

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

Ricardo Morais Lanes

**INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA E CONTRIBUIÇÕES PARA MODELAGEM  
VISCOELÁSTICA DOS SOLOS**

Belo Horizonte

2024

Ricardo Morais Lanes

**INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA E CONTRIBUIÇÕES PARA MODELAGEM  
VISCOELÁSTICA DOS SOLOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Marcelo Greco

Belo Horizonte

2024

L267i

Lanes, Ricardo Morais.

Interação solo-estrutura e contribuições para modelagem viscoelástica dos solos [recurso eletrônico] / Ricardo Morais Lanes. – 2024.

1 recurso online (201 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Marcelo Greco.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 179-201.

Bibliografia: f. 163-178.

1. Engenharia de estruturas – Teses. 2. Edifícios – Normas – Teses. 3. Fundações (Engenharia) – Processamento de dados – Teses. 4. Cálculos numéricos – Processamento de dados – Teses. 5. Método dos elementos finitos – Projeto – Teses. 6. MATLAB (Programa de computador) – Teses. 7. Mecânica do solo – Modelos matemáticos – Teses. I. Greco, Marcelo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO / TESE**



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



**ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 102  
do aluno Ricardo Morais Lanes**

Às **14:00** horas do dia **26** do mês de **abril** de **2024**, reuniu-se, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **24 de novembro de 2023**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Interação Solo-Estrutura e Contribuições para Modelagem Viscoelástica dos Solos**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Marcelo Greco**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final.

**Prof. Dr. Marcelo Greco - DEES - UFMG (Orientador)**  
**Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall - DEES - UFMG**  
**Prof. Dr. Gustavo Ferreira Simões - DESA - UFMG**  
**Prof. Dr. Edson Denner Leonel - EESC - USP**  
**Prof. Dr. Valério da Silva Almeida - Poli - USP**

Após reunião, a Comissão considerou o candidato APROVADO, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 26 de abril de 2024.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;
2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Ferreira Simoes, Professor do Magistério Superior**, em 26/04/2024, às 18:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Armando Cesar Campos Lavall, Professor do Magistério Superior**, em 26/04/2024, às 18:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Denner Leonel, Usuário Externo**, em 26/04/2024, às 18:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Professor do Magistério Superior**, em 26/04/2024, às 18:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valerio da Silva Almeida, Usuário Externo**, em 29/04/2024, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Coordenador(a)**, em 24/07/2024, às 10:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3205706** e o código CRC **2EF42E1A**.

*Dedico este trabalho à minha esposa, à minha mãe e aos  
meus filhos.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me dar saúde, sabedoria, paz e uma família amorosa para me motivar a seguir em frente nos momentos mais difíceis.

À minha mãe, Matilde, pela referência de valentia e persistência. Gratidão eterna pelo amor incondicional que recebi ao longo de toda a minha vida.

À minha esposa, Daiane, pelo amor, incentivo e por me compreender nas inúmeras vezes em que estive ausente para o desenvolvimento desse trabalho. Agradeço, imensamente, as incontáveis horas dedicadas à revisão desse texto.

Aos meus filhos, Arthur e Aurora, por representarem a minha principal conquista, o meu maior sucesso, e por me concederem outras formas de enxergar a vida.

Agradecimento, também, ao meu orientador, Professor Marcelo Greco, pela paciência, confiança, ensinamentos, incentivo e pela oportunidade oferecida para trabalhar neste projeto.

Aos alunos de iniciação científica Paulo Lemos e Guilherme Pimentel, que contribuíram, substancialmente, para a auditoria dos códigos computacionais implementados para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Professor Valério da Silva Almeida, pela sua colaboração na pesquisa, manifestada na cessão de códigos computacionais em Fortran para análises de rotinas voltadas à Interação Solo-Estrutura, fundamentais para o início deste trabalho.

Aos professores, amigos e funcionários da Escola de Engenharia da UFMG, pelos ensinamentos, disponibilidade e cordialidade.

A todos os meus familiares e amigos que torceram por mim, me incentivaram e compreenderam os motivos das minhas ausências nesse período de intensa dedicação.

Enfim, meus mais sinceros agradecimentos a todos que, de alguma maneira, contribuíram para a viabilização deste projeto.

“A persistência é o menor caminho do êxito.”  
(CHARLES CHAPLIN)

## RESUMO

Tradicionalmente, as estruturas de edifícios são projetadas sob a hipótese simplificada de fundações fixas a elementos indeslocáveis, idealizados como apoio ou engaste. Neste trabalho, propõe-se um procedimento racional de análise de interação solo-estrutura que incorpora os efeitos não lineares geométricos dos pórticos aos recalques do solo. Atenção especial é destinada às fundações rasas sujeitas aos recalques por adensamento. Para essa finalidade, descrevem-se os modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener. As análises são realizadas considerando-se acoplamento iterativo que compatibiliza os deslocamentos entre os sistemas baseados no Método dos Elementos Finitos e no Método dos Elementos de Contorno. As equações do Método dos Elementos Finitos são resolvidas por meio do método de Newton-Raphson. A solução fundamental de Mindlin é utilizada para a descrição do meio semi-infinito. Para a representação do solo em modelo viscoelástico, reescrevem-se as equações de contorno em termos de tensões e deslocamentos. Reformula-se o método dos elementos de contorno, para se descrever os métodos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener, em termos de tensões e deslocamentos, considerando-se as interferências ocasionadas pelos efeitos de grupos entre sapatas. Implementam-se rotinas computacionais em Matlab<sup>®</sup>. Estudam-se exemplos hipotéticos de edifícios afetados pelo adensamento. Os resultados obtidos são consistentes no que tange à boa aproximação dos métodos viscoelásticos e à redistribuição esperada para os esforços nos elementos estruturais.

**Palavras-Chave:** interação solo-estrutura; adensamento; acoplamento MEF-MEC; viscoelasticidade; não-linearidade geométrica.

# ABSTRACT

Traditionally, building structures are designed under the simplified assumption of fixed foundations with immovable elements, idealized as simple or fixed supports. In this study, a rational procedure for soil-structure interaction analysis is proposed, incorporating the geometric nonlinear effects of frames on soil settlements. Special attention is given to shallow foundations subject to consolidation settlements. For this purpose, the Kelvin-Voigt, Boltzmann, and Zener viscoelastic models are described. The analyses are performed considering iterative coupling that makes the displacements compatible between systems based on the Finite Element Method and the Boundary Element Method. The Finite Element Method equations are solved using the Newton-Raphson method. Mindlin's fundamental solution is used to describe the semi-infinite medium. To represent the soil in a viscoelastic model, the boundary equations are rewritten in terms of stresses and displacements. The Boundary Element Method is reformulated to describe the Kelvin-Voigt, Boltzmann, and Zener methods in terms of stresses and displacements, considering the interferences caused by group effects between footings. Computational routines are implemented in Matlab<sup>®</sup>. Hypothetical examples of buildings affected by consolidation are studied. The results obtained are consistent with a good approximation of viscoelastic methods and the expected redistribution of forces in the structural elements.

**Keywords:** soil-structure interaction; consolidation; FEM-BEM coupling; viscoelasticity; geometric nonlinearity.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Tipos de recalques.....	20
Figura 1.2 – Torre de Pisa. ....	22
Figura 1.3 – Palácio de Bellas Artes na Cidade do México. ....	23
Figura 1.4 – Edifícios inclinados na cidade de Santos - SP. ....	24
Figura 1.5 – Edifício Space. ....	25
Figura 2.1 – Eixos locais de referência, curvatura e graus de liberdade para o elemento de dois nós.....	34
Figura 2.2 – Deformação de um segmento do eixo da barra – plano XZ.....	35
Figura 2.3 – Deformação de um segmento do eixo da barra – plano XY. ....	36
Figura 2.4 – Esquema representativo do processo iterativo do Método de Newton-Raphson. ....	46
Figura 2.5 – Efeitos global $P - \Delta$ e local $P - \delta$ .....	47
Figura 2.6 – Forças laterais equivalentes para o cálculo do efeito global $P - \Delta$ . ....	48
Figura 2.7 – Geometria da viga em balanço.....	49
Figura 2.8 – Deslocamentos verticais máximos da viga em balanço. ....	50
Figura 2.9 – Modelo geométrico do edifício com pilares indicados em azul e vigas indicadas em vermelho. ....	51
Figura 2.10 – Deslocamentos horizontais do Nó 1 na direção X. ....	52
Figura 3.1 – Modelo unidimensional do elemento elástico.....	54
Figura 3.2 – Molas sujeitas aos fenômenos de fluência e de relaxação. ....	55
Figura 3.3 - Representação unidimensional do elemento viscoso.....	56
Figura 3.4 – Amortecedores sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação.....	57
Figura 3.5 – Modelo de Maxwell. ....	58
Figura 3.6 – Modelo de Maxwell sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação.....	59
Figura 3.7 – Modelo unidimensional de Kelvin-Voigt. ....	60
Figura 3.8 – Modelo de Kelvin-Voigt sujeito aos fenômenos de fluência e de relaxação. ....	62
Figura 3.9 - Modelo unidimensional de Boltzmann. ....	62
Figura 3.10 – Modelo de Boltzmann sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação. ....	66
Figura 3.11 – Modelo unidimensional de Zener.....	66
Figura 3.12 – Modelo de Boltzmann sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação. ....	70

