nabla} \cdot \Phi] = \frac{1}{A_i^s} \int_{\Gamma_x^s} \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} [\Phi] d\Gamma \quad (3.51)$$

O problema tratado na Seção 3.3.3 e resolvido com o ES-PIM é solucionado agora com a adição do termo da penalidade presente na formulação restrita 3.48. A mesma malha é empregada (regular com 65×65 nós) assim como o mesmo esquema de seleção de nós (T3). Usualmente, utilizam-se valores mais elevados para o fator de penalidade em métodos sem malha para forçar que a restrição inclusa na formulação seja satisfeita, que, neste caso, é a condição do divergente nulo. Seguindo essa linha, optou-se pelo valor do fator penalidade de $\alpha = 10^3$. A Tabela 3.8 apresenta os autovalores obtidos com o novo método. Os resultados mostram que, agora, os autovalores numéricos estão em concordância com os analíticos e os modos espúrios foram eliminados.

Tabela 3.8: Autovalores para o problema do guia de onda obtidos pelo ES-PIM (T3) com o método da penalidade. É utilizado um fator de penalidade $\alpha = 10^3$ e uma malha regular com 65×65 nós.

Ordem	Analítico	Numérico
1	1	1,00
2	1	1,00
3	2	2,00
4	4	4,00
5	4	4,00
6	5	5,01
7	5	5,01
8	8	8,05
9	9	9,00
10	9	9,00

Ordem	Analítico	Numérico
11	10	10,03
12	10	10,03
13	13	13,12
14	13	13,12
15	16	16,00
16	16	16,00
17	17	17,05
18	17	17,05
19	18	18,27
20	20	20,21

Capítulo 4

Método sem Malha com RBF Vetorial

Como discutido previamente no Capítulo 3, o método da penalidade não elimina completamente os modos espúrios da solução numérica, mas sim reduz sua ocorrência. Dessa maneira, é natural que se busque uma alternativa à utilização da formulação W^2 restrita.

A fim de se trabalhar com formulações não restritas, é necessário utilizar outros tipos de funções de forma de maneira a satisfazer a condição do divergente nulo. Este capítulo apresenta um método sem malha alternativo que constrói suas funções de forma baseadas em nós mas com funções de base vetoriais suportadas em funções de base radial. As funções de base são escolhidas de maneira tal que a condição do divergente nulo é atendida para que os modos espúrios sejam eliminados.

O procedimento de construção das funções de forma com RBFs vetoriais foi um trabalho desenvolvido, inicialmente, em [Lowitzsch 2002] e, posteriormente, aplicado em problemas eletromagnéticos em [Yang et al. 2014], especificamente em problemas no domínio do tempo, utilizando formulação forte e o método da colocação. O intuito neste trabalho é desenvolver um método de formulação fraca com o apoio dessa classe de funções de forma vetoriais e investigar sua validade na aplicação de problemas eletromagnéticos no domínio da frequência.

4.1 Funções de Forma com RBF Vetorial

Esta seção apresenta o desenvolvimento das funções de forma com RBFs vetoriais. A formulação matemática foi publicada originalmente no trabalho [Yang 2015] e é apresentada aqui com pequenas modificações de notação para melhor entendimento.

Suponha um campo vetorial $\vec{u}$ definido em um certo domínio Ω e que deseja-se aproximá-lo por uma função $\vec{u}^h$. Requer-se que a condição do divergente nulo seja atendida, isto é,

$$\nabla \cdot \vec{u}^h = 0 \quad (4.1)$$

Para atender à Equação 4.1, podemos escrever $\vec{u}^h$ como o rotacional de uma segunda função vetorial $\vec{w}$:

$$\vec{u}^h = \nabla \times \vec{w} \quad (4.2)$$

Adotando $\vec{w}$ como o rotacional de uma terceira função $\vec{v}$, tem-se:

$$\vec{u}^h = \nabla \times \nabla \times \vec{v} \quad (4.3)$$

que pode ser reescrita como:

$$\vec{u}^h = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad (4.4)$$

Considere coordenadas cartesianas, então o campo vetorial $\vec{v}$ pode ser escrito em função de suas três componentes:

$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T \quad (4.5)$$

e o operador ∇ é dado por

$$\nabla = [\partial_x, \partial_y, \partial_z]^T \quad (4.6)$$

onde ∂_x , ∂_y e ∂_z são as derivadas parciais em relação a x , y e z , respectivamente. Deste modo, os termos da Equação 4.4 podem ser escritos na forma matricial:

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \nabla^T \vec{v} \quad (4.7)$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \Delta \mathbf{I} \vec{v} \quad (4.8)$$

onde

$$\nabla \nabla^T = \begin{bmatrix} \partial_x^2 & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z \\ \partial_y \partial_x & \partial_y^2 & \partial_y \partial_z \\ \partial_z \partial_x & \partial_z \partial_y & \partial_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\Delta \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Substituindo as Equações 4.7 e 4.8 na Equação 4.4, tem-se

$$\vec{u}^h = (\nabla \nabla^T - \Delta \mathbf{I}) \vec{v} \quad (4.11)$$

com

$$\nabla\nabla^T - \Delta\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\partial_y^2 - \partial_z^2 & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_z \\ \partial_y\partial_x & -\partial_x^2 - \partial_z^2 & \partial_y\partial_z \\ \partial_z\partial_x & \partial_z\partial_y & -\partial_x^2 - \partial_y^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

A fim de discretizar a aproximação com um método sem malha em um ponto $\mathbf{x}$, utilizam-se funções de base radial para escrever $\vec{v}$ em função de um conjunto de n nós de suporte na vizinhança de $\mathbf{x}$:

$$\vec{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i \quad (4.13)$$

onde $\mathbf{A}_i = [A_{ix}, A_{iy}, A_{iz}]^T$ é o vetor relativo ao i -ésimo nó do domínio de suporte contendo os coeficientes das componentes x , y e z a se determinar, e $f_i(\mathbf{x})$ é a RBF calculada no ponto $\mathbf{x}$ centrada no nó i .

Substituindo a Equação 4.13 em 4.11, chega-se a

$$\begin{aligned} \vec{u}^h(\mathbf{x}) &= (\nabla\nabla^T - \Delta\mathbf{I}) \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\nabla\nabla^T - \Delta\mathbf{I}) f_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}) = (\nabla\nabla^T - \Delta\mathbf{I}) f_i(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \mathbf{F}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x})] \quad (4.16)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n]^T \quad (4.17)$$

Os vetores $\mathbf{A}_i$ são determinados fazendo com que a Equação 4.14 seja satisfeita em todos os n nós do domínio de suporte. Para cada nó j :

$$\vec{u}_j = \mathbf{F}(\mathbf{x}_j)\mathbf{A}, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

onde $\vec{u}_j$ é o campo $\vec{u}$ avaliado no nó j . Reescrevendo a Equação 4.18 na forma matricial:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{F}_Q\mathbf{A} \quad (4.19)$$

onde $\mathbf{U}_s$ é o vetor contendo os campos $\vec{u}$ avaliados em todos os nós de suporte:

$$\mathbf{U}_s = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n]^T \quad (4.20)$$

e $\mathbf{F}_Q$ é o equivalente à matriz de momentos do método RPIM, dada por:

$$\mathbf{F}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1) & \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_2) & \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_n) & \mathbf{F}_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Assumindo que a matriz $\mathbf{F}_Q$ admite inversa, multiplicando ambos lados da Equação 4.19 por $\mathbf{F}_Q^{-1}$ resulta em:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (4.22)$$

Fazendo a substituição da Equação 4.22 em 4.14, resulta

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_Q^{-1} \mathbf{U}_s = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (4.23)$$

onde $\Phi(\mathbf{x})$ é a matriz contendo as funções de forma vetoriais dos n nós de suporte, calculadas no ponto $\mathbf{x}$, e sua expressão é

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_Q^{-1} = [\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})] \quad (4.24)$$

sendo $\Phi_i(\mathbf{x})$ a função de forma vetorial do i -ésimo nó do domínio de suporte de $\mathbf{x}$.

Deve ser notado que $\mathbf{F}_i(\mathbf{x})$ é uma matriz 3×3 e representa uma base vetorial construída a partir da função RBF $f_i(\mathbf{x})$, portanto, é considerada uma RBF vetorial relativa ao nó i [Yang 2015]. Uma vez que o domínio de suporte possui n nós, a matriz $\mathbf{F}_Q$ possui dimensão $3N \times 3N$. Um número grande de nós de suporte aumenta o custo computacional para calcular a inversa de $\mathbf{F}_Q$, já um número pequeno de nós produz uma aproximação de baixa qualidade.

Como forçou-se que as funções fossem satisfeitas em cada nó de suporte, as funções de forma Φ_i possuem a propriedade do Delta de Kronecker, ou seja,

$$\Phi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{se } i = j \\ \mathbf{0} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Isto implica que as funções de forma são interpolantes e faz com que as condições de contorno de Dirichlet possam ser impostas diretamente sobre os nós desejados.

Nas equações de Maxwell, o rotacional dos campos é desejado. O rotacional da aproximação $\vec{u}^h$ é calculado como:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{u}^h(\mathbf{x}) &= \nabla \times \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \\ &= \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{F}_Q^{-1}\mathbf{U}_s \\ &= [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})]\mathbf{F}_Q^{-1}\mathbf{U}_s\end{aligned}\quad (4.26)$$

onde a matriz $[\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})]$ é obtida tomando-se o rotacional de cada uma das RBF's vetoriais dos nós de suporte, isto é,

$$[\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})] = [\nabla \times \mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \nabla \times \mathbf{F}_2(\mathbf{x}), \dots, \nabla \times \mathbf{F}_n(\mathbf{x})] \quad (4.27)$$

O rotacional de uma RBF vetorial é calculado a partir das Equações 4.15 e 4.12, e sua expressão é:

$$\nabla \times \mathbf{F}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_z(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \partial_z^3 & -\partial_y(\partial_x^2 + \partial_z^2) - \partial_y^3 \\ -\partial_z(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \partial_z^3 & 0 & \partial_x(\partial_y^2 + \partial_z^2) + \partial_x^3 \\ \partial_y(\partial_x^2 + \partial_z^2) + \partial_y^3 & -\partial_x(\partial_y^2 + \partial_z^2) - \partial_x^3 & 0 \end{bmatrix} f_i(\mathbf{x}) \quad (4.28)$$

O divergente de $\vec{u}^h$ é nulo por construção uma vez que adotou-se a aproximação como o rotacional de uma função vetorial $\vec{w}$, de acordo com a Equação 4.2.

O processo de construção das RBF's vetoriais envolve uma RBF escalar f_i . O trabalho [Yang 2015] utiliza a função de base radial escalar do tipo Gaussiana. Em [Lowitzsch 2002], trabalho que desenvolveu originalmente as RBF's vetoriais, funções de base radial escalares do tipo *Wendland* são empregadas. Nesta tese, serão utilizadas as funções de base radial Gaussiana:

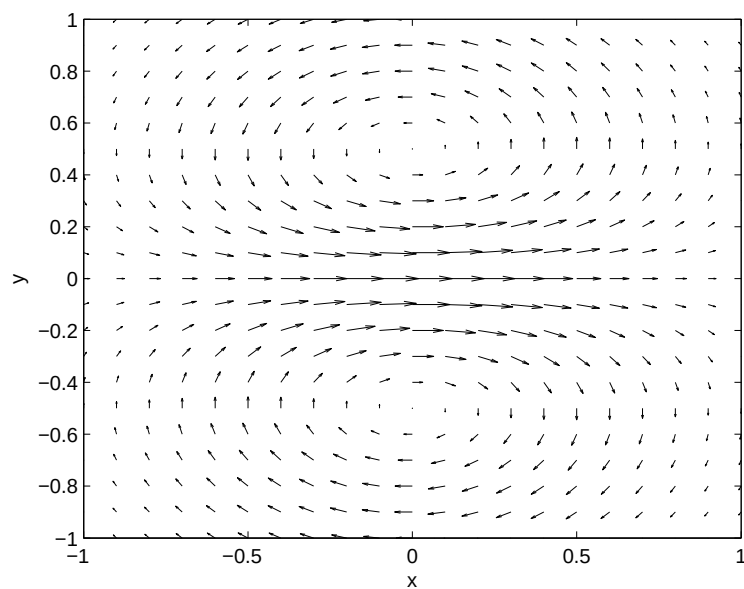
$$f_i(\mathbf{x}) = e^{-pr_i^2} \quad (4.29)$$

e multiquádrica:

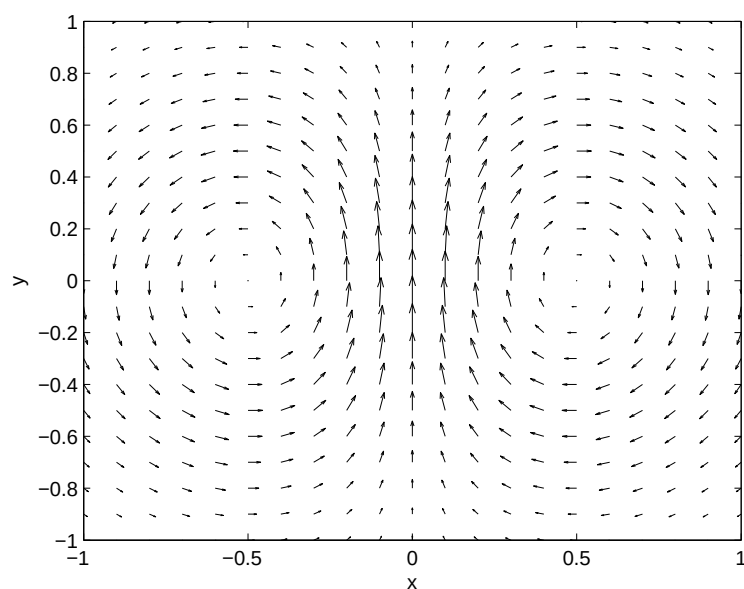
$$f_i(\mathbf{x}) = \sqrt{r_i^2 + C^2} \quad (4.30)$$

onde r_i é a distância do ponto $\mathbf{x}$ ao centro da RBF, e p e C são parâmetros de controle.

Para melhor entendimento sobre a aproximação gerada pelas RBF's vetoriais, são mostrados na Figura 4.1 os campos vetoriais em duas dimensões de uma RBF vetorial centrada em $(0, 0)$, no domínio $[-1, 1] \times [-1, 1]$, com a RBF escalar Gaussiana e $p = 2$. A Figura 4.1a mostra o campo vetorial associado à primeira linha da RBF vetorial, enquanto a Figura 4.1b mostra o campo vetorial da segunda linha. As linhas de $\mathbf{F}_i$ podem ser interpretadas como bases vetoriais para cada componente do campo vetorial a ser aproximado. Assim, em três dimensões, a primeira linha da RBF vetorial $\mathbf{F}_i$ é uma base vetorial para a componente x , a segunda linha é uma base vetorial para a componente y , e a terceira linha é uma base vetorial para a componente z .



(a) Primeiro vetor.



(b) Segundo vetor.

Figura 4.1: Bases vetoriais produzidas pela RBF vetorial centrada em $(0,0)$ com RBF Gaussiana com $p = 2$. Base vetorial associada à (a) primeira linha e (b) segunda linha.

4.2 Interpolação de Campos Vetoriais

Esta seção traz os testes de interpolação de campos vetoriais utilizando as funções de formas com RBF's vetoriais mostradas na Seção 4.1. Para fins de verificação, será calculado o erro médio das aproximações sobre um conjunto fixo de n pontos no domínio, dado por:

$$\text{erro} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\vec{F} - \vec{F}^h| \quad (4.31)$$

onde $\vec{F}$ é o campo exato e $\vec{F}^h$ o campo aproximado.

4.2.1 Campo Constante

O primeiro teste é, essencialmente, utilizado para verificar a propriedade do Delta de Kronecker das funções de forma. Por isso, testa-se uma função vetorial simples representada por um campo vetorial constante:

$$\vec{F} = 1\hat{x} + 2\hat{y} \quad (4.32)$$

O campo é aproximado em um domínio $[-2, 2] \times [-2, 2]$ com 4×4 nós distribuídos igualmente espaçados. As funções de forma são construídas utilizando todos os nós no domínio com a RBF escalar Gaussiana apresentada na Equação 4.29 adotando $p = 1/4$. A Figura 4.2 apresenta o campo aproximado no domínio.

O erro calculado levando em consideração apenas a aproximação vetorial nos nós é $1,5 \times 10^{-13}$, isto é, o campo é aproximado nos nós com a precisão de máquina, confirmando a propriedade do Delta de Kronecker (Equação 4.25). Todavia, se forem consideradas as aproximações em todos os pontos mostrados na Figura 4.2, o erro é $6,1 \times 10^{-1}$. Portanto, fora dos nós, o campo vetorial não é reproduzido de forma exata. Esta característica pode ser constatada, também, visualmente na Figura 4.2, onde vê-se que, fora dos nós, o campo aproximado difere do campo nos nós.

Tal situação ocorre também com as funções de forma escalares RPIM. Pode-se enxergar as funções de forma com RBF's vetoriais como um análogo às funções RPIM, porém ao invés de utilizar funções de base radial escalares na base, utilizam-se funções de base radial vetoriais. Assim como no RPIM, à medida que aumenta-se o número de nós, aumenta-se também a precisão dos campos produzidos em todo o domínio, conforme será mostrado nas seções seguintes.

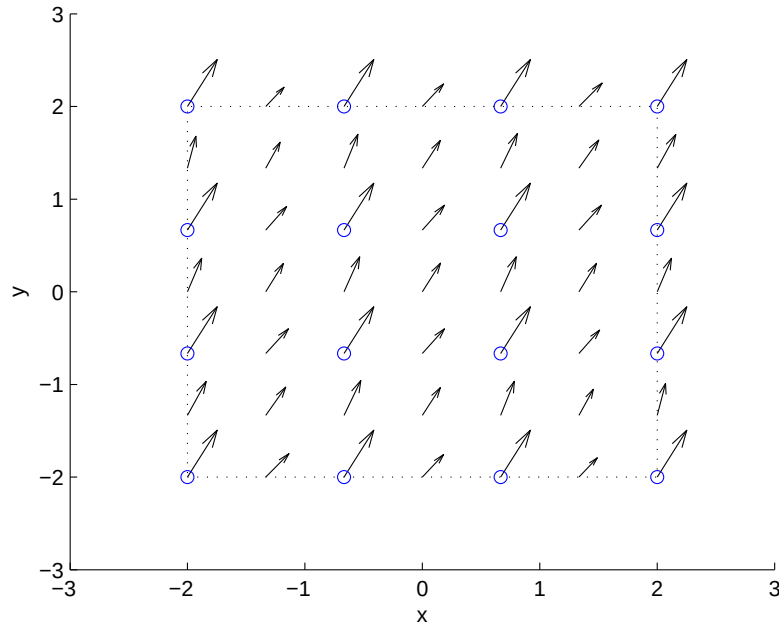


Figura 4.2: Interpolação de campo vetorial constante usando funções de forma com RBF's vetoriais. O campo corresponde à Equação 4.32. A interpolação utiliza RBF escalar Gaussiana e $p = 1/4$. Os nós estão representados por círculos.

4.2.2 Campo Magnético Produzido Por Um Fio

Nesta seção, considera-se a densidade de fluxo magnético produzida por um fio infinitamente longo com uma densidade de corrente elétrica uniforme. Uma corrente elétrica I percorre o fio de raio $a = 2$ posicionado na direção z . Como o problema tem simetria no eixo z , o fluxo magnético $\vec{B}$ é expressado em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ) em um plano plano z qualquer como

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} (-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}) & \text{se } \rho < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} (-\sin(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}) & \text{se } \rho \geq a \end{cases} \quad (4.33)$$

Ao contrário do exemplo da Seção 4.2.1, será utilizado um conjunto de nós de suporte na vizinhança do ponto de interesse ao invés de se utilizar todos os nós do domínio. Assim, deve-se escolher uma estratégia de seleção de nós de suporte. Neste exemplo, será utilizada a estratégia de seleção de domínio de suporte baseado em domínio de influência, que pode ser vista nos trabalhos [Lima 2011, Liu 2002]. Nesta estratégia, a cada nó atribui-se um domínio de influência baseado na densidade local de nós. Então, o domínio de suporte de um ponto $\mathbf{x}$ é o conjunto de nós cujos domínios de influência contêm o ponto $\mathbf{x}$.

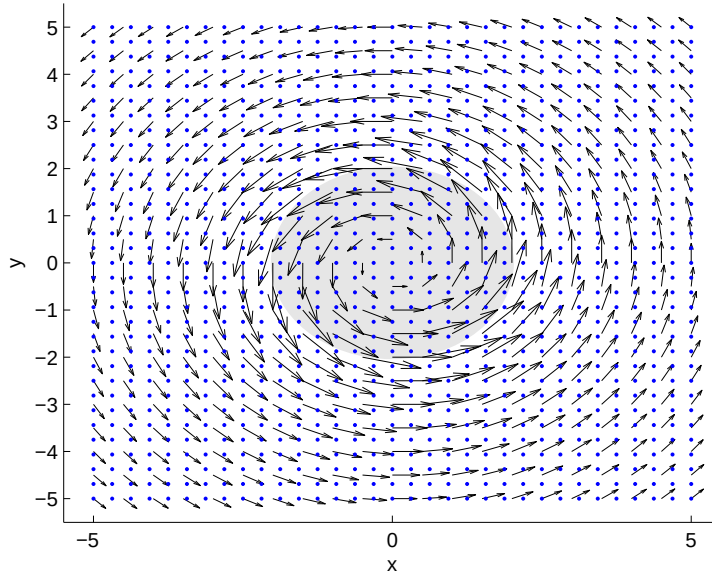


Figura 4.3: Interpolação de campo vetorial representando a densidade de fluxo magnético de um fio de raio $a = 2$ mm usando funções de forma com RBF's vetoriais. A interpolação foi realizada com RBF escalar gaussiana e $p = 1/r_i$. Pontos representam os nós e os vetores o campo aproximado.

Os domínios de influência foram configurados como circulares com raio de influência $r_i = 1,5 \times d_c$, onde d_c é a distância média local entre os nós. Cabe ressaltar que o parâmetro d_c é calculado para cada nó, podendo assumir valores diferentes de um nó para outro. No caso de distribuições nodais regulares, d_c será igual para todos os nós. Já para distribuições irregulares, d_c irá depender da densidade de nós ao longo do domínio.

As funções de forma com RBF vetoriais são construídas com a RBF escalar Gaussiana com parâmetro de controle $p = 1/r_i$. A Figura 4.3 mostra a distribuição de nós juntamente com o campo aproximado. Utilizou-se uma distribuição com 33×33 nós igualmente espaçados e o número médio de nós de suporte foi 7.

A fim de investigar o impacto do número de nós no domínio na precisão da aproximação numérica, calculou-se o erro médio da aproximação em função da distância média entre os nós, mostrado na Figura 4.4. Como pode ser visto, a precisão da solução numérica aumenta à medida que utiliza-se uma distribuição de nós mais densa, e a aproximação tende a convergir para a expressão analítica do campo.

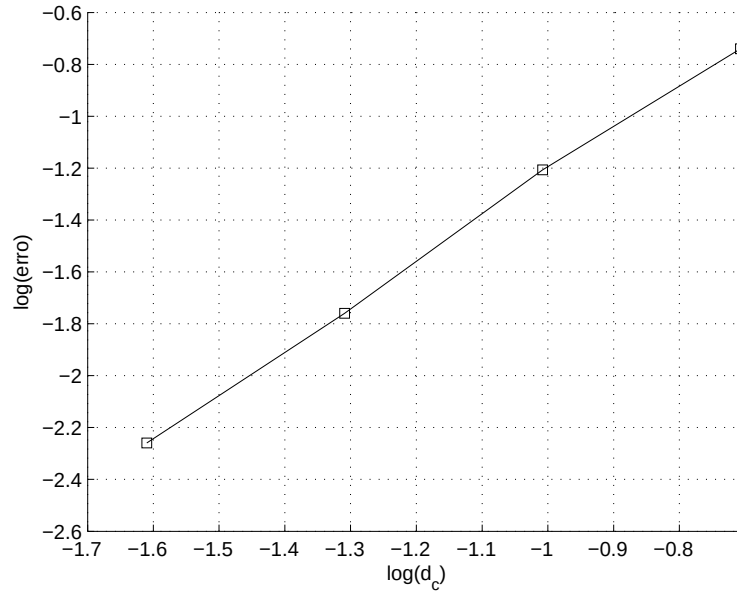


Figura 4.4: Erro de aproximação da densidade de fluxo magnético usando funções de forma com RBF's vetoriais em função da distância média entre nós distribuídos no domínio. O erro é calculado através da Equação 4.31. d_c é a distância média entre os nós.

