

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Dissertação de Mestrado

“Avaliação do Erro no Cálculo do Volume de Sólidos Irregulares”

Autor: Alizeibek Saleimen Nader  
Orientadora: ***Dra. Maria de Fátima Andrade Gripp***

Junho/2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Alizeibek Saleimen Nader

AVALIAÇÃO DO ERRO NO CÁLCULO DE VOLUME  
DE CORPOS IRREGULARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia  
Metalúrgica e de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais

Área de concentração: Tecnologia Mineral

Orientadora: Dra. Maria de Fátima Andrade Gripp

Belo Horizonte  
Escola de Engenharia da UFMG

2004

Ao nosso Deus de Abraão, Isaac e  
Jacó que nos provê de tudo  
o que necessitamos.  
À minha esposa, Mônica,  
e meus filhos Daniela e Pedro.

#### AGRADECIMENTOS:

O autor agradece a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram na preparação deste trabalho e em particular aos colegas Luciene, José César, Guilherme Paiva, Alexandre Marinho e Karina Arantes que me auxiliaram no texto e nos testes computacionais. À Gemcom do Brasil por me apoiar neste trabalho cedendo meu tempo, Software e Hardware para os testes.

## Sumário

<b>Lista de Figuras.</b> .....	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas.</b> .....	<b>ix</b>
<b>Lista de Gráficos.</b> .....	<b>x</b>
<b>Resumo.</b> .....	<b>xi</b>
<b>Abstract.</b> .....	<b>xii</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>01</b>
<b>2. Objetivos</b> .....	<b>02</b>
<b>3. Conceituação do problema.</b> .....	<b>03</b>
3.1. Conceituação de Erro. ....	04
3.2. Cálculo de Volume Analítico. ....	04
3.3. Cálculo de Volume Aproximado. ....	06
3.3.1. Cálculo do Volume por Blocos e Sub-Blocos. ....	08
3.3.2. Cálculo do Volume pelo Método de Integração Vetorial. ....	12
<b>4. Estudo Comparativo Teórico.</b> .....	<b>15</b>
4.1. Regiões de Fronteiras Irregulares .....	16
4.2. Regiões de Fronteiras Regulares .....	24
<b>5. Aprimoramento do Método de Integração Vetorial</b> .....	<b>33</b>
5.1. Método da Quadratura de Gauss .....	33
5.1.1. Apresentação e Demonstração. ....	33
5.1.2. Tratamento n-dimensional. ....	36
5.1.3. Adaptação do Intervalo. ....	36
5.2. Junção dos Métodos. ....	39

<b>6. Estudo Comparativo Prático. ....</b>	<b>41</b>
6.1. Sólidos Regulares. ....	41
6.2. Sólido Irregular. ....	48
6.3. Sólido Construído por Diferenças. ....	51
6.3.1. Criação e Cálculo Analítico. ....	51
6.3.2. Dimensões dos Blocos Primários e Orientação dos Vetores. ....	58
6.3.3. Estudo Comparativo. ....	61
6.4. Qualidade das Informações Básicas nas Situações Reais. ....	68
<b>7. Conclusões e Comentários Finais. ....</b>	<b>69</b>
<b>8. Sugestões para Trabalhos Futuros. ....</b>	<b>71</b>
<b>Referências bibliográficas. ....</b>	<b>72</b>
<b>Bibliografia. ....</b>	<b>73</b>

## Lista de Figuras

<b>Figura 3-1:</b>	Sólido irregular em perspectiva . . . . .	05
<b>Figura 3-2:</b>	Bloco diagrama de um pacote mineralizado. . . . .	07
<b>Figura 3-3:</b>	Seção geológica em um plano leste-oeste. . . . .	08
<b>Figura 3-4:</b>	Cálculo do volume do cubo . . . . .	09
<b>Figura 3-5:</b>	Cálculo do volume do paralelepípedo . . . . .	09
<b>Figura 3-6:</b>	Seção transversal leste-oeste com blocos e sub-blocos . . . . .	09
<b>Figura 3-7:</b>	Tronco do sólido representado por blocos e sub blocos em 3D. . . . .	10
<b>Figura 3-8:</b>	Seção vertical mostrando blocos e sub-blocos . . . . .	11
<b>Figura 3-9:</b>	Representação gráfica dos vetores ou agulhas . . . . .	12
<b>Figura 3-10:</b>	Representação do processo de cálculo vetorial. . . . .	13
<b>Figura 3-11:</b>	Seção transversal leste-oeste representando o percentual de material contido em cada bloco . . . . .	14
<b>Figura 4-1:</b>	Representação gráfica da densidade de vetores . . . . .	15
<b>Figura 4-2:</b>	Área por blocos/sub-blocos e integração vetorial . . . . .	16
<b>Figura 4-3:</b>	Erros de aproximação nos métodos . . . . .	17
<b>Figura 4-4:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 1 . . . . .	19
<b>Figura 4-5:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 2 . . . . .	19
<b>Figura 4-6:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 3 . . . . .	21
<b>Figura 4-7:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 3 transladada. . . . .	21
<b>Figura 4-8:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 4. . . . .	22
<b>Figura 4-9:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 4 transladada. . . . .	22
<b>Figura 4-10:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 5. . . . .	23
<b>Figura 4-11:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a área 5 transladada. . . . .	24
<b>Figura 4-12:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)=3$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $1 \times 1$ e nível 2 de resolução . . . . .	25
<b>Figura 4-13:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)=3$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $2/3 \times 2/3$ e nível 3 de resolução. . . . .	26
<b>Figura 4-14:</b>	Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)=x+1$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $1 \times 1$ e nível 2 de resolução. . . . .	28

<b>Figura 4-15:</b> Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)=x+1$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $2/3 \times 2/3$ e nível 3 de resolução . . . . .	28
<b>Figura 4-16:</b> Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)=x^2+1$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $1 \times 1$ e nível 2 de resolução . . . . .	29
<b>Figura 4-17:</b> Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)=x^2+1$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $2/3 \times 2/3$ e nível 3 de resolução . . . . .	30
<b>Figura 4-18:</b> Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $1 \times 1$ e nível 2 de resolução . . . . .	31
<b>Figura 4-19:</b> Estudo comparativo de aproximação para a função $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$ para blocos de tamanho $2/3 \times 2/3$ e nível 3 de resolução . . . . .	31
<b>Figura 5-1:</b> Distribuição bidimensional de vetores para a integração vetorial gaussiana. . . . .	39
<b>Figura 5-2:</b> Distribuição tridimensional de vetores para a integração vetorial gaussiana. . . . .	40
<b>Figura 6-1:</b> Cilindro reto . . . . .	42
<b>Figura 6-2:</b> Cilindro reto, áreas e volume . . . . .	43
<b>Figura 6-3:</b> Cone reto . . . . .	46
<b>Figura 6-4:</b> Cone reto, áreas e volume. . . . .	46
<b>Figura 6-5:</b> Triangularização de superfícies. . . . .	49
<b>Figura 6-6:</b> Prismas a partir de superfícies triangularizadas . . . . .	49
<b>Figura 6-7:</b> Paralelepípedo interceptado inferiormente pela curva $z=\text{sen}(nx)+\text{sen}(ny)$ . . . . .	52
<b>Figura 6-8:</b> Figura 6-7 interceptada lateralmente por um cone. . . . .	52
<b>Figura 6-9:</b> Figura 6-8 após a retirada do cone. . . . .	53
<b>Figura 6-10:</b> Figura 6-9 interceptada por um parabolóide. . . . .	54
<b>Figura 6-11:</b> Figura 6-10 após a retirada do parabolóide. . . . .	54
<b>Figura 6-12:</b> Figura 6-11 interceptada superiormente por um tronco pirâmide . . . . .	55
<b>Figura 6-13:</b> Figura 6-12 após a retirada do tronco de pirâmide. . . . .	56
<b>Figura 6-14:</b> Figura 6-13 atravessada por um cilindro. . . . .	57
<b>Figura 6-15:</b> Figura 6-14 após a retirada do cilindro. . . . .	57



## Lista de Tabelas

<b>Tabela 5-1:</b>	Pontos e pesos para a quadratura de Gauss. . . . .	40
<b>Tabela 6-1:</b>	Estudo comparativo de tempo e erro para o cilindro . . . . .	44
<b>Tabela 6-2:</b>	Estudo comparativo de tempo e erro para o cone. . . . .	47
<b>Tabela 6-3:</b>	Estudo comparativo de tempo e erro para o sólido irregular . . . . .	50
<b>Tabela 6-4:</b>	Erros percentuais para o método de integração vetorial com orientação por níveis. . . . .	59
<b>Tabela 6-5:</b>	Erros percentuais para o método de integração vetorial com orientação por colunas. . . . .	60
<b>Tabela 6-6:</b>	Erros percentuais para o método de integração vetorial com orientação por linhas . . . . .	60
<b>Tabela 6-7:</b>	Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 2x2. . . . .	61
<b>Tabela 6-8:</b>	Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 2x0,67 . . . . .	62
<b>Tabela 6-9:</b>	Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 0,67x0,67. . . . .	62
<b>Tabela 6-10:</b>	Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 0,5x0,4. . . . .	62
<b>Tabela 6-11:</b>	Execuções do método de blocos/sub-blocos. . . . .	64
<b>Tabela 6-12:</b>	Execuções do método de blocos/sub-blocos - simplificação . . . . .	66

## Lista de Gráficos

<b>Gráfico 6-1:</b>	Comparação entre os tempos de execução para o cilindro. . . . .	44
<b>Gráfico 6-2:</b>	Comparação entre os erros percentuais para o cilindro. . . . .	45
<b>Gráfico 6-3:</b>	Comparação entre os tempos de execução para o cone . . . . .	47
<b>Gráfico 6-4:</b>	Comparação entre os erros percentuais para o cone . . . . .	48
<b>Gráfico 6-5:</b>	Comparação entre os tempos de execução para o sólido irregular . . . . .	50
<b>Gráfico 6-6:</b>	Comparação entre os erros percentuais para o sólido irregular . . . . .	51
<b>Gráfico 6-7:</b>	Estabilidade do método de blocos/sub-blocos (avaliando o volume). . . . .	67
<b>Gráfico 6-8:</b>	Estabilidade do método de blocos/sub-blocos. . . . .	67
<b>Gráfico 6-9:</b>	Estabilidade do método de integração vetorial. . . . .	67

## **Resumo**

Esta dissertação de mestrado apresenta, em maiores detalhes, dois métodos bastante utilizados na atualidade para a execução de cálculos de volumes de sólidos irregulares: o método de blocos e sub-blocos e o método de integração vetorial.

Inicialmente, discute-se formas para o cálculo analítico de volumes, apresenta-se suas deficiências para o tratamento de sólidos irregulares e propõe-se o uso de métodos numéricos. Separadamente, estuda-se estes métodos, apresentando, de forma completa, o funcionamento de cada um deles, focalizando-se nas semelhanças e diferenças e dos mesmos. Apresenta-se exemplos visuais de regiões bidimensionais irregulares que possibilitam discussões sobre a estabilidade e o comportamento dos erros frente a translações, convexidade e não-convexidade. A seguir, calcula-se áreas de regiões representadas por funções, das quais sabe-se o valor exato, através dos dois métodos, apresentando, visualmente, a composição dos vetores e dos blocos e demonstrando analiticamente os cálculos feitos para estas áreas.

Inseriu-se um novo conceito de integração vetorial gaussiana, que faz uso da técnica de integração vetorial aprimorada pela quadratura de Gauss. Apresenta-se descrições detalhadas sobre o funcionamento da quadratura e junção dos métodos.

Faz-se estudos comparativos dos métodos utilizando-se sólidos regulares (cilindro e cone) e irregulares, sendo que um dos irregulares foi construído, passo a passo, pela diferença de sólidos regulares conhecidos. Utilizou-se programas existentes no mercado baseados nos métodos apresentados para a avaliação de erros e tempos de execução. Apresenta-se gráficos e tabelas que expressam os resultados obtidos.

Após uma breve discussão sobre a qualidade das informações coletadas, apresenta-se as conclusões e comentários finais e introduz-se de forma bastante sucinta, uma das tecnologias emergentes mais promissoras para o tratamento do problema de cálculo de volume de sólidos irregulares. O desenvolvimento dos algoritmos matemáticos e da tecnologia computacional permitirá que tais avanços tecnológicos alcancem produtos tecnologicamente adequados para o uso indústria mineral.

## **Abstract**

This master's dissertation presents in greater level of details two of the most used methods for performing volume calculation for irregular solids: the blocks and sub-blocks method and the vector integration method.

It starts by discussing forms for the analytical calculation of volumes, presents its deficiencies for treating irregular solids and proposes the use of numerical methods. Separately these methods are studied and their theoretical background is presented in a complete manner denoting their similarities and differences. Visual examples of irregular bi-dimensional regions are discussed in the light of stability and behaviour of the volumetric errors in situations of translation, convexity and non-convexity. Subsequently, area calculations are performed using the two distinct methods, in regions represented by pre-determined functions whose analytical values are known. The vector and blocks pattern is visually presented and the analytical calculation for these areas is demonstrated.

The new concept of gaussian vector integration is introduced where the technology of vector integration is enhanced by the Gauss quadrature technique. Detailed descriptions about the gaussian technique and about the conjunction of the two methods are presented.

Comparative studies of the methods using regular solids (cylinder and cone) and irregular solids are executed. One of the irregular solids was created step by step by the difference of known regular solids. Computer software available in the market was used to perform the calculation for each of the methods and the error and time of execution was measured for each case. Graphics and tables with the results that were obtained are presented.

A brief discussion concerning the importance of the basic information available in real cases is made followed by the conclusions and final comments. A very brief comment is provided on new promising emerging technologies for the calculation of volumes of irregular solids.

The on going development of mathematical algorithms and computer technology will make these technological advances available for products suitable to the mineral industry.

# Capítulo 1

## Introdução

O cálculo de volumes de sólidos irregulares nas atividades de geologia e engenharia de minas é de fundamental importância técnica e econômica para a quantificação do potencial das diversas jazidas minerais. Ao longo do tempo, as técnicas de quantificação de volume e por conseguinte, da massa dos corpos minerais, evoluíram das técnicas manuais feitas por aproximações das áreas de influência, para técnicas computacionais que utilizam todo o poder de processamento dos modernos computadores digitais ou estações gráficas de trabalho.

As atividades para a quantificação de volume de sólidos irregulares em projetos e operações de exploração geológica e lavras de minas são importantes, fundamentais e corriqueiras. Neste trabalho, desenvolvemos os fundamentos necessários ao entendimento das técnicas disponíveis para esta atividade e exemplificamos uma situação realista, na qual devemos quantificar volumes, massas e qualidades não apenas de um, mas de vários corpos geológicos mineralizados (minério) ou não (estéril). Neste texto, serão apresentadas figuras e explicações que ilustram bem as dificuldades e as soluções através dos métodos estudados.

Com a crescente necessidade de verificação dos recursos e reservas minerais, condição muitas vezes *sine qua non* na obtenção de aportes de capital para a viabilização da implantação/expansão destes empreendimentos, cresce a necessidade da utilização de técnicas que possam assegurar a obtenção de resultados com margens de erro mensuráveis e aceitáveis pela indústria e pela sociedade. É fato que em muitos países, e com certeza no Brasil, o bem mineral é patrimônio da nação e, por conseguinte, de todos os cidadãos.

## **Capítulo 2**

### **Objetivo**

Esta dissertação tem por objetivo, comparar dois algoritmos numéricos diferentes, implementados em dois programas de computador distintos, que são utilizados em empresas de mineração para o cálculo de volume de sólidos, dos quais acredita-se e assume-se conhecer a forma.

## Capítulo 3

### Conceituação do problema

Neste trabalho apresenta-se a conceituação teórica do problema da quantificação de volume através de dois métodos alternativos. O primeiro faz uso de modelos de blocos e sub-blocos (método dos blocos e sub-blocos ou técnica de blocos/sub-blocos) e o segundo de vetores ou agulhas (método vetorial ou técnica de integração vetorial).

Em ambos os métodos, inicia-se o algoritmo de aproximação criando-se um paralelepípedo que contenha todo o sólido a ser estudado. O método dos blocos e sub-blocos divide este paralelepípedo maior em paralelepípedos menores de dimensões definidas, denominados blocos e subdivide-os para garantir a aderência volumétrica nas fronteiras do sólido, quando necessário, em paralelepípedos ainda menores, os quais são denominados sub-blocos. O método vetorial divide divide este paralelepípedo maior em paralelepípedos menores de dimensões definidas equivalentes aos blocos do primeiro método, sendo que a aderência volumétrica nas fronteiras do sólido é obtida pela técnica de uso dos vetores. Estuda-se estes casos com maiores detalhes a seguir.

No caso dos blocos e sub-blocos (Lynx, 1992), após a blocagem e sub-blocagem, considera-se que, estando o centróide do elemento paralelepédico contido nas superfícies envoltórias que definem o sólido, o mesmo adquire as propriedades físicas daquele, passando a ser considerado como constituído do mesmo material do sólido. A técnica de sub-blocos é utilizada apenas nas regiões de fronteira, para examinar a questão do volume com maior precisão, sendo que esses possuem volume igual a uma fração do bloco primário. O somatório dos volumes das unidades paralelepédicas fornecerá o volume do sólido.

No caso do método vetorial, as áreas das bases superior e inferior do paralelepípedo maior são divididas, com o mesmo padrão, em retângulos de dimensões iguais e os paralelepípedos (prismas) gerados pela conexão entre as bases citadas determinam volumes de influência. Cada um desses possui um vetor passando em seu centro, de uma base a outra, que aproxima o volume do sólido contido no paralelepípedo



baseando-se no tamanho do vetor dentro do sólido (Houlding, 1994); (Houlding, 1997); (Gemcom, 2002). O somatório destes vários volumes fornece o volume aproximado, o qual pode-se comparar com o volume analítico e com o volume obtido a partir da técnica de blocos e sub-blocos. O termo “analítico” refere-se a um resultado encontrado através de cálculos para os quais não se utilizam métodos numéricos.

### 3.1. Conceituação de Erro

Pode-se definir erro, nas situações do texto, como a diferença entre algum valor encontrado e o valor analítico para o mesmo cálculo, seja uma diferença absoluta ou percentual. Define-se erro absoluto como o valor absoluto da diferença entre o valor analítico e o valor aproximado. Define-se erro percentual como a razão entre o erro absoluto e o valor analítico em módulo multiplicando-se o resultado por 100.

Como exemplo, seja o cálculo analítico de uma grandeza qualquer representado pela variável  $x=15$ . Seja, agora, outras variáveis,  $a=10$ ,  $b=18$  e  $c=15,1$ , que representam o resultado de algum cálculo que determina uma aproximação para o valor da variável  $x$ . Para estas variáveis, tem-se que os erros absolutos e percentuais são:

	<b>ABSOLUTOS</b>	<b>PERCENTUAIS</b>
(a)	$ 15 - 10  = 5$	$5 /  15  = 1/3 = 33,3\%$
(b)	$ 15 - 18  = 3$	$3 /  15  = 1/5 = 20,0\%$
(c)	$ 15 - 15,1  = 0,1$ ,	$0,1 /  15  = 1/150 = 0,667\%$

Utiliza-se os erros, principalmente percentuais, no decorrer de todo o texto.

### 3.2. Cálculo de Volume Analítico

Qualquer sólido, como o apresentado na figura 3-1, seja ele regular ou irregular, existente no espaço, pode ter seu volume analítico expresso pela fórmula

$$V = \int dx.dy.dz \quad (\text{Piskunov, 1977})$$

Utiliza-se o plano vertical (Leste-Oeste) em destaque na Figura 3-1, localizado na região central do sólido, em figuras bidimensionais mais adiante. O paralelepípedo citado encontra-se representado na figura que, como foi dito, engloba todo o sólido e subdividir-se-ia de maneiras diferentes, dependendo do método aplicado. O volume definido anteriormente pode ser melhor descrito, de acordo com (Lethold, 1994), como

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V = \iiint_S dV = \iint_R f(x,y) dA ,$$

sendo  $S$  a região de integração e  $dV$  os paralelepípedos infinitesimais, que representam o sólido. No caso da terceira fórmula,  $R$  representa o domínio de integração,  $dA$  os retângulos infinitesimais, que representam a malha, e  $f(x,y)$  a função que determina a terceira dimensão do sólido. À medida que a norma da maior partição diminui, o número  $n$  de paralelepípedos  $\Delta_i V$ , que representam o sólido, aumenta para compensar a diminuição de suas dimensões, melhorando a precisão. Quando esta mesma norma tende a zero ( $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ), tem-se que os paralelepípedos tendem a tornar-se pontos, o número  $n$  tende a infinito e o somatório converge para o volume analítico do sólido, definido pelas fórmulas acima. No contexto desta dissertação, pode-se definir a norma de um conjunto de partições como o valor do módulo do maior elemento deste conjunto.

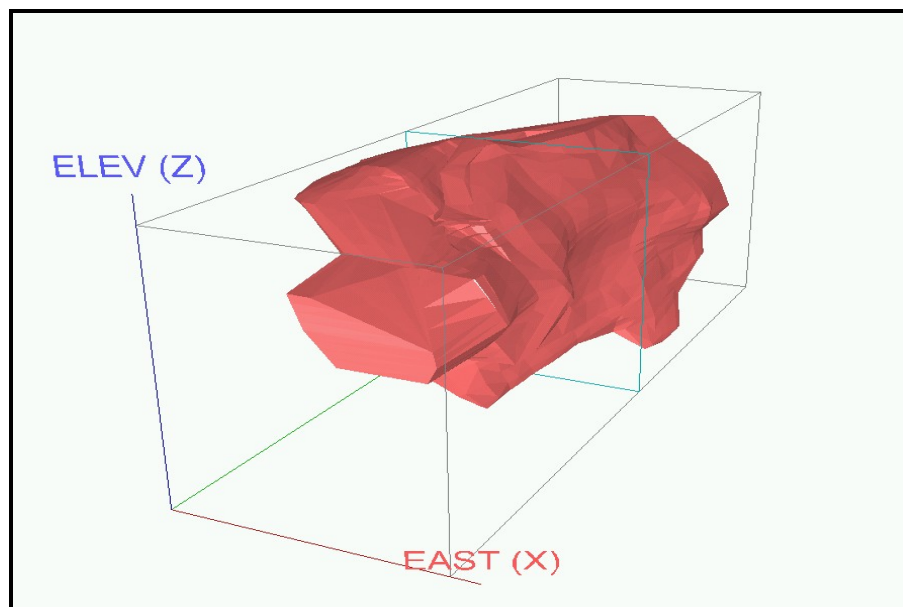


Figura 3-1: Sólido irregular em perspectiva.

Em situações práticas, para o cálculo de volumes de corpos mineralizados deve-se utilizar métodos numéricos, pois não é viável utilizar-se fórmulas matemáticas complexas, no dia-a-dia. A impossibilidade de utilizar-se os métodos de integração tradicionais para o cálculo de quaisquer volumes deve-se ao fato de que, na maioria das vezes, não se tem uma função que define o sólido com perfeição. Poder-se-ia criar uma função aproximada através de métodos de interpolação ou por uma junção diferenciável de polinômios (*splines*), porém o grau de dificuldade seria extremamente alto, dado que teríamos uma função  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , e o resultado seria, da mesma forma, apenas uma aproximação. O argumento final para a utilização de métodos numéricos é que mesmo que se obtivesse boas funções que representem os sólidos irregulares, não existem métodos analíticos disponíveis que resolvam todos os tipos de integrais.

### **3.3. Cálculo de Volume Aproximado**

Apresenta-se, nesta seção, as técnicas numéricas utilizadas atualmente. Subseqüentemente, desenvolve-se um estudo de caso específico, comparando-se os erros de estimação do volume obtido com a técnica de blocos/sub-blocos e com a técnica de integração vetorial. A figura 3-2 representa um bloco diagrama de um pacote mineralizado composto por diferentes sólidos geológicos, do qual o sólido da figura 3-1 faz parte, sendo aquele de cor vermelha, localizado no centro do conjunto de sólidos.