Figura 3.13 – Representação gráfica do processo de fluência e do tempo de retardo para o comportamento reológico ideal dos materiais.....	72
Figura 3.14 – Representação gráfica do processo de relaxação e do tempo de relaxação para o comportamento reológico ideal dos materiais.....	73
Figura 4.1 - Região genérica $\Omega * + \Gamma *$ contendo o corpo $\Omega + \Gamma$ com as mesmas propriedades elásticas.....	78
Figura 4.2 - Corpo $\Omega + \Gamma$ localizado dentro do espaço semi-infinito $x_1 \geq 0$ .....	82
Figura 4.3 - Carga pontual unitária dentro de um semiespaço com $P_1 = P_2 = P_3 = 1$ . ....	83
Figura 4.4 - Elementos triangulares.....	96
Figura 4.5 – Diagrama de atividades do código implementado para o MEC elástico tridimensional.....	99
Figura 4.6 – Esquema e malhas para a solução do problema de sólido cruciforme tracionado. As malhas utilizadas foram de 176 e 704 elementos, respectivamente.....	100
Figura 4.7 – Esquema e malhas para a solução do problema do plano horizontal carregado. As malhas utilizadas foram de 8, 32 e 128 elementos respectivamente. ....	101
Figura 5.1 – Diagrama de atividades do código implementado para o MEC viscoelástico... ..	115
Figura 5.2 – Problema do plano horizontal carregado com análise viscoelástica de Kelvin-Voigt. ....	116
Figura 5.3 – Deslocamento vertical $U_3$ em função do tempo por meio de Kelvin-Voigt na origem do sistema cartesiano do plano horizontal carregado.....	116
Figura 5.4 – Deslocamento vertical $U_3$ em função do tempo por meio de Boltzmann na origem do sistema cartesiano do plano horizontal carregado. ....	118
Figura 5.5 – Deslocamentos $U_3$ em função do tempo por meio de Zener na origem do sistema cartesiano do plano horizontal carregado. ....	120
Figura 5.6 – Planos horizontais carregados em datas distintas.....	122
Figura 5.7 – Deslocamentos verticais no Ponto P1 para carregamentos vizinhos aplicados em datas distintas.....	123
Figura 5.8 – Deslocamentos verticais no Ponto P2 para carregamentos vizinhos aplicados em datas distintas.....	123
Figura 6.1 – Diagrama de atividade do algoritmo para a Interação Solo-Estrutura no tempo. ....	127
Figura 6.2 – Projeto do edifício.....	130
Figura 6.3 – Perfil de sondagem.....	132

Figura 6.4 – Perspectiva do modelo ISE. ....	133
Figura 6.5 – Modelo geotécnico. ....	134
Figura 6.6 – Deslocamentos verticais segundo a Teoria do Adensamento de Terzaghi. ....	136
Figura 6.7 – Malha de elementos finitos com elementos de viga (em azul) e pilares (em vermelho) para simular a superestrutura de 19 pavimentos. ....	138
Figura 6.8 – Sapatas do edifício simuladas em MEC. ....	139
Figura 6.9 – Deslocamentos vertical das sapatas a partir do modelo de Kelvin-Voigt para representação da Teoria do Adensamento de Terzaghi na interação solo-estrutura. ....	141
Figura 6.10 – Variação das reações nas sapatas em relação ao tempo ao início e término do processo de adensamento no modelo de Kelvin-Voigt. ....	143
Figura 6.11 – Evolução da rigidez da mola de Winkler no modelo de Kelvin-Voigt. ....	144
Figura 6.12 – Deslocamentos vertical das sapatas a partir do modelo de Boltzmann para representação da Teoria do Adensamento de Terzaghi na interação solo-estrutura. ....	147
Figura 6.13 – Variação das reações nas sapatas após recalque por adensamento no modelo de Boltzmann. ....	149
Figura 6.14 – Variação das reações nas sapatas decorrente apenas do adensamento no modelo de Boltzmann. ....	150
Figura 6.15 – Força de compressão em P7 para os modelos reológicos avaliados. ....	151
Figura 6.16 – Momento fletor no plano XZ em P7 para os modelos reológicos avaliados. ..	152
Figura 6.17 – Momento fletor no plano YZ em P7 para os modelos reológicos avaliados. ..	153
Figura 6.18 – Força cortante em V2 para os modelos reológicos avaliados. ....	154
Figura 6.19 – Momento fletor em V2 para os modelos reológicos avaliados. ....	155
Figura 6.20 – Força cortante em V3 para os modelos reológicos avaliados. ....	156
Figura 6.21 – Momento fletor em V3 para os modelos reológicos avaliados. ....	157
Figura A1 – Modos de ruptura em solos. ....	180
Figura A2 – Modelo de ruptura proposto por Terzaghi (1943). ....	181
Figura A.3 – Pressões de contato em placas flexíveis. ....	184
Figura A.4 – Pressões de contato em placas rígidas. ....	185
Figura A.5 – Solo estratificado – técnica de Steinbrenner. ....	190
Figura A.6 – Fatores $\mu_0$ e $\mu_1$ para o cálculo de recalques imediatos de fundação superficial flexível em camada de argila finita. ....	192
Figura A.7 – Modelo de analogia água - mola de Terzaghi. ....	195

Figura A.8 - Faixa dos valores dos coeficientes de adensamento para argilas da região do Rio de Janeiro obtidos a partir de ensaios edométricos.....	198
Figura A.9 – kv em areias a partir do ensaio de placas com 30,5 cm x 30,5 cm.....	200
Figura A.10 – kv em argilas a partir do ensaio de placas com 30,5 cm x 30,5 cm. ....	201

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros de fluência para alguns modelos reológicos. ....	73
Tabela 3.2 – Parâmetros de fluência para alguns modelos reológicos. ....	74
Tabela 4.1 – Resultados para o problema do sólido cruciforme com elementos constantes..	100
Tabela 4.2 – Resultados para o problema do sólido cruciforme com elementos lineares. ....	100
Tabela 4.3 – Problema do plano horizontal carregado com elementos constantes. ....	101
Tabela 4.4 – Problema do plano horizontal carregado com elementos lineares descontínuos .....	101
Tabela 6.1 – Geometria das vigas do edifício. ....	131
Tabela 6.2 – Geometria dos pilares do edifício. ....	131
Tabela 6.3 – Dimensão das sapatas do edifício. ....	131
Tabela 6.4 – Pressão de contato média para condição de apoios rígidos. ....	131
Tabela 6.5 – Análise do recalque imediato para pressão unitária na superfície. ....	135
Tabela 6.6 – Evolução das molas de Winkler no MEF para o modelo de Kelvin-Voigt (kN/m). .....	140
Tabela 6.7 – Evolução das reações no MEF para o modelo de Kelvin-Voigt (kN/m). ....	140
Tabela 6.8 – Evolução dos deslocamentos no MEC para o modelo de Kelvin-Voigt (mm).	141
Tabela 6.9 – Distorção angular entre sapatas após o processo de adensamento segundo o modelo de Kelvin-Voigt para a interação solo-estrutura. ....	142
Tabela 6.10 – Evolução das molas de Winkler no MEF para o modelo de Boltzmann (kN/m). .....	145
Tabela 6.11 – Evolução das reações no MEF para o modelo de Boltzmann (kN). ....	146
Tabela 6.12 – Evolução dos deslocamentos no MEC para o modelo de Boltzmann (mm). ..	146
Tabela 6.13 – Distorção angular entre sapatas após o recalque inicial segundo modelo de Boltzmann para a interação solo-estrutura. ....	148
Tabela 6.14 – Distorção angular entre sapatas após o processo de adensamento segundo modelo de Boltzmann para a interação solo-estrutura. ....	148
Tabela A.1 – Coeficiente $\alpha$ (TEIXEIRA e GODOY, 2019). ....	186
Tabela A.2 – Coeficiente K (TEIXEIRA e GODOY, 2019). ....	187
Tabela A.3 – Coeficiente de Poisson (TEIXEIRA e GODOY, 2019). ....	187
Tabela A.4 – Fator de influência para sapatas retangulares (TEIXEIRA e GODOY, 2019).	189

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BEM	<i>Boundary Element Method</i>
CPT	<i>Cone Penetration Test</i>
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
EPD	Estado Plano de Deformação
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FS	Fator de Segurança
ISE	Interação Solo-Estrutura
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEI	Método dos Elementos Infinitos
NA	Nível de Água
NLF	Não-Linearidade Física
NLG	Não-Linearidade Geométrica
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
SPT	SPT - <i>Standard Penetration Test</i>
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

