

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas - Departamento De Matemática

LIGIA CORDEIRO MACHADO

A BRAQUISTÓCRONA

**BELO HORIZONTE
2011**

LIGIA CORDEIRO MACHADO

A BRAQUISTÓCRONA

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientador: Paulo Antonio Fonseca Machado

BELO HORIZONTE
2011

LIGIA CORDEIRO MACHADO

A BRAQUISTÓCRONA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à obtenção do Título de especialista em Matemática com ênfase em Cálculo pela Universidade Federal de Minas Gerais.

Data da apresentação: 16/11/2011

Banca examinadora:

Alberto Berly Sarmiento Vera

Sacha Friedli

BELO HORIZONTE
2011

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

Sumário

Introdução	6
1 Enfoque Histórico	7
1.1 Família Bernoulli	7
1.2 Jakob Bernoulli (1654-1708)	7
1.3 Johann Bernoulli (1667-1748)	8
2 A Braquistócrona ou a curva de descida mais rápida	9
2.1 A solução de Johann Bernoulli	10
2.2 Ciclóide	16
2.3 Verificando a equação diferencial	17
A Informações adicionais	20
A.1 Comprimento de arco de uma curva	20
Referências Bibliográficas	21

Introdução

Essa monografia é um estudo sobre o problema da braquistócrona que foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio aos matemáticos da Europa.

Em seu primeiro capítulo falaremos sobre a família Bernoulli, que ocupa um lugar ímpar na história da matemática, com ênfase em Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli.

No segundo capítulo será apresentado a modelagem do problema, a solução publicada por Johann Bernoulli em 1696 e a solução trabalhada hoje em sala de aula.

Capítulo 1

Enfoque Histórico

1.1 Família Bernoulli

Na história da ciência, principalmente na matemática, esta família ocupa um lugar ímpar pois foi a família que produziu o maior número de matemáticos célebres. Em três gerações teve doze matemáticos, que trabalharam com aplicações do cálculo à mecânica e a astronomia, desempenhando um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática Moderna europeia.

Neste trabalho estudaremos um pouco sobre dois dos membros desta célebre família: Jakob Bernoulli, que por insistência do pai estudou teologia, e Johann Bernoulli, que estudou medicina. Ambos, porém encontraram sua verdadeira vocação quando os primeiros artigos de Leibniz, entre 1684 e 1686, foram publicados na *Acta Eruditorum*. Eles aprenderam o “novo cálculo” e iniciaram ampla correspondência com Leibniz tornando-se seus mais importantes discípulos. Os dois estavam entre os primeiros a perceberem a potência espantosa do cálculo e aplicaram esse instrumento em vários problemas.

1.2 Jakob Bernoulli (1654-1708)

Jakob Bernoulli foi professor de matemática em Basileia desde 1687 até sua morte. Tinha interesse em séries infinitas, e, entre outras coisas, provou que a soma dos inversos positivos é divergente, e que a soma dos inversos dos quadrados é convergente, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) \text{ é divergente, e}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right) \text{ é convergente}$$

Ele também estudou muitas curvas especiais dentre elas a catenária, a tractriz, a lemniscata e a espiral exponencial. Propôs e discutiu o problema das *figuras isoperimétricas* (caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que alcançam uma área máxima) tornando-se um dos primeiros matemáticos a trabalhar no cálculo de variações.

Dentre suas contribuições à matemática, destacam-se também as que receberam o sobrenome da família, sendo elas a *distribuição de Bernoulli* e o *teorema de Bernoulli* princípio básico da teoria de probabilidades; a *equação de Bernoulli* trabalhada em um primeiro curso de equações diferenciais; os *números de Bernoulli* que aparecem na expansão da função tangente em série de potências, os *polinômios de Bernoulli* de interesse da teoria dos números e a *lemniscata de Bernoulli* dos cursos iniciais de cálculo.

Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático a utilizar a palavra “integral” com sentido ligado ao cálculo na resolução do problema da curva isócrona publicada na *Acta eruditorum* em 1690.

