

Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas
Departamento de História

Wagner Lannes

**A INCOMPLETUDE ALÉM DA MATEMÁTICA:
IMPACTOS CULTURAIS DO TEOREMA DE GÖDEL NO SÉCULO XX**

Belo Horizonte
2009

Wagner Lannes

**A INCOMPLETUDE ALÉM DA MATEMÁTICA:
IMPACTOS CULTURAIS DO TEOREMA DE GÖDEL NO SÉCULO XX**

Tese apresentada como requisito para
obtenção do título de Doutor em História.

Linha de Pesquisa: Ciência e Cultura na
História

Orientador: Prof. Dr. Mauro Lúcio Leitão
Condé

Belo Horizonte

2009

100	Lannes, Wagner
L292i	A incompletude além da matemática [manuscrito] :
2009	impactos culturais do teorema de Gödel no Século XX / Wagner Lannes. - 2009. 207 f. Orientador: Mauro Lúcio Leitão Condé. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. Inclui bibliografia. 1.História – Teses. 2. Ciência – História – Teses. 3. Ciência – Historiografia - Teses. 4.Gödel, Teorema de – Teses.5. Matemática - Teses. 6. Lógica – Teses. I. Condé, Mauro Lúcio Leitão. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

PÓS-GRADUAÇÃO
HistóriaUFMG

**ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM HISTÓRIA DE
WAGNER LANNES – Nº REGISTRO: 2005209591**

Aos **13 (treze)** dias do mês de março de **2009 (dois mil e nove)** reuniu-se a comissão examinadora composta pelos professores doutores **Mauro Lúcio Leitão Condé**, Orientador (História/UFMG), **Antonio Zumpano Pereira Santos** (Matemática/UFMG), **Carlos Alvarez Maia** (História/UERJ), **Fábio Wellington Orlando da Silva** (CEFET-MG) e **Túlio Roberto Xavier de Aguiar** (Filosofia/UFMG), para julgar o trabalho final intitulado **"A incompletude além da matemática: impactos culturais do Teorema de Gödel no Século XX"**, do discente **Wagner Lannes**, requisito final para a obtenção do Grau de DOUTOR EM HISTÓRIA. Abrindo a sessão no Programa de Pós-Graduação em História da Universidade Federal de Minas Gerais, Área de Concentração: História, tradição e modernidade: política, cultura e trabalho – Linha de pesquisa: Ciência e cultura na história, o presidente da comissão, professor Mauro Lúcio Leitão Condé, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra ao candidato, para a apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. O candidato foi considerado APROVADO. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo presidente da comissão. Nada mais havendo a tratar, o presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que foi assinada pelos examinadores participantes. Belo Horizonte, 13 de março de 2009.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antônio Zumpano Pereira Santos

Prof. Dr. Carlos Alvarez Maia

Prof. Dr. Fábio Wellington Orlando da Silva

Prof. Dr. Mauro Lúcio Leitão Condé

Prof. Dr. Túlio Roberto Xavier de Aguiar

*À minha esposa Quênia
e às minhas filhas
Catarina e Mariana*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais, que me deram a vida e, com amor, me educaram, dando-me ferramentas necessárias para as minhas conquistas profissionais e acadêmicas.

Ao meu irmão Rodrigo, pelo companheirismo amizade e incentivo, e pelas palavras amigas em horas difíceis.

Agradeço especialmente ao Professor Mauro Lúcio Leitão Condé que, com dedicação e paciência, me guiou do Instituto de Ciências Exatas da UFMG (onde defendi minha dissertação de Mestrado) à Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas (onde defendi minha Tese de Doutorado).

Aos demais professores e estudantes do Grupo Scientia da UFMG, que contribuíram significativamente para esta caminhada.

Aos Professores Antônio Zumpano Pereira Santos, Carlos Alvarez Maia, Fábio Wellington Orlando da Silva e Túlio Roberto Xavier de Aguiar pelas leituras cuidadosas e comentários preciosos.

Aos colegas de trabalho que passaram pela minha vida e me deram forças para avançar na carreira acadêmica e a todos os meus alunos que serviram de inspiração para o meu aperfeiçoamento.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio à publicação desta Tese.

Às minhas filhas, Catarina e Mariana, duas estrelinhas cujo brilho não foi comprometido pelas horas em que dediquei a este trabalho. Obrigado pelo seu amor e sua paciência.

À minha esposa Quênia, cujo amor fortalece e inspira. Ouvinte paciente, supriu minhas ausências com compreensão e minhas aflições com palavras de incentivo. Sem você, meu caminho seria mais longo e teria mais obstáculos.

“A questão primordial não é o *que* sabemos, mas *como* o sabemos”
TALES DE MILETO

Resumo

Em 1930, o lógico matemático austríaco Kurt Gödel provou que se um sistema formal contendo a aritmética não produz teoremas contraditórios então existem proposições neste sistema que não podem ser demonstradas e nem refutadas. Como corolário, provou ainda que o sistema em causa não é capaz de provar que os teoremas contraditórios, de fato, não existem no seu interior. O significado deste teorema e seu corolário para a matemática e para a lógica matemática, bem como as suas implicações filosóficas e críticas de abusos nos seus usos em círculos não matemáticos são questões já abordadas suficientemente pela literatura científica, mas o movimento histórico de apropriação dos resultados de Gödel pela comunidade científica não matemática é um problema merecedor de reflexões e uma das principais contribuições pretendidas com este trabalho.

Palavras-chave: Teorema da Incompletude, Teorema de Gödel, História da Ciência

Abstract

In 1930, the Austrian logician mathematician Kurt Gödel proved that if has not contradictories theorems in a formal system contained the arithmetic hence exists propositions in this system that can't be proved nor refuted. Its corollary tell us that the own system can't prove the existence of this contradictories theorems. The meaning on this theorem and its corollary to mathematics and to logic, and its philosophical conclusions and critics of the abuses about its uses in non mathematician's circles are issues sufficiently debated on scientific literature, but the historical movement of ownership of Gödel's results of the scientific community of non mathematicians is a problem worthy of reflection and one of the main contributions sought in this work.

Sumário

Introdução.....	11
Parte I: O Teorema de Gödel no círculo lógico matemático	21
1. A Matemática no período 1850-1930.....	22
1.1. Considerações iniciais	23
1.2. A queda da supremacia de Euclides	25
1.3. A crise dos fundamentos	32
1.4. Consistência e formalização.....	38
1.5. Considerações finais	46
2. Os Teoremas de Gödel.....	50
2.1. Considerações iniciais	51
2.2. Concepções de Gödel	53
2.3. A Demonstração do Teorema de Gödel.....	58
2.4. Acepções dos Teoremas de Gödel no círculo lógico-matemático	69
2.5. Mudanças conceituais no círculo lógico-matemático pós-Gödel	76
2.5. Considerações finais	79
Parte II: O Teorema de Gödel fora do círculo lógico matemático	82
3. Metáforas e Modelos na Ciência	83
3.1. Considerações iniciais	84
3.2. Circulação de idéias intercoletivas	85
3.3. Metáforas	88
3.4. Modelos Científicos	97
3.5. Metáforas e Modelos mudando Estilos de pensamento	103
3.6. Considerações finais	107
4. O Teorema de Gödel e a circulação de idéias intercoletivas	111
4.1. Considerações iniciais	112
4.2. Física	115
4.3. Ciência da Computação	121
4.4. Ciências Cognitivas	126
4.4. Humanidades.....	141
4.5. Considerações finais	158
5. Conclusões.....	160
Referências	167
Anexo	176

Introdução

“A matemática é a ciência na qual nunca sabemos de que coisas estamos falando, nem se é verdade aquilo que estamos dizendo”

Bertrand Russell

Se pensarmos em história como sinônimo de mudança, então não é exagero dizer que certos fatos na história da matemática têm uma importância fundamental sobre outros por colocarem em xeque conceitos, técnicas e postulados que até então eram sacramentados pelos seus praticantes. Estes fatos de que estamos falando têm em comum uma idéia básica: provar a impossibilidade de se provar algo. Isto derrubou, em cada ocasião, um ideal cognitivo freqüentemente destinado à matemática: sua capacidade de provar uma conjectura ou de negá-la exibindo um exemplo.

Na Antiguidade, nos deparamos com o primeiro fato documentado que quebra esta soberania, a existência de incomensuráveis. Nas três primeiras décadas do século XIX, fomos formalmente apresentados às geometrias não-euclidianas e, nesta mesma ocasião, à teoria de Galois. Nesta seqüência, tivemos que admitir nossa impossibilidade de encontrar uma medida padrão para todas as medidas possíveis, de descrever o mundo físico com apenas um modelo geométrico, de deduzir fórmulas algébricas para encontrar raízes de polinômios de grau qualquer e de construir com régua e compasso soluções para os três problemas da Antigüidade: a duplicação do cubo, a triseção do ângulo e a quadratura do círculo.

Muito conhecimento matemático foi construído para resolver estes problemas. Modificamos nosso olhar para a matemática de modo a ver nestes fatos o seu lado positivo: a nossa capacidade de fazer matemática, de abstrair, é tão grande – potencialmente ilimitada – que temos a segurança de sermos hábeis para provar qualquer coisa a respeito de uma conjectura: ou ela própria, ou sua negação, ou a impossibilidade de fazer as duas coisas.

Todavia, em 1930, Kurt Gödel, durante o congresso de Königsberg sobre Epistemologia das Ciências Exatas, enunciou os seguintes resultados acerca da matemática: (i) se um sistema formal contendo a aritmética for consistente,¹ então ele

¹ Isto é, não possuir nenhum par de proposições contraditórias.

contém proposições aritméticas verdadeiras que, no entanto, são *indecidíveis*;² (ii) não há procedimento computável para provar a consistência da teoria dentro dela própria. Estes teoremas que, daqui em diante serão chamados na forma singular de Teorema de Gödel, foram posteriormente publicados na revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, sob o título *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme*³ (Sobre as Proposições Indecidíveis nos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos).⁴

Os *Principia Mathematica*⁵ mencionados no título consistem em uma obra de três volumes desenvolvida por Bertrand Russel e Alfred North Whitehead e publicadas nos anos de 1910, 1912 e 1913, e trata-se de um monumental tratado sobre lógica e fundamentos da matemática.⁶ Gödel constrói sua demonstração a partir da lógica formal desenvolvida nos *Principia Mathematica*, complementada pela metamatemática⁷ de David Hilbert.

O que Gödel provou – que chamamos fenômeno da *incompletude* – ajudou a romper com uma estrutura epistemológica que desde a Antigüidade helênica classificou o conhecimento matemático como uma esfera contendo em seu interior todas as respostas para as possíveis questões propostas, não deixando nenhuma réstia para a névoa da indecisão. Até este momento, uma verdade matemática era definida como aquilo que se podia demonstrar. A relação entre verdade e demonstrabilidade era,

² Isto é, não podem se provadas, nem refutadas, o que significa que o sistema é incompleto.

³ GÖDEL, 1931.

⁴ No capítulo dois, mostramos algumas das idéias principais da demonstração do teorema. Em anexo, transcrevemos na íntegra a versão portuguesa deste artigo, publicada originalmente em (LOURENÇO, pp.245-290, 1977).

⁵ RUSSELL, WHITEHEAD, 1913.

⁶ As contradições na matemática eram questões impensáveis até o século XIX, mas a teoria de conjuntos, que havia se constituído como base para toda a matemática, produziu paradoxos que mudaram a pauta de discussão desta comunidade. A preocupação em resolver tais questões conduziu projetos fundacionistas, dentre outros. De um lado, Frege e Russell acreditaram que os fundamentos da matemática seriam restabelecidos se toda a matemática fosse traduzida em lógica. Do outro, Hilbert usava fortemente a lógica para dar à matemática modelos formais capazes de resolver todas as questões abertas da matemática sem produzir os indesejáveis paradoxos. No segundo caso, o ideal formalista se voltaria para uma grande unificação, uma busca pela essência do conhecimento. No capítulo um, reconstruiremos o contexto brevemente citado aqui.

⁷ A metamatemática é um ramo da lógica que trata de demonstrar resultados *sobre* a matemática. Difere-se da matemática cujos objetos são números, figuras geométricas, funções, etc. e não sentenças matemáticas. Trata-se, portanto, de uma meta-linguagem da matemática. Pensando na matemática como uma linguagem sobre algo, a metamatemática é uma linguagem de uma linguagem, o que alguns filósofos (como Russell e Wittgenstein) definem como linguagem de nível superior.

portanto, um pressuposto para a matemática, mas o Teorema de Gödel compeliu os lógicos e matemáticos a repensarem o conceito de verdade. Não é exagero, portanto, considerar o Teorema de Gödel como um dos resultados mais importantes do século XX acerca do conhecimento matemático, e um dos mais surpreendentes de todos os tempos. Apesar da tímida recepção do Teorema de Gödel no ano de sua divulgação, as décadas seguintes trouxeram uma crescente produção acadêmica com base nesta obra de Gödel.

As implicações lógicas e filosóficas do Teorema de Gödel foram as primeiras obras a tratarem do assunto desde 1931. Em seguida, destacaram-se biografias e publicações sobre a história do tema. Neste conjunto,⁸ descrevemos nas linhas que seguem algumas destas obras.

Em *From Frege to Gödel* (1967), Heijenoort reúne os artigos centrais dos lógicos do período elucidado pelo título, acrescidos de cartas e comentários.

Em *Limitaciones Internas de los Formalismos* (1969), Ladrière expõe diversas demonstrações do Teorema de Gödel, as críticas, seus diversos desdobramentos na lógica, por Kleene, Rosser, Gentzen, Church, Tarski, Turing e outros; as demonstrações não técnicas de Gödel, Rosser, Bernays, Wang, Beth e Findlay. Em sua exposição, Ladrière procura mostrar que teorema como o de Gödel implicaram não no fim do projeto hilbertiano, mas nas limitações internas a que estão sujeitos os sistemas formais da matemática.

Lourenço reúne em *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (1977) os principais artigos de Gödel que fazem o título do livro, bem como o artigo de Cohen sobre a hipótese do contínuo e os desdobramentos do Teorema de Gödel para a lógica, por Rosser, Turing e Feferman. Há ainda a carta de Gödel para Russell em que ele expõe sua filosofia realista, também encontrada em Shilpp (1970), e uma análise filosófica do Teorema de Gödel por Dummett.

Shanker reuniu em *Gödel Theorem in focus* (1988) diversos artigos dos quais ele próprio faz uma biografia de Gödel (pp. 1-16) e analisa as críticas de Wittgenstein (pp. 155-256), Kleene (pp. 48-73) descreve as idéias centrais do Teorema de Gödel e a hipótese do contínuo, Dawson (pp. 74-95) relata como o Teorema de Gödel foi recebido

⁸ No capítulo dois deste trabalho, fazemos uma breve leitura destas obras.

dentro do círculo lógico matemático, Feferman (pp. 96-114) nos mostra o pensamento de Gödel no período de sua produção científica, Resnik (pp.115-130) reflete sobre a filosofia que está por trás das demonstrações de consistência e Detlesen (pp. 131-154) analisa os impactos do Teorema de Gödel para o programa de Hilbert.

Hao Wang descreve, através de entrevistas e cartas trocadas com o amigo Gödel, a vida, personalidade e idéias de Gödel em *Reflections on Kurt Gödel* (1987) e *A Logical Journey: From Mathematics to Philosophy* (1996).

Em *Collected Works* (1995), Feferman reúne as publicações e cartas de Gödel, incluindo introduções e comentários.

Em *On Gödel* (2000), Hintikka faz um trabalho similar à coletânea de Shanker: relata o anúncio do teorema por Gödel durante o congresso de Königsberg, faz uma biografia de Gödel e descreve os procedimentos usados por ele para a demonstração de seu teorema, consequências para a lógica e para a filosofia.

Em *A prova de Gödel* (2001), Nagel e Newman procuram, de uma forma sintética e didática, expor as idéias centrais da demonstração do Teorema de Gödel, os eventos matemáticos que o antecederam, seu significado no contexto lógico matemático. A metodologia da demonstração segue a linha das demonstrações não técnicas expostas na obra de Ladrière.

Rebecca Goldstein (2005) fez um interessante estudo filosófico sobre as concepções de Gödel, do Círculo de Viena, de Einstein e Wittgenstein.

Além das obras do gênero citado, era de se esperar que listássemos uma produção acadêmica dentro do círculo dos matemáticos a respeito do Teorema de Gödel. No entanto, os anos que sucederam 1931 mostram um movimento (sobre o qual falaremos ao longo deste trabalho) que certamente não vemos em nenhum outro momento da história da matemática. Apesar de tratar de uma questão matemática por excelência e com prioridade para a época (o problema da consistência na matemática constava na lista dos 23 problemas matemáticos de Hilbert para o século XX na abertura do congresso internacional de Paris de 1900), o Teorema de Gödel teve uma repercussão quase nula dentro do círculo matemático, mas produziu desdobramentos em outros círculos epistemológicos, como as ciências naturais, sociais, filosofia, ciência da computação, inteligência artificial e as artes.

Uma lista completa de citações do Teorema de Gödel em círculos não matemáticos é uma tarefa espetacularmente exaustiva. Como exemplo, uma busca na internet sobre o tema pode chegar a milhões de páginas. É claro que a procura dentro das ciências exatas por resultados que possam contribuir para a formulação de teorias de outras áreas do conhecimento no século XX não se resume no Teorema de Gödel. O mesmo pode ser observado com a relatividade, a física quântica e a teoria da evolução das espécies. Porém, dentro do escopo estritamente matemático, Gödel alcançou no século XX uma popularidade que chega a ameaçar Pitágoras, nome que batiza o teorema mais conhecido da área.

Esta proliferação produziu, nas duas últimas décadas, um refluxo. Filósofos e cientistas, de uma forma geral, receberam com pouca simpatia os usos das teorias matemáticas e físicas em obras “alheias” no século XX. Em linhas gerais, pode-se dizer que estes pensadores questionaram a legitimidade das analogias evocadas,⁹ como por exemplo, Sokal e Bricmont (1999), Bouveresse (2005), Franzén (2005) e Feferman (2006). Desde então simpatizantes de Sokal e defensores das apropriações do Teorema de Gödel vêm trocando farpas em artigos de jornais e revistas científicas e na internet.

O nosso trabalho, especificamente, tem como objetivo principal fazer uma análise das obras que se apropriaram do Teorema de Gödel, porém é ele conduzido por uma linha completamente diferente das obras de Sokal, Bouveresse, Franzén e Feferman. Na *interpretação de Sokal*,¹⁰ o foco do debate é se o Teorema de Gödel foi corretamente apreendido ou se a teoria em questão produz algum sentido com o uso do Teorema de Gödel.¹¹ Em contrapartida, nós estudaremos o *impacto cultural* do Teorema de Gödel, isto é, desejamos compreender de que maneira o Teorema de

⁹ A questão é mais complexa do que estas linhas sugerem e diz respeito mais à forma do que ao conteúdo. Estes filósofos e cientistas argumentam que a questão não é propriamente o uso das teorias matemáticas e físicas em outros círculos epistemológicos, mas a maneira com que elas são usadas. Denunciam principalmente a falta de conhecimento dos temas apropriados e na falta de clareza quanto à analogia que os usos sugerem. No capítulo quatro, discutiremos melhor esta polêmica.

¹⁰ Deste ponto em diante, denominaremos as obras de autores que criticam as apropriações “indevidas” do Teorema de Gödel como *interpretação de Sokal*.

¹¹ Como veremos adiante, uma diferença entre nossa linha metodológica e a da *interpretação de Sokal* é que, enquanto defendemos que este sentido depende do contexto em que o crítico está inserido, a *interpretação de Sokal* nos faz crer que este sentido existe independentemente do contexto. Apesar das diferenças, concordamos com a *interpretação de Sokal* que as possíveis apreensões não devem ser criadas dentro de um relativismo exacerbado. Voltaremos neste debate nas seções 3.1 e 4.4.

Gödel mudou a visão de mundo de diversos grupos sociais formados por não matemáticos ao longo do século XX (esta diferença será mais detalhada adiante).

A justificativa deste trabalho segue-se do fato que o Teorema de Gödel, desde que foi publicado, provocou mais desdobramentos em campos não matemáticos do que qualquer outro resultado matemático no século XX e, independente de aclamações ou críticas, isto motiva a emergência de uma nova proposta de estudo. Além da preocupação de serem legítimos ou indevidos os usos do Teorema de Gödel, há importantes questões subjacentes às suas apropriações que ainda não foram foco de nenhuma pesquisa. Por que o Teorema de Gödel foi usado? Por que o Teorema de Gödel, sendo um tema lógico matemático, instigou discussões em ambientes não matemáticos? De que maneira a incompletude possibilitou uma nova visão de mundo em cada um destes ambientes no século XX?

Estas questões estão à margem das obras da *interpretação de Sokal* que foram produzidas dentro de uma visão científica do processo de desenvolvimento da ciência. As questões que levantamos emergiram de uma visão histórico-cultural deste processo. As duas metodologias são completamente diferentes. No primeiro caso, o objetivo é dar uma explicação científica para as apropriações do Teorema de Gödel, o que significa encontrar leis que funcionem como forças mecânicas capazes de produzir um sentido¹² (causalidade). No segundo caso, o objetivo é dar sentido às apropriações por meio de categorias culturalmente presentes.

O fato de tomarmos um caminho distinto da *interpretação de Sokal* não implica necessariamente em uma defesa dos argumentos utilizados nas apropriações do Teorema de Gödel. Tampouco deve-se interpretar que atacar a *interpretação de Sokal* faz parte de nossos objetivos. Todavia, apesar de afastarmos da querela de Sokal, inevitavelmente colocaremos durante este trabalho nosso posicionamento em relação às apropriações e às suas críticas.

Agora, delinearemos com mais detalhes nosso objeto de estudo. Desejamos realizar uma análise histórica de obras não matemáticas de relevância em que o

¹² Um exemplo é a preocupação de Franzén (2005, pp. 77-80, 84-86) em criticar a evocação do Teorema de Gödel na Bíblia ou na Constituição dos Estados Unidos, pois estes dois veículos não são sistemas formais. Esta exigência de contexto é comum também nas críticas de Sokal e Bricmont (1999) e, no entanto, a preocupação de como contextos diferentes requererem leituras diferentes é exatamente a via cultural que nosso trabalho percorre.

Teorema de Gödel ou suas releituras aparece como um importante fundamento para a composição das teorias referidas nestas obras e, conseqüentemente, para a reestruturação das comunidades acadêmicas que as contém. Não temos como finalidade compreender cada releitura dentro de seu sistema específico – embora isto seja feito de algum modo no decorrer do trabalho – mas desejamos obter, em nossas análises, resultados que permitem perceber o movimento histórico que resultou nestas releituras, o que inclui observar as mudanças que estas teorias provocaram em cada comunidade científica.

Agora, mostraremos o percurso que teceremos para responder as questões que colocamos. Esta teia será costurada em três pontos. No primeiro, queremos entender que a releitura de obras por diferentes comunidades tem um viés histórico. Em seguida, compreenderemos que a dinâmica histórica que explica esta releitura de obras aplica-se no âmbito da ciência. Finalmente, buscaremos explicar de que maneira esta dinâmica histórica de releitura ocorre no âmbito da ciência.¹³

No primeiro ponto, a justificativa de nosso trabalho se fundamenta inicialmente na literatura crítica sobre história cultural, principalmente em Roger Chartier (1998) e Hayden White (1978), que tratam exatamente das diversas interpretações de obras e publicações originárias de uma determinada comunidade por outras comunidades. Portanto, se quisermos enxergar este movimento na história da ciência, devemos compreender como são as relações entre teorias científicas e comunidades científicas. Na seqüência, recorreremos no segundo momento à historiografia de Fleck (1979, 1986) onde encontramos a idéia de que a *comunidade científica* abrange grupos organizados socialmente. Em cada comunidade, há os pesquisadores, os estudantes e os não especialistas que utilizam deste conhecimento em sua vida, de uma forma ou outra. Esta distribuição de praticantes da atividade científica pode ser explicada através da metáfora dos círculos concêntricos: no menor (*interno*) estão os especialistas e no maior (*externo*) estão os não especialistas.¹⁴ Estes últimos também participam do saber científico, porém com um discurso menos técnico. O saber é desenvolvido no círculo

¹³ Isto não significa que estes três pontos serão desenvolvidos nesta ordem em nosso trabalho. Esta divisão serve apenas para organizar nossa literatura crítica. Os detalhes da articulação destes três pontos serão dados no capítulo três.

¹⁴ Fleck denominou esses grupos distintos de círculo esotérico e círculo exotérico.

menor e os que pertencem ao maior só tem acesso a este saber por meio dos especialistas¹⁵ embora se reconheça a influência externa. A articulação entre os dois momentos da metodologia proposta – isto é, a história cultural de Chartier e White, por um lado, e a história e sociologia da ciência de Fleck, por outro – é necessária porque a dinâmica que descreve os usos de conceitos científicos produzidos no *círculo interno* de uma determinada estrutura por indivíduos do *círculo externo* (FLECK, 1979) é, como veremos no capítulo três, um caso particular das apropriações que Chartier e White descrevem no caso das comunidades, no âmbito da história cultural.

Finalmente, no terceiro ponto, desejamos compreender quais são as categorias capazes de provocar a circulação do conhecimento entre as duas comunidades científicas. Para tanto, estudaremos metáforas e modelos na ciência. Estes temas possuem extensa bibliografia e, dentro do nosso levantamento bibliográfico, descobrimos nas teorias interativas sobre metáfora de Lakoff (1981, 1993) e Black (1962, 1993) e nas teorias sobre modelos científicos de Hesse (2000) e Cartwright (1983) abordagens bem coerentes com a perspectiva teórico-metodológica que desejamos. A concepção de Lakoff e Black nos mostra o enunciado metafórico como um processo interativo que permite conhecer dois *domínios conceituais*,¹⁶ devido ao conjunto de similaridades apresentadas. Este procedimento ocorre de uma maneira similar com os modelos científicos quando os domínios são ampliados na forma de teorias científicas. Logo, as metáforas e os modelos são os elos que permitem os indivíduos do *círculo externo* de uma estrutura apreender o conhecimento produzido no *círculo interno*. Estes indivíduos do *círculo externo*, vistos como indivíduos do *círculo interno* de *outra* comunidade, elaboram, com as técnicas próprias da *sua* comunidade, as interpretações do conhecimento apreendido via metáforas e modelos gerando teorias legitimadas pela *sua* comunidade, isto é, pelo *círculo interno* a que pertence.

Neste caminho, o sentido das releituras dos conceitos científicos por uma comunidade é dado pelos membros *desta* comunidade. Para compreendê-lo, é preciso compartilhar de todo o sistema de crenças, pressupostos teóricos e métodos de pesquisa que a comunidade constituiu. Isto significa que podem ocorrer múltiplas

¹⁵ No capítulo um, estes conceitos serão retomados com mais de detalhes.

¹⁶ Estas terminologias serão detalhadamente explicadas no capítulo três.

releituras de um mesmo conceito científico, sendo cada uma restrita aos parâmetros particulares constituídos histórica e socialmente dentro de cada comunidade.

Os três pontos acima compõem o referencial teórico-metodológico necessário para abordarmos as fontes primárias de nossa pesquisa historiográfica: as obras produzidas no século XX fora do círculo lógico matemático que utilizaram o Teorema de Gödel em seu discurso. O cerne do nosso trabalho *não* consiste em encontrar um significado único (a essência) do Teorema de Gödel, já que o significado *histórico* dado à incompletude, bem como para qualquer conceito científico, depende dos sistemas estabelecidos por diferentes comunidades (científicas ou não) ao longo de sua dinâmica histórico-social. Não se deve deduzir daí que necessariamente concordamos com todas as releituras que serão analisadas neste trabalho. O que desejamos é mudar o foco do debate: o que nos importa neste trabalho é mostrar *por que* e *como* foram feitas estas releituras.

Para dar cabo deste empreendimento, dividiremos o trabalho em duas partes. Na primeira, que inclui dois primeiros capítulos, abordaremos o Teorema de Gödel no círculo lógico matemático: no capítulo um, o ambiente matemático pré-Gödel, no capítulo dois, suas repercussões no interior do círculo lógico matemático, que inclui o comportamento da comunidade matemática nos períodos pré e pós Gödel. A segunda parte, que inclui os capítulos três e quatro – núcleo central deste trabalho – tratará do Teorema de Gödel fora do círculo lógico matemático.

Para compreendermos a importância de cada capítulo, lançamos luz a uma metáfora. Suponhamos que os círculos *interno* e *externo* de uma *comunidade científica* sejam linhas imaginárias no meio de uma piscina. Um fato científico pode ser relacionado como uma pedra que cai em queda livre sobre o centro do *círculo interno*. Sua queda provoca ondas cuja propagação no *círculo interno* equivale ao impacto do fato científico sobre a comunidade científica. O impacto social de um fato científico pode ser mensurado pelo comprimento do raio máximo que estas ondas atingem. Elas podem morrer no *círculo interno* ou podem atravessá-lo e atingir o *círculo externo*. Não há como compreender estas ondas no *círculo externo* se não observarmos todo o seu histórico, desde o lançamento até sua propagação no *círculo interno*. No presente trabalho, a nossa pedra é o teorema da incompletude e ela foi lançada por Gödel. No

capítulo um, analisaremos as condições iniciais da piscina; no capítulo dois os fatores que implicaram a queda da pedra e a propagação das ondas no *círculo interno*; no capítulo três de que maneira estas ondas podem atravessar o *círculo interno* e no capítulo quatro a propagação das ondas no *círculo externo*.

Que contribuições um trabalho como este pode proporcionar? Em primeiro lugar, este trabalho fornece uma compreensão do Teorema de Gödel sob diversos olhares, do círculo lógico matemático (para o qual a literatura atualmente disponível que utiliza abordagem histórico-cultural é escassa) para fora dele (para o qual não existe literatura atualmente disponível que utiliza abordagem histórico-cultural). Esta pluralidade de olhares certamente favorece a nossa apreensão sobre o que significou o Teorema de Gödel para a história. Além disso, a descrição detalhada da apropriação de um conhecimento por diferentes *comunidades científicas* feita ao longo deste trabalho é uma contribuição para a historiografia da ciência e, principalmente para a historiografia da matemática. Mostramos como é possível complementar a historiografia de Fleck com estudos (como os de metáforas e modelos) que propiciam uma visão detalhada deste processo de circulação de teorias científicas entre diversas comunidades, dentro de uma perspectiva histórico-cultural. Em particular, a historiografia da matemática carece muito de estudos sobre as relações entre comunidades matemáticas e não matemáticas, principalmente estudos sobre as interferências de teorias matemáticas *sobre* as comunidades externas.

Parte I

O Teorema de Gödel no círculo lógico matemático

1

A Matemática no período 1850-1930

“O que seria da verdade de nosso saber,
da existência e o progresso da ciência se não
existisse ao menos na matemática uma verdade sólida?”
David Hilbert

1.1. Considerações iniciais

Este capítulo tratará das questões que levaram alguns filósofos e matemáticos a refletirem sobre os fundamentos da matemática. Veremos então que o debate sobre os fundamentos culmina no Teorema de Gödel. Este é o contexto histórico do qual emergiu o teorema da *incompletude*. Entender este contexto significa compreender que a interação que o saber provoca entre sujeitos e objeto é mediada pelas relações históricas, sociais e culturais presentes. Neste sentido, é necessário especificar uma referência metodológica para compreender, em linhas gerais, a dinâmica das *comunidades científicas*, enquanto organismos sociais formados em função de sua atividade, a ciência.

Esperamos que esta referência nos mostre os diversos elementos sujeitos às variações provocadas pela teia histórica da matemática: o estilo cognitivo geral da matemática; a estrutura de associações, relações, usos, analogias e implicações metafísicas atribuídas a esta ciência; os significados atribuídos nos cálculos e manipulações simbólicas; o rigor e o tipo de racionalidade que estão implícitos ao provar uma tese; e a negociação da lógica utilizada.¹⁷

Recorremos então à historiografia de Fleck enredada principalmente pela obra *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache* (*Gênese e Desenvolvimento do Fato Científico*, 1935).¹⁸ Um dos seus conceitos centrais é o *pensamento coletivo*. Para Fleck, um *pensamento coletivo* é um grupo de indivíduos que compartilham conhecimentos e práticas, ou seja, é:

Uma comunidade de pessoas trocando idéias mutuamente ou mantendo interação intelectual; também veremos por implicação que esta também provê o “suporte” especial para o desenvolvimento histórico de qualquer campo do pensamento, bem como do nível de cultura e conhecimento dados. (FLECK, 1979, p. 39)

A idéia de *pensamento coletivo* de Fleck, é melhor compreendida pelo segundo conceito fundamental, o *estilo de pensamento*.¹⁹

¹⁷ Estas variações foram descritas assim por David Bloor (1991).

¹⁸ FLECK, 1979.

¹⁹ Fleck refere-se ao conceito de estilo de pensamento várias vezes e, em certos pontos, características novas são acrescentadas em relação ao conceito inicial, tornando-o cada vez mais complexo. Para uma discussão sobre o assunto, cf. (PARREIRAS, 2006).

Nós podemos, portanto, definir estilo de pensamento como o perceber orientado com correspondência mental e assimilação factual do que foi percebido. Ele é constituído por características comuns nos problemas de interesse do pensamento coletivo, pelos julgamentos que o pensamento coletivo considera evidente e pelos métodos que ele aplica como meios de cognição. O estilo de pensamento pode também ser acompanhado por um estilo técnico e literário característico do sistema de conhecimento dado. (FLECK, 1979, p. 130).

O *estilo de pensamento* não é uma adoção voluntária, mas uma imposição conseqüente do próprio processo de socialização construído pelo *pensamento coletivo*. O sujeito interage com o objeto através de relações mediadas pelo *estilo de pensamento*. O “perceber direcionado” que Fleck se refere significa direcionar o modo de pensar, ver, agir, se comunicar. Este processo tende à manutenção de opiniões.

No entanto, o *estilo de pensamento* tem caráter transitório. Os fatos científicos são contextualizados e as verdades são contaminadas por ele. O certo e o errado tornam-se conceitos relativos, pois dependem de condições histórico-sociais. A transição de *estilos de pensamento* é contínua, sem rupturas, evidenciando o caráter evolucionário do processo.

Estes conceitos iniciais possibilitam-nos falar do processo histórico da matemática, utilizando uma linguagem adequada à forma dada.²⁰ No entanto, a partir deste ponto em diante, utilizaremos a terminologia *comunidade científica*²¹ em lugar de *pensamento coletivo* pelo fato da primeira ser mais comum na literatura de história da ciência do que a segunda. Em outras palavras, para nossos fins, definimos *comunidade científica* como um grupo de indivíduos que compartilham um *estilo de pensamento*.²²

²⁰ Algumas questões adicionais de Fleck, como a profusão do conhecimento entre *pensamentos coletivos*, serão retomadas no capítulo três.

²¹ A terminologia *comunidade científica* teve maior impacto com a historiografia de Kuhn (1977). O conceito central desta historiografia, no entanto, é o de *paradigma*: “realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modeladoras para uma comunidade de praticantes” (KUHN, 1977, p. 58). O paradigma de Kuhn equivale, até certo ponto, ao *estilo de pensamento* de Fleck. Todavia, o caráter evolucionista proposto por Fleck na transição de *estilos de pensamento* é substituído por Kuhn pela *revolução científica*. Kuhn nos ensina que a *revolução científica* é uma ruptura de *paradigmas* de uma *comunidade científica*, de tal forma que estes *paradigmas* sejam *incomensuráveis*. Cientistas baseados em *paradigmas incomensuráveis* enxergam mundos completamente distintos. A *incomensurabilidade* é um dos conceitos mais polêmicos do trabalho de Kuhn (sobre o qual retomaremos na seção 4.5) e rendeu críticas, réplicas e reformulações (KUHN, 2006b). Para nossos propósitos, ele limita a compreensão das metáforas e modelos como meios de comunicação entre comunidades, ponto fundamental nesse trabalho.

²² O fato de usarmos a terminologia *comunidade científica* no lugar de *pensamento coletivo* não deve ser remetida de forma alguma à historiografia de Kuhn. Tampouco deve-se interpretar que os dois conceitos

Mostraremos neste capítulo, portanto, como um problema próprio de uma *comunidade científica* – a matemática – conduziu a ascensão de outra comunidade – a de filósofos e lógicos da matemática. *Estilos de pensamento* comuns às duas comunidades deram ao campo matemático os alicerces da teoria de conjuntos e estes, por sua vez, o ergueram através de uma construção axiomática. No entanto, a crise decorrente dos paradoxos na teoria-base de conjuntos implicou um movimento dentro da comunidade dos lógicos matemáticos provocando a cisão desta comunidade em diversas correntes filosóficas. Finalmente, o debate se orientou para a necessidade de formalização completa da matemática e busca das provas de *consistência* dos sistemas formais.

Neste ponto, acreditamos que a importância do Teorema de Gödel para o círculo lógico-matemático será visível dentro de todo o contexto citado. Como foi dito, Gödel lançou uma pedra que caiu numa piscina e provocou ondas, movimento que simboliza o impacto do teorema da *incompletude*. Trataremos neste capítulo, portanto, das condições iniciais da piscina antes de Gödel lançar a pedra.

1.2. A queda da supremacia de Euclides

A partir da segunda metade do século XIX, uma série de mudanças drásticas no pensamento científico interferiu profundamente na história do conhecimento. As principais concepções que caracterizavam a ciência desde a antiguidade helênica – essencialismo, certeza, determinismo, verdade – seriam colocados em xeque por novas teorias que impetraram o pensamento ocidental. A teoria da evolução das espécies, a relatividade, a termodinâmica e a psicanálise são bons exemplos de mudanças estruturais do pensamento filosófico e científico.

Com isso, o sonho iluminista da razão universal que levou à busca da unidade de diversos campos como a física e a matemática se viu profundamente abalado. Neste

dados por seus respectivos proponentes são completamente equivalentes. Cremos que nossa opção não deve prejudicar o entendimento de nossa linha historiográfica porque a terminologia *comunidade científica* não é exclusiva de Kuhn, apenas tornou-se mais comum devido ao impacto da obra deste autor. Portanto, o que fazemos aqui é utilizar um termo mais freqüente da história da ciência com um significado dado pela historiografia de Fleck. Para um estudo comparativo das duas historiografias confira em (CONDÉ, 2005).

ambiente cultural ocorreram *mutações*²³ de *estilos de pensamento* importantes na matemática. O cuidado com o rigor, a consolidação da linguagem simbólica, a *axiomatização* e *aritmetização* das teorias e a relação entre lógica e conjuntos foram pontos importantes mutuamente influentes que costuraram a rede matemática do século XX.

Até a Idade Moderna, a matemática era sustentada epistemologicamente pelo tripé geometria-intuição-variável,²⁴ mas esta base foi gradativamente substituída por conjuntos-axiomática-aritmética.²⁵ A mudança não foi fácil e envolveu pequenas e grandes crises epistemológicas. Afinal, o poder da geometria e da intuição era tão forte para os gregos que estes elementos se mantiveram como base para o desenvolvimento das teorias matemáticas até o século XVIII. A geometria era o melhor exemplo de rigor e, sobre ela, os pilares do cálculo e da álgebra seriam erguidos com solidez. No entanto, alguns eventos, tais como a crise do cálculo e a criação de geometrias não euclidianas, contribuíram para a desconstrução do altar sobre o qual a geometria e a intuição reinavam.²⁶

Até os eventos do século XIX, não se usava, por exemplo, a expressão “geometria euclidiana”, tendo em vista que aquela geometria construída pelos gregos era o único modelo teórico de representação visual do espaço, apesar dos esforços renascentistas em criar bases para a geometria das perspectivas.

A geometria de Euclides era uma síntese do pensamento científico grego. A matemática grega é assim descrita por Bertrand Russell:

A Matemática é um estudo que, quando iniciado de suas partes mais familiares, pode ser levado a efeito em duas direções opostas. A mais comum é construtiva, no sentido da complexidade gradativamente crescente. (...) A

²³ As *mutações* nos *estilos de pensamento* são transformações ocorridas gradualmente por força da dificuldade em resolver certos problemas produzidos pelas teorias das *comunidades científicas*. Daremos mais atenção a este conceito na seção 4.2.

²⁴ A idéia da variável colocada aqui diz respeito ao momento da história da matemática em que o uso dos símbolos tornou-se indispensável em quase todos os campos. Nesta ocasião, as grandezas não assumiram somente o valor de constantes, como ocorria predominantemente na matemática grega. O simbolismo adotado permitiu também declarar letras como variáveis e este processo foi fundamental para o desenvolvimento da álgebra, do cálculo e da física.

²⁵ Este é um ponto de grande relevância histórica, pois as raízes das concepções sobre os fundamentos da matemática de Gödel e seus contemporâneos estão neste tripé.

²⁶ Houve uma ruptura quanto ao lugar que a geometria ocupava no conjunto de pressupostos epistemológicos da matemática, porém a geometria dos gregos não foi abandonada em razão dos eventos citados, o que vem confirmar o caráter evolucionista proposto por Fleck.

outra direção, que é menos familiar, avança, pela análise, para a abstração e a simplicidade lógica sempre maiores; em vez de indagar o que pode ser definido e deduzido daquilo que se admita para começar, indaga-se que mais idéias e princípios gerais podem ser encontrados, em função dos quais o que fora o ponto de partida possa ser definido ou deduzido. (...) Os geômetras gregos antigos, ao passarem das regras de agrimensura empíricas egípcias para as proposições gerais pelas quais se constatou estarem aquelas regras justificadas, estavam praticando a Filosofia da Matemática (...) (RUSSELL, 1966, p. 9)

A busca grega pelos elementos é comprovada pelas filosofias de Tales e Pitágoras, e em obras como *Os Elementos* de Euclides e os *Elementos de Cônicas* de Apolônio, com extensões fora do círculo matemático no *Corpus Hippocraticum* e em *Da Arquitetura* do romano Vitrúvio.

Em sua obra,²⁷ Euclides inicia a construção da geometria com uma lista de 23 definições, seguida com uma lista de 5 postulados e 5 axiomas.²⁸ Os postulados são afirmações indubitáveis no que tange à intuição e à relação com o mundo físico. A formulação dos postulados sugere uma aplicação imediata no desenho com régua e compasso, como podem ser observados a seguir:

- (i) traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto;
- (ii) prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta;
- (iii) descrever um círculo com centro e raio dados;
- (iv) que todos os ângulos retos são iguais; e
- (v) que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Os teoremas são afirmações que devem ser provadas por meio da combinação lógica de dois ou mais postulados. Cada teorema provado é admitido como uma

²⁷ *Os Elementos* consistem em 13 livros, dos quais, os de números I a VI versam sobre geometria plana, VII a XIX sobre teoria de números, X sobre incomensuráveis, e XI a XIII sobre geometria no espaço. Ao contrário do que se costuma pregar, a obra de Euclides não é uma reunião do conhecimento matemático da época, mas um compêndio introdutório que exclui diversos estudos mais avançados como, por exemplo, o estudo de cônicas (HEATH, 1956).

²⁸ Os dois termos – postulado e axioma – são sinônimos na matemática moderna, mas, para os gregos, postulado era uma evidência própria de uma teoria específica e axioma uma evidência para qualquer teoria matemática.

verdade²⁹ que, combinada com os postulados, gera novos teoremas. Assim, o método axiomático desenvolvido pelos gregos funciona como uma máquina produtora de teoremas.

Assim como toda obra de impacto na história das ciências, os elogios aos *Elementos* dividiram espaço com críticas, principalmente quanto ao caráter intuitivo de seus conceitos fundamentais. Mas a maior polêmica da obra de Euclides recai sobre o quinto postulado conhecido como postulado das paralelas.³⁰ Durante muito tempo, foi levantada a hipótese de que a afirmativa postulada deveria ser um teorema. De fato, algumas questões são relevantes para tal desconfiança. Em primeiro lugar, a asserção, como enunciada por Euclides, parece mesmo com o enunciado de um teorema.³¹ Em segundo lugar, partindo da exigência de que o enunciado de um postulado deve corresponder a sua aplicação no mundo físico, como é possível, através da experiência sensível, estender duas retas até se encontrarem se a soma dos ângulos que formarem com a transversal for muito próxima de dois retos? A extensão “indefinida” como sugere o postulado é muito superficial.³²

²⁹ Platão argumentava que conhecemos verdades da geometria que não aprendemos nem através da educação e nem da experiência. Este conhecimento é um exemplo das verdades imutáveis. Assim, deve existir um reino da verdade absoluta e eterna, a fonte e a base do nosso conhecimento. Esta idéia predominou no *estilo de pensamento* matemático ocidental por mais de dois mil anos.

³⁰ A mesma geometria euclidiana pode ser construída se trocarmos o quinto postulado de Euclides (citado acima) por um equivalente: “por um ponto fora de uma reta, passa uma, e somente uma, reta paralela à reta dada”. É possível mostrar que as duas construções são equivalentes. Para tanto, basta provar que os 5 postulados originais provam o postulado equivalente e que, reciprocamente, os quatro primeiros juntos com o postulado equivalente provam o quinto postulado original. Há ainda outras formas equivalentes ao quinto postulado, mas a versão que perdura até hoje nos manuais didáticos é esta, enunciada pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819).

³¹ É curioso observarmos que, ao longo de *Os Elementos*, Euclides usou pela primeira vez o quinto postulado como hipótese somente na demonstração do 29º teorema, do livro I. Antes deste, Euclides ainda demonstrou um teorema que é exatamente a recíproca do quinto postulado, usando somente os quatro primeiros postulados. Esta observação motivou alguns historiadores a conjecturar que o próprio Euclides não estaria totalmente convencido de que o quinto postulado não poderia ser provado com uso dos outros quatro postulados. No entanto, não há documento histórico que possa corroborar tal conjectura.

³² Proclus (410-485 a.C.) criticou o quinto postulado apontando a superficialidade da idéia de “uma reta se encontrando com outra quando prolongadas indefinidamente”. Como a definição de reta dada por Euclides não deixa claro que este postulado seja óbvio, poder-se-ia imaginar como exemplo uma hipérbole que se aproxima tanto quanto se queira de sua assíntota sem encostar-se a ela. As retas paralelas do quinto postulado poderiam ter este comportamento. (GREENBERG, 1994, pp. 119-120).

Após séculos de tentativas malogradas de demonstração do quinto postulado por meio dos outros quatro,³³ trabalhos realizados principalmente por Gauss, Bolyai, e Lobachevsky, em meados do século XIX, mostraram que o postulado das paralelas era independente dos demais, ou seja, o postulado das paralelas e a sua negação não podem ser demonstrados. Esta conclusão permitiu a construção de dois sistemas axiomáticos que negam o postulado das paralelas de Euclides,³⁴ o que abriu caminhos antes desconhecidos pela comunidade catequizada com o modelo sacrossanto de Euclides.

A matemática parecia então livre para modificar postulados antes canonizados, mas a resistência à ampliação do campo geométrico persistiu, afinal, a geometria de Euclides arrancaria do conhecimento humano duas crenças: o primeiro, que não seria mais a representação visual do espaço físico, mas *uma* possível representação; e o segundo, que não seria também uma garantia de verdade, já que esta verdade deverá ser relativizada: em cada contexto, uma geometria deverá ser mais conveniente do que outra. Este é o primeiro choque sofrido pela epistemologia herdada dos gregos – que postula a verdade como entidade absoluta e descontextualizada. Este choque colocaria as geometrias não-euclidianas à margem da comunidade matemática durante algumas décadas, até que no final do século XIX, Bernhard Riemann desenvolveu uma teoria unificadora das geometrias euclidiana e não-euclidianas. Ele propôs um estudo para

³³ Vejamos algumas das tentativas mais conhecidas. Proclus procurou demonstrar o quinto postulado utilizando idéias de continuidade, mas não foi bem sucedido, pois tratou o termo “indefinido” como sinônimo de “sem limites”, o que não é verdade. Wallis (1616-1703) provou o quinto postulado a partir dos demais, mas utilizou um novo axioma – que para todo triângulo dado, existe um semelhante. Todavia os cinco postulados de Euclides são equivalentes aos cinco de Wallis, logo o trabalho de Wallis não resolveu o problema proposto por Proclus, apenas o transferiu de um sistema de postulados para o outro. Saccheri (1667-1733) assumiu a negação do quinto postulado e procurou encontrar um absurdo. Chegou em um quadrilátero com dois ângulos adjacentes retos e deduziu que soma dos outros dois não poderia ser maior que dois retos, mas não conseguiu provar que não poderia ser menor que dois retos. A partir disto, deduziu várias propriedades geométricas “estranhas”, mas não conseguiu aceitá-las (o seu *estilo de pensamento* não permitiu). Saccheri havia desenvolvido uma Geometria não Euclidiana (Id. pp. 121-127).

³⁴ Com efeito, existem duas sentenças que negam o quinto postulado: “por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela”. São elas: “por um ponto fora de uma reta passa mais de uma reta paralela” (geometria hiperbólica), e “por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela” (geometria esférica). Esta foi a primeira vez na história da matemática que uma proposição foi rotulada como *indecidível*. De fato, o postulado das paralelas e suas negações poderiam então ser admitidos como verdades em diferentes sistemas axiomáticos. Veremos no final deste capítulo e com mais detalhes no próximo capítulo que o Teorema de Gödel afirma a existência de proposições *indecidíveis* em diversos sistemas axiomáticos.

geometria com uma abstração tal que as construções de Gauss e seus contemporâneos seriam casos particulares daquelas propostas por Riemann.³⁵

Outra questão que merece atenção por exercer forte influência para a constituição do *estilo de pensamento* de Gödel e seus contemporâneos é a idéia da *arimetização*, que emergiu junto com a de *axiomatização* de campos matemáticos.

As reflexões sobre o infinito – evitadas pelos gregos – voltaram ao foco dos estudos matemáticos devido à adoração divina que os escolásticos dedicavam a este objeto. No entanto, os matemáticos renascentistas viam o rigor grego no uso do sistema axiomático como um dos maiores obstáculos para o trato do infinito e, para dominá-lo, eles deixaram um pouco as exigências axiomáticas de lado e se debruçaram em resolver os problemas de quadraturas e tangência. Sobre o tripé geometria-intuição-variável, nasceram então as técnicas infinitesimais de Newton e Leibniz, mas toda a construção deste campo era imprecisa, obscura e tautológica. Por exemplo, no monumental *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, 1687), Newton abre a seção I do livro I com um Lema que pretende definir o limite de uma função:

Quantidades e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do fim daquele tempo, aproximam-se mais de uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais (NEWTON, 2002, p. 71).

A matemática de Newton carecia de uma estruturação axiomática e, com o passar dos anos, esta falta criou outro problema: a disparidade entre os teoremas e as suas aplicações físicas. A esta altura, não era adequado ter a geometria como base epistemológica para toda a matemática, não era seguro construir uma teoria matemática fora dos moldes euclidianos. Tecnicamente, a deficiência em axiomatizar o cálculo parecia jazer em dois conceitos que a geometria não era capaz de construir: *função* e *número real*.

O primeiro destes conceitos, a função, era tratada até o final do século XIX sempre como expressão matemática, às vezes como curva, mas Lejeune Dirichlet percebeu que era necessário formular o conceito de forma abstrata, envolvendo apenas

³⁵ A proposta de Riemann nos mostra uma característica do *estilo de pensamento* desta época: a tentativa de unificação de áreas de conhecimento. Veremos que a teoria de conjuntos fornecerá uma importante ferramenta para esta proposta.

a correspondência entre grandezas sem o apego à geometria ou às expressões matemáticas. Sua definição se aproxima da moderna,³⁶ cuja formulação é mais abrangente. Por via da teoria de conjuntos, a definição moderna de função pressupõe conjuntos arbitrários, enquanto a de Dirichlet se restringe aos conjuntos numéricos.³⁷ Então, para Dirichlet e seus contemporâneos compreenderem o que era função, era necessário compreender antes o que era conjunto e o que era número real. Algumas tentativas de construção do sistema dos números reais (o *continuum* linear) procuravam desvencilhar a análise da geometria e aproximá-la da aritmética. O sucesso desta empreitada deveu-se ao alemão Richard Dedekind no livro *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* (A Continuidade e os Números Irracionais, 1872). Para definir um número real, Dedekind postulou a correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta para então definir um número real através de “cortes” – a exata cisão do conjunto dos racionais em duas classes dispostas de tal modo que os elementos de uma majoram os de outra. A formulação de Dedekind dada em termos puramente aritméticos foi a chave para a extensão do campo racional no *continuum* campo real. Logo, a definição de número real dependeria dos racionais, estes, por sua vez, de uma relação de equivalência de inteiros e, estes últimos, dos naturais. Percebeu-se assim na aritmética e na teoria de conjuntos infinitos os suportes necessários para a fundamentação do cálculo (análise matemática).

Enfim, a *aritmética* da análise consistiria em trocar a linguagem baseada numa intuição geométrica que dominava as técnicas processos infinitesimais pela linguagem lógica da aritmética, processo brilhantemente explorado por Weierstrass. Sua definição do limite de uma função é a que encontramos nos atuais manuais didáticos de matemática: “sejam $f(x)$ uma função definida em um intervalo real (a, b) e $c \in (a, b)$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a c , é o número real L , se para todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se encontrar $\delta > 0$ de modo que, se $x \in (a, b)$ e $0 < |x - c| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.” Vemos claramente a exclusão de qualquer apelo intuitivo,

³⁶ Dirichlet definiu função como a relação entre duas variáveis x e y , em que sempre que for atribuído um valor numérico a x , existirá uma regra segundo a qual um único y fica também determinado.

³⁷ Segundo a definição moderna, uma função f é uma relação binária entre dois conjuntos A e B , nesta ordem – isto é, um conjunto de pares ordenados (a, b) , sendo $a \in A$ e $b \in B$ – que goza das seguintes propriedades: (i) para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$; (ii) se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$; e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$.

metafísico ou sensitivo, as únicas entidades envolvidas são aquelas da aritmética elementar: números e relação de ordem.

O poder da *arimetização* foi influente em praticamente toda a matemática. Por exemplo, os avanços da geometria projetiva realizados principalmente por Plücker colocaram a geometria analítica³⁸ em um processo de *arimetização*, além de construir com rigor uma interpretação geométrica para o infinito. A álgebra também soltava suas amarras renascentistas na medida em que os estudos de equações com variáveis davam lugar às estruturas algébricas. Neste sentido, a *arimetização* e a *axiomatização* foram ingredientes fundamentais para a mudança de *estilo de pensamento* da comunidade matemática após 1850. Conforme veremos a seguir, estes processos conduziram a matemática deste período para o seu terceiro tentáculo do novo tripé epistemológico: a teoria de conjuntos. Lugar de onde brotarão paradoxos responsáveis por uma crise na matemática. O maior fruto desta crise será o Teorema de Gödel.

1.3. A crise dos fundamentos

Uma reforma matemática é desenhada no início do século XX e este esboço tem um cunho essencialista muito forte. As tendências dominantes foram a crescente abstração, distanciamento das ciências naturais, *arimetização* e *axiomatização*. A natureza da matemática mudou, percorrendo uma grande distância desde as caracterizações antigas como “ciência da quantidade” (Euler) ou “ciência dos fatos gerais sobre as relações entre magnitudes” (Gauss). Boole, na tradição dos algebristas ingleses, redefine a matemática como um “cálculo simbólico” e, mais recentemente, Cantor enfatiza, em alternativa à representação simbólica, a utilização de conceitos abstratos, independentemente da eventual adequação ou aplicabilidade às outras ciências.

Para alguns, como Gottlob Frege, Giuseppe Peano e Russell, a rota apontava para a grande matemática (unificação geral e fundamentação), para outros, como Kronecker, Brouwer e Poincaré, apontam para a fragmentação, falência dos

³⁸ A geometria analítica consiste em substituir as técnicas da geometria grega – baseada nas construções com régua e compasso – por técnicas algébricas que tratam de relações entre grandezas. Este processo foi desenvolvido no século XVII principalmente por Fermat e Descartes.

fundamentos e crise de sérias conseqüências epistemológicas. Estes últimos argumentavam que as teorias desenvolvidas empobreciam as componentes de cálculo, dada a ênfase fundacional e operativa dos processos infinitos. Duas linhas filosóficas se constituíram, portanto: a primeira, denominada *logicista* priorizava o raciocínio conceitual sobre estruturas abstratas e a segunda denominada *construtivista* (ou *intucionista*) preferia a visão simbólica e computacional.

A oposição entre os dois pontos de vista tem uma importância para a matemática além do interesse filosófico quando referidos à abordagem do infinito matemático. Para os construtivistas, só é válido lidar com noções infinitárias se a representação simbólica for explícita e desde que as operações e relações sejam de natureza algorítmica. Do outro lado do abismo, os logicistas defendem que os objetos matemáticos infinitos podem ser caracterizados abstratamente e considerados no seu valor nominal, apenas restringido aos requisitos mínimos de determinação e *consistência*.

O tratamento de conjuntos infinitos foi dado no final do século XIX por Cantor, ao ressuscitar questões sobre o infinito como a de Galileu Galilei, da correspondência biunívoca entre os números naturais e os pares.³⁹ Cantor desenvolveu a teoria dos números transfinitos e deduziu diversas propriedades acerca da cardinalidade de conjuntos infinitos. O exemplo clássico é a correspondência biunívoca entre os racionais e os naturais e a demonstração de que os reais não podem ser colocados em correspondência biunívoca com os naturais. Cantor definiu que o primeiro conjunto tem a *potência*⁴⁰ dos naturais e o segundo não. Percebeu então que há pelo menos dois tipos de infinito, classificados como enumerável – que é caso dos naturais – e o *continuum* – os reais. No entanto, Cantor não sabia se existia uma classe de infinito compreendida entre as duas classes conhecidas. Conjeturou que não existia tal classe, afirmação que ficou conhecida como *hipótese do continuum*. A questão só foi resolvida em 1963 como veremos mais adiante. Cantor sofreu duras críticas, principalmente por

³⁹ Galileu observou que o axioma de Euclides “o todo é maior que qualquer de suas partes” não vale quando os conjuntos são infinitos. Como exemplo, mostrou a correspondência entre naturais e pares.

⁴⁰ A potência é um conceito que estende para o caso infinito a idéia de número de elementos de um conjunto finito. Mais tarde definiu-se como cardinalidade de um conjunto a idéia que abrange os casos finito e infinito. Convencionou-se, assim, como $\aleph_0$ a cardinalidade dos naturais e c a cardinalidade dos reais (o *continuum*).

Kronecker e Poincaré, que denunciaram o aspecto vago da idéia geral de conjunto⁴¹ bem como o caráter não construtivo das provas indiretas usadas por Cantor em seus teoremas. Apesar destas críticas, a teoria de conjuntos parecia ser a pedra fundamental para o desenvolvimento de toda a matemática.⁴² Até a aritmética poderia ter seu *status* modificado dentro do conhecimento matemático, de estrutura primária para secundária.