# SUMÁRIO

1	Considerações Iniciais .....	19
	1.1 Motivação .....	19
	1.2 Justificativa .....	20
	1.3 Revisão Bibliográfica .....	26
	1.4 Objetivos .....	31
	1.5 Organização do Trabalho .....	31
2	Superestruturas em MEF para NLG .....	33
	2.1 Introdução .....	33
	2.2 Formulação Não-Linear Geométrica .....	34
	2.3 Considerações Acerca da Rigidez à Torção .....	43
	2.4 Solução do Sistema de Equações Não Lineares .....	44
	2.5 Implementação de Código em MEF com Recursos na Análise NLG .....	46
	2.6 Exemplo 1 – Análises dos Efeitos Global e Local P- $\Delta$ e P- $\delta$ .....	47
	2.7 Exemplo 2 – Análise Numérica Não Linear de uma Viga .....	49
	2.8 Exemplo 3 – Análise Numérica Não Linear de um Edifício .....	50
3	Descrição Viscoelástica .....	53
	3.1 Elementos Básicos da Viscoelasticidade .....	53
	3.2 Modelos Reológicos Unidirecionais .....	57
	3.3 Modelos Reológicos Multidirecionais .....	71
	3.4 Caracterização da Fluência .....	72
	3.5 Caracterização da Relaxação .....	73
4	Fundamentos do Método dos Elementos de Contorno .....	75
	4.1 Introdução .....	75
	4.2 Relações Elastostáticas .....	76
	4.3 Soluções Fundamentais .....	78

4.4	Equação Integral de Contorno .....	88
4.5	Construção do Sistema Algébrico.....	92
4.6	Elementos.....	95
4.7	Tratamento de Singularidades no Processo de Integração.....	97
4.8	Implementação de Código para o MEC Elástico Tridimensional .....	98
4.9	Exemplos Numéricos .....	99
5	Formulações Viscoelásticas no MEC .....	103
5.1	Considerações Iniciais .....	103
5.2	Modelo de Kelvin-Voigt.....	103
5.3	Modelo de Boltzmann.....	106
5.4	Modelo de Zener .....	110
5.5	Implementação de Código para o MEC Viscoelástico .....	114
5.6	Exemplos Numéricos .....	115
6	Acoplamento Iterativo entre MEF/MEC .....	124
6.1	Introdução .....	124
6.2	Algoritmo de Acoplamento Iterativo .....	125
6.3	Exemplo de Um Edifício .....	128
6.4	Parametrização dos Modelos Reológicos .....	136
6.5	Malha .....	138
6.6	ISE no Modelo de Kelvin-Voigt.....	140
6.7	ISE no Modelo de Boltzmann.....	145
6.8	Análise da Superestrutura .....	150
7	Considerações Finais .....	159
7.1	Conclusões .....	159
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros .....	161
	Referências .....	163
Apêndice A	Relações entre Solos e Fundações Rasas.....	179
a)	Introdução.....	179

b) Modos De Ruptura nos Solos.....	179
c) Tensões Admissíveis do Solo.....	180
d) Recalques em Fundações Rasas .....	188
e) Coeficiente de Reação Vertical da Fundação .....	199

# 1

## CONSIDERAÇÕES INICIAIS

### 1.1 MOTIVAÇÃO

Tradicionalmente, projetos estruturais ou de fundações são desenvolvidos com base em modelos que consideram os edifícios sobre apoios indeslocáveis e cuja superestrutura não influencia o comportamento dos solos ou cujo solo não influencia o comportamento da superestrutura. Nesse processo, os apoios são totalmente restritos, em seus movimentos, permitindo que as reações sejam utilizadas diretamente para o dimensionamento da fundação.

Normalmente, o projeto de fundação é desenvolvido de modo que as deformações no solo sejam aceitáveis à obra, por causa da impossibilidade de se projetar fundações perfeitamente indeslocáveis, prevalecendo, em muitas ocasiões, a experiência do analista. A maior preocupação se refere ao controle dos deslocamentos verticais, também denominado recalque vertical. Esse movimento vertical das edificações pode afetar a estabilidade global, a distribuição dos esforços e a funcionalidade das estruturas. O conhecimento prévio da ordem de grandeza dos recalques é fundamental, porque possibilita a otimização dos projetos e orienta decisões sobre eventuais investigações geotécnicas complementares.

A Interação Solo-Estrutura (ISE) é uma metodologia que consiste na análise da influência mútua do desempenho dos solos sobre o comportamento das estruturas. As estruturas descarregam esforços sobre a sua fundação que, por sua vez, os transfere para o terreno subjacente, causando deslocamentos. Contudo, a análise da ISE enfrenta grandes desafios. Várias questões precisam ser respondidas, como, por exemplo: Quais seriam as metodologias de análise mais indicadas para a ISE se estabelecer como prática corrente na concepção dos projetos? Quais seriam os parâmetros físicos, mecânicos ou reológicos do solo, de modo a representá-los na forma como eles se apresentam na natureza? Os numerosos parâmetros geotécnicos poderiam ser reduzidos a outros poucos parâmetros equivalentes, mantendo-se razoável precisão dos modelos? Existem estudos consolidados da ISE que possibilitem análises

de desempenho das obras ao longo de sua vida útil, incluindo deformações por adensamento dos solos?

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A hipótese de superestruturas sobre apoios perfeitamente indeslocáveis possibilita a simplificação nos cálculos e uma aproximação razoável do desempenho real de muitas fundações. Nem sempre, porém, refletem, com precisão, o verdadeiro comportamento de algumas construções, uma vez que essa teoria seria rigorosamente aceita apenas para estruturas sujeitas a recalques uniformes, negligenciando-se, então, outras formas de recalque ao longo de toda a vida útil da estrutura. Em casos em que são observados significativos valores de recalques diferenciais ou distorcionais, a ideia de apoios indeslocáveis não poderia ser validada.

Conceitualmente, o recalque total de uma fundação pode ser classificado em uniforme, diferencial uniforme ou distorcional angular (Figura 1.1). Os dois primeiros causam movimentos de corpo rígido – respectivamente, translação e rotação –, com possíveis impactos no estado-limite de serviços (ELS) e na estabilidade das estruturas. Por outro lado, o recalque distorcional causa deformações adicionais e, conseqüentemente, o acréscimo de esforços internos, podendo levar os elementos de um edifício à ruptura.

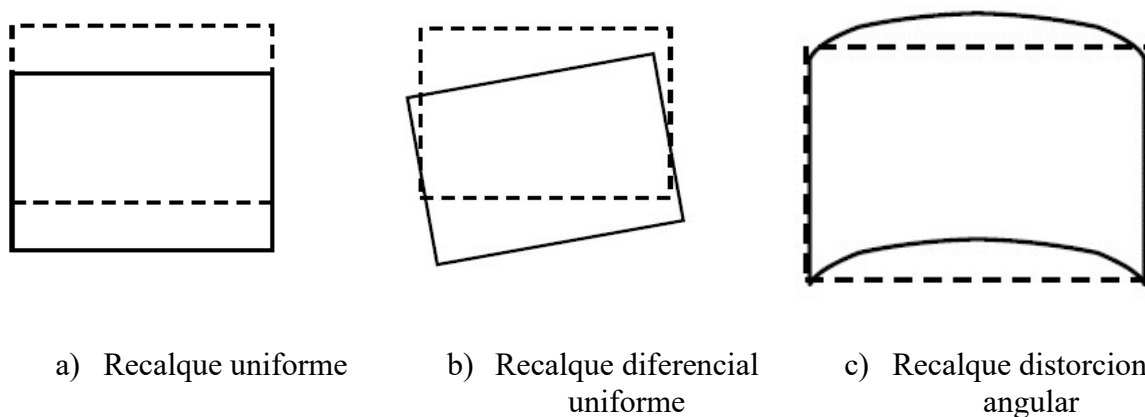


Figura 1.1 – Tipos de recalques.

A rigor, uma estrutura que sofre com recalques uniformes não apresenta danos estruturais no estado-limite último (ELU), mesmo para valores elevados de recalque. Entretanto, na prática, esse movimento ocorreria apenas em estruturas muito rígidas. Em edificações reticuladas, essa forma de deslocamento normalmente não ocorre, devido às diferenças de rigidez entre os seus elementos estruturais. Há alguns critérios que,

simplificadamente, limitam o recalque total de uma estrutura, não se diferenciando os recalques uniformes dos não uniformes. Essa limitação é, na verdade, uma maneira indireta de se considerar os recalques diferenciais ou distorcionais, tendo-se como base o empirismo (BURLAND *et al.*, 1977; CEN, 2004, 2004 e TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Os recalques ainda podem ser desmembrados em imediato e no tempo. Nos casos em que as fundações se apoiam diretamente em solos densos e resistentes, predominam as deformações imediatas, originando-se o recalque imediato. Os recalques no tempo são classificados em recalques por adensamento primário e por adensamento secundário. O primeiro ocorre pela expulsão da água presente nos vazios dos solos; o segundo refere-se a fluência, caso em que o solo fica sob pressões efetivas constantes no tempo.

Na literatura, identifica-se a existência de vários procedimentos da ISE contemplando os recalques imediatos. Trabalhos direcionados aos estudos da ISE abordando fenômenos de adensamento são raros. O adensamento leva a um comportamento de maior complexidade, porque podem ser considerados vários parâmetros; especialmente no caso de solos saturados, de granulação fina e baixa permeabilidade, como argilas. A presença de água nos vazios dos solos argilosos influencia muito na sua resistência. Para argilas moles saturadas, esse estudo torna-se ainda mais importante.

Construções em solos de argila mole ocorrem em todo o mundo. No Brasil, esses solos são encontrados em várias regiões como, por exemplo, na Baixada Santista - SP, Rio de Janeiro - RJ, Vitória - ES, Porto Alegre - RS, Salvador - BA, Aracaju - SE, Recife - PE e Belém - PA (SANDRONI *et al.*, 1997; PALMEIRA *et al.*, 2001; MAFFEI *et al.*, 2003; ALMEIDA *et al.*, 2008; MASSAD, 2009; DIAS, 2010; BRESSANI *et al.*, 2011; SANTOS *et al.*, 2018; VIEIRA *et al.*, 2021; e FERREIRA *et al.*, 2022).