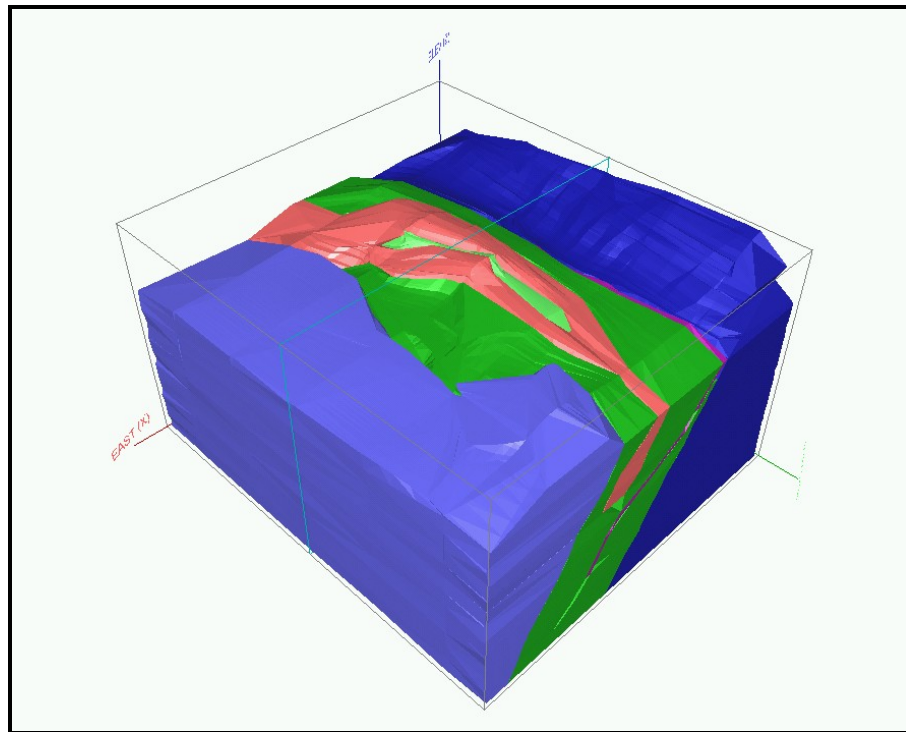


Figura 3-2: Bloco diagrama de um pacote mineralizado.

Mostra-se o mesmo plano vertical (Leste-Oeste) em destaque na Figura 3-1, localizado na região central do sólido, na figura 3-2 sobre um diferente ponto de visada. Apresenta-se, na figura 3-3, uma ilustração da interseção de todos os sólidos geológicos com este plano Leste-Oeste.

Essas ilustrações permitem visualizar, de diferentes formas, uma mesma região a ser estudada. Dependendo do método aplicado para o cálculo do volume desejado e de acordo com as necessidades de momento, as visualizações podem variar dentre as apresentadas.

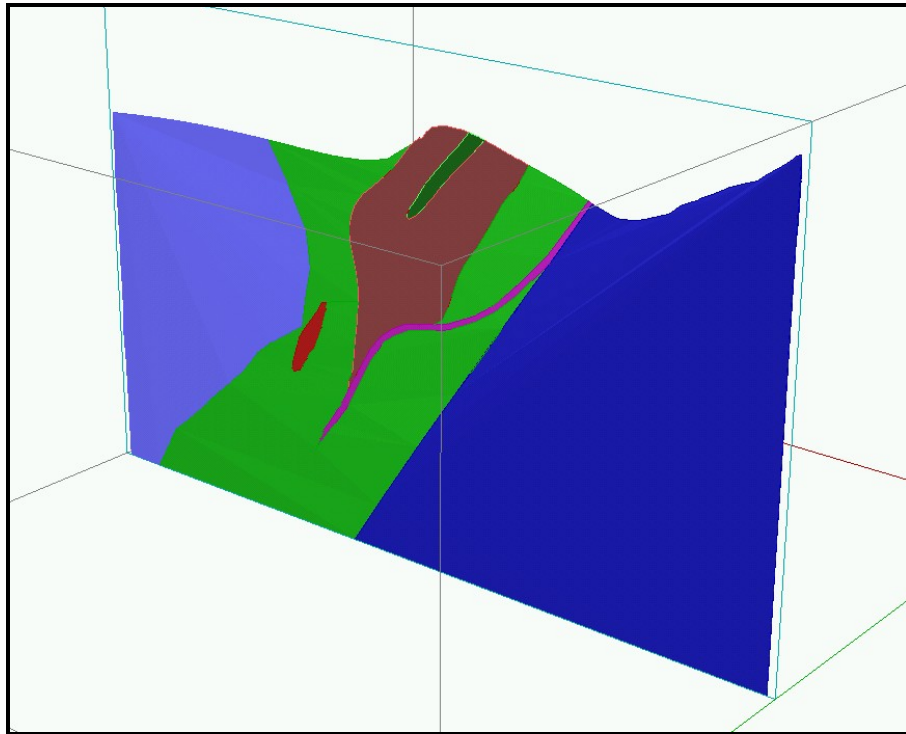


Figura 3-3: Seção geológica em um plano leste-oeste.

O cálculo de volume de diferentes sólidos geológicos, bem como a importância da avaliação e cálculo dos erros dos métodos disponíveis, são objetos do estudo a seguir.

### 3.3.1. Cálculo do Volume por Blocos e Sub-Blocos

O cálculo do volume através da técnica de blocos/sub-blocos baseia-se na discretização do sólido em unidades paralelepípedicas que, ao terem seus volumes somados, aproximam o volume real do sólido. A geometria destes sólidos e as fórmulas que o envolvem encontram-se apresentadas nas figuras 3-4 e 3-5, respectivamente. Em qualquer caso, o somatório dos volumes de cada unidade representará o volume aproximado do sólido em estudo. Portanto, o volume  $V$  do sólido aproximado será igual a

$$V = \sum_{i=1}^n v_i, \text{ sendo } v_i \text{ o volume de cada bloco ou sub-bloco.}$$

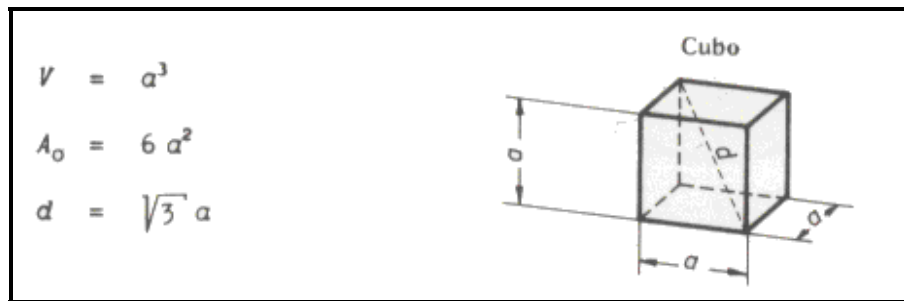


Figura 3-4: Cálculo do volume do cubo.

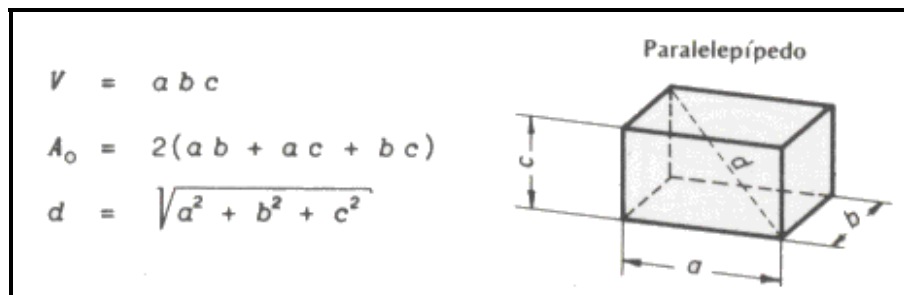


Figura 3-5: Cálculo do volume do paralelepípedo.

A figura 3-6 representa a seção transversal leste-oeste do sólido irregular, mostrado na figura 3-1, subdividido em blocos e sub-blocos.

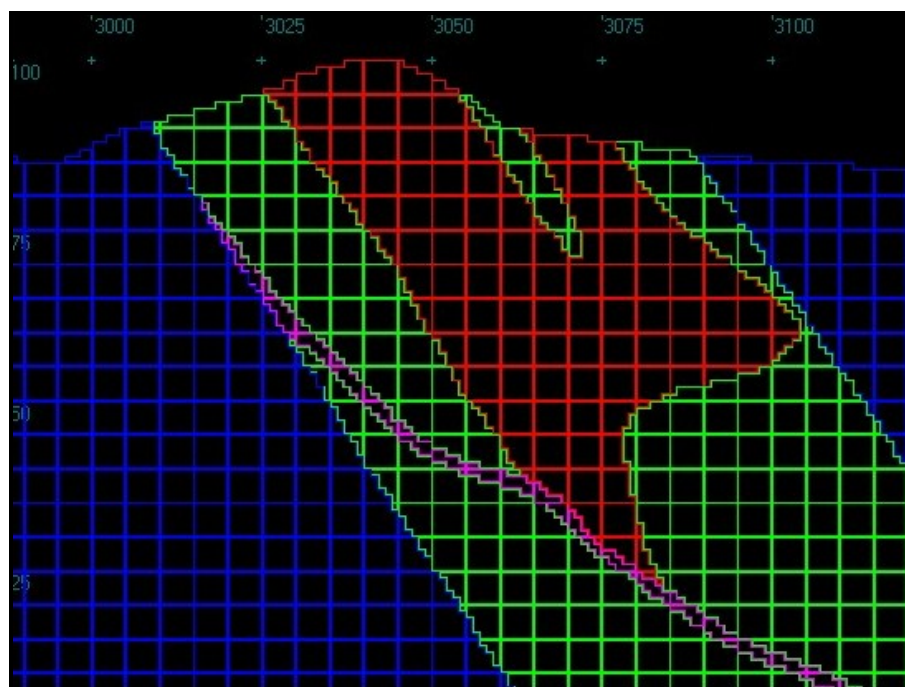


Figura 3-6: Seção transversal leste-oeste com blocos e sub-blocos.

No caso da figura 3-6, os blocos maiores, chamados de blocos primários, têm a dimensão de 5mx5mx5m e os sub-blocos 1mx1mx2,5m. Obtem-se a resolução de volume dos sólidos geológicos nas suas fronteiras por paralelepípedos de  $2,5m^3$  cada. Não se pode observar esta última dimensão por visualizar-se apenas um plano de corte, ocultando a terceira dimensão. Pode-se observar a afirmação feita de que a técnica de sub-blocagem é aplicada somente na fronteira, evitando a subdivisão para os casos em que o bloco esteja totalmente contido no sólido. Isso reduz significativamente o tempo de execução algoritmo. A resolução de volume ou resolução volumétrica, é exatamente esta subdivisão dos sub-blocos que permite com que o volume aproxime-se ao máximo do real. Quanto menor é o volume de cada sub-bloco, maior é a resolução de volume ou resolução volumétrica, porque a malha torna-se mais densa e o número de sub-blocos aumenta.

Na figura 3-7, pode-se visualizar uma parte do modelo dos sólidos com o mesmo nível de resolução volumétrica da figura 3-6, sendo que as cores correspondem às diferentes estruturas geológicas ou litologias.

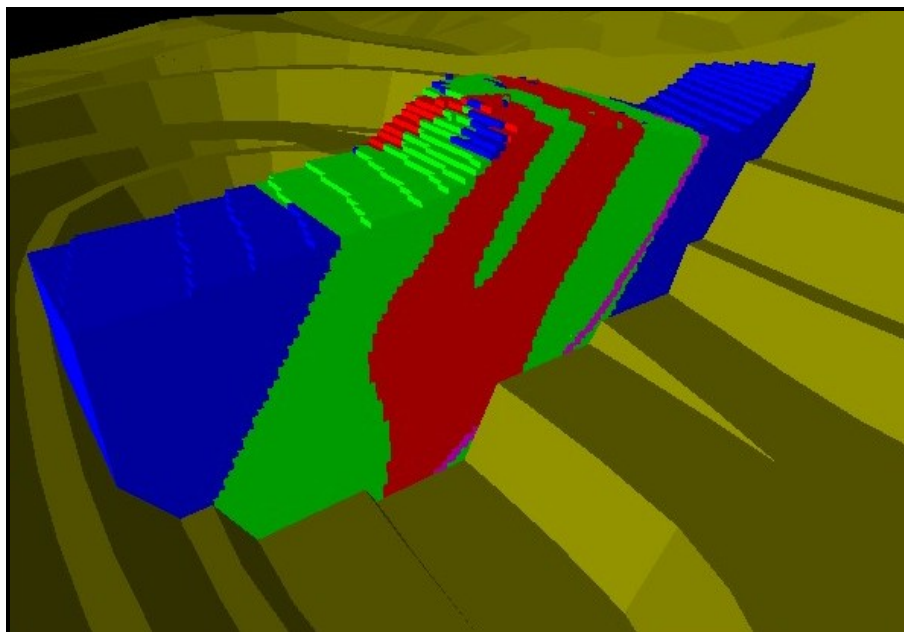


Figura 3-7: Tronco do sólido representado por blocos e sub blocos em perspectiva.

Na figura 3-7 observa-se, a representação tridimensional por blocos e sub-blocos, do mesmo sólido, apresentado anteriormente e percebe-se a riqueza de detalhes da aproximação feita, conseqüência do nível de resolução volumétrica adotada. A resolução volumétrica tem relação direta com o volume do sólido calculado pelo método e conseqüentemente com a margem de erro do cálculo. Quanto menores forem os blocos e sub-blocos, espera-se que maior seja a precisão dos resultados, mas, em compensação, maior será o tempo de execução do algoritmo. Tratando-se de algoritmos, há sempre a necessidade de encontrar-se o ponto ideal entre a precisão e o tempo de execução. Isso varia caso a caso, não sendo possível determinar um valor padrão ideal.

Um outro exemplo de visualização com o método de blocos/sub-blocos é apresentado na figura 3-8.

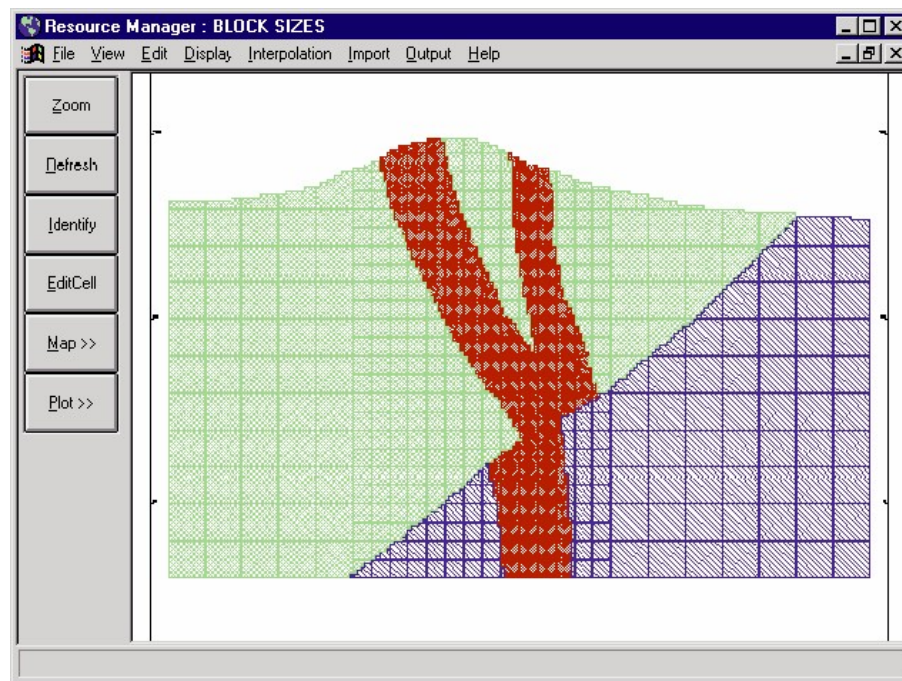


Figura 3-8: Seção vertical mostrando blocos e sub-blocos.



### 3.3.2. Cálculo do Volume pelo Método de Integração Vetorial

O cálculo do volume através da técnica de integração vetorial baseia-se na integração de volume das regiões de influência de cada vetor que intersecta o sólido, que, ao terem seus volumes somados, aproximam o volume total. A seguir, tem-se a representação de um cubo contendo um sólido, no qual aplica-se visualmente o método descrito. Como foi dito, este cubo seria o grande paralelepípedo que deve conter todo o sólido. Os vetores apresentados dividem o cubo em quatro volumes de influência, sendo que a área de uma seção reta perpendicular aos vetores subdivide-se em quatro partes iguais. Os vetores passam pelo centro destas áreas. As partes em azul escuro representam a proporção dos vetores que está contida no sólido ( $c_i / c$ ), enquanto as partes em azul claro representam a proporção complementar ( $1 - c_i / c$ ).

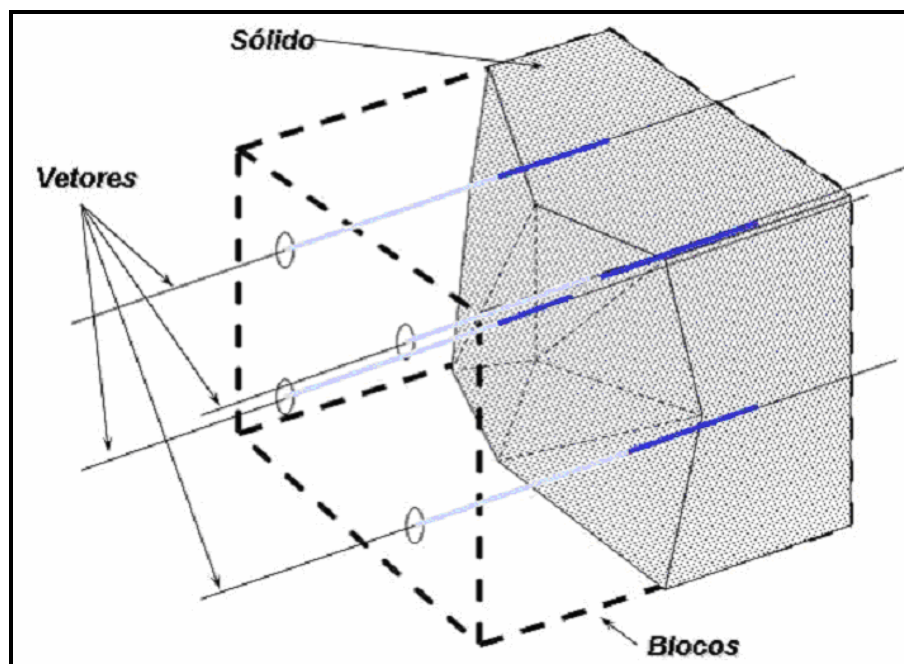


Figura 3-9: Representação gráfica dos vetores ou agulhas.

Para o cálculo do volume do sólido, aplica-se a fórmula

$$V = \sum_{i=1}^n c_i \times a_i \quad \text{ou} \quad V = \sum_{i=1}^n v_i, \text{ sendo}$$

**$c_i$  = Comprimento de cada intersecção vetorial**

**$a_i$  = Área representativa de cada vetor**

**$v_i$  = Volume de cada intersecção =  $a_i \times c_i$**

A figura abaixo mostra, como exemplo, um vetor com sua área de influência  $a$  e comprimento  $c$ :

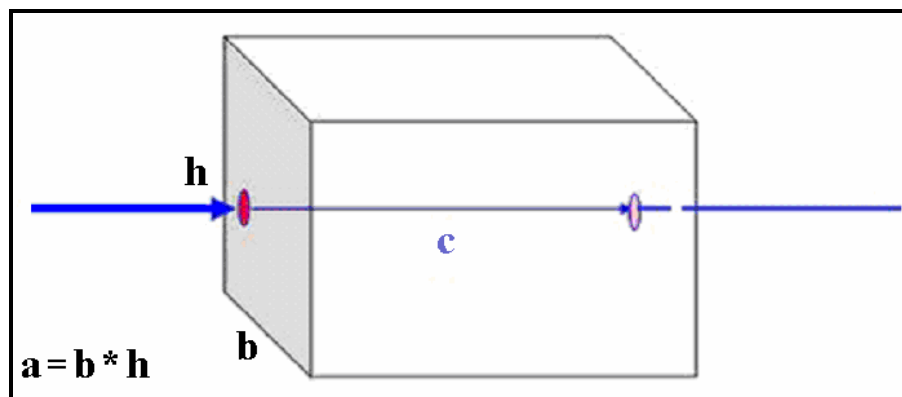


Figura 3-10: Representação do processo de cálculo vetorial

Na figura 3-10, calcula-se, facilmente, a área de influência  $a$  do vetor representado. Utiliza-se essa para o cálculo do volume do paralelepípedo apresentado, que aproxima o volume analítico desta subdivisão do sólido. Em resumo, o volume do sólido inteiro é calculado da seguinte maneira: toma-se o menor paralelepípedo possível que contenha o sólido. Divide-se a base deste mesmo paralelepípedo em áreas retangulares iguais, como aquela apresentada na figura 3-10. Em seguida, toma-se um vetor perpendicular ao centro de cada uma destas áreas, atravessando todo o paralelepípedo, calculando a distância percorrida por essa dentro do sólido. Esta distância multiplicada pela área de influência dará uma aproximação para o volume do sólido contido na mesma região. Repetindo-se este cálculo para todas as áreas de influência e somando-se os volumes obtidos, tem-se o resultado desejado.

Define-se como densidade de vetores ou fator de integração uma grandeza que varia de acordo com a quantidade de áreas de influência obtidas pela divisão do paralelepípedo inicial. O número de vetores a se utilizar é igual a esta quantidade de áreas de influência. O próprio nome já deixa claro que quanto maior for a densidade de vetores, maior será a quantidade de vetores ou áreas de influência. Assim, analisando-se o problema à luz da densidade de vetores, chamada comumente de fator de integração (Gemcom, 2002), percebe-se que a precisão do cálculo de volume dos sólidos tende a aumentar com o aumento do fator de integração.

A figura 3-11 representa a seção transversal leste-oeste no sólido irregular mostrado na figura 3-1, representando nos blocos o percentual do material do sólido contido em cada bloco, percentual este obtido pelo método de integração vetorial. As regiões nas quais seus vetores representativos não interceptaram o sólido não foram apresentadas. Por isso, as áreas retangulares destacadas formam juntas uma região irregular.



Figura 3-11: Seção transversal leste-oeste representando o percentual de material contido em cada bloco

Como dito, a precisão no cálculo de volumes depende do nível de integração vetorial utilizado. Se o sólido acima fosse dividido em um número maior de partes, ter-se-ia, na maioria dos casos, uma aproximação melhor para o seu volume.

## Capítulo 4

### Estudo Comparativo Teórico

Nesta seção, compara-se os métodos discutidos neste texto. Para possibilitar esta comparação, utiliza-se sólidos cujos volumes são conhecidos analiticamente. Inicialmente, apresenta-se exemplos bidimensionais tomando a resolução dos vetores igual à resolução dos sub-blocos. Isto significa que a largura desses será igual.

A figura 4-1 apresenta, para efeito comparativo, duas aproximações com resoluções diferentes para a integração vetorial em uma mesma área dada. No caso do cálculo de volume, a aproximação far-se-ia por paralelepípedos ao invés de retângulos, como discutiu-se anteriormente.

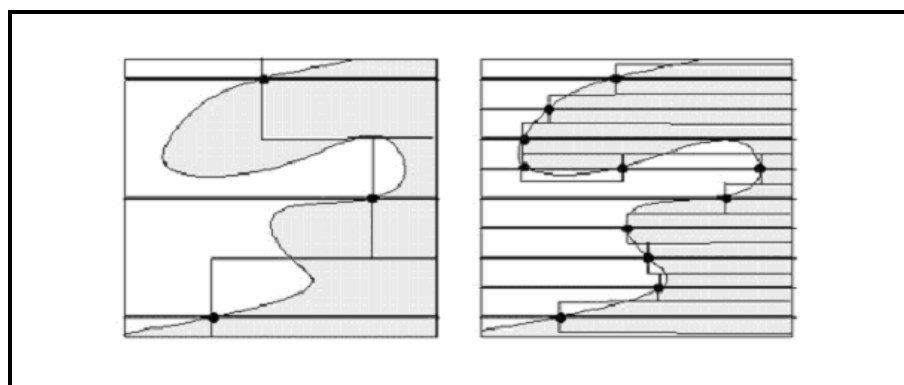


Figura 4-1: Representação gráfica da densidade de vetores.

Percebe-se, facilmente, que, no caso da figura à esquerda, grandes áreas ocupadas são desconsideradas, enquanto outras áreas são equivocadamente consideradas. Isso resulta em erros que podem ou não se compensar. Na figura à direita, ocorrem os mesmos problemas, mas, como pode ser visto, com erros em menor escala. A vantagem de se aumentar o fator de integração é exatamente esta: com a diminuição dos erros em cada retângulo (ou paralelepípedo), o desvio padrão também diminui, fazendo com que o valor final da área aproximada (ou volume aproximado) torne-se cada vez mais próximo do real. Percebe-se que o mesmo problema ocorre para os blocos/sub-blocos. O estudo a seguir será importante para determinar qual dos dois métodos resulta em erros menores.

Visto que o termo foi citado, cabe aqui uma breve explicação sobre “desvio padrão”. Ele é uma medida que só pode assumir valores não negativos e quanto maior for, maior será a dispersão dos dados em relação à média do valor da variável. Algumas propriedades do desvio padrão, que resultam imediatamente da definição, são:

- o desvio padrão é sempre não negativo e será tanto maior, quanto mais variabilidade houver entre os dados;
- se o desvio padrão é igual a 0, então não existe variabilidade, isto é, os dados são todos iguais.

O desvio padrão ( $S$  ou  $DP$ ) define-se como a raiz quadrada da média do quadrado dos desvios:

$$S = DP = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}$$

$(X_i - \bar{X})^2 = x_i^2$ : é o desvio da média (diferença entre cada uma das cotações e a média da amostra).

$N$ : é o número de casos ou de participantes da experiência.