Peano percebeu isto e formulou os axiomas que reduziriam a aritmética à lógica matemática, por meio de um simbolismo relacionando lógica e conjuntos que expressa os teoremas matemáticos mais complicados em cálculo formal. Para tanto, definiu as noções básicas “ser um número natural”, “ser sucessor de” e “ser igual a” e postulou:

- (i) 0 é um número natural;
- (ii) 0 não é sucessor de nenhum número natural;
- (iii) todo sucessor de um número natural é um número natural;
- (iv) cada número natural tem somente um sucessor; e
- (v) um conjunto que contém o 0 e contém o sucessor de cada número natural pertencente a ele contém todos os números naturais.⁴³

Se os números carregam o peso de toda a matemática, então os axiomas de Peano formariam o menor conjunto de premissas que definiriam os números naturais e, portanto, a base de toda a matemática. Os métodos de Peano foram bem sucedidos na

⁴¹ Cantor (1915, p. 85) definiu conjunto como “qualquer coleção, reunida numa totalidade, de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou pensamento”.

⁴² As questões que seguem a partir de então extrapolam a comunidade matemática e têm lugar na comunidade dos filósofos da matemática. Os matemáticos propriamente não vêem problemas no uso da teoria de conjuntos, pelo contrário, utilizam a teoria de conjuntos como base para todas as construções teóricas. São criadas, portanto, as estruturas (grupos, espaços vetoriais, espaços topológicos, variedades diferenciais, etc.). O conjunto assume um *status* tal que em meados do século XX reformas educacionais apontaram a teoria de conjuntos como conteúdo fundamental na escola básica.

⁴³ Em *Arithmetica principia nova methodo exposita* (1889), Peano definiu:

Noções primitivas:

- (I) As variáveis x, y, z e estas mesmas letras subscritas de índices;
- (II) Uma constante: 0;
- (III) Uma variável predicativa: Φ ;
- (IV) Um predicado de um argumento: “ser natural”;
- (V) Dois predicados de dois argumentos: “é sucessor de” e “é igual a”.

Axiomas:

- (I) 0 tem a propriedade “ser m número natural”;
- (II) Não existe natural x tal que: x tem a propriedade “ser natural”; e 0 “é sucessor de” x .
- (III) Se x tem a propriedade “ser natural”; e y “é sucessor de” x , então y tem a propriedade “ser natural”;
- (IV) Se $x = y$; e z_1 “é sucessor de” x ; e z_2 “é sucessor de” y , então $z_1 = z_2$;
- (V) Se 0 tem a propriedade Φ ; e se x tem a propriedade Φ e y “é sucessor de” x , então y tem a propriedade Φ ; então qualquer natural z tem a propriedade Φ .

Confira em (LADRIÈRE, 1969, pp. 35-36), ou (HEIJENOORT, 1967, pp. 83-97).

aritimetização da análise e da álgebra, mas sua intenção em reduzir a aritmética em lógica matemática não escapou posteriormente de críticas. Vejamos o exemplo de Russell.⁴⁴ Para o filósofo britânico, os axiomas de Peano não caracterizam exclusivamente os números naturais. Com efeito, o fato de “0”, “ser um número natural” e “ser sucessor de” serem conceitos primitivos, quaisquer funções que eles assumissem deveriam produzir a seqüência de números naturais. No entanto, se tais conceitos significarem, por exemplo, “1”, “ser uma fração unitária” e “a metade”, a seqüência produzida será $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \text{etc.}$, e não, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Um sistema de axiomas poderoso como o de Peano que caracterizasse exclusivamente o conjunto dos naturais era uma tarefa árdua sobre a qual Frege se dedicou boa parte de sua vida acadêmica. Conseguiu, nos dois volumes de *Grundgesetze der Arithmetik* (*Os Fundamentos da Aritmética*, 1890-1903), um sistema de axiomas que constrói o conjunto dos números cardinais em termos de conjuntos. Após definir conjunto universo e conjunto vazio, ele define 0 como $\{\emptyset\}$, o sucessor de um número e o conjunto dos números naturais. Em seguida, Frege prova os cinco postulados de Peano, por meio de seu sistema de axiomas. A construção de Frege parecia ser o passo decisivo para a redução da aritmética e, portanto, de toda a matemática ao binômio lógica-conjunto. No entanto, em 1902, em uma carta enviada a Frege antes de este terminar o segundo e último volume de *Grundgesetze der Arithmetik*, Russell enunciou um paradoxo que fere a própria noção de conjunto.⁴⁵ Russell sugere dividirmos os conjuntos em duas classes: a dos que são membros de si próprios e a dos que não são membros de si próprios, que será representada por C . A questão é: C é um membro de si próprio?⁴⁶ Qualquer resposta leva a uma contradição. Com efeito, se C é um membro de si próprio, não pode pertencer à classe representada

⁴⁴ RUSSELL, 1966, pp. 14-17.

⁴⁵ No apêndice do segundo volume de *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege responde à carta de Russell de uma forma melancólica: “Nada pior praticamente pode acontecer a um autor científico do que ver uma das fundações de seu edifício ser abalada depois de terminada a obra. Fui colocado nessa posição por uma carta contendo o paradoxo de Mr. Bertrand Russell exatamente quando a impressão deste segundo volume estava quase pronta (...)”. (HEIJENOORT, 1967, pp. 83-97). Existe também uma tradução inglesa do *Grundgesetze der Arithmetik* (FREGE, 1950).

⁴⁶ Em símbolos, o paradoxo de Russell é assim enunciado: seja C o conjunto descrito pela relação $\{X \in C\} \leftrightarrow \{X \notin X\}$. No caso em que C assume o valor de X tem-se $\{C \in C\} \leftrightarrow \{C \notin C\}$. O paradoxo de Russell ganhou do seu criador uma versão popular: o barbeiro de uma cidade seguia uma regra, segundo a qual, ele barbeava todas as pessoas da cidade, e somente elas, que não se barbeavam a si mesmas. Quem barbeava o barbeiro?

por C , que é a dos conjuntos que não são membros de si próprios. Mas esta última frase equivale a dizer que C não é um membro de si próprio. Isto é uma contradição. Supondo, reciprocamente, que C não é um membro de si próprio, chegamos analogamente a uma contradição. A partir de então, paradoxos pipocaram na teoria de conjuntos o que deu origem à terceira crise dos fundamentos da matemática.⁴⁷

A existência de paradoxos na teoria de conjuntos abriu a ferida da *inconsistência* de todo o edifício matemático.⁴⁸ A *consistência* de uma teoria significa a impossibilidade de se provar, ao longo de toda a sua construção axiomática, dois teoremas contraditórios (ou seja, provar uma proposição P e sua negação, não- P). Russell e Poincaré indicaram que o cerne dos paradoxos estava nas definições *impredicativas* envolvidas na teoria de conjuntos. Dito de outro modo, um conjunto se define pelos seus elementos; se desejarmos destacar um elemento cuja definição depende do conjunto, então entramos em um círculo vicioso. Mas as concordâncias entre Russell e Poincaré param por aqui. Representantes de correntes filosóficas distintas (o primeiro era logicista e o segundo construtivista), Russell acreditava que era possível resolver a questão das definições impredicativas reduzindo toda a matemática à lógica; Poincaré observou que, fundamentando a matemática por processos construtivos, evitar-se-ia os círculos viciosos.

Foi, portanto, na linha de pensamento de Frege e Peano que o trabalho de Russell e Whitehead se formou. Na obra monumental *Principia Mathematica*, foi

⁴⁷ A primeira crise ocorreu com a “descoberta” grega da incomensurabilidade e a segunda foi a crise do cálculo diferencial e integral mencionada neste texto. Destas crises, porém, pode-se dizer que as duas primeiras realmente abalaram o *estilo de pensamento* da comunidade matemática, pois colocaram em xeque a concepção de número e toda construção teórica conseqüente desta concepção. Na primeira crise, a idéia grega de número como quantidade não era capaz de explicar a existência de incomensuráveis e, na segunda crise, não havia uma concepção formalizada de número real capaz de dar suporte para a definição de limite. A terceira crise, no entanto, não afetou os matemáticos, pois, ao contrário das duas anteriores, ela não surgiu como um impedimento para o desenvolvimento de teorias matemáticas, emergiu de uma discussão própria de filósofos da matemática.

⁴⁸ Os paradoxos lógicos ressuscitaram uma discussão acerca dos paradoxos semânticos gregos que, antes destes eventos, interessavam apenas aos filósofos, mas agora estavam sob ao olhar crítico dos lógicos matemáticos. Um paradoxo semântico que remonta os gregos é o seguinte: Protágoras ensinou Euathlos a argumentar. Combinaram o pagamento da metade da quantia no fim do curso e a outra metade quando Euathlos ganhasse a sua primeira causa. Como o pagamento da segunda metade demorou, Protágoras processou Euathlos. Argumentos de Protágoras: “se ele ganhar, terá que me pagar, já que ele ganhou a sua primeira causa; se ele perder, terá que me pagar, já que eu ganhei a causa contra ele”. Argumento de Euathlos: “se eu ganhar, nada terei que pagar, já que ganhei a causa; se eu perder, nada terei que pagar, já que não ganhei ainda nenhuma causa”. Qual dos dois está com a razão?

desenvolvido o novo método que, de fato, derivou a aritmética de axiomas e conceitos lógicos. O objetivo geral de Russell e Whitehead, no entanto, avançava para fora das fronteiras da aritmética. Eles queriam desenvolver um programa para provar que toda a matemática pode ser construída a partir de alguns axiomas lógicos. Seu objetivo específico era eliminar as definições impredicativas que dão origem aos paradoxos.

O fio condutor do *Principia Mathematica* é a teoria ramificada dos tipos. O pressuposto é a idéia de que toda classe (ou conjunto) corresponde um tipo, e uma classe pode conter apenas elementos de menor tipo. Assim, as classes devem possuir tipo maior que o tipo de cada um de seus membros, evitando o círculo vicioso das definições impredicativas e, portanto, os paradoxos como o de Russell. Os números naturais, por exemplo, são construídos como segue: 0 representa o que tem de comum as classes sem elementos, 1 o que tem de comum nas classes com um elemento, 2 nas duplas e assim por diante. Russell definiu, portanto, o número de uma classe como a classe de todas as classes similares a ela, sendo a similaridade uma relação biunívoca entre as duas classes. Em seguida, definiu o número como qualquer coisa que seja o número de uma classe. Esta definição parece tautológica, mas não é, pois a definição de número de classe não usa a noção de número em geral. A teoria dos tipos não produz os indesejáveis paradoxos conhecidos. No entanto, um grande problema seria gerado por uma teoria que excluísse as definições impredicativas da matemática.⁴⁹ Conceitos fundamentais seriam banidos da matemática, como, por exemplo, o de supremo de um conjunto de números reais⁵⁰ – básico para a construção de todo o campo da análise. Era um preço muito alto para a *consistência* da teoria dos conjuntos.

Outra proposta seria a de Poincaré e os demais intucionistas. Eles justificaram que o paradoxo de Russell ocorreu devido ao uso do princípio do terceiro excluído, que deveria ser banido da matemática. A explicação para esta exigência é que, segundo os intucionistas, a matemática é uma ciência desenvolvida segundo o nosso sentido temporal, portanto deve-se utilizar somente os métodos construtivos finitos. Com efeito,

⁴⁹ Havia também uma questão lógica apontada por Wittgenstein: “O erro de Russell mostra-se no fato de ter precisado falar da significação dos sinais ao estabelecer as regras notacionais. (...) Nenhuma proposição pode enunciar algo de si mesma, porque o sinal proposicional não pode estar contido em si mesmo (isso é toda a Teoria dos Tipos)”. (WITTGENSTEIN, 1995, 3.331, 3.332).

⁵⁰ O supremo de um conjunto de números reais limitado superiormente é definido como a menor das cotas superiores deste conjunto.

o terceiro excluído permite demonstrar asserções embaraçosas como a seguinte: “Existem sete 7’s consecutivos na representação decimal do número π .” Vejamos a demonstração do fato: por ter infinitas casas decimais, e como ainda ninguém conseguiu verificar se na representação decimal de π o número 7 aparece sete vezes seguida, não se pode dizer que isto não ocorre. Logo, não faz sentido também negar o teorema, pelo princípio do terceiro excluído. O cerne desta questão está, segundo os intucionistas, no envolvimento do infinito. Ou seja, muito provavelmente, provar o teorema acima significa testar todas as (infinitas) possibilidades. Como o princípio do terceiro excluído é a base para do raciocínio *reductio ad absurdum*, todas as provas deste tipo eram também repudiadas pelos intucionistas. Tais idéias não deixam de ser particularmente interessantes, pois dão um sentido histórico para a construção do pensamento matemático, mas na prática, exigiriam a reconstrução de quase toda a rede de conhecimento matemático, empreendimento que não angariou simpatias e acabou por ser abandonado.

A esta altura, parecia não haver um remédio para curar o mal da *inconsistência* sem que os efeitos colaterais fossem tão nocivos, como eram os que as escolas logicista e intucionista apresentaram: a mutilação de uma grande parte da rede matemática arduamente tecida desde a Antiguidade grega até o século XX.

1.4. Consistência e formalização

A questão da *inconsistência* tem relevância em nosso trabalho porque é o núcleo do Teorema de Gödel. Conforme já mencionamos anteriormente, Gödel mostrará, sob certas hipóteses, que nenhuma teoria matemática pode ser construída com a pretensão de evitar simultaneamente a *inconsistência* e a *incompletude*.⁵¹ Esta segunda anomalia – a *incompletude* – era, até então, algo impensável. Até a década de 1930, todos os esforços da comunidade matemática estavam concentrados em resolver o primeiro mal, a *inconsistência*. Como vimos nos parágrafos anteriores, quase todos os sistemas

⁵¹ Estes conceitos já foram mencionados em diversas vezes neste trabalho, mas vale a pena lembrar para distinguí-los. A *inconsistência* significa a existência dentro de um sistema axiomático de proposições que se contradizem mutuamente e a *incompletude* significa a existência de afirmações (sobre objetos de um sistema axiomático) que não são nem teoremas e nem negações de teoremas, isto é, são *indecidíveis*.

axiomáticos da matemática foram fundamentados na teoria de conjuntos. Como esta produz paradoxos, então todo o edifício matemático corria o risco da *inconsistência*.

Uma possível solução para o problema foi sugerida por Zermelo, em 1908: Se a *inconsistência* do edifício matemático é gerada pela base – a teoria de conjuntos – por que não construir uma teoria axiomática para a teoria de conjuntos e encontrar, assim, uma solução para os paradoxos produzidos por ela? A questão é pertinente e a empreitada inicialmente executada por Zermelo teve a colaboração de Fraenkel (1922) e von Neumann (1924).⁵² A axiomática de conjuntos seria uma boa saída para desvendar o paradoxo de Russell e ainda resolver a *hipótese do continuum* (mencionada na seção anterior).

Na teoria axiomática dos conjuntos, as noções primitivas como “conjunto” e “ser subconjunto de” obedeciam a axiomas que lhes tirava o caráter aleatório que Cantor deixou escapar. Em suas reflexões sobre os paradoxos, Zermelo percebeu que na sua construção axiomática não havia lugar comum para duas asserções: a consideração livre de conjuntos – como o conjunto universal – e a caracterização de um conjunto por uma propriedade de seus elementos. Por considerar muito natural a segunda consideração, Zermelo descartou a primeira, e, por conseguinte, o conjunto de todos os conjuntos, ou o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos.

Para Zermelo, os paradoxos surgem quando admitimos agregados excessivamente grandes. No entanto, afirmou que era possível definir conjuntos infinitos, desde que construídos a partir de algum conjunto preexistente. Por exemplo, a partir do conjunto dos números naturais, construímos os inteiros, usando relações de equivalência de pares ordenados de naturais; dos inteiros construímos os racionais, pela mesma técnica algébrica; dos racionais construímos os reais, como mostrou Dedekind; e finalmente os complexos, como pares ordenados de reais. Conjuntos cada vez maiores, em termos de cardinalidade, podem ser formados a partir de qualquer conjunto. Nesta linha, Zermelo formulou o axioma da especificação:⁵³ “dados um conjunto A e uma propriedade P, existe um conjunto M cujos elementos são os elementos de A que satisfazem a propriedade P”.

⁵² E, mais recentemente, Paul Bernays (1963).

⁵³ Em símbolos, $M=\{x\in A/P(x)\}$.

Os axiomas de Zermelo⁵⁴ evitaram os paradoxos sobre conjuntos, mas em nenhum momento sua teoria discute tais antinomias e nem dá garantias de que não haverá lugar para outras. Mas um deles, denominado *axioma da escolha*, acendeu os mais intensos debates. Seu enunciado é: “se Φ for uma coleção de conjuntos e nenhum dos conjuntos de Φ for vazio, então existe um conjunto Z que contem exatamente um elemento de cada conjunto de Φ ”. A questão que incomodou uma parcela de matemáticos diz respeito à abrangência de Φ , cuja magnitude pode não garantir a possibilidade de escolha de elementos como sugerido no axioma.⁵⁵

O incômodo provocado pelo axioma da escolha foi similar ao do postulado das paralelas da geometria euclidiana⁵⁶, mas o ambiente histórico que envolveu o episódio das geometrias não euclidianas foi mais incisivo, pois a natureza das dúvidas suscitadas era uma novidade: os sistemas axiomáticos correspondentes às duas teorias geradas pelos postulados alternativos ao quinto seriam *consistentes*?

⁵⁴ Além do axioma da especificação, a teoria comporta outros nove axiomas:

- (ii) axioma da extensionalidade: $\forall x \forall y (x=y) \rightarrow A(x,x) \equiv A(x,y)$;
- (iii) axioma de separação: $\forall w \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (\pi(x) \wedge x \in w))$;
- (iv) axioma dos pares: $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$;
- (v) axioma da união: $\forall x \exists y \forall z (\exists w (w \in x \wedge z \in w) \rightarrow z \in y)$;
- (vi) axioma das partes: $\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$;
- (vii) axioma do Infinito: $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$;
- (viii) axioma da fundação: $\forall x ((y)(y \in x) \rightarrow (y)(y \in x \wedge \neg (z)(z \in y \wedge z \in x)))$;
- (ix) axioma da escolha: $\forall x (y \rightarrow y(x))$.

Em 1922, Thoralf Skolem e Abraham Fraenkel, independentemente, propuseram um novo axioma esquema, denominado Axioma esquema da substituição: $\forall w (\forall x \in w \exists y \varphi(x,y) \rightarrow \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x \in w \varphi(x,y)))$.

⁵⁵ Russell (1966, p. 123) nos mostra com um exemplo lúdico a dificuldade que o axioma da escolha pode nos proporcionar. Conta a história de um milionário que comprava um par de meias sempre que comprava um par de botas, e nunca em qualquer outra ocasião, até obter um numero infinito mas enumerável de pares de sapatos, assim como de meias. Parece obvio que existe uma bijeção entre os sapatos e os números naturais, e uma bijeção entre as meias e os números naturais. A bijeção dos sapatos não é difícil de ver: cada pé esquerdo corresponde a um número ímpar e cada pé direito corresponde a um número par. No entanto, o mesmo não pode ser feito com as meias, já que os pés de meias são indistinguíveis. Ou seja, para que o mesmo procedimento funcione nesse caso é necessário que as meias de todos os pares sejam diferentes e esta diferença deve seguir algum critério, por exemplo, um pé de uma cor e outro de outra cor. O fato de que não existe um modo sistemático de escolher uma meia de um par significa que precisamos de uma função de escolha, mesmo que não possamos apresentá-la explicitamente.

⁵⁶ Ainda assim, predominou entre os matemáticos a aceitação do axioma da escolha. De fato, durante as décadas que seguiram, ele foi fundamental para a demonstração de teoremas importantes, tais como: *Princípio de tricotomia* (em todo par de números cardinais, um é menor que o outro, ou eles são iguais); *Lema de Kuratowski-Zorn* (qualquer conjunto não vazio no qual todo subconjunto ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal); *Teorema de Tychonov* (o produto de qualquer família de espaços topológicos compactos é compacto); e *Teorema de Hamel-Banach* (todo espaço vetorial possui uma base).

Provar que uma teoria matemática é consistente não é uma empreitada fácil. Para tanto, deve-se garantir que o conjunto de postulados de sua teia axiomático nunca poderá gerar dois teoremas contraditórios entre si. Na outra mão, para afirmar que uma teoria é inconsistente, deve-se exibir tais teoremas.⁵⁷ Nosso olhar para a questão nos mostra que, *a priori*, a segunda tarefa parece ser muito complicada, e a primeira, impossível. Com efeito, podemos analisar todos os teoremas já demonstrados pela teoria em questão, mas como garantir que não surja, no futuro, nenhum par de teoremas contraditórios?

As primeiras provas conhecidas sobre *consistência* foram apresentadas ainda no século XIX e vieram exatamente com o advento das geometrias não euclidianas. A compreensão visual das geometrias não euclidianas dependia de modelos interpretativos. Riemann, Cayley, Klein e Beltrami se encarregaram da empreitada e, a partir dos modelos criados por eles, foi possível provar a *consistência* das geometrias não euclidianas. Vejamos o caso da geometria riemanniana, cujo correspondente do quinto postulado reza que “por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma paralela”. Riemann determinou que a esfera seria o “plano” desta geometria, as “retas” seriam circunferências máximas (com raio igual ao da esfera) e cada “ponto” corresponderia a um par de pontos antípodas desta esfera. Não é difícil ver que os quatro postulados de Euclides são válidos para este modelo, bem como a negação do quinto descrito acima.⁵⁸ Logo, a estrutura definida serve como modelo para a geometria riemanniana. Como o modelo é construído com entes da geometria euclidiana tridimensional, então a *consistência* da geometria riemanniana segue imediatamente da

⁵⁷ Esta tarefa nunca foi executada pelos críticos das geometrias não-euclidianas.

⁵⁸ Com efeito, o primeiro postulado – “traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto” – equivale a “dois pares de antípodas determinam uma circunferência máxima”; o segundo – “prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta” – equivale a “prolongar um arco de circunferência máxima ao longo da circunferência máxima que o contém continuamente”; o terceiro – “descrever uma circunferência com centro e raio dados” – não precisa de interpretações equivalentes, pois qualquer “circunferência riemanniana” é uma circunferência euclidiana sobre uma esfera; o quarto – “que todos os ângulos retos são iguais” – também pode ser interpretado da mesma forma, bastando definir corretamente o ângulo reto sobre a esfera, o que pode ser feito de maneira similar a de Euclides: “quando uma reta levantada sobre outra forma ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos iguais tem o nome de ângulo reto, e a que se eleva sobre a outra se chama perpendicular a esta outra” (Definição 10, Livro I). O equivalente do quinto também é válido porque duas circunferências máximas sempre se interceptam em dois antípodas, ou seja, em um ponto riemanniano.

consistência da geometria euclidiana.⁵⁹ Todavia, a própria *consistência* da geometria euclidiana foi contestada durante a crise dos fundamentos. Neste caso, objetar-se-ia que a prova de *consistência* dada acima não é absoluta, mas relativa, pois ela pressupõe como hipótese a *consistência* da geometria euclidiana. Mas esta contenda só ocorreria no século XX e o seu principal crítico foi Hilbert.

Na tentativa de mostrar a *consistência* da geometria euclidiana, Hilbert mostrou que é possível reescrever todos os postulados da geometria euclidiana em termos dos objetos da álgebra elementar, trocando “ponto” por “par ordenado”, “reta” por “equação linear de duas variáveis”, etc. Assim, por exemplo, a expressão “por dois pontos passa uma e somente uma reta” da geometria grega (sintética) é traduzida como “dois pares ordenados são soluções de uma e somente uma equação linear de duas variáveis” da geometria cartesiana (analítica). Entretanto, Hilbert obteve, desta forma, mais uma prova relativa, pois a *consistência* da geometria euclidiana dependeria agora da *consistência* da álgebra elementar. Uma prova relativa não responde diretamente uma questão, mas a transfere de sistema axiomático para outro. Neste caso, ainda fica a tese: como dar uma prova absoluta de que um sistema axiomático na matemática é consistente?⁶⁰

⁵⁹ A outra vertente de geometria euclidiana tem a sua demonstração de *consistência* similar. Os dois modelos mais conhecidos para esta geometria são o de Klein – que considera como “plano”, um círculo, as “retas” são cordas e os “pontos” são os pontos euclidianos habituais – e o de Beltrami – que considera como “plano” a pseudo-esfera e como “pontos” os pontos euclidianos habituais sobre esta superfície; as “retas” não são de “mesma natureza” como nos demais modelos citados e sua explanação foge dos nossos propósitos. (GRENBERG, 1994).

⁶⁰ As provas relativas de *consistência* também povoaram a teoria axiomática de conjuntos durante muitas décadas, e elas contribuíram para diminuir o abismo filosófico entre construtivistas e logicistas provocado pelo axioma da escolha. Os primeiros admitiam como teoria axiomática de conjuntos aquela que não contém o axioma da escolha, indicada por ZF e denominada teoria dos conjuntos restrita; enquanto os segundos admitiam o axioma da escolha e, por isso, indicamos a teoria axiomática correspondente por ZFC e denominamos teoria dos conjuntos *standartizada*. Após a divulgação do seu teorema, Gödel focalizou suas pesquisas na teoria de conjuntos. Nesta área desenvolveu o que chamamos de *método dos modelos internos* (conjuntos *construtíveis*) e, em 1938, provou que se ZF for consistente, então ZFC também será. Isto acalmou os ânimos dos construtivistas, afinal, se algum par de teoremas contraditórios germinarem de ZFC, então o culpado provavelmente não será o axioma da escolha, pois esta *inconsistência* certamente já existia em ZF. E Gödel foi ainda mais longe: usando o mesmo método, debruçou-se sobre a hipótese do continuum e provou que se ZF for consistente, então ZF mais a hipótese do continuum também será (GÖDEL, 1977b). Em 1964, um brilhante método foi inventado por Paul Cohen, o que lhe valeu uma medalha *Fields* em 1966. O método de Cohen permitiu mostrar a independência relativa da *hipótese do continuum* e do axioma da escolha (COHEN, 1977). Isto é, a *hipótese do continuum* e o axioma da escolha estão para a teoria de conjuntos assim como o postulado das paralelas está para a geometria euclidiana.

Esta questão era o tema central das investigações de Hilbert no campo da filosofia da matemática. Sua linha representava a vertente dos pensadores que viam a matemática como um campo do conhecimento que trata de sistemas simbólicos formais, o que deu ao programa de Hilbert a denominação *formalista*. O programa formalista de Hilbert é uma continuação muito clara das concepções que os matemáticos vinham tecendo no século XIX de destituir da matemática qualquer subjetividade. Neste sentido, a matemática passaria a ser um conjunto de símbolos munidos de regras de operacionalização necessárias para produzir fórmulas, que na linguagem corrente se traduzem como teoremas. O projeto de Hilbert parece se assemelhar com o de Russell, no entanto, Hilbert não utilizou um formalismo reducionista como o de Russell. Ele acreditava que a lógica era uma importante ferramenta para a matemática e não a base fundamental da matemática. Para Russell a matemática se reduz à lógica e para Hilbert, existe uma grande matemática pronta e consistente, para a qual, a lógica é o meio de acessá-la.

Hilbert percebeu a certa altura que a dificuldade para encontrar uma prova absoluta de *consistência* residia no fato de que os postulados dos mais importantes sistemas axiomáticos na matemática versam sobre uma quantidade infinita de elementos e o trato com conjuntos infinitos não dá garantias de *consistência* interna.⁶¹ A única forma de argumentar em sistemas deste tipo seria mencionando os elementos envolvidos em sua forma geral, processo estudado dentro do programa formalista. A tradução de teoremas matemáticos em fórmulas dentro de um sistema formal era para Hilbert a chave para a demonstração absoluta da *consistência* e o sucesso de seu empreendimento seria alcançado se evitasse técnicas que envolvessem o infinito, ou

⁶¹ Nagel e Newman (1973, pp. 23-24) dão um exemplo muito engenhoso de uma prova absoluta de *consistência*. Definem os seguintes postulados acerca de duas classes *K* e *L* arbitrárias:

- (i) quaisquer dois membros de *K* estão contidos em apenas um membro de *L*;
- (ii) nenhum membro de *K* está contido em mais do que dois membros de *L*;
- (iii) os membros de *K* não estão todos contidos em um único membro de *L*;
- (iv) quaisquer dois membros de *L* contem apenas um único membro de *K*; e
- (v) nenhum membro de *L* contém mais do que dois membros de *K*.

A *consistência* deste sistema pode ser provada através da interpretação do mesmo em um modelo da geometria euclidiana – o triângulo. Neste modelo, *L* seria a classe dos lados e *K* dos pontos. Não é difícil ver que os postulados se aplicam a este modelo, o que prova que ele serve de fato para interpretar o sistema. Como as expressões equivalentes do sistema no triângulo são imediatamente verdadeiras, pois seguem da definição de triângulo, então o sistema é consistente. Nesta prova, fica claro como a finitude do número de elementos foi crucial para a demonstração da *consistência*.

seja, propriedades estruturais, fórmulas e operações deveriam todos ser utilizados em quantidades finitas, processo denominado como finitário.

A partir das provas relativas de *consistência*, Hilbert conjecturou que a matemática não era capaz de provar proposições sobre ela mesma, e deduziu que não havia como provar matematicamente que um sistema matemático é *consistente*. O método a ser desenvolvido para provar esta *consistência*, portanto, deveria consistir em uma meta-teoria para a matemática.⁶² As contribuições de Peano, Frege e Russell já mencionadas foram importantes para o desenvolvimento desta meta-teoria, mas o formalismo de Hilbert foi fundamental e, seguindo uma filosofia da matemática realista, ele desenvolveu a teoria da demonstração, ou *metamatemática*.⁶³

A correspondência entre lógica e conjuntos foi vital para aproximar a axiomática de sua formalização, mas a transformação em processamento estritamente mecânico se daria apenas com o sistema formal puro. Nele, a linguagem simbólica é rigorosamente definida e os procedimentos de dedução são explicitados. Para compreendermos o poder de um sistema formal puro, vejamos um exemplo: na teoria formalizada de grupos, definimos o grupo como um conjunto munido de uma operação binária denominada produto para a qual se verificam os axiomas:

- (i) o produto de dois elementos do conjunto é um elemento do conjunto;
- (ii) o produto goza da propriedade associativa;
- (iii) o conjunto possui um elemento *unidade* que preserva todo elemento pela operação produto;
- (iv) todo elemento do conjunto corresponde a outro denominado *inverso*, sendo a unidade o resultado do produto destes dois elementos.

⁶² O desenvolvimento desta meta-teoria não germinou com o programa formalista, ocorreu gradativamente na medida em que o sonho idealista da *Characteristica Universalis* de Leibniz parecia ser a primeira possibilidade de se efetivar com o inglês George Boole (1815-1864) que tratou a lógica, pela primeira vez, como um cálculo de símbolos algébricos, em *Mathematical Analysis of Logic* (Análise Matemática da Lógica), publicada em 1847. Este pensamento alimentado pelo essencialismo grego e sua versão iluminista transformaram gradualmente a matemática moderna em linguagem simbólica, eliminando conceitos carregados de *estilos de pensamento*.

⁶³ O programa hilbertiano de fundamentação da Matemática encontra seu paralelo no programa dos empiristas lógicos (Círculo de Viena). Carnap e seus pares buscavam a justificação das ciências naturais através da construção de uma lógica indutiva. Nos dois casos, tratava-se de justificar a linguagem objeto de estudo. Para Hilbert, era a matemática e para Carnap eram as ciências naturais. Em ambos os casos, isto seria possível se utilizarmos uma metalinguagem absolutamente confiável.

A teoria formalizada, no entanto, seria da seguinte maneira:⁶⁴

Noções primitivas:

1. As variáveis x, y, z e estas mesmas letras subscritas de índices.
2. Uma constante: U .
3. Uma função de dois argumentos: $\times$.
4. Um predicado de dois argumentos: $=$.
5. Dois operadores proposicionais de um argumento: $(\exists x)$ e $(\forall x)$.
6. Um operador proposicional de um argumento: $\sim$
7. Dois operadores proposicionais de dois argumentos: $\vee$ e $\rightarrow$.

Variáveis sintáticas:

8. Toda variável é um termo.
9. A constante U é um termo.
10. Se α_1 e α_2 são termos, então $\alpha_1 \times \alpha_2$ também é um termo.
11. Se α_1 e α_2 são termos, então $\alpha_1 = \alpha_2$ é uma proposição.
12. Se A for uma proposição contendo a variável x , então são proposições $(\exists x)A$ e $(\forall x)A$.
13. Se A for uma proposição, então $\sim A$ é também uma proposição.
14. Se A e B são proposições, então são proposições $A \vee B$ e $A \rightarrow B$.

Axiomas:

15. $(\forall x)(\forall y)(\exists z) [x \times y = z]$.
16. $(\forall x) [x \times U = x]$.
17. $(\forall x)(\exists y) [x \times y = U]$.
18. $(\forall x)(\forall y)(\forall z) [(x \times y) \times z = x \times (y \times z)]$.
19. $A \vee A \rightarrow A$.
20. $A \rightarrow A \vee B$
21. $A \vee B \rightarrow B \vee A$.
22. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\Gamma \vee A \rightarrow \Gamma \vee B)$.
23. $(\forall x) A \rightarrow [x / \alpha^*] A$.
24. $A \rightarrow (\exists x) [\alpha^* / x] A$.

⁶⁴ LADRIÈRE, 1969, pp. 39-52.

Regras de derivação:

25. A

$\frac{A \rightarrow B}{B}$

B

26. $\frac{A \cdot B}{A \rightarrow (\forall x)B}$

$A \rightarrow (\forall x)B$

27. $\frac{A \rightarrow B}{(\exists x)A \rightarrow B}$

$(\exists x)A \rightarrow B$

A teoria consiste, portanto, em axiomas (15 a 18) que caracterizam um grupo, axiomas (19 a 22) e uma regra (25) que correspondem a uma lógica de proposições e axiomas (23 e 24) e regras (26 e 27) que determinam como podemos utilizar os quantificadores.

Para Hilbert, formalização de uma teoria matemática transforma esta teoria em um processo mecânico similar a um jogo de símbolos sem nenhum sentido. Deste modo, a garantia da *consistência* seria alcançada pela metamatemática, cuja força daria a ele a segurança de que a matemática é a ciência da certeza. A crença arraigada na pré-existência da matemática (platonismo) era o motor que impulsionava esta convicção. No entanto, as publicações do Teorema de Gödel em 1931 mostraram que é impossível alcançar os objetivos do programa de Hilbert. Com efeito, um sistema formal como proposto por Hilbert é, segundo o Teorema de Gödel, incapaz de provar a sua própria *consistência*. E ainda, caso o sistema em causa seja consistente, ele necessariamente produzirá *indecidíveis*. Isto é, conforme já mencionamos anteriormente, o Teorema de Gödel mostra que *consistência* e *completude* são dois conceitos que não cabem dentro de um mesmo sistema formal, nos moldes pretendidos por Hilbert. Este foi um golpe do qual os fundacionistas nunca se recuperaram, como veremos com mais detalhes no próximo capítulo.

1.5. Considerações finais

Vimos neste capítulo um quadro geral das mudanças conceituais da matemática entre as décadas de 1850 e 1930. Sinteticamente, pode-se caracterizar estas

mudanças como uma mudança de uma base geometria-intuição-variável para conjuntos-axiomática-aritmética.

A primeira base foi constituída pela extensa aplicação da idéia de variável na matemática que contribuiu, dentre os vários progressos, para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Outro ingrediente foi a força metodológica da geometria axiomática grega, conhecida como exemplo de pureza do raciocínio lógico humano. Todavia, a excessiva carga de intuição destinada ao pensamento matemático até o século XVIII foi um fator que trouxe a estes campos lacunas epistemológicas responsáveis por uma reavaliação do *estilo de pensamento* matemático. Como resultado, foram desenvolvidas novas geometrias e a visão geométrica do cálculo foi trocada pela visão aritmética da análise. Neste caminho, conjuntos-axiomática-aritmética passaria a ser a nova base da matemática.

A teoria de conjuntos teria um papel fundamental para os processos de *axiomatização* e *arimetização* da matemática. O seu poder motivou matemáticos e filósofos se preocuparem cada vez mais com o rigor lógico desta ciência, até que os paradoxos surgiram no caminho. Em um contexto onde as teorias matemáticas devem ser todas conduzidas pela teoria de conjuntos, a existência de contradições nesta teoria seria a ruína de todo um *estilo de pensamento*.

A matemática não produziria apenas um novo problema, mas uma nova família de problemas: os problemas de *consistência* de teorias matemáticas. Neste sentido, a *arimetização* e a *axiomatização* sugeriram uma transferência dos problemas de *consistência* de teorias matemáticas para uma única tese: a *consistência* da aritmética. Dela resultaria a *consistência* dos demais campos. A importância deste problema para a matemática do século XX o colocou na famosa lista dos 23 problemas do século XX formulada por Hilbert. Como demonstrar a *consistência* da aritmética?

Gödel mostrou que nenhuma teoria contendo a aritmética pode provar sua própria *consistência*. Mostrou ainda que caso esta teoria seja *consistente*, ela necessariamente produzirá sentenças *indecidíveis*. Observe que Gödel não deu uma resposta negativa ao problema de Hilbert, mas certamente apagou a chama que acendia o projeto formalista. Deixemos, no entanto, para o próximo capítulo, análises deste tipo.

O que podemos sintetizar nos parágrafos anteriores é a ocorrência no período de 1850 a 1930 de um movimento de mudanças conceituais, técnicas, filosóficas e dos pressupostos teóricos e metafísicos em relação à matemática. Enfim, este período caracteriza-se como um período de *mutações do estilo de pensamento* da comunidade matemática, de uma intensidade comparável a alguns poucos momentos na história da matemática. Podemos mencionar as mudanças gregas na Antiguidade ou as ocorridas no Renascimento.

Esta mudança não foi repentina, nem linear, mas gradual e descontínua. Por exemplo, vimos o advento das geometrias não-euclidianas como um gérmen destas transformações conceituais, mas devemos nos lembrar que a discussão sobre as geometrias não-euclidianas não começou no século XIX. O mesmo poderia ser dito com a *arimetização* da análise ou outros fatos do período.

Estas observações evidenciam o caráter transitório dos *estilos de pensamento*, pressuposto historiográfico defendido por Fleck:

Todo estilo de pensamento contém descendentes do desenvolvimento histórico de vários elementos de outros estilos. Provavelmente muito poucos conceitos completamente novos são formados sem relação qualquer a um estilo de pensamento anterior. Normalmente apenas muda seu colorido, como o conceito científico de força originou do conceito cotidiano de força, também o novo conceito de sífilis origina do místico. Desse modo, nasce uma conexão histórica entre os estilos de pensamento. (FLECK, 1979, p. 75).

Os conceitos e técnicas não são rígidos e suas transformações mostram que não há necessariamente acúmulo de conhecimento, mas uma *mutação do estilo de pensamento*. O termo é apropriado da biologia por Fleck e parece estar de acordo com o movimento histórico que observamos. As mutações gradativas preparam o ambiente social e epistemológico da comunidade para grandes descobertas, como sugere Fleck: “(...) essa mudança no *estilo de pensamento*, isto é, mudança na disposição para a percepção dirigida, oferece novas possibilidades para descobrir e criar novos fatos”. (FLECK, 1979. p. 144). Como exemplo, podemos citar o desenvolvimento da metamatemática decorrente às questões dos fundamentos como parte de um *estilo de pensamento* que propiciou uma linguagem e um conjunto de técnicas fundamentais para Gödel demonstrar o seu teorema.

Nosso trabalho consiste em mostrar que o Teorema de Gödel é responsável por uma *mutação do estilo de pensamento* fora do círculo lógico matemático. É possível um

teorema abstrato como este provocar um impacto tão grande em teorias que falam de objetos não matemáticos? Veremos que sim, mas antes, devemos nos ocupar no próximo capítulo sobre como foi o impacto dentro do círculo lógico matemático.

2

Os Teoremas de Gödel

“Deus existe porque a matemática é consistente, mas o diabo também, porque não podemos provar este fato.”
Hermann Weyl

2.1. Considerações iniciais

Neste capítulo, focalizaremos nossa atenção propriamente no Teorema de Gödel. Nas seções que seguem, construiremos o contexto particular de Gödel, suas concepções, enfim, uma continuidade do capítulo anterior necessária para a constituição do *estilo de pensamento* que moldou a epistemologia de Gödel e possibilitou a sua criação de maior impacto na história do pensamento contemporâneo. Em seguida, faremos uma leitura dos teoremas de Gödel, refletindo sobre os enunciados, sua demonstração, seus significados e sua importância na *mutação do estilo de pensamento* da comunidade lógico matemática.

Como as luzes estão voltadas para o Teorema de Gödel, acreditamos ser oportuno introduzir o capítulo com uma leitura mais apurada dos enunciados dos teoremas. Relembrando, o Teorema de Gödel que sempre mencionamos é, formalmente falando, uma conjunção de dois teoremas, sintetizados por Feferman (2006b) como:

Primeiro Teorema de Gödel. Seja S um sistema formal tal que: (i) a linguagem de S contém a linguagem da aritmética, (ii) S inclui a aritmética de Peano, (iii) S é *consistente*. Então existe uma sentença aritmética A verdadeira, mas não demonstrável em S .

Segundo Teorema de Gödel. Seja S um sistema formal tal que: (i) a linguagem de S contém a linguagem da aritmética, (ii) S inclui a aritmética de Peano, (iii) S é *consistente*. Então a *consistência* de S não pode se provada em S .

Podemos compreender o significado dos enunciados do Teorema de Gödel por meio do exemplo: em 1742, o prussiano Christian Goldbach, numa carta remetida ao suíço Leonhard Euler, afirmou que teria exaustivamente verificado a validade da proposição: “todo número par pode ser decomposto como soma de dois números primos” para uma série de casos específicos, mas ele não conseguira de forma alguma provar o resultado para o caso geral e, tampouco, conseguiu encontrar um número par que contrariasse o enunciado. Este problema é conhecido como *conjectura de*

Goldbach, e tanto ele, quanto a sua negação, nunca foram provados.⁶⁵ De acordo com o primeiro Teorema de Gödel, esta conjectura *pode ser indecidível*.

A esta altura, é importante frisar que há uma diferença seminal entre “ser *indemonstrável*” e “ser *indecidível*”. Como exemplo, consideremos o famoso problema da álgebra elementar sobre as soluções de equações polinomiais por meio de radicais. Até o século XIX, os matemáticos conheciam as soluções deste tipo para polinômios de graus inferiores a 5, mas Galois provou que o problema não tem solução para polinômios de grau superior a ou igual a 5. Isto não se encaixa no Teorema de Gödel. Com efeito, se nomearmos como T a proposição “existe solução de equações polinomiais de grau superior a ou igual a 5 por meio de radicais”, então Galois provou sua negativa, $\sim T$. Logo, T não é *indecidível*, é *indemonstrável*. Por outro lado, há dois problemas *indecidíveis* já vistos no capítulo anterior. O primeiro é o quinto postulado de Euclides. Como vimos no capítulo anterior, provou-se que o quinto postulado é independente dos demais. Nomeando este postulado como P , verificou-se, portanto, que tanto P quanto $\sim P$ são verdadeiros, desde que considerados em sistemas de axiomas distintos, é claro. O segundo problema é o axioma da escolha. Gödel provou a independência deste axioma em relação aos de Zermelo-Fraenkel, na Teoria de Conjuntos.

Vejamos agora outra ilustração dos efeitos do Teorema de Gödel. Os estudantes de matemática aprendem a construção axiomática da análise a partir dos axiomas de Peano. Logo o sistema formal correspondente S da axiomática dos reais inclui a aritmética de Peano. O primeiro Teorema de Gödel nos diz que existem regras que se verificam para todos os números reais (isto é, são teoremas potenciais), mas não são demonstráveis (então não são teoremas!). Isto porque todos nós esperamos que S seja *consistente*, ou seja, que a análise matemática não produza teoremas contraditórios. Como provar esta consistência? (Este é o segundo dos 23 problemas da famosa lista de Hilbert). De acordo com o segundo Teorema de Gödel, não há como fazê-lo, o que

⁶⁵ Ainda hoje, o problema instiga os matemáticos. As melhores tentativas para alcançar a conjectura de Goldbach de que temos notícia deveram-se primeiro a um matemático russo chamado Schnirelmann que, em 1931, provou que “todo número natural pode ser representado como a soma de não mais do que 300.000 números primos”. Em seguida, seu compatriota Vinogradoff reduziu o número de 300.000 para 4 (COURANT, 2000, p. 36).

significa que é possível um pesquisador desta área se dedicar anos a um problema aberto *indecidível*.

A questão que passaremos a refletir antes da demonstração do Teorema de Gödel e posterior discussão do seu impacto no círculo lógico-matemático é: quais foram as questões particulares que contribuíram para a estruturação do pensamento de Gödel para produzir um resultado tão brilhante?

2.2. Concepções de Gödel

Como vimos no final do capítulo anterior, as modificações ocorridas na comunidade matemática propiciaram um conjunto de técnicas e pressupostos teóricos para Gödel demonstrar o Teorema de Gödel, mas suas próprias convicções e crenças também contribuíram para o fato.

Kurt Gödel nasceu em 28 de abril de 1906, em Brünn na Áustria-Hungria, posteriormente anexada à República Tcheca com o nome Brno. Kurt e seu irmão Rudolf eram filhos de Rudolf Gödel, gerente de fábrica têxtil, e Marianne Gödel. Kurt concluiu em 1923 o curso fundamental na escola alemã de Brünn com louvor e, neste mesmo ano, acompanhou o seu irmão em Viena. Rudolf iria cursar a Escola de Medicina da Universidade de Viena e Kurt tinha a intenção de estudar física teórica, no entanto, mudou de idéia e freqüentou cursos de matemática e filosofia, conseguindo logo o mestrado em matemática.

A cidade de Viena, no período entre guerras, abrigava uma quantidade impressionante de acadêmicos. Músicos, poetas, cientistas, filósofos e arquitetos famosos colocavam a cidade cosmopolita no lugar de capital cultural e intelectual do mundo. As mudanças políticas decorrentes da Primeira Guerra não diminuíram a importância intelectual de Viena, mas estimularam uma consciência crítica de seus cidadãos, com repercussões nos círculos intelectuais. Neste contexto nasceu, por exemplo, a teoria freudiana do inconsciente e as novas expressões artísticas, seja no campo da música, da arquitetura ou das artes plásticas.

Esta atmosfera era disseminada em círculos reunidos nos diversos cafés da cidade, alguns vinculados a universidades, outros não. Os círculos se influenciavam mutuamente e as diferentes disciplinas eram engajadas em uma mesma conversação.

Algumas discussões giravam em torno do socialismo, outros da psicanálise, muitos sobre filosofia. Além de influências de Kant, havia também as de Kierkegaard e Tolstoi. Num destes grupos, o de história da filosofia, havia um filósofo chamado Heirich Gomperz que teve um papel importante na concepção realista de Gödel. A participação de algum círculo de intelectuais era quase inevitável na Viena da década de 1920 e não foi diferente com Gödel. No entanto, apesar das influências de Gomperz, Gödel não participou do grupo de história da filosofia, e sim do mais proeminente dos círculos de intelectuais da ocasião, o Círculo de Viena. Fundado pelo filósofo Moritz Schlick, o Círculo de Viena abrigava um grupo de filósofos que defendiam a tese do empirismo lógico, segundo a qual, a ciência possui valor de verdade devido à sua vinculação empírica, isto é, o conhecimento científico é verdadeiro na medida em que se relaciona, em alguma dimensão, à experiência. Contudo, compreendiam que não se pode abandonar a lógica e a matemática, ambas auxiliam de maneira determinante a busca e a determinação das condições em que o conhecimento se processa.⁶⁶

Gödel participou de seções semanais do Círculo de Viena entre os anos de 1926 e 1928, época em que Gödel se interessou em lógica matemática. Esta associação de Gödel com o Círculo de Viena tem levantado conclusões equivocadas como uma tendência positivista de Gödel herdada do grupo ou que o Teorema de Gödel seja uma consequência da filosofia do grupo. Todavia, havia mais pontos de discordância do que concordância entre a concepção filosófica de Gödel e a do Círculo de Viena.⁶⁷ Além do mais, a concepção realista de Gödel já estava sedimentada antes de entrar para o grupo. A incursão de Gödel à lógica matemática parece ter sido a maior influência dos membros do grupo. Gödel participou de um seminário com Schlick sobre a *Introduction to Mathematical Philosophy*, de Russell, e iniciou uma série de publicações sobre lógica. Assistiu à conferência de David Hilbert, em Bolonha, sobre a *completude* e *consistência* de sistemas matemáticos.

Em 1928, David Hilbert e Wilhelm Ackermann publicam o livro *Grundzüge der theoretischen Logik* onde formulam, como problema em aberto, a *completude* do cálculo

⁶⁶ Os avanços da lógica entre os séculos XIX e XX foram fundamentais para o Círculo de Viena. Estes filósofos criticavam a filosofia especulativa do século XIX e encontraram na lógica e na matemática uma base rigorosa para compreender o processamento do conhecimento científico. Isto mostra que a tese do empirismo lógico é bem distinta do empirismo tradicional de Bacon.

⁶⁷ A este respeito, cf. (GOLDSTEIN, 2005).

de predicados: dada uma fórmula (fechada) da linguagem do cálculo de predicados, se ela é válida será que é, portanto, formalmente dedutível? A resposta é afirmativa. Quem provou isto foi Gödel na sua dissertação de doutoramento sob a orientação de Hahn, um dos membros do Círculo de Viena, principal incentivador da mudança de interesse de Gödel de teoria dos números para lógica matemática. A tese de doutorado de Gödel foi submetida à Universidade de Viena em Outubro de 1929 e defendida em Fevereiro de 1930.

Ainda em 1930, Gödel participou do congresso de Königsberg sobre Epistemologia das Ciências Exatas, com Carnap, Heyting, von Neumann e Waismann. Gödel enunciou o teorema da *incompletude* e, em 1931, publicou-o no artigo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme*.⁶⁸

Nos anos seguintes, Gödel pesquisou proficuamente na área de lógica matemática e, em 1944, ele escreveu o primeiro ensaio filosófico, *Russell's Mathematical Logic*,⁶⁹ onde ele expõe sua filosofia realista da matemática, deixando clara sua posição de que a existência dos objetos matemáticos não reside na dimensão espaço-temporal.

Parece-me que a suposição de tais objetos é tão legitimada como a suposição de corpos físicos e há muita razão para acreditar em sua existência. No mesmo caminho da necessidade em obter um sistema satisfatório da matemática os corpos físicos são necessários para uma teoria satisfatória de nossas percepções e em ambos os casos é impossível interpretar as proposições sobre estas entidades porque versam sobre os "dados", isto é, no último caso essencialmente ocorrem percepções. (GÖDEL, 1970, p. 137).

Para Gödel, há uma semelhança entre a intuição matemática e a percepção; as classes e os conceitos são realidades independentes de nossas criações e não simples produtos da linguagem. Logo os objetos matemáticos não são criados, e sim, descobertos. Esta concepção realista o acompanhou desde a década de 1920, passando pelo período em que participou das reuniões do Círculo de Viena, seguindo pelas décadas seguintes. Foi um importante elemento constitutivo do *estilo de pensamento* de Gödel, pois fomentou o seu interesse pelo projeto formalista de Hilbert.

⁶⁸ GÖDEL, 1975.

⁶⁹ Id., 1970.

Os integrantes do Círculo de Viena também viam o projeto formalista com interesse; para eles, era o caso matemático da sua proposta de filosofia da ciência.

Como estas concepções de Gödel o conduziram ao seu teorema? Em uma troca de correspondências com Hao Wang,⁷⁰ Gödel afirma que no verão de 1930 estava debruçado sobre o problema de provar a *consistência* absoluta da análise por métodos finitistas. Ou seja, Gödel de fato estava disposto a contribuir para o projeto hilbertiano. Desta troca de correspondências, extraímos o seguinte relato:

[Gödel] representou os números reais por fórmulas (...) da teoria dos números e descobriu que tinha que usar o conceito de verdade para fórmulas fechadas da teoria dos números para conseguir verificar os axiomas de compreensão para a análise. Rapidamente se deparou com paradoxos relacionados com a verdade e a demonstrabilidade (em particular com o paradoxo do mentiroso e o paradoxo de Richard). Apercebeu-se de que a noção de verdade em teoria dos números não pode ser definida em teoria dos números e, por conseguinte, que o seu plano para demonstrar a *consistência* relativa da análise não funcionava. (FEFERMAN, 1988, p.105).

Logo, se a noção de verdade fosse definível na aritmética então chegar-se-ia a uma contradição, como a proposição: “esta proposição é falsa”. Mas a noção de demonstrabilidade é definível na aritmética. Logo, verdade e demonstrabilidade não são noções equivalentes e este é o ponto crucial da *incompletude*. Gödel concluiu, portanto, que sistemas formais suficientemente fortes como o *Principia Mathematica* contém proposições *indecidíveis*.

A estratégia que Gödel usou na demonstração do teorema da *incompletude* foi a seguinte. Primeiro Gödel *aritmétizou* a metamatemática. Isto significa dizer que Gödel estabeleceu uma correspondência unívoca entre as fórmulas (isto é, teoremas) e seqüências de fórmulas (isto é, demonstrações de teoremas) do sistema formal e os números naturais. Em outras palavras, Gödel descreveu o sistema formal por meio da aritmética dos números naturais. Com esta metodologia, todos os teoremas produzidos pela aritmética são imediatamente “traduzidos” como fórmulas do sistema formal.⁷¹

⁷⁰ FEFERMAN, 1988, pp.104-107.

⁷¹ A engenhosidade de Gödel consiste, portanto, em adotar um modelo auto-referencial: usou a aritmética para descrever proposições de um sistema *S* que contém a aritmética (como a análise matemática, por exemplo). Isto significa que cada proposição de *S* equivale na aritmética a um elemento (número, operação, etc.). Neste caminho, os teoremas da aritmética – que são afirmações que especificam como os objetos da aritmética se relacionam – indicam relações entre as proposições de *S*.

Desta maneira, Gödel se baseou no paradoxo de Epimênides⁷² e construiu uma fórmula aritmética G que representa o enunciado “a fórmula G não é demonstrável”, que é um enunciado auto-referencial. Gödel definiu a relação entre números naturais que indica quando uma proposição é demonstrável e provou que G é demonstrável se, e somente se, sua negação, $\sim G$, for demonstrável.⁷³ Como isto implicaria na *inconsistência* da aritmética, deduz-se que se a aritmética for *consistente*, nem G e nem $\sim G$ são demonstráveis, isto é, G é *indecidível*. No entanto, embora seja *indecidível*, G é uma fórmula do sistema formal, pois consiste em uma propriedade aritmética válida para todos os números naturais. Logo, a aritmética é incompleta. Como corolário, Gödel construiu uma fórmula que corresponde ao enunciado “a aritmética é *consistente*” e provou que esta fórmula não é demonstrável, donde segue que o sistema formal *arimetizado* não é capaz de provar a *consistência* da aritmética.⁷⁴

Nas linhas que seguem, procuraremos detalhar os procedimentos de Gödel descritos. No entanto, a complexidade da demonstração, tal como Gödel apresentou, foge dos nossos propósitos e, por isso, traçaremos um fio condutor que segue por outra

⁷² Também conhecido como paradoxo do mentiroso, pois trata-se da asserção “eu sou um mentiroso”. É um dos paradoxos semânticos gregos descritos na seção 1.2.

⁷³ O cálculo é feito via a *arimetização* construída para o sistema formal, mas é possível compreender esta demonstração por via de argumentos que não utilizam linguagem técnica. Para tanto, deve-se compreender o paradoxo do mentiroso. Considere a frase: “eu sou um mentiroso”. Se frase for verdadeira, então quando afirmei “eu sou um mentiroso”, eu menti. Logo, a frase “eu sou um mentiroso” é falsa. Reciprocamente, se a frase “eu sou um mentiroso” for falsa, então eu não sou mentiroso e, portanto, a minha frase “eu sou um mentiroso” é necessariamente verdadeira. Em síntese, a frase “eu sou um mentiroso” é verdadeira se, e somente se, ela for falsa. Considere agora o enunciado G : “eu não sou demonstrável”. Se G for demonstrável, então, é possível prová-lo e, portanto, o seu enunciado “eu não sou demonstrável” é verdadeiro. Mas, se este enunciado for verdadeiro, então provamos que G não é demonstrável. Suponha, por outro lado, que não seja possível provar G . Isto significa que a sua negação é verdadeira, a saber, “eu sou demonstrável”. Isto implica, portanto, que podemos provar G . Resumindo, G é demonstrável se, e somente se, sua negação for demonstrável.

⁷⁴ A possibilidade de existir sentenças *indecidíveis* em um sistema formal não é nada trivial. Pensando nisto, Hofstadter (1979, p. 33) criou um pequeno sistema formal que contém uma fórmula não demonstrável. O sistema utiliza três letras do alfabeto M, I, U e as seqüências com estas letras pertencem a este sistema. A formação de uma seqüência do sistema deve obedecer cinco regras básicas: 1ª) MI é uma seqüência do sistema; 2ª) Se uma seqüência terminada com I pertence ao sistema, então podemos acrescentar U a esta, formando uma nova seqüência do sistema; 3ª) Se Mx pertence ao sistema, sendo x uma variável que pode representar uma letra ou uma seqüência, então Mxx também pertence ao sistema; 4ª) Se o sistema possui uma seqüência contendo III, então a seqüência formada pela troca de III por U também pertence ao sistema; 5ª) Se o sistema possui uma seqüência contendo UU, então a seqüência obtida pela omissão de UU da outra também pertence ao sistema. O que Hofstadter prova (p. 260-267, 439), usando a numeração de Gödel, é que a seqüência MU que, por definição, pertence ao sistema, não pode ser produzida por este sistema.

via: uma exposição não técnica⁷⁵ que se deve principalmente a Rosser (1977). Nesta linha podemos compreender as idéias centrais de Gödel sem o rigor próprio de um especialista. Contudo, por questões historiográficas, procuraremos indicar em notas de pé de página os caminhos equivalentes do texto de Gödel, a fim de possibilitar ao leitor a análise comparativa com o documento original, cuja versão em português encontra-se no anexo desse trabalho.

2.3. A Demonstração do Teorema de Gödel

No enunciado do seu teorema, Gödel se refere à *consistência* de um sistema formal com o pensamento focado no sistema de Russell e Whitehead e, por isso, os axiomas lógicos de seu artigo são herdados dos *Principia Mathematica*, mais os axiomas de Peano. Isto não significa que o mesmo não se aplica aos demais sistemas formais, como assevera Gödel, na introdução do seu artigo:

É sabido que o desenvolvimento da matemática, no sentido de uma exatidão, conduziu à formalização de vários domínios desta ciência de modo que as demonstrações possam ser efetuadas de acordo com algumas regras mecânicas. Os sistemas formais mais exaustivos até agora construídos são, por um lado, os *Principia Mathematica* (PM) e o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel para a teoria de conjuntos (reelaborado por J. v. Newmann). Ambos os sistemas são tão gerais que todos os métodos de demonstração atualmente usados em matemática podem formalizar-se neles, i.e., podem ser reduzidos a alguns axiomas e regras de inferência. É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência são também suficientes para decidir todas as questões matemáticas que podem ser formalmente expressas nesses sistemas. No que se vai seguir mostrar-se-á que não é assim, mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples da teoria dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas.⁷⁶ Essa situação não depende da natureza especial dos sistemas formais construídos, mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais entre os quais estão incluídos, em particular, todos aqueles que se derivam dos sistemas dados juntando um número finito de axiomas, admitindo que proposições falsas do gênero descrito na nota 54 não sejam demonstráveis com os novos axiomas. (GÖDEL, 1977a, pp. 247-248).