Um exemplo clássico de construção erguida sobre esse tipo de solo é a Torre de Pisa, construída entre 1173 e 1372, com fundação superficial sobre uma camada de argila marinha profunda, com cerca de 30 m de espessura (Figura 1.2). Numerosas intervenções geotécnicas foram feitas para se tentar reduzir a inclinação dessa torre, desde o início da sua construção. Antes dos trabalhos de restauração realizados entre 1990 e 2001, a sua estrutura apresentou inclinação máxima com ângulo de aproximadamente 5,5 graus, em 1990. Estima-se que, na posição deformada da sua estrutura, as tensões verticais despertadas na fundação chegaram a alcançar quase o dobro do valor previsto para a estrutura suposta na vertical (COLARES, 2006).

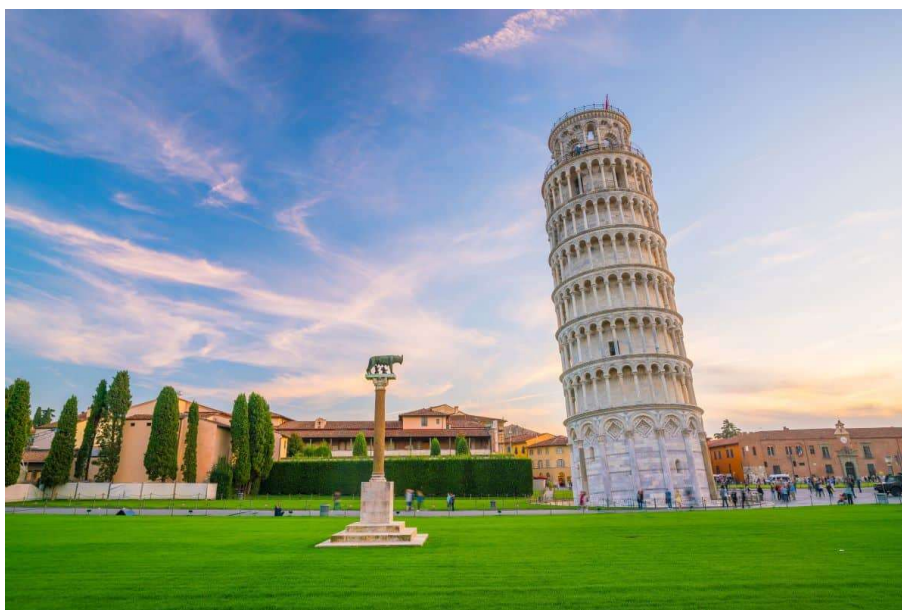


Figura 1.2 – Torre de Pisa.  
Fonte: SOARES, 2024.

Os recalques observados na capital mexicana são igualmente importantes. A Cidade do México repousa sobre uma camada de argila muito mole, com mais de 30 m de espessura. A sobrecarga no solo e o rebaixamento constante do lençol freático decorrente das necessidades de abastecimento da população agravam os problemas de movimento da fundação, trazendo inconvenientes em muitas obras e monumentos históricos da cidade (Figura 1.3). Pesquisas apontam que, nessa cidade, a taxa de recalque do solo é de cerca de 8 cm/ano, podendo chegar a 40 cm/ano, em algumas regiões (CIGNA e TAPETE, 2022).



Figura 1.3 – Palácio de Bellas Artes na Cidade do México.  
Fonte: PET CIVIL UFJF, 2021.

Problemas de recalques nos edifícios com fundação superficial à beira-mar na cidade brasileira de Santos - SP foram notados logo após a construção dos primeiros edifícios (Figura 1.4). Entre 1940 e 1970, essa cidade brasileira esteve em constante crescimento imobiliário, tendo a sua orla sido praticamente toda ocupada por grandes construções. O problema dos edifícios inclinados resulta do acréscimo de sobrecarga nas camadas de argila mole marinha, com cerca de 10 m de espessura, agravado pela concentração de bulbos de tensões dos prédios adjacentes. Como resultado, registros históricos de monitoramento nessas construções chegaram a indicar taxas de recalques da ordem de até 13 mm/ano (MAFFEI *et al.*, 2003).



Figura 1.4 – Edifícios inclinados na cidade de Santos - SP.  
Fonte: BLOGSPOT ORGULHO DE SER PAULSTA, 2017.

Cavalcanti *et al.* (2016) investigaram anomalias em um prédio construído, na década de 1980, na região metropolitana de Recife - PE. Sondagens nessa região indicaram a presença de solo muito resistente, sobreposto a uma camada de argila siltosa, com matéria orgânica, de mole a muito mole, com espessura de aproximadamente 10 m e nível d'água nas proximidades da superfície. Deslocamentos foram monitorados, ao longo de 10 anos, sem tendência de estabilização. Houve aumento linear do desaprumo, o que teria provocado translação do centro de gravidade desse prédio e redistribuição de cargas na sua fundação. O reforço desse edifício foi, então, proposto com o uso de microestacas.

Mesmo com relação a edifícios sobre fundações profundas, há relatos de consequências desastrosas como, por exemplo, o do colapso do Edifício Space, de 24 andares, na cidade de Medellín, na Colômbia, que resultou na morte de 12 pessoas. Esse prédio tinha seis torres interligadas, de alturas crescentes (Figura 1.5). A torre 6, a mais alta, sofreu problemas estruturais e recalques que variaram de 30 a 85 mm, durante e após a construção. Uma pesquisa de acompanhamento inferiu que essas falhas ocorreram devido à redistribuição

de cargas na ISE, em função do recalque excessivo de uma das estacas, fundada em solo de natureza argilosa de média a alta plasticidade (CAICEDO *et al.*, 2019).



(a) Poucos dias antes do colapso.



(b) Poucos dias após o colapso.

Figura 1.5 – Edifício Space.

Fonte: CAICEDO *et al.*, 2019.

Nesse contexto, pode-se afirmar que muitos desempenhos inesperados de estruturas observados na prática resultam da falta de compatibilidade, durante o desenvolvimento dos projetos, quanto à integração dos solos e das edificações. Normas regulamentadoras pelo mundo inteiro já buscam abordar esse tema.

No Brasil, a norma NBR 6122 (ABNT, 2019) postula que projetos de fundações contemplem o desempenho das obras tanto em estado limite último (ELU) quanto em estado limite de serviço (ELS), considerando-se a sensibilidade das estruturas às deformações de fundações por meio da ISE. Essa norma ainda preconiza que esses estudos sejam feitos, obrigatoriamente, nos seguintes casos: quando a estrutura tiver mais de 55 m de altura; quando a relação altura por largura (menor dimensão) for superior a quatro; quando a carga variável for significativa em relação à carga total; e quando as fundações ou as superestruturas forem não-convencionais. Juntamente com a avaliação da ISE, também são exigidos programas de monitoramento das obras, de modo a possibilitar comparações com as previsões de projeto. Os requisitos exigidos por essa norma são básicos, pois não apresentam recomendações de metodologias para os estudos da ISE, embora evidenciem clara preocupação de se garantir a segurança e o adequado funcionamento das estruturas ao longo de toda a vida útil de uma obra.

A aplicação da ISE na concepção dos projetos ainda não é realidade na maioria dos escritórios de Engenharia no Brasil, porque esse procedimento envolve, em muitos contextos, a participação multidisciplinar de profissionais experientes das áreas de Geologia, Engenharias Estrutural e Geotécnica. Por vezes, exige, também, o uso de métodos sofisticados de análises computacionais, sistemas hiperestáticos com muitos graus de liberdade e, conseqüentemente, maior custo computacional. O uso de algoritmos mais robustos, sem a convicção de que os parâmetros de solos representam a sua realidade, tornam esse procedimento inefetivo e menos atraente a sua prática corrente em projetos. Métodos de menor custo computacional, mais intuitivos e efetivos para aplicações emergentes da ISE, contribuiriam, substancialmente, para a representação integrada dos comportamentos das fundações e das superestruturas na concepção dos projetos. Nota-se, portanto, aí, oportunidade para inúmeras pesquisas no campo da ISE.

### **1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Meyerhof (1953) escreveu um dos primeiros trabalhos propondo o estudo da ISE, fundamentando-se no parâmetro intitulado rigidez relativa, definido pela razão entre a rigidez da superestrutura e a rigidez do solo. A superestrutura, nesse caso, é avaliada por meio de uma viga com rigidez à flexão equivalente à do pórtico, enquanto a rigidez do solo é computada conforme o seu módulo de deformabilidade. Os resultados desse estudo indicaram que quanto maior a rigidez relativa do sistema solo-estrutura, menores seriam os recalques diferenciais.

No Brasil, as primeiras abordagens com relação à ISE são creditadas a Chamecki (1956), que avaliou a influência da rigidez dos pórticos sobre a evolução dos recalques por meio de um processo iterativo. A superestrutura é, inicialmente, analisada com apoios indeslocáveis e, a partir das reações dos apoios, são obtidos os recalques, que são impostos à superestrutura, obtendo-se novas reações dos apoios. Para essas novas reações, os recalques são recalculados e, novamente, impostos à superestrutura. Esse procedimento é feito até se obter convergência dos valores das reações dos apoios ou dos recalques.

