



EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Marília Costa de Faria

( EDITORAufmg )

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Reitor: Clélio Campolina Diniz

Vice-Reitora: Rocksane de Carvalho Norton

**Pró-Reitoria de Graduação**

Pró-Reitora: Antônia Vitória Soares Aranha

Pró-Reitor Adjunto: André Luiz dos Santos Cabral

Diretor do CAED: Fernando Fidalgo

Coordenador da UAB-UFMG: Wagner José Corradi Barbosa

Coordenador Adjunto UAB-UFMG: Hormindo Pereira de Souza Júnior

**EDITORA UFMG**

Diretor: Wander Melo Miranda

Vice-Diretor: Roberto Alexandre do Carmo Said

**Conselho Editorial**

Wander Melo Miranda (presidente)

Flavio de Lemos Carsalade

Heloisa Maria Murgel Starling

Márcio Gomes Soares

Maria das Graças Santa Bárbara

Maria Helena Damasceno e Silva Megale

Paulo Sérgio Lacerda Beirão

Roberto Alexandre do Carmo Said

MARÍLIA COSTA DE FARIA

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

BELO HORIZONTE  
EDITORA UFMG  
2009



Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas, foi elaborada uma autoavaliação com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. Essa autoavaliação auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, o aluno deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo, e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

*Maria do Carmo Vila*  
*Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância*  
*UFMG*



A aqueles que acreditam no sonho  
Aos futuros mestres e mestras, com carinho



# Sumário

Apresentação . . . . .	11
Introdução . . . . .	13
Esclarecimentos ao aluno . . . . .	15
Aula 1   A Geometria em cinco problemas – Parte 1 . . . . .	17
Problema 1 . . . . .	18
Problema 2 . . . . .	22
Problema 3 . . . . .	24
Aula 2   A Geometria em cinco problemas – Parte 2 . . . . .	29
Problema 4 . . . . .	29
Problema 5 . . . . .	32
Os conteúdos da disciplina Resolução de Problemas Geométricos . . . . .	35
Aula 3   Congruência . . . . .	37
Autoavaliação . . . . .	46
Aula 4   Teorema do Ângulo Externo e Teorema das Paralelas . . . . .	49
Desigualdades nos triângulos. . . . .	53
Teorema das Paralelas . . . . .	56
Autoavaliação . . . . .	61
Aula 5   Semelhança . . . . .	63
Autoavaliação . . . . .	74
Aula 6   Dois Teoremas: Pitágoras e Tales . . . . .	77
O Teorema de Pitágoras . . . . .	77
O Teorema de Tales . . . . .	79
Autoavaliação . . . . .	85
Aula 7   Circunferência . . . . .	87
Autoavaliação . . . . .	95
Aula 8   Lugares geométricos . . . . .	97
Autoavaliação . . . . .	104
Referências . . . . .	105



# Apresentação

Este livro foi escrito para ser utilizado na disciplina Resolução de Problemas Geométricos, mais conhecida pelos alunos por RPG, do curso de Licenciatura em Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Minas Gerais no âmbito do seu programa de educação a distância.

Quando convidada a escrever este livro, me vi frente a dois desafios: escrever um texto que atendesse a especificidade do curso no qual seria utilizado, ou seja, a distância e, além disto, para a disciplina Resolução de Problemas Geométricos.

O primeiro aspecto me levou a optar por uma escrita mais informal, mais próxima de uma aula dialogada. Assim, o conteúdo da disciplina é apresentado em Aulas e não em capítulos, diferente do aspecto formal de apresentação dos livros-texto que visam às disciplinas presenciais. Os conteúdos são entremeados por atividades no intuito de se obter uma participação mais ativa do aluno ao longo das “Aulas”.

O outro desafio, o de ser um texto para a disciplina RPG, reside na natureza e no propósito que essa disciplina tem na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática. O propósito que ela se coloca é evidenciado nos conteúdos contemplados na sua ementa – são conteúdos de Geometria Plana que, **em princípio**, esperava-se serem do conhecimento prévio dos alunos que ingressam na Universidade e, no caso, nos cursos de Matemática.

Entretanto, a realidade tem se mostrado diferente, sendo significativo o número de alunos que chegam à Universidade com muitas lacunas na sua formação prévia em Matemática, principalmente nos conteúdos de Geometria. Assim, a oferta da disciplina RPG tem como principal propósito minorar essas lacunas.

Contudo, em se tratando de conteúdos que os alunos “já viram”, optou-se que fossem retomados sob uma abordagem diferente, no caso, por meio da resolução de problemas. É aí que reside o desafio: oferecer uma disciplina dessa natureza para um curso a distância. Até então, a minha experiência com a oferta de disciplina com essa abordagem foi em cursos presenciais. Nestes, como escreve Tinoco (1999),

A partir dos problemas, os alunos constroem a teoria, sendo papel do professor acompanhar as discussões dos grupos, enriquecendo-as com perguntas desafiadoras, e sistematizar os conteúdos abordados ao final dos trabalhos...

Cientes do bom êxito de tal abordagem, o texto foi escrito com o desafio de se aproximar, o quanto possível, da dinâmica dos cursos presenciais, bem entendido, para disciplinas dessa natureza.

Assim, é que, de início, neste texto, propõe-se ao aluno a resolução de cinco problemas, apresentados nas Aulas 1 e 2, os quais foram escolhidos de forma a contemplar, em suas soluções, os conteúdos da ementa da disciplina RPG.

Durante a resolução de cada um dos problemas, utilizo a estratégia de remeter o aluno aos livros didáticos utilizados na escola básica, para buscar os conceitos e resultados de Geometria necessários à construção da solução em questão.

Compilando esses conceitos e resultados ao final da segunda aula, o aluno tem a “dimensão” dos conteúdos de Geometria a serem abordados no desenvolvimento da disciplina, os quais são distribuídos nas seis aulas que seguem.

Cada uma destas seis aulas tem como objetivo compreender os resultados que foram utilizados na resolução dos cinco problemas, construindo assim a teoria.

Concluindo esta apresentação, gostaria de agradecer ao meu mestre e colega, Dan Avritzer, pelo convite para escrever este livro.

Só o convite já bastaria o agradecimento. Entretanto, quero explicitar dois outros motivos. Primeiro, por ser em Geometria Euclidiana, um “sonho” acalentado desde os tempos do meu curso de graduação em Licenciatura em Matemática, na década de 1970. E, em segundo, mas não menos importante, por ter o objetivo de ser utilizado em curso de formação de professores de Matemática a distância.

Gostaria ainda de agradecer à colega e amiga, dos tempos de graduação, Vera Regina Farias e Flores, pela disponibilidade em ler parte do texto, desde sua concepção, fazendo valiosas sugestões e correções.

Agradeço às colegas e amigas Márcia Maria Fusaro Pinto e Elizê Frans de Castro Monteiro, por suas contribuições na parte inicial do texto. Aos colegas Jorge Sabatucci e Francisco Dutenhofner, agradeço pelas preciosas listas de exercícios que utilizam na disciplina RPG do curso presencial de Licenciatura em Matemática.

Finalmente, agradeço à minha mestra, colega e amiga, Maria Cristina Costa Ferreira, que fez a revisão final do texto, ainda contribuindo com sugestões e correções.

*Marília Costa de Faria*

# Introdução

O melhor modo de aprender é fazer;  
o pior modo de ensinar é falar.  
(P. R. Halmos)<sup>1</sup>

Caro(a) aluno(a),

Em que pese que, ao longo deste texto, eu vou “falar” muito, eu comungo do pensamento de Halmos acima citado. Sendo assim, ao longo do texto vou convidá-lo(a), o tempo todo, a pensar junto comigo e, portanto, você terá muito que fazer.

Com esse objetivo, entendo que algumas recomendações se fazem importantes. A primeira delas é sobre os “instrumentos de trabalho” que você deverá ter sempre à mão. Claro, você já deve saber quais, em se tratando de Geometria, mas vamos lembrá-los. Além de lápis, borracha e papel, você deve ter régua graduada, régua não graduada, esquadros, compasso e transferidor. Use e abuse deles!!

Em segundo lugar, importa tratar de como você deve proceder para a leitura do texto. Você deve procurar fazer todas as atividades propostas na ordem e no momento em que são apresentadas. Obviamente, o que vem em um parágrafo demanda a compreensão do que foi apresentado no parágrafo anterior.

Vamos dizer assim que, sendo a disciplina “lecionada” a distância, o texto pretende “suprir” a ausência do professor. Por isso ele é escrito como se estivéssemos “conversando” em uma sala de aula presencial.

Nesta tentativa de suprir a falta do professor, durante a leitura do texto é importante que você vá anotando as suas dúvidas, conclusões, o que você achar importante. Sim, aquelas dúvidas que, numa aula presencial, você interromperia seu professor para apresentá-las. Dessa forma, você poderá aproveitar melhor os seus encontros com o tutor e o fórum de discussões da disciplina via internet. Ou seja, você estará contribuindo fortemente para o seu melhor aproveitamento na disciplina.

Finalmente, e não menos importante, tenha também “por perto” livros didáticos com conteúdos de Geometria (inclusive aqueles utilizados na escola básica) e faça uso deles sempre que julgar necessário, principalmente para resolver as atividades propostas no texto.

Tente duvidar de suas “certezas” em Geometria e não se prive de uma “checada” nos livros. Ou melhor, “reveja e confirme, ou não, seus

<sup>1</sup> P. R. Halmos, matemático estado-unidense nascido na Hungria, em seu artigo “The Teaching of Problem Solving” (“O ensino através da resolução de problemas”), publicado na Revista *The American Mathematical Monthly*, em 1975. Tradução resumida apresentada na Revista *Método*, em fevereiro de 1978.

conceitos”. Falando em certezas, uma muito comum entre os alunos é de que Geometria é muito difícil. Será?

Aqui entre nós, não seriam os **preconceitos** de Geometria, adquiridos ao longo de nossa vida, escolar e cotidiana, o que fundamentaria grande parte da dificuldade mencionada?

Ficou na dúvida? Transforme-a! Observe, reflita, pergunte, leia sobre o assunto, proponha hipóteses, teste-as, avalie, discuta! Ao final da disciplina, se você quiser, compartilhe comigo as suas conclusões. Pode até ser que você continue pensando sobre o assunto. Por enquanto, pretendo apenas que você leia este texto “sem medo de ser feliz!”.

“Boa sorte e aulas felizes para todos nós.”<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Uma das “pequenas doses” que Halmos apresenta ao final de seu artigo “The Teaching of Problem Solving”, para resumir as suas ideias ali expostas (HALMOS, 1978).

## Esclarecimentos ao aluno

Neste texto,  $AB$  representa um segmento de reta de extremidades  $A$  e  $B$  e  $\overline{AB}$  denota a medida desse segmento.

O símbolo ◀ é usado para indicar a finalização da resolução de uma atividade ou da demonstração de um resultado.



## A Geometria em cinco problemas – Parte 1

### OBJETIVOS

Delimitar os conteúdos de Geometria que serão objeto de estudo ao longo da disciplina Resolução de Problemas Geométricos (RPG).

Identificar os conteúdos de Geometria utilizados na resolução de três de cinco problemas.

Vamos iniciar nosso trabalho, resolvendo cinco problemas.

Você verá que não são “simplesmente” cinco problemas. Explico! “Coisa” de professor!

De fato, eles têm relação com o desafio que mencionei na Apresentação deste livro, guardando, então, certa intenção na escolha deles. Eles têm o propósito de contemplar nas suas resoluções uma gama<sup>1</sup> razoável de conhecimento dos conteúdos de Geometria da escola básica.

Dessa forma, pretendo que eles atendam a um objetivo maior que é, ao final da próxima aula, concluirmos que as resoluções dos cinco problemas “escondem” todo o conteúdo de Geometria que será contemplado na disciplina RPG.

Ou seja, teremos todo o conteúdo de nossa disciplina em cinco problemas! Cinco! Cinco dedos, nossa mão!

Ora, se já teremos o conteúdo, você pode pensar que na próxima aula terminamos a disciplina. Errado! Ou, engano seu, espero eu! Olha aí o professor de novo! Faz parte do desafio!

Pretendo que você, ao final da resolução dos cinco problemas, se sinta motivado o suficiente para rever seus conceitos e **preconceitos** em Geometria Plana. E que você veja, em cada aula que se seguirá, uma

<sup>1</sup> Sucessão de teorias, ideias, sensações...

oportunidade de aprofundar seus conhecimentos de Geometria Plana abordados na escola básica.

Conto mesmo com você neste desafio!

Preparado(a) para começar?

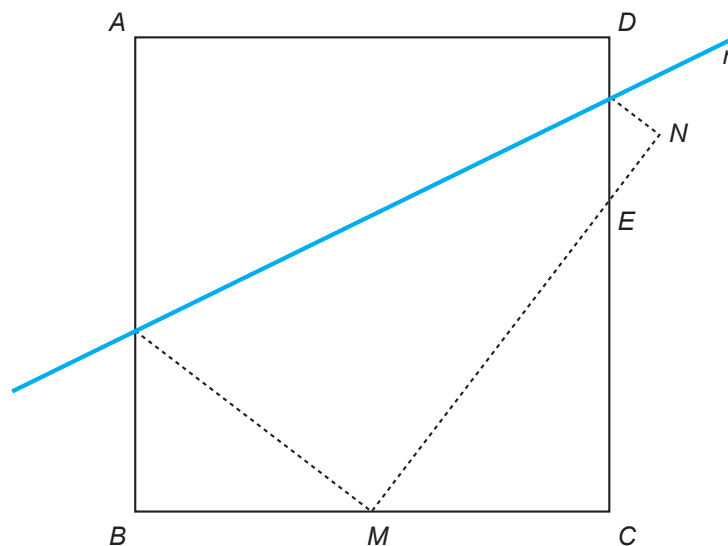
Já pegou seu material?

Então, olhos e mão(s) à “obra”, vamos aos nossos cinco problemas!

### PROBLEMA 1

(UAB-UFMG 2009)

Uma folha de papel quadrada,  $ABCD$ , que mede 12 cm de lado, é dobrada na reta  $r$ , como mostrado nesta figura:



Feita essa dobra, o ponto  $D$  sobrepõe-se ao ponto  $N$ , e o ponto  $A$  ao ponto médio  $M$ , do lado  $BC$ .

É **CORRETO** afirmar que, nessas condições, o segmento  $CE$  mede

- A) 7,2 cm.
- B) 7,5 cm.
- C) 8,0 cm.
- D) 9,0 cm.

De imediato observamos que a questão compreende um enunciado e uma figura.

Se nos detivermos em cada um desses aspectos, identificamos que:

1) o enunciado contempla os seguintes objetos/conceitos geométricos:

Quadrado  $ABCD$  com lado medindo 12 cm;

Reta  $r$ ;

Ponto  $N$ ;

Ponto médio  $M$ ;

Segmento  $CE$ .

2) a figura apresenta um desenho auxiliar<sup>2</sup> ao entendimento do problema, representando os objetos e os aspectos abordados no seu enunciado:

o quadrado  $ABCD$ , a reta  $r$ , os pontos  $E$ ,  $M$  e  $N$  e, consequentemente, a identificação do segmento  $CE$  do qual se quer saber a medida.

Reconhecidos os objetos geométricos envolvidos na situação-problema apresentada, nosso próximo passo será *relacionar as informações contidas no problema de modo a construir uma solução para a questão proposta*.

Atendo-nos à construção do período em destaque do último parágrafo, observamos que temos aí duas orações coordenadas conclusivas, ou seja, a segunda delas exprime conclusão ou consequência referente à oração anterior.

Sendo assim, precisamos, para *construir uma solução para a questão proposta*, nos deter um pouco mais na tarefa explicitada na primeira das orações: *relacionar as informações contidas no problema*.

Ora, considerando-se que a figura é uma representação da situação-problema colocada, a tarefa então é identificar que relações, dentre as que conhecemos, envolvem os elementos contidos no desenho – dentre eles, o objeto em questão, o segmento  $CE$ .

Observando novamente a figura, reconhecemos nela, dentre outros objetos geométricos, quadriláteros e triângulos.

Vamos nos deter um pouco nesses últimos, um total de três. Primeiro, para facilitar nosso raciocínio, identifiquemo-los.

Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção da reta  $r$  com os lados  $AB$  e  $CD$  do quadrado.

Temos, então, os triângulos  $PBM$ ,  $MCE$  e  $QNE$ .

Como  $B$  e  $C$  são vértices do quadrado  $ABCD$ , sabemos que os ângulos  $P\hat{B}M$  e  $M\hat{C}E$  são retos. Também é reto o ângulo  $Q\hat{N}E$ , já que ele foi obtido a partir da dobra da folha, fazendo-se coincidir o ponto  $D$  com o ponto  $N$ .

<sup>2</sup> Neste caso, veja que o desenho é parte inerente ao enunciado do problema. Sem ele seria impossível compreender o problema a ser resolvido, o que nem sempre é o caso de outros problemas geométricos que não apresentam figura no seu enunciado. Nestes cabe, então, ao resolvidor do problema, construir um desenho que represente a situação apresentada, facilitando-lhe a compreensão do mesmo e a busca de uma solução.

Logo, todos os três triângulos são retângulos. Além disso,  $CE$  é lado de um deles.

Assim, continuando com o nosso propósito de relacionar as informações contidas no problema, como  $CE$  é lado (cateto) do triângulo retângulo  $MCE$ , de imediato nos vem à mente o Teorema de Pitágoras.

Tentando usar esse teorema para encontrar a medida de  $CE$ , nos deparamos com a necessidade de determinar o valor da hipotenusa  $ME$  e do outro cateto  $MC$ .

Quanto à medida deste último, das informações contidas no problema obtemos que ele mede 6 cm.

### Atividade 1.1

Mostre que  $\overline{MC} = 6$  cm.

Resta, então, determinar a medida de  $ME$ .

Ou seja, a estratégia de solução para o problema, aplicando diretamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $MCE$ , passaria por determinar a medida de  $ME$ .

No entanto, analisemos mais cuidadosamente a figura, em que já identificamos por  $P$  o ponto de interseção da reta  $r$  com o lado  $AB$  do quadrado.

Vamos observar que podemos deduzir do enunciado<sup>3</sup> do problema as seguintes informações sobre os lados do triângulo retângulo  $PBM$ : o cateto  $BM$  mede 6 cm e  $\overline{PB} + \overline{PM} = 12$ .

### Atividade 1.2

Justifique as afirmações sobre os lados do triângulo retângulo  $PBM$ : o cateto  $BM$  mede 6 cm e  $\overline{PB} + \overline{PM} = 12$ .

Com o auxílio do Teorema de Pitágoras obteremos as medidas dos outros lados do triângulo  $PBM$ , o cateto  $PB$  e a hipotenusa  $PM$ .

### Atividade 1.3

Calcule os valores do cateto  $PB$  e da hipotenusa  $PM$  do triângulo  $PBM$ .

Ora, como utilizar então as informações obtidas para o triângulo  $PBM$  para obter a solução do problema?

Novamente nos vem a questão dos resultados que conhecemos sobre triângulos e agora, em particular, aqueles que possibilitam relacionar as medidas dos lados de dois triângulos.

<sup>3</sup> Lembre-se, o desenho é apenas um suporte à compreensão de um problema. Qualquer “dedução” que venhamos a fazer a partir de um desenho, deve ser verificada com base em dados concretos. O desenho faz parte do nosso imaginário e, portanto, pode nos levar a certos equívocos.

**Atividade 1.4**

a) Consulte livros didáticos do ensino fundamental para escrever aqui os “resultados” que relacionam as medidas dos lados de dois triângulos.

b) Liste os nomes dos livros, com as respectivas páginas, que você consultou para a solução apresentada em (a).

Dos resultados listados na parte (a) da Atividade 1.4, provavelmente você deve ter listado os “casos de semelhança de triângulos”.

Considerando-os, vamos reconhecer entre eles aquele que nos permite obter a seguinte relação entre os catetos dos triângulos  $MCE$  e  $BPM$ :

$$\frac{CE}{BM} = \frac{MC}{PB}.$$

**Atividade 1.5**

Enuncie o caso de semelhança de triângulos que permite concluir a relação  $\frac{CE}{BM} = \frac{MC}{PB}$  para os triângulos  $MCE$  e  $BPM$ .

Assim, das informações obtidas anteriormente, concluiremos desta relação que  $\overline{CE} = 8$  cm, e temos construída uma solução<sup>4</sup> para a situação-problema apresentada no Problema 1.



Resolvida a questão, ou melhor, construída uma solução para o problema colocado, voltemos ao nosso propósito inicial de identificar os conhecimentos de Geometria necessários na construção da solução do Problema 1.

Analisando a referida solução, identificamos os seguintes objetos/resultados geométricos:

Triângulos;

Triângulo retângulo;

Elementos de um triângulo retângulo: catetos e hipotenusa;

Congruência de segmentos;

Semelhança de triângulos;

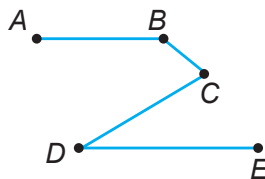
Teorema de Pitágoras;

Casos de semelhança de triângulos.

<sup>4</sup> Ressalte-se que a construção, aqui apresentada, para a solução da questão, não é única, podendo, por exemplo, partir da semelhança dos triângulos.

## PROBLEMA 2

Calcule o valor de  $x = m(\hat{BCD})$  na figura a seguir:



Sabe-se que:  $AB \parallel DE$ ,  $m(\hat{ABC}) = 110^\circ$  e  $m(\hat{CDE}) = 50^\circ$ .

Observemos que, como no Problema 1, aqui também o desenho é parte inerente ao enunciado do problema. Mais do que isso, pode-se dizer que a figura, junto com informações sobre seus elementos, é o “enunciado” da questão.

Considerando apenas a figura, vemos que ela contempla o desenho de uma poligonal  $ABCDE$ .