Já vimos anteriormente um exemplo de um sistema formal – o que define a estrutura de grupo – mas agora, devemos compreender a morfologia de um sistema

⁷⁵ É possível encontrar diversas exposições não técnicas em Ladrière (1969). A exposição não técnica mais conhecida é a de Nagel e Newman (2001), cuja linha de raciocínio possui muitas similaridades com a de Rosser.

⁷⁶ Mais exatamente, existem proposições indecidíveis nas quais, além das constantes lógicas – (não), $\vee$ (ou), (x) (para todo o x), $=$ (idêntico a), os únicos conceitos lógicos que ocorrem são $+$ (soma), $\cdot$ (multiplicação) (ambas de números naturais), e o prefixo (x) refere-se apenas a números naturais. [Nota de Gödel].

formal (SF), ao mesmo tempo em que descrevemos os conceitos fundamentais para a demonstração do Teorema de Gödel.

As fórmulas de um SF são sucessões finitas de símbolos, mediante regras de formação. Os símbolos podem ser constantes ou variáveis.

Os símbolos constantes são:

- *Conectivos sentenciais*: “ $\sim$ ” (negação); “ $\vee$ ” (ou); “ $\cdot$ ” (e); “ $\supset$ ” (implica em); e “ $=$ ” (é igual a).
- *Símbolos de pontuação*: os parênteses “(” e “)” e a vírgula “,”.
- O numeral “0” para o zero.
- O operador “s” (é sucessor de).

As variáveis são:

- do primeiro tipo (numéricas): “x”, “y”, “z”, etc.
- do segundo tipo (sentenciais): “p”, “q”, “r”, etc.
- do terceiro tipo (proposicionais): “P”, “Q”, “R”, etc.⁷⁷

As regras de formação são postuladas com uso dos quantificadores “ $\forall$ ” (para todo) e “ $\exists$ ” (existe um)⁷⁸ e dos conectivos sentenciais: sendo S, S_1 e S_2 fórmulas, serão fórmulas também: $\sim(S)$; $(S_1) \vee (S_2)$; $(S_1) \cdot (S_2)$; e $(S_1) \supset (S_2)$.

Uma fórmula com variáveis livres é denominada predicado e uma fórmula sem variáveis livres é denominada proposição.⁷⁹

A função que desempenha um papel fundamental na demonstração de Gödel associa predicados a proposições e é definida como segue: cada predicado S, com variável livre v, corresponde a uma proposição f(S), obtida quando a variável v é substituída, sempre que ocorre, por a, do mesmo tipo de v, porém não é variável livre.⁸⁰ Esta operação é denotada como

⁷⁷ Gödel utiliza outras notações. Generalizando, ele escreve “ x_i ”, “ y_i ”, “ z_i ”, etc. para as variáveis do tipo i. As variáveis do tipo 1 incluem o que ele chama de indivíduos, as do tipo 2, classes de indivíduos e as do tipo 3, as classes de classes de indivíduos. Procuramos simplificar as notações para melhor compreensão do assunto.

⁷⁸ Para alguns autores, como o próprio Gödel, este símbolo é desnecessário: $(\exists x)$ é substituída por (x) .

⁷⁹ Assim, por exemplo, $(\exists x)(x=sy)$ é um predicado, enquanto $(\exists x)(x=s0)$ é uma proposição.

⁸⁰ Como exemplo, se S_1 for o predicado $(\exists x)(x=sy)$ e S_2 a proposição $(\exists x)(x=s1)$, sendo 1 o numeral que representa s0 (o sucessor de 0), então

$$f(S) = \text{Subst } S \begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix}.$$

As *demonstrações* são sucessões finitas de fórmulas, mediante *regras de transformação* (ou *inferência*). As regras de transformação são as seguintes:

- Regra de substituição: trocando as variáveis sentenciais de uma fórmula uniformemente por fórmulas, deriva-se outra fórmula.⁸¹
- Regra de separação (*modus ponens*)⁸²: das fórmulas S_1 e $S_1 \supset S_2$ é sempre permitido gerar a fórmula S_2 .

Os *axiomas* são fórmulas primitivas e, deles, derivam-se, por meio de demonstrações, as demais fórmulas, chamadas de *teoremas*. Como dissemos anteriormente, Gödel escolheu os axiomas de Peano e os do sistema *PM*,⁸³ com pequenas modificações, como ele próprio afirma em nota de rodapé:⁸⁴

- $p \vee p \supset p$.
- $p \supset p \vee q$
- $p \vee q \supset q \vee p$.
- $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$.

A idéia fundamental de Gödel é assim descrita por ele próprio:

Como é natural, para considerações matemáticas, não importa muito saber quais são os objetos que tomam como símbolos primitivos e, para essa finalidade, usaremos os números naturais. Assim, uma fórmula é uma sucessão finita de sucessões finitas de números naturais e a figura de uma demonstração é uma sucessão finita de números naturais. Deste modo, os conceitos metamatemáticos tornam-se conceitos sobre números naturais ou sucessões destes e por isso é pelo menos parcialmente exprimível no próprio simbolismo do sistema *PM*. (GÖDEL, 1977a, pp. 248-249).

$$S_2 = \text{Subst } S_1 \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Em outras palavras, $f(S_1)=S_2$.

⁸¹ Por exemplo, trocando uniformemente a variável “p” da fórmula “ $p \supset p \vee q$ ” pela fórmula “ $p \vee p \supset p$ ”, obtemos uma nova fórmula, a saber: “ $(p \vee p \supset p) \supset (p \vee p \supset p) \vee q$ ”.

⁸² É comum esquematizar esta regra como

$$\begin{array}{c} S_1 \\ + S_1 \supset S_2 \\ \hline S_2 \end{array}$$

⁸³ Outros 4 axiomas serão omitidos do texto aqui por desviar dos nossos propósitos.

⁸⁴ GÖDEL, 1977a, p. 252.

Para levar a cabo a asserção acima, Gödel estabelece uma correspondência biunívoca entre números naturais e os símbolos primitivos do sistema *PM*. Esta correspondência pode ser realizada de diversas maneiras. Gödel estabeleceu a seguinte:

Símbolo	Número de Gödel
0	1
s	3
~	5
∨	7
∀	9
(	11
)	13

Evitando a complexidade do artigo de Gödel, acrescentamos mais três símbolos:⁸⁵

Símbolo	Número de Gödel
$\supset$	2
$\exists$	4
=	6

Para cada variável⁸⁶ do tipo n (sendo n um número natural) é associado ainda o número p^n , sendo p um primo maior do que 13. Desta maneira, cada fórmula de SF

⁸⁵ Na lógica matemática, estes símbolos podem ser dispensados. O primeiro porque " $p \supset q$ " é equivalente a " $\sim(p \vee q)$ "; o segundo porque, como dissemos anteriormente, a sintaxe $(\exists x)$ é simplificada como (x) ; e o terceiro porque " $x = y$ " é equivalente a " $p \forall (p(x) \supset p(y))$ ". Logo os três símbolos podem ser substituídos por combinações dos demais. Pela mesma razão, o símbolo "." não aparece em nenhum das listas, pois " $p \cdot q$ " pode ser trocado por " $\sim(\sim p \vee q)$ ".

⁸⁶ Especificamente, as variáveis numéricas (do 1º tipo) são associadas aos números da forma p , as sentenciais (do 2º tipo) aos números da forma p^2 , as proposicionais (do 3º tipo) aos números da forma p^3 , e assim por diante.

corresponde univocamente⁸⁷ a um número natural da forma $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, sendo k um número natural, $n_1, \dots, n_k$ os números de Gödel correspondentes aos k símbolos presentes na fórmula dada, nesta ordem, e p_k o k -ésimo número primo, em ordem de grandeza.⁸⁸ A função injetora⁸⁹ que associa uma fórmula S a um número de Gödel m é denotada como $\Phi(S)$.⁹⁰ Isto é, se uma fórmula é decodificada por uma seqüência de números de Gödel $\{n_1, \dots, n_k\}$, então:

$$\Phi(S) = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}.$$

Como expusemos, o número de Gödel pode ser um símbolo, ou uma fórmula (seqüência de símbolos), mas é possível também definir o número de Gödel como uma seqüência de fórmulas.⁹¹ Analogamente à definição dada para uma fórmula, dada uma seqüência de fórmulas $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ tais que $\Phi(S_i) = n_i$, o número de Gödel correspondente será $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, em que p_k é o k -ésimo número primo, em ordem de grandeza.

⁸⁷ A correspondência é unívoca devido ao Teorema Fundamental da Aritmética, segundo o qual, todo número natural maior do que 1 é primo, ou é decomposto, de maneira única, como produto de números primos.

⁸⁸ Por exemplo, o axioma $\sim (\exists x(s(x) = 0))$ pode ser decodificado como na tabela abaixo:

$\sim$	(	$\exists$	x	(	s	(	x	)	=	0	)	)
5	11	4	17	11	3	11	17	13	6	1	13	13

Logo, ele corresponde ao número $2^5 3^{11} 5^4 7^{17} 11^{11} 13^3 17^{11} 19^{17} 23^{13} 29^6 31^{13} 37^{13} 41^{13}$

⁸⁹ A função não é sobrejetora porque há números naturais que não são números de Gödel. Isto é, existem números naturais cuja decomposição não se corresponde a nenhuma fórmula do *SF*. Isto não é difícil de ver. Tome, por exemplo, $50 = 2^{15} 5^2$. Ele não corresponde a nenhum dos símbolos das duas tabelas e nem pode corresponder a alguma fórmula, pois a decomposição deveria conter o 3, segundo primo da seqüência, por ordem de grandeza. Mas isto não é tudo. Mesmo que a decomposição em fatores primos contenha os primos sucessivos, por ordem de grandeza a partir do 2, ela pode resultar em uma fórmula sem sentido, como ocorre, por exemplo, com $2^1 3^3 5^5$ que é imagem, por Φ , da fórmula " $0s\sim$ ".

⁹⁰ Por meio desta função, podemos traduzir afirmações *metamatemáticas* em afirmações aritméticas. Por exemplo, a asserção " S se compõe de três proposições" é traduzida, via Φ , como " $\Phi(S)$ se decompõe em três fatores primos".

⁹¹ Seguindo paralelamente o artigo de Gödel, observamos como é fundamental a noção de recursividade, que é uma extensão do princípio da indução finita. Uma função aritmética é recursiva se for o último termo de uma seqüência finita de funções, tais que cada função se define recursivamente mediante uma regra que inclui duas funções consecutivas da seqüência. Todas as demais definições recursivas na aritmética são construídas por meio da função recursiva. O benefício da recursividade para a metamatemática é o de deduzir propriedades gerais intrínsecas de uma dada quantidade enumerável de elementos por meio da regra geral construtiva definida recursivamente. O benefício particular para Gödel é a aceitação do seu método pelas principais correntes filosóficas da matemática, inclusive as escolas intucionista e formalista. Para se ter uma idéia da complexidade desta demonstração, Gödel usa a recursividade para definir nada menos do que 45 funções e relações, sendo cada uma definida a partir das precedentes.

Ao definir os números de Gödel para símbolos, fórmulas e seqüências de fórmulas, podemos definir também uma função aritmética correspondente à função já conhecida:

$$S_2 = \text{Subst } S_1 \left(\begin{matrix} v \\ a \end{matrix} \right),$$

cujo resultado S_2 , lembremos, é a fórmula (proposição) resultante da fórmula S_1 (predicado) cuja variável livre v é substituída por a . Supondo que v e a são do primeiro tipo (isto é, v é uma variável numérica e a é um numeral) e considerando os números de Gödel $\Phi(S_i) = n_i$ e $\Phi(v) = m$, defina a função:

$$n_2 = \text{Subst } n_1 \left(\begin{matrix} m \\ a \end{matrix} \right),$$

que indica o número de Gödel da fórmula S_2 obtido da seguinte maneira:⁹² tomamos a fórmula S_1 (de número de Gödel n_1) e substituímos a variável numérica v (de número de Gödel m) pelo numeral a .

Esta função aritmética e a relação que definiremos a seguir constituem a espinha dorsal da prova de Gödel para a existência de *indecidíveis*. A relação binária envolve números naturais é definida como:

$$\text{Dem } (a, b),$$

sendo a o número de Gödel da demonstração (que é uma seqüência de fórmulas) da fórmula S e $b = \Phi(S)$.

Ou seja, a relação $\text{Dem}(a, b)$ quer dizer que S é um teorema, com número de Gödel b , demonstrado pela seqüência de fórmulas com número de Gödel a . Logo, a sua negação, $\sim \text{Dem } (a, b)$, indica que a referida seqüência de fórmulas não demonstra S e a fórmula:

$$(a) \sim \text{Dem } (a, b)$$

⁹² Retornemos ao predicado S_1 dado por $(\exists x)(x=sy)$ e à proposição S_2 dada por $(\exists x)(x=s1)$, obtida pela substituição, em S_1 , da variável livre y pelo numeral 1. Como $1=s0$, segue que S_2 equivale a $(\exists x)(x=ss0)$. Logo,

$$\Phi(S_1) = 2^{11}3^45^{17}7^{13}11^{11}13^{17}17^619^323^{19}29^{13} ; \text{ e}$$

$$\Phi(S_2) = 2^{11}3^45^{17}7^{13}11^{11}13^{17}17^619^323^329^{13}31^{13}.$$

A função aritmética definida, em termos destes números, indica:

$$2^{11}3^45^{17}7^{13}11^{11}13^{17}17^619^323^329^{13}31^{13} = \text{Subst } 2^{11}3^45^{17}7^{13}11^{11}13^{17}17^619^323^329^{13}31^{13} \left(\begin{matrix} 19 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

indica que para cada a , a seqüência de fórmulas, cujo número de Gödel é a , não demonstra a fórmula cujo número de Gödel é b , ou seja, a fórmula cujo número de Gödel é b é não demonstrável. Em outras palavras, esta é a expressão que nos permite avaliar quando uma fórmula não é demonstrável.

Considere, agora, a fórmula H

$$(a) \sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } y \left(\begin{matrix} 19 \\ y \end{matrix} \right) \right).$$

Ela significa que, para qualquer que seja a seqüência de fórmulas de número de Gödel a , a fórmula de número de Gödel

$$\text{Subst } y \left(\begin{matrix} 19 \\ y \end{matrix} \right)$$

não é demonstrável.⁹³

Seja n o número de Gödel da fórmula H , isto é, $\Phi(H) = n$. Defina a fórmula G :

$$(a) \sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right) \right)$$

Ela indica que, para qualquer que seja a seqüência de fórmulas de número de Gödel a , a fórmula de número de Gödel

$$\text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right)$$

não é demonstrável. Este último número indica a substituição na fórmula de número de Gödel n – isto é, em H – da variável livre de número de Gödel 19 – isto é, y – pelo numeral n . Substituindo, portanto, na fórmula H , y por n , obtemos:

$$(a) \sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right) \right)$$

Isto é,

$$\Phi(G) = \text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right).$$

⁹³ Em outras palavras: a fórmula de número de Gödel $\text{Subst } y \left(\begin{matrix} 19 \\ y \end{matrix} \right)$ não é demonstrável.

Sintetizando, G é uma fórmula que afirma que ela própria não é demonstrável. Agora, estamos em condições de provar os Teoremas de Gödel:

1º Teorema de Gödel: *se um sistema formal contendo a aritmética for consistente, então ele contém proposições aritméticas verdadeiras que, no entanto, são indecidíveis.*

Demonstração. Em primeiro lugar, a proposição G criada nas linhas acima corresponde a uma proposição (*metamatemática*) sobre SF que afirma ser indemonstrável em SF a proposição de número de Gödel

$$\text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right),$$

ou seja, a própria G . Ao contrário das proposições ligadas ao paradoxo do mentiroso, essa proposição possui conteúdo definido e pode ser declarada verdadeira por comparação com a realidade.

Devemos então mostrar que G é *indecidível*, isto é que G e $\sim G$ não são demonstráveis.

Suponha que G seja demonstrável. Então, existe um número natural a para o qual vale a relação $\text{Dem}(a, \Phi(G))$. De acordo com a notação acima, existe um número natural a , para o qual é verdadeira a relação:

$$\text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right) \right)$$

Ora, mas esta é exatamente $\sim G$. Logo, provamos que $\sim G$ é demonstrável. Isto contraria a *consistência* de SF, donde G não pode ser demonstrável

Suponhamos, reciprocamente, que $\sim G$ seja demonstrável. Neste caso, a proposição

$$(\exists a) \text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \left(\begin{matrix} 19 \\ n \end{matrix} \right) \right)$$

é um teorema de SF, afirmando que existe pelo menos um número natural a para o qual a relação matemática Dem com o número

$$\text{Subst } n \binom{19}{n}$$

é verdadeira. Como sabemos que G é verdadeira, sabemos também que nenhum número será capaz de satisfazer a relação supracitada. Por conseguinte, para todo número natural n , portanto, valeria:

$$\sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \binom{19}{n} \right)$$

Ou seja, embora $\sim G$ afirme que existe pelo menos um número natural a que torna verdadeira a relação

$$\text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \binom{19}{n} \right),$$

poderíamos mostrar que este número não é 0, não é 1, não é 2, etc. Segue-se que $\sim G$ também não pode ser demonstrada em SF.⁹⁴

Logo, se os axiomas do SF *aritmético* forem *consistentes*, então nem G e nem $\sim G$ são demonstráveis, isto é, G é *indecidível*.

Os argumentos acima provam a *incompletude* de SF, como reza o 1º Teorema de Gödel, mas de uma análise cuidadosa das linhas acima emerge outra conclusão. A fórmula G afirma que não existe prova de G em SF, fato comprovadamente verdadeiro. No entanto, a prova de que G é verdadeiro consiste em uma análise meta-teórica de SF utilizando-se de argumentos aritméticos. Logo, além de haver fórmulas que não podem ser provadas em SF, existem enunciados na aritmética que não podem ser provados. Desta conclusão, deduzimos ainda que os axiomas da aritmética são incompletos e mais: nenhuma extensão possível do conjunto de axiomas da aritmética seria suficiente para excluir sua *incompletude*. Mesmo que G fosse acrescentado aos axiomas de SF, uma fórmula G' poderia ser criada a respeito de $SF \cup \{G\}$, com o mesmo poder sobre

⁹⁴ No artigo de Gödel, ele conclui que SF é ω -*inconsistente*. Um sistema formal SF é ω -*consistente* quando não possui um predicado Px , aplicável a números, tal que: $(\exists x)Px$ é derivável em SF; mas $\sim P(0)$, $\sim P(1)$, $\sim P(2)$, etc., são também deriváveis em SF. Isto equivale a dizer que em SF é possível provar ao mesmo tempo que existe um número que possui a propriedade P , mas que o número 0 não tem essa propriedade, o número 1 não tem essa propriedade, o número 2 não tem essa propriedade, etc. Logo, se um sistema é ω -*consistente*, ele é obviamente consistente. Todavia, ele pode ser consistente e não ser ω -*consistente*. A validade destes argumentos na prova de Gödel demanda o conhecimento de algumas proposições sobre funções aritméticas recursivas, tópico que procuramos evitar para melhor compreensão do texto.

este sistema que G exerce sobre SF . Isto mostra que o processo de adicionar axiomas pode-se repetir *ad infinitum* sem que consigamos obter alguma extensão completa de SF . Logo, pelo Teorema de Gödel, SF é *incompleto e incompletável*.

Corolário (2º Teorema de Gödel): *nenhum sistema formal contendo a aritmética pode provar a sua própria consistência, a não ser que o sistema em si seja inconsistente.*⁹⁵

Demonstração. Considere o seguinte enunciado metamatemático:

$$S: \{SF \text{ é consistente}\}$$

Se esta afirmação for verdadeira, então pelo Teorema de Gödel, existe uma proposição P em SF não demonstrável. Este enunciado pode ser representado por

$$(\exists b)(a) \sim \text{Dem}(a, b).$$

Como operação válida em SF , podemos eliminar o operador existencial, trocando a variável b por uma constante que mantém a fórmula verdadeira.⁹⁶ No caso, esta

constante pode ser $\text{Subst } n \left(\begin{smallmatrix} 19 \\ n \end{smallmatrix} \right)$. Assim,

$$(\exists b)(a) \sim \text{Dem}(a, b) \supset \sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \left(\begin{smallmatrix} 19 \\ n \end{smallmatrix} \right) \right).$$

Segue que $S \supset G$. Assim, se S fosse demonstrável então, pelo *modus ponens*,⁹⁷ provaríamos que G é demonstrável. Mas isto não é possível, logo S não é demonstrável.

Finalmente, a fim de ilustrar uma possível relação entre o raciocínio de Gödel com o paradoxo do mentiroso, no primeiro teorema, transcreveremos aqui a comparação detalhada devida à Hofstadter (1979, p. 449) entre a demonstração de

⁹⁵ Quando Gödel anunciou os resultados no congresso de Königsberg sobre Epistemologia das Ciências Exatas, ele apresentou apenas os argumentos que provam o primeiro teorema. John Von Neumann, ao contrário dos outros estupefatos e apáticos participantes, se debruçou imediatamente sobre os resultados de Gödel e em 5 minutos desenvolveu a demonstração do segundo teorema. Ele procurou Gödel para comunicar-lhe do feito, mas este polidamente informou-lhe que já havia chegado no mesmo resultado. (HINTIKKA, 2000).

⁹⁶ Esta operação se chama *instanciação existencial*.

⁹⁷ Esquemáticamente, ocorre o seguinte:

$$\begin{array}{r} S \\ +S \supset G \\ \hline G \end{array}$$

Gödel e o paradoxo de Epimênides (do mentiroso), adaptado com uma coluna a mais contendo os símbolos utilizados nesta seção para identificação com o nosso trabalho:

Paradoxo de Epimênides	Teorema de Gödel	Símbolos
Falsidade	Não-teoremicidade	$\sim \text{Dem}$
Citação de uma sentença	Número de Gödel de uma fórmula	$\Phi(S)$
Preceder um predicado por um sujeito definido	Incluir um numeral em uma formula aberta	$\text{Subst } S \left(\begin{smallmatrix} v \\ a \end{smallmatrix} \right)$
Preceder um predicado por uma sentença citada	Incluir um número de Gödel de uma seqüência em uma formula aberta	$\text{Subst } S \left(\begin{smallmatrix} v \\ \Phi(y) \end{smallmatrix} \right)$
Preceder um predicado por ele próprio, entre aspas (“quinagem”)	Incluir um número de Gödel de formula aberta na própria fórmula (“aritmo-quinagem”)	$\text{Subst } S \left(\begin{smallmatrix} v \\ \Phi(S) \end{smallmatrix} \right)$
Produce falsidade quando quinado (um predicado sem sujeito)	O “tio” de G (uma fórmula aberta em SF)	$(a) \sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } y \left(\begin{smallmatrix} 19 \\ y \end{smallmatrix} \right) \right)$ (Fórmula H)
“Produce falsidade quando quinado” (o predicado acima citado)	Número de Gödel do “tio” de G (da fórmula aberta acima)	$n = \Phi(H)$
“Produce falsidade quando quinado” produz falsidade quando quinado (afirmação completa formada pela quinagem do predicado acima)	G (afirmação da SF formada pela inclusão de $\Phi(G)$ no tio)	$(a) \sim \text{Dem} \left(a, \text{Subst } n \left(\begin{smallmatrix} 19 \\ n \end{smallmatrix} \right) \right)$ (Fórmula G)

2.4. Acepções dos Teoremas de Gödel no círculo lógico-matemático

Que representações podem ser construídas do Teorema de Gödel no interior do círculo lógico-matemático? Em primeiro lugar, ao contrário do que se costuma noticiar, não é possível usar o Teorema de Gödel para prever se uma conjectura matemática em aberto é *indecidível*. Não há como prever na matemática que afirmativas são verdadeiras, falsas ou *indecidíveis*. Gödel não desenvolveu nenhum método para classificar tais sentenças. Logo, um matemático pode dedicar sua vida para resolver um problema em aberto correndo o risco deste problema nunca ter uma solução, como romanceou Doxiadis.⁹⁸

Outra interpretação comum é deduzir imediatamente do Teorema de Gödel que a matemática é *inconsistente* ou incompleta. Estas duas questões – *consistência* e *completude* – devem ser analisadas cuidadosamente dentro do círculo matemático, pois o enunciado dos teoremas de Gödel contém hipóteses restritivas. Gödel provou no 2º teorema que se um sistema axiomático na matemática for *consistente*, então não há prova metamatemática *finitária* e *representável pela aritmética* capaz de provar a sua consistência. Portanto, não é logicamente impossível provar a *consistência* absoluta da aritmética por *outros* métodos finitários. No entanto, ninguém até hoje tem uma idéia de como fazer isto, o que torna tal prova um empreendimento pouco provável de ser bem sucedido. Também não é impossível demonstrar a *consistência* por métodos *não finitários*. Gerhard Gentzen provou em 1936 a *consistência* absoluta da aritmética por métodos de indução transfinita. Embora sua prova não seja contestada pela maioria dos lógicos, sua *consistência* está aberta a dúvidas. Contudo, a própria originalidade de

⁹⁸ *Tio Petrus e a conjectura de Goldbach* (2001) é narrado pelo sobrinho de um brilhante matemático grego, Petrus Papachristos. Este, por sua vez, dedica sua vida à solução da conjectura de Goldbach. As sucessivas tentativas malogradas, porém, afasta-o da vida acadêmica e ele acaba por se enclausurar em sua casa, dedicando-se então ao xadrez e à jardinagem. Seu sobrinho se fascina com a sua história e acaba por se ingressar na vida acadêmica, se graduando em matemática e concluindo anos depois o mestrado. No romance, personagens fictícios se misturam com notáveis da história da matemática, precisamente da Teoria de Números, como o britânico G. H. Hardy e o indiano Ramanujan. Porém, o encontro decisivo na vida acadêmica de Petrus é com Gödel. O conhecimento do teorema da *incompletude* destrutura psicologicamente o matemático grego que acredita ter ficado durante 9 anos se dedicando a um problema possivelmente sem solução.

Gödel prova que não se deve subestimar a criatividade matemática e conjecturar que é impossível encontrar uma prova absoluta da *consistência* da aritmética, nos moldes supracitados.

No 1º teorema, Gödel provou que se uma teoria matemática contendo a aritmética for *consistente*, então ela é necessariamente incompleta. Ou seja, existem proposições da metamatemática que não correspondem a nenhum teorema da teoria em causa. Logo, é certo que a *consistência* da aritmética implica em sua *incompletude* e, portanto, o mesmo ocorre com todos os campos da matemática aritmetizados (isto é, praticamente toda a matemática). O Teorema de Gödel nos mostra, portanto, que o processo de demonstração na matemática não equivale ao processo de demonstração no correspondente metamatemático e que verdade matemática e prova não são conceitos mutuamente equivalentes. Em outras palavras, a prova implica em verdade, mas a verdade não implica em prova.⁹⁹

As questões anteriores têm um valor pedagógico a respeito da compreensão do Teorema de Gödel dentro do círculo lógico-matemático, mas a próxima questão é, para nosso entendimento, de grande importância histórica e filosófica e, por isso, merece uma reflexão mais profunda: de que maneira os resultados de Gödel interferiram no programa de Hilbert?

O corolário do Teorema de Gödel mostra que toda prova de *consistência* na matemática (pensando que praticamente todos os seus campos foram aritmetizados) é

⁹⁹ O conceito de verdade foi abordado por Alfred Tarski. Ele percebeu que as linguagens que expressam alguns de seus conceitos semânticos como verdade dão origem a contradições, se assumirmos os pressupostos da lógica (e da semântica) clássica. Mas, o que acontece com a linguagem da aritmética? Aproveitando a analogia entre os indecidíveis de Gödel e o paradoxo do mentiroso, Tarski provou, usando as técnicas de Gödel de seu trabalho de 1931, que se houvesse uma fórmula $P(x)$, com uma única variável livre x , exprimível na linguagem da aritmética, que expresse que a sentença com número de Gödel x é demonstrável, então tendo em vista o que se espera do conceito de “verdade” (que ele expresse o que de fato ocorre), o predicado P somente pode ser definido na metalinguagem do sistema *SF* (LADRIÈRE, 1969, pp. 276-277). Disso resulta que há, portanto, uma outra forma de *incompletude* da aritmética, além daquela provada por Gödel, a saber, aquela que diz que nem todos os conceitos relevantes podem ser definidos na sua linguagem, como o conceito de verdade. Curiosamente, é possível demonstrar os teoremas de Gödel como consequência do resultado de Tarski, se este for convenientemente modificado. Não se sabe ao certo se Gödel conhecia o resultado antes de Tarski tê-lo publicado, embora seja provável (FEFERMAN, 1988, pp. 108-111), mas este é um ponto histórico que ainda não foi devidamente esclarecido. Uma conjectura é que Gödel evitou o conceito de verdade porque, sendo um lógico extremamente cauteloso, ele não queria deixar dúvidas sobre a validade de seus resultados e a noção de verdade possuía demasiadas conotações metafísicas para ser bem acolhida em estudos matemáticos no clima neo-positivista da Viena dos anos trinta.

necessariamente relativa. De fato, para satisfazer os pressupostos do formalismo de Hilbert, todas as tentativas de provas absolutas de *consistência* utilizaram um sistema formal que satisfaz as condições necessárias para a construção da proposição G em seu interior, isto é, incluir a lógica de predicados e os axiomas de Peano. Logo, além das proposições como S e G , como construídas nas provas acima, é derivável de cada um destes sistemas a fórmula $S \supset G$. Por conseguinte, para demonstrar a *consistência* de um sistema fundamental, teremos de utilizar procedimentos de raciocínio que não podem ser formalizados nestes sistemas.

Por outro lado, dada uma proposição *indecidível* G de uma teoria T , ainda que pudéssemos, como no episódio das geometrias euclidianas, desenvolver teorias alternativas T_1 e T_2 cada qual contendo G e $\sim G$, respectivamente, como sugere Dummett (1977), cada uma destas duas teorias teria, segundo o Teorema de Gödel, proposições *indecidíveis* G_1 e G_2 , respectivamente. Por conseguinte, não há como cercar os *indecidíveis* dentro do campo matemático e, para Dummett, o fato remete para a questão de que a concepção de número natural pode variar nas diferentes escolhas de teorias T_1 e T_2 . A eliminação desta relatividade conceitual, portanto, seguiria imediatamente da inquirição de um único modelo formal para a matemática. Caso contrário, o conceito seria vago e inerente a qualquer sistema formal.

Articulando esta idéia com a tentativa logicista de definir o número natural, aproximamos do ponto de vista de Hintikka (2000), segundo o qual o programa de Hilbert falhou porque a lógica utilizada nas teorias metamatemáticas não pode ser assumida como semanticamente completa. Os resultados de Gödel pertencem originalmente às lógicas de ordem superior,¹⁰⁰ como o sistema PM de Russell e Whitehead. Logo, admitindo a *completude* da lógica de primeira ordem o programa de

¹⁰⁰ A lógica de primeira ordem é um sistema lógico que estende a lógica proposicional e que é estendida pela lógica de segunda ordem. O ingrediente novo da lógica de primeira ordem não encontrado na lógica proposicional é a quantificação. A lógica de primeira ordem tem poder expressivo suficiente para formalizar praticamente toda a matemática. A lógica de ordem superior se distingue da lógica de primeira ordem em vários aspectos. Uma dessas diferenças diz respeito ao tipo de variáveis que aparecem nos quantificadores. Na lógica de primeira ordem não é permitido quantificar sobre predicados. Uma outra diferença está nas construções permitidas pela teoria dos tipos subjacente. A lógica de ordem superior é mais expressiva, mas suas propriedades, em particular, no que diz respeito à teoria dos modelos, a tornam menos bem comportada para muitas aplicações. Em sua tese de doutorado, Gödel provou que o cálculo de predicados de primeira ordem é completo, mas o teorema da *incompletude* implicou no fato de que a lógica de ordem superior não admite uma *axiomatização* recursiva correta e completa sobre modelos padrão. Existe, contudo uma tal *axiomatização* correta e completa sobre modelos de Henkin.

Hilbert pode ser salvo. Portanto, o seu sucesso dependeria de uma intervenção na linguagem matemática da lógica de primeira ordem: a teoria de conjuntos, célula embrionária que fecundou os paradoxos, desenvolveu o debate sobre *consistência* e culminou na crise dos fundamentos. Os realistas¹⁰¹ sempre acreditaram que a descoberta de novos axiomas nesta área reduziria o potencial de sua *incompletude*¹⁰². Um deles, o próprio Gödel, em carta a carta enviada para Russell, em 1944, afirmou:¹⁰³

Verificou-se que (se se supuser que a matemática moderna é *consistente*) a solução de certos problemas aritméticos exige o emprego de hipóteses que transcendem essencialmente a aritmética, i.e., o domínio do gênero de evidência elementarmente indisputável e que melhor se pode comparar à percepção dos sentidos. Além disso, parece natural que para decidir certas questões da teoria abstrata dos conjuntos e mesmo para certas questões relacionadas da teoria dos números reais serão necessários novos axiomas baseados numa idéia até agora desconhecida. E pode talvez suceder que as dificuldades aparentemente intransponíveis que outros problemas matemáticos suscitaram sejam devidas ao fato de os axiomas necessários para a sua solução ainda não terem sido descobertos. (GÖDEL, 1970, p. 126).

Ladrière (1969) considera como prematuras as diversas conclusões acerca do pensamento matemático em geral, principalmente as que apontam para o fim do programa de Hilbert, e mostra que o Teorema de Gödel, bem como os seus diversos desdobramentos, implicam não o fim do formalismo, mas as suas limitações. Por exemplo,

Um sistema formal nunca pode ser considerado como uma representação adequada da teoria matemática que trata de expressar ao menos no sentido que nos permite decidir efetivamente sobre a validade de certos enunciados (...) As matemáticas não podem fundamentar-se totalmente sobre procedimentos efetivos e a existência matemática, por conseguinte, não se circunscreve pelas fronteiras do executável (LADRIÈRE, 1969, p. 336).

Além da interpretação errônea do fracasso do método formal (que significa dar ao Teorema de Gödel um alcance que não tem), segundo o autor, outro equívoco consiste em recusar do Teorema de Gödel a abrangência que ele permite. Esta situação ocorre se interpretamo-lo simplesmente como a descoberta de uma

¹⁰¹ Não é para menos que, após a divulgação do Teorema de Gödel, o realista convicto Gödel estudou proficuamente a axiomática de conjuntos.

¹⁰² HINTIKKA, 2000, p. 43

¹⁰³ Para Gödel, a existência dos objetos matemáticos não reside na dimensão espaço-temporal. Há uma semelhança entre a intuição matemática e a percepção; as classes e os conceitos são realidades independentes de nossas criações e não simples produtos da linguagem. Logo os objetos matemáticos não são criados, e sim, descobertos.

contradição. No entanto, além do resultado em si, o Teorema de Gödel exibe também um procedimento inédito de técnica metamatemática bem como um raciocínio auto-referencial legítimo que se nutre de um raciocínio circular paradoxal (o paradoxo do mentiroso). Logo o Teorema de Gödel nos mostra que é possível transcrever formalmente raciocínios circulares de maneira formalmente rigorosa.

A análise filosófica mais surpreendente dentro do círculo lógico matemático a respeito do impacto do Teorema de Gödel provém de Wittgenstein no seu *Remarks on the foundations of mathematics* (1956). Suas críticas ao Teorema de Gödel parecem motivadas pelo seu ceticismo a respeito dos programas de Russell e Hilbert. Sendo este uma resposta às propostas logicista e formalista – que, para Wittgenstein nesse momento de sua vida, não fazem mais sentido – então o Teorema de Gödel também não pode fazer sentido.¹⁰⁴

Esta opinião pode ser melhor compreendida se reconstruirmos o percurso filosófico de Wittgenstein, delineado pelas suas duas maiores obras – *Tratado lógico-filosófico*,¹⁰⁵ de 1921, e *Investigações Filosóficas*,¹⁰⁶ de 1953 – interligadas por um conjunto de artigos que culminaram na publicação de suas idéias sobre os fundamentos da matemática em *Remarks on the foundations of mathematics*.

No *Tratado*, Wittgenstein afirma que as proposições matemáticas são como as tautologias da lógica: não representam nenhum fato porque eles são, num certo sentido, meramente gramaticais.¹⁰⁷ Para Wittgenstein, não há surpresas na matemática. As concepções de Wittgenstein sobre a matemática mudaram em forma, mas em certo sentido não em conteúdo, após sua mudança de posicionamento filosófico. Sabe-se que, entre as concepções filosóficas determinadas no *Tratado* e nas *Investigações*, há um hiato que significou a costumeira referência como duas filosofias distintas. O autor do *Tratado* é citado como “o primeiro Wittgenstein” e referimos ao autor das

¹⁰⁴ Especificamente, Wittgenstein não vê sentido no enunciado do teorema e na demonstração do mesmo. No primeiro caso, questiona sobre o que é ser demonstrável (WITTGENSTEIN, 1956, pp. 50-54) e, no segundo caso, indaga o que significa uma afirmação matemática falar sobre si própria (auto-referência) (WITTGENSTEIN, 1956, pp. 176-177).

¹⁰⁵ Id., 1995a.

¹⁰⁶ Id., 1995b.

¹⁰⁷ Deduz-se tal asserção das proposições 6.1262, que coloca a demonstração na lógica como um expediente meramente mecânico que facilita a compreensão de tautologias em casos complicados; e 6.2, na qual ele afirma que a matemática é um método da lógica e, portanto, assim como a lógica, não diz nada, não descreve conteúdo.

Investigações como “o segundo Wittgenstein”. De lógico, Wittgenstein passou a filósofo pragmático. A lógica monolítica da linguagem no *Tratado* dá lugar a uma abordagem mais social dos jogos de linguagem nas *Investigações*.¹⁰⁸

Para alguns, a pragmática deste segundo Wittgenstein rejeitava aquilo que era inexprimível,¹⁰⁹ em particular, a tese do Teorema de Gödel. Se um problema não tem solução então ele deveria ser ignorado. Se um paradoxo não pode ser encontrado (de acordo com o Teorema de Gödel não temos um procedimento computacional que permite encontrar *indecidíveis*) então não devemos nos preocupar com ele.¹¹⁰ Neste sentido, Wittgenstein afirma que a repercussão do Teorema de Gödel é maior do que o seu real impacto para a lógica matemática.

As interpretações de Wittgenstein foram duramente criticadas por seus pares, mas a questão que pode não ter ficado muito clara para os críticos de Wittgenstein é a sua mudança radical de posição filosófica desde que escreveu o *Tratado*. Portanto, sua opinião a respeito dos fundamentos da matemática não era mais a do primeiro Wittgenstein, como era esperado pelos lógicos, mas do segundo, que não pertencia mais a esta *comunidade científica* e, portanto, não compartilhava mais do mesmo *estilo de pensamento*. Sua opinião a respeito do impacto do Teorema de Gödel pode ter sido proferida na mesma linha que ele definiu ao criticar os *Principia Mathematica* de Russell: seu ataque não vinha de dentro (visão semântica), mas de fora (visão pragmática).¹¹¹ Esta percepção parece não ter tocado os lógicos.

Por ter sua obra citada no título do artigo de Gödel e pelo peso de sua reputação, Russell geraria o maior número de expectativas em torno de sua impressão sobre o Teorema de Gödel. No entanto, Russell mencionou o Teorema de Gödel em raras

¹⁰⁸ Confira em (CONDÉ, 1998) uma exposição mais detalhada sobre as duas obras de Wittgenstein.

¹⁰⁹ WITTGENSTEIN, 1995b, §126

¹¹⁰ Em suas palestras em 1939, Wittgenstein tinha como aluno o matemático inglês Alan Turing. Nesta ocasião, Turing pergunta a Wittgenstein “O que acontece se temos um sistema de cálculo que é inconsistente, mas no qual a contradição está oculta? Alguma coisa ruim pode ocorrer, como, por exemplo, ao aplicarmos este sistema ao cálculo de uma ponte que, após construída, cai? (WITTGENSTEIN, 1976, XXII, p.211). Wittgenstein se irrita profundamente com a idéia de que possa haver uma contradição oculta no cálculo. Segundo ele, se temos um método para encontrar tal contradição oculta, então basta aplicá-lo e encontrá-la. Assim, concertamos a teoria ou evitamo-la. Mas se não dispomos de um critério de busca, então não faz qualquer sentido dizer que a contradição está oculta. Ou talvez nós simplesmente não conseguimos enxergá-la e, no fim das contas, ela nem seja tão perigosa assim! (1965, II-88).

¹¹¹ CONDÉ, 2004, pp. 78-80.

oportunidades. Numa delas,¹¹² lembra ter sugerido na introdução do *Tratado* de Wittgenstein que numa linguagem há coisas que não podem ser expressas nela e, por isso, é necessário construir uma linguagem de ordem superior, na qual estas coisas poderão ser expressas. Mas nesta linguagem de ordem superior, outras coisas também não poderão ser expressas, o que demanda a construção de uma linguagem de ordem ainda superior e, assim, sucessivamente. Comenta depois que esta sugestão, inédita na época, tinha então uma comprovação unânime na lógica, devido em grande parte pelo trabalho apresentado por Gödel.

Finalmente, por ter o seu programa, no mínimo abalado, ou destruído segundo alguns autores, a impressão de Hilbert seria tão ou mais esperada do que a de Russell. Em 1931, Gödel envia rascunhos de seu artigo a alguns amigos, dentre eles Paul Bernays, assistente e colaborador de Hilbert. Ambos trabalhavam para os *Fundamentos da Matemática*, que viria a ser publicado em 1934. Segundo relatou Bernays, Hilbert ficou furioso com a notícia, a princípio, mas depois procurou extrair conclusões construtivas a respeito.¹¹³ No prefácio dos *Fundamentos da Matemática*, então publicado, Hilbert expressa sua opinião a respeito do Teorema de Gödel. Afirmar que o Teorema de Gödel não destrói seu programa, mas mostra a necessidade de explorar os métodos finitários de uma maneira mais profunda ainda.

A opinião de Hilbert já era amparada por Gödel em seu artigo de 1931. Mas sua concordância com Hilbert é também percebida na sua oposição à interpretação dada pelos intucionistas liderados por Brouwer do teorema da *incompletude*. Estes afirmaram que Gödel provou a impossibilidade de uma linguagem ser absolutamente precisa, mas para Gödel, a *incompletude* mostra o contrário, que a matemática é inesgotável não permitindo qualquer circunscrição.

Uma questão de relevância histórica que emerge do Teorema de Gödel e das suas interpretações filosóficas é de que maneira este conjunto de eventos interferiu no *estilo de pensamento* do círculo lógico matemático. Na próxima seção investiremos nesta problemática.

¹¹² RUSSELL, 1959, p. 114.

¹¹³ GUERRERIO, 2007, pp. 54-55.

2.5. Mudanças conceituais no círculo lógico-matemático pós-Gödel

Assim como assevera Fleck, as mudanças de *estilo de pensamento* geralmente não são imediatamente assimiladas numa *comunidade científica*; no caso presente, o Teorema de Gödel implica em uma grande mudança epistemológica, pois elimina, ou pelo menos limita, tentativas de formalização de um saber absoluto.

Por conseguinte, a atmosfera lógico matemática foi povoada de apoios, como os de Von Neumann, Emil Post, Alonzo Church e Stephen Kleene, e críticas como as de Zermelo, Perelman e Findlay. Zermelo foi um dos críticos mais severos, mas as trocas de correspondências com Gödel convenceram-no dos argumentos do austríaco (Dawson, 1988, p. 80). As controvérsias de Perelman acerca da demonstração do Teorema de Gödel foram rebatidas por Olaf Helmer que publicou artigos em defesa de Gödel.¹¹⁴ Posteriormente, estes trabalhos foram examinados e concertados por Kleene. A crítica de Finlay diz respeito à versão semântica do Teorema de Gödel e foi rebatida por Church.¹¹⁵

As controvérsias no círculo estritamente matemático, por sua vez, foram minimizadas por atos isolados.¹¹⁶ Esta comunidade, de uma forma geral, recebeu os

¹¹⁴ Perelman alertou para o fato de que na demonstração de Gödel, ao construir a proposição *indecidível*, ele pressupõe uma falsa equivalência resultando em um paradoxo. Kleene observou que as críticas de Perelman resultam da não distinção feita por ele entre as proposições do sistema *SF* e os enunciados metamatemáticos referentes a este sistema. Helmer distinguiu, portanto as proposições do sistema dos números de Gödel correspondentes, mas Kleene arguiu que a distinção entre as proposições de *SF* e os números de Gödel correspondentes não era suficiente, era necessário distinguir as proposições do sistema *SF* de *todos* os enunciados metamatemáticos de *SF* (LADRIÈRE, 1969, pp.133-136).

¹¹⁵ Finlay fez uma exposição não técnica, na qual, um enunciado tautológico construído se corresponde à proposição *indecidível* de Gödel. Church mostrou que nesta construção, Finlay troca o predicado *não demonstrável* pelo predicado *errado* obtendo um enunciado equivalente ao paradoxo do mentiroso, o que não pode ser admitido.

¹¹⁶ Vale destacar o seminário “Os limites do pensamento científico” ocorrido no Instituto Santa Fé nos E.U.A. (HORGAN, 1996), que abriu um espaço para a reunião de um grupo de matemáticos em torno dos efeitos dos teoremas de Gödel sobre a sua comunidade. Gregory Chaitin, matemático e cientista da computação da IBM, afirmou que a matemática tende a ser um campo de conhecimento mais experimental e menos teórico, com menos direito à verdade absoluta. John Casti, matemático do Instituto e um dos organizadores do encontro, rebateu expondo que os matemáticos poderiam desviar-se dos efeitos do Teorema de Gödel, se utilizassem sistemas dedutivos mais simples e que os referidos teoremas não deveriam ser aplicados às ciências naturais. O matemático brasileiro Francisco Antônio Dória avaliou a última análise como pessimista e amparou a idéia de que o Teorema de Gödel não implicava o fim da matemática, pelo contrário, motivaria mais criações na matemática, pois uma solução *indecidível* poderia gerar duas teorias diferentes, uma postulando a verdade da asserção e outra postulando a falsidade da mesma. Chaitin fechou o ciclo de debates concluindo que, na prática, uma

resultados de Gödel como uma vitória dos raciocínios infinitários de Cantor sobre o programa finitário de Hilbert. Por outro lado, a relevância do Teorema de Gödel para o *estilo de pensamento* da comunidade matemática é, nos termos de Feferman (2006), menor do que para a filosofia e para a lógica. O autor compara o impacto do Teorema de Fermat no círculo matemático, concluindo que há uma desconexão grande entre fama e relevância na comunidade matemática.

Os trabalhos de Gödel acerca da *incompletude*, no entanto, independentemente de qualquer interpretação filosófica, produziram ferramentas fundamentais para a efusão de teorias lógicas e matemáticas com conseqüentes soluções de problemas antes não resolvidos. Isto minimiza, ou, mais propriamente, anula a reação negativa dentro do círculo lógico matemático. Mas o fato também tornou visível uma movimentação interna que se pronunciava desde os primeiros anos do século XX e uma espécie de divisão social se tornou necessária. Esta divisão não pode ser encarada como um acordo selado em uma assembléia, mas uma gradativa, e talvez inconsciente, adequação de grupos com interesses distintos de pesquisa e estilos cognitivos diferentes também.

Este processo de *mutação do estilo de pensamento* e implantação de outro faz parte da dinâmica da produção de conhecimentos e é natural a sua ocorrência durante a investigação de problemas que se revelam como complicações não resolvidas pelo *estilo de pensamento* vigente. Na situação em particular, o problema foi complexo o suficiente para revelar as limitações do *estilo de pensamento* da comunidade matemática, urgindo uma extensão deste *estilo de pensamento*. Respeitando a continuidade do processo, a extensão do *estilo de pensamento* provocou uma *interação intracoletiva*, contribuindo para a formação de membros de um novo *estilo de pensamento*, bem como a efetiva adoção deste novo *estilo de pensamento*. Os possíveis desdobramentos lógicos do Teorema de Gödel e estudos afins apontaram, portanto, para uma cisão peremptória na comunidade matemática. Como vimos anteriormente, a crise dos fundamentos já havia favorecido a emergência de uma

grande parcela dos matemáticos considera os resultados de Gödel “bizarros, patológicos, derivados de um paradoxo auto-referencial.”(HORGAN, 1996, p. 283).

comunidade de filósofos e lógicos da matemática, grupo a que pertenciam alguns matemáticos conhecidos como Hilbert, Poincaré e Brouwer.

No entanto, como já foi afirmado, não existia na época uma divisão socialmente determinada entre matemáticos e lógicos matemáticos. O exemplo disso é a inclusão do problema da *consistência* da análise matemática na lista elaborada por Hilbert dos 23 problemas matemáticos mais importantes não resolvidos até a entrada do século XX, anunciados no II Congresso Internacional de Matemática, em Paris, em 1900.

A cisão a que referimos neste parágrafo é claramente comprovada nos atuais manuais de história da matemática. Os capítulos sobre a matemática do século XX têm poucas informações sobre a lógica matemática das três primeiras décadas e praticamente nenhuma das décadas seguintes. São superficialmente mencionados o debate fundacionista, o Teorema de Gödel e as contribuições de Gödel e Cohen para a *hipótese do continuum*. Nenhum estudo sobre lógica matemática é citado além destes, nem os desdobramentos destes resultados e tampouco idéias centrais destes feitos científicos. Ao contrário de uma possível e equivocada interpretação de que o Teorema de Gödel e o trabalho de Cohen selam o desfecho final da história dos fundamentos, deduzimos que a lógica matemática pós-Gödel não protagoniza a história da matemática, mas a história da lógica matemática, donde torna-se plausível a cisão aludida entre estas comunidades. Esta cisão não implica, no entanto, a ausência de um diálogo entre as comunidades ou na impossibilidade de mútuas interferências nos respectivos *estilos de pensamento*.¹¹⁷ A diferença é que estas trocas não ocorreriam mais entre membros de um mesmo círculo; os matemáticos a partir de então pertenceriam ao *círculo externo* dos lógicos e vice-versa.

Concluimos que o Teorema de Gödel proporcionou mudanças na comunidade matemática em três frentes: a primeira e, talvez, a mais relevante historicamente é a revisão do conceito de verdade,¹¹⁸ a segunda é a dissociação das comunidades de

¹¹⁷ Isto pode ser verificado nas diversas revistas especializadas de lógica. Enquanto alguns autores de artigos estão em Departamentos de Matemática de suas respectivas instituições outros estão em Departamentos de Filosofia.

¹¹⁸ Esta verdade não era depositada na matemática como um todo, como bem observa Castoriadis (1987, p. 166), mas na sua lógica. Platão já colocava que a matemática se apóia em hipóteses. Então, a questão primordial não é garantir a certeza absoluta nas hipóteses, mas no sistema hipotético-dedutivo. Esta é uma boa razão para esta questão interessar mais aos lógicos do que aos matemáticos, propriamente. Castoriadis complementa ainda: “A crise dos fundamentos da matemática permanece, portanto, ainda

lógicos e matemáticos, e a terceira é percepção de que o projeto finitista deve ser revisto ou trocado por um projeto infinitário similar ao proposto por Gentzen. Em contrapartida, não se deve concluir que a concepção platonista dos matemáticos foi extinta. A visão platônica da matemática, embora abalada, não foi destruída no círculo lógico matemático.

2.5. Considerações finais

Vimos neste capítulo como o *estilo de pensamento* da comunidade lógico matemática criou diversos elementos favoráveis para que Gödel demonstrasse seu teorema. Além da lógica desenvolvida por seus predecessores, os problemas criados, técnicas novas vistos no capítulo anterior, compreendemos aqui o ambiente cultural de Gödel e a atmosfera que alimentou suas concepções filosóficas. A cidade que abrigou Gödel durante sua formação acadêmica, Viena, abrigava no período entre guerras uma quantidade impressionante de músicos, poetas, cientistas, filósofos e arquitetos muitos dos quais organizados em círculos intelectuais, reunidos nos diversos cafés da cidade. A participação de algum círculo de intelectuais era quase inevitável e não foi diferente com Gödel, que participou durante a década de 1920 do Círculo de Viena. Seus membros não interferiram significativamente nas concepções filosóficas de Gödel, mas certamente incentivaram Gödel a migrar da matemática (área na qual ele defendeu a sua dissertação de mestrado) para a lógica matemática. Sua concepção realista já estava formada antes de seu ingresso no Círculo de Viena e sua cristalização ocorreu na mesma medida em que se interessava pelo projeto formalista de Hilbert. Sua intenção inicial era provar a *consistência* da aritmética e, por ironia, acabou chegando ao teorema da *incompletude*.

O raciocínio utilizado por Gödel para demonstrar o teorema da *incompletude* – também importante para a compreensão do impacto do teorema – foi fundamentado no paradoxo de Epimênides. Gödel construiu uma fórmula aritmética G que representa o

muito aberta e é difícil imaginar como poderia ser superada – a menos precisamente que reconheçamos que na matemática, tampouco alhures, não se poderia tratar de garantir um fundamento absoluto nem de obter uma segurança de coerência que não seja o *fazer teórico* dos matemáticos. Mas existe na matemática a possibilidade de desligar logicamente a região da crise do resto da disciplina; isso não diminui de modo algum o alcance filosófico da problemática, mas permite que, por mais importante que seja, o trabalho dos matemáticos se desenvolva à distância dessa região”. (CASTORIADIS, 1987, p. 170)

enunciado “a fórmula G não é demonstrável”. Por meio da *arimetização* da metamatemática, Gödel definiu a relação entre números naturais que indica quando uma proposição é demonstrável e provou que G é demonstrável se, e somente se, sua negação, $\sim G$, for demonstrável. Logo, se a aritmética for *consistente*, então G é *indecidível*. Como corolário, Gödel construiu uma fórmula que corresponde ao enunciado “a aritmética é *consistente*” e provou que esta fórmula não é demonstrável, donde segue que o sistema formal *arimetizado* não é capaz de provar a *consistência* da aritmética.

Repercussões do Teorema de Gödel dentro do círculo matemático foram minimizadas por atos isolados. Todavia, dentro do círculo lógico matemático, ocorreram diversas interpretações filosóficas acerca do conhecimento matemático. Primeiro, percebeu-se que é possível transcrever formalmente raciocínios circulares de maneira formalmente rigorosa, segundo, que o Teorema de Gödel não destrói o programa formalista, mas mostra os seus limites, finalmente que a *incompletude* proporcionou ainda uma revisão do conceito de verdade.

Voltando à parábola da pedra que cai no centro de círculos concêntricos, nossos estudos neste capítulo possibilitaram-nos compreender até aqui as condições em que a pedra foi largada em queda livre e, em seguida, como a queda da pedra (o impacto do Teorema de Gödel) propiciou movimentos ondulatórios no *círculo interno* (lógico matemático). Apesar de não provocar significativamente os matemáticos, o Teorema de Gödel mexeu definitivamente com a visão de mundo dos lógicos: novas sub-áreas foram criadas nesta comunidade, novas técnicas foram desenvolvidas. O formalismo foi repensado, alguns decretaram seu fim, outros seus limites, a necessidade de sua reformulação.

No caso dos matemáticos, sua reação não poderia ser diferente. Sua atividade principal é criar teorias matemáticas, resolver problemas em aberto, e não filosofar sobre a possibilidade destes problemas não terem solução. Todavia, esta reação não deve ser encarada como uma ruptura com o desenvolvimento posterior da lógica matemática. As questões sobre a teoria de conjuntos interessaram os matemáticos que nunca deixaram de se preocupar com o rigor lógico de suas teorias e viram nos desenvolvimentos posteriores de Gödel e Cohen, argumentos de autoridade para a

continuidade de suas pesquisas fundamentadas na teoria de conjuntos, em particular no uso do axioma da escolha.

Estas análises nos mostram ainda outras questões historiográficas. Percebemos que o Teorema de Gödel provocou ainda um movimento segundo o qual uma *comunidade científica* sofre interferências de outra *comunidade científica*. Uma interferência de ondas de círculos distintos. Fleck denominou este movimento de *circulação de idéias intercoletivas*, ela é responsável pela *mutação do estilo de pensamento* de cada comunidade envolvida. A *circulação de idéias intercoletivas* é mais complexa do que uma simples comunicação entre comunidades. Ocorre aqui uma dinâmica que interfere no vocabulário de cada comunidade, em pressupostos, postulados, técnicas e metodologias. Novas teorias são criadas, novas visões de mundo. No próximo capítulo veremos estes processos com mais detalhes.

Parte II

O Teorema de Gödel fora do círculo lógico matemático

3

Metáforas e Modelos na Ciência

“Talvez toda ciência tenha que começar
com metáforas e terminar com álgebra”
Max Black

3.1. Considerações iniciais

Pretendemos responder neste capítulo à seguinte questão historiográfica: de que maneira as ondas provocadas pela queda da pedra podem propagar-se no *círculo externo*? Qual é a força responsável por este movimento? Em outras palavras, desejamos saber como um fato científico de uma comunidade pode circular em outras comunidades e provocar um impacto de modo a alterar *estilos de pensamento*.

O núcleo destas questões está na *circulação de idéias intercoletivas*. Após compreender o significado deste conceito e sua relevância histórica, veremos que mecanismos propiciam este movimento que, por ser histórico, produz mudanças: as ondas oriundas do *círculo interno* não são exatamente as mesmas quando chegam no *círculo externo*. De fato, idéias que transitam em diferentes círculos são interpretadas de acordo com o *estilo de pensamento* de cada um. Devemos então pensar sobre quais mecanismos têm a capacidade de interagir diferentes *estilos de pensamento* e propiciar esta *circulação de idéias intercoletivas*. A lingüística nos fornece uma hipótese: lá aprendemos que metáforas são mecanismos que fazem um papel similar nos termos de uma oração: modifica um para compreendermos outro. Neste sentido, perguntamos se as metáforas têm este potencial na ciência e encontraremos nos modelos científicos extensões das metáforas. Finalmente refletiremos sobre como modelos e metáforas – enquanto mecanismos que promovem a *circulação de idéias intercoletivas* – podem provocar *mutações do estilo de pensamento de comunidades científicas*.

Esperamos compreender no final deste capítulo a *circulação de idéias intercoletivas* como o movimento de propagação das ondas após a queda da pedra de um círculo para o outro, os modelos e metáforas como a força capaz de levar as ondas do *círculo interno* para o externo, isto é, o elo de comunicação entre estes círculos. Metáforas e modelos ainda nos mostrarão como as ondas propagam no *círculo externo*, o que nos permitirá no próximo capítulo relacionar as interpretações do Teorema de Gödel nos dois círculos.

3.2. Circulação de idéias intercoletivas

Como a ciência é o motivo da formação e estruturação das comunidades, é razoável considerar que uma comunidade é composta de especialistas e não especialistas. Estes últimos são estudantes, professores ou especialistas de outra comunidade, usuários deste conhecimento. Esta observação motivou Fleck a definir a estrutura de uma comunidade como dois círculos concêntricos: o interno inclui os especialistas e o externo os não especialistas. Um indivíduo pode ser membro do *círculo interno* de uma comunidade e dos *círculos externos* de outras comunidades. Ou pode ainda pertencer aos *círculos internos* de duas comunidades (o que é pouco comum atualmente).¹¹⁹ Logo existe uma complexa rede de interseções entre as estruturas de diferentes comunidades.