1.3 Johann Bernoulli (1667-1748)

Johann Bernoulli foi professor em Groningen, na Holanda, em 1695 e depois da morte de Jakob, ele o sucedeu em Basileia, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Teve três filhos: Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Johann II (1710-1790) e todos se tornaram matemáticos e cientistas renomados no século XVIII.

Escreveu sobre múltiplos tópicos como fenômenos ópticos relacionados com reflexão e refração, determinação das trajetórias ortogonais de uma família de curvas, retificação de curvas e quadraturas de áreas por meio de séries, trigonometria analítica, o cálculo exponencial e muitos outros assuntos. Dos seus trabalhos, um dos que ganharam maior notoriedade foi a sua contribuição ao problema da braquistócrona, que é o tema desta monografia.

Capítulo 2

A Braquistócrona ou a curva de descida mais rápida

A palavra *braquistócrona* deriva das palavras gregas *Brachistos*, que significa menor, e *Chronos*, que significa tempo, e se refere à curva que une dois pontos A e B , pertencentes a um mesmo plano vertical, sendo que A está acima de B , sobre a qual desliza uma partícula submetida apenas a força da gravidade no menor tempo. Essa curva é chamada braquistócrona (literalmente tempo mínimo).



Figura 2.1

Determinar essa curva foi o problema proposto por Johann Bernoulli em 1696, como um desafio aos matemáticos da Europa. Este problema despertou grande interesse e foi resolvido por Newton, Leibniz e pelos Irmãos Bernoulli.

Newton encarou o problema como um desafio dirigido a ele pelos matemáticos do continente, e o resolveu na mesma noite na qual teve conhecimento do problema. É importante salientar que nessa época Newton estava afastado do hábito de pensar em ciência, pois atuava como “*Warden of the Mint*”, um alto posto da Casa da Moeda em Londres. Sua solução foi publicada anonimamente e quando Bernoulli a viu, observou ironicamente: “Eu reconheço o leão por suas garras”.

Dos irmãos Bernoulli a solução de Johann era mais elegante que a de Jakob que, embora confusa e laboriosa, era mais geral. Essa situação foi a causa do

início de uma amarga briga que durou vários anos e foi frequentemente travada em linguagem grosseira, perdendo até mesmo a característica de uma discussão científica.

2.1 A solução de Johann Bernoulli

Nesta seção retomaremos o enunciado do problema da braquistócloma proposto por Johann Bernoulli em 1696, para estudarmos a maneira como ele resolveu este problema naquela época:

“Considerando um ponto P_0 e um ponto mais abaixo P_1 , procura-se a forma do fio curvo que une esses pontos no qual uma partícula deslizará sem atrito no menor tempo possível.”

Johann Bernoulli iniciou seu raciocínio imaginando um raio de luz atravessando meios de densidades diferentes, pois ao passar de um meio menos denso para um mais denso, sua velocidade diminui, logo o raio de luz aproxima-se da normal.

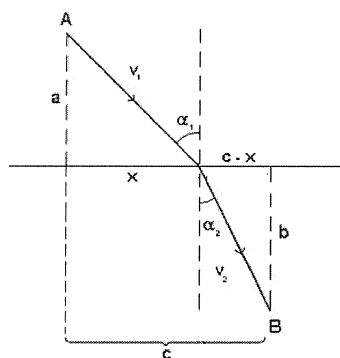


Figura 2.2

Lembrando que o tempo de todo e qualquer de percurso procurado é obtido através da razão entre a distância pela velocidade ($T = \frac{d}{v}$), a partir da análise da figura 2.2 vemos que:

- A distância percorrida no meio superior (meio menos denso) é

$$d_1^2 = a^2 + x^2$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$$

- A distância percorrida no meio inferior (meio mais denso) é

$$d_2^2 = (c - x)^2 + b^2$$

$$d_2 = \sqrt{(c - x)^2 + b^2}$$

Logo, o tempo total gasto pelo raio de luz para fazer o percurso AB é:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v_2} \quad (2.1)$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades com que a luz percorre os dois respectivos meios.