## 4.1. Regiões de Fronteiras Irregulares

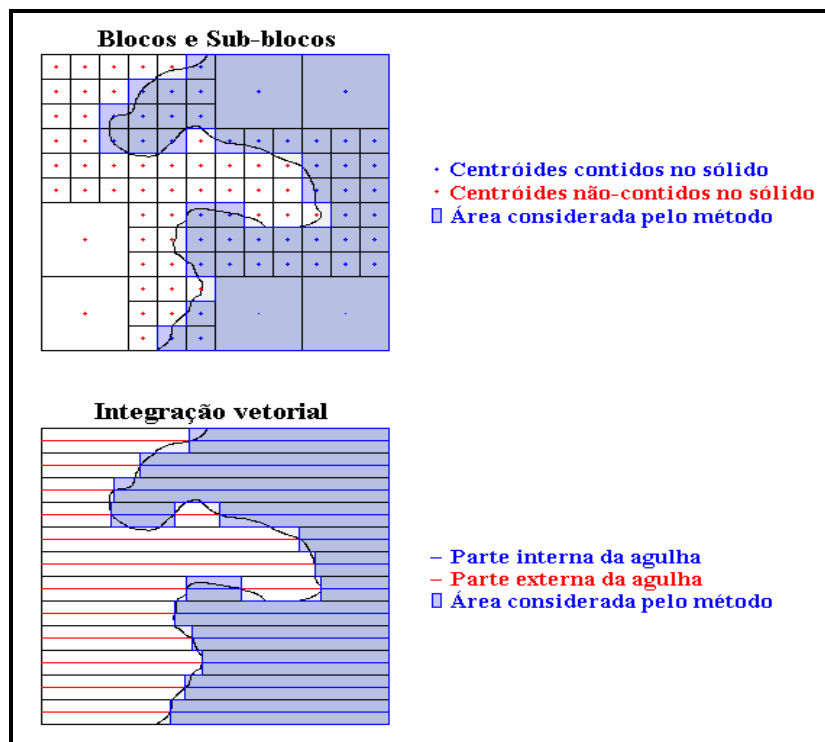


Figura 4-2: Área por blocos/sub-blocos e integração vetorial.

A figura 4-2 apresenta a comparação sugerida para os métodos de blocos/sub-blocos e integração vetorial. Na figura 4-3, encontram-se destacadas somente as áreas inexistentes consideradas e as existentes desconsideradas da fronteira do sólido, região na qual ocorrem os erros de aproximação.

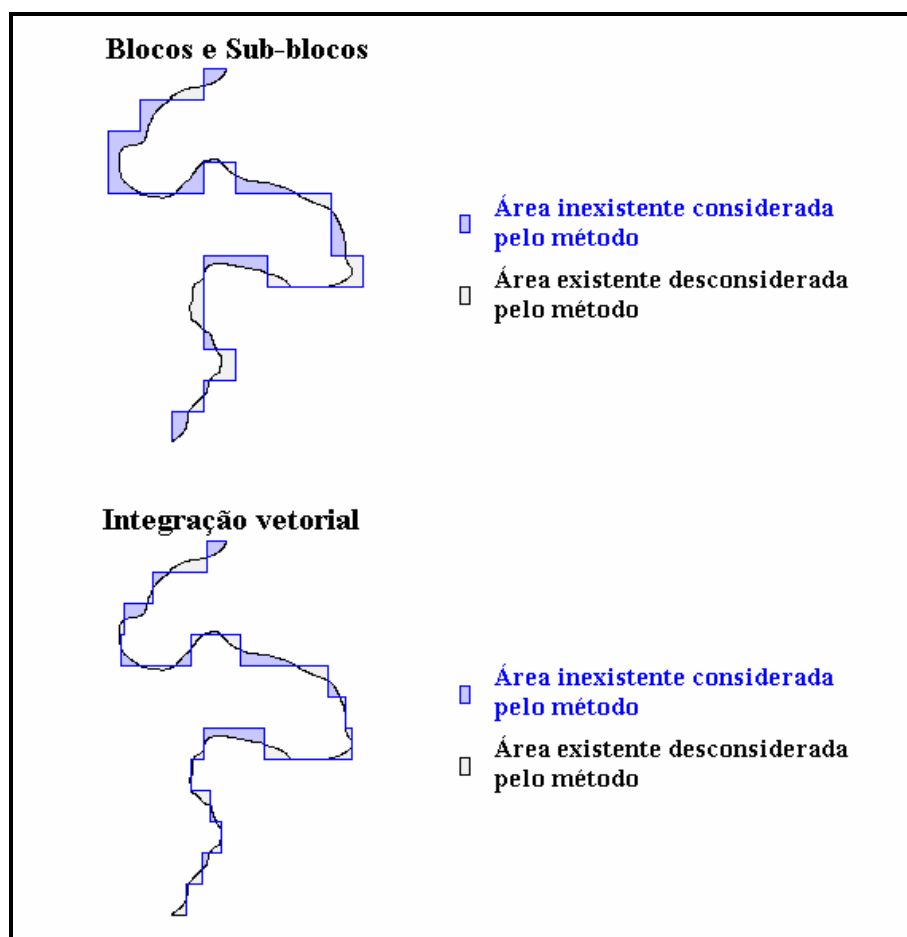


Figura 4-3: Erros de aproximação nos métodos.

As regiões marcadas em azul contabilizam áreas inexistentes no sólido, enquanto as marcadas em cinza não são contabilizadas, mesmo estando presentes no sólido. Este fato não permite o cálculo exato das áreas e volumes dos sólidos.

Analisando a figura 4-3, percebe-se, visualmente, que os erros de aproximação parecem ser menores no método de integração vetorial, para este caso. Isso não implica que o

erro total será menor, pois as áreas consideradas a mais podem ser compensadas pelas áreas desconsideradas.

Apesar de os sub-blocos possuírem a mesma largura dos vetores, o comprimento dos mesmos é fixo, enquanto os vetores podem assumir qualquer valor real nesta mesma dimensão. Isso torna o método de blocos/sub-blocos inferior neste aspecto, pois, em alguns momentos, pode ocorrer de 3 sub-blocos serem insuficientes e 4 serem uma quantidade exagerada, para aproximar uma área qualquer. Como um sub-bloco no nosso estudo é a menor unidade volumétrica para este método, o centróide do quarto sub-bloco determinará se esse será incluído ou não no cálculo do volume. Com os vetores, já se pode obter o mesmo volume de 3 sub-blocos, acrescido de uma fração do quarto, dependendo da disposição da curva.

Quanto mais irregular for o sólido, mais imprevisíveis serão as aproximações pelos métodos. Apresenta-se, a seguir, algumas regiões ampliadas com aproximações de suas áreas pelos dois métodos. As figuras também podem ser interpretadas como planos de corte de um sólido tridimensional. O método de blocos/sub-blocos será representado, considerando a ampliação, por uma pilha de sub-blocos e o método de integração vetorial por um vetor de mesma largura. As cores e símbolos seguem o mesmo padrão da figura 4-2.

Percebe-se, na figura 4-4, que as duas aproximações foram ruins, excluindo uma parte considerável do sólido, mas os sub-blocos determinaram um resultado pior pelas razões discutidas anteriormente. No cálculo de volumes, os erros também são deste tipo. A única diferença é que as aproximações ocorrem também na terceira dimensão, aumentando o erro absoluto. Na figura 4-5, ocorre um erro da mesma espécie, mas, agora, ambos os métodos estão considerando uma área superior à verdadeira, dada a forma irregular do sólido neste trecho. Mais uma vez, o método de integração vetorial mostrou-se superior, pelos mesmos motivos já discutidos.

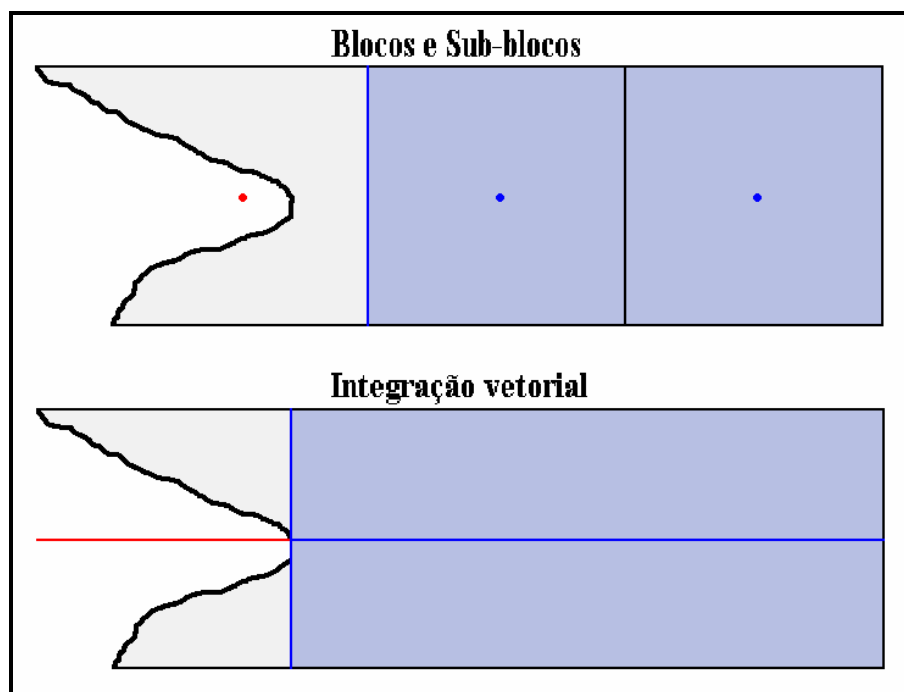


Figura 4-4: Estudo comparativo de aproximação para a área 1.

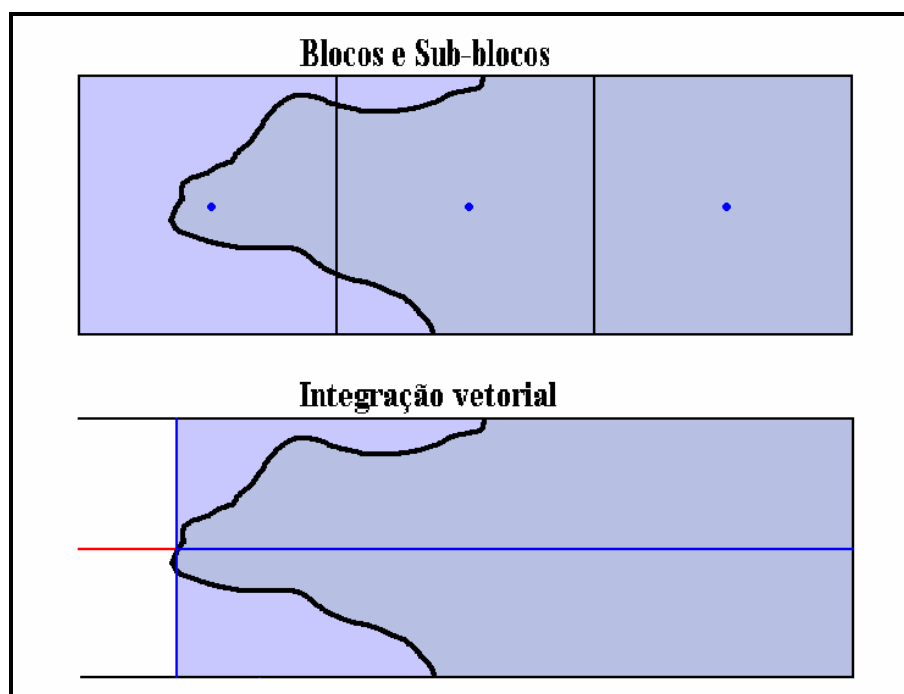


Figura 4-5: Estudo comparativo de aproximação para a área 2.



As figuras 4-6 e 4-7 comparam a atuação dos métodos quando a região sofre pequenas alterações. Neste caso, a figura 4-7 apresenta a mesma região da figura 4-6, mas com uma leve translação para a direita. Percebe-se, no caso da figura 4-6, que a área calculada pelos sub-blocos determinou um resultado melhor, pois a área considerada erroneamente compensou a área existente desconsiderada. Já na figura 4-7, com uma pequena variação no comprimento do sólido, em relação à figura anterior, obteve-se um resultado totalmente oposto. Desta vez, uma grande região foi desconsiderada, sem haver outra suficiente para compensar, determinando um erro superior ao do caso anterior. No método de integração vetorial, o erro permaneceu constante, apesar da variação na figura, o que mostra uma estabilidade maior deste método para este caso.

Conclui-se, desta comparação, que o método de blocos/sub-blocos determina resultados com uma incerteza maior, pois esse depende exclusivamente da avaliação dos centróides, que é uma unidade discreta, considerando as pilhas de sub-blocos. Em outras palavras, tendo-se sub-blocos cúbicos com dimensões de 1cm, seus centróides encontram-se a esta mesma distância dos centróides vizinhos, formando uma rede na qual pontos espalhados determinam o volume aproximado do sólido. Como já foi discutido, os vetores possuem uma terceira dimensão real ( $\in \mathbb{R}$ ), no caso da aproximação de volume. Isso faz com que, estatisticamente, o resultado se torne melhor, pois as fronteiras dos paralelepípedos considerados pelo método certamente interceptarão a fronteira do sólido, fato que pode não ocorrer no outro método. A palavra rede se aplica como uma tradução do termo *grid* do inglês. Refere-se a um conjunto de malhas justapostas.

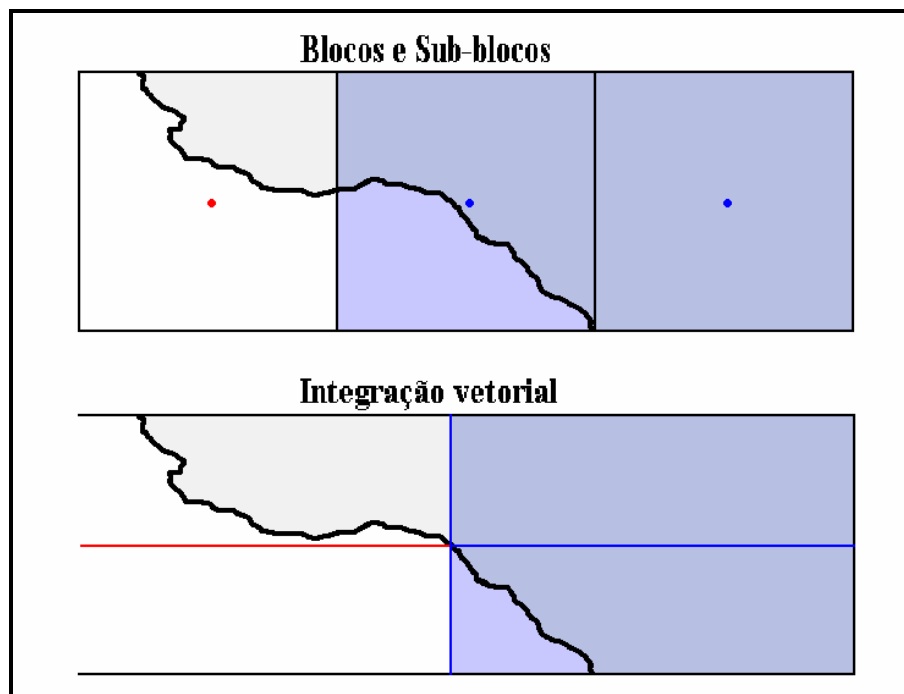


Figura 4-6: Estudo comparativo de aproximação para a área 3.

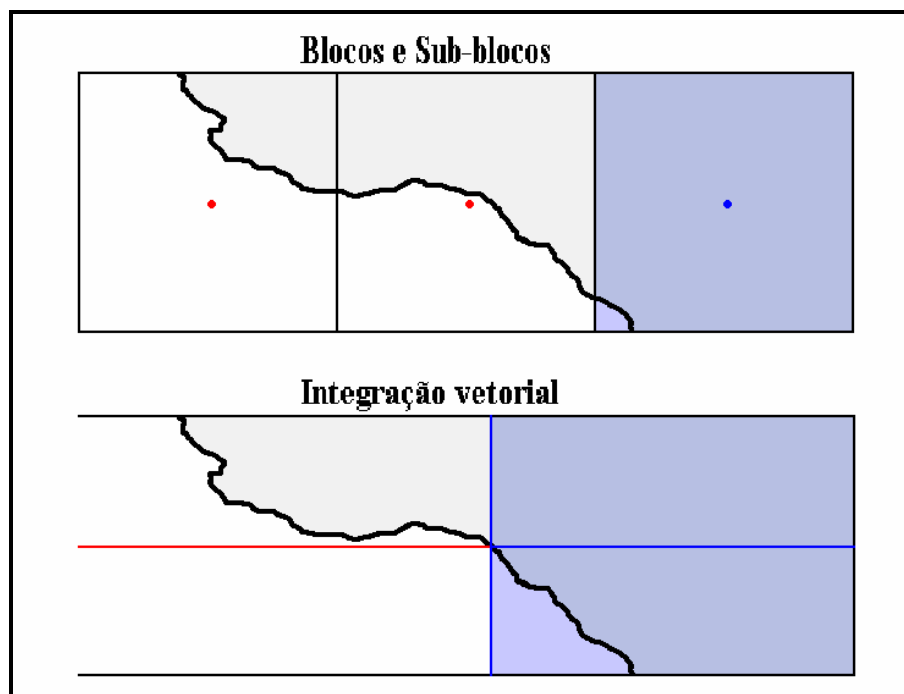


Figura 4-7: Estudo comparativo de aproximação para a área 3 transladada.



A figura 4-9 é uma pequena translação da figura 4-8 para a direita. Percebe-se que ocorreu o mesmo tipo de erro das figuras 4-6 e 4-7. Novamente, o erro na integração vetorial manteve-se constante, enquanto os sub-blocos computaram uma área maior na figura 4-8 e outra menor na 4-9. A razão pela qual as regiões não-convexas possuem, em média, erros maiores que as convexas é, simplesmente, o fato de que este tipo de sólido geralmente possui uma região de fronteira maior. Como já se discutiu, os erros de aproximação ocorrem unicamente nas fronteiras.

Vale observar que erros no método de integração vetorial, como os apresentados nas figuras acima, sempre manter-se-ão constantes quando a figura for transladada na mesma direção dos vetores portanto apresenta-se a seguir, um estudo comparativo para o caso em que tem-se uma pequena variação na direção perpendicular aos vetores.

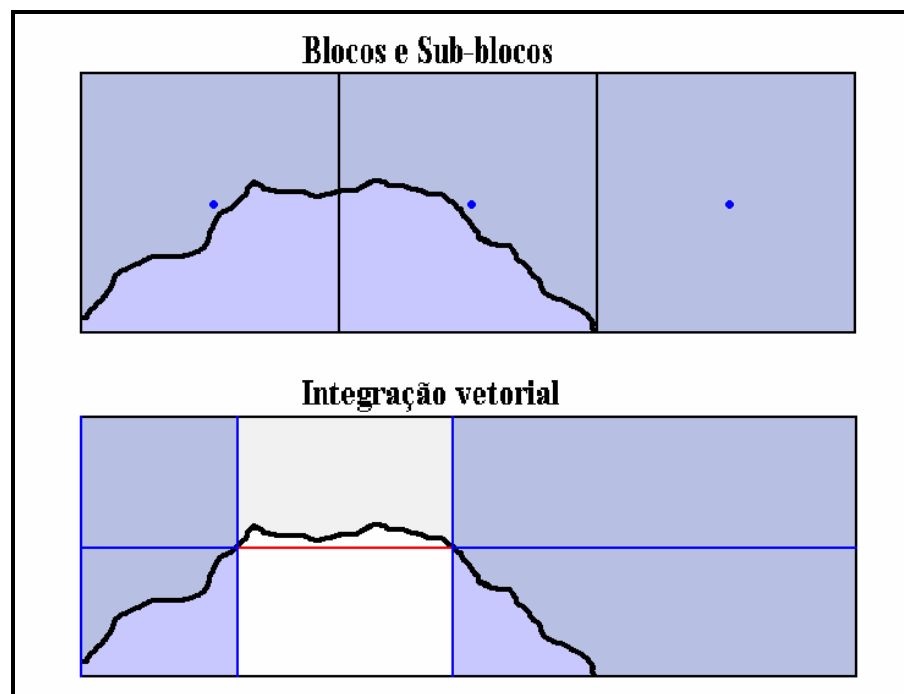


Figura 4-10: Estudo comparativo de aproximação para a área 5.

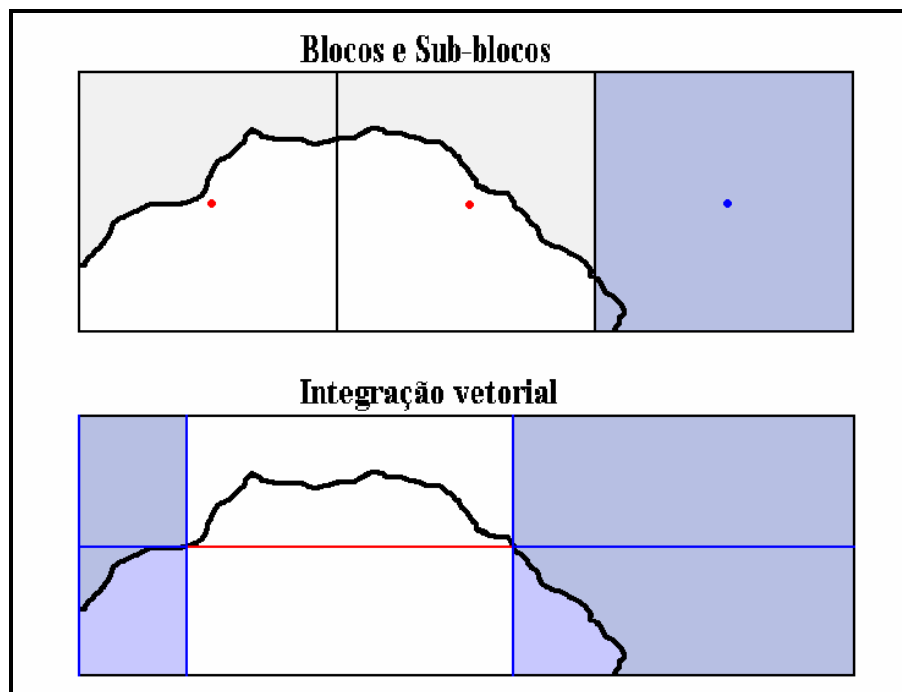


Figura 4-11: Estudo comparativo de aproximação para a área 5 trasladada.

## 4.2. Regiões de Fronteiras Regulares

Estuda-se, agora, regiões regulares, cujas áreas conhece-se analiticamente. Desta forma, pode-se obter valores numéricos para os erros de aproximação dos métodos. Para simplificar o entendimento e a comparação das regiões, mantém-se o intervalo  $[-1,1]$  para todos os testes.

Tomando-se, inicialmente, a região definida pela função constante  $f(x)=3$ , nota-se, pela figuras 4-12 e 4-13 que o método de integração vetorial determina sempre o resultado exato, independente do número de vetores, enquanto o método de blocos/sub-blocos pode cometer erros, dependendo das dimensões dos blocos.

Na figura 4-12, determina-se blocos quadrados de dimensão 1. Não houve sub-blocagem, pois todos os blocos estão inteiramente contidos na região. Caso ocorresse, os blocos seriam divididos em 4 partes iguais, o que implica em um nível 2 de sub-blocagem. No mesmo exemplo, tratado por integração vetorial, tem-se um nível de integração 2, ou seja, 2 vetores para cada subdivisão de tamanho 1 do intervalo.

Percebe-se que toma-se o tamanho dos blocos (1º caso) e das subdivisões (2º caso) como o mesmo para facilitar as comparações, ou seja, o intervalo (ou área) de influência dos vetores é igual ao intervalo (ou área) da base dos sub-blocos. Isso será constante em todos os exemplos.

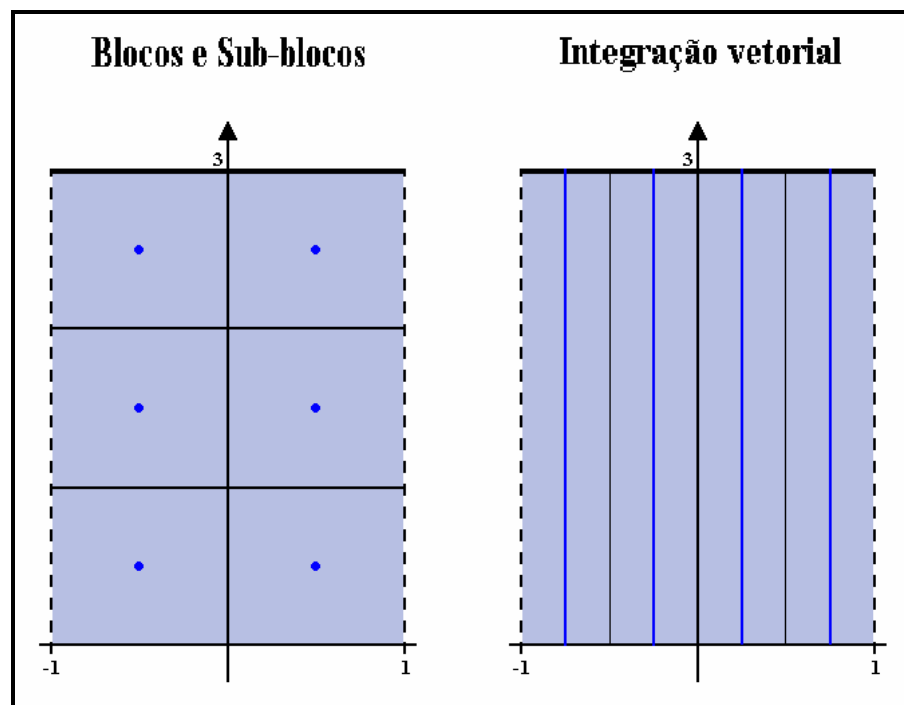


Figura 4-12: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)=3$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $1 \times 1$  e nível 2 de resolução.