Ao definir a estrutura dos dois círculos, Fleck fala sobre a *circulação de idéias intercoletivas*. Os membros do *círculo interno* produzem um conhecimento específico nos rigores da ciência e os do *círculo externo* apropriam-se desse conhecimento sob um formato bem mais simplificado, reelaborado com uma linguagem mais adequada às novas necessidades. Os principais instrumentos que permitem ao indivíduo do *círculo externo* de uma determinada comunidade entrar em contato com o conhecimento científico desta área são os livros de divulgação científica, manuais didáticos e meios de comunicação não impressa, como rádio e a televisão. A *circulação de idéias intercoletivas* é, portanto, um processo dinâmico que ocorre entre grupos socialmente organizados.

O que nos permite considerarmos uma *comunidade científica* como um grupo socialmente organizado é o seu *estilo de pensamento*. Ele orienta como e o que se vê. Nas palavras de Fleck, “nós olhamos com nossos olhos, mas vemos com os olhos do coletivo” (FLECK, 1979, p. 137). Assim, qualquer teoria só é inteligível conforme os pressupostos direcionados por um *estilo de pensamento*.

Fleck prevê a extensão desta dinâmica para qualquer grupo social:

¹¹⁹ Por exemplo, um historiador da matemática, por ser um especialista nesta área, está no *círculo interno* da comunidade de historiadores da matemática, mas está também no *círculo externo* de comunidades como matemática, educação matemática, história da física, etc.

A fertilidade da teoria do pensamento coletivo se mostra precisamente na possibilidade que nos proporciona para comparar e investigar de forma uniforme o pensar primitivo, arcaico, ingênuo (...) também pode ser aplicado ao pensamento de um povo, de uma classe ou de um grupo (...). (FLECK, 1979, p. 98)

As idéias de Fleck não diferem muito de alguns autores posteriores da história cultural. Chartier (1994) nos fala sobre a circulação de idéias entre grupos sociais:

As obras não têm sentido estável, universal, congelado. Elas são investidas de significações plurais e móveis, construídas na negociação entre uma proposição e uma recepção, no encontro entre as formas e motivos que lhes dão sua estrutura e as competências ou expectativas dos públicos que delas se apoderam. Por certo, os criadores, ou as autoridades, ou os "clérigos" (pertencam eles ou não à Igreja) sempre aspiram a fixar o sentido e a enunciar a interpretação correta que deve constranger a leitura (ou o olhar). (CHARTIER, 1994, p. 103)

Assim, para compreender as releituras de uma obra científica no *círculo externo*, devemos nos lembrar de que os indivíduos deste *círculo externo* são membros de um *círculo interno* de outra *comunidade científica*. Neste caminho, os membros de uma *comunidade científica* compartilham a compreensão de uma obra dentro de uma ótica que pode ser invisível para os praticantes de outra *comunidade científica* que não participaram do processo de comunicação das idéias. Isto porque a leitura é coletivamente guiada pelo *estilo de pensamento* desta comunidade e, não, o da outra. Se uma obra pode ser escrita de maneiras diferentes então pode ser dotada de sentidos diferentes. Concluímos que, lida em contextos diferentes, uma obra pode estimular diferentes construções e reconstruções.

Quando passamos de um grupo para outro, palavras mudam seu significado, as idéias obtêm um colorido diferente, as sentenças recebem outro significado, as opiniões um novo valor. Se os grupos são considerados distantes um do outro, uma troca de valores pode ser completamente impossível, e transformar um pensamento consiste, neste caso, em sua completa destruição. (FLECK, 1986, p. 85).

Deste modo, a comunicação entre diferentes *comunidades científicas* implica na existência de similaridades nos seus *estilos de pensamento*. Observamos então que existem graus de similaridade entre a obra original e suas reconstruções.¹²⁰ Um conceito modificado por uma *circulação de idéias intercoletivas* entre comunidades de

¹²⁰ FLECK, 1986, pp. 81-85.

uma mesma grande área, como ciências exatas, por exemplo, pode não dificultar a comunicação entre os membros destas comunidades, mas se a circulação ocorreu entre duas áreas distintas, como exatas e humanas, então a comunicação torna-se mais difícil, porque existem menos similaridades entre os seus *estilos de pensamento*.¹²¹ É possível que os membros da comunidade de onde o conceito foi produzido acusem os da outras de apropriar-se do conceito sem compreendê-lo.

Estas variações mostram, todavia, que a obra não é um monopólio do escritor, é também uma construção contextualizada do leitor, o produto de uma leitura.¹²² Ela só existe quando é lida. De uma forma geral, a escrita e todos os seus vínculos sócio-culturais são células de um organismo que consiste nas formas de controle dentro de uma comunidade. O leitor não é um indivíduo singular, é um ser social que participa da obra que lê, interpreta, interage, compartilha. Sua leitura não é introspectiva, velada, enclausurada. Nenhuma ordem universal é capaz de moldar a oralidade em uma única leitura.¹²³

Concebidos como um espaço aberto a múltiplas leituras, os textos (e também todas as categorias de imagens) não podem, então, ser apreendidos nem como objetos cuja distribuição bastaria identificar nem como entidades cujo significado se colocaria em termos universais, mas presos na rede contraditória das utilizações que os constituíram historicamente (CHARTIER, 1998, p. 61).

¹²¹ Os físicos preferem definir derivada como taxa de variação, à maneira de Newton, enquanto os matemáticos definem como inclinação de uma reta tangente ao gráfico de uma função. Embora os praticantes das duas *comunidades científicas* reconheçam as equivalências entre os conceitos, o fato é que cada contexto induz uma “forma de ver”. Na medida em que a afinidade entre as comunidades diminui, este reconhecimento se dissipa. Por exemplo, os físicos, em geral, não compreendem bem o que os matemáticos pensam sobre topologia, e vice-versa. Mas entre os matemáticos e os psicanalistas, esta incongruência é maior. Na mesma comunidade – a matemática – a compreensão de um mesmo objeto pode ser transmitida de formas e sentidos diferentes, em diferentes tempos. Por exemplo, a idéia de número, desde a Antigüidade até o século XX já foi dotada de pelo menos três sentidos diferentes: se relacionava com quantidades para os gregos, com medidas para os matemáticos modernos e com classes de classes para os logicistas. Outro exemplo: o cálculo diferencial e integral de Newton é comumente descrito nos atuais manuais didáticos com todos os símbolos e conceitos modernos, completamente distintos daqueles utilizados por Newton. Isto é, o texto científico foi “reinventado” de tal forma que os atuais praticantes desta ciência possam compreendê-lo dentro do seu *estilo de pensamento*.

¹²² CHARTIER, 1998, p. 61.

¹²³ Em particular, deduzimos que a obra de Gödel não deve necessariamente refletir apenas o juízo de Gödel, mas os diversos juízos que nasceram das seqüentes leituras contextualizadas. Estas leituras carregam diferentes interpretações na medida em que incorporam os diferentes *estilos de pensamento* das suas respectivas comunidades.

A partir destas premissas, perguntamos qual é o papel do historiador. Na visão de Chartier, o historiador não estuda mais as regras que explicam as relações sociais, mas as formas de pensamento e estratégias utilizadas pelos grupos sociais. Esta visão provoca uma mudança de rota na história, de estruturas para redes, do universal para o singular. Não desejamos aqui estender o debate sobre o que é história, e sim, mostrar que a história, segundo a linha tecida aqui, possui vínculos com a literatura, na medida em que a escrita do historiador se molda em formas literárias, como preconiza Hayden White:

Uma narrativa histórica não reproduz os eventos que descreve, (...) traz a mente imagens das coisas que indica, tal como faz a metáfora. Corretamente entendidas, as histórias nunca devem ser lidas como signos inequívocos dos acontecimentos que relatam, mas antes como estruturas simbólicas, metáforas de longo alcance, que ‘comparam’ os acontecimentos nelas expostos a alguma forma com que já estamos familiarizados em nossa cultura literária. (WHITE, 1994, p. 108).

Nesta linha de pensamento, pode-se dizer que um discurso histórico é simultaneamente fala figurativa, literal e técnica.¹²⁴ É, portanto, plausível inserir as figuras de linguagem – por exemplo, as metáforas – como formas de releitura e reinvenção de obras, dentro de um panorama histórico. É plausível pensar nas metáforas como potenciais veículos de *circulação de idéias intercoletivas* entre *comunidades científicas*. Na próxima seção, veremos de que maneira isto ocorre.

3.3. Metáforas

A quantidade de material bibliográfico produzido sobre o tema “metáfora” é excessivamente vasta e foge completamente de nossos propósitos tentar exauri-la. Como o nosso objetivo é estudar de que maneira a metáfora contribui para a releitura e interpretação de obras científicas, nossa busca elimina grande percentual de obras sobre o assunto, restando as que julgamos como as que mais se ajustam às nossas necessidades: as teorias *interativas* sobre metáforas. Antes de refletirmos sobre estas teorias, porém, faremos uma pequena digressão histórica sobre o tema para facilitar a compreensão das mesmas.

¹²⁴ WHITE, 1991, p. 26.

É freqüente citar os estudos de Aristóteles (séc. IV a.C.) sobre metáforas como a primeira sistematização conhecida sobre o assunto. Para o filósofo, a linguagem metafórica compreendia simultaneamente retórica e poética. Na *Poética*, a metáfora é definida da seguinte maneira:

Metáfora é a transferência de um nome alheio do gênero para a espécie, da espécie para o gênero, de uma espécie para outra, ou por via da analogia. Do gênero para a espécie significa, por exemplo, “Meu barco está parado ali”, porque *fundear* é uma espécie de parar; de espécie para o gênero: “Palavra! Odisseu praticou milhares de belas ações!”, porque *milhares* equivale a *muitas* e aqui foi empregado em lugar de muitas; de uma espécie para outra, por exemplo: “Extraíu a vida com o bronze” e “talhou com o incansável bronze”; nesses exemplos *extrair* está por *talhar* e *talhar* por *extrair*, pois ambos querem dizer *tirar*. (ARISTÓTELES, c. XXI, p. 51).

Assim, na visão de Aristóteles, a metáfora é um fenômeno que transporta para um objeto o nome de outro, é próprio da palavra (o foco não é a frase e nem o texto), e tem como base a semelhança, razão necessária para a relação metafórica entre dois termos. Ao longo de sua descrição sobre metáfora, no entanto, Aristóteles não esclarece a natureza e os limites desta semelhança,¹²⁵ mas os seus exemplos mostram que a semelhança que produz o discurso metafórico é a transferência baseada na analogia de quatro termos, considerada a forma mais popular de metáfora na Grécia: dados os termos A, B, C e D, suponha que A está para B assim como C está para D. Então podemos substituir A por C e vice-versa, ou ainda podemos criar um elo entre A e D ou entre C e B.¹²⁶

Em outras palavras, a metáfora, segundo Aristóteles, é uma troca de um enunciado literal por um enunciado expresso em um sentido figurado, o que delimita as diferenças entre os significados literal e metafórico de uma coisa e especifica a analogia, ou similaridade, como um meio para criação de metáforas. Segundo esta concepção, pressupõe-se que um discurso não pode ser inteiramente metafórico, ele deve, de alguma forma, conter uma parte literal; e o significado metafórico de um termo depende da analogia estabelecida com significado literal. A metáfora, na visão

¹²⁵ A ausência destes limites nos permite definir qualquer similaridade como metáfora. Por exemplo, quando dizemos que a “laranjeira é uma árvore”, transportamos, por força da similaridade, o nome *laranjeira* para *árvore* e, no entanto, nenhuma metáfora foi utilizada aqui.

¹²⁶ Por exemplo, se a *velhice* está para a *vida* assim como o *entardecer* para o *dia*, podemos falar metaforicamente sobre a “velhice do dia” e sobre o “entardecer da vida”.

comparativa aristotélica, tem uma função restrita de ornamentação do discurso pelo falante para adequar ao ouvinte.

A metáfora não motivou muitos debates desde Aristóteles até o século XX. Na Antigüidade merece destaque a apresentação de Cícero e Quintiliano da metáfora como comparação abreviada.¹²⁷ No século XVII, Emanuele Tesauro, em *Luneta Aristotélica*, amplia a teoria aristotélica para além da retórica e da poética, analisando o processo metafórico na pintura, escultura, arquitetura, etc. e acredita que a metáfora tem o poder de incitar a busca pela intertextualidade por meio de grandes obras e realizações. Ele indica a elaboração de uma referência – como um fichário ou uma tabela – para consulta, a partir da qual, poder-se-ia construir metáforas sobre determinada realidade. Por exemplo, para fazer uma metáfora sobre um anão, consultava-se o índice das *coisas pequenas* dentro da categoria *quantidade*.¹²⁸ No século XVII ainda, Giambattista Vico (1979) questiona em *A Ciência Nova* esta existência de universos semânticos controlando a produção e interpretação da metáfora. A metáfora é, para Vico, um elemento de comunicação dialógica, não se resumindo a fórmulas lingüísticas. Linguagem e metáfora, em parte, compõem o pensamento.¹²⁹ Já no século XIX, Fontanier (1968) relaciona a metáfora com semelhança e mostra que esta figura abrange todas as classes de palavras.¹³⁰ Para ele a alegoria tem parentesco com a metáfora e a diferença fundamental entre as duas figuras reside no fato de que a metáfora oferece apenas um sentido verdadeiro – o sentido literal – enquanto a alegoria consiste em um sentido literal e um espiritual formando um duplo sentido. Ou seja, enquanto as metáforas transformam os objetos, as alegorias os refletem.¹³¹

¹²⁷ Por exemplo, o enunciado metafórico em termos aristotélicos “o homem é como um lobo” seria proferido como “o homem é um lobo”. Esta visão domina a Retórica Clássica, colocando em nome de Aristóteles a definição de metáfora como substituição do termo próprio por uma palavra cujo significado entendido está numa relação de semelhança com o significado da palavra substituída. (LAUSBERG, 2004, p. 163).

¹²⁸ ECO, 1994, pp. 223-225.

¹²⁹ SHIBLES, 1971, p. 297.

¹³⁰ FONTANIER, 1968, p. 99.

¹³¹ Esta idéia ressuscita as concepções de Du Marsais, no século anterior, que definia a metáfora como uma figura que transforma o sentido próprio de um nome em um outro sentido, aceito por esse nome somente em virtude de uma comparação mental (SHIBLES, 1971, p. 90).

As incursões dos processos metafóricos para fora do campo literário instigaram dúvidas sobre a concepção da metáfora como fenômeno estritamente lingüístico. A metáfora passa a ser reconhecida como um fenômeno do pensamento humano e a visão comparativa clássica que assentava na palavra o foco do processo metafórico deu lugar a uma nova concepção que retiraria do enunciado metafórico a instituição de um termo como literal. Esta mudança de abordagem reconstrói a idéia da metáfora como processo interativo.

A *concepção interativa* do processo metafórico encontrou fundamento nos trabalhos de I. A. Richards (1936). Para Richards, a metáfora não está relacionada com nenhum uso excepcional da língua, mas consiste em um princípio básico da língua. Por ser um aspecto do pensamento humano, ela tem usos que vão muito além do nível da palavra e da expressão verbal, como pregavam os retóricos antigos¹³² (isto é, a metáfora era, para estes autores, um fenômeno exclusivamente lingüístico). Nos termos de Richards, se pensarmos na metáfora como uma idéia (*teor*) sob o signo de outra (*veículo*), então a metáfora não se resume no veículo, como na concepção comparativa, mas no conjunto dos dois termos que, por sua vez, mantém entre si uma relação de interdependência. Desta maneira, a metáfora produz uma tensão, não apenas entre teor e veículo, mas principalmente entre duas possíveis interpretações diferentes que um mesmo enunciado pode estimular. O efeito metafórico brota da impossibilidade de se encontrar uma interpretação literal.

As noções de Richards sobre a estrutura intrínseca do enunciado metafórico são retomadas e ampliadas por Max Black, inicialmente em *Models and Metaphors* (1962) e revisadas, posteriormente, em *More about Metaphor* (1983).¹³³ O foco da análise de Black aponta para os enunciados metafóricos, e não para as palavras utilizadas metaforicamente. Para Black, a metáfora transcende a comparação do uso tradicional do termo e seu contexto metafórico, proporcionando uma interação de modo que os

¹³² A preocupação na extensão dos usos da metáfora na concepção de Richards, no entanto, colocaram sua teoria em uma cilada epistemológica. Passando de um fenômeno verbal e observável para um fenômeno do pensamento e, portanto, não diretamente observável, nos termos de Richards, mas do pensamento em sua totalidade, ele nos convida a pensar que tudo que possa ser considerado como pensamento ou consequência do pensamento é metafórico. Esta amplitude excessiva foi lamentada pelo próprio Richards (1936, pp. 116-117).

¹³³ Nossas análises sem baseiam em uma reedição de 1993.

significados de ambos os termos podem ser modificados. Por exemplo, a frase “o homem é um lobo”, quando proferida, procura compreender o homem por meio de alguma similaridade que ele possui com o lobo, mas esta frase também pode modificar a idéia que se tem do lobo, em seu contexto original, devido à associação feita entre homens e lobos. Neste caso, a metáfora desloca o foco da semântica da palavra para a semântica da frase.

Uma metáfora pode ser discriminada em dois aspectos, que Black chama de *ênfase* e *ressonância*. Uma metáfora *enfática* não admite variações ou substituições dos termos utilizados e uma metáfora *ressonante* tem o seu uso ecoado pelo ouvinte, permitindo elaborações futuras.¹³⁴ A ênfase e a ressonância de uma metáfora têm graus de intensidade e elas não são independentes: geralmente, metáforas com muita ênfase possuem muita ressonância.¹³⁵ Uma metáfora sem ênfase com notável *ressonância* está apta a produzir o que este autor chama de *dissonância*. Já um enunciado metafórico dotado dos dois aspectos – ênfase e ressonância – é denominado como metáfora *forte*.¹³⁶ Em uma metáfora *forte*, a tensão entre teor e veículo ou, nas palavras de Black, entre os *tópicos primário* e *secundário*, respectivamente, é explicada da seguinte maneira: o ouvinte de um enunciado metafórico participa de um contexto dentro do qual ele identifica o tópico primário e seleciona no tópico secundário as propriedades que contem analogias com o tópico primário.¹³⁷ Então uma rede de correspondências é tecida e ajustada ao tópico primário e, inversamente, esta rede permite uma releitura das propriedades do tópico secundário.

Black privilegia o sistema em detrimento de suas partes. Por exemplo, no enunciado “a sociedade é um oceano” o foco não deve ser o oceano (como coisa), mas

¹³⁴ BLACK, 1993, p. 26.

¹³⁵ Nas palavras de Black, a oposição de uma metáfora *enfática* seria uma metáfora ornamental ou decorativa. Isto é, metáforas com baixo grau de *ênfase* não tem maiores efeitos do que ornamentar discursos.

¹³⁶ Logo, uma metáfora forte apropriada por uma *comunidade científica* tem poder de transformar um *estilo de pensamento*, pois, pela força de sua *ressonância*, ela reverbera no *círculo interno* com potencialidade de reverberar também no *círculo externo* e, pela força de sua *ênfase*, ela possibilita explicar uma teoria ou um conceito preenchendo uma lacuna, não apenas semântica, mas cognitiva também.

¹³⁷ Uma elocução metafórica é uma opção verbal que essencialmente demanda uma compreensão, uma resposta criativa de um leitor atento. (Ibid., p. 27)

todo o sistema de relações assinaladas pela presença da palavra oceano na sentença em questão.¹³⁸ Black define este sistema como “sistema de lugares comuns associados”, isto é, o conjunto de opiniões e pressupostos¹³⁹ que a comunidade lingüística conecta aos usos literais da palavra.

A compreensão tanto de Richards como de Black sobre metáforas nos mostra uma afinidade com nossos propósitos. Estes autores dão às metáforas uma força capaz de mudar a compreensão de que temos de certas palavras devido à associação a que elas estão sujeitas dentro de um enunciado metafórico. Podemos deduzir que os enunciados metafóricos podem alterar *estilos de pensamento de comunidades científicas*, conforme a força da metáfora, mediada pela sua *ênfase* e sua *ressonância*, elementos capazes de “impulsionar ondas”.¹⁴⁰

Contribuições para esta linha de raciocínio podem ser encontradas também na obra de George Lakoff. Para Lakoff (1993) a metáfora possui um valor cognitivo maior do que o estilístico. Proferindo uma metáfora, conceitos abstratos tornam-se mais acessíveis à compreensão e esta capacidade cognitiva permite-nos dar estrutura a conceitos não estruturados. Ou seja, a metáfora contribui para a constituição de uma visão de mundo.

Para Lakoff há dois tipos de metáforas. O primeiro, a metáfora *conceitual*, estabelece projeções de um domínio da experiência física (fonte) para a esfera de entidades abstratas (alvo). Como exemplo, Lakoff debate exaustivamente o enunciado “o amor é uma viagem”. As correspondências ontológicas entre os dois domínios

¹³⁸ Ibid., p. 27.

¹³⁹ A historiografia de Fleck define isto como *estilo de pensamento*.

¹⁴⁰ Apesar das contribuições das teorias da interação para a compreensão das metáforas, elas já foram alvo de críticas. A principal delas deve-se a Jacques Derrida (1991). O francês coloca a metáfora como um produto exclusivo da linguagem. É, portanto, impossível decifrar as metáforas em uma obra filosófica ou científica. A crítica de Derrida obteve alguns desdobramentos. Donald Davidson (1984) rejeita o sentido metafórico e nega a existência de estruturas lingüísticas que realizem o significado metafórico. A metáfora é um mecanismo psicológico que nada tem a ver com a lingüística. O locutor profere uma metáfora quando, conhecendo o sentido literal do termo, decide utilizá-lo em um outro sentido. A este respeito, há uma crítica contundente de Umberto Eco: “A interpretação metafórica nasce da interação entre um intérprete e um texto metafórico, mas o resultado dessa interpretação é autorizado tanto pela natureza do texto quanto pelo quadro geral dos conhecimentos enciclopédicos de certa cultura, e em regra geral, ela não tem nada a ver com as intenções do locutor” (ECO, 1992, p. 162). Não nos ocuparemos com a querela de Derrida e Davidson que desvia o rumo que procuramos das metáforas. Menos do que o valor lingüístico ou psicológico das metáforas, estamos interessados aqui no valor cognitivo das metáforas.

cognitivos são as seguintes: (1) a *pessoa* corresponde ao *viajante*; (2) os *objetivos da vida* são os *destinos da viagem*; e (3) as *dificuldades da vida* são os *obstáculos* ou impedimentos ao prosseguimento da viagem.¹⁴¹ A metáfora faz sentido porque os domínios de conhecimento são dotados de uma coerência estruturada da analogia. Ou seja, a forma como falamos da vida é o reflexo da forma como pensamos sobre uma viagem, assim concebemos uma realidade “abstrata”, aproximando-a de uma referência concreta. Esta transferência de um domínio concreto – cujo conhecimento incide da experiência física sobre ele – para a concepção de um domínio abstrato constitui a essência da metáfora *conceitual*. Deste modo, muito além do valor retórico, a metáfora adquire um valor conceitual de projeção da estrutura de um domínio concreto num domínio abstrato da experiência. O outro tipo de metáfora, a metáfora *imagem*, projeta uma imagem mental em outra. Funciona da mesma maneira que a metáfora *conceitual*, distinguindo-se dela apenas pelo fato de que, neste caso, os domínios são imagens mentais singulares.¹⁴²

A importância do contexto na compreensão da metáfora é pontuada por Lakoff. Segundo o autor, o grau de eficiência da elocução metafórica dentro de um discurso está assentado na experiência concreta. Isto nos permite obter uma imagem mental de um conceito abstrato e dotá-lo de uma estrutura que, de outro modo, seria difícil encontrar nele.¹⁴³ Conclui-se que é possível dizer que alguns *domínios conceituais* contêm aplicações metafóricas melhores do que outros e que algumas metáforas sejam produzidas por correspondências de uma linguagem, mas não de outra.¹⁴⁴ Por exemplo, ao proferir o enunciado “tempo é dinheiro”, somos compelidos a economizar o tempo, gerenciá-lo, enfim, tratá-lo como um recurso limitado para uma necessidade básica ou conforto pessoal, da mesma forma como encaramos o dinheiro. No entanto, este pensamento pode não ter sentido nenhum em outras culturas, tendo em vista que atribuir valor ao tempo em comparação com o dinheiro é uma visão própria de

¹⁴¹ LAKOFF, 1993, p. 207.

¹⁴² Ibid., p. 229.

¹⁴³ Ibid., p. 240.

¹⁴⁴ Os *domínios conceituais* de Lakoff equivalem aos *tópicos primário e secundário* de Black, de modo que o termo de um autor pode ser usado na teoria do outro sem prejuízo de significado e de contexto. Todavia, creditando nas terminologias de Lakoff uma adequação melhor aos nossos interesses historiográficos, ela será adotada em lugar das de Black, deste ponto em diante.

sociedades ocidentais. Esta linha de raciocínio nos remete imediatamente às reflexões da seção anterior, quando afirmamos que existem graus de similaridade entre a obra original e suas reconstruções e estes graus variam de acordo com os *estilos de pensamento* de cada *comunidade científica*.

Refletindo sobre as teorias *interativas* sobre metáfora brevemente descritas nas linhas acima, alguns aspectos merecem destaque tendo em vista os propósitos que nortearam esta pesquisa. Em primeiro lugar, a metáfora não deve se resumir em palavras isoladas, mas no enunciado produzido. Segundo, o sentido da metáfora depende do contexto de sua criação. Terceiro, a metáfora é necessária quanto à função que exerce, seja adornando o discurso, seja preenchendo uma lacuna semântica no discurso, seja preenchendo uma lacuna cognitiva em algum *domínio conceitual*, seja mostrando relações entre *domínios conceituais* e permitindo, com isto, novas leituras da realidade.

Estes elementos da metáfora demonstram o seu potencial para a historiografia da ciência, quando desejamos compreender a *circulação de idéias intercoletivas*. Um termo científico tem um significado dentro de uma *comunidade científica* formado pelo *estilo de pensamento* desta comunidade. Então, um membro de outra *comunidade científica* – isto é, pertencente ao *círculo interno* de outra comunidade – participa do *círculo externo* da primeira comunidade e, como usuário do conhecimento produzido nela, apreende o termo científico, mas o transforma através de uma relação metafórica – pois segundo a teoria *interativa* esta relação deve ser contextualizada – para atender às necessidades do seu *estilo de pensamento*. Estas necessidades dizem respeito à função que a metáfora irá exercer nesta segunda comunidade. A disseminação deste termo na segunda comunidade certifica que a relação metafórica foi bem sucedida. Nos termos de Black, a metáfora teve *ênfase* e *ressonância*. Houve, portanto, uma circulação de idéias entre as duas *comunidades científicas*.

A relação metafórica ocorrida entre duas *comunidades científicas* podem nos mostrar de que maneira *conceitos científicos* circulam entre duas comunidades, mas perguntamos sobre como isto funciona para *teorias científicas*. Neste sentido, alguns aspectos da *concepção interativa* da metáfora merecem comentários adicionais.

Black (1993) sugere que reflitamos sobre os dois grupos de asserções: (G1) um jogo é uma disputa, (G2) entre dois oponentes, (G3) em que um jogador vence somente na rendição do outro; e (M1) o casamento é uma batalha sustentada, (M2) entre dois competidores, (M3) em que a recompensa de um competidor é uma conquista à custa das despesas do outro.¹⁴⁵ Para Black, a relação metafórica entre os dois complexos ocorre de uma maneira similar ao *isomorfismo* de estruturas matemáticas. Este *isomorfismo* entre os complexos de asserções pode ser realizado via identidade, extensão, similaridade, analogia ou ligação metafórica (quando a metáfora original implica metáforas subordinadas).

O exemplo de Black se parece com os de Lakoff. A idéia do isomorfismo também. Lakoff compreende a metáfora como um mapeamento cruzando *domínios conceituais* e a expressão metafórica refere-se a uma expressão lingüística que é a realização superficial deste mapeamento. Por exemplo, no enunciado “o amor é uma viagem”, os termos *amor* e *viagem* não são apenas palavras interligadas por uma relação de similaridade. São, na verdade, domínios em que fazemos corresponder: amantes e viajantes, a relação amorosa com o veículo e os objetivos comuns dos amantes (como, por exemplo, a busca pela felicidade) com os destinos comuns dos viajantes.¹⁴⁶

Percebemos nas analogias de Black e Lakoff entre o processo de criação das metáforas e os *isomorfismos* da matemática que as metáforas são modelos sintetizados ou, de outro modo, os modelos científicos são metáforas ampliadas. O próprio Black afirma que “todo complexo de implicação apoiado pelo tópico secundário de uma metáfora, eu penso agora, é um *modelo* de atribuições feitas ao tópico primário: Toda metáfora é a ponta de um modelo submerso” (BLACK, 1993, p. 31).

Logo, aplicando as idéias sobre metáforas nos campos científicos, somos compelidos a pensar em modelos como possíveis extensões das metáforas. Na próxima seção discutiremos os modelos na ciência e suas relações com as metáforas.

¹⁴⁵ BLACK, 1993, pp. 28-29.

¹⁴⁶ LAKOFF, 1993, p. 202.

3.4 Modelos Científicos

Não é incomum conceber um modelo científico como uma construção que representa algum objeto. Esta construção não se resume em uma simples cópia, tendo em vista que a representação convida-nos a observar o objeto de uma ótica tal que, de outra forma, poderia não ser visualizado ou compreendido. Com o processo de modelagem, é possível ainda manipular o objeto estudado por via de todo o conjunto de técnicas e pressupostos da teoria que produziu o modelo. Uma das questões sobre as quais nos debruçaremos nesta seção é como estes modelos são importados de outras teorias, inclusive, de outras áreas de conhecimento. Outra é de que maneira os modelos são extensões de metáforas.

Não há, obviamente, uma unanimidade em torno do que seja um modelo na ciência e quais os seus desdobramentos na *comunidade científica*. Por exemplo, Black (1962) acrescentaria aos nossos pressupostos acima que os modelos participam da lógica da investigação científica, não como um epifenômeno da pesquisa; não são apenas estudos preparatórios dispensáveis para chegar às teorias científicas. Como a compreensão sobre modelo se dissolve em diversas teorias, procuraremos, após breve digressão histórica, focalizar nossa atenção para as teorias que partem de pressupostos similares aos das *concepções interativas* de metáforas.

Na referência mais remota que encontramos sobre modelos, Nagel (1961) afirma que uma teoria científica consiste em um cálculo abstrato, um conjunto de regras para dar conteúdo empírico ao cálculo abstrato e uma interpretação semântica em termos de elementos visualizáveis ou conceitos familiares.¹⁴⁷ Neste sentido, a palavra “modelo” na formulação de Nagel acaba adquirindo dois sentidos, como observou Suppe (1979). Ora o modelo de Nagel se relaciona com aquele da lógica matemática, ora o modelo é um ícone daquilo que modela, como um modelo em escala de um avião. Conclui-se que os modelos para Nagel assumem simultaneamente os dois sentidos.¹⁴⁸ Contra esta abordagem, Suppe argumenta que se Nagel estivesse correto, então o modelo das bolas de bilhar seria também um modelo matemático para a teoria atômica de Bohr e, por outro lado, um modelo matemático sofisticado, como o espaço de Hilbert na teoria

¹⁴⁷ NAGEL, 1961, p. 90.

¹⁴⁸ SUPPE, 1977, pp. 96-97.

quântica, o qualificaria como um ícone.¹⁴⁹ Suppe classificou, portanto, os modelos como *matemáticos* e *icônicos*, mas Hempel (1977) observou que alguns modelos *icônicos* guardam uma certa similaridade com os *matemáticos* que dificulta a classificação sugerida por Suppe: o tipo de representação. Para Hempel modelos que comparam o comportamento de dois sistemas podem ser tanto *icônicos* quanto *matemáticos* e modelos que comparam as características físicas de dois sistemas só podem ser *icônicos*. Hempel então prefere classificar os modelos como representações físicas e representações verbais. Estes últimos se referem a algo, não por similaridades físicas, mas por convenções lingüísticas.

Seja qual for a classificação dos modelos, as abordagens acima guardam entre si uma característica comum: todos os modelos descritos são representações por analogia. Estas teorias nos mostram que um modelo pode servir de elo entre duas *comunidades científicas* na medida que o *estilo de pensamento* de uma pode fornecer representações que possibilitam a compreensão de uma teoria produzida na outra *comunidade científica*. Entretanto, falta aqui o caráter histórico. De que maneira as mudanças *do estilo de pensamento* podem interferir nos modelos construídos? Teorias mais recentes sobre modelos podem contribuir para esta reflexão. Elas colocam os modelos não como representações, mas como *estruturas*. Neste caminho, Dutra (2005) distinguiu duas concepções sobre modelos: a *semântica* e a *pragmática*, a primeira sendo, na verdade, um caso particular da segunda. Nas linhas que seguem, estudaremos estas concepções e, em seguida, veremos de que maneira elas contribuem para o nosso entendimento sobre *circulação de idéias intercoletivas* entre *comunidades científicas*.

A *concepção semântica* tem antecedentes do início do século XX quando as doutrinas neopositivistas colocavam as teorias científicas como corpos axiomáticos formulados na linguagem da lógica matemática. Esta visão formou a base das teorias de modelos de Nagel, Suppe e van Fraassen (1980, 2001). Este último define modelos como idealizações, com propriedades operacionais, como as estruturas axiomáticas de

¹⁴⁹ Ibid, p. 99.

um fenômeno científico.¹⁵⁰ Com base nos trabalhos de Tarski, van Fraassen rejeita a concepção de teoria científica como um conjunto consistente de sentenças de uma linguagem, ou conjunto de teoremas, o que chamamos de abordagem sintática. Para ele, uma teoria é um par $\langle C, M \rangle$, sendo C o conjunto de teoremas e M a estrutura de conjunto, isto é, o modelo. Nem toda estrutura que satisfaz os axiomas de uma teoria pode ser considerada como modelo desta teoria, embora todo modelo tenha esta envergadura.¹⁵¹ Conclui-se que sua *concepção semântica* identifica uma teoria com um conjunto de sentenças derivadas de um cálculo axiomático.¹⁵²

Apesar de definir modelos como representações por analogia, a teoria de Suppe não está em desacordo com a de Van Fraassen. Ele também enxerga a teoria científica como um par $\langle C, M \rangle$, porém acrescenta à sua *concepção semântica* “uma classe de sistemas físicos implicados pela teoria” (SUPPE, 1989, p. 84). Os sistemas físicos devem ser compreendidos da seguinte maneira:

O que a teoria faz é diretamente descrever o comportamento de sistemas abstratos, conhecidos como sistemas físicos, cujos comportamentos dependem apenas dos parâmetros selecionados. Contudo, esses sistemas físicos são réplicas abstratas de fenômenos reais, sendo o que os fenômenos seriam se nenhum outro parâmetro exercesse sua influência. Assim, ao descrever os sistemas físicos, a teoria faz indiretamente uma caracterização contrafactual dos fenômenos reais (SUPPE, 1989, pp. 82–3).

O que Suppe chama de sistema físico é, na verdade, uma estrutura abstrata que reproduz a realidade descrita em um contexto possível. Não é, portanto, uma estrutura abstrata no sentido dos lógicos. Suppe abre uma possibilidade de pensarmos os modelos não apenas em sua limitação semântica, como também nas suas possibilidades pragmáticas. Então pode-se dizer que *concepção* de Suppe, apesar de *semântica*, tem uma tendência para o outro tipo de *concepção* que veremos a seguir, a *concepção pragmática*.

¹⁵⁰ No Brasil, um grupo de lógicos, dentre eles Newton da Costa e Francisco Dória, têm levado a cabo o programa de *axiomatização* de teorias científicas, segundo a *concepção semântica*, como veremos adiante (seção 4.2).

¹⁵¹ A *metamatemática* satisfaz as premissas de van Fraassen, pois ela foi construída para traduzir em cálculos sentenciais os enunciados matemáticos, e não, os objetos matemáticos. Dessa forma, a *metamatemática* é um modelo para a matemática, segundo a *concepção semântica*.

¹⁵² Esta concepção coloca um abismo com a noção de modelo a que os cientistas se apegam, como representação de situações reais. O próprio van Fraassen, em alguns momentos, reconhece este abismo e percebe a concepção de modelo dos cientistas, não como uma estrutura, mas como uma classe de estruturas, o que ele denomina como *modelo-tipo*.

Hesse (2000) e Cartwright (1983) ampliaram a noção de modelo na medida em que consideraram a estrutura abstrata de Suppe como um caso particular de modelo. Enquanto Hesse vê o modelo como estrutura baseada na analogia, Cartwright o vê como estrutura de simulacro; e as duas noções se misturam na descrição de Dutra sobre os modelos de plano inclinado:

Consideremos, por exemplo, um plano inclinado sobre o qual fazemos deslizar um cubo, desprezando o atrito. Como sabemos, deixando de lado os detalhes sobre o exemplo, que já é bem conhecido, este é um modelo da mecânica clássica. Nele valem as leis que, segundo Newton, descrevem a velocidade, a aceleração etc. Se construirmos um plano inclinado semelhante, com uma tábua e um cubo de madeira, por mais que sejam lisas as superfícies, sabemos que as mesmas leis não se aplicam, estritamente falando. Para isso, seria preciso considerar também o atrito. Mas, neste caso, de fato, o que fazemos é então construir um outro modelo. Todavia, mais uma vez, nosso plano inclinado feito de uma tábua e um cubo de madeira continua a não ser um contexto no qual se aplicam exatamente as mesmas leis da mecânica, pois ainda teríamos de considerar a resistência do ar, o fato de que os objetos utilizados não são rígidos, como pressupõe a teoria, que eles, de fato, se dilatam com as diferenças de temperatura, e assim por diante. E isso nos levaria a elaborar ainda outros modelos ou sistemas físicos mais, com uma crescente semelhança com o sistema físico real, a tábua e o cubo de madeira.

Em suma, nossa tábua e nosso cubo de madeira são uma situação física real para cujo estudo construímos sucessivos modelos (parciais), dentro de determinados limites conceituais, que são os limites impostos pela teoria mecânica que tomamos como ponto de partida. Os sucessivos modelos que elaboramos são estruturas abstratas, que guardam semelhanças com aquele contexto de nossa tábua e cubo de madeira reais. Estes podem, portanto, ser tomados em analogia com qualquer um daqueles modelos abstratos que construímos, e vice-versa. (DUTRA, 2005, p. 222)

Hesse divulgou sua teoria pela primeira vez no livro *Models and analogies in science*, em 1962, e prosseguiu com sua *concepção* em *Models and analogies*, um capítulo de *A companion to the philosophy of science*, de Newton-Smith (2000). Neste último, Hesse define o modelo como algo estruturalmente similar àquilo que ele modela. Inversamente, a analogia é uma relação de similaridade e/ou diferença entre um modelo e o mundo, entre um modelo e uma descrição teórica do mundo, ou entre dois modelos.¹⁵³ As analogias ocorrem em diferentes graus e, portanto, há três tipos de analogias entre dois sistemas dados. As *positivas* são as propriedades conhecidas de um sistema e, por meio das quais, podemos reconhecer o outro sistema. Neste caso, o

¹⁵³ Restritas à *concepção semântica*, as relações de analogia podem ser formais (estruturas sintáticas) ou materiais (estruturas semânticas). No primeiro caso, elas descrevem os objetos da teoria, como o caso das bolas de bilhar e o comportamento dos gases, e no segundo caso, elas expressam o comportamento dos objetos, como as leis matemáticas que regem, por exemplo, a equação da onda.

sistema é modelo para outro. As *negativas* são as propriedades não compartilhadas pelos sistemas e, neste caso, um sistema *não é* modelo para o outro. E as *neutras* são as propriedades que suspeitamos ter um sistema, quando ele é comparado com outro que sabemos que as possui. Então este sistema *pode ser* modelo para o outro. As analogias neutras são as formadoras de problemas de uma *comunidade científica* e, por isso, são *fecundas*. Logo, para Hesse, os modelos são não apenas fisicamente possíveis de se construir, mas também conceitualmente concebíveis.¹⁵⁴

Para Cartwright, o modelo guarda algumas propriedades dos objetos modelados. No entanto, este mesmo modelo pode gozar de propriedades de “conveniência”, isto é, propriedades que ajustam os objetos modelados a fim de dar coerência ao modelo.¹⁵⁵ Estas propriedades podem não ser verificadas em situações reais. Logo, modelos são cópias da realidade.

Às vezes, para dado modelo, é possível projetar (ou encontrar) uma situação real na qual os aspectos principais relevantes para a fenomenologia sejam justo os aspectos mencionados no modelo, e não outros. O hélio de baixa densidade, por exemplo, é quase um gás ideal do ponto de vista do modelo das bolas de bilhar para a mecânica estatística. Nesses casos, nos inclinamos a pensar no modelo como uma réplica exata da realidade, e a atribuir aos objetos modelados não apenas as propriedades genuínas do modelo, mas também as propriedades de conveniência (CARTWRIGHT, 1983, p. 156).

A *concepção pragmática* nos permite reconhecer os modelos como estruturas contendo leis que não regulamentam os fenômenos reais, mas os fenômenos que estão contidos no modelo. Nos termos da *concepção pragmática*, os modelos são contextos possíveis.

Podemos enfim sintetizar as teorias sobre modelos, pensando em duas concepções, a *semântica* e a *pragmática*. Enquanto os modelos na *concepção semântica* determinam a estrutura axiomática formal e imutável da teoria em questão, os modelos da *concepção pragmática* determinam uma estrutura abstrata que potencialmente representa aquilo que está sendo modelado. Esta potencialidade significa que o modelo pode ser esporadicamente ajustado a fim de manter a sua coerência em relação ao que está sendo modelado.

¹⁵⁴ HESSE, 2000, pp. 299-300.

¹⁵⁵ “Os planos inclinados *destituídos de atrito*, por exemplo, são dotados de propriedades de conveniência, e não supomos que uma tal propriedade – a falta de atrito – possa ser encontrada em situações físicas reais, similares ao modelo.” (DUTRA, 2005, p. 224)

Agora vejamos como estas abordagens podem ser interessantes para a história da ciência. No processo de circulação de uma teoria científica de uma comunidade para outra deve ser construído um canal de conexão entre os dois *estilos de pensamento*. Os indivíduos que constroem este canal possivelmente irão compartilhar de elementos dos *estilos de pensamento* de cada comunidade que possibilitam a comunicação entre as mesmas. Este canal é exatamente um modelo científico. Se a segunda comunidade for formada por lógicos, certamente o modelo será construído segundo a *concepção semântica* e a teoria em causa será modelada por uma estrutura axiomática de modo que os lógicos poderão compreender o fenômeno da outra comunidade via o modelo construído. Se a segunda comunidade não for de lógicos então o modelo construído seguirá uma *concepção pragmática* (mesmo que esta comunidade seja de matemáticos).¹⁵⁶ Logo, o *estilo de pensamento* desta comunidade guiará a construção do modelo segundo seus pressupostos e a teoria subjacente desta construção será estruturalmente uma cópia da teoria proposta na primeira comunidade.

Mutações dos estilos de pensamento da segunda comunidade podem resultar em acertos no modelo construído. *Estilos de pensamento* distintos podem modelar uma mesma teoria de modos distintos. Estes fatos justificam a premissa de Hesse e Cartwright segundo a qual os modelos são contextos possíveis. Seguindo esta concepção de modelos, as teorias científicas são historicamente mutáveis e consistem essencialmente em modelos hipotéticos ou analogias da realidade e não de sistemas formais.¹⁵⁷

Nossas observações sobre modelos corroboram também a idéia de que as metáforas são modelos sintetizados, pois em qualquer caso observamos um mapeamento entre *domínios conceituais*. No caso dos modelos estes domínios são exatamente as teorias científicas e no caso das metáforas as propriedades que definem um termo científico. Em ambos os casos, os processos envolvidos não são resultantes dos referentes em si, mas da intencionalidade do falante e do ouvinte, norteadas pelo *estilo de pensamento*.

¹⁵⁶ É devido a esta abrangência da *concepção pragmática* – cuja definição inclui a *concepção semântica* – que deste ponto em diante usaremos simplesmente a denominação “modelo” para esta concepção, salvo casos em que considerarmos necessário ressaltar a *concepção semântica* em um determinado processo de *circulação de idéias intercoletivas*.

¹⁵⁷ HESSE, 2000, p. 307.

Concluindo, tanto na *concepção interativa* da metáfora como na *concepção pragmática* de modelos podemos compreender de que maneira as ondas oriundas do *círculo interno* atingem o externo, de que maneira o impacto da pedra que atingiu um círculo seja refletido em outros círculos. Na seção seguinte trataremos de uma questão que merece um destaque especial para os nossos propósitos: de que maneira os *estilos de pensamento* podem ser modificados por modelos e metáforas?

3.5. Metáforas e Modelos mudando Estilos de pensamento

Inicialmente veremos alguns exemplos na história da matemática de situações em que *estilos de pensamento* foram definitivamente modificados por modelos e metáforas.¹⁵⁸ Em seguida refletiremos sobre as mudanças em *estilos de pensamento* sob a luz das teorias mencionadas no parágrafo anterior.

Como primeiro exemplo, citaremos uma característica marcante na Revolução Científica ocorrida no Renascimento: a *matematização* da filosofia natural, processo que modificou significativamente os *estilos de pensamento* da comunidade matemática e de todas as demais que mantiveram relações (através da *circulação de idéias intercoletivas*) com ela. Entendemos por *matematização* a descrição dos fenômenos naturais por modelos matemáticos (equações, gráficos, cálculos, etc.). Podemos dizer que este processo modificou o *estilo de pensamento* da comunidade matemática porque esta *matematização* implicou em uma emergência no desenvolvimento de técnicas matemáticas para fins utilitários, fato que teve desdobramentos no rigor matemático, nas concepções metafísicas de seus praticantes, etc. Esta *matematização* também teve um impacto cultural fora do círculo matemático, pois contribuiu para o processo de “desencantamento do mundo” (processo histórico em que a esfera religiosa, antes detentora das respostas para as questões de todas as naturezas, se fragmenta em diversas esferas cada qual com sua lógica interna). Por exemplo, a revolução copernicana não apenas tirou a Terra do centro imóvel do universo,

¹⁵⁸ No capítulo um, é possível encontrar exemplos diversos como a modelagem de geometrias não euclidianas pela geometria euclidiana, da geometria pela álgebra (geometria analítica), a *artimetização* da análise e a *arimetização* de Gödel para a metamatemática. Todavia, tendo em vista nossa intenção em mostrar a *circulação de idéias intercoletiva*, preferimos discutir exemplos de modelos que relacionam a comunidade matemática com as comunidades não matemáticas.

desafiando Aristóteles e a doutrina cristã medieval, como sua ação se fundamentou em princípios matemáticos. Em outras palavras, Copérnico argumentou que a Terra deveria se mover porque era isto que a matemática preconizava.

No segundo exemplo, partimos do conhecimento de que a experiência pitagórica do monocórdio para a constituição de uma escala musical contribuiu para a construção do conceito de fração. Embora a premissa popular coloca a matemática como fornecedora do modelo aritmético necessário para a criação da escala pitagórica, estudos mais recentes apontam que o conhecimento das consonâncias de quarta, quinta e oitava da escala pitagórica é que determinou as frações da corda.¹⁵⁹ “Tais intervalos mostram-se naturais ao ouvido humano, pois estabelecem acusticamente configurações de onda compostas por relações de pulsações simples – 1 contra 2, 2 contra 3 e 3 contra 4” (ABDOUNUR, 1999, p. 6). Esta capacidade do ouvido humano de captar os sons musicais precede o desenvolvimento das frações. Isto é, os pitagóricos não determinaram frações na corda para posteriormente ajustar os sons a elas. No que diz respeito à *mutação do estilo de pensamento* dos pitagóricos, pode-se dizer que:

Esse experimento contribui para a construção do conceito de fração, que ganha a partir de então uma roupagem musical. Ao mesmo tempo, a música e suas diferentes áreas, tais como a harmonia, tornam-se, na concepção do pensador grego, propriedades numéricas e, à luz das idéias aqui defendidas, os conceitos usualmente tidos como musicais assumem um significado mais amplo. (ABDOUNUR, 1999, p. 201)

Com base nos exemplos dados, podemos refletir sobre o papel dos modelos e das metáforas na *mutação do estilo de pensamento* de uma *comunidade científica*.

Para Black (1993, p. 37), uma metáfora pode produzir um conhecimento novo, melhorar a compreensão de alguma teoria ou inverter as relações entre os *domínios conceituais*:¹⁶⁰

Pretendo defender a alegação implausível de que um enunciado metafórico pode às vezes produzir conhecimento novo e compreensão [*insight*] ao mudar as relações entre as coisas designadas (os tópicos principal e subsidiário). Concordar com isso seria conferir uma função cognitiva forte a certas metáforas; mas discordar não é necessariamente relegá-las inteiramente a algum reino de ficção. Pois se pode sustentar que tais metáforas revelam conexões sem criá-las. (Não seria obscurecedor supor que

¹⁵⁹ ABDOUNUR, 1999, pp. 4-14; 201-216.

¹⁶⁰ Lembremos que na seção anterior, falamos que usaremos a terminologia de Lakoff, *domínios conceituais*, em lugar da de Black, *tópicos primário e secundário*.

uma metáfora possa ser autocertificadora, produzindo a própria realidade para a qual ela chama a atenção?) (BLACK 1993, p. 37).

A idéia de Black convida-nos a deduzir que uma metáfora revela relações e conceitos de uma teoria científica que antes não víamos, o que não significa dizer que estas relações e conceitos foram criados por ela. É claro que estas palavras também se aplicam aos modelos, tendo em vista a relação existente entre os dois.

Kuhn, em seu ensaio *Metáforas na Ciência* (1970), corrobora Black ao revelar que “embora o mundo não mude com uma mudança de paradigma, depois dela, o cientista trabalha em um mundo diferente”.¹⁶¹ (KUHN, 1970, p. 121). Logo, as metáforas e os modelos teriam um papel fundamental dentro de uma *comunidade científica*, pois são instrumentos responsáveis pelas mudanças nos *estilos de pensamento*, como é descrito no exemplo que segue.¹⁶²

Bohr e seus contemporâneos fornecem um modelo no qual os elétrons e o núcleo eram representados por pequenas porções de matéria carregada interagindo sob as leis da mecânica e da teoria eletromagnética. Esse modelo substituiu a metáfora do sistema solar, mas não, ao fazê-lo, um processo semelhante à metáfora. Pretendia-se que o modelo do átomo de Bohr fosse considerado de uma maneira só aproximadamente literal; não se pensava que os elétrons e os núcleos fossem exatamente como pequenas bolas de bilhar ou de pingue-pongue; pensava-se que apenas algumas das leis da mecânica e da teoria eletromagnética aplicavam-se a elas; descobrir quais delas realmente se aplicavam e onde se encontravam as similaridades com as bolas de bilhar foi uma tarefa central no desenvolvimento da teoria quântica. Além do mais, mesmo quando podia (nunca foi completado), o modelo permaneceu essencial à teoria. Sem seu auxílio, não se pode, mesmo hoje, aplicar a equação de Schödinger a um átomo complexo a uma molécula, pois é ao modelo, e não diretamente à natureza, que se referem os vários termos nessa equação. (KUHN, 2006, pp. 248-249).

¹⁶¹ Lembremos do capítulo um que a noção de *paradigma* de Kuhn equivale em parte a de *estilo de pensamento* de Fleck. Porém as duas têm diferenças seminais no movimento de *mudança* propiciada pela circulação de idéias entre comunidades. Enquanto Kuhn vê uma ruptura entre *paradigmas* “velhos” e “novos” (visão que foi criticada por diversos autores e posteriormente reelaborada por ele), Fleck vê uma mudança gradual. É preciso deixar claro que as modificações sugeridas por Kuhn em respostas às críticas sofridas tiraram o caráter revolucionário do *paradigma*. Este conceito, inclusive, desaparece dando lugar à *matriz disciplinar* e, posteriormente à noção de *léxico*. Sob certo aspecto, as sucessivas reformulações da teoria de Kuhn fizeram-na aproximar-se de Fleck, ou de Wittgenstein (CONDÉ, 2005). O lado positivo disso é a contribuição posterior de Kuhn na discussão sobre metáforas na ciência (como veremos a seguir) com opiniões bem distantes do “antigo” Kuhn.

¹⁶² Nos termos de Hesse, o exemplo acima pode ser interpretado da seguinte maneira: o reconhecimento da similaridade entre o sistema das bolas de bilhar e o sistema atômico implica em uma *analogia positiva* entre eles, reconhecendo as diferenças entre os sistemas obtemos uma *analogia negativa*, e nos aspectos em que não se sabe se eles são similares, há uma *analogia neutra*.

Kuhn deseja argumentar que o efeito dos modelos na ciência é similar ao processo que Black expôs para explicação das metáforas. Logo, as metáforas na ciência não são meramente instrumentos pedagógicos ou heurísticos, são importantes técnicas de construção cognitiva dentro de uma *comunidade científica*.

A este propósito, Black afirma que:

Algumas metáforas nos permitem ver aspectos da realidade que a produção da metáfora ajuda a constituir. Mas isso não é mais surpreendente se acreditarmos que o mundo é necessariamente o mundo sob certa descrição – ou um mundo visto de certa perspectiva. Algumas metáforas podem criar tal perspectiva. (BLACK 1993, pp. 39–40.).

O contrapeso da concepção compartilhada por Black e Kuhn é dado por Richard Boyd (1993). Ele afirma que, embora os programas de pesquisa conduzam um processo de acomodamento denotacional, através do qual, as referências dos termos para espécies naturais são ajustadas extensionalmente para adequação à realidade, há uma espinha dorsal contendo as referências dos termos para espécies naturais que se mantiveram historicamente porque conseguiram cortar o mundo em suas “articulações reais”. A terminologia é de Boyd e ele ainda observa que na afirmação de Kuhn: “o mundo não muda, mas com a mudança de paradigmas vemos um mundo diferente”, a palavra *mundo* contém dois sentidos. O primeiro uso refere-se ao mundo-em-si e o segundo ao mundo visto por uma perspectiva ou, nas palavras de Kuhn, dentro de uma *gestalt*. Boyd assume, assim, uma posição realista segundo a qual alguns aspectos da realidade existem *a priori* e a ciência busca mecanismos de adequar sua descrição dos fenômenos a esta realidade. Uma evolução da ciência seria um ajuste mais próximo a esta realidade. A metáfora contribuiria para este ajuste, de acordo com o pensamento de Boyd. Deste modo, não é plausível, na visão deste autor, que as metáforas sejam criações contextualizadas que independem destas “articulações reais”.

Kuhn discorda desta posição:

A metáfora desempenha um papel essencial no estabelecimento de vínculos entre a linguagem científica e o mundo. Esses vínculos, contudo, não são estabelecidos definitivamente. Mudanças de teorias, em particular, são acompanhadas por mudanças em algumas das metáforas relevantes e nas partes correspondentes da rede de similaridades por intermédio da qual os termos se ligam à natureza (KUHN, 2005, pp. 249-250).

Ou seja, para Kuhn e Black, não existe um mundo real único com referenciais prontos determinando articulações sobre as quais as teorias se assentam. A adoção de

uma postura como a de Boyd só seria possível se – parafraseando Kuhn – mudássemos nossa visão de “evolução de onde sabemos” para uma “evolução para onde queremos saber”. Esta seria, em nossa opinião, uma visão completamente anacrônica da ciência, o que nos faz distanciar de Boyd e aproximar de Kuhn e Black.

Todavia, há outros pontos em Boyd a serem salvos deste anacronismo realista. Dizem respeito à importante função que as metáforas podem exercer na ciência como catacrese, isto é, as metáforas foram usadas para exprimir afirmações teóricas para as quais nenhuma paráfrase literal adequada é conhecida. Ele afirma que tais metáforas não são apenas exegéticas, mas constitutivas das teorias por elas expressadas¹⁶³. Como exemplo, Boyd cita os vários termos metafóricos que a psicologia cognitiva herdou da ciência da computação, tais como “o pensamento é uma espécie de processador de informações”, “o cérebro é um computador”, “certos processos cognitivos e motores são programados”, “certas informações são codificadas em *centros de memória*”, “a consciência é um fenômeno de *feed-back*”, etc. Embora reconheça que estes e outros exemplos citados por ele não são de importância fundamental para a teoria da psicologia, Boyd defende a premissa de que a prevalência das metáforas na computação mostra uma preocupação da psicologia contemporânea em estabelecer analogias entre homem e dispositivos computacionais.¹⁶⁴ Isto mostra, é claro, os efeitos na visão que os praticantes deste campo têm do seu objeto de estudo.

3.6 Considerações finais

Este capítulo forneceu-nos conceitos importantes para podermos analisar o impacto do Teorema de Gödel fora do círculo lógico matemático. Este impacto significa, na verdade, as mudanças nos *estilos de pensamento* proporcionadas pelo teorema da incompletude, as ondas oriundas do *círculo interno* e seu movimento no *círculo externo*. Como vimos aqui, estas mudanças são o resultado da *circulação de idéias intercoletivas* entre a comunidade de lógicos e matemáticos e as comunidades que,

¹⁶³ BOYD, 1993, p. 486.

¹⁶⁴ Na seção 4.3, veremos estas relações detalhadamente.

conforme analisaremos no próximo capítulo, se apropriaram do Teorema de Gödel. Esta apropriação é, de uma maneira mais clara, a construção de um modelo ou uma metáfora permitindo uma compreensão do Teorema de Gödel de acordo com o *estilo de pensamento* desta comunidade, afinal a compreensão da metáfora ou do modelo depende da relação entre falante e ouvinte, depende do contexto de sua criação.

Este contexto é, nos termos de Fleck, determinado pelo *estilo de pensamento* de cada comunidade. Ele indica com que lentes esta *comunidade* enxergará os fatos científicos que ela produz bem como as releituras produzidas de fatos oriundos de outras *comunidades*. Comunidades distintas que se comunicam participam da estrutura dos *círculos concêntricos*. Quem produz um fato científico reside no *círculo interno* de uma *comunidade* e quem se apropria está no *círculo externo* desta *comunidade*, e vice-versa. O conhecimento apropriado é reelaborado de acordo com a linguagem deste indivíduo do círculo externo que compartilha de outro *estilo de pensamento*. Assim, os membros de uma *comunidade científica* compartilham a compreensão de uma obra dentro de uma ótica que pode ser invisível para os praticantes de outra *comunidade científica* que não participaram do processo de comunicação das idéias. Isto porque a leitura é coletivamente guiada pelo *estilo de pensamento* desta comunidade e, não, o da outra. Se uma obra pode ser escrita de maneiras diferentes então pode ser dotada de sentidos diferentes.

Deste modo, a comunicação entre diferentes *comunidades científicas* implica na existência de similaridades nos seus *estilos de pensamento*. Observamos então que existem graus de similaridade entre a obra original e suas reconstruções. Poucas similaridades implicam em dificuldades de comunicação. Seja como for, se há comunicação, então há *circulação de idéias intercoletivas*.

Os modelos e as metáforas são mecanismos que provocam a *circulação de idéias intercoletivas*. Isto ocorre da maneira similar ao *isomorfismo* de estruturas matemáticas. Na comunicação metafórica, o ouvinte participa de um contexto dentro do qual ele identifica os dois *domínios conceituais* e seleciona as propriedades que contêm analogias entre estes *domínios*. Então uma rede de correspondências é tecida entre os dois *domínios conceituais*, um *isomorfismo*, um mapeamento, e ele pode ser realizado

via identidade, extensão, similaridade, analogia ou ligação metafórica. A expressão lingüística é apenas uma realização superficial deste mapeamento.