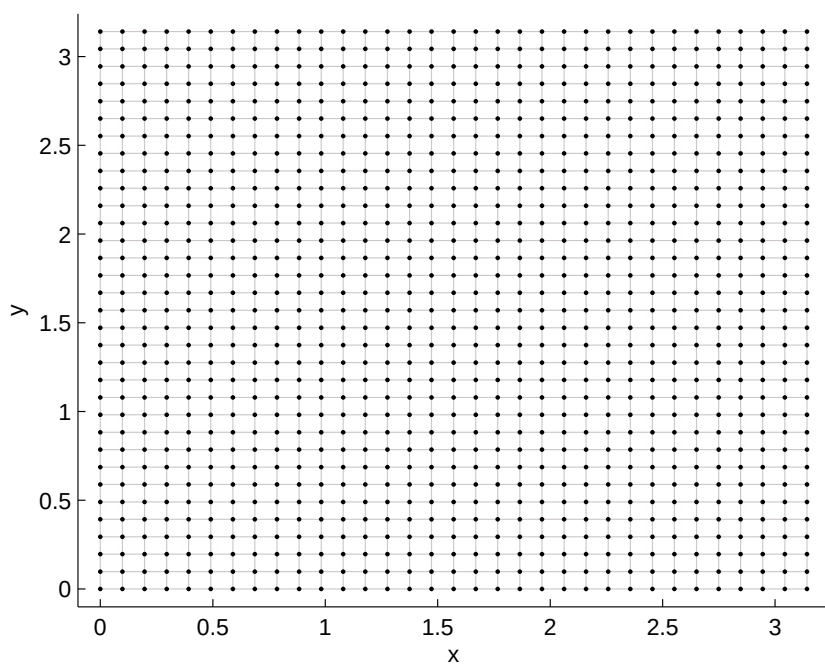
4.2.3 Campo Elétrico em Guia de Onda

Testa-se, agora, um dos modos do campo elétrico em um guia de onda no domínio $[0, \pi] \times [0, \pi]$. O modo interpolado corresponde ao oitavo modo, associado ao autovalor igual a 8 presente na Tabela 3.6. O campo é dado por:

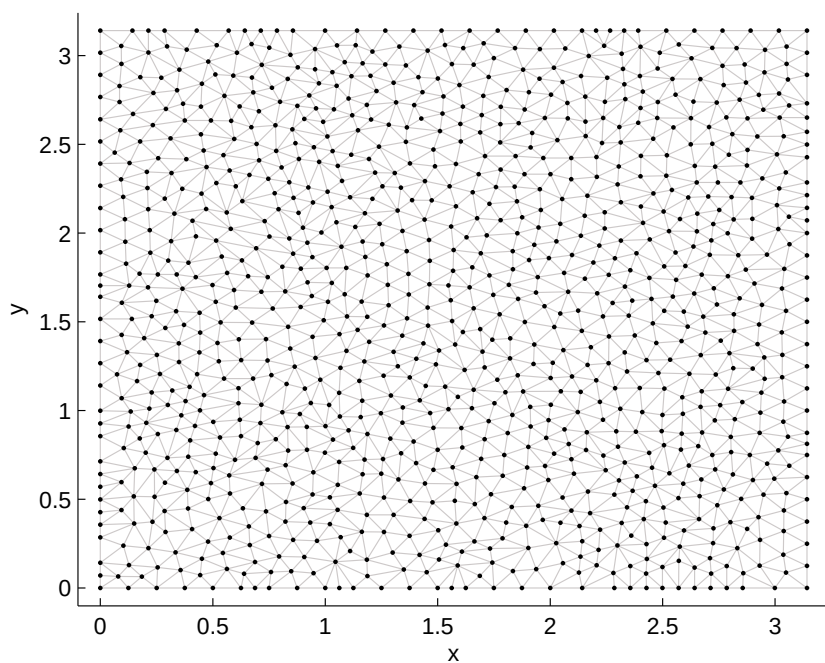
$$\vec{E} = (2\pi^2 + 1)[\cos(\pi x)\sin(\pi y)\hat{x} - \sin(\pi x)\cos(\pi y)\hat{y}] \quad (4.34)$$

Testam-se dois tipos de distribuições de nós: regular e irregular. A distribuição regular é gerada com os nós de uma malha com elementos retangulares, e a distribuição irregular com os nós de uma malha triangular. A Figura 4.5 mostra os dois tipos de distribuições mencionadas, nas quais a regular possui 1.089 nós e a irregular 1.032 nós.

A seleção dos nós de suporte é feita utilizando o esquema T2L, visto na Seção 2.3. O esquema T2L é útil quando deseja-se selecionar um conjunto maior de nós, tipicamente, de 7 a 17 nós, a partir de uma malha. A estratégia funciona bem para distribuições regulares e irregulares e foi proposta para a utilização com os métodos RPIM e MLS. A utilização desta estratégia dar-se-á por três motivos: (i) a seleção dos nós é robusta, evitando que a matriz $\mathbf{F}_Q$ das funções de forma seja singular; (ii) o número de nós selecionados para suporte é interessante, nem pequeno para produzir aproximações de baixa qualidade, nem grande para onerar computacionalmente a construção das funções de forma; (iii) o método sem malha



(a)



(b)

Figura 4.5: Distribuições de nós usadas na interpolação do campo elétrico do guia de onda. Nós gerados de uma malha (a) retangular com 1.089 nós; (b) triangular com 1.032 nós.

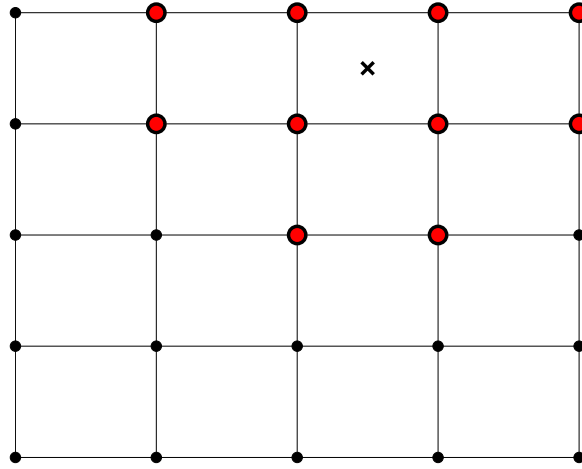


Figura 4.6: Esquema T2L adaptado para malha com elementos quadrangulares.

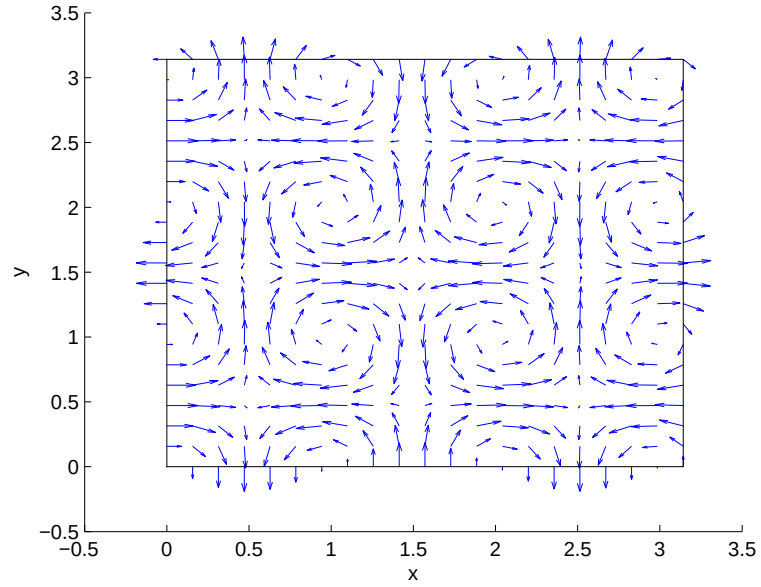
utiliza uma formulação fraca, conforme será visto adiante, e, para isso, é necessária uma malha de integração. Esta malha dará o suporte, também, para a seleção dos nós na construção das funções de forma.

O esquema T2L baseia-se, originalmente, em uma malha triangular e seleciona duas camadas de nós, sendo a primeira camada composta pelos três nós da célula que contém o ponto de interesse, e a segunda camada pelos nós conectados aos nós da primeira camada. Uma adaptação é sugerida neste trabalho para funcionar, também, com malhas de elementos quadrangulares. O mesmo conceito de duas camadas é utilizado, porém levando em conta que os elementos possuem quatro nós. A Figura 4.6 mostra um exemplo do esquema T2L em uma malha retangular. Os nós em vermelho são os nós selecionados como suporte para o ponto x .

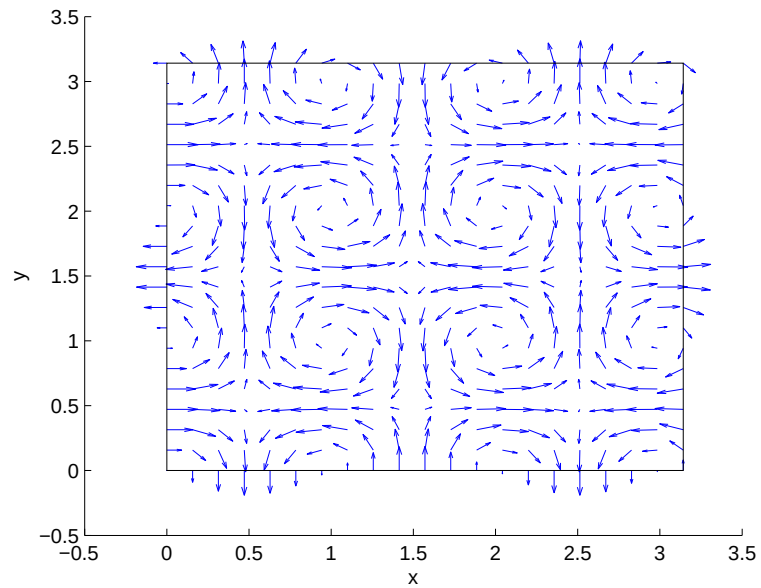
O campo elétrico é aproximado com as funções de forma RBF's vetoriais usando as duas distribuições da Figura 4.5. Para isso, utiliza-se a RBF escalar Gaussiana com parâmetro de controle $p = 1/(1,5 \times d_c)$. A Figura 4.7 apresenta as aproximações do campo elétrico utilizando as duas distribuições citadas.

Como nos problemas eletromagnéticos vetoriais é necessário determinar o rotacional dos campos, computa-se este utilizando as funções de forma com RBF's vetoriais e as duas distribuições de nós da Figura 4.5. Os rotacionais calculados numericamente são apresentados na Figura 4.8. Para efeito de comparação, o rotacional analítico é apresentado na Figura 4.9. Visualmente, percebe-se que as aproximações estão coerentes.

Analisa-se, também, o erro médio da aproximação em função da densidade de nós distribuídos no domínio. A Figura 4.10 mostra o erro em função da distância nodal média, calculados

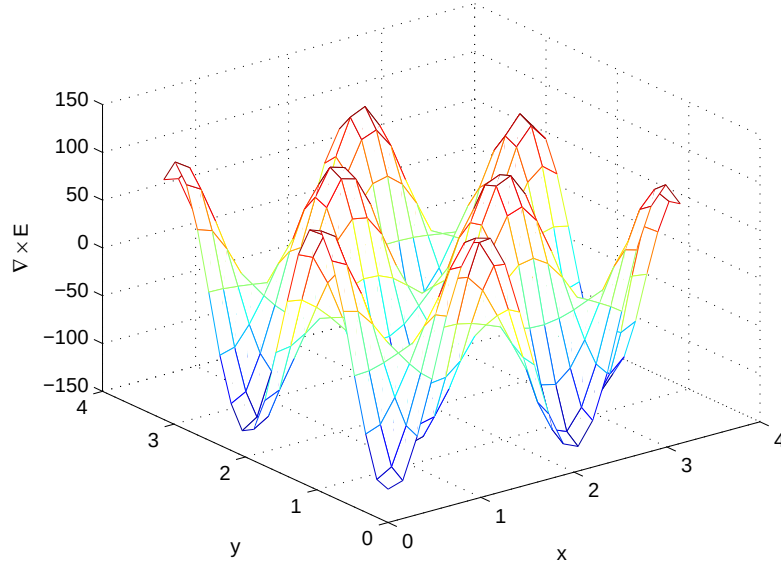


(a)

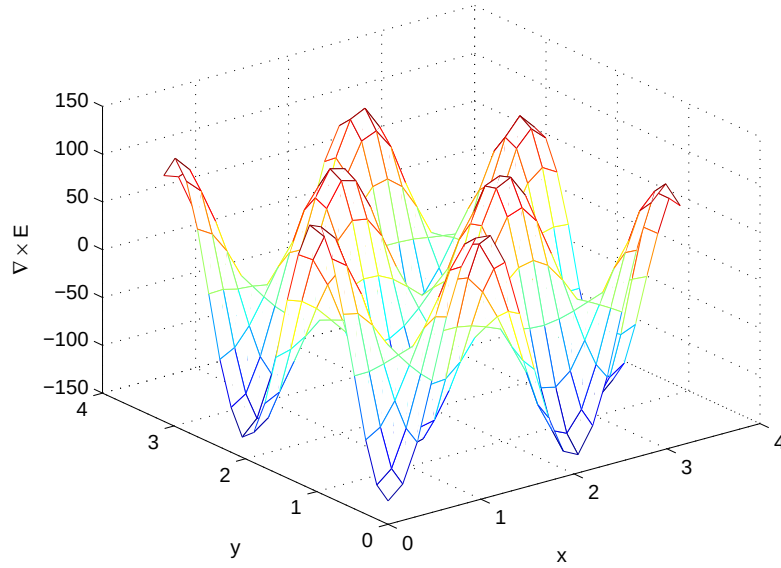


(b)

Figura 4.7: Interpolação do campo vetorial representando o campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma com RBF's vetoriais. A interpolação conta com a RBF escalar Gaussiana e $p = 1/(1, 5 \times d_c)$. Aproximação com distribuição de nós (a) regular e (b) irregular.



(a)



(b)

Figura 4.8: Interpolação do rotacional do campo vetorial representando o rotacional do campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma com RBF's vetoriais. A interpolação conta com a RBF escalar Gaussiana e $p = 1/(1, 5 \times d_c)$. Aproximação com distribuição de nós (a) regular e (b) irregular.

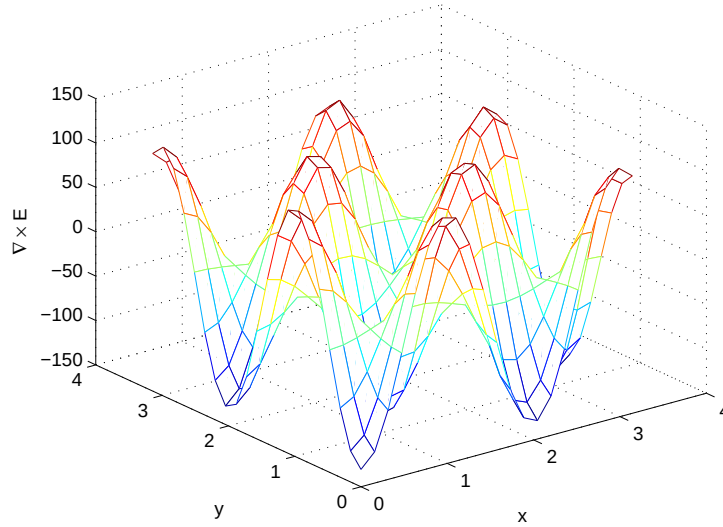


Figura 4.9: Rotacional do campo elétrico analítico correspondente ao oitavo modo do guia de onda. O campo elétrico é dado pela Equação 4.34.

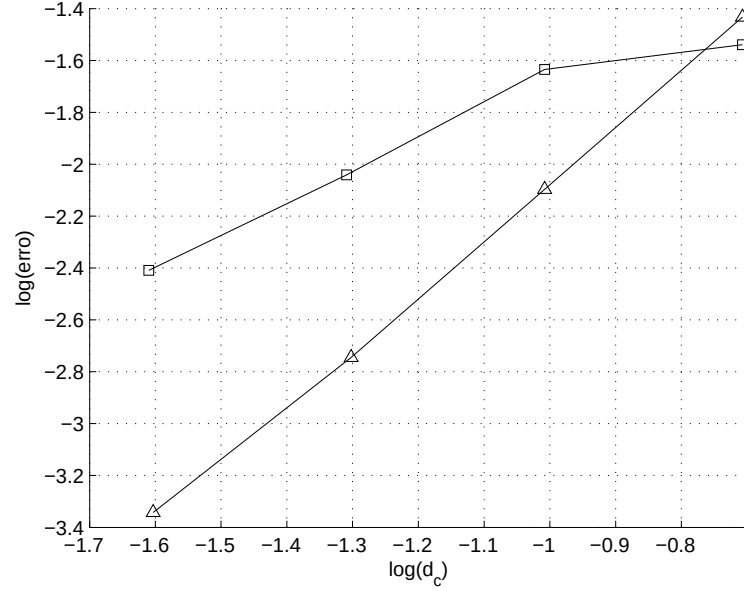
para o campo elétrico e o seu rotacional, usando distribuições produzidas por malhas regulares e irregulares. Os resultados mostram que as funções de forma aproximam o campo de maneira correta e que, em tendência, a aproximação numérica converge para a expressão analítica.

4.3 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo

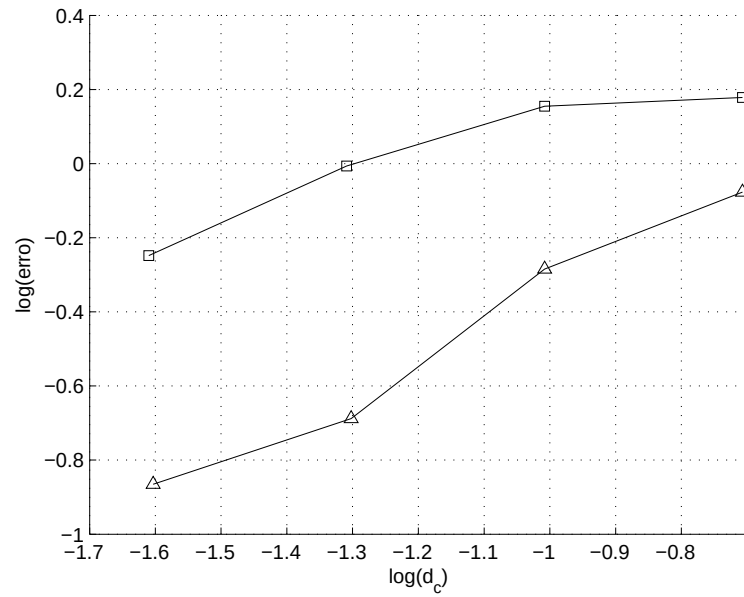
Até o momento, foram apresentadas as funções de forma com RBF's vetoriais e sua capacidade de aproximar campos vetoriais com divergente nulo. O próximo passo é aplicá-las em problemas eletromagnéticos para obtenção da solução numérica. No trabalho [Yang 2015], as RBF's vetoriais são aplicadas em problemas eletromagnéticos no domínio do tempo empregando formas fortes e o método da colocação, isto é, fazendo com que o campo seja satisfeito sobre cada um dos nós distribuídos no domínio utilizando diretamente as equações de Maxwell.

Em contraste com os métodos de forma forte, os de forma fraca são geralmente mais robustos, sofrem menos com problemas de instabilidade, e fornecem soluções com maior acurácia [Liu 2002]. Desta maneira, o intuito desta seção é produzir um método sem malha que utiliza formas fracas em conjunto com funções de forma com RBF's vetoriais.

A formulação de um problema vetorial harmônico no tempo foi apresentada na Seção 2.7.3 em termos de suas formas forte e fraca. Como a formulação envolve a integração da forma fraca 2.107, esta é efetuada numericamente neste trabalho utilizando uma malha de fundo ou de integração, assim como nos métodos sem malha tradicionais, por exemplo, EFG e NPIM.



(a)



(b)

Figura 4.10: Erro de aproximação do campo elétrico do guia de onda usando funções de forma com RBF's vetoriais em função da distância nodal média. Curva com quadrados está associada à distribuição regular e curva com triângulos à distribuição irregular. Erro da aproximação computado para (a) o campo elétrico e (b) o rotacional do campo elétrico. O erro é calculado através da Equação 4.31. d_c é a distância média entre os nós.

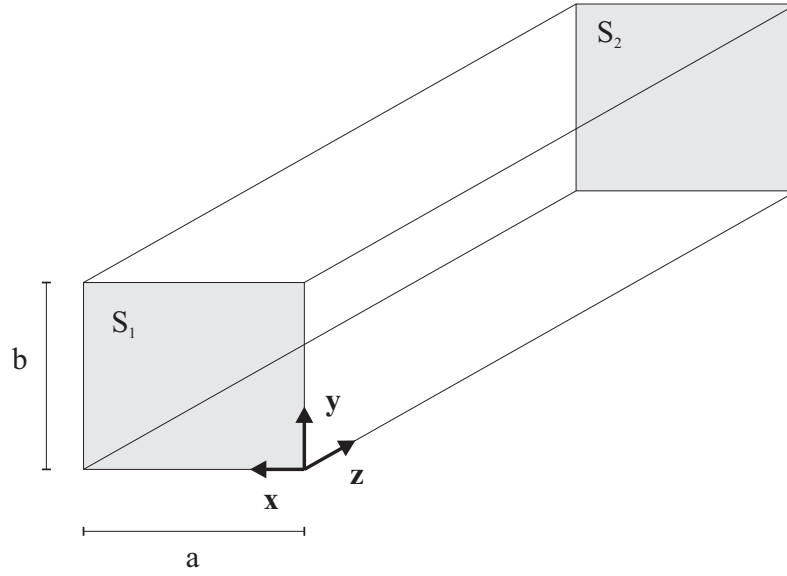


Figura 4.11: Guia de onda retangular.

Não há necessidade que essa malha esteja vinculada aos nós associados à construção das funções de forma. Todavia, uma vez que a malha está presente, podemos utilizá-la, também, para seleccionar os nós de suporte através do esquema T2L apresentado nas Seções 2.3 para malhas triangulares e 4.2.3 para malhas quadrangulares.

4.3.1 Propagação em Guia de Onda

Em problemas de propagação de ondas em guias, geralmente estamos interessados em determinar o campo eletromagnético em uma dada frequência de propagação. Suponha um guia retangular mostrado na Figura 4.11, onde uma onda eletromagnética se propaga em modo TE_{10} na direção $+z$. Este problema é representado em sua forma forte pela Equação 2.94 com as condições de contorno configuradas como descrito a seguir.

Nas paredes do guia, aplica-se a condição de contorno de Dirichlet 2.95. Em S_1 , aplica-se uma condição de contorno de Dirichlet sobre o campo elétrico, sendo este dado pelo campo incidente $\vec{E}^{inc}$:

$$\vec{E}^{inc}(x, y, z) = E_0 \vec{e}_{10}(x, y) e^{-jk_{10}z} \quad (4.35)$$

onde

$$\vec{e}_{10} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{y}, \quad k_{10} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (4.36)$$

Finalmente, o campo em S_2 pode ser expresso como [Jin 2002]:

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = 0 \quad (4.37)$$

que é uma condição de contorno do terceiro tipo (Equação 2.96) com $\vec{U} = 0$. Em 4.37, $\gamma_e = jk_{10}$.

Assim, a partir da Equação 2.106, a forma fraca do problema é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_n} \vec{W} \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde Γ_n corresponde a S_2 .

Para resolver o problema, considera-se um guia de onda com $a = 2\text{m}$, $b = 0,5\text{m}$ e comprimento igual a 2m . Considera-se uma frequência de propagação de 300 MHz para a onda e uma amplitude de campo $E_0 = 2\text{V/m}$.

Por simplificação, o problema é resolvido em duas dimensões no plano $x = a/2$. Tal simplificação justifica-se pelo fato de que, como o modo de propagação é TE_{10} e a onda propaga-se em $+z$, o campo elétrico só possui componente na direção y , isto é, $\vec{E} = E_y \hat{y}$. Na forma fraca 4.38, é necessário calcular o rotacional do campo elétrico, dado por:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} \quad (4.39)$$

Além disso, o campo elétrico no interior do guia corresponde a $\vec{E}^{inc}$. Tomando as derivadas parciais requeridas no rotacional 4.39, tem-se que:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_{10}z} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -jk_{10} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_{10}z} \quad (4.41)$$

e seus valores absolutos máximos são:

$$\left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{max} = \frac{\pi}{a} E_0 \quad (4.42)$$

$$\left| \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{max} = k_{10} E_0 \quad (4.43)$$

Levando em conta as dimensões do guia e a frequência de propagação, tem-se que:

$$\left| \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{max} \approx 4 \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{max} \quad (4.44)$$

Como na forma fraca 4.38 o primeiro termo envolve o produto escalar entre os rotacionais e

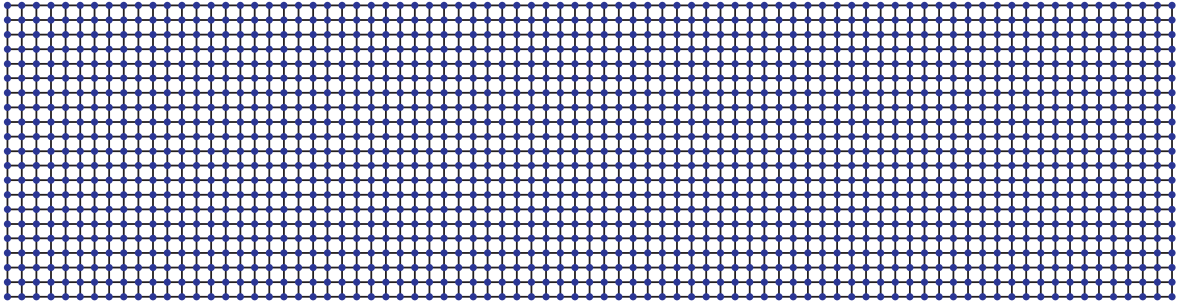
$$\left(\left| \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{max} \right)^2 \approx 16 \left(\left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{max} \right)^2 \quad (4.45)$$

então podemos simplificar o rotacional do campo elétrico 4.39 considerando apenas a componente que envolve a derivada parcial em relação a z , uma vez que a componente que envolve a derivada parcial em relação a x irá contribuir muito pouco no produto escalar. Portanto, o rotacional do campo será calculado como:

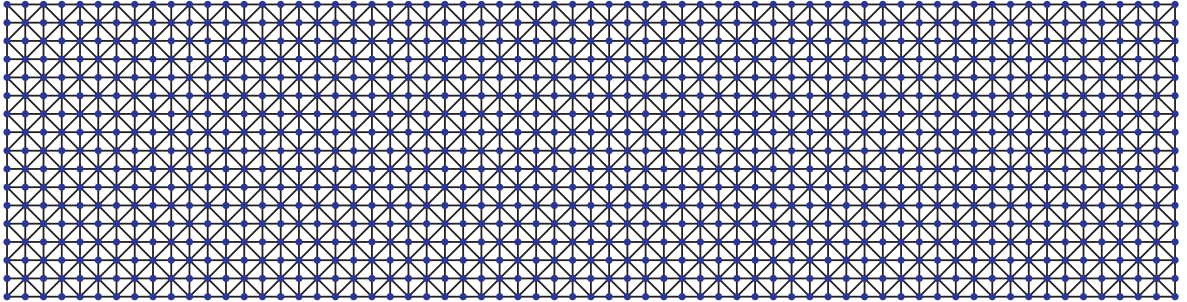
$$\nabla \times \vec{E} \approx -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} \quad (4.46)$$

o que valida resolver o problema em duas dimensões no plano $x = a/2$.