A soma das áreas dos blocos e a soma das áreas de influência dos vetores determinam o resultado exato para a área da região definida pela função. Abaixo, algumas variáveis são definidas para se evitar repetições. Utiliza-se dessas nas várias comparações executadas.

$$R = 2 \times 3 = 6.$$

$R$  representa a área analítica da região. Neste caso, tem-se que a região é definida por um retângulo de dimensões 2 e 3.

$$B = (6 \times 1) + (0 \times \frac{1}{4}) = 6.$$

$B$  representa a área encontrada pelo método de blocos/sub-blocos. Tem-se, no total, 6 blocos quadrados de área 1 e nenhum sub-blocos de área  $\frac{1}{4}$ .

$$I = 4 \times (\frac{1}{2} \times 3) = 6.$$

$I$  representa a área encontrada pelo método de integração vetorial. No caso, são 4 vetores de comprimento igual a 3 que definem áreas de influência iguais.

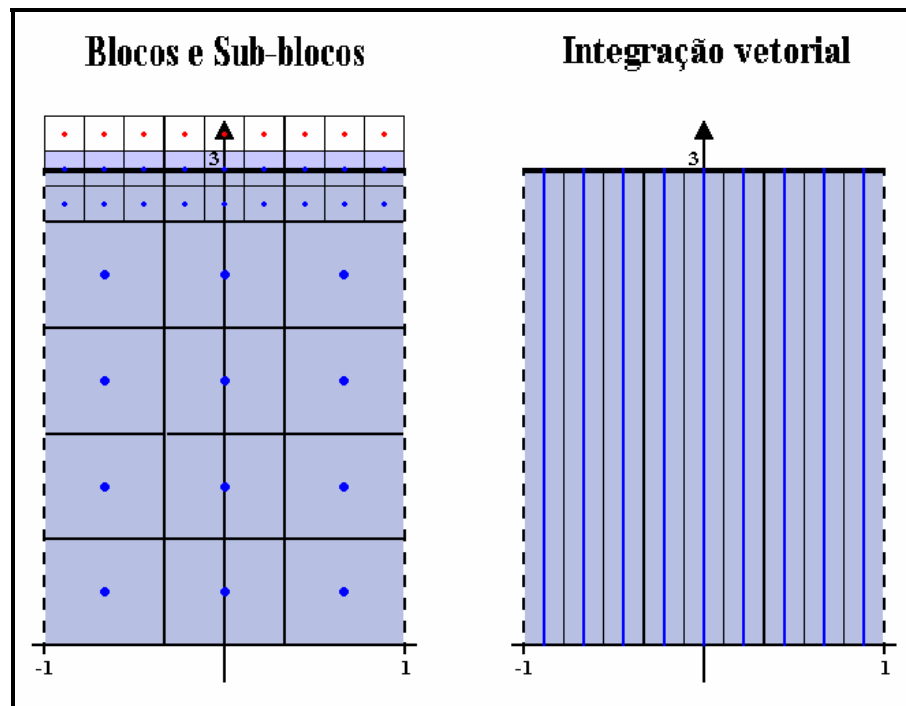


Figura 4-13: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)=3$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  e nível 3 de resolução.

Na figura 4-13, determinou-se blocos quadrados de dimensão  $\frac{2}{3}$ . Neste caso, tomou-se um nível 3 de sub-blocagem, ou seja, cada bloco é dividido em  $3^2$  partes iguais. Conclui-se que a área de cada sub-bloco é de  $(\frac{2}{3})^2 : 9 = \frac{4}{81}$ .

Na integração vetorial, dividiu-se o intervalo  $[-1,1]$  em 3 partes iguais e aplicou-se o método com um nível 3 de integração, ou seja, 3 vetores por divisão e portanto 9 vetores no total ou seja  $3^2$  vetores.

Tem-se os seguintes resultados:

$$A = 2 \times 3 = 6$$

$$B = (12 \times \frac{4}{9}) + (18 \times \frac{4}{81}) = 6,22$$

$$I = 9 \times (\frac{2}{9} \times 3) = 6$$

No exemplo das figuras 4-12 e 4-13, o método de blocos/sub-blocos demonstrou uma certa instabilidade, pois espera-se um resultado melhor ou igual quando aumenta-se a resolução, mas ocorreu o contrário. Um estudo mais profundo poderia mostrar que, com a diminuição do tamanho dos blocos, a região aproximada tende à verdadeira. Pode-se pensar que, no limite, os blocos tendem a ser pontos e a área seria exata. Acontece que, na prática, não se atinge este limite e precisa-se de um método com a maior estabilidade possível. Em outras palavras, para aplicar-se o método de blocos/sub-blocos, deve-se utilizar blocos suficientemente pequenos, caso contrário pouco poderá ser afirmado sobre o tamanho do erro cometido.

As comparações seguintes seguirão o mesmo padrão, ocultando, assim, detalhes já apresentados. Agora, analisa-se a função  $f(x) = x+1$ .



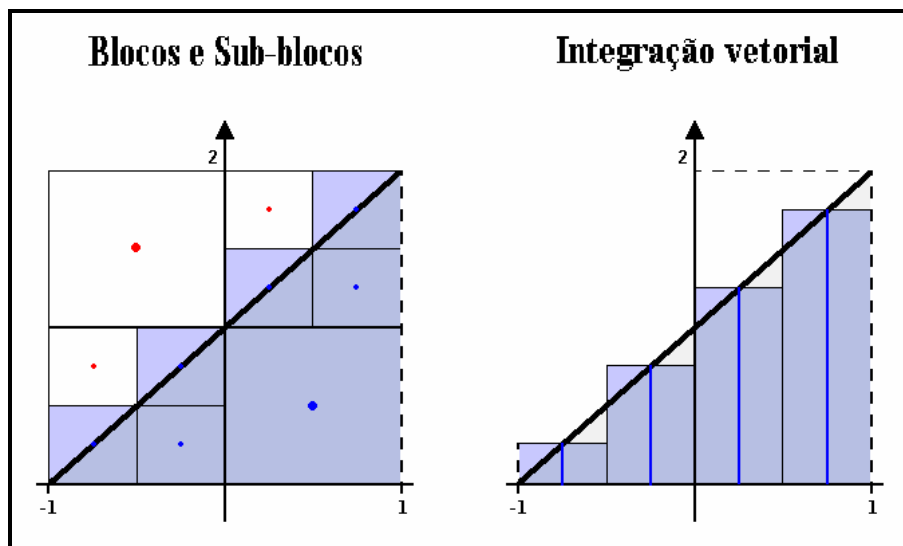


Figura 4-14: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)=x+1$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $1 \times 1$  e nível 2 de resolução.

Resultados:

$$R = (2 \times 2) : 2 = 2$$

$$B = (1 \times 1) + (6 \times 1/4) = 2,5$$

$$I = 1/2 \times [ f(-3/4) + f(-1/4) + f(1/4) + f(3/4) ] = 1/2 \times [ 1/4 + 3/4 + 5/4 + 7/4 ] = 2$$

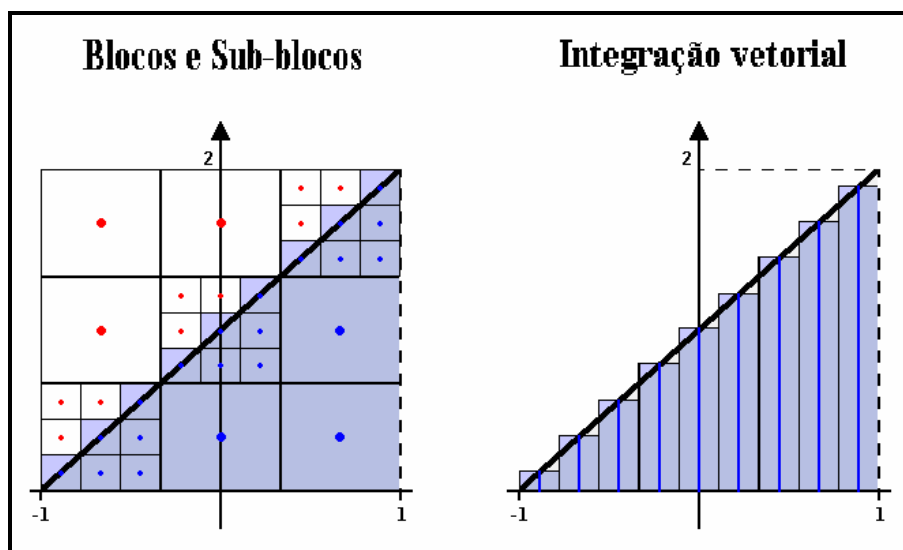


Figura 4-15: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)=x+1$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $2/3 \times 2/3$  e nível 3 de resolução.

Resultados:

$$R = (2 \times 2) : 2 = 2$$

$$B = (3 \times \frac{4}{9}) + (18 \times \frac{4}{81}) = 2,22$$

$$I = \frac{2}{9} \times [ f(-\frac{8}{9}) + f(-\frac{6}{9}) + f(-\frac{4}{9}) + f(-\frac{2}{9}) + f(0) + f(\frac{2}{9}) + f(\frac{4}{9}) + f(\frac{6}{9}) + f(\frac{8}{9}) ] = \\ = \frac{2}{9} \times [ \frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{9} + \frac{7}{9} + 1 + \frac{11}{9} + \frac{13}{9} + \frac{15}{9} + \frac{17}{9} ] = 2$$

Nota-se que método de blocos/sub-blocos apresentou um resultado melhor, quando o tamanho dos blocos e sub-blocos diminuiu, o que é de se esperar para a maioria dos casos. O método de integração vetorial, novamente, determinou o resultado exato da área. Pode parecer que as regiões foram arranjadas de forma que isso fosse possível, mas para qualquer função constante ou linear e qualquer intervalo de avaliação, a área encontrada será exata para este método.

Para provar isso, basta perceber que, dado um vetor, esse possui um intervalo de influência, pensando no caso bidimensional. A região limitada no intervalo representa um trapézio e sua área é igual à área calculada pelo método de integração vetorial.

Desta forma, os próximos exemplos serão de funções não-lineares. O primeiro exemplo desta classe será a função  $f(x) = x^2 + 1$ .

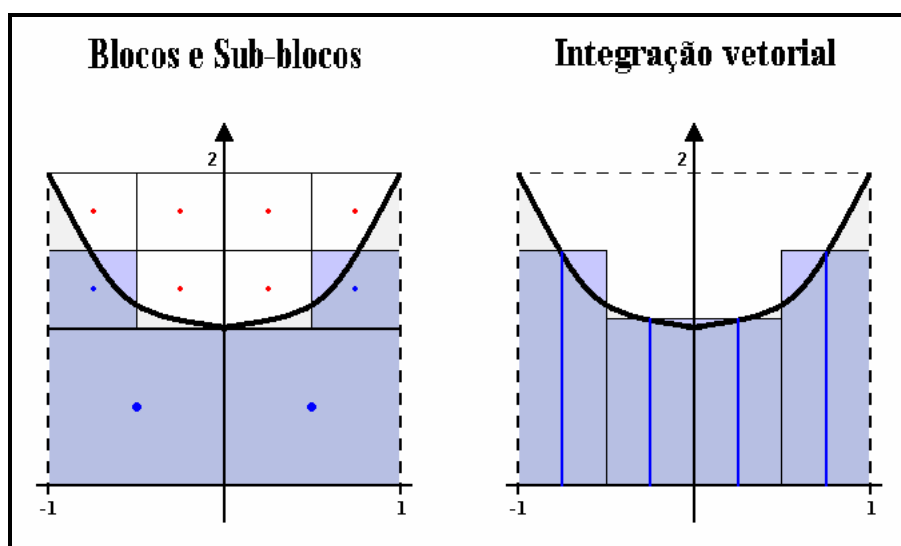


Figura 4-16: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x) = x^2 + 1$  no intervalo  $[-1, 1]$  para blocos de tamanho  $1 \times 1$  e nível 2 de resolução.

Resultados:

$$R = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{8}{3} = 2,67$$

$$B = (2 \times 1) + (2 \times \frac{1}{4}) = 2,5$$

$$I = \frac{1}{2} \times [ f(-\frac{3}{4}) + f(-\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) ] = \frac{1}{2} \times [ \frac{25}{16} + \frac{17}{16} + \frac{17}{16} + \frac{25}{16} ] = 2,62$$

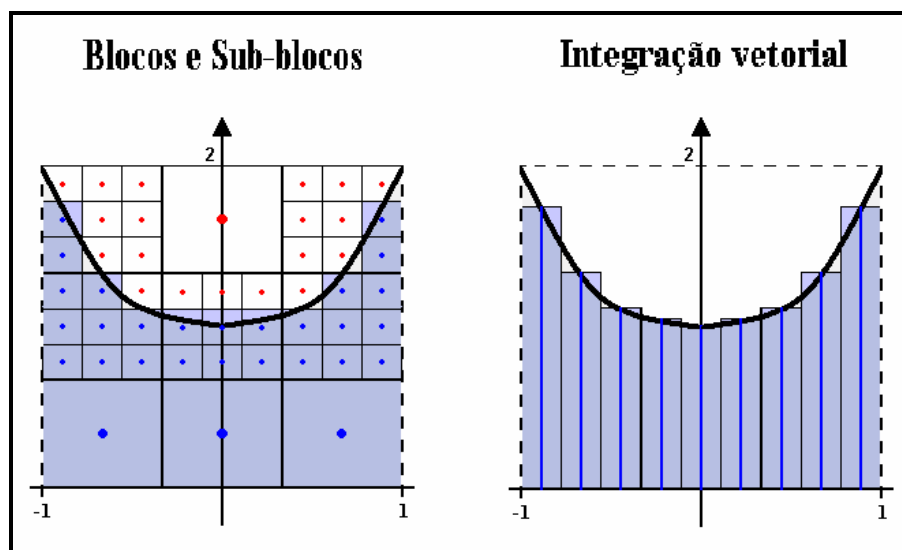


Figura 4-17: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)=x^2+1$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  e nível 3 de resolução.

$$R = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{8}{3} = 2,67$$

$$B = (3 \times \frac{4}{9}) + (26 \times \frac{4}{81}) = 2,62$$

$$I = \frac{2}{9} \times [ f(-\frac{8}{9}) + f(-\frac{6}{9}) + f(-\frac{4}{9}) + f(-\frac{2}{9}) + f(0) + f(\frac{2}{9}) + f(\frac{4}{9}) + f(\frac{6}{9}) + f(\frac{8}{9}) ] = \frac{2}{9} \times [ 1,79 + 1,44 + 1,20 + 1,05 + 1 + 1,05 + 1,20 + 1,44 + 1,79 ] = 2,65$$

Trata-se, agora, uma função que é a junção de algumas funções lineares e quadráticas. Será a última comparação partindo de funções bidimensionais simples.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ 3x + 2, & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ x^2 - \frac{13}{6}x + 2, & \text{se } x \in (0, \frac{2}{3}] \\ -x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{5}{3}, & \text{se } x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

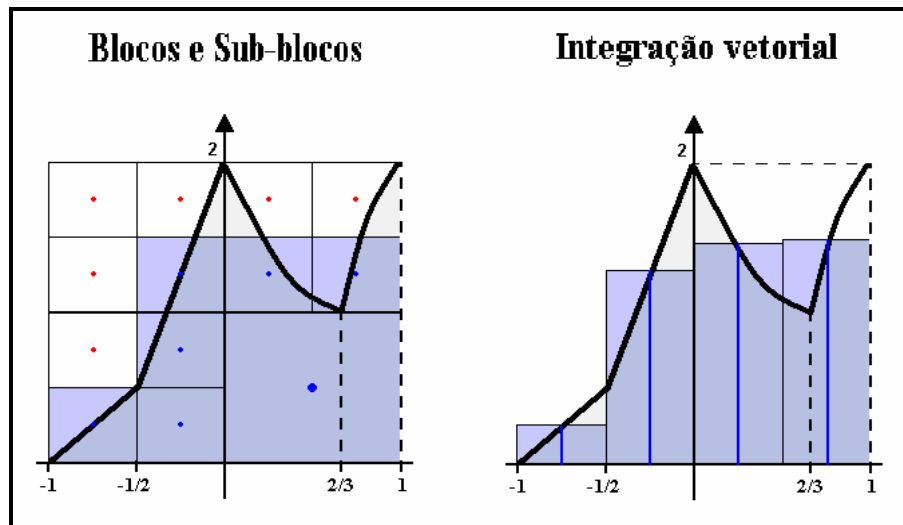


Figura 4-18: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $1 \times 1$  e nível 2 de resolução.

Resultados:

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{-1}^{-1/2} (x+1)dx + \int_{-1/2}^0 (3x+2)dx + \int_0^{2/3} (x^2 - 13/6 x + 2)dx + \int_{2/3}^1 (-x^2 + 14/3 x - 5/3)dx = \\
 &= 1/8 + 5/8 + 77/81 + 41/81 = 2,21 \\
 B &= (1 \times 1) + (6 \times 1/4) = 2,5 \\
 I &= 1/2 \times [ f(-3/4) + f(-1/4) + f(1/4) + f(3/4) ] = 1/2 \times [ 1/4 + 5/4 + 1,52 + 1,27 ] = 2,15
 \end{aligned}$$

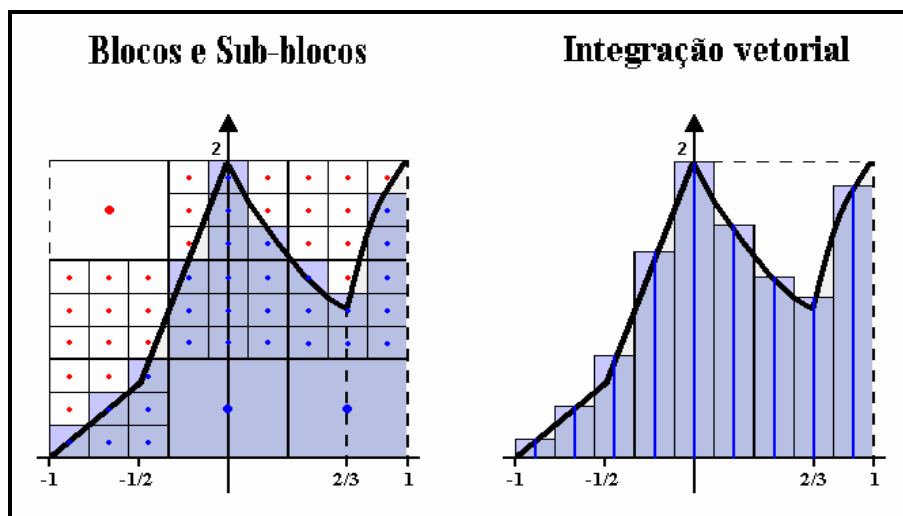


Figura 4-19: Estudo comparativo de aproximação para a função  $f(x)$  no intervalo  $[-1,1]$  para blocos de tamanho  $2/3 \times 2/3$  e nível 3 de resolução.

Resultados:

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{-1}^{-1/2} (x+1)dx + \int_{-1/2}^0 (3x+2)dx + \int_0^{2/3} (x^2 - 13/6 x + 2)dx + \int_{2/3}^1 (-x^2 + 14/3 x - 5/3)dx = \\
 &= 1/8 + 5/8 + 77/81 + 13/81 = 2,21 \\
 B &= (2 \times 4/9) + (29 \times 4/81) = 2,32 \\
 I &= 2/9 \times [ f(-8/9) + f(-6/9) + f(-4/9) + f(-2/9) + f(0) + f(2/9) + f(4/9) + f(6/9) + f(8/9) ] = \\
 &= 2/9 \times [ 0,11 + 0,33 + 0,67 + 1,33 + 2 + 1,57 + 1,23 + 1 + 1,69 ] = 2,20
 \end{aligned}$$

Dobrando o nível de integração e sub-blocagem, teríamos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{-1}^{-1/2} (x+1)dx + \int_{-1/2}^0 (3x+2)dx + \int_0^{2/3} (x^2 - 13/6 x + 2)dx + \int_{2/3}^1 (-x^2 + 14/3 x - 5/3)dx = \\
 &= 1/8 + 5/8 + 77/81 + 13/81 = 2,21 \\
 B &= (2 \times 4/9) + (112 \times 1/81) = 2,27 \\
 I &= 1/9 \times [ f(-17/18) + f(-15/18) + f(-13/18) + f(-11/18) + f(-9/18) + f(-7/18) + f(-5/18) + \\
 &\quad f(-3/18) + f(-1/18) + f(1/18) + f(3/18) + f(5/18) + f(7/18) + f(9/18) + f(11/18) + f(13/18) \\
 &\quad + f(15/18) ] = 2,20
 \end{aligned}$$

Para regiões regulares, mesmo com junções de polinômios diferentes, o método de integração vetorial parece determinar resultados melhores, mas restam dúvidas sobre o seu comportamento frente a regiões irregulares. Neste último exemplo, percebe-se a idéia já exposta de que o método de blocos/sub-blocos converge para o valor exato, mas não se tem segurança sobre o resultado a menos que se tome um número suficientemente grande de divisões. Assim como na teoria de integração, se um sólido é representado por blocos e sub-blocos, o volume desses vai diminuindo e, conseqüentemente, a quantidade vai aumentando, tem-se que, no limite, o somatório do volume dos blocos e sub-blocos e resultará no volume exato do sólido.

Após todos estes testes, torna-se sugestivo concluir que, dentre as duas opções, o método de integração vetorial determina melhores resultados em termos de precisão. Vale lembrar que os vetores e sub-blocos das comparações possuem mesma largura. Após algumas comparações tridimensionais, far-se-á um estudo comparativo também entre os tempos de execução dos dois algoritmos.

## Capítulo 5

### Aprimoramento do Método de Integração Vetorial

Apresenta-se, agora, uma adaptação feita no método de integração vetorial, visando a minimização dos erros de aproximação do volume. A este aprimoramento dá-se o nome de integração vetorial gaussiana. Este método pode ser aplicado às situações já expostas, mas espera-se um aproveitamento maior para o caso de sólidos (ou regiões) irregulares, como em situações reais de mineração.

Para tornar possível a comparação dos métodos anteriormente apresentados, utiliza-se programas, existentes no mercado, que se baseiem nestes métodos. Ocorre que existem programas que, além do método puro de integração vetorial, utilizam-se deste aprimoramento. A integração vetorial gaussiana, como o próprio nome sugere, faz uso da quadratura de Gauss, por isso cabe uma explicação detalhada sobre seu funcionamento.

#### 5.1. Método da Quadratura de Gauss

##### 5.1.1. Apresentação e Demonstração

O método da quadratura de Gauss é utilizado para o cálculo de integrais de funções polinomiais n-dimensionais (Civil.pt, 2004). Dada qualquer função deste tipo, pode-se determinar a integral analítica pela simples avaliação de alguns pontos. Como exemplo, toma-se um polinômio de grau 5:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5. \quad (5.1)$$

A primitiva deste polinômio é dada por

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5) dx = \\ &= c_0x + \frac{c_1x^2}{2} + \frac{c_2x^3}{3} + \frac{c_3x^4}{4} + \frac{c_4x^5}{5} + \frac{c_5x^6}{6} + C \end{aligned} \quad (5.2)$$

Avaliando esta primitiva no intervalo  $[-1,1]$ , encontra-se o seguinte resultado para esta integral:

$$I = 2c_0 + 0c_1 + \frac{2c_2}{3} + 0c_3 + \frac{2c_4}{5} + 0c_5. \quad (5.3)$$

O objetivo da quadratura de Gauss é encontrar o valor desta integral  $I$  simplesmente avaliando a função em alguns pontos.

Ainda para o mesmo exemplo, toma-se

$$J = W_1 f(P_1) + W_2 f(P_2) + W_3 f(P_3), \quad (5.4)$$

sendo  $P_j$  os pontos escolhidos no domínio e  $W_j$  pesos correspondentes. Estes valores ainda não foram definidos, mas a equação (5.4) é a base da quadratura de Gauss. No decorrer deste capítulo, o entendimento desta tornar-se-á mais claro.

