

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas

**Uma Formulação Consistente
para Análise Não-Linear
de Estruturas de Cabos Suspensos**

Eng. Edvaldo Joaquim Pereira Júnior

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall

Belo Horizonte
Setembro de 2002

Agradeço a Deus por tudo.
Aos meus pais Edvaldo e Zélia.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall, pela apoio, amizade, dedicação e atenciosa orientação durante este trabalho.

À minha esposa, Andréa L. Macêdo Simões pelo apoio e compreensão diante das atuais circunstâncias.

Aos meus irmãos Renata, Roberta, Érico, Romeu e Cristiano pelo apoio constante e por sempre torcerem pelo meu sucesso.

À todos os meus amigos, colegas, professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, pela amizade e apoio técnico.

Índice

Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	vii
Resumo.....	viii
Abstract.....	xi
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Organização do Texto	2
2 Estudo Analítico dos Cabos	2
2.1 Introdução	2
2.2 Cabos com Cargas Concentradas.....	2
2.3 Cabos com Carga Uniformemente Distribuída ao Longo do Vão (Parábola) ..	2
2.3.1 Cabo suspenso com apoios nivelados.....	2
2.3.2 Cabo suspenso com apoios desnivelados	2
2.4 Cabos com Carga Uniformemente Distribuída ao Longo do Comprimento (Catenária).....	2
2.4.1 Cabo suspenso com apoios nivelados.....	2
2.4.2 Cabo suspenso com apoios desnivelados	2

3	Formulação Numérica	2
3.1	Introdução	2
3.2	Deformações e Tensões	2
3.3	Relações Constitutivas	2
3.4	Sistema de Coordenadas - Graus de Liberdade	2
3.4.1	Considerações iniciais	2
3.4.2	Definição dos sistemas de coordenadas e graus de liberdade	2
3.5	Teoria Estrutural	2
3.6	Cinemática do Elemento	2
3.6.1	Campo de deformação	2
3.6.2	Campo de deslocamento - considerações analíticas	2
3.7	Equações de Equilíbrio	2
3.7.1	Equilíbrio do elemento	2
3.7.2	Equilíbrio estrutural	2
3.7.3	Equações incrementais do equilíbrio	2
3.8	Interpolação	2
3.9	Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente	2
3.9.1	Elementos prismáticos em regime elástico linear	2
3.9.2	Elementos prismáticos em regime elasto-plástico	2
4	Aspectos da Implementação	2
4.1	Considerações Iniciais	2
4.2	Implementação da Configuração Inicial de Equilíbrio do Cabo	2
4.3	Método de Newton-Raphson	2
4.4	CrITÉrio de Convergência	2
4.5	Modelos Constitutivos para os Cabos	2
4.5.1	Características construtivas dos cabos e cordoalhas	2
4.5.2	Diagramas tensão-deformação para cabos	2

4.6 O Problema Elasto-Plástico Unidimensional.....	2
4.7 Análise Incremental das Tensões e Deformações no Comportamento Elasto-Plástico.....	2
4.7.1 Primeiro Intervalo: $0 \leq \sigma_e^r \leq \sigma_{y2}$	2
4.7.2 Segundo Intervalo: $\sigma_{y1} < \sigma_{ep}^r \leq \sigma_{y3}$	2
4.7.3 Terceiro Intervalo: $\sigma_{y2} < \sigma_{ep}^r \leq \sigma_{y4}$	2
4.8 Descrição das subrotinas.....	2
5 Exemplos Numéricos.....	2
5.1 Introdução	2
5.2 Análise Elástica Não-Linear Geométrica	2
5.2.1 Cabo suspenso sujeito ao peso próprio.....	2
5.2.2 Cabo suspenso sujeito a cargas concentradas.....	2
5.2.3 Cabo suspenso com dois elementos.....	2
5.2.4 Cabo suspenso sujeito ao peso próprio e carga concentrada com número de elementos variáveis	2
5.2.5 Cabo suspenso sujeito a carga distribuída ao longo do vão e cargas concentradas	2
5.3 Análise Não-Linear Geométrica e Física.....	2
5.3.1 Estrutura hiperestática com 3 cabos	2
5.3.2 Análise inelástica de um cabo suspenso com 2 elementos.....	2
6 Conclusões.....	2
Bibliografia.....	2

Lista de Figuras

Figura 1.1	Torre estaiada	3
Figura 2.1	Cabo suspenso com apoios desnivelados e cargas concentradas ao longo do vão	8
Figura 2.2	Cabo suspenso com apoios nivelados e carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão	9
Figura 2.3	Elemento de cabo com carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão	9
Figura 2.4	Tração no elemento de cabo	11
Figura 2.5	Cabo suspenso com apoios desnivelados e carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu vão	12
Figura 2.6	Cabo suspenso com apoios nivelados com carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento	17
Figura 2.7	Elemento de cabo com carregamento uniformemente distribuído ao longo de seu comprimento	17
Figura. 2.8	Cabo suspenso com apoios desnivelados com carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento	19
Figura 3.1	Elemento de cabo nas suas configurações de referência e corrigida	24
Figura 3.2	Comportamento elasto-plástico de um elemento de cabo	27
Figura 3.3	Elemento de cabo em suas configurações de referência e corrigida segundo sistemas globais e locais de referência	30
Figura 3.4	Deslocamentos de um ponto de uma seção genérica em relação ao sistema de eixos cartesianos globais	33
Figura 4.1	Fluxograma do programa principal	49
Figura 4.2	Método de Newton-Raphson	54

Figura 4.3	Cordoalha de aço de sistema aberto	56
Figura 4.4	Cordoalha de aço de sistema fechado	56
Figura 4.5	Cabo de aço	57
Figura 4.6	Tipos de construções de cabos de aço	58
Figura 4.7	Módulo de elasticidade secante E_s segundo o ASCE 1996	60
Figura 4.8	Curvas tensão-deformação($\epsilon=\Delta/l$) para cordoalhas ensaiadas por Murray&Willems	62
Figura 4.9	Curvas tensão-deformação($\epsilon=\Delta/l$) para cordoalhas com diâmetros inferiores a 31,8mm (1/4 in)	63
Figura 4.10	Comportamento elasto-plástico do material para o caso uniaxial	65
Figura 4.11	Diagrama tensão-deformação multi-linear	67
Figura 4.12	Material previamente plastificado segundo o trecho elasto-plástico	70
Figura 4.13	Material plastificado segundo o trecho elasto-plástico 01 na iteração corrente	72
Figura 4.14	Material previamente plastificado segundo o trecho elasto-plástico	76
Figura 4.15	Material plastificado segundo o trecho elasto-plástico 02 na iteração corrente	76
Figura 4.16	Material previamente plastificado segundo o trecho elasto-plástico	82
Figura 4.17	Material plastificado segundo o trecho elasto-plástico 03 na iteração corrente	85
Figura 5.1	Tela principal do programa	91
Figura 5.2	Sub-menu coordenadas dos nós	92
Figura 5.3	Sub-menu cabos	92
Figura 5.4	Sub-menu Elementos	93
Figura 5.5	Sub-menu Restrição Nodal	93
Figura 5.6	Sub-menu Lei Constitutiva	94
Figura 5.7	Sub-menu Carga nos Nós	95

Figura 5.8	Sub-menu Parâmetros de Controle	95
Figura 5.9	Cabo suspenso sujeito a peso próprio	96
Figura 5.10	Configuração de equilíbrio do cabo com 10 elementos	97
Figura 5.11	Cabo suspenso sujeito a cargas concentradas	98
Figura 5.12	Geometria inicial do cabo com 18 elementos	99
Figura 5.13	Geometria do cabo nas posições inicial e final	99
Figura 5.14	Cabo suspenso com 2 elementos	100
Figura 5.15	Cabo suspenso sob carregamento concentrado e peso próprio	102
Figura 5.16	Estrutura da Fig. 5.15 nas posições de equilíbrio inicial e deslocada	102
Figura 5.17	Cabo livremente suspenso submetido a carga distribuída ao longo do vão e cargas concentradas	105
Figura 5.18	Posições inicial e final do cabo da Fig. 5.17	106
Figura 5.19	Estrutura hiperstática com 3 cabos em regime elasto-plástico	107
Figura 5.20	Comportamento elasto-plástico perfeito- lei constitutiva 01	108
Figura 5.21	Curva carga x deslocamento para a estrutura da Fig.5.15 com a lei constitutiva 01	110
Figura 5.22	Comportamento elasto-plástico – lei constitutiva 02	114
Figura 5.23	Curvas carga aplicada x deslocamento para a estrutura da Fig. 5.19 segundo as leis constitutivas 01 e 02	115
Figura 5.24	Comportamento elasto-plástico com strain-hardening - lei constitutiva 03	116
Figura 5.25	Curva carga x deslocamento para a estrutura considerando strain-hardening	118
Figura 5.26	Cabo suspenso com 2 elementos submetido a carga concentrada	119
Figura 5.27	Curva tensão-deformação($\epsilon=\Delta l/l$) para cordoalhas (1x37) segundo Murray&Willems	119
Figura 5.28	Curva carga aplicada x deslocamento do ponto B para as análises	

	elástica e inelástica	122
Figura 5.29	Curva carga aplicada x força de tração para as análises elástica e inelástica	122

Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Fator de ocupação para cabos e cordoalhas	58
Tabela 4.2	Resistência à tração de cabos de aço	59
Tabela 4.3	Parâmetros recomendados para as cordoalhas ensaiadas por Murray&Willems	62
Tabela 4.4	Parâmetros recomendados por Murray&Willems para cordoalhas com diâmetros inferiores a 31,8mm (1 1/4in)	63
Tabela 5.1	Resultados teóricos e do programa do exemplo 5.2.1	97
Tabela 5.2	Resultados relativos à geometria do exemplo 5.2.2	100
Tabela 5.3	Resultados relativos a esforços e reações do exemplo 5.2.2	100
Tabela 5.4	Resultados do exemplo 5.2.3 por vários programas	101
Tabela 5.5	Resultados do exemplo 5.2.3 pelo programa Cabos-NLFG	101
Tabela 5.6	Esforços nos elementos para a estrutura da Fig. 5.15	103
Tabela 5.7	Número de iterações x número de elementos	103
Tabela 5.8	Número de incrementos x tração máxima, flecha máxima e número de iterações	104
Tabela 5.9	Número de elementos x tração máxima, flecha máxima e tempo de processamento	104
Tabela 5.10	Tabela comparativa para o cabo da Fig. 5.13	106
Tabela 5.11	Resultados analíticos considerando a lei constitutiva 01	109
Tabela 5.12	Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 01	109
Tabela 5.13	Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 02	114
Tabela 5.14	Resultados da análise numérica considerando lei constitutiva 03	117

Tabela 5.15	Resultados da análise inelástica do cabo da Fig. 5.25	120
Tabela 5.16	Resultados da análise elástica do cabo da Fig. 5.25	121

Resumo

Com o objetivo de avaliar o comportamento não-linear das estruturas de cabos suspensos, é apresentada uma teoria geral para a análise pelo método dos elementos finitos. Essa formulação considera os comportamentos não-lineares físico (NLF) e geométrico (NLG) das estruturas. O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de cabo. A formulação apresentada é bastante geral, permitindo que os nós sofram grandes deslocamentos e os elementos sofram grandes alongamentos e, além disso, esses elementos podem ser constituídos de material elasto-plástico. Será feita a análise estática da estrutura através de carregamento incremental, monótono e estritamente crescente, proporcional ou não, até o colapso global da estrutura. A solução do problema exige um procedimento incremental-iterativo, do tipo Newton-Raphson, para se alcançar a convergência da solução. Dessa forma, foi desenvolvido um programa de computador consistente e de fácil utilização que permite a análise de cabos suspensos, levando-se em consideração os efeitos dos grandes deslocamentos envolvidos e o comportamento inelástico dos cabos. A implementação computacional do elemento é feita através da linguagem de programação PASCAL dentro das padronizações do DELPHI. Os exemplos apresentados são comparados com resultados teóricos ou de outros programas de computador amplamente testados, demonstrando a consistência e precisão do programa desenvolvido.

Palavras chave: Análise não linear, estruturas de cabos, elementos finitos.

Abstract

A general theory for the analysis of the non-linear behaviour of suspension cables structures by the finite element method is presented. The formulation takes into account the material and geometric nonlinearities. The theory is developed applying a Lagrangian formulation where the corotational technique is used to obtain the tangent stiffness matrix of the space cable element. The formulation intends to be as general as possible, allowing for the nodes to undergo large displacements and the elements to undertake large strains. Besides, elasto-plastic material can be used. A static incremental analysis will be performed, applying an incremental, monotonic and increasing load, proportional or not, until partial or global failure of the cable structure occurs. The solution of the problem requires an incremental-iterative procedure, such as the Newton-Raphson Method, to insure the convergence. An easy-to-use computer program was developed which allows for analyses of suspension cables taking encompassing large displacements effects and the inelastic behaviour of the cables. The computational coding of the element was performed using the PASCAL programming language obeying the DELPHI 4.0 standards. The examples presented were compared with theoretical results and with results produced by some commercial programs, showing the correctness and accuracy of the developed program.

Key words: Non-linear analysis, cables structures, finite elements.

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

As estruturas formadas por cabos constituem sistemas estruturais de grande aplicação prática na engenharia, tais como pontes pênséis, linhas de transmissão, teleféricos, cabos tensores (estaís) para torres elevadas e coberturas pênséis.

As coberturas pênséis são formadas por um sistema estrutural, geralmente formado por cabos de aço ou por cabos e barras de aço e um sistema vedante que se apóia no sistema estrutural. Devido às características de estruturas simples, leves, versáteis, econômicas, facilidade de montagem, vencer grandes áreas livres, têm vasto campo de aplicação, tais como na cobertura de ginásios de esporte, estádios, piscinas, supermercados, depósitos, fábricas, igrejas, teatros, pavilhões de exposição, feiras, aeroportos, terminais rodoviários, ferroviários e marítimos e outras construções.

Podem ser citadas algumas obras importantes que têm sido projetadas nas últimas décadas com a utilização de cabos em diversos países, como por exemplo:

a) o estádio de patinação (1966) em Presov na Eslováquia com dimensões de 78,4mx92,0 m.

- b) a piscina coberta (1971) em Ceska Budejovice na República Tcheca com dimensões de 54 m x 64 m.
- c) o palácio de esportes de Milão (1973) com 128 m de diâmetro.
- d) o estádio olímpico de Calgary (1983) no Canadá, diâmetro de 67,65 m.
- e) a arena de esportes (1985) em Atenas com diâmetro de 113,96 m.

No Brasil, o projeto, cálculo, execução e montagem de estruturas estaiadas já têm sido realizados, principalmente em torres estaiadas de estruturas metálicas, Fig. 1.1, sendo utilizadas, na sua maioria, nas áreas de telecomunicações e eletrificação.

A análise estrutural das estruturas formadas por cabos torna-se complexa devido ao comportamento não-linear, oriundo da importância dos efeitos de segunda ordem produzidos pelas reações normais dos cabos e cargas externas durante os grandes deslocamentos que ocorrem nestas estruturas.

Além disso, os próprios cabos possuem um comportamento não-linear, pois as suas propriedades de rigidez variam com a deformada e com as tensões a que estão sujeitos.



Figura 1.1 – Torre estaiada

Portanto, o cálculo envolve não apenas o desenvolvimento das relações não-lineares entre forças e deslocamentos, mas também a difícil tarefa de se obter uma solução numérica correta para as equações que descrevem o comportamento destas estruturas de cabos.

Neste projeto de pesquisa, apresenta uma teoria geral para análise de estruturas de cabos suspensos, pelo método dos elementos finitos, considerando-se os comportamentos não-linear Geométrico (NLG) e Físico (NLF) envolvidos no problema, utilizando-se a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes de rigidez dos elementos de cabo. A solução do problema não-linear exige também um procedimento iterativo para se alcançar a convergência do método.

Em se tratando do carregamento da estrutura, esse trabalho abrangerá as cargas do tipo peso próprio, cargas concentradas e carga distribuída, não se considerando cargas dinâmicas e efeitos oriundos de vibrações dos cabos.

Será feita a análise estática considerando o carregamento incremental, monótono e estritamente crescente, proporcional ou não, até que ocorra o colapso parcial ou global da estrutura.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivos apresentar um estudo teórico sobre as estruturas de cabos suspensos para diversos tipos de carregamentos; desenvolver uma formulação, via elementos finitos, para a análise de estruturas de cabos onde serão consideradas as não-linearidades geométrica e física, e ainda, desenvolver um “software” para “PCs” e implementá-lo utilizando-se um processo incremental-iterativo para o estudo do comportamento não-linear destas estruturas.

1.3 Organização do Texto

Este trabalho foi dividido em seis capítulos, cada um deles tratando de cada uma das fases do trabalho. Apresenta-se a seguir, uma breve descrição do conteúdo de cada um dos demais capítulos que compoem o trabalho.

No capítulo 2 faz-se um estudo analítico dos cabos suspensos, considerando-se as hipóteses de que os mesmos sejam perfeitamente flexíveis e inextensíveis. As condições para garantir o equilíbrio são formuladas para um problema bidimensional, considerando-se três tipos de carregamentos, a saber: cabos com cargas concentradas, cabos com carga distribuída ao longo do vão (parábola) e carga distribuída ao longo do comprimento (catenária).

No terceiro capítulo é apresentada uma teoria geral, pelo método dos elementos finitos, para a análise não-linear das estruturas de cabos, considerando tanto o comportamento não-linear geométrico quanto o comportamento não-linear físico envolvidos no problema.

No quarto capítulo apresentam-se os aspectos fundamentais da implementação computacional do programa desenvolvido. São discutidos aspectos da implementação da configuração de equilíbrio inicial, da utilização do método de Newton-Raphson usado no processo incremental-iterativo para a solução do problema não-linear e o critério de convergência adotado para a verificação do final do processo. São discutidos modelos constitutivos para os cabos e os procedimentos para a análise incremental das tensões e deformações no comportamento elasto-plástico unidimensional. É ainda apresentada uma breve descrição de cada uma das subrotinas usadas no programa desenvolvido.

No quinto capítulo são apresentados exemplos numéricos onde se pretende mostrar a eficácia da formulação utilizada, a precisão dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, quando comparados com resultados teóricos da

literatura e de outros programas existentes. Inicialmente são analisados exemplos onde consideram apenas a não-linearidade geométrica para diversos tipos de carregamento e, em seguida, faz-se a análise não-linear geométrica e física de estruturas de cabos, considerando-se diversos modelos constitutivos.

Finalmente, no sexto capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

Estudo Analítico dos Cabos

2.1 Introdução

Os cabos são elementos freqüentemente usados em aplicações de engenharia para suportar e transmitir cargas. Na análise das forças atuantes nesses sistemas estruturais, o peso dos cabos pode ser desprezado ou não, dependendo de sua aplicação.

Quando utilizados para suportar pontes suspensas ou em talhas mecânicas, os cabos se destacam na transmissão de carregamentos e, neste caso, o seu peso pode ser desprezado tendo-se em vista seu baixo valor em relação às cargas a ser suportadas. Por outro lado, quando utilizados em linhas de transmissão ou no estaiamento de torres e tendas, por exemplo, seu peso pode ser importante e deve ser incluído na análise.

Num estudo analítico introduzem-se as seguintes hipóteses simplificadoras: admite-se que o cabo seja perfeitamente flexível e inextensível. Por ser flexível, não oferece resistência à flexão e, portanto, a força de tração atuante sobre ele

será sempre tangente à sua geometria nos pontos ao longo de seu comprimento. Por ser inextensível, os cabos têm o mesmo comprimento antes e depois da aplicação da carga. Dessa forma, uma vez aplicada a carga, a geometria deformada permanece fixa e o cabo ou cada segmento do cabo pode ser tratado como corpo rígido.

As condições para garantir o equilíbrio serão formuladas, neste capítulo, para um problema bidimensional, ou seja, os casos de carregamento analisados estarão sempre coplanares com o cabo.

Considerando-se essas hipóteses, é apresentado a seguir um estudo dos cabos suspensos para três tipos de carregamentos, baseado em Barbato [1972], Beer e Johnston [1994], Hibbeler [1999] e Leonard [1988].

- ***Cabos com cargas concentradas.***
- ***Cabos com cargas distribuídas ao longo do seu vão (parábola).***
- ***Cabos com cargas distribuídas ao longo do seu comprimento (catenária).***

2.2 Cabos com Cargas Concentradas

Quando o cabo suporta várias cargas concentradas supõe-se, neste caso, que o peso do cabo seja desprezível e este assume a forma de vários segmentos de reta, cada um dos quais com força de tração constante. Considere, por exemplo, o cabo mostrado na Fig. 2.1, onde as distâncias h , L_1 , L_2 e L_3 e as cargas P_1 e P_2 são conhecidas.

Neste caso, o problema é constituído de nove incógnitas que consistem na tração em cada um dos três segmentos, nas quatro componentes das reações nos pontos A e B e nos deslocamentos y_C e y_D dos pontos C e D . Para a solução deste problema, dispomos de duas equações de equilíbrio em cada um dos pontos A , B ,

C e D , totalizando oito equações. Sendo assim, será necessário conhecer algo mais sobre a geometria do cabo para obter a número de equações necessárias que, neste caso, são nove. Por exemplo, o comprimento do cabo pode ser especificado ou então um dos deslocamentos y_C ou y_D dos nós C ou D .

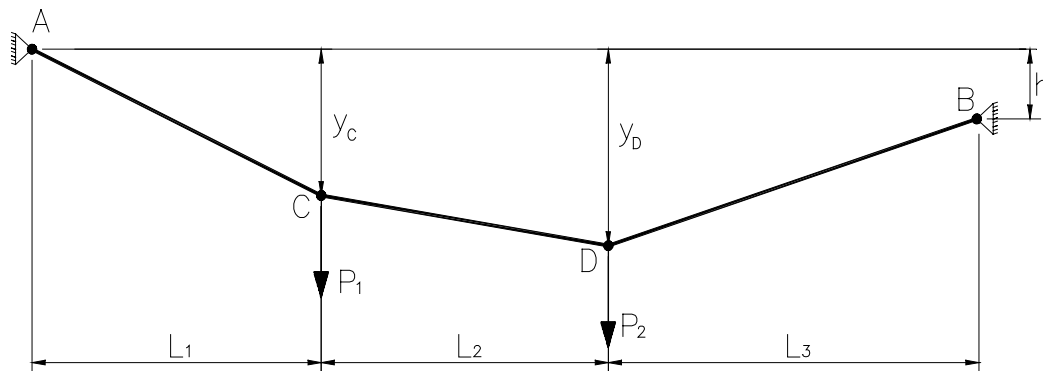


Figura 2.1 - Cabo suspenso com apoios desnivelados e cargas concentradas ao longo do vão

2.3 Cabos com Carga Uniformemente Distribuída ao Longo do Vão (Parábola)

Neste caso, supõe-se que o cabo suporta uma carga uniformemente distribuída ao longo do seu vão e que seu peso próprio pode ser desprezado na análise. Como exemplo de aplicação, pode-se citar o caso das pontes pênses.

O objetivo a seguir é obter as equações de equilíbrio de um cabo, submetido a um carregamento distribuído ao longo do seu vão, considerando-se as condições de apoio nivelados e desnivelados, visando mostrar que a sua configuração de equilíbrio é parabólica.

2.3.1 Cabo suspenso com apoios nivelados

Considere-se o cabo AB sem peso mostrado na Fig. 2.2, com apoios nivelados, sujeito a um carregamento uniformemente distribuído $p(x)$.

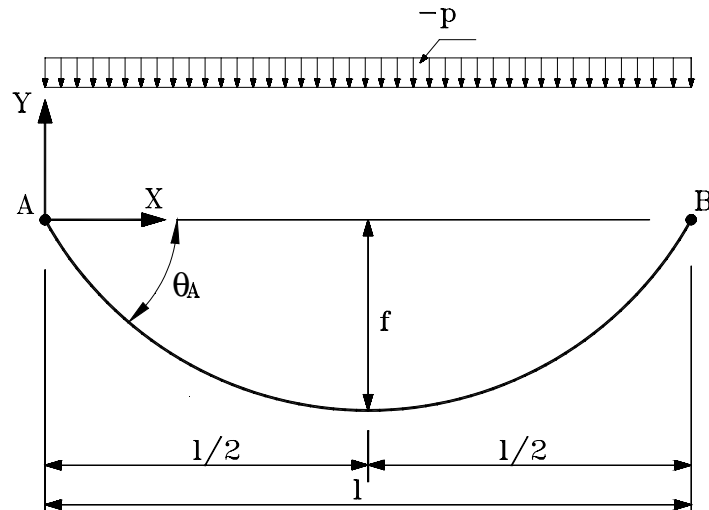


Figura 2.2 - Cabo suspenso com apoios nivelados e carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão

Onde θ_A é a inclinação do cabo no ponto A e f é a flecha no meio do vão.

Considere-se o diagrama de corpo livre do elemento de cabo, representado na Fig. 2.3.

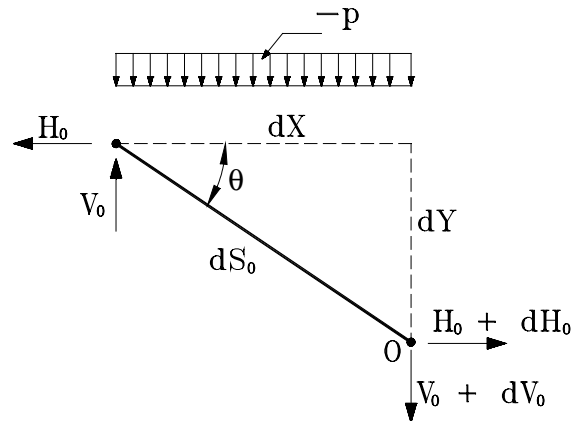


Figura 2.3 - Elemento de cabo com carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão.

Onde dx e dy são os comprimentos infinitesimais nas direções x e y , dS_0 é o comprimento infinitesimal do elemento de cabo, H_0 e $H_0 + dH_0$ são as forças horizontais nas extremidades do elemento de cabo, $V_0 + dV_0$ são as forças verticais nas extremidades do elemento de cabo e θ é o ângulo de inclinação do elemento de cabo.

As condições de equilíbrio aplicadas ao referido elemento, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_o = 0$, permitem escrever:

$$\begin{cases} dH_0 = 0 & \therefore H_0 = \text{Constante} \\ dV_0 = p dx \\ H_0 dy = V_0 dx \end{cases} \quad (2.1)$$

Tendo-se em vista que H_0 é constante, obtém-se com auxílio das Eqs. (2.1) a equação diferencial de equilíbrio:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{H_0} \quad (2.2)$$

que integrada duas vezes fornece:

$$y' = \frac{p}{H_0} x + C_1 \quad (2.3)$$

$$y = \frac{p}{2H_0} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (2.4)$$

Das condições de contorno da Fig. 2.1, tem-se que $y' = 0$ para $x = l/2$ e $y = 0$ para $x = 0$, que levando nas Eqs. (2.3) e (2.4), obtém-se:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{pl}{2H_0} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Introduzindo-se as constantes C_1 e C_2 nas Eqs. (2.3) e (2.4), obtém-se a equação da tangente à curva do cabo:

$$y' = \frac{p}{H_0} x - \frac{pl}{2H_0} \quad (2.6)$$

e a equação da parábola que define a configuração de equilíbrio do cabo:

$$y = \frac{p}{2H_0} x^2 - \frac{pl}{2H_0} x \quad (2.7)$$

- **Força horizontal H_0 :**

Conhecendo-se a flecha f para $x=l/2$, da Eq. (2.7) encontra-se H_0 que é dado por:

$$H_0 = -\frac{pl^2}{8f} \quad (2.8)$$

- **Comprimento do cabo S_0 :**

Da Fig. 2.3 tem-se que $ds_0^2 = dx^2 + dy^2$, de onde se demonstra que:

$$ds_0 = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (2.9)$$

Integrando-se a Eq.(2.9), com o auxílio da Eq.(2.6), obtém-se o comprimento do cabo:

$$S_0 = \frac{H_0}{2p} \left[\frac{pl}{H_0} \sqrt{1 + \left(\frac{pl}{2H_0} \right)^2} + 2 \sinh^{-1} \left(\frac{pl}{2H_0} \right) \right] \quad (2.10)$$

- **Força de tração no cabo T :**

Considerando a Fig. 2.4 e sendo H_0 constante, tem-se que:

$$T = \frac{H_0}{\cos \theta} \quad (2.11)$$

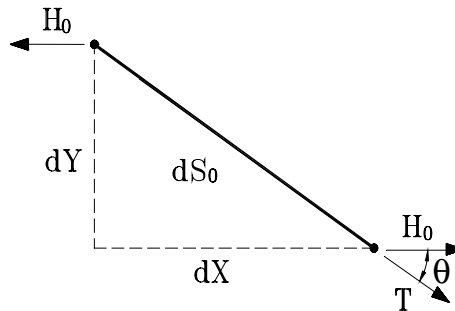


Figura 2.4 – Tração no elemento de cabo

Sendo $\cos \theta = \frac{dx}{ds_0}$ e com o auxílio da Eq. (2.9) chega-se à força de tração no

cabo, que é variável ao longo do vão:

$$T = H_0 \sqrt{1 + (y')^2} \quad (2.12)$$

Desenvolvendo-se a Eq. (2.12), com o auxílio da Eq. (2.6), chega-se à força de tração no cabo:

$$T = H_0 \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H_0} - \frac{pl}{2H_0} \right)^2} \quad (2.13)$$

2.3.2 Cabo suspenso com apoios desnivelados

Quando o cabo suspenso está com apoios desnivelados, a sua configuração inicial de equilíbrio pode ser determinada analiticamente para vários parâmetros apropriadamente escolhidos. A seguir é apresentado um estudo analítico, para um cabo suspenso AB , com apoios desnivelados (*desnível* h) e carregamento uniforme distribuído $p(x)$ ao longo do vão l , conforme mostrado na Fig. 2.5

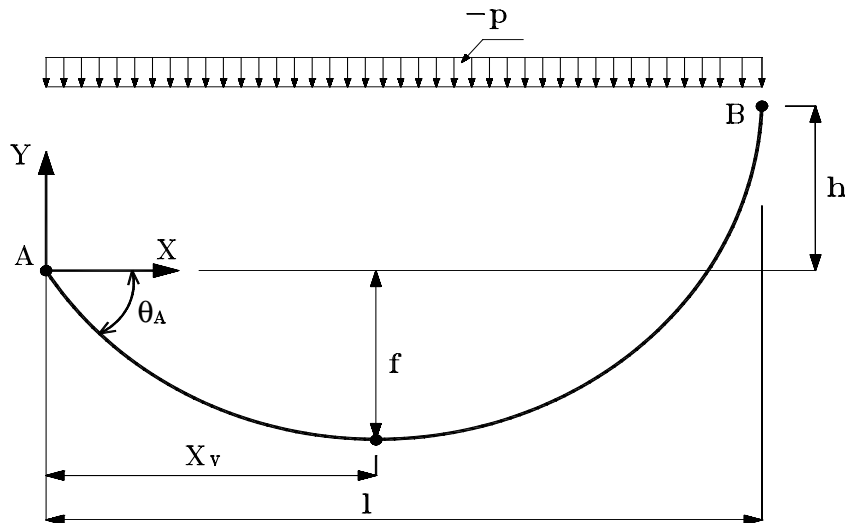


Figura 2.5 - Cabo suspenso com apoios desnivelados e carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu vão

a) Desnível (h) e ângulo (θ_A) conhecidos

Das condições de contorno da Fig. 2.5, tem-se que para $x=0$, $y' = \tan\theta_A$ e $y=0$, que levando-se nas Eqs. (2.3) e (2.4) obtém-se:

$$\begin{cases} C_1 = \tan\theta_A \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Introduzindo-se a constante C_1 na Eq. (2.3), obtém-se a equação da tangente à curva do cabo:

$$y' = \frac{p}{H_0} x + \tan\theta_A \quad (2.15)$$

Introduzindo-se as constantes C_1 e C_2 na Eq. (2.4) e sabendo-se que em $x=l$ para $y=h$, obtém-se a equação da parábola que define a configuração de equilíbrio do cabo desnivelado:

$$y = \left(\frac{h - l \tan\theta_A}{l^2} \right) x^2 + \tan\theta_A x \quad (2.16)$$

• **Força horizontal H_0 :**

Da Eq. (2.4) e sabendo-se que para $x=0$, $y=0$ e $y' = \tan\theta_A$ e para $x=l$, $y=h$, obtém-se H_0 que é dado por:

$$H_0 = \frac{pl^2}{2h - 2l \tan\theta_A} \quad (2.17)$$

• **Comprimento do cabo S_0 :**

Conhecendo-se a força horizontal H_0 dada pela Eq. (2.17) e integrando-se a Eq. (2.9) com o auxílio da Eq. (2.15), obtém-se o comprimento do cabo desnivelado:

$$\begin{aligned} S_0 = & \frac{H_0}{2p} \left[\left(\frac{pl}{H_0} + \tan\theta_A \right) \sqrt{1 + \left(\frac{pl}{H_0} + \tan\theta_A \right)^2} - \tan\theta_A \sec\theta_A \right] + \\ & + \frac{H_0}{2p} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{pl}{H_0} + \tan\theta_A \right) - \sinh^{-1}(\tan\theta_A) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

• **Força de tração no cabo T :**

Das Eqs. (2.11) e (2.15) obtém-se a força de tração no cabo desnivelado:

$$T = H_0 \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H_0} + \tan\theta_A \right)^2} \quad (2.19)$$

b) Desnível (h) e abscissa do vértice (x_v) conhecidos

Das condições de contorno da Fig. 2.5, temos que $y' = 0$ para $x = x_v$ e $y = h$ para $x = l$. Da Eq. (2.15) obtém-se:

$$\tan \theta_A = \frac{-px_v}{H_0} \quad (2.20)$$

que levando-se nas Eqs. (2.15) e (2.16), obtém-se as equações da tangente e da curva parabólica que define a configuração de equilíbrio do cabo, dadas respectivamente por:

$$y' = \frac{p}{H_0} (x - x_v) \quad (2.21)$$

$$y = \frac{h}{(l^2 - 2lx_v)} (x^2 - 2x_v x) \quad (2.22)$$

• ***Força horizontal H_0 :***

Das Eqs. (2.17) e (2.20) encontra-se H_0 que é dado por:

$$H_0 = \frac{p}{2h} (l^2 - 2lx_v) \quad (2.23)$$

• ***Comprimento do cabo S_0 :***

Conhecendo-se a força horizontal H_0 dado pela Eq. (2.23) e integrando-se a Eq. (2.9) com o auxílio da Eq. (2.21), obtém-se o comprimento do cabo:

$$\begin{aligned} S_0 = & \frac{H_0}{2p} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{p(l - x_v)}{H_0} \right) - \sinh^{-1} \left(-\frac{px_v}{H_0} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[(l - x_v) \sqrt{1 + \frac{p^2(l - x_v)^2}{H_0^2}} + x_v \sqrt{1 + \frac{p^2 x_v^2}{H_0^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

- **Força de tração no cabo T :**

Das Eqs. (2.12) e (2.21) obtém-se a força de tração no cabo:

$$T = H_0 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{H_0} (x - x_v) \right)^2} \quad (2.25)$$

- c) **Desnível (h) e flecha do vértice (f) conhecidos**

Das condições de contorno da Fig. 2.5 sabe-se que $C_1 = \tan\theta_A$ e $C_2 = 0$. Sendo $y = f$ para $x = x_v$, das Eqs. (2.4) e (2.17) obtém-se para a parábola com vértice entre os apoios o valor de θ_A dado por:

$$\tan\theta_A = \frac{2f}{l} \left[1 + \sqrt{1 - (h/f)} \right] \quad (2.26)$$

que levando-se nas Eqs. (2.15) e (2.16), obtém-se as equações da tangente e da curva parabólica que define a configuração de equilíbrio do cabo, dadas respectivamente por:

$$y' = \frac{p}{H_0} x + \left[\frac{2f}{l} (1 + \sqrt{1 - (h/f)}) \right] \quad (2.27)$$

$$y = \left[\frac{h - 2f(1 + \sqrt{1 - (h/f)})}{l^2} \right] x^2 + \left[\frac{2f(1 + \sqrt{1 - (h/f)})}{l} \right] x \quad (2.28)$$

- **Força horizontal H_0 :**

Das Eqs. (2.17) e (2.26) encontra-se H_0 que é dado por:

$$H_0 = - \frac{pl^2}{2f(1 + \sqrt{1 - (h/f)})^2} \quad (2.29)$$

- **Comprimento do cabo S_0 :**

Conhecendo-se a força horizontal H_0 dada pela Eq. (2.28) e integrando-se a Eq. (2.9) com o auxílio da Eq. (2.27), obtém-se o comprimento do cabo :

$$S_0 = \frac{H_0}{2p} \left[\left(\frac{pl}{H_0} + b \right) \sqrt{1 + \left(\frac{pl}{H_0} + b \right)^2} - b \sqrt{1 + b^2} \right] + \frac{H_0}{2p} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{pl}{H_0} + b \right) - \sinh^{-1}(b) \right] \quad (2.30)$$

$$\text{onde: } b = \frac{2f(1 + \sqrt{1 - (h/f)})}{l}$$

• **Força de tração no cabo T :**

Das Eqs. (2.14) e (2.27) obtém-se a força de tração no cabo:

$$T = H_0 \sqrt{1 + \left\{ \frac{p}{H_0} x + \left[\frac{2f}{l} (1 + \sqrt{1 - (h/f)}) \right] \right\}^2} \quad (2.31)$$

2.4 Cabos com Carga Uniformemente Distribuída ao Longo do Comprimento(Catenária)

Quando o peso próprio do cabo se torna importante na análise de forças, estuda-se o caso do cabo com uma carga uniformemente distribuída ao longo do seu comprimento. Como exemplo de aplicação, pode-se citar o caso das linhas de transmissão. O objetivo a seguir é obter as equações de equilíbrio de um cabo, submetido a um carregamento distribuído ao longo do seu comprimento, considerando-se as condições de apoio nivelados e desnivelados, visando mostrar que na sua configuração de equilíbrio, ele assume uma configuração de catenária.