Utiliza-se o método sem malha com RBF vetorial e dois tipos de distribuições de nós igualmente espaçados: uma com 81×21 nós gerados por uma malha retangular, e outra com 65×17 gerados por uma malha triangular, mostradas na Figura 4.12.



(a)



(b)

Figura 4.12: Distribuições de nós regulares no guia de onda retangular usadas pelo método sem malha com RBF vetorial. As distribuições foram geradas por uma malha (a) retangular com 81×21 nós; e (b) triangular com 65×17 nós.

O esquema de seleção de nós de suporte é o T2L, e as funções de forma vetoriais com RBF Gaussiana e parâmetro de controle $p = 1/(1,5 \times d_c)$. As malhas geradoras dos nós são empregadas no processo de integração da forma fraca, com 4 pontos por célula para integrais de domínio e 2 pontos por segmento para integrais de contorno. A Figura 4.13 mostra as

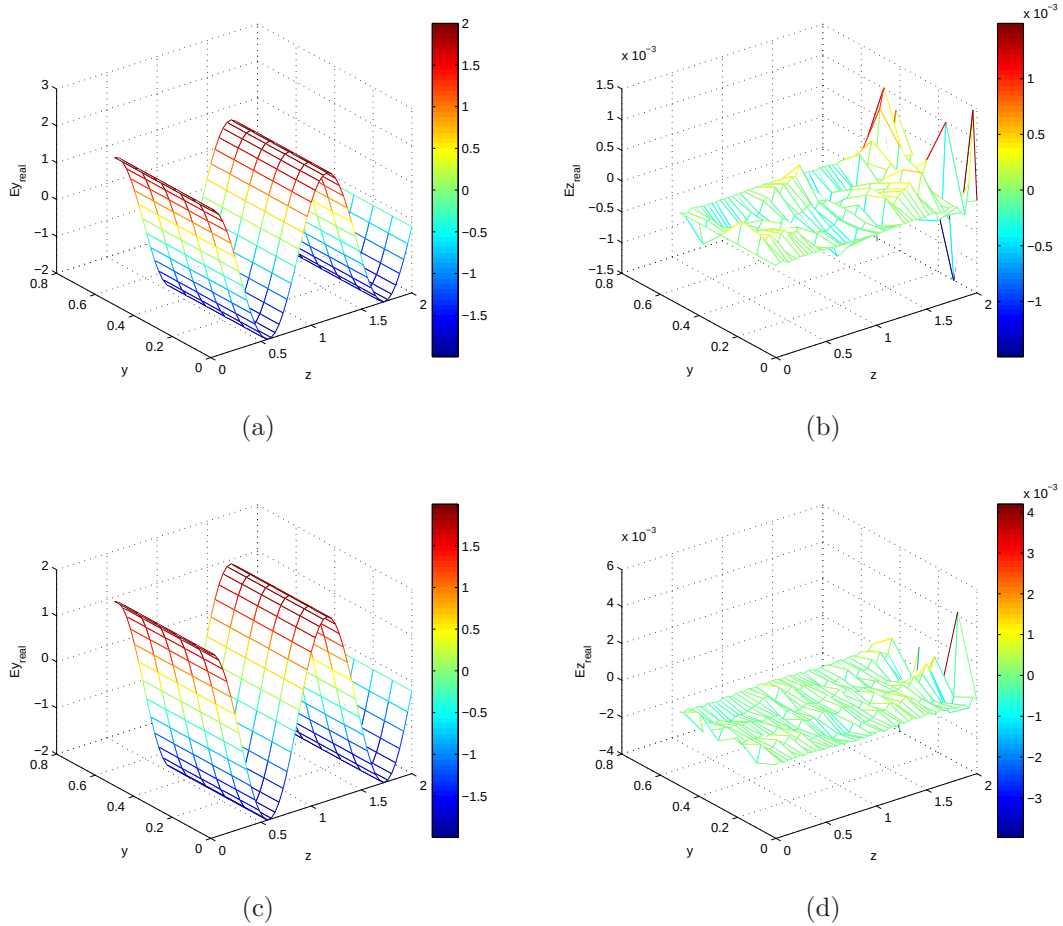


Figura 4.13: Distribuição do campo elétrico no guia de onda retangular produzida pelo método sem malha com RBF vetorial. Solução usando malha de integração retangular: (a) Parte real de E_y , (b) parte real de E_z . Solução usando malha de integração triangular: (c) Parte real de E_y ; (d) Parte real de E_z .

distribuições das componentes E_y e E_z do campo elétrico no domínio, e a Figura 4.14 mostra a comparação da componente E_y com a solução analítica em $y = 0,3\text{m}$.

Os resultados mostram que as soluções produzidas com os dois tipos de malha de integração são semelhantes e reproduzem o campo de maneira correta. A componente E_z é próxima de zero como esperado, uma vez que a onda propaga-se em modo TE_z. Já a componente E_y segue corretamente o perfil da solução da analítica. O erro médio calculado foi de $1,4 \times 10^{-3}$ para a distribuição com malha retangular e $1,1 \times 10^{-3}$ para a distribuição com malha triangular. A solução numérica gerada pelo método sem malha é, portanto, livre de modos espúrios e atende a propriedade do divergente nulo.

Ao resolver o problema utilizando uma distribuição nodal irregular gerada por uma malha triangular, verificou-se a presença de erro de fase na aproximação numérica. Na verdade, foi

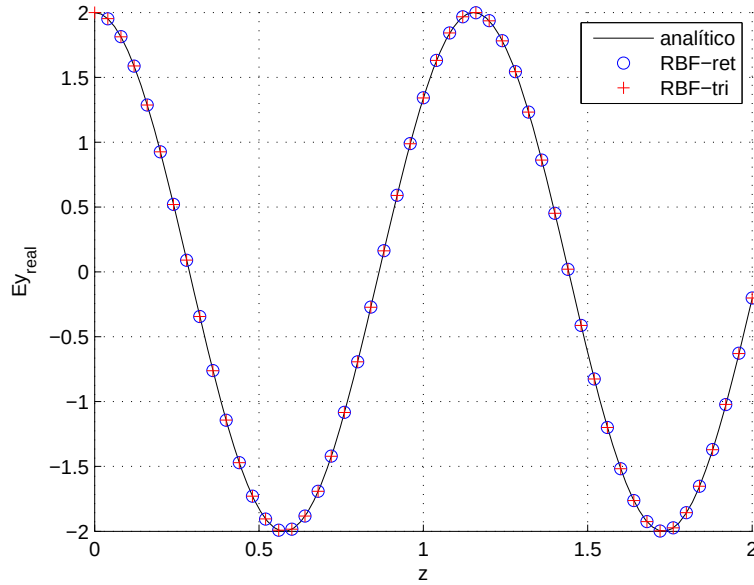


Figura 4.14: Campo elétrico E_y em $y = 0,3\text{m}$ no guia de onda retangular produzido pelo método sem malha com RBF vetorial. Para comparação, é apresentada a solução analítica. As soluções numéricas foram produzidas com malhas de integração retangular (círculos) e triangular (cruzes).

constatado que o método é muito sensível ao valor do parâmetro da RBF escalar f_i . Para mostrar esta sensibilidade, foi levantado o erro de fase da solução em função dos valores dos parâmetros p e C das funções Gaussiana e multiquádrica e, assim, buscou-se o valor do parâmetro da RBF que minimiza o erro de fase. A análise foi feita em função do fator de escalonamento α_c , com $p = 1/(\alpha_c \times d_c)$ para a função Gaussiana e $C = \alpha_c \times d_c$ para a multiquádrica. A distribuição de nós juntamente com a malha de integração utilizadas para gerar as soluções numéricas são mostradas na Figura 4.15.

A Figura 4.16 apresenta o erro de fase em função de α_c considerando a função Gaussiana. Primeiro, o erro de fase foi investigado para a faixa $0,5 \leq \alpha_c \leq 2,5$ (Figura 4.16a). Como pode ser visto, o erro tende a reduzir para valores de α_c menores que 0,5. Assim, investigou-se o erro de fase para a nova faixa $0,1 \leq \alpha_c \leq 0,5$ (Figura 4.16b). Nota-se que um erro de fase nulo encontra-se na faixa $0,11 < \alpha_c < 0,12$, escolhendo-se $\alpha_c = 0,11$ como o melhor valor para o parâmetro nesse caso.

De maneira semelhante, procedeu-se a análise do erro de fase em função de α_c considerando a RBF multiquádrica, que pode ser vista na Figura 4.17. Inicialmente, investiga-se o erro na faixa $1 \leq \alpha_c \leq 5$ (Figura 4.17a). O erro de fase anula-se em $1 \leq \alpha_c \leq 2$ e, por isso, esta

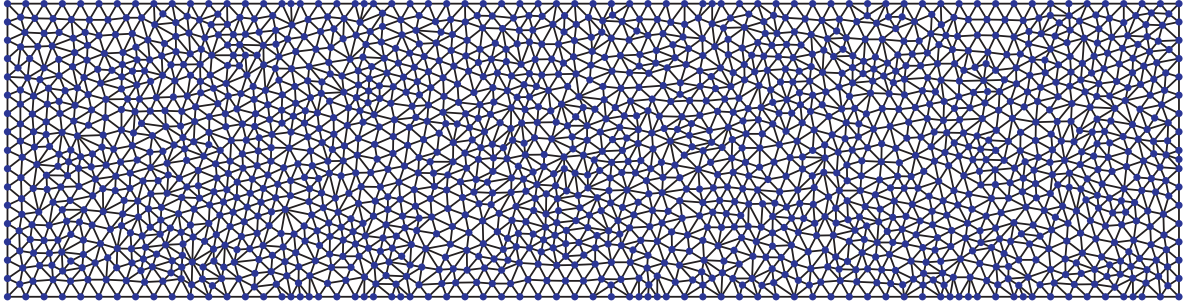


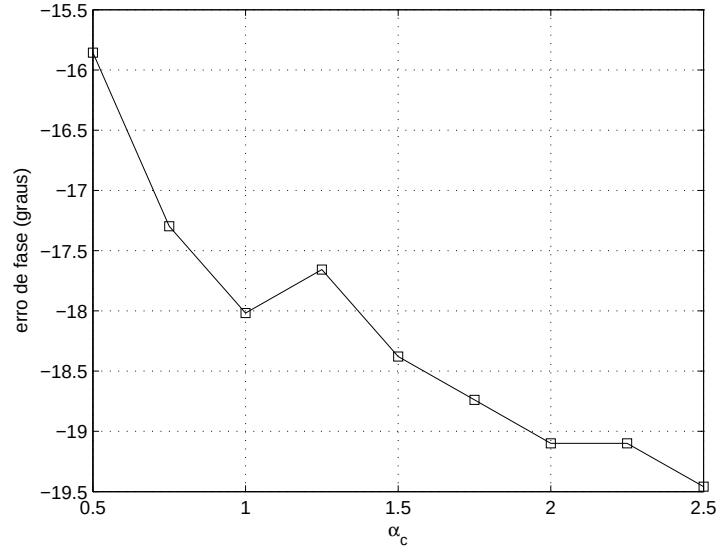
Figura 4.15: Distribuição de nós irregulares no guia de onda retangular usada pelo método sem malha com RBF vetorial. Os nós foram extraídos de uma malha triangular com 1.667 nós.

faixa é avaliada e o resultado mostrado na Figura 4.17b. É possível ver que $\alpha_c = 1,5$ é o valor que leva ao erro de fase mais próximo de zero.

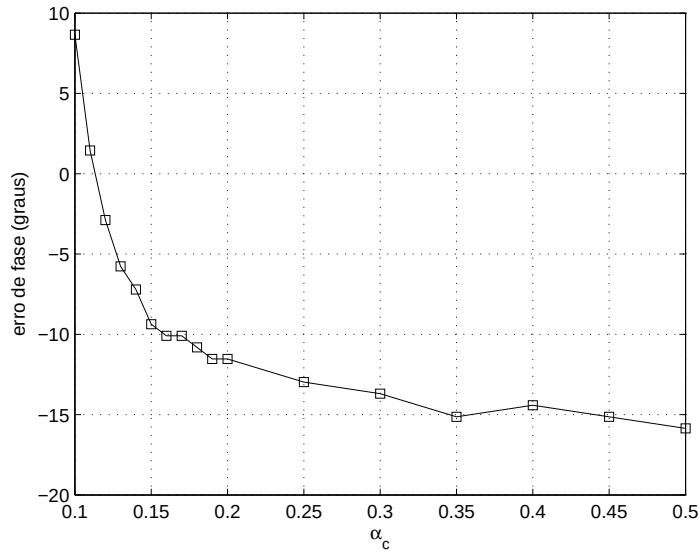
Em ambos os casos, o erro de fase variou muito de acordo com o valor do parâmetro α_c . Para as faixas consideradas, o erro de fase variou aproximadamente de 8 a -15 graus com a função Gaussiana e de 20 a -10 com a função multiquádrica. Além disso, os valores que minimizam o erro de fase são bastante diferentes, sendo $\alpha_c = 0,11$ e $\alpha_c = 1,5$ para as funções Gaussiana e multiquádrica, respectivamente. Esses resultados ilustram a sensibilidade existente entre o parâmetro da RBF e a qualidade da solução numérica, e que a escolha do valor do parâmetro é dependente com a função RBF escalar utilizada.

A Figura 4.18 mostra a solução numérica em contraste com a analítica em $y = 0,3m$, usando a distribuição nodal irregular da Figura 4.15 e as funções Gaussiana com $\alpha_c = 0,11$ e multiquádrica com $\alpha_c = 1,5$. O erro médio computado foi de 3×10^{-2} para a solução com RBF Gaussiana e $4,5 \times 10^{-2}$ com a multiquádrica. Dois efeitos na solução numérica produzida pelo método das RBF's vetoriais foram percebidos com a utilização de uma distribuição nodal irregular. O primeiro foi o surgimento de erros de fase, os quais não estavam presentes ao utilizar distribuições regulares. O segundo foi o aumento do erro médio da solução, da ordem de 10^{-3} para 10^{-2} .

Ressalta-se, portanto, a dependência que o método possui dos parâmetros de controle da RBF e da maneira como os nós são distribuídos no domínio, isto é, estes impactam significativamente a qualidade da solução numérica. Além disso, não existem valores ótimos universais para os parâmetros que atendam a todos os problemas ao mesmo tempo. Para determinadas faixas de valores, o método pode, inclusive, não convergir. Esta característica, na opinião do autor, é um fator dificultador para a aplicação do método em problemas de valor de contorno.

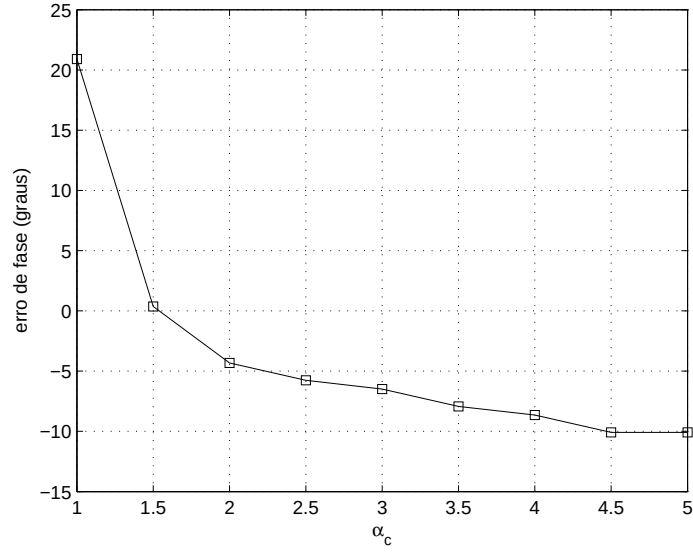


(a)

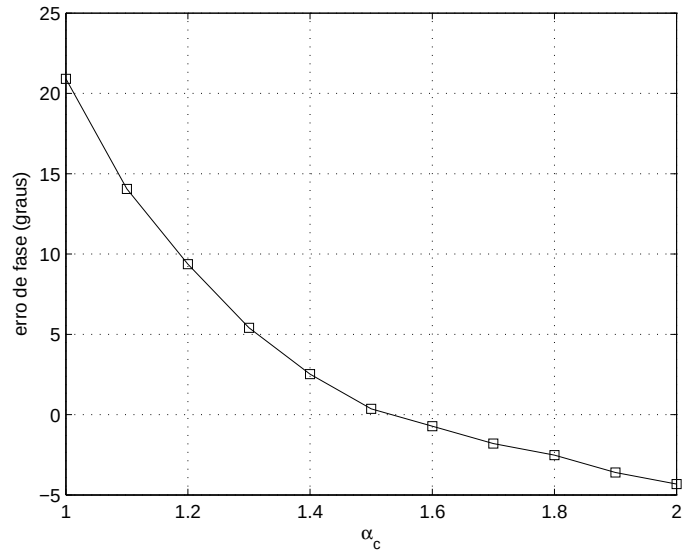


(b)

Figura 4.16: Erro de fase do campo elétrico aproximado pelo método sem malha com RBF vetorial e função Gaussiana em função do parâmetro de controle da RBF no problema do guia de onda retangular. Considera-se $p = 1/(\alpha_c \times d_c)$. (a) Resultados para a faixa $0,5 \leq \alpha_c \leq 2,5$. (b) Resultados para a faixa $0,1 \leq \alpha_c \leq 0,5$.



(a)



(b)

Figura 4.17: Erro de fase do campo elétrico aproximado pelo método sem malha com RBF vetorial e função multiquádrica em função do parâmetro de controle da RBF no problema do guia de onda retangular. Considera-se $C = \alpha_c \times d_c$. (a) Resultados para a faixa $1 \leq \alpha_c \leq 5$. (b) Resultados para a faixa $1 \leq \alpha_c \leq 2$.

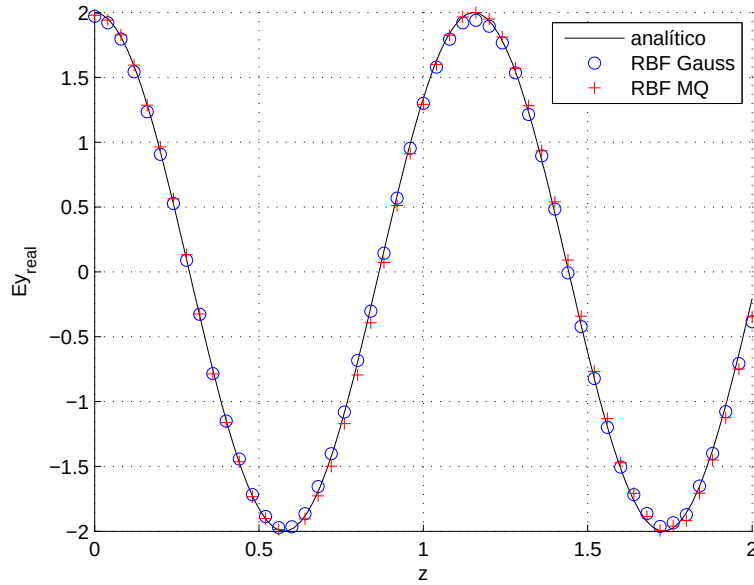


Figura 4.18: Campo elétrico E_y em $y = 0,3\text{m}$ no guia de onda retangular produzido pelo método sem malha com RBF vetorial e distribuição nodal irregular. Para comparação, é apresentada a solução analítica. As soluções numéricas foram produzidas com malha de integração triangular e funções Gaussiana (círculos) e multiquádrica (cruzes).

4.3.2 Frequências de Corte em Guia de Onda

No problema tratado nesta seção, o objetivo é determinar quais são as frequências de corte do campo eletromagnético em um guia de onda. No guia, as paredes são condutores elétricos perfeitos. Este problema é representado em sua forma forte pela Equação 2.94 com condição de contorno homogênea 2.95, uma vez que $\Gamma = \Gamma_g$ e a fronteira Γ_n não está presente.

Assim, a partir da Equação 2.106, a forma fraca do problema é dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega = 0 \quad (4.47)$$

O problema em questão é um problema de autovalor, onde os autovalores estão associados às frequências de corte $\lambda = k_0^2$ e os autovetores associados são os modos do campo elétrico $\vec{E}$ que propagam no guia.

Considera-se aqui a mesma geometria tratada na Seção 3.3.3, com $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$, e $\epsilon_r = \mu_r = 1$. Os primeiros dez autovalores computados numericamente foram apresentados na Tabela 3.6 e são repetidos aqui por conveniência:

$$\lambda = \{1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 8, 9, 9\}. \quad (4.48)$$

Resolve-se o problema com o método da RBF vetorial com uma distribuição nodal de 33×33 nós e dois tipos de malha de integração, uma retangular e outra triangular, mostradas

na Figura 4.19. O domínio de suporte é determinado usando o esquema T2L e a integração numérica com 4 pontos de quadratura. Para as funções de forma, as RBF's Gaussiana e multiquádrica são empregadas.

Os dez primeiros autovalores analíticos e computados numericamente são apresentados na Tabela 4.1. Os resultados mostram que os autovalores são gerados de maneira correta, sem modos espúrios. Além disso, a precisão da solução com a malha triangular é maior que com a malha retangular. Isso pode ser explicado por uma possível melhoria no processo de integração, uma vez que a distribuição de nós é a mesma. Cada célula retangular é dividida em duas células triangulares, então a integração numérica é mais refinada quando utiliza-se a malha triangular.

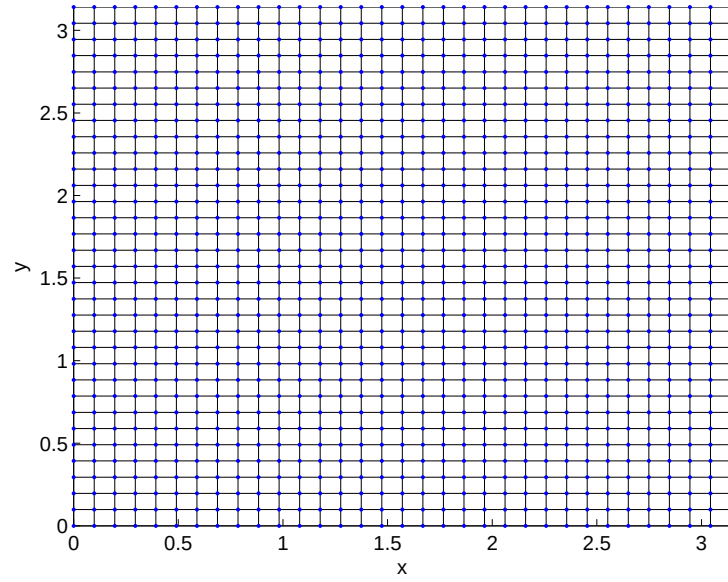
Tabela 4.1: Dez primeiros autovalores do problema do guia de onda calculados pelo método sem malha com RBF vetorial. Malhas retangular e triangular são utilizadas para integração e RBF Gaussiana (GAU) e multiquádrica (MQ) para as funções de forma.

Analítico	Retangular		Triangular	
	GAU $\alpha_c = 6$	MQ $\alpha_c = 15$	GAU $\alpha_c = 2, 5$	MQ $\alpha_c = 15$
1.0000	1,0003	1,0004	1,0000	0,9999
1.0000	1,0004	1,0005	1,0000	1,0000
2.0000	2,0037	2,0044	1,9991	2,0007
4.0000	4,0062	4,0068	3,9958	4,0015
4.0000	4,0065	4,0088	3,9973	4,0055
5.0000	5,0240	5,0248	4,9967	5,0078
5.0000	5,0243	5,0302	4,9967	5,0084
8.0000	8,0650	8,0756	7,9970	8,0188
9.0000	9,0341	9,0381	8,9899	9,0210
9.0000	9,0342	9,0428	8,9899	9,0219

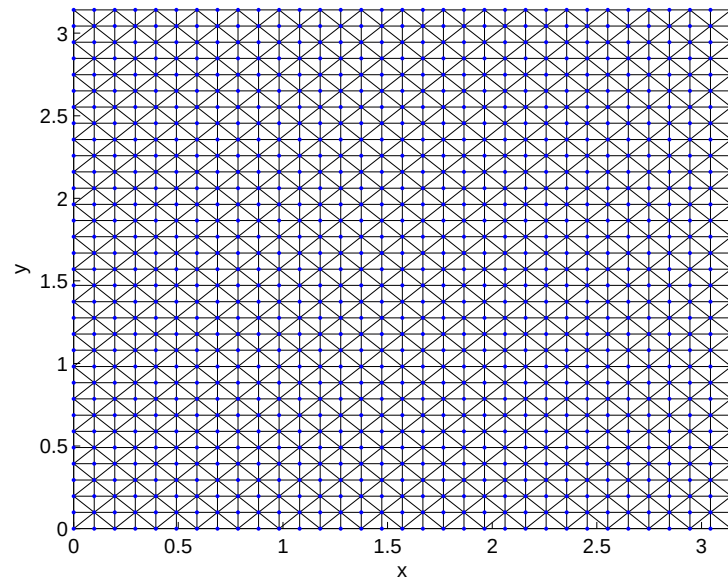
Um ponto observado é que a faixa de valores para os parâmetros de controle das RBF's impacta na solução, inclusive, podendo introduzir autovalores espúrios. Efeito semelhante foi mostrado no problema do guia de onda tratado na Seção 4.3.1, no qual fez-se uma análise do impacto da variação dos parâmetros de controle na solução numérica. Novamente, a escolha dos valores de p e C teve que ser feita cuidadosamente para que o método fornecesse uma solução adequada para o problema.

4.3.3 Guia de Onda com Descontinuidade

Na Seção 4.3.1, resolveu-se um problema de propagação em uma guia de onda retangular vazio. Nesta seção, trata-se um guia semelhante porém com uma descontinuidade provocada



(a)



(b)

Figura 4.19: Distribuições de nós no guia de onda usadas pelo método sem malha com RBF vetorial. As duas distribuições contam com 33×33 nós. As malhas de integração são (a) retangular e (b) triangular.