Aplicando a função em cada  $P_j$  da equação (5.4) e organizando as variáveis, chega-se à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} J = & (W_1+W_2+W_3) c_0 + \\ & (W_1 P_1+W_2 P_2+W_3 P_3) c_1 + \\ & (W_1 P_1^2+W_2 P_2^2+W_3 P_3^2) c_2 + \\ & (W_1 P_1^3+W_2 P_2^3+W_3 P_3^3) c_3 + \\ & (W_1 P_1^4+W_2 P_2^4+W_3 P_3^4) c_4 + \\ & (W_1 P_1^5+W_2 P_2^5+W_3 P_3^5) c_5. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Fazendo  $J=I$  e igualando os valores que multiplicam os coeficientes da função polinomial, encontra-se um sistema com as seguintes equações:

$$\begin{aligned}W_1 + W_2 + W_3 &= 2 \\W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3 &= 0 \\W_1 P_1^2 + W_2 P_2^2 + W_3 P_3^2 &= 2/3 \\W_1 P_1^3 + W_2 P_2^3 + W_3 P_3^3 &= 0 \\W_1 P_1^4 + W_2 P_2^4 + W_3 P_3^4 &= 2/5 \\W_1 P_1^5 + W_2 P_2^5 + W_3 P_3^5 &= 0\end{aligned}\tag{5.6}$$

Resolvendo este sistema, chega-se aos valores de  $W_j$  e  $P_j$ . Substituindo estes valores na equação (5.4), chega-se ao valor analítico da integral com simples avaliações da função.

$$J = I = \frac{5}{9} f(-3/5) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(3/5).\tag{5.7}$$

Percebe-se que este resultado é válido para qualquer função polinomial de grau menor ou igual a 5, pois a demonstração não especificou os coeficientes, que podem inclusive ser zero. As constantes  $W_j$  e os pontos  $P_j$  a serem avaliados variam de acordo com o grau do polinômio (5.1) e são tabelados para o intervalo  $[-1,1]$ . Caso a função seja de grau superior a 5 ou não seja polinomial, a fórmula (5.7) determinará apenas uma aproximação por um polinômio de grau 5. Quanto mais próxima a função estiver do tipo (5.1), melhor será a aproximação. No item 5.3.1, esclarecer-se-á o processo de adaptação para um intervalo diferente de  $[-1,1]$ .

A demonstração para o caso de uma aproximação de grau diferente de 5 segue os mesmo passos. Todas as considerações feitas são válidas também nestes outros casos.

Com base na estruturação da quadratura de Gauss, pode-se concluir que, com a avaliação de  $n$  pontos pré-estabelecidos, pode-se obter a integral analítica de um polinômio de grau  $p=2n-1$ . Percebe-se, então, que  $p$  é sempre um número ímpar e,



conseqüentemente, para obter a integral analítica de um polinômio de grau par, deve-se tomar  $n$  pontos de forma que  $p$  se torne um valor ímpar superior ao grau do polinômio.

### 5.1.2. Tratamento n-dimensional

Para o cálculo de integrais n-dimensionais, o resultado generalizado é o seguinte (Civil.pt, 2004):

$$\int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} W_{i_1} \dots W_{i_n} f(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}) \quad (5.8)$$

- $n$ : dimensão da função;
- $W_j$ : constantes para cada integração;
- $P_j$ : coordenadas que formam os ponto.

### 5.1.3. Adaptação do Intervalo

Na maioria dos casos, não se utiliza o método no intervalo tabelado  $[-1,1]$ . Desta forma, necessita-se de uma adaptação dos pontos e pesos tabelados que possibilite a aplicação do método da quadratura de Gauss para estes casos (Campos, 2001). Quando pretende-se calcular uma integral em um intervalo diferente de  $[-1,1]$ , basta adaptar os pesos e aplicar uma transformação que redistribui os pontos no novo intervalo  $[-a,a]$ . Não se necessita de um intervalo da forma  $[a,b]$ , pois qualquer região pode ser mapeada somente com intervalos da forma  $[-a,a]$ .

Agora, o problema é determinar os valores dos pesos  $A_i$ , e das abscissas  $t_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , as quais se encontram no intervalo  $[-1,1]$ , para utilizá-los na fórmula

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-1}^1 F(t) dt \approx I_n = A_1 F(t_1) + \dots + A_n F(t_n), \quad (5.9)$$

ou seja,

$$I_n = \sum_{i=1}^n A_i F(t_i), \quad (5.10)$$

de modo que a mesma seja analítica para os polinômios de grau menor ou igual a  $2n-1$ .

Fazendo

$$F(t) = t^k, k = 0, 1, \dots, 2n-1,$$

e sabendo que

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \begin{cases} 0, & k \text{ ímpar} \\ 2/(k+1), & k \text{ par} \end{cases},$$

então, impondo que (5.10) seja analítica para a integração de  $F(t)$  acima, é obtido o seguinte sistema de equações não lineares de ordem  $2n$ :

$$\begin{cases} A_1 + \dots + A_n = 2 \\ A_1 t_1 + \dots + A_n t_n = 0 \\ A_1 t_1^2 + \dots + A_n t_n^2 = 2/3 \\ \vdots \\ A_1 t_1^{2n-1} + \dots + A_n t_n^{2n-1} = 0 \end{cases},$$

cuja solução fornece os  $n$  pesos  $A_i$  e as  $n$  abscissas  $t_i$  desejados. A necessidade de resolver este sistema não linear pode ser evitada usando um processo alternativo. Inicialmente, sejam os polinômios de Legendre definidos pela fórmula de recorrência:

$$L_n(x) = \frac{(2n+1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)}{n}, \quad (5.11)$$

com  $L_0(x) = 1$  e  $L_1(x) = x$ .

Os polinômios de Legendre possuem as seguintes propriedades básicas:

$$L_n(1) = 1 \text{ e } L_n(-1) = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots \text{ e}$$

$$\int_{-1}^1 L_n(x) Q_k(x) dx = 0, n > k, \quad (5.12)$$

sendo  $Q_k(x)$  um polinômio qualquer de grau  $k < n$ . Chama-se a integral (5.12) de produto escalar das funções  $L_n(x)$  e  $Q_k(x)$ . Duas funções são ditas ortogonais se seu produto escalar for nulo, portanto,  $L_n(x)$  e  $Q_k(x)$  são ortogonais. Além disso,

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_k(x) dx \begin{cases} = 0, \text{ se } n \neq k \\ > 0, \text{ se } n = k \end{cases}.$$

Uma outra propriedade é que as equações algébricas  $L_n(x) = 0$  possuem  $n$  raízes reais distintas pertencentes ao intervalo  $(-1,1)$ . Considera-se, agora, os polinômios  $F_k(t) = t^k L_n(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , onde  $L_n(t)$  é um polinômio de Legendre de grau  $n$ . Desde que  $F_k(t)$  seja de grau menor ou igual a  $2n-1$ , então (5.9) é exata, ou seja,

$$\int_{-1}^1 t^k L_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k L_n(t_i), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Devido à ortogonalidade dos polinômios de Legendre com qualquer polinômio de grau menor que o de Legendre, mostrado em (5.12), tem-se que

$$\int_{-1}^1 t^k L_n(t) dt = 0, \quad n > k, \text{ e portanto,}$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k L_n(t_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Esta expressão será verdadeira para qualquer valor de  $A_i$ , se  $L_n(t_i) = 0$  para todo  $i$ . Assim, para obter uma maior exatidão na fórmula de quadratura (5.10) é suficiente que  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sejam zeros do polinômio de Legendre de grau  $n$ . Sendo conhecidas as abscissas  $t_i$ , então o sistema não linear se reduz a um sistema linear de ordem  $n$ , cuja solução fornece os pesos  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

No entanto, os pesos  $A_i$  podem ser obtidos facilmente pela expressão abaixo, conforme (Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, 1992),

$$A_i = \frac{2}{(1-t_i^2)(L'_n(t_i))^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.13}$$

onde  $L'_n(t_i)$  é a derivada de  $L_n(x)$  na abscissa  $t_i$ .

## 5.2. Junção dos Métodos

Após a apresentação detalhada do método de integração vetorial e da quadratura de Gauss, unifica-se os métodos.

Para se calcular o volume de sólidos pelo método da quadratura de Gauss, de acordo com grau da aproximação, faz-se necessária a avaliação de alguns pontos específicos e tabelados, como foi mencionado anteriormente. Sendo assim, os vetores farão este papel, ou seja, cada ponto a ser avaliado corresponde a um vetor atravessando o sólido. Passando, como parâmetro para a quadratura, a avaliação dos pontos corretos, essa se encarrega de determinar uma aproximação para o seu volume.

Um sólido qualquer, como o apresentado na figura 5-1, por um plano de corte, terá as avaliações dos pontos feitas por vetores, nos locais pré-determinados. Com o comprimento dos vetores e os pesos tabelados, obtém-se uma aproximação de grau  $n$  para a integral ( $n = 5$  e  $7$ , para as visualizações abaixo).

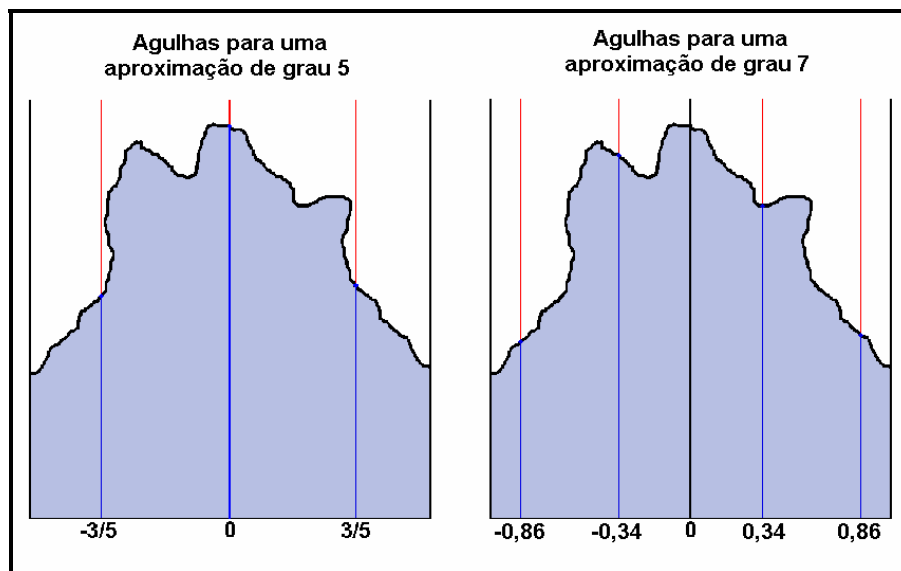


Figura 5-1: Distribuição bidimensional de vetores para a integração vetorial gaussiana.

Visualizando a mesma região por um plano de corte horizontal e perpendicular à visualização da figura 5-1 pode-se observar a distribuição tridimensional dos vetores. A figura 5-2 ilustra esta distribuição para os mesmos graus de aproximação acima.

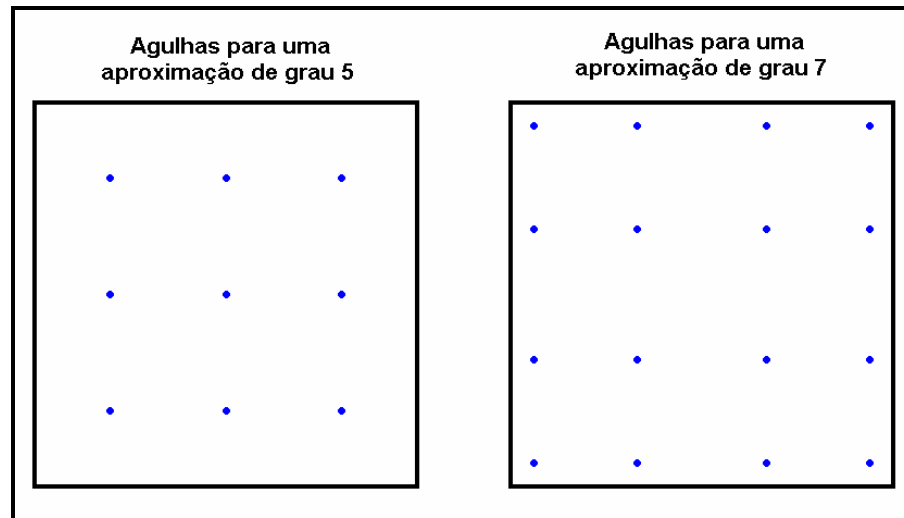


Figura 5-2: Distribuição tridimensional de vetores para a integração vetorial gaussiana.

Vale reforçar a idéia de que a integral de uma função polinomial de qualquer grau pode ser obtida analiticamente pela quadratura de Gauss, desde que sejam tomados corretos o número de vetores, os pontos a serem avaliados e os pesos para cada um deles. Segue uma tabela de pontos e pesos adequados,  $x_i$  e  $g_i$  para a quadratura de Gauss até grau 4:

$n$	$i$	$x_i$	$g_i$
1	1	0	2
2	1	-0,5773503	1
	2	0,5773503	1
3	1	-0,7745967	0,5555556
	2	0	0,8888889
	3	0,7745967	0,5555556
4	1	-0,8611363	0,3478548
	2	-0,3399810	0,6521455
	3	0,3399810	0,6521455
	4	0,8611363	0,3478548

Tabela 5-1: Pontos e pesos para a quadratura de Gauss. (if.br, 2004)

O método de da quadratura de Gauss não deve ser comparado diretamente com o de blocos e sub-blocos, pois utiliza-se de rede irregular de vetores, e não de rede regular gaussiana de pontos como é o caso deste.

## **Capítulo 6**

### **Cálculos Comparativos**

Para se realizar um estudo comparativo com dados reais, não se pode utilizar unicamente regiões simples conhecidas pela matemática, porém sua praticidade didática e exemplificativa é incontestável. Por outro lado, a utilidade principal de algoritmos numéricos é justamente no cálculo de volumes irregulares desconhecidos e desprovidos de funções matemáticas a representá-los. Desta forma, inicia-se o estudo estudo comparativo com o cálculo de volume de sólidos regulares e depois, compara-se os métodos através de exemplos reais de regiões irregulares. Inicialmente, utiliza-se um sólido geológico, cujo volume é conhecido (figura 3-1). Posteriormente, toma-se um sólido irregular, cujo volume é analiticamente conhecido, por tratar-se da diferença de sólidos regulares.

Utilizou-se um Pentium 4, com frequência de 1,6 GHz e 512MB de memória volátil e acesso randômico, para processamento dos testes. Escolheu-se os softwares Gems 5.1 (Windows) e Microlynx 4.39 (DOS) para o cálculo dos volumes pelos métodos de integração vetorial e blocos/sub-blocos, respectivamente.

Os tempos de processamento computacional foram rigorosamente registrados para que a análise dos resultados também considere os ganhos potenciais de um método em relação ao outro no que se refere ao desempenho dos processos de cálculo computacional. Foram obtidos e registrados gráficos comparativos, tabelas e relatórios de processamento, que subsidiarão as conclusões apresentadas.

Os tempos obtidos são válidos para os respectivos algoritmos implementados nos respectivos programas utilizados neste computador, não podendo ser generalizados.

#### **6.1. Sólidos Regulares**

Aplica-se os dois métodos, blocos/sub-blocos e integração vetorial simples, inicialmente no cálculo do volume de sólidos primitivos básicos: um cilindro reto e um cone reto. O

método de integração vetorial gaussiana também participará das comparações no item 6.3. Posteriormente, avalia-se os erros obtidos. Utiliza-se sub-blocos que variarão, em quantidade, de 1 a 12 por direção, ou seja, de 1x1x1 até 12x12x12 = 1728 sub-blocos por bloco, ou de 1<sup>2</sup> até 12<sup>2</sup> = 144 vetores por bloco.

O cilindro reto da figura 7-1 possui raio da base igual a 100m e altura igual a 100m. Tem-se, portanto, tomando  $\pi = 3,141592$ , o volume V do cilindro:

$$V = 3,141592 \times 100^2 \times 100 = 3.141.592\text{m}^3.$$

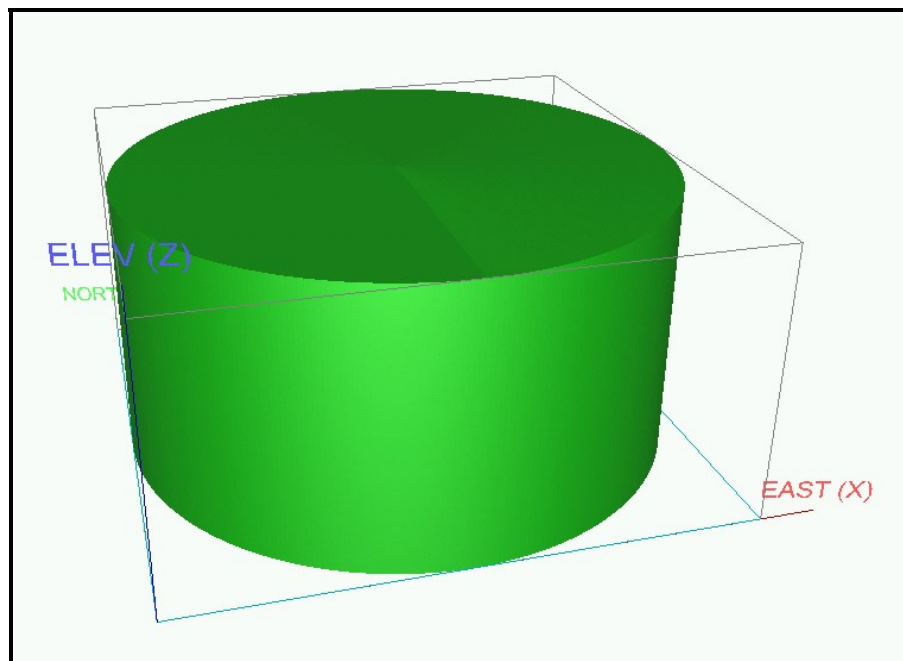


Figura 6-1: Cilindro reto.

Apresentamos a seguir a formulação envolvida para o cilindro reto genérico:

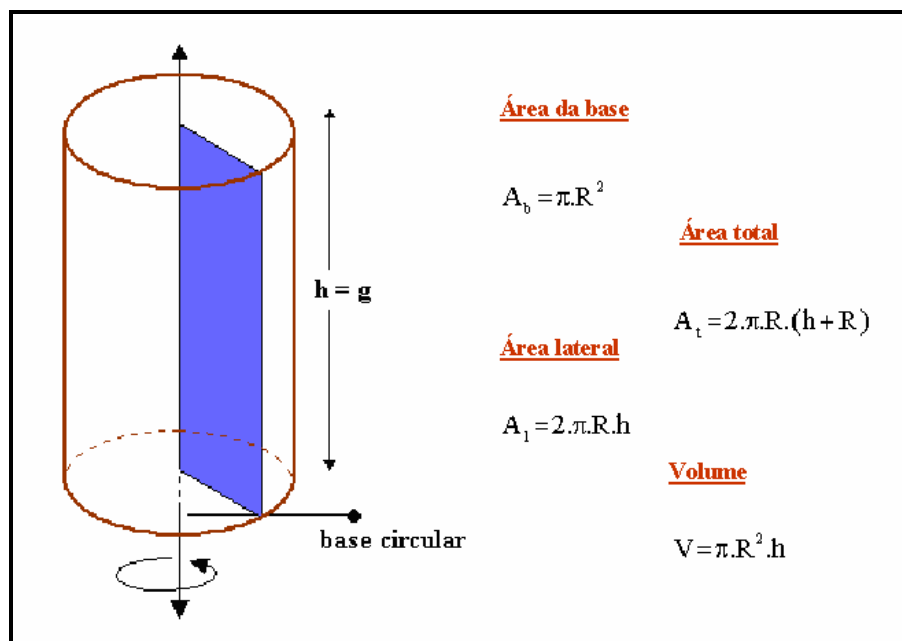


Figura 6-2: Cilindro reto, áreas e volume.

Para que seja simples o entendimento, quando for citado o termo “resolução”, entende-se como o número de vetores ou sub-blocos que dividem cada dimensão de cada célula da base do sólido. Por exemplo, se divide-se a base do sólido em células de tamanho 10x10, tem-se blocos de volume 10x10x10. Se a resolução é 2, então serão 2x2x2=8 sub-blocos por bloco e 2x2=4 vetores por célula, para o caso da integração vetorial. Se a resolução é 5, então serão 5x5x5=125 sub-blocos por bloco e 5x5=25 vetores por célula.

O sólido da figura 6-1 foi graficamente inserido, com as dimensões apresentadas, nos dois programas utilizados para as comparações. Para o método de integração vetorial, definiu-se uma malha com células de dimensões 5mX5m, enquanto para o método de blocos/sub-blocos definiu-se blocos de dimensões 5mX5mX5m. A tabela 6-1, a seguir, apresenta o resultado do estudo comparativo do volume do cilindro calculado pelos dois métodos, com precisões diferentes, variando de 1 a 12, apresentando o erro percentual em relação ao volume analítico. Os tempos computados referem-se à execução dos métodos nos programas utilizados, os quais possuem implementações distintas e rodam em plataformas diferentes, o que faz com que os resultados de tempo não dependam



somente dos métodos em si, porém, mesmo com estas considerações, pode-se extrair informações sobre a estabilidade e convergência dos distintos métodos. Os gráficos, a seguir, representam os resultados apresentados na tabela 6-1.

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO NO CÁLCULO DE VOLUME DO CILINDRO PARA BLOCOS DE DIMENSÕES 5mX5mX5m.				
RESOLUÇÃO	INTEGRAÇÃO VETORIAL		BLOCOS	
	ERRO (%)	TEMPO (min.)	ERRO (%)	TEMPO (min.)
1	0.00586	0.02	0.00846	0.62
2	0.00009	0.03	0.00051	7.00
3	0.00002	0.10	0.00281	12.50
4	0.00054	0.17	0.00009	32.00
5	0.00083	0.27	0.00057	56.00
6	0.00058	0.37	0.00011	92.40
7	0.00039	0.48	0.00091	143.20
8	0.00070	0.63	0.00034	212.00
9	0.00040	0.82	0.00032	298.00
10	0.00055	1.07	0.00010	413.20
11	0.00064	1.20	0.00034	546.80
12	0.00042	1.43	0.00001	716.70
99	0.00038	97.92	-	-

Tabela 6-1: Estudo comparativo de tempo e erro para o cilindro.

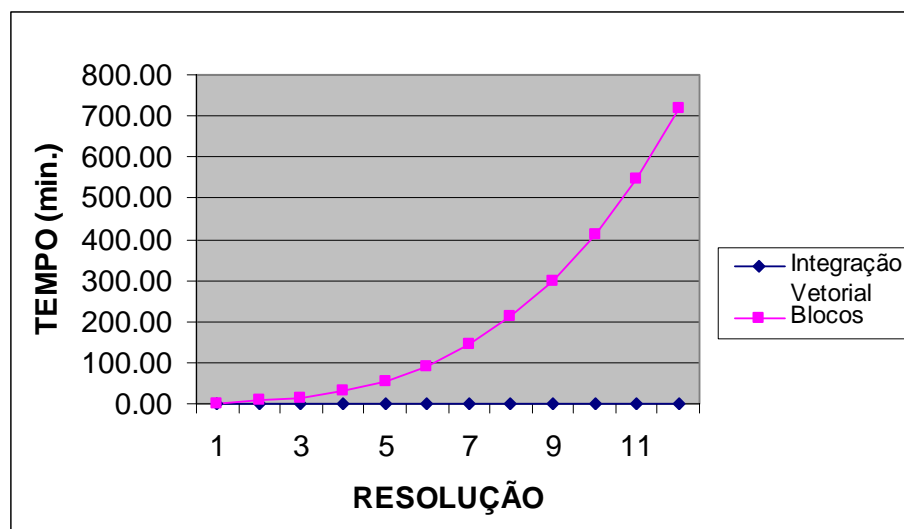


Gráfico 6-1: Comparação entre os tempos de execução para o cilindro.

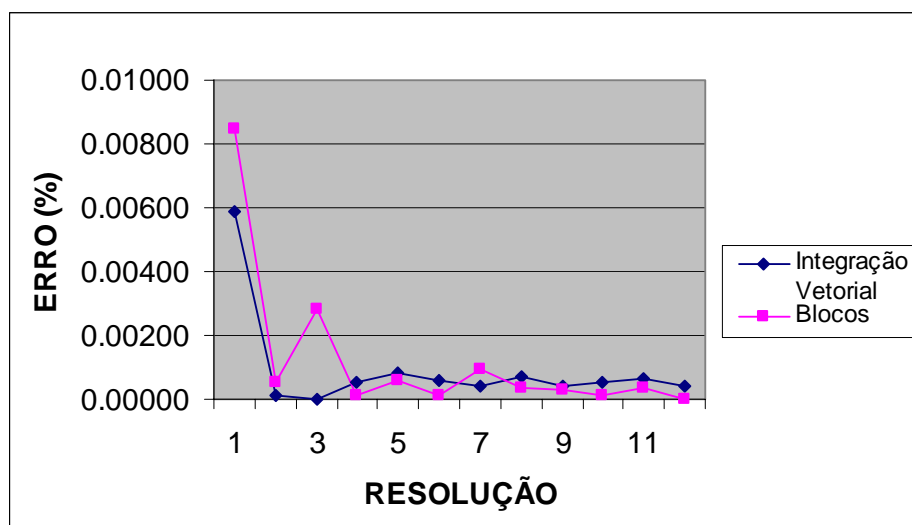


Gráfico 6-2: Comparação entre os erros percentuais para o cilindro.