Bernoulli admitiu que o raio de luz fosse capaz de escolher a trajetória de modo a minimizar o tempo T . Assim para encontrar o tempo mínimo é necessário encontrar o ponto crítico da função $T(x)$, ou seja, o ponto no qual a primeira derivada da função tempo em relação a x seja igual a zero:

$$T'(x) = 0 \quad (2.2)$$

De (2.1):

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - c}{v_2 \sqrt{(c - x)^2 + b^2}}$$

Fazendo $T'(x) = 0$, segue-se que

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - c}{v_2 \sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2 \sqrt{(c - x)^2 + b^2}} \quad (2.3)$$

Na figura 2.2, $\text{sen } \alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ e $\text{sen } \alpha_2 = \frac{x - c}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}$, portanto ao minimizar o tempo chega-se a seguinte relação:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2}$$

Esta equação é conhecida como “Lei de Snell”, uma expressão que dá o desvio angular sofrido por um raio de luz ao passar de um meio para outro com índice de refração diferente. Dessa forma, se tivermos mais de dois meios, aplicando a “Lei de Snell” sucessivamente, obtém-se:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{v_2} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{v_3} = \frac{\text{sen } \alpha_4}{v_4} = \dots = \frac{\text{sen } \alpha_n}{v_n}$$

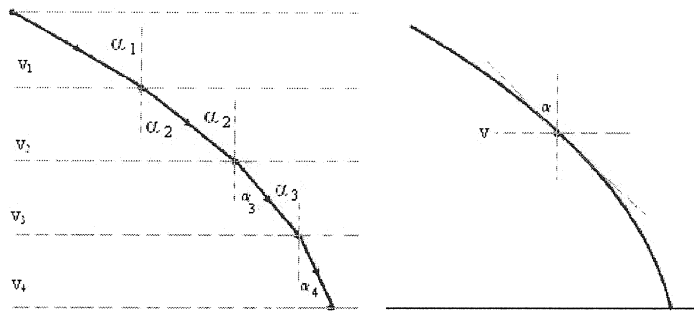


Figura 2.3

Se o número de meios tender ao infinito, tem-se que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{v} = k \quad (2.4)$$

onde k é uma constante.

Bernoulli introduziu um sistema de coordenadas, conforme figura 2.4, considerando P_0 na origem e que a partícula (assim como um raio de luz) fosse capaz de escolher a trajetória na qual deslizará de P_0 a P_1 no menor tempo possível.

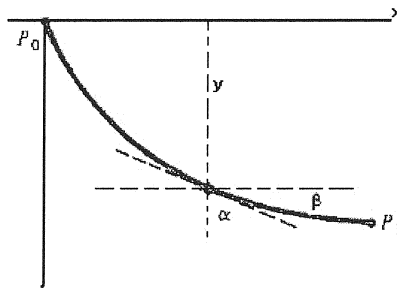


Figura 2.4

Se a partícula possui massa m e g é a força da gravidade, mg é a força dirigida para baixo exercida sobre a partícula, então pela lei de conservação de energia a quantidade de trabalho realizado pela gravidade é igual ao aumento da energia cinética, logo:

$$\boxed{\text{energia cinética} = \text{trabalho}}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= mgy \\ v^2 &= 2gy \\ v &= \sqrt{2gy}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Da análise geométrica, onde $y(x)$ é a função cujo gráfico é a curva procurada e β é o ângulo formado entre a tangente a curva e o eixo x , α é o ângulo formado entre a tangente a curva e o eixo y sendo α e β ângulos complementares, portanto $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Logo: $\sin \alpha = \cos \beta$

Lembrando que: $\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta}$ e $\sec \beta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$ concluímos que:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