2.4.1 Cabo suspenso com apoios nivelados

Considere-se o cabo AB mostrado na Fig. 2.6, com apoios nivelados, sujeito ao seu peso próprio $g(x)$, onde θ_A é a inclinação do cabo no ponto A e f é a flecha no meio do vão.

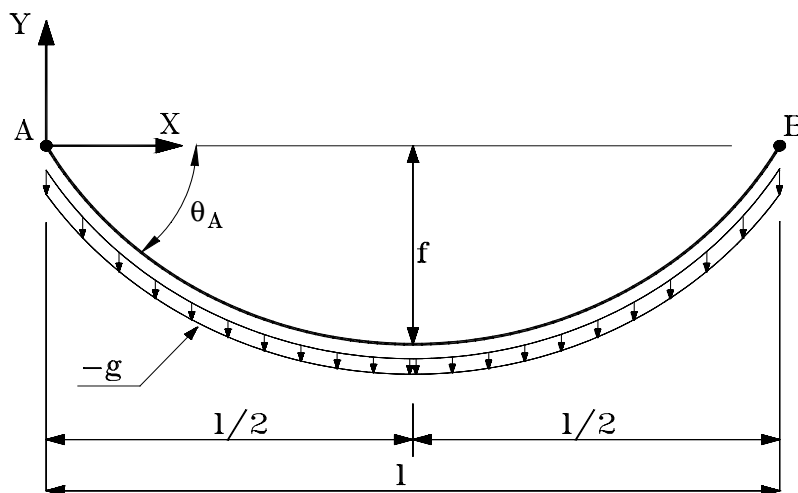


Figura 2.6 - Cabo suspenso com apoios nivelados com carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento

Considere-se o diagrama de corpo livre do elemento de cabo da Fig. 2.7.

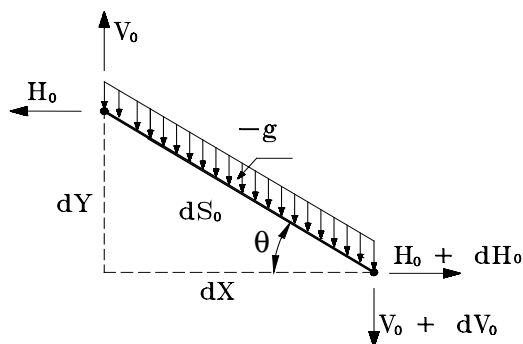


Figura 2.7 - Elemento de cabo com carregamento uniformemente distribuído ao longo de seu comprimento

Onde dx e dy são os comprimentos infinitesimais nas direções x e y , dS_0 é o comprimento infinitesimal do elemento de cabo, H_0 e $H_0 + dH_0$ são as forças horizontais nas extremidades do elemento de cabo, $V_0 + dV_0$ são as forças verticais nas extremidades do elemento de cabo e θ é o ângulo de inclinação do elemento de cabo.

As condições de equilíbrio aplicadas ao referido elemento, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_0 = 0$, permitem escrever:

$$\begin{cases} dH_0 = 0 & \therefore H_0 = \text{Constante} \\ dV_0 = g dS_0 \\ H_0 dy = V_0 dx \end{cases} \quad (2.32)$$

Tendo-se em vista que H_0 é constante, obtém-se com o auxílio das Eqs. (2.32) a equação diferencial de equilíbrio:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{H_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.33)$$

que integrada duas vezes fornece:

$$y' = \sinh\left(\frac{gx}{H_0} + C_1\right) \quad (2.34)$$

$$y = \frac{H_0}{g} \cosh\left(\frac{gx}{H_0} + C_1\right) + C_2 \quad (2.35)$$

Das condições de contorno da Fig. 2.6, tem-se que $y'=0$ para $x=l/2$ e $y=0$ para $x=0$, que levando-se nas Eqs. (2.34) e (2.35), obtém-se:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{gl}{2H_0} \\ C_2 = -\frac{H_0}{g} \cosh\left(\frac{gl}{2H_0}\right) \end{cases} \quad (2.36)$$

Introduzindo-se as constantes C_1 e C_2 nas Eqs. (2.34) e (2.35), obtém-se a equação da tangente à curva do cabo:

$$y' = \sinh\left[\frac{g}{2H_0}(2x - l)\right] \quad (2.37)$$

e a equação da catenária que define a configuração de equilíbrio do cabo:

$$y = \frac{H_0}{g} \left[\cosh\left(\frac{g}{H_0}x - \frac{gl}{2H_0}\right) - \cosh\left(\frac{gl}{2H_0}\right) \right] \quad (2.38)$$

• **Força horizontal H_0 :**

Conhecendo-se a flecha f em $x=l/2$, da Eq. (2.38) encontra-se, por tentativas, o valor de H_0 que vem de:

$$f = \frac{H_0}{g} \left[1 - \cosh \left(\frac{gl}{2H_0} \right) \right] \quad (2.39)$$

• **Comprimento do cabo S_0 :**

Conhecendo-se a força horizontal H_0 que vem da Eq. (2.39) e integrando-se a equação $ds_0 = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ com auxílio da Eq. (2.37), obtém-se o comprimento do cabo :

$$S_0 = \frac{2H_0}{g} \sinh \left(\frac{gl}{2H_0} \right) \quad (2.40)$$

• **Força de tração no cabo T :**

Desenvolvendo-se a equação $T = H_0 \sqrt{1 + (y')^2}$ com o auxílio da Eq. (2.37) chega-se finalmente à força de tração no cabo:

$$T = H_0 \sqrt{1 + (y')^2} = H_0 \cosh \left[\frac{g}{2H_0} (2x - l) \right] \quad (2.41)$$

2.4.2 Cabo suspenso com apoios desnivelados

Analogamente ao item 2.3.2, é apresentado um estudo analítico para um cabo suspenso, com apoios desnivelados (*desnível h*) e carregamento uniforme distribuído $g(x)$ ao longo do comprimento conforme visto na Fig. 2.8.

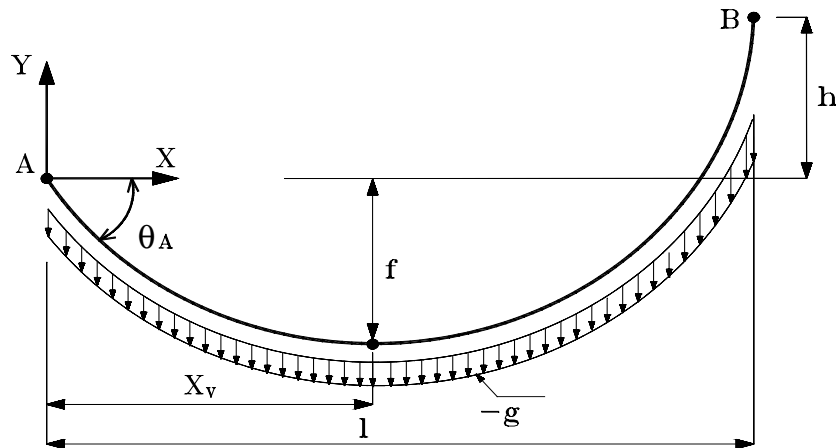


Figura. 2.8 - Cabo suspenso com apoios desnivelados com carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento

a) Desnível (h) e ângulo (θ_A) conhecidos

Das condições de contorno da Fig. 2.8, tem-se que para $x=0$, $y'=\tan\theta_A$ e $y=0$ que levando-se nas Eqs. (2.34) e (2.35), obtém-se:

$$\begin{cases} C_1 = \sinh^{-1}(\tan\theta_A) \\ C_2 = -\frac{H_0}{g} \cosh[\sinh^{-1}(\tan\theta_A)] \end{cases} \quad (2.42)$$

Introduzindo-se a constante C_1 na Eq. (2.34), obtém-se a equação da tangente à curva do cabo:

$$y' = \sinh\left[\frac{gx}{H_0} + \sinh^{-1}(\tan\theta_A)\right] \quad (2.43)$$

Introduzindo-se as constantes C_1 e C_2 na Eq. (2.35), obtém-se a equação da catenária que define a configuração de equilíbrio do cabo:

$$y = \frac{H_0}{g} \left\{ \cosh\left[\frac{g}{H_0}x + \sinh^{-1}(\tan\theta_A)\right] - \cosh[\sinh^{-1}(\tan\theta_A)] \right\} \quad (2.44)$$

• **Força horizontal H_0 :**

Sabendo-se que em $x=l$, $y=h$, da Eq. (2.44) encontra-se por tentativas o valor de H_0 :

$$h = \frac{H_0}{g} \left\{ \cosh\left[\frac{g}{H_0}l + \sinh^{-1}(\tan\theta_A)\right] - \cosh[\sinh^{-1}(\tan\theta_A)] \right\} \quad (2.45)$$

• **Comprimento do cabo S_0 :**

Conhecendo-se a força horizontal H_0 e integrando a Eq. (2.9) com o auxílio da Eq. (2.43), obtém-se o comprimento do cabo:

$$S_0 = \frac{H_0}{g} \left\{ \sinh\left[\frac{gl}{H_0} + \sinh^{-1}(\tan\theta_A)\right] - \tan\theta_A \right\} \quad (2.46)$$

• **Força de tração no cabo T :**

Das Eqs. (2.12) e (2.43) obtém-se a força de tração no cabo:

$$T = H_0 \cosh \left[\frac{gx}{H_0} + \sinh^{-1}(\tan \theta_A) \right] \quad (2.47)$$

b) Desnível (h) e abscissa do vértice (x_v) conhecidos

Sabendo-se que $y' = 0$ para $x = x_v$, da Eq. (2.43) obtém-se:

$$\sinh^{-1}(\tan \theta_A) = \frac{-gx_v}{H_0} \quad (2.48)$$

que levando-se nas Eqs. (2.43) e (2.44), obtém-se as equações da tangente e da curva catenária que define a configuração de equilíbrio, dadas respectivamente por:

$$y' = \sinh \left[\frac{g}{H_0} (x - x_v) \right] \quad (2.49)$$

$$y = \frac{H_0}{g} \left\{ \cosh \left[\frac{g}{H_0} (x - x_v) \right] - \cosh \left(\frac{gx_v}{H_0} \right) \right\} \quad (2.50)$$

• ***Força horizontal H_0 :***

Sabendo-se que em $x=l$, $y=h$, da Eq. (2.50) encontra-se, por tentativas, o valor de H_0 que vem de :

$$h = \frac{H_0}{g} \left\{ \cosh \left[\frac{g}{H_0} (l - x_v) \right] - \cosh \left(\frac{gx_v}{H_0} \right) \right\} \quad (2.51)$$

• ***Comprimento do cabo S_0 :***

Conhecendo-se a força horizontal H_0 oriunda da Eq. (2.51) e integrando-se a Eq. (2.9) com o auxílio da Eq. (2.49), obtém-se o comprimento do cabo:

$$S_0 = \frac{H_0}{g} \left\{ \sinh \left[\frac{g}{H_0} (l - x_v) \right] + \sinh \left[\frac{gx_v}{H_0} \right] \right\} \quad (2.52)$$

• ***Força de tração no cabo T :***

Das Eqs. (2.11) e (2.49) obtém-se a força de tração no cabo:

$$T = H_0 \cosh \left[\frac{g}{H_0} (x - x_v) \right] \quad (2.53)$$

c) Desnível (h) e flecha do vértice (f) conhecidos

Sabendo-se que $y = f$ para $x = x_v$, da Eq. (2.50) obtém-se:

$$\cosh\left(\frac{gx_v}{H_0}\right) = \left(1 - \frac{gf}{H_0}\right) \quad (2.54)$$

$$x_v = \frac{H_0}{g} \cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right) \quad (2.55)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.54) e (2.55) nas Eqs. (2.49) e (2.50), obtém-se as equações da tangente e da curva catenária que define a configuração de equilíbrio do cabo, dadas respectivamente por:

$$y' = \sinh\left[\frac{gx}{H_0} - \cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right)\right] \quad (2.56)$$

$$y = \frac{H_0}{g} \cosh\left[\frac{gx}{H_0} - \cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right)\right] - \frac{H_0}{g} + f \quad (2.57)$$

• **Força horizontal H_0 :**

Sabendo-se que em $x=l$, $y=h$, da Eq. (2.57) encontra-se, por tentativas, o valor de H_0 que vem de:

$$h = \frac{H_0}{g} \cosh\left[\frac{gl}{H_0} - \cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right)\right] - \frac{H_0}{g} + f \quad (2.58)$$

• **Comprimento do cabo S_0 :**

Conhecendo-se a força horizontal H_0 , que vem da Eq.(2.58) e integrando-se a Eq. (2.9) com o auxílio da Eq. (2.56), obtém-se o comprimento do cabo :

$$S_0 = \frac{H_0}{g} \left\{ \sinh\left[\frac{gl}{H_0} - \cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right)\right] + \sinh\left[\cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right)\right] \right\} \quad (2.59)$$

• **Força de tração no cabo T :**

Das Eqs. (2.12) e (2.56) obtém-se a força de tração no cabo:

$$T = H_0 \cosh\left[\frac{gx}{H_0} - \cosh^{-1}\left(1 - \frac{gf}{H_0}\right)\right] \quad (2.60)$$

CAPÍTULO 3

Formulação Numérica

3.1 Introdução

Visando o estudo das estruturas de cabos, é apresentada neste capítulo uma teoria geral para a análise não-linear das mesmas pelo método dos elementos finitos. Esta formulação considera tanto o comportamento não-linear geométrico quanto o físico envolvidos no problema.

A formulação apresentada pretende ser a mais geral possível, permitindo que os nós sofram grandes deslocamentos e os elementos de cabos sofram grandes alongamentos e, além disto, estes elementos podem ser constituídos de material elasto-plástico.

O desenvolvimento teórico apresentado a seguir tem como base os trabalhos de Pimenta [1986a e 1986b], Lavall [1996] e Leite[2000] e é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes dos elementos de cabos no espaço tridimensional.

3.2 Deformações e Tensões

Seja um elemento de cabo onde se designam por V_r , A_r e l_r , o seu volume, a sua área da seção transversal e o seu comprimento, respectivamente, na configuração de referência ou inicial. Por V_c , A_c e l_c são designados o seu volume, a sua área da seção transversal e o seu comprimento, respectivamente, na configuração corrigida ou deformada, no qual atua uma força normal N , conforme a Fig. 3.1, sendo válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} V_r = A_r l_r \\ V_c = A_c l_c \end{cases} \quad (3.1)$$

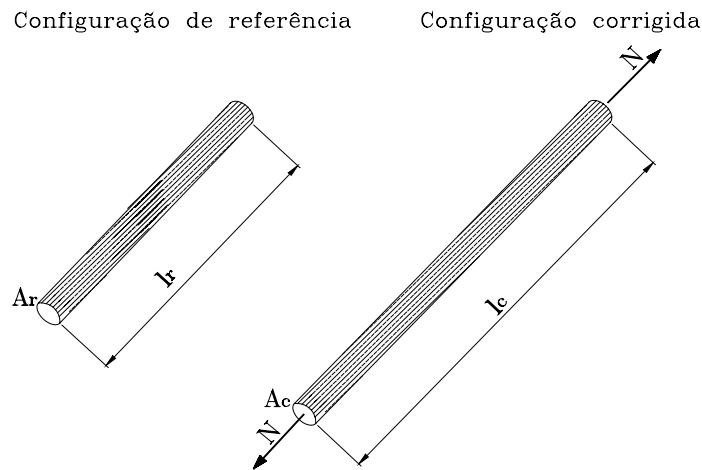


Figura 3.1 - Elemento de cabo nas suas configurações de referência e corrigida.

Uma medida de deformação é definida como qualquer grandeza que compare os comprimentos do elemento nas configurações de referência e corrigida. Uma medida básica de deformação é o estiramento do elemento, dado por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad (3.2)$$

Uma família de medidas de deformação ou família de deformações pode ser definida através de:

$$\epsilon_m = \begin{cases} \frac{(\lambda^{2m} - 1)}{2m} & , m \neq 0 \\ \ln \lambda & , m = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Com a ajuda da Eq. (3.2) e variando-se o valor de m , podem ser explicitados alguns membros desta família. Em particular, neste trabalho será adotada a deformação linear ε para $m=1/2$, sendo designada por deformação linear ou técnica ou de engenharia:

$$\varepsilon_{1/2} = \varepsilon = \lambda - 1 = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \frac{\Delta l}{l_r} \quad (3.4)$$

Tensões e deformações conjugadas são aquelas que ao se integrar o produto da tensão pela taxa de deformação em todo o volume do elemento obtém-se a energia interna total. Uma família de tensões σ_m , conjugada com a família de deformação ε_m dada pela Eq. (3.3), pode ser expressa por:

$$\sigma_m = \lambda^{1-2m} \sigma_N \quad (3.5)$$

onde:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.6)$$

é a tensão nominal ou tensão de engenharia.

Adotando-se $m=1/2$ vem que:

$$\sigma_{1/2} = \sigma_N \quad (3.7)$$

Em uma análise teórica consistente de sólidos e estruturas, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas. Tensões e deformações objetivas são invariantes sob movimentos de corpo rígido, ou seja, nenhuma tensão ou deformação aparece de rotações puras de corpo rígido.

As tensões e deformações de engenharia são objetivas somente se as rotações são infinitesimais. Para problemas geometricamente não-lineares, a estrutura está, de fato, submetida a deformações infinitesimais medidas em relação a um sistema de coordenadas fixo no elemento e submetida a grandes translações e rotações quando medidas em relação a um sistema de coordenadas global fora do elemento.

Para tornar as medidas de engenharia objetivas, emprega-se, então, um sistema de coordenadas fixo ao elemento (sistema corrotacional), no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada.

Neste sistema não são considerados os graus de liberdade de corpo rígido, levando-se em conta apenas os graus de liberdade naturais, associados às deformações, os quais são quantidades objetivas. Para levar em conta os deslocamentos de corpo rígido, necessita-se uma transformação entre os dois sistemas de coordenadas: um que descreve a configuração indeformada (sistema de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano fora do elemento), e o outro que descreve a configuração deformada (sistema de coordenadas corrotacional fixo no elemento).

Adotando-se todos estes procedimentos, as tensões e deformações de engenharia tornam-se um par de medidas de tensão e deformação conjugadas e objetivas. Elas serão utilizadas como referência neste trabalho, sendo designadas por:

$$\begin{cases} \varepsilon_{1/2} = \varepsilon = \lambda - 1 = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \frac{\Delta l}{l_r} \\ \sigma_{1/2} = \sigma = \sigma_N = \frac{N}{A_r} \end{cases} \quad (3.8)$$

3.3 Relações Constitutivas

Seja a relação entre tensão e deformação expressa por:

$$\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m) \quad (3.9)$$

O módulo de rigidez tangente do material do elemento é introduzido através do coeficiente angular da curva $\sigma_m \times \varepsilon_m$ dado por:

$$D_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.10)$$

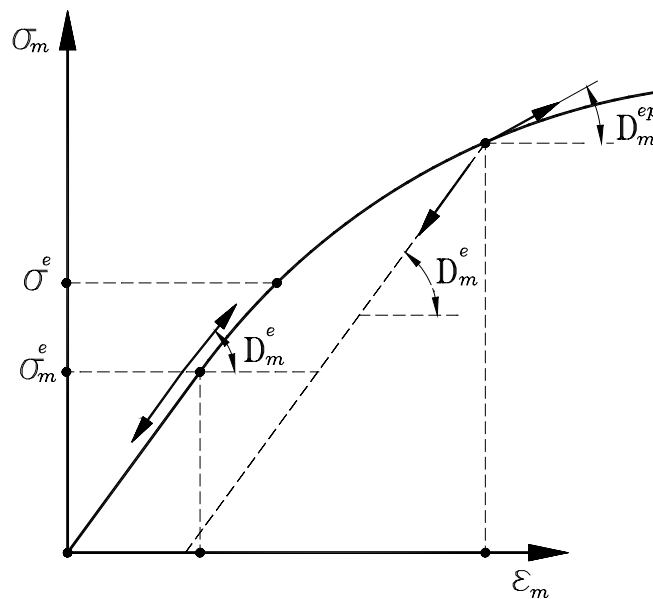
Com o auxílio das Eqs. (3.3) e (3.5) chega-se a uma família de módulos de rigidez:

$$D_m = \lambda^{2-4m}D + (1-2m)\lambda^{1-4m}\sigma_N \quad (3.11)$$

Onde fazendo-se $m=1/2$, tem-se que:

$$D = D_{1/2} \quad (3.12)$$

Considere-se a Fig. (3.2), onde é mostrada a relação tensão-deformação expressa por $\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m)$, do comportamento elasto-plástico de um elemento de cabo. Diz-se que o mesmo está em regime elástico se D_m é único, sendo denotado por D_m^e , tanto em carga quanto em descarga. Se o elemento estiver em regime elasto-plástico, D_m pode ter dois valores : D_m^e para o descarregamento elástico ou D_m^{ep}



para o carregamento elasto-plástico.

Figura 3.2 - Comportamento elasto-plástico de um elemento de cabo.

Ao se analisar um elemento em regime elasto-plástico distinguem-se, conforme mostrado na Fig. 3.2, duas regiões: uma elástica, onde σ_m é menor do que σ_e ,

sendo σ_e a tensão inicial de escoamento do material e uma região elasto-plástica, onde σ_m é maior do que σ_e , de tal forma que:

- Se $(\sigma_m - \sigma_e) < 0$, o elemento está na fase elástica e $D_m = D_m^e = d\sigma_m/d\varepsilon_m$, tanto em carga quanto em descarga.
- Se $(\sigma_m - \sigma_e) > 0$, o elemento se encontra na fase plástica e $D_m = D_m^e$, se ele estiver em descarga, ou seja, $\dot{\varepsilon}_m \varepsilon_m < 0$ ou $D_m = D_m^{ep}$ se estiver em carga, ou seja, $\dot{\varepsilon}_m \varepsilon_m > 0$.

3.4 Sistema de Coordenadas - Graus de Liberdade

3.4.1 Considerações iniciais

Num desenvolvimento teórico baseado em uma rigorosa formulação Lagrangiana, o sistema de referência global da estrutura escolhido neste trabalho foi o sistema de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano. Porém, conforme já mencionado anteriormente, as tensões e deformações de engenharia adotadas como referência neste trabalho, são energeticamente conjugadas mas não são objetivas neste sistema.

Para torná-las objetivas, escolhe-se inicialmente um sistema local de coordenadas corrotacional, diferente do sistema global de referência, que está ligado ao elemento, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Trata-se, portanto de um sistema de referência móvel que acompanha a estrutura deformada. Neste sistema os graus de liberdade de corpo rígido não são considerados, levando-se em conta apenas os graus de liberdade naturais, que são quantidades objetivas. Escreve-se, então, as funções de interpolação para os deslocamentos locais do elemento em função destes graus de liberdade e obtém-se as deformações de engenharia objetivas aplicando-se as relações deformação-deslocamento da elasticidade linear neste campo de deslocamento.

Além disso, a obtenção das matrizes de rigidez do problema é facilitada, uma vez que se trabalha com um número reduzido de graus de liberdade.

Uma transformação de coordenadas muda do sistema corrotacional local para o sistema Lagrangiano ou Cartesiano local, levando-se em conta os deslocamentos de corpo rígido. Finalmente, uma rotação de eixos coloca este último sistema paralelo ao sistema global de referência.

3.4.2 Definição dos sistemas de coordenadas e graus de liberdade

Seja uma estrutura de cabo formado por elementos supostamente retos em sua configuração de referência ou inicial. Suponha-se que este cabo esteja contido em um espaço tri-dimensional de coordenadas cartesianas x, y, z , definindo o sistema global de referência. Os nós do cabo possuem três graus de liberdade: os deslocamentos u, v e w ao longo dos eixos x, y e z respectivamente (Fig. 3.3).

Observe-se agora um elemento qualquer de cabo em sua configuração de referência, cujo comprimento medido entre os seus nós de extremidade, a e b , é l_r . Sobre este elemento introduz-se um sistema de coordenadas local, corrotacional (x_r, y_r, z_r) , com origem no seu centro. Os ângulos formados entre os eixos de referência global x, y, z e o eixo do elemento são respectivamente $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$, conforme é mostrado na Fig. 3.3.

Para um determinado nível de carregamento este elemento está deformado e encontra-se em uma posição atualizada ou corrigida. Nesta configuração o comprimento entre os seus nós de extremidade é l_c . Sobre este elemento introduz-se um sistema de coordenadas corrotacional (x_c, y_c, z_c) , com origem no seu centro.

Os ângulos formados entre os eixos de referência global x, y, z e o eixo do elemento são respectivamente $\alpha_c, \beta_c, \gamma_c$, conforme é mostrado na Fig. 3.3.

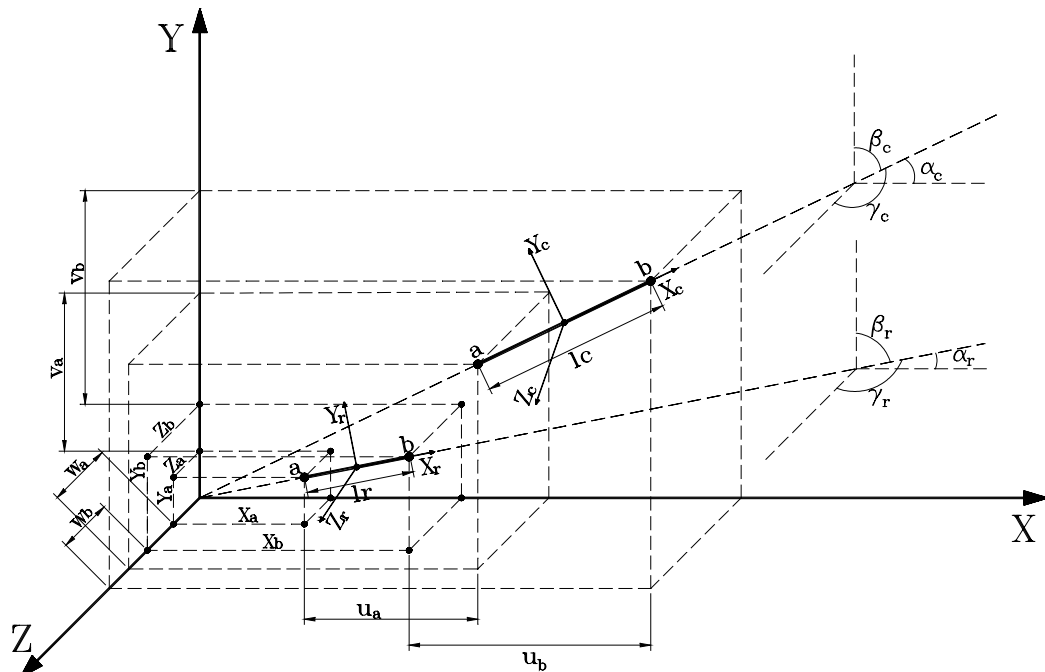


Figura 3.3 - Elemento de cabo em suas configurações de referência e corrigida segundo sistemas globais e locais de referência.

Desta forma o estiramento do elemento e sua deformação linear ou de engenharia são dados, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{l_c}{l_r} \\ \varepsilon = \lambda - 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Os graus de liberdade a ser adotados são aqueles referentes ao sistema corrotacional, que são quantidades objetivas e são denominados graus de liberdade naturais ou corrotacionais. Estes graus de liberdade podem ser colecionados num vetor $\mathbf{q}_\alpha$ (1×1), onde $\alpha=1$ e é definido por:

$$\mathbf{q}_\alpha^T = \{q_1\} \quad (3.14)$$

onde q_1 mede a variação de comprimento do elemento e é dado por:

$$q_1 = l_c - l_r \quad (3.15)$$

Os graus de liberdade cartesianos p_i ($i = 1, \dots, 6$), são definidos por:

$$\begin{cases} p_1 = u_a & ; p_2 = v_a & ; p_3 = w_a \\ p_4 = u_b & ; p_5 = v_b & ; p_6 = w_b \end{cases} \quad (3.16)$$

e podem ser colecionados no vetor $\mathbf{p}_i$ (6x1), denominado vetor dos deslocamentos nodais do elemento da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_i^T = \{u_a \quad v_a \quad w_a \quad u_b \quad v_b \quad w_b\} \quad (3.17)$$

Sendo x_a, x_b, y_a, y_b, z_a e z_b as coordenadas nodais dos elementos na configuração de referência, tem-se:

$$\begin{cases} l_c = [(x_b - x_a + p_4 - p_1)^2 + (y_b - y_a + p_5 - p_2)^2 + (z_b - z_a + p_6 - p_3)^2]^{1/2} \\ l_r = [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2]^{1/2} \\ \alpha_r = \arccos\left(\frac{x_b - x_a}{l_r}\right), \quad \beta_r = \arccos\left(\frac{y_b - y_a}{l_r}\right), \quad \gamma_r = \arccos\left(\frac{z_b - z_a}{l_r}\right) \\ \alpha_c = \arccos\left(\frac{x_b - x_a + p_4 - p_1}{l_c}\right), \quad \beta_c = \arccos\left(\frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{l_c}\right), \\ \gamma_c = \arccos\left(\frac{z_b - z_a + p_6 - p_3}{l_c}\right) \end{cases} \quad (3.18)$$

As derivadas das coordenadas locais corrotacionais q_α em relação às coordenadas globais cartesianas p_i , ou seja, $\partial q_\alpha / \partial p_i$ escritas na forma indicial $q_{\alpha i}$, onde $\alpha=1$ e $i=1,2,\dots,6$, podem ser escritas numa matriz $\mathbf{B}$ (1x6) da seguinte forma:

$$q_{\alpha i} = \mathbf{B} = [-\cos\alpha_c - \cos\beta_c - \cos\gamma_c \quad \cos\alpha_c \quad \cos\beta_c \quad \cos\gamma_c] \quad (3.19)$$

onde a matriz $\mathbf{B}$ é rigorosamente uma matriz de “mudança de coordenadas instantânea” e relaciona as variações dos deslocamentos nas coordenadas locais corrotacionais com as variações dos deslocamentos nas coordenadas globais cartesianas. As derivadas segundas de q_α em relação a p_i , isto é, $\partial^2 q_\alpha / \partial p_i \partial p_j$ que envolvem apenas geometria e estarão presentes numa parcela da matriz de

rigidez geométrica (teoria de segunda ordem) são dadas em um vetor $\mathbf{G}_\alpha$ (6x6) por:

$$q_{\alpha ij} = G_{\alpha} = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\sin^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & \sin^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & -\sin^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & \sin^2 \gamma_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c & -\sin^2 \gamma_c \\ & & & \sin^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & & & & \sin^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c \\ \text{simétrica} & & & & & \sin^2 \gamma_c \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

3.5 Teoria Estrutural

A teoria estrutural a ser desenvolvida neste trabalho segue a hipótese cinemática atribuída a Bernoulli-Euler, segundo a qual:

“As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após a deformação”.

Por esta hipótese, a teoria estrutural utilizada despreza o empenamento das seções transversais e o efeito da deformação transversal ou de Poisson e, neste caso, as deformações segundo os eixos y e z e o coeficiente de Poisson são nulos ($\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu = 0$). Sendo assim, a única deformação relevante é a deformação longitudinal ε_{xx} .

3.6 Cinemática do Elemento

3.6.1 Campo de deformação

As Eqs. (3.13) mostram que o estiramento de um elemento de cabo no sistema local, assim como a sua deformação linear ou de engenharia são dados, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{l_c}{l_r} \\ \varepsilon = \lambda - 1 \end{cases}$$

onde o índice c indica a configuração atualizada ou corrigida e o índice r indica a configuração inicial ou de referência.

3.6.2 Campo de deslocamento - considerações analíticas

Da hipótese de Bernoulli-Euler adotada neste trabalho, o campo de deslocamento dos pontos do elemento de cabo fica completamente caracterizado se conhecidos os deslocamentos axiais ($\bar{u}$) e transversais ($\bar{v}$ e $\bar{w}$) dos pontos situados sobre seu eixo.

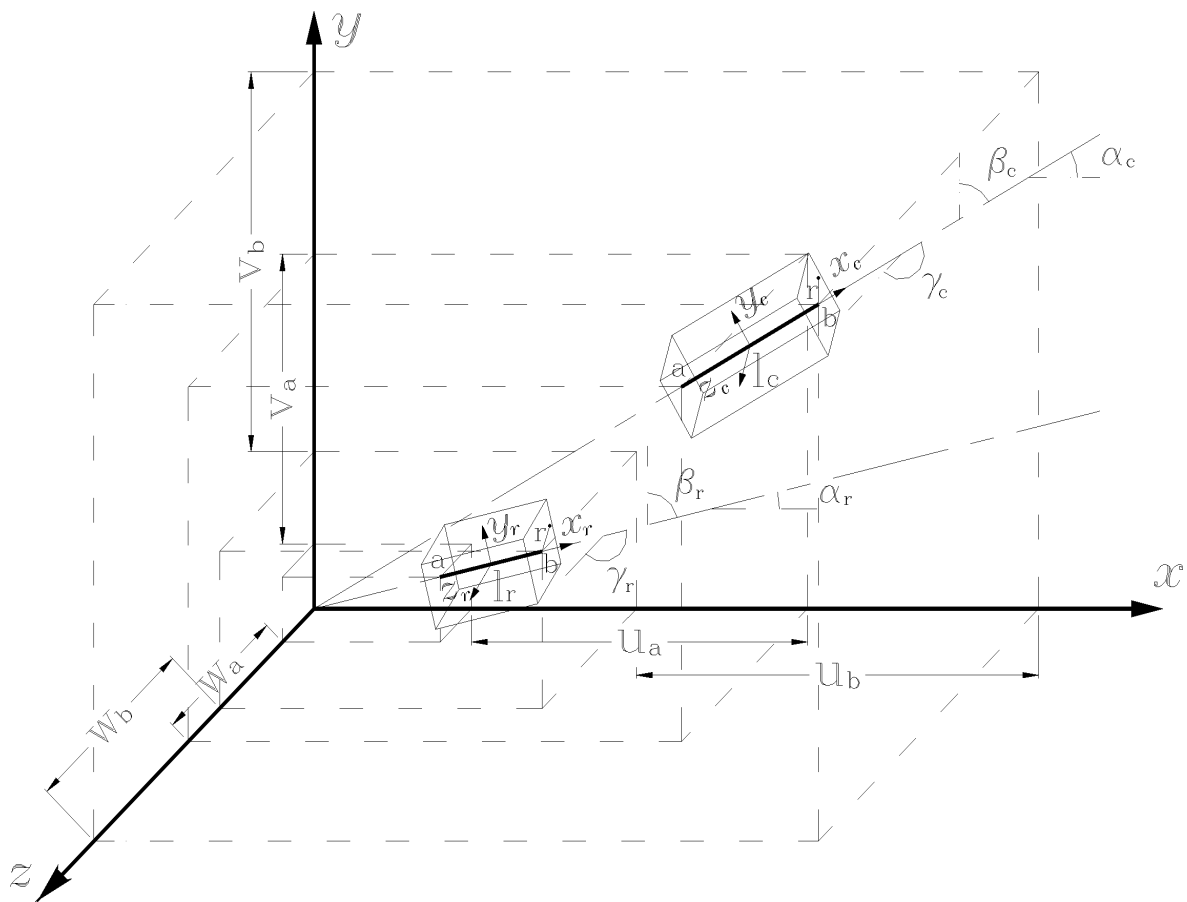


Figura 3.4 - Deslocamentos de um ponto de uma seção genérica em relação ao sistema de eixos cartesianos globais.