A operacionalização da metáfora se assemelha à construção de modelos científicos (afinal o segundo é uma extensão do primeiro). O modelo científico, segundo a *concepção pragmática*, é a estrutura que nos permite compreender as leis de uma teoria sob uma certa ótica, isto é, dentro de um *estilo de pensamento*. As leis não governam os fenômenos reais, mas os que estão contidos no modelo. Conclui-se que os modelos são estruturalmente similares àquilo que eles modelam. Por serem contextos possíveis, em situações distintas os modelos podem ser assimilados de modos distintos, por isso, os modelos ultrapassam seus limites semânticos – de representações verbais ou físicas – e se abrem para suas possibilidades pragmáticas.

Metáforas e modelos provocam também *mutações dos estilos de pensamento* resultantes da *circulação de idéias intercoletivas* promovida por eles. As metáforas podem provocar estas *mutações* preenchendo uma lacuna semântica no discurso; preenchendo uma lacuna cognitiva em algum *domínio conceitual*; mostrando relações entre *domínios conceituais* e permitindo, com isto, novas leituras da realidade. Os modelos, bem como as metáforas, não são meramente instrumentos pedagógicos ou heurísticos, são importantes técnicas de construção cognitiva dentro de uma *comunidade científica*. É o meio que conduz a leitura que os membros de uma comunidade fazem de uma teoria produzida por outra comunidade. Embora estas comunidades estejam em contextos distintos (definidos pelos seus respectivos *estilos de pensamento*), existe alguma similaridade que permite o diálogo entre elas, de modo que a comunicação metafórica seja realizada, os mapeamentos construídos e modelos sejam desenvolvidos ou herdados. Comunidades distintas tendem a construir modelos distintos para um mesmo fenômeno real, ou podem se basear em um mesmo modelo para explicar diferentes fenômenos.

Metáforas produzidas por *comunidades* com dificuldades de comunicação têm pouca ênfase e pouca ressonância. Quanto mais similaridades houver entre *estilos de pensamento* de duas *comunidades*, mais favoráveis a *mutações* estarão seus respectivos *estilos de pensamento* conectados pela relação metafórica entre *domínios conceituais* correspondentes.

Como afirmamos várias vezes, as metáforas são modelos sintetizados. Isto pode ser dito agora de uma maneira mais clara. Nos modelos científicos, os *domínios conceituais* são as teorias científicas enquanto nas metáforas são termos ou conceitos científicos. Portanto, a construção de um modelo favorece, e muito, a produção de metáforas, todavia, a existência de metáforas não depende da existência de modelos. O ponto mais importante a ser destacado é que tanto as metáforas como os modelos são veículos fundamentais para a *circulação de idéias intercoletivas*, são elos de comunicação entre *comunidades científicas*, dicionários que permitem traduzirmos o vocabulário próprio de uma comunidade no vocabulário da outra.

No próximo capítulo, analisaremos diferentes obras que representam os *estilos de pensamento* de diversas comunidades, a partir do que, teceremos nossa análise sobre como o Teorema de Gödel motivou a construção de metáforas e modelos que permitiram a circulação de idéias do *círculo interno* (lógico matemático) para o *círculo externo*. Veremos também de que maneira esta circulação de idéias permitiu *mutações do estilo de pensamento* destas comunidades.

4

O Teorema de Gödel e a circulação de idéias intercoletivas

“Um texto pode ter múltiplos sentidos,
mas disso não se infere que ele possa ter qualquer sentido.”
Umberto Eco

4.1 Considerações iniciais

Este capítulo trata mais diretamente da principal contribuição que pretendemos dar à história da ciência. Analisaremos de que maneira o Teorema de Gödel transcendeu o círculo lógico-matemático, possibilitando *mutações dos estilos de pensamento* de outras *comunidades científicas*. Isto é, analisaremos metáforas e modelos construídos por comunidades que possibilitaram a elas compreender estruturalmente a cópia do teorema da *incompletude* dentro de seus *estilos de pensamento* correspondentes. Veremos, portanto, as ondas produzidas pela queda da pedra se propagando dentro do *círculo externo* da comunidade lógico-matemática.

Retomando a introdução deste trabalho, desde a sua publicação em 1931, o Teorema de Gödel provocou mais desdobramentos fora do círculo lógico matemático do que qualquer outro resultado matemático no século XX. Vimos nesta observação a emergência de analisar obras não matemáticas em que o Teorema de Gödel, ou suas releituras, aparece como um importante fundamento para a constituição das teorias dos autores de tais obras e, por conseguinte, para a reestruturação do *estilo de pensamento* de sua comunidade. Esta reestruturação ocorre quando os autores dessas obras são representativos dentro de suas respectivas comunidades; quando sua produção científica, seu relacionamento com os seus pares lhes deram o *status* de propagadores de idéias, de indivíduos disseminadores com grande capacidade de persuasão. Portanto, a análise de obras particulares não deve ser encarada, como poderia ser interpretado, em implicações particulares do Teorema de Gödel, pois a relevância e o reconhecimento de seus autores em suas comunidades específicas mostram que o Teorema de Gödel, de fato, alterou o *estilo de pensamento* destas *comunidades científicas*.

Não é nosso objetivo inserirmo-nos dentro dos círculos não matemáticos. Todavia, para que possamos estabelecer relações entre *domínios conceituais*, temos que realizar nossa própria leitura das interpretações de cada círculo. Não pretendemos legitimar ou deslegitimar estas interpretações, embora nossa busca pela função que o Teorema de Gödel exerceu em cada interpretação necessite ocasionalmente de uma visão crítica destes usos. Esta crítica não será norteadas por uma análise técnica, seja lógico-matemática, ou tampouco, específica da área que se apropriou do Teorema de

Gödel; ela se fundamenta na construção metodológica que propusemos em nossa literatura crítica, com alicerces histórico-culturais.

Recapitulando o percurso que nos trouxe até este capítulo, podemos conferir que dispomos de todos os pressupostos necessários para a análise que desejamos.

No decorrer do trabalho, estudamos o comportamento da comunidade matemática de 1850 a 1930, seus problemas, técnicas, dogmas, postulados, lógica, etc. a fim de constituir o *estilo de pensamento* desta comunidade e, juntamente com as concepções de Gödel, pudemos mostrar todo o contexto no qual, o teorema da *incompletude* foi publicado. Em seguida estudamos o significado do enunciado do Teorema de Gödel, sua demonstração, o raciocínio que levou a esta demonstração e as aceções do Teorema de Gödel dentro do círculo lógico-matemático, de modo que pudemos também compreender o *estilo de pensamento* da comunidade lógico-matemática após a publicação do Teorema de Gödel, portanto, os significados do Teorema de Gödel para este *estilo de pensamento*.

Toda esta pesquisa foi fundamental para analisarmos a *circulação de idéias intercoletivas*, pois, como vimos, este movimento ocorre por meio de metáforas e modelos. Estes mecanismos, por sua vez, realizam uma espécie de dicionário contextualizado entre as *comunidades científicas*, estabelecendo um elo entre as comunidades, um canal que permite a *circulação de idéias intercoletivas*. Se este dicionário permitirá uma boa comunicação entre as comunidades, isto depende do grau de similaridade entre elas. As metáforas e os modelos criam, portanto, na comunidade receptora releituras do Teorema de Gödel ajustadas pelas lentes dos seus *estilos de pensamento*. É neste sentido que devemos ressaltar a importância de apreendermos o *estilo de pensamento* da comunidade lógico-matemática. Estudar modelos e metáforas em outras comunidades sem este conhecimento seria como apreciar uma caricatura de um indivíduo sem conhecê-lo.

A função da *circulação de idéias intercoletivas* proporcionada por uma metáfora ou um modelo pode variar de acordo com as necessidades de cada comunidade. Modelos construídos segundo uma *concepção semântica* visam produzir uma linguagem formal capaz de demonstrar logicamente fenômenos estudados pela comunidade receptora. Os modelos produzidos segundo a *concepção pragmática*

possibilitam compreender estruturalmente o fenômeno com base na teoria de outra comunidade. Levantamos aqui a hipótese (a ser confirmada ao longo deste capítulo) de que, nestes casos, o Teorema de Gödel forneça mais do que uma versão do enunciado ou algumas das terminologias comuns no artigo de Gödel como *indecidíveis*, auto-referência, etc. O sistema como um todo deve ser relacionado no *isomorfismo* a ser proposto pela comunidade receptora, com o objetivo de compreender o fenômeno estudado por esta comunidade, pela via deste *isomorfismo*. Finalmente, se a exigência da comunidade necessitar de metáforas então pode-se inferir que os praticantes desta comunidade desejam encontrar no Teorema de Gödel termos que se ajustam às suas teorias com a finalidade de preencher lacunas semânticas, ou apreender suas teorias, ou identificar teorias que possibilitem novas leituras da realidade.

Conforme pontuamos na introdução, uma descrição completa de todas as obras que mencionam o Teorema de Gödel – no sentido de nossa proposta de trabalho – é algo impraticável, devido à quantidade desmesurada de obras desta natureza. Procuramos, então, selecionar prioritariamente comunidades em que o uso do Teorema de Gödel é freqüente. Em cada uma, buscamos obras de autores mais representativos, e em seguida, as obras mais citadas.

Toda esta literatura suscitou leituras exaustivas, estudos complementares e uma necessidade de constantes consultas a especialistas de áreas específicas das obras estudadas (filósofos, psicanalistas, biólogos, cientistas da computação, físicos, educadores).

Conseguimos, assim, agrupar as apropriações do Teorema de Gödel em quatro grandes comunidades: Ciências Físicas, Ciências da Computação, Ciências Cognitivas e Ciências Humanas. Veremos nas linhas que seguem que esta classificação impôs também uma seleção na função exercida pelo uso metafórico do Teorema de Gödel em cada contexto: a primeira comunidade utilizou modelos segundo a *concepção semântica*, a segunda e a terceira utilizaram modelos segundo a *concepção pragmática* e a quarta utilizou prioritariamente metáforas.

Ressaltamos mais uma vez que, devido à abrangência da *concepção pragmática*, cuja definição inclui como caso particular a *concepção semântica*,

adotaremos neste capítulo apenas o termo “modelo” para tal concepção, salvo nos casos em que for necessário mencionar explicitamente a *concepção semântica*.

4.2 Física

Após o grande desenvolvimento da ciência ocorrido a partir do Renascimento, vimos (na seção 3.5) que a matemática teve um papel importante na *mutação de estilo de pensamento* de várias comunidades, principalmente servindo como modelo para diversas teorias científicas. Esta interlocução foi maior entre a matemática e a física e, por isso, diversos resultados matemáticos, ao longo dos séculos, têm incentivado buscas por traduções em teorias físicas. Às vezes, as traduções ocorrem simultaneamente em uma mesma época, como aconteceu entre o cálculo diferencial e a física newtoniana, às vezes, não tão próximas, como aconteceu entre a criação dos números complexos e suas aplicações na eletricidade.

Neste caminho, um resultado de impacto como o Teorema de Gödel naturalmente implicará em conjecturas sobre como ele poderia ser traduzido em teorias físicas, ou de ciências exatas, de uma forma geral. Todavia, as ondas do impacto do Teorema de Gödel na física atingiram este círculo somente a partir da década de 1990 e foram facilitadas pelo longo movimento de reestruturação do *estilo de pensamento* da comunidade de físicos desde o início do século XX:

É verdade que boa parte das construções científicas ainda partem dos fatos para a formulação de teorias, utilizando processos indutivos para descobrir leis e sugerir a existência de outros fatos comprováveis a partir dos quais se possa descrever o mundo físico. E deve ser assim, dado que esse foi o caminho original para construir as primeiras “explicações” científicas na história do desenvolvimento da Ciência.

(...) Mas, já desde o século XIX (pensemos na teoria dos gases ideais) começaram a ser desenvolvidas teorias que buscavam pensar o mundo como ele deveria ser, deduzindo destas concepções, conseqüências das mesmas e comparando com a realidade, até em casos onde a realidade ainda não tinha sido pesquisada. O desenvolvimento dessa atividade foi constituindo a Física e a Físico-Química teórica. Essa atividade, que se torna no decurso do século XX cada vez mais importante, não poderia deixar de ser afetada pelos trabalhos de Gödel e tanto mais, quanto mais é dependente dos processos de formalização, mesmo que só seja pelo uso de ferramentas matemáticas cada vez mais desenvolvidas. (D'ALKAINE, 2006, pp. 528-529)

Desconsiderando certas concepções realistas, por exemplo, sobre “como o mundo deveria ser” colocadas por D'Alkaine, observamos alguns pontos de concordância com o autor. No caminho de sua argumentação, a teoria restrita da

relatividade e a física quântica, por exemplo, foram aceitas na *comunidade científica* antes da existência de experiências comprobatórias. Isto confirma a força teórica da física como foi pontuado por D'Alkaine. O século XX inaugura, assim, as “experiências teóricas” (experiências de pensamento) na física moderna, nas palavras do autor. Neste sentido, a metodologia de pesquisa nesta área se assemelhou com a dos matemáticos, o que aproxima o Teorema de Gödel de uma possível versão física.¹⁶⁵ Apenas não ficou claro em D'Alkaine tipo de tradução permitira a leitura física do Teorema de Gödel.

Uma tradução física do Teorema de Gödel não é uma aspiração natural, afinal a física sempre usou a matemática como uma ferramenta para a compreensão dos fenômenos naturais e o Teorema de Gödel não é um resultado matemático, e sim, lógico matemático. Neste sentido, em vez de um modelo de *concepção pragmática* seria necessário um modelo de *concepção semântica* para teorias físicas.

Por sorte, conforme vimos (na seção 3.4), desde o Círculo de Viena até a Visão Recebida, passando por pensadores como Fraassen e Suppe, a idéia de uma fundamentação axiomática para uma teoria científica tem sido pauta de reflexões na filosofia da ciência. Entre as décadas de 1960 e 1980, diversos autores procuraram estabelecer de que maneira a física poderia ser estruturada por modelos matemáticos. Suas teorias convergiram, de uma forma ou outra, para uma compreensão sobre teoria física T como um par $\langle E, R \rangle$; sendo E uma estrutura matemática e R um conjunto de regras informando como a estrutura se articula à experiência. Alguns exemplos de modelos possíveis para algumas teorias físicas seriam os espaços de Hilbert para a mecânica quântica e a geometria riemanniana para a teoria da relatividade.¹⁶⁶

Na década de 1990, os modelos foram proficuamente usados para compreender os significados físicos de determinadas transformações na teoria de conjuntos. Nesta ocasião, Newton da Costa e Francisco Antônio Dória publicaram uma série de artigos apresentando modelos segundo uma *concepção semântica* que permitiram traduzir

¹⁶⁵ D'Alkaine observa que a computação também se aproximou das ciências naturais, pois possibilitou simulações de teorias funcionando com hipóteses diferentes, o que permitiu ajustes às teorias vigentes. Assim, pode-se dizer que hoje nas ciências exatas, além dos campos teórico e experimental, há também o campo de simulações. Esta possibilidade de simulações de teorias possíveis foi também, segundo D'Alkaine, motivada pelo resultado de Gödel. Conforme vimos (seção 2.4), um problema *indecidível* tem a força de criar duas diferentes teorias (como o quinto postulado de Euclides, por exemplo).

¹⁶⁶ ABE, 1989, p. 120.

diversos resultados matemáticos para as teorias físicas. O Teorema de Gödel aparece no artigo *Undecidability and Incompleteness in Classical Mechanics* (1991). Nele, Costa e Dória mostraram vários exemplos de resultados sobre *indecidibilidade* e *incompletude* na mecânica clássica e na teoria de sistemas dinâmicos. Eles ampliaram os métodos de Gödel para provar que “*indecidibilidade* e *incompletude* ocorrem em toda a física matemática.” (COSTA, DÓRIA, 1991, p. 1071). Isto significa dizer que toda teoria física matematicamente formalizável contém resultados que não podem ser provados e nem refutados. Em artigos subsequentes, Costa e Dória produziram outros resultados do gênero¹⁶⁷ até que, em 1993, eles mostraram que não existe algoritmo que possa determinar se um determinado fenômeno físico definido previamente por equações diferenciais é ou não caótico.¹⁶⁸

Assim, Costa e Dória demonstraram¹⁶⁹ que é possível estender fenômenos metamatemáticos como *incompletude* e inconsistência para a física.¹⁷⁰ Este foi um fato surpreendente. Pode-se dizer que quando os físicos olhassem a partir de então para o Teorema de Gödel (com as lentes fornecidas por Dória e Costa) veriam que suas teorias podem produzir problemas que elas mesmas não são capazes de resolver. O que veremos agora é como este *isomorfismo* ecoou na comunidade física.

Ainda na década de 1990, uma revista de divulgação científica brasileira¹⁷¹ publicou o artigo “Alguém governa o Universo?” no qual os limites da física são relacionados com os limites da matemática:

Nossos cérebros estão adequados de forma admirável para compreender os modelos e os princípios da natureza, precisamente aqueles campos que não têm a menor importância para a evolução biológica da espécie. O mistério torna-se ainda maior se examinarmos a forma como se utilizam os conhecimentos científicos. A maior parte das nossas conquistas no campo das ciências exatas está formulada em linguagem matemática. Todas as leis

¹⁶⁷ Por exemplo, o trabalho de 1993 publicado em conjunto com M. TSUJI, cujo título é *The incompleteness of the theory of finite noncooperative games with Nash equilibria*.

¹⁶⁸ COSTA, DÓRIA, AMARAL, 1993.

¹⁶⁹ Os modelos produzidos segundo uma *concepção semântica* têm força suficiente para podermos dizer que Dória e Costa realmente demonstraram.

¹⁷⁰ Os resultados de Souza e Dória foram também divulgados na revista “Superinteressante”, sob o título “Cientistas brasileiros decidem o ‘indecidível’: Artigo de Luiz Barco sobre estudos notáveis de dois matemáticos brasileiros.” (http://super.abril.com.br/superarquivo/1992/conteudo_113069.shtml)

¹⁷¹ Trata da revista “Superinteressante” número 57, de junho de 1992, acessível no endereço http://super.abril.com.br/superarquivo/1992/conteudo_113063.shtml. Este é um exemplo de circulação de idéias *intercoletivas* entre os círculos *interno* e *externo*. Revistas de divulgação são responsáveis pela popularização de obras científicas.

fundamentais da Física podem ser escritas de forma resumida por meio de fórmulas numéricas. Mas a Matemática não nos foi dada pela evolução; é produto da inteligência humana superior. (DAVIES, 1992)

Isto é, a capacidade do homem em produzir conhecimento científico – em particular, a física – depende da capacidade humana em produzir matemática, na medida em que esta é a linguagem a partir da qual podemos descrever a natureza. Mas a questão prioritária desde o final do século XX não é simplesmente descrever a natureza, mas descrever toda a natureza através de uma única teoria física.¹⁷²

Nos últimos anos impôs-se, no campo da Física matemática, um objetivo prioritário: a unificação. Muitos físicos teóricos confiam em que todas as leis básicas da Física podem fundir-se em uma única superlei. Essa teoria pode ser apresentada por meio de uma breve fórmula matemática, suficientemente curta para ser pintada em uma camiseta.

A partir dessa fórmula, seria possível deduzir uma descrição científica de toda a natureza. O matemático Stephen Hawking estava imbuído dessa esperança quando colocou essa pergunta como título de sua conferência de ingresso na Universidade de Cambridge: "Está à vista o fim da Física teórica?" Naturalmente, pode ser simples excesso de otimismo. Mas o certo é que nos três escassos séculos transcorridos desde Newton, a ciência progrediu o suficiente para poder explicar com teorias matemáticas uma enorme quantidade de fenômenos da natureza. Muitos físicos crêem mesmo que já temos boas explicações para a maioria desses fenômenos.

(...) Assim, pode-se dizer que a teoria física disponível atualmente compreende, ainda que de forma provisória, uma descrição exata do mundo, do muito grande ao muito pequeno. Alguém pode imaginar que as leis que regem o Universo são muito complicadas para nossa inteligência. Surpreendentemente, não é assim. É verdade que, segundo todas as aparências, tais leis estão expressas em códigos e possuem uma enigmática profundidade. Mas são compreensíveis desde que utilizemos a Matemática, cujo grau de dificuldade permanece dentro da capacidade de compreensão da mente humana. (DAVIES, 1992)

A unificação das leis físicas numa única fórmula matemática depende da compreensão que temos da matemática. Esta dependência era vista com otimismo pelos físicos, pois, embora a natureza ainda não fosse totalmente compreensível, a matemática, enquanto produto da atividade humana, não ultrapassaria (*a priori*) os limites da mente humana.¹⁷³ Todavia, há quem queira inverter esta relação de dependência e credite nos resultados de Gödel e Turing o argumento que permitiria concluir que os limites da matemática não dependem da mente humana, mas na estrutura do mundo natural, regido pelas leis físicas:

¹⁷² Popularmente denominada como *TOE*, sigla de *Theory of Everything*.

¹⁷³ Este assunto será debatido com detalhes na seção 4.4.

Cientistas judiciosos, como o matemático Kurt Gödel, nos anos 30, demonstraram que há verdades matemáticas que são desde logo certas, mas não podem ser demonstradas. E isso não acontece apenas em alguns campos abstratos, mas também em operações de cálculo quotidianas. Pouco depois de Gödel publicar seu trabalho, o matemático inglês Alan Turing usou-o para demonstrar que há cifras que não podem ser calculadas. São cifras que, mesmo quando demonstrada sua existência, não derivam de nenhum cálculo realizado por algum procedimento matemático sistemático (algorítmico). De modo que só podemos resolver uma pequena parte das verdades matemáticas existentes.

Com essas idéias, ganha especial importância o pensamento do mencionado David Deutsch sobre a relação entre as leis matemáticas e as naturais. Segundo o físico de Oxford, "o modo de trabalho de um computador depende da estrutura do mundo natural. É uma parte deste mundo e, portanto, consta dos materiais nele existentes. O mesmo se pode dizer do cérebro humano: a forma de calcular de um computador ou a maneira de pensar de nosso cérebro dependem de como sejam as leis da natureza". Então, o que se deduz disso tudo? Simplesmente, que o que pode e o que não pode ser calculado é decidido pelas leis da Física.

Com essa declaração, fecha-se o círculo: as leis da Física permitem que surja um mundo em que são possíveis determinadas operações matemáticas que, por sua vez, explicam as leis da Física. (DAVIES, 1992)

Contra a idéia de que o universo é uma entidade dirigida por leis físicas, preferimos a posição (mais próxima da opinião de Davies) de que a nossa capacidade de produzir teorias matemáticas limita a nossa capacidade de produzir teorias físicas que, juntas, nos ajudam a compreender o mundo sob uma determinada ótica (*estilo de pensamento*). Pelo que vimos nos parágrafos anteriores, a idéia de Deutsch (citado por Davies) não tem força lógica também: os resultados de Costa e Dória mostraram que existem fenômenos da natureza que não podem ser regidos por nenhuma lei física¹⁷⁴.

As citações acima mostram que o Teorema de Gödel já fazia parte de especulações de físicos sobre a TOE, na ocasião em que Costa e Dória publicaram seus artigos, mas o eco que Costa e Dória produziram ganhou força de reverberação na voz de Stephen Hawking.

De acordo com Davies, Hawking já questionava em sua conferência de ingresso à Universidade de Cambridge (em abril de 1980) sobre o possível fim da física. Passaram-se mais de duas décadas quando sua pergunta foi retomada, desta vez, aparentemente tomada pela onda do Teorema de Gödel. Na conferência em

¹⁷⁴ Esta questão será retomada na seção 4.4 quando falaremos sobre a posição de Roger Penrose (que também é físico-matemático), acerca da relação entre mente, matemática e física.

homenagem ao aniversário de Dirac, no *Centre of Mathematical Sciences*, da Universidade de Cambridge, em julho de 2002, Hawking proferiu o seguinte:

Qual é a relação entre o teorema de Gödel e qualquer que seja a teoria sobre o universo que possamos formular, em termos de um número finito de princípios? Uma conexão é óbvia. De acordo com a filosofia positivista da ciência, uma teoria física é um modelo matemático. Então se existem resultados matemáticos que não podem ser provados, existem também problemas físicos que não podem ser preditos. (...) Na filosofia da ciência positivista, as teorias físicas moram no céu platônico de modelos matemáticos ideais. Isto é, um modelo pode ser arbitrariamente detalhado e conter uma quantidade arbitrária de informações, sem contudo afetar externamente o universo. Além disso, nós e nosso modelo são ambos parte do universo que estamos descrevendo. Então, a teoria física é uma auto-referência, como no teorema de Gödel. Poder-se-ia esperar portanto que ela fosse inconsistente, ou incompleta. As teorias que nós temos, no entanto, são ao mesmo tempo inconsistentes e incompletas. (HAWKING, 2002)

Nesta explanação, Hawking não se restringiu em procurar uma implicação teórica do Teorema de Gödel. Usou ainda, metaforicamente, as terminologias lógico-matemáticas *incompletude*, *inconsistência* e auto-referência tanto para compreender o comportamento do universo como para inferir sobre as teorias físicas do universo com termos que não podem ser traduzidos em termos da linguagem da teoria física. Isto é, o uso destes termos em seu discurso provavelmente ocorreu por não haver, dentro a linguagem da teoria física, termos científicos que possam exprimir a conclusão de Hawking sobre as teorias físicas do universo. A conclusão do físico – que a física é *incompleta* e *inconsistente* – colocou na relação entre a matemática e a física um componente essencial (descrito mais detalhadamente na seção 4.4) que nega a filosofia positivista mencionada por ele: as duas ciências são atividades produzidas pela mente humana.

O eminente físico-matemático anglo-americano Freeman Dyson (2004), por sua vez, participou desta *circulação intercoletiva de idéias* argumentando que a física constitui-se de um conjunto finito de regras, e incluem as regras da matemática. Então, por força do Teorema de Gödel, nosso conhecimento do domínio das equações básicas da física estará sempre incompleto. Dyson assentou no Teorema de Gödel a base do seu raciocínio: a ciência nunca compreenderá completamente a natureza se utilizar

para isto a linguagem matemática.¹⁷⁵ Isto torna a física uma ciência inesgotável, pois a matemática o é.

Desta maneira, *incompletude* e inconsistência, além de metáforas emprestadas da lógica matemática para suprir uma lacuna semântica de especulações físicas, elevaram também o potencial da lógica matemática como fonte de modelos *semânticos* para as teorias físicas.¹⁷⁶ Neste sentido, proximidade da física com a matemática, facilitada pela tendência teórica da física do século XX, nos possibilitou ainda fazer uma leitura sobre o *estilo de pensamento* da comunidade física no final do século XX: quanto mais os físicos se aproximam de reflexões sobre a modelagem matemática da física, mais suas concepções sobre ciência são alteradas pelo Teorema de Gödel.¹⁷⁷ Nestas releituras, alguns problemas passaram a fazer parte da pauta de discussões tais como “a física é inegotável?”, “as teorias físicas são capazes de resolver todos os problemas que eles propõem?” É este o resultado da *circulação de idéias intercoletivas* entre os círculos lógico-matemático e físico.

Estas análises ainda mostram como que, apesar do caráter formal e a-histórico que a *concepção semântica* de modelos propõe *a priori*, sua inclusão no *estilo de pensamento* de uma comunidade proporcionou transformações neste *estilo de pensamento*.

4.3. Ciência da Computação

¹⁷⁵ Franzén (2005, p. 87) comenta nesta passagem que isto só é verdade se for usada a componente aritmética da teoria matemática subjacente à teoria científica. Ora, como podemos desvencilhar uma componente aritmética de uma teoria matemática que se funda na aritmética (como ocorre em geral na matemática)? Fundar-se na aritmética significa construir os conceitos e teoremas a partir do que já foi construído na aritmética. Isto justifica a força do Teorema de Gödel. Se a aritmética, dentro do formalismo de Hilbert, contém proposições indecidíveis, então o mesmo pode ocorrer com, por exemplo, a análise e a álgebra, que contém em seu conjunto de postulados da aritmética.

¹⁷⁶ A construção de *modelos semânticos para a física* significa a constituição de uma nova área do conhecimento, cuja função é compor uma meta-linguagem para esta área. A tradição nos impede de chamá-la, como seria natural em qualquer área do conhecimento, de metafísica, pois esta denominação se refere a outro tipo de estudo, de fenômenos que não podem ser explicados em termos físicos. Por isto, sempre iremos nos referir ao trabalho de Costa e Dória como *modelos semânticos para a física*.

¹⁷⁷ A idéia de uma estrutura matemática para uma teoria física não é unânime entre os físicos. Existe uma contestação comum, principalmente entre físicos experimentais, de que uma teoria física deve ser considerada completa se todo elemento da realidade física possuir um correspondente da física teórica. Costa (1993) diverge desta opinião, pois acredita que esta linha de raciocínio impede uma manipulação da teoria com rigor, mas ressalta que algumas regras devem ser cuidadosamente analisadas, por exemplo, o tipo de lógica empregada.

A partir da divulgação do Teorema de Gödel em 1931, seus desdobramentos implicaram diretamente no desenvolvimento da lógica e na criação de um novo campo de conhecimento: a ciência da computação. Este campo emergiu da busca de se criar máquinas que repetissem mecanicamente as leis da lógica matemática, o que significa na determinação de um modelo capaz de criar uma cópia mecânica desta disciplina. Este modelo seria simultaneamente um ícone (segundo a concepção de Nagel) e uma estrutura abstrata (segundo a concepção de Suppe, ampliada por Hesse e Cartwright).¹⁷⁸ Para compreendermos esta *circulação de idéias intercoletivas*, retornaremos ao capítulo dois sobre os estudos proporcionados pela difusão do Teorema de Gödel, seus resultados e sua metodologia.

Conforme vimos, enquanto o Teorema de Gödel colocava em aberto a questão hilbertiana do *decidível*, a demonstrabilidade substituíra a idéia da verdade na matemática. Todavia, apesar de um sistema formal S contendo a aritmética não ser capaz de provar a sua própria consistência, havia uma dúvida sobre a possibilidade de encontrar *a priori* as sentenças *indecidíveis* do sistema S . Neste caminho, alguns lógicos matemáticos – dentre eles, o próprio Gödel – direcionaram seus esforços, durante a década de 1930, à busca de procedimentos mecanizáveis que pudessem ser aplicados a qualquer sentença matemática e informasse se ela era ou não derivável em S (*Entscheidungsproblem*).¹⁷⁹

A busca da computabilidade de funções recursivas avançou com a criação do λ -cálculo, em 1935, por Alonzo Church. Trata-se de um sistema formal que representa funções como regras. Neste caminho, seria possível estudar os aspectos computacionais das funções. No ano seguinte, a Tese de Church foi formulada. O lógico matemático conjecturou ser possível identificar as funções efetivamente computáveis com funções gerais recursivas (definidas por Gödel) ou, equivalentemente, com funções λ -definíveis (Kleene provou que toda uma classe de funções, inclusive as

¹⁷⁸ Ver seção 3.4.

¹⁷⁹ O *Entscheidungsproblem* (problema de decisão, em alemão) se relaciona com o décimo problema de Hilbert: “existe um algoritmo capaz de decidir se uma equação diofantina tem solução?” A resposta negativa foi dada somente em 1970 por Yuri Matiyasevich.

definidas no artigo de Gödel, era λ -definível). Isto torna o λ -cálculo uma linguagem universal.¹⁸⁰

A definição de funções computáveis foi decisivamente formulada por Turing,¹⁸¹ em 1937, e formaram a base da moderna teoria da computação. Precisamente, as funções computáveis equivalem hoje aos algoritmos computacionais. Turing definiu tais funções com base em sua “máquina”, um sistema básico abstrato que pode ser adaptado para simular a lógica de qualquer computador. A “máquina” contém uma fita e uma cabeça que se move para a esquerda e para a direita, lendo ou escrevendo de acordo com o seu movimento. Em cada momento, a “máquina” encontra-se num certo estado dentre um conjunto finito de possibilidades. O comportamento da máquina de Turing é governado por um algoritmo, que consiste em um número finito de instruções. Para cada estado, uma tabela de instruções comunica a ação a executar¹⁸².

A “máquina” de Turing não é aplicada na tecnologia computacional prática, mas permite testar propriedades abstratas de teorias e verificar os limites de computações mecânicas. Dela originou-se a tese de Church-Turing:¹⁸³ toda função naturalmente computável pode ser computada por uma máquina de Turing. Esta tese nunca pôde ser nem provada nem refutada formalmente, devido à imprecisão do conceito de “função naturalmente computável”. Todavia, todo programa de computador pode ser concebido por uma máquina de Turing e qualquer máquina de Turing pode ser transcrita para uma linguagem de programação. Neste sentido, a tese de Church-Turing equivale a dizer que qualquer linguagem de programação é suficiente para expressar qualquer algoritmo.

Provada a equivalência entre as funções recursivas de Gödel, as computáveis pelo λ -cálculo e as da “máquina” de Turing,¹⁸⁴ foi possível também aproximar o Teorema de Gödel da “máquina” de Turing. O desejável para um computador é checar todos os programas e eliminar aqueles que não dessem uma conclusão (uma resposta

¹⁸⁰ LADRIÈRE, 1969, pp.202-206.

¹⁸¹ KLENNE, 1986, pp. 58-59.

¹⁸² TEIXEIRA, 1998, pp.23-26.

¹⁸³ Como a tese de Church, esta asserção não é um teorema, porque não é um resultado matemático: ela simplesmente afirma que certo conceito informal (algoritmo) corresponde a um certo objeto matemático (função recursiva).

¹⁸⁴ A descrição formal destas funções, bem como as teorias que referimos neste texto, pode ser encontrada em (LADRIÈRE, 1969).

ou uma decisão de algum procedimento em aberto). Seria desejável, mas nós não podemos tê-lo. Isto é o que Turing mostrou. O teorema de Turing é análogo ao de Gödel: reza que não há nenhum procedimento geral para se deliberar se um dado procedimento será finalizado por uma decisão definitiva.

Observe que o teorema de Turing não prova que não podemos eliminar os procedimentos *indecidíveis*, mas que não há como desenvolver um programa para este fim.¹⁸⁵ Outra importante observação é que o teorema de Turing não é uma leitura interpretada do Teorema de Gödel. Não houve nenhum modelo construído aqui. O Teorema de Gödel implica, de fato, no teorema de Turing. Isto porque a máquina, como definida por Turing, é concebida como um sistema formal. Como consequência, inferimos que não existe procedimento para decidir se um programa dado pára ou não. Não há, portanto, um algoritmo capaz de verificar, a priori, a presença de laços infinitos em um programa. Este resultado é denominado freqüentemente como “problema da parada da máquina de Turing”.

A esta altura já é perceptível que a “máquina” de Turing, enquanto um sistema formal, serviu de modelo para os computadores,¹⁸⁶ portanto, a estrutura lógica dos computadores é uma cópia de um sistema formal e, nesta circulação de idéias, o Teorema de Gödel produziu uma cópia, uma propriedade da ciência da computação; de que, dentro de uma certa linguagem de programação,¹⁸⁷ não é possível encontrar algoritmos para todo o tipo de problema proposto. A correspondência entre os *domínios conceituais* que favoreceu o modelo criado é dada pela tabela a seguir:¹⁸⁸

Máquina de Turing	Sistema Formal
Símbolos na fita	Alfabeto
Padrão da fita	Conjunto de símbolos
Dados de <i>input</i> (entrada)	Axiomas
Instrução do Programa	Regras de inferência
<i>Output</i> (saída)	Teorema

O computador, inicialmente concebido como um reproduzidor mecânico de sistemas formais, passou a exercer um poder transformador em relação à lógica

¹⁸⁵ LADRIÈRE, 1969, pp. 216-219

¹⁸⁶ Isto é, máquinas físicas, pois os de Turing são máquinas abstratas.

¹⁸⁷ Na próxima seção daremos mais detalhes sobre a relação entre o Teorema de Gödel e as linguagens de programação.

¹⁸⁸ TEIXEIRA, 1998, p.158

matemática. Graças à reversibilidade do modelo proposto, tornou-se possível enxergar os sistemas formais por meio do computador. Esta é uma alteração ocorrida no *estilo de pensamento* da comunidade de lógicos matemáticos proporcionada pela *circulação de idéias intercoletivas* mencionada acima. Nas décadas que se seguiram, esta disciplina modificou alguns pressupostos básicos de seu *estilo de pensamento* na medida em que avanços da teoria da computação propiciaram novos problemas de natureza distinta dos que eram trabalhados antes do surgimento do computador. Em alguns casos o computador passou a ser um instrumento de pesquisa e as simulações no computador passaram a fazer parte da metodologia de pesquisa também.

No entanto, o grande impacto cultural proporcionado por esta *circulação de idéias intercoletivas* é, sem dúvida nenhuma, a aplicação da então recente ciência da computação (com o correspondente envolvimento dos seus principais idealizadores) na Segunda Guerra Mundial. Von Neumann foi consultor das forças armadas aliadas e participou do desenvolvimento da bomba de hidrogênio e Alan Turing¹⁸⁹ utilizou os seus conhecimentos de lógica e criptografia a favor do exército inglês para decodificar mensagens nazistas criadas pela máquina *Enigma*.¹⁹⁰

Nesta propagação de ondas entre círculos *interno* e *externo*, os pais da ciência da computação olharam para o Teorema de Gödel e viram uma máquina que não executava todas as tarefas propostas numa determinada linguagem de programação. Alguns governantes olharam para o computador e viram uma máquina aliada da guerra.¹⁹¹

¹⁸⁹ Apesar das conexões entre as teorias de Gödel e Turing, não há nenhuma evidência histórica que permita deduzir alguma relação entre Gödel e a máquina de Guerra. A vida de Gödel em Viena não seria afetada pela ascensão de Hitler até o assassinato de Schlick por um estudante nazista. O fato provocou nele uma crise depressiva e ele mudou-se para os Estados Unidos, em 1932. Gödel ainda visitou Viena em 1938, quando a Áustria já estava anexada à Alemanha, mas o receio em ser convocado pelo exército e suas relações com amigos judeus fizeram-no voltar para os Estados Unidos, em 1940, onde permaneceu até a sua morte em 1978 (DAWSON, 1988, pp. 8-9; HINTIKKA, 2000, pp. 6-10). Outros matemáticos também tiveram suas vidas alteradas em função da Guerra: Hermann Weyl e Adolf Fraenkel também fugiram para os Estados Unidos, Imre Lakatos trocou o seu nome para Imre Molnar para fugir da perseguição nazista e Felix Hausdorff suicidou-se para evitar uma convocação pelo exército alemão.

¹⁹⁰ HODGES, 1992.

¹⁹¹ É claro que desta seqüência de conclusões, não se deve inferir uma relação metafórica entre o Teorema de Gödel e a máquina de guerra. Nosso intuito aqui foi exclusivamente mostrar a propagação das ondas para fora do círculo lógico matemático.

4.4. Ciências Cognitivas

Se o computador é uma construção modelada pela lógica matemática e esta, por sua vez, é um produto da mente humana, então poderia o computador ter a mesma capacidade que a mente humana? Se o Teorema de Gödel foi capaz de mostrar uma equivalência entre os limites dos sistemas formais¹⁹² e da máquina, poderia ele acenar para esta uma equivalência similar entre mente e máquina?

Especulações desta natureza incomodaram Turing¹⁹³ e, em seu artigo *Computing Machinery and intelligence* (Maquinaria de Computação e Inteligência) na revista *Mind*, em 1950, ele expôs tais questões. Em seguida afirmou que a “capacidade de pensar” da máquina depende de sua capacidade de simulação do comportamento do homem. Turing então propôs testes hipotéticos que verificariam, em determinadas situações, como se comportariam máquina e homem. Se as respostas fossem as mesmas, então a máquina poderia ser dotada desta capacidade de pensar. Turing recebeu críticas de vários filósofos que acusavam seu teste de ser um critério unicamente comportamental para conferir pensamento a homens ou máquinas. Todavia, a possibilidade de um novo *isomorfismo*, agora entre mentes e máquinas, parecia interessante tanto para o aprimoramento do computador quanto para os estudos que envolviam a compreensão da mente humana.¹⁹⁴

As reflexões sobre a mente remontam a Antiguidade grega, com autores como Platão e Heródoto, passando pela Idade Moderna, com Vico e Descartes, até que tomou impulso no início do século XX com o movimento da psicanálise e alguns avanços da neurologia. A simulação de processos mentais por meio do computador fundaria uma inteligência artificial e requereria também o conhecimento de profissionais de diversas áreas de conhecimento. Por exemplo, a simulação da linguagem humana no computador necessita o conhecimento de lingüística, a

¹⁹² Deste ponto em diante, fica subentendido que os sistemas formais a que nos referimos são *consistentes* e incluem a aritmética de Peano.

¹⁹³ A proposta de se criar máquinas com capacidade de efetuar tarefas próprias da mente humana remonta tempos mais remotos. As máquinas de calcular remontam o século XVII com Pascal.

¹⁹⁴ A mente se refere às funções do cérebro de que somos conscientes, tais como pensamento, razão, memória, inteligência e emoção. Sobre a sua natureza, se questiona se a mente é dissociada, identificada ou superveniente com o corpo, sendo cada doutrina ramificada em mais correntes (TEIXEIRA, 1998, pp. 45-48).

compreensão de certas reações emocionais necessita conhecimentos de psicologia, do funcionamento do cérebro, conhecimentos neurológicos, etc. Assim, o estudo de processos mentais agregaram teorias de diferentes campos do conhecimento ao longo do século XX. A filosofia da mente se preocupa com questões metafísicas e epistemológicas sobre a natureza do pensamento e da mente,¹⁹⁵ a neurociência compreende um conjunto de disciplinas biológicas que estudam o sistema nervoso,¹⁹⁶ a psicologia cognitiva trata da psicologia do pensamento,¹⁹⁷ na lingüística, há uma busca de conceitos lingüísticos universais que permitem a compreensão da mente humana.¹⁹⁸ Finalmente, a reunião da inteligência artificial com estas áreas compreendeu o campo das ciências cognitivas.¹⁹⁹

Dos estudos em ciências cognitivas brotam as questões sobre o *isomorfismo* entre mente e máquina, via lógica matemática. É neste âmbito que o Teorema de Gödel surge como o argumento capaz de comparar os limites de cada domínio. A estratégia é bem interessante. Conhecemos o *isomorfismo* entre uma máquina e um sistema formal e os seus limites impostos pelo Teorema de Gödel. Sendo a lógica matemática uma produção da mente humana, então é de se esperar que exista um *isomorfismo* entre mentes e sistemas formais.²⁰⁰ Dos *isomorfismos* entre mentes e sistemas formais, e máquinas e sistemas formais, deduz-se um *isomorfismo* entre mente e máquina. Assim, os limites impostos pelo Teorema de Gödel circulariam entre os *domínios conceituais* dos sistemas formais, da mente e do computador. Todavia esta linha de raciocínio não foi imediatamente construída na primeira metade do século XX, época em que a relação mente-máquina já estava na pauta dos cientistas. Assim, o uso posterior do Teorema de Gödel na construção do *isomorfismo* entre mente e máquina seria uma reinserção

¹⁹⁵ DENNETT, 1997; SEARLE, 2000.

¹⁹⁶ Cf. em (HOFSTADTER, 1979, pp. 337-365) ou em (GARDNER, 1996) uma exposição sobre como o sistema fisiológico do cérebro atua no pensamento.

¹⁹⁷ PENNA, 1984

¹⁹⁸ CHOMSKY, 2005; PINKER, 2002.

¹⁹⁹ Cf. em (HOFSTADTER, 1979, pp. 369-390) uma abordagem nesta área envolvendo questões sobre mentes e pensamentos. Para um estudo mais aprofundado sobre ciências cognitivas, pode-se consultar, por exemplo, (GARDNER, 1995).

²⁰⁰ Sob certo aspecto, esta premissa não está longe dos pressupostos do Círculo de Viena, tendo em vista o papel que a lógica matemática exercia no desenvolvimento de uma ciência, segundo postulava os membros deste círculo. Como veremos adiante, Gödel discorda desta correspondência, e isto tem, de uma forma ou outra, relação com a distância entre as suas concepções filosóficas e as do grupo de que foi membro durante as décadas de 1920 e 1930.

da *incompletude* neste processo de *circulação de idéias intercoletivas*. Neste sentido, à compreensão desta reinserção precede a compreensão do desenvolvimento simultâneo dos dois *domínios conceituais* – mente e máquina.

A construção de computadores sempre foi comparada com o cérebro humano. Ambos consituem, desde a década de 1930, *domínios conceituais* em constante relação metafórica. Mas os cientistas estavam interessados em mais do que metáforas. Eles desejavam compreender uma teoria como modelo da outra. Nas três primeiras décadas do século passado, os fenômenos mentais eram considerados como processos cerebrais produzidos por meio de impulsos elétricos emitidos por uma complexa rede de neurônios interconectados e esta rede serviria como modelo para a criação de um protótipo artificial do cérebro. Em seguida, os princípios da lógica foram usados para descrever os dois estados de interruptores de relés eletromagnéticos por meio da lógica de Boole, de onde surgiu o neurônio artificial. Ele tornaria possível realizar procedimentos lógicos computacionais, abrindo caminho para a simulação do pensamento humano.²⁰¹ Isto ocorreu na década de 1940. E foi nesta mesma década que von Neumann revolucionou a arquitetura dos computadores, colocando instruções e dados em um mesmo conjunto de memória (até então era necessário um conjunto de memórias para cada).²⁰² Sua idéia possibilitou rodar programas diferentes em um

²⁰¹ Os neurônios artificiais foram definidos como unidades binárias interconectadas. Cada unidade poderia receber *inputs* capazes de excitar ou inibir outras unidades. Uma unidade excitada por um input vai para a posição “desligado”. Quando não é inibida por um *input* e, ainda, a soma de *inputs* destinados a excitar ultrapassar uma determinada cota, ela vai para a posição “ligado”. A configuração destas unidades permitia realizar operações lógicas básicas, constituindo assim uma máquina de pensar.

²⁰² A estrutura do computador é a seguinte: ele possui um processador, que é um circuito integrado responsável por executar instruções, controlando funções de cálculos e tomadas de decisão do computador. O processador, bem como qualquer estrutura física do computador, é chamado *hardware*. Essas instruções, os códigos de máquina, são representadas por sequências de “zeros” e “uns”. As operações realizadas com estas sequências são regidas pela lógica booleana e constituem a base do cálculo computacional. Toda instrução é traduzida internamente pelo processador em termos das operações da lógica booleana. Este complexo é chamado linguagem de máquina. Os programas de computação, ou *software*, são algoritmos executados pelo processador e, devido ao extensivo trabalho que a linguagem de máquina proporciona, é comum programar em linguagens “de nível mais alto” e utilizar um compilador ou um interpretador para traduzir as instruções em linguagem de máquina para que elas possam ser executadas pelo computador. O compilador, a partir do código (código-fonte) escrito em uma linguagem, cria um programa (código-objeto) semanticamente equivalente porém escrito em outra linguagem (a linguagem de máquina). Ele fica gravado e só é carregado em memória no momento da execução. O interpretador faz o mesmo trabalho, porém não gera o arquivo em código-objeto. As instruções são passo a passo traduzidas para linguagem de máquina em tempo de execução. Uma linguagem de programação considerada de nível médio é a linguagem de montagem, de códigos mnemônicos e compreensão extremamente mais fácil. Uma linguagem de programação de alto nível é

mesmo ambiente, o que acelerou o desenvolvimento de programas de simulação da mente, abrindo as portas para a inteligência artificial.

No final da década de 1960, a inteligência artificial simbólica desviaria a simulação da inteligência da construção de máquinas com hardwares específicos para o desenvolvimento de programas computacionais que operariam basicamente sobre dados ou representações. A inserção do simbolismo lógico matemático na inteligência artificial induziu uma apreensão de mente como um dispositivo lógico descrito por um conjunto de computações abstratas. Neste contexto, a mente operaria como um sistema formal com suas propriedades sintáticas e a inteligência se relacionaria com a capacidade de produzir e manipular símbolos.²⁰³

A relação mente-máquina cada vez mais costurada pela lógica matemática provocou duas reações de naturezas distintas. A primeira foi a recusa desta relação por parte de alguns autores por razões metafísicas. Com efeito, depois de a revolução copernicana tirar o homem do centro do universo astronômico e da teoria da evolução das espécies tirá-lo do centro do reino animal, a inteligência artificial o colocaria em pé de igualdade com suas próprias criações mecânicas. Isto assustou os zeladores da razão humana, que passaram então a questionar os pressupostos teóricos da inteligência artificial. A segunda reação foi a reinserção do Teorema de Gödel dentro desta *circulação de idéias intercoletivas* (conforme anunciamos anteriormente). Ao contrário do que ocorreu nas *comunidades científicas* estudadas anteriormente, no entanto, o Teorema de Gödel não seria para as ciências cognitivas apenas uma leitura a ser contextualizada pelo seu *estilo de pensamento*, mas um argumento capaz de fornecer respostas sobre os limites da mente em comparação à máquina. É claro que sendo um argumento necessário para a comparação dos limites entre mente e máquina, o Teorema de Gödel também foi interpretado por esta comunidade dentro de seu *estilo de pensamento*. A questão que desejamos enfatizar é que o objetivo da leitura do Teorema de Gödel pelas ciências cognitivas não está no teorema em si, mas

composta de símbolos mais complexos, porém ela mais inteligível para o ser humano. As linguagens de mais alto nível são mais interessantes para a inteligência artificial. (HOFSTADTER, 1979, pp. 285-310).

²⁰³ Atualmente, existe uma linguagem de altíssimo nível conhecida como Prolog. Ela se baseia num subconjunto do cálculo de predicados de primeira ordem. A execução de um programa em Prolog é efetivamente a prova de um teorema por resolução de primeira ordem. Seu uso associa-se principalmente com a inteligência artificial.

no elo que ele potencialmente estabelece entre mente e máquina. Neste sentido, quando o pesquisador das ciências cognitivas visse o Teorema de Gödel enxergaria a relação mente-máquina (ou a inexistência desta relação, segundo correntes opositoras). No que segue desta seção, estudaremos as ações e reações deste movimento histórico ocorrido a partir da segunda metade do século XX.

John Lucas (1961), com notável e insistente preocupação com a supremacia da mente em relação à máquina, argumentou que o Teorema de Gödel mostrou a incapacidade das máquinas descreverem os processos mentais. Com efeito, enquanto uma máquina não tem capacidade de relatar todas as suas ações sem o acréscimo de outra máquina, nós podemos relatar e criticar nossos desempenhos sem que uma parte seja acrescida. Em seguida, argumentou que podemos construir uma máquina tão complexa quanto se queira e, se for uma máquina, ela deve corresponder a um sistema formal que, por sua vez, conterá uma fórmula não demonstrável neste sistema. De acordo com o Teorema de Gödel, a máquina será incapaz de produzir esta fórmula enquanto a mente pode constatar que é verdadeira.

O argumento de Lucas foi muito estimulante para os filósofos da mente, mas encontrou na base matemática de Hofstadter (1979) e, mais recentemente, na de Franzén (2005), argumentos contrários às suas teses. Franzén (2005, p. 117) lembrou que o Teorema de Gödel afirma a existência de *indecidíveis* desde que a condição de consistência do sistema formal seja satisfeita. Ocorre, porém, que a consistência da aritmética não foi provada e, em segundo lugar, o Teorema de Gödel não fornece nenhuma procedimento computável que permita encontrar *indecidíveis* na aritmética. Logo, a mente não é capaz de constatar a veracidade de uma fórmula qualquer da aritmética.

Acrescentamos ao argumento de Franzén que se a mente fosse capaz de constatar a veracidade de uma fórmula, saberia o padrão que induziu esta “descoberta” e programaria o computador a repeti-lo. Este foi o argumento de Hofstadter (1979, p. 471). Ele afirmou que a máquina tem tanta capacidade de *saltar para fora do sistema* quanto a mente. Que se entenda *saltar para fora do sistema* por construir um sistema em que o *indecidível* do anterior é axioma deste:

Pode-se escrever um programa de computador de maneira bastante fácil, que sistematicamente gerará teoremas daquele sistema, e de tal maneira que, eventualmente, qualquer teorema pré-selecionado será impresso. Ou seja, o programa gerador de teoremas não saltará de qualquer porção do 'espaço' de todos os teoremas. Tal programa seria composto de duas partes principais: (1) uma sub-rotina que produza os axiomas, dados os 'modelos' dos esquemas de axiomas (se houver algum); (2) uma sub-rotina que tome os teoremas conhecidos (inclusive os axiomas, naturalmente) aplique regras de inferência para produzir novos teoremas. O programa alternar-se-ia entre rodar primeiro uma dessas sub-rotinas, e depois a outra. (HOFSTADTER, 1979 p. 471).

Apesar do debate sobre a relação entre máquina e mente tomarem impulso após a publicação de Turing na década de 1950, as críticas sobre este possível *isomorfismo* remontam ao próprio Gödel. Em entrevista à Hao Wang, em 1951, ele admitiu que a mente não pode ser mecanizada pelo computador. Embora não tenha publicado nada a respeito, Gödel acreditava ter provado rigorosamente, presumivelmente com base no seu teorema, que “ou a mente humana excede todas as máquinas (para ser mais preciso ela pode decidir sobre um número maior de questões teóricas do que qualquer máquina) ou número de questões teóricas *indecidíveis* é o mesmo também para a mente humana” (GÖDEL, 1951 apud GOLDSTEIN, 2005, p. 203).

É claro que Gödel, consciente dos trabalhos de Turing, estabeleceu uma correspondência entre o seu teorema e o de Turing.²⁰⁴ Logo, o fato da máquina de Turing não ser capaz de resolver todos os problemas através de algoritmos implica no limite da máquina frente à mente humana. A visão de Gödel se justifica pela sua filosofia, na qual, a intuição tem um papel fundamental na produção matemática e intuição, segundo o lógico matemático, não pode ser mecanizada por um algoritmo.

As opiniões de Gödel sobre a relação mente-máquina não tiveram impacto na época, primeiro porque foram publicadas em uma fonte secundária, o que limitou o conhecimento delas, e em segundo, porque foram levantadas em uma época em que os pressupostos teóricos da inteligência artificial não incluíam a lógica matemática. Antes da inserção do simbolismo lógico na inteligência artificial, os teóricos da área acreditavam ser possível evitar as dificuldades propostas pelos teoremas de Gödel e Turing através de procedimentos menos técnicos. Todavia, a lógica matemática

²⁰⁴ Em nosso entendimento, esta correspondência faz parte do isomorfismo proporcionado entre o sistema formal e o computador, ou seu ancestral, a máquina de Turing. Conforme já vimos nesta seção, um *domínio conceitual* serviu de modelo pragmático para o outro.

posteriormente se mostrou uma ferramenta poderosa para a inteligência artificial e a ressurreição dos resultados de Gödel e Turing foi inevitável. Neste ponto, é de se admirar o trabalho de Lucas, que abriu a ferida com uma antecipação de quase dez anos.²⁰⁵

Seu maior opositor, Hofstadter, aproveitou os resultados de Gödel e Turing para tentar provar o contrário: que o computador é capaz de descrever todos os processos mentais. Em seu *Gödel, Escher e Bach: an Eternal Golden Braid*, de 1979, além das relações entre lógica matemática, música e artes plásticas aludidas pelo título, Hofstadter subtraiu metáforas “gödelianas” até de toca-discos. Apesar desta diversidade, todos os modelos construídos convergem para o tema central (se é que existe um diante do ecletismo da obra): a possibilidade do *isomorfismo* entre os domínios do cérebro e do computador.

Ele próprio utiliza esta terminologia, *isomorfismo* – que tomamos emprestado de Black (seção 3.3) – para dizer o que para nós significa um sistema servir de modelo para o outro. Com Hofstadter, aprendemos vários modelos. O *isomorfismo* entre mente e máquina é tão claro para o autor que ele também tomou emprestado da ciência da computação alguns termos para usos metafóricos na neurologia (procedimento comum na psicologia cognitiva já observado por Richard Boyd, conforme vimos na seção 3.5):

Nós, seres humanos, também temos aspectos de software e hardware e a diferença é algo corriqueiro para nós. Estamos acostumados com a rigidez de nossa fisiologia: o fato de que não podemos, pela simples vontade, curar-nos de doenças ou ter cabelos de diversas cores – para dar apenas uns poucos exemplos simples. Podemos, no entanto, “reprogramar” nossas mentes para operarmos em novos arcabouços conceituais. A flexibilidade assombrosa de nossas mentes parece quase inconciliável com a noção de que nossos cérebros têm que ser feitos de hardware, com regras fixas e impossíveis de reprogramar. Não podemos mudar a velocidade de ação de nossos neurônios, não podemos recondicionar nossos cérebros, não podemos formular o interesse de um neurônio, não podemos fazer nenhuma escolha a respeito do hardware – e, no entanto, podemos controlar a maneira como pensamos. (HOFSTADTER, 1979, p. 302).

A leitura do Teorema de Gödel em diversos contextos proposta por Hofstadter não se resume a aplicar o jargão de que o sistema em questão é *incompleto*. A idéia de

²⁰⁵ Lucas publicou em 1961 sua crítica à inteligência artificial, utilizando o Teorema de Gödel como argumento, mas o uso da lógica matemática na inteligência artificial ocorreu efetivamente somente na década de 1970.

saltar para fora do sistema é predominante e provém da análise de que a existência de um *indecidível* em um determinado sistema formal implica na possibilidade de se construir outro sistema – mais geral – tendo este *indecidível* como axioma. Isto implica que só podemos enxergar a completude de um sistema, saltando fora dele, isto é, vendo todo o processo dentro de um sistema mais abrangente.

Outro ponto motivador de metáforas é a auto-referência oriunda do paradoxo de Epimêmides. Ela é responsável pela criação do *indecidível*, uma proposição que fala de si própria e diz é “não pertenço a este sistema”. Portanto, cada *domínio conceitual* modelado pelo Teorema de Gödel tem a capacidade de gerar *indecidíveis* se contiver em seu interior uma auto-referência capaz de produzir o mesmo efeito do Teorema de Gödel. Para exemplificar este processo, tomemos a síntese de um dos exemplos de Hofstadter: a biologia molecular. Considere o quadro a seguir (adaptado) contendo as relações decorrentes do *isomorfismo* entre este campo de conhecimento e a lógica matemática.²⁰⁶ Nele, usaremos os símbolos *SF* para Sistema Formal, *N* para o conjunto dos números naturais (inteiros positivos) e *NG* o subconjunto dos naturais formado pelos números de Gödel (pensado como uma meta-linguagem para *SF*):

Biologia molecular	Lógica matemática
Cadeias de DNA	Seqüências de fórmulas de <i>SF</i>
Cadeias de RNA	Afirmações em <i>N</i>
Proteínas	Afirmações em <i>NG</i>
Proteínas que agem sobre proteínas	Afirmações de <i>NG</i> que falam sobre afirmações de <i>NG</i>
Proteínas que agem sobre proteínas que agem sobre proteínas	Afirmações de <i>NG</i> que falam sobre afirmações de <i>NG</i> que falam sobre afirmações de <i>NG</i>
Transcrição ($\text{DNA} \Rightarrow \text{RNA}$)	Interpretação ($\text{SF} \Rightarrow \text{N}$)
Tradução ($\text{RNA} \Rightarrow \text{Proteínas}$)	Aritmetização ($\text{N} \Rightarrow \text{NG}$)
Código genético	Código de Gödel
Aminoácido	Símbolo criado na <i>SF</i> usado na <i>NG</i>

²⁰⁶ HOFSTADTER, 1979, p. 533.