Poulos (1975), por sua vez, apresentou uma formulação baseada nos conceitos de Álgebra Matricial para estimar os recalques, considerando a influência da superestrutura e da fundação como um conjunto único, em termos de matrizes de rigidez da superestrutura e de flexibilidade da fundação. A imposição de forças unitárias nas três direções de cada apoio da superestrutura permite determinar a matriz de flexibilidade da fundação.

As pesquisas pioneiras na área da ISE, somadas aos avanços tecnológicos dos computadores e dos métodos numéricos, motivaram, posteriormente, contribuições de vários estudiosos, como evidenciam, por exemplo, os trabalhos de Davies e Banerjee (1978), Booker (1989), Ramalho (1990), Gusmão Filho (1995), Holanda Júnior (1998), Reis (2000), Cremer *et al.* (2001), Almeida (2003a), Almeida (2003b), Hall e Oliveto (2003), Chang *et al.* (2007), Souza e Reis (2008), Ribeiro (2009), Silva e Coda (2012), Mohammad *et al.* (2013), Ai *et al.* (2014), Gourvenec *et al.* (2014), Galvín e Romero (2014), Reis (2014), Tamayo e Awruch (2016) e Naccache e Almeida (2017) e Rosa *et al.* (2018).

No campo das simulações numéricas, comumente tem-se empregado o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEF é ferramenta versátil e eficiente para a solução de problemas da Mecânica Computacional, possibilitando a análise de diversos problemas na área de Engenharia. Contudo, no caso da simulação de solos, por exemplo, o MEF pode se tornar ferramenta onerosa para o armazenamento de dados, especialmente quanto a problemas tridimensionais, uma vez que esse método exige a discretização de todo o domínio. Para análises de problemas de domínio infinito, o MEC tem se mostrado mais eficiente, devido às características particulares das funções ponderadoras que já contemplam o atendimento de condições a grandes distâncias (ALMEIDA, 2003a).

A simulação numérica da ISE ainda é campo de pesquisa muito ativo. Khosravifardshirazi *et al.* (2022) analisaram um edifício de concreto construído sobre uma laje de fundação combinada a um solo elástico, aplicando aproximação clássica do MEF, utilizando cerca de 2 milhões de elementos sólidos para a modelagem de todo o domínio. Dhadse *et al.*

(2021 e 2022), por seu turno, apresentaram metodologias de estudo da ISE com modelagem em elementos finitos para a análise da interface solo-estrutura, considerando os efeitos de não-linearidade do solo, deslizamento e descolamento do contato.

Há, também, um outro ramo de pesquisa no qual alguns estudiosos procuram integrar a continuidade do sistema solo-estrutura por meio dos modelos de Winkler; um deles é Loukidis (2017). A grande vantagem dessa metodologia está na sua relativa facilidade para implementações e simulações numéricas, uma vez que os solos são representados por um modelo de molas discretas. Sua desvantagem pode ser atribuída à dificuldade de se escolher adequadamente os parâmetros das molas. O modelo convencional de Winkler pode negligenciar a interação entre as molas adjacentes, o que pode ocasionar erros nas análises. Em solos moles, essa simplificação tende a apresentar erros ainda maiores (PAVAN *et al.*, 2014). Para computar a influência de molas vizinhas, o modelo deve ser adequadamente calibrado, de forma a considerar as hipóteses de Mindlin (1936).

Recentemente, Siqueira *et al.* (2023) investigaram a influência da ISE utilizando pórticos com diferentes alturas. Os solos foram simulados por meio do modelo de Winkler e por meio da discretização do domínio em MEF, suposto contínuo. Os resultados obtidos indicaram maiores deslocamentos para a discretização por meio de molas. Analogamente, Porto *et al.* (2021) modelaram um edifício com paredes em concreto sobre uma laje de fundação apoiada em solo de argila mole. As análises foram realizadas variando-se as espessuras da laje de fundação sobre um conjunto de molas lineares do modelo de Winkler e, com isso, identificou-se dependência de rigidez das lajes de fundação para a redistribuição dos esforços.

Outros trabalhos relacionados à ISE abordaram o tema aplicando os métodos dos elementos finitos e elementos de contorno de forma combinada para aproveitar as características de cada método. Almeida (2003a), Ribeiro *et al.* (2005), Silva *et al.* (2012), Reis (2014), Huang e Qian (2024) e Azhir *et al.* (2024), por exemplo, empregaram técnicas de acoplamento direto (ou acoplamento monolítico), escrevendo os dois métodos em um único sistema de equações. Godinho e Soares Jr. (2017), por seu turno, empregaram acoplamento iterativo entre MEF e MEC, mantendo os dois sistemas de equações separados.

Outra abordagem de grande relevância na área da ISE refere-se à determinação das propriedades físicas dos solos para uso em modelos numéricos, conforme abordado por Rahgooy *et al.* (2022). Muitos parâmetros dos solos são, normalmente, estimados por correlações empíricas, o que pode gerar soluções incertas ou imprecisas (AQUINO, 2008). Pantelidis (2019) apresenta uma revisão de vários métodos de cálculos aplicáveis para a

determinação de módulos elásticos equivalentes em solos estratificados, concluindo que o princípio da superposição, baseado na Teoria da Elasticidade, poderia ser admitido, se considerada a influência das rigidezes de sapatas. Garbellini e Laloui (2021) analisaram os mecanismos de falhas das fundações em função da rigidez, considerando a ISE e modelos da Teoria da Plasticidade. Segundo eles, as pressões no contato solo-estrutura poderiam ser supostas como uniformes, para sapatas rígidas, independentemente das propriedades do solo.

Em solos saturados, as deformações ocorrem por meio da interação fluido-sólido, implicando maior complexidade para a determinação dos parâmetros físicos do solo. O aumento das pressões externas sobre o solo faz com que a água intersticial flua entre os seus grãos, devido à ocorrência de poro-pressões. Com a drenagem, as poro-pressões são convertidas em pressão efetiva sobre a porção sólida. Em solos permeáveis, esse problema é praticamente independente do tempo; no entanto, para solos de granulação fina, o tempo se torna significativo. Na Mecânica dos Solos, esse fenômeno é conhecido por Adensamento Primário e a Teoria do Adensamento Unidimensional de Terzaghi (1925) ainda é uma metodologia muito utilizada para prever esse fenômeno (AN *et al.*, 2012; XIE *et al.*, 2016; FENG *et al.*, 2024; OLEK, 2019; TIAN *et al.*, 2020; e SHI *et al.*, 2022).

Reis (2000) destaca a importância das análises da ISE para edificações sobre solos moles e, segundo ele, pode-se atribuir um dos entraves para avanços nesse ramo de pesquisa à complexidade de se calibrar modelos necessários à simulação desses problemas; especialmente, em função da grande quantidade de parâmetros físicos e mecânicos. Uma abordagem alternativa para esse tipo de problema é a associação por modelos viscoelásticos básicos. Apesar de esses modelos não explicarem, satisfatoriamente, os comportamentos físicos dos materiais, a grande vantagem de empregá-los reside no fato de o tratamento numérico ser mais efetivo, tornando os códigos mais gerenciais, compreensíveis e simples.

A analogia dos comportamentos dos materiais utilizando-se modelos viscoelásticos básicos é prática comum que vem sendo empregada, recentemente, para vários problemas da Engenharia com relação a diversos materiais. Os três modelos viscoelásticos mais utilizados, registrados na literatura, para essa aplicação, são os de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener (BECHO, 2016). A definição do modelo mais apropriado fica condicionada às hipóteses admitidas e ao conhecimento dos parâmetros físicos. Riobom Neto *et al.* (2021) aplicaram o modelo de Boltzmann a problemas estruturais quase-estáticos. Oliveira *et al.* (2019), por sua vez, utilizaram o modelo de Boltzmann para estudo do fenômeno de fluência em uma seção de

viaduto. Oliveira e Leonel (2017), por seu turno, aplicaram formulações de Boltzmann e Zener a problemas de Mecânica da Fratura.

Nesse contexto, os solos realmente podem ser admitidos com comportamento viscoelástico, porque apresentam um padrão de deformação atrasado, quando sujeitos a uma solicitação (VENTURINI, 1983). Gibson e Lo (1961) e Barden (1968) propuseram, respectivamente, os modelos de Boltzmann e Kelvin-Voigt, em termos de tensões efetivas, para contemplar os recalques por adensamento. Reis (2000) estudou a interação solo-estrutura em grupo de edifícios com fundações superficiais, em solos de argila mole, adotando o modelo de Kelvin-Voigt. Ai *et al.* (2014 e 2021) utilizaram o modelo viscoelástico de Boltzmann e as equações de adensamento de Biot para modelagem em função do tempo na ISE para solos saturados. Alipour e Rajabi (2017) consideraram um substrato viscoelástico, baseado no modelo de Kelvin-Voigt, para descrever os comportamentos dos solos sob uma placa-sanduíche para resolver problemas de vibração. Zhu *et al.* (2012), Wang *et al.* (2017) e Huang *et al.* (2021) utilizaram o modelo de Kelvin-Voigt com derivadas fracionárias para descrever os comportamentos viscoelásticos dos solos. Kacprzk *et al.* (2023) utilizaram modelos reológicos com propriedades viscoelásticas e plásticas para simulação de solos argilosos.