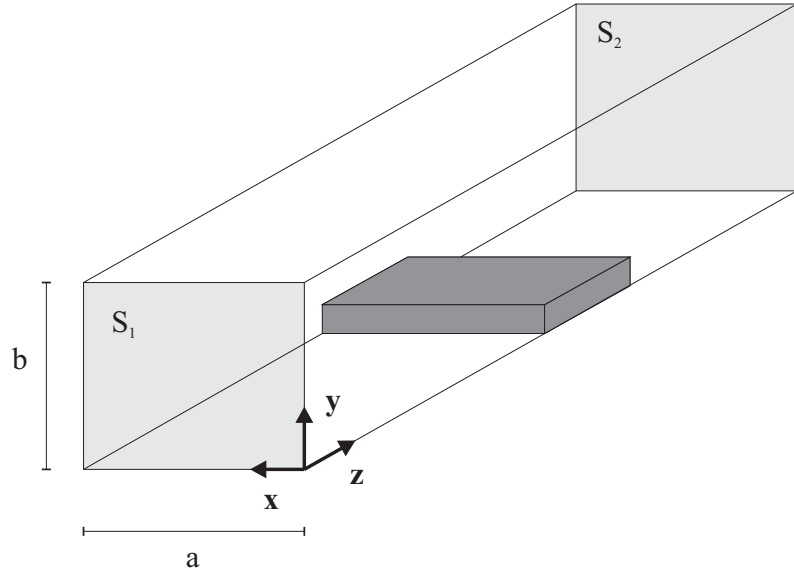


Figura 4.20: Guia de onda retangular com obstáculo.

por um obstáculo cujas paredes são condutores elétricos perfeitos, como mostra a Figura 4.20.

A onda propaga-se em modo TE_{10} na direção $+z$. Este problema é representado em sua forma forte pela Equação 2.94 e condições de contorno dadas pelas Equações 2.95 e 2.96. O campo incidente é o mesmo da Equação 4.35, repetido aqui por conveniência:

$$\vec{E}^{inc}(x, y, z) = E_0 \vec{e}_{10}(x, y) e^{-jk_{10}z} \quad (4.49)$$

onde

$$\vec{e}_{10} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{y}, \quad k_{10} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (4.50)$$

Conforme mostrado em [Jin 2002], em $S_1 = \Gamma_{n1}$ aplica-se a condição de contorno de terceiro tipo:

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_{n1} \quad (4.51)$$

com $\gamma_e = jk_{10}$ e $\vec{U} = -2jk_{10} \vec{E}^{inc}$. Em $S_2 = \Gamma_{n2}$ aplica-se também a condição de contorno de terceiro tipo:

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = 0 \quad \text{em } \Gamma_{n2} \quad (4.52)$$

com $\gamma_e = jk_{10}$.

A forma fraca do problema é obtida da Equação 2.106, dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_n} \vec{W} \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = - \int_{\Gamma_{n1}} \vec{W} \cdot \vec{U} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.53)$$

O problema é resolvido em duas dimensões no plano $x = a/2$. A justificativa para a solução no plano yz é semelhante à apresentada na Seção 4.3.1. A geometria é mostrada na Figura 4.21. Considera-se o guia com comprimento igual a 2m, $b = 0,5\text{m}$, $w = 0,2\text{m}$ e $h = 0,1\text{m}$. A frequência de propagação é de 300 MHz e a amplitude do campo é $E_0 = 2\text{V/m}$.

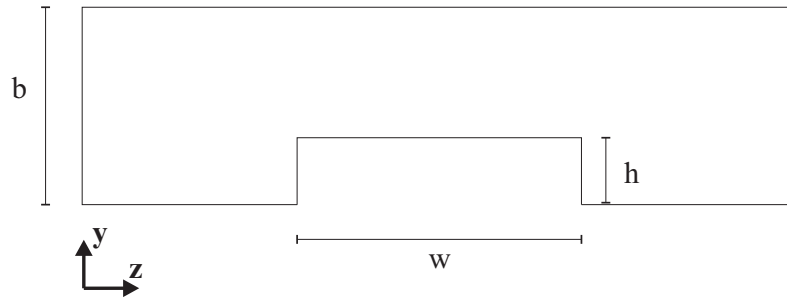


Figura 4.21: Corte no guia de onda retangular com obstáculo correspondente ao plano $x = a/2$.

Como solução de referência, o problema é resolvido numericamente utilizando o FEM com funções de forma de aresta e uma malha triangular com 39.490 nós e 77.861 elementos. Os coeficientes de reflexão R e de transmissão T são calculados como:

$$R = \frac{\vec{E}(x, y, z_1) - \vec{E}^{inc}(x, y, z_1)}{\vec{E}^{inc}(x, y, z_1)} \quad (4.54)$$

$$T = \frac{\vec{E}(x, y, z_2)}{\vec{E}^{inc}(x, y, z_2)} \quad (4.55)$$

onde z_1 e z_2 são as coordenadas z dos planos S_1 e S_2 , respectivamente. Como não há perdas no guia, a relação $|R|^2 + |T|^2 = 1$ deve ser satisfeita [Jin 2002]. A solução de referência fornece os coeficientes $|R| = 0.2315$ e $|T| = 0.9705$. A relação de conservação é $|R|^2 + |T|^2 = 0.9955$, que é próximo do resultado esperado.

Resolve-se o problema com o método da RBF vetorial com uma distribuição de nós gerada por uma malha triangular com 1.640 nós, mostrada na Figura 4.22. A integração é realizada com a própria malha geradora dos nós, com 4 pontos de quadratura para integrais de domínio

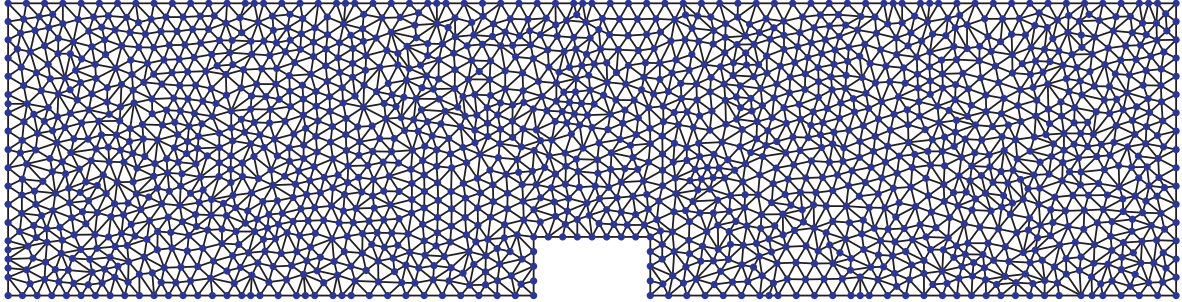


Figura 4.22: Distribuição de nós no guia de onda retangular com obstáculo usada pelo método sem malha com RBF vetorial. A distribuição conta com 1.640 nós extraídos da malha triangular.

e 2 pontos para as de contorno. O esquema de seleção de nós de suporte para as funções de forma é o T2L. A função de base radial utilizada é a multiquádrica com parâmetro de controle $C = 2,5 \times d_c$, sendo d_c o espaçamento nodal médio.

Os coeficientes de reflexão R e transmissão T são calculados e comparados com a solução de referência gerada pelo método dos elementos finitos de aresta. Os resultados são mostrados na Tabela 4.2. Os coeficientes obtidos com o método da RBF vetorial estão em acordo com a solução de referência, com maior desvio para o coeficiente de reflexão. A relação de conservação é respeitada, ficando próxima de 1.

Tabela 4.2: Coeficientes de reflexão R e transmissão T calculados para o guia de onda com descontinuidade usando o método sem malha com RBF vetorial.

	Referência	RBF
$ R $	0,2315	0,2456
$ T $	0,9705	0,9638
$ R ^2 + T ^2$	0,9955	0,9891

Os resultados utilizando função de base radial Gaussiana não foram satisfatórios, diferindo muito da solução de referência e, por isso, não foram apresentados. Assim como evidenciado nos problemas resolvidos anteriormente, há uma forte dependência do parâmetro de controle C na solução numérica. Esse comportamento torna o método de difícil aplicabilidade prática, pois não é possível garantir credibilidade à solução numérica produzida, sendo o método de pouca robustez.

Capítulo 5

Método sem Malha de Aresta

Métodos sem malha constróem as funções de forma baseados em nós distribuídos no domínio do problema. Todavia, a aproximação gerada não satisfaz a condição do divergente nulo requerida pelas equações de Maxwell e, portanto, há o corrompimento da solução numérica por modos espúrios.

Uma forma de contornar essa dificuldade é utilizar uma formulação restrita, isto é, modificar a formulação do problema com o acréscimo de restrições para garantir a satisfação da condição do divergente. Seguindo esta linha, no Capítulo 3 foi proposta uma formulação fraca enfraquecida com o acréscimo de um termo de penalidade para o Método de Interpolação de Pontos Suavizado. Todavia, o método da penalidade não elimina completamente os modos espúrios da solução numérica, mas sim reduz sua ocorrência.

Outro caminho, apresentado no Capítulo 4, foi utilizar novas funções de forma baseadas em RBFs vetoriais que gerassem aproximações que garantissem a satisfação da condição do divergente nulo ao invés de modificar a formulação do problema. De acordo com os resultados, o método mostrou-se muito sensível aos parâmetros das RBFs, que impactam fortemente na qualidade da solução numérica. Esta característica é um fator dificultador para a aplicação do método em problemas de valor de contorno.

Dessa maneira, é natural que se busque alternativas para que se consiga produzir soluções numéricas que não sejam corrompidas por modos espúrios, isto é, que satisfaçam a condição do divergente nulo.

No Método dos Elementos Finitos, o caminho tomado foi a utilização de elementos de aresta, onde os graus de liberdade são associados às arestas e não aos nós da malha. Isso faz que as funções de forma possuam funções vetoriais de base. Considere o triângulo mostrado na Figura 5.1. Os nós estão numerados de 1 a 3, assim como as arestas (e_1 , e_2 , e_3). As arestas são orientadas conforme as setas na figura.

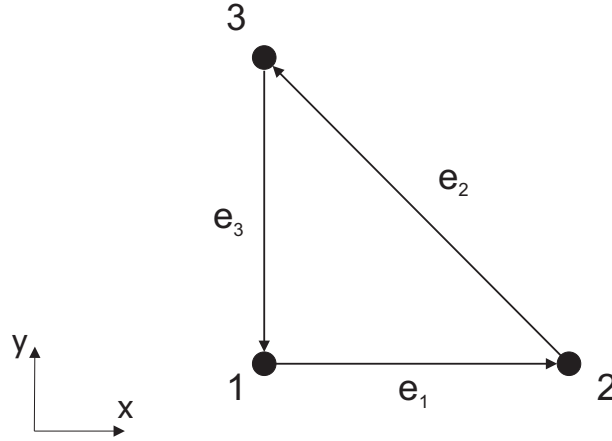


Figura 5.1: Triângulo representando um elemento de aresta.

Considere que N_1 , N_2 e N_3 sejam as funções de forma nodais do FEM relativas aos nós 1, 2 e 3, respectivamente. A função vetorial da k -ésima aresta é dada por [Jin 2002]:

$$\vec{N}_k = \vec{W}_{ij} = (N_i \nabla N_j - N_j \nabla N_i) l_k \quad (5.1)$$

onde i e j são os índices dos nós de origem e de destino da aresta k , e l_k o comprimento da aresta k .

Dessa maneira, o campo vetorial $\vec{E}^h$ dentro de um elemento é aproximado por:

$$\vec{E}^h = \sum_{k=1}^3 \vec{N}_k E_k \quad (5.2)$$

onde E_k representa o coeficiente associado à k -ésima aresta, cujo significado físico é a componente tangencial de $\vec{E}$ ao longo da aresta k . A Figura 5.2 mostra as funções de forma de aresta para o triângulo da Figura 5.1.

Analisando o rotacional das funções de forma de aresta:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{W}_{ij} &= \nabla \times (N_i \nabla N_j - N_j \nabla N_i) \\ &= \nabla \times (N_i \nabla N_j) - \nabla \times (N_j \nabla N_i) \\ &= N_i \nabla \times \nabla N_j - \nabla N_j \times \nabla N_i - (N_j \nabla \times \nabla N_i - \nabla N_i \times \nabla N_j) \\ &= -\nabla N_j \times \nabla N_i + \nabla N_i \times \nabla N_j \\ &= \nabla N_i \times \nabla N_j + \nabla N_i \times \nabla N_j \\ &= 2 \nabla N_i \times \nabla N_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

isto é, dentro de cada elemento o rotacional da função de aresta é um vetor constante.

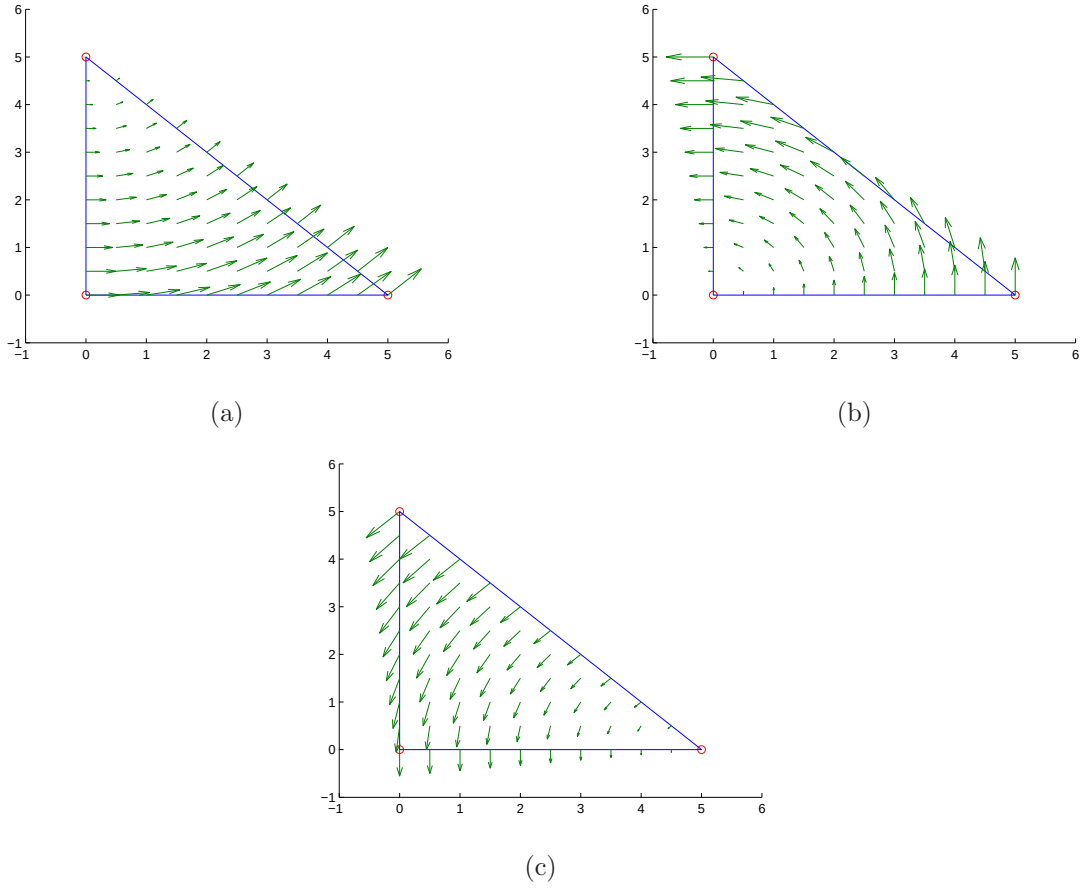


Figura 5.2: Funções de forma de aresta do método dos elementos finitos para elemento triangular. (a) $\vec{N}_1$, (b) $\vec{N}_2$ e (c) $\vec{N}_3$.

Volta-se a atenção agora para o divergente das funções de forma de aresta:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{W}_{ij} &= \nabla \cdot (N_i \nabla N_j - N_j \nabla N_i) \\
 &= \nabla \cdot (N_i \nabla N_j) - \nabla \cdot (N_j \nabla N_i) \\
 &= \nabla N_j \cdot \nabla N_i + N_i \nabla \cdot \nabla N_j - (\nabla N_i \cdot \nabla N_j + N_j \nabla \cdot \nabla N_i) \\
 &= \nabla N_i \cdot \nabla N_j + N_i \nabla^2 N_j - \nabla N_i \cdot \nabla N_j - N_j \nabla^2 N_i \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde o laplaciano das funções nodais é nulo uma vez que o gradiente das funções nodais é constante dentro do elemento. Portanto, dentro de cada elemento o divergente da função de aresta é nulo e, conseqüentemente, este tipo de função é capaz de produzir campos vetoriais para os quais a condição do divergente nulo é atendida, eliminando os modos espúrios da solução numérica.

Nos métodos sem malha, as funções de forma são construídas com base nos nós distribuídos no domínio do problema e, por isso são escalares. Para solucionar problemas vetoriais, é atribuído a cada nó um grau de liberdade para cada componente vetorial a ser aproximada, como visto no Capítulo 3. Essa abordagem traz problemas relativos à geração de soluções errôneas na aproximação numérica e aumenta o tamanho do sistema matricial a ser solucionado.

A ideia deste capítulo é apresentar o desenvolvimento de novas funções de forma vetoriais de aresta para métodos sem malha que contornem os problemas acima mencionados. As funções, assim como no FEM, são construídas com base em arestas ao invés de nós, associando um grau de liberdade a cada aresta distribuída no domínio. Para isso, são escolhidas bases vetoriais de modo a garantir que a condição de divergente nulo seja satisfeita e, assim, eliminar as soluções numéricas espúrias. Tais funções de forma são chamadas, neste trabalho, de Funções Forma de Aresta e o método sem malha que utiliza tais funções é denominado Método sem Malha de Aresta, em inglês *Edge Meshless Method* (EMM).

5.1 Funções de Forma de Aresta

Considere um campo vetorial $\vec{F}$ definido em um certo domínio Ω e que deseja-se aproximá-lo por uma função $\vec{F}^h$. Um conjunto de arestas é então distribuído no interior e na fronteira de Ω , como mostra a Figura 5.3.

Para aproximar o campo em um ponto $\mathbf{x}$, é escolhido um conjunto de n arestas na vizinhança de $\mathbf{x}$, chamadas arestas de suporte. Ao conjunto de arestas dá-se o nome de domínio de suporte de $\mathbf{x}$. O processo de seleção das arestas de suporte ainda é uma questão em aberto, por exemplo, pode-se selecionar as k arestas mais próximas do ponto $\mathbf{x}$. Outra forma é selecionar as arestas cujos suportes contenham o ponto $\mathbf{x}$, como será mostrado a seguir. Uma discussão a respeito do processo de seleção de arestas de suporte é feita na Seção 5.4. Na Figura 5.3, são ilustrados exemplos de domínios de suporte dos pontos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$.

A aproximação $\vec{F}^h$ do campo $\vec{F}$ em um ponto $\mathbf{x}$ é realizada como

$$\vec{F}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i a_i + \sum_{j=1}^m \hat{t}_{pj} b_j \quad (5.5)$$

onde $\hat{t}_i$ é o vetor unitário na direção da i -ésima aresta no domínio de suporte de $\mathbf{x}$, n é o número total de arestas no domínio de suporte, a_i é o coeficiente de interpolação da função W associado à i -ésima aresta do domínio de suporte, $\hat{t}_{pj}$ é um vetor unitário predefinido em uma direção específica, m é o número de vetores predefinidos na aproximação, e b_j é o coeficiente de interpolação associado ao j -ésimo vetor predefinido.

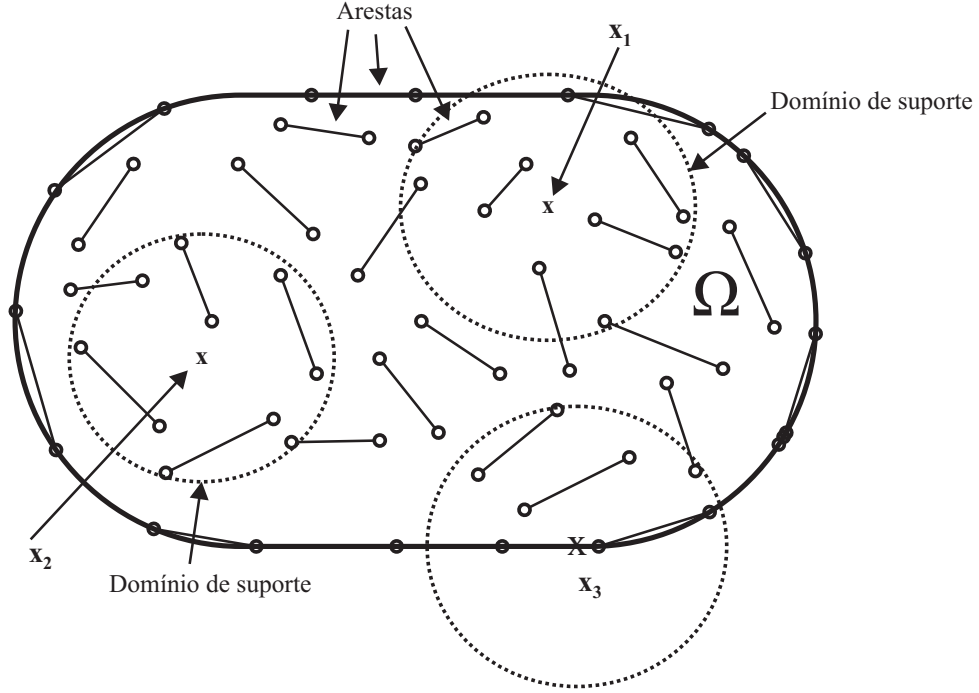


Figura 5.3: Distribuição de arestas no domínio e domínio de suporte. São mostrados os domínios de suporte dos pontos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$. Os extremos das arestas estão representados por pequenos círculos para facilitar a visualização.

Observe que a aproximação $\vec{F}^h$ é realizada utilizando dois termos. O primeiro termo está ligado à contribuição de cada aresta de suporte na aproximação vetorial. Já o segundo termo, que é independente das arestas de suporte, está presente para conferir à aproximação a capacidade de reproduzir campos vetoriais constantes. No primeiro termo, W_i é a função de suporte da aresta e_i que determina o quanto a aresta contribui na aproximação gerada do campo vetorial. Com intuito de investigar as características de W e de garantir que a aproximação $\vec{F}$ tenha divergente nulo, toma-se o divergente da Equação 5.5:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F}^h(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot \sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i a_i + \nabla \cdot \sum_{j=1}^m \hat{t}_{pj} b_j \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla \cdot (W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) a_i + \sum_{j=1}^m \nabla \cdot (\hat{t}_{pj}) b_j \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla \cdot (W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) a_i = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde o segundo somatório foi anulado pois os vetores $\hat{t}_{pj}$ são constantes. Da Equação 5.5, tem-se que

$$\nabla \cdot (W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) = 0 \quad (5.7)$$

Considerando uma identidade vetorial, podemos reescrever a Equação 5.7 como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (W_i(\mathbf{x})\hat{t}_i) &= W_i(\mathbf{x})\nabla \cdot \hat{t}_i + \hat{t}_i \cdot \nabla W_i(\mathbf{x}) \\ &= \hat{t}_i \cdot \nabla W_i(\mathbf{x}) = 0\end{aligned}\quad (5.8)$$

Para que a Equação 5.8 seja satisfeita, devemos ter:

$$\hat{t}_i \cdot \nabla W_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.9)$$

isto é, o gradiente da função W_i deve ser ortogonal ao vetor t_i . Para isso, podemos especificar W_i de modo que este varie apenas na direção ortogonal à aresta, por exemplo, que W_i seja uma função da distância ortogonal d_i entre o ponto $\mathbf{x}$ e a aresta e_i , isto é,

$$W_i(\mathbf{x}) = f(d_i(\mathbf{x})) \quad (5.10)$$

Dessa forma, garante-se que a aproximação tenha divergente nulo.

Uma versão de W_i é a função linear em relação à distância d_i :

$$W_i(\mathbf{x}) = 1 - \frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i} \quad (5.11)$$

onde dw_i é o parâmetro que controla o alcance (ou abertura) de W_i e pode ser visto como uma espécie de raio de influência da aresta e_i .

Outras opções podem ser adaptadas a partir das funções de peso utilizadas no Método dos Mínimos Quadrados Móveis [Liu 2002]. A versão da *spline* quártica é:

$$W_i(\mathbf{x}) = 1 - 6 \left(\frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i} \right)^2 + 8 \left(\frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i} \right)^3 - 3 \left(\frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i} \right)^4 \quad (5.12)$$

e a versão da exponencial ou Gaussiana é:

$$W_i(\mathbf{x}) = e^{-\left(\frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i \cdot \alpha}\right)^2} \quad (5.13)$$

As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 mostram o gráfico das funções W linear, *spline* quártica e exponencial, respectivamente, considerando uma aresta com pontos extremos $(-10; 0)$ e $(10; 0)$, e $\alpha = 0.3$ para a versão exponencial.