Considerando-se então, o ponto P da seção do elemento caracterizado pela distância r relativa ao seu eixo, conforme mostrado na Fig. 3.4, pode-se escrever os seus deslocamentos denotados por u_c , v_c e w_c no sistema corrotacional (x_c , y_c , z_c) por:

$$\begin{cases} u_c(x, y, z) = \bar{u}_c(x) \\ v_c(x, y, z) = \bar{v}_c(x) = 0 \\ w_c(x, y, z) = \bar{w}_c(x) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

onde u_c , v_c e w_c são os deslocamentos longitudinal e transversais do ponto P da seção do elemento, assim como $\bar{u}_c$, $\bar{v}_c$ e $\bar{w}_c$ são estes deslocamentos para os pontos ao longo do seu eixo. Das Figs. 3.3 e 3.4, observa-se que o eixo do elemento de cabo tem o comprimento infinitesimal $d\bar{l}_r$ antes da deformação e $d\bar{l}_c$ após a deformação, dados por:

$$d\bar{l}_r = [dx^2 + dy^2 + dz^2]^{1/2} \quad (3.22)$$

$$d\bar{l}_c = [(dx + d\bar{u}_c)^2 + (dy + d\bar{v}_c)^2 + (dz + d\bar{w}_c)^2]^{1/2} \quad (3.23)$$

Para o sistema corrotacional, temos:

$$dy = 0, dz = 0, d\bar{v}_c = 0 \text{ e } d\bar{w}_c = 0 \quad (3.24)$$

Portanto:

$$d\bar{l}_r = dx \text{ e } d\bar{l}_c = dx + d\bar{u}_c \quad (3.25)$$

O estiramento do eixo do elemento é dado por:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{l}_c}{d\bar{l}_r} \quad (3.26)$$

que com a aplicação das Eqs. (3.25), fornece:

$$\bar{\lambda} = \frac{dx + d\bar{u}_c}{dx} = 1 + \bar{u}'_c \quad (3.27)$$

Considerando-se uma fibra fora do eixo do elemento tem-se, com o auxílio das Eqs. (3.21), (3.25) e (3.26):

$$\lambda = \frac{dl_c}{dl_r} = \frac{dx_r + du_c}{dx_r} = \frac{dx_r + d\bar{u}_c}{dx_r} = \frac{d\bar{l}_c}{d\bar{l}_r} = \bar{\lambda} \quad (3.28)$$

Logo, usando as Eqs. (3.27) e (3.28):

$$\lambda = \bar{\lambda} = 1 + \bar{u}'_c \quad (3.29)$$

A expressão do campo de deformação, já deduzida anteriormente, é dada por $\varepsilon = \lambda - 1$ e portanto:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \bar{u}'_c \quad (3.30)$$

Este será o campo de deformação a ser utilizado neste trabalho. Observa-se na Eq. (3.30), que para a definição do campo de deformação é necessário escolher as funções de interpolação para o deslocamento $\bar{u}_c$ do eixo do elemento de cabo. Esta função de interpolação aproximadora será, então, colocada em função do grau de liberdade natural (objetivo), q_α ($\alpha=1$) e o campo de deformação passará a ser uma função de:

$$\varepsilon = f[q_\alpha(p_i)] \quad (3.31)$$

3.7 Equações de Equilíbrio

3.7.1 Equilíbrio do elemento

Conhecido o campo de deformação, $\varepsilon = f[q_\alpha(p_i)]$, o equilíbrio do elemento pode ser formulado através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) como:

$$\delta w_{int.} = \int_{V_r} \sigma \delta \varepsilon dV_r \quad (3.32)$$

onde V_r é o volume, σ é a tensão normal e $\delta \varepsilon$ a deformação virtual de uma fibra na configuração de referência.

A deformação virtual é dada pela variação de ε , dada pela Eq. (3.31), e é obtida com o emprego da regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_i} \\ \delta \varepsilon &= \varepsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i\end{aligned}\tag{3.33}$$

onde δp_i é o vetor dos deslocamentos nodais virtuais do elemento.

As forças nodais internas P_i são definidas de tal forma que:

$$\delta w_{\text{ext.}} = P_i \delta p_i\tag{3.34}$$

Igualando-se as Eqs. (3.32) e (3.34) com a ajuda da Eq. (3.33) e sabendo-se que $q_{\alpha,i}$ representa uma transformação de coordenadas (sistema Corrotacional para o sistema Cartesiano) que independe do volume de referência, tem-se a equação de equilíbrio do elemento dada por:

$$P_i = \left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i}\tag{3.35}$$

Chamando Q_α de esforços internos nas coordenadas naturais, tem-se:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r\tag{3.36}$$

e a equação de equilíbrio do elemento é dada em notação indicial por:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i}\tag{3.37}$$

Reunindo Q_α e P_i em dois vetores $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{P}$, respectivamente, pode-se escrever a equação de equilíbrio do elemento na forma matricial por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q}\tag{3.38}$$

- **Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano**

Sendo $P = P(\sigma, p)$ e pensando numa formulação incremental do equilíbrio, a derivada ou a variação de cada incremento de P no tempo pode ser dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.39)$$

Chamando, $\frac{\partial P}{\partial p} = k_t$ em notação matricial a Eq. (3.39) pode ser dada por:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}} \quad (3.40)$$

onde $\mathbf{k}_t$ é a matriz de rigidez tangente do elemento nas coordenadas cartesianas.

As componentes k_{ij} da matriz de rigidez tangente são as derivadas de P_i em relação às coordenadas cartesianas p_j . Derivando-se a equação de equilíbrio (3.37) com o auxílio da regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij} \quad (3.41)$$

Da derivada da Eq. (3.36) e com o auxílio da Eq. (3.10), conclui-se que:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} (\varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} + \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta}) dV_r \quad (3.42)$$

onde define-se:

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D \varepsilon_{,\beta} dV_r \quad (3.43)$$

$$H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r \quad (3.44)$$

Levando-se a Eq. (3.42) na Eq. (3.41), com o auxílio das Eqs. (3.43) e (3.44), tem-se:

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{Parcela Objetiva}} + \underbrace{Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\substack{\text{parcela do movimento} \\ \text{de corpo rígido} \\ \text{responsável pelo} \\ \text{efeito } P \cdot \Delta}} \quad (3.45)$$

$$k_{i,j} = \underbrace{q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{Parcela Constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\substack{\text{parcela geométrica} \\ \text{leva em conta os efeitos de segunda ordem}}} \quad (3.46)$$

Escrevendo em notação matricial, a matriz de rigidez constitutiva vem da parcela constitutiva da Eq. (3.46) dada por $k_M = q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}$.

Sendo $q_{\alpha,i} = q_{\beta,j} = \mathbf{B}$ uma matriz (1x6) e $D_{\alpha,\beta} = \mathbf{D}$ uma matriz (1x1), do produto matricial resulta a matriz simétrica (6x6) a seguir:

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.47)$$

A matriz de rigidez geométrica é obtida da parcela geométrica da Eq. (3.46) dada por $k_G = q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij}$ que com o auxílio de $H_{\alpha,\beta} = \mathbf{H}=(3 \times 3)$ e $q_{\alpha,ij} = \mathbf{G}_\alpha=(6 \times 6)$, ambas simétricas, resulta na matriz também simétrica:

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.48)$$

Finalmente, obtém-se a matriz de rigidez tangente na forma a seguir:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_M + \mathbf{k}_G \quad (3.49)$$

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.50)$$

3.7.2 Equilíbrio estrutural

Do estudo anterior concluiu-se que o equilíbrio do elemento é dado na forma indicial ou matricial, respectivamente, por:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P} = \mathbf{B}^T \mathbf{Q}$$

sendo $P = P(\sigma, p)$.

Para escrever o equilíbrio da estrutura, os graus de liberdade cartesianos de um elemento, $\mathbf{p}$, serão relacionados com os graus de liberdade cartesiano da estrutura $\mathbf{r}$ através da seguinte expressão matricial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{r} \quad (3.51)$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz de incidência cinemática, responsável pela compatibilidade dos deslocamentos nodais do elemento p_i , com os deslocamentos nodais da estrutura r_j , composta por 0 e 1. Variando-se a Eq. (3.51), vem que:

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{A} \delta \mathbf{r} \quad (3.52)$$

O trabalho virtual interno da estrutura é dado pelo somatório dos trabalhos virtuais internos dos seus elementos. Assim, com o auxílio da Eq. (3.52), tem-se:

$$\delta W_{int.} = \sum \delta w_i = \sum_1^{ne} \mathbf{P}^T \delta \mathbf{p} = \sum \mathbf{P}^T \mathbf{A} \delta \mathbf{r} = \left(\sum \mathbf{P}^T \mathbf{A} \right) \delta \mathbf{r}$$

Chamando $\mathbf{S} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{P}$ o vetor dos esforços internos da estrutura, obtido somando-se a contribuição de todos os elementos, conclui-se que:

$$\delta W_{int.} = \mathbf{S}^T \delta \mathbf{r} \quad (3.53)$$

Como $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\sigma, \mathbf{p})$ e $\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{r}$, conclui-se que $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\sigma, \mathbf{r})$.

O trabalho virtual externo, supondo-se somente forças externas concentradas aplicadas nos nós da estrutura, representadas pelo vetor $\mathbf{R}$, é dado por:

$$\delta W_{ext.} = \mathbf{R}^T \delta \mathbf{r} \quad (3.54)$$

Fazendo o trabalho virtual interno, Eq.(3.53), igual ao trabalho virtual externo, Eq.(3.54), pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V), temos:

$$\mathbf{R}^T \delta \mathbf{r} = \mathbf{S}^T \delta \mathbf{r} \quad (3.55)$$

e finalmente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} \quad (3.56)$$

que representa a equação do equilíbrio estrutural.

3.7.3 Equações incrementais do equilíbrio

As equações incrementais do equilíbrio da estrutura são obtidas ao se derivar a Eq. (3.56) no tempo:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{S}} \quad (3.57)$$

Da equação $\mathbf{S} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{P}$ vem que:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{P}} \quad (3.58)$$

Levando-se a Eq. (3.40), $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}}$, na Eq. (3.58) obtém-se:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \dot{\mathbf{p}} \quad (3.59)$$

Da Eq. (3.52), onde $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}}$, aplicando a Eq. (3.59) fica:

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.60)$$

Finalmente, pode-se escrever que:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{r}} \quad (3.61)$$

onde :

$$\mathbf{K}_t = \sum \mathbf{A}^T \mathbf{k}_t \mathbf{A} \quad (3.62)$$

é a matriz de rigidez tangente da estrutura, obtida pela contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, através da matriz de incidência cinemática $\mathbf{A}$.

Assim, a equação do equilíbrio incremental da estrutura, Eq. (3.57), $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{S}}$, pode ser escrita da seguinte forma, com o auxílio da Eq. (3.61):

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{r}} \quad (3.63)$$

ou de forma aproximada:

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{r} \quad (3.64)$$

onde ΔR representa os incrementos no carregamento e Δr os incrementos nos deslocamentos nodais.

3.8 Interpolação

Sendo o campo de deformação dado pela Eq. (3.30), $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = \bar{u}'_c$, torna-se necessário definir funções aproximadoras para o deslocamento $\bar{u}_c$ do eixo do elemento de cabo. Estas funções de interpolação para os deslocamentos serão escritas em função do grau de liberdade natural ou objetivo, q_α ($\alpha=1$), obtendo-se finalmente $\varepsilon = f(q_\alpha)$.

Pode-se adotar diversas interpolações para $\bar{u}_c$, ao longo do eixo do elemento de cabo, de modo que elas fiquem explicitadas em função de q_α .

Será adotada uma interpolação linear para os deslocamentos. Escrevendo em função do grau de liberdade natural ou objetivo, tem-se:

$$\bar{u}_c(x_r) = q_1 \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.65)$$

ou

$$\bar{u}_c(x_r) = q_1 \psi_1(x_r) \quad (3.66)$$

onde

$$\psi_1(x_r) = \frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \quad (3.67)$$

Tendo-se em vista a equação $\varepsilon = \bar{u}'_c$, é necessária a derivada de $\bar{u}_c(x_r)$:

$$\bar{u}'_c(x_r) = \frac{q_1}{l_r} \quad (3.68)$$

Levando-se a Eq. (3.68) na equação do campo de deformação $\varepsilon = \bar{u}'_c$, obtém-se finalmente:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} \quad (3.69)$$

Com o objetivo de se calcular Q_α , $D_{\alpha,\beta}$ e $H_{\alpha,\beta}$ conforme as Eqs. (3.36), (3.43) e (3.44), respectivamente, é necessário encontrar a expressão do elemento de volume dV_r :

$$dV_r = dA_r dx_r \quad (3.70)$$

onde A_r é a área da seção transversal do elemento na configuração de referência.

Derivando duas vezes a equação $\varepsilon = \frac{q_1}{l_r}$ em relação a q_α temos:

$$\varepsilon_{,1} = \frac{1}{l_r} \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_{,11} = 0 \quad (3.72)$$

Levando-se a Eq. (3.71) na Eq. (3.36) e com o auxílio da Eq. (3.70) obtém-se:

$$Q_1 = \int_{-\frac{l_r}{2}}^{\frac{l_r}{2}} \left(\frac{N}{l_r} \right) dx_r \quad (3.73)$$

onde

$$N = \int \sigma dA_r \quad (3.74)$$

é a força normal atuante na seção transversal.

Tomando-se a Eq. (3.43) e introduzindo-se a Eq. (3.71) com o auxílio da Eq. (3.70), obtém-se:

$$D_{11} = \int_{-\frac{l_r}{2}}^{\frac{l_r}{2}} \left(\frac{C}{l_r^2} \right) dx_r \quad (3.75)$$

onde o coeficiente de rigidez C , vale:

$$C = \int_{A_r} D dA_r \quad (3.76)$$

Finalmente, levando-se as Eq. (3.72) na Eq. (3.44) com o auxílio das Eq. (3.70) e (3.74), chega-se a:

$$H_{11} = 0 \quad (3.77)$$

As integrais para obtenção de Q_I e D_{II} são feitas na direção x_r e têm como limites de integração $-l_r/2$ e $l_r/2$ e, em geral, são computadas numericamente através, por exemplo, do método de Gauss, com pelo menos dois pontos de integração. As integrais para obtenção de N e C são efetuadas sobre toda a seção.

3.9 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente

1.1.1 Elementos prismáticos em regime elástico linear

Deduz-se a seguir as expressões analíticas para N , C , Q_I , H_{II} e D_{II} , em regime elástico linear.

- **Determinação da Força Normal N**

Sabendo-se que $\sigma = E\varepsilon$ e o campo de deformação é dado por $\varepsilon = \lambda - 1 = \bar{u}'_c = \frac{q_1}{l_r}$,

com o auxílio da Eq. (3.74) tem-se:

$$N = E \varepsilon A_r = E A_r \frac{q_1}{l_r} \quad (3.78)$$

que é constante na seção e ao longo do elemento.

- **Determinação da Força Interna Natural Q_I**

Usando-se a Eq. (3.73) com auxílio da Eq. (3.78), determina-se:

$$Q_I = \int_{-\frac{l_r}{2}}^{+\frac{l_r}{2}} \left(\frac{E \varepsilon A_r}{l_r} \right) dx_r = \frac{E \varepsilon A_r}{l_r} l_r = E \varepsilon A_r = N \quad (3.79)$$

• **Determinação do Elemento da Matriz D_{11}**

Usando a Eq. (3.76) e sabendo-se que $D=E$, tem-se:

$$C = E A_r \quad (3.80)$$

Da Eq. (3.75) temos:

$$D_{11} = \frac{E A_r}{l_r} \quad (3.81)$$

• **Elemento da Matriz H_{11}**

Da Eq. (3.77), temos que $H_{11} = 0$.

• **Matriz de Rigidez Tangente do elemento em Coordenadas Locais Cartesianas no Regime Elástico Linear**

Finalmente, sabendo-se que $\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_M + \mathbf{k}_G$, sendo $\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ e $\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha$, com o auxílio das Eqs. (3.19), (3.20), (3.77) a (3.81), temos que a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas é dada por::

$$\mathbf{k}_t^e = \mathbf{k}_M^e + \mathbf{k}_G^e \quad (3.82)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_M^e = \frac{EA_r}{l_r} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\cos^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & \cos^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & \cos^2 \gamma_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c & -\cos^2 \gamma_c \\ & & & \cos^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & & & & \cos^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & & & & \cos^2 \gamma_c \end{bmatrix}$$

simétrica

(3.83)

e

$$\mathbf{k}_G^e = \frac{N}{l_c} \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\text{sen}^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & \text{sen}^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & -\text{sen}^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & \text{sen}^2 \gamma_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c & -\text{sen}^2 \gamma_c \\ & & & \text{sen}^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & & & & \text{sen}^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & & & & \text{sen}^2 \gamma_c \end{bmatrix}$$

simétrica

(3.84)

3.9.2 Elementos prismáticos em regime elasto-plástico

A seguir obteremos as expressões analíticas para N , C , Q_I , H_{II} e D_{II} , em regime elasto-plástico.

- **Determinação da Força Normal N^{ep}**

Sabendo-se que no caso elasto-plástico a lei constitutiva é dada por $\sigma = D\varepsilon$ e o campo de deformação por $\varepsilon = \lambda - 1 = \bar{u}'_c = \frac{q_1}{l_r}$, com o auxílio das Eqs. (3.74) e

(3.76), tem-se:

$$\begin{aligned}
N^{\text{ep}} &= \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} D\varepsilon dA_r = \varepsilon \int_{A_r} D dA_r \\
N^{\text{ep}} &= \varepsilon C = \frac{q_1}{l_r} C
\end{aligned}$$

(3.85)

que é constante na seção e ao longo do elemento.

- **Determinação da Força Interna Natural Q_I^{ep}**

Usando-se a Eq. (3.73) com auxílio da Eq. (3.85), obtém-se:

$$Q_I^{\text{ep}} = \int_{-\frac{l_r}{2}}^{+\frac{l_r}{2}} \left(\frac{N^{\text{ep}}}{l_r} \right) dx_r = \int_{-\frac{l_r}{2}}^{+\frac{l_r}{2}} \left(C \frac{q_1}{l_r^2} \right) dx_r = C \frac{q_1}{l_r} = N^{\text{ep}}$$

(3.86)

- **Determinação do Elemento da Matriz D_{II}^{ep}**

Da Eq. (3.76), $C = \int_{A_r} D dA_r$, determina-se:

$$C = \int D A_r$$

(3.87)

Levando-se na Eq. (3.75), $D_{11}^{ep} = \int_{-\frac{l_r}{2}}^{\frac{l_r}{2}} \left(\frac{C}{l_r^2} \right) dx_r$, tem-se que:

$$D_{11}^{ep} = \frac{C}{l_r} \quad (3.88)$$

• **Elemento da Matriz H_{11}^{ep}**

Da Eq. (3.77), temos que $H_{11}^{ep} = 0$.

• **Matriz de Rigidez Tangente do elemento em Coordenadas locais Cartesianas no Regime Elasto-Plástico**

Finalmente, de forma análoga ao caso elástico, tem-se que $\mathbf{k}_t^{ep} = \mathbf{k}_M^{ep} + \mathbf{k}_G^{ep}$, sendo $\mathbf{k}_M^{ep} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ e $\mathbf{k}_G^{ep} = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha$, com o auxílio das Eqs. (3.19), (3.20), (3.77), (3.85) a (3.88), temos que a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elasto-plástico, no sistema local em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\mathbf{k}_t^{ep} = \mathbf{k}_M^{ep} + \mathbf{k}_G^{ep} \quad (3.89)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_M^{ep} = \frac{C}{l_r} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\cos^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & \cos^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & \cos^2 \gamma_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c & -\cos^2 \gamma_c \\ & & & \cos^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & & & & \cos^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & & & & \cos^2 \gamma_c \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

simétrica

e

$$\mathbf{k}_G^{ep} = \frac{N}{l_c} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c & -\operatorname{sen}^2 \alpha_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & \operatorname{sen}^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c & \cos \alpha_c \cos \beta_c & -\operatorname{sen}^2 \beta_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & \operatorname{sen}^2 \gamma_c & \cos \alpha_c \cos \gamma_c & \cos \beta_c \cos \gamma_c & -\operatorname{sen}^2 \gamma_c \\ & & & \operatorname{sen}^2 \alpha_c & -\cos \alpha_c \cos \beta_c & -\cos \alpha_c \cos \gamma_c \\ & & & & \operatorname{sen}^2 \beta_c & -\cos \beta_c \cos \gamma_c \\ & & & & & \operatorname{sen}^2 \gamma_c \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

simétrica

CAPÍTULO 4

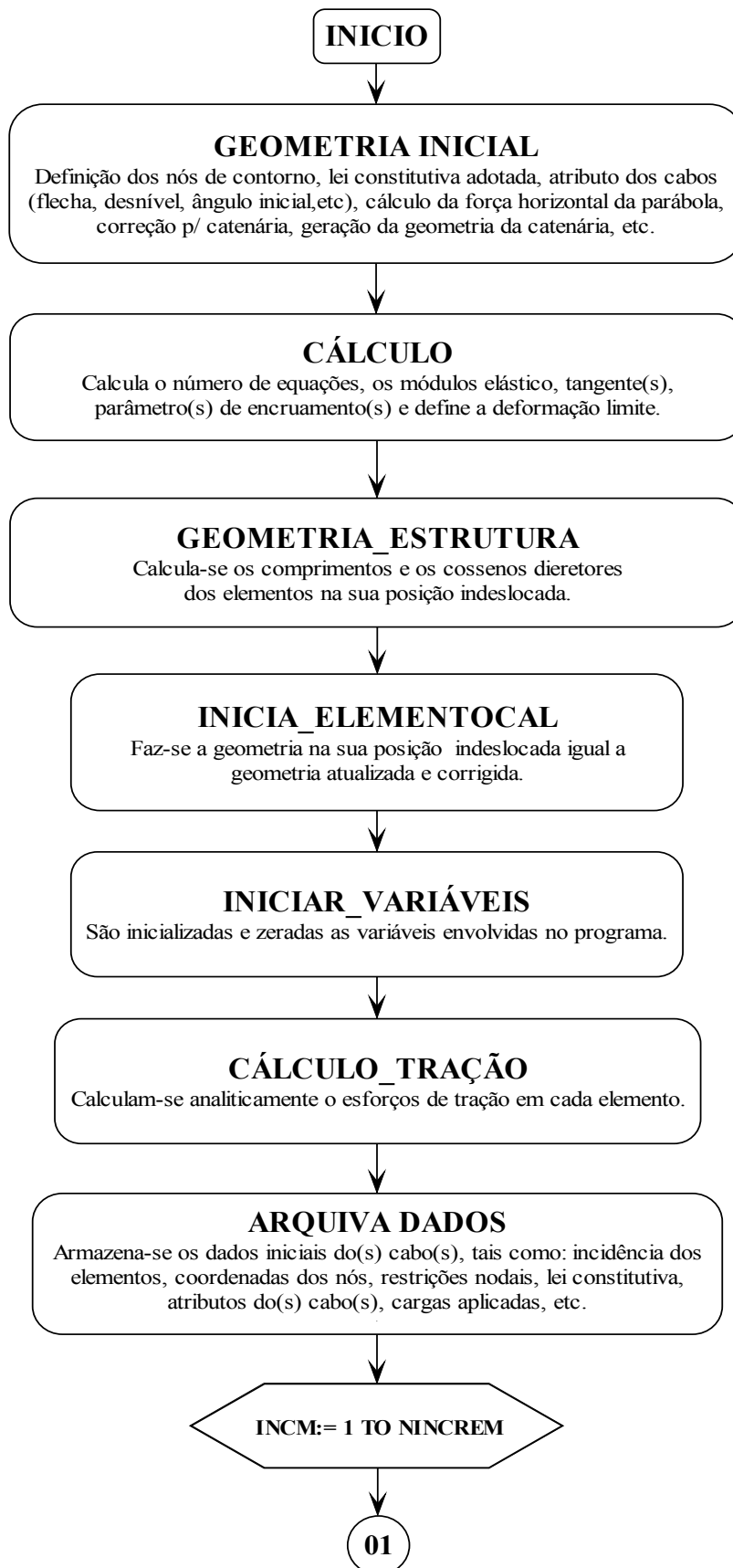
Aspectos da Implementação

4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, descrevem-se os aspectos principais da implementação do programa de computador *Cabos-NLFG*, desenvolvido neste trabalho de pesquisa para a análise não-linear elasto-plástica de cabos, considerando a formulação teórica apresentada no capítulo 3.

Sendo assim, procura-se mostrar a utilização do método de Newton-Rapshon para a solução numérica das equações não-lineares que descrevem o problema, o critério de convergência adotado para verificação do final do processo incremental-iterativo e os modelos constitutivos atribuídos ao material, bem como as aproximações adotadas. Considerações sobre a geração dos elementos de cabos a partir da configuração de equilíbrio inicial adotada, aspectos de sua implementação e uma descrição sucinta das subrotinas do programa desenvolvido são também apresentados.

A Fig. 4.1 mostra o fluxograma do programa *Cabos-NLFG*, adaptado de Owen&Hinton [1980], indicando os passos básicos para se fazer uma análise não-linear de estruturas reticulares, assim como as subrotinas componentes do programa principal.



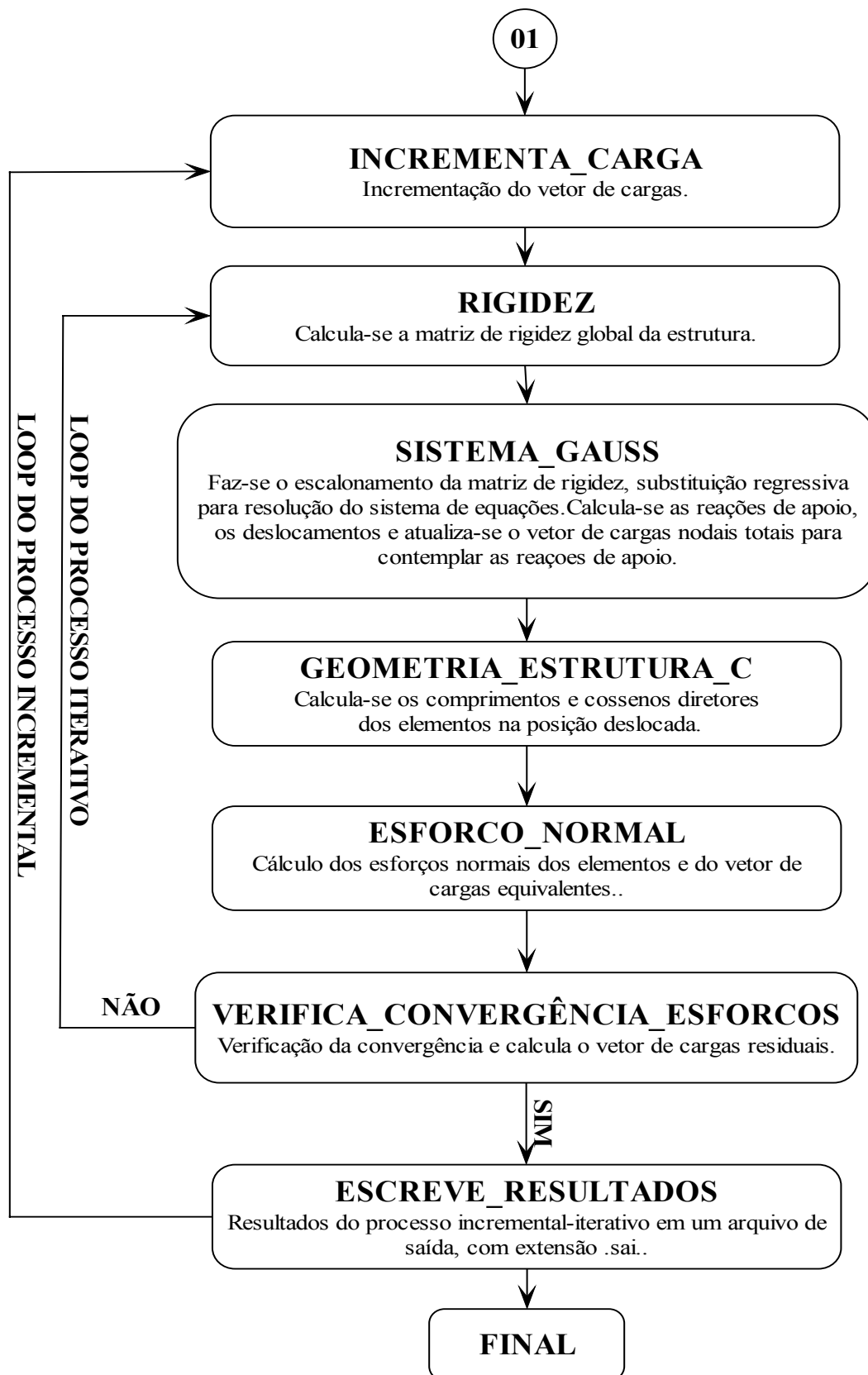


Figura 4.1 – Fluxograma do programa principal

O programa desenvolvido é capaz de fazer a análise considerando as não-linearidades geométrica e física envolvidas no problema, baseado num processo incremental-iterativo, no qual o equilíbrio é verificado para cada iteração segundo um critério de convergência adotado previamente.

O programa foi feito em linguagem de programação PASCAL, de acordo com as padronizações do DELPHI, para analisar somente problemas do tipo cabo suspenso. Nesta versão “não comercial”, o programa admite que todos os nós são rótulas perfeitas e os carregamentos são considerados quase estáticos, monótonos estritamente crescentes e aplicados somente nos nós do cabo.

4.2 Implementação da Configuração Inicial de Equilíbrio do Cabo

A seguir, faz-se um estudo para a obtenção da curva da catenária, função do peso próprio do cabo, a qual foi implementada no programa deste trabalho, para determinar a configuração inicial de equilíbrio do cabo suspenso, possibilitando a a geração automática dos nós e elementos da estrutura.

De acordo com as equações dos itens 2.4.1 e 2.4.2, a determinação da força horizontal da catenária F_{ho} , imprescindível para a obtenção da equação da curva somente se faz por tentativas e/ou de forma incremental.

Desta forma, utilizou-se o método incremental de Newton-Raphson para resolução das equações e determinação da força horizontal F_{ho} , e conseqüentemente, obtenção da curva da catenária.

A solução das equações tem início, a partir da atribuição de um valor da força horizontal inicial F_{ho} , obtida da curva parabólica, que é uma excelente aproximação para o caso da curva da catenária.

Assim sendo, no início do processo incremental temos:

$$F_{h1} = F_{h0} - \frac{f(F_{h0})}{f'(F_{h0})} \quad (4.1)$$

Onde F_{h1} é uma primeira aproximação da força horizontal da curva da catenária, $f(F_{h0})$ é a função resíduo da força horizontal da catenária e $f'(F_{h0})$ a sua derivada. A convergência do processo incremental ocorrerá quando o valor da função resíduo $f(F_{h0})$ tender para zero.

A seguir, é mostrado de forma sucinta, o procedimento implementado no programa, para obtenção da força horizontal e, conseqüentemente, obtenção da curva da catenária, considerando a combinação dos seguintes parâmetros do cabo: desnível h , ângulo θ_A , flecha no vértice f e abscissa do vértice x_v .

a) Desnível (h) e o ângulo (θ_A) conhecidos

Neste caso, o valor da força horizontal inicial F_{h0} obtida da curva parabólica é dada pela Eq.(2.17):

$$F_{h0} = \frac{pl^2}{2h - 2l \tan \theta_A}$$

Da equação da força horizontal da catenária para os mesmos parâmetros acima, Eq.(2.45), obtemos a função resíduo $f(F_{h0})$ dada por:

$$f(F_{h0}) = \frac{F_{h0}}{g} \left\{ \cosh \left[\frac{g}{F_{h0}} l + \sinh^{-1}(\tan \theta_A) \right] - \cosh [\sinh^{-1}(\tan \theta_A)] \right\} - h \quad (4.2)$$

que derivando uma vez obtem-se:

$$f'(F_{h0}) = \frac{1}{g} \left\{ \cosh \left[\frac{g}{F_{h0}} l + \sinh^{-1}(\tan \theta_A) \right] - \cosh [\sinh^{-1}(\tan \theta_A)] \right\} + \frac{L}{F_{h0}} \sinh \left[\frac{gl}{F_{h0}} + \sinh^{-1}(\tan \theta_A) \right] \quad (4.3)$$

b) Desnível (h) e abscissa do vértice (x_v) conhecidos

Neste caso, o valor da força horizontal inicial F_{ho} obtido da curva parabólica é dada pela Eq. (2.23):

$$F_{ho} = \frac{p}{2h} (l^2 - 2lx_v) \quad (4.4)$$

Da equação da força horizontal da catenária para os mesmos parâmetros acima, Eq.(2.51), obtemos a função resíduo $f(F_{ho})$ dada por:

$$f(F_{ho}) = \frac{F_{ho}}{g} \left\{ \cosh \left[\frac{g(l - x_v)}{F_{ho}} \right] - \cosh \left(\frac{gx_v}{F_{ho}} \right) \right\} - h \quad (4.5)$$

que derivando uma vez obtem-se:

$$\begin{aligned} f'(F_{ho}) = & \frac{1}{g} \left\{ \cosh \left[\frac{g(l - x_v)}{F_{ho}} \right] - \cosh \left(\frac{gx_v}{F_{ho}} \right) \right\} + \\ & + \frac{x_v}{F_{ho}} \left\{ \sinh \left[\frac{g(l - x_v)}{F_{ho}} \right] + \sinh \left(\frac{gx_v}{F_{ho}} \right) \right\} - \frac{l}{F_{ho}} \sinh \left[\frac{g(l - x_v)}{F_{ho}} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

c) Desnível (h) e a flecha (f) conhecidos

Analogamente, o valor da força horizontal inicial F_{ho} obtida da curva parabólica é dada pela Eq.(2.29):

$$F_{ho} = - \frac{pl^2}{2f(1 + \sqrt{1 - (h/f)})^2}$$

Da equação da força horizontal da catenária para os mesmos parâmetros acima, Eq. (2.58), obtemos a função $f(F_{ho})$ dada por:

$$f(F_{ho}) = \frac{F_{ho}}{g} \cosh \left[\frac{gl}{F_{ho}} - \cosh^{-1} \left(1 - \frac{gf}{F_{ho}} \right) \right] - \frac{F_{ho}}{g} + f - h \quad (4.7)$$

que derivando uma vez obtem-se:

$$\begin{aligned}
f'(F_{ho}) = & \frac{1}{g} \cosh \left[\frac{gl}{F_{ho}} - \cosh^{-1} \left(1 - \frac{gf}{F_{ho}} \right) \right] + \\
& - \frac{l}{F_{ho}} \sinh \left[\frac{gl}{F_{ho}} - \cosh^{-1} \left(1 - \frac{gf}{F_{ho}} \right) \right] - \frac{f \sinh \left[\frac{gl}{F_{ho}} - \cosh^{-1} \left(1 - \frac{gf}{F_{ho}} \right) \right]}{F_{ho} \sqrt{\left(1 - \frac{gf}{F_{ho}} \right)^2 - 1}} - \frac{1}{g}
\end{aligned} \quad (4.8)$$

4.3 Método de Newton-Raphson

O uso do método dos elementos finitos para análise não-linear de estruturas, geralmente leva ao sistema de equações simultâneas da seguinte forma:

$$\mathbf{kp} + \mathbf{P} = 0 \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{p}$ é o vetor de incógnitas, $\mathbf{P}$ o vetor de cargas aplicadas e $\mathbf{k}$ a matriz de rigidez da estrutura. Se os coeficientes da matriz $\mathbf{k}$ dependem das incógnitas $\mathbf{p}$ ou de suas derivadas, o problema se apresenta de uma forma não-linear e, neste caso, soluções diretas da Eq. (4.9) são, em geral, impossíveis, havendo portanto a necessidade do uso de um processo iterativo.

Neste trabalho, adota-se o método Newton-Raphson, onde admite-se que durante qualquer etapa do processo iterativo de solução, a Eq. (4.9) não é satisfeita a menos que a convergência ocorra. No método de Newton-Raphson um sistema de forças residuais é suposto existir de tal forma que:

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{kp} + \mathbf{P} \neq 0 \quad (4.10)$$

As forças residuais $\boldsymbol{\psi}$ podem ser interpretadas como uma medida de quanto a solução obtida se distancia do equilíbrio.