Utilizou-se a resolução de nível 99, na tabela, para o método de integração vetorial, para comparar o crescimento do tempo de execução dos métodos e mostrar que o erro estabiliza-se em determinado ponto. Não incluiu-se este dado nos gráficos. Percebe-se, pelos tempos apresentados, que seria inviável calcular o volume por blocos/sub-blocos com uma resolução como essa. O tempo de execução do método de integração vetorial é inferior ao do método de blocos/sub-blocos, mas os erros percentuais ficaram bem próximos e a convergência foi satisfatória para ambos os métodos.

O cone reto, a seguir, possui raio da base igual a 100m. e altura igual a 100m., portanto seu volume é igual a 1.047.197m<sup>3</sup>. Tem-se, portanto, tomando  $\pi = 3,141592$ , o volume  $V$  do cone:

$$V = \frac{3,141592 \times 1^2 \times 1}{3} = 1.047.592\text{m}^3.$$

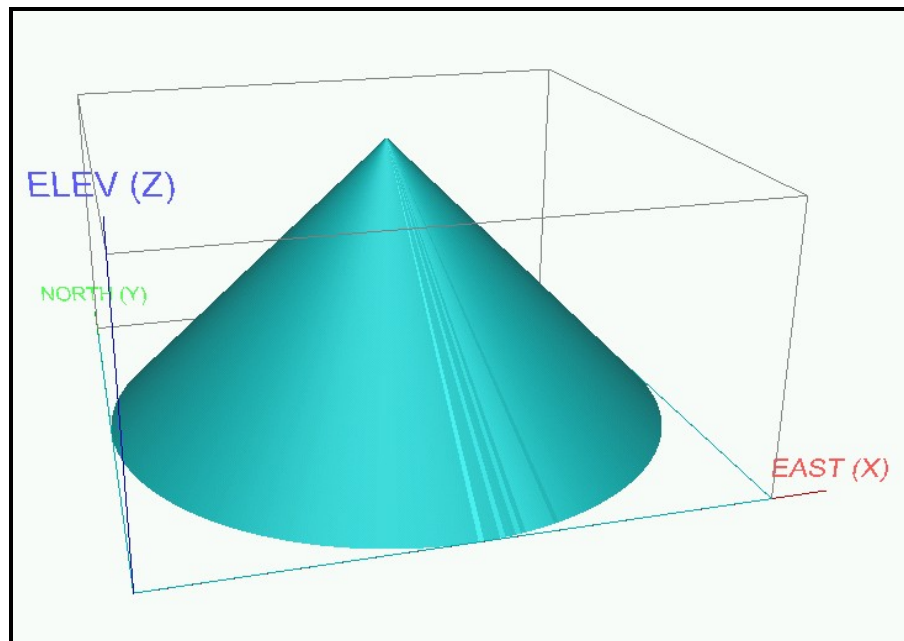


Figura 6-3: Cone reto.

Apresentamos a seguir a formulação envolvida para o cone reto genérico:

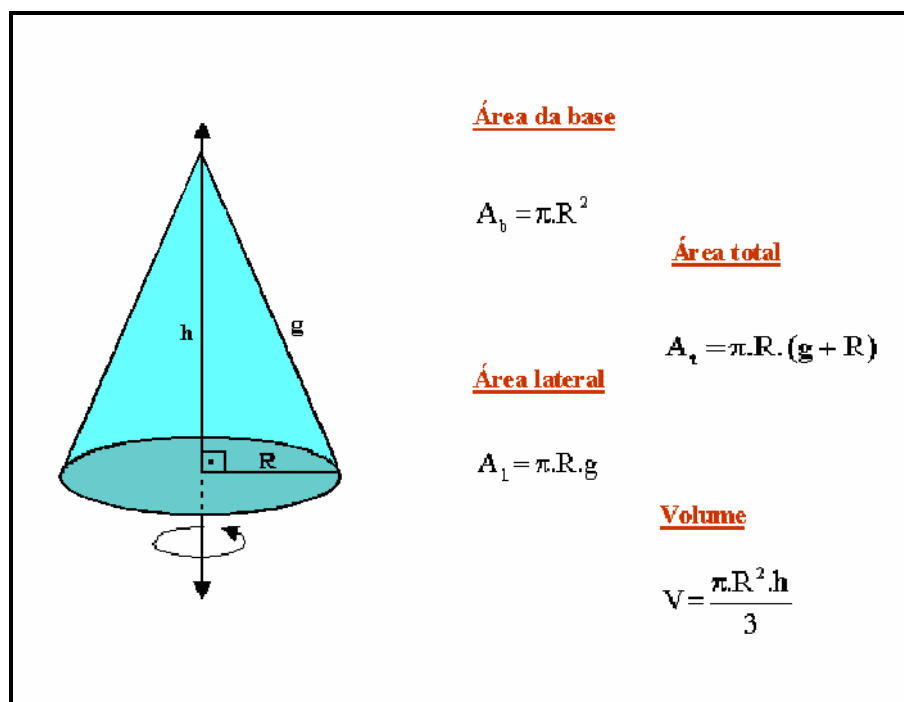


Figura 6-4: Cone reto, áreas e volume.

A tabela 6-2 apresenta um estudo comparativo com a mesma estrutura do estudo feito para a tabela 6-1 e os gráficos 6-3 e 6-4 ilustram os dados dessa.

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO NO CÁLCULO DE VOLUME DO CONE PARA BLOCOS DE DIMENSÕES 5mX5mX5m.				
RESOLUÇÃO	INTEGRAÇÃO VETORIAL		BLOCOS	
	ERRO (%)	TEMPO (min.)	ERRO (%)	TEMPO (min.)
1	0.00004	0.02	0.00697	0.33
2	0.00003	0.03	0.03658	2.50
3	0.00005	0.08	0.04385	5.50
4	0.00005	0.15	0.03480	9.90
5	0.00005	0.23	0.04022	19.30
6	0.00005	0.35	0.03429	30.10
7	0.00005	0.48	0.03858	49.50
8	0.00005	0.60	0.03421	69.50
9	0.00005	0.75	0.03756	104.50
10	0.00005	0.97	0.03416	137.00
11	0.00005	1.10	0.03693	190.00
12	0.00005	1.32	0.03406	237.00
99	0.00006	89.95	-	-

Tabela 6-2: Estudo comparativo de tempo e erro para o cone.

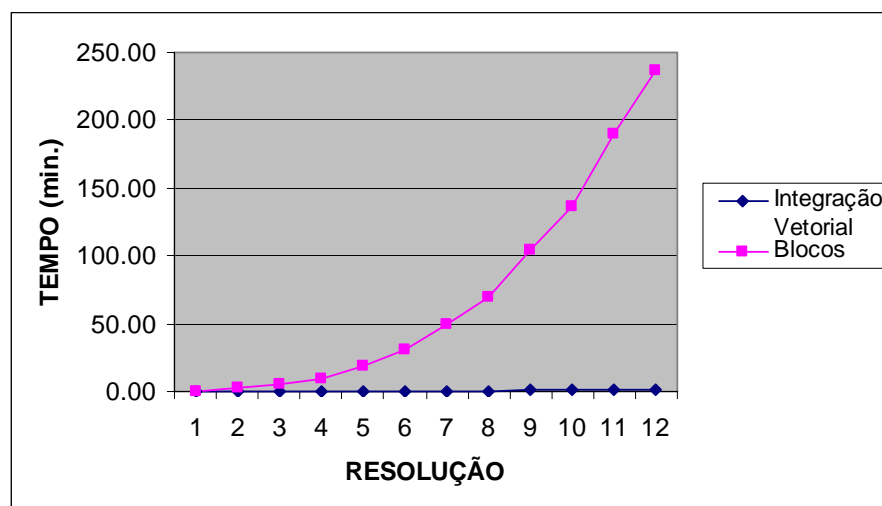


Gráfico 6-3: Comparação entre os tempos de execução para o cone.



Gráfico 6-4: Comparação entre os erros percentuais para o cone.

Com estes dados, pode-se reafirmar que o método de integração vetorial atinge um certo ponto em que o erro estabiliza-se e a convergência praticamente não ocorre mais. A instabilidade do método de blocos/sub-blocos, como mencionou-se anteriormente, deve-se à compensação que ocorre entre volumes considerados e desconsiderados erroneamente, o que ocorre muito mais neste método. O método de integração vetorial mostrou-se superior nas duas comparações. Isso reforça a idéia de que quanto mais regular for a figura, melhor será o resultado determinado pelo método de blocos/sub-blocos. Vale ressaltar que este trabalho não questiona a eficiência do método de blocos/sub-blocos, que apresenta resultados muito satisfatórios do ponto de vista prático.

## 6.2. Sólido Irregular

Por sua superfície envoltória ser fechada, composta por triângulos adjacentes e consecutivos, a técnica utilizada para se calcular o seu volume analítico é bastante simples. A saber, projeta-se os prismas da superfície superior até um plano de referência que esteja totalmente abaixo da superfície inferior e calcula-se o volume destes prismas e o seu somatório (V1). Projeta-se os prismas obtidos pela projeção dos triângulos da superfície inferior até o mesmo plano de referência e calcula-se o volume destes prismas

e o seu somatório ( $V_2$ ). O volume final analítico será  $V = V_1 - V_2$ . As figuras 6-5 e 6-6 ilustram a construção de uma superfície a partir de triângulos consecutivos e adjacentes.

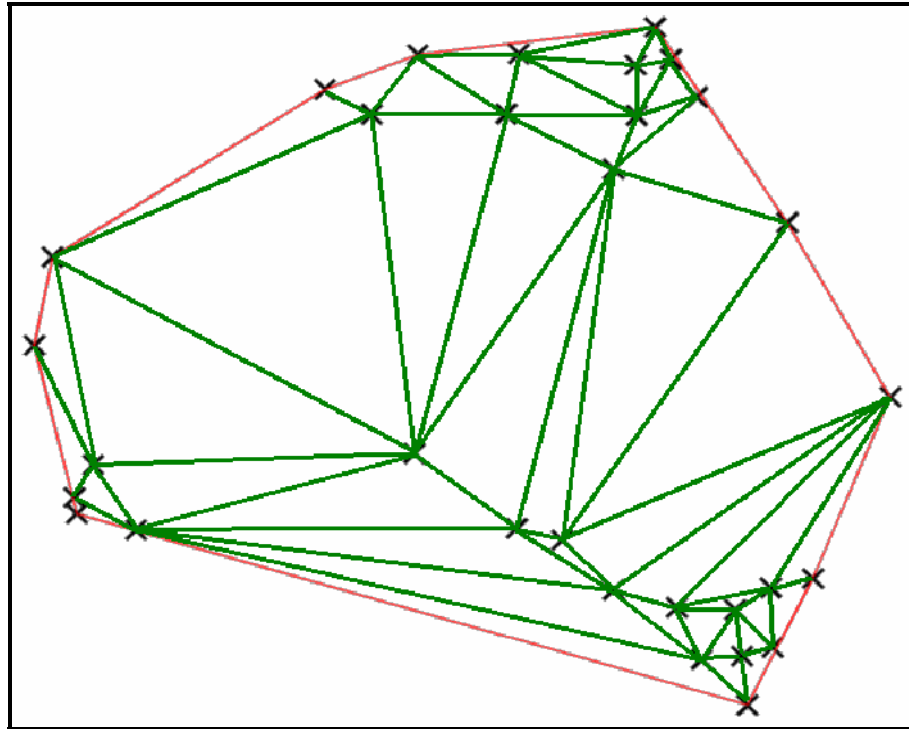


Figura 6-5: Triangularização de superfícies.

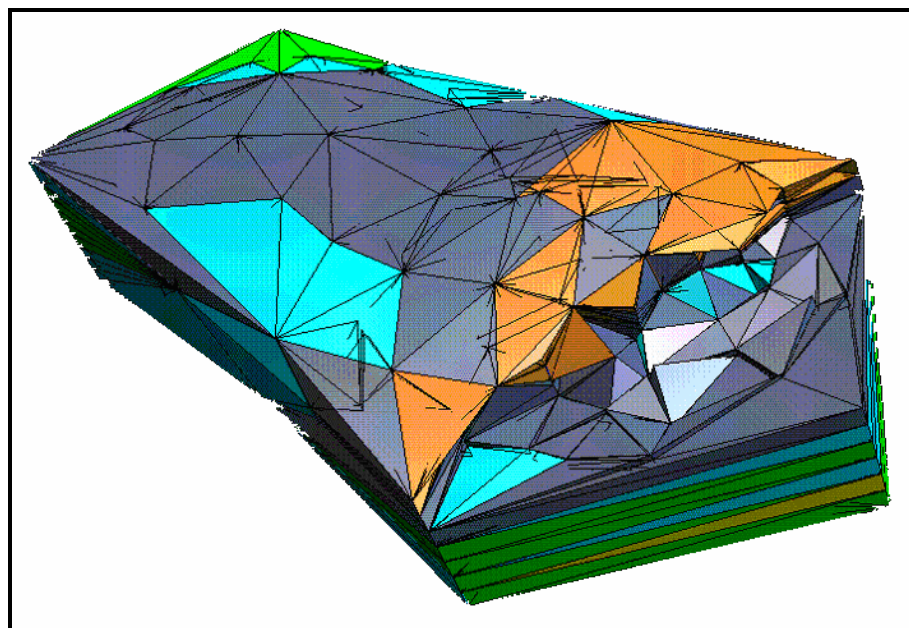


Figura 6-6: Prismas a partir de superfícies trianguladas.

Para este sólido irregular, também foram feitos testes comparativos, assim como os feitos para o cilindro e o cone. A seguir, estão apresentadas as tabelas e gráficos no mesmo formato.

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO NO CÁLCULO DE VOLUME DO SÓLIDO IRREGULAR PARA BLOCOS DE DIMENSÕES 5mX5mX5m.				
PRECISÃO	INTEGRAÇÃO VETORIAL		BLOCOS	
	ERRO (%)	TEMPO (min.)	ERRO (%)	TEMPO (min.)
1	0.00109	0.02	0.02338	0.20
2	0.00078	0.03	0.02618	0.62
3	0.00100	0.07	0.02670	1.25
4	0.00002	0.12	0.02667	2.27
5	0.00028	0.17	0.02615	4.00
6	0.00015	0.23	0.02662	6.57
7	0.00018	0.33	0.02662	10.17
8	0.00000	0.48	0.02645	15.50
9	0.00015	0.55	0.02662	22.00
10	0.00013	0.68	0.02685	28.00
11	0.00009	0.82	0.02665	38.00
12	0.00000	0.97	0.02687	52.00

Tabela 6-3: Estudo comparativo de tempo e erro para o sólido irregular.

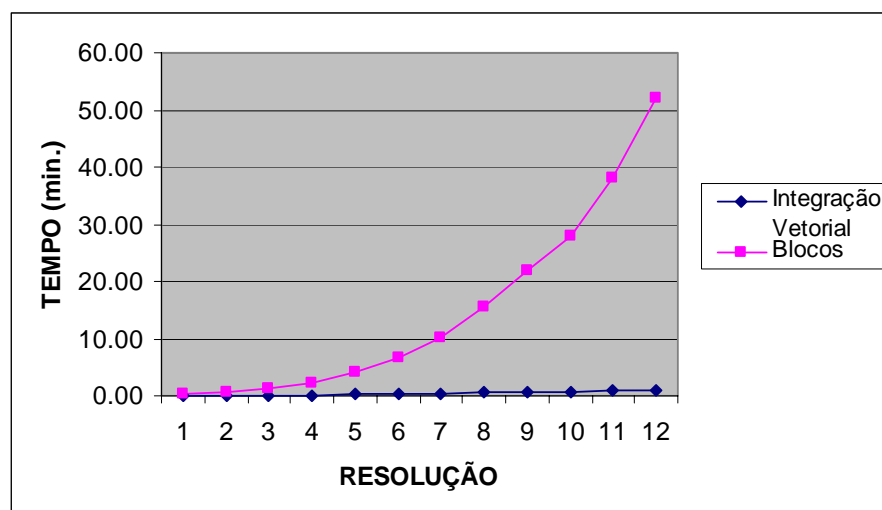


Gráfico 6-5: Comparação entre os tempos de execução para o sólido irregular.

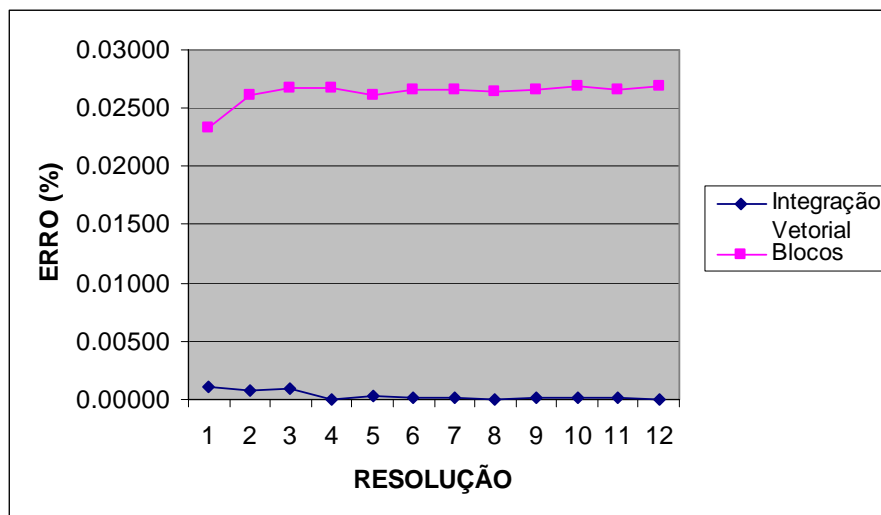


Gráfico 6-6: Comparação entre os erros percentuais para o sólido irregular.

Mais uma vez, o método de integração vetorial mostrou-se superior nos dois aspectos estudados denotando que essa é realmente a melhor dentre as duas opções. A seção 6-3 faz um estudo comparativo final, abordando os testes de uma maneira um pouco diferente, que torna possível uma comparação também em nível da estabilidade dos métodos quanto aos erros obtidos no cálculo volumétrico.

### 6.3. Sólido Construído por Diferenças

Para propiciar a comparação do cálculo volumétrico obtido pelos distintos métodos, com o valor analítico do volume de um sólido complexo, cria-se o mesmo a partir de sólidos simples que se intersectam.

#### 6.3.1. Criação do Sólido e Cálculo do Volume Analítico

Constrói-se um sólido através da diferença de diversos sólidos regulares. Como volume inicial, toma-se o sólido limitado pelas funções  $z = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi y)$  e  $z = 4$ , dentro dos intervalos  $[-1,1]$  para  $x$  e  $y$ . O volume deste sólido é dado pela integral

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 4 - (\text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi y)) dy dx = 16.$$



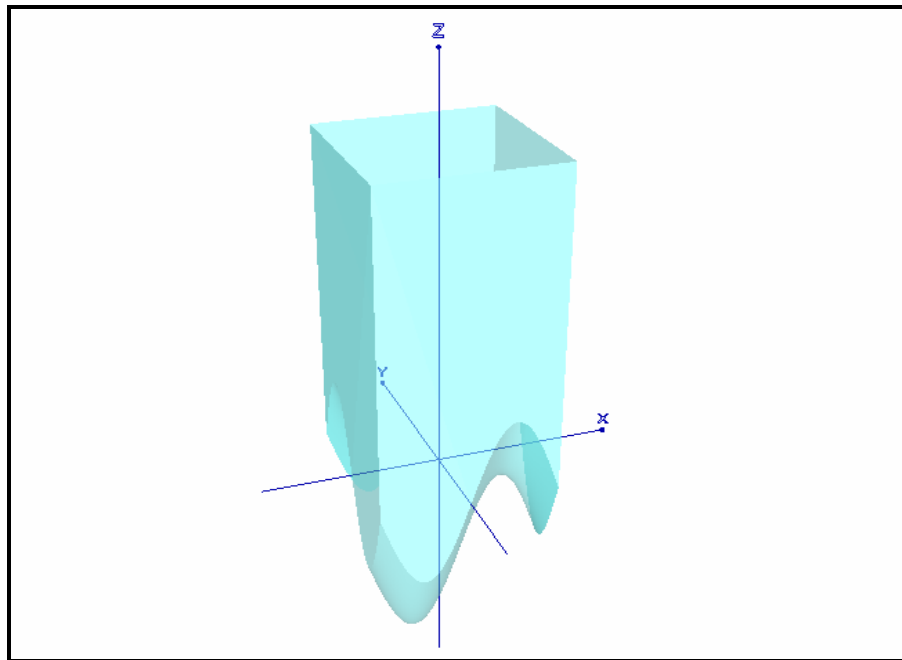


Figura 6-7: Paralelepípedo interceptado inferiormente pela curva  $z = \sin(\pi x) + \sin(\pi y)$ .

Agora, intercepta-se esta região por uma série de sólidos, cujos volumes das interseções calcula-se analiticamente. Toma-se, inicialmente, um cone, cuja interseção com o sólido da figura 6-7 dá-se por um outro cone menor com raio igual a 0,5 e altura 1. Não menciona-se unidades de medida, por não ser um ponto importante nesta discussão.

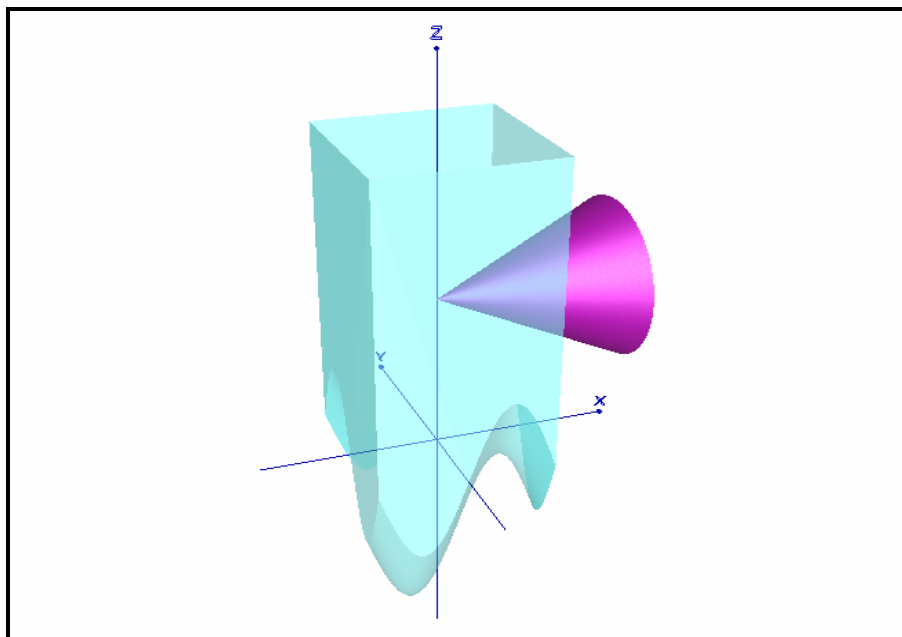


Figura 6-8: Figura 6-7 interceptada lateralmente por um cone.

O resultado da diferença entre a figura 6-7 e 6-8 está apresentado na figura 6-9.

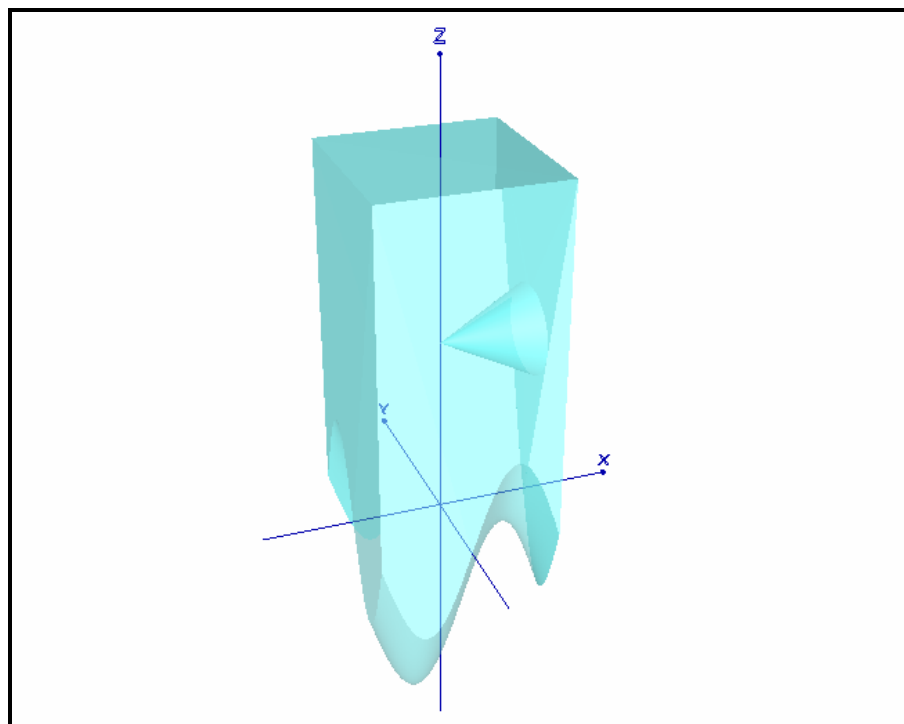


Figura 6-9: Figura 6-8 após a retirada do cone.