Retornando ao desenvolvimento da aproximação $\vec{F}$, a Equação 5.5 pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\vec{F}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{C}_u^T\mathbf{b} \quad (5.14)$$

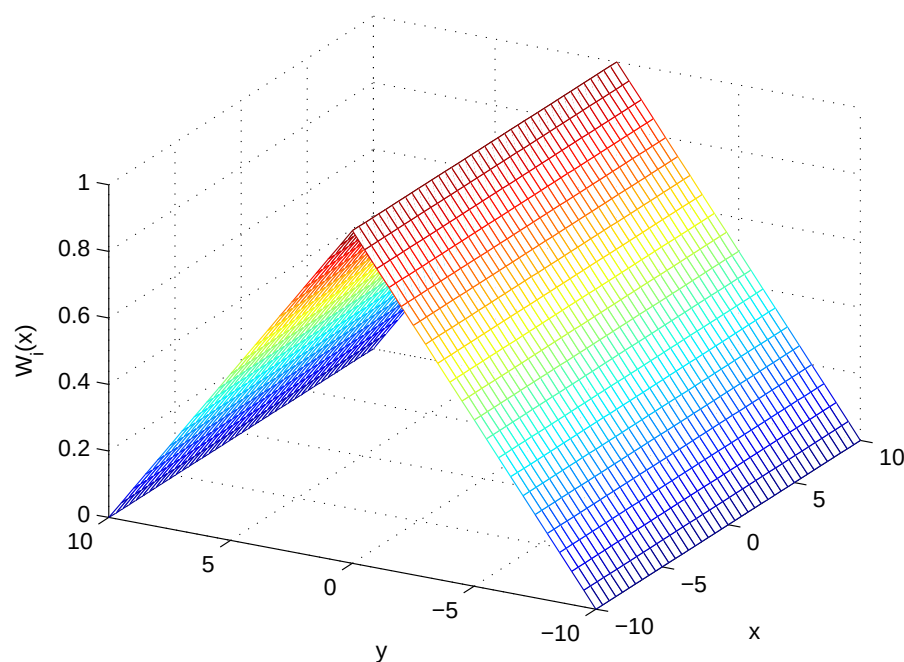


Figura 5.4: Função W linear contida nas funções de forma vetoriais de aresta. W corresponde à Equação 5.11 para a aresta com extremos $(-10; 0)$ e $(10; 0)$.

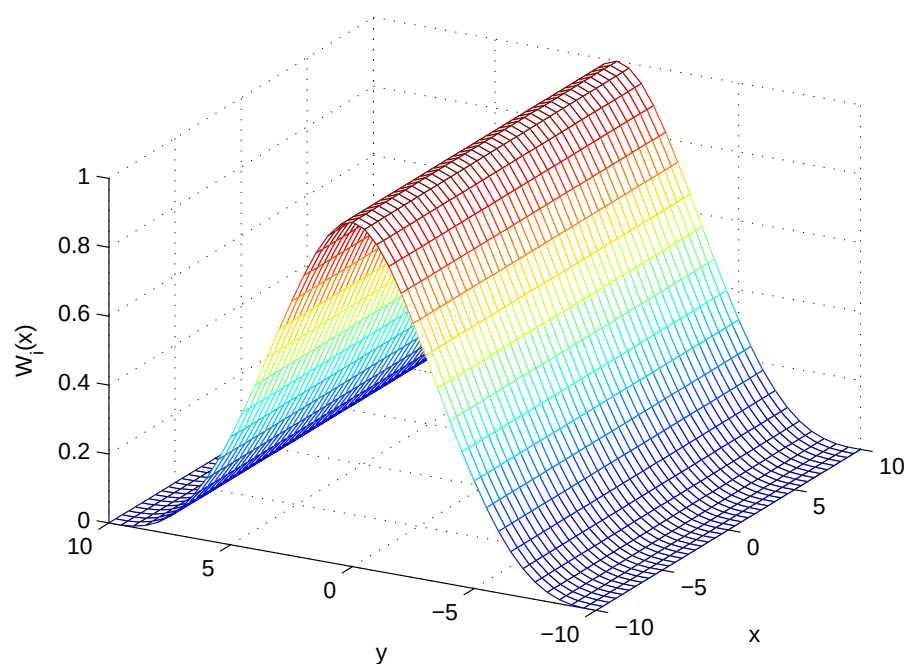


Figura 5.5: Função W *spline* quártica contida nas funções de forma vetoriais de aresta. W corresponde à Equação 5.12 para a aresta com extremos $(-10; 0)$ e $(10; 0)$.

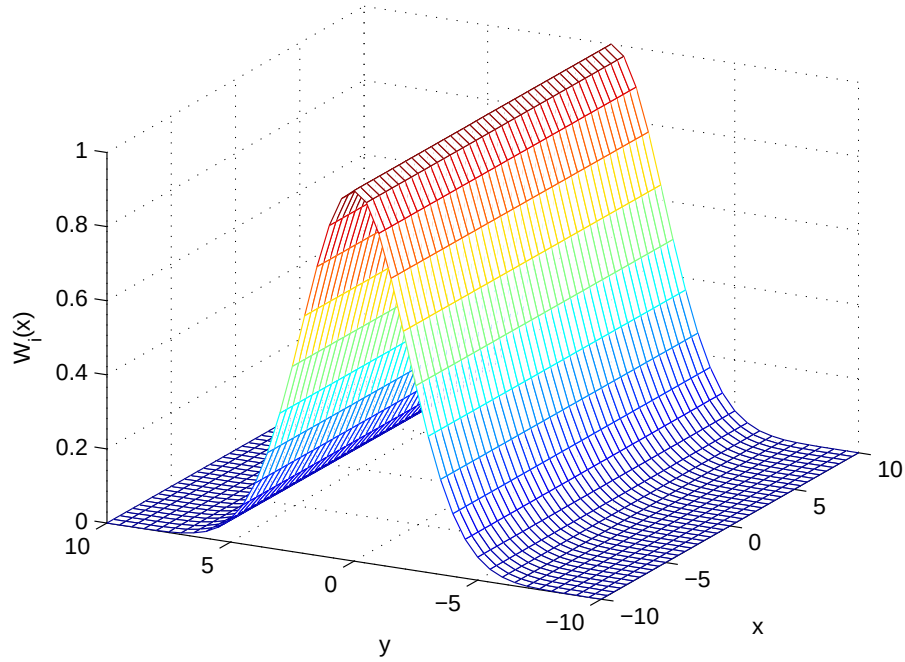


Figura 5.6: Função W exponencial contida nas funções de forma vetoriais de aresta. W corresponde à Equação 5.13 para a aresta com extremos $(-10;0)$ e $(10;0)$, e $\alpha = 0.3$.

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) &= [W_1(\mathbf{x})\hat{t}_1, W_2(\mathbf{x})\hat{t}_2, \dots, W_n(\mathbf{x})\hat{t}_n] \\ \mathbf{C}_u^T &= [\hat{t}_{p1}, \hat{t}_{p2}, \dots, \hat{t}_{pm}] \\ \mathbf{a} &= [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \\ \mathbf{b} &= [b_1, b_2, \dots, b_m]^T\end{aligned}\tag{5.15}$$

Os coeficientes a_i e b_j na Equação 5.15 são determinados fazendo com que a circulação do campo $\vec{F}$ seja satisfeita sobre cada aresta e_k do domínio de suporte de $\mathbf{x}$. Para cada aresta e_k ,

$$\int_{e_k} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{e_k} \vec{F}^h \cdot d\vec{l}, \quad k = 1, \dots, n\tag{5.16}$$

Substituindo a Equação 5.14 na 5.16, obtém-se

$$\int_{e_k} (\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{C}_u^T\mathbf{b}) \cdot d\vec{l} = c_k, \quad k = 1, \dots, n\tag{5.17}$$

onde c_k é a circulação do campo $\vec{F}$ sobre a aresta e_k . A Equação 5.17 pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{B}_Q\mathbf{a} + \mathbf{C}_Q\mathbf{b} = \mathbf{c}_s\tag{5.18}$$

onde $\mathbf{c}_s$ é um vetor que contém as circulações c_k sobre as n arestas do domínio de suporte, e

$$\mathbf{B}_Q = \begin{bmatrix} \int_{e_1} W_1 \hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \int_{e_1} W_2 \hat{t}_2 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_1} W_n \hat{t}_n \cdot \vec{dl} \\ \int_{e_2} W_1 \hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \int_{e_2} W_2 \hat{t}_2 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_2} W_n \hat{t}_n \cdot \vec{dl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{e_n} W_1 \hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \int_{e_n} W_2 \hat{t}_2 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_n} W_n \hat{t}_n \cdot \vec{dl} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{C}_Q = \begin{bmatrix} \int_{e_1} \hat{t}_{p1} \cdot \vec{dl} & \int_{e_1} \hat{t}_{p2} \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_1} \hat{t}_{pm} \cdot \vec{dl} \\ \int_{e_2} \hat{t}_{p1} \cdot \vec{dl} & \int_{e_2} \hat{t}_{p2} \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_2} \hat{t}_{pm} \cdot \vec{dl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{e_n} \hat{t}_{p1} \cdot \vec{dl} & \int_{e_n} \hat{t}_{p2} \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_n} \hat{t}_{pm} \cdot \vec{dl} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

O sistema de equações 5.18 possui n equações e $n + m$ incógnitas, portanto, não possui solução única. Uma forma de tornar o sistema determinado e com solução única é seguir procedimento análogo ao realizado na Seção 2.2.3. Dessa maneira, a seguinte restrição é imposta:

$$\mathbf{C}_Q^T \mathbf{a} = 0 \quad (5.21)$$

Multiplicando a Equação 5.18 por $\mathbf{B}_Q^{-1}$, após desenvolvimento chega-se a

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{c}_s - \mathbf{B}_Q^T \mathbf{C}_Q \mathbf{b} \quad (5.22)$$

Substituindo a Equação 5.22 em 5.21, tem-se após desenvolvimento:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{c}_s \quad (5.23)$$

onde

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{C}_Q^T \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{C}_Q]^{-1} \mathbf{C}_Q^T \mathbf{B}_Q^{-1} \quad (5.24)$$

Substituindo de volta a Equação 5.23 em 5.22, chega-se a

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{c}_s \quad (5.25)$$

onde

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{B}_Q^{-1} [1 - \mathbf{C}_Q \mathbf{S}_b] \quad (5.26)$$

Combinando as Equações 5.25 e 5.23 com a Equação 5.14, a aproximação $\vec{F}^h$ pode ser escrita como

$$\vec{F}^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n \vec{\phi}_i(\mathbf{x}) c_i = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{c}_s \quad (5.27)$$

onde $\vec{\phi}_i$ corresponde à função de forma vetorial da i -ésima aresta do domínio de suporte, $\Phi(\mathbf{x})$ é a matrix das funções de forma vetoriais de cada aresta do domínio do suporte:

$$\Phi(\mathbf{x}) = [\vec{\phi}_1(\mathbf{x}), \vec{\phi}_2(\mathbf{x}), \cdots, \vec{\phi}_n(\mathbf{x})] \quad (5.28)$$

e sua expressão é

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{C}_u^T\mathbf{S}_b \quad (5.29)$$

A aproximação 5.27 tem a capacidade de reproduzir um vetor contante de forma exata quando $m = 2$ em duas dimensões, $m = 3$ em três dimensões. Nessa situação, os vetores predefinidos são escolhidos como os vetores unitários $\hat{x}$ e $\hat{y}$ em duas dimensões, e $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ em três dimensões, uma vez que estes formam uma base para os vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Para ilustrar as funções de forma geradas, considere os casos em que três e quatro arestas de suporte são utilizadas no processo de construção, mostrados na Figura 5.7. As funções de forma vetoriais de cada aresta no domínio $[0, 1] \times [0, 1]$ são mostradas na Figura 5.8 para o caso com três arestas e na Figura 5.9 para quatro arestas de suporte.

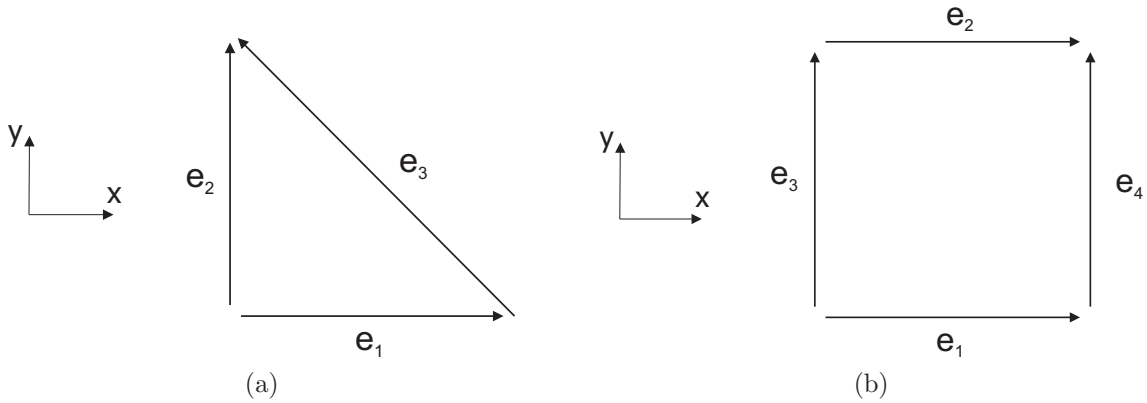


Figura 5.7: Arestas de suporte empregadas na construção das funções de forma vetoriais de aresta. (a) Três arestas de suporte posicionadas formando um triângulo e (b) Quatro arestas de suporte posicionadas formando um retângulo.

Uma das operações que envolve os campos nas equações de Maxwell é o rotacional. Por isso, tomando o rotacional da Equação 5.27:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F}^h(\mathbf{x}) &= \nabla \times \Phi(\mathbf{x})\mathbf{c}_s \\ &= [\nabla \times \Phi(\mathbf{x})]\mathbf{c}_s \end{aligned} \quad (5.30)$$

isto é, é preciso determinar o rotacional da matriz das funções de forma Φ . Tomando o rotacional na Equação 5.29:

$$\begin{aligned} \nabla \times \Phi(\mathbf{x}) &= \nabla \times (\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{C}_u^T\mathbf{S}_b) \\ &= \nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a \\ &= [\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})]\mathbf{S}_a \end{aligned} \quad (5.31)$$

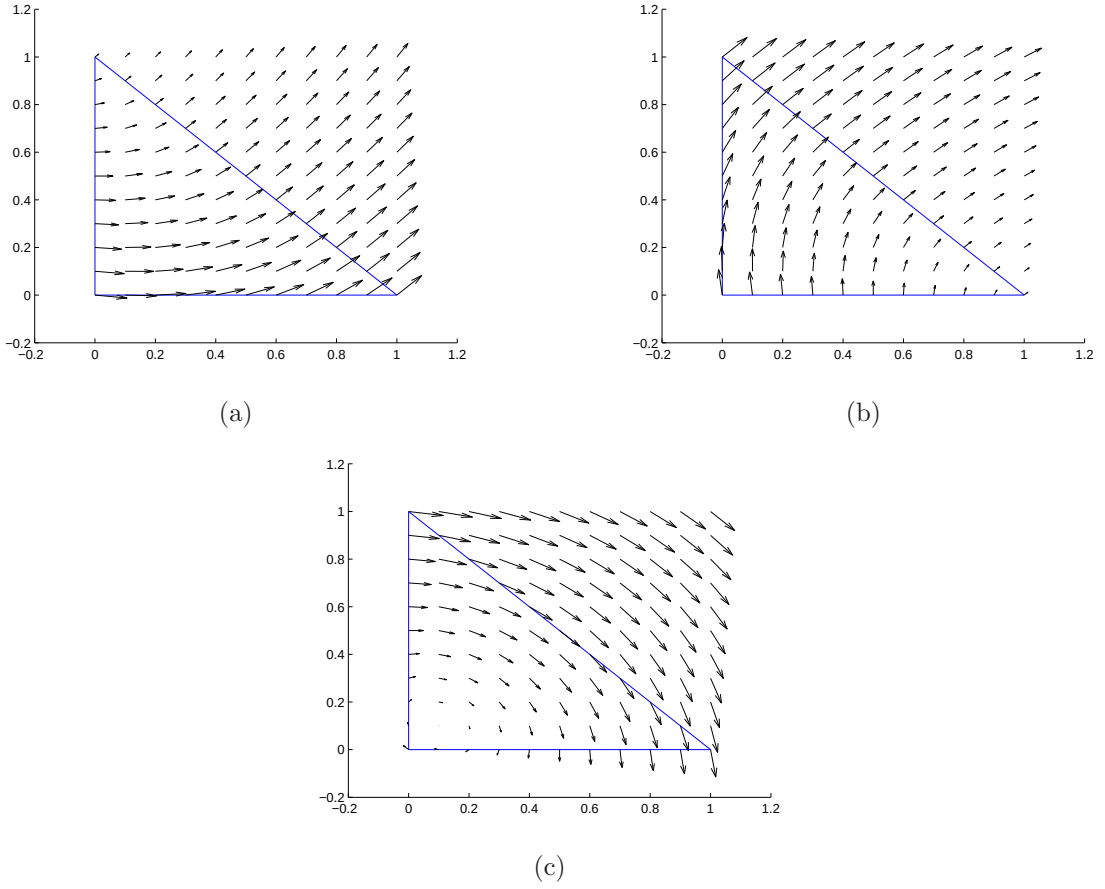


Figura 5.8: Funções de forma vetoriais de aresta considerando 3 arestas de suporte. Utiliza-se W linear com $dw = 3$. (a) $\vec{\phi}_1$, (b) $\vec{\phi}_2$ e (c) $\vec{\phi}_3$.

onde

$$\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) = [\nabla \times W_1(\mathbf{x})\hat{t}_1, \nabla \times W_2(\mathbf{x})\hat{t}_2, \dots, \nabla \times W_n(\mathbf{x})\hat{t}_n] \quad (5.32)$$

Da identidade vetorial

$$\nabla \times u\vec{v} = u\nabla \times \vec{v} - \vec{v} \times \nabla u \quad (5.33)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \nabla \times W_i(\mathbf{x})\hat{t}_i &= W_i(\mathbf{x})\nabla \times \hat{t}_i - \hat{t}_i \times \nabla W_i(\mathbf{x}) \\ &= -\hat{t}_i \times \nabla W_i(\mathbf{x}) \\ &= \nabla W_i(\mathbf{x}) \times \hat{t}_i \end{aligned} \quad (5.34)$$

pois $\nabla \times \hat{t}_i = 0$ uma vez que $\hat{t}_i$ é constante. Aplicando a Equação 5.34 para cada termo da Equação 5.32, tem-se que

$$\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) = [\nabla W_1(\mathbf{x}) \times \hat{t}_1, \nabla W_2(\mathbf{x}) \times \hat{t}_2, \dots, \nabla W_n(\mathbf{x}) \times \hat{t}_n] \quad (5.35)$$

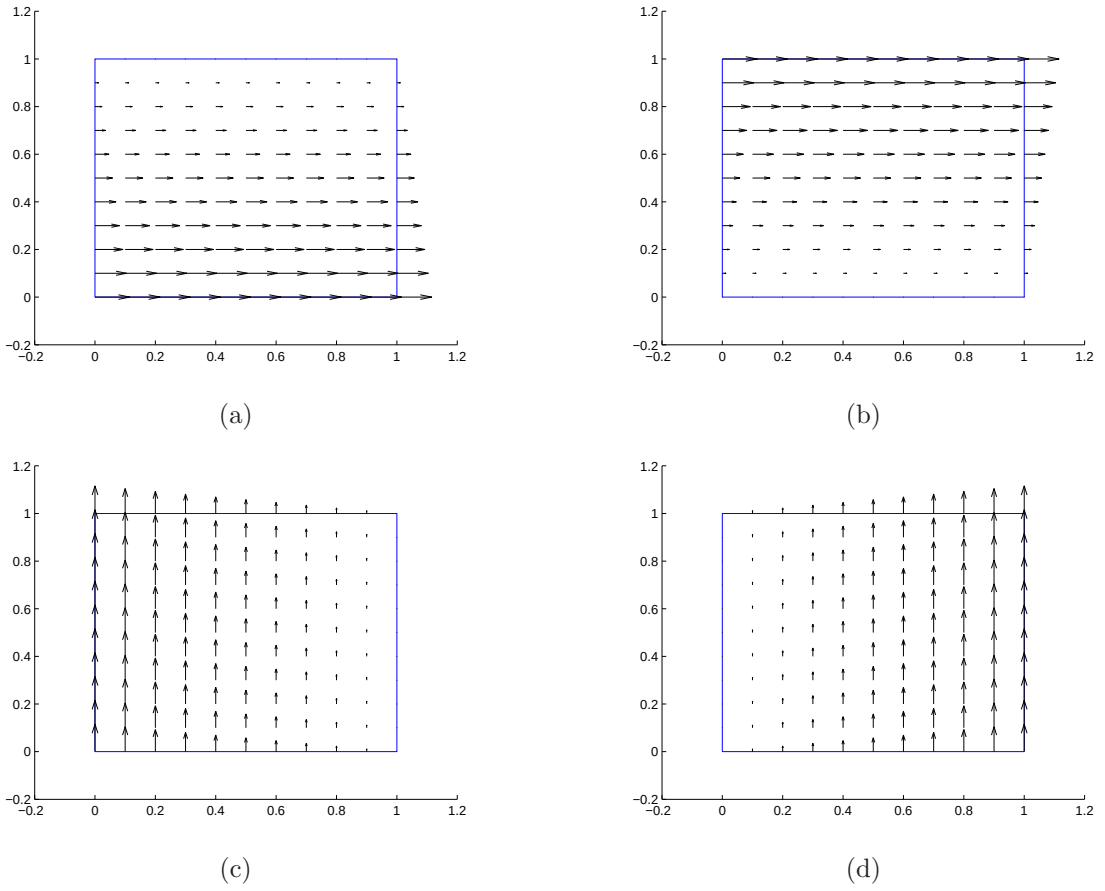


Figura 5.9: Funções de forma vetoriais de aresta considerando 4 arestas de suporte. Utiliza-se W linear com $dw = 3$. (a) $\vec{\phi}_1$, (b) $\vec{\phi}_2$, (c) $\vec{\phi}_3$ e (d) $\vec{\phi}_4$.

Vê-se que o rotacional da função de forma de uma aresta é prontamente calculado como o produto vetorial entre o gradiente da função W e o vetor diretor da aresta, multiplicado pela matriz $\mathbf{S}_a$.

Por construção, as funções de forma 5.27 têm divergente nulo. Outra importante característica é que como a circulação do campo vetorial é satisfeita sobre cada aresta do domínio, as condições de contorno essenciais são facilmente impostas mediante distribuição das arestas sobre as fronteiras de Dirichlet. Numericamente, mostra-se que a circulação das funções de forma sobre as outras arestas é nula. Então,

$$\int_{e_j} \vec{\phi}_i \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (5.36)$$

e as funções de forma constituem uma função de interpolação para campos vetoriais.

5.2 Interpolação de Campos Vetoriais

Nesta seção, as funções de forma propostas na Seção 5.1 são testadas para verificar a capacidade de interpolar campos vetoriais. Assim como na Seção 4.2, será utilizado o erro médio dado pela Equação 4.31 como um parâmetro de análise das aproximações produzidas.

Para calcular a aproximação vetorial 5.27, é preciso determinar a circulação do campo a ser interpolado sobre cada aresta distribuída no domínio. Nos exemplos que se seguem, a circulação é computada numericamente por gradatura gaussiana com 4 pontos de integração.

5.2.1 Campo Constante

O primeiro teste consiste em reproduzir um campo vetorial constante:

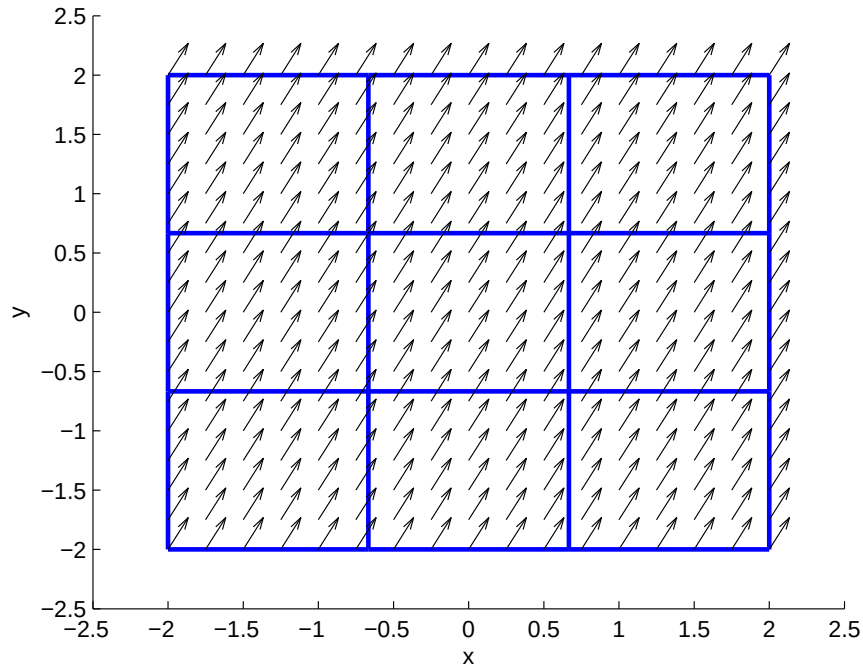
$$\vec{F} = 1\hat{x} + 2\hat{y} \quad (5.37)$$

O campo é aproximado no domínio $(-2, 2) \times (-2, 2)$. Para as funções de forma, utiliza-se a função W linear 5.11 e $dw = 2$. Como primeiro exemplo, as arestas utilizadas na aproximação são de uma malha retangular com 3×3 elementos, e a solução é mostrada na Figura 5.10a. O número de arestas de suporte utilizadas na construção das funções de forma vetoriais é 4, correspondente às arestas de cada elemento. Para o presente caso, o erro é de $1,2 \times 10^{-15}$. Utilizou-se, também, uma malha triangular para gerar as arestas. Nesse caso, as 3 arestas do elemento são usadas no domínio de suporte, e os resultados são mostrados na Figura 5.10b. O erro obtido na aproximação é de $1,0 \times 10^{-15}$. Os resultados indicam que as funções de forma vetoriais de aresta têm a capacidade de reproduzir um campo constante, conforme esperado pela própria formulação.