Para problemas estruturais a matriz $\mathbf{k}$ pode ser fisicamente interpretada como a matriz de rigidez da estrutura e o vetor de incógnitas $\mathbf{p}$ como o vetor de deslocamentos nodais. Em uma análise não-linear incremental, na qual a rigidez, de alguma forma depende dos deslocamentos nodais, a matriz $\mathbf{k}$ é igual ao gradiente da relação forças deslocamento da estrutura e é denominada matriz de rigidez tangente.

A análise de tais problemas deve ser realizada através de um processo incremental-iterativo, já que a solução em um determinado estágio não depende apenas dos deslocamentos obtidos naquele estágio, mas também do histórico do carregamento.

O algoritmo para a solução deste problema é ilustrado na Fig. 4.2 para o caso de uma única variável. A solução tem início a partir da atribuição de um valor para as incógnitas $\mathbf{p}_0$ (para problemas estruturais $\mathbf{p}^0=0$). A matriz $\mathbf{k}(\mathbf{p}^0)$, correspondente a este estado de deslocamento é determinada e o vetor $\boldsymbol{\psi}^0$ é então calculado a partir da Eq. (4.10). A correção $\Delta\mathbf{p}^0$ é calculada da seguinte forma:

$$\Delta\mathbf{p}^r = -\mathbf{k}(\mathbf{p}^r)^{-1}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{p}^r) \quad (4.11)$$

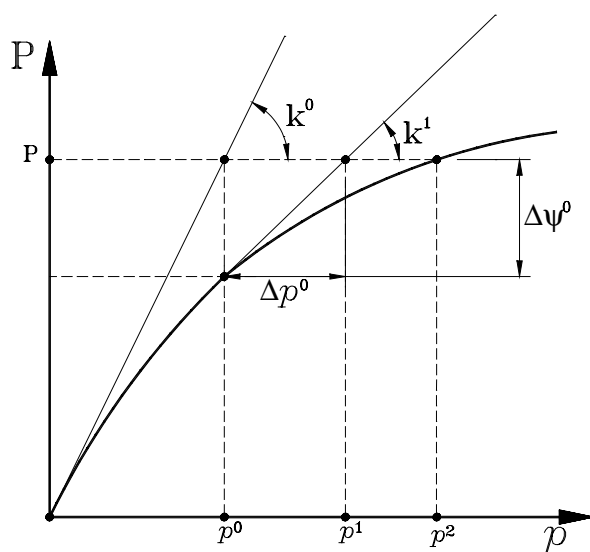


Figura 4.2 - Método de Newton-Raphson.

Uma melhor aproximação para o vetor de incógnitas é então obtido com $\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}^r$. Este processo iterativo prossegue até a solução convergir para a resposta não-linear, o que é indicado pela condição de que a norma do vetor $\boldsymbol{\psi}^r$ ou a norma do vetor $\Delta\mathbf{p}^r$ tender para zero.

4.4 Critério de Convergência

Neste trabalho, optou-se por implementar o critério de convergência baseado nas forças nodais residuais, por se considerar as forças normais preponderantes neste tipo de estrutura. Neste caso, os valores das forças nodais residuais em cada iteração são comparados com os valores da iteração imediatamente anterior. Esta convergência deve ser verificada no final de cada iteração do processo numérico.

Uma vez que a variação entre esses valores se torna suficientemente pequena para cada um dos valores nodais, então a convergência foi atingida. Através deste critério, admite-se que o processo converge se:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\psi_i^j)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i)^2}} 100 \leq TOLER \quad (4.12)$$

onde ψ_i são as forças residuais, f_i são as forças totais aplicadas, N é o número total de incógnitas do problema, j denota o número da iteração e $TOLER$ é a tolerância em percentual. Observa-se, através da Eq. (4.12), que a convergência é atingida se a norma das forças residuais é menor ou igual ao valor da tolerância $TOLER$, multiplicado pela norma das forças totais aplicadas.

O valor da tolerância $TOLER$, adotada neste trabalho, foi de 0,1%, por ser mais adequada para as estruturas de cabos.

4.5 Modelos Constitutivos para os Cabos

4.5.1 Características construtivas dos cabos e cordoalhas

Os sistemas estruturais formados por cabos, são constituídos geralmente por cordoalhas de aço ou por cabos de aço de fios torcidos. O fio ou arame, é um metal com uma seção transversal circular ou não. Segundo a NBR 6327, arame é um fio de aço obtido por trefilação. Uma cordoalha consiste de um arranjo de fios dispostos helicoidalmente, em uma ou mais camadas, ao redor de um eixo, usualmente composto de um fio central, produzindo uma seção simétrica. As cordoalhas podem ser do tipo aberta, Fig. 4.3, ou fechada, Fig. 4.4.

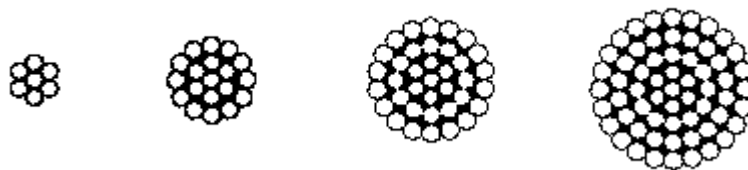


Figura 4.3 - Cordoalha de aço de sistema aberto.

As cordoalhas do tipo fechada consistem de fios dispostos da mesma forma como descrito acima, mas que são envolvidos por uma ou mais camadas fechadas de arames de seção Z. Estas, têm a vantagem sobre a cordoalha aberta de possuir maior módulo de elasticidade. A carga última, no entanto, não aumenta proporcionalmente, já que é um valor limitado pela resistência de ruptura dos arames individuais.

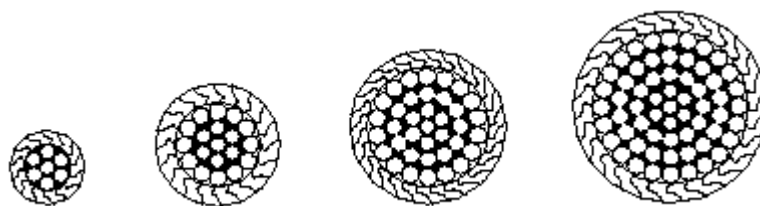


Figura 4.4 - Cordoalha de aço de sistema fechado.

Existem cordoalhas para fins estruturais fabricadas com 7 até 277 fios, com diâmetros de 12,7mm (1/2in) a 101,6mm (4in), e força de ruptura nominal que vai de 126kN a 8232,5kN, segundo a norma da ASTM A-586/92.

Os cabos de aço de fios torcidos, Fig. 4.5, apresentam uma pluralidade de cordoalhas, denominadas de pernas, dispostas helicoidalmente ao redor de um núcleo central, também chamado alma, que pode ser composto de uma cordoalha ou de um outro cabo. Os cabos em geral são encontrados com 6 ou 8 pernas, com cada uma delas compostas de 7 a 61 fios. Por isso os cabos são identificados por dois números: o primeiro indicando o número de pernas e o segundo indicando o número de fios por perna, por exemplo, cabo 6x19.

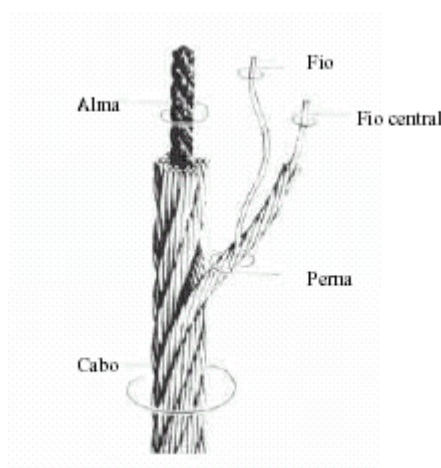


Figura 4.5 - Cabo de aço

Os cabos são fabricados com diâmetros que variam de 9,5mm (3/8in) até 101,6mm (4in) e força de ruptura nominal de 52,51kN a 6497kN, segundo norma da ASTM A-603/94.

A área metálica de um cabo ou cordoalha de aço é constituída pela soma das áreas das seções transversais dos arames individuais que o compõem, exceto dos arames de enchimento (*filler*). De maneira aproximada pode-se calcular a área metálica multiplicando-se a área total da seção transversal pelo fator de ocupação que varia em função da construção do cabo ou cordoalha. Valores típicos deste fator encontram-se na Tab. 4.1.

Material	Fator de ocupação
cabos com 6 pernas e alma em fibra	50%
cabos com 6 pernas e alma de aço	60%
cordoalhas aberta	75%
cordoalha fechada	85%

Tabela 4.1 – Fator de ocupação para cabos e cordoalhas

O contato entre os fios que compõem o cabo torna-se mais efetivo ainda com o emprego de fios de diâmetros diferentes na construção dos cabos. Esta técnica deu origem aos quatro tipos de composições mais conhecidos, citadas pela NBR 6327 apud Aguiar: *Seale*, *Warrington*, *Filler* e *Mista*, representados na Fig. 4.6.

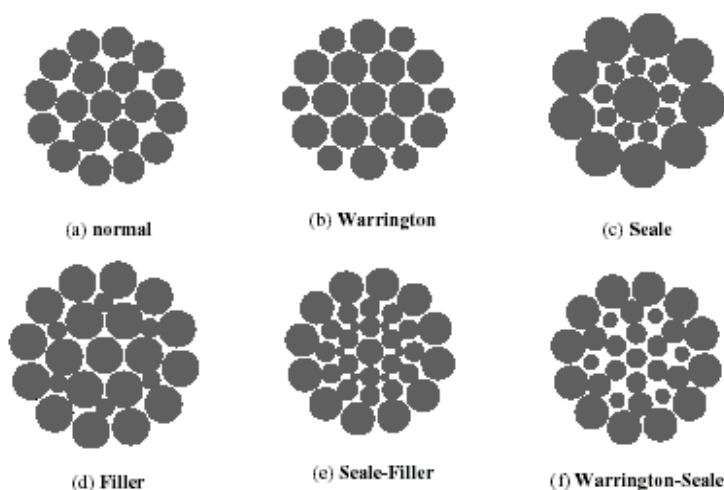


Figura 4.6 - Tipos de construções de cabos de aço

A construção *Seale* emprega duas camadas com o mesmo número de fios, sendo a camada interna de diâmetro menor. Esta construção proporciona alta resistência à abrasão devido ao maior diâmetro dos fios externos.

A construção *Warrington* emprega na camada externa fios de diâmetros diferentes dispostos alternadamente, gerando uma superfície externa mais lisa e uma seção mais compacta. Este tipo de construção proporciona ao cabo alta resistência ao esmagamento e boa estabilidade.

A construção *Filler* apresenta os espaços entre as camadas externas preenchidos com fios de diâmetro menor, gerando uma seção mais compacta entre as descritas e um cabo com boa resistência à abrasão e ao esmagamento.

A construção *Mista* é obtida com a combinação das construções anteriores, duas a duas.

Existem dois tipos de alongamento no caso dos cabos e cordoalhas: A extensão do aço propriamente dita, podendo ser elástica ou inelástica e a deformação estrutural que é inelástica, variável e depende das características construtivas dos mesmos.

Na maioria das aplicações estruturais de cabos, a deformação estrutural deve ser removida através de um processo de pré-estiramento, que consiste na aplicação de um certo nível de força de tração ao cabo, em torno de 50% da sua resistência de ruptura estimada, e na sua manutenção por um determinado período de tempo, em um ou mais ciclos.

Este processo de pré-estiramento, permite um ajustamento dos arames nas pernas do cabo e pelo acomodamento das pernas em relação à alma do mesmo, estabilizando as propriedades elásticas do material com conseqüente aumento do módulo de rigidez inicial do mesmo.

Convencionalmente, os cabos de aço são fabricados em diversas categorias, classificados pela resistência dos fios que o compõem, conforme mostra a Tab. 4.2.

Resistência à tração (MPa)	CATEGORIA (denominação americana)
2000 a 2300	Extra Improved Plow Steel (E.I.P.S.)
1800 a 2000	Improved Plow Steel (I.P.S.)
1600 a 1800	Plow Steel (P.S.)
1400 a 1600	Mild Plow Steel (M.P.S.)
1200 a 1400	Traction Steel
600	Iron

Tabela 4.2 – Resistência à tração de cabos de aço.

Além da resistência à tração, cada categoria é caracterizada por qualidades de elasticidade, resistência à fadiga e à abrasão, cuja importância depende da utilização do cabo.

4.5.2 Diagramas tensão-deformação para cabos

O módulo de rigidez dos cabos depende de vários fatores, como por exemplo, do tipo de construção do cabo, dos tipos de acabamentos e do número de ciclos de pré-estiramento. O valor do módulo de rigidez aumenta cerca de 20% para cabos usados ou novos pré-esticados, sendo menor nos cabos novos ou sem uso. As curvas típicas de tensão-deformação dos cabos não possuem patamar ou ponto de escoamento definidos. Desta forma, o limite de escoamento é definido traçando-se uma reta paralela à curva em 0,2% de deformação e a tensão limite de ruptura correspondendo a uma deformação em torno de 3%. O limite elástico para cabos de aço usuais, é de aproximadamente 55% a 60% da sua carga de ruptura.

Os catálogos de fabricantes fornecem apenas alguns parâmetros dos cabos, tais como a tensão mínima de ruptura e um módulo de elasticidade mínimo, mas nenhuma informação sobre a curva tensão-deformação com a respectiva região elástica é definida.

A norma do ASCE 1996 apud Aguiar[1999], estabelece um módulo de elasticidade convencional E_s para o cabo. Este valor corresponde à secante à curva tensão-deformação, entre 10% da resistência nominal do cabo e 90% da força de pré-estiramento como mostra a Fig. 4.7

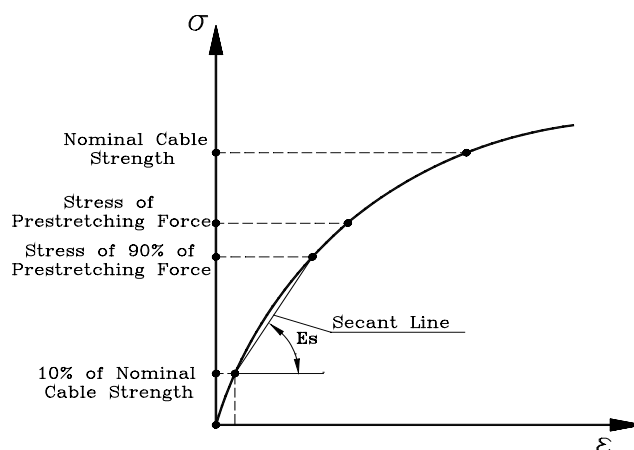


Figura 4.7 - Módulo de elasticidade secante E_s segundo o ASCE 1996.

Existem na literatura registros de experimentos científicos de vários autores no sentido de se determinar uma melhor aproximação para as curvas tensão-deformação dos cabos, dentre os quais pode-se citar, conforme Aguiar[1999], os seguintes trabalhos:

- ***Curva Tensão-Deformação de Greenberg***

Greenberg utilizou na sua análise uma expressão algébrica para representar a curva tensão-deformação. Ele empregou uma função exponencial contínua, para aproximar a porção inelástica da curva tensão-deformação real do cabo. Admitiu-se uma força de pré-estiramento igual a 50% da força última. O módulo de elasticidade adotado de 165500 MPa, decresce a zero para uma deformação última de 3% e tensão de 1414 MPa.

- ***Curva Tensão-Deformação de Jonatowski & Birnstiel***

Jonatowski&Birnstiel, apresentaram a seguinte expressão para representar a curva tensão-deformação dos materiais:

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{\left(1 + \left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_u}\right)^n\right)^{1/n}} \quad (4.13)$$

onde E é o módulo de elasticidade inicial, n é a constante que define a forma da curva, e σ_u é a tensão última. No caso de material elasto-plástico perfeito $n \geq 10$ e σ_u é igual à tensão de escoamento σ_y .

- ***Curva Tensão-Deformação de Ramberg-Osgood***

Ramberg&Osgood, sugeriram a representação da curva completa tensão-deformação de qualquer material por uma única expressão, Eq.4.14, utilizando três parâmetros:

$$\sigma = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n \quad (4.14)$$

onde n e B são constantes determinadas para o material e E é a inclinação da parte inicial da curva.

• **Curva Tensão-Deformação de Murray & Williams**

Murray&Willems “realizaram ensaios carregando axialmente, além do limite elástico, cordoalhas de diferentes diâmetros. Cada amostra foi pré-estirada para remover o alongamento construtivo com aproximadamente 55% da carga última nominal. Cada ciclo de pré-estiramento consistiu de aplicação lenta da carga de pré-estiramento, manutenção da carga por cerca de 20 minutos, e retirada lenta da mesma. Três ciclos completos foram suficientes para remover todo o alongamento construtivo, sendo obtida uma curva com a região inicial praticamente linear”. Eles concluíram que os resultados eram melhor representados pela expressão proposta por Ramberg&Osgood, Eq.4.14. A Tab. 4.3 apresenta os parâmetros n e B recomendados para as cordoalhas ensaiadas. As curvas que representam o comportamento destas cordoalhas são mostradas na Fig. 4.8.

Diâmetro (mm)	E (Mpa)	n	B (MPa)
4,76 (3/16") (cordoalha 1x19)	162750	10,637	2365,05
19,0 (3/4") (cordoalha 1x19)	195160	8,548	2222,1
25,4 (1") (cordoalha 1x19)	175850	9,326	2144,1
31,8 (1¼") (cordoalha 1x37)	175160	7,873	2469,66

Tabela 4.3 – Parâmetros recomendados para as cordoalhas ensaiadas por Murray&Willems.

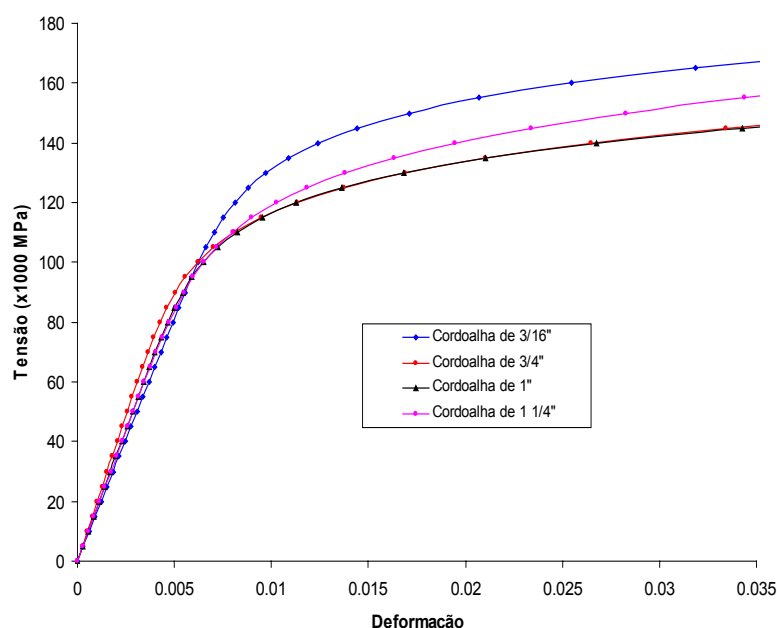


Figura 4.8 - Curvas tensão-deformação($\epsilon=\Delta/l$) para cordoalhas ensaiadas por Murray&Willems

Baseando-se em resultados de vários ensaios realizados, Murray&Willems recomendam os valores da Tab. 4.4 para cordoalhas com diâmetros menores que 31,8mm (1 1/4in). As curvas correspondentes estão representadas na Fig. 4.9.

Cordoalha	E (MPa)	n	B (MPa)
1x19	165500	9,35	2136,76
1x37	165500	12,00	1965,36

Tabela 4.4 – Parâmetros recomendados por Murray&Willems para cordoalhas com diâmetros inferiores a 31,8mm (1 1/4 in)

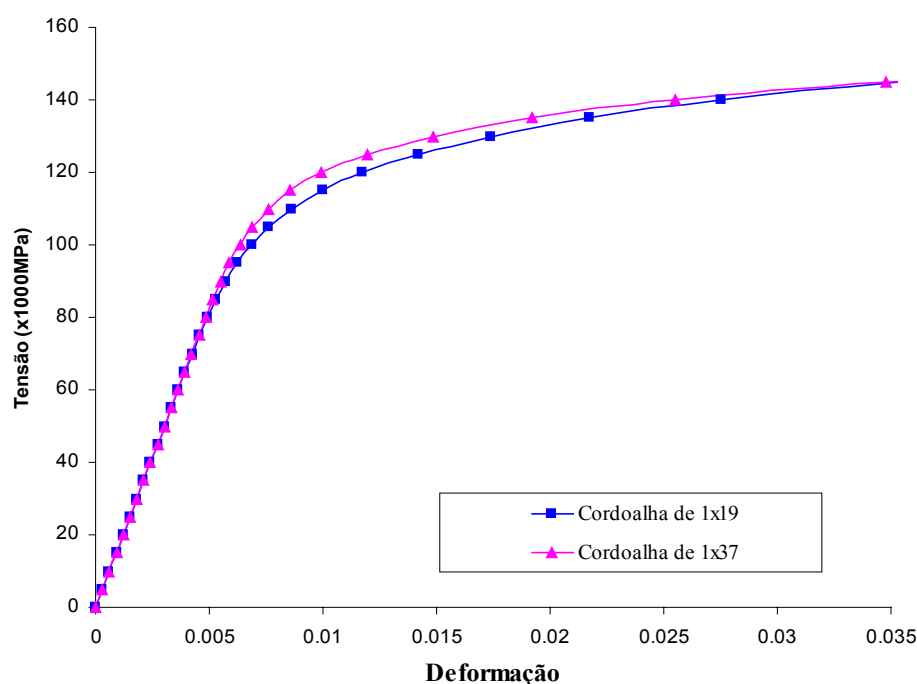


Figura 4.9 - Curvas tensão-deformação($\epsilon=\Delta l/l$) para cordoalhas com diâmetros inferiores a 31,8mm (1 1/4 in)

Como a região linear da curva tensão-deformação típica para cabos e cordoalhas estruturais é limitado a aproximadamente 50% da sua resistência última, é imprescindível para um projeto mais econômico o aproveitamento da região não-linear da curva.

Desta forma, justifica-se do ponto de vista prático, o desenvolvimento de uma análise do comportamento de sistemas de cabos, incluindo o efeito da não-linearidade física do material. O modelo constitutivo elasto-plástico baseado nas curvas desenvolvidas por Murray&Willems será contemplado no capítulo 05.

4.6 O Problema Elasto-Plástico Unidimensional

A formulação numérica para a análise não-linear física desenvolvida no capítulo 3 é bastante geral, podendo ser aplicada a materiais cujas propriedades podem ser descritas por equações constitutivas elásticas, lineares ou não-lineares, elasto-plásticas, visco-elásticas ou visco-plásticas.

Nesta seção, os aspectos essenciais do comportamento elasto-plástico do material são introduzidos e as expressões básicas são desenvolvidas de uma forma aplicável à solução numérica, via Newton-Raphson, proposta neste trabalho.

A Fig. 4.10 idealiza o comportamento elasto-plástico através de um diagrama bilinear, onde se distingue um comportamento elástico na região OA com módulo de elasticidade E e uma região plástica AB com endurecimento linear, *strain-hardening*, com módulo tangente E_t .

Como se pode observar, o material inicialmente se deforma segundo o módulo de elasticidade E até que a tensão atuante atinja o valor σ_e , denominada tensão de escoamento. Se a partir deste ponto continua a se aplicar carga sobre o material, este passa a se deformar segundo o módulo tangente E_t .

Analisando-se a Fig. 4.10 dentro de um processo incremental, tem-se que em algum estágio após o escoamento inicial o acréscimo de tensão $d\sigma$ é acompanhado de um acréscimo de deformação $d\varepsilon$. Admitindo-se que a deformação possa ser decomposta em uma parcela elástica e outra plástica, tem-se:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.15)$$

O parâmetro de endurecimento H' é definido por:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (4.16)$$

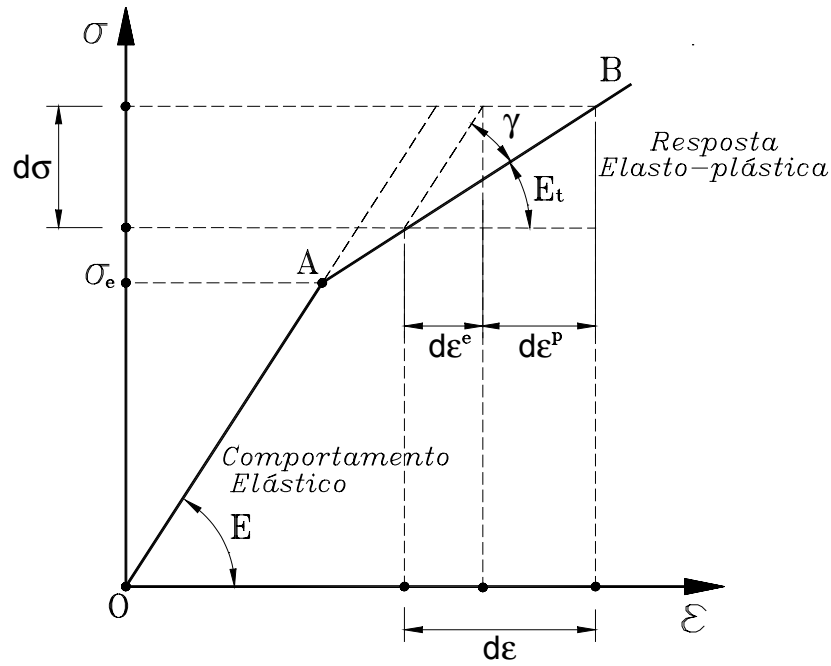


Figura 4.10 - Comportamento elasto-plástico do material para o caso uniaxial.

Desenvolvendo H' com o auxílio da Eq. (4.15), vem que:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}} \quad (4.17)$$

É possível reescrever a Eq. (4.15):

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H'} = \left(\frac{E + H'}{E H'} \right) d\sigma \quad (4.18)$$

Desenvolvendo, vem que:

$$d\sigma = \left(\frac{E H'}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.19)$$

sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon$, conclui-se que:

$$E_t = \frac{E H'}{E + H'} \quad (4.20)$$

Observando-se a Fig. 4.10, pode-se escrever $d\sigma$ do seguinte modo:

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = (E - \gamma) d\varepsilon \quad (4.21)$$

Sendo $E_t = E - \gamma$ e com o auxílio da Eq. (4.20), determina-se:

$$\gamma = \frac{E^2}{E + H'} \quad (4.22)$$

Levando-se a Eq. (4.22) na Eq. (4.21), tem-se:

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.23)$$

logo,

$$E_t = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) = \frac{E H'}{E + H'} \quad (4.24)$$

Na implementação do programa é considerado que na fase elástica

$$d\sigma = E \, d\varepsilon \quad (4.25)$$

e na fase elasto-plástica

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.26)$$

É claro que quando $H' = 0$, $E_t = 0$ e, neste caso, o comportamento elasto-plástico perfeito é contemplado.

4.7 Análise Incremental das Tensões e Deformações no Comportamento Elasto-Plástico

Uma das etapas mais complexas no processo incremental-iterativo utilizado para a solução do problema não-linear estudado neste trabalho, é aquela na qual calculam-se as forças nodais equivalentes a partir das quais serão calculadas as forças residuais. É evidente que as componentes de tensão e deformação deverão ser armazenadas a partir dos valores obtidos em cada uma das iterações do processo.

No entanto, esta tarefa, que é aparentemente trivial, torna-se complicada devido ao fato de que um elemento pode vir a atingir o escoamento quando da reaplicação das forças residuais. Portanto, o carregamento no qual inicia-se o escoamento estará localizado, geralmente, em algum valor entre o carregamento total relativo a iteração imediatamente anterior e o carregamento relativo à iteração corrente. Conseqüentemente, o carregamento no qual se deu o escoamento deve ser determinado e a deformação plástica deve ser calculada para o trecho referente à porção do carregamento que excedeu a carga de escoamento.

Portanto, o procedimento consiste na determinação da tensão em cada elemento de tal forma que o critério de escoamento de cada trecho seja satisfeito. Caso a tensão atuante no elemento exceda o valor permitido por tal critério, o valor excedente será removido e incluído nas cargas residuais para a manutenção do equilíbrio.

Neste trabalho propõe-se que o diagrama $\sigma \times \varepsilon$, baseado no comportamento elasto-plástico proposto por Murray&Willems, Eq. 4.14, seja dividido em quatro trechos lineares, conforme é mostrado no gráfico da Fig. 4.11.

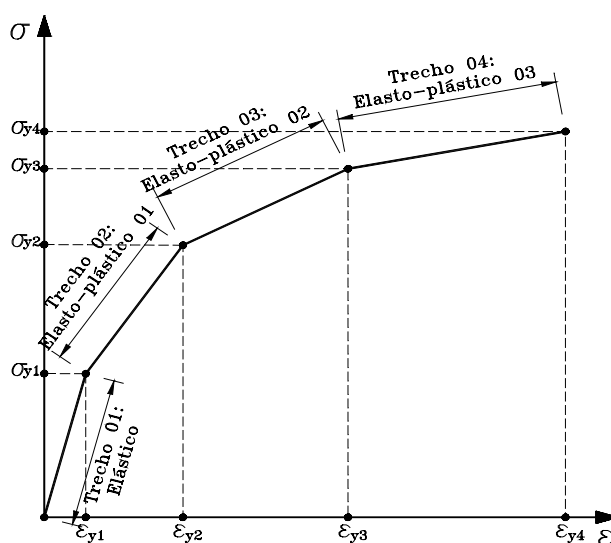


Figura 4.11 - Diagrama tensão-deformação multilinear

Onde cada par $(\sigma_i, \varepsilon_i)$, $(i = 1, 4)$, define os limites de cada um dos trechos.

Para uma melhor compreensão desse comportamento, a análise será feita por intervalos de tensões previamente definidas. O primeiro intervalo de tensões será para $0 \leq \sigma_e^r < \sigma_{y2}$, compreendendo dos trechos 01 e 02. O segundo intervalo é para $\sigma_{y1} \leq \sigma_{ep}^r < \sigma_{y3}$, compreendendo dos trechos 02 e 03, e finalmente, o terceiro intervalo, que compreende os trechos 03 e 04, terá como tensões limites $\sigma_{y2} \leq \sigma_{ep}^r < \sigma_{y4}$. A seguir, descreveremos o comportamento elasto-plástico durante o processo de carregamento incremental segundo cada intervalo.

4.7.1 Primeiro Intervalo: $0 \leq \sigma_e^r \leq \sigma_{y2}$

O procedimento adotado para este intervalo, consiste na determinação da tensão em cada elemento de tal forma que o critério de escoamento σ_{y1} seja satisfeito. Caso a tensão atuante no elemento exceda o valor permitido, então, o valor excedente é removido e incluído nas cargas residuais para a manutenção do equilíbrio. Para uma determinada iteração r relativa a um incremento de carga o algoritmo para solução deste problema pode ser assim apresentado, conforme descrito por Owen&Hinton [1980] e Plais [1998]:

I. O carregamento aplicado na iteração r^i são as forças residuais calculadas ao final da iteração r^{i-1} . Este carregamento produz um incremento nas componentes de deslocamento denotado aqui por Δp^r . Em seguida, calcula-se o incremento de deformação $\Delta \epsilon^r$, conforme Figs. 4.12 e 4.13.

II. No início do processo incremental, calcula-se a variação da tensão assumindo um comportamento elástico linear. Isto introduzirá erros, caso o elemento já tenha atingido o escoamento e o material já esteja se comportando elasto-plasticamente. Contudo, qualquer discrepância será corrigida quando do cálculo das forças residuais. Assim sendo, calcula-se a variação na tensão como

sendo $\Delta\sigma_e^r = E\Delta\varepsilon^r$, onde o subscrito e indica que o cálculo desta tensão foi baseado no comportamento elástico.

III. Armazena-se a tensão total para cada elemento como sendo $\sigma_e^r = \sigma^{r-1} + \Delta\sigma_e^r$. A tensão total σ_e^r terá sido determinada de forma a satisfazer a condição de escoamento durante a iteração $r-1$, ou seja, o cálculo desta tensão foi baseado no comportamento elástico. Conseqüentemente o erro na tensão σ_e^r estará limitado a $\Delta\sigma_e^r$.

IV. O próximo passo depende se o elemento atingiu o limite elástico σ_{y1} na iteração $r-1$. Isto pode ser verificado a partir do valor da tensão de escoamento para a iteração $r-1$. A tensão limite para este ciclo é obtida como sendo:

$$\sigma_{y1}^{r-1} = \sigma_{y1} + H_1' \varepsilon_p^{r-1} \quad (4.27)$$

Uma vez que a deformação plástica ε_p varia de elemento para elemento, cada um terá uma tensão diferente. Portanto, deve-se verificar se $\sigma^{r-1} \geq \sigma_{y1} + H_1' \varepsilon_p^{r-1}$.

Caso a resposta seja:

SIM

O que significa que o elemento já havia atingido a superfície de escoamento do *trecho 02* em iterações anteriores, Fig. 4.12, então deve-se verificar se $\sigma_e^r > \sigma^{r-1}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento encontra-se em descarregamento e de acordo com a teoria da plasticidade isto deve acontecer elasticamente. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VII.

SIM

O elemento encontra-se em carregamento e, portanto, o valor das tensões continuam crescendo. Sendo assim, todo o excesso de tensão $\sigma_e^r - \sigma^{r-1}$ deve ser reduzido ao valor de escoamento indicado na Fig. 4.12. Portanto, o fator R que define a porção da tensão que deve ser modificada para satisfazer à superfície de escoamento do trecho 02 deve receber o valor 1 como mostrado no gráfico da Fig. 4.12.

NÃO

Significa que o elemento ainda não atingiu o escoamento, gráfico da Fig. 4.13. Deve-se então verificar se $\sigma_e^r > \sigma_{y1}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra em regime elástico e nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VII.

SIM

O elemento atingiu a superfície de escoamento do *trecho 02* na iteração corrente, como mostrado na Fig. 4.13. Portanto, a porção da tensão que excedeu o valor de escoamento deverá ser reduzida até o limite elasto-plástico do trecho 02 e a porção removida deverá ser incluída no vetor de cargas residuais.

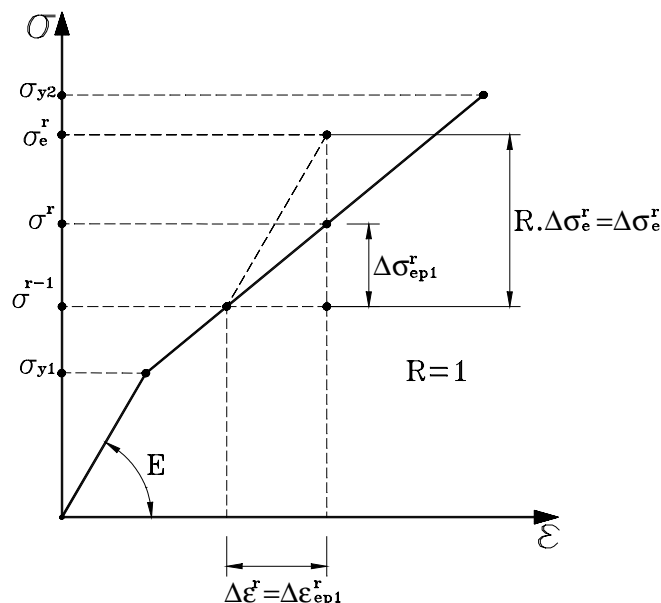


Figura 4.12 - Material previamente plastificado segundo o trecho elasto-plástico 01

O fator de redução R , de acordo com o gráfico da Fig. 4.13, é :

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma_e^r - \sigma_{y1}}{\sigma_e^r - \sigma^{r-1}} \quad (4.28)$$

V. Somente para os elementos já plastificados segundo o *trecho 02*, calcular o incremento de tensões $\Delta\sigma_{ep1}^r$, que é a parcela obtida após a plastificação conforme a superfície de escoamento do *trecho 02*. Este valor da tensão pode ser observado nos dois casos: através da Fig. 4.13, onde o escoamento σ_{y1} está sendo atingido na iteração corrente e Fig. 4.12, onde o escoamento σ_{y1} já havia sido previamente atingido. A partir da Eq. (4.23) tem-se:

$$\Delta\sigma_{ep1}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_1'} \right) \Delta\epsilon_{ep1}^r \quad (4.29)$$

onde o subscrito ep_1 indica o comportamento segundo o trecho elasto-plástico 01. Para que a equação acima seja verdadeira, deve-se restringir ao caso de pequenos incrementos de tensão e deformação. Para a situação mostrada na Fig. 4.13, observando que os triângulos ADC e AEB são similares, tem-se:

$$\Delta\epsilon_{ep1}^r = R\Delta\epsilon^r \quad (4.30)$$

Definindo-se $R = 1$ para o caso mostrado na Fig. 4.13, a equação anterior permanece correta. Então tem-se:

$$\Delta\sigma_{ep1}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_1'} \right) R\Delta\epsilon^r \quad (4.31)$$

A tensão total relativa à iteração corrente é então dada por:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + (1 - R)\Delta\sigma_e^r + \Delta\sigma_{ep1}^r \quad (4.32)$$

onde o segundo termo se refere à parcela elástica do incremento de tensão ocorrido antes do escoamento e $\Delta\sigma_{ep1}^r$ é dado conforme a Eq.(4.31).