Auto-reprodução	Auto-referência
Sistema de apoio celular suficientemente forte para permitir auto-reprodução	Sistema formal aritmético suficientemente poderoso para permitir auto-referência

A partir desta identificação, pode-se gerar a versão biológica do Teorema de Gödel:²⁰⁷

É sempre possível conceber uma cadeia de DNA que, se injetada em uma célula, causaria, após ser transcrita, a produção de proteínas tais que destruiriam a célula (ou o DNA), tendo por consequência a não-reprodução desse DNA. (HOFSTADTER, 1979, p. 536)

O objetivo deste *isomorfismo*, todavia, não está em si, mas na elaboração da tese de Hofstadter sobre a relação entre máquina e mente, via Teorema de Gödel. Para este fim, Hofstadter faz um estudo detalhado das condições de um sistema formal que resultam na *incompletude* deste sistema e deduz que um *isomorfismo* entre qualquer domínio e um sistema formal é possível se o domínio a ser modelado consistir em uma estrutura de níveis, na qual um nível mais alto descreve completamente o nível mais baixo (como no caso da biologia molecular). Além desta divisão em níveis, o domínio em questão deverá ser capaz de produzir em cada nível uma sentença auto-referencial.

Isto ocorre no computador. Embora o hardware processe a linguagem de máquina, a complexidade de sua manipulação exige que se programe em linguagens “de nível mais alto” e se utilize um compilador para traduzir as instruções em linguagem de máquina para que elas possam ser executadas pelo computador. O que ocorre também é que uma linguagem de nível mais alto é capaz de executar tarefas que a de nível mais baixo não conseguia. Este é um procedimento típico de *saltar para fora do sistema*. Pelo teorema de Turing, conforme vimos, este processo se repete *ad infinitum*. Uma auto-referência neste contexto seria um procedimento do tipo “não sou executável nesta linguagem.”

Neste ponto, Hofstadter utiliza a estratégia que já comentamos anteriormente. Procura estabelecer um *isomorfismo* entre mentes e sistemas formais e, utilizando como argumento o *isomorfismo* já conhecido entre máquinas e sistemas formais, obter o *isomorfismo* entre mente e máquina para argumentar que o Teorema de Gödel

²⁰⁷ Depois da qual o autor se preocupou em exhibir exemplos ilustrativos para comprovar a eficácia do resultado, algo que dispensaremos aqui.

demonstra a sua conjectura. Então ele pergunta: e a mente? Também pode ser concebida em diferentes níveis? Hofstadter citou alguns exemplos para provar que isto é verdade²⁰⁸ e tentou formular uma teoria para explicar que a mente pode ser dividida em níveis e cada nível é capaz de produzir uma sentença auto-referencial responsável pelo *salto para fora do sistema*.²⁰⁹ Neste ponto, Hofstadter não foi bem sucedido. Com exemplos mal elaborados e conclusões confusas, ele não conseguiu provar o fato. Um destes exemplos, o preferido de Hofstadter, é o jogo de xadrez. Ele observou que um jogador mais experiente consegue ver jogadas que um leigo não dá conta, da mesma maneira que algumas pessoas têm uma capacidade de resolver certos problemas matemáticos e outras não.²¹⁰ Em seguida, Hofstadter elabora a partir de especulações vazias uma pseudo-teoria de ponto de vista realista e sem nenhum fundamento prévio para concluir que todos os cérebros são iguais (ponto sobre o qual voltaremos mais adiante) e todos funcionam como o sistema formal S que produz a proposição *indecidível*.

O equívoco de Hofstadter, neste caso, foi acreditar que uma teoria sobre a mente pode ser formulada com base em opiniões e ser tratada como senso comum. Todavia, as tentativas deste autor parecem direcionar o foco da questão para os aspectos cognitivos da inteligência e, neste caminho, Hofstadter deveria mostrar, por meio de alguma teoria epistemológica, que o aprendizado pode ocorrer em diferentes níveis. Ora, a questão sobre níveis de cognição já é conhecida desde a epistemologia genética de Jean Piaget, formulada na primeira metade do século XX, que por sua vez, serviu de fundamento para um sem número de teorias sobre aprendizagem.²¹¹ Piaget, a grosso modo, nos ensinou que os níveis de aprendizagem de uma criança avançam do mais concreto ao mais abstrato. Esta formulação faltou para Hofstadter, que não sabia dizer o que há no experiente jogador de xadrez que falta no leigo. A resposta é: uma maior capacidade de abstração no jogo. Evitando elaborar detalhadamente a teoria de Piaget, analisaremos a própria história da matemática para termos uma idéia sobre os níveis de

²⁰⁸ HOFSTADTER, 1979, pp. 285-286.

²⁰⁹ Ibid, pp.369-390.

²¹⁰ Ibid, pp. 37-38.

²¹¹ ANDRADE, 2003.

abstração.²¹² Desejamos comparar o nível de abstração em épocas diferentes, dentro dos parâmetros atuais.²¹³

Suponhamos ter que resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Este problema seria elaborado na Grécia Antiga como “sabendo que (a área de) um quadrado mais seis é igual a um retângulo de base 6 e altura igual ao lado do quadrado, encontre o lado do quadrado”. Suas soluções, 2 e 3, são resultados de diversas construções geométricas e só puderam ser encontradas, neste caso, porque são positivas, obviamente. Logo, uma equação similar a esta que forneça raízes negativas ou complexas não é possível de ser resolvida dentro do nível de conhecimento grego sobre o assunto. A inserção do simbolismo na matemática, característica do Renascimento, seguida do desenvolvimento de números complexos proporcionaria fórmulas algébricas capazes de resolver qualquer equação similar a esta. Assim, tivemos que elevar o nível de abstração para dar conta de problemas que no nível anterior não tinham solução. Seguindo este caminho, o nível de abstração nesta situação também não era “completo”. De fato, havia outros problemas, como o de resolver equações de graus superiores a 4, que os matemáticos de séculos anteriores ao XIX não conseguiam resolver, dentro do seu nível de abstração que se limitava em encontrar fórmulas algébricas para resolver equações. Foi necessário Abel e Galois, no século XIX, compreenderem estruturas algébricas para concluir que o problema, de fato, não tem solução. Esta compreensão exigiu também uma mudança de nível.

Concluindo, pode-se dizer que, em cada situação, foi necessário *saltar para fora do sistema* para compreendê-lo. É claro que o sistema a que nos referimos é a mente. Esta seqüência ocorre, sob certo ponto de vista, de maneira similar no aprendizado de uma pessoa durante sua vida escolar. Seus processos mentais, em certas ocasiões, precisam *saltar para fora do sistema*. Isto é a efetivação da aprendizagem.

Esta visão, no entanto, cria duas questões incômodas. Em primeiro lugar, o que seria uma declaração auto-referencial da mente? Hofstadter dedicou um capítulo inteiro sobre auto-referências (XVI), mas não falou nada a respeito. Porém, no capítulo

²¹² Esta metodologia não é incomum na área de educação e, portanto, nossa análise não deve provocar desconforto aos estudiosos da área.

²¹³ É claro que esta análise é completamente descontextualizada, mas o nosso propósito é apenas mostrar como funcionam os níveis de aprendizagem, no quesito abstração. Não podemos nos furtar também do fato que a elevação do nível de abstração é uma tendência histórica da matemática.

anterior, sobre *saltos para fora do sistema*, evocou Buda para provar que podemos saltar para fora de nós mesmos através do zen-budismo.²¹⁴ Como não pretendemos fazer nenhuma discussão metafísica sobre as diferenças entre mente e espírito, tentaremos aqui uma alternativa racional. Suponha, por exemplo, que o nível de abstração de uma certa pessoa seja X. A frase “não sou assimilável no nível X de abstração” seria uma declaração auto-referencial suscetível de provocar um salto no sistema? Suponha que sim. Todavia, aquela pessoa só poderá perceber a auto-referência, se ela própria *não estiver* no nível X de abstração. Isto é, ela precisa *saltar para fora do sistema* antes de se deparar com a declaração em questão.²¹⁵ Nesta linha de raciocínio, concluímos que não é possível formular na mente tal declaração, isto é, saltamos fora do sistema sem a consciência prévia do que motivou este salto.

Outra dificuldade de se criar declarações desta natureza é que pessoas diferentes podem estar em níveis diferentes de abstração. Na verdade, isto é o mais comum, mesmo com crianças de mesma idade.²¹⁶ Todavia, os argumentos de Hofstadter mostram que ele discorda desta proposição. No capítulo XII, ele nos solicita imaginar que uma pessoa possua um mapa da América Latina em que constam apenas os acidentes geográficos – rios, montanhas, etc. Então, com apenas estas informações fornecidas, esta pessoa deve fazer um guia rodoviário, contendo fronteiras internacionais, localização de cidades, placas, etc. Hofstadter tenta nos convencer que, se esta pessoa percorrer esta localidade conduzida pelo guia que produziu, não errará muito seus itinerários. Encontrará o Maracanã no Rio de Janeiro, bem como a Avenida Rio Branco, etc. Hofstadter conclui que os cérebros de todos os seres humanos existe uma parte comum que é universal. Isto mostra que Hofstadter desconsidera que são as questões histórico-culturais que levam a pessoa a não errar muito o itinerário²¹⁷. Isto é,

²¹⁴ HOFSTADTER, 1979, p. 479

²¹⁵ Por exemplo, antes de Galois conhecer a insolubilidade das soluções de equações de grau maior do que 4 ele conhecia as estruturas algébricas. Antes de Gödel demonstrar o seu Teorema ele conhecia *metamatemática* e, como o próprio Gödel afirmou (seção 3.2), antes de ele construir a auto-referência no sistema formal ele conhecia o paradoxo de Epimênides. Em todos os casos, o *salto para fora do sistema* foi motivado pelo conhecimento de idéias que não pertenciam àquele nível.

²¹⁶ Isto é, ao contrário do que Hofstadter tentou provar, os cérebros não são todos iguais, pelo menos no quesito cognição.

²¹⁷ Pontuaremos uma curiosidade: a América Latina está no mapa apenas da versão brasileira do livro de Hofstadter. Na sua versão original, americana, ele solicita que imaginemos toda a situação com o mapa

se mostrássemos este mapa para um neozelandês, certamente ele não conseguiria chegar a lugar nenhum da América Latina sem errar. Hofstadter, de acordo com a sua teoria, discordaria da nossa crítica e confiaria cegamente no neozelandês, tendo em vista a sua teoria segundo a qual todos os cérebros são iguais.

Concluimos de nossas reflexões que Hofstadter não foi bem sucedido em estabelecer um *isomorfismo* entre mentes e sistemas formais, mas devemos elogiar sua estratégia de construir o conjunto de itens do domínio “sistema formal” potencialmente relacionados com o domínio “mente”, sob forma de metáfora. Merecem destaque também as metáforas decorrentes do *isomorfismo* pretendido entre mente e máquina. Por exemplo, os neurônios estão para os bits, assim como o cérebro está para o hardware, assim como a mente está para o software. Neste último caso, aprendemos que o correto é dizer sobre o *isomorfismo* entre cérebro e máquina, e não, entre mente e máquina. Outra conclusão que se pode tirar destas análises é que se realmente existir um *isomorfismo* entre cérebro e máquina, então teremos uma teoria sobre processos cognitivos, com base no Teorema de Gödel, segundo a qual podemos entender a genialidade do próprio Gödel: o lógico austríaco, ao ter consciência de que teria que assimilar algo não assimilável *a priori*, *saltou para fora do sistema* – o seu nível de aprendizagem – para um nível seguinte a fim de compreender aquilo que não era assimilável no nível anterior.²¹⁸

É importante observar que nossas ressalvas às idéias de Hofstadter não devem ser interpretadas como críticas ao *isomorfismo* entre cérebro e máquina e sim, como críticas a alguns pontos do *isomorfismo* entre sistemas formais e mentes proposto por este autor. Nas linhas que seguem, veremos autores que de fato criticam qualquer proposta de *isomorfismo* entre cérebro e máquina.

Um ano após a publicação de Hofstadter, em 1980, Searle publicou o artigo *Minds, Brains and Programs*, onde negou a possibilidade de criar uma mente mecânica similar à mente humana. Como exemplo ele cita o programa desenvolvido por R.

dos Estados Unidos. Concluimos que o argumento de Hofstadter não convenceu nem o tradutor e nem o editor da versão brasileira do seu livro.

²¹⁸ Gödel fez isto de fato na *metamatemática*. Porém, o *salto para fora do sistema* significa neste caso elevar o seu nível de abstração para apreender um conceito abstrato demais para o nível anterior. Isto seria feito pelo acréscimo de um conhecimento previamente apreendido e cuja abstração não pertencia ao nível anterior.

Schank, em 1977. Este programa tinha a capacidade de replicar corretamente perguntas feitas sobre um pequeno relato previamente fornecido para o computador. Schank concluiu que seu programa era capaz de compreender o texto. Searle questionou esta capacidade pretendida por Schank. Ela é equivalente à pretensão de aprendermos outra língua baseando-se somente em regras de transformação (traduções ao pé da letra) de uma língua em outra.²¹⁹ O aprendiz pode acreditar que aprendeu de fato a língua devido à sua habilidade de manipular os símbolos, mas esta manipulação é completamente cega. Não é suficiente oferecer as regras de transformação, é necessário fornecer também os significados, ou nos dizeres de Searle, a intencionalidade. Só assim, os códigos lingüísticos não serão um amontoado de símbolos, mas uma expressão com significado.²²⁰ Logo, a mente não funciona sem a intencionalidade, sem a referência da experiência vivida. Ao contrário de um programa de computador, nossa consciência não pode se desvincular do mundo externo.

Outro adversário do *isomorfismo* entre cérebro e máquina é Roger Penrose. Ele passou a limpo o argumento de Lucas após revistar a lógica matemática, em particular, os resultados de Turing e Gödel²²¹ e reconheceu na intuição matemática ou em atividades mentais de uma forma geral procedimentos não computáveis (isto é, impossíveis de serem descritos através de algoritmos). Acrescentou ainda a possibilidade de haver na própria natureza processos não computáveis, inviabilizando o *isomorfismo* entre processos mentais e a máquina de Turing. Isto é, Penrose estendeu o debate sobre o *isomorfismo* entre cérebro e máquina acrescentando a física no imbróglio. Ele buscou na mecânica quântica fenômenos não determinísticos, que não pudessem ser descritos em termos de algoritmos, embora sejam suscetíveis no cérebro humano. Ora, vimos na seção 4.2 que Costa e Dória provaram na década de 1990 que na física há problemas que não podem ser descritos pelas teorias em que eles pertencem. O assunto ainda era desconhecido quando Penrose publicou *The*

²¹⁹ A experiência mental proposta por Searle se chama “experiência do quarto chinês”. Nela, Searle pressupõe que uma pessoa, sem nenhum contato com outras pessoas, deseja aprender chinês nas condições que descrevemos e única coisa que recebe são instruções normativas contendo a codificação de uma língua em outra. Searle publicou esta experiência novamente no livro *Mind, Brain and Science* (SEARLE, 1984) onde ele também reúne, discute e responde às diversas críticas de seu argumento.

²²⁰ TEIXEIRA, 1998, pp. 69-74.

²²¹ Confira as críticas de Feferman (1995) e as respostas de Penrose (1996).

Emperor's New Mind,²²² em 1989, mas já tinha sido publicado quando Penrose tentou provar sua tese ampliada em *Shadows of the Mind*,²²³ em 1994, usando o Teorema de Gödel. Assim, apesar das críticas de Feferman (1995) em relação aos cometidos por Penrose em sua demonstração lógica matemática sobre a não-computabilidade da intuição, parece que os resultados de Costa e Dória poderiam respaldar que a conjectura de Penrose a respeito da *incompleteness* de fenômenos físicos é verdadeira.

Finalizando este tópico, é interessante observar que o Teorema de Gödel teve a força de motivar modelos não apenas pelo seu resultado em si, mas pela sua linha de raciocínio empregada que, embora tenha *saltado para fora do sistema*, como diz Hofstadter, pareceu, ao mesmo tempo, ser dotada de uma existência tão natural como procuraram mostrar os *isomorfismos* entre os sistemas formais e os diversos *domínios conceituais* que vimos: na biologia, na ciência da computação, nas ciências cognitivas. Pudemos verificar a força que o modelo proposto pelo Teorema de Gödel exerceu na constituição de novos modos de se pensar a ciência no século XX, novas ciências foram criadas, novas filosofias, novos problemas.

Em termos historiográficos, pudemos observar a força dos modelos como molas propulsoras da *circulação de idéias intercoletivas*. Em alguns momentos, como na múltipla relação entre computação, matemática e física, percebemos um entrelaçamento entre as concepções *semântica* e *pragmática* dos modelos. As tentativas de se constituir um *isomorfismo* entre cérebro e máquina também contribuíram para percebermos, que independente do sucesso na elaboração de um modelo, sua intenção motivou a criação de diversas metáforas. Isto demonstra nossa afirmação de que a existência de metáforas não depende da existência de modelos, ainda que, segundo Black, a metáfora seja a ponta do iceberg, o modelo. Finalmente, nossas análises também mostram que a possibilidade de criação de modelos, mesmo que não sejam unanimemente aceitos por uma comunidade, têm, em certos casos, a potencialidade de modificar *estilos de pensamento*.

²²² PENROSE, 1993.

²²³ Id., 1995.

4.4 Humanidades

Retomando uma análise feita na seção 3.2., se dois *estilos de pensamento* são redes com poucos nós comuns, então a comunicação entre os membros destas comunidades pode ser dificultada. Naturalmente, este fato tem reflexos na *circulação de idéias intercoletivas*. O Teorema de Gödel, bem como a teoria da relatividade e outros resultados de ciências exatas provocaram impactos nas ciências humanas no século XX, como veremos neste capítulo e, por força da dificuldade de comunicação entre estas comunidades, esta *circulação de idéias intercoletivas* desde então tem sido realizada em palcos de muitas polêmicas, em alguns casos, verdadeiras guerras.²²⁴

Acreditamos que as informações sobre como as metáforas e os modelos modificam estilos de pensamento possam contribuir para esclarecer (melhor do que a *interpretação de Sokal*) de que maneira o Teorema de Gödel foi apropriado nas ciências humanas. Neste sentido, apesar dos equívocos técnicos corretamente apontados pela *interpretação de Sokal* nas descrições matemáticas que estes pensadores fazem do Teorema de Gödel,²²⁵ discordamos que devemos inferir que suas leituras e interpretações dentro de seu campo de atuação são ilegítimas. Este raciocínio inquisidor não é construído dentro de um ponto de vista cultural.

As leituras metafóricas de autores em ciências humanas nutrem teorias em um contexto (o *estilo de pensamento*) que seus pares apreendem, compreendendo ou não lógica matemática.²²⁶ A legitimidade de suas leituras dentro de seu campo de atuação é dada pelos *seus* pares e sua comprovação se dá pela popularidade das obras que as contém, e também de quem as descreve. Isto é, mais importante do que demonstrar

²²⁴ Já abordamos em parte este assunto no capítulo três, quando refletimos sobre a compreensão do conceito de topologia por matemáticos, físicos e psicanalistas. Observamos que há uma pequena distância entre o que matemáticos e físicos compreendem sobre topologia, mas entre matemáticos e psicanalistas a distância é muito maior.

²²⁵ Como exemplo, mencionamos a explicação de Virilio, em Espaço Crítico, de que o Teorema de Gödel “prova matematicamente um objeto sem que se produza tal objeto...” (1993, p. 50), refutado corretamente por Sokal e Bricmont ao explicarem que o Teorema de Gödel “produz explicitamente uma proposição que não é nem demonstrável nem refutável no sistema considerável (contando que o sistema seja não-contraditório)” (1999, p. 173). Outro exemplo de situação deste tipo foi corrigido por Franzén (2005, p. 37). Ele ponderou que, ao contrário do que afirma Kadvany (1989, p. 165), o Segundo Teorema de Gödel não prova que a consistência de um sistema S pode ser provada em um sistema mais forte do que S.

²²⁶ A idéia de os membros de uma comunidade aceitarem uma teoria sem o conhecimento do que motivou o autor desta teoria pode parecer estranha, mas é comum na história da ciência. Os seguidores de Lacan, por exemplo, não são *experts* em matemática apesar de legitimarem a topologia lacaniana.

que uma certa apropriação ocorreu é verificar o que esta apropriação significou para um determinado *estilo de pensamento*.

A *interpretação de Sokal*, no entanto, prefere deslegitimar tais apropriações porque acredita que algumas áreas das ciências humanas, em particular aquelas que produziram as obras criticadas por esta linha, possuem *estilos de pensamento incomensuráveis*²²⁷ com o *estilo de pensamento* da lógica matemática. Como consequência desta *incomensurabilidade*, não faz sentido produzir nas ciências humanas uma cópia do Teorema de Gödel, pois nenhuma teoria deste campo poderia descrever um fenômeno (social, psicológico, histórico, etc.) de uma maneira similar a de um sistema formal. A *incomensurabilidade* implicaria em uma *incomparabilidade* e talvez em uma *incomunicabilidade*.²²⁸

Deixemos momentaneamente os críticos de lado e afaguemos nossa curiosidade histórica: que *domínios conceituais* construídos dentro das ciências humanas no século XX levantaram a conjectura de um *isomorfismo* com o domínio dos sistemas formais do círculo lógico matemático? Para entender estes domínios é necessário compreender as mudanças ocorridas na história do pensamento, no século XX. Boa parte de sociólogos, filósofos e historiadores do século XX dedicou um volume considerável de estudos sobre estas mudanças como partes de um movimento a que denominam como *pós-modernidade*.

Não é fácil delimitar um conceito de pós-modernidade, pois não há concordância entre os que procuram fazê-lo. Não é unanimemente aceito ou até compreendido. Em

²²⁷ Esta incomensurabilidade que estamos falando é aquela que Kuhn (1977) prega quando fala sobre revoluções científicas. Após as revoluções, de acordo este autor, os praticantes da ciência não conseguem conceber o mundo da mesma forma antes. O mundo mudou na nova ótica dos cientistas. Suas visões de mundo antes e depois da revolução tornaram-se *incomensuráveis*. Discordamos que as descobertas científicas provoquem este tipo de reação nas *comunidades científicas*. Todavia, usamos aqui o termo *incomensurabilidade* com o intuito de mostrar que a *interpretação de Sokal* pensa exatamente em uma ruptura total entre as duas maneiras de pensar, no caso entre as ciências humanas e exatas.

²²⁸ Devemos reconhecer que após definir a *incomensurabilidade* em *A Estrutura das Revoluções Científicas* (1977), o próprio Kuhn procurou em seguida esclarecer melhor o conceito tirando-lhe o formato radical inicialmente proposto e argumentou que as implicações *incomensurabilidade-incomparabilidade-incomunicabilidade* não são verdadeiras de uma forma geral (KUHN, 2006b). Neste caminho, as dificuldades epistemológicas de Kuhn com o conceito de *incomensurabilidade* (por sua vez abraçado pela *interpretação de Sokal* em seus argumentos), mostram o cuidado que a análise da circulação de idéias nestas comunidades merece. Neste sentido, preferimos a idéia que apropriamos de Fleck (1986), de que o que existe entre estas áreas é uma *dificuldade de comunicação*.

linhas gerais, trata-se de um momento histórico do século XX dentro do qual, continuamos a vivenciá-lo nos dias atuais. Nas linhas que seguem, esboçaremos algumas considerações acerca da pós-modernidade. Apesar de não ser um conceito claro e nem unânime, seu esboço é necessário, pois veremos mais tarde que esta pós-modernidade será, de fato, um *domínio conceitual* a ser correspondido com o domínio “sistemas formais”.

A priori poderíamos caracterizar a pós-modernidade como uma crítica ao projeto moderno. Portanto, trata-se de uma ruptura de diversos valores estabelecidos até o século XIX, principalmente pelo Iluminismo. Não é difícil também encontrar autores que consideram a pós-modernidade como uma continuidade ou até uma radicalização da modernidade. É mais freqüente, no entanto, afirmar que assim como a modernidade provocou a crise da universalidade mística sustentada pela igreja medieval, a pós-modernidade provocou a crise da universalidade racional sustentada pela modernidade. Isto é, destruiu-se de vez a idéia do universal. A coerência global postulada pelo Iluminismo é esfacelada, não há um único motor movendo as questões religiosas, políticas, econômicas, culturais, etc. Cada esfera segue o seu próprio ritmo.²²⁹

Sobre a cultura pós-moderna, critica-se o discurso especulativo, metafísico, atemporal, metateórico. A sociedade sobrevive num cenário cibernético, informático e informacional.²³⁰ Estilizou-se a mercadoria, substituiu-se o livro pelo vídeo, exagerou-se o consumismo. A informática é tão admirada quanto à máquina no período moderno. A literatura tornou-se fragmentária, descontínua, polissêmica, em contraste à literatura clássica totalizadora, harmônica e contínua. Isto pode ser percebido, entre outros, no realismo fantástico de Borges (1995). Houve mudanças também em outros gêneros estéticos: arquitetura, pintura, fotografia, artes plásticas e cinema.²³¹ Em todos eles, Jameson (1993) observa um declínio da criatividade. Os estilos já foram todos criados pelo modernismo. Como só é possível um número finito de combinações destas criações (já mortas), apela-se para a nostalgia e para o pastiche:

Num mundo em que a inovação estilística já não é possível, só resta imitar os estilos mortos, falar através das máscaras e com as vozes dos estilos do museu imaginário. Mas isso significa que a arte contemporânea ou pós-

²²⁹ REIS, 2003, pp. 44-55.

²³⁰ LYOTARD, 2002, p. viii.

²³¹ ROUANET, 1987, pp. 248-258.

modernista deverá dizer respeito à própria arte de uma nova maneira; mais ainda, significa que uma de duas mensagens essenciais há de implicar o fracasso necessário da arte e do estético, o fracasso do novo, o aprisionamento do passado. (JAMESON, 1993, p. 31)

Na economia, há uma ruptura no capitalismo: no período moderno passamos pelos estágios imperialista e nacional e hoje vivemos o estágio multinacional.²³² Há um processo de globalização caracterizado pela ocidentalização da economia mundial. Este processo se difere da romanização da Antiguidade e da cristianização da Idade Média, por se consolidar mantendo a pluralidade cultural. Por consequência, tem sido mais bem sucedido.

O saber perdeu um pouco de sua transcendência e divindade, deixou de ser condição necessária para formação do indivíduo para se tornar uma mercadoria.²³³ Tem suas fronteiras rompidas: não se distingue mais cultura de massa e cultura de elite, graças às obras de popularização e massificação de obras acadêmicas.²³⁴ Em algumas áreas, não é possível mais determinar os limites:

Deve a obra de Foucault, por exemplo, ser chamada de filosofia, história, teoria social ou ciência política? Isso é impossível decidir, como se diz hoje em dia; e sugiro que esse “discurso teórico” também deve figurar entre as manifestações do pós-modernismo. (JAMESON, 1993, p. 27).²³⁵

A modernidade ligava saber e verdade por meio da força mística da razão. Era no saber que estavam a verdade e a liberdade, enquanto do outro lado do abismo, no poder, estava o mal, a repressão. Na pós-modernidade, todavia, saber e poder estão correlacionados.²³⁶ O papel do saber não é simplesmente produzir verdades, mas exercer as formas de poder. A ciência, em particular, produz verdades às quais nos submetemos. Portanto, a verdade é uma forma de poder.

²³² JAMESON, 1993, p. 27.

²³³ Há uma outra maneira – metafórica – de considerar o saber como mercadoria. Bourdieu avalia o campo científico como um grupo social que se relaciona com a ciência de uma forma capitalista. Desta maneira, as teorias científicas publicadas em artigos científicos e as participações em congressos propiciam ao cientista a acumulação de crédito científico, uma espécie de capital simbólico sem valor monetário. (HOCHMAN, 1994).

²³⁴ LYOTARD, 2002, pp. 3-7.

²³⁵ À este exemplo acrescentamos: e a obra de Hofstadter que descrevemos na seção 4.3? Ela deve estar em uma prateleira de uma biblioteca na seção de filosofia, matemática, ciência da computação ou ciências cognitivas?

²³⁶ FOUCAULT, 1984

O importante, creio, é que a verdade não existe fora do poder ou sem poder (não é – não obstante um mito, de que seria necessário esclarecer a história e as funções – a recompensa dos espíritos livres, o filho das longas solidões, o privilégio daqueles que souberam se libertar). A verdade é deste mundo; ela é produzida nele a graças a múltiplas coerções e nele produz efeitos regulamentados de poder. Cada sociedade tem seu regime de verdade, sua 'política geral' de verdade. (FOUCAULT, 1984, p. 13).

De acordo com Foucault, a pós-modernidade rompeu com as tradicionais categorias da verdade como essencialismo, absolutismo, transcendência, objetividade. Mas a verdade não se embrenha no pântano do relativismo radical, historicizou-se com a pós-modernidade. Só podemos compreender as relações entre saber e poder por meio da história. Logo, é necessário preocuparmos com a metodologia que nos permitirá compreender estas múltiplas relações. Ela deve conduzir uma pesquisa que não busque a neutralidade, a linearidade e nem a causalidade. Não pode ser factual e nem cronológica, mas seguir uma noção de continuidades e descontinuidades.

Neste sentido, as mudanças na historiografia também seguiram pelo caminho da pluralidade, da desconstrução das grandes narrativas, imbuídos dos valores tradicionais que a verdade carregava da modernidade:

O espírito da historiografia pós-moderna talvez possa ser resumido assim: valorização da alteridade, da diferença regional e local; microrrecortes no todo social; apego à micronarrativa e à “descrição densa” em detrimento da explicação globalizante; redefinição da interdisciplinaridade e do tempo longo; abertura a todos os fenômenos humanos no tempo, com ênfase no individual, no irracional, no imaginário, nas representações, nas manifestações subjetivas, culturais. Por um lado, pressupõe uma coerência estável de sentimentos e idéias numa dada sociedade; por outro, enfatiza a pluralidade de crenças e racionalidades em uma mesma cultura. (...) Não se buscam as séries homogêneas, a ordem quase imutável, as “prisões de longa duração”, mas as ordens negociadas, instáveis, as lutas, as apropriações seletivas, as circularidades culturais diferenciadas, as representações particulares do estrutural. (REIS, 2003, p. 61)

Concluindo, as diversas esferas originadas da quebra da razão iluminista seguem alguns padrões que contribuem para a caracterização da pós-modernidade. Isto mostra que, ao contrário do que alguns críticos como Sokal e Bricmont (1999, p. 27) entendem, a pós-modernidade não é uma corrente filosófica, mas um fenômeno cultural. Suas caracterizações ultrapassam as fronteiras da filosofia, e indicam um modo de ser, uma visão de mundo contemporâneo. É neste contexto que deve ser analisada a “ciência pós-moderna”, uma ciência própria de uma época, contemporânea, com

alguns pressupostos distintos da ciência da modernidade. A questão que se coloca agora é: que transformações ocorridas na ciência proporcionaram aos *estilos de pensamento* de cada *comunidade científica* características comuns à pós-modernidade?²³⁷

Isto significa tentar compreender a ciência do século XX pela pós-modernidade. E, no sentido inverso, poderíamos também compreender melhor a pós-modernidade a partir da ciência. Nossos estudos mostram que, de fato, é este sentido vetorial que predomina: descrever a pós-modernidade através das transformações científicas do século XX. A ciência não seria, é claro, a única fonte. Mas, por ser uma instância legitimadora de saber, teria um papel fundamental para entendemos este momento histórico.²³⁸ A física do século XX, por exemplo, produziu teorias que parecem quebrar algumas regras fundamentais da ciência da modernidade: leis que valem em referenciais distintos, tempo e espaço deixam de ser grandezas absolutas, fenômenos como a luz podem ser vistos ora como onda ora como um conjunto de partículas, partículas que deixam de ter um lugar definido no espaço para ter seu comportamento descrito probabilisticamente,²³⁹ etc. Estas teorias serviram de ingrediente para a elaboração de similaridades entre a esfera científica e as demais. Neste sentido, a ciência compartilha do discurso das outras esferas e interfere no seu *estilo de pensamento*, promovendo a *circulação intercoletiva de idéias*.²⁴⁰

²³⁷ Para o historiador, a ciência é um produto social (o que não significa desconsiderar a racionalidade). Não é estática e linear, pois possui história. Historicizada, a ciência deve, assim como todas as demais esferas, sofrer das mutações favorecidas pelo momento histórico do século XX. Este momento histórico deve interferir no *estilo de pensamento* de cada *comunidade científica*. Neste sentido, pode-se buscar na ciência elementos que permitem compreender melhor a pós-modernidade.

²³⁸ Para Ankersmit (2001), a interferência da ciência no século XX é tamanha que, mais tentar encaixá-la dentro da pós-modernidade, é ela que fundamenta os filósofos em suas concepções sobre pós-modernidade: “Para os pós-modernistas, tanto a filosofia da ciência quanto a própria ciência formam o produto, o ponto de partida para suas reflexões.” (ANKERSMIT, 2001, p. 118).

²³⁹ Estas observações parciais motivaram diversos tipos de comparações entre ciência moderna e pós-moderna. Por exemplo, a primeira seria determinista e a segunda probabilística, indetereminista (ROUANET, 1987, p. 262). Esta é, todavia, uma conclusão meio exagerada. O fato de *alguns* fenômenos físicos serem probabilísticos não dá fundamento suficiente para concluir que toda a ciência se comporta desta maneira.

²⁴⁰ Não há dúvidas que estas teorias e outras mudaram várias concepções ocidentais acerca do mundo. O Darwinismo, por exemplo, interferiu não somente no modo do homem ver a natureza, como também mexeu na idéia que o homem tem de si próprio, modificando até valores religiosos. Mudaram também a forma de fazer ciência, de tal forma de tal maneira que a prática de investigação científica se tornou centro das atenções de filósofos e historiadores da ciência como Wittgenstein, Popper, Lakatos, Kuhn, Fleck e o Círculo de Viena. A relatividade, por exemplo, modificou o tipo de associação que os

Participando dos meandros deste *isomorfismo*, o pensamento matemático no século XX também questionou alguns ideais modernos – na verdade, ideais gregos – de uma maneira similar ao que ocorreu nas outras esferas. Por exemplo, a existência de uma teoria globalizante, representação única de um campo de conhecimento foi um pressuposto rompido pelas geometrias não euclidianas (seção 1.2). O Teorema de Gödel proporcionaria uma revisão no conceito de verdade matemática e uma reflexão sobre os limites do formalismo (seção 2.4). Outros exemplos podem ser dados, mas como vimos demonstrando, o Teorema de Gödel é talvez o resultado de maior impacto. Neste sentido, a referência mais comum para a *incompletude* é de uma contribuição do pensamento matemático para uma idéia já formulada de que a ciência de uma forma geral vive uma crise epistemológica. Isto pode ser conferido em Castoriadis (1987),²⁴¹ Souza Santos (1988), Demo (2001), dentre vários outros. Para estes autores, a *incompletude* da matemática consolida definitivamente a crise da ciência (já despontada pela relatividade, mecânica quântica, etc.). Seguindo este raciocínio, a pós-modernidade seria uma cópia da ciência (inclusive da matemática) do século XX, rompendo valores culturalmente construídos na modernidade, como verdade, demonstrabilidade, unificação, certeza (no caso da matemática, a ferida da certeza seria provocada pela existência de *indecidíveis*).

Nestas relações, não temos nenhum modelo construído, todas elas são metafóricas e foram estabelecidas com a intenção de observar a realidade por outras lentes, isto é, a menção ao Teorema de Gödel favorece a compreensão que se tem da pós-modernidade. Esta é uma demonstração forte do impacto cultural do Teorema de Gödel: autores das ciências humanas – comunidade com poucas similaridades em relação a dos lógicos matemáticos – olharam para a *incompletude* e enxergaram a pós-modernidade.

mecanicistas faziam entre ciência e natureza. De *descrição* da natureza, a relação passou a ser de *interação* com a natureza. A lógica de categorização (aristotélica) deu lugar à lógica sistêmica. Enfim, toda esta fisicalização do universo tem fundamentação em concepções similares ao convencionalismo de Poincaré.

²⁴¹ A primeira edição foi publicada em 1978.

A este respeito, Goldstein (2005) afirmou que o Teorema de Gödel, a Teoria da Relatividade e o princípio de Heisenberg sugerem para alguns autores²⁴² que elementos de humanidades são injetados nas ciências exatas.²⁴³ Ela não esclareceu o que é esta injeção, mas deduzimos que significa dizer que as ciências humanas contribuíram para alterar o *estilo de pensamento* das ciências exatas, culminando nas teorias científicas sugeriram no século XX. Todavia, esta proposição é totalmente especulativa²⁴⁴ e, como bem vimos nas obras analisadas, a busca pela compreensão do que é o projeto pós-moderno é que fomentou a necessidade de se olhar para as ciências exatas e observar como estas teorias modificaram profundamente o *estilo de pensamento* de cada *comunidade científica* e, lembrando Askernit, sendo a ciência uma instância legitimadora do saber, estas teorias interferiram também nas ciências humanas.²⁴⁵

A relação implicativa entre o Teorema de Gödel e a crise na ciência, todavia, não é unânime nas ciências humanas. Em 1979, Lyotard (2002) procurou desdobramentos desta relação metafórica e analisou como o Teorema de Gödel transformou a pragmática da pesquisa científica de uma semântica universal para uma pluralidade de semânticas:

Voltemos à ciência e examinemos de início a pragmática de sua pesquisa. (...). Ela pode usar e usa linguagens. Como se disse, cujas propriedades demonstrativas parecem desafios à razão dos clássicos, Bachelard fez-lhe um balanço; ele já está ultrapassado.

O uso destas linguagens, contudo, não é qualquer um. Ele está submetido a uma condição que se pode dizer pragmática, a de formular suas próprias regras e de perguntar ao destinatário se ele as aceita. Satisfazendo esta condição, define-se a axiomática, a qual compreende a definição dos símbolos que serão empregados na linguagem proposta, a forma que deverão respeitar as expressões desta linguagem para poderem ser aceitas

²⁴² Dentre eles, ela cita William Barrett e sua obra *Irrational Man: A Study in Existentialist Philosophy*, publicado em 1962.

²⁴³ GOLDSTEIN, 2005, p. 27

²⁴⁴ Com efeito, o núcleo do trabalho de Goldstein é analisar as concepções filosóficas de Gödel e compará-las com as de Wittgenstein, Einstein, Círculo de Viena, etc. Sua proposta de trabalho não inclui nenhum tipo de pesquisa acerca de obras ditas pós-modernas que se apropriaram do Teorema de Gödel.

²⁴⁵ É certo que nem sempre foi assim. Um exemplo é a aceção renascentista da formação do céu estelar, contaminada por preceitos religiosos medievais. A diferença no caso presente é que as ciências humanas levaram mais tempo para perceber que alguns dos valores que a pós-modernidade colocou em xeque são os mesmos que as referidas teorias científicas tiveram que repensar no século XX. Isto é, as diversas categorias da pós-modernidade que hoje conhecemos não estavam definidas por ocasião de cada evento científico citado por Goldstein. Neste sentido, o que os autores realmente buscam desde o século XX é compreender a pós-modernidade por meio das transformações ocorridas na ciência e não o contrário.

(expressões bem formadas), e as operações que serão permitidas sobre estas expressões, e que definem os axiomas propriamente ditos.

Mas como se sabe o que deve conter ou o que contém uma axiomática? As condições que foram enumeradas são formais. Deve existir uma metalíngua determinante se uma linguagem satisfaz às condições formais de uma axiomática: esta metalíngua é a da lógica. (LYOTARD, 2002, pp. 77-78)

A pragmática da pesquisa, nos dizeres de Lyotard, parte da negociação da linguagem entre o proponente da teoria e o destinatário, e a lógica é a metalingua responsável por determinar de que pressupostos básicos esta linguagem deve partir.

Uma questão mais pertinente para a legitimação é a seguinte: por meio de que critérios o lógico define as propriedades exigidas por uma axiomática? Existe um modelo de uma língua científica? Este modelo é único? É verificável? As propriedades em geral exigidas pela sintaxe de um sistema formal são: a consistência (por exemplo, um sistema não consistente em relação à negação admitiria nele mesmo, paralelamente, uma proposição e seu contrário), a completude sintática (o sistema perde sua consistência caso um axioma lhe seja acrescentado), a decidibilidade (existe um procedimento efetivo que permite decidir se uma proposição qualquer pertence ou não no sistema), e a independência dos axiomas uns em relação aos outros. Ora, Gödel estabeleceu de maneira efetiva a existência, no sistema aritmético, de uma proposição que não é nem demonstrável nem refutável no sistema; donde se segue que o sistema aritmético não satisfaz à condição da completude.

Como se pode generalizar esta propriedade, é preciso então reconhecer que existem limitações internas aos formalismos. Estas limitações significam que, para o lógico, a metalíngua utilizada para descrever uma linguagem artificial (axiomática) é a “língua natural”, ou “língua cotidiana”. Esta língua é universal, visto que todas as línguas deixam-se nela traduzir; mas ela não é consistente em relação à negação: permite a formação de paradoxos. (LYOTARD, 2002, pp. 78-79)

No sentido proposto, os sistemas formais seriam a metalíngua responsável pela determinação dos axiomas que deverão constar na linguagem científica. Isto nos remete à idéia de que a ciência deve ser modelada segundo uma *concepção semântica* e, naturalmente, ela herdará da lógica matemática os resultados de Gödel. Lyotard acredita, portanto, que toda a ciência deve ser concebida nos moldes propostos por van Fraassen, Suppe, Costa e Dória. Porém, existe uma diferença. O modelo *semântico* proposto pelo presente autor não é a única forma de legitimação do saber.

Neste sentido, a questão da legitimação do saber coloca-se de outro modo. Quando se declara que um enunciado de caráter denotativo é verdadeiro, pressupõe-se que o sistema axiomático no qual ele é decidível e demonstrável foi formulado, que é conhecido dos interlocutores e aceito por eles como tão formalmente satisfatório quanto possível. (...)

A argumentação exigível para a aceitação de um enunciado científico está assim subordinada a uma “primeira” aceitação (na realidade, constantemente renovada em virtude do princípio de recursividade) das regras que fixam os meios de argumentação. Daí, duas propriedades notáveis desse saber: a flexibilidade dos seus meios, isto é, a multiplicidade de suas

linguagens; seu caráter de jogo pragmático, a aceitabilidade dos “lances” que lhe são feitos (a introdução de novas proposições) dependendo de um contrato realizado entre os participantes. Daí também a diferença entre dois tipos de “progresso” no saber: um, correspondendo a um novo lance (nova argumentação) no quadro das regras estabelecidas, o segundo à invenção de novas regras e, assim, a uma mudança de jogo.

A esta nova disposição corresponde evidentemente um descolamento maior da idéia de razão. O princípio de uma metalinguagem universal é substituído pelo da pluralidade de sistemas formais e axiomáticos capazes de argumentar enunciados denotativos, sendo estes sistemas descritos uma metalíngua universal mas não consistente. (LYOTARD, 2002, pp. 79-80)

Os participantes da construção do saber científico negociam, em uma segunda instância, se as regras continuarão as mesmas ou se algumas serão acrescentadas. Logo, os sistemas formais participam da legitimação do saber apenas em uma primeira instância. Lyotard, acredita que esta dinâmica concede à ciência uma garantia de progresso, e não, de crise como sugerem outros autores.²⁴⁶ Este autor viu o Teorema de Gödel com um otimismo similar ao do círculo lógico-matemático.

Conforme discutimos anteriormente, a polissemia e a descontinuidade são traços comuns da literatura no século XX e eles se manifestam em *A Biblioteca de Babel*²⁴⁷ (1995), de Jorge Luis Borges, através de elementos dos fundamentos da matemática. Na obra citada, Borges idealiza a construção abstrata de uma biblioteca, descrita por um personagem que observa todos os livros desta biblioteca, contidos em hexágonos, versando sobre diversos assuntos, em diversos idiomas, e nota que:

Todos os livros, por diversos que sejam, possuem elementos iguais: o espaço, o ponto, a vírgula, as vinte e duas letras do alfabeto. Também alegou um fato que todos os viajantes confirmaram: *Não há, na vasta Biblioteca, dois livros idênticos*. Dessas incontrovertíveis premissas, deduziu que a Biblioteca é total e que suas prateleiras registram todas as possíveis combinações dos vinte e tantos símbolos ortográficos (número, ainda vastíssimo, não infinito), ou seja, tudo o que é dado expressar: em todos os idiomas. Tudo: a história minuciosa do futuro, as autobiografias dos arcanjos, o catálogo fiel da Biblioteca, milhares e milhares de catálogos falsos, a demonstração da falácia desses catálogos, a demonstração da falácia do catálogo verdadeiro, o evangelho gnóstico de Basílides, o comentário desse evangelho, o comentário do comentário desse evangelho, a relação verídica de tua morte, a versão de cada livro em todas as línguas, as intercalações de cada livro em todos os livros. (BORGES, 1995, pp. 87-88).

²⁴⁶ Apesar desta inflexão, Lyotard expõe sua compreensão sobre pesquisa científica dentro de uma condição pós-moderna: a negociação da linguagem em detrimento à sua existência transcendental, a pluralidade de metalinguagens em detrimento de uma metalinguagem universal para todas as ciências.

²⁴⁷ *A Biblioteca de Babel* é um conto inserido no livro *Ficções*, de 1944.

Este trecho pode ser visto como um desdobramento do Teorema de Gödel, aludido pela presença nas prateleiras da biblioteca da demonstração da falácia do catálogo verdadeiro. O personagem acredita na totalidade da biblioteca e não percebe a impossibilidade desta totalidade ao contar a *demonstração da falácia do catálogo verdadeiro* na sua prateleira. Seguimos com a apreciação e, da narrativa de Borges, emerge um exemplo do comportamento humano culturalmente herdado da matemática “pré-Gödel”.

Quando se proclamou que a biblioteca abarcava todos os livros, a primeira impressão foi de extravagante felicidade. Todos os homens sentiram-se proprietários de um tesouro intacto e secreto. Não havia problema pessoal ou mundial cuja eloqüente solução não existisse: nalgum hexágono. (BORGES, 1995, p. 88).

Borges nos mostra que a satisfação comum do ser humano, seguro de que terá acesso a todas as obras, dá lugar ao desespero em saber que nem todas as obras são acessíveis:

À desponderada esperança, sucedeu, como é natural, uma depressão excessiva. A certeza de que alguma prateleira nalgum hexágono encerrava livros preciosos e de que esses livros preciosos eram inacessíveis, afigurou-se quase intolerável. (BORGES, 1995, p. 89).

As metáforas matemáticas de Borges, embora sejam menos explícitas, não são ingênuas e nossas interpretações não são especulações sem fundamento. Com efeito, recentemente Borges declarou o uso proposital das estruturas de pensamento matemático em suas narrativas:

Não direi que sou um matemático ou filósofo, mas creio ter encontrado na matemática e na filosofia possibilidades literárias, e sobre todas as possibilidades para a literatura a que mais me apaixona: a literatura fantástica. (BORGES, 1975, p. 15).

Sobre a *Biblioteca de Babel* ele afirma ter partido de duas idéias:

Primeiro uma idéia que não é minha, um lugar comum, a idéia de uma possibilidade de variação quase infinita partindo de um número limitado de elementos. Por trás desta idéia abstrata, há também a idéia de estar perdido no universo, de não compreendê-lo, a necessidade de encontrar uma solução precisa, o sentimento de ignorar a verdadeira solução. (BORGES, 1975, p. 16)

Vejamos as relações metafóricas que podemos estabelecer: a *Biblioteca de Babel* equivale ao sistema formal, o estágio em que a biblioteca é total (contém todos os livros) equivale ao sistema formal completo, a variação infinita partindo de um número finito de elementos equivale à lógica finitista de Hilbert (pressuposto que Gödel

seguiu na sua demonstração), as obras acessíveis podem ser relacionada com as proposições decidíveis. Podemos então afirmar que o Teorema de Gödel participou do imaginário criativo de Borges fornecendo metáforas literárias capazes de nos mostrar de que maneiras resultados, como o de Gödel, ferem nossas expectativas de ter acesso a todos os elementos de um domínio em questão.²⁴⁸ Mas as alusões ao Teorema de Gödel não têm apenas o caráter de adornar o discurso, como também pedagógico, pois tentam esclarecer um determinado comportamento através de uma heurística emprestada da lógica matemática. Borges olhou para o Teorema de Gödel e enxergou a *Biblioteca de Babel*.

A relação entre sistemas formais e afetividade, no entanto, não é exclusiva da literatura. Durante toda a sua vida dedicada à clínica psicanalítica, Lacan enxergou nos modelos geométricos e resultados lógicos diversas propriedades capazes de descrever a linguagem, as interações entre homem e ciência, homem e mundo, estados mentais, etc. Não é fácil interpretar suas idéias, pois suas descrições são carregadas de terminologias compreensíveis apenas para especialistas de sua área. Por isto, em diversos momentos, recorreremos a seus intérpretes. Em *Os escritos* (1998), coletânea de seminários proferidos entre as décadas de 1950 e 1970, a *incompletude* de sistemas formais permitiu observar a relação entre sujeito e realidade:

É do lado da lógica que aparecem os diversos indícios de refração da teoria em relação ao sujeito da ciência. (...). É a lógica que aqui faz às vezes de umbigo do sujeito, e a lógica no que ela de modo algum é uma lógica ligada às contingências de uma gramática. É preciso, literalmente, que a formalização da gramática contorne essa lógica para se estabelecer com sucesso, mas o movimento desse contorno está inscrito nesse estabelecimento. (...) Ela [a lógica] é, de modo incontestado, a consequência estritamente determinada de uma tentativa de suturar a ciência, e o último Teorema de Gödel mostra que ela fracassa nisso, o que equivale a dizer que o sujeito em questão continua a ser correlato da ciência, mas um correlato antinômico, já que a ciência mostra-se definida pela impossibilidade do esforço de suturá-lo. (LACAN, 1998. p. 875).

Para Lacan, a lógica é um produto do discurso, não do inconsciente nem de contingências, mas um discurso para ciência, para o real. Se um discurso foi produzido significa que ele não existia antes. Então o sentido de produzir é o mesmo de demonstrar, isto é, falar sobre algo que antes não poderia ser falado. Lacan usa a

²⁴⁸ Acreditamos que o sentimento que os formalistas compartilharam logo que o Teorema de Gödel foi divulgado e assimilado foi o mesmo da descoberta de tesouros inacessíveis na *Biblioteca de Babel*.

lógica para analisar o que acontece quando a linguagem se interroga sobre o que ela mesma estabelece como discurso e obtém como resposta: é impossível a linguagem fazer isto, então é impossível o sujeito conseguir descrever toda a realidade. Desta maneira, a lógica – como discurso para a ciência, para o real – prova uma certa de *incompletude* da realidade:

Nos últimos anos, Heisenberg e o matemático Kurt Gödel demoliram a esperança de Einstein de uma teoria unificada da realidade física. Num caminho análogo, Lacan teria sepultado a dúvida do sonho filosófico de uma realidade psíquica unificada. (RAGLAND-SULLIVAN, 1986, p. 187).

Podemos então extrair dos argumentos de Lacan uma série de correspondências, entre sistema formal e linguagem:

Linguagem	Sistema formal
Discurso	Demonstração
Realidade	Sentença matemática
Falar sobre realidades que são estabelecidas no discurso	Demonstrar sobre sentenças matemáticas que são demonstráveis
Falar que há realidades que não podem ser estabelecidas no discurso.	Demonstrar que há sentenças matemáticas que não podem ser demonstradas
Indiscernível	<i>Indecidível</i>

Lacan olhou para o Teorema de Gödel e enxergou que a realidade não pode ser totalmente relatada pelo sujeito. O que ele fez foi colocar o sistema formal como modelo científico para uma leitura da realidade psíquica do sujeito. Esta linha de raciocínio pode parecer para alguns críticos que a conclusão de Lacan sobre a realidade é uma implicação lógica do Teorema de Gödel. Não podemos dizer se Lacan também pensou assim ou não, mas para isto ser verdade a linguagem deveria ser um domínio literalmente contido na lógica. Todavia ele próprio define esta relação de uma forma inversa: a lógica é uma linguagem, não o contrário. Portanto, as conclusões de Lacan mostram que sua alusão ao modelo lógico seguiu uma *concepção pragmática* do processo.²⁴⁹

Como dissemos anteriormente, nossa intenção não é esgotar todas as referências sobre Gödel nas ciências humanas. É certo que algumas delas não têm relevância devido a pouca representatividade de seus proponentes dentro de sua

²⁴⁹Para fins de comparação, relembremos na seção 4.3 quando os sistemas formais foram descritos como modelos para o computador, segundo uma *concepção pragmática* e na seção 4.2 e para as teorias físicas segundo uma *concepção semântica*.

comunidade científica, outras foram anúncios isolados que nem representam alguma comunidade. Os exemplos que fornecemos são, em nosso entendimento, suficientes para mostrar que as ondas propagadas pelo Teorema de Gödel atingiram efetivamente o círculo das ciências humanas, isto é, ocorreu uma *circulação de idéias intercoletivas* entre as comunidades de lógica matemática e ciências humanas e esta circulação provocou mudanças no *estilo de pensamento* desta última: contribuiu para a formulação do conceito de pós-modernidade, para compreendê-la; para repensar na ciência dentro deste contexto, sua lógica de pesquisa, da legitimação do saber; para compreender o comportamento humano sedento por resolver todas as questões que lhe são propostas, para compreender como a linguagem opera com a realidade.

Em algumas obras não relacionadas, alguns termos do *domínio conceitual* definido pelo Teorema de Gödel foram utilizados metaforicamente com o único objetivo de preencher uma lacuna semântica no discurso (exegese). Palavras como *incompletude* (para informar que determinada teoria não responde todas as questões postas), *inconsistência* (para informar que determinada teoria produz informações contraditórias) e auto-referência (para informar que em determinada teoria há conceitos que se referem a si próprios) são utilizadas sem a preocupação de se construir um *isomorfismo* entre dois *domínios conceituais*, não há uma necessidade de compreender uma teoria pela outra, mas de utilizar um termo para significar uma idéia não exprimível com os termos do discurso vigente. Por exemplo, Wittgenstein fez alusão ao Teorema de Gödel nas *Investigações Filosóficas* ao afirmar que “a filosofia não é consistente e nem completa” (1995b, §352) mas, em momento algum, procura compreender a filosofia da linguagem através da filosofia da matemática decorrente do Teorema de Gödel. Pelo contrário, como vimos anteriormente (seção 2.5), há um abismo entre as filosofias de Wittgenstein e de Gödel. Logo, não há *mutações dos estilos de pensamentos*.

Nas linhas que seguem, dedicaremos a analisar alguns comentários sobre a *circulação de idéias intercoletivas* entre ciências humanas e lógica matemática, promovida pelo Teorema de Gödel. Esta reflexão contribuirá para compreendermos melhor diversas questões já colocadas anteriormente, por exemplo, a dificuldade de comunicação entre *comunidades científicas*. Esta dificuldade ocorre nos dois sentidos,

como veremos. Os fatores que contribuem para a dificuldade de comunicação por parte das ciências exatas já foi bem debatido neste trabalho. No caso das ciências humanas, é comum os autores enunciar o Teorema de Gödel de forma errada e, o que é mais relevante historicamente, buscar em suas teorias resultados equivalentes ao Teorema de Gödel sem estabelecer nenhum modelo que relacione seu *domínio conceitual* com o sistema formal. Em certos casos, ao Teorema de Gödel é dada uma autoridade para inferir diversos resultados quando ele exerce um papel apenas metafórico:

Se tivermos em mente que a mais-valia e o inconsciente podem ser ambos definidos numa única sentença (e que, nas ciências físicas, a equação da relatividade geral pode ser expressa em três letras), não existe perigo de confundir simplicidade com simplismo. Este segredo toma a forma de uma lei lógica, generalização do teorema de Gödel: não pode haver um sistema organizado sem fechamento, e nenhum sistema pode fechar-se apenas com a ajuda de elementos interiores ao sistema (DEBRAY, 1981 apud SOKAL, BRICMONT, 1999, p. 176).

Após a citação, Sokal e Bricmont acusam Debray de usar propriedades de sistemas formais para explicar problemas da sociologia e conclui que não há nenhuma relação lógica entre os dois *domínios conceituais*. Com efeito, como colocado por Debray, é possível interpretar que o resultado de Gödel é uma condicionante da qual podemos inferir resultados da sociologia. Neste caso, devemos concordar com Sokal e Bricmont (1999, p. 177) quando estes falam o seguinte a respeito de Debray:

Se ele deseja empregá-lo diretamente no raciocínio sobre organização social, então está simplesmente enganado. Se, ao contrário, tem a intenção de utilizar o teorema de Gödel meramente como analogia, poderia então ser sugestivo, mas certamente não demonstrativo. (SOKAL, BRICMONT, 1999, p. 177).

No entanto, logo em seguida eles se enganam quando concluem que Debray deve usar apenas argumentos sobre o comportamento social dos seres humanos para sustentar teses sociológicas e históricas. E acrescentam ainda que o teorema permanecerá verdadeiro “daqui a dez mil ou um milhão de anos”, enquanto a sociedade tem futuro incerto.

O erro de Sokal e Bricmont está em analisar literalmente o argumento de Debray. Embora este tenha realmente proferido sua tese na forma de demonstração, o seu uso²⁵⁰ é puramente metafórico. Debray (de acordo com a citação) procurou

²⁵⁰ Dentro do contexto que Sokal e Bricmont (p. 175-6) nos forneceram em diversas passagens.– que incluem notas de rodapé com depoimentos do Debray sobre a sua intenção nestas afirmações.

compreender um comportamento social a partir de sua compreensão do Teorema de Gödel. Costurou um *isomorfismo* entre os dois *domínios conceituais*. Seguindo esta linha, a possibilidade da metáfora desobriga o cientista de usar argumentos exclusivos de sua área. Se seguissemos a risca a orientação de Sokal e Bricmont, concluiríamos ser ilegítimo falar de bolas de bilhar para explicar modelos atômicos (seção 3.4). Um sistema não demonstra necessariamente o outro mas pode tornar o outro mais compreensível. A demonstração ocorreria no caso de um sistema ser um modelo do outro, conforme já vimos anteriormente (seções 3.3 e 4.2). Todavia, as análises de Sokal e Bricmont são dignas de nota pois mostram que há usos metafóricos do Teorema de Gödel para certos fins e declarados para outros.

Agora vejamos um caso de uma relação metafórica mal explicada por Kadvany (1989), cuja análise foi mal denunciada por Franzén (2005). Inicialmente, Kadvany (p. 162) afirma que o Teorema de Gödel criou uma condição pós-moderna no processo *ad infinitum* de constituição de um sistema S' que contenha S mais a proposição *indecidível* deste sistema. Em seguida, Kadvany exemplifica a situação através de geometrias não euclidianas. Na seqüência de seu trabalho, Kadvani continua a falar de lógica e matemática sem mencionar, em momento algum, o que ele acredita ser a pós-modernidade para estabelecer a relação que tanto anunciou. Do outro lado da vitrine, Franzén (p. 50-54) anuncia analisar de que maneira Kadvani provocou “excessos pós-modernos”. Então Franzén mostrou em toda a sua análise erros matemáticos de Kadvani. Isto é, o foco do debate – a condição pós-moderna – se dissipou. Nem Kadvany mostrou a relação, nem Franzén mostrou o porquê do equívoco da relação, pois se preocupou mais em demonstrar logicamente o erro no exemplo de Kadvany.