Calcula-se o volume do pedaço do cone retirado da seguinte forma:

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 0,5^2 \times 1}{3} = 0,262.$$

Assim, o volume total do sólido da figura 6-9 é de  $(16 - 0,262) = 15,738$ .

A próxima interseção é com o parabolóide de equação  $z = (x+1)^2 + (y+1)^2 + 2$ . As figuras seguintes apresentam o mesmo sólido visto de dois pontos diferentes, para facilitar o entendimento. O volume interceptado do parabolóide, considerando que a equação  $z = x^2 + y^2$  nos dá o mesmo resultado, por ser uma simples translação da figura, é dado pela integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^2 r dz dr d\theta = 1,571, \text{ sendo } x=r.\text{sen}\theta \text{ e } y=r.\text{cos}\theta \text{ (Lethold, 1994).}$$

Portanto, o volume do sólido da figura 6-9 é igual a  $(15,738 - 1,571) = 14,167$ .

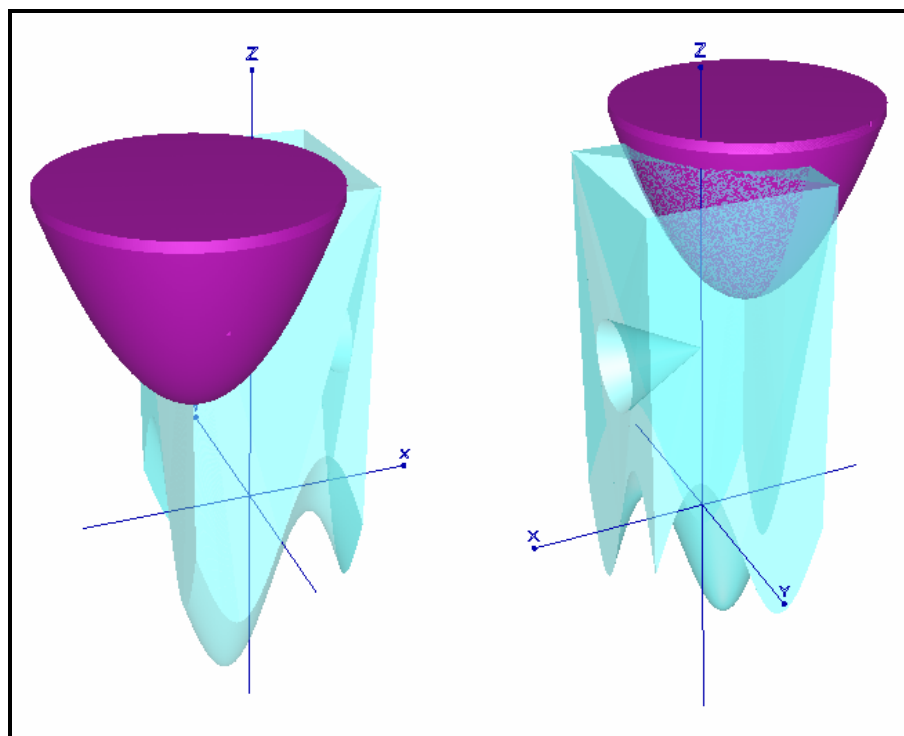


Figura 6-10: Figura 6-9 interceptada por um parabolóide.

Apresenta-se o sólido final abaixo:

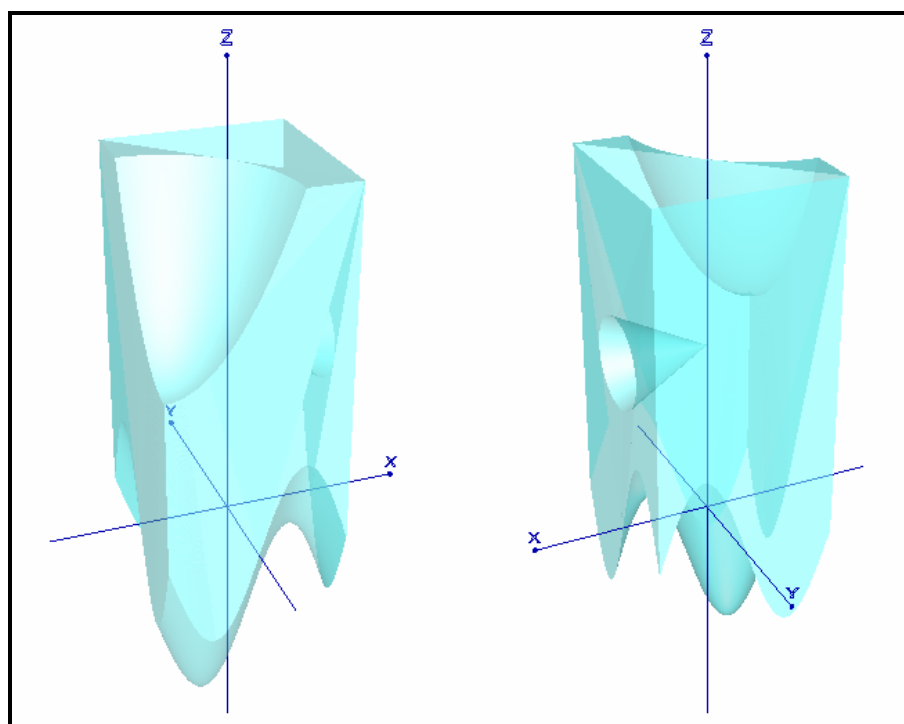


Figura 6-11: Figura 6-10 após a retirada do parabolóide.

No passo seguinte, intercepta-se um tronco de pirâmide, restando outro tronco na interseção. Este tronco de pirâmide tem 0,49 na base maior, 0,09 na base menor e 2 de altura. A altura total da pirâmide relacionada aos troncos é 3,5. Portanto, o volume do tronco de pirâmide que foi retirado é dado por

$$\frac{A_b H}{3} - \frac{A_b (H - h)}{3} = 0,572 - 0,045 = 0,527.$$

Assim, o volume do sólido da figura 6-13 é  $(14,167 - 0,527) = 13,640$ .

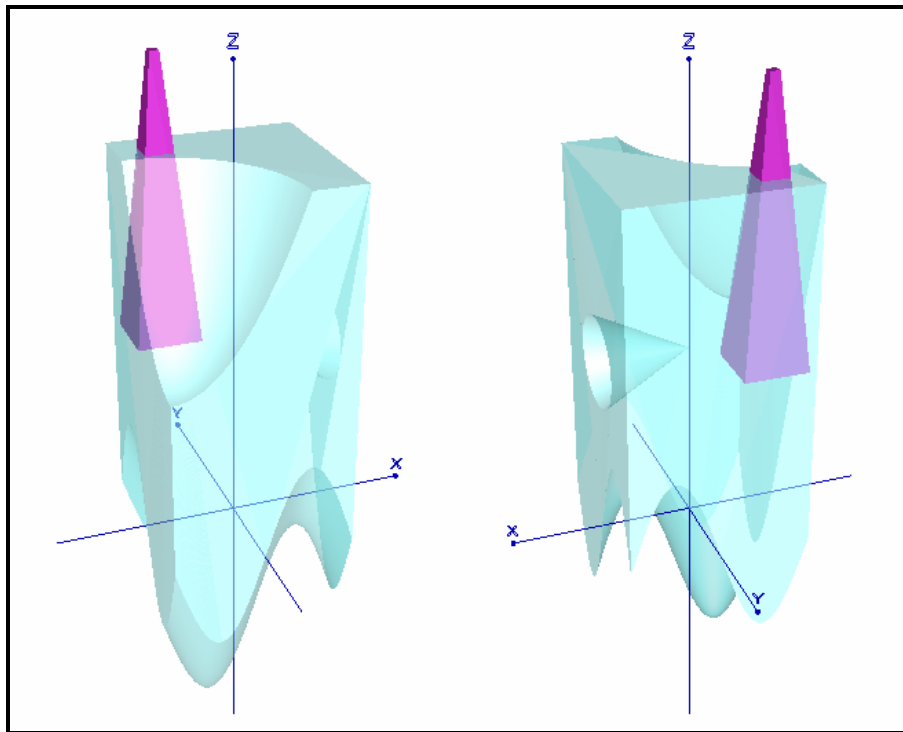


Figura 6-12: Figura 6-11 interceptada superiormente por um tronco de pirâmide.

O resultado da diferença entre os sólidos é apresentado na figura 6-13.

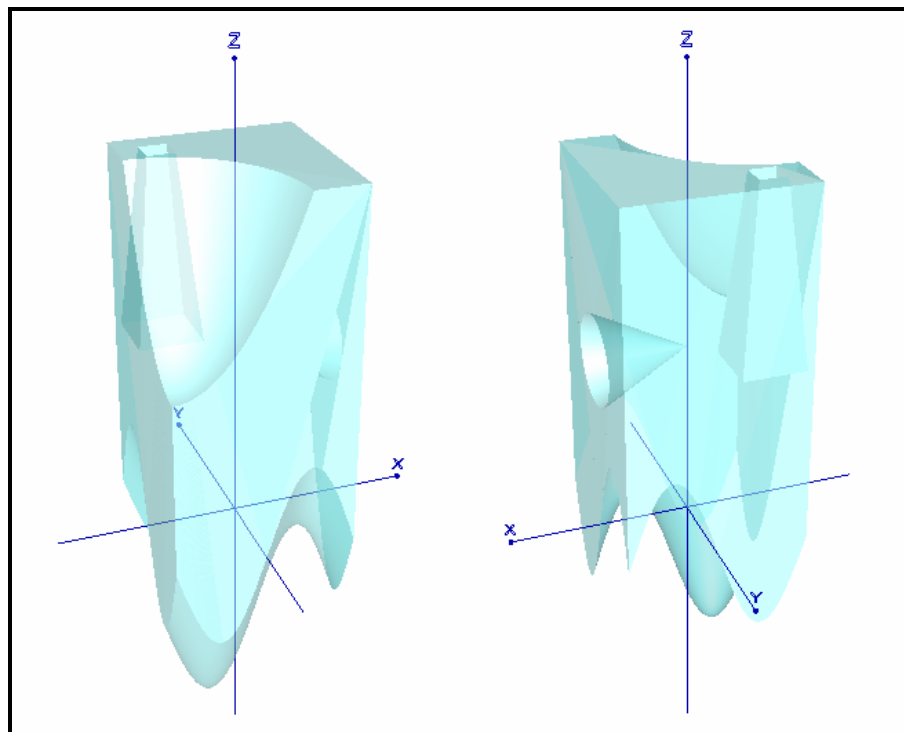


Figura 6-13: Figura 6-12 após a retirada do tronco de pirâmide.

Como último passo, atravessa-se um cilindro que corta perpendicularmente toda a extensão lateral do sólido atual. A interseção também resulta em um cilindro. Esse possui 0,2 de raio e 2 de altura.

O volume do cilindro menor, dado pela interseção dos dois sólidos, é calculado da seguinte forma:

$$\pi r^2 h = 0,251.$$

Finalmente, o volume do sólido após todas as interseções é

$$(13,640 - 0,251) = 13,389 \text{ unidades}^3.$$

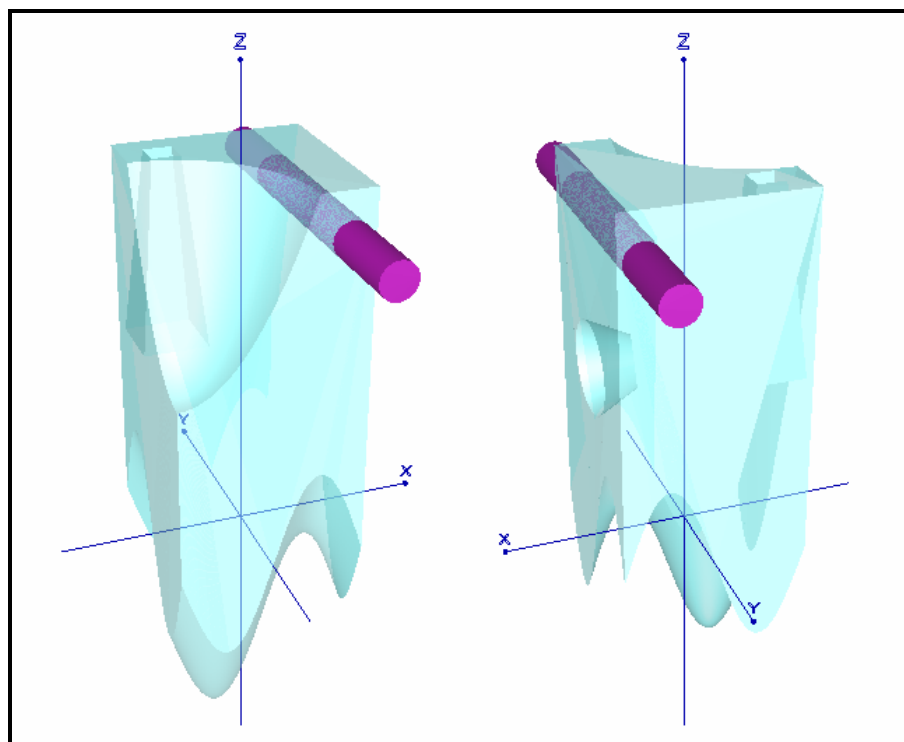


Figura 6-14: Figura 6-13 atravessada por um cilindro.

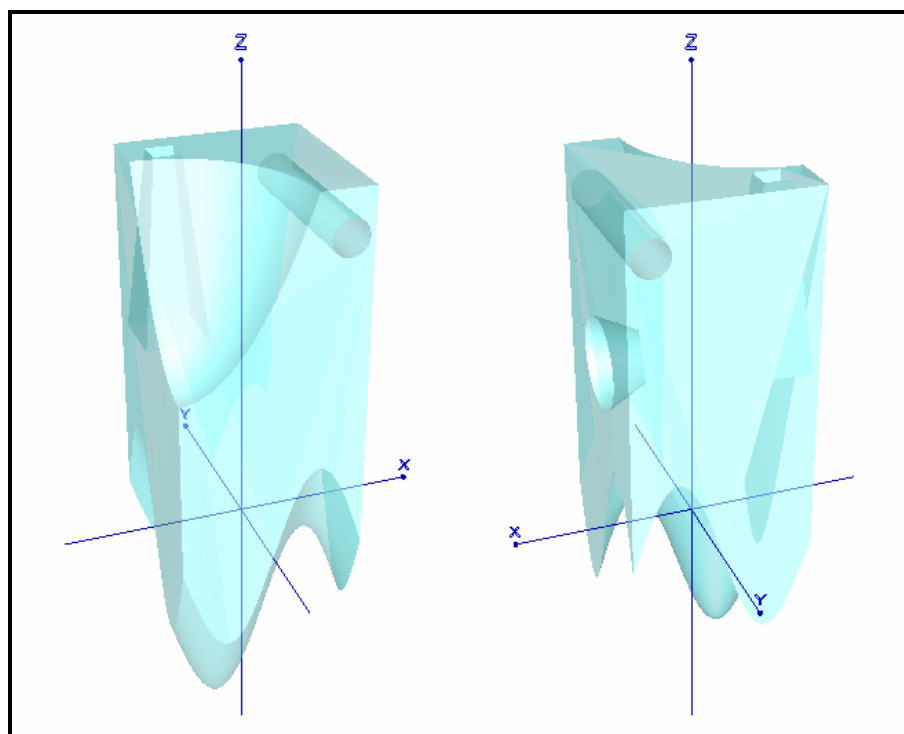


Figura 6-15: Figura 6-14 após a retirada do cilindro.

Para se comparar os métodos, previamente, define-se as resoluções e a orientação dos vetores dos testes. O próximo item trata-se da forma como definiu-se estes parâmetros.

### **6.3.2. Dimensões dos Blocos Primários e Orientação dos vetores**

Como mencionou-se, em seções anteriores, a comparação entre os métodos, neste estudo, definiu uma forma que os separa em níveis de resolução. Relembrando, pode-se dizer que um nível  $n$  de resolução faz com que cada bloco primário dividida-se em  $n^3$  blocos, quando sub-blocado, e que cada célula, na integração vetorial, possua  $n^2$  vetores atravessando o sólido na terceira dimensão. Quando a resolução variar diferentemente em cada dimensão, essas serão especificadas separadamente.

Outro aspecto importante é a definição da orientação dos vetores, o que, certamente, influirá nos volumes calculados pelo programa, pois o fator forma tem influência direta nos resultados.

A escolha das dimensões dos blocos primários e da orientação dos vetores segue os seguintes padrões:

- Faz-se diversos testes, com diversos tamanhos diferentes para as células, com um vetor por célula e nas diferentes orientações, tabulando os percentuais de erro em relação ao volume analítico, para o método de integração vetorial;
- Utiliza-se a melhor das 3 orientações, pela avaliação dos resultados obtidos, considerando que o método de blocos/sub-blocos não depende desta informação e que esta orientação certamente será melhor também para o método de integração Gaussiana;
- Escolhe-se resoluções que determinem erros próximos a 20%, 10%, 5% e 1%, dando preferência para aquelas que se referem a células com dimensões mais próximas às de um quadrado.

O passo seguinte é variar o nível de integração dentro de cada célula, tabulando os erros e os tempos e buscando o nível de sub-blocagem que determine um erro próximo. Detalhar-se-á estes procedimentos.

Espera-se que os vetores determinem um melhor resultado quando orientadas paralelas ao eixo z (orientação por níveis), desde que a malha seja adequada às dimensões de uma seção reta do sólido. Isso se justifica pelo fato de que haverá uma aderência dos vetores na lateral do sólido, o que faz com que os erros ocorram apenas na terceira dimensão. De qualquer forma, apresenta-se, a seguir, os resultados obtidos nos testes.

A tabela 6-7 apresenta o erro percentual absoluto em relação ao volume analítico do sólido, variando o número de células por dimensão ( $x$  e  $y$ ) e utilizando uma orientação por níveis. Toma-se o intervalo  $[-1,1]$  nas duas dimensões, por tratar-se das dimensões exatas da interseção de um plano horizontal com o sólido em questão. Portanto, tem-se sempre um quadrado de lado 2 como malha para este caso.

		ERRO ABSOLUTO(%)									
$x \backslash y$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>1</b>		19.497	8.300	10.650	9.228	9.940	9.408	9.777	9.462	9.663	9.490
<b>2</b>		0.828	6.636	4.843	14.803	2.435	1.829	0.004	1.079	1.190	0.813
<b>3</b>		0.379	5.970	4.778	3.381	3.097	3.315	2.572	2.519	2.900	2.906
<b>4</b>		1.235	2.455	3.106	4.782	1.176	0.898	0.884	0.340	0.884	1.015
<b>5</b>		0.445	3.278	2.888	0.840	2.907	1.719	1.096	1.716	0.914	1.227
<b>6</b>		0.113	1.805	2.084	0.325	1.288	0.501	0.070	0.420	0.082	0.055
<b>7</b>		0.229	1.204	1.725	4.342	1.049	0.367	0.265	0.558	0.105	0.308
<b>8</b>		0.342	1.828	2.209	3.983	1.766	0.841	0.669	0.923	0.425	0.569
<b>9</b>		0.119	1.780	2.079	3.307	1.070	0.444	0.191	0.354	0.170	0.366
<b>10</b>		0.070	1.430	1.904	0.183	0.892	0.191	0.168	0.231	0.174	0.311

Tabela 6-4: Erros percentuais para o método de integração vetorial com orientação por níveis.

A posição (4,10) desta tabela, por exemplo, determina o erro para o caso em que se tem 4 células dividindo igualmente o intervalo  $[-1,1]$  em  $x$  e 10 células em  $y$ . Em outras palavras, as células resultantes são retangulares, iguais e de dimensões 0,5 e 0,2.



Para a orientação paralela ao eixo  $y$  (orientação por colunas), não necessitou-se executar tantos testes. Como o objetivo destes testes iniciais é apenas determinar a orientação dos vetores e o tamanho dos blocos, os erros apresentados na tabela 6-5, abaixo, são suficientes para concluir a superioridade da orientação por níveis, para este caso.

		ERRO ABSOLUTO(%)						
$y \backslash z$		1	2	3	6	10	20	30
1		79.252	19.501	18.933	8.933	-	-	-
2		10.374	5.116	31.093	0.030	-	-	-
4		1.235	2.455	3.106	4.782	-	-	-
5		-	-	-	-	-	0.896	-
10		-	-	-	-	3.316	0.344	1.150

Tabela 6-5: Erros percentuais para o método de integração vetorial com orientação por colunas.

Percebe-se que, para um número pequeno de células, os erros mostraram-se muito instáveis, ao mesmo tempo que foram necessários 200 vetores para chegar próximo à mesma precisão de 100 vetores para a outra orientação.

O mesmo procedimento foi tomado para a orientação paralela ao eixo  $x$  (orientação por linhas) e os resultados encontram-se abaixo, na tabela 6-6.

		ERRO ABSOLUTO(%)						
$x \backslash z$		1	2	3	6	10	20	30
1		79.252	19.501	19.090	2.965	-	-	-
2		10.374	5.183	30.794	6.035	-	-	-
4		42.931	0.844	3.578	0.792	-	-	-
5		-	-	-	-	-	0.874	-
10		-	-	-	-	4.324	0.403	0.769

Tabela 6-6: Erros percentuais para o método de integração vetorial com orientação por linhas.

Pode-se tirar as mesmas conclusões anteriores, apesar do resultado ter sido um pouco mais satisfatório.

Percebe-se, então, que a melhor orientação dos vetores, para este caso, é por níveis, como já era esperado. Sendo assim, lembrando do objetivo inicial, serão tomados os seguintes pares da tabela 6-4: (1,1), (1,3), (3,3) e (4,5), que representam, respectivamente, 20%, 10%, 5% e 1% aproximadamente de erro.

### 6.3.3. Estudo Comparativo

Definidas as dimensões dos blocos primários, a comparação desenvolve-se nos seguintes passos, para cada malha escolhida acima:

- Encontra-se o volume do sólido para diversos níveis de integração (número de vetores por bloco), no método não aprimorado;
- Encontra-se os respectivos volumes nas mesmas condições para o método aprimorado;
- Executa-se o método de blocos/sub-blocos para a mesma resolução bidimensional das malhas criadas, variando os comprimentos do blocos na terceira dimensão e o número de sub-blocos por bloco de forma a obter erros próximos aos encontrados nos dois casos anteriores.

Para todos os casos, computa-se o tempo de execução e apresenta-se em tabelas comparativas:

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO PARA UMA MALHA PARALELA AO PLANO XY, COM UMA ÚNICA CÉLULA DE DIMENSÃO 2x2										
RESOLUÇÃO	ERRO (%)	IV	BLOCOS			ERRO (%)	IVG	BLOCOS		
		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.
1	19.497	1s.	13s.	3.0uc	1x1x3	19.497	1s.	13s.	3.0uc	1x1x3
2	6.640	1s.	11s.	3.0uc	3x3x3	10.718	1s.	3s.	6.0uc	1x1x2
4	1.030	1s.	12s.	3.0uc	4x4x4	1.875	2s.	31s.	3.0uc	8x8x8
10	0.314	10s.	108s.	0.5uc	20x10x5	0.428	9s.	59s.	0.5uc	20x20x2

Tabela 6-7: Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 2x2.

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO PARA UMA MALHA PARALELA AO PLANO XY, COM CÉLULAS DE DIMENSÃO 2x0,67										
RESOLUÇÃO	ERRO (%)	IV	BLOCOS			ERRO (%)	IVG	BLOCOS		
		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.
1	10.645	1s.	10s.	6.0uc	1x1x4	10.643	1s.	10s.	6.0uc	1x1x4
2	1.822	2s.	34s.	2.0uc	6x2x6	5.109	1s.	36s.	2.0uc	3x1x6
4	3.107	5s.	29s.	2.0uc	6x1x6	0.142	5s.	120s.	2.0uc	18x6x18
10	0.120	32s.	125s.	2.0uc	18x9x18	0.239	29s.	59s.	2.0uc	9x2x12

Tabela 6-8: Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 2x0,67.

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO PARA UMA MALHA PARALELA AO PLANO XY, COM CÉLULAS DE DIMENSÃO 0,67x0,67										
RESOLUÇÃO	ERRO (%)	IV	BLOCOS			ERRO (%)	IVG	BLOCOS		
		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.
1	4.780	1s.	36s.	2.0uc	1x1x6	4.780	1s.	36s.	2.0uc	1x1x6
2	0.501	4s.	71s.	1.0uc	4x4x6	0.553	4s.	71s.	1.0uc	4x4x6
4	0.179	15s.	120s.	2.0uc	6x6x18	0.291	15s.	82s.	2.0uc	6x6x12
10	0.045	94s.	125s.	2.0uc	6x9x18	0.037	93s.	47s.	2.0uc	2x2x12

Tabela 6-9: Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 0,67x0,67.