Mas a derivada da função, y' , no ponto, é o coeficiente angular da reta tangente a curva, portanto:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Combinando as equações (2.4), (2.5), (2.6):

$$\left(\frac{\sin \alpha}{v}\right)^2 = \frac{1}{(1 + (y')^2) 2gy} = k^2$$

Então

$$\frac{1}{k^2 2g} = (1 + (y')^2) y\tag{2.7}$$

Como na superfície terrestre a aceleração da gravidade é aproximadamente constante, pode-se assumir g como uma constante. Dessa forma escrevendo:

$$\frac{1}{k^2 2g} = c,$$

temos, de (2.7):

$$c = y (1 + (y')^2)$$

Assim Bernoulli chegou a equação diferencial que descreve o fenômeno:

$$\boxed{y(1 + (y')^2) = c} \quad (2.8)$$

Para resolver a equação (2.8), substitui-se y' por $\frac{dy}{dx}$ e separam-se as variáveis:

$$\begin{aligned} (y')^2 &= \frac{c}{y} - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{c-y}}{\sqrt{y}} \\ dx &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c-y}} dy \\ \int dx &= \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c-y}} dy \\ x &= \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para resolver essa última integral, utilizaremos a seguinte substituição algébrica:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{y}{c-y} \\ y &= \frac{u^2 c}{1+u^2} \\ dy &= \frac{(u^2 c)'(1+u^2) - (u^2 c)(1+u^2)'}{(1+u^2)^2} du \\ dy &= \frac{2uc}{(1+u^2)^2} du \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então a integral (2.9) pode ser reescrita em função de u :

$$x = \int \frac{2u^2 c}{(1+u^2)^2} du \quad (2.11)$$

Para resolver a integral (2.11) utilizaremos a técnica da substituição trigonométrica tomando:

$$u = \operatorname{tg} \phi \quad \therefore \quad du = \sec^2 \phi \, d\phi$$

$$x = \int \frac{2c \operatorname{tg}^2 \phi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \phi)^2} \sec^2 \phi \, d\phi$$

$$x = 2c \int \frac{\operatorname{tg}^2 \phi \sec^2 \phi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \phi)^2} \, d\phi$$

Como $1 + \operatorname{tg}^2 \phi = \sec^2 \phi$, tem-se que:

$$x = 2c \int \frac{\operatorname{tg}^2 \phi \sec^2 \phi}{(\sec^2 \phi)^2} \, d\phi$$

donde

$$x = 2c \int \operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi$$

Lembrando que $\operatorname{sen}^2 \phi = \frac{1 - \cos(2\phi)}{2}$, obtem-se:

$$x = 2c \int \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \, d\phi$$

$$x = c \int 1 - \cos(2\phi) \, d\phi$$

$$x = c \left(\phi - \int \cos(2\phi) \, d\phi \right)$$

Se $2\phi = v$ e $d\phi = \frac{dv}{2}$ a $\int \cos(2\phi) d\phi = \int \cos(v) \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} v + c = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\phi + c$

Logo:

$$x = c \left(\phi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\phi \right)$$

Como P_0 está na origem, a constante de integração é zero, pois $y = 0$ quando $\phi = 0$. Também deseja-se ter $x = 0$ quando $\phi = 0$.

Utilizando a mesma técnica da substituição trigonométrica, reescrevemos a equação (2.10), $y = \frac{u^2 c}{1 + u^2}$, tomando: $u = \operatorname{tg} \phi$ e $du = \sec^2 \phi \, d\phi$:

$$y = \frac{c \operatorname{tg}^2 \phi}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}$$

$$y = \frac{c \operatorname{tg}^2 \phi}{\sec^2 \phi}$$

$$y = c \operatorname{sen}^2 \phi$$

$$y = c \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}c(1 - \cos 2\phi)$$

Dessa forma obtemos as equações paramétricas:

$$x = c(\phi - \frac{1}{2}\text{sen } 2\phi) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}c(1 - \cos 2\phi)$$

que podem ser reescritas:

$$x = \frac{1}{2}c(2\phi - \text{sen } 2\phi) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}c(1 - \cos 2\phi)$$

e simplificadas, utilizando as substituições: $a = \frac{1}{2}c$ e $\theta = 2\phi$, obtendo assim:

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad \text{e} \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

Estas equações são as equações paramétricas da cicloide, com cúspide (ponto no qual a cicloide toca o eixo x) na origem.