Percebe-se, portanto, que a representação dos comportamentos dos solos ao longo do tempo constitui tópico atual e de relevante interesse para a solução de problemas de Engenharia. À medida que a ISE é incorporada às pesquisas e às práticas de projetos, surge a necessidade de metodologias que possibilitem estudos das estruturas sob deformações do solo ao longo do tempo.

Apesar de a maioria dos trabalhos publicados até a presente data sobre a ISE abordar mais amplamente os efeitos decorrentes dos recalques imediatos da massa de solo, nos últimos anos algumas pesquisas foram realizadas abordando, simultaneamente, a ISE e as deformações do solo ao longo do tempo. Vlladkar *et al.* (1993), por exemplo, apresentaram uma formulação viscoelástica tridimensional em elementos finitos para estudar a interação solo-estrutura com respostas dependentes do tempo para os fenômenos de adensamento e de fluência. Bezih *et al.* (2020) avaliaram a ISE juntamente com os efeitos das deformações do solo a longo prazo por meio de um modelo unidimensional de Winkler. Alexandre *et al.* (2022) analisaram os comportamentos do solo e do concreto dependentes do tempo, considerando os efeitos dos fenômenos de fluência, retração e adensamento, por meio de um modelo numérico unidimensional de elementos finitos.

Por outro lado, a simulação dos comportamentos de estruturas tridimensionais sobre solos moles, utilizando-se discretização de todo o domínio ou a redução do problema a um universo unidimensional, pode não ser viável para rotinas de escritórios de projetos ou mesmo não representar, adequadamente, as verdadeiras condições da obra, o que confere relevância às pesquisas que contribuam para outras metodologias de análise.

#### **1.4 OBJETIVOS**

O presente estudo tem por objetivo geral a construção de procedimento numérico aplicado às análises da Interação Solo-Estrutura (ISE), sendo os solos sujeitos à processos viscoelásticos, considerando-se os efeitos de não linearidade geométrica das superestruturas.

Os seus objetivos específicos são:

- a) desenvolver e apresentar, explicitamente, formulações para elementos de pórticos espaciais, sujeitos às condições de não linearidade geométrica, no âmbito do Método dos Elementos Finitos;
- b) desenvolver modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener por meio do Método dos Elementos de Contorno com solução fundamental de Mindlin;
- c) contribuir com procedimentos de parametrização de modelos reológicos aplicados a solos;
- d) implementar códigos computacionais de todas as formulações desenvolvidas; e
- e) aplicar ferramentas desenvolvidas para análises da ISE em exemplos teóricos com o uso de acoplamento interativo entre o MEC e o MEF.

#### **1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Os capítulos desta tese estão organizados conforme sequência lógica de ideias, visando facilitar a sua leitura e possibilitar melhor entendimento do assunto abordado.

No Capítulo 1, tecem-se considerações introdutórias, visando-se destacar a relevância do tema, envolvendo abordagens relacionadas à motivação, às justificativas, à revisão bibliográfica, aos objetivos e à organização do texto.

No Capítulo 2, abordam-se os principais conceitos de análise não-linear geométrica para o desenvolvimento das formulações explícitas do elemento de pórtico, no âmbito do MEF (CRISFIELD, 1997 e 2000).

No Capítulo 3, apresentam-se formulações para a descrição viscoelástica dos materiais, segundo os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener, e apresentam-se correlações entre os métodos para os problemas de fluência e relaxação.

No Capítulo 4, descrevem-se as principais técnicas e aplicações do Método dos Elementos de Contorno elástico convencional (MEC), tendo-se como base, especialmente, os trabalhos de Brebbia (1978), Brebbia *et al.* (1984), Brebbia e Domínguez (1992) e Becker (1992).

No Capítulo 5, reescrevem-se as formulações do MEC em termos de tensões e deformação no contorno, para os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener.

A seguir, no Capítulo 6, apresenta-se o acoplamento iterativo do MEF/MEC para análise da ISE para avaliação da influência dos recalques por adensamento sobre a estrutura.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentam-se as considerações finais.

# 2

## SUPERESTRUTURAS EM MEF PARA NLG

### 2.1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento das tecnologias de fabricação de novos materiais e a necessidade crescente de otimização dos projetos estruturais, aliados a aspectos econômicos, tem impulsionado estudos contínuos das propriedades mecânicas dos materiais e dos comportamentos globais das estruturas. Os modelos propostos tornam-se cada dia mais sofisticados, apresentando, quase sempre, inovações em suas formulações matemáticas e incluindo a influência de novos e significativos fatores antes desprezados ou contornados (AQUINO, 2008).

A construção de edifícios cada vez mais leves e esbeltos tem levado em consideração efeitos não-lineares. A não-linearidade provocada pela alteração na configuração geométrica da estrutura é chamada de não-linearidade geométrica (NLG), enquanto a não-linearidade resultante dos efeitos inerentes à lei constitutiva do material é conhecida como não-linearidade física (NLF).

A análise não-linear geométrica é realizada sempre que os níveis de deslocamentos ou rotações influenciam, significativamente, os esforços internos e, conseqüentemente, o equilíbrio. Essa análise é realizada em teoria de segunda ordem e pode ser feita por meio de teorias exatas, aproximadas ou adaptadas dos resultados das teorias de primeira ordem.

A maior esbeltez dos elementos estruturais resulta em obras mais susceptíveis às deformações que ocorrem antes das rupturas físicas. Essas estruturas ficam sujeitas a faixas de solicitações e deformações acima daquelas com base nas quais é possível admitir a hipótese de linearidade entre tensões e deformações. Como consequência disso, há a necessidade da inclusão de efeitos não-lineares relacionados a aspectos construtivos dos materiais nas formulações da análise estrutural (AQUINO, 2008).

Neste capítulo, apresentam-se as formulações não lineares geométricas do MEF, a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). As formulações apresentadas possibilitaram

a implementação de elementos de barra para modelagem de estruturas reticuladas em MEF no Matlab<sup>®</sup>. Maiores detalhes podem ser encontrados em Bathe (1982), Crisfield (1997 e 2000) e Alves Filho (2012). No final do capítulo, apresentam-se exemplos para validação das formulações e do código implementado.

## 2.2 FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

### 2.2.1 CINEMÁTICA

O elemento finito utilizado para a formulação deste trabalho apresenta apenas dois nós, sendo que cada um deles apresenta cinco graus de liberdade, a saber: movimentos de translação ao longo dos três eixos locais cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mais duas rotações em torno dos eixos  $y$  e  $z$  (Figura 2.1). A rotação em torno do eixo  $x$  é tratada separadamente, na Seção 2.3 deste trabalho.

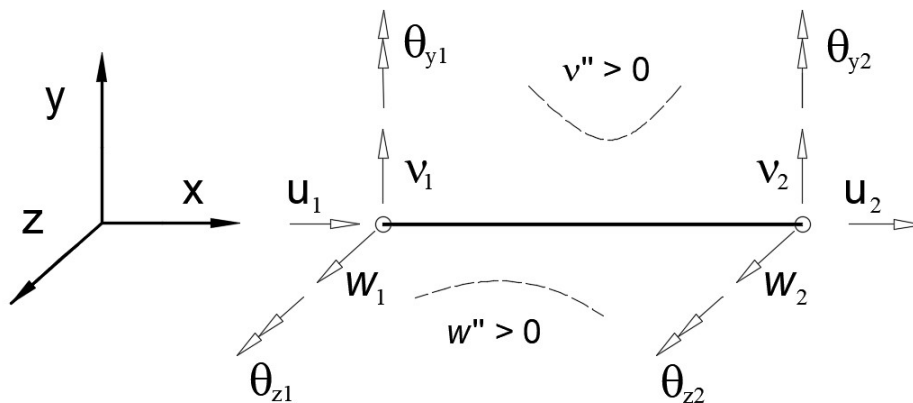


Figura 2.1 – Eixos locais de referência, curvatura e graus de liberdade para o elemento de dois nós.

A deformação axial de Green-Lagrange para componentes de deslocamentos ( $u$ ,  $v$  e  $w$ ) em um elemento reticulado é dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.1)$$

Sabe-se que a mudança de posição de um determinado ponto ( $P'$ ) da barra sujeito à flexão pura pode ser expressa da seguinte forma, assumindo-se a hipótese cinemática de Bernoulli-Euler:

$$u = u_0(x) - yv' - zw' \quad (2.2)$$

em que  $u, v$  e  $w$  são as componentes de deslocamento de um ponto qualquer da seção transversal em relação aos eixos  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. Os termos  $v' = \partial v / \partial x$  e  $w' = \partial w / \partial x$  são as derivadas dos campos  $v$  e  $w$ , as quais foram linearizadas, uma vez que as rotações são de pequena magnitude, conforme detalhes disponíveis em Crisfield (1997). Nesse contexto, pode-se admitir que as expressões de rotação são dadas por  $\theta_z = v'$  e  $\theta_y = -w'$  (CRISFIELD, 2000).

A Figura 2.2 e a Figura 2.3 mostram as variáveis do problema representado na Equação (2.2) para movimentos ocorridos nos planos XZ e XY. Admite-se, ainda, a hipótese de ausência de deformações dentro do próprio plano da seção transversal, o que resulta em  $v = v_0(x)$  e  $w = w_0(x)$ . Os termos  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$  e  $w_0(x)$  referem-se aos deslocamentos do centroide da seção, no eixo da barra, nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente.