Sobre as obras que relacionam de fato ciências humanas e lógica matemática, por meio do Teorema de Gödel, concluimos que os seus autores o fazem frequentemente na forma de metáfora (exceto Lacan), às vezes constituindo-se uma heurística para a compreensão da teoria em causa (fins didáticos), às vezes preenchendo uma lacuna semântica no discurso (exegese). Compreendem que o Teorema de Gödel levanta questionamentos sobre valores de um *estilo de pensamento* matemático sacramentado por séculos anteriores que também vigoravam na

modernidade e são criticados na pós-modernidade, tais como a verdade e o absolutismo.

Nossa conclusão não deve significar uma concordância com diversos usos criticados pela *interpretação de Sokal*, principalmente nos casos em que o Teorema de Gödel é usado como instrumento de prova da teoria em questão, ou em ocasiões que nem a metáfora caberia para esclarecer algum comportamento social, religioso, etc. Os autores que buscam relações como esta fracassam como fracassam em geral todos os cientistas sociais que buscam uma matematização desmedida. Castoriadis compara o uso desenfreado de fórmulas matemáticas em ciências sociais com: “tribos primitivas que adotam modas ocidentais de roupa cosmopolita e de parlamentarismo a partir de um vago sentimento de que essas vestimentas ridículas e esses ritos mágicos os levarão diretamente ao nível da cultura e da técnica modernas”. (CASTORIADIS, 1987, p. 215)

De uma maneira próxima às nossas considerações, expressou-se a este respeito Douglas Hofstadter:

É natural que se tente estabelecer paralelos entre as pessoas e os sistemas formais suficientemente complexos que, como as pessoas, têm algum tipo de “auto-imagem”. O Teorema de Gödel mostra que há limitações fundamentais no que concerne aos sistemas formais coerentes, dotados de auto-imagem. Mas será ele mais genérico? Haverá um “Teorema de Gödel da psicologia”, por exemplo?

Se se toma ao Teorema de Gödel como uma metáfora, como fonte de inspiração, ao invés de tratar-se de traduzi-lo literalmente para a linguagem da psicologia, ou para a de qualquer outra disciplina, talvez então ele possa sugerir novas verdades na psicologia ou em outras áreas. Mas não chega a ser justificável traduzi-lo diretamente como uma afirmação em outra disciplina e tomar tal afirmação como igualmente válida. Seria um grande erro pensar que o que se elaborou com extremo cuidado na lógica matemática pudesse sustentar-se sem nenhuma modificação em outra área completamente diferente. (HOFSTADTER, 2001, p. 765)

Com efeito, o *estilo de pensamento* da área em questão constitui um *domínio conceitual* que fará uma tradução apropriada tornando o Teorema de Gödel uma versão que não pode ser lida ao pé da letra. Isto corrobora com a nossa afirmação precedente de que o Teorema de Gödel não poderia servir de argumento de prova para uma determinada teoria da área em questão.

4.5. Considerações finais

Este capítulo nos mostrou, dentre outras coisas, que o Teorema de Gödel provocou um eco cuja ressonância modificou a visão de mundo de indivíduos de comunidades bem diversificadas. Esta diversidade ressalta o impacto cultural do Teorema de Gödel no século XX, mostra como a *incompletude* foi além, muito além da matemática.

Nas física, *incompletude* e inconsistência, além de metáforas emprestadas da lógica matemática para suprir uma lacuna semântica de especulações físicas, exerceram também uma função cognitiva dentro dos modelos *semânticos* da física. Nas mudanças ocorridas em seu *estilo de pensamento*, alguns problemas passaram a fazer parte da pauta de discussões dos físicos, tais como se a física é inegotável, se as teorias físicas são capazes de resolver todos os problemas que eles propõem. Os físicos olharam para o Teorema de Gödel e viram uma física inesgotável.

O computador, de reproduzidor mecânico de sistemas formais, passou a exercer um poder transformador em relação à lógica matemática. Esta última modificou alguns pressupostos básicos de seu *estilo de pensamento* na medida em que avanços da teoria da computação propiciaram novos problemas de natureza distinta dos que eram trabalhados antes do surgimento do computador. Em alguns casos, o computador passou a ser um instrumento de pesquisa e as simulações no computador passaram a fazer parte da metodologia de pesquisa também. Além disso, a ciência da computação nascida dos sistemas formais propiciou ainda o envolvimento dos seus principais idealizadores na Segunda Guerra Mundial. Nesta propagação de ondas, os pais da ciência da computação olharam para o Teorema de Gödel e viram uma máquina que não executa todas as tarefas propostas numa determinada linguagem de programação.

Nas ciências cognitivas, o Teorema de Gödel teve a força de motivar modelos não apenas pelo seu resultado em si, mas pela sua linha de raciocínio. Podemos verificar a força que o modelo proposto pelo Teorema de Gödel exerceu na constituição de novos modos de se pensar a ciência no século XX, novas ciências foram criadas, novas filosofias, novos problemas. As tentativas de se constituir um *isomorfismo* entre cérebro e máquina também contribuíram para percebermos que independente do

sucesso na elaboração de um modelo, sua intenção motivou a criação de diversas metáforas. Neste contexto, olhamos para o Teorema de Gödel e vimos a relação entre cérebro e computador.

Nas humanidades, o Teorema de Gödel usado freqüentemente na forma de metáfora, às vezes constituiu uma heurística para a compreensão de uma teoria para fins didáticos, às vezes preencheu uma lacuna semântica no discurso. Esta circulação provocou diversas mudanças: contribuiu para a formulação do conceito de pós-modernidade, de compreendê-la; para repensar na ciência dentro deste contexto, sua lógica de pesquisa, da legitimação do saber; para compreender o comportamento humano, para compreender como a linguagem opera com a realidade.

Finalizando este capítulo, pudemos ver também na seqüência das seções que, quanto menos similaridades havia entre duas *comunidades científicas* mais polêmicas foram as circulações de idéias *intercoletivas*. Neste caminho, estas circulações foram mais polêmicas nas ciências humanas do que nas ciências cognitivas, e mais polêmicas nestas do que na física e na computação. Estas polêmicas foram bem retratadas nas dificuldades de comunicação entre as comunidades envolvidas como pudemos observar em diversas passagens. Estas análises são, ao nosso ver, de grande valia para a historiografia da ciência, pois contribuem para mostrar as interações entre *comunidades científicas* ao longo da história.

5

Conclusões

Antes de tecermos nossas conclusões, desejamos recapitular toda a dinâmica metafórica que descreve as ondas propagadas pela pedra que caiu no centro de círculos concêntricos. A pedra é o Teorema de Gödel, forma singular que designa dois resultados provados por Kurt Gödel em 1931. O primeiro: *se um sistema formal contendo a aritmética for consistente, então ele contém proposições aritméticas verdadeiras que, no entanto, são indecidíveis*. E seu corolário: *nenhum sistema formal contendo a aritmética pode provar a sua própria consistência, a não ser que o sistema em si seja inconsistente*.

No capítulo 1, abordamos as condições do *círculo interno* da comunidade matemática antes da pedra atingi-lo. Vimos neste capítulo um quadro geral das mudanças conceituais da matemática entre as décadas de 1850 e 1930. Sinteticamente, pode-se caracterizar estas mudanças como uma mudança de uma base geometria-intuição-variável para conjuntos-axiomática-aritmética. A teoria de conjuntos teria um papel fundamental para os processos de *axiomatização* e *arimetização* da matemática. O seu poder motivou matemáticos e filósofos a se preocuparem cada vez mais com o rigor lógico desta ciência, até que os paradoxos surgiram no caminho. A matemática não produziria apenas um novo problema, mas uma nova família de problemas: os problemas de *consistência* de teorias matemáticas. Neste sentido, a *arimetização* e a *axiomatização* sugeriram uma transferência dos problemas de *consistência* de teorias matemáticas para uma única tese: a *consistência* da aritmética. Gödel não deu uma resposta negativa ao problema de Hilbert, mas certamente apagou a chama que acendia o projeto formalista.

No capítulo 2, analisamos inicialmente o contexto dentro do qual Gödel construiu suas concepções e, de uma forma ou outra, interferiram no seu ato de arremessar a pedra. Como era comum na Viena da década de 1920, Gödel participou de um círculo de intelectuais, no caso, o Círculo de Viena. Seus membros não interferiram significativamente nas concepções filosóficas de Gödel, mas certamente incentivaram Gödel a migrar da matemática para a lógica matemática. Sua concepção realista já estava formada antes de seu ingresso no Círculo de Viena e sua cristalização ocorreu na mesma medida em que se interessava pelo projeto formalista de Hilbert. Sua intenção inicial era provar a *consistência* da aritmética e, por ironia, acabou chegando

ao teorema da *incompletude*. O raciocínio utilizado por Gödel para demonstrar o teorema da *incompletude* foi fundamentado no paradoxo de Epimênides. Ele criou um enunciado auto-referencial e, por meio de um isomorfismo entre o conjunto dos números naturais e os símbolos do sistema formal, produziu uma sentença *indecidível*. Em seguida, provou que o sistema formal *arimetizado* não é capaz de provar a *consistência* da aritmética. Repercussões do Teorema de Gödel dentro do círculo matemático foram minimizadas por atos isolados. Todavia, dentro do círculo lógico matemático, ocorreram diversas interpretações filosóficas acerca do conhecimento matemático. Primeiro, percebeu-se que é possível transcrever formalmente raciocínios circulares de maneira formalmente rigorosa, segundo, que o Teorema de Gödel não destrói o programa formalista, mas mostra os seus limites, terceiro, que a *incompletude* proporcionou ainda uma revisão do conceito de verdade. No fim deste capítulo, podemos perceber como foi a propagação das ondas produzidas pela queda da pedra dentro do *círculo interno*.

No capítulo 3, compreendemos as forças capazes de estender a propagação destas ondas para o círculo externo. Vimos então que as mudanças nos *estilos de pensamento* proporcionadas pelo teorema da incompletude são as ondas oriundas do *círculo interno* e seu movimento no *círculo externo*. Estas mudanças são os resultados da *circulação de idéias intercoletivas* entre a comunidade de lógicos e matemáticos e as comunidades que se apropriaram do Teorema de Gödel. Esta apropriação é, de uma maneira mais clara, a construção de um modelo ou uma metáfora permitindo uma compreensão do Teorema de Gödel de acordo com o *estilo de pensamento* desta comunidade. Os modelos e as metáforas são mecanismos que provocam a *circulação de idéias intercoletivas*, são elos de comunicação entre *comunidades científicas*, dicionários que permitem traduzirmos o vocabulário próprio de uma comunidade no vocabulário da outra. É o meio que conduz a leitura que os membros de uma comunidade fazem de uma teoria produzida por outra comunidade. Embora estas comunidades estejam em contextos distintos (definidos pelos seus respectivos *estilos de pensamento*), existe alguma similaridade que permite o diálogo entre elas, de modo que a comunicação metafórica seja realizada, os mapeamentos construídos e modelos sejam desenvolvidos ou herdados. Comunidades distintas tendem a construir modelos

distintos para um mesmo fenômeno real, ou podem se basear em um mesmo modelo para explicar diferentes fenômenos. Logo, metáforas e modelos provocam também *mutações dos estilos de pensamento* resultantes da *circulação de idéias intercoletivas* promovida por eles.

No capítulo 4, analisamos modelos e metáforas responsáveis pela propagação das ondas produzidas pela pedra. Em outras palavras, vimos de que maneira o Teorema de Gödel foi lido e relido por comunidades não matemáticas e como ele modificou seus *estilos de pensamento*. Os físicos olharam para o Teorema de Gödel e viram uma física inesgotável, os pais da ciência da computação olharam para o Teorema de Gödel e viram uma máquina que não executa todas as tarefas propostas numa determinada linguagem de programação, nas ciências cognitivas olharam para o Teorema de Gödel e encontraram uma relação entre cérebro e computador, nas humanidades, o Teorema de Gödel motivou diversos olhares: contribuiu para a formulação do conceito de pós-modernidade, de compreendê-la; para repensar na ciência dentro deste contexto, sua lógica de pesquisa, da legitimação do saber; para compreender o comportamento humano, para compreender como a linguagem opera com a realidade.

Ao fim de nossos trabalhos, ficamos com uma impressão de que o conhecimento humano é um grande labirinto com caminhos que levam a diversos campos distintos. Estes caminhos não estão claros e bem definidos e somente os descobrimos quando tentamos percorrê-los. Os caminhos se interceptam de tal maneira que campos antes inimagináveis passam a ser destinos possíveis. Campos aparentemente desconectados passam a ser ligados por um itinerário aparentemente novo. Mas ele existia, apenas não conseguíamos encontrá-lo, porque não procurávamos. Acomodamos em caminhos triviais, cotidianos e, às vezes, não arriscamos experimentar novos desafios

É desta maneira que podemos interpretar a história de diversas idéias científicas do século XX. Idéias que coexistem não em um mundo transcendental, mas num mundo racional que pertence a contexto geral, constituído por valores que quebraram o gesso da unidade, permitindo possibilidades de novas pesquisas, novas metodologias; valores que questionaram a verdade unitária, pretexto para exercer um poder que desrespeita nossa vontade de experimentar outras verdades, outras geometrias, outras

lógicas; valores que romperam fronteiras monolíticas dando oportunidades para a pluralidade, a interdisciplinaridade.

O que vimos nestas páginas que precedem estes comentários é que o Teorema de Gödel foi uma peça fundamental no século XX para a constituição de uma nova maneira de ver ciência, de ver o mundo. Ele forneceu as terminologias que serviram para descrever fenômenos de diversos campos científicos que se comportam de uma maneira similar à lógica matemática. Em muitos casos, o comportamento destes fenômenos só foi visível porque o vocabulário da área de pesquisa em questão foi alimentado pelos termos “gödelianos”.

O Teorema de Gödel forneceu também uma nova lógica, não apenas no quesito técnico, mas uma nova lógica de pesquisa. O comportamento de sistemas formais com propriedades tais como auto-referência serviu de modelo pragmático para compreendermos fenômenos de outra natureza, computacionais, biológicos, cognitivos.

Finalmente, o Teorema de Gödel mostrou que o formalismo matemático é limitado, mas a matemática e a física são inesgotáveis. A existência de *indecidíveis* era ruim para os homens modernos, mas não para os contemporâneos. Depois de quebrarmos o gesso da verdade única, da unidade, aprendemos que a pluralidade e a interação de disciplinas são mais benéficos do se imaginava.

Nossas análises então mostram que o Teorema de Gödel, de fato, interferiu no estilo de pensamento de diversas comunidades científicas. Metaforicamente, contribuiu para constituir o domínio conceitual das ciências humanas no século XX, confirmando premissas sobre a pós-modernidade e oferecendo terminologias que não pertenciam ao vocabulário científico desta comunidade. Interferiu na comunidade de físicos, permitindo especulações filosóficas sobre os destinos do universo e das teorias físicas. Além disso, por meio de modelos semânticos, foi hipótese fundamental para mostrar que teorias físicas são incompletas. Interferiu em diversas comunidades das ciências cognitivas, e, em particular, na inteligência artificial, servindo como modelo pragmático para diversos argumentos que povoaram os debates sobre as relações entre mentes e máquinas. Finalmente, serviu de base para a constituição de novas disciplinas, como a ciência da computação e a própria inteligência artificial.

Uma questão poderia incomodar alguns cérebros que acompanharam todo o nosso desenvolvimento: *O Teorema de Gödel mudou mesmo o estilo de pensamento de todas as comunidades mencionadas? Afinal, em algumas delas, há especialistas que nunca ouviram falar de Gödel, ou até ouviram mas discordam das conclusões deste trabalho.*

O estilo de pensamento de uma comunidade não precisa conter categorias aceitas unanimemente. Por exemplo, nem todos os matemáticos do século XX concordavam com o projeto formalista. Alguns, por questões filosóficas, preferiam trabalhar com a lógica intucionista. Disso, não se deve inferir que o formalismo não fazia parte do estilo de pensamento matemático. A garantia que temos de que o Teorema de Gödel interferiu de fato em todas as áreas mencionadas é a quantidade de obras em que ele é relacionado e o peso de seus autores. Por exemplo, como duvidar que uma obra de Lacan tenha repercussões na psicanálise? Como duvidar que um discurso de Stephen Hawking tenha repercussões entre os físicos?

Outra questão que pode ser levantada: *por que as comunidades em questão se interessaram pelo Teorema de Gödel?*

Esta questão foi sendo respondida ao longo do trabalho e, de certa forma, já falamos um pouco a respeito nos parágrafos acima. O que pudemos perceber em nossa pesquisa é que não há uma única resposta para a pergunta feita, tendo em vista que o Teorema de Gödel foi utilizado de diferentes maneiras. A existência de indecidíveis na matemática, mesmo sob determinadas condições, é um fato estarrecedor, não há dúvida, tendo em vista o que a matemática sempre representou na cultura ocidental. Este fato chamou a atenção da física, da computação, das ciências cognitivas e das humanidades por diferentes motivos: os físicos ficaram curiosos de saber se a sua área de conhecimento teria conseqüências tão notáveis como foi o Teorema de Gödel para a matemática. Na computação, as funções recursivas de Gödel foram as ancestrais dos algoritmos computacionais. Na ciência cognitiva, os limites do formalismo e os conseqüentes limites da computação colocariam em debate os limites dos processos mentais que, por sua vez, se relacionam tanto com a computação quanto com a matemática – atividade essencialmente teórica, humana e abstrata. Nas

ciências humanas, o Teorema de Gödel serviria de metáfora para a confirmação de diversos pressupostos sobre a pós-modernidade.

Esta pesquisa mostrou fundamentalmente a dinâmica da socialização entre diferentes comunidades científicas, como ocorre a *circulação de idéias coletivas* entre elas, como estas idéias são lidas, reinterpretadas e, às vezes, reinventadas. Porém, nossas conclusões mostram também que Fleck, ao conceber nos anos de 1930 as diversas *circulações de idéias intercoletivas*, adiantou em muitas décadas a análise que fazemos nos dias atuais sobre a interdisciplinaridade. A interdisciplinaridade na ciência ocorreu depois da publicação das idéias de Fleck. Pode-se dizer que Fleck conseguiu *saltar para fora do sistema* para compreendê-lo. Todavia, desconhecemos pesquisas em história da matemática que assentam suas bases metodológicas nas teorias de Fleck. No caso deste trabalho, Fleck foi o elo ideal para unir a história cultural, metáforas e modelos, constituindo um corpo metodológico capaz de dar conta de nossas pretensões nesta pesquisa.

Algumas questões que não eram objeto desta pesquisa ficaram para futuros empreendimentos possíveis: constituir isomorfismo entre o Teorema de Gödel e teorias de aprendizagem do século XX e tentar estabelecer uma relação entre mente e sistemas formais mais bem sucedida do que a de Hofstadter; estudar *mais circulações de idéias intercoletivas* envolvendo a matemática através de modelos e metáforas.

Finalmente, conjecturamos na introdução deste trabalho que o isomorfismo proporcionado pelo Teorema de Gödel com outras áreas poderia ser dotado de uma reversibilidade: os outros domínios conceituais nos permitiriam compreender melhor o Teorema de Gödel. Isto foi verdade para o autor e, se for também para quem acompanhou esta caminhada, então esta pesquisa teria mais um benefício: tornar o Teorema de Gödel mais inteligível.

Referências

- ABE, J. M. A noção de estrutura em matemática e física. **Estudos Avançados**. Ago. 1989, vol.3, no.6, p.113-125.
- ABDOUNUR, O. J. **Matemática e Música**: o pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 1999.
- ANDRADE, P. E.; PRADO, P. S. T. do. Psicologia e Neurociência cognitivas: alguns avanços recentes e implicações para a educação. **Interação em Psicologia**, vol. 7, no. 2, p. 73-80, 2003.
- ANKERSMIT, F. R. Historiografia e Pós-modernismo **Topoi: Revista de História**.
- ARISTÓTELES. **Poética**. Coleção "Os Pensadores". São Paulo: Editora Nova Cultural, 1996, p. 27-60.
- BLACK, M. **Models and Metaphors**. Ithaca, London: Cornell University, c1962.
- BLACK, M. More about Metaphor. In: ORTONY, A. (org.). **Metaphor and Thought**. Cambridge: Cambridge University Press. 1993, p. 19-41.
- BLOOR, D. **Knowledge and Social Imagery**. 2nd Edition. Chicago: The University of Chicago Press, 1991
- BORGES, J. L. A Biblioteca de Babel. In: **Ficções**. São Paulo: Ed. Globo, 1995, p. 84-92.
- BORGES, J. L.; CHARBONIER, G. **El escritor y su obra**: entrevistas de Georges Charbonier con Jorge Luis Borges. México D.F.: Siglo Veintiuno Editores, 1975.
- BOUVERESSE, J. **Prodígios e vertigens da analogia**: o abuso das belas-letras no pensamento. São Paulo: Martins Fontes, 2005.
- BOYD, R. Metaphor and Theory Change: What is 'Metaphor' is a Metaphor for. In: ORTONY, A. (org.). **Metaphor and Thought**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, p. 481-532.
- BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover Publications, 1959.
- CANTOR, Georg. **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers**. New York: 1915.

CARTWRIGHT, N. **How the laws of physics lie**. Oxford: Oxford University Press, 1983.

CASTANÕN, G. A. Searle e o Cognitivismo. **Revista Ciências & Cognição**. 2006, Vol. 8, p. 96-109. <www.cienciascognicao.org>

CASTORIADIS, C. **Encruzilhadas do labirinto I**. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra S/A, 1987.

CHARTIER, R. **A história cultural entre práticas e representações** Lisboa: Difel, 1998.

CHARTIER, R. A história Hoje: dúvidas, desafios, propostas. **Estudos Históricos**, Rio de Janeiro, vol. 7, n. 13, p. 97-113, 1994.

CHOMSKY, Noam. **Novos horizontes no estudo da linguagem e da mente**. São Paulo: Ed. UNESP, 2005.

COHEN, P. **A Teoria dos Conjuntos e a Hipótese do Contínuo**. In: LOURENÇO, M. (org.). O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977, p. 8-182.

CONDÉ. M.L.L. **Wittgenstein: linguagem e mundo**. São Paulo: Annablume, 1998.

CONDÉ. M.L.L. **As Teias da Razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna**. Belo Horizonte: Argumentum, 2004.

CONDÉ. M.L.L. **Paradigma versus Estilo de Pensamento na História da Ciência**. In: _____; FIGUEIREDO, B. G. Ciência Teoria e História, Belo Horizonte: Argumentum, 2005. p.123-146.

COSTA, N. C. A da. **A. Lógica Indutiva e Probabilidade**. São Paulo: Edusp, 1993.

COSTA, N. C. A da. **O Conhecimento Científico**. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.

COSTA, N. C. A da; DORIA, F. A. Undecidability and Incompleteness in Classical Mechanics **International Journal of Theoretical Physics**, Vol. 30, No. 8, 1991, p. 1041-1073.

COSTA, N. C. A da; DORIA, F. A; AMARAL, A. F. F do. Dynamical System Where Proving Chaos Is Equivalent to Proving Fermat's Conjecture. **International Journal of Theoretical Physics**, Vol. 32, No. 11, 1993, p. 2187-2206.

COURANT, R; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

CROWE, M. J. Ten “Laws” Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics. **Historia Mathematica** 2. Hamburgo, p.161–166, 1975.

D’ALKAINE, C.V. Os trabalhos de Gödel e as denominadas ciências exatas. In: **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 4, p. 525-530, 2006.

DAVIDSON, D. **Inquiries into truth and interpretation**. Oxford: Clarendon, 1984.

DAVIES, P. **Alguém governa o Universo?** Revista Superinteressante (mensal) Editora Abril, no. 57. Jun. 1992. Disponível em http://super.abril.com.br/superarquivo/1992/conteudo_113063.shtml/

DAWSON, Jr. J. W. The reception of Gödel Incompleteness Theorems. In: SHANKER S. G. **Kurt Gödel in Sharper Focus**. In: SHANKER S. G. (Ed.) Gödel Theorem in focus. New York: Routledge, 1988. p. 74-95.

DE SOUZA, E. G. Lógicas multidedutivas e aplicações. In: da Costa, N. C. A. **O conhecimento científico**. São Paulo: Discurso Editorial, 1997, p. 104-111.

DEMO, P. Conhecimento e aprendizagem. In: Torres, Carlos Alberto (org.). **Paulo Freire e a Agenda da Educação Latino-Americana no Século XXI**. Buenos Aires: Clacso e Asdi. 2001, p. 295-322.

DENNETT, D. **Tipos de mentes: rumo a uma compreensão da consciência**. Rio de Janeiro: Rocco, 1997 (Mestres da ciência).

DERRIDA, Jacques. **Margens da filosofia**. São Paulo: Papyrus, 1991.

DOKKUM, A. van. Interdisciplinarity in the social sciences: Bateson’s problem, analytical philosophy and anthropology. In: **Graduate Journal of Social Science**, vol. 2 Issue 2, p. 128-150, 2005.

DOXIADIS, A. **Tio Petrus e a conjectura de Goldbach**. Lisboa: Editora 34, 2001.

DUTRA, L. H. de Araújo. Os modelos e a pragmática da investigação. In: **Scientiæ Studia**. São Paulo: v. 3, no. 2, p. 205-232, 2005.

DYSON, F. The World on a String MAY. In: **New York Review of Books** VOLUME 51, NUMBER 8 · MAY 13, 2004.

ECO, U. **Les limites de l’interprétation**, Paris: Bernard Grasset, 1992.

ECO, U. Metáfora, in: ROMANO, Ruggiero (coord.), **Enciclopédia Einaudi**, vol. 31: Signo, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1994, p. 200-246.

FEFERMAN, S. Kurt Gödel: conviction and Caution. In: SHANKER S. G. (Ed.) **Gödel Theorem in focus**. New York: Routledge, 1988. p. 96-114.

FEFERMAN, S. Penrose's Gödelian argument. **Psyche**, Vol 2, no. 7, May 1995. Disponível em <<http://www.psyche.cs.monash.edu.au/v2/psyche-2-07-feferman.html>>

FEFERMAN, S. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. **Notices of the American Mathematical Society**, Vol. 53, p. 434-439, 2006a.

FEFERMAN, S. The nature and significance of Gödel's incompleteness theorems. Lecture for the Princeton Institute for Advanced Study Gödel Centenary **Program**, Nov. 17, 2006b. Disponível em <http://math.stanford.edu/~feferman/papers.html>

FLECK, L. **Genesis and development of a scientific fact**. Chicago: The University of Chicago Press, 1979.

FLECK, L. The problem of Epistemology. In: COHEN, R & SCHNELLE, T. (Ed.) **Cognition and Fact**. Materials on Ludwik Fleck. Dordrecht (Holland): D. Reidel Publishing Company, 1986, p. 79-112.

FLOYD, J. Sur Gödel et les Mathématiques. In : RIGAL, E (ed.), **Mathématiques chez Wittgenstein**. Paris: T.E.R. [Trans-Europ-repress], 2000.

FONTANIER, Pierre. **Les figures du discours**. Paris: Flammarion, 1977.

FOUCAULT, M. A **Microfísica do Poder**. Rio de Janeiro: Edições Graal, 4ª Ed., 1984.

FRAASSEN, B. C. V. **The scientific image**. Oxford: Clarendon, 1980.

FRAASSEN, B. C. V. Theories. In: NEWTON-SMITH, W. H. (Ed.). **A companion to the philosophy of science**. Oxford, Blackwell, 2001. p. 515–24.

FRANZÉN, T. **Gödel's Theorem**: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse. A K Peters, Wellesley, MA paperback, 2005.

FREGE, G. **The foundations of arithmetic**: a logic-mathematical enquiry into the concept of number. Oxford: Basil Black-well, 1950. 1v.

GARDNER, H. **A nova ciencia da mente**: uma historia da revolução cognitiva. 2ª ed. São Paulo: USP, 1996. (Ponta;9)

GENOVA, J. **Wittgenstein**: a way of seeing. New York: Routledge, 1995.

GÖDEL, K. Russell's Mathematical Logic. In: SCHLIPP, P. A. (Ed.). **Albert Einstein: philosopher-scientist**, Vol. II. Illinois: Southern Illinois University, 1970, p. 123-154.

GÖDEL, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme. **Monatshefte für Mathematik und Physik**, vol. 38, p. 173-198, 1975.

GÖDEL, K. Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: LOURENÇO, M. (org.). **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977a, pp. 245-290.

GÖDEL, K. O que é o Problema do Contínuo de Cantor? In: LOURENÇO, M. (org.). **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977b, pp. 217-244.

GÖDEL, K. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I. In: SHANKER S. G. (Ed.) **Gödel Theorem in focus**. New York: Routledge, 1988. p. 17-47.

GOLDSTEIN, Rebecca. **Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel**. (Great Discoveries). Publisher: W. W. Norton & Company, 2005.

GREENBERG. **Euclidean and non-euclidean geometries**: development and history. San Francisco (CA): W. H. Freeman, 1994.

GUERRERIO, G. Gödel: um tímido iconoclasta. **Scientific American do Brasil** (Ediouro e Segmento) São Paulo. nº 12. Gênios da Ciência: A Vanguarda Matemática e os Limites da Razão, p. 39-66, 2007.

HAWKING, S. **Gödel and the end of physics**, July 20, 2002. <Disponível em <http://www.damtp.cam.ac.uk/strings02/dirac/hawking/>>

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Vol. 1 (Books I-II), Vol.2 (Books V-VI), Vol. 3 (Books VII-XIII). 2nd. Ed. New York: Dover Publications, Inc. 1956.

HEIJENOORT, J. V. (org.) **From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931**. London: Harvard University Press, 1967.

HEMPEL, C. G. Formulation and formalization of scientific theories. A summary-abstract. In: Suppe, F. (Ed.). **The structure of scientific theories**. Urbana/Chicago, University of Illinois Press, 1977. p. 244-65.

HESSE, M. B. Models and analogies. In: NEWTON-SMITH, W. **A companion to the philosophy of science**. Malden, Mass.: Blackwell Publishers, 2000. p. 299-307.

HINTIKKA, J. **On Gödel**. Boston: Wadsworth, 2000.

HOCHMAN, G. A Ciência entre a Comunidade e o Mercado: Leituras de Kuhn, Bourdieu, Latour e Knorr-Cetina. In: PORTOCARRERO V. (Org.) **Filosofia, História e**

Sociologia das Ciências: Abordagens Contemporâneas. Rio de Janeiro: FioCruz, 1994, p. 199-232.

HODGES, A. **Alan Turing: The Enigma**. London: Vintage Books, 1992.

HOFSTADTER, **Gödel, Escher e Bach:** an Eternal Golden Braid. New York: Vitage Books, 1979.

HORGAN, J. **O fim da ciência:** uma discussão sobre os limites do conhecimento científico. São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

JAMESON, F. O Pós-Modernismo e a Sociedade de Consumo. In: KAPLKAN, E. A (org.) **O Mal-estar no Pós-Modernismo:** Teorias e Práticas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1993, p. 25-44.

KADVANY, J. Reflections on the Legacy of Kurt Gödel: Mathematics, Skepticism, Postmodernism. **The Philosophical Forum**, n. 20, p. 161-181, 1989.

KNEALE, W ; KNEALE, M. **O desenvolvimento da lógica**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

KOYRÉ, A. **Do Mundo Fechado ao Universo Infinito**. Rio de Janeiro: Editora Forense Universitária, 2001.

KUNH, T.S. **A estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1977.

KUNH, T.S. Metaphor in Science In: ORTONY, A. (org.). **Metaphor and Thought**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, p. 533-542.

KUNH, T.S. A Metáfora na Ciência. In: _____. **O Caminho desde a Estrutura**. São Paulo: Ed. Unesp, 2006a, p. 241-253.

KUNH, T.S. Comensurabilidade, comparabilidade e comunicabilidade. In: _____. **O Caminho desde a Estrutura**. São Paulo: Ed. Unesp, 2006b, p. 47-76.

LACAN, J. **Escritos**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

LADRIÈRE, J. **Limitaciones internas de los formalismos**. Madrid: Editorial Tecnos, 1969.

LAFONT, J.G. **A topologia de Jacques Lacan**. Rio de Janeiro : Jorge Zahar Editores, 1990.

LAKOFF, G. The contemporary theory of metaphor. In: ORTONY, A. (org.) **Metaphor and Thought**, Cambridge, Cambridge University Press, 1993, p. 202-251

LAKOFF, G.; JONHSON, M **Metaphors we live by**. Chicago: The University of Chicago Press, 1981.

LAUSBERG, Heinrich. **Elementos de retórica literária**. 5.ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2004.

LUCAS, J. R. Minds, Machines and Gödel. **Philosophy**, 36, 1961, p. 112-127.

LYOTARD, J.F. **A condição pós-moderna**. 7ª Edição. Rio de Janeiro: José Olympio Editora, 2002.

MATIYASEVICH, Y. **Enumerable sets are Diophantine**. Doklady Akademii Nauk SSSR, 191, pp. 279-282, 1970. (Tradução inglesa: de Soviet Mathematics. Doklady, vol. 11, no. 2, 1970).

MEHRTENS, H. The Theories of Thomas Kuhn and the Mathematics: a discussion about “the new historiography” of the Mathematic. **Historia Mathematica** Hamburgo, No. 3, p. 297-320, 1976.

MILNER, J. **L'Œuvre Claire: Lacan, la science, la philosophie**. Paris: Éditions du Seuil, 1995.

NAGEL, E. **The structure of science: problems in the logic of scientific explanation**. New York: 1961

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **A Prova de Gödel**. São Paulo: Perspectiva, 2001.

NEWTON, I. **Principia**: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, Livro I. São Paulo: Edusp, 2ªed., 2002.

NEWTON-SMITH, W. **A companion to the philosophy of science**. Malden, Mass.: Blackwell Publishers, 2000.

NICOLESCU, B. Fundamentos Metodológicos para o Estudo Transcultural e Transreligioso In: **Encontro Catalisador do Projeto “A Evolução Transdisciplinar na Educação”**, Guarujá, SP, 2000, p 45-72.

PARREIRAS, M. M. M. **Ludwik Fleck e a Historiografia da Ciência**: diagnóstico de um estilo de pensamento segundo as Ciências da Vida, 2006. 2004 p. Dissertação (M.S. em História da Ciência). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

PENNA, A. G. **Introdução à psicologia cognitiva**. São Paulo: EPU, 1984.

PENROSE, Roger. **A mente nova do rei**: computadores, mentes e as leis da física. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1993.

PENROSE, Roger. **Shadows of the mind**: a search for the missing science of consciensness. Great Britain: Vintage, 1995.

PENROSE, Roger. Beyond the Doubting of a Shadow: A Reply to Commentaries on Shadows of the Mind. **Psyche**, Vol. 2, no. 23, January 1996
Disponível em <http://psyche.cs.monash.edu.au/v2/psyche-2-23-penrose.html>

PINKER, Steven; BERLINER, Claudia. **O instinto da linguagem**: como a mente cria a linguagem / Steven Pinker; tradução Claudia Berliner. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

REGLAND-SULLIVAN, E. **Jacques Lacan and the philosophy of psychoanalysis**. Illinois: Board of Trustees of the University of Illinois, 1986.

REIS, J.C. **História e teoria**: historicismo, modernidade, temporalidade e verdade. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 2003.

RICHARDS, I.A. **The philosophy of rhetoric**. Lecture V: metaphor. In: JOHNSON, M. (Ed.). **Philosophical perspectives** on metaphor. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1981.

ROUANET, S. P. **As razões do Iluminismo**. São Paulo: Companhia das Letras, 1987.

ROSSER, J. B. Uma Exposição informal das demonstrações dos teoremas de Gödel e Church. In: LOURENÇO, M. (org.). **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977, pp.385-403

RUSSELL, B. **My Philosophical Development**. New York: Routledge, 1959

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro. Zahar Editores, 1966.

RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. N. **Principia Mathematica**. Cambridge: Cambridge University Press. 1910-1913. 3 v.

SEARLE, J. **Minds, Brains and Science**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1984.

SEARLE, J. **Mente, linguagem e sociedade** : filosofia no mundo real. Rio de Janeiro: Rocco, 2000. (Coleção Ciência Atual)

SHANKER, S. G. Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem. In: _____ . (Ed.) **Gödel Theorem in focus**. New York: Routledge, 1988. p. 114-256.

SHIBLES, W. A. **Metaphor**: an annotated bibliography and history. Whitewater, Wis.: Language Press, c1971.

SOKAL, A.; BRICMONT, J. **Imposturas intelectuais**: o abuso da ciência pelos filósofos pós-modernos. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

SOUZA SANTOS, **Um Discurso sobre as Ciências**. Porto: Edições Afrontamento, 1988.

SULLINS, J. P. **Gödel's Incompleteness Theorems and Artificial Life**. Phil & Tech 2:3-4 Spring, Summer 1997

SUPPE, F. The search for philosophic understanding of scientific theories. In: _____. (Ed.). **The structure of scientific theories**. Urbana/Chicago, University of Illinois Press, 1977. p.1–241.

TEIXEIRA, J. de F. **Mentes e Máquinas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

TURING, A. M. **Computing Machinery and Intelligence**. In: Mind 49, London, 1950, p. 433-460.

VICO, G.; PRADO, A.L.A. **Princípios de (uma) ciencia** nova: (acerca da natureza comum das nações). 2. ed. São Paulo: 1979.

WHITE, H. **Trópicos do discurso**: ensaios sobre a crítica da cultura. São Paulo: EDUSP, 1994. (1978).

WHITE, H. **Teoria literária e escrita da História**. In: Estudos Históricos, Rio de Janeiro, vol. 7, n. 13, p. 21-48, 1991.

WITTGENSTEIN, L. **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics**. Cambridge: 1939. C. Diamond (Org.), University of Chicago Press, 1976.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the foundations of mathematics**. Oxford: Basil Blackwell, 1956.

WITTGENSTEIN, L. **Tratado lógico-filosófico**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1995a.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações filosóficas**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1995b.

Anexo

Acerca de Proposições Indecidíveis nos *Principia Mathematica* e Sistemas Correlatos*

Kurt Godel

* Transcrito da versão portuguesa organizada por LOURENÇO (p.245-290, 1977).

Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis nos *Principia Mathematica* e Sistemas Relacionados²⁵¹

1.

É sabido que o desenvolvimento da matemática, no sentido de uma maior exatidão, conduziu à formalização de vastos domínios desta ciência de modo que as demonstrações possam ser efetuadas de acordo com algumas regras mecânicas. Os sistemas formais mais exaustivos até hoje construídos são, por um lado, os *Principia Mathematica*²⁵² (PM) e o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel²⁵³ para a teoria de conjuntos (reelaborado por J. v. Neumann). Ambos os sistemas são tão gerais que todos os métodos de demonstração atualmente usados em matemática podem formalizar-se neles, isto é, podem ser reduzidos a alguns axiomas e regras de inferência. É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência são também suficientes para decidir todas as questões matemáticas que podem ser formalmente expressas nestes axiomas. No que vai seguir mostrar-se-á que não é assim, mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples da teoria dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas²⁵⁴. Esta situação não depende da natureza especial dos sistemas construídos,

Nota do tradutor: aquilo a que Gödel neste ensaio chama de *funções recursivas* é modernamente designado por *funções recursivas primitivas* (terminologia introduzida por Kleene).

²⁵¹ Cf. *Anzeiger der Akad. Der Wiss. In Wien (math. Naturw. Kl.)* 1930, nº 19, onde apareceu um sumário dos resultados deste artigo.

²⁵² A. Whitehead e B. Russell, *Principia Mathematica*, 2ª edição, Cambridge, 1925. Entre os axiomas de PM incluímos, em particular, o axioma do infinito, o axioma da redutibilidade e o axioma da escolha (para todos os tipos).

²⁵³ A. Cf. A. Fraenkel, “Zehn Vorlesungen über die Grundlagen der Mengenlehre”, *Wissensch. U. Hyp* vol. xxxi, J. v. Neumann, “Die Axiomatisierung der Mengenlehre”, *Math. Zeitschr.*, 27, 1928. *Journ. F. reine. U. angew. Math.*, 154 (1925), 160 (1929). Note-se que, para completar a formalização, tem que se juntar os axiomas e as regras de inferência do cálculo lógico aos sistemas de axiomas referidos nesta nota. Os argumentos que a seguir apresentamos também se aplicam aos sistemas recentemente construídos por D. Hilbert e pelos seus colaboradores (pelo menos na forma que têm atualmente). Cf. D. Hilbert *Math. Ann.*, 88, *Abh. Aus. D. Math. Sem. Der Univ. Hamburg*, I (1922), VI (1928). P. Bernays, *Math. Ann.* 90, J. v. Neumann, *Math. Zeitschr.* 26 (1927), W. Ackermann, *Mat. Ann.*, 93.

²⁵⁴ Mais exatamente, existem proposições indecidíveis nas quais além das constantes lógicas — (não), $\vee$ (ou), (x) (para todo x), $=$ (idêntico a) os únicos conceitos que ocorrem são $+$ (soma), $\cdot$ (multiplicação) (ambas de números naturais) e o prefixo (x) refere-se apenas a números naturais.

mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais entre os quais estão incluídos, em particular, todos aqueles que se derivam dos sistemas dados juntando um numero finito de axiomas²⁵⁵, admitindo que proposições falsas do gênero descrito na nota 4 não sejam demonstráveis com os novos axiomas.

Antes de entrar em pormenores, vamos esboçar as idéias principais da demonstração sem pretender, evidentemente, qualquer rigor formal. As formulas do sistema formal (limitamo-nos aqui ao sistema PM) são, quando consideradas exteriormente, sucessões finitas de símbolos primitivos (variáveis, constantes lógicas, parêntesis, pontos) e pode-se tornar completamente preciso quais são as que não são²⁵⁶. Analogamente, do ponto de vista formal, as demonstrações não são outra coisa senão sucessões finitas de formulas (com algumas propriedades especificáveis). Como é natural, para considerações matemáticas, não importa muito saber quais são os objetos que se tornam como símbolos primitivos e, par esta finalidade, usaremos os números naturais²⁵⁷. Assim, uma formula é uma sucessão finita de números naturais e a figura de uma demonstração é uma sucessão finita de sucessões finitas de números naturais²⁵⁸. Deste modo, os conceitos metamatemáticos tornam-se conceitos sobre naturais ou sucessões destes²⁵⁹ e por isso é pelo menos parcialmente exprimível no próprio simbolismo do sistema PM. Em particular, pode-se mostrar que os conceitos “formula”, “demonstração”, “formula demonstrável” são definíveis no sistema PM, isto é, pode-se apresentar²⁶⁰ uma formula $F(v)$ de PM com uma variável livre v (do tipo sucessão de números) tal que $F(v)$ quando intuitivamente interpretada diz o seguinte: v é uma formula demonstrável. Mas obteremos uma proposição indecidível do sistema

²⁵⁵ Nos PM consideram-se distintos aqueles axiomas que não se derivam uns dos outros por modificação de tipos.

²⁵⁶ “Uma formula de PM” considerar-se-á daqui em diante uma formula escrita sem abreviaturas (isto é, sem usar definições). As definições servem apenas para abreviar a escrita e por isso são teoricamente supérfluas.

²⁵⁷ Isto é, estabelecemos uma correspondência 1-1 entre os símbolos primitivos e os números naturais.

²⁵⁸ Isto é, uma injeção de um segmento da sucessão dos números naturais nos números naturais (claro que os números naturais não podem ser ordenados espacialmente).

²⁵⁹ Por outras palavras: o processo descrito acima fornece uma imagem isomórfica do sistema PM no domínio da aritmética pode-se perfeitamente efetuar todos os raciocínios matematicamente nesta imagem isomórfica. Isto ocorre no esquema da demonstração que se vai seguir onde por “fórmulas”, “proposição”, “variável”, etc., se entenderá sempre os objetos correspondentes da imagem isomórfica.

²⁶⁰ Seria fácil, porém enfadonho, escrever esta fórmula.

PM, isto é, uma proposição A para a qual nem A e nem não-A é demonstrável, do seguinte modo:

Uma fórmula de PM com precisamente uma variável livre que seja do tipo dos números naturais (classes de classes) chamar-se-á uma expressão de classe. Conceberemos as expressões de classe como estando ordenadas de alguma maneira²⁶¹ e representaremos a expressão de classe de ordem n por $R(n)$ e notaremos que o conceito de “expressão de classe”, tal como a relação de ordem R, pode ser definida no sistema PM. Seja α uma expressão de classe; por

$$[\alpha; n]$$

representaremos a fórmula que resulta da expressão de classe α por substituição do símbolo para a variável livre pelo número natural n. A relação ternária

$$x = [y; z]$$

é também definível em PM. Definiremos agora uma classe K de números naturais do seguinte modo:

$$(1) \quad n \in K \equiv \overline{\text{Bew}[R(n); n]}^{11a}$$

(em que Bew x significa: x é uma fórmula demonstrável). Como os conceitos que ocorrem na definição são todos definíveis em PM, assim também o é o conceito K que é construído a partir deles, isto é, existe uma expressão de classe²⁶² tal que a fórmula

$$[S; n]$$

intuitivamente interpretada diz que o número natural n pertence a K. Como uma expressão de classe, S é idêntica a um certo e definido $R(q)$, isto é,

$$S = R(q)$$

É satisfeita para um certo e definido número natural q. Mostraremos agora que a proposição

$$[R(q); q]^{263}$$

é indecidível em PM. Porque se a proposição

$$[R(q); q]$$

²⁶¹ Pela soma crescente dos termos e lexicograficamente para somas iguais.

^{261a} A barra é o sinal de negação.

²⁶² Não há qualquer dificuldade em escrevê-la efetivamente.

²⁶³ Observe-se que “[$R(q); q$]” ou a sinônima “[$S; q$]” é apenas uma descrição metamatemática da proposição indecidível. No entanto, logo que se obtém a fórmula S, pode-se determinar o número q e assim escrever efetivamente a proposição indecidível.

fosse demonstrável, por hipótese, então seria verdadeira, isto é, de acordo com o que dissemos acima, q pertenceria a K ; isto é, de acordo com (1),

$$\overline{\text{Bew}[R(q);q]}$$

verificar-se-ia, o que contradiz a hipótese. Por outro lado, se a negação de

$$[R(q);q]$$

fosse demonstrável, então:

$$\overline{n \in K}$$

verificar-se-ia, isto é,

$$\text{Bew}[R(q);q]$$

seria verdadeira.

Logo,

$$[R(q);q]$$

e a sua negação seriam demonstráveis, o que é impossível.

A analogia deste resultado com o paradoxo de Richard é evidente; existe também uma relação íntima com o paradoxo do mentiroso²⁶⁴ uma vez que a proposição indecidível

$$[R(q);q]$$

afirma que q pertence a K , isto é, de acordo com (1) que

$$[R(q);q]$$

não é demonstrável. Assim temos diante de nós uma proposição que afirma que a usa própria indemonstrabilidade²⁶⁵. O método de demonstração que se utilizou pode obviamente ser aplicado a qualquer sistema formal que, em primeiro lugar, possua meios de expressão suficientes para que, quando interpretado intuitivamente, defina os conceitos (em especial o de “fórmula demonstrável”) que ocorrem no argumento que desenvolvemos acima; em segundo lugar tem que ser um sistema no qual qualquer

²⁶⁴ Qualquer antinomia epistemológica pode ser usada para uma demonstração análoga de não-demonstrabilidade.

²⁶⁵ Ao contrário do que pode parecer, esta proposição não é circular, porque, em primeiro lugar, afirma a indemonstrabilidade de uma fórmula especificamente definida (exatamente a de ordem q na ordem lexicográfica, depois de certa substituição) e, além disso, só depois (e como se fosse por acaso) se verifica que esta fórmula é exatamente aquela cuja indemonstrabilidade se exprime.

formula demonstrável, que vem a seguir, substituiremos a segunda destas hipóteses por outra fraca e puramente formal.

Do fato de

$$[R(q);q]$$

afirmar a sua própria indemonstrabilidade segue-se imediatamente que

$$[R(q);q]$$

é verdadeira, uma vez que

$$[R(q);q]$$

é fato indemonstrável (porque é indecidível). A proposição indecidível do sistema PM é assim decidida por argumentos metamatemáticos. A análise precisa desta circunstância notável conduz a resultados surpreendentes em demonstrações de consistência de sistemas formais, que serão tratados em pormenor na seção 4 (Teorema XI).

2.

Passamos agora à execução rigorosa da demonstração esboçada acima, e em primeiro lugar daremos uma descrição rigorosa do sistema formal P para o qual queremos demonstrar a existência da proposição indecidível. Essencialmente, P é o sistema que se obtém construindo a lógica de PM com os axiomas de Peano (os números como indivíduos e a relação “sucessor de” como conceito primitivo e indefinido).²⁶⁶

Os símbolos do sistema P são seguintes:

1. Constantes: “~” (não), “∨” (ou), “∏” (para todo), “0” (zero), “f” (o sucessor de), “(”, “)” (parêntesis).
2. Variáveis do Primeiro Tipo (para indivíduos, isto é, números naturais incluindo 0)

“x₁”, “y₁”, “z₁”, ...

Variáveis do Segundo Tipo (para classes de indivíduos)

“x₂”, “y₂”, “z₂”, ...

Variáveis do Terceiro Tipo (para classes de classes de indivíduos)

²⁶⁶ A adição dos axiomas de Peano, tal como as outras modificações no sistema PM, servem apenas para simplificar a demonstração e são teoricamente dispensáveis.

$"x_3", "y_3", "z_3", \dots$

Etc. para qualquer numero natural como tipo²⁶⁷.

Nota: Variáveis para funções (relações) de dois ou mais argumentos são supérfluas como símbolos primitivos, uma vez que se pode definir relações como classes de pares ordenados e pares ordenados, por sua vez, como classes de classes, isto é, define-se o par ordenado

a, b

como

$((a), (a, b))$

em que (x, y) é a classe cujos únicos elementos são x e y e (x) a classe cujo único elemento é x ²⁶⁸.

Por um termo do primeiro tipo referimo-nos a uma combinação de símbolos da forma

$a, fa, ffa, fffa, \dots$ etc.

em que a é ou 0 ou uma variável do primeiro tipo. No primeiro caso chamamos a uma tal expressão um numeral.

Por um termo de tipo n , para $n > 1$, referimo-nos a uma variável de tipo n . Combinações de símbolos da forma

$a(b)$

em que b é um termo de tipo n e a um termo de tipo $(n + 1)$ chamam-se formulas elementares. Definiremos uma classe de formulas como a menor classe^{18*} à qual pertencem todas as formulas elementares e $\sim(a)$, $(a) \vee (b)$, $x \Pi (a)$ (em que x é uma variável arbitrária)²⁶⁹ pertencem a essa classe sempre que a e b pertencerem.

Chamaremos

$(a) \vee (b)$

²⁶⁷ Supõe-se que para cada tipo existem variáveis ao nosso dispor em quantidade não-enumerável.

²⁶⁸ Relações não-homogêneas podem também ser definidas deste modo, e.g., a relação entre indivíduos e classes como uma classe de elementos da forma $((x_2), (x_1), (x_2))$. Todos os teoremas sobre relações demonstráveis em PM podem, como é fácil ver, ser demonstráveis por este método.

^{268a} A respeito desta definição (e outra semelhantes) cf. J. Lukasiewicz e A. Tarski, "Untersuchungen über den Aussagenkalkül" *Comptes Rendus des Séances de la Société et des Lettres de Varsovie*, XXIII, (1930), CI. III.

²⁶⁹ Assim, $x \Pi (a)$ é também uma fórmula quando x não ocorre ou não ocorre livre em a . Neste caso, claro, $x \Pi (a)$ tem o mesmo significado que a .

a disjunção de a e b,

$$\sim(a)$$

a negação de a e

$$x \Pi (a)$$

a generalização de a. Uma proposição é uma fórmula sem variáveis livres (variáveis livres definidas da maneira usual). Uma fórmula com exatamente n variáveis livres de primeiro (de outro modo não tem variáveis livres) chama-se um predicado n-ádico, para n = 1 é também uma expressão de classe.

Por

$$\text{Subst } a \begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix}$$

(em que a é uma fórmula, v uma variável e b um termo do mesmo tipo do que v) referimo-nos à fórmula que resulta de a quando substituimos v, sempre que ocorra livre, por b²⁷⁰. Diremos que uma fórmula a é uma elevação de tipo de uma fórmula b quando a resulta de b elevando os tipos de todas as variáveis que ocorrem em b ao mesmo tempo.

As fórmulas seguintes (de I a V) chamar-se-ão axiomas e escrevem-se recorrendo a abreviaturas: . , $\supset$, $\equiv$, (Ex) , $=$ ²⁷¹ definidas de maneira usual e com o uso das convenções usuais sobre a omissão de parêntesis²⁷².

I.

1. $\sim(fx_1 = 0)$
2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$
3. $x_2(0) \cdot x_1 \Pi (x_2(x_1) \supset x_2(fx_1)) \supset x_1 \Pi (x_2(x_1)).$

²⁷⁰ No caso de v não ocorrer livre em a tem-se

$$\text{Subst } a \begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix} = a$$

Note-se que “Subst” é um símbolo metamatemático.

²⁷¹ Como em PM I, 13, $x_1 = y_1$ tem-se como definido por $x_2 \Pi (x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$.

²⁷² Para se obter os axiomas dos esquemas é preciso (depois de efetuar as substituições permitidas em II, II, IV):

1. eliminar as abreviaturas,
2. juntar os parêntesis omitidos

Observe que as expressões resultantes têm que ser fórmulas no sentido acima enunciado. (Cf. as definições exatas dos conceitos metamatemáticos na página 15).

II.

Qualquer fórmula que resulta dos esquemas seguintes, substituindo fórmulas arbitrárias por p, q e r.

1. $p \vee p \supset p$
2. $p \supset p \vee q$
3. $p \vee q \supset q \vee p$
4. $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$

III.

Qualquer fórmula que resulte de um ou dois esquemas

1. $\forall \Pi(a) \supset \text{Subst } a \begin{pmatrix} v \\ c \end{pmatrix}$
2. $\forall \Pi(b \vee a) \supset b \vee \forall \Pi(a)$

fazendo uma das seguintes substituições por a, v, b, c (e efetuando em 1. a operação indicada por “Subst”).

Por a uma fórmula arbitrária; por v uma variável arbitrária; por b uma fórmula na qual v não ocorra livre; por c um termo do mesmo tipo de v, admitindo que c não contem nenhuma variável que seja ligada em a no mesmo ponto que v é livre²⁷³.

IV.

Qualquer fórmula que resulte do esquema:

1. $(\exists u)(\forall \Pi(u(v)) \equiv a)$

substituindo por v (por u) uma variável arbitrária de tipo n (de tipo n + 1) e por a qualquer fórmula que não contenha u livre. Este axioma representa o da redutibilidade (axioma da compreensão da teoria de conjuntos).

V.

Qualquer fórmula que resulte da seguinte por elevação de tipo (incluindo esta própria fórmula):

1. $x_1 \Pi(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2$

Este axioma afirma que uma classe é completamente determinada pelos seus elementos.

²⁷³ c é portanto uma variável ou é 0 ou é um termo da forma f...fu em que u é ou 0 ou uma variável do primeiro tipo. Acerca do conceito “livre (ligada num ponto de a)” cf. I A 5 do artigo citado na nota 24.

Uma fórmula c chama-se uma consequência imediata de a e b (de a) se a é a fórmula

$$(\sim(b)) \vee (c)$$

(se c é a fórmula $\vee \Pi(a)$, em que v é uma variável arbitrária). A classe das fórmulas demonstráveis é definida como a menor classe de fórmulas que contém os axiomas e que é fechada a respeito da relação “consequência imediata”²⁷⁴.

Estabelecemos agora uma correspondência 1-1 entre os números naturais e os símbolos primitivos do sistema P do seguinte modo:

“0”... 1

“f”... 3

“~”... 5

“ $\vee$ ”... 7

“ Π ”... 9

“(”... 11

“)”... 13

Além disso a variáveis do tipo n atribuímos números da forma

$$p^n$$

(em que p é um número primo maior do que 13).

Assim, a qualquer sucessão finita de símbolos primitivos (e por isso a qualquer fórmula) corresponde 1-1 uma sucessão finita de inteiros positivos. Definiremos agora uma injeção das sucessões finitas de inteiros positivos (que é de novo 1-1) nos números naturais deixando o número

$$2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

corresponder à sucessão $n_1, n_2, \dots, n_k$ e em que p_k designa o número primo de ordem k , por ordem de grandeza. Assim, a todo o símbolo primitivo e toda sucessão finita de símbolos primitivos está associada 1-1 com um número natural. O número que corresponde ao símbolo primitivo (ou à sucessão de símbolos primitivos) a escrever-se-á $\Phi(a)$. Suponhamos agora que é dada uma classe ou uma relação

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

²⁷⁴ A regra de substituição é agora supérflua por termos efetuando todas as substituições possíveis nos próprios axiomas (como em J. v. Neumann “Zur Hilbertschen Beweistheories”, *Math. Zeitsch.* 26, 1927).

entre símbolos primitivos ou sucessões destes símbolos. Com essa classe (relação) associaremos a classe (relação)

$$R'(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

de números naturais que é satisfeita para $x_1, x_2, \dots, x_n$ quando e somente quando existem $a_1, a_2, \dots, a_n$ tal que

$$x_i = \Phi(a_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

e

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

é verdadeira.

Estas classes e relações de números naturais que correspondem desta maneira aos conceitos matemáticos anteriormente definidos, por exemplo, “variáveis”, “fórmula”, “proposição”, “axioma”, “fórmula demonstrável” etc., serão escritas com as mesmas palavras em pequenas letras maiúsculas*. Por exemplo, a proposição que diz que existem problemas indecidíveis no sistema P fica: existem PROPOSIÇÕES a tais que nem a e nem a NEGAÇÃO de a é uma FÓRMULA DEMONSTRÁVEL.

Faremos agora uma digressão que, de momento, nada tem a ver com o sistema P e, em primeiro lugar, estabelecemos a seguinte definição: uma função aritmética²⁷⁵

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

diz-se definida recursivamente a partir das funções aritméticas

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

e

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

se quaisquer que sejam

$$x_1, x_2, \dots, x_n, k^{276}$$

se tem

$$(2) \quad \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n)$$

$$\varphi(k+1, x_2, \dots, x_n) = \mu(k, \varphi(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).$$

* *Nota do tradutor:* no original usa-se itálico.

²⁷⁵ Isto é, uma função cujo domínio de definição é a classe dos inteiros não negativos (dos n -uplos destes inteiros) e cujos valores são inteiros não-negativos.

²⁷⁶ Letras romanas (possivelmente com índices) minúsculas serão sempre, daqui em diante, variáveis para inteiros não negativos (exceto quando expressamente se diga o contrário).