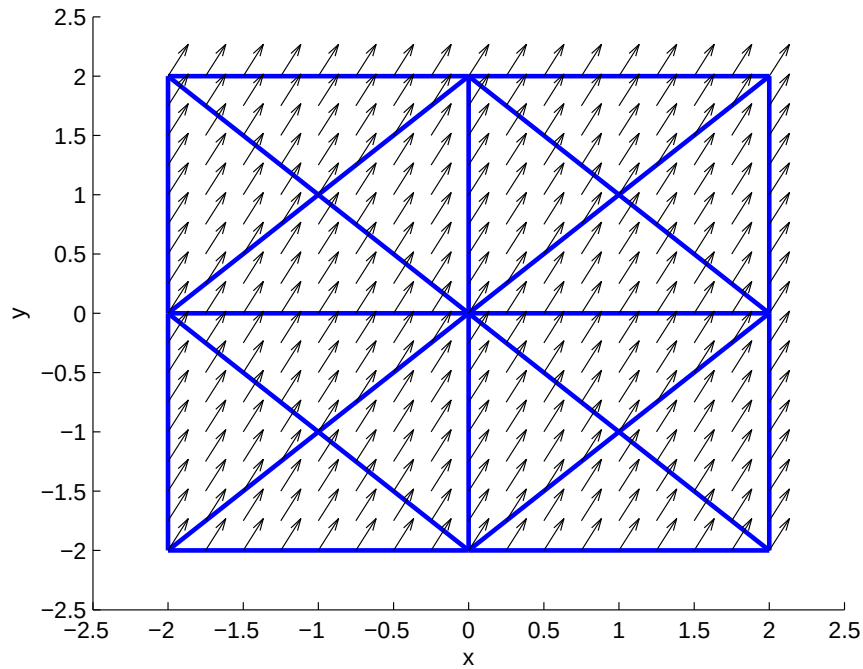
5.2.2 Campo Magnético Produzido Por Um Fio

Considera-se, agora, uma indução magnética produzida por um fio infinitamente longo com densidade de corrente elétrica uniforme. Este problema foi tratado na Seção 4.2.2 e a indução magnética $\vec{B}$ é dada pela Equação 4.33.

A aproximação é realizada usando as funções de forma vetoriais de aresta tanto com uma distribuição gerada por uma malha retangular quanto por uma malha triangular. A função W linear é empregada e seu parâmetro de controle dw_i é configurado como sendo 1,5 vezes o comprimento da aresta correspondente e_i . A Figura 5.11 mostra as aproximações numéricas e as arestas no domínio para as duas distribuições. No primeiro caso (Figura 5.11a), são utilizadas 4 arestas de suporte, enquanto no segundo (Figura 5.11b) são utilizadas 3 arestas de suporte.

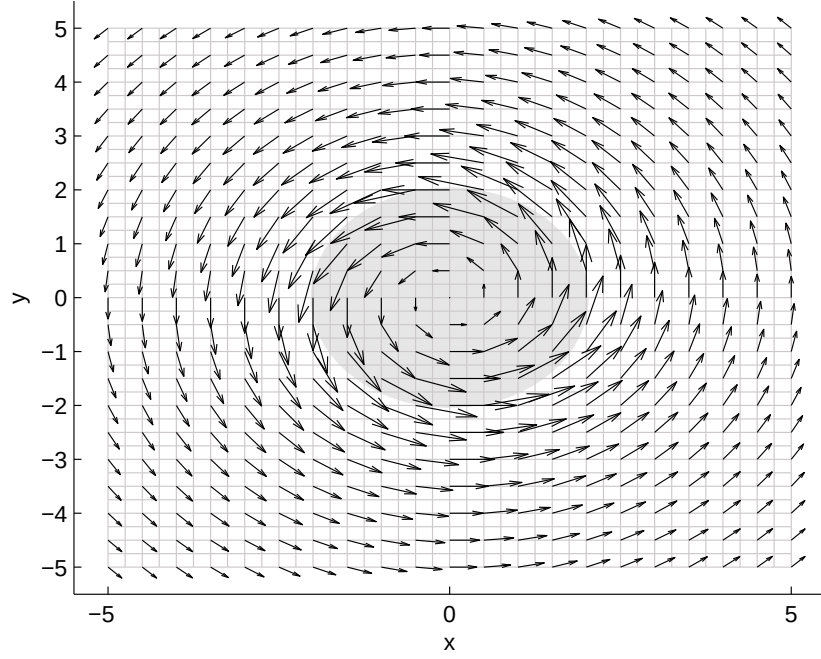


(a)

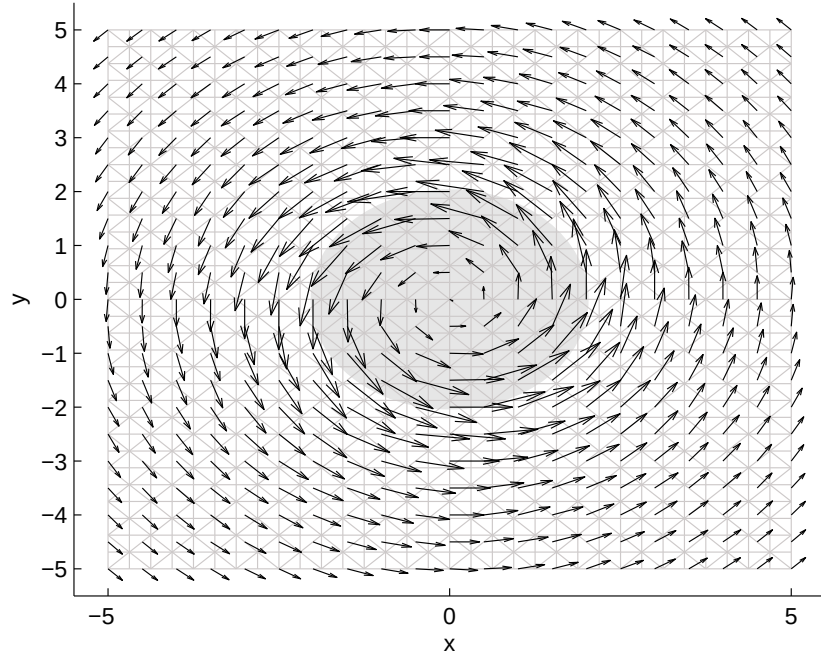


(b)

Figura 5.10: Interpolação de campo vetorial constante usando funções de forma vetoriais de aresta. O campo corresponde à Equação 5.37. A interpolação contou com W linear e $dw = 2$. Em (a) são utilizadas 4 arestas de suporte e em (b) 3 arestas de suporte.



(a)



(b)

Figura 5.11: Interpolação de campo vetorial representando a densidade de fluxo magnético de um fio de raio $a = 2\text{mm}$ usando funções de forma vetoriais de aresta. O campo corresponde à Equação 4.32. A interpolação foi realizada com W linear e $dw_i = 2 \times$ comprimento de e_i . Em (a) são utilizadas 4 arestas de suporte e em (b) 3 arestas de suporte.

Pode ser visto que o campo vetorial produzido pela aproximação é coerente com a expressão analítica: o campo circula em torno do centro do fio, sua magnitude aumenta a partir do centro ($0 \leq \rho \leq a$) e logo depois passa a decrescer à medida que afasta-se do fio ($\rho > a$).

Uma análise acerca do erro da aproximação em função da quantidade de arestas distribuídas no domínio também foi realizada. A Figura 5.12 mostra o erro (Equação 4.31) em função do comprimento das arestas no domínio, tanto para 3 quanto para 4 arestas de suporte usadas nas funções de forma. Os resultados mostram que o erro diminui à medida que aumenta-se o número de arestas distribuídas no domínio, ou seja, a aproximação numérica apresenta tendência de convergir para a expressão analítica do campo.

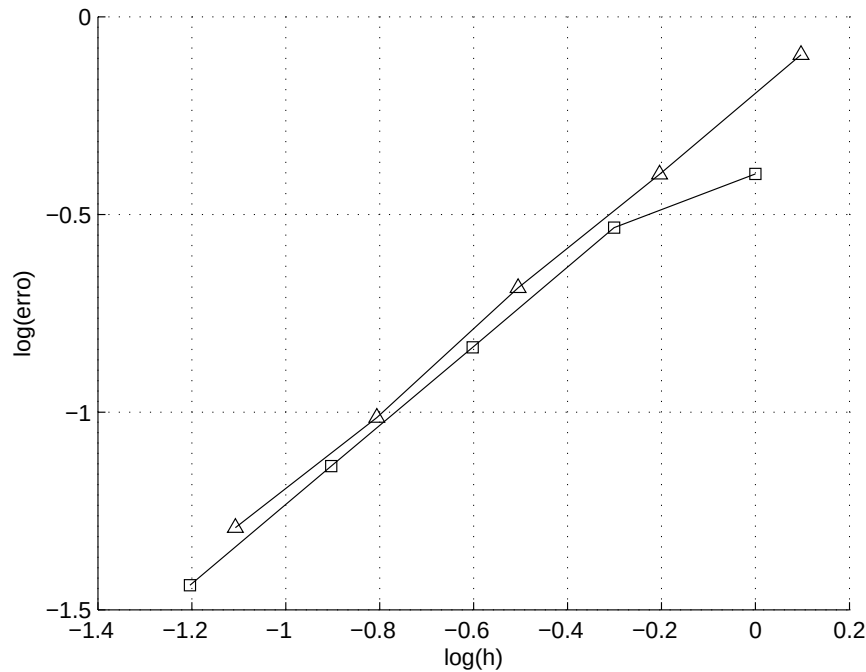


Figura 5.12: Erro de aproximação da densidade de fluxo magnético usando funções de forma vetoriais de aresta em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio. Curva com quadrados representa o caso em que são utilizadas 4 arestas de suporte, e curva com triângulos o caso em que 3 arestas de suporte são utilizadas.

5.2.3 Campo Elétrico em Guia de Onda

O campo elétrico da Seção 4.2.3 é aproximado, agora, usando as funções de forma de aresta. A expressão analítica para o campo elétrico $\vec{E}$ é dada na Equação 4.34 e o domínio considerado é $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

A Figura 5.13 apresenta as malhas utilizadas para a geração das arestas para interpolação, uma versão retangular e outra triangular. A Figura 5.14 apresenta as aproximações obtidas usando as funções de forma vetoriais de aresta com W do tipo *spline* quártica (Equação 5.12) e dw_i igual a 4 vezes o comprimento da aresta correspondente e_i . No caso da malha retangular, 4 arestas de suporte são utilizadas, enquanto no caso da triangular, 3 arestas de suporte. Para efeito de comparação, a Figura 5.15 apresenta a campo elétrico analítico.

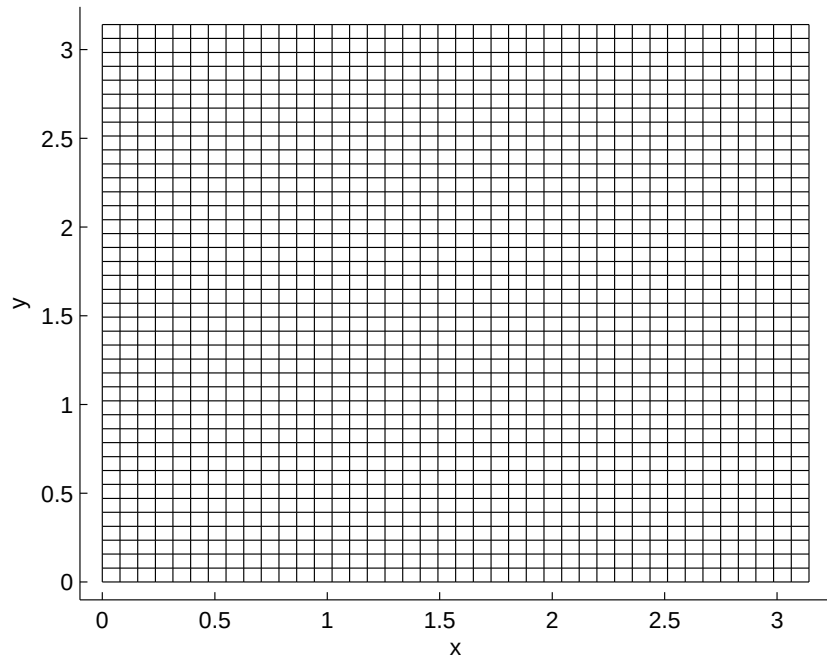
Assim como no problema anterior, faz-se uma análise do erro médio em função da densidade de arestas distribuídas no domínio. A Figura 5.16 mostra o gráfico do erro em função do comprimento das arestas usando 3 e 4 arestas de suporte para a criação das funções de forma vetoriais. Conforme pode-se ver, à medida que a densidade de arestas aumenta, o erro diminui. Em tendência, podemos concluir que a interpolação converge para a solução analítica.

O rotacional do campo elétrico é calculado utilizando as funções de forma vetoriais com as duas distribuições de arestas da Figura 5.13 e os resultados apresentados na Figura 5.17. O rotacional analítico foi mostrado na Figura 4.9. Pode-se perceber que as aproximações visualmente estão coerentes. Há distorções presentes na aproximação usando 3 arestas de suporte, mas à medida que a densidade de arestas aumenta, tais distorções são minimizadas ou até eliminadas.

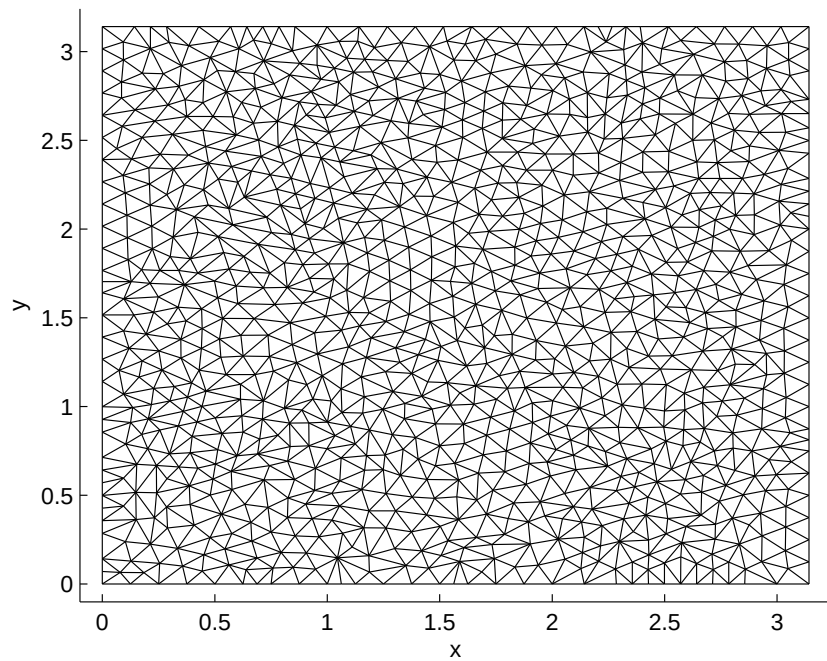
5.3 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo

Nesta seção, o Método sem Malha de Aresta é aplicado em problemas eletromagnéticos para obtenção da solução numérica. A formulação de problemas vetoriais harmônicos no tempo foram apresentadas na Seção 2.7.3. Como a formulação envolve a integração da forma fraca 2.107, esta é efetuada numericamente neste trabalho utilizando uma malha de fundo ou de integração, assim como nos métodos sem malha tradicionais, por exemplo, EFG e NPIM. A princípio, não é necessário que a malha de integração esteja relacionada com as arestas utilizadas na construção das funções de forma vetoriais. Por simplicidade, serão utilizadas as mesmas arestas nos problemas que se seguem. Uma discussão em torno deste item é apresentada na Seção 5.4.

Os problemas aos quais o método será submetido a teste são os mesmos problemas vetoriais tratados no Capítulo 4, e as formulações matemáticas, quando julgar-se necessário, serão repetidas nos momentos oportunos para facilitar o entendimento do leitor.

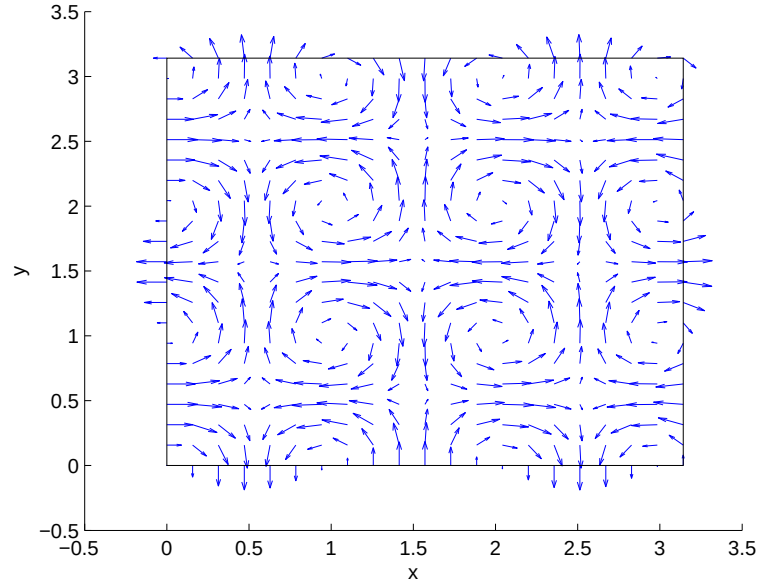


(a)

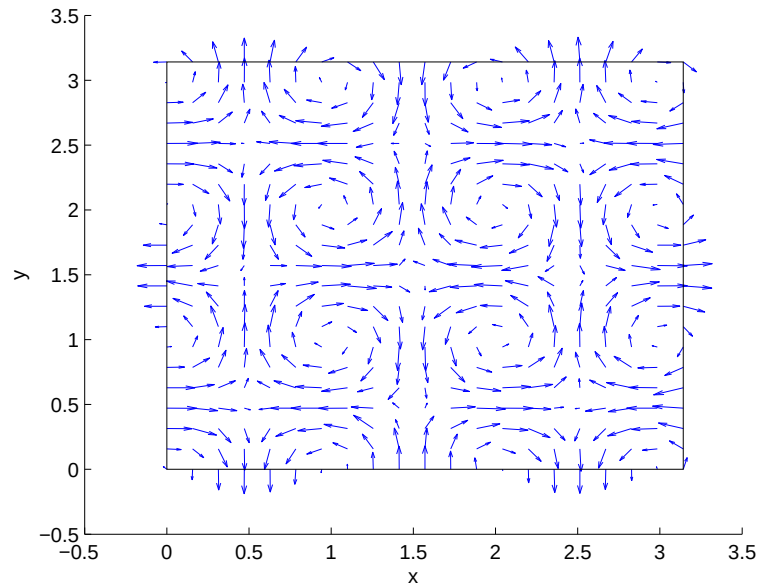


(b)

Figura 5.13: Distribuições de arestas usadas na interpolação do campo elétrico do guia de onda. Arestas geradas de uma malha (a) retangular com 1.681 nós; (b) triangular com 1.032 nós.



(a)



(b)

Figura 5.14: Interpolação do campo vetorial representando o campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma vetoriais de aresta. O campo é dado pela Equação 4.34. A interpolação foi realizada com W *spline* quártica e $dw_i = 4 \times$ comprimento de e_i . Aproximação com (a) malha retangular e 4 arestas de suporte; (b) malha triangular e 3 arestas de suporte.

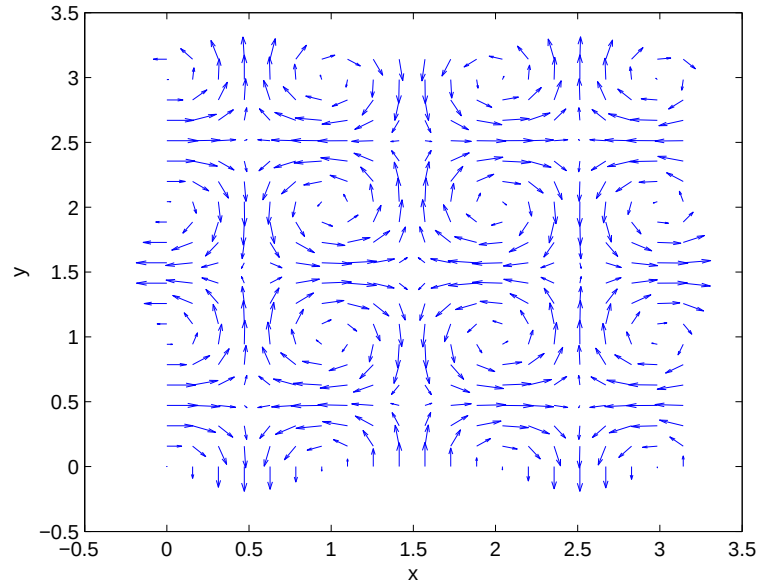


Figura 5.15: Campo elétrico analítico correspondente ao oitavo modo do guia de onda. O campo é dado pela Equação 4.34.

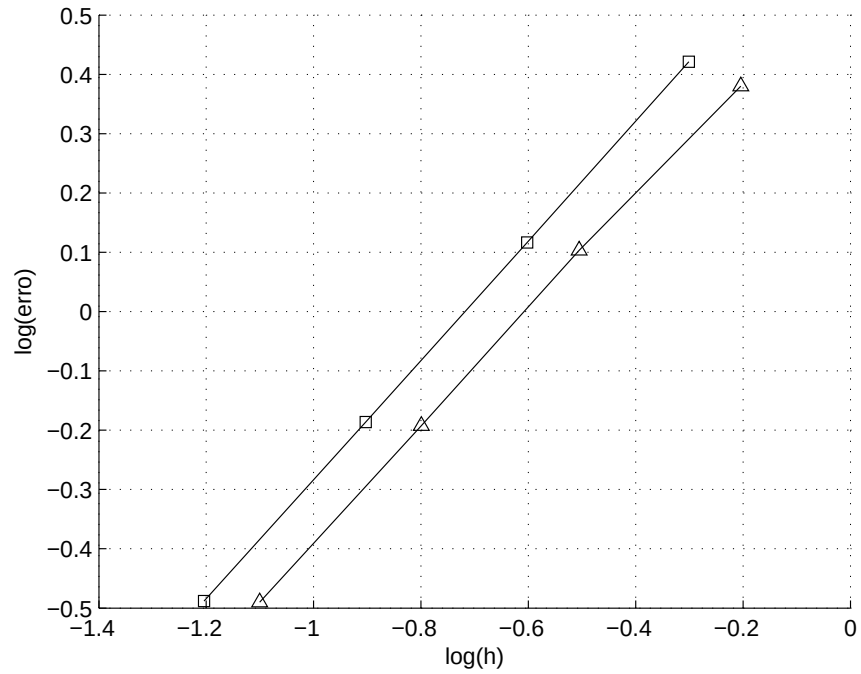
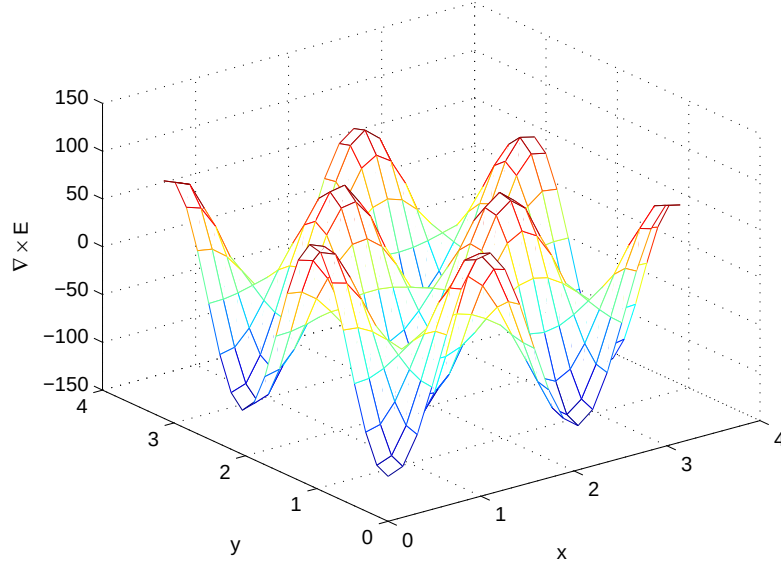
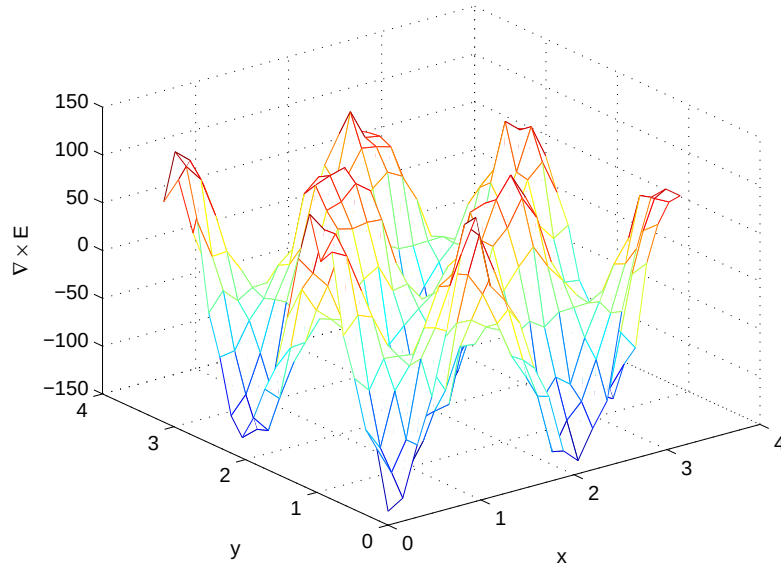


Figura 5.16: Erro de aproximação do campo elétrico do guia de onda usando funções de forma vetoriais de aresta em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio. Curva com quadrados representa o caso em que são utilizadas 4 arestas de suporte, e curva com triângulos o caso em que 3 arestas de suporte são utilizadas.



(a)



(b)

Figura 5.17: Interpolação do rotacional do campo vetorial representando o rotacional do campo elétrico do oitavo modo do guia de onda usando funções de forma vetoriais de aresta. O campo elétrico é dado pela Equação 4.34. A interpolação foi realizada com *W spline* quártica e $dw_i = 4 \times \text{comprimento de } e_i$. Aproximação com (a) malha retangular e 4 arestas de suporte; (b) malha triangular e 3 arestas de suporte.