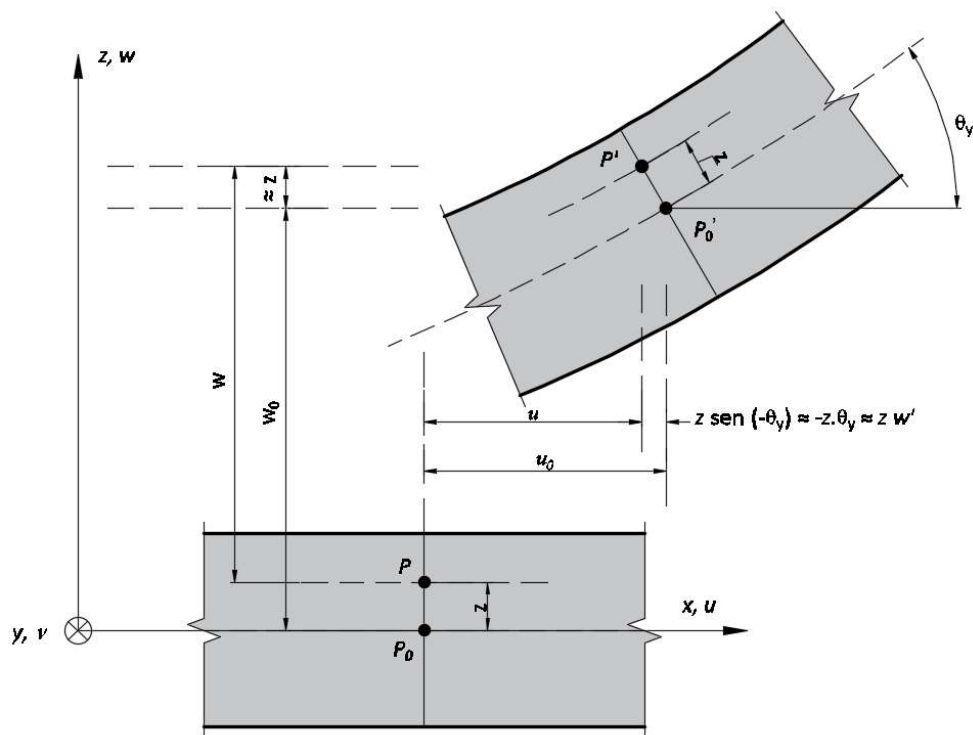


Figura 2.2 – Deformação de um segmento do eixo da barra – plano XZ.

Fonte: Adaptado de CALDAS, 2004.

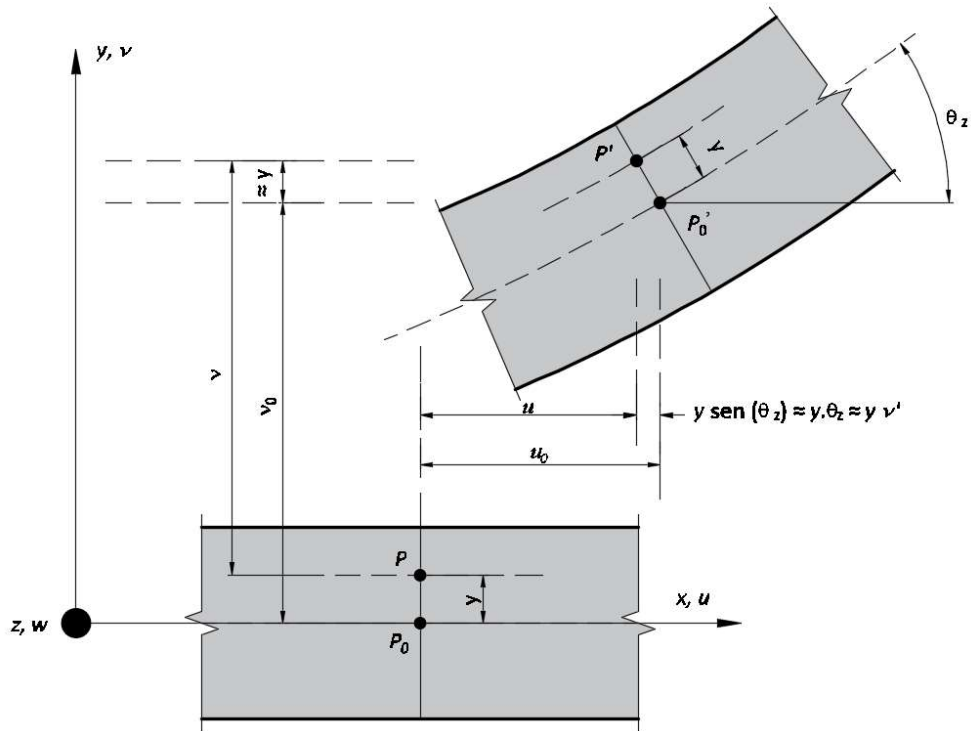


Figura 2.3 – Deformação de um segmento do eixo da barra – plano XY.  
Fonte: Adaptado de CALDAS, 2004.

A substituição da Equação (2.2) na Equação (2.1), resulta em:

$$\epsilon_x = u' + \frac{1}{2}[(v')^2 + (w')^2] - yv'' - zw'' \quad (2.3)$$

em que:

$$\epsilon_0 = u' + \frac{1}{2}[(v')^2 + (w')^2] \quad (a)$$

$$k_y = -w'' \quad (b) \quad (2.4)$$

$$k_z = v'' \quad (c)$$

### 2.2.2 RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O equilíbrio pode ser demonstrado com a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), admitindo-se que:

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (2.5)$$

Considerando-se as deformações de Green-Lagrange e as hipóteses de Bernoulli-Euler, a energia interna desenvolvida em um elemento de pórtico de seção prismática de área  $A$  e comprimento  $l$  pode ser expressa desta forma:

$$\delta W_{int} = \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV = \int_0^l \left[ \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA \right] dx \quad (2.6)$$

ou, ainda:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \left[ \int_A \left( \sigma_x \delta u' - \sigma_x y \delta v'' - \sigma_x z \delta w'' + \frac{1}{2} \sigma_x \delta (v')^2 + \frac{1}{2} \sigma_x \delta (w')^2 \right) dA \right] dx \quad (2.7)$$

sendo  $\sigma_x$  a tensão normal na seção na direção do eixo local  $x$ .

Aplicando-se o operador variacional ( $\delta$ ) no quarto e no quinto termos da Equação (2.11), tem-se:

$$\delta W_{int} = \int_0^l \left[ \int_A \left( \sigma_x \delta u' - \sigma_x y \delta v'' - \sigma_x z \delta w'' + \sigma_x v' \delta v' + \sigma_x w' \delta w' \right) dA \right] dx \quad (2.8)$$

Assumindo-se seção prismática para o elemento de pórtico, a homogeneidade do material e a linearidade entre tensões e deformações, obtém-se as seguintes relações entre esforços internos, deformações e curvaturas:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = E \cdot A \cdot u' \quad (a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = -E \cdot I_y \cdot w'' \quad (b) \quad (2.9)$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA = E \cdot I_z \cdot v'' \quad (c)$$

em que  $I_y$  representa o momento de inércia principal da seção, relativo ao eixo local  $y$ ,  $I_z$  igual ao momento de inércia principal da seção relativo ao eixo local  $z$ , e  $E$  é igual ao módulo de elasticidade longitudinal do elemento.

A Equação (2.8) pode ser reescrita, conforme a seguir:

$$\delta W_{int} = \int_0^l [\delta u' N_x + v' \delta v' N_x + w' \delta w' N_x + \delta v'' M_z - \delta w'' M_y] dA dx \quad (2.10)$$

O trabalho das forças externas pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} = & N_1 \cdot \delta u_1 + N_2 \cdot \delta u_2 + Q_{y1} \cdot \delta v_1 + M_{z1} \cdot \delta \theta_{z1} + Q_{y2} \cdot \delta v_2 + M_{z2} \cdot \delta \theta_{z2} \\ & + Q_{z1} \cdot \delta w_1 + M_{y1} \cdot \delta \theta_{y1} + Q_{z2} \cdot \delta w_2 + M_{y2} \cdot \delta \theta_{y2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que  $N_{x1}$  e  $N_{x2}$  representam as forças externas na direção do eixo local x dos nós 1 e 2, respectivamente. Os termos  $Q_{y1}$ ,  $Q_{y2}$ ,  $Q_{z1}$  e  $Q_{z2}$  referem-se às forças externas na direção dos eixos locais y e z dos nós 1 e 2 e os termos  $M_{z1}$ ,  $M_{z2}$ ,  $M_{y1}$  e  $M_{y2}$  iguais aos correspondentes momentos externos aplicados em torno dos eixos z e y dos nós 1 e 2.