### Atividade 1.6

- Consulte os livros didáticos para registrar aqui a definição de uma poligonal.
- Faça quatro desenhos de figuras, sendo duas poligonais e duas não poligonais.

Quais conhecimentos de Geometria são necessários para “ler” e compreender as informações dadas no problema?

Observemos que para identificar o objeto cujo valor se deseja saber e as informações relativas aos elementos da poligonal, é utilizada uma linguagem baseada em símbolos.

São elas:  $x = m(\hat{BCD})$ ,  $AB \parallel DE$ ,  $m(\hat{ABC}) = 110^\circ$  e  $m(\hat{CDE}) = 50^\circ$ .

### Atividade 1.7

Escreva, em linguagem corrente, o significado das notações  $m(\hat{BCD})$  e  $AB \parallel DE$ , e da expressão  $m(\hat{ABC}) = 110^\circ$ .

Identificamos, então, que o problema aborda segmentos de reta, paralelos e não paralelos, e ângulos entre tais segmentos.

Consultando livros didáticos do ensino fundamental para responder a Atividade 1.7, você deve ter observado que os conteúdos indicados no

último parágrafo estão relacionados com conhecimentos sobre retas paralelas, suas transversais e ângulos formados por essas retas.

O resultado imediato que temos neste contexto é sobre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

### Atividade 1.8

a) Relacione os resultados que você encontrou nos livros didáticos relativos a ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal.

b) Liste os livros consultados em que você obteve os resultados apresentados em (a).

Com o intuito de usar esses resultados na construção de uma solução para a questão colocada, voltemos ao desenho apresentado no problema e tracemos as retas suportes dos segmentos de reta  $AB$ ,  $DE$  e  $DC$ .

Obtemos, então, a Figura 1.1 a seguir, em que são identificados os ângulos dados no problema e aquele a ser calculado, como também o ponto  $F$ , interseção das retas suportes dos segmentos  $AB$  e  $DC$ , respectivamente.

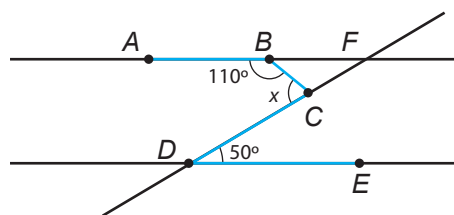


FIGURA 1.1

Retomando, então, os resultados da Atividade 1.8 relativos a ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal, podemos concluir que  $m(\hat{BFC}) = m(\hat{CDE}) = 50^\circ$ .

Atentos ao nosso objetivo, que é determinar o valor do ângulo  $x$ , observemos que, da construção realizada, obtivemos o triângulo  $BCE$ , do qual  $x$  é a medida de um dos seus ângulos externos.

Quais resultados conhecemos relacionando ângulos internos e externos de um triângulo?

### Atividade 1.9

Consulte livros didáticos para

a) Escrever a definição de ângulo externo de um triângulo.

b) Listar os resultados encontrados sobre as medidas dos ângulos externos e internos de um triângulo.

Desses resultados você pode deduzir, por exemplo, que:

$$i) m(\widehat{CBF}) = 180^\circ - m(\widehat{ABC})$$

$$ii) x = m(\widehat{CBF}) + m(\widehat{BFC})$$

De  $m(\widehat{ABC}) = 110^\circ$  e  $m(\widehat{BFC}) = 50^\circ$ , concluímos que  $x = 120^\circ$ .

Faça, agora, a seguinte atividade.

### Atividade 1.10

Dos resultados listados na Atividade 1.9, podem-se construir outras soluções para se obter o valor  $x = 120^\circ$ . Apresente uma delas.

E, não nos esquecendo do nosso objetivo maior, faça a seguinte atividade.

### Atividade 1.11

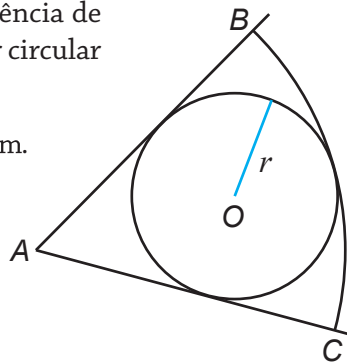
A exemplo do que fizemos no Problema 1, identifique e liste todos os conhecimentos de Geometria utilizados para compreensão e construção da solução apresentada para o Problema 2.

## PROBLEMA 3

Na figura, tem-se uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  inscrita no setor circular  $ABC$  de centro  $A$ , onde

$$m(\widehat{CAB}) = 60^\circ \text{ e } \overline{AB} = 6 \text{ cm.}$$

Calcule o valor de  $r$ .



Observemos inicialmente que, neste problema, considerando-se as informações contidas no seu texto, a possibilidade de a figura não ter sido dada não traria prejuízo para a compreensão da questão colocada. A figura aqui pode ser entendida como um facilitador para a compreensão mais imediata do problema.

Vamos supor que a figura não tivesse sido dada. Não é difícil imaginar que tentaríamos desenhar uma figura análoga à apresentada para compreender a situação-problema colocada.

Que conhecimentos de Geometria seriam necessários para construir a referida figura?

Do texto apresentado no problema, identificamos que precisaríamos conhecer os seguintes objetos geométricos:

- i) circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ ;
- ii) setor circular  $ABC$  de centro  $A$  em que  $m(\widehat{CAB}) = 60^\circ$  e  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ;
- iii) circunferência *inscrita* em um setor circular  $ABC$  dado.

Ótimo, mas já que temos a figura dada, vamos ao que o problema nos pede para calcular, ou seja, o valor do raio  $r$  da circunferência inscrita no setor circular dado.

A pergunta “Quais resultados conhecemos que envolvem os elementos apresentados na situação-problema?” se repete.

Dos objetos geométricos identificados no texto do problema, relembremos que o fato de a circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  estar *inscrita* no setor circular  $ABC$  significa que a circunferência de raio  $r$  tem pontos de tangência com os raios  $AB$  e  $AC$  como também com o arco  $BC$  do referido setor circular.

Ou seja, a inscrição da circunferência no setor circular nos leva a buscar resultados que tratam de tangente a uma circunferência.

Está aí, portanto, mais uma tarefa para você, consultando livros didáticos.

### Atividade 1.12

Liste os resultados que você encontrou na tarefa proposta no último parágrafo. E não se esqueça de nomear o livro e as respectivas páginas consultadas.

Você deve ter encontrado, por exemplo, que toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Representando na figura este fato, temos

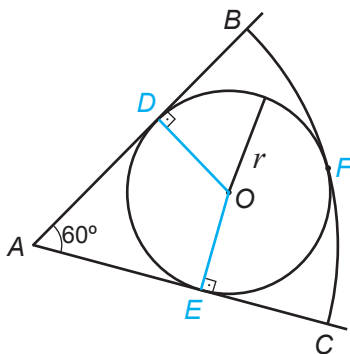


FIGURA 1.2

Usando as notações apresentadas no desenho, a partir dos resultados listados na Atividade 1.12 também podemos concluir que  $AD = AE$ .

De fato essa última igualdade tem origem na congruência dos triângulos retângulos  $AEO$  e  $ADO$ .

### Atividade 1.13

Identifique o caso de congruência de triângulos retângulos que sustenta a afirmação de que os triângulos  $AEO$  e  $ADO$  são congruentes.

Desta congruência temos então que, no triângulo retângulo  $ADO$ , o ângulo  $\widehat{DAO}$  mede  $30^\circ$ .

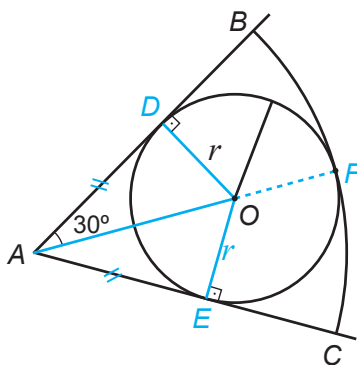


FIGURA 1.3

Observemos que o raio  $r$  que desejamos calcular é cateto dos triângulos retângulos  $AEO$  e  $ADO$ , dos quais conhecemos seus ângulos agudos.

Assim, logo pensamos em buscar entre os resultados que conhecemos sobre triângulos retângulos aqueles que envolvem seus catetos, hipotenusa e ângulos agudos.

Estamos nos referindo ao que denominamos de “relações trigonométricas num triângulo retângulo”.

### Atividade 1.14

- Enuncie os resultados sobre triângulos retângulos que relacionam a hipotenusa, os catetos e os ângulos agudos.
- Escreva as relações encontradas utilizando os dados do triângulo retângulo  $ADO$ .

Tomando por referência o triângulo  $ADO$  da Figura 1.3 e considerando o apresentado na Atividade 1.14, você pode observar que, para usar qualquer uma das relações encontradas, é necessário conhecer o outro cateto  $AD$  ou a hipotenusa  $AO$  do triângulo  $ADO$ .

Analisando mais atentamente a Figura 1.3, podemos observar que  $AD$  é “parte” do raio  $AB$  do setor circular  $ABC$ .

O que dizer de  $AO$ ?

Nós podemos mostrar que os pontos  $A$ ,  $O$  e  $F$  são colineares, ou seja, o centro  $O$  do círculo de raio  $r$  pertence ao segmento  $AF$ .

Concluimos daí, então, que  $\overline{AF} = \overline{AO} + \overline{OF}$ .

Assim,  $\overline{AO} = \overline{AF} - \overline{OF}$ , ou seja,  $\overline{AO} = 6 - r$ .

Do exposto, temos que as medidas da hipotenusa e de um dos catetos do triângulo retângulo  $ADO$  estão relacionadas com o raio  $r$  que queremos calcular.

Volte às relações apresentadas na Atividade 1.14 (b). Você deve ter entre elas a que segue:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{r}{6 - r}$$

Assim, resolvendo esta equação, você obterá que  $r = 2 \text{ cm}$ .

E temos concluída a construção de uma solução para o Problema 3.



Agora, você deve ter observado que, para a construção dessa solução, foi “crucial” considerar que os pontos  $A$ ,  $O$  e  $F$ , apresentados na Figura 1.2, estão alinhados.

Você já pode ter verificado que, de fato, a afirmação é verdadeira, ou não ter verificado e a aceitado como “natural”, olhando na Figura 1.3.

É aí que reside o perigo! Como já mencionado anteriormente, na imaginação podemos tudo.

Acompanhe a construção que se segue, para mostrar que  $A$ ,  $O$  e  $F$  estão alinhados.

Como os dois círculos são tangentes em  $F$ , significa que têm aí tangente comum.

Por outro lado, uma reta por um ponto de um círculo é tangente a ele se e somente se o raio pelo ponto é perpendicular à reta.

Como a reta é tangente e a perpendicular a ela por  $F$  é única, ela contém os raios dos dois círculos.

Ou seja,  $A$ ,  $O$  e  $F$  são colineares.

É isto!!



Para “fechar” a resolução do Problema 3, faça, então, a atividade que segue.

**Atividade 1.15**

Identifique e liste todos os conhecimentos de Geometria utilizados para compreensão e construção da solução apresentada para o Problema 3.



# AULA 2

## A Geometria em cinco problemas – Parte 2

### OBJETIVOS

Delimitar os conteúdos de Geometria que serão objeto de estudo ao longo da disciplina Resolução de Problemas Geométricos (RPG).

Identificar os conteúdos de Geometria utilizados na resolução de dois de cinco problemas.

Como conversamos no início da primeira aula, nesta aula vamos dar continuidade à nossa proposta de resolução dos cinco problemas para, ao final dela, concluirmos que as resoluções desses problemas “escondem” todo o conteúdo de Geometria que será contemplado na disciplina RPG.

Resolvemos três problemas, na primeira aula!

Vamos, então, aos dois que faltam!

### PROBLEMA 4

De um ponto  $A$ , exterior a uma circunferência, traçam-se duas secantes. A primeira corta a circunferência nos pontos  $B$  e  $C$  ( $B$  entre  $A$  e  $C$ ), e a segunda corta a circunferência nos pontos  $D$  e  $E$  ( $D$  entre  $A$  e  $E$ ).

O ângulo em  $A$  mede  $30^\circ$  e  $\widehat{CE} = 3\widehat{BD}$ . Calcule  $\widehat{BD}$ .

Você já deve estar com lápis e papel tentando fazer um desenho que represente a situação colocada na questão.

Recomendo fortemente que você use um compasso e uma régua para construir o seu desenho.

Para executar esta tarefa usamos nossos conhecimentos sobre os seguintes objetos geométricos:

Ponto exterior a uma circunferência;

Retas secantes a uma circunferência;

Arcos de circunferência, os quais são referidos no texto pelo uso de notação. O arco  $CE$ , por exemplo, é dado por  $\widehat{CE}$ .

### Atividade 2.1

Use livros didáticos para escrever a definição de

a) reta secante a uma circunferência;

b) arco de circunferência.

Faça desenhos exemplificando cada objeto definido.

Usando, então, essas definições e as informações dadas no problema, você deve ter desenhado uma figura,<sup>1</sup> parecida com a seguinte, representando a situação colocada.

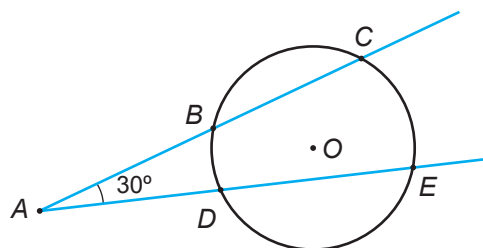


FIGURA 2.1

Na consulta realizada nos livros didáticos para responder à Atividade 2.1, você deve ter visto que os arcos de uma circunferência estão relacionados com ângulos centrais da mesma. Se necessário volte ao livro para identificar estas relações.

Assim, por exemplo, você pode concluir que, por definição,

$$\begin{aligned} & \text{A medida em graus do arco } BD \text{ é a} \\ & \text{medida do ângulo central } B\hat{O}D. \end{aligned} \quad (1)$$

Você vai concordar comigo que, então, o problema estará resolvido ao calcularmos o valor da medida do ângulo central  $B\hat{O}D$ .

Então vamos lá! Como encontrar o valor da medida de  $B\hat{O}D$ , usando as informações dadas no problema?

Considerando que é dado do problema a medida do ângulo  $\hat{A}$ , é natural que tentemos obter relações que envolvam as duas medidas.

Assim, voltando aos conteúdos relativos a ângulos em uma circunferência, vamos encontrar aqueles conteúdos sobre ângulos *inscritos*.

<sup>1</sup> As figuras apresentadas nas soluções dos problemas 4 e 5 foram construídas utilizando-se o GeoGebra, que é um software de matemática dinâmica, especialmente desenvolvido para ensino de Álgebra e de Geometria. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/ead>>.

**Atividade 2.2**

Relembre o significado de ângulo inscrito numa circunferência, registrando-o aqui. Faça um desenho.

Um resultado que você deve ter encontrado diz que

*Todo ângulo inscrito em uma circunferência tem a metade da medida do arco correspondente.* (2)

Ora, você já deve estar se perguntando sobre ângulos inscritos na circunferência traçada para a representação do problema. Mais que isto, sobre ângulos inscritos que nos auxiliem na solução do problema.

Vejamos! Volte à Figura 2.1!

Traçando o segmento  $CD$ , o ângulo  $\hat{BCD}$  é um ângulo inscrito na circunferência, e seu arco correspondente é o arco  $BD$ , do qual queremos calcular o valor.

Veja na Figura 2.2, a seguir.

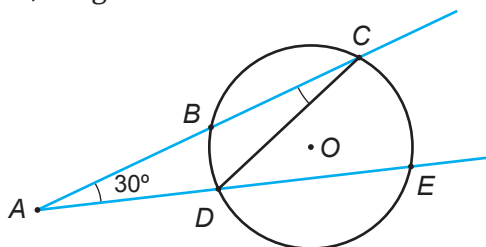


FIGURA 2.2

Dos resultados em (1) e (2), você conclui que

$$m(\hat{BCD}) = \frac{1}{2} m(\hat{BOD}) = \frac{1}{2} (\text{medida do arco } BD) \quad (3)$$

E, agora, você vai concordar comigo novamente! Para obter o valor do arco  $BD$ , devemos, então, calcular o valor de  $m(\hat{BCD})$ , a medida do ângulo  $\hat{BCD}$ .

Olhando para a última figura desenhada, Figura 2.2, observamos que  $\hat{BCD}$  é ângulo do triângulo  $ACD$ , do qual também conhecemos a medida do ângulo em  $A$ .

*Ops, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ !* (4)

Então, nos resta perguntar se temos como calcular o valor de  $m(\hat{ADC})$ , o terceiro ângulo do triângulo  $ACD$ .

O que temos sobre  $\hat{ADC}$ ?

Primeiro observemos que  $\hat{ADC}$  é ângulo suplementar de  $\hat{CDE}$ , ou seja,  $m(\hat{ADC}) = 180^\circ - m(\hat{CDE})$ .

Além disso, ainda analisando a Figura 2.2, você pode observar que  $\widehat{CDE}$  é um ângulo inscrito na circunferência cujo arco correspondente é o arco  $CE$ .

Porém, sobre este arco, dos dados do problema, temos que

$$\widehat{CE} = 3\widehat{BD}. \quad (5)$$

Assim, usando os resultados em (1), (2) e (5), você obterá que

$$C\widehat{DE} = \frac{1}{2}C\widehat{OE} = \frac{3}{2}B\widehat{OD}.$$

Portanto,  $m(\widehat{ADC}) = 180^\circ - m(\frac{3}{2}B\widehat{OD})$ .

Usando (4) podemos escrever, então, que

$$m(\widehat{CAD}) + m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{ACD}) = 180^\circ.$$

Substituindo os respectivos valores, encontramos

$$30^\circ + 180^\circ - \frac{3}{2}m(\widehat{BOD}) + \frac{1}{2}m(\widehat{BOD}) = 180^\circ.$$

Resolva então esta igualdade para obter que  $m(\widehat{BOD}) = 30^\circ$ .

Logo, de (1), temos que a medida do arco  $BD$  é  $30^\circ$ .



A atividade seguinte você já esperava!

### Atividade 2.3

Identifique e liste todos os conhecimentos de Geometria utilizados para compreensão e construção da solução apresentada para o Problema 4.



## PROBLEMA 5

Traçar a mediatriz de um segmento  $AB$ .

Antes de partirmos para a solução da situação-problema colocada, vamos observar que, diferentemente dos problemas anteriores, nesta questão a construção de um desenho não é uma necessidade para auxiliar, dar suporte, à elaboração de uma solução para o problema colocado.

De fato, **a construção** da figura geométrica do objeto referido no enunciado da questão é que irá compor a solução do problema.

Melhor dizendo, **a solução** do problema **é a construção do desenho** da figura geométrica apontada no enunciado: a mediatriz de um segmento  $AB$ .

Então vamos lá!

Ah, você deve estar lembrando que as construções geométricas como a aqui solicitada são realizadas apenas com o uso de régua não graduada e de compasso!<sup>2</sup>

Iniciando a construção da solução, com a régua trace o segmento de reta  $AB$ .

Mas o que é a mediatriz de  $AB$ ?

Bem, aqui seria mais uma tarefa para você, consultando os livros didáticos...

Mas, para adiantar a nossa construção, veja aqui:

*A mediatriz de um segmento  $AB$  é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.*

Usando o GeoGebra, você pode obter o seguinte desenho representando a mediatriz  $t$  de um segmento  $AB$ .

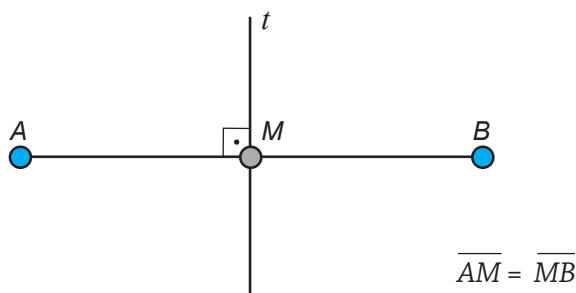


FIGURA 2.3

Ótimo, temos clara a imagem do que queremos construir, mas, lembre--se, usando régua e compasso.

Observando a Figura 2.3, podemos dizer que devemos traçar uma reta que seja perpendicular ao segmento  $AB$  e que o divida em duas partes iguais.

Você já traçou o segmento  $AB$ . Agora, usando o compasso, trace duas circunferências de mesmo raio, com centros em  $A$  e  $B$ . Denomine por  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção dessas circunferências.

Você deve ter feito um desenho como o seguinte.

<sup>2</sup> Veja no Apêndice de *Construções Geométricas* (WAGNER, 2005).

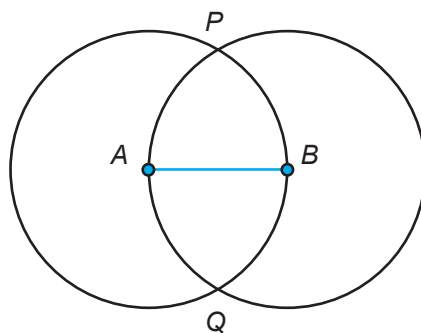


FIGURA 2.4

Trace a reta por  $P$  e  $Q$ .

A reta  $PQ$  é a mediatriz de  $AB$ . Por quê?

Observe que o quadrilátero  $APBQ$  é um losango e, portanto, suas diagonais  $AB$  e  $PQ$  são perpendiculares e cortam-se ao meio.

#### Atividade 2.4

- Por que o ponto de interseção da reta  $PQ$  com o segmento  $AB$  é o ponto médio de  $AB$ ?
- Justifique a afirmação: “Todo losango tem diagonais perpendiculares.”

Muito bem, então a reta traçada é a mediatriz do segmento  $AB$ .

Agora, observe que dado qualquer ponto  $P$  sobre a mediatriz de  $AB$ , os triângulos  $AMP$  e  $BMP$  são congruentes (Por quê?).

Sendo assim, temos que  $\overline{PA} = \overline{PB}$  para qualquer ponto  $P$  na mediatriz de  $AB$ .