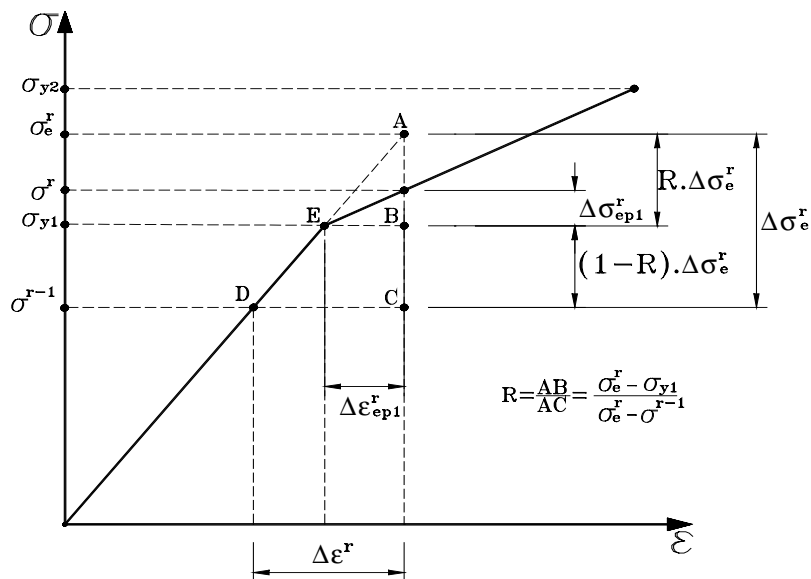


Figura 4.13 – Material plastificado segundo o trecho elasto-plástico 01 na iteração corrente

VI. Ainda somente para os elementos já plastificados segundo o *trecho 02*, calcular a deformação plástica total do elemento como sendo $\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \Delta\epsilon_p^r$ onde o incremento de deformação plástica para a iteração corrente é composta de uma componente elástica e uma plástica. Para a componente elástica da deformação $\Delta\epsilon_e^r$, tem-se:

$$\Delta\epsilon_e^r = \frac{\Delta\sigma_e^r}{E} \quad (4.33)$$

Levando-se a Eq. (4.16) na Eq. (4.33) e usando também a Eq. (4.15) obtém-se:

$$\Delta\epsilon_p^r = \frac{\Delta\epsilon^r}{1 + \frac{H_1'}{E}} \quad (4.34)$$

Uma vez que a componente plástica da deformação deve ser calculada para a deformação obtida após a plastificação segundo o *trecho 02*, observando-se as Figs. 4.12 e 4.13, verifica-se que $\Delta\epsilon^r$ deve ser substituído por $\Delta\epsilon_{ep1}^r$, que usando a Eq. (4.30) torna-se:

$$\Delta \varepsilon_p^r = \frac{R \Delta \varepsilon^r}{1 + \frac{H_1'}{E}} \quad (4.35)$$

Portanto, a deformação plástica total do elemento para a iteração corrente é:

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon_p^{r-1} + \frac{R \Delta \varepsilon^r}{1 + \frac{H_1'}{E}} \quad (4.36)$$

VII. Considerando-se apenas os elementos que ainda se encontram na fase elástica, armazenar o valor da tensão obtida na iteração corrente como sendo:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + \Delta \sigma_e^r \quad (4.37)$$

VIII. Finalmente calcular as forças nodais equivalentes a partir das tensões atuantes no elemento.

4.7.2 Segundo Intervalo: $\sigma_{y1} < \sigma_{ep}^r \leq \sigma_{y3}$

O procedimento adotado para este intervalo, consiste na determinação da tensão em cada elemento de tal forma que o critério de plastificação σ_{y2} seja satisfeito. Caso a tensão atuante nos elementos exceda o valor permitido, então, o valor excedente é removido e incluído nas cargas residuais para a manutenção do equilíbrio.

I. Continuando o processo incremental, o carregamento aplicado na iteração r^i são as forças residuais calculadas ao final da iteração r^{i-1} que continua incrementando as componentes de deslocamento Δp^r . Calcula-se, então, os incrementos de deformações $\Delta \varepsilon^r$, conforme gráficos das Figs. 4.14 e 4.15 a seguir.

II. Calcula-se a variação da tensão, assumindo o comportamento segundo o trecho elasto-plástico 01. Isto introduzirá erros, caso o elemento já esteja no trecho elasto-plástico 02 e o material já esteja se comportando segundo este trecho. Contudo, qualquer discrepância será corrigida quando do cálculo das forças residuais. Assim sendo, calcula-se a variação na tensão como sendo

$$\Delta\sigma_{ep1}^r = E_{t1}\Delta\varepsilon^r = E\left(1 - \frac{E}{E + H_1'}\right)\Delta\varepsilon^r, \text{ onde o subscrito } ep_1 \text{ indica que o cálculo}$$

desta tensão foi baseado segundo o comportamento elasto-plástico 01.

III. Armazena-se a tensão total para cada elemento como sendo $\sigma_{ep1}^r = \sigma^{r-1} + \Delta\sigma_{ep1}^r$. A tensão total σ_{ep1}^r terá sido determinada de forma a satisfazer a condição de plastificação durante a iteração $r-1$, ou seja, o cálculo desta tensão foi baseado no comportamento elasto-plástico 01. Conseqüentemente, o erro na tensão σ_{ep1}^r estará limitado a $\Delta\sigma_{ep1}^r$.

IV. O próximo passo depende se o elemento ultrapassou o limite plástico σ_{y2} na iteração $r-1$. Isto pode ser verificado a partir do valor da tensão de plastificação na iteração $r-1$. A tensão limite para este ciclo é obtida como sendo:

$$\sigma_{y2}^{r-1} = \sigma_{y2} + H_2' \varepsilon_p^{r-1} \quad (4.38)$$

Uma vez que a deformação plástica ε_p varia de elemento para elemento, cada um terá uma tensão diferente. Portanto, deve-se verificar se $\sigma^{r-1} \geq \sigma_{y2} + H_2' \varepsilon_p^{r-1}$.

Caso a resposta seja:

SIM

O que significa que o elemento já havia atingido o trecho elasto-plástico 02 em iterações anteriores, Fig. 4.14, então deve-se verificar se $\sigma_{ep1}^r > \sigma^{r-1}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra descarregando e de acordo com a teoria da plasticidade isto deve acontecer elasticamente. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VII.

SIM

O elemento encontra-se em carregamento e o valor das tensões continuam crescendo. Sendo assim, todo o excesso de tensão $\sigma_{ep1}^r - \sigma^{r-1}$ deve ser reduzido ao valor de plastificação do trecho inelástico 02, indicado na Fig. 4.14. Portanto, o fator R , que define a porção da tensão que deve ser modificada para satisfazer a condição de plastificação do trecho inelástico 02, deve receber o valor 1, como mostrado no gráfico da Fig. 4.14.

NÃO

Significa que o elemento ainda não atingiu o trecho elasto-plástico 02, ver gráfico da Fig. 4.15. Então deve-se verificar se $\sigma_{ep1}^r > \sigma_{y2}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra no trecho elasto-plástico 01 e então deve-se verificar se $\sigma_{ep1}^r > \sigma^{r-1}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra descarregando e de acordo com a teoria da plasticidade isto deve acontecer elasticamente. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VII.

SIM

O elemento encontra-se em carregamento e o valor das tensões continuam crescendo. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VIII.

SIM

O elemento atingiu o limite elasto-plástico 02 na iteração corrente, como mostrado na Fig. 4.15. Portanto, a porção da tensão que excedeu o valor de tensão da superfície de escoamento do trecho elasto-plástico 02, deverá ser reduzida até o limite elasto-plástico 02 e a porção removida deverá ser incluída no vetor de cargas residuais.

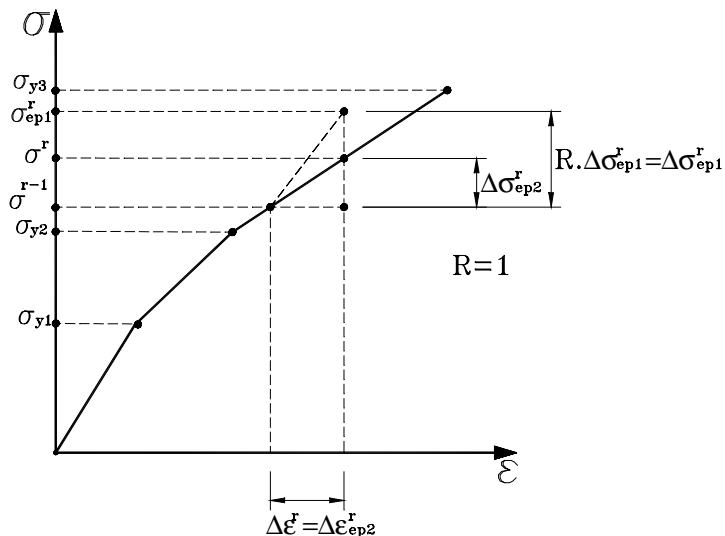


Figura 4.14 – Material previamente plastificado segundo o trecho elasto-plástico 02

O fator de redução R , ver gráfico da Fig. 4.15, deve ser :

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma_{ep1}^r - \sigma_{y2}}{\sigma_{ep1}^r - \sigma^{r-1}} \quad (4.39)$$

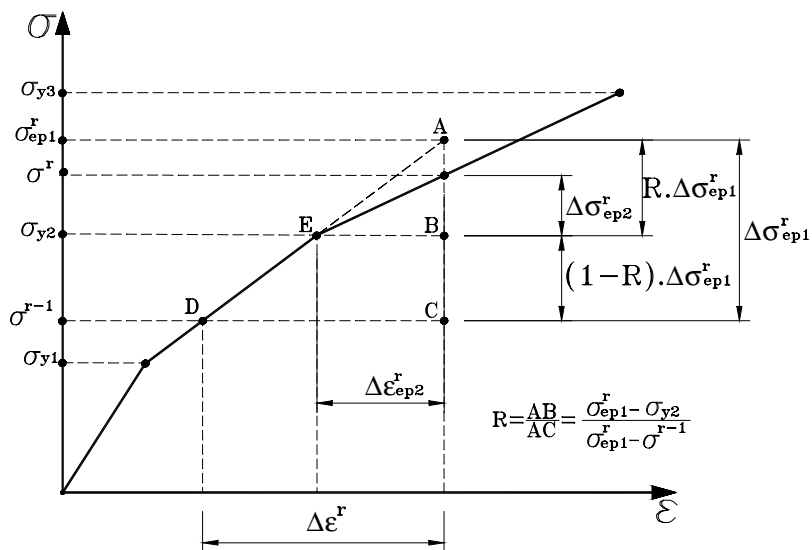


Figura 4.15 – Material plastificado segundo o trecho elasto-plástico 02 na iteração corrente

V. Somente para os elementos já plastificados segundo o trecho elasto-plástico 02, calcular o incremento de tensões $\Delta\sigma_{ep2}^r$, que é a parcela obtida após a plastificação conforme a superfície de escoamento do trecho elasto-plástico 02. Este valor da tensão pode ser observado nos dois casos possíveis: através da Fig. 4.14, onde o limite elasto-plástico 02 já havia sido previamente atingido e da Fig. 4.15, onde o mesmo está sendo atingido na iteração corrente. A partir da Eq. (4.23) tem-se:

$$\Delta\sigma_{ep2}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_2'} \right) \Delta\epsilon_{ep2}^r \quad (4.40)$$

onde o subscrito ep_2 indica o comportamento segundo o trecho elasto-plástico 02. Para que a equação acima seja verdadeira, deve-se restringir ao caso de pequenos incrementos de tensão e deformação. Para a situação mostrada na Fig. 4.15, observando que os triângulos ADC e AEB são similares, tem-se:

$$\Delta\epsilon_{ep2}^r = R\Delta\epsilon^r \quad (4.41)$$

Definindo-se $R=1$ para o caso mostrado no gráfico da Fig. 4.14, a equação anterior permanece correta. Então tem-se:

$$\Delta\sigma_{ep2}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_2'} \right) R\Delta\epsilon^r \quad (4.42)$$

A tensão total relativa à iteração corrente é então dada por:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + (1-R)\Delta\sigma_{ep1}^r + \Delta\sigma_{ep2}^r \quad (4.43)$$

onde o segundo termo se refere à parcela elasto-plástica do incremento de tensão segundo o trecho elasto-plástico 01, ocorrido antes do limite de plastificação σ_{y2} e $\Delta\sigma_{ep2}^r$ é dado conforme a Eq.(4.42).

VI. Considerando-se que neste intervalo os elementos já estão na fase elasto-plástica, calcular a deformação plástica total do elemento como sendo $\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \Delta\epsilon_p^r$, onde o incremento de deformação elasto-plástica para a iteração corrente é composta de uma componente elástica e uma plástica. Para a componente elástica $\Delta\epsilon_e^r$, tem-se:

$$\Delta\epsilon_e^r = \frac{\Delta\sigma^r}{E} \quad (4.44)$$

Levando-se a Eq. (4.16) na Eq. (4.44) e usando-se também a Eq. (4.15) obtém-se:

$$\Delta\epsilon_p^r = \frac{\Delta\epsilon^r}{1 + \frac{H_m'}{E}} \quad (4.45)$$

Onde H_m' é o parâmetro de encruamento médio, compreendendo os trechos elasto-plásticos 01 e 02. Neste caso, a parcela da deformação plástica total $\Delta\epsilon_p^r$ pode ser dada pela soma das parcelas plásticas dos trechos elasto-plásticos 01 e 02, $\Delta\epsilon_p^r = \Delta\epsilon_{p1}^r + \Delta\epsilon_{p2}^r$. Assim temos que:

$$\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \Delta\epsilon_{p1}^r + \Delta\epsilon_{p2}^r \quad (4.46)$$

Do gráfico da Fig. 4.15 tem-se que $\Delta\epsilon_{p1}^r = \frac{(1-R)\Delta\sigma_{ep1}^r}{H_1'}$, que desenvolvendo temos:

$$\Delta\epsilon_{p1}^r = \frac{(1-R)\Delta\epsilon^r}{(1 + \frac{H_1'}{E})} \quad (4.47)$$

Sabendo-se que $\Delta\epsilon_{ep2}^r = R\Delta\epsilon^r$ e conforme a Fig. 4.15, a parcela plástica da deformação segundo o trecho elasto-plástico 02 é dada por:

$$\Delta\epsilon_{p2}^r = \frac{R\Delta\epsilon^r}{1 + \frac{H_2'}{E}} \quad (4.48)$$

Portanto, a deformação plástica total do elemento para a iteração corrente é:

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon_p^{r-1} + \frac{(1-R)\Delta\varepsilon^r}{(1 + \frac{H_1'}{E})} + \Delta\varepsilon_{p2}^r \quad (4.49)$$

onde o segundo termo se refere à parcela plástica do incremento de deformação do trecho elasto-plástico 01, ocorrido antes do limite de plastificação σ_{y2} e $\Delta\varepsilon_{p2}^r$ é dado conforme a Eq.(4.48).

VII. Considerando-se apenas os elementos que se encontram em descarregamento, armazenar o valor da tensão obtida na iteração corrente como sendo:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + E\Delta\varepsilon^r \quad (4.50)$$

VIII. Considerando-se apenas os elementos que ainda se encontram no trecho elasto-plástico 01, armazenar o valor da tensão e da deformação plástica obtidas na iteração corrente como sendo:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + \Delta\sigma_{ep1}^r \quad (4.51)$$

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon_p^{r-1} + \frac{\Delta\varepsilon^r}{(1 + \frac{H_1'}{E})} \quad (4.52)$$

IX. Finalmente calcular as forças nodais equivalentes a partir das tensões atuantes no elemento.

4.7.3 Terceiro Intervalo: $\sigma_{y2} < \sigma_{ep}^r \leq \sigma_{y4}$

De maneira análoga, determina-se a tensão em cada elemento de tal forma que o critério de plastificação σ_{y3} seja satisfeito. Caso a tensão atuante nos elementos

exceda o valor permitido, então, o valor excedente é removido e incluído nas cargas residuais para a manutenção do equilíbrio.

I. Continuando o processo incremental, o carregamento aplicado na iteração r^i são as forças residuais calculadas ao final da iteração r^{i-1} . Este carregamento continua incrementando as componentes de deslocamento Δp^r , que então, calcula-se os incrementos de deformações $\Delta \epsilon^r$, conforme gráficos das Figs. 4.16 e 4.17 a seguir.

II. Calcula-se a variação da tensão assumindo o comportamento segundo o trecho elasto-plástico 02. Isto introduzirá erros, caso o elemento já esteja no trecho elasto-plástico 03 e o material já esteja se comportando segundo este trecho. Contudo, qualquer discrepância será corrigida quando do cálculo das forças residuais. Assim sendo, calcula-se a variação na tensão como sendo $\Delta \sigma_{ep2}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_2'} \right) \Delta \epsilon^r$, onde o subscrito ep_2 indica que o cálculo desta tensão foi baseado segundo o comportamento elasto-plástico 02.

III. Armazena-se a tensão total para cada elemento como sendo $\sigma_{ep2}^r = \sigma^{r-1} + \Delta \sigma_{ep2}^r$. A tensão total σ_{ep2}^r terá sido determinada de forma a satisfazer a condição de plastificação durante a iteração $r-1$, ou seja, o cálculo desta tensão foi baseado no comportamento elasto-plástico 02. Conseqüentemente, o erro na tensão σ_{ep2}^r estará limitado a $\Delta \sigma_{ep2}^r$.

IV. O próximo passo depende se o elemento ultrapassou o limite plástico σ_{y3} na iteração $r-1$. Isto pode ser verificado a partir do valor da tensão de plastificação na iteração $r-1$. A tensão limite para este ciclo é obtida como sendo:

$$\sigma_{y3}^{r-1} = \sigma_{y3} + H_3' \epsilon_p^{r-1} \quad (4.53)$$

Uma vez que a deformação plástica ε_p varia de elemento para elemento, cada um terá uma tensão diferente. Portanto, deve-se verificar se $\sigma^{r-1} \geq \sigma_{y3} + H_3' \varepsilon_p^{r-1}$.

Caso a resposta seja:

SIM

O que significa que o elemento já havia atingido o trecho elasto-plástico 03 em iterações anteriores, Fig. 4.16, então deve-se verificar se $\sigma_{ep2}^r > \sigma^{r-1}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra descarregando e de acordo com a teoria da plasticidade isto deve acontecer elasticamente. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VII.

SIM

O elemento encontra-se em carregamento e o valor das tensões continuam crescendo. Sendo assim, todo o excesso de tensão $\sigma_{ep2}^r - \sigma^{r-1}$ deve ser reduzido ao valor de plastificação do trecho inelástico 03, indicado na Fig. 4.16. Portanto, o fator R que define a porção da tensão que deve ser modificada para satisfazer a condição de plastificação do trecho inelástico 03 deve receber o valor 1 como mostrado no gráfico da Fig. 4.16.

NÃO

Significa que o elemento ainda não atingiu o trecho elasto-plástico 03, gráfico da Fig. 4.17. Deve-se então verificar se $\sigma_{ep2}^r > \sigma_{y3}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra no trecho elasto-plástico 02 e então deve-se verificar se $\sigma_{ep2}^r > \sigma^{r-1}$, caso a resposta seja:

NÃO

O elemento se encontra descarregando e de acordo com a teoria da plasticidade isto deve acontecer elasticamente. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VII.

SIM

O elemento encontra-se em carregamento e o valor das tensões continuam crescendo. Nenhuma outra ação deve ser tomada. Ir diretamente para o item VIII.

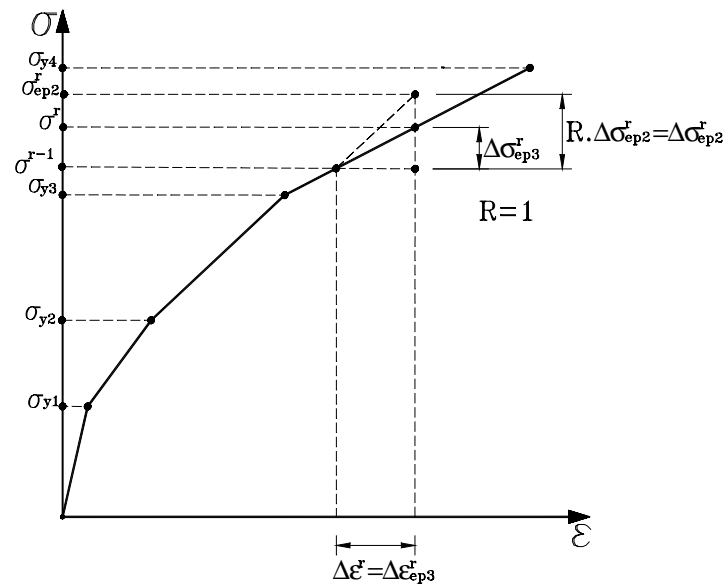


Figura 4.16 – Material previamente plastificado segundo o trecho elasto-plástico 03

SIM

O elemento atingiu o limite elasto-plástico 03 na iteração corrente como mostrado na Fig. 4.17. Portanto, a porção da tensão que excedeu o valor de tensão da superfície de escoamento do trecho elasto-plástico 03, deverá ser reduzida até o limite elasto-plástico 03 e a porção removida deverá ser incluída no vetor de cargas residuais. O fator de redução R , ver gráfico da Fig. 4.17, deve ser :

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma_{ep2}^r - \sigma_{y3}}{\sigma_{ep2}^r - \sigma^{r-1}} \quad (4.54)$$

V. Somente para os elementos já plastificados segundo o trecho elasto-plástico 03, calcular o incremento de tensões $\Delta\sigma_{ep3}^r$, que é a parcela obtida após a plastificação conforme a superfície de escoamento do trecho elasto-plástico 03. Este valor da tensão pode ser observado nos dois casos possíveis: através da Fig. 4.16, onde o limite elasto-plástico do 03 já havia sido previamente atingido e da Fig. 4.17, onde o mesmo está sendo atingido na iteração corrente. A partir da Eq. (4.23) tem-se:

$$\Delta\sigma_{ep3}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_3'} \right) \Delta\epsilon_{ep3}^r \quad (4.55)$$

onde o subscrito ep_3 indica o comportamento segundo o trecho elasto-plástico 03. Para que a equação acima seja verdadeira, deve-se restringir ao caso de pequenos incrementos de tensão e deformação. Para a situação mostrada na Fig. 4.17, observando que os triângulos ADC e AEB são similares, tem-se:

$$\Delta\epsilon_{ep3}^r = R \Delta\epsilon^r \quad (4.56)$$

Definindo-se $R = 1$ para o caso mostrado no gráfico da Fig. 4.16, a equação anterior permanece correta. Então tem-se:

$$\Delta\sigma_{ep3}^r = E \left(1 - \frac{E}{E + H_3'} \right) R \Delta\epsilon^r \quad (4.57)$$

A tensão total relativa à iteração corrente é então dada por:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + (1-R)\Delta\sigma_{ep2}^r + \Delta\sigma_{ep3}^r \quad (4.58)$$

onde o segundo termo se refere à parcela elasto-plástica do incremento de tensão segundo o trecho elasto-plástico 02, ocorrido antes do limite de plastificação σ_{y3} e $\Delta\sigma_{ep3}^r$ é dado conforme a Eq.(4.57).

VI. Considerando-se que neste intervalo os elementos já estão na fase elasto-plástica, calcular a deformação plástica total do elemento como sendo $\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \Delta\epsilon_p^r$, onde o incremento de deformação elasto-plástica para a iteração corrente é composta de uma componente elástica e uma plástica. Para a componente elástica $\Delta\epsilon_e^r$, tem-se:

$$\Delta\epsilon_e^r = \frac{\Delta\sigma^r}{E} \quad (4.59)$$

Levando-se a Eq. (4.16) na Eq. (4.59) e usando-se também a Eq.(4.15) obtém-se:

$$\Delta\epsilon_p^r = \frac{\Delta\epsilon^r}{1 + \frac{H_m'}{E}} \quad (4.60)$$

Onde H_m' é o parâmetro de encruamento médio, compreendendo os trechos elasto-plásticos 02 e 03. Neste caso, a parcela da deformação plástica total $\Delta\epsilon_p^r$ pode ser dada pela soma das parcelas plásticas 02 e 03, $\Delta\epsilon_p^r = \Delta\epsilon_{p2}^r + \Delta\epsilon_{p3}^r$. Assim temos que:

$$\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \Delta\epsilon_{p2}^r + \Delta\epsilon_{p3}^r \quad (4.61)$$

Do gráfico da Fig. 4.17 tem-se que $\Delta\epsilon_{p2}^r = \frac{(1-R)\Delta\sigma_{ep2}^r}{H_2'}$, que desenvolvendo temos:

$$\Delta\epsilon_{p1}^r = \frac{(1-R)\Delta\epsilon^r}{(1 + \frac{H_2'}{E})} \quad (4.62)$$

Sabendo-se que $\Delta\epsilon_{ep3}^r = R\Delta\epsilon^r$ e conforme a Fig. 4.17, a parcela plástica da deformação segundo o trecho elasto-plástico 03 é dada por:

$$\Delta \epsilon_{p3}^r = \frac{R \Delta \epsilon^r}{1 + \frac{H_3'}{E}} \quad (4.63)$$

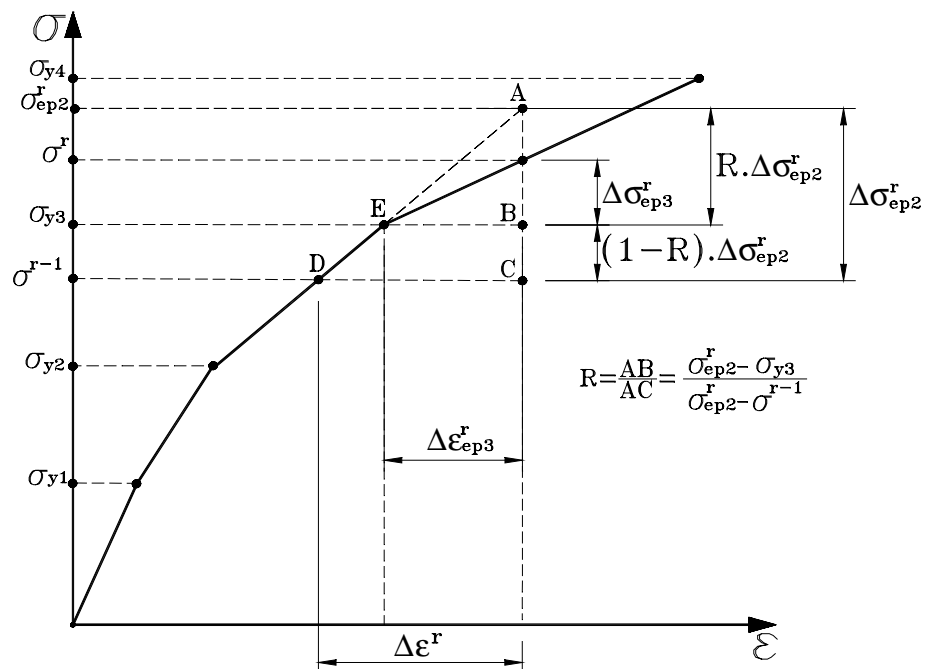
Portanto, a deformação plástica total do elemento para a iteração corrente é:

$$\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \frac{(1-R)\Delta \epsilon^r}{(1 + \frac{H_2'}{E})} + \Delta \epsilon_{p3}^r \quad (4.64)$$

onde o segundo termo se refere à parcela plástica do incremento de deformação segundo o trecho elasto-plástico 02, ocorrido antes do limite de plastificação σ_{y3} e $\Delta \epsilon_{p3}^r$ é dado conforme a Eq.(4.63).

VII. Considerando-se apenas os elementos que se encontram em descarregamento, armazenar o valor da tensão obtida na iteração corrente como sendo:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + E \Delta \epsilon^r \quad (4.65)$$



VIII. Considerando-se apenas os elementos que ainda se encontram no trecho elasto-plástico 02, armazenar o valor da tensão e da deformação plástica obtidas na iteração corrente como sendo:

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + \Delta\sigma_{ep2}^r \quad (4.66)$$

$$\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \frac{\Delta\epsilon^r}{(1 + \frac{H_2'}{E})} \quad (4.67)$$

IX. Finalmente calcular as forças nodais equivalentes a partir das tensões atuantes no elemento.

4.8 Descrição das subrotinas

O fluxograma principal do programa *Cabos-NLFG*, desenvolvido neste trabalho, contém várias subrotinas conforme pode ser visto na Fig. 4.1. Segue um breve comentário sobre suas funções no processo para a análise de cabos, considerando as não-linearidades Geométrica (NLG) e Física (NLF).

I. Subrotina Geometria_Inicial

Esta subrotina é acionada inicialmente, quando é feito a geração da malha. Tendo como dados iniciais, os nós de contorno e os atributos do cabo como flecha, ângulo inicial, desnível e abscissa do vértice, calcula-se a força horizontal para o caso parabólico e imediatamente a mesma é corrigida para o caso de catenária, a fim de obter a configuração inicial de equilíbrio do cabo.

II. Subrotina Cálculo

Esta subrotina é responsável pela definição dos parâmetros de controle do problema, a lei constitutiva adotada, além de conter as subrotinas

Geometria_Estrutura, *Inicia_Elementocal*, *Iniciar_Variáveis*, *Cálculo_Tração* e a subrotina *Arquiva_Dados*.

III. Subrotina Geometria_Estrutura

Esta subrotina é responsável pelo cálculo dos comprimentos e co-senos diretores dos elementos do cabo na sua posição indeslocada, ou seja, na configuração inicial de equilíbrio.

IV. Subrotina Inicia_Elementocal

Nesta subrotina inicializa os elementos calculados e atualizados, ou seja, faz-se a geometria indeslocada do cabo igual às geometrias calculada e atualizada.

V. Subrotina Iniciar_Variáveis

Nesta subrotina inicializa e zera as variáveis utilizadas no programa.

VI. Subrotina Cálculo_Tração

Esta subrotina é responsável pelo cálculo da força de tração inicial em cada elemento, obtida de forma analítica, para ser utilizada no primeiro incremento.

VII. Subrotina Arquiva_Dados

Esta subrotina é responsável pelo armazenamento dos dados iniciais do cabo, como incidência dos elementos, coordenadas dos nós, atributos dos cabos e cargas aplicadas.

VIII. Subrotinas Incrementa_Carga

Esta subrotina é responsável pelo controle do processo incremental na resolução do problema.

IX. Subrotina Rigidez

Na subrotina *Rigidez* calcula-se a matriz de rigidez tangente global da estrutura a partir da matriz de rigidez dos elementos, elástica ou elasto-plástica.

X. Subrotina Sistema_Gauss

Esta subrotina é composta pelas subrotinas *Escalonamento* e *Substituição_Regressiva*. Elas são responsáveis pela resolução do sistema de equações não-lineares do problema. Inicialmente, através da subrotina *Escalonamento*, faz-se a redução Gaussiana do sistema de equações, e simultaneamente, verifica-se se a matriz de rigidez tangente é positiva definida, através da avaliação do elemento *PIVOT*, na tentativa de se determinar algum ponto crítico da estrutura. Na subrotina *Substituicao_Regressiva*, faz-se o processo de substituição, após a triangularização da matriz feita na subrotina *Escalonamento*. Também, são calculados os deslocamentos nodais, as reações de apoio e ainda são atualizadas as coordenadas nodais e o vetor de cargas nodais totais para considerar as reações de apoio.

XI. Subrotina Geometria_EstruturaC

Nesta subrotina são calculados os co-senos diretores e os comprimentos dos elementos do cabo na sua posição deslocada.

XII. Subrotina Esforço_Normal

Nesta subrotina calculam-se os esforços normais dos elementos do cabo, resultantes das deformações, transformando-as em cargas nodais equivalentes. Nestes cálculos, leva-se em consideração a lei constitutiva do material adotada, observando-se se o material está em regime elástico ou elasto-plástico, em carga ou descarga.

XIII. Subrotina Verifica_Convergencia_Esfornos

Esta subrotina é responsável pela verificação da convergência do processo iterativo, verificando o resíduo das forças nodais, as quais farão parte do novo carregamento a ser reaplicado no incremento e/ou iteração seguinte, caso não haja convergência do processo iterativo.

XIV. Subrotina Resultados

Sua função é fornecer a saída dos resultados do problema, para cada incremento de carga, que neste caso são: Número da iteração que convergiu, fator de carga, esforços normais em cada elemento, reações de apoio, deslocamentos nodais, coordenadas da estrutura na posição deslocada, comprimento e cassinos diretores dos elementos na posição deslocada, deformação plástica e deformação total em cada elemento.

CAPÍTULO 5

Exemplos Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos onde se pretende mostrar a eficiência da formulação utilizada, a precisão dos resultados obtidos pelo programa desenvolvido, quando comparados com resultados teóricos da literatura e de outros programas existentes. São analisados exemplos onde consideram apenas a não-linearidade geométrica para diversos tipos de carregamento e, em seguida, faz-se a análise não-linear geométrica e física de estruturas de cabos, considerando-se diversos modelos constitutivos.

Todos os exemplos foram analisados utilizando-se um micro-computador “ PC ” com as seguintes características: pentium 4 - 2,20GHz , 1,00GB de RAM e disco rígido com capacidade de 111GB.

Inicialmente, são apresentadas as principais telas de entrada de dados do programa *Cabos-NLFG*, mostrando a interface gráfica amigável com o usuário, que facilita a geração automática dos elementos da estrutura, a definição das propriedades físicas do material e dos carregamentos aplicados, bem como a definição dos parâmetros de controle do processo incremental-iterativo.

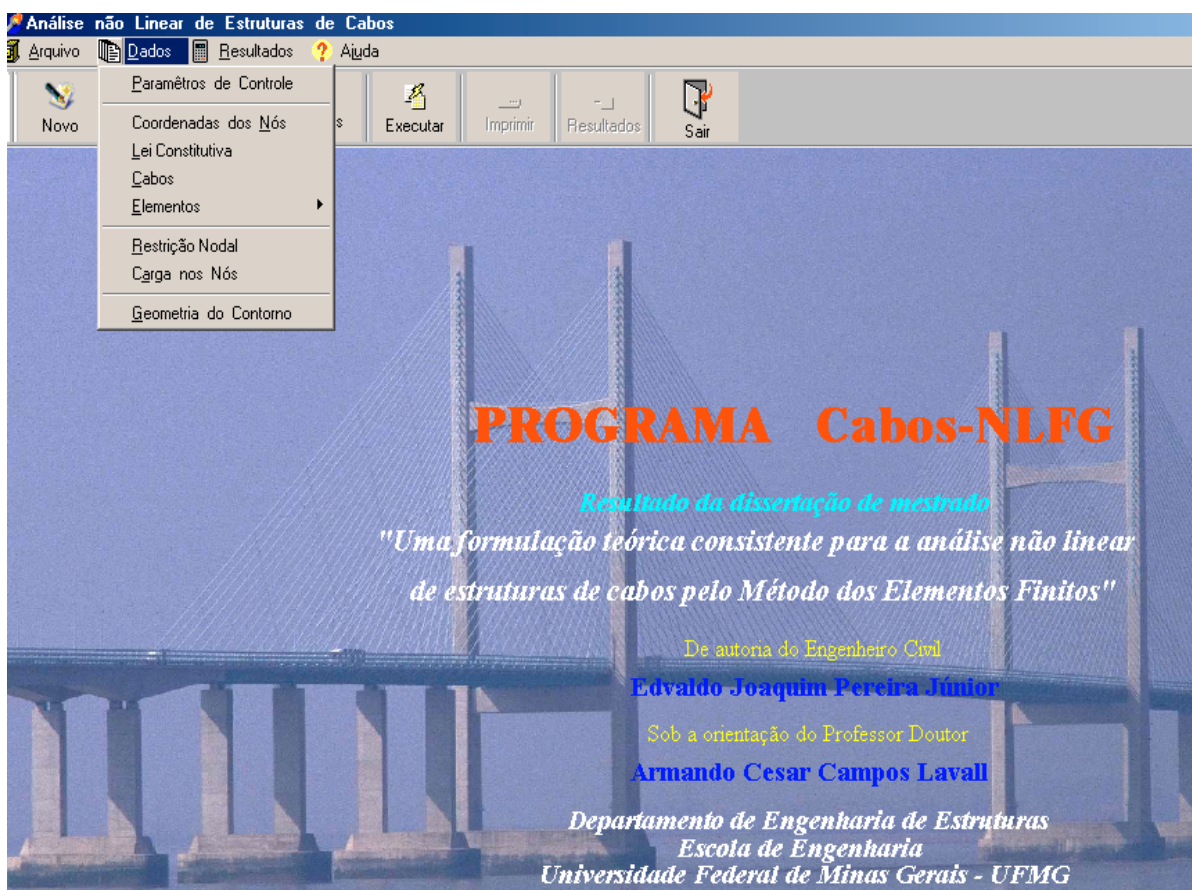


Figura 5.1 – Tela principal do programa

Esta é a tela principal do programa *Cabos-NLFG*. Na parte superior temos os menus principais com os respectivos sub-menus. No menu *Arquivo*, encontram-se operações tais como, *salvar*, *abrir*. No menu *Resultados*, mostram-se todos os resultados do programa que constarão no arquivo *Saída.sai*.