5.3.1 Propagação em Guia de Onda

O primeiro problema é o de propagação de uma onda em modo TE_{10} na direção $+z$ num guia de onda retangular mostrado na Figura 4.11. A forma fraca do problema é, conforme Equação 4.38:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega - \int_{\Gamma_n} \vec{W} \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = 0 \quad (5.38)$$

com condições de contorno de Dirichlet em S_1 :

$$\vec{E}^{inc}(x, y, z) = E_0 \vec{e}_{10}(x, y) e^{-jk_{10}z} \quad (5.39)$$

$$\vec{e}_{10} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{y}, \quad k_{10} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (5.40)$$

e de terceiro tipo em S_2 :

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = 0 \quad (5.41)$$

$$\gamma_e = jk_{10} \quad (5.42)$$

Considera-se um guia com $a = 2\text{m}$, $b = 0,5\text{m}$, comprimento igual a 2m , frequência de propagação da onda de 300 MHz e amplitude $E_0 = 2\text{V/m}$. O problema é resolvido em duas dimensões, no plano $x = a/2$. Utiliza-se o EMM com uma distribuição de arestas advinda de uma malha retangular com 81×21 nós mostrada na Figura 5.18.

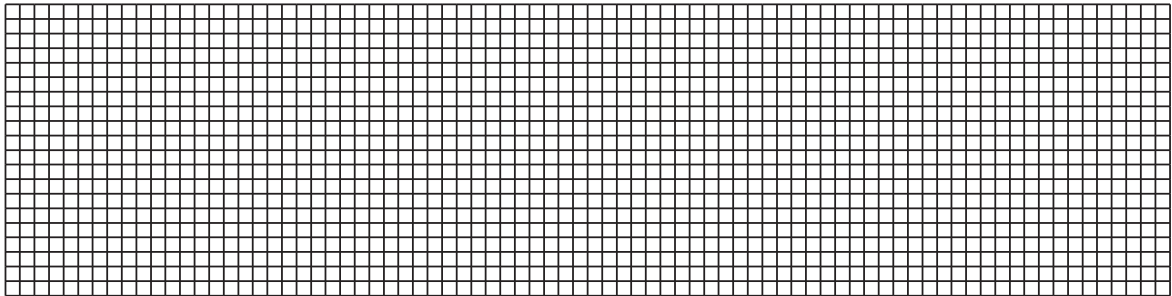


Figura 5.18: Distribuição de arestas no guia de onda retangular utilizada pelo EMM. Arestas são extraídas de uma malha retangular com 81×21 nós.

A função W empregada é a versão correspondente à *spline* quártica com parametro $dw_i = 4$ vezes o comprimento da aresta correspondente e_i . A malha de integração da forma fraca é a

mesma malha que deu origem à distribuição de arestas utilizadas na construção das funções de forma, com 4 pontos de integração por célula para integração no domínio e 2 pontos por segmento para integração na fronteira.

A distribuição das componentes E_y e E_z no domínio são mostradas nas Figuras 5.19a e 5.19b. Como esperado, a componente E_z é numericamente nula, com ordem de grandeza igual a 10^{-14} , pois a onda se propaga em modo transversal elétrico na direção $+z$. A componente E_y possui amplitude igual a 2, conforme previsto. Uma comparação com a solução analítica para E_y em $y = 0, 3\text{m}$ é feita e mostrada na Figura 5.19c, assim como calcula-se o erro médio dado pela Equação 5.44 para investigar melhor os resultados numéricos. É possível ver que a solução numérica está em concordância com a solução analítica, inclusive nas fronteiras $z = 0$ e $z = 2\text{m}$ onde foram impostas as condições de contorno para o campo incidente e o campo transmitido, respectivamente. O erro médio obtido foi de 6×10^{-3} . Conclui-se que o EMM conseguiu reproduzir a onda em modo TE_{10} de maneira correta e a solução numérica é livre de modos espúrios.

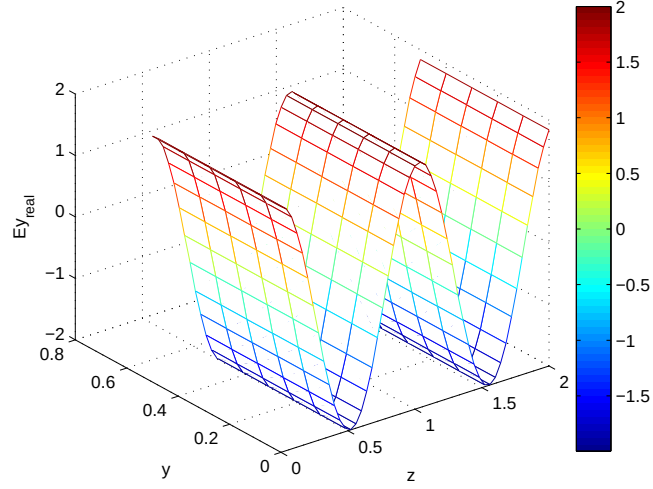
5.3.2 Frequências de Corte em Guia de Onda

Nesta seção, resolve-se o problema do guia de onda de seção $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$. O intuito é determinar as frequências de corte do campo que estão associadas aos autovalores do problema cuja forma fraca é, conforme Equação 4.47,

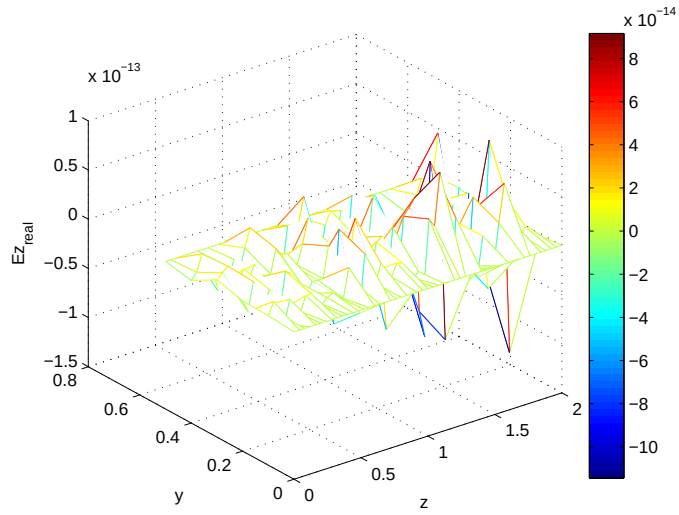
$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega = 0 \quad (5.43)$$

As fronteiras $\Gamma = \partial\Omega$ do domínio são do tipo PEC, os autovalores a se determinar são $\lambda = k_0^2$ e $\epsilon_r = \mu_r = 1$.

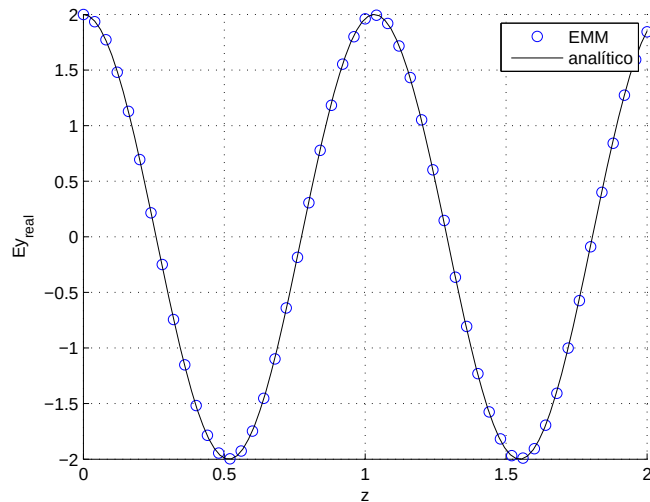
O método sem malha de aresta é usado para computar os primeiros dez autovalores. A integração da forma fraca é feita usando uma malha triangular uniforme, que pode ser vista na Figura 5.20, e quadratura gaussiana com 4 pontos por célula. As arestas da malha de integração também são utilizadas para construir as funções de forma. A função W linear é empregada e o parâmetro de controle dw_i é adotado como 2 vezes o comprimento da aresta correspondente e_i . As arestas de suporte são escolhidas como as três mais próximas do ponto de interesse, que correspondem às arestas da célula de integração. Para efeito de comparação, os autovalores também são calculados usando o método dos elementos finitos com a mesma malha e esquema de integração. Os autovalores obtidos analiticamente e numericamente são mostrados na Tabela 5.1. Para exemplificação, o campo elétrico produzido pelo EMM associado ao oitavo autovalor ($\lambda = 8$) é mostrado na Figura 5.21, cuja solução analítica é apresentada na Figura 5.15 na Seção 5.2.3. Os resultados mostram que todos os autovalores



(a)



(b)



(c)

Figura 5.19: Distribuição do campo elétrico no guia de onda produzida pelo EMM. Utiliza-se W spline quártica e $dw_i = 4 \times$ comprimento de e_i . (a) Parte real de E_y ; (b) Parte real de E_z ; (c) Comparação com solução analítica para E_y em $y = 0, 3m$.

são computados corretamente pelo EMM e, como esperado, nenhum autovalor espúrio é encontrado, confirmando a propriedade do divergente nulo da aproximação.

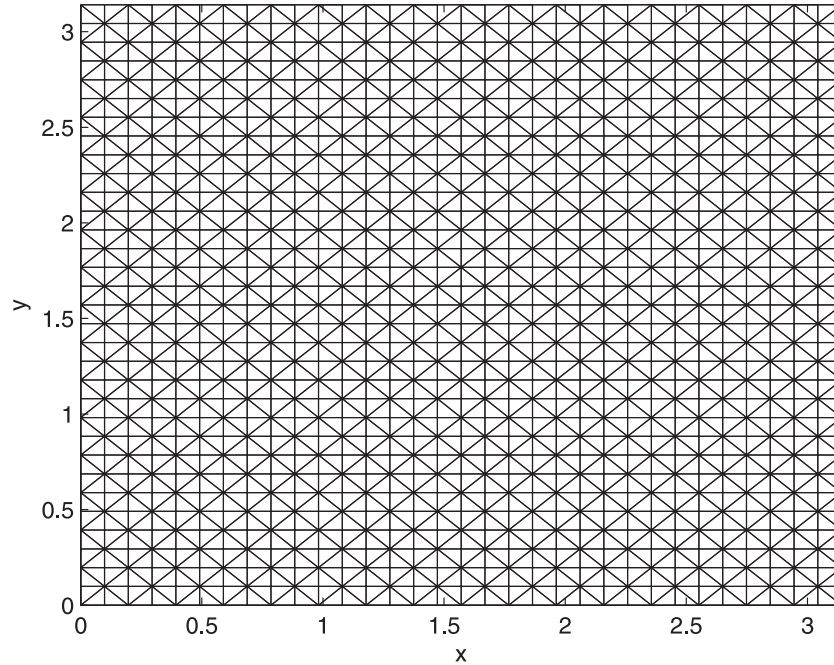


Figura 5.20: Distribuição de arestas no guia de onda utilizada pelo EMM. Arestas são extraídas de uma malha triangular com 1089 nós e 3136 arestas.

Tabela 5.1: Dez primeiros autovalores do problema do guia de onda calculados pelo EMM e pelo FEM.

Analítico	EMM	FEM
1.0000	0.9999	0.9997
1.0000	0.9999	0.9997
2.0000	2.0010	2.0005
4.0000	3.9959	3.9957
4.0000	3.9972	3.9957
5.0000	5.0012	4.9997
5.0000	5.0015	4.9997
8.0000	8.0107	8.0085
9.0000	8.9818	8.9783
9.0000	8.9833	8.9783

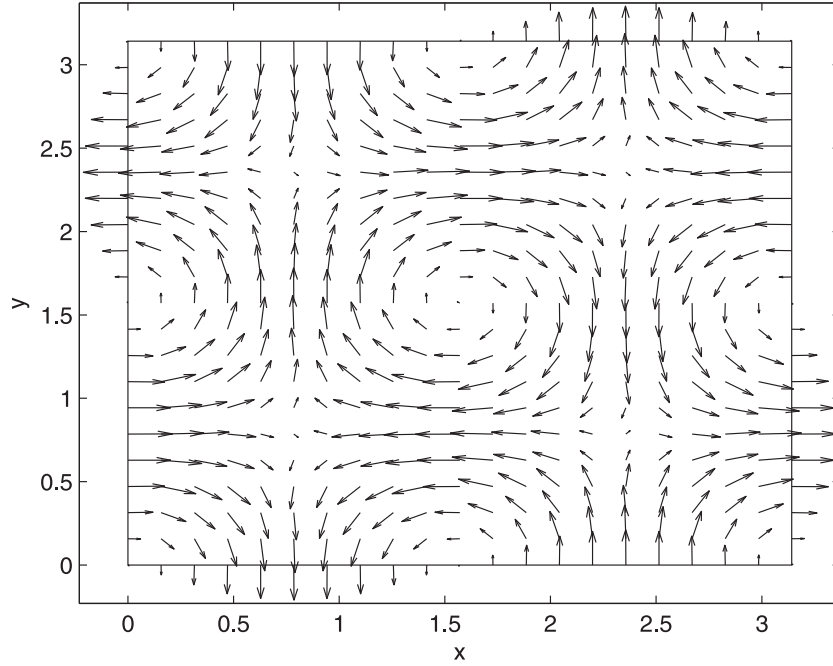


Figura 5.21: Distribuição do campo elétrico associado ao oitavo autovalor aproximado pelo EMM.

Pode ser visto na Tabela 5.1 que os autovalores achados por ambos métodos são similares. De fato, as aproximações geradas pelo EMM e pelo FEM são muito próximas. Para verificar esse fato, computa-se o erro relativo absoluto para os autovalores obtidos numericamente:

$$\text{erro} = \frac{|\lambda_a - \lambda_h|}{\lambda_a} \quad (5.44)$$

onde λ_a e λ_h são os autovalores analíticos e numéricos, respectivamente. Para alguns autovalores, o erro é menor para a aproximação do EMM, enquanto para outros o FEM gera menores erros. Assim, decidiu-se calcular o erro relativo absoluto médio dos dez primeiros autovalores. A Figura 5.22 mostra o erro médio em função do maior comprimento de aresta presente na malha. Todas as malhas usadas para gerar as soluções numérica são regulares como na Figura 5.20. Note que os dois métodos apresentam a mesma taxa de convergência, com erros muito próximos, sendo que o EMM fornece uma solução um pouco melhor que o FEM.

Prossegue-se, então, à análise da correlação existente entre a qualidade da malha e a solução numérica, ou seja, se a forma como as arestas estão dispostas no domínio impacta na aproximação numérica. Sabe-se que malhas com elementos distorcidos diminuem a qualidade da aproximação do método dos elementos finitos. Portanto, são usadas agora malhas contendo elementos com um dos ângulos próximos de zero, como mostrado na Figura 5.23.

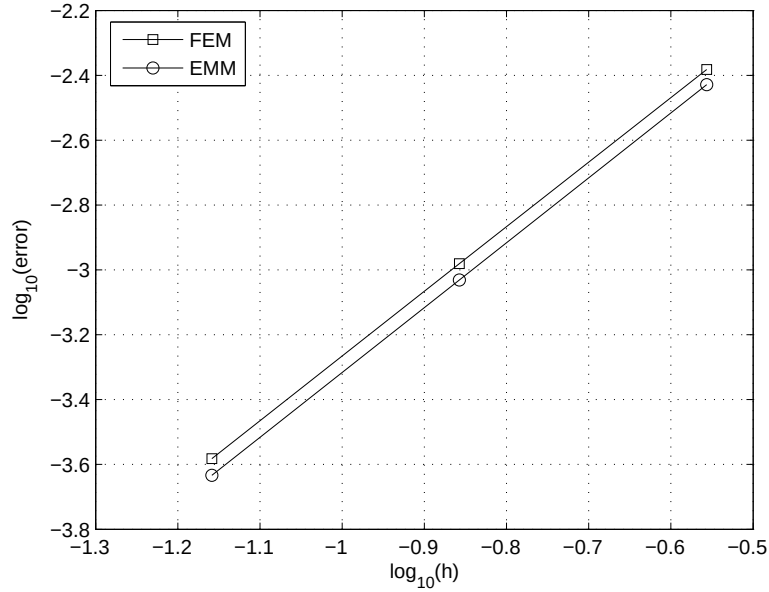


Figura 5.22: Erro da solução numérica do EMM e do FEM usando malha regular em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio. h é o comprimento da maior aresta da malha.

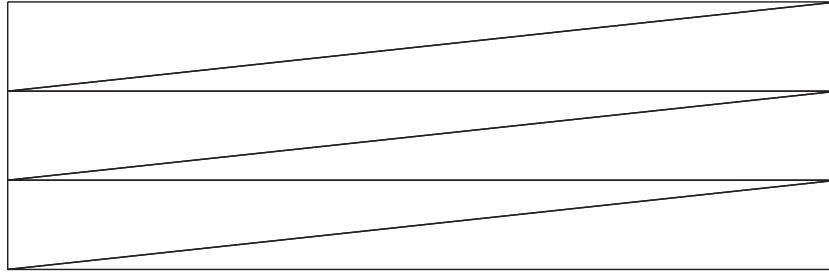


Figura 5.23: Seis elementos distorcidos da malha de qualidade baixa no guia de onda utilizada pelo EMM.

Novamente, alguns autovalores são aproximados melhor pelo EMM e outros pelo FEM. Entretanto, na média a solução produzida pelo FEM foi melhor em relação à malha distorcida que a do EMM, como se vê na Figura 5.24. Isso mostra que de alguma forma, o EMM é mais sensível à qualidade da malha que o FEM. Um estudo mais aprofundado do impacto do número de arestas no domínio de suporte do EMM na solução numérica seria interessante, até mesmo para verificar e minimizar os efeitos negativos da presença de elementos distorcidos na malha.

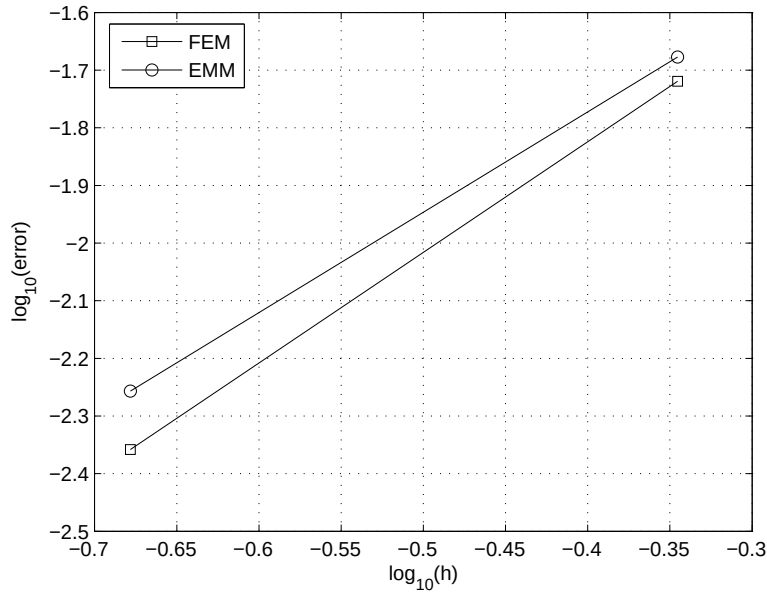


Figura 5.24: Erro da solução numérica do EMM e do FEM usando malha distorcida em função do comprimento das arestas distribuídas no domínio. h é o comprimento da maior aresta da malha.

5.3.3 Guia de Onda com Descontinuidade

Resolve-se, agora, o problema visto na Seção 4.3.3, que trata de um guia retangular com descontinuidade provocada por uma obstáculo. O problema é resolvido no plano $x = a/2$, mostrado na Figura 4.21. A forma fraca para o problema é, conforme Equação 4.53,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_n} \vec{W} \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = - \int_{\Gamma_{n1}} \vec{W} \cdot \vec{U} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde $\gamma_e = jk_{10}$, $\vec{U} = -2jk_{10} \vec{E}^{inc}$ em S_1 e $\vec{U} = 0$ em S_2 .

A onda propaga em modo TE_{10} com frequência de 300 MHz e amplitude $E_0 = 2V/m$. Consideram-se as dimensões do guia iguais a $b = 0,5m$, $w = 0,2m$, $h = 0,1m$ e comprimento igual a $2m$, preenchido por um meio com $\epsilon_r = \mu_r = 1$.

O problema é, então, resolvido utilizando o EMM com duas distribuições de arestas. Na primeira, as arestas são as de uma malha triangular com 1.640 nós, 4.727 arestas e 3.088 elementos. Na segunda, as arestas são as de uma malha retangular com 1.673 nós, 3.240 arestas e 1.568 elementos. A Figura 5.25 mostra as distribuições de arestas mencionadas. Nos dois casos, as funções de forma vetoriais são construídas usando as arestas da célula

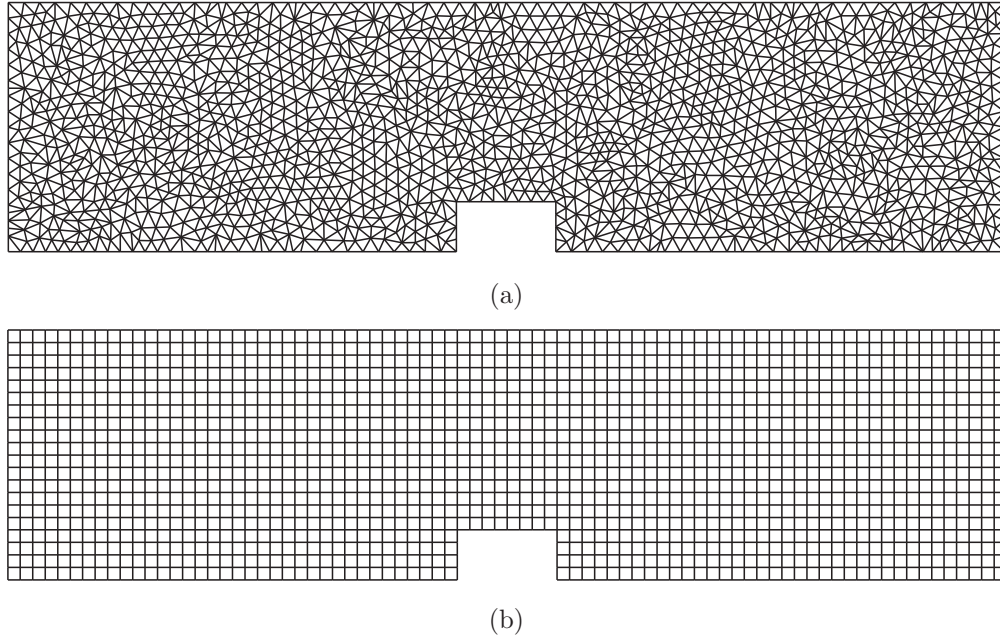


Figura 5.25: Distribuições de arestas no guia de onda retangular com obstáculo usadas pelo EMM. Arestas são extraídas de uma malha: (a) triangular com 1.640 nós, 4.727 arestas e 3.088 elementos; (b) retangular com 1.673 nós, 3.240 arestas e 1.568 elementos.

de integração e função W *spline* quártica com $dw_i = 4$ vezes o comprimento da aresta correspondente e_i . A integração é realizada com 4 pontos de quadratura para integrais de domínio de 2 pontos para integrais de contorno.

Os resultados da solução numérica produzida pelo EMM são sumarizados na Tabela 5.2. Para fins de comparação, o problema é resolvido com o FEM de aresta e a malha triangular utilizada pelo EMM. Utiliza-se, também, o software CST STUDIO SUITE Student Edition 2015 [Technology 2015] para resolver o problema em três dimensões e comparar com as soluções numéricas produzidas em duas dimensões. Os coeficientes calculados pelo EMM e pelo FEM são praticamente idênticos, diferindo apenas na quarta casa decimal, e estão de acordo com os coeficientes de referência. Além disso, as respostas calculadas usando o modelo bidimensional estão em congruência com o modelo tridimensional obtido com o software CST, o que comprova a validade da metodologia.

5.4 Comentários

Na Seção 5.3.3, os resultados mostraram que o número de arestas utilizadas na construções das funções de forma vetoriais pode afetar a acurácia da solução. De maneira mais generalista, a seleção das arestas de suporte impacta diretamente a qualidade da aproximação numérica do

Tabela 5.2: Coeficientes de reflexão R e transmissão T calculados para o guia de onda com descontinuidade usando o EMM, o FEM de aresta e o software CST.

	Referência	EMM 3 arestas	EMM 4 arestas	FEM	CST
$ R $	0,2315	0,2338	0,2335	0,2336	0,2362
$ T $	0,9705	0,9696	0,9695	0,9697	0,9702
$ R ^2 + T ^2$	0,9955	0,9948	0,9944	0,9949	0,9972

EMM e, também, o custo computacional. Quanto mais arestas de suporte são usadas, mais cara computacionalmente fica a construção das funções de forma.

Nos problemas apresentados, as distribuições de arestas foram baseadas em malhas triangulares ou retangulares. Nessas circunstâncias, o número de arestas de suporte era 3 ou 4, de acordo com a malha de integração. Além disso, a seleção das arestas foi feita com base nas arestas da célula de integração.

Testes realizados com mais arestas de suporte mostraram algumas características não previstas. Num primeiro teste, adicionou-se mais arestas ao domínio de suporte além das arestas da célula de integração, e a solução numérica produzida tornou-se corrompida com soluções espúrias. Além disso, à medida que adicionam-se novas arestas, aumenta-se a chance da matriz $\mathbf{B}_Q$ das funções de forma tornar-se singular e, com isso, não ser possível construir as funções. Em grande parte dos casos testados, a matriz passou a ser singular e a solução numérica não pode ser gerada.

Outro teste realizado foi utilizar duas malhas diferentes, uma para integração e outra diferente para gerar o conjunto das arestas para as funções de forma. Nesse cenário, foi necessário criar uma estratégia para selecionar um conjunto de arestas de suporte uma vez que não havia mais as arestas da célula de integração para serem escolhidas. Optou-se por selecionar as k arestas mais próximas do ponto de integração e notou-se que, na grande maioria dos casos, as soluções produzidas também eram corrompidas com modos espúrios. Foram testados os pares de malhas (i) retangular-retangular, isto é, uma malha retangular para as arestas da aproximação e outra malha retangular para a integração da forma fraca, com tamanhos diferentes; (ii) retangular-triangular; (iii) triangular-retangular; e (iv) triangular-triangular.