Ou seja, se  $P$  é um ponto na mediatriz de um segmento  $AB$ , então as distâncias de  $P$  aos extremos  $A$  e  $B$  do segmento são iguais.

Por outro lado, seja  $Q$  um ponto do plano que tem a mesma distância dos extremos  $A$  e  $B$  de um segmento  $AB$ .

Quer dizer,  $\overline{QA} = \overline{QB}$ .

Então o triângulo  $AQB$  é isósceles e, portanto, a mediana pelo vértice  $Q$  é também a altura relativa ao lado oposto ao vértice  $Q$ , isto é, a  $AB$ .

Logo,  $Q$  pertence à reta perpendicular a  $AB$  pelo seu ponto médio, ou seja,  $Q$  pertence à mediatriz de  $AB$ .

Temos verificado, então, o seguinte resultado:

A mediatriz de um segmento é o **lugar geométrico** dos pontos que equidistam de suas extremidades.



E aí, temos mais uma atividade para você.

### Atividade 2.5

Volte aos livros didáticos e registre aqui o que é um lugar geométrico.



Finalizando, como não poderia ser diferente...

### Atividade 2.6

Identifique e liste todos os conhecimentos de Geometria utilizados para compreensão e construção da solução apresentada para o Problema 5.



## OS CONTEÚDOS DA DISCIPLINA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Conforme pretendido, façamos agora uma análise dos conhecimentos de Geometria envolvidos nos cinco problemas resolvidos nas Aulas 1 e 2, tanto no aspecto de seus enunciados – aí incluídos os aspectos das figuras – como também na busca e construção das soluções para as questões colocadas nos problemas.

Dê uma “passada de olhos” nas soluções das atividades de 1 a 15 da Aula 1 e das atividades de 1 a 6 da Aula 2.

O que dizer da “bagagem” de conhecimento necessária à resolução dos cinco problemas propostos?

Você vai concordar comigo que não é pouca. Certo?

Mais que isso, você pode observar que a Geometria envolvida nas atividades propostas ao longo da resolução dos cinco problemas abrange conteúdos abordados ao longo de todo o ensino fundamental.

Ou seja, nós demoramos um bom tempo de nossa vida, escolar e cotidiana, para “adquirir” os conhecimentos de Geometria contemplados nas atividades destas duas aulas.

Na disciplina RPG nós vamos retomar uma parte desta “bagagem”, a qual virá distribuída em seis “malas” (todas com alça e rodinha), assim identificadas:

Aula 3: Congruência

Aula 4: Teorema do ângulo externo

Aula 5: Semelhança

Aula 6: Dois Teoremas: Pitágoras e Tales

Aula 7: Circunferência

Aula 8: Lugares geométricos

Nós temos o resto do nosso curso para abrir as referidas seis malas e nos “apropriar” dos “objetos” nelas contidos.

Vamos lá!

# AULA 3

## Congruência

### OBJETIVOS

Compreender os resultados de congruência que foram utilizados na resolução dos cinco problemas apresentados nas Aulas 1 e 2.  
Demonstrar alguns resultados sobre congruência.

Para a resolução dos problemas apresentados nas Aulas 1 e 2, você utilizou resultados de congruência envolvendo segmentos, ângulos, triângulos e quadriláteros. Entre estes, provavelmente, o que lhe é mais familiar é o que se refere aos “três casos” de congruência de triângulos, normalmente identificados por LAL, ALA e LLL. Nós utilizamos alguns deles na resolução do Problema 3 da Aula 1.

Mas, antes de tratarmos especificamente destes casos, vejamos quando é que dois triângulos são congruentes.

De fato, esqueça temporariamente os tais casos. Agora, considere os triângulos  $ABC$ ,  $DEF$  e  $GHI$  dados na figura a seguir.

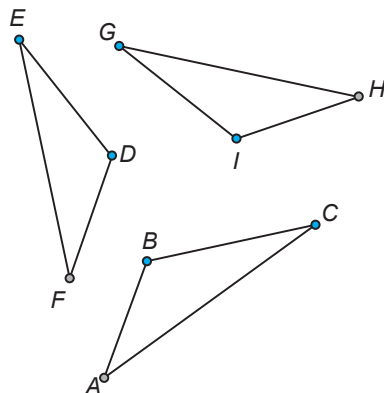


FIGURA 3.1

O que você faria para decidir sobre a existência de congruência entre os triângulos da Figura 3.1?

### Atividade 3.1

Considerando os três triângulos dados na Figura 3.1, utilize algum recurso para decidir se há, entre eles, dois que sejam congruentes. Justifique sua resposta.

Um modo de resolver se há alguma congruência entre os triângulos da Figura 3.1 seria recortá-los e, então, sobrepondo um ao outro, verificar se há “coincidência completa” de um com outro.

Claro, você não iria recortar o livro, mas pode ter feito uma cópia de cada um, usando um papel transparente, e então realizado a atividade.

Outra maneira seria você, usando régua e transferidor, tirar as medidas dos lados e ângulos de cada um dos triângulos da figura. Depois, verificar se há algum par de triângulos em que as medidas dos três lados e dos três ângulos coincidem, respectivamente.

Observe que este último procedimento é equivalente ao realizado com recorte, verificando se há “coincidência completa” de um com outro.

De fato, os dois modos, citados para resolver a Atividade 3.1, “atendem” ao que chamamos de definição de congruência de dois triângulos.

### Definição 3.1

Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

É importante ressaltar aqui que a régua e o compasso, assim como o computador, são instrumentos com precisão limitada em termos matemáticos. Em que pese a importância da experimentação para se fazer conjecturas, ou seja, “sugerir” que determinado fato possa ou não ser verdadeiro, só podemos considerar tal fato verdadeiro ou falso, a partir de uma demonstração com o rigor que a Matemática exige.

Voltando à Atividade 3.1, você deve ter verificado que os triângulos  $DEF$  e  $IGH$ , da Figura 3.1, são congruentes.

A correspondência entre os vértices de  $DEF$  e  $IGH$  que caracteriza esta congruência é dada por

$$D \leftrightarrow I$$

$$E \leftrightarrow G$$

$$F \leftrightarrow H$$

de modo que, valem, simultaneamente

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \hat{D} & IG &= DE \\ \hat{G} &= \hat{E} & e & \quad IH = DF \\ \hat{H} &= \hat{F} & GH &= EF \end{aligned} \quad (1)$$

### Notação

Vamos denotar por  $DEF = IGH$  para identificar que dois triângulos,  $DEF$  e  $IGH$ , são congruentes, com a correspondência de  $D$  com  $I$ ,  $E$  com  $G$  e  $F$  com  $H$ .

### Atividade 3.2

A congruência dos dois triângulos  $DEF$  e  $IGH$  poderia ser expressa por  $DEF = GHI$ ? Justifique sua resposta.

Agora, é importante compreender bem o significado das relações apresentadas em (1).

De fato, elas expressam a congruência dos ângulos e dos lados correspondentes dos triângulos  $DEF$  e  $IGH$ . Assim, por exemplo, na relação  $\hat{I} = \hat{D}$  lemos "o ângulo  $\hat{I}$  é congruente ao ângulo  $\hat{D}$ " e para  $IG = DE$  lemos "o segmento  $IG$  é congruente ao segmento  $DE$ ".

Veja a definição:

### Definição 3.2

Dizemos que dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são congruentes quando as medidas de  $AB$  e de  $CD$  são iguais. Diremos que dois ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes se eles têm a mesma medida.

Usando notação, temos:  $AB = CD$  quando  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\hat{A} = \hat{B}$  quando  $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ .

### Atividade 3.3

Responda, justificando cada resposta.

- a) São congruentes os lados de um
  - (i) quadrado?
  - (ii) retângulo?
  - (iii) losango?
- b) São congruentes os ângulos de um
  - (i) quadrado?
  - (ii) retângulo?
  - (iii) losango?

Voltemos nossa atenção para a congruência de triângulos, enunciando os três casos mencionados no início desta aula.

1º caso: Toda correspondência LAL é uma congruência.

2º caso: Toda correspondência ALA é uma congruência.

3º caso: Toda correspondência LLL é uma congruência.

Do 1º caso temos, então, que:

*Dados dois triângulos ABC e EFG, se  $AB = EF$ ,  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $AC = EG$ , então  $ABC = EFG$ .*

Ou seja, considerando a definição de congruência de triângulos, o caso em questão indica que:

*Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre estes lados, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.*

Enfim, observe que o 1º caso de congruência afirma que para verificar se dois triângulos são congruentes é suficiente verificar apenas três das seis relações indicadas na definição de congruência de triângulos, ou seja,

$$\left. \begin{array}{l} AB = EF \\ AC = EG \\ \hat{A} = \hat{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = EF, AC = EG, BC = FG \\ \hat{A} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{G}, \hat{B} = \hat{F} \end{array} \right. \quad (2)$$

Vamos supor que a afirmação contida no 1º caso seja verdadeira.

Na resolução dos problemas propostos nas Aulas 1 e 2, nós usamos o fato de que em um triângulo isósceles os ângulos da base são “iguais”.

De fato, consideremos um triângulo ABC em que  $AB = AC$ , ou seja, isósceles.

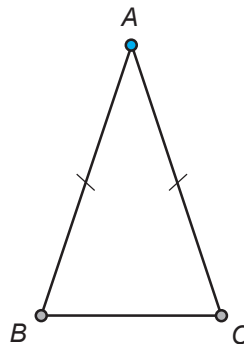


FIGURA 3.2

Vamos provar que  $\hat{B} = \hat{C}$ .

Para tanto, comparemos o triângulo  $ABC$  com o triângulo  $ACB$  fazendo a correspondência

$$A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C \text{ e } C \leftrightarrow B.$$

Veja na figura.

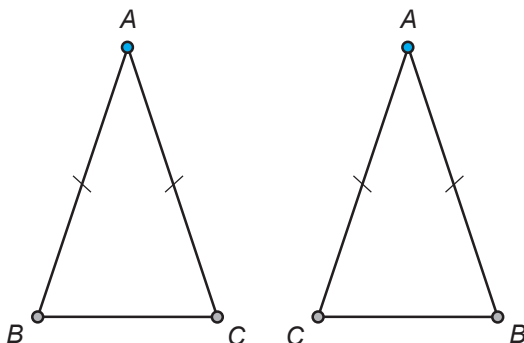


FIGURA 3.3

Comparando os dois triângulos temos, então, que

$$AB = AC, \hat{BAC} = \hat{CAB} \text{ e } AC = AB.$$

Segue, portanto, de LAL que  $\hat{ABC} = \hat{ACB}$ , ou seja, os triângulos  $ABC$  e  $ACB$  são congruentes.

Assim, valem todas as relações entre os lados e os ângulos dos dois triângulos, conforme definição de congruência de triângulos.

Consequentemente,  $\hat{B} = \hat{C}$ .

Temos, portanto, provada a seguinte proposição:

### Proposição 3.1

Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

Observe que esta proposição é equivalente à seguinte afirmação:

*Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes.*



Consideremos o 2º caso de congruência de triângulos.

**Toda correspondência ALA é uma congruência.**

Em outras palavras, temos, então, que

Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , se  $AB = EF$ ,  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $\hat{B} = \hat{F}$ , então  $ABC = EFG$ .

Observe que, como no 1º caso, o 2º caso de congruência afirma que para verificar se dois triângulos são congruentes é suficiente verificar apenas três das seis relações indicadas na definição de congruência de triângulos.

### Atividade 3.4

Traduza o 2º caso de congruência em linguagem análoga à utilizada em (2), em que foi representado o 1º caso.

Verifiquemos a veracidade do 2º caso de congruência.

Sejam  $ABC$  e  $EFG$  dois triângulos tais que  $\hat{A} = \hat{E}$ ,  $AB = EF$  e  $\hat{B} = \hat{F}$ .

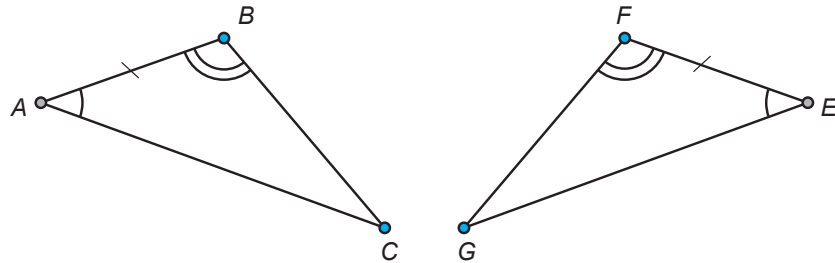


FIGURA 3.4

Queremos mostrar que  $ABC = EFG$ .

Considerando a Figura 3.4, no triângulo  $ABC$ , tracemos uma semirreta com origem em  $B$  e interceptando o lado  $AC$  no ponto  $D$ , tal que  $AD = EG$ .

Veja na figura que se segue.

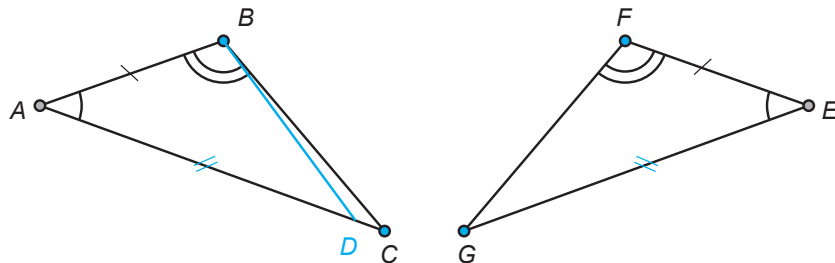


FIGURA 3.5

Comparando os triângulos  $ABD$  e  $EFG$ , temos

$AD = EG$ ,  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $AB = EF$ .

Segue, portanto, do 1º caso de congruência, LAL, que  $ABD = EFG$ .

Consequentemente temos que  $\hat{A}BD = \hat{F}$ .

Mas, por hipótese,  $\hat{A}BC = \hat{F}$ .

Logo,  $\hat{A}BD = \hat{A}BC$ .

Segue, então, que a semirreta  $BD$  coincide com a semirreta  $BC$ .

Ou seja, o ponto  $D$  coincide com o ponto  $C$ .

Logo, os triângulos  $ABC$  e  $ABD$  coincidem também.

Como vimos acima que  $ABD = EFG$ , segue que, então,  $ABC = EFG$ .

Concluimos, então, que toda correspondência ALA é uma congruência.



É importante observar que na demonstração do 2º caso utilizamos o fato de que a congruência de triângulos é uma *relação de equivalência*. No caso, usamos a propriedade transitiva: se  $ABC = ABD$  e  $ABD = EFG$ , então  $ABC = EFG$ .

### Atividade 3.5

Mostre que, se em um triângulo  $ABC$  dois ângulos são congruentes, então o triângulo é isósceles.

Sugestão: Use uma construção análoga à feita na demonstração da Proposição 3.1.

Observe que o resultado apresentado nesta atividade é equivalente à seguinte afirmação:

*Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos são congruentes.*



Vamos, então, ao 3º caso de congruência de triângulos:

**Toda correspondência LLL é uma congruência.**

Em outras palavras,

*Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Veja que, também aqui, será suficiente verificar apenas três das seis relações indicadas na definição de congruência de triângulos para concluir sobre a congruência de dois triângulos dados.

### Atividade 3.6

Reescreva o 3º caso de congruência, a exemplo do que foi feito em (2) para o 1º caso, e na Atividade 3.4 para o 2º caso.



Mostremos, agora, que a afirmação do 3º caso de congruência é verdadeira.

Para isso, considere dois triângulos  $ABC$  e  $FGH$  tais que  $AB = EF$ ,  $AC = EG$  e  $BC = FG$ .

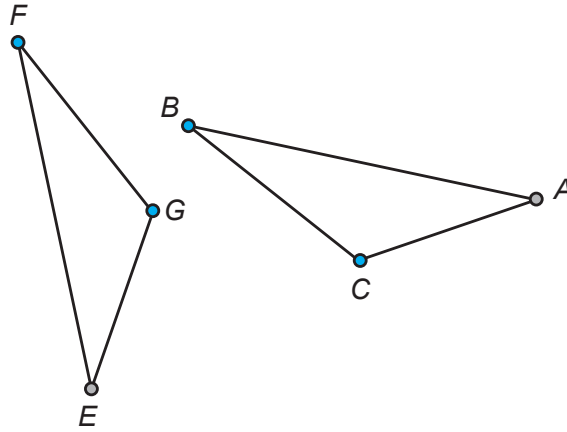


FIGURA 3.6

Inicialmente observemos que a reta suporte do lado  $AB$  do triângulo  $ABC$  divide o plano em dois semiplanos. Um deles contém o ponto  $C$ .

Façamos, então, a seguinte construção:

A partir da semirreta suporte de  $AB$  e no semiplano que não contém o ponto  $C$ , construa um ângulo de medida igual a  $\hat{E}$ . Use régua e transferidor para você obter uma figura análoga à seguinte:

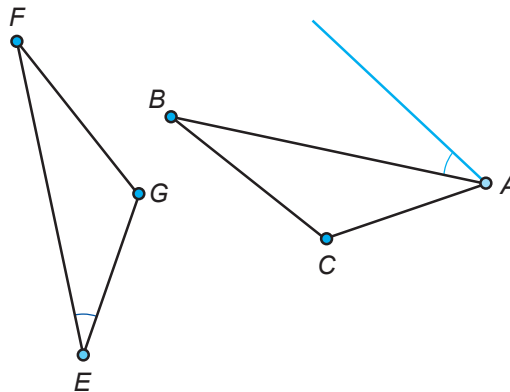


FIGURA 3.7

Construído este ângulo, no lado que não contém o ponto  $B$ , marque um ponto  $D$  tal que  $AD = EG$  e ligue  $D$  a  $B$ .

Veja na figura a seguir.

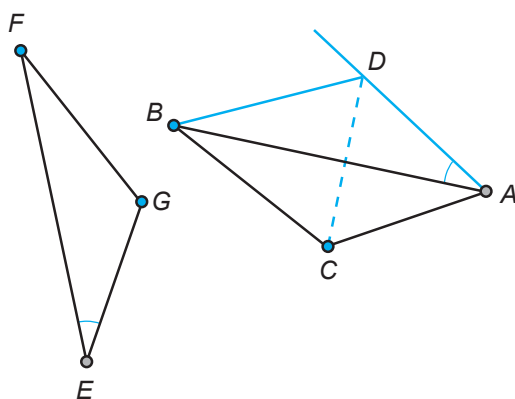


FIGURA 3.8

Então, por construção, temos:  $AD = EG$  e  $\hat{D}AB = \hat{E}$ .

Como  $AB = EF$  por hipótese, segue, pelo caso LAL, que  $ABD = EFG$ .

Nós devemos, então, agora mostrar que os triângulos  $ABD$  e  $ABC$  são congruentes. Para isso, trace  $CD$ .

Temos que  $BD = FG = BC$  e  $AD = EG = AC$ . Então, os triângulos  $DAC$  e  $DBC$  são isósceles. Assim, são iguais os pares de ângulos  $ADC$  e  $ACD$ ,  $BDC$  e  $BCD$ .

Portanto,  $\hat{ADB} = \hat{ACB}$ .

Segue, por LAL, que  $ABD = ABC$ .

Como mostramos acima que  $ABD = EFG$ , temos o resultado que queremos mostrar, ou seja, os triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são congruentes.



Um aspecto importante de ser observado diz respeito ao fato de que os três casos de congruência preveem que basta que sejam satisfeitas apenas *três* condições de congruência entre os elementos de dois triângulos para se garantir a congruência dos triângulos em questão.

Pode-se, erroneamente, deduzir daí que *qualquer combinação* de três das seis condições previstas na definição de congruência de triângulos seria sempre suficiente para garantir uma congruência de triângulos.

### Atividade 3.7

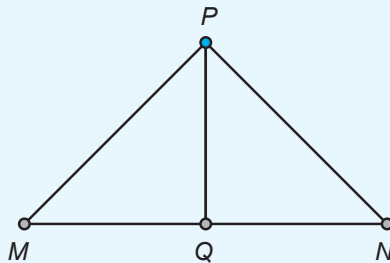
Dê um exemplo de dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$  em que  $AB = EF$ ,  $BC = FG$  e  $\hat{C} = \hat{G}$ , mas não se pode concluir que  $ABC$  e  $EFG$  são congruentes.

Observe, da Atividade 3.7, que a afirmação “Toda correspondência LLA é uma congruência” é falsa.



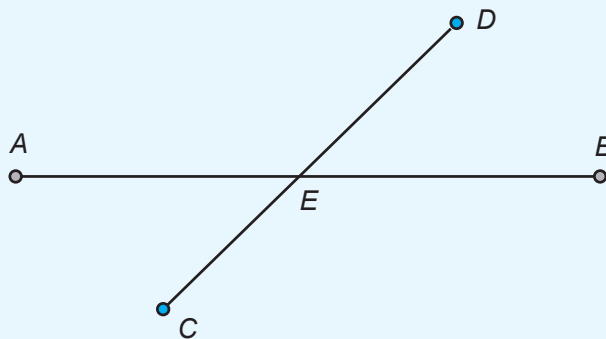
## AUTOAVALIAÇÃO

1. Os triângulos  $ABC$  e  $PQR$ , cada um, têm dois lados que medem 7 cm e um ângulo cuja medida é  $40^\circ$ . Esses triângulos são congruentes? Sim ou não? Por quê?
2. Na figura, tem-se que os triângulos  $MQP$  e  $NQP$  são congruentes.



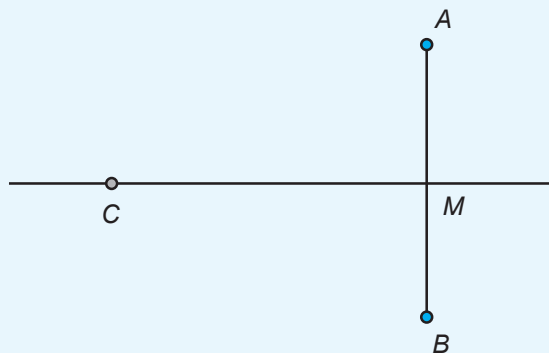
Escreva os seis pares de partes correspondentes congruentes desses dois triângulos.