No menu *Dados*, toda a geometria dos cabos, suas condições de contorno, lei constitutiva e carregamentos são definidos, bem como as unidades de força e comprimento coerentes. Os seus sub-menus, *Coordenadas dos nós*, *Cabos*, *Elementos*, *Restrição Nodal*, *Lei Constitutiva*, *Cargas nos nós* e *Parâmetros de Controle*, serão apresentados sucintamente, a seguir:

No sub-menu *Coordenadas dos nós*, mostrado na Fig. 5.2, são definidos os nós de contorno da estrutura segundo as coordenadas globais cartesianas x , y , z . Após a geração da malha de elementos, este sub-menu apresenta também as coordenadas de todos os nós calculados da estrutura.

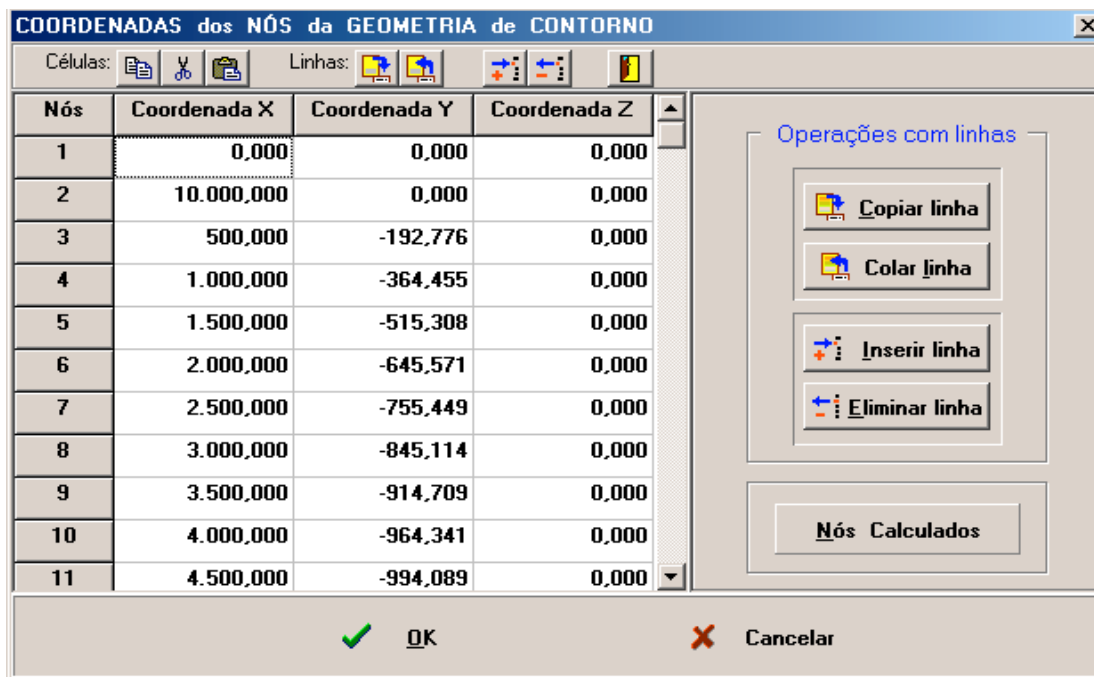


Figura 5.2 – Sub-menu *coordenadas dos nós*

Na Fig. 5.3 a seguir, é mostrado o sub-menu *Cabos*, onde definem-se os atributos de cada cabo, como o desnível h , o ângulo inicial θ_A , a abscissa do vértice da catenária x_v ou a flecha do vértice f , que são parâmetros responsáveis pela determinação da sua configuração de equilíbrio. Além disso, são definidas as incidências inicial e final do cabo, o número de elementos, a área da seção transversal e seu peso próprio.

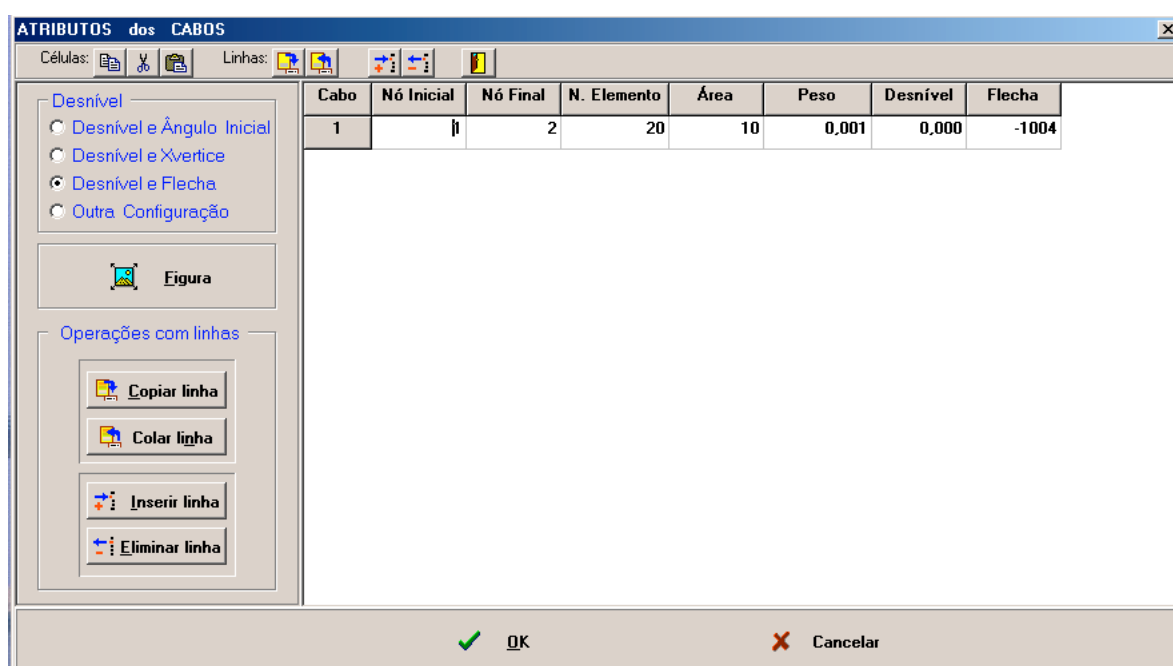


Figura 5.3 – Sub-menu *cabos*

No sub-menu *Elementos*, mostrado na Fig. 5.4, faz-se a geração dos elementos dos diversos cabos que compõem a estrutura, de acordo com as equações obtidas no item 2.4.

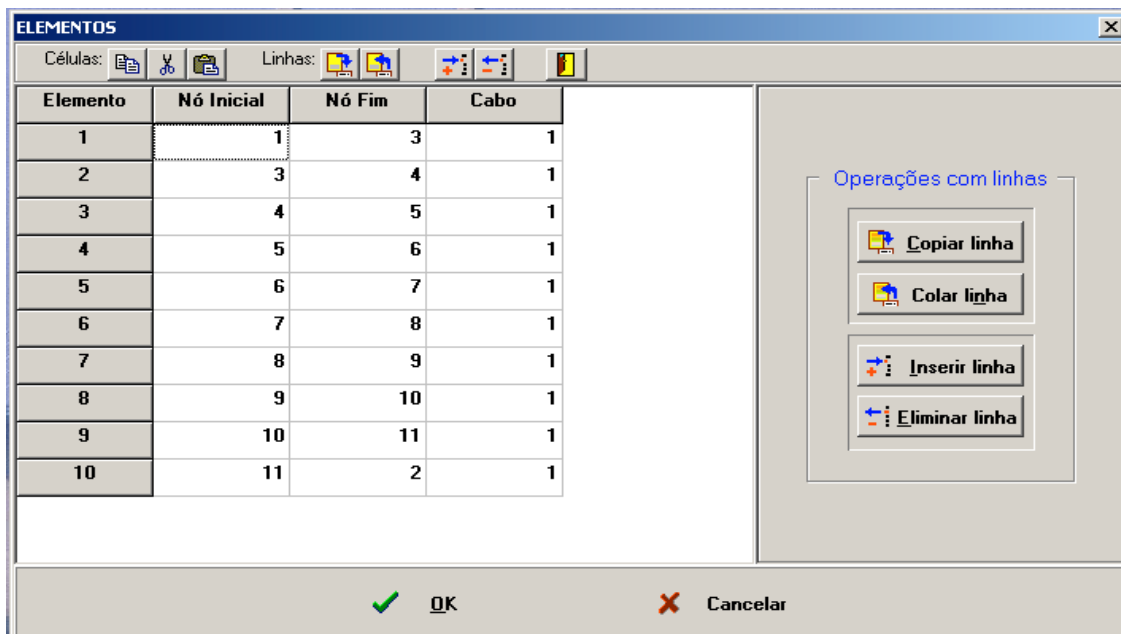


Figura 5.4 – Sub-menu *Elementos*

A Fig. 5.5, mostra o sub-menu *Restrição Nodal*, onde definem-se as vinculações externas dos nós da estrutura. Neste instante, toda a malha pode ser visualizada no sub-menu *Geometria do Contorno*, que mostra os cabos nas posições deslocadas e indelocadas, com os nós e elementos numerados.

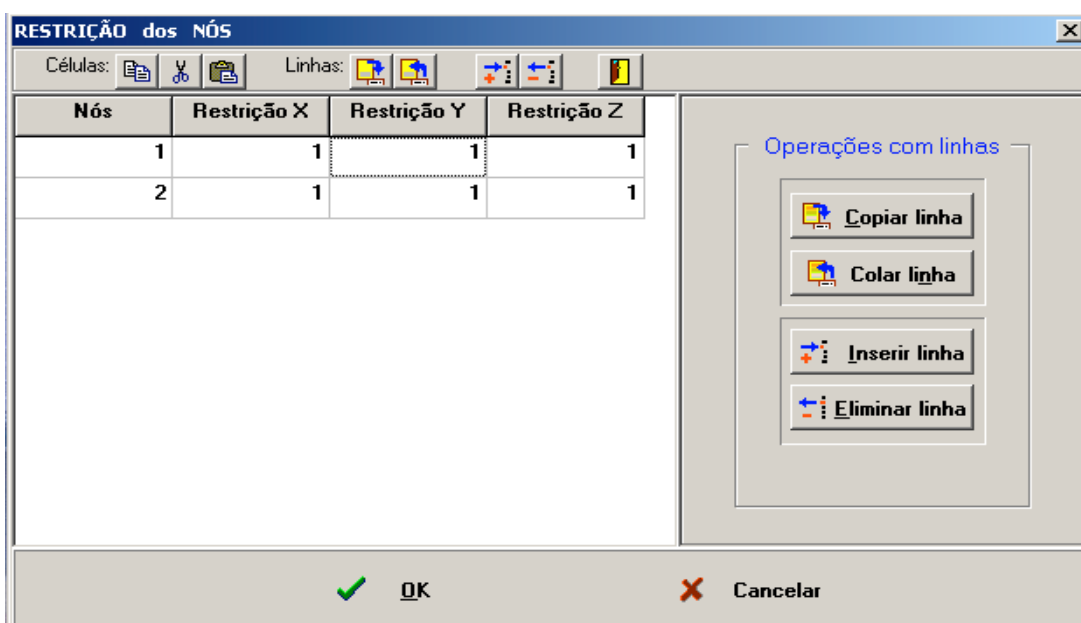


Figura 5.5 – Sub-menu *Restrição Nodal*

Na Fig. 5.6 a seguir, é mostrado o sub-menu *Lei Constitutiva*, no qual são definidos as propriedades físicas do material do cabo. Neste trabalho, foram implementados vários diagramas tensão-deformação, que resultam da combinação das 3 leis constitutivas a seguir: a lei 1 apresenta 2 trechos lineares, sendo o primeiro elástico e o segundo inelástico; a lei 2 compreende 3 trechos lineares, sendo o primeiro elástico e os outros 2 inelásticos e, finalmente, a lei 3, mais geral, conforme é mostrado na Fig. 5.6, compreendendo-se de 4 trechos lineares, sendo o primeiro elástico e os 3 últimos inelásticos.

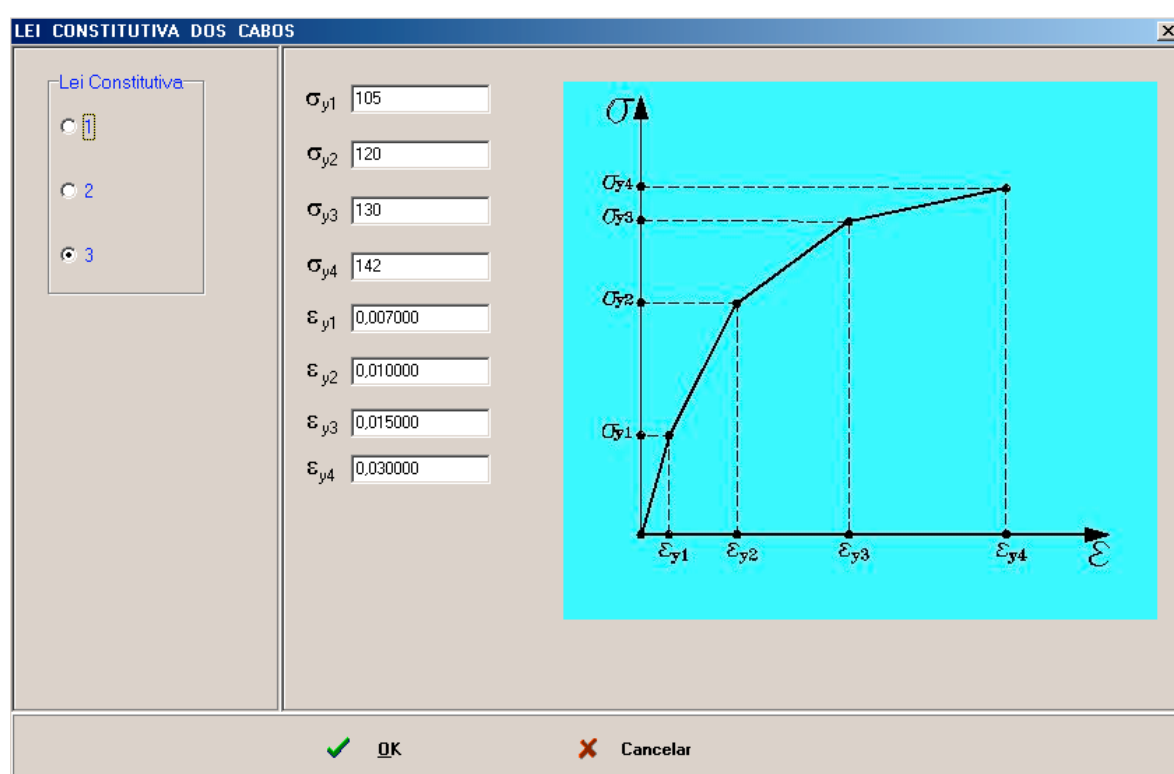


Figura 5.6 – Sub-menu *Lei Constitutiva*

Os carregamentos externos aplicados na estrutura, são fornecidos conforme o sub-menu *Carga nos nós*, Fig. 5.7, os quais constituem-se de forças concentradas aplicadas nos nós, segundo as direções x , y e z .

Finalmente, no sub-menu *Parâmetros de Controle*, Fig 5.8, são definidas as variáveis relativas ao processo incremental-iterativo, ou seja, o número de incrementos de carga, o número máximo de iterações, a tolerância desejada para a verificação da convergência e o fator de carga que define o percentual de carregamento para cada incremento. Na opção *Incremento Automático*, o

primeiro incremento é sempre devido ao peso próprio, sendo os demais devido ao carregamento externo, aplicado com fator de carga constante. Na opção *Incremento Manual*, o fator de carga pode ser variável.

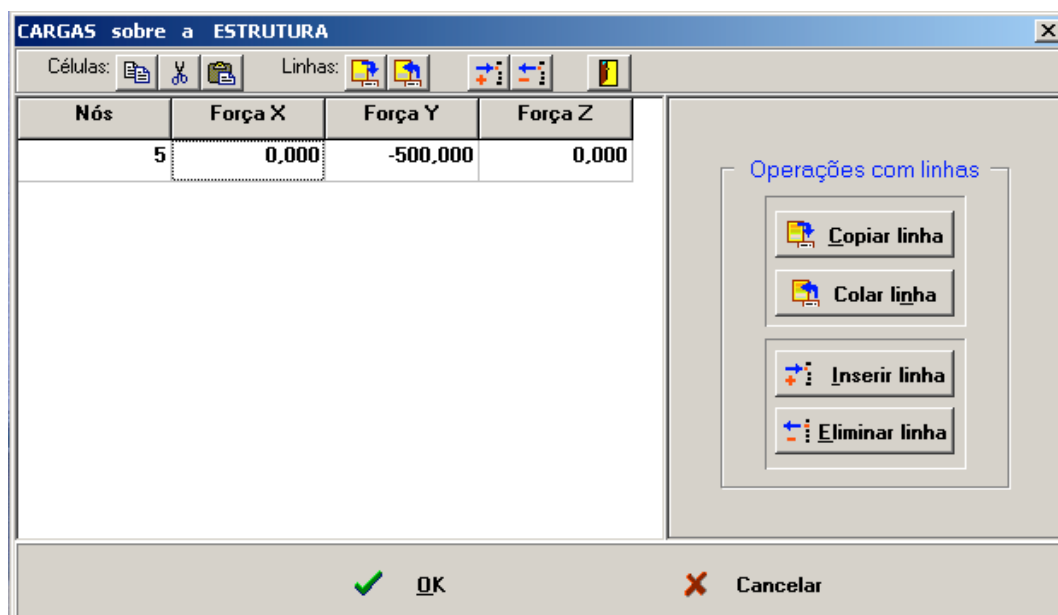


Figura 5.7 – Sub-menu *Carga nos Nós*

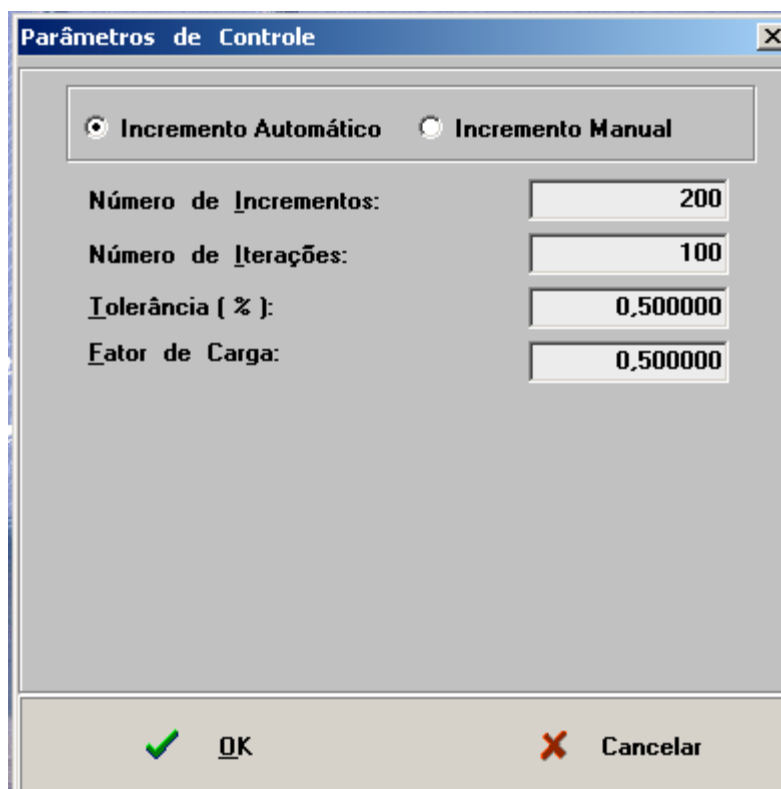


Figura 5.8 – Sub-menu *Parâmetros de Controle*

5.2 Análise Elástica Não-Linear Geométrica

Nos exemplos a seguir, analisa-se o comportamento das estruturas, considerando apenas a não-linearidade geométrica, ou seja, analisa-se o efeito dos grandes deslocamentos, considerando o material ainda na fase elástica.

5.2.1 Cabo suspenso sujeito ao peso próprio

O cabo suspenso mostrado na Fig. 5.9, submetido ao seu peso próprio, $p=5 \times 10^{-5}$ kN/cm, é apresentado em Hibbeler[1999] e analisado pelo programa *Cabos-NLFG* deste trabalho. O objetivo é comparar os resultados do programa com os resultados teóricos conhecidos, procurando avaliar a precisão e a eficiência da formulação desenvolvida, em função da variação do número de elementos adotados. O número de iterações necessárias para a convergência, assim como o tempo de processamento, também foram observados.

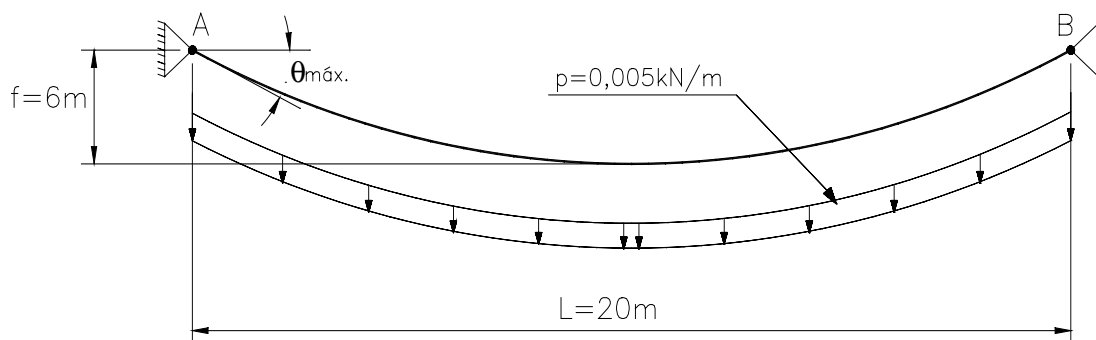


Figura 5.9 – Cabo suspenso sujeito a peso próprio

A configuração inicial de equilíbrio do cabo é obtida da equação da catenária, considerando-se a flecha $f=600$ cm, a área da seção transversal do cabo, $A=0,5$ cm² e o módulo de elasticidade $E=16500$ kN/cm². Após a definição da configuração inicial de equilíbrio, o peso próprio é transformado em cargas equivalentes aplicadas nos nós, levando aos resultados da Tab. 5.1, onde mostram-

se os resultados obtidos por Hibbeler[1999] e pelo programa *Cabos-NLFG*, para determinadas variáveis em função da variação do número de elementos.

Observa-se a precisão entre os valores dos resultados analíticos e numéricos e, que a mesma cresce, à medida que aumenta-se o número de elementos utilizados, embora uma divisão com 20 elementos já mostra uma excelente correlação. O número de iterações manteve-se baixo, independentemente do número de elementos considerados. O tempo de processamento observado foi de 1s para o cabo com até 500 elementos e de 2s para 1000 elementos.

Variáveis	Resultado Hibbeler[1999]	Resultados do Programa Cabos-NLFG					
		10 elem.	20 elem.	50 elem.	100 elem.	500 elem.	1000 elem.
Comprimento do cabo (S_0)-cm	2420.00	2415.47	2417.99	2418.69	2418.79	2418.82	2418.82
Flecha (f) -cm	600.00	599.97	599.99	600.00	600.00	600.00	600.00
Tração máxima(T) - N	75.90	70.05	72.87	74.66	75.29	75.81	75.88
Força horizontal (H_0)-N	45.90	46.05	45.97	45.95	45.95	45.94	45.94
Ângulo máximo ($\theta_{\text{máx}}$) - Graus	52.80	48.89	50.86	52.01	52.39	52.70	52.74
Número de iterações		2	1	1	1	1	1

Tabela 5.1 – Resultados teóricos e do programa do exemplo 5.2.1

A Fig. 5.10, mostra a tela do programa, sub-menu *Geometria do Contorno*, com a configuração inicial de equilíbrio do cabo com 10 elementos.

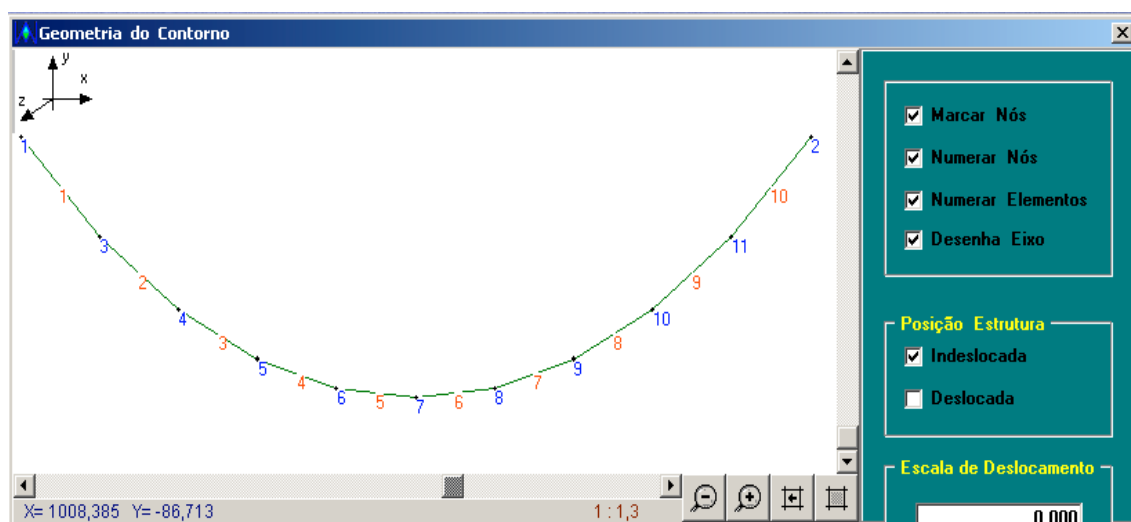


Figura 5.10 – Configuração de equilíbrio do cabo com 10 elementos

5.2.2 Cabo suspenso sujeito a cargas concentradas

Com os mesmos objetivos do exemplo anterior, de avaliar a precisão do programa e a consistência da formulação, analisa-se a estrutura da Fig. 5.11, submetida a cargas concentradas, também extraído de Hibbeler[1999].

Pede-se para calcular o comprimento de um cabo para vencer um vão de 18m, de forma que a flecha máxima a 8m do apoio *A*, seja igual a $f=12\text{m}$. O cabo tem cargas concentradas de 4kN, 15kN e 3kN aplicadas, respectivamente, a 3m, 8m e 16m do apoio *A*.

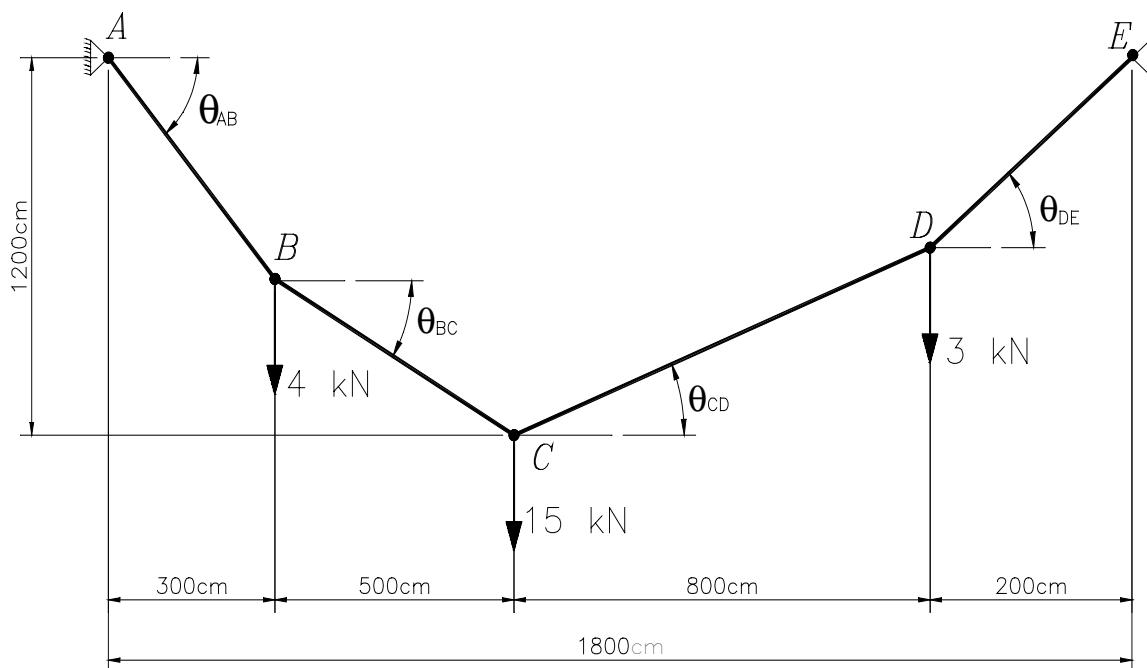


Figura 5.11 – Cabo suspenso sujeito a cargas concentradas

Obteve-se inicialmente uma curva de catenária para representar a configuração de equilíbrio do cabo, adotando-se uma flecha inicial no valor de $f=11\text{m}$, peso próprio $p=2,5 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}$, área $A=2,5 \text{ cm}^2$ e módulo de elasticidade $E=16500 \text{ kN/cm}^2$.

A Fig. 5.12, mostra a tela do programa, com a configuração inicial do cabo representado com 18 elementos.

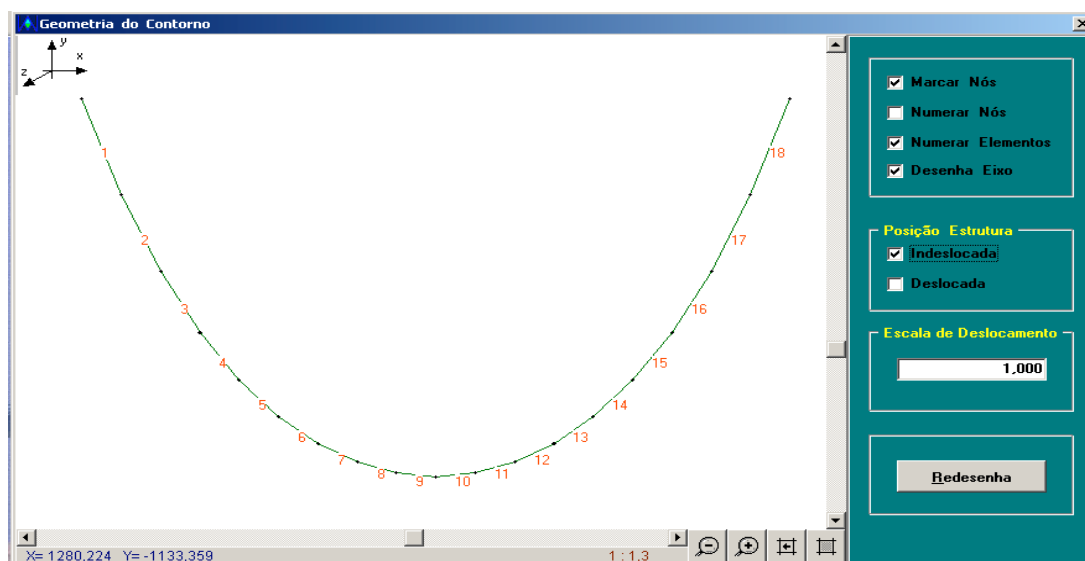


Figura 5.12 – Geometria inicial do cabo com 18 elementos

A Fig. 5.13, mostra a tela do programa, com o cabo nas suas posições deslocada e indeslocada.

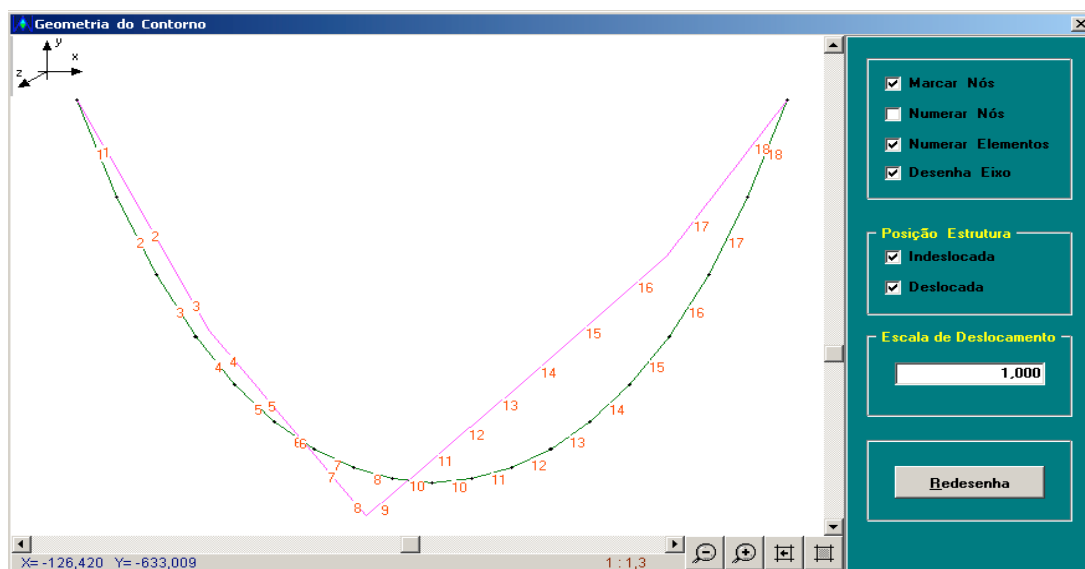


Figura 5.13 – Geometria do cabo nas posições inicial e final

As cargas concentradas foram aplicadas em 100 incrementos iguais, sendo necessárias no máximo 10 iterações para a convergência. Os resultados para comparação são apresentados nas Tabs. 5.2 e 5.3.

A Tab. 5.2 mostra as variáveis relativas à geometria do cabo, como flecha máxima, comprimento final e as inclinações de cada trecho.

Resultados	Comprimento (cm)	flecha máxima (cm)	Ângulo θ_{AB} (graus)	Ângulo θ_{BC} (graus)	Ângulo θ_{CD} (graus)	Ângulo θ_{DE} (graus)
Hibbeler [1999]	3015,00	1200,00	62,20	51,60	47,90	57,70
Programa Cabos-NLFG	3024,07	1199,95	63,33	53,52	45,04	55,94

Tabela 5.2 – Resultados relativos à geometria do exemplo 5.2.2

Na Tab. 5.3, são apresentados os esforços e as reações do cabo, observando-se em ambas as tabelas, a boa correlação entre os resultados.

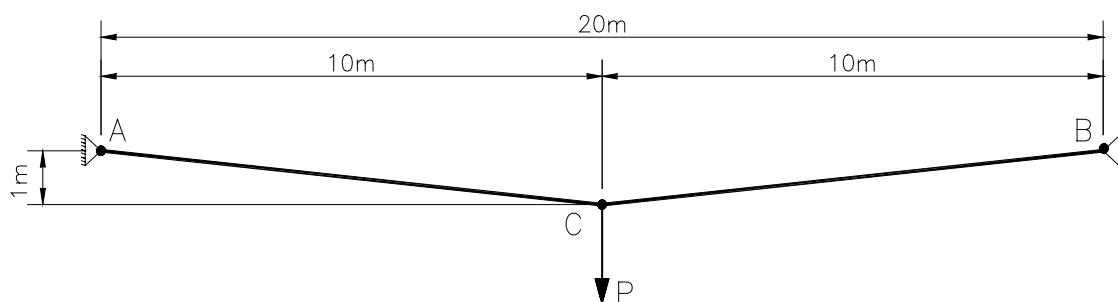
Resultados	Tração AB (kN)	Tração BC (kN)	Tração CD (kN)	Tração DE (kN)	Reações de Apoio		
					HA=HB= (kN)	VA (kN)	VB (kN)
Hibbeler [1999]	13.60	10.20	9.44	11.80	6.33	12.00	10.00
Programa Cabos-NLFG	14.56	10.99	9.25	11.67	6.54	13.05	9.71

Tabela 5.3 – Resultados relativos a esforços e reações do exemplo 5.2.2

Neste exemplo, o tempo máximo de processamento foi de 1s.