Diz-se que uma função aritmética φ é recursiva se existe uma sucessão finita de funções aritméticas

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

que termina com φ e que tem a propriedade de para cada função φ_k da sucessão ou φ_k é definida recursivamente de duas das funções precedentes ou resulta²⁷⁷ de uma das funções precedentes por substituição ou, finalmente, é uma constante ou a função sucessor $x + 1$. O comprimento da menor sucessão de φ que pertence a uma função recursiva φ chama-se o seu grau. Uma relação entre números naturais

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

chama-se recursiva²⁷⁸ se existe uma função recursiva

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tal que quaisquer que sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0]^{279}.$$

São verdadeiros os seguintes teoremas:

I.

Qualquer função (relação) que resulta de funções (relações) recursivas substituindo as variáveis por funções recursivas é recursiva; do mesmo modo, qualquer função que resulta de funções recursivas por definição recursiva de acordo com o esquema (2) é recursiva.

II.

Se R e S são funções recursivas, então $\bar{R}$, $R \vee S$ (e por isso $R \& S$) são também relações recursivas.

III.

Se as funções $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{y})$ são recursivas, assim também é a relação

$$\varphi(\vec{x}) = \psi(\vec{y})^{280}$$

²⁷⁷ Mais precisamente: substituindo os argumentos de algumas das funções precedentes por uma das funções precedentes, e.g., $\varphi_k(x_1, x_2) = \varphi_p[\varphi_q(x_1, x_2), \varphi_r(x_2)]$ (com $p, q, r < k$). Nem todas as variáveis do lado esquerdo têm que ocorrer no lado direito (tal como no esquema de recursão (2)).

²⁷⁸ Consideramos classes como relações (monádicas). Obviamente as relações recursivas R têm a propriedade de, para qualquer n -uplo de números, se poder decidir se $R(x_1, \dots, x_n)$ é verdadeira ou não.

²⁷⁹ Em todas as considerações não formais (em particular metamatemáticas) usaremos a notação de Hilbert. Cf. Hilbert – Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin, 1928.

IV.

Se a função $\varphi(\vec{x})$ e a relação $R(x, \vec{y})$ são recursivas então são recursivas as relações S e T

$$S(\vec{x}, \vec{y}) \sim (Ex)(x \leq \varphi(\vec{x}) \ \& \ R(x, \vec{y}))$$

$$T(\vec{x}, \vec{y}) \sim (x)(x \leq \varphi(\vec{x}) \rightarrow R(x, \vec{y}))$$

tal como a função

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varepsilon x (x \leq \varphi(\vec{x}) \ \& \ R(x, \vec{y}))$$

em que $\varepsilon x F(x)$ é o menor x para o qual $F(x)$ é satisfeita ou 0 se não existe em tal x .

O Teorema I resulta diretamente das definições. Os Teoremas II e III dependem do fato de as funções aritméticas

$$\alpha(x)$$

$$\beta(x, y)$$

$$\gamma(x, y)$$

correspondem aos conceitos lógicos $\neg$, $\vee$, $=$, nomeadamente:

$$\alpha(0) = 1$$

$$\alpha(x) = 0, \text{ para } x \neq 0;$$

$$\beta(0, x) = \beta(x, 0) = 0$$

$$\beta(x, y) = 1 \text{ se } x \text{ e } y \text{ são ambos } \neq 0;$$

$$\gamma(x, y) = 0 \text{ se } x = y$$

$$\gamma(x, y) = 1 \text{ se } x \neq y.$$

Estas funções são recursivas como se pode verificar facilmente. A demonstração do Teorema IV é, abreviadamente, a seguinte:

Por hipótese existe

$$\varphi(x, \vec{y})$$

recursiva e tal que

$$R(x, \vec{y}) \sim [\varphi(x, \vec{y}) = 0].$$

Definimos agora uma função

²⁸⁰ Usamos as letras góticas como abreviaturas de n-tuplos arbitrários de variáveis, e. g., $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\chi(x, \vec{y})$$

de acordo com o esquema (2) do seguinte modo:

$$\chi(0, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

$$\chi(n+1, y_1, y_2, \dots, y_n) = (n+1) \cdot a + \chi(n, y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot \alpha(a)^{281}$$

em que

$$a = \alpha(\alpha(\rho(0, y_1, y_2, \dots, y_n))) \cdot \alpha[\rho(n+1, y_1, y_2, \dots, y_n)] \cdot \alpha[\chi(n, y_1, y_2, \dots, y_n)].$$

$\chi(n+1, y_1, y_2, \dots, y_n)$ é por isso ou $=n+1$ (se $a=1$) ou $\chi(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ (se $a=0$)²⁸².

Obviamente o primeiro caso só acontece quando todos os fatores de a são 1, isto é, quando

$$\bar{R}(0, y_1, y_2, \dots, y_n) \& R(n+1, y_1, y_2, \dots, y_n) \& [\chi(n, y_1, y_2, \dots, y_n)=0].$$

Então a função $\chi(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ (considerada como função de n) fica 0 até o menor valor de n para o qual $R(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ é satisfeita e, daqui em diante, fica igual a este valor; (se $R(0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ já é satisfeita então o correspondente $\chi(n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ é constante e igual a 0). Assim tem-se

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \chi(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \sim R[\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n), y_1, y_2, \dots, y_n].$$

A relação T pode, por negação, ser reduzida a um caso análogo ao de S , o que estabelece a demonstração do Teorema IV.

As funções $x+y$, $x \cdot y$, x^y e as relações $x < y$, $x = y$ são, como se pode facilmente verificar, recursivas; definiremos agora, a partir destes conceitos, uma sucessão de funções (relações) 1-45, das quais cada uma é definida a partir das precedentes pelos métodos indicados nos Teoremas I-IV. Ao fazê-lo, vários passos da definição, permitidos pelos Teoremas I-IV, são muitas vezes combinados num único passo. Cada uma das funções (relações) 1-45 é, portanto, recursiva. Entre elas ocorrem, por exemplo, conceitos como “FÓRMULA”, “AXIOMA”, “CONSEQUÊNCIA DIRETA”.

$$1. \ x/y \equiv (E) [z \leq x \& x = y \cdot z]^{283}$$

x é divisível por y ²⁸⁴.

²⁸¹ Supõe-se sabido que as funções $x+y$ (adição) e $x \cdot y$ (multiplicação) são recursivas.

²⁸² Como se vê pela definição, a não pode ter outros valores senão 0 e 1.

²⁸³ O símbolo $\equiv$ será usado no sentido de “igual por definição” e portanto nas definições representa $=$ ou $\sim$ (à parte isto a notação é a de Hert).

$$2. \text{Prim}(x) \equiv (\overline{\text{E}z}) [z \leq x \& z \neq 1 \& z \neq x \& x/z] \& x > 1$$

É um número primo.

$$3. 0 \text{ Pr } 0 \equiv 0$$

$$(n+1) \text{ Pr } x \equiv \varepsilon y [y \leq x \& \text{Prim}(y) \& x/y \& y > n \text{ Pr } x]$$

$n \text{ Pr } x$ é o fator primo de ordem n de x (por ordem de grandeza)^{34a}.

$$4. 0! \equiv 1$$

$$(n+1)! \equiv (n+1) \cdot n!$$

$$5. \text{Pr}(0) \equiv 0$$

$$\text{Pr}(n+1) \equiv \varepsilon y [y \leq \{\text{Pr}(n)\}! + 1 \& \text{Prim}(y) \& y > \text{Pr}(n)]$$

$\text{Pr}(n)$ é o número primo de ordem n (por ordem de grandeza)

$$6. n \text{ Gl } x \equiv \varepsilon y [y > x \& x / (n \text{ Pr } x)^y \& \overline{x / (n \text{ Pr } x)^{y+1}}]$$

$n \text{ Gl } x$ é o termo de ordem n da sucessão dos números que corresponde ao número x (para $n > 0$ e não sendo maior do que o comprimento desta sucessão).

$$7. l(x) \equiv \varepsilon y [y \leq x \& y \text{ Pr } x > 0 \& (y+1) \text{ Pr } x = 0]$$

$l(x)$ é o comprimento da sucessão de números associada com x .

$$8. x*y \equiv \varepsilon z \{z \leq [\text{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y} \&$$

$$\& (n) [n \leq l(x) \rightarrow n \text{ Gl } z = n \text{ Gl } x] \&$$

$$\& (n) [0 < n \leq l(y) \rightarrow (n+l(x)) \text{ Gl } z = n \text{ Gl } y]\}$$

$x*y$ corresponde à operação de justaposição de duas sucessões finitas de números.

$$9. R(x) \equiv 2^x$$

$R(x)$ corresponde à sucessão de números que consiste no único número x (para $x > 0$).

$$10. E(x) \equiv R(11)*x*R(13)$$

$E(x)$ corresponde à operação de colocar parêntesis (11 e 13 correspondem aos símbolos primitivos “(” e “)”).

$$11. n \text{ Var } x \equiv (\text{E}z) [13 < z < x \& \text{Prim}(z) \& x = z^n] \& n \neq 0$$

²⁸⁴ Nas definições seguintes, quando uma das expressões (x) , (Ex) , εx ocorre, é seguida de uma restrição sobre x . Esta restrição serve apenas para assegurar a natureza recursiva do conceito definido (cf. Teorema IV). Por outro lado, a extensão do conceito definido, na maioria dos casos, não será modificada omitindo esta restrição

^{284a} Para $0 < n \leq z$ em que z é o número de diferentes números primos que dividem x . Note-se que para $n = z+1$, $n \text{ Pr } x = 0$

x é uma VARIÁVEL DE TIPO n.

$$12. \text{Var}(x) \equiv (En) [n \leq x \ \& \ n \text{ Var } x]$$

x é uma VARIÁVEL.

$$13. \text{Neg}(x) \equiv R(5) * E(x)$$

Neg(x) é a NEGAÇÃO de x.

$$14. n \text{ Disj } y \equiv E(x) * R(7) * E(y)$$

x Disj y é a DISJUNÇÃO de x e y.

$$15. n \text{ Gen } y \equiv R(x) * R(9) * E(y)$$

n Gen y é a GENERALIZAÇÃO de y por meio da variável x (admitindo que x é uma variável).

$$16. 0N_x \equiv x$$

$$(n+1)N_x \equiv R(3) * nN_x$$

nN_x corresponde à n-ésima aposição do símbolo “f” em frente de x.

$$17. Z(n) \equiv nN[R(1)]$$

Z(n) é o NUMERAL para o número n.

$$18. \text{Typ}'_1(x) \equiv (Em, n) \{m, n \leq x \ \& \ [m=1 \vee 1 \text{ Var } m] \ \& \ x = nN[R(m)]\}^{34b}$$

x é um TERMO DO PRIMEIRO TIPO.

$$19. \text{Typ}_n(x) \equiv [n=1 \ \& \ \text{Typ}'_1(x)] \vee [n>1 \ \& \ (Ev)\{v \leq x \ \& \ n \text{ Var } v \ \& \ x = R(v)\}]$$

x é um TERMO DE TIPO n.

$$20. \text{El } f(x) \equiv (E y, z, n) [y, z, n \leq x \ \& \ \text{Typ}_n(y) \ \& \ \text{Typ}_{n+1}(z) \ \& \ x = z * E(y)]$$

x é uma FÓRMULA ELEMENTAR.

$$21. \text{Op } (x, y, z) \equiv x = \text{Neg}(y) \vee x = y \text{ Disj } z \vee (Ez) [v \leq x \ \& \ \text{Var}(v) \ \& \ x = v \text{ Gen } y].$$

$$22. \text{Fr}(x) \equiv (n) \{0 < n \leq l(x) \rightarrow \text{El } f(n \text{ Gl } x) \vee$$

$$\vee (Ep, q) [0 < p, q < n \ \& \ \text{Op}(n \text{ Gl } x, p \text{ Gl } x, q \text{ Gl } x)] \ \&$$

$$\ \& \ l(x) > 0$$

x é uma sucessão de FÓRMULAS, cada uma das quais é ou uma FÓRMULA ELEMENTAR ou deriva das que a precedem por NEGAÇÃO, DISJUNÇÃO ou GENERALIZAÇÃO.

$$23. \text{Form } (x) \equiv (Em) \{n \leq (\text{Pr}[l(x)^2] x \cdot [l(x)]^2 \ \& \ \text{Fr}(n) \ \& \ x = [l(x) \text{ Gl } n]\}^{285}.$$

^{284b} m, n ≤ x é a abreviatura de m ≤ x & n ≤ x (e analogamente para mais de duas variáveis).

x é uma FÓRMULA (isto é, o último termo de uma sucessão de fórmulas n).

$$24. v \text{ Gen } n, x \equiv \text{Var}(v) \& \text{Form}(x) \text{ (E a,b,c)}$$

$$[a,b,c \leq x \& x = a * (v \text{ Gen } b) * c \& \text{Form}(b) \& l(a)+1 \leq n \leq l(a)+l(v \text{ Gen } b)]$$

a VARIÁVEL v é LIGADA no ponto n de x.

$$25. v \text{ Fr } n, x \equiv \text{Var}(v) \& \text{Form}(x) \& v =$$

$$= n \text{ Gl } x \& n \leq l(x) \& \overline{v \text{ Geb } n, x}$$

a VARIÁVEL v é LIVRE no ponto n de x.

$$26. v \text{ Fr } x \equiv (En)[n \leq l(x) \& v \text{ Fr } n, x]$$

v ocorre em x como uma VARIÁVEL LIVRE.

$$27. \text{Su } x \binom{n}{y} \equiv \varepsilon z \{ [z \leq \text{Pr}(l(x)+l(y))]^{x+y} \&$$

$$\& [(Eu,v)(u,v \leq x \& x = u * R(n \text{ Gl } x) * v \&$$

$$\& z = u * y * v \& n = l(u)+1\}.$$

$\text{Su } x \binom{n}{y}$ resulta substituindo o termo de ordem n de x por y (supondo que $0 < n \leq l(x)$).

$$28. 0 \text{ St } v, x \equiv \varepsilon n \{ n \leq l(x) \& v \text{ Fr } n, x \&$$

$$\& (\overline{Ep}) [n < p \leq i(x) \& v \text{ Fr } p, x] \} (k+1) \text{ St } v, x \equiv$$

$$\equiv \varepsilon n \{ n < k \text{ St } v, x \& v \text{ Fr } n, x \&$$

$$\& (\overline{Ep}) [n < p < k \text{ St } v(x) \& v \text{ Fr } p, x] \}$$

k St v, x é o ponto k+1 em x (contando do fim da fórmula x) no qual v é livre em x (e 0 se não houver tal ponto).

$$29. A(v, x) \equiv \varepsilon n \{ n \leq l(x) \& n \text{ St } v, x = 0 \}.$$

²⁸⁵ A restrição $n \leq \{\text{Pr}[l(x)^2] x \cdot l(x)^2\}$ encontra-se do seguinte modo: o comprimento da menor sucessão de fórmulas que pertencem a x pode ser no máximo igual ao numero de SUBFÓRMULAS de x. Mas como há, no máximo, l(x) subfórmulas de comprimento 1, l(x) = 1 de comprimento 2 etc., tem-se portanto, ao todo, no máximo,

$$\frac{l(x)[l(x) + 1]}{2} \leq [l(x)]^2$$

Os divisores primos de n podem ser todos tomados como menores do que $\text{Pr}[l(x)^2]$, o seu número $\leq l(x)^2$ e os seus expoentes (que são SUBFÓRMULAS de x) $\leq x$.

$A(v,x)$ é o número de pontos nos quais v é livre em x .

$$30. Sb_0 \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right) \equiv x$$

$$Sb_{k+1} \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right) \equiv Su \left[Sb_k \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right) \right] \left(\begin{array}{c} k St v, x \\ y \end{array} \right).$$

$$31. Sb \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right) \equiv Sb_{A(v,x)} \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right)^{286}$$

$Sb \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right)$ é o conceito Subst a $\left(\begin{array}{c} v \\ b \end{array} \right)$ definido acima²⁸⁷.

$$32. x \text{ Imp } y \equiv [Neg(x)] Disj y$$

$$x \text{ Con } y \equiv Neg \{ [Neg(x)] [Disj [Neg(y)]] \}$$

$$x \text{ Aeq } y \equiv (x \text{ Imp } y) \text{ Con } (y \text{ Imp } x)$$

$$v \text{ Ex } y \equiv Neg \{ v \text{ Gen } [Neg(y)] \}$$

$$33. n \text{ Th } x \equiv \varepsilon y \{ y \leq x^{(x^n)} \& (k) [k \leq l(x) \rightarrow (k \text{ Gl } x \leq 13 \& k \text{ Gl } y = k \text{ Gl } x) \vee \\ \vee (k \text{ Gl } x > 13 \& k \text{ Gl } y = k \text{ Gl } x) \cdot [l \text{ Pr}(k \text{ Gl } x)^n] \}$$

$n \text{ Th } x$ é a elevação de x ao tipo n (no caso de x e $n \text{ Th } x$ serem fórmulas).

Aos Axiomas I, 1-3 correspondem três números definidos que escreveremos z_1 , z_2 , z_3 e que definiremos do seguinte modo:

$$34. Z - Ax(x) \equiv (x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3).$$

$$35. A_1 - Ax(x) \equiv (Ey)[y \leq x \& \text{Form}(y) \& x = (y \text{ Disj } y) \text{ Imp } y].$$

²⁸⁶ No caso de v não ser uma variável ou x não ser uma fórmula então

$$Sb \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right) = x.$$

²⁸⁷ Em vez de

$$Sb \left[Sb \left(x \begin{array}{c} v \\ y \end{array} \right) \begin{array}{c} w \\ z \end{array} \right]$$

escreveremos

$$Sb \left(x \begin{array}{c} v \ w \\ y \ z \end{array} \right)$$

(e analogamente para mais de duas variáveis).

x é uma FÓRMULA que resulta de uma substituição no esquema axiomático II, 1. Analogamente, $A_2 - Ax(x)$, $A_3 - Ax(x)$ e $A_4 - Ax(x)$ correspondem aos axiomas II, 2-4 tal como foram definidos.

$$36. A - Ax(x) \equiv A_1 - Ax(x) \vee A_2 - Ax(x) \vee A_3 - Ax(x) \vee A_4 - Ax(x).$$

x é uma FÓRMULA que resulta de uma substituição num axioma proposicional.

$$37. Q(z,y,v) \equiv (\overline{E n,m,w}) [n \leq l(y) \& m \leq l(z) \& w \leq z \&$$

$$\& w = m \text{ Gl } z \& w \text{ Geb } n,y \& v \text{ FR } n,y].$$

x não contém nenhuma VARIÁVEL que seja ligada num ponto de y em que v seja livre.

$$38. L_1 - Ax(x) \equiv E(v,y,z,n) \{v,y,z,n \leq x \& n \text{ Var } v \& \text{Typ}_n(z) \& \text{Form}(y) \&$$

$$\& Q(z,y,v) \& x = (v \text{ Gen } y) \text{ Imp } \left[\text{Sb} \left(\begin{matrix} y & v \\ & z \end{matrix} \right) \right]$$

x é uma FÓRMULA que resulta do esquema axiomático III, 1 por substituição.

$$39. L_2 - Ax(x) \equiv (E v,q,p) \{v,p,q \leq x \& \text{Var}(v) \&$$

$$\& \text{Form}(p) \& v \text{ Fr } p \& \text{Form}(q) \& x = [v \text{ Gen}(p \text{ Dis } q)] \text{ Imp } [p \text{ Dis } (v \text{ Gen } q)]\}$$

x é uma FÓRMULA que resulta do esquema axiomático III, 2 por substituição.

$$40. R - Ax \equiv (E u,v,y,n) [u,v,y,n \leq x \& n \text{ Var } v \& (n+1) \text{ Var } u \& u \text{ Fr } y \&$$

$$\& \text{Form}(y) \& x = u \text{ Ex } \{v \text{ Gen } [R(u) * E(R(v))] \text{ Aeq } y\}]$$

x é uma FÓRMULA que resulta do esquema axiomático IV, 1 por substituição.

Ao Axioma V, 1 corresponde um número definido z_4 que definiremos da seguinte forma:

$$41. M - Ax(x) \equiv (En) [n \leq x \& x = n \text{ Th } z_4].$$

$$42. Ax(x) \equiv Z - Ax(x) \vee A - Ax(x) \vee L_1 - Ax(x) \vee L_2 - Ax(x) \vee R - Ax(x) \vee M - Ax(x).$$

x é um AXIOMA.

$$43. Fl(x,y,z) \equiv y = z \text{ Imp } x \vee (Ev) [v \leq x \& \text{Var}(v) \& x = v \text{ Gen } y].$$

x é uma consequência imediata de y e z.

$$44. Bw(x) \equiv (n) \{0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n \text{ Gl } x) \vee (E p,q) [0 < p,q < n \& \& Fl(n \text{ GL } x, p \text{ GL } x, q \text{ GL } x)] \& l(x) > 0\}.$$

x é a FIGURA DE UMA DEMONSTRAÇÃO (uma sucessão finita de fórmulas, cada uma das quais é ou um axioma ou uma consequência imediata das duas precedentes).

$$45. x B y \equiv Bw(x) \& [I(x)] \text{ Gl } x = y.$$

x é uma DEMONSTRAÇÃO da fórmula y.

$$46. Bew(x) \equiv (Ey) y B x$$

x é uma FÓRMULA DEMONSTRÁVEL. [Bew (x) é o único dos conceitos 1-46 que não se pode afirmar ser recursivo].

O fato, que se pode enunciar vagamente com expressão “qualquer relação recursiva é definível no sistema P”, é expresso rigorosamente no teorema seguinte, no qual não se faz referência ao significado intuitivo de P:

TEOREMA V. *Para qualquer relação recursiva $R(x_1, \dots, x_n)$ existe um PREDICADO n -ário r com VARIÁVEIS LIVRES²⁸⁸ $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ tal que para todos os n -uplos de números $(x_1, \dots, x_n)$ se tem:*

$$(3) \quad R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow Bew \left[Sb \left(r \begin{array}{c} u_1 \cdots u_n \\ Z(x_1) \cdots Z(x_n) \end{array} \right) \right]$$

$$(4) \quad \bar{R}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow Bew \left[Neg Sb \left(r \begin{array}{c} u_1 \cdots u_n \\ Z(x_1) \cdots Z(x_n) \end{array} \right) \right]$$

Limitar-nos-emos a indicar as linhas gerais da demonstração deste teorema, uma vez que não oferece quaisquer dificuldades teóricas e a sua execução completa é apenas laboriosa²⁸⁹. Demonstraremos o teorema para as relações

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

da forma

$$x_1 = \varphi(x_2, \dots, x_n)^{290}$$

(onde φ é uma função recursiva) e usaremos indução completa sobre o número de argumentos de φ (que representaremos por r).

²⁸⁸ AS VARIÁVEIS $u_1, u_2, \dots, u_n$ podem ser prescritas arbitrariamente. Existe sempre, e.g., algum r com VARIÁVEIS LIVRES 17, 19, 23, etc., para o qual (3) e (4) são satisfeitas.

²⁸⁹ Evidentemente que o Teorema V depende do fato de, para uma relação recursiva R , ser decidível a partir dos axiomas do sistema P se R é ou não satisfeita para qualquer n -uplo de números dados.

²⁹⁰ Daqui a sua validade segue-se imediatamente para qualquer relação recursiva, uma vez que tal relação é equivalente a $0 = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ com φ recursiva.

Para $r = 1$ (isto é, constantes e a função $x+1$) o teorema é trivial.

Então seja $r = m$, φ resulta de funções de $r < m$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ pelas operações de substituição ou definição recursiva. Como pela hipótese de indução já se demonstrou tudo para $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ existem PREDICADOS correspondentes $r_1, \dots, r_k$ para os quais (3) e (4) são satisfeitas. Os processos de definição que dão origem a φ a partir de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ (substituição e definição recursiva) podem ser ambos formalmente imitados no sistema P. Fazendo isso, pode-se obter de $r_1, \dots, r_k$ um novo PREDICADO r ²⁹¹ para o qual se pode demonstrar sem dificuldade que (3) e (4) são satisfeitas usando a hipótese da indução. Um predicado r que corresponde deste nodo a uma relação recursiva²⁹² chamar-se-á um PREDICADO RECURSIVO.

Chegamos agora ao objetivo do nosso trabalho. Seja χ uma classe arbitrária de fórmulas. Escreveremos

$$\text{Flg}(\chi)$$

(o conjunto-consequência de χ) o menor conjunto de fórmulas que contém todas as fórmulas e χ e todos os AXIOMAS e que é fechado a respeito da relação CONSEQUÊNCIA IMEDIATA. Diz-se que χ é ω -consistente se não existe nenhuma EXPRESSAO DE CLASSE a tal que:

$$(n) \left[\text{Sb} \left(a \begin{matrix} v \\ Z(n) \end{matrix} \right) \varepsilon \text{Flg}(\chi) \right] \& [\text{Neg} (v \text{ Gen } a)] \varepsilon \text{Flg} (\chi)$$

onde v é uma VARIÁVEL LIVRE para a EXPRESSÃO DE CLASSE a .

Qualquer sistema ω -consistente é obviamente também consistente. No entanto, como veremos mais tarde, a recíproca não é verdadeira.

O resultado geral sobre a existência de proposições indecidíveis é o seguinte:

TEOREMA VI: *Para qualquer classe recursiva e ω -consistente de FÓRMULAS χ , existe uma EXPRESSAO DE CLASSE r tal que nem $v \text{ Ger } r$ nem $\text{Neg}(v \text{ Ger } r)$ pertencem a $\text{Flg}(\chi)$ (em que v é uma variável livre de r).*

²⁹¹ Quando esta demonstração é rigorosamente efetuada, r naturalmente não será definido através da interpretação intuitiva mas pela sua estrutura puramente formal.

²⁹² Que por isso exprime, intuitivamente, que a relação é satisfeita.

DEMONSTRAÇÃO: Seja χ uma classe arbitrária recursiva e ω -consistente de FÓRMULAS. Estabelecemos agora as definições:

$$(5) \quad \begin{aligned} Bw_{\chi}(x) \equiv & (n) [n \leq l(x) \rightarrow Ax(n \text{ Gl } x) \vee (n \text{ Gl } x) \varepsilon \chi \vee \\ & \vee (E p, q) \{0 < p, q < n \ \&FI(n \text{ Gl } x, p \text{ Gl } x, q \text{ Gl } x)\} \ \& \ l(x) > 0 \end{aligned}$$

(cf. o conceito semelhante a este, 44).

$$(6) \quad x B_{\chi} y \equiv Bw_{\chi}(x) \ \& \ [l(x)] \text{ Gl } x = y$$

$$(6.1) \quad Bew_{\chi}(x) \equiv (Ey)(y B_{\chi} x)$$

(cf. os conceitos semelhantes 45, 46).

Obviamente, tem-se:

$$(7) \quad (x)[Bew_{\chi}(x) \sim x \varepsilon Flg(x)]$$

$$(8) \quad (x)[Bew(x) \rightarrow Bew_{\chi}(x)].$$

Definimos agora a relação:

$$(8.1) \quad Q(x, y) = \overline{x B_{\chi} \left[Sb \left(y \begin{array}{c} 19 \\ Z(y) \end{array} \right) \right]}.$$

Uma vez que $x B_{\chi} y$ (de acordo com (6), (5)) e $Sb \left(y \begin{array}{c} 19 \\ Z(y) \end{array} \right)$ (de acordo com as definições 17 e 31) são recursivas; assim também é recursiva a relação $Q(x, y)$. De acordo com o Teorema V e (8) existe por isso um PREDICADO q (com as VARIÁVEIS LIVRES 17 e 19) tais que as relações seguintes são satisfeitas:

$$(9) \quad \overline{x B_{\chi} \left[Sb \left(y \begin{array}{c} 19 \\ Z(y) \end{array} \right) \right]} \rightarrow Bew_{\chi} \left[Sb \left(q \begin{array}{cc} 17 & 19 \\ Z(x) & Z(y) \end{array} \right) \right]$$

$$(10) \quad \overline{x B_{\chi} \left[Sb \left(y \begin{array}{c} 19 \\ Z(y) \end{array} \right) \right]} \rightarrow Bew_{\chi} \left[Neg Sb \left(q \begin{array}{cc} 17 & 19 \\ Z(x) & Z(y) \end{array} \right) \right].$$

Faça-se agora:

$$(11) \quad p = 17 \text{ Gen } q$$

(p é a EXPRESSÃO DE CLASSE COM VARIÁVEL LIVRE 19) e

$$(12) \quad r = Sb \left(q \begin{array}{c} 19 \\ Z(p) \end{array} \right)$$

(r é uma EXPRESSÃO DE CLASSE recursiva com a VARIÁVEL LIVRE 17)²⁹³.

Então tem-se:

$$(13) \quad \text{Sb}\left(q \begin{array}{c} 19 \\ Z(p) \end{array}\right) = \text{Sb}\left([17 \text{ Gen } q] \begin{array}{c} 19 \\ Z(p) \end{array}\right) = 17 \text{ Gen } \text{Sb}\left(q \begin{array}{c} 19 \\ Z(p) \end{array}\right) = 17 \text{ Gen } r^{294}$$

(por virtude de (11) e (12))ç além disso tem-se

$$(14) \quad \text{Sb}\left(q \begin{array}{cc} 17 & 19 \\ Z(x) & Z(y) \end{array}\right) = \text{Sb}\left(q \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array}\right)$$

(por (12)).

Se se substituir agora em (9) e em (10) y por p então em virtude de (13) e (14) tem-se o seguinte resultado:

$$(15) \quad \overline{x\text{B}_\chi(17 \text{ Gen } r)} \rightarrow \text{Bew}_\chi\left[\text{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array}\right)\right]$$

$$(16) \quad x\text{B}_\chi(17 \text{ Gen } r) \rightarrow \text{Bew}_\chi\left[\text{Neg Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array}\right)\right]$$

Daqui segue-se:

1. 17 Gen r não é χ -DEMONSTRÁVEL²⁹⁵. Porque se o fosse, então (de acordo com (6.1)) haveria um n tal que

$$n \text{ B}_\chi(17 \text{ Gen } r)$$

Assim, de acordo com (16),

$$\text{Bew}_\chi\left[\text{Neg Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array}\right)\right]$$

seria satisfeita enquanto que por outro lado da χ -DEMONSTRABILIDADE de 17 Gen r a de

$$\text{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(n) \end{array}\right)$$

também se seguiria. Logo χ seria inconsistente (e *a fortiori* ω -inconsistente).

²⁹³ r resulta do predicado recursivo q substituindo uma VARIÁVEL por um numeral definido (p).

²⁹⁴ As operações Gen e Sb comutam-se naturalmente uma com a outra no caso de se referirem a variáveis diferentes.

²⁹⁵ X é χ -demonstrável significa: $x \in \text{Flg}(\chi)$ o que, de acordo com (7), tem o mesmo significado que $\text{Bew}_\chi(x)$.

2. Neg (17 Gen r) não é χ -DEMONSTRÁVEL.

DEMONSTRAÇÃO. Como se acabou de demonstrar 17 Gen r não é χ -DEMONSTRÁVEL, isto é, (de acordo com (6.1)):

$$(n) \text{ n } B_{\chi}(17 \text{ Gen } r)$$

é satisfeita. Daqui deduz-se por (15):

$$(n) \text{ Bew}_{\chi} \left[\text{Sb} \left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(n) \end{array} \right) \right]$$

que juntamente com

$$\text{Bew}_{\chi} [\text{Neg} (17 \text{ Gen } r)]$$

contradiz a ω -consistência de χ .

Logo, 17 Gen r é indecidível a partir de χ , o que demonstra o Teorema VI.

Podemo-nos convencer facilmente que a demonstração dada é construtiva^{45a}, isto é, provou-se de um modo intucionisticamente válido o seguinte: sendo dada uma classe arbitrária recursivamente definida χ de FÓRMULAS, então se nos derem uma decisão formal (a partir de χ) da PROPOSIÇÃO (efetivamente apresentável) 17Gen r poderemos dar efetivamente:

1. Uma demonstração de Neg (17 Gen r).
2. Para um n arbitrário, uma demonstração de

$$\text{Sb} \left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(n) \end{array} \right)$$

isto é, uma decisão formal para 17 Gen r teria como consequência a apresentação efetiva de uma ω -inconsistência.

Chamaremos decidível a uma relação (classe) entre números

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

naturais se existir um PREDICADO n-ário r tal que (3) e (4) (cf. Teorema V) são satisfeitas. Em particular, de acordo com o Teorema V, toda a relação recursiva é decidível.

^{295a} Porque todas as afirmações existenciais que ocorrem na demonstração dependem do Teorema V que, como é fácil de ver, nem mesmo do ponto de vista intucionista é objetável.

Analogamente diz-se que um PREDICADO é decidível quando corresponde desta maneira a uma relação decidível. Ora, é suficiente para a existência de proposições indecidíveis supor que a classe χ é ω -consistente e decidível. Porque a decidibilidade é transportada de χ para $x B_\chi y$ (cf. (5) e (6)) e para $Q(x,y)$ (cf. (8.1)) e só isto é que foi usado na demonstração acima. A proposição indecidível tem, neste caso, a forma $v \text{ Gen } r$ em que r é uma EXPRESSÃO DE CLASSE decidível (além disso é mesmo suficiente que χ seja decidível no sistema de que χ é a extensão).

Se se supõe apenas a consistência de χ em vez da sua ω -consistência então, na verdade, a existência de uma proposição indecidível não se segue; no entanto, obtemos a existência de uma propriedade (r) para a qual nem se pode dar um contra-exemplo nem se pode demonstrar que é satisfeita para todos os números. Porque na demonstração de que $17 \text{ Gen } r$ não é χ -DEMONSTRÁVEL só se usou a consistência de χ (cf. pág. 21) e a partir de

$$\overline{\text{Bew}_\chi(17 \text{ Gen } r)}$$

segue-se, de acordo com (15), que

$$\text{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array}\right)$$

é satisfeita para todos os números x ; por consequência, para nenhum número x se tem que

$$\text{Neg}\left[\text{Sb}\left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array}\right)\right]$$

é χ -DEMONSTRÁVEL.

Se se junta

$$\text{Neg } (17 \text{ Gen } r)$$

a χ , então obtém-se uma classe consistente χ' de FÓRMULAS, mas que no entanto não é ω -consistente; χ' é consistente porque se não o fosse então $17 \text{ Gen } r$ seria ω -DEMONSTRÁVEL. No entanto χ' não é ω -consistente porque, em virtude de

$$\overline{\text{Bew}_\chi(17 \text{ Gen } r)}$$

e (15), tem-se

$$(n) \text{ Bew}_{\chi} \left[\text{Sb} \left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array} \right) \right]$$

e a fortiori

$$(n) \text{ Bew}_{\chi} \left[\text{Sb} \left(r \begin{array}{c} 17 \\ Z(x) \end{array} \right) \right].$$

É claro que por outro lado

$$\text{Bew}_{\chi'} [\text{Neg } (17 \text{ Gen } r)]$$

é satisfeita²⁹⁶.

Um caso especial do Teorema VI ocorre quando a classe χ consiste num número finito de FÓRMULAS (possivelmente também as que resultam por ELEVAÇÃO DE TIPO). Sem dúvida que qualquer classe finita χ é recursiva. Seja a o maior número de χ . Então neste caso tem-se para χ

$$x \varepsilon \chi \sim (E m, n) [m \leq x \ \& \ n \leq a \ \& \ n \varepsilon \chi \ \& \ n = m \text{ Tb } n].$$

Logo χ é recursiva. Isto permite-nos deduzir que mesmo com a ajuda do axioma da escolha (para todos os tipos) ou da hipótese generalizada do contínuo, nem todas as proposições são decidíveis, supondo que estas hipóteses são ω -consistentes.

Na demonstração do Teorema VI não se usaram outras propriedades do sistema P além das seguintes:

1. As classes dos axiomas e das regras de inferência (isto é, a relação de “conseqüência imediata”) são recursivamente definíveis (quando os símbolos primitivos são substituídos de alguma maneira por números naturais).
2. Toda a relação recursiva é definível dentro do sistema P (no sentido do Teorema VI).

Assim, todo sistema formal que satisfaça as hipóteses 1 e 2 e que seja ω -consistente contém proposições indecidíveis da forma $(x) F(x)$ em que F é uma propriedade de números naturais recursivamente definida. Considerando análoga se pode fazer para qualquer extensão destes sistemas por meio de uma classe de

²⁹⁶ A existência de χ consistente e não ω -consistente é obviamente só demonstrável supondo que existe χ consistente (isto é, que P é consistente).

axiomas ω -consistente e recursivamente definível. Ao conjunto dos sistemas que satisfazem as hipóteses 1 e 2, pertencem, como se pode facilmente verificar, os sistemas axiomáticos de Zermelo-Fraenkel e v. Neumann para a teoria dos conjuntos²⁹⁷ e além destes os sistemas axiomáticos para a aritmética que contenham os axiomas de Peano, definições recursivas (de acordo como esquema (2)) e as regras da lógica²⁹⁸. Em geral a hipótese 1. é satisfeita por qualquer sistema cujas regras de inferência sejam as usuais e cujos axiomas (como em P) resultem por substituição de esquemas axiomáticos em número finito^{48a}.

3.

Derivaremos agora outras conseqüências do Teorema VI e para este efeito daremos a seguinte definição:

Uma relação (classe) diz-se *aritmética* se pode ser definida usando apenas os conceitos de $+$, $\cdot$ (adição e multiplicação de números naturais²⁹⁹) e as constantes lógicas $\vee$, $\neg$, (x) , $=$, em que (x) e $=$ se referem a números naturais³⁰⁰. O conceito “proposição aritmética” é definido de uma maneira correspondente. Em particular as relações “maior” e “congruente a respeito de um módulo”, por exemplo, são aritméticas, porque se tem

$$x > y \sim (Ez)(y = x + z)$$

$$x \equiv y \pmod{n} \sim (Ez)(x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n).$$

²⁹⁷ A demonstração da hipótese I é ainda mais simples do que no caso do sistema P, uma vez que só há uma espécie de variável primitiva (respectivamente duas do sistema de v. Neumann).

²⁹⁸ Cf. Problema III in D. Hilbert “Probleme der Grunlegung der Mathematik”, *Math. Ann.*, 102.

^{298a} A verdadeira razão que explica que todos os sistemas formais de matemática sejam incompletos reside no fato, como se mostrará na Parte II deste ensaio, de a formação de tipos cada vez mais altos poder ser continuada até o transfinito (cf. Hilbert “Über das Unendliche”, *Math. Ann.*, 95, pág. 184) enquanto em que todo sistema formal só se dispõe de um número enumerável. Nomeadamente pode-se mostrar que as proposições indecidíveis que se construiu aqui se podem tornar sempre decidíveis através da adição de tipos suficientemente altos (e.g. do tipo ω para o sistema P). Um resultado semelhante é válido para os sistemas axiomáticos da teoria de conjuntos.

²⁹⁹ Daqui em diante zero será sempre considerado como um número natural.

³⁰⁰ Portanto o *definiens* deste conceito tem que ser construído utilizando apenas os símbolos indicados, as variáveis para números naturais x , y , ... e os símbolos 0 e 1 (variáveis funcionais e variáveis de conjuntos não podem ocorrer). (É claro que em vez de x qualquer outra variável numérica pode ocorrer nos prefixos).

A proposição seguinte é verdadeira:

TEOREMA VII. *Toda relação recursiva é aritmética.*

Demonstraremos este teorema na seguinte forma: toda relação da forma

$$x_0 = \varphi (x_1, \dots, x_n),$$

em que φ é recursiva, é aritmética e aplicaremos indução completa sobre o número de argumentos de φ . Seja esse número s ($s > 1$). Então teremos ou

$$1. \quad \varphi (x_1, \dots, x_n) = \rho[\chi_1(x_1, \dots, x_n), \chi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \chi_m(x_1, \dots, x_n)]^{301}$$

(em que ρ e os χ_i têm um número de argumentos menor do que s) ou

$$2. \quad \varphi (0, x_2, \dots, x_n) = \psi(x_2, \dots, x_n); \quad \rho(k+1, x_2, \dots, x_n) = \mu[k, \varphi(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]$$

(em que φ e ψ têm um número de argumentos menor do que s).

No primeiro caso tem-se:

$$x_0 = \varphi (x_1, \dots, x_n) \sim (E y_1, \dots, y_m)[R(x_0, y_1, \dots, y_m) \& S_1(y_1, x_1, \dots, x_n) \& \dots \& S_m(y_m, x_1, \dots, x_n)]$$

em que R e os S_i são relações aritméticas que, de acordo com a hipótese indutiva, são equivalentes a

$$x_0 = \varphi (y_1, \dots, y_m)$$

e

$$y = \chi_i (x_1, \dots, x_n)$$

respectivamente. Logo, neste caso,

$$x_0 = \varphi (x_1, \dots, x_n)$$

é aritmético.

No segundo caso aplicamos o processo seguinte: pode-se exprimir a relação

$$x_0 = \varphi (x_1, \dots, x_n)$$

com a ajuda do conceito “sucessão de números” (f)³⁰² da seguinte maneira:

$$x_0 = \varphi (x_1, \dots, x_n) \sim (E f)\{f_0 = \psi(x_2, \dots, x_n) \& (k)(k < x_1 \rightarrow f_{k+1} = \mu(k, f_k, x_2, \dots, x_n) \& x_0 = f_{x_1}\}.$$

Se

$$S(y, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

³⁰¹ É claro que nem todas as variáveis $x_1, \dots, x_n$ ocorrem necessariamente nos χ_i . (Cf. o exemplo da nota 77).

³⁰² f designa aqui a variável cujo domínio é a sucessão dos números naturais. O termo de ordem $(k+1)$ da sucessão f é designado por f_k (e o primeiro por f_0).

e

$$T(z, x_1, \dots, x_{n+1})$$

são relações aritméticas que, de acordo com a hipótese indutiva, são equivalentes a

$$y = \psi(x_2, \dots, x_n)$$

e

$$z = \mu(x_1, \dots, x_{n+1})$$

respectivamente então se tem

$$(17) \quad x_0 = \varphi(x_1, \dots, x_n) \sim (Ef)\{S(f_0, x_2, \dots, x_n) \& (k)(k < x_1 \rightarrow T(f_{k+1}, k, x_2, \dots, x_n) \& x_0 = f_{x_1})\}.$$

Agora substituímos o conceito “sucessão de números” por “pares de números” associado com o par numérico n, d a sucessão de números

$$f^{(n,d)}(f_k^{(n,d)} = [n]_{1+(k+1)d})$$

em que $[n]_p$ designa o menor resto não negativo d e n o módulo p .

Então:

LEMA 1. *Se f é uma sucessão arbitrária de números naturais e k é um número natural arbitrário, então existe um par de números naturais n, d tal que $f^{(n,d)}$ e f coincidem nos primeiros k termos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja ℓ o maior dos números

$$k, f_0, f_1, \dots, f_{k+1}$$

Determine-se n de modo que

$$n f_i \pmod{1+(i+1)\ell!}$$

para

$$i = 0, 1, \dots, k-1$$

o que é possível uma vez que qualquer par dos números $1+(i+1)\ell!$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) são primos entre si.

Porque um número primo que divida dois destes números tem também que dividir a diferença

$$(i_1 - i_2)\ell!$$

e portanto uma vez que

$$i_1 - i_2 < \ell$$

tem também que dividir $l!$ o que é impossível.

O par numérico $n, l!$ Satisfaz a nossa exigência.

Uma vez que a relação

$$x = [n]_p$$

é definida por

$$x \equiv n \pmod{p} \text{ \& } x < p$$

e é por isso aritmética, então também é aritmética a relação

$$P(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} P(x_0, x_1, \dots, x_n) \equiv & (E n, d) \{ S([n]_{d+1}, x_2, \dots, x_n) \text{ \& } (k) [k < x_1 \rightarrow \\ & \rightarrow T([n]_{1+d(k+2)}, x_2, \dots, x_n) \text{ \& } x_0 = [n]_{1+d(x_1+1)} \} \end{aligned}$$

que de acordo com (17) e o Lema 1 é equivalente a

$$x_0 = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

(na sucessão f em (17) só constam os seus valores até o termo de ordem $(n+1)$). O que demonstra o Teorema VII.

De acordo com o teorema VII, para todo o problema da forma $(x)F(x)$ (em que F é recursivo) existe um problema aritmético equivalente e uma vez que toda a demonstração do Teorema VII pode ser formulada (para cada F particular) dentro do sistema P , esta equivalência é demonstrável em P . Assim, tem-se:

TEOREMA VIII. *Existem proposições aritméticas indecidíveis em cada um dos sistemas formais³⁰³ mencionados no Teorema VI.*

O mesmo resultado se aplica (de acordo com o que dissemos na pág.24) ao sistema axiomático da teoria dos conjuntos e às suas extensões com ω -classes de axiomas consistentes e recursivas.

Finalmente derivaremos o seguinte resultado:

³⁰³ São aqueles sistemas ω -consistentes que resultam de P juntando uma classe de axiomas recursivamente definível.

TEOREMA IX. *Em todos os sistemas formais mencionados no Teorema VI existem problemas indecidíveis do cálculo funcional restrito³⁰⁴ (isto é, fórmulas do cálculo funcional restrito para as quais nem a validade universal nem a existência de um contra-exemplo são demonstráveis)³⁰⁵.*

Este teorema é fundamentado no

TEOREMA X. *Todo o problema da forma $(x)F(x)$ (F recursivo) pode ser reduzido ao problema de satisfazer uma fórmula do cálculo funcional restrito (isto é, para cada F recursivo pode-se apresentar uma fórmula do cálculo funcional restrito em que o fato de ela ser satisfeita é equivalente à verdade de $(x)F(x)$)*

Consideraremos como fórmulas de cálculo funcional restrito aquelas formulas que são construídas a partir dos símbolos primitivos: $\neg$, $\vee$, (x) , $=$, ζ x , y , ... (variáveis individuais); $F(x)$, $G(x,y)$, $H(x,y,z)$, ... (variáveis para propriedades e relações) em que (x) e $=$ se referem apenas a indivíduos³⁰⁶. Acrescentaremos a estes símbolos uma terceira espécie de variáveis, $\varphi(x)$, $\psi(x,y)$, $\chi(x,y,z)$ etc., que representam funções objetivas (isto é, $\varphi(x)$, $\psi(x,y)$ designam funções unívocas cujos argumentos e valores são indivíduos)³⁰⁷. Uma fórmula que além dos símbolos do cálculo funcional restrito (f.r.) mencionados inicialmente contém também variáveis da terceira espécie ($\varphi(x)$, $\psi(x,y)$, ..., etc.) designar-se-á por uma fórmula no sentido amplo (n.s.a.)³⁰⁸. Os conceitos de uma fórmula “ser satisfeita” e “universalmente válida” aplicam-se

³⁰⁴ Cf. Hilbert-Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*. No sistema P deve-se entender por fórmulas do cálculo funcional restrito aquelas que resultam de fórmulas do cálculo funcional restrito de PM pela substituição (indicada na página 28) de classes de tipos mais altos para relações.

³⁰⁵ No meu ensaio “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Functionenkalküls”, *Monatsch. f. Math. u. Phys.*, XXXVII, 2, demonstrei que qualquer fórmula do cálculo funcional restrito ou se pode demonstrar que é universalmente válida ou que tem um contra-exemplo; a existência deste contra-exemplo é, no entanto, de acordo com o Teorema IX, nem sempre demonstrável (nos sistemas formais dados).

³⁰⁶ D. Hilbert e W. Ackermann, no livro citado acima, não consideram o símbolo $=$ como pertencendo ao cálculo funcional restrito. No entanto para qualquer fórmula em que o símbolo $=$ ocorre, existe uma fórmula sem este símbolo que pode ser satisfeita se e somente se a original é satisfeita (cf. o ensaio citado na nota 105).

³⁰⁷ E além disso o domínio de definição será sempre o domínio de indivíduos na sua totalidade.

³⁰⁸ Permite-se que variáveis da terceira espécie substituam variáveis individuais nos argumentos, e.g., $y = \varphi(x)$, $F(x, \varphi(y))$, $G(\psi(x, \varphi(y)), x)$ etc.

automaticamente a fórmula n.s.a. e temos assim o teorema segundo o qual, para qualquer fórmula n.s.a. , A se pode dar uma fórmula ordinária B do f.r. tal que A ser satisfeita é equivalente a B ser satisfeita. Obtém-se B a partir de A substituindo as variáveis da terceira espécie $\varphi(x)$, $\psi(x,y)$, ... que ocorrem em A por expressões da forma $(1z)F(z,x)$, $(1z)G(z,x,y)$, ... em seguida eliminando as funções “descritivas” no sentido de PM. I * 14 e por multiplicar logicamente³⁰⁹ a fórmula assim obtida por uma expressão que diz que F, G, ... que substituem φ , ψ , ... são unívocos a respeito do primeiro argumento.

Mostraremos agora que para qualquer problema da forma $(x)F(x)$ (com F recursivo) existe um problema equivalente acerca da satisfação de uma fórmula e.s.a. do qual, de acordo com o que se disse, se segue do Teorema X.

Uma vez que F é recursivo existe uma função recursiva $\Phi(x)$ tal que

$$F(x) \sim [\Phi(x) = 0]$$

E para Φ existe uma sucessão de funções

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

tal que

$$\Phi_0 = \Phi$$

$$\Phi_1 = x+1$$

e para todo Φ_k ($1 < k \leq n$) ou

$$(18) \quad 1. (x_2, \dots, x_m)[\Phi(0, x_2, \dots, x_m) = \Phi_p(x_2, \dots, x_m)]$$

$$(x, x_2, \dots, x_m)\Phi_k[\Phi_1(x), x_2, \dots, x_m] = \Phi_q[x, \Phi_k(x, x_2, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m] \quad p, q < k$$

$$(19) \quad 2. (x_1, \dots, x_m)[\Phi_k(x_1, \dots, x_m) = \Phi_R(\Phi_{i_1}(x_1), \dots, \Phi_{i_s}(x_s))]^{310}$$

$$r < k, i_v < k$$

(para $v = 1, 2, \dots, s$) ou

$$(20) \quad 3. (x_1, \dots, x_m)[\Phi_k(x_1, \dots, x_m) = \Phi_1(\Phi_1, \dots, \Phi_1(0))]$$

Finalmente formamos as proposições

$$(21) \quad (x) \Phi_1(x) = 0 \ \& \ (x,y) [\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \rightarrow x = y]$$

$$(22) \quad (x) [\Phi_n(x) = 0].$$

³⁰⁹ Isto é, formando a conjunção.

³¹⁰ ($i = 1, \dots, s$) representam quaisquer compostos a partir das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ e.g. x_1, x_2, x_3 .

Ora em todas as fórmulas (18), (19), (20) (para $k = 2, 3, \dots, n$) e em (21), (22) substituímos as funções Φ_i por variáveis funcionais φ_1 , o número 0 por uma variável individual x_0 que não ocorra em nenhuma outra parte e formamos a conjunção C de todas as formulas assim obtidas.

Então a fórmula $(E x_0) C$ tem a propriedade desejada, isto é:

1. Se

$$(x)[\Phi(x) = 0]$$

é satisfeita, porque quando as funções

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$$

são substituídas por

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

em $(E x_0) C$ então resulta obviamente uma proposição verdadeira.

2. Se $(E x_0) C$ é satisfeita, então

$$(x)[\Phi(x) = 0]$$

também é verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam

$$\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$$

as funções que, de acordo com a nossa hipótese, produzem uma proposição verdadeira quando são substituídas por

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

e $(E x_0) C$. Seja $\mathfrak{I}$ o seu domínio de indivíduos. Porque $(E x_0) C$ é verdadeira para as funções Ψ_i , existe um individuo a (em $\mathfrak{I}$) tal que as fórmulas (18)-(22) são as proposições verdadeiras (18')-(22') quando os Φ_i são substituídos pelos Ψ_i e 0 por a . Formamos agora a menor subclasse de $\mathfrak{I}$ que contém a e é fechada a respeito da operação $\Psi_i(x)$. Esta subclasse $(\mathfrak{I})'$ tem a propriedade de cada uma das funções Ψ_i quando aplicada a elementos de $\mathfrak{I}'$ dar um elemento de $\mathfrak{I}'$. Porque isto é verdadeiro para Ψ_i pela definição $\mathfrak{I}'$ e em virtude de (18'), (19'), (20') esta propriedade é transmitida dos Ψ_i com menor índice para os de maior índice. As funções que resultam de Ψ_i por restrição ao domínio de indivíduos $\mathfrak{I}'$ chamam-se Ψ'_i . Estas

funções também satisfazem todas as fórmulas (18)-(20) (depois da substituição de 0 por a e ψ_i por Φ_i).

Por causa da verdade de (21) para ψ'_1 e a, existe uma aplicação 1-1 do conjunto de indivíduos $\mathfrak{I}'$ sobre os números naturais e, além disso, de tal maneira que a será 0 e a função ψ'_1 a função sucessor de Φ_1 . No entanto com esta aplicação, todas as funções ψ'_i se transformarão nas funções Φ_i e pela verdade de (22) para ψ'_n e a, temos

$$(x)[\Phi_n(x) = 0]$$

ou

$$(x)[\Phi(x) = 0]$$

o que demonstra o teorema³¹¹.

Uma vez que se pode reproduzir no sistema P o argumento que conduziu ao Teorema X (para todo F especial) então a equivalência entre a proposição da forma

$$(x)F(x) \quad (\text{com } F \text{ recursivo})$$

e a satisfação da fórmula correspondente da f.r. é demonstrável em P e por isso a indecidibilidade do primeiro implica a da segunda, o que demonstra o Teorema IX³¹².

4.

Dos resultados da seção 2 segue-se um resultado notável que diz respeito à demonstração de consistência do sistema P (e suas extensões) e que é expresso no seguinte teorema:

TEOREMA XI. *Seja χ uma classe³¹³ arbitrária de FÓRMULAS recursiva e consistente. Então a PROPOSIÇÃO que afirma que χ é consistente não é χ -DEMONSTRÁVEL. Em*

³¹¹ Do Teorema X segue-se por exemplo que os problemas de Fermat e Goldbach seriam solúveis se se tivesse resolvido o problema da decisão do f.r.

³¹² O Teorema IX é também verdadeiro para os sistemas axiomáticos da teoria dos conjuntos e suas extensões (por meio de classes de axiomas ω -consistentes e recursivamente definíveis) uma vez que também existem proposições indecidíveis da forma $(x)F(x)$ (com F recursivo) nestes sistemas.

³¹³ χ é consistente (abreviadamente) $\text{Wid}(\chi)$ é definido do seguinte modo:

$$\text{Wid}(\chi) = (\text{Ex})[\text{Form}(x) \ \& \ \text{Bew}_{\chi}(x)]$$

particular, a consistência de P não é demonstrável em P ³¹⁴, supondo que P é consistente (caso contrário, claro, toda proposição é demonstrável).

A demonstração (resumidamente) é a seguinte:

Seja χ uma classe arbitrária de FÓRMULAS recursiva (no caso mais simples a classe nula) que, para as considerações que se seguem, é escolhida de uma vez por todas. Na demonstração do fato de que $17 \text{ Gen } r$ não é χ -DEMONSTRÁVEL³¹⁵ só se usou a consistência de χ , como se pode ver de 1. pág. 21; isto é, temos

$$\text{Wid}(\chi) \rightarrow \overline{\text{Bew}_\chi(17 \text{ Gen } r)}$$

isto é, em virtude de (6.1)

$$\text{Wid}(\chi) \rightarrow (x) xB_\chi(17 \text{ Gen } r)$$

Por (13)

$$17 \text{ Gen } r = \text{Sb} \left(p \begin{array}{c} 19 \\ Z(p) \end{array} \right)$$

e por isso

$$\text{Wid}(\chi) \rightarrow (x) xB_\chi \text{Sb} \left(p \begin{array}{c} 19 \\ Z(p) \end{array} \right)$$

isto e por (8.1)

$$(23) \quad \text{Wid}(\chi) \rightarrow (x) Q(x,p)$$

Estabelecemos agora o seguinte: Todos os conceitos definidos (afirmações demonstradas) da seção 2³¹⁶ e da seção 4 são exprimíveis (demonstráveis) em P . Porque apenas utilizamos os métodos vulgares de definição e de demonstração usados em matemática clássica e tal como estão formalizados no sistema P . Em particular, χ (como qualquer classe recursiva) é definível em P . Seja w a PROPOSIÇÃO pela qual $\text{Wid}(\chi)$ é expressa em P . A relação $Q(x,y)$ e, de acordo com (8.1), (9), (10)

³¹⁴ Isto segue-se quando se substitui χ pela classe nula de FÓRMULAS.

³¹⁵ É claro que r (tal como p) depende de χ .

³¹⁶ Desde a definição de “recursivo” até à demonstração do Teorema VI, inclusive

expressa pelo PREDICADO q e, conseqüentemente, $Q(x,p)$ por r (uma vez que por (12),

$$r = \text{Sb} \left(p \begin{matrix} 19 \\ Z(p) \end{matrix} \right)$$

e a proposição

$$(x) Q(x,p)$$

por

$$17 \text{ Gen } r.$$

Logo, $w \text{ Imp } (17 \text{ Gen } r)$ é, em virtude de (24), DEMONSTRÁVEL em P^{317} (*a fortiori*, χ -DEMONSTRÁVEL). Ora se w fosse χ -DEMONSTRÁVEL então $17 \text{ Gen } r$ também era χ -DEMONSTRÁVEL. E assim, por (23) seguir-se-ia que χ não é consistente.

Repara-se que esta demonstração é construtiva, isto é, permite-nos efetivamente derivar uma contradição de χ , se nos derem uma demonstração de w a partir de χ . Toda a demonstração do Teorema XI pode ser transportada palavra por palavra para os sistemas axiomáticos M da teoria dos conjuntos e da matemática clássica³¹⁸ A , dando origem ao seguinte resultado: Não existe nenhuma demonstração de consistência para M que possa ser formalizada em M supondo que M é consistente e analogamente para A . Repara-se expressamente no fato de o Teorema XI (e os resultado correspondentes acerca de M e A) não contradizer de maneira nenhuma o ponto de vista de Hilbert, porque este pressupõe apenas a existência de uma demonstração de consistência efetuada por métodos finitistas e é concebível que existam métodos destes que não possam ser representados em P (ou M ou A).

Uma vez que ω não é χ -DEMONSTRÁVEL par qualquer classe consistente χ , então já existem proposições (nomeadamente w) que são indecidíveis a partir de χ se $\text{Neg}(w)$ não é χ -DEMONSTRÁVEL; por outras palavras, no Teorema VI podemos substituir a hipótese da ω -consistência pela seguinte: a proposição " χ é inconsistente" não é χ -

³¹⁷ Que a verdade de

$w \text{ Imp } (17 \text{ Gen } r)$

pode ser deduzida de (23) depende apenas do fato de a proposição indecidível $17 \text{ Gen } r$, como já se disse no princípio, afirmar a sua própria indemonstrabilidade.

³¹⁸ Cf. J. v. Neumann, "Zur Hilbertschen Beweinstheorie", *Math. Zeitschr.*, 26, 1927.

DEMONSTRÁVEL (repara-se que existem χ consistentes para os quais esta proposição é χ -DEMONSTRÁVEL).

Neste ensaio limitamo-nos essencialmente ao sistema P e indicamos apenas aplicações a outros sistemas. Os resultados serão expressos e demonstrados em toda a generalidade num outro ensaio a aparecer brevemente. Aí a demonstração do Teorema XI, que só foi esboçada aqui, será feita em pormenor.