3. Na figura, os segmentos  $AB$  e  $CD$  se cortam ao meio no ponto  $E$ .



Mostre que os segmentos  $AC$  e  $BD$  são congruentes.

4. Na figura abaixo,  $\hat{CMA}$  é um ângulo reto e  $M$  é ponto médio de  $AB$ .



Mostre que  $CA = CB$ .

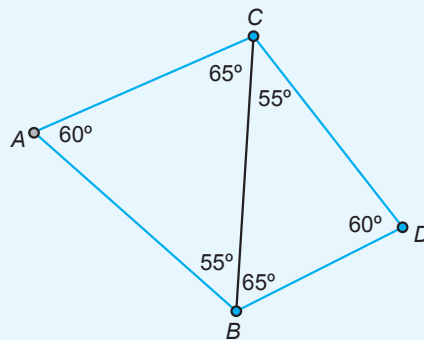
5. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), justificando sua resposta.

- ( ) Todos os triângulos isósceles são congruentes.
- ( ) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.
- ( ) Todos os triângulos retângulos são congruentes.
- ( ) Todos os triângulos retângulos isósceles são congruentes.
- ( ) Todos os triângulos acutângulos são congruentes.

6. Considere um triângulo  $ABC$  no qual a correspondência  $ABC \leftrightarrow ACB$  é uma congruência. Podemos concluir que o triângulo  $ABC$  é

- (a) escaleno.            (b) isósceles.            (c) equilátero.

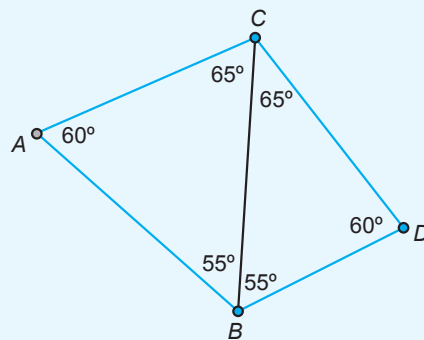
7. A figura abaixo foi copiada de um livro por uma criança.



As medidas dos ângulos indicadas são as medidas corretas do desenho original. Com base nessa informação, os triângulos  $ABC$  e  $DCB$  são congruentes?

Justifique sua resposta.

8. Se, no problema anterior, os ângulos tivessem sido indicados como na figura abaixo, os triângulos  $ABC$  e  $DCB$  seriam congruentes?



Justifique sua resposta.

9. Mostre que num triângulo isósceles  $ABC$ , com base  $BC$ , a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$  é perpendicular à base e é mediana.

10. Dado um ângulo  $A\hat{O}B$  e um ponto  $V$ , construir um ângulo de vértice  $V$  congruente a  $A\hat{O}B$ .

Para isso utilize as seguintes etapas:

- Trace um lado do ângulo a ser construído, identificando seu vértice  $V$ ;
- com centro no vértice  $O$  do ângulo  $A\hat{O}B$ , trace um arco de raio qualquer interceptando os lados de  $A\hat{O}B$ ;
- identifique os pontos de interseção, obtidos no passo anterior, por  $P$  e  $Q$ ;
- com o mesmo raio e centro no vértice  $V$  do ângulo a ser construído, trace uma arco igual ao primeiro e que intercepta o lado já traçado em um ponto que corresponde ao ponto  $P$  do ângulo dado;
- no primeiro ângulo tome, com o compasso, a medida da distância de  $P$  a  $Q$ ;
- com centro em  $P$ , trace um arco de abertura igual à distância obtida no passo anterior, interceptando o arco já traçado em um ponto correspondente ao ponto  $Q$ ;
- a partir do vértice  $V$  e passando pelo ponto correspondente ao ponto  $Q$ , trace o outro lado do ângulo.
- Justifique por que o ângulo assim obtido é congruente ao ângulo  $A\hat{O}B$  dado.

## Teorema do Ângulo Externo e Teorema das Paralelas

### OBJETIVOS

Demonstrar e utilizar o Teorema do Ângulo Externo e o Teorema das Paralelas para compreender e obter resultados utilizados na resolução dos cinco problemas apresentados nas Aulas 1 e 2.

Compreender as relações entre lados e ângulos de um triângulo.

Se retomarmos os cinco problemas das Aulas 1 e 2, veremos que alguns dos resultados utilizados na resolução dos mesmos foram:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .  $(R_1)$

Em um triângulo, cada ângulo externo é a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.  $(R_2)$

Se as retas  $r$  e  $s$  são paralelas e  $t$  é uma transversal a elas, então os ângulos correspondentes (ou os alternos) são congruentes.  $(R_3)$

Você há de concordar que estes resultados são muito utilizados em Geometria.

Nesta aula você verá que, assim como outros resultados importantes, os resultados acima decorrem do que é chamado de “Teorema do Ângulo Externo”.

Antes de enunciá-lo, vejamos o que é um ângulo externo de um triângulo  $ABC$ .

Observe a figura a seguir.

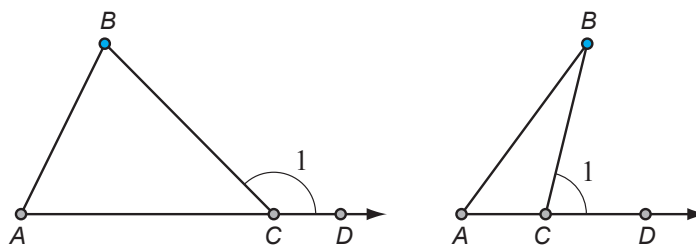


FIGURA 4.1

Na Figura 4.1, o ângulo  $\widehat{BCD}$ , identificado por 1, é chamado *ângulo externo* do triângulo  $ABC$ .

Observe que  $D$  é um ponto na reta suporte do lado  $AC$  do triângulo  $ABC$ . Assim, dizemos que se  $C$  está entre  $A$  e  $D$ , então o ângulo  $\widehat{BCD}$  é um ângulo externo do triângulo  $ABC$ .

Ainda usando a Figura 4.1, os ângulos  $\widehat{CAB}$  e  $\widehat{CBA}$  são chamados ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo  $\widehat{BCD}$ .

Observe que, por definição, o ângulo externo de um triângulo é ângulo suplementar do ângulo adjacente a ele.

Por exemplo, no triângulo  $ABC$  da Figura 4.1, temos o ângulo  $\widehat{ACB}$  adjacente ao ângulo externo  $\widehat{BCD}$  e  $m(\widehat{ACB} + \widehat{BCD}) = 180^\circ$ .

Você pode verificar, também, que todo triângulo tem seis ângulos externos.

#### Atividade 4.1

- Faça uma “cópia” dos triângulos da Figura 4.1 e identifique, em cada um, os seus seis ângulos externos.
- Escolha um dos triângulos da figura 4.1 e identifique, para cada um de seus ângulos externos, os seus dois ângulos internos não adjacentes.



Estamos, então, prontos para enunciar o teorema que dá nome a esta aula.

#### Teorema do Ângulo Externo

Em um triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é maior que a medida de cada um dos ângulos internos a ele não adjacentes.

Observe que o Teorema do Ângulo Externo tem seu enunciado diferente do resultado  $(R_2)$  que enunciamos no início da aula. Volte lá e compare, para concluir que aquele diz muito mais do que este que agora enunciamos.

Mas fique tranquilo, até o final desta aula teremos construído uma demonstração daquele resultado  $R_2$  enunciado. Por enquanto, vamos nos deter na construção de uma demonstração do que, de fato, é nomeado Teorema do Ângulo Externo.

Para tanto, considere um triângulo  $ABC$ . Veja (I) na Figura 4.2, a seguir.

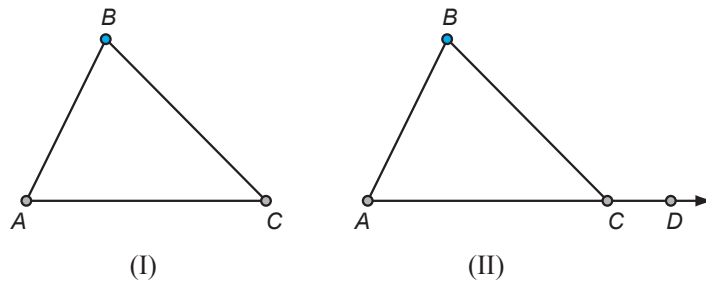


FIGURA 4.2

Na semirreta suporte de  $AC$ , marque um ponto  $D$  tal que  $C$  esteja entre  $A$  e  $D$ , como indicado em (II) na Figura 4.2.

Considere, então, o ângulo externo  $\hat{BCD}$ . Seus ângulos não adjacentes são  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .

Devemos provar que  $m(\hat{BCD}) > m(\hat{A})$  e  $m(\hat{BCD}) > m(\hat{B})$ .

Vamos provar primeiro que  $m(\hat{BCD}) > m(\hat{B})$ . Para isso faça a seguinte construção.

Considere o ponto médio  $E$  do segmento  $BC$ . Trace a semirreta  $AE$  e marque um ponto  $F$  tal que  $AE = EF$ .

Veja na Figura 4.3.

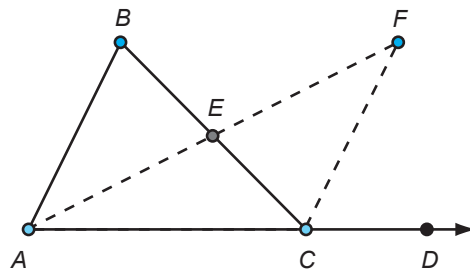


FIGURA 4.3

Considere os triângulos  $AEB$  e  $FCE$ .

Temos:  $BE = EC$ ,  $AE = EF$  e  $\hat{BEA} = \hat{FEC}$  (ângulos opostos pelo vértice).

Então, pelo caso LAL de congruência,  $\hat{BEA} = \hat{FEC}$ . Portanto,  $\hat{ECF} = \hat{B}$ .

Observe, agora, que a semirreta  $CF$  divide o ângulo  $\hat{B}CD$ . Então,  $m(\hat{E}CF) < m(\hat{B}CD)$ .

Logo,  $m(\hat{B}CD) > m(\hat{B})$ , como queríamos demonstrar.

De modo análogo, mostra-se que  $m(\hat{B}CD) > m(\hat{A})$ .

#### Atividade 4.2

Conclua a demonstração do Teorema do Ângulo Externo mostrando que  $m(\hat{B}CD) > m(\hat{A})$ .

Sugestão: Considere o ponto médio  $G$  de  $AC$  e o fato de que os ângulos externos  $\hat{B}CD$  e  $\hat{A}CJ$  são congruentes, em que  $J$  é um ponto na semirreta  $BC$  (prolongue  $BC$ ).



Como consequências imediatas deste teorema, temos:

(a) A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .

Acompanhe a seguinte argumentação:

Olhando para o triângulo  $ABC$  dado na Figura 4.1, o que esta afirmação diz é que, por exemplo,  $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 180^\circ$ .

Ora, pelo *Teorema do Ângulo Externo*, se  $\theta$  é a medida do ângulo externo ao ângulo em  $C$ , então  $\theta > m(\hat{B})$ .

Mas,  $\theta + m(\hat{C}) = 180^\circ$  (pois são suplementares).

Assim, temos  $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < \theta + m(\hat{C}) = 180^\circ$ , ou seja,  $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 180^\circ$ .



(b) Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.

(c) Se duas retas distintas  $r$  e  $s$  são perpendiculares a uma terceira, então  $r$  e  $s$  não se interceptam.

#### Atividade 4.3

Mostre as afirmações em (b) e (c).

Sugestão:

Para (b) suponha que um triângulo possua dois ângulos não agudos e tente concluir usando a afirmação em (a).

Para (c) suponha que  $r$  e  $s$  se interceptem e tente concluir usando (b).



## DESIGUALDADES NOS TRIÂNGULOS

Outro fato muito conhecido, em se tratando de triângulos, é:

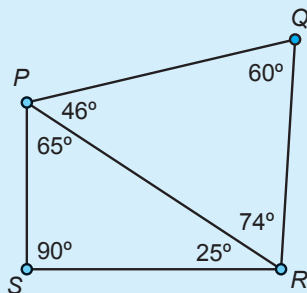
*Ao maior lado opõe-se o maior ângulo e, reciprocamente, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.*

Utilizando esta afirmação, resolva a seguinte atividade.

### Atividade 4.4

a) Em um triângulo  $ABC$ , tem-se  $\overline{AB} = 12$ ,  $\overline{BC} = 7$  e  $\overline{AC} = 9$ . Qual é o maior e o menor ângulo de  $ABC$ ?

b) Considerando os dados da figura, determine o segmento de maior comprimento.



De modo geral, considere um triângulo  $ABC$  em que  $\overline{BC} < \overline{AC}$ .

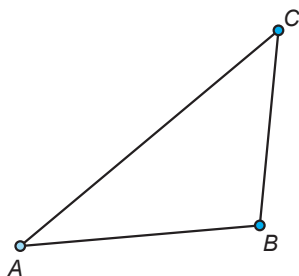


FIGURA 4.4

Faça a seguinte construção:

Marque em  $AC$  um ponto  $D$  tal que  $CD = BC$ . Observe que, como  $\overline{BC} < \overline{AC}$ , é sempre possível obter o ponto  $D$  no segmento  $AC$ .

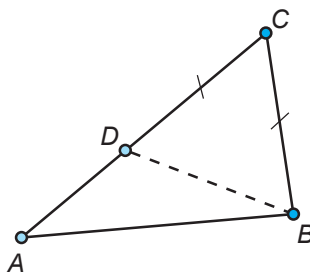


FIGURA 4.5

O que temos com esta construção?

O segmento  $BD$  divide o ângulo  $\widehat{CBA}$ . Portanto, temos que  $m(\widehat{CBA}) > m(\widehat{CBD})$ .

Agora observe que  $\widehat{CBD} = \widehat{CDB}$ , pois o triângulo  $CDB$  é isósceles, por construção.

Além disso,  $\widehat{CDB}$  é ângulo externo do triângulo  $BDA$ . Então, do *Teorema do ângulo externo*,  $m(\widehat{CDB}) > m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CAB})$ .

Logo, dos três últimos parágrafos, podemos concluir que

$m(\widehat{CBA}) > m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CDB}) > m(\widehat{CAB})$ , ou seja,  $m(\widehat{CBA}) > m(\widehat{CAB})$ .

Agora, observe que  $\widehat{CBA}$  é o ângulo oposto ao lado  $AC$ , e  $\widehat{CAB}$  é o ângulo oposto ao lado  $BC$ .

Mostramos, então, que se dois lados de um triângulo não são congruentes, o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Por outro lado, vimos na Aula 3 (Atividade 3.5) que, se em um triângulo  $ABC$  dois ângulos são congruentes, então o triângulo possui dois lados congruentes (é isósceles).

Considerando o exposto, temos aqui demonstrado a seguinte proposição:

#### **Proposição 4.1**

Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então seus ângulos opostos não são iguais, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.



Por outro lado, pode-se também mostrar que

#### **Proposição 4.2**

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas, e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.



Agora vejamos o seguinte: até aqui estamos assumindo que o triângulo já foi dado, ou ainda, que o triângulo dado realmente existe.

Pergunta: dados quaisquer três segmentos sempre podemos construir um triângulo cujos lados são congruentes aos segmentos dados? Vejamos.

#### Atividade 4.5

- Com segmentos de medidas 7 dm, 8 dm e 12 dm pode-se construir um triângulo? Por quê?
- Os lados de um triângulo podem medir 8 cm, 9 cm e 20 cm? Por quê?
- Em um triângulo, dois lados medem, respectivamente, 5 cm e 8 cm. Qual o menor valor, expresso em números inteiros, do terceiro lado? E o maior?



Voltemos, agora, com um triângulo  $ABC$  dado e vejamos que relações existem entre seus lados.

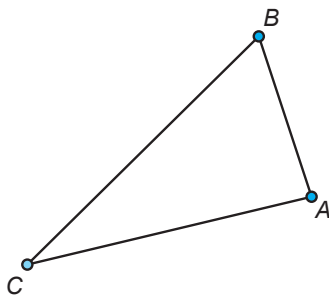


FIGURA 4.6

Façamos a seguinte construção:

Na semirreta suporte do lado  $CB$  marque um ponto  $D$  tal que  $BD = BA$ , como indicado na figura a seguir.

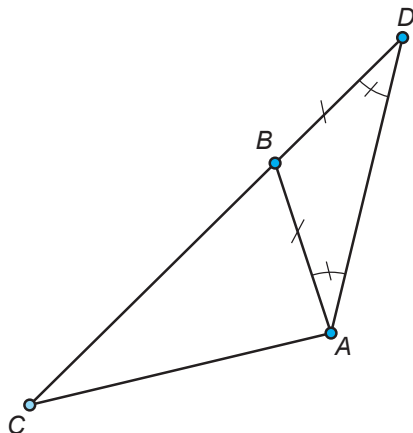


FIGURA 4.7

Desta construção temos:

$$DC = DB + BC = AB + BC \quad (1)$$

Como o segmento  $AB$  divide o ângulo  $D\hat{A}C$ , então  $m(D\hat{A}C) = m(D\hat{A}B) + m(B\hat{A}C)$ .

Portanto,  $m(D\hat{A}C) > m(D\hat{A}B)$ .

Como, por construção, o triângulo  $ABD$  é isósceles, temos  $m(\hat{D}) = m(D\hat{A}B)$ .

$$\text{Logo, } m(D\hat{A}C) > m(\hat{D}). \quad (2)$$

Usando a Proposição 4.2 no triângulo  $ADC$ , obtemos que  $DC > AC$ . (3)

Assim, combinando (1) e (3), temos  $AB + BC > AC$ .

Temos concluído, portanto, que em um triângulo  $ABC$  dado, a soma dos comprimentos dos lados  $AB$  e  $BC$  é maior do que o comprimento do lado  $AC$ .

De fato, temos provado o seguinte teorema:

### **Teorema da Desigualdade Triangular**

Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.



Faça, então, a seguinte atividade:

### **Atividade 4.6**

Dois lados de um triângulo isósceles medem 12 e 5, respectivamente. Determine a medida do terceiro lado.



## **TEOREMA DAS PARALELAS**

O nosso objetivo agora é obter os três resultados apontados no início desta aula, e que foram utilizados na resolução dos problemas das Aulas 1 e 2.

Começemos abordando o terceiro deles:

*Se as retas  $r$  e  $s$  são paralelas, e  $t$  é uma transversal a elas, então os ângulos correspondentes (ou os alternos) são congruentes.*

Sabemos que, por definição, duas retas são paralelas se estão em um mesmo plano e não se interceptam.

Consideremos, então, a seguinte figura.

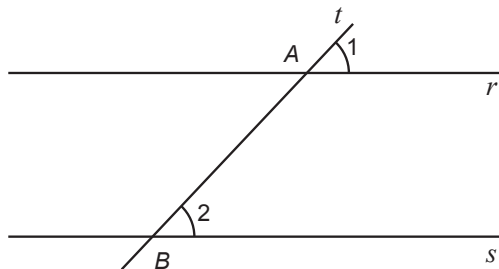


FIGURA 4.8

Aparentemente as retas  $r$  e  $s$  dessa figura são paralelas. Mas como garantir isso, ou seja, que elas não se interceptam?

Como as retas se prolongam infinitamente, você deve estar se perguntando: “será que  $r$  e  $s$  não poderiam se interceptar em algum ponto bem distante de  $A$  e de  $B$ ?”

Mas, veja, do resultado que desejamos obter temos que se elas fossem paralelas, então as medidas dos *ângulos correspondentes*, indicadas na figura por 1 e 2, seriam iguais.

Então, se há dúvida, suponhamos que  $r$  e  $s$  se interceptem em algum ponto  $P$  longe de  $A$  e de  $B$ . Veja na figura a seguir (claro, imaginando que  $P$  está bem longe de  $A$  e de  $B$ ).

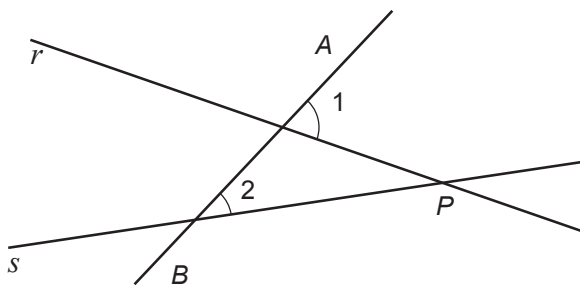


FIGURA 4.9

Teríamos, então, em uma conjectura como esta, um triângulo  $ABP$ , do qual o ângulo  $\hat{1}$  seria um ângulo externo ao ângulo  $B\hat{A}P$ , e  $\hat{2}$  um ângulo interno não adjacente a ele.

Observe que estamos denotando por  $\hat{1}$  e  $\hat{2}$  os ângulos identificados na figura com medidas 1 e 2, respectivamente.

Logo, pelo *Teorema do Ângulo Externo*, teríamos  $m(\hat{1}) > m(\hat{2})$ , ou seja, as medidas de  $\hat{1}$  e  $\hat{2}$  não seriam iguais como suposto na afirmação.

Podemos concluir, então, do que acabamos de fazer, o seguinte resultado:

**Proposição 4.3**

Sejam dadas duas retas,  $r$  e  $s$ , interceptadas por uma transversal. Se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.



Mas, você deve estar observando que o que fizemos foi mostrar o inverso do resultado que queremos verificar.

Você verá, entretanto, que a Proposição 4.3, junto com o famoso Axioma das paralelas, mais conhecido como o Quinto postulado de Euclides, garantirá o nosso resultado.

Ah, antes de enunciá-lo, volte à Atividade 4.3 e observe que, no item (c), você verificou que “se duas retas distintas  $r$  e  $s$  são perpendiculares a uma terceira, então  $r$  e  $s$  não se interceptam”.