ERROS PERCENTUAIS E TEMPOS DE EXECUÇÃO PARA UMA MALHA PARALELA AO PLANO XY, COM CÉLULAS DE DIMENSÃO 0,5x0,4										
RESOLUÇÃO	ERRO (%)	IV	BLOCOS			ERRO (%)	IVG	BLOCOS		
		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.		TEMPO	TEMPO	ALTURA	Nº SUB.
1	1.176	2s.	57s.	1.5uc	1x1x7	1.176	2s.	57s.	1.5uc	1x1x7
2	0.568	8s.	59s.	0.5cu	5x4x2	0.007	8s.	81s.	0.5uc	2x2x5
4	0.007	34s.	81s.	0.5cu	2x2x5	0.015	33s.	81s.	0.5uc	2x2x5
10	0.030	210s.	1371s.	0.2cu	15x4x12	0.015	208s.	81s.	0.5uc	2x2x5

Tabela 6-7: Estudo comparativo de execuções para células de dimensão 0,5x0,4.

**LEGENDA:** *IV*: Método de Integração Vetorial

*IVG*: Método de Integração Vetorial Gaussiana

*uc*: unidades de comprimento

Como exemplo, pela primeira linha de dados da tabela 6-10, tem-se, para uma malha paralela ao plano XY, com células de dimensão 0,5x0,4 e um vetor por célula (resolução), um erro de 1,176% pelo IV em 2s de execução. Nas colunas 7 e 8 tem-se

informações sobre o IVG: erro e tempo, respectivamente, para a mesma resolução. Neste caso, tanto o erro, quanto o tempo foram os mesmo, mas pode-se perceber que isso está longe de ser um padrão. Finalmente, para se atingir um erro próximo pelo método de blocos/sub-blocos, com a mesma malha, foram necessários blocos de altura 1,5 e 1x1x7 sub-blocos por bloco, o que significa que pode-se dividir cada bloco primário em 1 parte na dimensão  $x$ , 1 na dimensão  $y$  e 7 na dimensão  $z$ . O tempo de execução foi de 57s.

Entre os dois métodos de integração vetorial, pode-se notar uma certa superioridade do primeiro, na maioria dos casos. Espera-se uma superioridade do método gaussiano para casos de sólidos mais irregulares. Nota-se, em relação aos blocos/sub-blocos, que é absurda a diferença dos tempos nas execuções apresentadas. Em poucos casos, o método de blocos/sub-blocos apresentou resultados em tempos menores, a questão principal contudo é saber se existe uma resolução que sempre determina resultados satisfatórios, como nos casos acima.

O restante do estudo focaliza-se na estabilidade dos métodos, dado que todos eles atingem erros aceitáveis, mas os blocos/sub-blocos exigem a utilização de resolução maior e conseqüentemente tempos de execução maior. As tabelas 6-7, 6-8, 6-9 e 6-10 reforçam esta afirmação, pois percebe-se, em vários casos, que o aumento do número de sub-blocos implicou em um aumento do erro percentual, quando espera-se o oposto. Somente com a melhora na resolução pode-se ter mais confiança na precisão dos resultados obtidos pelo método, levando-se em consideração que o volume dos blocos e sub-blocos tende a zero, fazendo com que o volume total tenda ao volume exato, como na teoria de integração.

Para encontrar os erros necessários para as comparações das últimas tabelas, fez-se dezenas de testes. A tabela 6-11 apresenta todas as execuções feitas para o método de blocos/sub-blocos.

DIMENSÕES DO BLOCO PRIMÁRIO (unid. compr.)			NÚMERO DE SUB-BLOCOS			ERRO (%)
X	Y	Z	X	Y	Z	
2	2	6	1	1	2	10.40
2	2	3	1	1	3	19.50
2	2	2	3	3	3	7.10
2	2	2	4	4	3	1.60
2	2	2	4	4	4	1.00
2	2	2	5	5	2	9.20
2	2	2	5	5	3	2.80
2	2	2	5	5	4	0.22
2	2	2	5	5	5	3.50
2	2	2	8	8	8	2.20
2	2	2	10	10	10	1.60
2	2	1/2	8	8	5	1.40
2	2	1/2	8	10	5	0.01
2	2	1/2	10	8	5	1.20
2	2	1/2	10	10	2	1.40
2	2	1/2	10	10	5	0.22
2	2	1/2	20	10	5	0.23
2	2	1/2	20	20	2	0.52
2	2	1/2	20	20	5	0.16
2	2/3	2	3	1	6	4.80
2	2/3	2	6	1	6	2.60
2	2/3	2	6	1	6	2.61
2	2/3	2	6	2	6	1.80
2	2/3	2	6	2	9	0.96
2	2/3	2	6	2	10	1.40
2	2/3	2	6	2	11	0.75
2	2/3	2	6	2	12	0.01
2	2/3	2	6	3	12	0.96
2	2/3	2	8	3	12	0.59
2	2/3	2	9	2	12	0.22
2	2/3	2	9	3	12	0.08
2	2/3	2	10	3	12	0.44
2	2/3	2	12	3	12	0.22
2	2/3	2	12	4	12	0.96
2	2/3	2	12	5	12	0.75
2	2/3	2	12	6	12	0.53
2	2/3	2	18	6	12	0.31
2	2/3	2	18	6	18	0.16
2	2/3	2	18	9	18	0.08
2/3	2/3	1	4	6	6	0.53
0.5	0.4	2	1	1	5	1.41
0.5	0.4	2	1	2	5	0.81
0.5	0.4	2	2	1	5	0.22
0.5	0.4	2	2	2	5	0.66
0.5	0.4	1.5	1	1	4	2.53
0.5	0.4	1.5	1	1	5	2.17
0.5	0.4	1.5	1	1	6	1.41
0.5	0.4	1.5	1	1	7	1.11
0.5	0.4	1.5	1	1	8	0.01
0.5	0.4	1.5	1	2	4	0.53
0.5	0.4	1.5	2	1	4	0.53
0.5	0.4	1.5	2	2	4	0.81
0.5	0.4	1.5	3	3	4	0.01
0.5	0.4	1	1	1	3	0.89
0.5	0.4	1	2	2	2	1.58
0.5	0.4	1	2	2	3	0.52
0.5	0.4	1	3	3	2	2.20
0.5	0.4	1	3	3	3	0.16
0.5	0.4	1	6	6	2	2.00
0.5	0.4	1	6	6	3	0.01
0.5	0.4	1	9	6	2	1.95
0.5	0.4	1	9	9	2	1.87
0.5	0.4	1	9	9	3	0.08
0.5	0.4	1	10	10	2	1.73
0.5	0.4	1	15	15	2	1.87
0.5	0.4	1	30	30	2	1.80
1/3	1/3	1	2	2	3	0.07
0.2	0.2	1	2	2	2	1.95
0.2	0.2	1	2	2	3	0.23

Tabela 6-11: Execuções do método de blocos/sub-blocos.

Analisando-se os dados da tabela 6-11, observa-se que, em vários momentos, o número de blocos aumenta, mas o resultado torna-se ainda mais impreciso. De certa forma, é difícil fazer comparações em uma tabela que envolve 6 variáveis. Vale lembrar que os valores apresentados possuem unidade de medida de comprimento, não sendo relevante para este estudo a grandeza de tal unidade.

Para simplificar, reapresenta-se os mesmos dados de uma maneira diferente. Sabe-se que a precisão dos resultados depende, exclusivamente, das dimensões dos sub-blocos, considerando que a região total mapeada seja a mesma. Sendo assim, serão apresentadas na tabela 6-12 apenas as dimensões dos sub-blocos e seus respectivos volumes, ordenando pelos últimos. Desta forma, tornar-se muito mais simples a comparação, pois as informações estão condensadas em uma única variável. Os dados apresentados nesta tabela estão representados no gráfico 6-7, sendo que dos volumes iguais foi tomada a média e as duas últimas linhas ficaram ocultas para melhorar a visualização.

Com estes dados, pode-se comprovar o comportamento caótico dos erros. Não há pontos específicos para comentar, pois em todos os níveis de resolução percebe-se a instabilidade do método.

Para que se torne possível uma comparação da estabilidade dos métodos, apresenta-se outros gráficos (6-8 e 6-9), a partir dos dados já obtidos, relacionando o número total de sub-blocos avaliados e o número total de vetores utilizados com o erro absoluto percentual obtido.

Limitou-se o número de sub-blocos em 3000 para a comparação dos métodos. Esta escolha baseou-se no fato de que foram obtidos dados para até 100 vetores, considerando uma malha com células de dimensões  $0,2 \times 0,2$ . Tomando 0,2 como a altura dos sub-blocos, chega-se à necessidade de 3000 sub-blocos para mapear todo o sólido em estudo. Esta, certamente, não é uma comparação perfeita, mas, devido às diferenças entre os métodos, não existem formas muito mais eficientes para se obter parâmetros de comparação.

<b>DIMENSÕES DOS SUB-BLOCOS</b> <i>(unid. compr.)</i>			<b>VOLUME</b> <i>(unid. volume)</i>	<b>ERRO (%)</b>
<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>		
0.017	0.013	0.500	0.000	1.800
0.033	0.027	0.500	0.000	1.870
0.056	0.044	0.333	0.001	0.080
0.111	0.074	0.111	0.001	0.080
0.050	0.040	0.500	0.001	1.730
0.100	0.100	0.100	0.001	0.160
0.056	0.044	0.500	0.001	1.870
0.111	0.111	0.111	0.001	0.160
0.083	0.067	0.333	0.002	0.010
0.056	0.067	0.500	0.002	1.950
0.100	0.200	0.100	0.002	0.230
0.111	0.111	0.167	0.002	0.310
0.100	0.100	0.250	0.003	0.520
0.083	0.067	0.500	0.003	2.000
0.167	0.111	0.167	0.003	0.530
0.167	0.111	0.167	0.003	0.530
0.100	0.100	0.333	0.003	0.230
0.167	0.133	0.167	0.004	0.750
0.200	0.200	0.100	0.004	0.220
0.167	0.167	0.167	0.005	0.960
0.250	0.200	0.100	0.005	0.010
0.200	0.250	0.100	0.005	1.200
0.100	0.100	0.500	0.005	1.950
0.167	0.222	0.167	0.006	0.220
0.250	0.250	0.100	0.006	1.400
0.167	0.133	0.333	0.007	0.160
0.200	0.222	0.167	0.007	0.440
0.200	0.200	0.200	0.008	1.600
0.222	0.222	0.167	0.008	0.080
0.167	0.133	0.375	0.008	0.010
0.250	0.222	0.167	0.009	0.590
0.167	0.167	0.333	0.009	0.070
0.200	0.200	0.250	0.010	1.400
0.167	0.133	0.500	0.011	2.200
0.333	0.222	0.167	0.012	0.960
0.222	0.333	0.167	0.012	0.220
0.250	0.250	0.250	0.016	2.200
0.250	0.200	0.333	0.017	0.520
0.333	0.333	0.167	0.019	0.010
0.250	0.200	0.375	0.019	0.810
0.250	0.200	0.400	0.020	0.660
0.333	0.333	0.182	0.020	0.750
0.333	0.333	0.200	0.022	1.400
0.333	0.333	0.222	0.025	0.960
0.250	0.200	0.500	0.025	1.580
0.333	0.333	0.333	0.037	1.800
0.500	0.400	0.188	0.038	0.010
0.500	0.200	0.375	0.038	0.530
0.250	0.400	0.375	0.038	0.530
0.500	0.200	0.400	0.040	0.810
0.250	0.400	0.400	0.040	0.220
0.500	0.400	0.214	0.043	1.110
0.500	0.400	0.250	0.050	1.410
0.500	0.400	0.300	0.060	2.170
0.400	0.400	0.400	0.064	3.500
0.500	0.400	0.333	0.067	0.890
0.333	0.667	0.333	0.074	2.600
0.333	0.667	0.333	0.074	2.610
0.500	0.400	0.375	0.075	2.530
0.400	0.400	0.500	0.080	0.220
0.500	0.400	0.400	0.080	1.410
0.400	0.400	0.667	0.107	2.800
0.500	0.500	0.500	0.125	1.000
0.667	0.667	0.333	0.148	4.800
0.400	0.400	1.000	0.160	9.200
0.500	0.500	0.667	0.167	1.600
0.667	0.667	0.667	0.296	7.100
2.000	2.000	1.000	4.000	19.500
2.000	2.000	3.000	12.000	10.400

Tabela 6-12: Execuções do método de blocos/sub-blocos - simplificação.

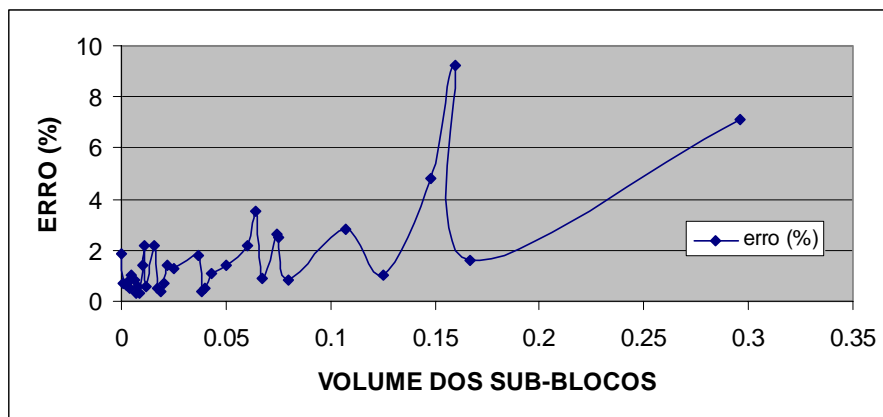


Gráfico 6-7: Estabilidade do método de blocos/sub-blocos (avaliando o volume).

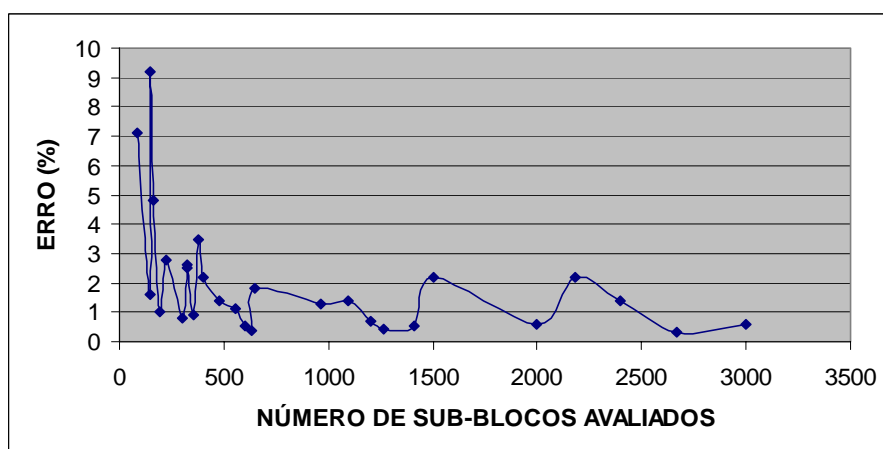


Gráfico 6-8: Estabilidade do método de blocos/sub-blocos.

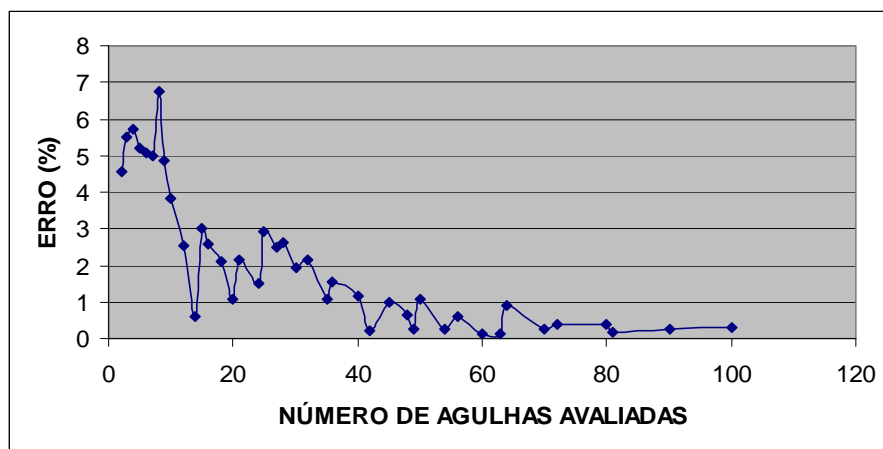


Gráfico 6-9: Estabilidade do método de integração vetorial.



Analisando pela média, os erros tendem a diminuir a medida que o número de sub-blocos ou vetores aumenta, mas ocorre uma certa oscilação para os dois casos. Os erros nos blocos e sub-blocos apresentam variações de mais de 5 pontos percentuais, em algumas passagens, enquanto os vetores não chegaram a uma variação de 3 pontos. A partir de certo ponto, o método de integração vetorial estabiliza seu erro em valores inferiores a 1% e, posteriormente, em valores inferiores a 0,5%, fato que não ocorre no método de blocos/sub-blocos, que continua oscilando, mesmo ao atingir boas resoluções.

Ambos os métodos determinam bons resultados, mas o de blocos/sub-blocos necessita de uma resolução maior para que se tenha certeza da convergência.

#### **6.4. Qualidade das Informações Básicas nas Situações Reais**

Em situações reais a qualidade das informações tem uma importância preponderante nos resultados obtidos pois deve-se considerar que o cálculo do volume dos sólidos depende diretamente da qualidade das mesmas. Parâmetros tais como as coordenadas dos pontos que definem os contornos dos corpos devem ser obtidas cuidadosamente aplicando-se as melhores técnicas disponíveis, bons procedimentos de mapeamento geológico, amostragem, análises laboratoriais e armazenamento e documentação dos testemunhos de sondagem devem ser adotados.

O resultado de qualquer procedimento computacional descrito nesta dissertação, nunca poderá ser melhor que a qualidade da informação disponível para os algoritmos de cálculo e este fator deve ser considerado com muita atenção por todos os interessados no assunto.

## Capítulo 7

### Conclusões e Comentários Finais

O método de blocos/sub-blocos possui uma grande deficiência frente ao de integração vetorial. Ele discretiza o sólido em pontos, que tornam-se os únicos elementos disponíveis para definição da posição das fronteiras do sólido conhecido e para o cálculo de seu volume, enquanto os vetores são segmentos de retas que interceptam as fronteiras do sólido conhecido, permitindo a localização exata de sua posição. Como os pontos das extremidades dos segmentos dos vetores definem as fronteiras dos sólidos, na maioria dos casos, apresentam melhores resultados no cálculo dos volumes. Os casos em que os blocos e sub-blocos apresentam melhores resultados, ocorrem devido a compensação de erros, ou seja, quando erros positivos compensam erros negativos.

Os erros no cálculo do volume de sólidos conhecidos ocorrem em suas fronteiras. Cada um dos métodos apresentados trata a questão de aproximação da forma do sólido conhecido de forma distinta, visando a redução do erro no cálculo do volume. Como já foi mencionado, as extremidades dos vetores possuem sempre um contato com as fronteiras dos sólidos conhecidos, reforçando as afirmativas feitas no parágrafo anterior quanto a seus melhores resultados. Face ao comportamento dos erros conclui-se que a aplicação dos métodos a sólidos não-convexos, geram erros em maior escala nas situações em que os vetores são orientados perpendicularmente ao raio da concavidade, pois neste tipo de sólido a região de fronteira tende a ser maior.

Ambos os métodos convergem para o volume calculado por um método analítico, mas o método de blocos/sub-blocos, por originar em média erros maiores, apresenta maior incerteza no resultado, principalmente quando aplicado com baixa resolução. Em outras palavras, os erros percentuais oscilam bastante quando se varia as dimensões dos blocos e sub-blocos. O método de integração vetorial também é instável, mas comparativamente seus testes apresentaram um melhor comportamento que o método de blocos e sub-blocos. Desconsiderando-se a instabilidade, tem-se que o método de integração vetorial atinge precisões melhores, em média, quando se utiliza a mesma

resolução do método de blocos/sub-blocos, o que indica uma convergência maior do método de integração vetorial.

Os tempos de execução do método de integração vetorial mostraram-se muito melhores para a maioria dos testes em todos os casos apresentados, principalmente quando aumentava-se a resolução. A causa principal disso é, novamente, a discretização apenas nas duas dimensões da base dos vetores, enquanto o método de blocos/sub-blocos discretiza as três dimensões do espaço.

Em todos os itens analisados, o método de integração vetorial apresentou resultados melhores, o que leva a inferir que esta é a melhor opção, dentre as duas, para quaisquer casos em que se precise avaliar volumes numericamente. Sugere-se que outros trabalhos nesta linha sejam feitos para aprofundar os estudos aqui apresentados e enriquecer o tema com mais exemplos e situações práticas.

Nas situações, práticas de mineração, os erros de determinação de fronteiras dos corpos geológicos tendem a ser muito maiores que os erros de quaisquer dos métodos apresentados, sendo portanto o fator crítico a ser considerado.

## **Capítulo 8**

### **Sugestões para Trabalhos Futuros**

Nesta dissertação, pudemos observar que os métodos apresentados para cálculo de volume compensam erros. A compensação de erros é um tema delicado, pois envolve toda uma problemática de análise do comportamento global e local dos erros.

Os erro global tem esperança, ou valor esperado, igual a zero e a compensação de erros sob este aspecto não acarreta maiores problemas, o erro local contudo, não possui via de regra, esperança zero e a compensação dos erros pode acarretar problemas sérios sob este ponto de vista. A solução para o problema acima passa pelo adensamento da rede de informação e sugere-se que este tema seja melhor estudado em trabalhos futuros.

Novas tecnologias para o cálculo de volumes de sólidos foram apresentadas e uma delas em especial (Meshkat & Meshkat 1996) parece promissora. Esta tecnologia baseia-se em técnicas que discretizam sólidos irregulares a partir da utilização de elementos sólidos primitivos básicos, tais como os tetraedros. Os tetraedros tem tamanhos diferentes, sendo maiores em regiões de alta continuidade no interior do sólido e menores em regiões irregulares. Sugere-se que esta tecnologia seja estudada em maiores detalhes em trabalhos futuros.

## **Referências Bibliográficas**

Houlding S.W. (1994). **3D Geoscience Modeling**, Computer Techniques for Geological Characterization, Berlin, Springer-Verlag, 309 p.

Houlding S.W. (1997). **Direct Volume Estimation**, A Geostatistical Technique for Mine Planning and Grade Control, Vancouver, Technical Paper, 13 p.

Meshkat S. N., Meshkat S. A (1996). **Parallel Method For Subdivision of Arbitrary Curved Solids**, International Business Machines Corporation (Armonk, NY), USPTO Patent, USA and International, San Jose, 24 p.

Piskunov N. (1977). **Cálculo Diferencial e Integral**, Tomo I, 6ª edição, EDITORIAL MIR, MOSCU.

Leithold, Louis (1994). **O Cálculo com Geometria Analítica**, 3ª edição, EDITORA HARBRA Ltda. Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana, São Paulo/SP, Brasil.

Campos, Frederico Ferreira (2001). **Algoritmos Numéricos**, EDITORA LTC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Chihara, T. S. (1987). **An Introduction to Orthogonal Polynomials**, Gordon and Breach, Nova Iorque, USA.

W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, e B. P. Flannery (1992). **Numerical Recipes**. Cambridge University Press, 2ª edição.

## **Bibliografia**

Hartman H. L. Senior Editor (1992). **SME Mining Engineering Handbook**, 2<sup>nd</sup> Edition Volume 1 and 2, Society for Mining, Metallurgy, and Exploration, Inc. Littleton, Colorado, 2260 p.

Gentry D. W., T.J. O'Neil (1984). **Mine Investment Analysis**, Society of Mining Engineers, New York, 502 p.

Hustrulid W., Kuchta M. (1995). **Open Pit Mine Planning & Design**, Volume 1 and 2, .Balkema, Rotterdam, 836 p.

Isaaks E.H., Srivastava R.M. (1989). **An Introduction to Applied Geostatistics**, New York, 561p.

Lantuéjoul C.(2002). **Geostatistical Simulation, Models and Algorithms** Berlin, Springer, 256p.

Pflug R., Harbaugh J. W. (eds). (1992). **An Atlas of three dimensional functions**, Computer Graphics in Geology. Lecture Notes in Earth Sciences 41, Springer, Berlin pp 41.

[http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/mnae/pdf/apontamentos/Cap05\\_Quadrat\\_Gauss.pdf](http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/mnae/pdf/apontamentos/Cap05_Quadrat_Gauss.pdf)

<http://www.if.ufrj.br/teaching/compute/node147.html>

Gemcom Software International (2002). **Gemcom Software User Manual** Vancouver, 4104 p.

Lynx Mining Consultants (1992). **The microLYNX Plus USER MANUAL** Palm Cove, Lynx Mining Consultants, 385 p.