Matematicamente, mostrou-se na Seção 5.1 que as funções de forma vetoriais de aresta geram aproximações com divergente nulo. Acredita-se que uma possível razão para que soluções espúrias estejam presentes com escolhas diferentes de arestas de suporte esteja vinculada a possíveis não conformidades da aproximação ao utilizar um conjunto maior de arestas além daquelas relacionadas com o elemento de integração. Ao integrar um elemento, as funções de forma são construídas garantindo-se que dentro do elemento o divergente é nulo e que nas

fronteiras do elemento há continuidade tangencial do campo a ser aproximado. Ao expandir a seleção de arestas para fora do elemento, existirão descontinuidades fora do elemento, e o método se tornará não compatível, o que provocará o surgimento de soluções fisicamente sem sentido.

Nesse sentido, é importante realizar um estudo mais aprofundado a respeito do impacto da seleção das arestas de suporte na solução e o problema da não compatibilidade das funções de forma. Diante disso, sugerem-se como trabalhos futuros:

1. métodos para criar distribuições de arestas num domínio arbitrário de modo a se ter uma boa discretização;
2. procedimentos de seleção de arestas de suporte dentre um conjunto de arestas disponíveis, de forma a evitar singularidade da matriz $\mathbf{B}_Q$ das funções de forma e, ao mesmo tempo, otimizar o desempenho computacional;
3. solucionar possíveis problemas de incompatibilidade do EMM.

Capítulo 6

Conclusão

No presente trabalho, foram apresentados novos desenvolvimentos de métodos sem malha aplicados a problemas eletromagnéticos, cujo foco principal foi resolver problemas vetoriais de maneira que a solução numérica produzida pelos métodos atendesse a condição do divergente nulo e não estivesse corrompida por modos espúrios.

Como primeiro passo, uma revisão dos principais conceitos de métodos sem malha necessários ao desenvolvimento da tese foi apresentada. Inicialmente, abordou-se o conceito de como efetuar aproximações locais usando nós, central para o todo o desenvolvimento do texto. Após, introduziram-se as funções de forma PIM, esquemas T para seleção de nós suporte, a operação de suavização de gradientes e as formas fracas enfraquecidas. Estes últimos itens formam a base para o desenvolvimento dos métodos de suavização SPIM tratados em seguida.

No Capítulo 3, investigou-se a aplicação do SPIM em problemas eletromagnéticos. Primeiro, problemas escalares foram abordados, eletrostáticos e magnetostáticos, em duas e três dimensões. Os resultados mostraram que o método fornece resultados mais precisos e com maior taxa de convergência que o Método dos Elementos Finitos. Além disso, é mais eficiente computacionalmente em tempo de processamento se levado em conta a acurácia da solução numérica.

Outro estudo realizado foi o impacto da qualidade da malha na solução. O SPIM mostrou ser menos sensível à qualidade da malha que o FEM, sendo que em casos extremos onde a malha possui elementos extremamente distorcidos, o FEM apresentou taxas de convergências próximas de zero, enquanto o SPIM apresentou taxas iguais a 2 na norma $\mathbb{L}^2$ e 1 na norma de energia, praticamente preservando as taxas alcançadas para malhas de boa qualidade.

Posteriormente, o SPIM foi aplicado no problema vetorial harmônico no tempo do guia de onda. Verificou-se que o método produz soluções espúrias devido à não satisfação da condição do divergente nulo do campo. Com o objetivo de contornar este problema, foi proposta uma

nova formulação fraca enfraquecida, restrita, considerando o método da penalidade para forçar a condição do divergente na solução. O método da penalidade possui a vantagem de não alterar a ordem do sistema matricial e os autovalores espúrios foram eliminados. Em contrapartida, não existe um valor ótimo para o fator de penalidade que seja independente do problema, e os autovalores espúrios não são completamente eliminados da solução, havendo um deslocamento deles em faixa de frequência de acordo com fator de penalidade adotado.

No Capítulo 4, foram utilizadas as RBF's vetoriais presentes na literatura junto a formas fracas como uma extensão do método. Como as RBF's vetoriais são livres de modos espúrios, formas fracas sem adição de restrição foram usadas. A formulação é nodal e, por isso, atribui-se um grau de liberdade para cada componente do campo a ser aproximado em cada nó.

Exemplos de interpolação de campos vetoriais e problemas vetoriais harmônicos no tempo foram resolvidos com o método sem malha com RBF vetorial em duas dimensões. Os resultados mostraram que o método consegue reproduzir soluções numéricas livres de modos espúrios, mas que existe uma forte dependência dos parâmetros de controle das RBF's na qualidade da solução. Dependendo da faixa de valores dos parâmetros, a solução é corrompida com modos espúrios e, em alguns casos, a construção das funções de forma não consegue ser completada devido a problemas de singularidade da matriz de momentos. Esta característica mostrou ser uma dificuldade considerável para o método sem malha, pois os parâmetros de controle das RBF's variam com o problema e com a distribuição nodal.

No Capítulo 5 apresentou-se uma nova técnica para construção de funções de forma vetoriais que utiliza um conjunto de arestas espalhadas no domínio ao invés de um conjunto de nós, chamadas de funções de forma de aresta. As funções são construídas de maneira a atender a condição de divergente nulo. Os graus de liberdade são vinculados às arestas com o significado físico sendo a circulação do campo sobre cada aresta. Com isso, as condições de contorno essenciais são impostas de maneira simples. As funções de forma de aresta em conjunto com uma formulação fraca formam o método sem malha destinado a solucionar problemas vetoriais, denominado Método sem Malha de Aresta - EMM.

Exemplos de interpolação de campos vetoriais e problemas vetoriais harmônicos no tempo foram resolvidos com o EMM em duas dimensões. Em todos os casos, para integração da forma fraca, utilizaram-se malhas retangulares ou triangulares, e as arestas de suporte das funções de forma eram escolhidas como as arestas correspondentes à célula de integração, sendo sempre 3 ou 4 arestas. Os resultados mostraram que o EMM produz soluções em concordância com as soluções de referência, livres de modos espúrios, e que atendem a condição do divergente nulo. Quando a seleção das arestas de suporte foi feita com um número maior de arestas, surgiram nos resultados soluções errôneas e, em alguns casos, a construção das funções de forma falhava devido à singularidade da matriz de momentos.

O autor finaliza este trabalho muito grato pelos conhecimentos adquiridos ao longo dos anos de estudo deste doutorado e com a profunda esperança de que os avanços nos métodos sem malha desenvolvidos nesta tese possam de fato ter contribuído e contribuir em resolver problemas eletromagnéticos escalares e vetoriais.

Trabalhos Futuros

Como desenvolvimentos futuros em continuidade a este trabalho, sugerem-se:

1. Nos métodos SPIM, estudar novas formulações para aplicação em problemas vetoriais. No trabalho, foi proposta a utilização do método da penalidade, todavia, este método não elimina completamente os modos espúrios, mas desloca-os de faixa. Uma alternativa é utilizar formulações mistas, por exemplo, como desenvolvido no trabalho [Nicomedes 2015], em que multiplicadores de Lagrange são utilizados junto à adição da restrição que força o divergente nulo do campo. O autor acredita que os métodos SPIM possam ser muito úteis devido a robustez e a acurácia apresentadas nos resultados.
2. Aplicar o método com RBF vetorial a problemas tridimensionais. Outro ponto importante é realizar um estudo aprofundado das condições dos parâmetros de controle das RBF's sobre a estabilidade do método. Aqui, chamamos de estabilidade a não singularidade da matriz de momentos das funções de forma e a produção da solução numérica livre de modos espúrios, de modo a tornar o método uma alternativa realmente viável para o cálculo de campos eletromagnéticos.
3. Aplicar o EMM em problemas tridimensionais. Além disso, é importante realizar um estudo mais aprofundado a respeito do impacto da seleção das arestas de suporte na solução e o possível problema da não compatibilidade das funções de forma. Por isso, sugerem-se investigar métodos para criar distribuições de arestas num domínio arbitrário de modo a se ter uma boa discretização; procedimentos de seleção de arestas de suporte dentre um conjunto de arestas disponíveis, de forma a evitar singularidade da matriz de momentos das funções de forma e, ao mesmo tempo, otimizar o desempenho computacional; e solucionar possíveis problemas de incompatibilidade.

Publicações

Durante o período de estudo do doutorado, cinco publicações diretamente associadas ao trabalho de tese foram geradas. As publicações relacionadas a congressos são:

- LIMA, N. Z. ; MESQUITA, R. C. . An Edge Meshless Method. In: The 16th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, 2014, Annecy. Proceedings of the 16th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, 2014.
- LIMA, N. Z. ; MESQUITA, R. C. . The Face-Based Gradient Smoothing Point Interpolation Method applied to 3D Electromagnetics. In: 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2013), 2013, Budapeste. Proceedings of the 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2013), 2013.
- LIMA, N. Z. ; MESQUITA, R. C. . Point Interpolation Methods based on Weakened-Weak Formulations. In: MOMAG 2012 - 15 SBMO - Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica - 10 CBMag - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2012, João Pessoa. MOMAG 2012 - 15 SBMO - Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica - 10 CBMag - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2012.

As publicações relacionadas a revistas e periódicos são:

- LIMA, N. Z. ; MESQUITA, R. C. . Face-Based Gradient Smoothing Point Interpolation Method Applied to 3-D Electromagnetics. IEEE Transactions on Magnetics, v. 50, p. 537-540, 2014.
- LIMA, N. Z. ; MESQUITA, R. C. . Point Interpolation Methods based on Weakened-Weak Formulations. Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications, v. 12, p. 506-523, 2013.

Outros trabalhos não ligados diretamente ao tema central da tese de doutorado, mas que envolvem métodos sem malha, foram desenvolvidos e estão listados abaixo:

- Lima, N. Z., Mesquita, R. C., Ramirez, J. A. Métodos sem Malha Aplicados a Problemas Eletromagnéticos no Domínio do Tempo. In: Cilamce, 2011.
- Lima, N. Z., Fonseca, A. R., Mesquita, R. C. Application of Local Point Interpolation Method to Electromagnetic Problems with Material Discontinuities using a new Visibility Criterion. In: Compumag, 2011.

-
- Lima, N. Z., Mesquita, R. C., Facco, W. G., Moura, A. S., Silva, E. J. The Nonconforming Point Interpolation Method applied to Electromagnetic Problems. In: Compumag, 2011.
 - Lima, N. Z., Fonseca, A. R., Mesquita, R. C. Application of Local Point Interpolation Method to Electromagnetic Problems with Material Discontinuities using a new Visibility Criterion. In: IEEE Transactions on Magnetics, 48:615–618, 2012.
 - Lima, N. Z., Mesquita, R. C., Facco, W. G., Moura, A. S., Silva, E. J. The Nonconforming Point Interpolation Method applied to Electromagnetic Problems. In: IEEE Transactions on Magnetics, 48:619–622, 2012.

Foram feitos, também, trabalhos em colaboração com outros autores. Estes trabalhos são listados a seguir:

- SOARES, RAMON D. ; Moreira, Fernando J. S. ; MESQUITA, R. C. ; Lowther, David A. ; LIMA, N. Z. . A Modified Meshless Local Petrov Galerkin Applied to Electromagnetic Axisymmetric Problems. IEEE Transactions on Magnetics, v. 50, p. 513-516, 2014.
- MOURA, A. S. ; SALDANHA, R. R. ; SILVA, E. J. ; LISBOA, A. C. ; FACCO, W. G. ; LIMA, N. Z. . A Recursive Sparsification of the Inverse Hodge Matrix. IEEE Transactions on Magnetics, v. 48, p. 611-614, 2012.
- FACCO, W. G. ; SILVA, E. J. ; MOURA, A. S. ; LIMA, N. Z. ; SALDANHA, R. R. . Handling Material Discontinuities in the Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems. IEEE Transactions on Magnetics, v. 48, p. 607-610, 2012.
- FACCO, W. G. ; SILVA, E. J. ; ADRIANO, R. L. S. ; MOURA, A. S. ; LIMA, N. Z. . Handling material discontinuities in a nonconforming generalized finite element method to solve wave propagation problems. Microwave and Optical Technology Letters (Print), v. 54, p. 2709-2716, 2012.
- SOARES, R. D. ; MOREIRA, F. J. S. ; MESQUITA, R. C. ; LOWTHER, D. A. ; LIMA, N. Z. . A Modified Meshless Local Petrov-Galerkin Applied to Electromagnetic Axisymmetric Problems. In: 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2013), 2013, Budapeste. Proceedings of the 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2013), 2013.

-
- FACCO, W. G. ; SILVA, E. J. ; MOURA, A. S. ; LIMA, N. Z. ; SALDANHA, R. R. . Handling Material Discontinuities in the Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems. In: Compumag - Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2011, Sydney. IEEE Compumag - Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2011.
 - MOURA, A. S. ; SALDANHA, R. R. ; SILVA, E. J. ; LISBOA, A. C. ; FACCO, W. G. ; LIMA, N. Z. . A Recursive Sparsification of the Inverse Hodge Matrix. In: Compumag - Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2011, Sydney. IEEE Compumag - Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2011.
 - AMORIM, L. P. ; MESQUITA, R. C. ; DUCZMAL, D. B. ; LIMA, N. Z. . Point Cloud Generation for Meshless Methods. In: XXXII Cilamce - Iberian Latin american congress on computational methods in engineering, 2011, Ouro Preto. XXXII Cilamce - Iberian Latin american congress on computational methods in engineering, 2011.

Referências Bibliográficas

- [Atluri e Shen 2002]ATLURI, S. N.; SHEN, S. The meshless local petrov-galerkin (mlpg) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. CMES, v. 3, n. 1, p. 11–51, 2002. [citado na(s) páginas(s) 2]
- [Atluri e Zhu 1998]ATLURI, S. N.; ZHU, T. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. Computational Mechanics, Springer-Verlag, v. 22, p. 117–127, 1998. ISSN 0178-7675. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s004660050346>>. [citado na(s) páginas(s) 2]
- [Belytschko, Lu e Gu 1994]BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd, v. 37, n. 2, p. 229–256, 1994. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620370205>>. [citado na(s) páginas(s) 2]
- [Fonseca 2011]FONSECA, A. R. Algoritmos Eficientes em Métodos sem Malha. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais, 2011. [citado na(s) páginas(s) 2]
- [Hughes 2000]HUGHES, T. J. R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. [S.l.]: Dover Publications, 2000. [citado na(s) páginas(s) 1]
- [Ikuno, Takakura e Kamitani 2007]IKUNO, S.; TAKAKURA, K.; KAMITANI, A. Influence of method for imposing essential boundary condition on meshless galerkin/petrov ndash;galerkin approaches. Magnetics, IEEE Transactions on, v. 43, n. 4, p. 1501 –1504, april 2007. ISSN 0018-9464. [citado na(s) páginas(s) 3]
- [Jin 2002]JIN, J. The Finite Element Method in Electromagnetics. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. [citado na(s) páginas(s) 1, 6, 58, 59, 60, 79, 90, 91, 94]
- [Lancaster e Salkauskas 1981]LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. Mathematics of Computation, v. 37, p. 141–158, 1981. [citado na(s) páginas(s) 3]

- [Lima 2011]LIMA, N. Z. Desenvolvimento de um Framework para Métodos sem Malha. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais, 2011. [citado na(s) páginas(s) 9, 70]
- [Lima, Fonseca e Mesquita 2012]LIMA, N. Z.; FONSECA, A. R.; MESQUITA, R. C. Application of local point interpolation method to electromagnetic problems with material discontinuities using a new visibility criterion. IEEE Transactions on Magnetics, v. 48, p. 615–618, 2012. [citado na(s) páginas(s) 4]
- [Lima e Mesquita 2012]LIMA, N. Z.; MESQUITA, R. C. Point interpolation methods based on weakened-weak formulations. In: MOMAG 2012 - 15 SBMO - Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica - 10 CBMag - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo. [S.l.: s.n.], 2012. [citado na(s) páginas(s) 4]
- [Lima e Mesquita 2013]LIMA, N. Z.; MESQUITA, R. C. The face-based gradient smoothing point interpolation method applied to 3d electromagnetics. In: IEEE Compumag - Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2013. [S.l.: s.n.], 2013. [citado na(s) páginas(s) 4]
- [Lima et al. 2012]LIMA, N. Z. et al. The nonconforming point interpolation method applied to electromagnetic problems. IEEE Transactions on Magnetics, v. 48, p. 619–622, 2012. [citado na(s) páginas(s) 4, 12]
- [Liu e Gu 2003]LIU, G.; GU, Y. A matrix triangularization algorithm for the polynomial point interpolation method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 192, n. 19, p. 2269 – 2295, 2003. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782503002664>>. [citado na(s) páginas(s) 12]
- [Liu, Nguyen-Thoi e Lam 2009]LIU, G.; NGUYEN-THOI, T.; LAM, K. An edge-based smoothed finite element method (es-fem) for static, free and forced vibration analyses of solids. Journal of Sound and Vibration, v. 320, n. 4–5, p. 1100 – 1130, 2009. ISSN 0022-460X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08007463>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Liu et al. 2009]LIU, G. et al. A node-based smoothed finite element method (ns-fem) for upper bound solutions to solid mechanics problems. Computers & Structures, v. 87, n. 1–2, p. 14 – 26, 2009. ISSN 0045-7949. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794908002034>>. [citado na(s) páginas(s) 19, 38]

- [Liu et al. 2009]LIU, G. et al. An extended galerkin weak form and a point interpolation method with continuous strain field and superconvergence using triangular mesh. Computational Mechanics, Springer-Verlag, v. 43, p. 651–673, 2009. ISSN 0178-7675. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00466-008-0336-5>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Liu et al. 2008]LIU, G. et al. A gradient smoothing method (gsm) with directional correction for solid mechanics problems. Computational Mechanics, Springer-Verlag, v. 41, p. 457–472, 2008. ISSN 0178-7675. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00466-007-0192-8>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Liu 2002]LIU, G. R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. 1st. ed. [S.l.]: CRC Press, 2002. [citado na(s) páginas(s) 4, 8, 70, 77, 98]
- [Liu 2008]LIU, G. R. A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for galerkin formulation of a wide class of computational methods. International Journal of Computational Methods, v. 05, n. 02, p. 199–236, 2008. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876208001510>>. [citado na(s) páginas(s) 4, 9, 38]
- [Liu 2009]LIU, G. R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. 2nd. ed. [S.l.]: CRC Press, 2009. [citado na(s) páginas(s) 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 28, 41, 42, 44, 47]
- [Liu 2009]LIU, G. R. On g space theory. International Journal of Computational Methods, v. 06, n. 02, p. 257–289, 2009. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876209001863>>. [citado na(s) páginas(s) 22]
- [Liu 2010]LIU, G. R. A g space theory and a weakened weak (w_2) form for a unified formulation of compatible and incompatible methods: Part i theory. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd., v. 81, n. 9, p. 1093–1126, 2010. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.2719>>. [citado na(s) páginas(s) 4, 9, 24, 28, 29]
- [Liu 2010]LIU, G. R. A g space theory and a weakened weak (w_2) form for a unified formulation of compatible and incompatible methods: Part ii applications to solid mechanics problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd., v. 81, n. 9, p. 1127–1156, 2010. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.2720>>. [citado na(s) páginas(s) 4, 9, 24, 28, 29]

- [Liu e Gu 1999]LIU, G. R.; GU, Y. T. A point interpolation method. In: Proceedings of 4th Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics. Singapore: [s.n.], 1999. p. 1009–1014.
[citado na(s) páginas(s) 3, 10]
- [Liu e Xu 2008]LIU, G. R.; XU, G. X. A gradient smoothing method (gsm) for fluid dynamics problems. International Journal for Numerical Methods in Fluids, John Wiley & Sons, Ltd., v. 58, n. 10, p. 1101–1133, 2008. ISSN 1097-0363. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/fld.1788>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Liu e Zhang 2008]LIU, G. R.; ZHANG, G. Y. Edge-based smoothed point interpolation methods. International Journal of Computational Methods, v. 05, n. 04, p. 621–646, 2008. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876208001662>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Liu e Zhang 2009]LIU, G. R.; ZHANG, G. Y. A normed g space and weakened weak (w2) formulation of a cell-based smoothed point interpolation method. International Journal of Computational Methods, v. 06, n. 01, p. 147–179, 2009. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S02198762090001796>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Liu e Zhang 2009]LIU, G. R.; ZHANG, G. Y. A novel scheme of strain-constructed point interpolation method for static and dynamic mechanics problems. International Journal of Applied Mechanics, v. 01, n. 01, p. 233–258, 2009. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1758825109000083>>. [citado na(s) páginas(s) 38]
- [Lowitzsch 2002]LOWITZSCH, S. Approximation and Interpolation Employing Divergence-Free Radial Basis Functions with Applications. Tese (Doutorado) — Office of Graduate Studies of Texas A&M University, 2002. [citado na(s) páginas(s) 5, 63, 67]
- [Macedo 1988]MACEDO, A. Eletromagnetismo. [S.l.]: Editora Guanabara, 1988. [citado na(s) páginas(s) 29]
- [Meeker 1999]MEEKER, D. Force of an Eight Pole Radial Magnetic Bearing. 1999. <http://www.femm.info/wiki/RadialMagneticBearing>. Acesso em outubro, 2012. [citado na(s) páginas(s) 51, 52]

- [Nealen 2004]NEALEN, A. An as-short-as-possible introduction to the least squares, weighted least squares. 2004. <http://www.nealen.net/projects/mls/asapmls.pdf>. Acesso em abril, 2007. [citado na(s) páginas(s) 3]
- [Nedelec 1980]NEDELEC, J. Mixed finite elements in r_3 . Numerische Mathematik, Springer-Verlag, v. 35, n. 3, p. 315–341, 1980. ISSN 0029-599X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01396415>>. [citado na(s) páginas(s) 60]
- [Nguyen-Thoi et al. 2009]NGUYEN-THOI, T. et al. A face-based smoothed finite element method (fs-fem) for 3d linear and geometrically non-linear solid mechanics problems using 4-node tetrahedral elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd., v. 78, n. 3, p. 324–353, 2009. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.2491>>. [citado na(s) páginas(s) 26]
- [Nicomedes 2015]NICOMEDES, W. L. de. Mixed Meshfree Methods in Computational Electromagnetism: Mathematical Foundations and Problems in Wave Scattering. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais, 2015. [citado na(s) páginas(s) 5, 59, 126]
- [Onate et al. 1996]ONATE, E. et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 39, p. 3839–3866, 1996. [citado na(s) páginas(s) 8]
- [Parreira et al. 2006]PARREIRA, G. F. et al. The element-free galerkin method in three-dimensional electromagnetic problems. Magnetics, IEEE Transactions on, v. 42, n. 4, p. 711–714, april 2006. ISSN 0018-9464. [citado na(s) páginas(s) 3]
- [Paulsen e Lynch 1991]PAULSEN, K. D.; LYNCH, D. R. Elimination of vector parasites in finite element maxwell solutions. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, v. 39, n. 3, p. 395–404, mar 1991. ISSN 0018-9480. [citado na(s) páginas(s) 59, 60]
- [Powell 1992]POWELL, M. J. D. The theory of radial basis function approximation in 1990. Advances in Numerical Analysis, v. 2, p. 303–322, 1992. [citado na(s) páginas(s) 15]
- [Pozar 2005]POZAR, D. M. Microwave Engineering. Third. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. [citado na(s) páginas(s) 57]
- [Rahman e Davies 1984]RAHMAN, B. M. A.; DAVIES, J. B. Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, v. 32, n. 8, p. 922–928, aug 1984. ISSN 0018-9480. [citado na(s) páginas(s) 59, 60]

- [Sarvas e Jarvenpaa 2004]SARVAS, J.; JARVENPAA, S. Finite Element Method in Electromagnetic Field Computing. 2004. Electromagnetics Laboratory, Helsinki University of Technology. [citado na(s) páginas(s) 35]
- [Shewchuk 2002]SHEWCHUK, J. R. What is a good linear element? - interpolation, conditioning, and quality measures. In: In 11th International Meshing Roundtable. [S.l.: s.n.], 2002. p. 115–126. [citado na(s) páginas(s) 1]
- [Taflove 2000]TAFLOVE, A. Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood, MA: Artech House, 2000. [citado na(s) páginas(s) 1]
- [Technology 2015]TECHNOLOGY, C. C. S. CST STUDIO SUITE Student Edition. 2015. <https://www.cst.com/academia/student-edition>. Software de computador. [citado na(s) páginas(s) 121]
- [Wang e Liu 2002]WANG, J. G.; LIU, G. R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, Ltd., v. 54, n. 11, p. 1623–1648, 2002. ISSN 1097-0207. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/nme.489>>. [citado na(s) páginas(s) 15]
- [Whitney 1957]WHITNEY, H. Geometric Integration Theory. [S.l.: s.n.], 1957. [citado na(s) páginas(s) 60]
- [Wu et al. 2009]WU, S. C. et al. A node-based smoothed point interpolation method (ns-pim) for thermoelastic problems with solution bounds. International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 52, n. 5–6, p. 1464 – 1471, 2009. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931008005103>>. [citado na(s) páginas(s) 25]
- [Wu et al. 2010]WU, S. C. et al. An edge-based smoothed point interpolation method (es-pim) for heat transfer analysis of rapid manufacturing system. International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 53, n. 9–10, p. 1938 – 1950, 2010. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931009007339>>. [citado na(s) páginas(s) 25]
- [Yang 2015]YANG, S. Advanced Time-Domain Numerical Methods for Electromagnetic Modeling and Simulation. Tese (Doutorado) — Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, 2015. [citado na(s) páginas(s) 5, 63, 66, 67, 77]

- [Yang et al. 2014]YANG, S. et al. A divergence-free meshless method based on the vector basis function for transient electromagnetic analysis. Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, v. 62, n. 7, p. 1409–1416, July 2014. ISSN 0018-9480. [citado na(s) páginas(s) 5, 6, 63]
- [Zhang e Liu 2010]ZHANG, G.; LIU, G.-R. A meshfree cell-based smoothed point interpolation method for solid mechanics problems. AIP Conference Proceedings, AIP, v. 1233, n. 1, p. 887–892, 2010. [citado na(s) páginas(s) 26]