Convença-se que este resultado nos garante a existência de retas paralelas. Mais do que isto, ele nos sugere como construir retas paralelas.

Acompanhe o que se segue.

Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora dela, podemos traçar uma reta  $t$  perpendicular a  $r$  passando por  $P$ . Em seguida, traçamos por  $P$  uma reta  $s$  perpendicular à reta  $t$ . Então, pelo resultado acima,  $r$  e  $s$  seriam paralelas.



Mas, será que a reta  $s$  é a única reta paralela à reta  $r$  passando por  $P$ ?

Euclides, em sua obra *Os elementos*, considera a resposta a essa pergunta como afirmativa, considerando-a como um “fato” evidente, e o enuncia como o quinto dos seus postulados, a partir dos quais construiu a Geometria conhecida como Euclidiana.<sup>1</sup>

Entretanto, durante séculos, muitos matemáticos (por exemplo, Legendre e Gauss) tentaram, sem sucesso, transformar o Quinto postulado de Euclides em teorema, ou seja, prová-lo a partir de outros resultados evidentes.

Finalmente, no século XIX, ficou provado que Euclides tinha razão, ou seja, não se pode demonstrar o postulado das paralelas a partir de outros postulados.

Temos então:

**Axioma das paralelas**

Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a ela.

<sup>1</sup> Ver MOISE; DOWNS Jr., 1966.

Observe que uma consequência imediata desse axioma é que se uma reta  $u$  é paralela a duas outras, digamos  $r$  e  $s$ , então ou  $r$  e  $s$  são paralelas ou são coincidentes.



Retomando o nosso objetivo de demonstrar o resultado inverso da Proposição 4.3, sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas e seja  $t$  uma transversal que intercepta  $r$  e  $s$  em  $A$  e  $B$ , respectivamente. Sejam  $\hat{1}$  e  $\hat{2}$  dois ângulos correspondentes, conforme indicado na Figura 4.8.

Suponhamos que  $\hat{1}$  e  $\hat{2}$  fossem diferentes. Considere a seguinte construção:

Trace uma reta  $u$  pelo interior do ângulo  $\hat{1}$ , formando com a transversal  $t$  um ângulo de medida igual a  $\hat{2}$ .

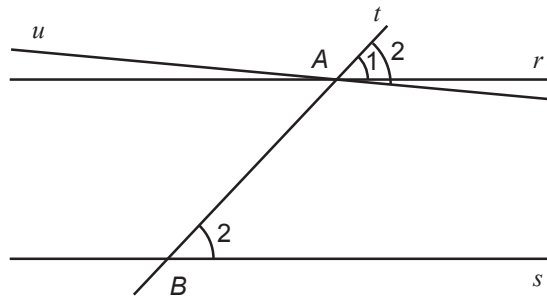


FIGURA 4.10

Então, da Proposição 4.3,  $u$  e  $s$  são paralelas.

Mas, então, temos duas retas,  $r$  e  $u$ , passando por  $A$  e paralelas à reta  $s$ , o que contraria o axioma das paralelas. Logo  $r$  e  $u$  são coincidentes.

Portanto,  $r$  forma com a transversal  $t$  um ângulo congruente a  $\hat{2}$ , ou seja,  $\hat{1} = \hat{2}$ .

Temos então demonstrado o teorema como enunciado a seguir.

### Teorema das Paralelas

Se as retas  $r$  e  $s$  são paralelas e  $t$  é uma transversal a elas, então os ângulos correspondentes (ou os alternos internos) são congruentes.



Finalmente, você, usando o *Teorema das Paralelas*, poderá mostrar o resultado  $(R_1)$  enunciado no início desta aula.

### Teorema (lei angular de Tales)

A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

Para tanto, considere um triângulo  $ABC$  e trace pelo vértice  $B$  uma reta  $r$  paralela ao lado  $AC$  do triângulo, como construído na figura a seguir.

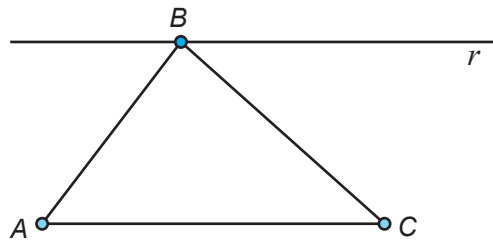


FIGURA 4.11

Use, então, o *Teorema das Paralelas* para construir sua solução.

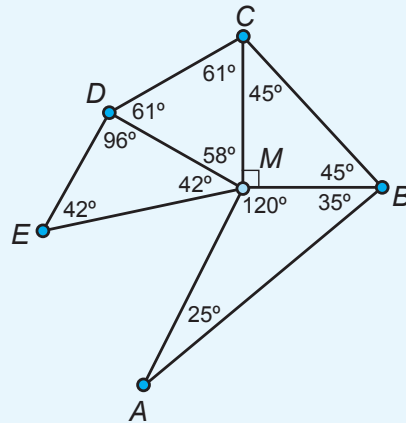
Resolvendo a Atividade 4.8, teremos mostrados os três resultados enunciados no início desta aula. ◀

**Atividade 4.8**

Mostre que, em todo triângulo, cada ângulo externo é a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

## AUTOAVALIAÇÃO

1. Na figura ao lado, se os ângulos têm as medidas indicadas, qual é o menor segmento?



2. Para cada conjunto de medidas dadas a seguir, construir um triângulo. Se os dados determinam dois triângulos, construa os dois. Caso se possa construir mais de dois, ou nenhum triângulo, explique por quê.

- $m(\hat{M}) = 30^\circ$ ,  $\overline{MO} = 2$ ,  $m(\hat{O}) = 90^\circ$ .
- $m(\hat{B}) = 55^\circ$ ,  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{BC} = 3$ .
- $m(\hat{M}) = 35^\circ$ ,  $\overline{GH} = 6$ ,  $\overline{HI} = 4$ .
- $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{BC} = 3$ ,  $\overline{AC} = 4$ .
- $m(\hat{M}) = 80^\circ$ ,  $\overline{MO} = 2$ ,  $m(\hat{O}) = 120^\circ$ .
- $\overline{DE} = 8$ ,  $\overline{EF} = 3$ ,  $\overline{DF} = 4$ .
- $\overline{DE} = 4$ ,  $\overline{DF} = 8$ ,  $m(\hat{D}) = 60^\circ$ .
- $m(\hat{A}) = 70^\circ$ ,  $m(\hat{B}) = 60^\circ$ ,  $m(\hat{C}) = 50^\circ$ .

3. Dois lados  $AB$  e  $BC$  de um triângulo  $ABC$  medem respectivamente 8 cm e 21 cm. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de 6?

4. Determine o intervalo de variação de  $x$  sabendo que os lados de um triângulo são expressos por  $x + 10$ ,  $2x + 4$  e  $20 - 2x$ .

5. As medidas dos lados de um triângulo de perímetro 14 são expressas por números inteiros. Determine as possíveis medidas desses lados.

6. O lado  $AB$  de um triângulo  $ABC$  é expresso por um número inteiro. Determine o seu valor máximo sabendo que os lados  $AC$  e  $BC$  medem respectivamente 27 cm e 16 cm, e  $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$ .

7. Mostre que qualquer lado de um triângulo é menor que o seu semiperímetro.
8. Mostre que cada ângulo de um triângulo equilátero mede  $60^\circ$ .
9. Mostre que a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é  $90^\circ$ .
10. Mostre que se dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são tais que  $\hat{A} = \hat{E}$ ,  $\hat{C} = \hat{G}$ ,  $AB = EF$ , então os triângulos  $ABC$  e  $EFG$  são congruentes (caso ALA).

Sugestão: use a Lei angular de Tales.

11. Sejam  $ABC$  e  $EFG$  dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são  $\hat{A}$  e  $\hat{E}$ .

Mostre que, se alguma das condições dadas a seguir ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:

- a)  $AB = EF$  e  $\hat{C} = \hat{G}$ .
- b)  $BC = FG$  e  $AB = EF$ .
- c)  $BC = FG$  e  $\hat{C} = \hat{G}$ .

# AULA 5

## Semelhança

### OBJETIVOS

Compreender o conceito de semelhança de polígonos.  
Compreender os resultados de semelhança de triângulos que foram utilizados na resolução dos cinco problemas apresentados nas Aulas 1 e 2.  
Demonstrar os casos de semelhança de triângulos.

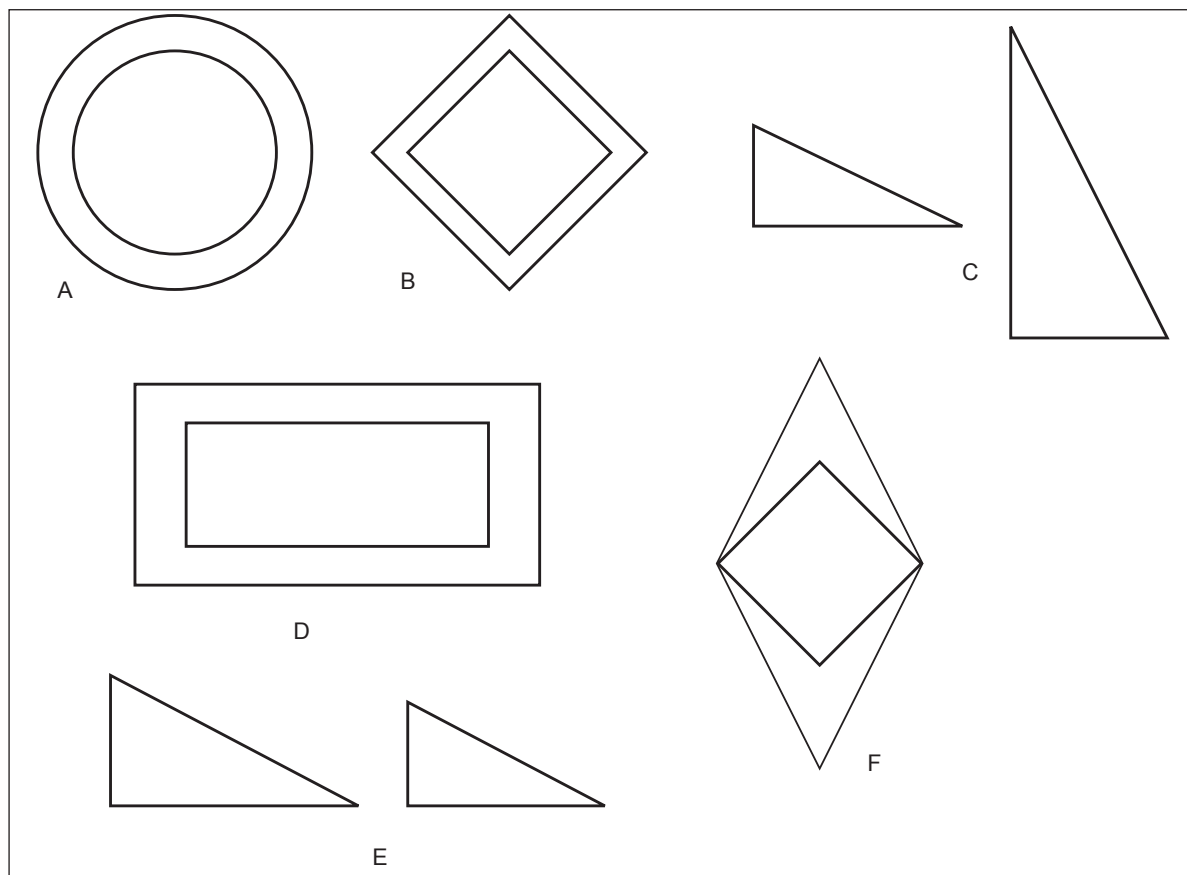
*Parece, mas não é! Ou é!*

Retomando os conteúdos de Geometria utilizados na resolução dos cinco problemas iniciais da disciplina, vamos observar que entre os resultados estão aqueles referentes à semelhança de triângulos.

Outro resultado, várias vezes utilizado, foi o famoso Teorema de Pitágoras. Mas, o que tem a ver Pitágoras com semelhança de triângulos? Você pode não estar se lembrando, mas uma das demonstrações do famoso teorema se faz utilizando semelhança de triângulos. Nós veremos isso mais à frente, na nossa aula.

Antes de enunciarmos os três casos de semelhança de triângulos, é importante que tenhamos claro o conceito de semelhança.

Para tanto, considere as figuras do quadro que se segue.



QUADRO 5.1

Observe que “quase” todas as figuras do Quadro 5.1 são muito presentes no nosso cotidiano. Por exemplo, a figura A pode representar a borda de um passeio de uma praça; a figura B, a moldura de um espelho; a figura D, a moldura de um quadro, e as figuras em C e E, telhados de meia-água.

Quanto à figura F, me lembra “a vista aérea” dos barquinhos de papel que eu fazia, quando criança, para colocar nas enxurradas nos dias de chuva. Talvez você consiga “ver” outra coisa.

Mas voltemos à nossa aula.

Geometricamente nomeando, nas figuras do Quadro 5.1, temos: em A, circunferências; em B, quadrados; em D, retângulos; em C e E, triângulos retângulos, e em F, losangos.

Pergunta: São semelhantes as circunferências em A, os quadrados em B, os retângulos em D, os triângulos em C e E, respectivamente, e os losangos em F?

### Atividade 5.1

Considere as figuras A, B, C, D, E e F do Quadro 5.1. Use de algum recurso para decidir sobre a semelhança das circunferências em A, dos quadrados em B, dos retângulos em D, dos triângulos em C e E, respectivamente, e dos losangos em F. Descreva o critério que você utilizou.

Mas, vejamos!

Em linguagem comum, dois objetos são semelhantes se têm exatamente a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Digamos, são parecidos!

Pensando assim, seria razoável responder que em cada uma das figuras A, B, C, D, E e F do Quadro 5.1, temos que as circunferências em A, os quadrados em B, os retângulos em D, os triângulos em C e E, respectivamente, e os losangos em F, são semelhantes.

Ah, mas espera aí, você deve estar pensando! Nós estamos nos referindo a objetos matemáticos e neste contexto semelhança não é bem assim.

Claro, eu vou concordar com você. No contexto da Matemática o conceito de semelhança exige **mais** do que a “parecença” da nossa percepção cotidiana.

Estamos, então, nos referindo ao conceito de semelhança em Matemática. Qual é ele?

Quando dois objetos geométricos são semelhantes?

O que significa em matemática ter exatamente a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho?

Quanto a esta última condição, em relação ao tamanho, veja que se duas figuras geométricas, de mesma forma, têm também o mesmo tamanho, elas são congruentes. Para esta situação, por exemplo, nós já estabelecemos sobre que condições dois triângulos são congruentes.

Ou seja, então, as figuras congruentes são semelhantes.

Vamos, então, deter nossa atenção ao caso de semelhança entre figuras de mesma forma, mas com tamanho diferente. Vamos considerar dois exemplos, do cotidiano, de figuras que são semelhantes.

Veja o caso da imagem produzida por uma máquina fotográfica não digital. Sabe-se que o “negativo” tem uma proporção padrão de 2:3, ou seja, o tamanho do “negativo” é de 2 cm x 3 cm. Já os tamanhos de ampliação são padronizados por: 10 x 15 cm, 20 x 30 cm, 30 x 45 cm...

Outro exemplo é a escala utilizada numa “planta baixa” de uma casa. Uma escala de 1:50 significa que se na planta baixa uma parede tem 5 cm de comprimento, então ela terá 2,50 m quando construída.

Observe que, nos dois exemplos, as medidas da fotografia – no negativo e na ampliação – e da parede – na planta baixa e depois de construída – são proporcionais.

### Atividade 5.2

Considere as figuras B, C, D, E e F do Quadro 5.1. Verifique se os lados dos quadrados em B, dos retângulos em D, dos triângulos em C e E, respectivamente, e dos losangos em F, são proporcionais.

Sugestão: Use uma régua para obter as medidas dos referidos lados.

Você deve ter concluído, pela Atividade 5.2, que as figuras em B, C e F têm os lados proporcionais, e aquelas em D e E não têm. Seriam, então, as figuras em B, C e F semelhantes?

Vamos lá! Considere as figuras em F.

Em que pese que elas se parecem pela forma, são losangos, mas com tamanhos diferentes, seriam elas semelhantes?

Olhe para os quadrados em B e os triângulos em C. Nós podemos dizer que eles também têm a mesma forma, mas com tamanhos diferentes. Entretanto, observando com mais atenção a forma deles, veja que podemos dizer “mais” do que isso, se considerarmos os ângulos correspondentes dos losangos. Poderíamos dizer que os quadrados em B e triângulos em C têm **exatamente** a mesma forma.

Este aspecto, do “exatamente a mesma forma”, nós não detectamos nos losangos em F, já que os ângulos correspondentes dos losangos não são iguais.

Dizemos, então, que os losangos em F não são semelhantes e que os quadrados em B e os triângulos retângulos em C são semelhantes.

De fato, para os polígonos, dizer que *dois destes objetos são semelhantes se têm exatamente a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho* é equivalente à seguinte definição:

### Definição 5.1

Dois polígonos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus lados e ângulos de modo que

- os ângulos correspondentes sejam iguais;
- os pares de lados dos ângulos correspondentes sejam proporcionais.

**Atividade 5.3**

- a) Mostre que todos os quadrados são semelhantes.
- b) Mostre que todos os triângulos equiláteros são semelhantes.
- c) Mostre que se dois losangos têm um ângulo igual, então eles são semelhantes.



Voltando às figuras do Quadro 5.1, observe que resta-nos decidir, ainda, sobre a semelhança das circunferências da figura A.

**Atividade 5.4**

Justifique a afirmação:

“Todas as circunferências são semelhantes.”



Voltemos, agora, nossa atenção para a semelhança de triângulos.

Na Atividade 5.3 (b), você mostrou que todos os triângulos equiláteros são semelhantes.

E quando dois triângulos não são equiláteros, como decidir se eles são semelhantes?

Sim, você já deve estar pensando nos “casos” de semelhança de triângulos.

**Atividade 5.5**

Enuncie os três casos de semelhança de triângulos, normalmente conhecidos por AA, LAL e LLL.

Vamos demonstrá-los!

Para tanto, é importante que reescrevamos a Definição 5.1 para o caso particular de os polígonos serem dois triângulos quaisquer.

**Definição 5.2**

Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência entre seus lados e ângulos de modo que:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{D} \\ \hat{B} &= \hat{E} \\ \hat{C} &= \hat{F} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k$$

Observe que se  $k = 1$ , então temos a congruência dos triângulos  $ABC$  e  $DEF$ .



Tendo em vista os casos de semelhança enunciados na Atividade 5.5, observe que nos casos de semelhança de triângulos, assim como nos casos de congruência, temos que, para verificar se dois triângulos são semelhantes, é suficiente verificar apenas três (mas, cuidado, não quaisquer três) das relações indicadas na definição de semelhança de triângulos.

Consideremos, então, o 1º caso de semelhança de triângulos.

### Teorema (caso AA)

Dada uma correspondência  $ABC \leftrightarrow DEF$  entre dois triângulos, se  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ , então os triângulos são semelhantes.

Então, vejamos a veracidade do caso AA de semelhança.

Para tanto, considere a seguinte figura, representando os dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , em que  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ .

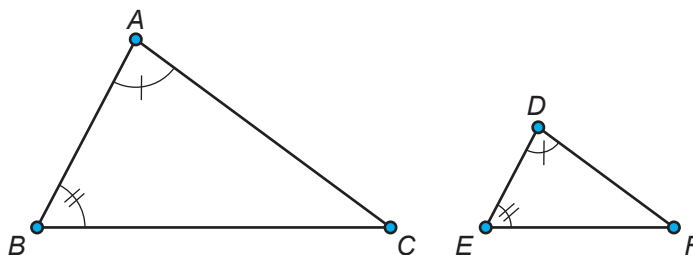


FIGURA 5.1

De imediato, nós podemos concluir que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  e que  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ , então  $\hat{C} = \hat{F}$ .

Ou seja, a condição de congruência entre os ângulos correspondentes dos dois triângulos é verificada.

Devemos, então, mostrar que os lados dos dois triângulos são proporcionais.

Você deve concordar comigo que teremos feito isto se mostrarmos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \text{ e que } \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}. \text{ Certo?}$$

$$\text{Mostremos que } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Faça a seguinte construção:

Sejam  $E'$  e  $F'$  dois pontos de  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, tais que  $AB' = DE$  e  $AF' = DF$ .

Veja na figura seguinte.

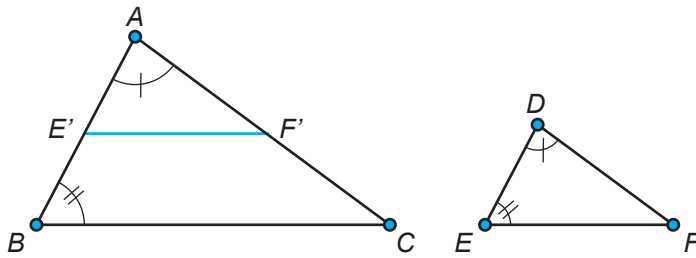


FIGURA 5.2

Então, pelo caso, LAL de congruência de triângulos, temos que  $AE'F' = DEF$ .

Portanto,  $\hat{A}E'F' = \hat{E}$ .

Como temos que  $\hat{B} = \hat{E}$ , podemos concluir que  $\hat{A}E'F' = \hat{B}$ .

Agora, retome a Proposição 3.3 da Aula 3.

Observe, que, desta proposição, podemos concluir que  $E'F'$  e  $BC$  são paralelos.

O que temos obtido até aqui, então?

Veja, temos a seguinte situação: um triângulo  $ABC$  e um segmento de reta  $E'F'$  paralelo à base  $BC$  do triângulo.