5.2.3 Cabo suspenso com dois elementos

Este exemplo tem como objetivo comparar os resultados do programa *Cabos-NLFG*, com os resultados dos programas *ANSYS*, *LUSAS* e o *MEF-cabos* desenvolvido por Aguiar[1999]. Trata-se de um cabo suspenso com 2 elementos, conforme Fig.5.14, de vão $L=20\text{m}$ e flecha inicial $f=1\text{m}$, sujeito a um carga concentrada, $P=10\text{kN}$ aplicada no meio do vão. Adotou-se uma área $A=1\text{cm}^2$ e



um módulo de elasticidade de $E=1000\text{kN/cm}^2$.

Figura 5.14 – Cabo suspenso com 2 elementos

A Tab. 5.4 mostra os resultados obtidos pelos vários programas para a tração nos cabos e o deslocamento vertical do ponto *C*, confirmando a boa correlação entre os resultados. Os valores obtidos pelo programa *Cabos-NLFG* correspondem a 10 incrementos iguais de carga, sendo adotada uma tolerância $TOLER=0,1\%$.

	Cabos-NLFG	MEF-Cabos	ANSYS	LUSAS
Tração (N)	21936,765	21936,714	21937,000	21670,000
Deslocamento (cm)	134,090	134,090	134,095	131,889

Tabela 5.4 – Resultados do exemplo 5.2.3 por vários programas

A Tab. 5.5 relaciona o número de iterações, número de incrementos, os deslocamentos e a força de tração nos elementos. Durante o processamento da estrutura, observou-se que com o aumento do número de incrementos da carga, a convergência ocorreu com um número menor de iterações.

	Número de Incrementos				
	4	10	100	500	1000
Número de Iterações	4	3	2	2	2
Tração (N)	21939,547	21936,765	21937,184	21936,733	21936,719
Deslocamento (cm)	134,103	134,090	134,092	134,090	134,090

Tabela 5.5 – Resultados do exemplo 5.2.3 pelo programa *Cabos-NLFG*

O tempo de processamento para qualquer caso analisado pelo programa *Cabos-NLFG*, não ultrapassou 1s.

5.2.4 Cabo suspenso sujeito ao peso próprio e carga concentrada com número de elementos variáveis

Neste exemplo, estuda-se o comportamento do cabo livremente suspenso sob ação do peso próprio e de uma carga concentrada $P=35,60\text{kN}$ aplicada a 121,9m do apoio *A*, conforme mostra a Fig. 5.15. A estrutura com 304,8m de vão, foi originalmente apresentada por Michalos&Birnstiel e analisada por Aguiar[1999], especificando uma cordoalha de sistema fechado de 1 1/8” de diâmetro, com área $A=5,484\text{cm}^2$ e módulo de elasticidade igual a $E=13102,4\text{kN/cm}^2$. A configuração

inicial de equilíbrio foi obtida da equação da catenária, com uma flecha inicial de 30,5m e peso próprio de 47,026 N/m.

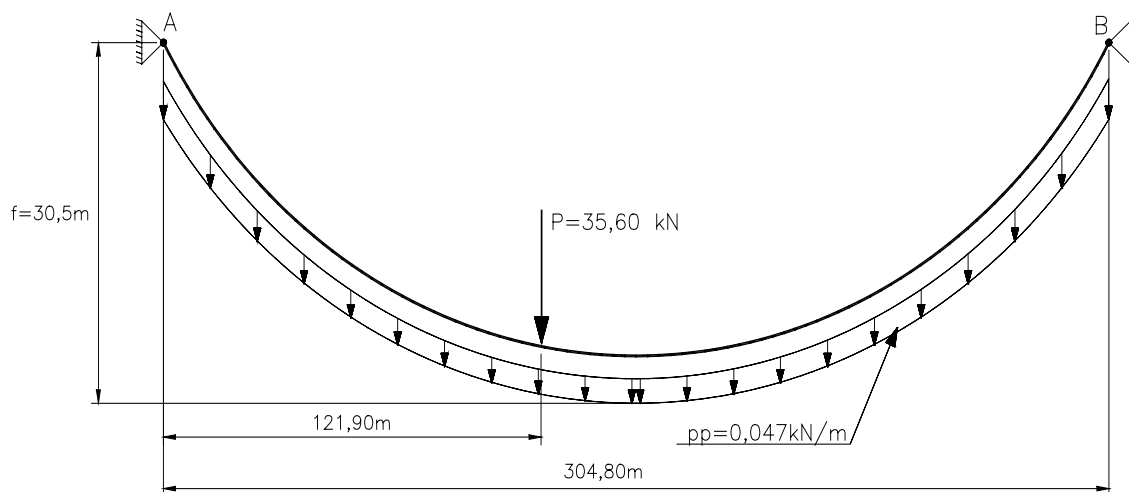


Figura 5.15 – Cabo suspenso sob carregamento concentrado e peso próprio

A tela do programa do sub-menu *Geometria do Contorno*, mostra o cabo representado com 100 elementos, nas posições de equilíbrio inicial e deslocada.

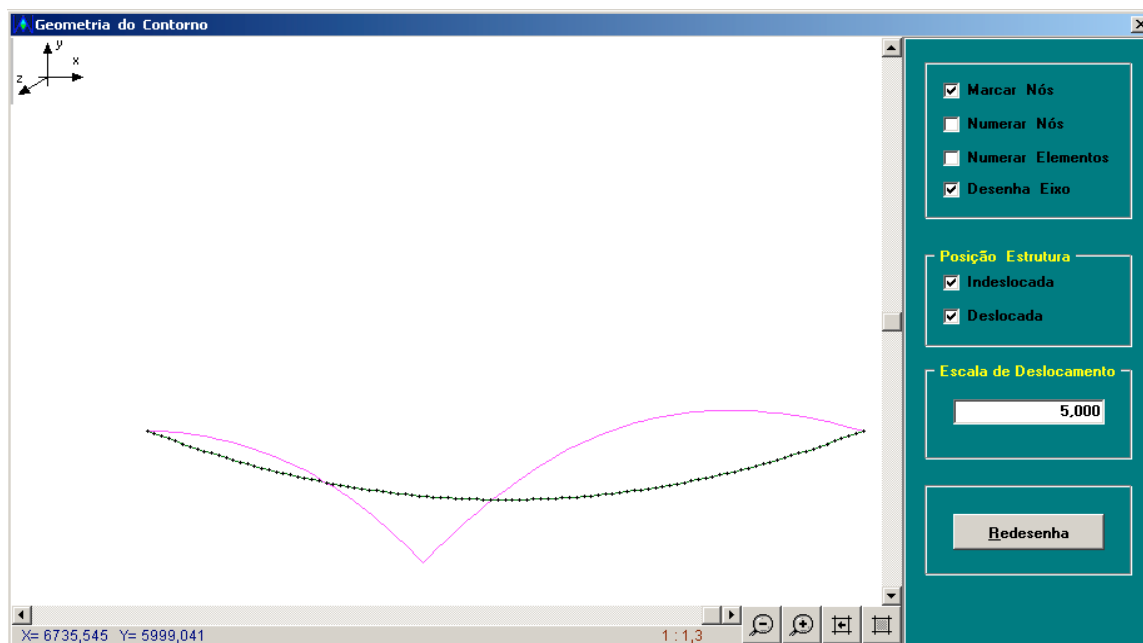


Figura 5.16 – Estrutura da Fig. 5.15 nas posições de equilíbrio inicial e final

Para a estrutura dividida com 10 elementos, a Tab. 5.6 apresenta os resultados dos esforços de tração obtidos do programa *MEF-cabos* de Aguiar[1999] e os resultados do programa *Cabos-NLFG*, obtidos com 10 incrementos de carga e

0,1% de tolerância para convergência. Pela tabela, observa-se a excelente correlação entre os resultados.

Elementos	Esforços (N) Programa Cabos-NLFG	Esforços (N) Programa MEF-cabos	Cabos-NLFG / MEF-cabos (%)
1	93987,619	94091,636	99.89
2	93547,765	93663,192	99.88
3	93139,777	93264,553	99.87
4	92760,210	92892,353	99.86
5	90690,256	90837,092	99.84
6	90910,746	91055,341	99.84
7	91155,118	91295,534	99.85
8	91425,150	91559,399	99.85
9	91723,155	91849,198	99.86
10	92051,999	92167,742	99.87

Tabela 5.6 – Esforços nos elementos para a estrutura da Fig. 5.15

Na Tab. 5.7, apresentam-se os resultados de um estudo comparativo com o programa *MEF-cabos* de Aguiar[1999], do número de iterações necessários para a convergência da solução, obtidos com 100 incrementos de carga, dividindo-se o cabo em 10, 100 e 1000 elementos. Os baixos valores do número de iterações para a convergência pelo programa *Cabos-NLFG*, mostram a eficiência da formulação adotada.

PROGRAMA	Número de Elementos		
	10	100	1000
	Número de Iterações		
MEF-cabos	13	13	13
Cabos-NLFG	2	2	2

Tabela 5.7 – Número de iterações x número de elementos

Na Tab.5.8, analisou-se o comportamento da estrutura variando-se o número de incrementos de carga e mantendo-se o número de elementos constante e igual a 20. Considerou-se o esforço de tração máximo, a flecha máxima e o número de iterações necessárias para a convergência.

Da análise dos resultados da Tab.5.8, observou-se que o número de iterações para convergência foi maior nos casos de poucos incrementos no carregamento.

Isso acontece porque poucos incrementos significam que altos valores de cargas estão sendo aplicados ao cabo, levando a grandes deslocamentos e grandes deformações, tornando o processo iterativo mais lento.

As grandes deformações podem levar ao escoamento prematuro do cabo, por exemplo, para 2 e 5 incrementos de cargas do presente exemplo, foi necessário fixar uma tensão de escoamento, respectivamente, da ordem de 20 e 2 vezes maior. Conclui-se daí que, numa análise elástica, poucos incrementos de carga não influenciarão nos resultados, apesar de fixarmos uma tensão de escoamento fictícia. Já numa análise inelástica, o aumento do número de incrementos é imprescindível para conduzir a bons resultados.

Número de incrementos	Programa Cabos-NLFG						
	2 inc.	5 inc.	10 inc.	50 inc.	100 inc.	500 inc.	1000 inc.
Esforço de tração máximo (N)	93818,842	93841,348	93819,533	93821,602	93819,275	93818,546	93818,523
Flecha máxima (cm)	3504,672	3504,728	3504,667	3504,681	3504,669	3504,665	3504,665
Número de iterações	9	7	5	2	2	2	1

Tabela 5.8 – Número de incrementos x tração máxima, flecha máxima e número de iterações

A Tab. 5.9 mostra os esforço de tração máxima, a flecha máxima do cabo e o tempo de processamento em função da variação do número de elementos utilizados. As cargas foram aplicadas em 100 incrementos iguais, sendo necessárias no máximo 2 iterações para a convergência. A tabela mostra que a variação dos valores dos resultados em função do aumento do número de elementos é pequena, ou seja, uma divisão do cabo em 20 elementos já mostra uma excelente correlação.

Número de Elementos	Programa Cabos-NLFG					
	10 elem.	20 elem.	50 elem.	100 elem.	500 elem.	1000 elem.
Esforço de tração máximo (N)	93987,404	93819,275	93810,994	93823,466	93838,907	93841,179
Flecha máxima (cm)	3493,125	3504,669	3507,892	3508,353	3508,500	3508,505
Tempo de proces. (segundos)	1	1	1	1,5	18	133

Tabela 5.9 – Número de elementos x tração máxima, flecha máxima e tempo de processamento

5.2.5 Cabo suspenso sujeito a carga distribuída ao longo do vão e cargas concentradas

Este exemplo, também analisado por Sussekind[1980], tem como objetivo avaliar a precisão dos resultados do programa *Cabos-NLFG*, ao se aplicar ao cabo elevadas cargas concentradas e distribuída ao longo do vão. O cabo tem 100m de vão e foi analisado com 20 elementos. O carregamento está indicado na Fig. 5.17 e foi aplicado em 100 incrementos iguais, sendo a carga distribuída, transformada em cargas equivalentes concentradas nos nós.

Admitiu-se uma configuração inicial de equilíbrio obtida da equação da catenária, com uma flecha inicial $f=10,04\text{m}$, peso próprio $p=0,1\text{kN/m}$, área da seção transversal $A=10\text{cm}^2$ e módulo de elasticidade $E=16500\text{kN/cm}^2$.

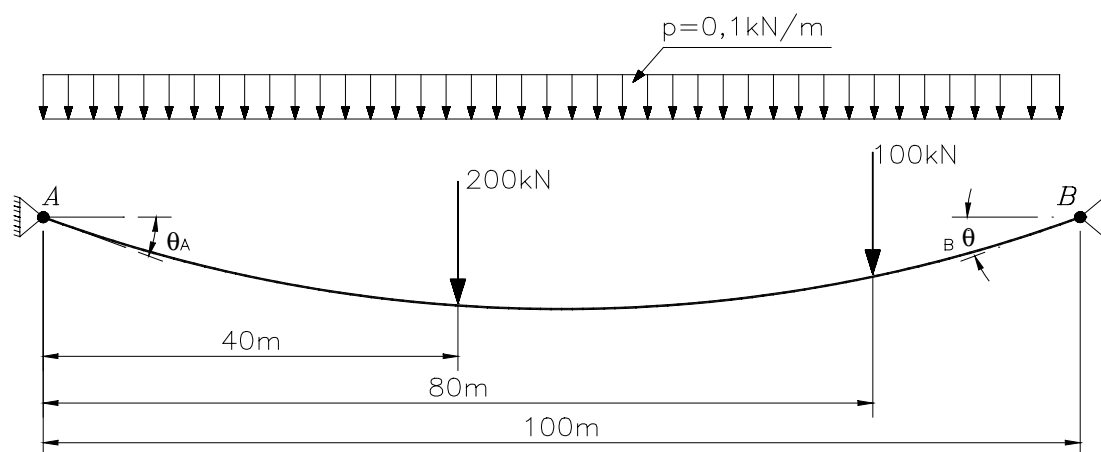


Figura 5.17 – Cabo livremente suspenso submetido a carga distribuída ao longo do vão e cargas concentradas

A Tab.5.10, apresenta as reações de apoio, a tração máxima, as inclinações máximas, o comprimento final e a flecha máxima alcançada pelo cabo, obtidos do programa *Cabos-NLFG*.

Foi adotada uma tolerância $TOLER=0,1\%$ para convergência, sendo necessárias no máximo 7 iterações para a convergência. Nos resultados apresentados na tabela 5.10, observa-se a boa correlação entre os resultados analíticos e do programa.

Resultados	Reações de apoio (kN)	Tração Máxima (kN)	Inclinações nos apoios	Comp. Final do cabo (m)	Flecha máxima final do cabo (m)
Sussekind[1980]	HA=HB= 1000,00 VA= 390,00 VB= 410,00	1080,80	$\theta_A = 21,31$ $\theta_B = 22,29$	103,28	11,60
Cabos-NLFG	HA=HB= 1009,27 VA= 395,39 VB= 414,87	1079,35	$\theta_A = 20,76$ $\theta_B = 21,72$	103,28	11,60

Tabela 5.10 – Tabela comparativa para o cabo da Fig. 5.13

A Fig. 5.18 mostra a tela do programa, com o cabo representado com 20 elementos, nas posições inicial e final. O tempo máximo de processamento foi de 1s.

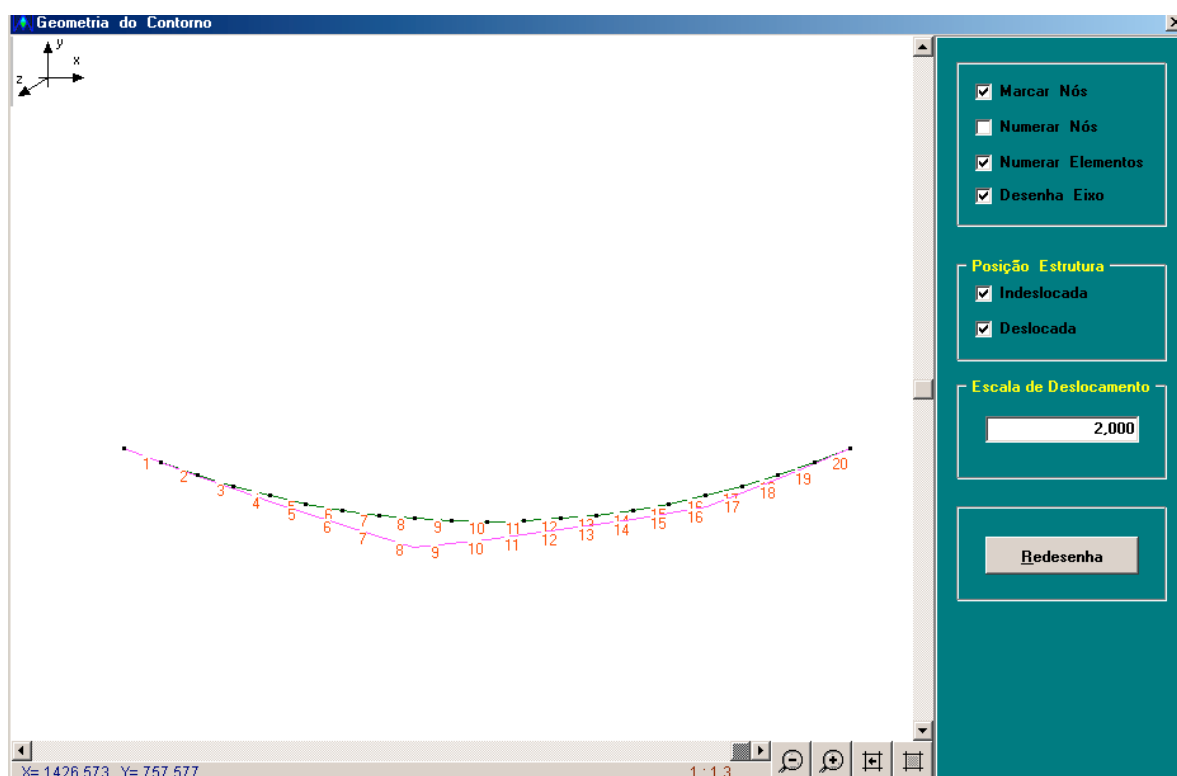


Figura 5.18 – Posições inicial e final do cabo da Fig. 5.17

5.3 Análise Não-Linear Geométrica e Física

Nos exemplos a seguir, além dos grandes deslocamentos, será analisado o comportamento inelástico dos cabos, ou seja, tanto a análise não-linear geométrica (NLG) quanto a física do material (NLF), serão considerados na análise.

5.3.1 Estrutura hiperestática com 3 cabos

Este exemplo clássico tem como objetivo demonstrar que, para estruturas tanto em regime elástico quanto em regime elasto-plástico, o programa desenvolvido, baseado na formulação apresentada neste trabalho, tem sua eficiência comprovada. A estrutura da Fig. 5.19 será analisada para 3 casos de comportamento elasto-plástico, representados por 3 leis constitutivas, considerando a análise incremental das tensões e deformações apresentadas no item 4.7.

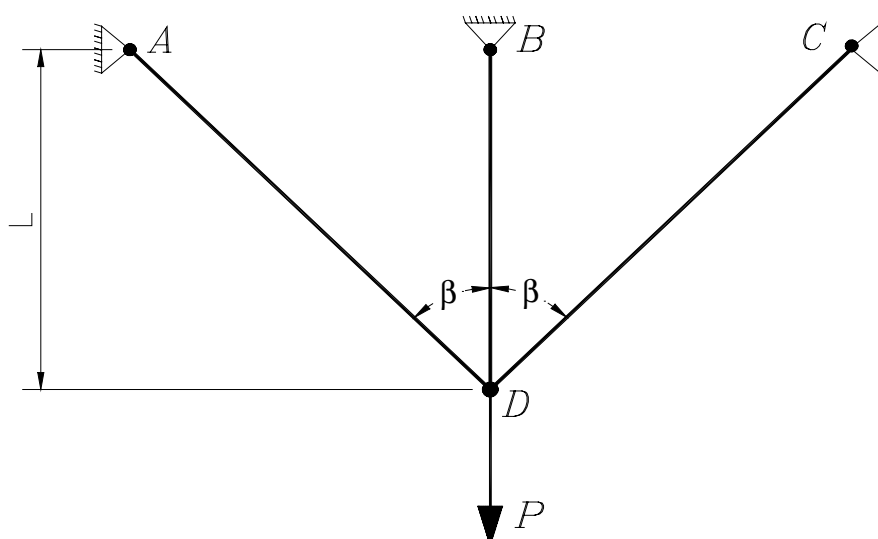


Figura 5.19 – Estrutura hiperestática com 3 cabos em regime elasto-plástico

a) Lei constitutiva 01

Considere a estrutura indicada na Fig. 5.19, onde os cabos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo módulo de elasticidade $E=20500\text{kN/cm}^2$, a mesma tensão de escoamento $\sigma_e=34,5\text{kN/cm}^2$, mesma área da seção transversal $A=12,51\text{cm}^2$.

A carga aplicada vale $P=1050\text{kN}$, sendo ainda $L=200\text{cm}$ e $\beta=45^\circ$. A lei constitutiva adotada neste caso considera o comportamento elasto-plástico perfeito, conforme diagrama $\sigma \times \epsilon$ da Fig. 5.20.

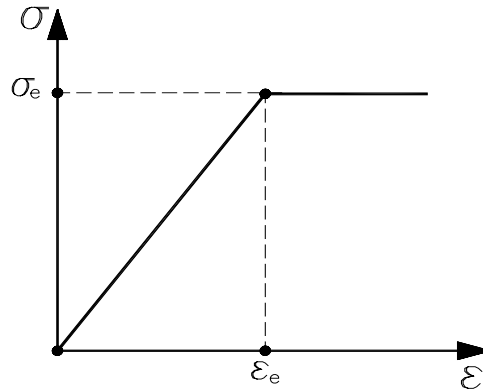


Figura 5.20 – Comportamento elasto-plástico perfeito- lei constitutiva 01

Os resultados obtidos são comparados com os resultados teóricos, cujas equações oriundas da Mecânica dos Sólidos são apresentados a seguir. Durante a fase em que os três cabos estão no regime elástico tem-se:

$$F_1 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} ; F_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta} ; \delta_D = \frac{(P - F_2)L}{2EA \cos^3 \beta} = \frac{F_2 L}{EA} \quad (5.1)$$

onde δ_D é o deslocamento do ponto D , F_1 são os esforços que atuam nos cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ e F_2 é o esforço que atua no cabo $\overline{BD}$.

Após o escoamento do cabo central $\overline{BD}$, que se dá quando P atinge a carga de escoamento $P_e = \sigma_e A(1 + 2 \cos^3 \beta) = 736,78 \text{ kN}$, os esforços nos cabos e o deslocamento do ponto D , são dados por:

$$F_1 = \frac{(P - \sigma_e A)}{2 \cos \beta} ; F_2 = \sigma_e A = \text{constante} ; \delta_D = \frac{(P - P_e)L}{2EA \cos^3 \beta} + \frac{F_2 L}{EA} \quad (5.2)$$

A estrutura entra em colapso quando atinge a carga limite, $P_{LIM} = \sigma_e A(1 + 2 \cos \beta) = 1041,97 \text{ kN}$.

Aplicou-se o carregamento máximo $P=1050\text{kN}$ em 11 incrementos de carga conforme os percentuais indicados nas Tabs.5.11 e 5.12. Na Tab.5.11 são apresentados os resultados analíticos obtidos usando-se as Eqs. (5.1) e (5.2), e na Tab.5.12 os resultados fornecidos pelo programa *Cabos-NLFG*.

Resultados Analíticos						
Incrementos	(%)	(%) Total	P (kN)	F1 (kN)	F2 (kN)	δ_D (cm)
01	20.00%	20.00%	210.00	61.51	123.02	0.096
02	20.00%	40.00%	420.00	123.02	246.03	0.192
03	20.00%	60.00%	630.00	184.52	369.05	0.288
04	10.00%	70.00%	735.00	215.28	430.55	0.336
05	5.00%	75.00%	787.50	251.66	431.60	0.393
06	5.00%	80.00%	840.00	288.79	431.60	0.450
07	5.00%	85.00%	892.50	325.91	431.60	0.508
08	5.00%	90.00%	945.00	363.03	431.60	0.566
09	5.00%	95.00%	997.50	400.16	431.60	0.624
10	4.30%	99.30%	1042.65	432.08	431.60	0.674
11	0.70%	100.00%	1050.00			

Tabela 5.11 – Resultados analíticos considerando a lei constitutiva 01

Resultados do Programa Cabos-NLFG						
Incrementos	(%)	(%) Total	P (kN)	F1 (kN)	F2 (kN)	δ_D (cm)
01	20,00%	20,00%	210,00	61,52	123,02	0,096
02	20,00%	40,00%	420,00	123,02	245,98	0,192
03	20,00%	60,00%	630,00	184,52	368,90	0,288
04	10,00%	70,00%	735,00	215,26	430,33	0,336
05	5,00%	75,00%	787,50	251,42	431,60	0,392
06	5,00%	80,00%	840,00	288,47	431,60	0,450
07	5,00%	85,00%	892,50	325,50	431,60	0,507
08	5,00%	90,00%	945,00	362,53	431,60	0,565
09	5,00%	95,00%	997,50	399,54	431,60	0,623
10	4,30%	99,30%	1042,65	431,36	431,60	0,672
11	0,70%	100,00%	1050,00			

Tabela 5.12 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 01

Observa-se que os esforços nos cabos, assim como os valores dos deslocamentos, mostram a boa precisão entre os resultados das duas análises. Até 70% do carregamento ($P=735kN$) todos os cabos trabalham em regime elástico contribuindo para a rigidez do sistema. A partir desta carga, o cabo $\overline{BD}$ escoou, permanecendo com esforço constante, ($F_2=431,60kN$), e deixa de contribuir para a rigidez da estrutura. Apenas os cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ resistem aos esforços adicionais e a rigidez do sistema diminui, conforme indica a mudança de inclinação da curva da Fig. 5.21.

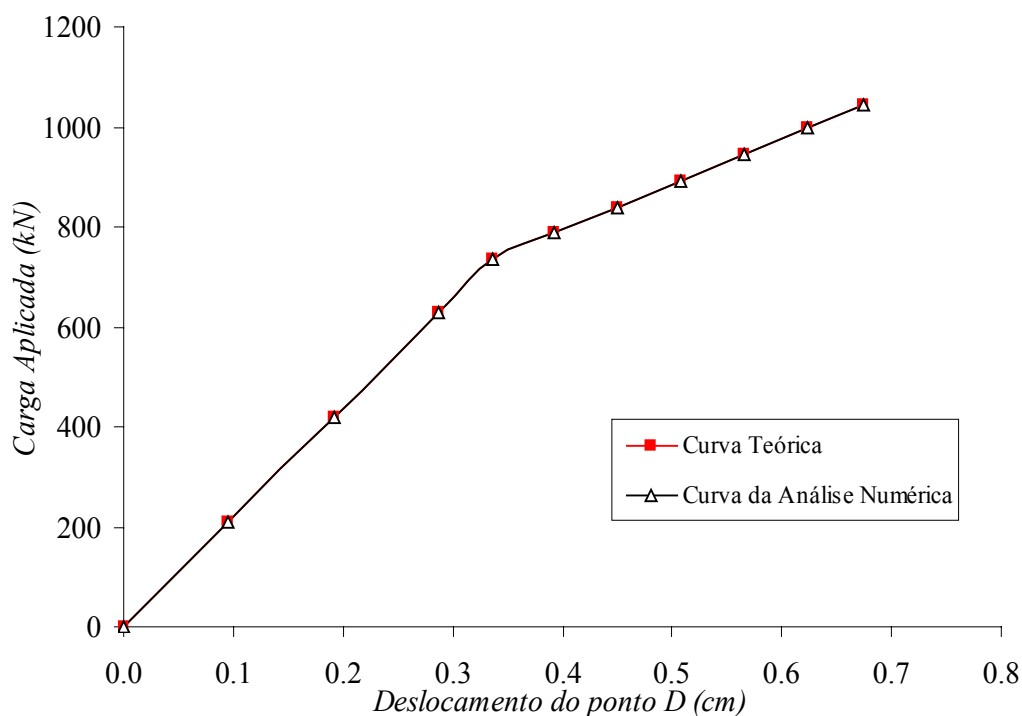


Figura 5.21 – Curva carga x deslocamento para a estrutura da Fig.5.19 com a lei constitutiva 01

A seguir é apresentada uma parte do arquivo de saída dos resultados do programa *Cabos-NLFG*, que consta no menu resultados para os incrementos 4 e 10, deste exemplo.

```

*****
*                               *
*      Universidade Federal de Minas Gerais      *
*      Departamento de Engenharia de Estruturas  *
*                               *
*      PROGRAMA Cabos-NLFG                      *
*      Desenvolvido e Implementado por: Eng. EDVALDO JOAQUIM P. JUNIOR *
*      Sob a Orientação de: Prof. Dr. Eng. ARMANDO CESAR CAMPOS LAVALL *
*      Belo Horizonte - Minas Gerais - Brasil, Julho de 2.002          *
*****

```

(1) VARIÁVEIS RELATIVAS À GEOMETRIA DA ESTRUTURA.

(1.1) Número de nós da estrutura = 4

(1.2) COORDENADAS NODAIS:

NÓ	COORDENADA X	COORDENADA Y	COORDENADA Z
1	0	0	0
2	200	0	0
3	400	0	0
4	200	-200	0

(1.3) Número de elementos = 3

(1.4) INCIDÊNCIA DOS ELEMENTOS:

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2
1	1	4
2	2	4
3	3	4

(1.5) RESTRIÇÕES NODAIS:

0 = Direção não restringida.

1 = Direção restringida.

RESTRIÇÕES			
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	0	0	1

(2) VARIÁVEIS RELATIVAS À LEI CONSTITUTIVA DO CABO

E = Módulo de elasticidade ou de Young.

Fy1, Fy2 = Tensões Limites nos trechos 1 e 2 respectivamente

ep1, ep2 = Deformações Limites nos trechos 1 e 2 respectivamente

Et1 = Módulo tangente do trecho 02

LEI CONST.	Fy1	Fy2	ep1	ep2	E	Et1
0	34,5	34,5	0,001683	0,04	20499,1087344029	0

(3) VARIÁVEIS RELATIVAS ÀS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS:

CABO = Número do cabo.

A = Área da seção transversal do cabo.

Num. Elm. = Número de elementos do cabo.

CABO	A	Num. Elm.
1	12.5100000000	1
2	12.5100000000	1
3	12.5100000000	1

(4) VARIÁVEIS RELATIVAS ÀS CARGAS NODAIS:

CARGAS EXTERNAS			
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z
4	0	-1050	0

(5) VARIÁVEIS RELATIVAS AO CONTROLE INCREMENTAL, ITERATIVO E DE CONVERGÊNCIA.

Número de incrementos de carga = 11

Número máximo de iterações = 100

Tolerância = 0,1

Fator de Carga

1	20,000000
2	20,000000
3	20,000000
4	10,000000
5	5,000000
6	5,000000
7	5,000000
8	5,000000
9	5,000000
10	4,300000
11	0,700000

***** RESULTADOS *****

(1) COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS E COSENOS DIRETORES
NA POSIÇÃO INDESLOCADA:

ELEMENTO	COMPRIMENTO	COSENO ALFA	COSENO BETA	COSENO GAMA
1	282.84271	0.70711	-0.70711	0.00000
2	200.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
3	282.84271	-0.70711	-0.70711	0.00000

(2) ESFORÇOS NORMAIS

* INCREMENTO DE CARGA: 4
 * ITERAÇÃO: 1
 * FATOR DE CARGA: 0,700000

ELEMENTO	ESFORÇOS NORMAIS
1	215.25691
2	430.33344
3	215.25691

(3) REAÇÕES DE APOIO:

REACOES				
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z	
1	-152.08327	152.33328	0.00000	
2	-0.00000	430.33344	0.00000	
3	152.08327	152.33328	0.00000	
4	0.00000	0.00000	0.00000	

(4) DESLOCAMENTOS NODAIS:

DESLOCAMENTOS				
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z	
1	0.00000	0.00000	0.00000000	
2	0.00000	0.00000	0.00000000	
3	0.00000	0.00000	0.00000000	
4	0.00000	-0.33562	0.00000000	

(5) COORDENADAS DOS NÓS NA POSIÇÃO DESLOCADA:

NÓ	COORDENADA X	COORDENADA Y	COORDENADA Z
1	0	0	0
2	200	0	0
3	400	0	0
4	200	-200,335616114598	0

(6) COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS E COSENOS DIRETORES
NA POSIÇÃO DESLOCADA:

ELEMENTO	COMPRIMENTO	COSENO ALFA	COSENO BETA	COSENO GAMA
1	283.08013	0.70651	-0.70770	0.00000
2	200.33562	0.00000	-1.00000	0.00000
3	283.08013	-0.70651	-0.70770	0.00000

(7) DEFORMAÇÃO PLÁSTICA:

ELEMENTO	DEFORMAÇÃO PLÁSTICA
1	0.000000000
2	0.000000000
3	0.000000000

(8) DEFORMAÇÃO TOTAL DOS ELEMENTOS = DEF.ELAST.+ DEF.PLAST.

ELEMENTO	DEFORMAÇÃO TOTAL
1	0.000839392
2	0.001678081
3	0.000839392

(2) ESFORÇOS NORMAIS

* INCREMENTO DE CARGA: 10

* ITERAÇÃO: 1

* FATOR DE CARGA: 0,993000

ELEMENTO	ESFORÇOS NORMAIS
1	431.36385
2	431.59500
3	431.36385

(3) REAÇÕES DE APOIO:

REAÇÕES				
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z	
1	-304.50949	305.52750	0.00000	
2	0.00000	431.59500	0.00000	
3	304.50949	305.52750	0.00000	
4	0.00000	0.00000	0.00000	

(4) DESLOCAMENTOS NODAIS:

DESLOCAMENTOS				
NÓ	DIREÇÃO X	DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z	
1	0.00000	0.00000	0.00000000	
2	0.00000	0.00000	0.00000000	
3	0.00000	0.00000	0.00000000	
4	0.00000	-0.67228	0.00000000	

(5) COORDENADAS DOS NÓS NA POSICAO DESLOCADA:

NÓ	COORDENADA X	COORDENADA Y	COORDENADA Z
1	0	0	0
2	200	0	0
3	400	0	0
4	200	-200,672275452487	0

(6) COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS E COSENOS DIRETORES
NA POSIÇÃO DESLOCADA:

ELEMENTO	COMPRIMENTO	COSENO ALFA	COSENO BETA	COSENO GAMA
1	283.31848	0.70592	-0.70829	0.00000
2	200.67228	0.00000	-1.00000	0.00000
3	283.31848	-0.70592	-0.70829	0.00000

(7) DEFORMAÇÃO PLÁSTICA:

ELEMENTO	DEFORMAÇÃO PLÁSTICA
1	0.000000000
2	0.001678377
3	0.000000000

(8) DEFORMAÇÃO TOTAL DOS ELEMENTOS = DEF.ELAST.+ DEF.PLAST.

ELEMENTO	DEFORMAÇÃO TOTAL
1	0.001682099
2	0.003361377
3	0.001682099

b) Lei constitutiva 02

Para a mesma estrutura da Fig. 5.19 anterior, adotar a lei constitutiva elasto-plástica conforme diagrama $\sigma \times \varepsilon$ da Fig. 5.22. Os valores das tensões e deformações limites que definem cada trecho são: trecho elástico ($\sigma_{y1}=17,25\text{kN/cm}^2$, $\varepsilon_{y1}=0,0008415$); trecho elasto-plástico 01 ($\sigma_{y2}=34,5\text{kN/cm}^2$, $\varepsilon_{y2}=0,0029451$); trecho elasto-plástico 02 ($\sigma_{y3}=34,5\text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_{y3}=0,0168293$).