Assim Johann descobriu que a cicloide, muito conhecida pelos matemáticos na época, também é solução para o seu problema da braquistócrona. Ele então escreveu:

“Admiramos Huygens, com justiça, porque ele foi o primeiro a descobrir que uma partícula pesada desliza até a parte mais baixa de uma cicloide gastando o mesmo tempo, não importando de onde comece. Mas vocês (seus leitores) ficarão petrificados de surpresa com a afirmação de que essa cicloide, ou tautócroma de Huygens, é também braquistócrona que estamos procurando.” – *apud* Simmons (1987)

2.2 Cicloide

Na seção 2.1 vimos que a cicloide é a solução para o problema da braquistócrona. Nesta seção encontraremos as equações paramétricas dessa curva.

Chama-se cicloide a curva traçada por um ponto da circunferência quando o círculo rola, sem deslizar, sobre uma reta:

Supondo que o círculo rolante tem raio a e que ele role sobre o eixo x , começando de uma posição em que o centro C do círculo está na origem O no semi-eixo positivo dos y . A curva é o lugar geométrico que o ponto P da circunferência percorre quando a circunferência rola. O ângulo θ da figura é o ângulo varrido pelo raio CP quando o círculo rola para uma nova posição.

Se x e y são coordenadas de P , então o giro do círculo implica que:

$$OB = \text{arco}(BP) = a\theta$$

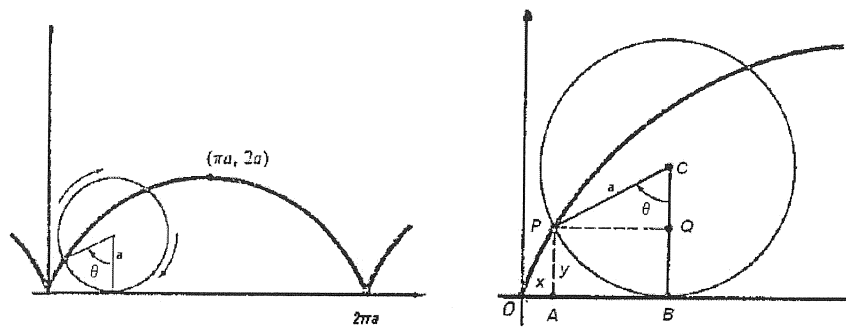


Figura 2.5

$$\begin{aligned}
 x &= OB - AB \\
 x &= OB - PQ \\
 x &= a\theta - a\text{sen } \theta \\
 x &= a(\theta - \text{sen } \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= BC - QC \\
 y &= a - a \cos \theta \\
 y &= a(1 - \cos \theta)
 \end{aligned}$$

Obtemos assim as equações paramétricas da cicloide.

2.3 Verificando a equação diferencial

O fenômeno da braquistócrona é descrito pela equação (2.8) demonstrada na seção 2.1 :

$$\begin{aligned}
 y(1 + (y')^2) &= c \\
 (y')^2 &= \frac{c}{y} - 1
 \end{aligned}$$

Sabemos que a velocidade é a variação da posição em relação ao tempo, ou seja:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

De (2.5):

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \quad (2.12)$$

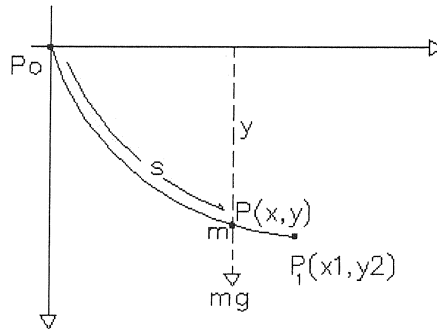


Figura 2.6

Nesse problema o comprimento de arco, s , percorrido de $P_0 = (0,0)$ até $P_1 = (x,y)$ por meio de uma curva representada pelo gráfico de uma função $y = y(x)$ é dada por:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.13)$$

Como as variáveis aparecem implicitamente em “ s ”, dessa forma, a equação diferencial não pode ser resolvida diretamente.