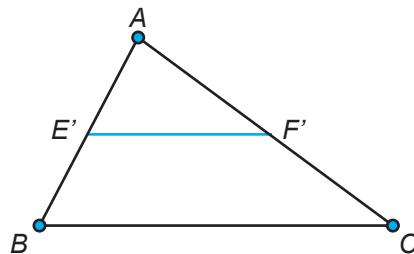


FIGURA 5.3

Parece-nos razoável imaginar que os triângulos  $ABC$  e  $AE'F'$  são semelhantes. De fato, nós já vimos que os ângulos correspondentes são congruentes. No entanto, não é tão simples assim verificar que os pares de lados correspondentes são proporcionais.

De fato, isso é consequência de outro teorema, o Teorema de Tales, envolvendo retas paralelas e duas transversais a elas.

Vamos relembra-lo.

Considere a seguinte figura, na qual estão representadas três retas paralelas,  $r$ ,  $s$  e  $t$ , e duas retas transversais a elas,  $m$  e  $n$ .

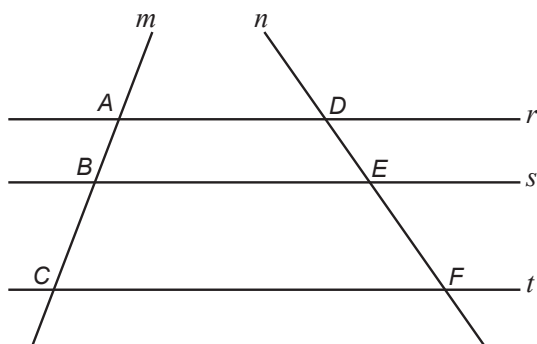


FIGURA 5.4

### Teorema de Tales

Se  $r$ ,  $s$  e  $t$  são retas paralelas e  $m$  e  $n$  são duas transversais a elas, conforme representado na Figura 5.4, então  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ .

Nós voltaremos ao Teorema de Tales, na próxima aula, para demonstrá-lo.

Neste momento, tendo em vista o nosso objetivo da demonstração dos casos de semelhança de triângulos, vamos aceitá-lo como verdadeiro.

Voltando, então, à nossa demonstração do caso AA de semelhança, na Figura 5.2 temos que o segmento  $E'F'$  é paralelo à base  $BC$  do triângulo  $ABC$ .

Temos, portanto, como consequência do Teorema de Tales, que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF'}}$ .

Porém, da congruência dos triângulos  $AE'F'$  e  $DEF$ , temos que  $AE' = DE$  e  $AF' = DF$ .

Logo, podemos concluir que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ .

Falta agora mostrar que  $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ .

### Atividade 5.6

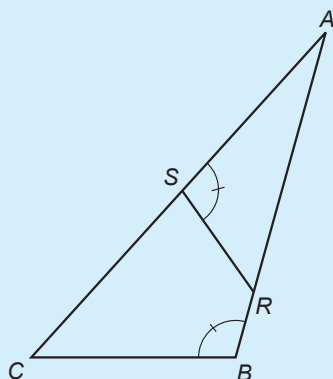
Mostre que  $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ .

Sugestão: Obtenha um segmento  $D'F'$  paralelo ao lado  $AC$  do triângulo  $ABC$  da Figura 5.1 e use o Teorema de Tales.

Considerando a Atividade 5.6, temos, então, que também os pares de lados dos ângulos correspondentes dos triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são proporcionais, como queríamos demonstrar.

**Atividade 5.7**

Na figura,  $\overline{AB} = 10$  cm,  $\overline{BC} = 8$  cm,  $\overline{AC} = 14$  cm e  $\overline{AS} = 5$  cm.



Determine os comprimentos dos lados  $RS$  e  $AR$ .

Vejam os o 2º caso de semelhança de triângulos.

**Teorema (caso LAL)**

Dada uma correspondência  $ABC \leftrightarrow DEF$  entre dois triângulos, se

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$  e  $\hat{A} = \hat{D}$ , então os triângulos são semelhantes.

Considere os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  dados pela figura a seguir.

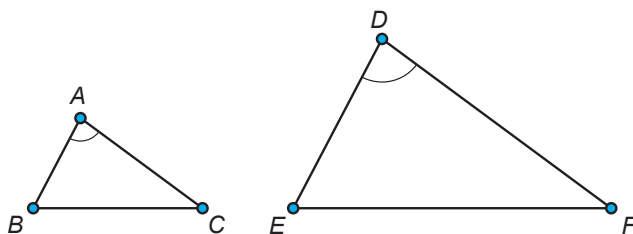


FIGURA 5.5

Faça a seguinte construção:

Construa um triângulo  $HIJ$ , tal que  $HI = DE$ ,  $\hat{H} = \hat{A}$  e  $\hat{I} = \hat{B}$ .

Observe na figura a seguir.

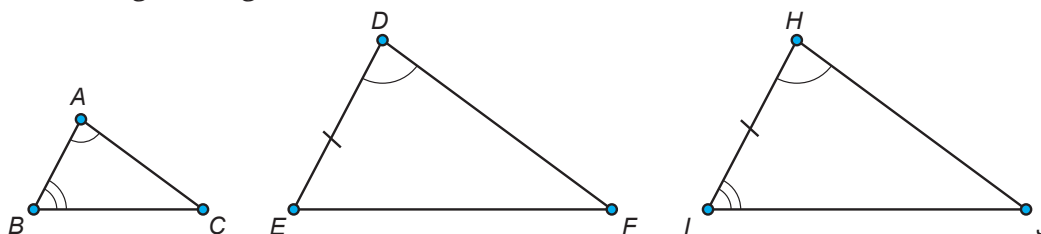


FIGURA 5.6

Observe que, por construção, os triângulos  $ABC$  e  $HIJ$  são semelhantes (caso AA).

$$\text{Logo, } \frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}. \quad (1)$$

Mas, é dado que  $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ , em que, substituindo  $HI = DE$ , obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}. \quad (2)$$

De (1) e (2), temos, então, que  $HJ = DF$ .

Como, por construção,  $HI = DE$  e  $\hat{H} = \hat{A} = \hat{D}$ , concluímos do 1º caso de congruência de triângulos que  $DEF$  e  $HIJ$  são congruentes.

Então,  $DEF$  e  $HIJ$  são semelhantes e, como vimos que  $ABC$  e  $HIJ$  são semelhantes, segue que  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes, como queríamos demonstrar.



Finalizando os casos de semelhança de triângulos, temos o 3º caso.

### **Teorema (caso LLL)**

Dada uma correspondência  $ABC \leftrightarrow DEF$  entre dois triângulos, se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}, \text{ então os triângulos são semelhantes.}$$

### **Atividade 5.8**

Demonstre o caso LLL de semelhança de triângulos.

Sugestão: Siga os seguintes passos:

- 1 - Construa triângulos  $ABC$  e  $DEF$  com  $\overline{AB} > \overline{DE}$ .
- 2 - Marque  $G$  sobre  $AB$ , tal que  $AG = DE$ , e construa  $GH$  paralelo a  $BC$ .
- 3 - Conclua que os triângulos  $ABC$  e  $AGH$  são semelhantes (identifique o caso).
- 4 - Use a semelhança obtida e as informações dadas para obter que  $AH = DF$  e que  $GH = EF$ .
- 5 - Conclua a semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ .



### **Notação**

Usaremos a notação  $ABC \sim DEF$  para identificar que dois triângulos,  $ABC$  e  $DEF$ , são semelhantes, com a correspondência de  $A$  com  $D$ ,  $B$  com  $E$  e  $C$  com  $F$ .

Agora, retomemos a questão de que não são quaisquer três das relações indicadas na definição de semelhança de triângulos que, verificadas, são suficientes para garantir a semelhança de dois triângulos.

Retome o Exercício 2(c) da Aula 4.

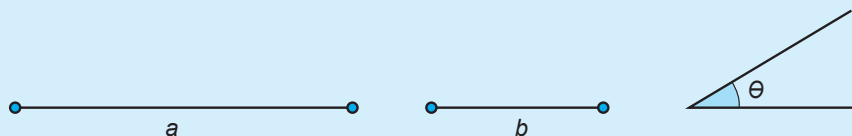
Você deve ter concluído que, com as informações dadas, ângulo-lado-lado, constroem-se dois triângulos, que não são semelhantes. Mais do que isso, o referido exercício mostra, então, que ALL não é caso de semelhança de triângulos.

Portanto, você pode concluir que eles não são semelhantes.

Veja, na atividade que se segue, uma situação mais geral.

### Atividade 5.9

a) Construa o triângulo  $ABC$  sendo dados  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$  e  $m(\hat{A}) = \theta$ , pelas figuras



Sugestão:

Usando régua, compasso e transferidor, primeiro trace uma reta e sobre ela construa, usando compasso, um segmento  $AB$  de medida  $a$ .

Construa, com vértice em  $A$ , usando o transferidor, um ângulo com medida  $\theta$ .

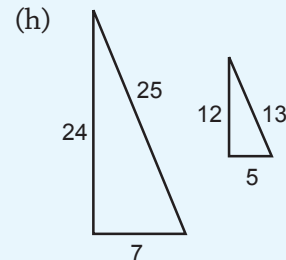
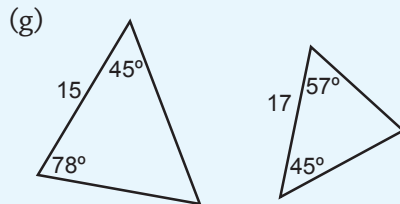
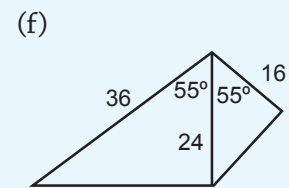
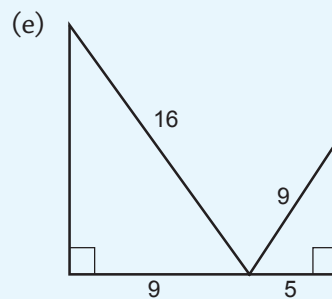
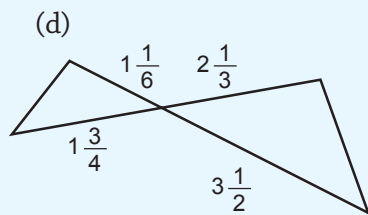
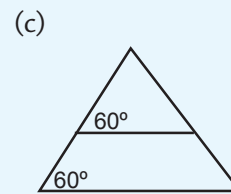
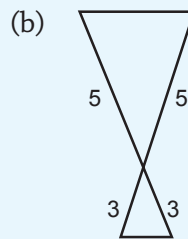
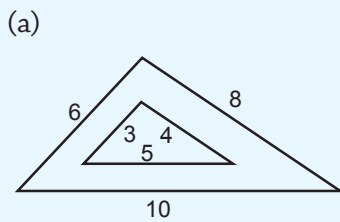
Com centro em  $B$  e raio igual à medida  $b$ , trace um arco de círculo interceptando o outro lado do ângulo  $\theta$  construído.

Conclua a atividade.

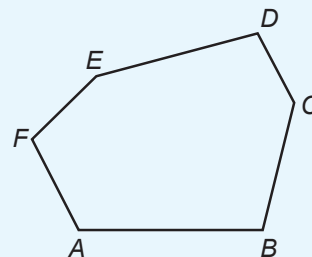
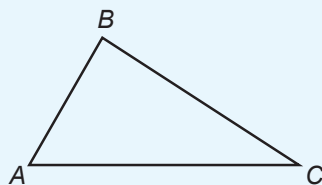
- b) Quantos triângulos podem ser construídos com as medidas dadas? O que podemos dizer sobre a semelhança desses triângulos?
- c) E se a medida do lado  $BC$  fosse  $b = 1$  cm, a que conclusões você chegaria?
- d) Refaça a construção proposta em (a), usando apenas régua e compasso.

## AUTOAVALIAÇÃO

1. Para cada par de triângulos, indique se são semelhantes ou não, justificando sua conclusão usando a definição ou os casos de semelhança de triângulos.



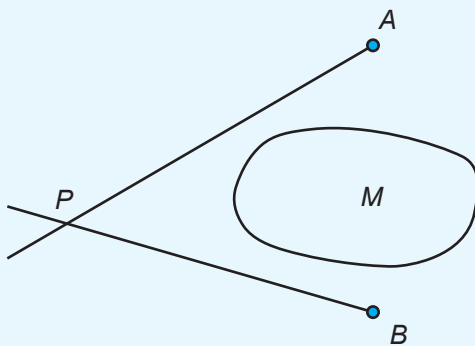
2. Considere as figuras a seguir.



Construa, com régua e compasso:

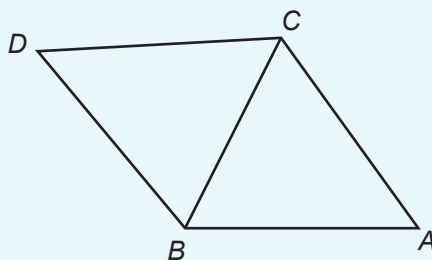
- um triângulo semelhante a  $ABC$ , com razão de semelhança 2.
- um hexágono, não semelhante ao  $ABCDEF$ , com os mesmos ângulos que ele.

3. Na figura a seguir, a região identificada por  $M$  representa um lago.



Descreva um processo pelo qual será possível medir a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , sabendo-se que qualquer medição fora do lago é possível.

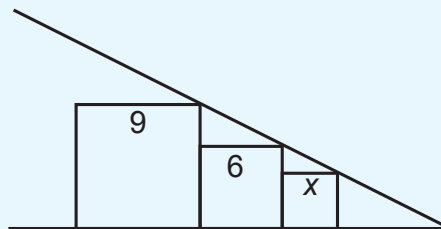
4. Na figura a seguir, tem-se que  $\hat{A} = \hat{D}\hat{B}C$ ,  $\hat{D} = \hat{A}\hat{B}C$  e  $\hat{A}\hat{C}B = \hat{D}\hat{A}C$ .



Pode-se afirmar que  $ABC = DBC$ , ou que  $ABC \sim DBC$ ? Justifique sua resposta.

5. Na figura ao lado, estão desenhados quadrados de lados 9, 6 e  $x$ , todos inscritos em um dado ângulo.

Determine o valor de  $x$ .





## Dois Teoremas: Pitágoras e Tales

### OBJETIVOS

Demonstrar o Teorema de Pitágoras.  
Obter as relações métricas em um triângulo qualquer.  
Compreender e demonstrar o Teorema de Tales.

### O TEOREMA DE PITÁGORAS

Acredito que não seja nenhuma novidade para você que o Teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais importantes da Geometria Plana. Não raro o aplicamos na resolução de problemas, a exemplo do que fizemos naqueles apresentados nas Aulas 1 e 2.

De fato, veja o seguinte problema enunciado pelos chineses em 2600 a.C., ou seja, um problema que tem mais de 4.500 anos!

“Um bambu de 32 côvados,<sup>1</sup> erguendo-se verticalmente sobre um terreno horizontal, é quebrado num certo ponto pela força do vento. Sua extremidade vem tocar a terra a 16 côvados do seu pé. Dize, matemático, a quantos côvados do pé ele se quebrou?”<sup>2</sup>

Ora, identificando por  $x$  a distância do pé do bambu ao ponto em que se quebrou e por  $a$  a parte inclinada que tocou a terra, você pode construir um triângulo retângulo representando a situação colocada. A hipotenusa será  $a$  e os catetos  $x$  e aquele de 16 côvados.

#### Atividade 6.1

Resolva o problema acima apresentado.

<sup>1</sup> Côvado [Do lat. *cubitu.*]. Antiga unidade de medida de comprimento equivalente a três palmos, ou seja, 66 cm. (cf. Dicionário Aurélio).

<sup>2</sup> “Um problema que tem mais de 4.500 anos”, publicado em 1966 como parte integrante da coleção Cadernos MEC – Matemática, apresentada pela Campanha Nacional de Material de Ensino (TAVARES; JUNQUEIRA; BEZERRA, 1996).

Nós utilizaremos a semelhança de triângulos, cujos casos vimos na última aula, para deduzir o Teorema de Pitágoras, como também várias outras relações entre os elementos de um triângulo retângulo.

Seja  $ABC$  um triângulo retângulo, com o ângulo reto em  $A$ , como apresentado na figura a seguir.

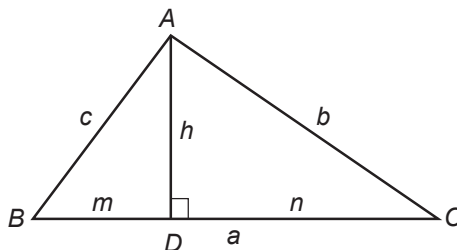


FIGURA 6.1

Conforme indicado na Figura 6.1, temos as medidas dos segmentos dadas por:  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{BD} = m$ ,  $\overline{DC} = n$  e  $\overline{AD} = h$ , em que  $AD$  é a altura relativa ao lado  $BC$ .

### Atividade 6.2

Considerando o triângulo retângulo  $ABC$ , conforme dado na Figura 6.1, mostre que

- $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$  e conclua que  $h^2 = mn$ .
- $\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$  e conclua que  $c^2 = am$ .
- $\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$  e conclua que  $b^2 = an$ .

Sugestão: Identifique triângulos semelhantes.

Da Atividade 6.2, observe que de (b) e de (c) temos

$$b^2 + c^2 = an + am = a(m + n)$$

Como  $m + n = a$ , segue, então, que

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

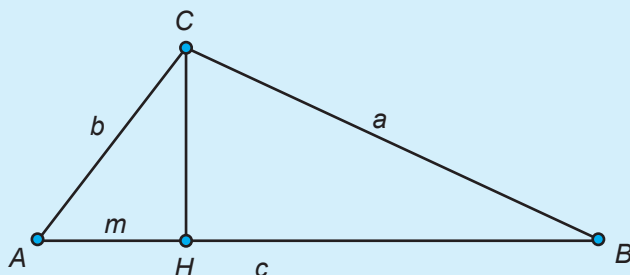
Temos provado, portanto, o “nosso” teorema.

### Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

**Atividade 6.3**

Considere o seguinte triângulo  $ABC$ , em que  $\hat{A}$  é um ângulo agudo e  $CH$  é a altura relativa ao lado  $AB$ , de medida  $c$ .



a) Mostre que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

b) Mostre que esta relação é equivalente a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

(Lei dos cossenos)

Sugestão:

Em (a) identifique triângulos retângulos e use o Teorema de Pitágoras.

Em (b) retome as relações trigonométricas em um triângulo retângulo.



## O TEOREMA DE TALES

Na Aula 5, para demonstrarmos os casos de semelhança de triângulos utilizamos, sem demonstrar, o Teorema de Tales, outro teorema muito importante da Geometria Plana.

**Teorema de Tales**

Se  $r$ ,  $s$  e  $t$  são retas paralelas, e  $m$  e  $n$  são duas transversais a elas, conforme representado na figura,

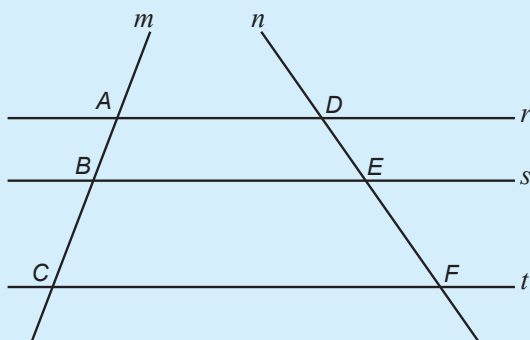


FIGURA 6.2

então,  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ .

Nosso objetivo agora é demonstrá-lo.

Antes, porém, faça a seguinte atividade sobre paralelogramos.

Lembre-se de que um paralelogramo é um quadrilátero no qual os pares de lados opostos são paralelos.

**Atividade 6.4**

Considere um paralelogramo  $ABCD$ . Mostre que:

- Cada diagonal de  $ABCD$  decompõe o paralelogramo em dois triângulos congruentes.
- Conclua que quaisquer dois lados opostos de  $ABCD$  são congruentes.



Considere, agora, três retas paralelas,  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , determinando sobre uma transversal  $t_1$  segmentos congruentes.

Veja na figura a seguir.

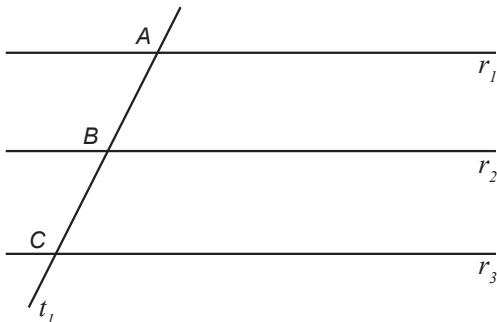


FIGURA 6.3

Temos dado, então, que  $AB = BC$ .

Seja  $t_2$  outra transversal a  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , mas paralela a  $t_1$ .

Considere os segmentos determinados pelas retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  sobre  $t_2$ , como mostrado na figura a seguir.

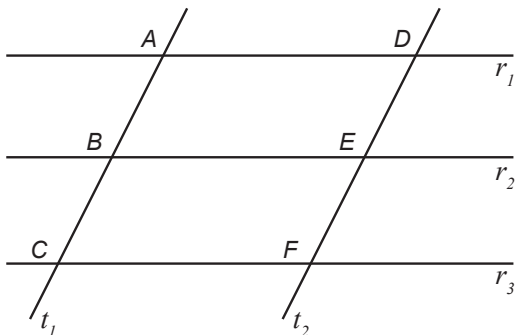


FIGURA 6.4

Observe que  $ABED$  e  $BCFE$  são paralelogramos.

Pela Atividade 6.4, temos que  $AB = DE$  e  $BC = EF$ .

Mas, temos dado que  $AB = BC$ .

Portanto,  $DE = EF$ , ou seja, os segmentos determinados pelas retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  sobre  $t_2$ , também são congruentes.

Temos então mostrado o seguinte resultado.

### Teorema 6.1

Se três retas paralelas determinam sobre uma transversal  $t_1$  segmentos congruentes, então determinam segmentos congruentes em qualquer transversal  $t_2$  paralela a  $t_1$ .