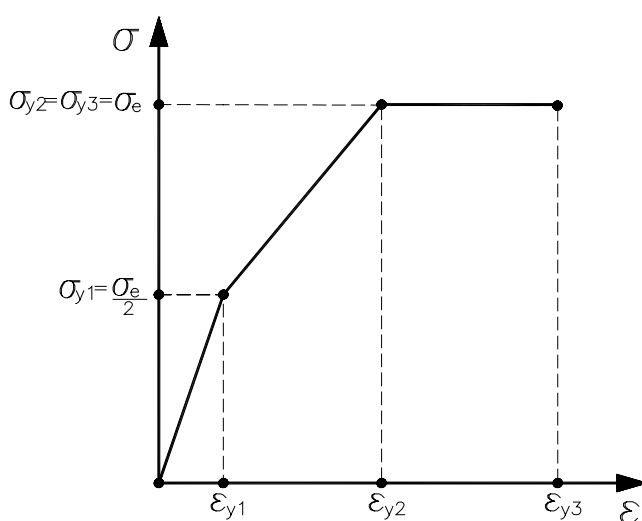


Figura 5.22 – Comportamento elasto-plástico – lei constitutiva 02

Portanto, o módulo de elasticidade é igual a $E=20500\text{kN/cm}^2$, o módulo tangente do trecho inelástico 01 é $E_{t1}=8200\text{kN/cm}^2$ e do trecho inelástico 02 $E_{t2}=0$.

Resultados do Programa Cabos-NLFG								
Incrementos	(%)	(%) Total	P (kN)	F1 (kN)	F2 (kN)	Def.1	Def.2	δ D (cm)
01	20,00%	20,00%	210,00	61,51	123,02	0,0002399	0,0004798	0,096
02	15,00%	35,00%	367,50	107,64	215,23	0,0004198	0,0008394	0,168
03	25,00%	60,00%	630,00	222,38	315,22	0,0009058	0,0018107	0,362
04	10,00%	70,00%	735,00	253,12	376,63	0,0012054	0,0024093	0,482
05	5,00%	75,00%	787,50	268,48	407,31	0,0013551	0,0027084	0,542
06	5,00%	80,00%	840,00	288,34	431,60	0,0015487	0,0029530	0,619
07	5,00%	85,00%	892,50	325,31	431,60	0,0019091	0,0036725	0,763
08	5,00%	90,00%	945,00	362,23	431,60	0,0022690	0,0043908	0,907
09	5,00%	95,00%	997,50	399,13	431,60	0,0026287	0,0051084	1,050
10	4,30%	99,30%	1042,65	430,84	431,60	0,0029377	0,0057248	1,173
11	0,70%	100,00%	1050,00					

Tabela 5.13 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 02

Onde δ_D é o deslocamento do ponto D , F_1 os esforços que atuam nos cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, F_2 o esforço que atua no cabo $\overline{BD}$, Def_1 a deformação total dos cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ e Def_2 a deformação total do cabo $\overline{BD}$.

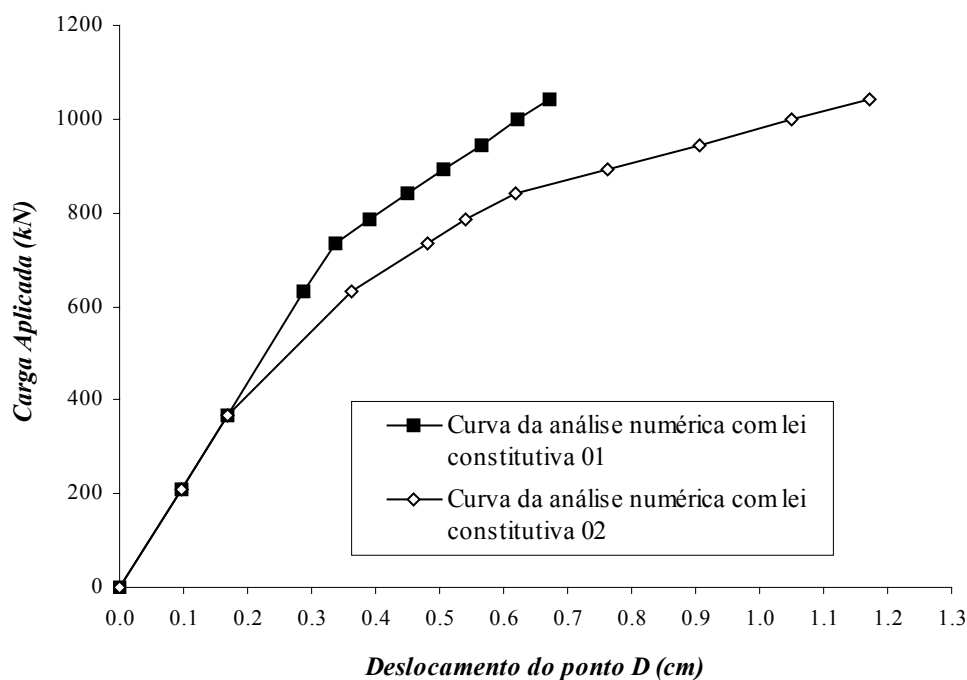


Figura 5.23 – Curvas carga aplicada x deslocamento para a estrutura da Fig.5.19 segundo as leis constitutivas 01 e 02

A Tab.5.13 e o gráfico da Fig. 5.23, mostram os resultados fornecidos pelo programa *Cabos-NLFG*. A análise dos mesmos permite distinguir 3 etapas do comportamento da estrutura:

1ª etapa : Início do processo incremental até o 2º incremento de carga. Nesta etapa, todos os cabos estão em regime elástico e contribuem para a rigidez da estrutura.

2ª etapa : Vai do 3º incremento até o 5º incremento. Nesta etapa, todos os cabos estão no trecho elasto-plástico e as deformações são maiores para os mesmos incrementos de carga, ou seja, a rigidez do sistema diminui.

3ª etapa : Vai do 6º incremento até o colapso. No início desta etapa, o cabo $\overline{BD}$ escoam e a rigidez do sistema continua diminuindo, já que neste caso, apenas os cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ contribuem para a rigidez do sistema, até que no 11º incremento os mesmos também escoam e acontece o colapso da estrutura.

Da análise conclui-se que, o colapso da estrutura ocorre com a mesma carga limite $P_{LIM} = 1041,97 \text{ kN}$ da lei constitutiva 01, porém com maiores deslocamentos.

c) Lei constitutiva 03

Ainda para a estrutura da Fig.5. 19, adotar a lei constitutiva elasto-plástica do gráfico $\sigma \times \varepsilon$ da Fig. 5.24, considerando o endurecimento do aço (strain-hardening). Os valores das tensões e deformações limites que definem cada trecho são: Trecho elástico ($\sigma_{y1}=34,5\text{kN/cm}^2$, $\varepsilon_{y1}=0,0016829$); Trecho elasto-plástico 01 ($\sigma_{y2}=34,5\text{kN/cm}^2$, $\varepsilon_{y2}=0,0033659$); Trecho elasto-plástico 02 ($\sigma_{y3}=50\text{kN/cm}^2$, $\varepsilon_{y3}=0,03$). Assim, o módulo elástico é igual a $E=20500\text{kN/cm}^2$, o módulo tangente do trecho inelástico 01 é $E_{t1}=0$ e do trecho inelástico 02 $E_{t2}=582\text{kN/cm}^2$.

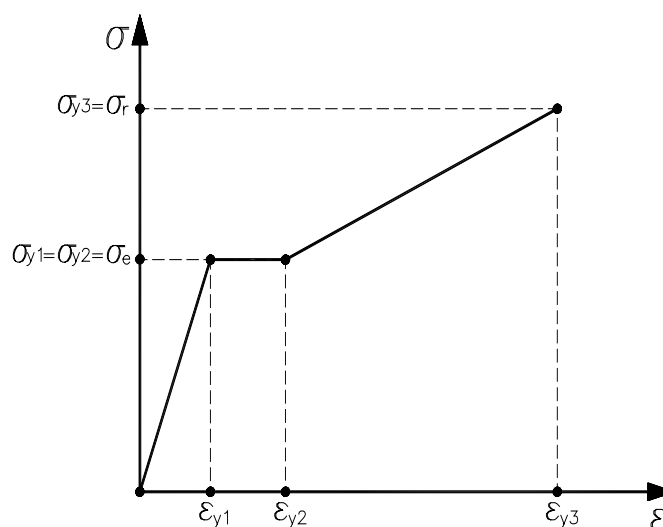


Figura 5.24 – Comportamento elasto-plástico com strain-hardening – lei constitutiva 03

Na Tab.5.14, são apresentados os resultados fornecidos pelo programa *Cabos-NLFG*.

Resultados do Programa Cabos-NLFG								
Incrementos	(%)	(%) Total	P (kN)	F1 (kN)	F2 (kN)	Def.1	Def.2	δD (cm)
01	20,00%	20,00%	210,00	61,51	123,02	0,0002399	0,0004797	0,096
02	20,00%	40,00%	420,00	123,02	245,98	0,0004797	0,0009591	0,192
03	20,00%	60,00%	630,00	184,52	368,90	0,0007195	0,0014384	0,288
04	10,00%	70,00%	735,00	215,26	430,33	0,0008393	0,0016780	0,336
05	5,00%	75,00%	787,50	251,42	431,60	0,0009803	0,0019597	0,392
06	5,00%	80,00%	840,00	288,47	431,60	0,0011248	0,0022484	0,450
07	5,00%	85,00%	892,50	325,50	431,60	0,0012692	0,0025368	0,507
08	5,00%	90,00%	945,00	362,53	431,60	0,0014136	0,0028252	0,565
09	5,00%	95,00%	997,50	399,54	431,60	0,0015579	0,0031134	0,623
10	4,30%	99,30%	1042,65	431,36	431,60	0,0016820	0,0033612	0,672
11	0,70%	100,00%	1050,00	431,60	438,32	0,0021647	0,0043247	0,865
12	2,50%	102,50%	1076,25	431,60	463,52	0,0039007	0,0077862	1,557
13	2,50%	105,00%	1102,50	439,11	478,48	0,0049331	0,0098420	1,968
14	5,00%	110,00%	1155,00	454,14	508,37	0,0069978	0,0139473	2,789
15	5,00%	115,00%	1207,50	469,16	538,17	0,0090601	0,0180397	3,608
16	5,00%	120,00%	1260,00	484,17	567,89	0,0111219	0,0221228	4,425
17	5,00%	125,00%	1312,50	499,17	597,55	0,0131831	0,0261968	5,239
18	3,00%	128,00%	1344,00	508,16	615,30	0,0144180	0,0286340	5,727
19	1,00%	129,00%	1354,50	511,16	621,20	0,0148294	0,0294452	5,889
20	1,00%	130,00%	1365,00					

Tabela 5.14 – Resultados da análise numérica considerando lei constitutiva 03

Onde Def_1 é a deformação total dos cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ e Def_2 a deformação total do cabo $\overline{BD}$. Conforme Tab.5.14 e gráfico da Fig. 5.25, podemos descrever o comportamento da estrutura em quatro etapas:

1ª etapa : Início do processo incremental até o 4º incremento de carga. Nesta etapa, todos os cabos trabalham em regime elástico e contribuem para a rigidez da estrutura.

2ª etapa : Vai do 5º incremento até o 10º incremento. Nesta etapa, o cabo $\overline{BD}$ escoam, permanecendo com esforço constante, deixando de contribuir provisoriamente para a rigidez do sistema, tendo apenas os cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ que contribuem para a rigidez da estrutura.

3ª etapa : Vai do 11º até o 12º incremento. Nesta etapa, os cabos $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ também escoam, entretanto, o cabo $\overline{BD}$ entra na fase de endurecimento. Desta forma, nesta etapa, apenas o cabo $\overline{BD}$ contribui para a rigidez da estrutura.

4ª etapa : Vai do 13º incremento até o colapso da estrutura. Nesta etapa, os cabos $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ entram na fase de endurecimento do aço, voltando a contribuir para a rigidez da estrutura, desta vez, com módulo tangente Et_2 , até a estrutura entrar em colapso.

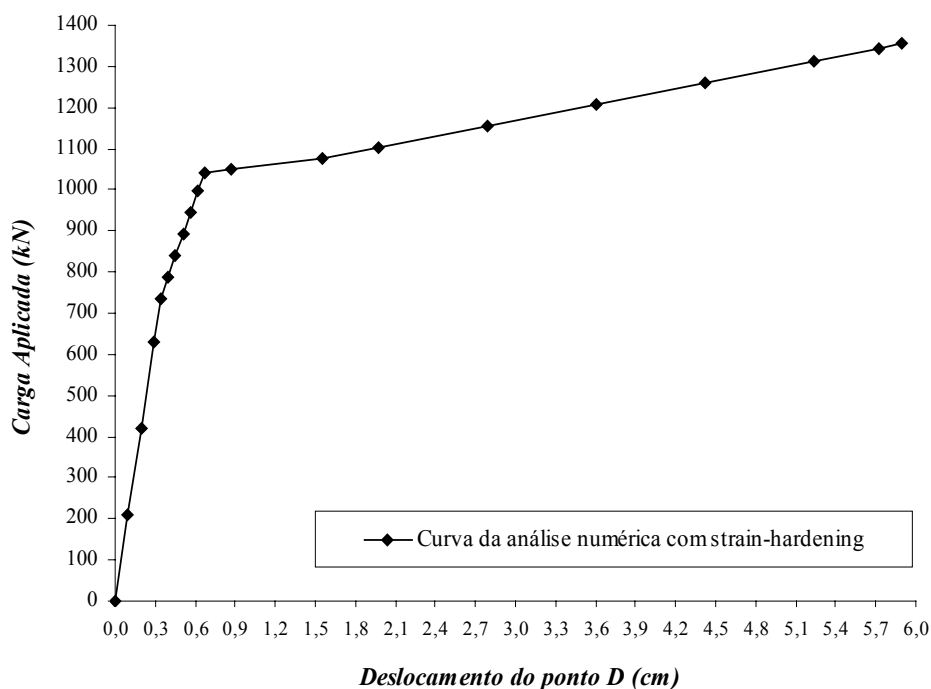


Figura 5.25 – Curva carga x deslocamento para a estrutura considerando strain-hardening

O tempo de processamento máximo observado em todos os casos deste item 5.3.1 foi de 1s. O número máximo de iterações observado foi 1.

5.3.2 Análise inelástica de um cabo suspenso com 2 elementos

Este exemplo foi apresentado por Aguiar [1999] onde se analisou o efeito de uma carga concentrada considerando o comportamento inelástico do cabo. A estrutura mostrada na Fig. 5.26, tem vão $L=20,32\text{m}$ e flecha inicial $f=1,27\text{m}$. A carga $P=485,5\text{kN}$ foi aplicada de forma incremental no ponto B , até que a deformação total do cabo atingisse $\epsilon=3\%$.

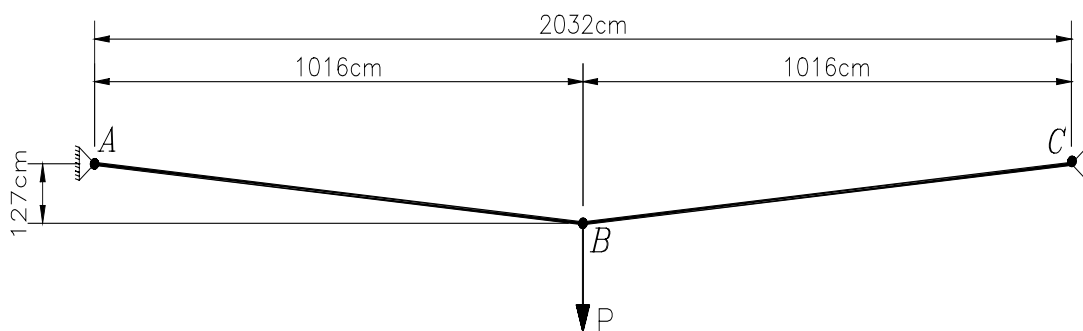


Figura 5.26 – Cabo suspenso com 2 elementos submetido a carga concentrada

Para considerar o comportamento inelástico dos cabos, adotou-se curva tensão-deformação dada por Murray&Willems para cordoalhas 1x37 com área da seção transversal $A=6,4516\text{cm}^2$ (ver seção 4.5.2). Esta curva foi aproximada por uma curva multilinear com 4 trechos, conforme mostra a Fig.5.27. O primeiro trecho elástico apresenta módulo de elasticidade $E=15000\text{kN/cm}^2$ e tem como tensões e deformações limites ($\sigma_{y1}=105\text{kN/cm}^2$, $\epsilon_{y1}=0,007$). Os outros 3 trechos que definem a região elasto-plástica têm limites: trecho elasto-plástico 01 ($\sigma_{y2}=120\text{kN/cm}^2$, $\epsilon_{y2}=0,01$); trecho elasto-plástico 02 ($\sigma_{y3}=130\text{kN/cm}^2$, $\epsilon_{y3}=0,015$) e o trecho elasto-plástico 03 ($\sigma_{y4}=142\text{kN/cm}^2$, $\epsilon_{y4}=0,03$), onde σ_{y4} representa a tensão de ruptura do cabo.

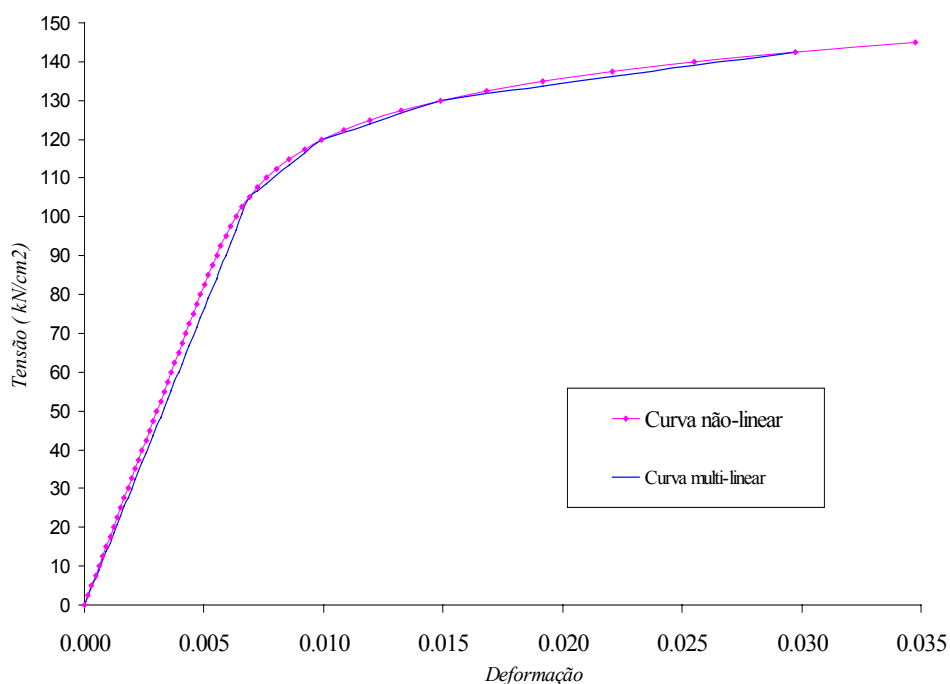


Figura 5.27 – Curva tensão-deformação($\epsilon=\Delta l/l$) para cordoalhas (1x37) segundo Murray&Willems

Os resultados da análise inelástica são mostrados na Tab. 5.15, onde se encontram, para cada incremento, os esforços de tração, a deformação total (elástica+plástica) para cada incremento e o deslocamento do ponto *B*.

Resultados da Análise Inelástica - Programa Cabos NLFG						
Incrementos	(%)	(%) Total	P (kN)	Tração (kN)	Deformação	δ B (cm)
01	10.00%	10.00%	48.95	177.613	0.0018353	14.353
02	10.00%	20.00%	97.90	329.765	0.0034076	25.598
03	10.00%	30.00%	146.85	466.281	0.0048182	35.037
04	10.00%	40.00%	195.80	592.264	0.0061201	43.296
05	10.00%	50.00%	244.75	701.383	0.0077429	53.075
06	10.00%	60.00%	293.70	779.164	0.0088806	67.981
07	10.00%	70.00%	342.65	828.435	0.0126991	87.762
08	5.00%	75.00%	367.13	846.325	0.0149710	98.742
09	15.00%	90.00%	440.55	887.044	0.0228605	133.460
10	10.00%	100.00%	489.50	915.074	0.0282912	155.019
11	10.00%					

Tabela 5.15 –Resultados da análise inelástica do cabo da Fig. 5.25

De acordo com as deformações totais mostradas na Tab. 5.15, observa-se que durante os incrementos de 01 a 04 a estrutura se encontra na fase elástica, uma vez que a deformação total não ultrapassou $\epsilon_1=0,7\%$. Nos incrementos 05 e 06 a estrutura se encontra no primeiro trecho inelástico, onde as deformações se situam entre as deformações limites $\epsilon_1=0,7\%$ e $\epsilon_2=1\%$. Nos incrementos 07 e 08, a estrutura percorre o segundo trecho inelástico com deformação entre $\epsilon_2=1\%$ e $\epsilon_3=1,5\%$. Finalmente, nos incrementos 09 e 10 a estrutura se encontra no trecho inelástico 03 e atinge o colapso quando a deformação ultrapassa a deformação limite $\epsilon_4=3\%$. O valor máximo de carga aplicada alcança $P=489,5\text{kN}$, levando a uma tração máxima no cabo $T_{\text{máx.}}=915,074\text{kN}$.

Com objetivo de comparação, esta estrutura foi também analisada, considerando o comportamento sempre elástico do cabo. Os resultados desta análise elástica, são mostrados na Tab. 5.16, onde são apresentados os esforços de tração, a deformação total e o deslocamento do ponto *B*, para todos os incrementos da mesma carga $P=489,50\text{kN}$ da análise anterior. Considerando que o material tem uma tensão de ruptura definida por $\sigma_{y4}=142\text{kN/cm}^2$, o esforço máximo que o

cabo pode suportar é dado por $T_{\max.} = \sigma_{y4} \times A = 142 \times 6,4516 = 916,13 \text{ kN}$, conforme previsto na Tab. 5.15.

Observa-se que na análise elástica o cabo já terá atingido o seu limite de ruptura ao se aplicar uma carga de aproximadamente $P = 342,65 \text{ kN}$, o que representa apenas 70% da carga total $P = 489,5 \text{ kN}$. Ao passo que, na análise inelástica esta ruptura acontecerá com a aplicação de 100% da carga total, ou seja, $P = 489,5 \text{ kN}$.

Conclui-se daí que a análise inelástica, conduz a esforços menores nos cabos, levando a projetos mais econômicos.

Resultados da Análise Elástica - Programa Cabos NLFG						
Incrementos	(%)	(%) Total	P (kN)	Tração (kN)	Deformação	δ B (cm)
01	10.00%	10.00%	48.95	177.613	0.0018353	14.353
02	10.00%	20.00%	97.90	329.765	0.0034076	25.598
03	10.00%	30.00%	146.85	466.281	0.0048182	35.037
04	10.00%	40.00%	195.80	592.264	0.0061201	43.296
05	10.00%	50.00%	244.75	710.334	0.0073401	50.697
06	10.00%	60.00%	293.70	822.165	0.0084957	57.440
07	10.00%	70.00%	342.65	928.903	0.0095987	63.662
08	5.00%	75.00%	367.13	981.538	0.0106576	66.658
09	15.00%	90.00%	440.55	1130.211	0.0116787	74.891
10	10.00%	100.00%	489.50	1225.852	0.0126672	80.020
11	10.00%					

Tabela 5.16 – Resultados da análise elástica do cabo da Fig. 5.25

Os gráficos das Figs. 5.28 e 5.29, mostram os resultados comparativos entre as análises elástica e inelástica, considerando as curvas *carga aplicada x deslocamento* do ponto B e *carga aplicada x força de tração* nos cabos, respectivamente.

A curva carga x deslocamento do ponto B, da Fig. 5.28, mostra que a análise elástica conduz, inadequadamente, a um comportamento mais rígido da estrutura. Como consequência disso, os cabos ficam sujeitos a solicitações maiores, conforme mostra o gráfico da Fig. 5.29.

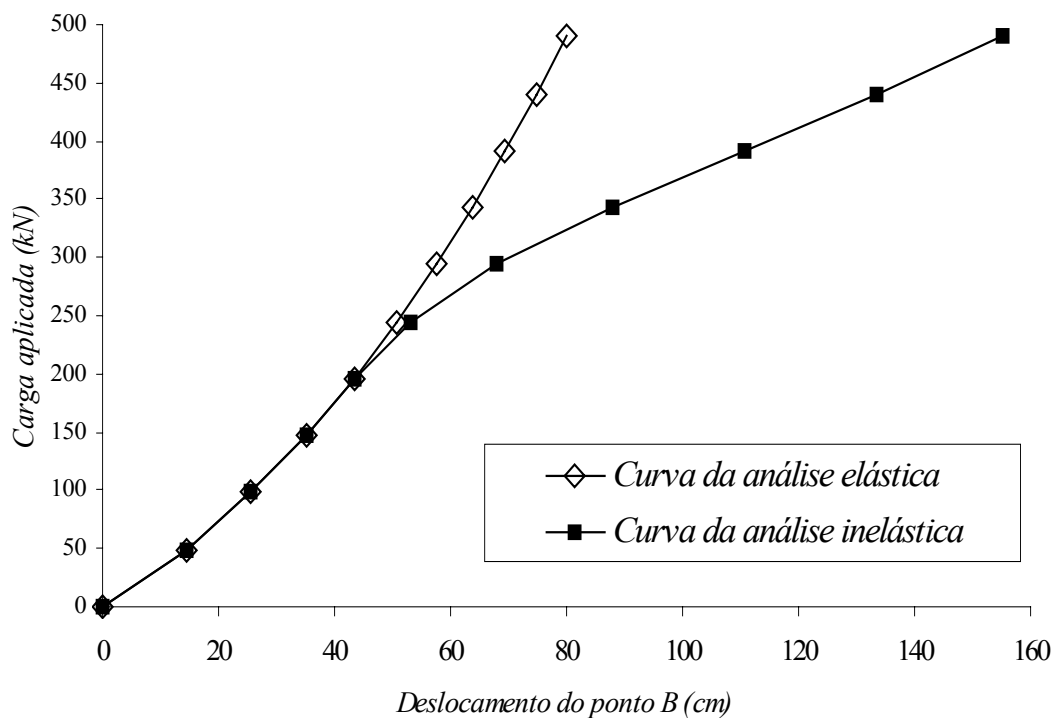


Figura 5.28 – Curva carga aplicada x deslocamento do ponto B para as análises elástica e inelástica

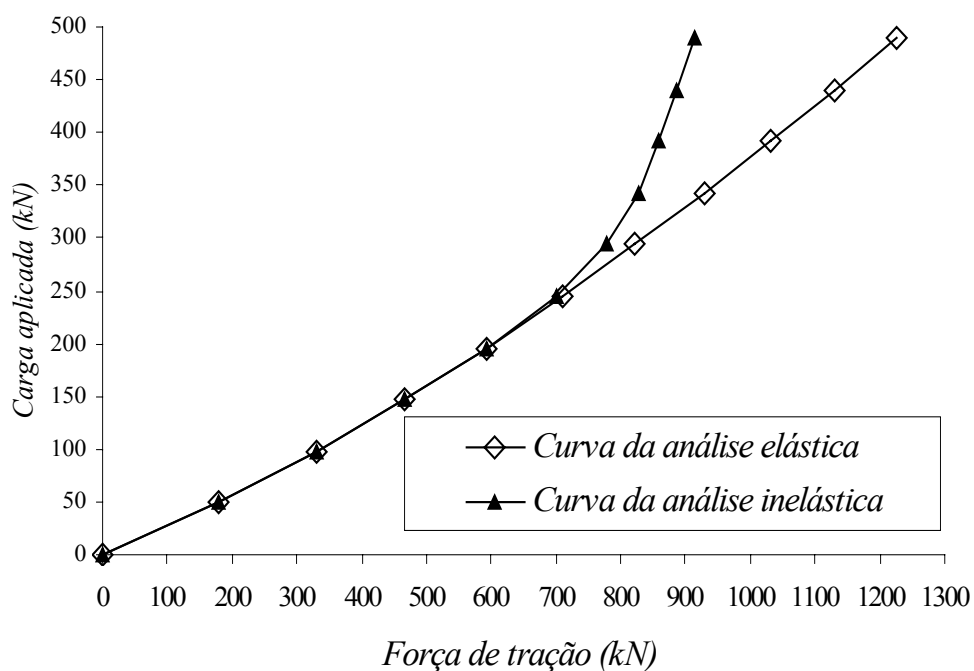


Figura 5.29 – Curva carga aplicada x força de tração para as análises elástica e inelástica

O tempo de processamento máximo observado em todos os casos deste item 5.3.2 foi de 1s. Observou-se o número de iterações máximo igual a 3 em todos os casos.

CAPÍTULO 6

Conclusões

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma formulação teórica consistente para a análise não-linear Geométrica (NLG) e Física (NLF) para estruturas de cabos suspensos, através do método dos elementos finitos, implementando-a em um programa de computador, para fazer a análise tanto elástica quanto elasto-plástica destas estruturas.

O desenvolvimento teórico, adaptado de Lavall [1996] e Pimenta [1986a e 1986b], foi feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangeana, utilizando a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes de rigidez do elemento de cabo. A formulação é bastante geral, permitindo-se que os nós sofram grandes deslocamentos e os elementos sofram grandes alongamentos, podendo estes ser constituídos de material elasto-plástico.

Por não oferecer resistência à flexão, as estruturas de cabos são sujeitas a grandes deslocamentos, principalmente quando submetidas a cargas concentradas. Portanto, ainda que não se faça uma análise não-linear física deste tipo de estrutura, o seu comportamento geométrico é altamente não-linear.

Na formulação do elemento finito, as equações de equilíbrio foram obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais (PTV), considerando-se o equilíbrio do

elemento na posição deslocada, tanto na fase elástica quanto na fase elasto-plástica.

O programa *Cabos-NLFG* desenvolvido neste trabalho, mostrou-se bastante eficiente na análise dos vários exemplos apresentados, confirmando a expectativa da grande potencialidade da formulação adotada. O método de resolução das equações não-lineares, via método de Newton-Raphson, mostrou-se eficiente tanto nos casos de grandes deslocamentos quanto naqueles com grande número de incógnitas.

A formulação empregada, permite que os elementos sofram pequenas deformações relativas e grandes deslocamentos, ou seja, ela permite que os mesmos, sob ação do carregamento, transladem e sofram grandes rotações relativas, mas não sofram alongamentos relativos significativos.

Na seção 5.2, foi feita a análise elástica não-linear geométrica de cabos suspensos, submetidos a cargas do tipo peso próprio, carga distribuída ao longo do vão e cargas concentradas. Desta análise, observou-se a precisão do programa com a excelente correlação dos resultados quando comparados com os resultados analíticos e de outros programas. Para todos os casos de carregamento estudados, observou-se a ótima convergência do processo e o baixo tempo de processamento, para qualquer número de incremento de carga adotado e para qualquer número de elementos considerado, mostrando a boa consistência da formulação empregada.

Na seção 5.3, além da análise não-linear geométrica envolvida no problema, foi considerada também a não-linearidade física do material. Desta análise, observou-se novamente o baixo tempo de processamento, a boa precisão do programa e a ótima correlação com os resultados analíticos. A convergência do processo incremental-iterativo também se manteve eficaz.

Até o limite elástico, as estruturas de cabos apresentam um aspecto importante no seu comportamento, que é o aumento de sua rigidez à medida que o carregamento aplicado cresce. As forças de tração nos elementos aumentam, contribuindo para a maior rigidez da estrutura. Nos exemplos elásticos, observou-se que o número de iterações diminuiu com o acréscimo do carregamento.

Após o limite elástico, apesar das forças de tração nos elementos continuarem crescendo, a diminuição do módulo de rigidez do material é preponderante, levando um decréscimo da rigidez da estrutura até o seu colapso.

Do estudo inelástico se conclui que para se conseguir projetos cada vez mais econômicos, torna-se importante o desenvolvimento de formulações que possam contemplar, além da análise não-linear geométrica envolvida no problema, também a análise não-linear física do material, através de relações constitutivas mais complexas. A análise inelástica permite estudar de forma mais realista o comportamento do cabo, desde a fase inicial até o colapso, alcançando carregamentos finais maiores do que aqueles da análise elástica.

Finalmente, a aplicação do programa na análise das estruturas de cabos suspensos, confirma a validade da formulação desenvolvida e sua aplicabilidade em casos práticos.

A adoção da equação da catenária para a definição da configuração inicial de equilíbrio da estrutura, mostrou-se eficiente na geração da malha de elementos finitos e na determinação da força de tração do cabo, responsável pela eliminação da hipostaticidade inicial deste tipo de estrutura.

A precisão dos resultados obtidos, o pequeno número de iterações necessárias para a convergência da solução, considerando diversos incrementos de carga e variados números de elementos, mostraram a eficiência da formulação na análise

não-linear, geométrica e física, incremental-iterativo das estruturas de cabos suspensos. A sua aplicabilidade prática pode ser estendida com adoção de alguns procedimentos adicionais.

Desta forma, a formulação poderia ser estendida para estruturas de cabos mais complexas como por exemplo, coberturas pênseis, cestas protendidas e torres estaiadas. Além disso, outros tipos de carregamento podem ser implementados, como a força de protensão nos cabos, o efeito da temperatura e o efeito dinâmico do vento.

As análises podem ser ampliadas ao se considerar, por exemplo, os efeitos de vibração, fadiga, fluência, torção e problemas de contato entre os fios.

Diferentes algoritmos de solução numérica e processos de incremento de carga com outros critérios de convergência podem ser implementados com o objetivo de melhorar a eficiência do programa.

Com essas complementações, acredita-se que o programa desenvolvido, baseado na formulação apresentada, tornar-se-á um instrumento bastante eficiente, para as análises estática e dinâmica, podendo ser aplicado, tanto para análises acadêmicas quanto para cálculos práticos nos escritórios de projeto.

Bibliografia

Aguiar, E.O. (1999). *Contribuição ao Estudo de Estruturas de Cabos para Coberturas de Grandes Áreas Livres, Considerando as Não-linearidades Física e Geométrica*. Escola de Engenharia de São Carlos (USP). Tese de Doutorado.

Aguiar, E.O. (2000). *Estudo de Cestas protendidas para coberturas: Da Fase de Protensão até o Carregamento Último*. In: XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Punta Del Este - Uruguai.

Barbato, R.L.A. (1972). *Sobre o Comportamento Estático dos Cabos de Coberturas Pênseis*. Escola de Engenharia de São Carlos (USP). Dissertação de Mestrado.

Barbato, R.L.A. (1994). *Análise de Sistemas Estruturais de Cabos de Aço Mediante o Emprego de Computador*. In: XV CILAMCE.

Bathe, K. J. (1982) *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs.

Beer, F.P. e Johnston, E. R. Jr. (1994). *Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática*. 5ª edição revisada. MAKRON Books.

Buchholdt, H.A. (1985). *An Introduction to Cable roof Structures*. Cambridge, Cambridge University Press. 257p.

Ferreira, R.P. (1999). *Uma Formulação Consistente para Análise Elasto-plástica de Estruturas de Aço*. Escola de Engenharia da UFMG. Dissertação de Mestrado.

Gere, J.M. & Weaver Jr.W. (1985). *Analisis of Framed Structures*. Litton Educational Publishing, Inc. New York – NY.

Hibbeler, R.C. (1999). *Engenharia Mecânica-Estática*. 8ª edição. LTC - Rio de Janeiro.

Irvine, H.M. *Cable Structures*. (1981). Cambridge, Ma./London. The MIT Press. 259p.

Lavall, A.C. C. (1996). *Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não-linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais*. Escola de Engenharia de São Carlos (USP). Tese de Doutorado.

Leite, F.N. (2000). *Uma Formulação Teórica Consistente para Análise Não-linear de Estruturas Treliçadas Espaciais*. Escola de Engenharia (UFMG). Tese de Mestrado.

Leonard, J.W. (1988). *Tension Structures: behavior and analisis of cable structures*. New York. McGraw Hill, 391p.

Owen, D.R. J.&Hinton, E. (1980). *Finite Elements in Plasticity: Theory and Prattice*. Swansea U. K., Pineridge Press Ltd.

Pimenta, P.M. (1986a). *Análise Não-linear de Pórticos Planos*. São Paulo, EPUSP. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8611).

Pimenta, P.M. (1986b). *Análise Não-linear de Treliças Espaciais*. São Paulo, EPUSP. (Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8604).

Plais, W. (1998). *Análise Não-linear de Treliças de Barras via Elementos Finitos*. Escola de Engenharia da UFMG. Dissertação de Mestrado.

Sussekind, José Carlos. (1980). *Curso de Análise Estrutural*. Globo.

Thomas Jr., George B. (1988). *Cálculo e Geometria Analítica*. LTC - Rio de Janeiro.

Timoshenko, S.P. (1983). *Mecânica dos Sólidos*. LTC - Rio de Janeiro.