Do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, (2.13) se transforma em:

$$s'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad (2.14)$$

Como $s' = \frac{ds}{dx}$ e $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, então (2.14) pode ser reescrita:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Multiplicando por dx :

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.15)$$

Combinando as equações (2.8) e (2.15):

$$ds = \sqrt{1 + \frac{c}{y} - 1} dx$$

$$ds = \sqrt{\frac{c}{y}} dx$$

considerando $c = 2a$,

$$ds = \sqrt{\frac{2a}{y}} dx \quad (2.16)$$

assim a equação (2.12) pode ser reescrita como:

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{2a}{y}}}{\sqrt{2gy}} dx$$

Logo

$$dt = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{a}{g}} dx$$

Substituindo nesta última equação as equações paramétricas da cicloide:

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad dx = a(1 - \cos \theta)d\theta$$

$$y = a(1 - \cos \theta) \quad dy = a \text{sen } \theta d\theta$$

$$dt = \frac{1}{a(1 - \cos \theta)} \sqrt{\frac{a}{g}} a(1 - \cos \theta)d\theta$$

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} d\theta$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \theta_1$$

- T_1 é o tempo necessário para a partícula deslizar num fio cicloidal de P_0 a P_1 .
- θ_1 é o ângulo varrido pelo raio CP quando o círculo que forma a cicloide rola sobre o eixo x para uma nova posição.

O tempo gasto pela partícula para deslizar do ponto P_0 a P_1 depende do raio do círculo que forma a cicloide e do ponto P_1 onde a partícula chega, ou seja independe de onde a partícula iniciará o seu deslocamento.

No ponto mais baixo da cicloide, onde $\theta = \pi$, o tempo gasto pela partícula para deslocar de um ponto qualquer até este ponto mais baixo do fio cicloidal é:

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \pi$$

Apêndice A

Informações adicionais

A.1 Comprimento de arco de uma curva

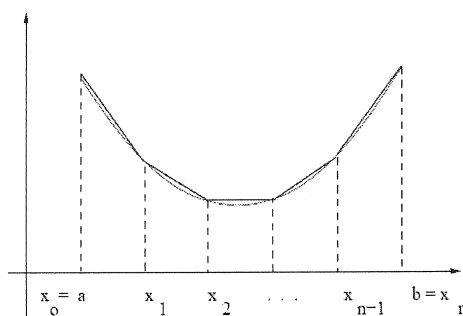


Figura A.1

Se dividirmos a curva em subintervalos infinitamente pequenos, os arcos de curvas acima deles são quase retas. O comprimento do segmento que faz aproximação para o arco acima do subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$ é:

$$\sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}$$

A soma

$$\sum \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} \tag{A.1}$$

é uma aproximação para o comprimento da curva.

Dividindo e multiplicando (A.1) por Δx_n ; obtemos:

$$S = \sum_n \frac{\sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2}}{\Delta x_n} \Delta x_n$$

donde:

$$S = \sum_n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2} \Delta x_n$$

O limite dessa soma, quando $\Delta x_n \rightarrow 0$ ou quando $n \rightarrow \infty$ fornece o comprimento da curva. Então $s(x)$ é o comprimento dese arco.

$$S = \int_x^{x_n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Além disso, tem-se que:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \therefore \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Dividindo a igualdade acima por dx , temos,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx} \quad \therefore \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \quad \therefore \quad ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

integrando ambos os lados,

$$\int ds = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

“s” é a função comprimento de arco do gráfico de uma função.

Referências Bibliográficas

- [1] SIMMONS, George F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Tradução de Seiji Hariki. São Paulo, Editora McGraw-Hill, 1987. volume 1, 829 p., páginas 623 a 627 e 708 a 726
- [2] EVES, Howard., *Introdução a História da Matemática*, Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, Editora da Unicamp, 2008, 843 p., páginas 464 a 467.
- [3] BOYER, Carl Benjamin., *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 2ª reimpressão 1999, 496 p., páginas 286
- [4] BARON, Magareth E. e BOS, H.J.M. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. O Cálculo no século XVIII: Técnicas e Aplicações*. Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985. unidade 5, 49 p., páginas 33 A 34
- [5] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo, Editora Harba, 3ª edição 1994. volume 1, 685 p., páginas 388 a 393