Em um contexto análogo ao colocado no Teorema 6.1, se a transversal  $t_2$  não fosse paralela à transversal  $t_1$ , o que poderíamos afirmar sobre os segmentos determinados pelas retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  sobre  $t_2$ ?

Veja na figura.

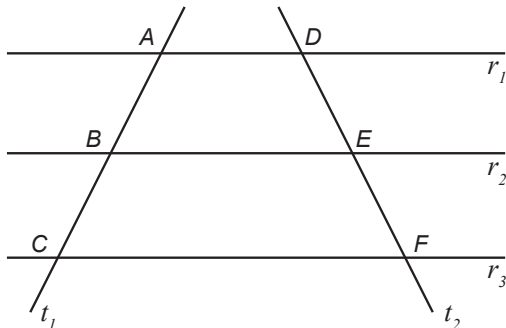


FIGURA 6.5

Façamos a seguinte construção.

Trace por  $A$  e por  $B$ , respectivamente, retas  $t_3$  e  $t_4$ , paralelas a  $t_2$ .

Você obterá uma figura como a apresentada a seguir.

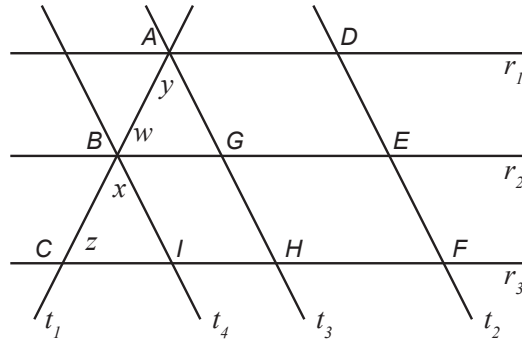


FIGURA 6.6

Você pode verificar que os ângulos identificados na figura por  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  são tais que

$$x = y \text{ e } z = w.$$

### Atividade 6.5

Considere a Figura 6.6.

- Mostre que  $x = y$  e  $z = w$ .
- Conclua que os triângulos  $ABG$  e  $BCI$  são congruentes.

Segue, da Atividade 6.5 (b), que  $AG = BI$ .

Mas, por outro lado, como  $BIHG$  é um paralelogramo, da Atividade 6.3 (b) temos que  $BI = GH$ .

Logo, temos  $AG = GH$ .

Como as retas  $t_2$  e  $t_3$  são paralelas, segue do Teorema 6.1 que  $DE = EF$ .

Ou seja, podemos concluir o seguinte resultado:

### Teorema 6.2

Se três retas paralelas determinam sobre uma transversal  $t_1$  segmentos congruentes, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.



Nós podemos reescrever o Teorema 6.2 para obter que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = 1$ ,

em que  $AB$  e  $BC$  são os segmentos congruentes determinados pela transversal  $t_1$ , e  $DE$  e  $EF$ , aqueles determinados pela transversal  $t_2$ .

Observe que a diferença crucial entre o Teorema de Tales e o que acabamos de demonstrar é que neste último as três retas paralelas determinam segmentos **congruentes** sobre a transversal  $t_1$ .

Portanto, vamos à pergunta:

E se os segmentos  $AB$  e  $BC$  não forem congruentes?

### Atividade 6.6

Mostre que

a) se  $\overline{AB} = 2 \overline{BC}$ , então  $\overline{DE} = 2 \overline{EF}$ .

b) se  $5 \overline{AB} = 3 \overline{BC}$ , então  $5 \overline{DE} = 3 \overline{EF}$ .

Sugestão:

Para (b), considere um segmento de comprimento  $u$  tal que  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  sejam múltiplos dele, ou seja,  $\overline{AB} = p \cdot u$  e  $\overline{BC} = q \cdot u$ , com  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq q$  e  $q \neq 0$ . Trace paralelas pelos pontos de subdivisão de  $AB$  e  $BC$  para, então, usar o Teorema 6.2.

Observe que, desta última atividade, obtemos o seguinte resultado:

Sejam  $r, s$  e  $t$  retas paralelas, e  $m$  e  $n$  duas transversais a elas, conforme representado na Figura 6.2.

Se  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$ , **em que  $k$  é um número racional**, então, também temos

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = k.$$

Veja que, com este resultado, ampliamos a afirmação contida no

Teorema 6.2 de segmentos  $AB$  e  $CD$  tais que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$  para aqueles tais que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$ , em que  $k$  é um número racional.

No entanto, se  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  não é racional, não existirá nenhum segmento que

esteja contido um número inteiro  $p$  de vezes em  $AB$  e um número inteiro  $q$  de vezes em  $BC$  ( $AB$  e  $BC$  são incomensuráveis). Assim, a

demonstração dada não se aplica para o caso em que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  não é racional.

A demonstração do Teorema de Tales, para este caso, é bem mais elaborada e nós não a faremos aqui.<sup>2</sup>

Agora, considere o problema de dividir em partes iguais um segmento  $AB$  dado, usando régua e compasso.

<sup>2</sup>Veja, por exemplo, TINOCO, 1999, p. 42-45.

**Atividade 6.7**

Dado um segmento  $AB$  dividi-lo em cinco partes iguais.

Roteiro:

1- Trace o segmento  $AB$  dado.

2- Pelo ponto  $A$  trace uma semirreta  $AC$ , formando um ângulo,  $B\hat{A}C$ , com o segmento  $AB$ .

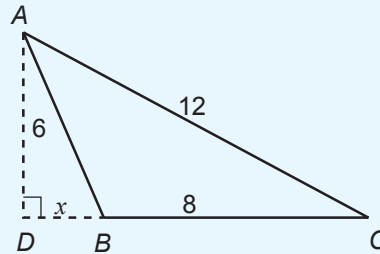
3- Com um compasso, construa sobre  $AC$  segmentos de mesmo comprimento  $AC_1$ ,  $C_1C_2$ ,  $C_2C_3$ ,  $C_3C_4$  e  $C_4C_5$ .

4- Trace a reta  $BC_5$  e, então, retas paralelas a  $BC_5$  passando por  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  que interceptarão  $AB$  nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ .

5- Conclua, usando o Teorema de Tales, que os segmentos obtidos em  $AB$  são congruentes.

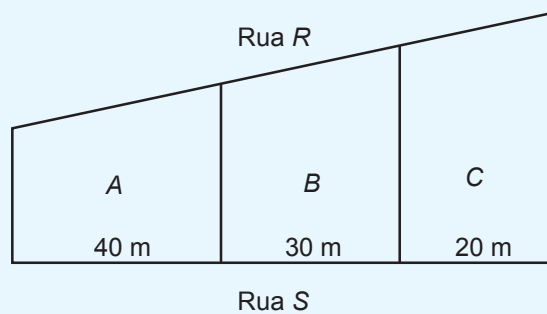
## AUTOAVALIAÇÃO

1. Uma escada de 2,5 m de altura está apoiada numa parede, e seu pé dista 1,5 m da parede. Determine a altura que a escada atinge na parede, nestas condições.



2. Na figura ao lado, calcular o valor de  $x$ .

3. Três terrenos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , se estendem desde a Rua  $R$  até a Rua  $S$ , como mostra a figura abaixo.



As divisas laterais dos terrenos são perpendiculares à Rua  $S$ . Se a frente total dos terrenos, na Rua  $R$ , mede 120 m, determine a medida da frente de cada um dos terrenos.

4. Determine a medida do menor lado de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 162 cm e o menor ângulo mede  $30^\circ$ .

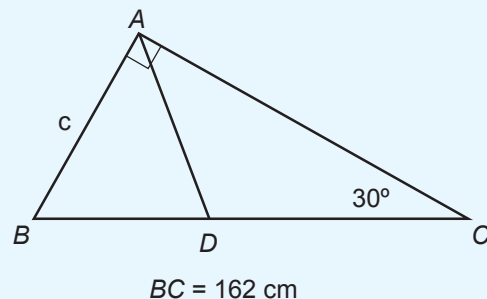
Sugestão: Faça a seguinte construção.

- Desenhe um triângulo retângulo com ângulo reto em  $A$ , conforme mostrado na figura.

- Trace um segmento  $AD$ , dividindo o ângulo em  $A$  em dois ângulos de modo que  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ .

- Conclua que o triângulo  $BAD$  é equilátero e que, portanto, o triângulo  $ADC$  é isósceles.

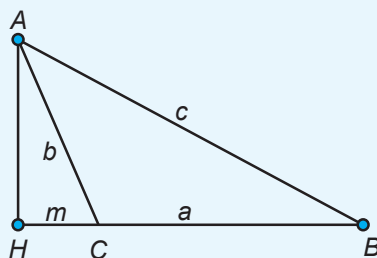
- Obtenha o valor de  $c$ .



5. Dados três segmentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , determinar o segmento  $x$  tal que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ .

Sugestão: Obtenha  $x$  por construção com régua e compasso.

6. Considere o seguinte triângulo  $ABC$ , em que  $\hat{C}$  é um ângulo obtuso e  $AH$  é a altura relativa ao lado  $BC$ , de medida  $a$ .



a) Estabeleça a relação que dá o quadrado de  $c$  em função de  $a$ ,  $b$  e  $m$ .

b) Mostre que a relação obtida em (a) é equivalente a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{C}$$

(Lei dos cossenos)

## Circunferência

### OBJETIVOS

Compreender os resultados referentes a circunferência que foram utilizados na resolução de problemas apresentados nas Aulas 1 e 2.  
Demonstrar alguns resultados sobre circunferência.

Na resolução de alguns problemas apresentados nas Aulas 1 e 2, utilizamos resultados envolvendo os elementos de uma circunferência. Entre eles estavam as relações entre arcos e ângulos de uma circunferência.

Iniciamos nossa aula, então, obtendo estas relações. Para tanto, é importante que relembremos o significado dos elementos nelas envolvidos.

Assim, consideremos uma circunferência de centro  $O$  e dois pontos  $A$  e  $B$ , distintos, sobre ela. Por  $A$  e  $B$  tracemos uma reta, a qual, então, divide o plano em dois semiplanos, cada um contendo uma parte da circunferência. Chamamos a cada uma dessas partes da circunferência de arcos determinados pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Veja na figura.

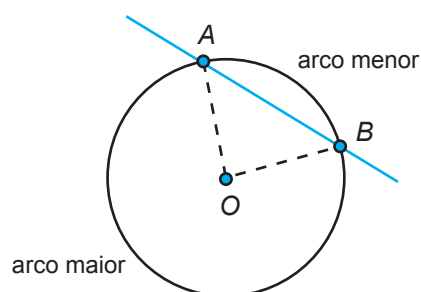


FIGURA 7.1

Observe que, se  $A$  e  $B$  são extremos de um diâmetro da circunferência, temos por arcos o que denominamos semicircunferências.

Se  $AB$  é uma corda distinta de um diâmetro, discriminamos os arcos determinados por  $A$  e  $B$ , como arco maior e arco menor, conforme identificados na Figura 7.1.

Por convenção, vamos chamar de arco  $AB$  ao menor dos arcos determinados por  $A$  e  $B$ .

Você deve se lembrar que, sendo  $O$  o centro da circunferência, chamamos o ângulo  $A\hat{O}B$ , ou seja, o ângulo com vértice no centro  $O$  e cujos lados são os raios  $AO$  e  $OB$  da circunferência, de ângulo central.

Nesta altura, devemos deixar clara a diferença entre a “medida de um arco de circunferência” e a “medida do comprimento de um arco de circunferência”. Esta última está relacionada com o comprimento da circunferência.

Entretanto, para a medida de um arco de circunferência temos a seguinte definição:

### Definição 7.1

A medida de um arco  $AB$  de uma circunferência de centro  $O$  é a medida, em graus, do ângulo central  $A\hat{O}B$ .

Observe que a medida de um arco  $AB$  de uma circunferência independe do raio desta. Assim, por exemplo, em duas circunferências concêntricas,  $C_1$  e  $C_2$ , se  $\theta$  é um ângulo central, temos os arcos correspondentes  $AB$  e  $CD$ , em  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, com a mesma medida,  $\theta$ .

A Figura 7.2, a seguir, representa este exemplo.

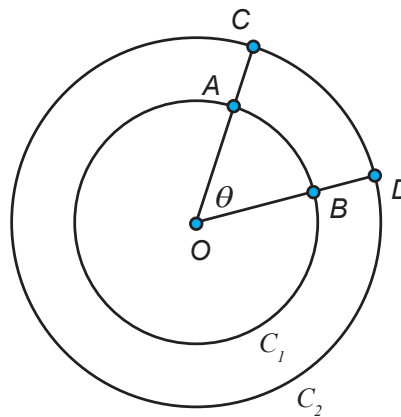


FIGURA 7.2

Veja, você vai concordar que as medidas dos comprimentos dos arcos  $AB$  e  $CD$  na Figura 7.2 são diferentes! Lembre-se, estas medidas dependem do raio da circunferência.

Continuando a falar de ângulos em uma circunferência, nos problemas resolvidos nas Aulas 1 e 2, havia aqueles que envolviam ângulos inscritos numa circunferência.

### Definição 7.2

Dizemos que um ângulo  $B\hat{A}C$  é inscrito em uma circunferência se seu vértice  $A$  é um ponto da circunferência e seus lados cortam a circunferência em dois pontos,  $B$  e  $C$ , distintos de  $A$ .

Na Figura 7.3 temos alguns exemplos de ângulos inscritos em uma circunferência.

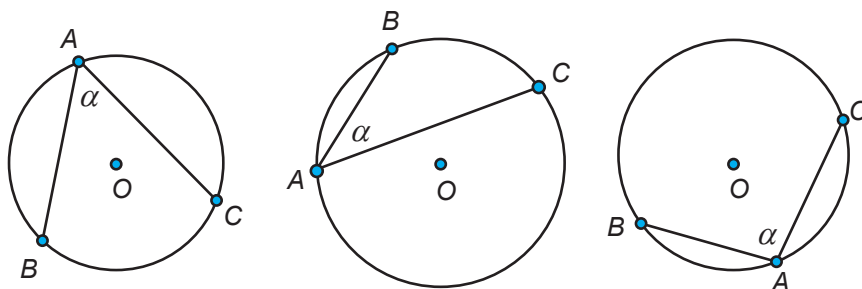


FIGURA 7.3

Observe, na Figura 7.3, que os pontos  $B$  e  $C$  determinam dois arcos sobre a circunferência.

Chamamos o arco  $BC$ , que não contém o vértice  $A$  do ângulo inscrito  $B\hat{A}C$ , de arco correspondente ao ângulo inscrito.

Por outro lado, vimos que, por definição, a medida de um arco  $BC$  é a medida do ângulo central  $B\hat{O}C$ .

Então, é razoável imaginarmos que seja possível alguma relação entre um ângulo  $\alpha$ , inscrito em uma circunferência, e o ângulo central  $\theta$  correspondente (via o arco correspondente ao ângulo inscrito).

Observe a Figura 7.4 a seguir.

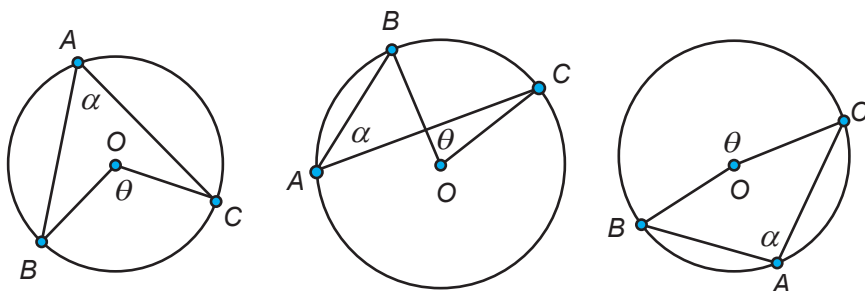


FIGURA 7.4

Vejam, inicialmente, a situação particular em que um dos lados do ângulo inscrito é diâmetro da circunferência.

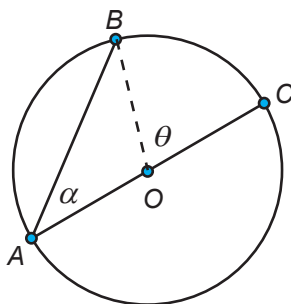


FIGURA 7.5

Observando a Figura 7.5, temos que o triângulo  $AOB$  é isósceles, já que  $AO = OB$ , raios da circunferência.

Temos, então,  $\hat{A}BO = \hat{B}AO$ , tendo por medida  $\alpha$ .

Como  $\theta$  é a medida do ângulo externo do triângulo  $AOB$ , já vimos que  $\theta = \alpha + \alpha$ .

Ou seja,  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ , em que  $\theta$  é a medida do arco correspondente ao ângulo inscrito  $B\hat{A}C$ .



Muito bom, mas e se um dos lados do ângulo inscrito não for um diâmetro?

Já sabemos que, também nesse caso, a mesma relação entre  $\theta$  e  $\alpha$  é válida, pois a usamos para resolver os problemas das Aulas 1 e 2.

### Atividade 7.1

Considere um ângulo  $B\hat{A}C$  inscrito em uma circunferência cujo centro está no interior do referido ângulo.

Mostre que a medida de  $B\hat{A}C$  tem a metade da medida do arco correspondente.

Sugestão: Trace o diâmetro pelo vértice de  $B\hat{A}C$  para obter dois ângulos inscritos na circunferência em que um dos lados é diâmetro da circunferência.



Suponhamos, então, agora a situação em que o centro da circunferência é exterior a um ângulo nela inscrito.

A Figura 7.6, a seguir, mostra que nesta situação temos dois casos.

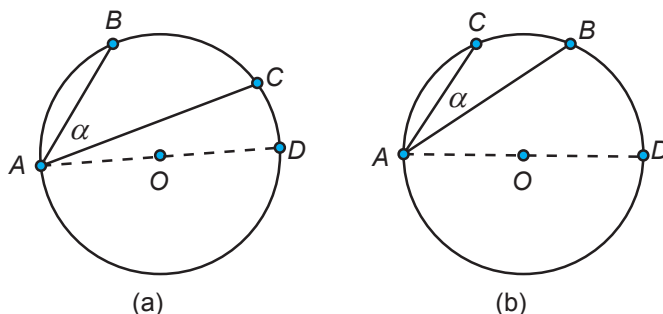


FIGURA 7.6

Vejam os casos apresentados em (a) e (b), na Figura 7.6.

Observe que já temos traçado o diâmetro  $AD$ , pelo vértice do ângulo inscrito  $B\hat{A}C$ .

Você também pode observar que podemos escrever a seguinte relação entre os ângulos  $B\hat{A}C$ ,  $B\hat{A}D$  e  $C\hat{A}D$ , todos eles ângulos inscritos na circunferência:

$$B\hat{A}C = B\hat{A}D - C\hat{A}D.$$

Sejam  $\beta$  a medida do ângulo inscrito  $C\hat{A}D$ ,  $u$  a medida do arco  $BC$  e  $v$  a medida do arco  $CD$ .

Do que vimos acima, como o ângulo  $B\hat{A}D$  tem um diâmetro da circunferência como um de seus lados, temos que  $\alpha + \beta$  é a metade da medida do arco  $BD$ , ou seja,

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}(u + v).$$

Mas, certifique-se,  $\beta = \frac{1}{2}v$ .

Logo,  $\alpha = \frac{1}{2}u$ , ou seja, a medida do ângulo inscrito  $B\hat{A}C$  é a metade da medida de seu arco correspondente.

De modo análogo, você pode mostrar o resultado para um ângulo inscrito como o apresentado em (b), na Figura 7.6.

### Atividade 7.2

Mostre que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida de seu arco correspondente, para o caso (b) apresentado na Figura 7.6.

Temos então demonstrado o seguinte teorema:

### Teorema 7.1

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida de seu arco correspondente.

A Atividade seguinte decorre de imediato deste teorema e contém dois resultados importantes envolvendo arcos de uma circunferência.

### Atividade 7.3

Mostre que

- todo ângulo inscrito subtendendo uma semicircunferência é um ângulo reto.
- dois ângulos quaisquer inscritos que compreendem os mesmos arcos correspondentes são congruentes.



Outros resultados, utilizados na resolução dos problemas propostos nas Aulas 1 e 2, envolviam secantes e tangentes a uma circunferência.

Sabemos que as posições relativas entre uma reta e uma circunferência são: a reta não intercepta a circunferência ou intercepta em no máximo dois pontos.

No caso da reta ter um único ponto  $P$  de contato com a circunferência, dizemos que a reta é tangente à circunferência e que  $P$  é o ponto de tangência.

Se a interseção da reta com a circunferência se fizer em dois pontos, dizemos que a reta é secante à circunferência.

Observe que no caso da reta tangente, qualquer outro ponto da reta, distinto de  $P$ , é exterior à circunferência. De fato, se  $Q$  é outro ponto da reta tangente, então a distância de  $Q$  ao centro da circunferência é maior que a medida de  $OP$ , raio da circunferência.

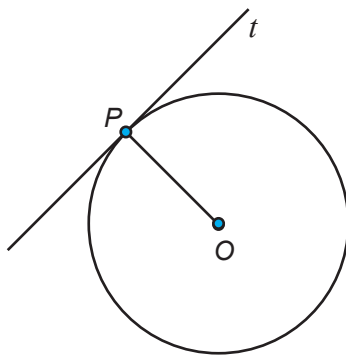


FIGURA 7.7

Um resultado envolvendo tangente a uma circunferência, e que é muito usado, é dado pelo seguinte teorema:

### Teorema 7.2

Se uma reta é tangente a uma circunferência, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.

Para demonstrar esse resultado, faça a seguinte construção.

Trace uma circunferência de centro  $O$  e uma reta  $t$  tangente a ela por um ponto  $P$  pertencente a ela. Ou seja,  $P$  pertence à reta  $t$  e também à circunferência.

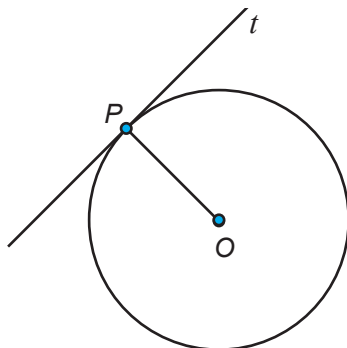


FIGURA 7.8

Suponha que  $t$  não fosse perpendicular ao raio  $OP$ .

Ora, sabemos que por um ponto fora de uma reta traça-se uma única perpendicular a ela.

Então, se a reta  $t$  não é perpendicular ao raio  $OP$ , podemos considerar que existe uma reta perpendicular baixada do ponto  $O$  à reta  $t$ , cujo pé é um ponto  $Q$  diferente de  $P$ .

Assim, na figura, vamos traçar um segmento do ponto  $O$  até a reta  $t$  supondo ser o segmento perpendicular a  $t$  e identificando por  $Q$  o pé dessa perpendicular em  $t$ .

Obtemos, dessa forma, a seguinte figura:

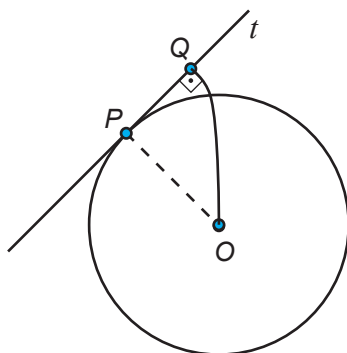


FIGURA 7.9

Você deve observar que, dessa construção, temos que  $OP$  é a hipotenusa do triângulo  $OQP$ .

Logo, o segmento  $OQ$  (cateto) é menor que o segmento  $OP$  (hipotenusa), que por sua vez é o raio da circunferência.

Portanto, concluímos que  $Q$  é um ponto do interior da circunferência.

Veja, se  $P$  é ponto da circunferência e  $Q$  um ponto interior à circunferência, é razoável imaginarmos que a reta que passa por  $P$  e  $Q$  interceptaria a circunferência em outro ponto diferente de  $P$ .

Verifiquemos isto.

Para tanto, tome na reta  $t$  um ponto  $P'$  tal que  $QP = QP'$ .

Temos, então, dois triângulos retângulos,  $OQP$  e  $OQP'$ .

Como eles têm o lado  $OQ$  em comum, segue, do caso LAL de congruência, que

$$OQP = OQP'.$$

Logo,  $OP' = OP$ , que é o raio da circunferência, ou seja,  $P'$  também está na circunferência.

Assim, obtemos dois pontos distintos,  $P$  e  $P'$ , na reta  $t$  e pertencentes à circunferência.

Segue daí, que a reta  $t$  é secante à circunferência, uma contradição!

Observe que a contradição foi obtida ao supormos que a reta  $t$  tangente à circunferência por  $P$  não fosse perpendicular ao raio  $OP$ .

Então, podemos afirmar que se uma reta é tangente a uma circunferência, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência. E temos mostrado o teorema.



Pode-se ainda mostrar que se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente à circunferência.<sup>1</sup>

Consideramos extremidade de um raio a sua extremidade que não é o centro da circunferência.

Faça, agora, a seguinte atividade:

#### Atividade 7.4

Por um ponto  $P$  externo a uma circunferência trace  $PA$  e  $PB$  tangentes à circunferência em  $A$  e  $B$ , respectivamente. Mostre que:

a) a medida do ângulo  $\hat{A}PB$  é igual a  $180^\circ$  menos a medida do arco  $AB$ .

b)  $PA = PB$ .



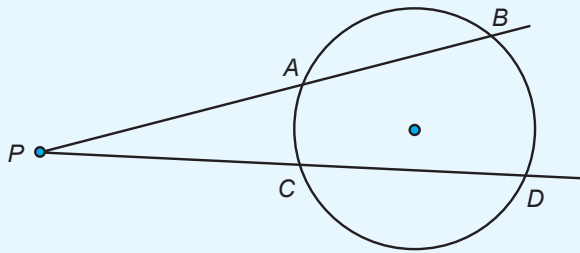
<sup>1</sup> Ver uma demonstração em BARBOSA (1994).

## AUTOAVALIAÇÃO

1. Construa, usando régua e compasso, um triângulo retângulo cuja hipotenusa é dada. É este triângulo único? Justifique sua resposta.

2. Sejam  $AB$  e  $CD$  cordas distintas de uma mesma circunferência, que se interceptam num ponto  $P$ . Mostre que  $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$ .

3. Considere a seguinte figura.



a) Se a medida do arco  $BD$  é  $70^\circ$  e a do arco  $AC$  é  $30^\circ$ , calcule a medida do ângulo em  $P$ .

b) Se a medida do arco  $BD$  é  $126^\circ$  e a do arco  $AC$  é  $18^\circ$ , calcule a medida do ângulo em  $P$ .

c) Se a medida do arco  $AC$  é  $50^\circ$  e a do ângulo em  $P$  é  $22^\circ$ , determine a medida do arco  $BD$ .

4. Considere a figura do exercício 3.

Mostre que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ .

Sugestão: Trace os segmentos  $AD$  e  $BC$  e mostre que os triângulos  $PCB$  e  $PAD$  são semelhantes.

5. Dada uma circunferência, construa, usando régua e compasso,

a) a tangente à circunferência, por um ponto  $P$  pertencente a ela.

b) as tangentes à circunferência, por um ponto exterior a ela.

6. Dizemos que um polígono está inscrito em uma circunferência se seus vértices pertencem à circunferência.

Considere, então, um triângulo equilátero de lado  $AB$  inscrito em uma circunferência de centro  $O$ . Por  $A$  e  $B$  trace duas tangentes à circunferência que se cortam em um ponto  $M$ . Calcule o ângulo  $\hat{A}MB$ .

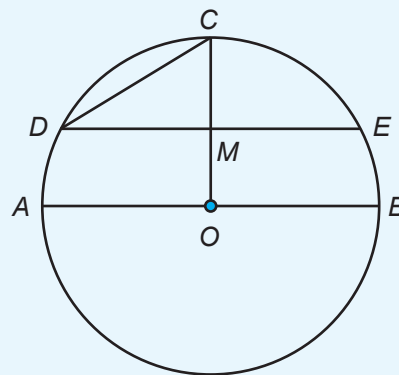
7. Mostre que todo triângulo está inscrito em uma circunferência.

Sugestão: Considere um triângulo  $ABC$  e faça a seguinte construção:

- Trace as mediatrizes,  $m$  e  $n$ , dos lados  $AB$  e  $BC$ , respectivamente, e obtenha o ponto  $P$  de interseção de  $m$  e  $n$ .
- Considere que todo ponto de  $m$  é equidistante de  $A$  e  $B$  e que todo ponto de  $n$  é equidistante de  $B$  e  $C$ , para concluir que  $P$  é um ponto equidistante dos três vértices do triângulo.
- Trace a circunferência de centro  $P$  e raio de medida igual a de  $PA = PB = PC$ .

8. Na figura, apresentada ao lado, temos uma circunferência na qual

- a corda  $DE$  é paralela ao diâmetro  $AB$
- $M$  é ponto médio de  $OC$
- $OC \perp AB$
- $\overline{DE} = 12$



Determine a medida de  $DC$ .

# AULA 8

## Lugares geométricos

### OBJETIVOS

Definir e compreender lugar geométrico.  
Construir alguns lugares geométricos.

Começamos nossa aula retomando a resolução do Problema 5 apresentado na Aula 2.

O objetivo do referido problema foi traçar a mediatriz de um segmento  $AB$ .

Para um melhor aproveitamento do que você vai ler a seguir, volte à Aula 2 e releia a construção lá realizada para obtermos a mediatriz de  $AB$ .

Então, continuemos!

Uma pergunta que você deve ter se feito, ou que é importante que se faça em relação à referida construção, é “Por que usamos as duas circunferências para obter a mediatriz?”

Ora, na Aula 2, após o término da construção da solução do problema – você deve ter revisto lá – mostramos que

*A mediatriz de um segmento é o **lugar geométrico** dos pontos que equidistam de suas extremidades.*

Tendo em vista esse resultado, você pode observar que o passo inicial para a construção da mediatriz foi realizado usando da propriedade que a caracteriza como lugar geométrico.

Veja!

Como dois pontos determinam uma reta, a ideia foi inicialmente obter dois pontos,  $P$  e  $Q$ , com a referida propriedade da mediatriz, qual seja, equidistantes de  $A$  e  $B$ .

Melhor dizendo,  $P$  teria que ser um ponto cujas distâncias a  $A$  e a  $B$ , respectivamente, seriam iguais. E o mesmo teria que ocorrer para o ponto  $Q$ , ou seja, as distâncias de  $Q$  a  $A$  e a  $B$ , respectivamente, teriam que ser iguais.

Reescrevendo,  $P$  e  $Q$  deveriam ser pontos tais que  $\overline{PA} = \overline{PB}$  e  $\overline{QA} = \overline{QB}$ .

Ora, então, se considerássemos, por exemplo, o ponto  $A$ , queríamos obter pontos que teriam uma mesma distância de  $A$ .

Como sabemos que os pontos de uma circunferência com centro  $A$  são equidistantes de  $A$ , você deve concordar que foi razoável que traçássemos a circunferência com centro em  $A$ .

Você pode observar que o que fizemos, ao considerar o ponto  $A$  como centro da circunferência e a medida do segmento  $AB$  como raio, foi traçar “o conjunto de todos os pontos que distam  $AB$  do ponto  $A$ ”.

Analogamente, como  $P$  tinha que ter a mesma distância de  $B$ , construímos a circunferência de centro em  $B$  e raio  $AB$ .

Obtivemos assim, na interseção das duas circunferências, os pontos  $P$  e  $Q$  que distam  $AB$  de  $A$  e  $B$  – ou seja, são equidistantes de  $A$  e de  $B$ .

Depois traçamos a reta por  $A$  e  $B$  e mostramos que ela era a mediatriz de  $AB$ .

Foi isto!



Retomemos a definição de lugar geométrico.

### Definição 8.1

Lugar geométrico é um conjunto de pontos, do plano, caracterizado por uma propriedade.

Observe que da definição nós temos que uma figura é um lugar geométrico se ela é um **conjunto de pontos satisfazendo uma determinada propriedade**.

Assim, poderemos concluir que uma determinada figura é um lugar geométrico se são verificadas as duas condições seguintes:

- qualquer ponto da figura (conjunto) tem a propriedade mencionada;
- todo ponto que tem a referida propriedade pertence à figura (conjunto).

Voltando à resolução do Problema 5 na Aula 2, você observará que verificamos as duas condições para o caso da mediatriz.

Outro exemplo de uma figura que é lugar geométrico e que usamos na construção da solução do referido problema é a circunferência.

### Atividade 8.1

Mostre que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que têm distância  $r$  de um ponto  $O$ .



Na Aula 7, você mostrou, na Atividade 7.3 (b), que dois ângulos quaisquer inscritos numa circunferência, que compreendem os mesmos arcos correspondentes, são congruentes.

Sendo assim, você vai concordar comigo que dado um arco  $AB$  numa circunferência, para cada ponto  $P$  de um dos arcos  $AB$ , distinto de  $A$  e  $B$ , podemos traçar um ângulo inscrito nesta circunferência,  $\hat{A}PB$ , cujo arco correspondente é aquele arco  $AB$ . Além disso, todos estes ângulos inscritos são congruentes.

Veja na Figura 8.1, a seguir.

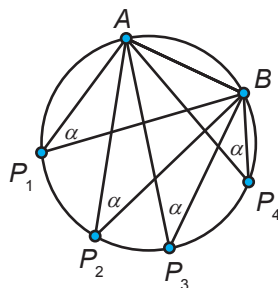


FIGURA 8.1

Observe que ao arco  $AB$  corresponde uma corda  $AB$  da circunferência.

Agora, considere dados um segmento  $AB$  e um ângulo  $\alpha$ , como na Figura 8.2.

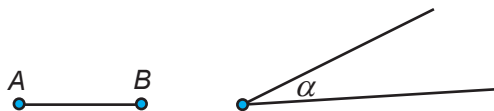


FIGURA 8.2

Tendo em vista a Figura 8.1, podemos nos perguntar sobre um arco de circunferência  $AB$  correspondente a um ângulo inscrito de medida  $\alpha$  e compreendendo uma corda congruente ao segmento  $AB$ .

Por exemplo, se  $\alpha = 30^\circ$ .

Ora, se  $\alpha$  é ângulo inscrito numa circunferência, vimos na Aula 7 que a ele corresponde um ângulo central de  $60^\circ$ .

**Atividade 8.2**

Mostre que se um ângulo central de uma circunferência mede  $60^\circ$ , a ele corresponde uma corda de medida igual ao raio da circunferência.

Segue então desta atividade que no caso de um ângulo inscrito  $\alpha = 30^\circ$ , a corda e o raio da circunferência têm a mesma medida.

Logo, se a corda tem a mesma medida que o segmento  $AB$  dado, estamos nos referindo a um arco em uma circunferência de raio de medida igual a  $\overline{AB}$ .

Construindo, então, esta circunferência, temos a situação representada na Figura 8.3 a seguir.

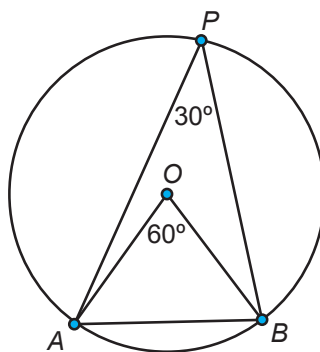


FIGURA 8.3

Voltando à Atividade 6.3 (b), temos que qualquer outro ângulo inscrito na circunferência apresentada na Figura 8.3 e compreendendo o mesmo arco  $AB$ , mede  $30^\circ$ .

Observe que  $P$  tem a propriedade de ser o vértice de um triângulo  $APB$  de base  $AB$  dada e com o ângulo em  $P$  medindo  $30^\circ$ .

Temos mostrado, então, que *qualquer ponto do arco maior  $AB$  da circunferência na Figura 8.3 tem a propriedade mencionada para  $P$ .*

Por outro lado, no exercício 7 da Autoavaliação da Aula 7, temos que todo ponto  $P$ , vértice de um triângulo  $APB$  de base  $AB$  e ângulo em  $P$  medindo  $30^\circ$ , pertence a uma circunferência de raio de medida igual à medida de  $AB$  (Por quê?).

Como o ângulo  $\hat{APB}$  está inscrito nesta circunferência, segue que  $P$  pertence ao arco maior da circunferência determinado pelas extremidades do segmento  $AB$ .

Logo, todo ponto  $P$ , vértice de um triângulo  $APB$  de base  $AB$  dada e com o ângulo em  $P$  medindo  $30^\circ$ , pertence ao arco maior da circunferência determinado pelas extremidades do segmento  $AB$ .

Concluimos, então, que o **lugar geométrico** dos vértices  $P$  dos triângulos  $APB$ , com base  $AB$  e com  $m(\hat{P}) = 30^\circ$ , é o arco maior da circunferência

de raio de medida igual à do segmento  $AB$ , arco este determinado pelas extremidades da base  $AB$  do triângulo.

De modo geral, dados um segmento  $AB$  e um ângulo  $\alpha$ , como na Figura 8.2, é possível obter um arco de circunferência  $AB$  correspondente a um ângulo inscrito de medida  $\alpha$  e compreendendo uma corda congruente ao segmento  $AB$ .

O arco dessa circunferência, que contém os vértices dos ângulos inscritos de medida  $\alpha$ , chamamos de arco capaz.

### Atividade 8.3

Qual seria o arco capaz se  $\alpha = 90^\circ$ ? Justifique sua resposta.

Temos então a seguinte definição:

### Definição 8.2

Dados um ângulo  $\alpha$  e um segmento  $AB$ , chama-se arco capaz do ângulo  $\alpha$  relativo ao segmento  $AB$  o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\hat{APB} = \alpha$ .

Voltemos então à Figura 8.2 e construamos o arco capaz do ângulo  $\alpha$  relativo ao segmento  $AB$ .

Faça a seguinte construção, usando régua e compasso:

No segmento  $AB$ , construa um ângulo  $\hat{BAX}$  de medida igual a  $\alpha$ .

Trace a mediatriz do segmento  $AB$ .

Você obterá uma figura como a que segue.

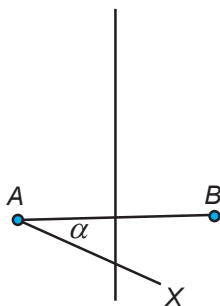


FIGURA 8.4

Trace por  $A$  uma perpendicular a  $AX$  e identifique por  $O$  a interseção desta reta com a mediatriz de  $AB$ .

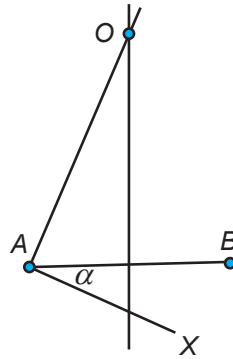


FIGURA 8.5

Agora, trace o arco de circunferência de centro em  $O$  e extremidades  $A$  e  $B$  situado no semiplano oposto a  $X$  (relativo a  $AB$ ).

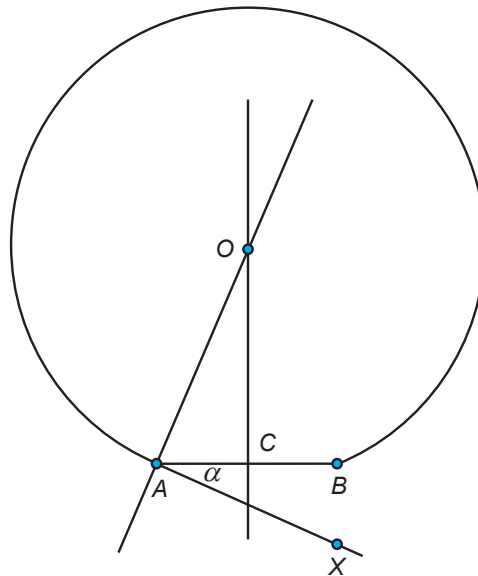


FIGURA 8.6

Conclua que o arco assim obtido é o arco capaz do ângulo  $\alpha$  sobre  $AB$ .

#### Atividade 8.4

Justifique a construção realizada para o arco capaz do ângulo  $\alpha$  relativo ao segmento  $AB$ .

Você deve observar que se pode obter outro arco simétrico a este em relação ao segmento  $AB$ , o qual terá as mesmas características que o construído, ou seja, também os pontos deste outro arco satisfazem a propriedade de arco capaz do ângulo  $\alpha$  relativo ao segmento  $AB$ .

Portanto, o referido lugar geométrico é a união dos dois arcos de circunferência que têm  $\hat{A}PB$  como ângulo inscrito.



***Mas o que o arco capaz tem a ver com o nosso cotidiano?***

Imagine-se comprando uma entrada para o *show* de um cantor que você gosta muito e que vai ocorrer num estádio redondo, em que o palco foi montado numa posição análoga a uma corda de uma circunferência.

O que temos mostrado é que em qualquer posição, de uma mesma fileira circular, que você se sente na plateia, você terá o **mesmo ângulo de visão**.

O que vai fazer a diferença, para você assistir ao *show*, é comprar seu ingresso para alguma posição localizada em um arco de círculo com raio menor possível. Ou comprar em qualquer posição e levar um binóculo.

E se o ingresso não for de lugar marcado?

Não vai precisar chegar mais cedo e ficar esperando na fila para “pegar” um lugar melhor!

Melhor saber disto, não?

Ou mais simples, na sua aula se você se dispõe junto com os alunos, ou com seu professor, em círculo, qual o efeito na sua visão de todos os alunos / do seu professor?

Finalizando, que tal uma mesa redonda?

É olho no olho!

## AUTOAVALIAÇÃO

---

1. a) Trace a bissetriz de um ângulo  $A\hat{O}B$ .  
b) Mostre que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.
2. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências de raio  $R$ , que passam por um ponto fixo  $A$ .
3. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a duas circunferências concêntricas dadas.
4. Determine o lugar geométrico descrito pelo centro de um círculo de raio  $R$ , quando esse círculo rola sobre uma reta  $r$ .
5. Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por dois pontos fixos dados.
6. Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta dada.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 1994 (Coleção do Professor de Matemática).

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Geometria Plana*. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1985. vol. 9 (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar).

GIONGO, Affonso R. *Curso de Desenho Geométrico*. São Paulo: Nobel, 1974.

HAMOS, P. R. O ensino através da resolução de problemas. *Revista Método*, Atual Editora, n. 3, fev. 1978. Título original: The Teaching of Problem Solving. *The American Mathematical Monthly*, v. 82, n. 5, 1975.

MACHADO, N. J. *Semelhança não é mera coincidência*. São Paulo: Editora Scipione (Coleção Vivendo a Matemática).

MOISE, Edwin E.; DOWNS Jr., Floyd L. *Geometria Moderna*. Massachusetts: Addison Wesley, 1966.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Campinas: Editora da UNICAMP; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

TAVARES, Raimundo Nonato; JUNQUEIRA, Francisco Diniz; BEZERRA, Manoel Jairo. *Cadernos MEC – Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: MEC, 1966. p. 62 (Coleção Cadernos MEC – Matemática).

TINOCO, Lucia A. A. *Geometria Euclidiana por meio da resolução de problemas*. Rio de Janeiro: Projeto Fundação, IM/UFRJ, 1999.

WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005 (Coleção do Professor de Matemática).



Para obter mais  
informações sobre  
outros títulos da  
EDITORA UFMG,  
visite o site

[www.editora.ufmg.br](http://www.editora.ufmg.br)

A presente edição foi composta pela Editora UFMG, em caracteres Chaparral Pro e Optima Std, e impressa pela Imprensa Universitária da UFMG, em sistema offset 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em 2011.



CENTRO DE APOIO  
À EDUCAÇÃO A  
DISTÂNCIA UFMG

**PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Secretaria de Educação a Distância  
Ministério da Educação