### 2.2.3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

A montagem do elemento finito de pórtico espacial, descrito por meio dos polinômios de Lagrange, resulta nas relações matemáticas de  $u$ ,  $v$  e  $w$ , em termos dos deslocamentos nodais locais generalizados, conforme indicado a seguir:

$$u = [\phi_u]^T \cdot [q_u] \quad (a)$$

$$v = [\phi_v]^T \cdot [q_v] \quad (b) \quad (2.12)$$

$$w = [\phi_w]^T \cdot [q_w] \quad (c)$$

sendo  $[q_u]^T$ ,  $[q_v]^T$  e  $[q_w]^T$  os vetores de deslocamentos nodais dados por:

$$[q_u]^T = [u_1 \ u_2] \quad (a)$$

$$[q_v]^T = [v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2}] \quad (b) \quad (2.13)$$

$$[q_w]^T = [w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2}] \quad (c)$$

Os vetores das funções aproximadoras  $[\phi_u]$ ,  $[\phi_v]$  e  $[\phi_w]$  são apresentados na Equação (2.14) e são obtidos utilizando-se os polinômios de Lagrange, com os campos de deslocamentos expressos em termos da coordenada homogênea adimensional  $\xi = \frac{x}{l}$ ; ou seja:  $1 \leq \xi \leq -1$ .

$$[\phi_u] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \\ \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$[\phi_v] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{bmatrix} \quad (b)$$

(2.14)

$$[\phi_w] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ -\frac{l}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \\ -\frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \right) \end{bmatrix} \quad (c)$$

A derivada associada ao campo de deslocamento na direção x é dada por:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l} \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d(\phi_u \cdot q_u)}{d\xi} = \frac{1}{l} [\phi_u']^T \cdot [q_u] \quad (a)$$

(2.15)

$$u' = \frac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

As derivadas associadas ao campo de deslocamentos na direção y são expressas por:

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d(\Phi_v \cdot \mathbf{q}_v)}{d\xi} = \frac{1}{l} [\Phi'_v]^T \cdot [\mathbf{q}_v] \quad (\text{a})$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\xi^2 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \right) \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\xi^2 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \right) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

(2.16)

$$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2(\Phi_v \cdot \mathbf{q}_v)}{d\xi^2} = \frac{1}{l^2} [\Phi''_v]^T \cdot [\mathbf{q}_v] \quad (\text{c})$$

$$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\xi \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \right) \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\xi^2 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \right) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} \quad (\text{d})$$

As derivadas associadas ao campo de deslocamento na direção z são:

$$w' = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{l} \frac{d(\Phi_w \cdot \mathbf{q}_w)}{d\xi} = \frac{1}{l} [\Phi'_w]^T \cdot [\mathbf{q}_w] \quad (\text{a})$$

$$w' = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\xi^2 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \right) \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\xi^2 \\ \frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 \right) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{y_2} \end{bmatrix} \quad (\text{b}) \quad (2.17)$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2(\Phi_w \cdot \mathbf{q}_w)}{d\xi^2} = \frac{1}{l^2} [\Phi''_w]^T \cdot [\mathbf{q}_w] \quad (\text{c})$$

$$w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\xi \\ l \cdot \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2\right) \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\xi^2 \\ l \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\xi^2\right) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta y_1 \\ w_2 \\ \theta y_2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Correlacionando-se as equações (2.5), (2.9) a (2.11) e (2.17), tem-se:

$$\delta W_{int} = \int_0^l [\delta u'(EAu') + \delta v''(EI_z v'') - \delta w''(EI_y w'') + v' \delta v'(EAu') + w' \delta w'(EAu')] dx \quad (2.18)$$

em que:

$$\delta u'(EAu') = \frac{EA}{l^2} \cdot [\delta \mathbf{q}_u]^T \cdot [\phi'_u] \cdot [\phi'_u]^T \cdot [\mathbf{q}_u] \quad (a)$$

$$\delta v''(EI_z v'') = \frac{EI_z}{l^4} \cdot [\delta \mathbf{q}_v]^T \cdot [\phi''_v] \cdot [\phi''_v]^T \cdot [\mathbf{q}_v] \quad (b)$$

$$\delta w''(EI_y w'') = \frac{EI_y}{l^4} \cdot [\delta \mathbf{q}_w]^T \cdot [\phi''_w] \cdot [\phi''_w]^T \cdot [\mathbf{q}_w] \quad (c) \quad (2.19)$$

$$v' \delta v'(EAu') = \frac{N_x}{l^2} \cdot [\delta \mathbf{q}_w]^T \cdot [\phi'_v] \cdot [\phi'_v]^T \cdot [\mathbf{q}_v] \quad (d)$$

$$w' \delta w'(EAu') = \frac{N_x}{l^2} \cdot [\delta \mathbf{q}_w]^T \cdot [\phi'_w] \cdot [\phi'_w]^T \cdot [\mathbf{q}_w] \quad (e)$$

O trabalho das forças externas pode ser assim representado:

$$\delta W_{ext} = \delta[\mathbf{q}]^T [\mathbf{r}_m] \quad (2.20)$$

equação na qual  $\mathbf{q}$  representa o conjunto de deslocamentos nodais generalizados do elemento  $m$ ; ou seja:  $[\mathbf{q}]^T = [u_1 \ u_2 \ v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2} \ w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2}]$ , conforme ilustrado na Figura 2.1, e

$\mathbf{r}_m$  o carregamento externo sobre o elemento  $m$ ; ou seja:  $[\mathbf{r}_m] = [N_{x1} \ N_{x2} \ Q_{y1} \ M_{z1} \ Q_{y2} \ M_{z2} \ Q_{z1} \ M_{y1} \ Q_{z2} \ M_{y2}]$ .

A partir da Equação (2.5), pode-se escrever a relação de equilíbrio entre esforços internos e forças externas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& [\delta \mathbf{q}_u^T] \cdot \left[ \frac{EA}{l} \int_{-1}^1 [\phi'_u] \cdot [\phi'_u]^T d\xi \right] \cdot [\mathbf{q}_u] + [\delta \mathbf{q}_v^T] \cdot \left[ \frac{EI_z}{l^3} \int_{-1}^1 [\phi''_v] \cdot [\phi''_v]^T d\xi \right] \cdot [\mathbf{q}_v] \\
& - [\delta \mathbf{q}_w^T] \cdot \left[ \frac{EI_y}{l^3} \int_{-1}^1 [\phi''_w] \cdot [\phi''_w]^T d\xi \right] \cdot [\mathbf{q}_w] \\
& + [\delta \mathbf{q}_v^T] \cdot \left[ \frac{N_x}{l} \int_{-1}^1 [\phi'_v] \cdot [\phi'_v]^T d\xi \right] \cdot [\mathbf{q}_v] \\
& + [\delta \mathbf{q}_w^T] \cdot \left[ \frac{N_x}{l} \int_{-1}^1 [\phi'_w] \cdot [\phi'_w]^T d\xi \right] \cdot [\mathbf{q}_w] = [\delta \mathbf{q}_w^T] \cdot [\mathbf{r}_m]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por fim, podem-se eliminar os termos diferenciais e reescrever a Equação (2.21) em termos da matriz de rigidez,  $[\mathbf{K}]$ , do vetor de deslocamentos nodais,  $[\mathbf{q}]$ , e do vetor de forças externas nodais,  $[\mathbf{r}_m]$ , conforme exposto a seguir:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{k}_u]_{2 \times 2} & [\mathbf{0}]_{2 \times 4} & [\mathbf{0}]_{2 \times 4} \\ [\mathbf{0}]_{4 \times 2} & [\mathbf{k}_v] + [\mathbf{k}_{v,g}]_{4 \times 4} & [\mathbf{0}]_{4 \times 4} \\ [\mathbf{0}]_{4 \times 2} & [\mathbf{0}]_{4 \times 4} & [\mathbf{k}_w] + [\mathbf{k}_{w,g}]_{4 \times 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_z \end{bmatrix} \tag{a}$$

$$\tag{2.22}$$

$$[\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{q}] = [\mathbf{r}_m] \tag{b}$$

em que:

$$[\mathbf{k}_u]_{2 \times 2} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{a}$$

$$[\mathbf{k}_v] = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_z}{l^3} & 6 \frac{EI_z}{l^2} & -12 \frac{EI_z}{l^3} & 6 \frac{EI_z}{l^2} \\ 6 \frac{EI_z}{l^2} & 4 \frac{EI_z}{l} & -6 \frac{EI_z}{l^2} & 2 \frac{EI_z}{l} \\ -12 \frac{EI_z}{l^3} & -6 \frac{EI_z}{l^2} & 12 \frac{EI_z}{l^3} & -6 \frac{EI_z}{l^2} \\ 6 \frac{EI_z}{l^2} & 2 \frac{EI_z}{l} & -6 \frac{EI_z}{l^2} & 4 \frac{EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{b}$$

$$\tag{2.23}$$

$$[\mathbf{k}_w] = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_y}{l^3} & 6 \frac{EI_y}{l^2} & -12 \frac{EI_y}{l^3} & 6 \frac{EI_y}{l^2} \\ 6 \frac{EI_y}{l^2} & 4 \frac{EI_y}{l} & -6 \frac{EI_y}{l^2} & 2 \frac{EI_y}{l} \\ -12 \frac{EI_y}{l^3} & -6 \frac{EI_y}{l^2} & 12 \frac{EI_y}{l^3} & -6 \frac{EI_y}{l^2} \\ 6 \frac{EI_y}{l^2} & 2 \frac{EI_y}{l} & -6 \frac{EI_y}{l^2} & 4 \frac{EI_y}{l} \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$[\mathbf{k}_g] = \frac{N_x}{30.l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & -3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ -3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$[\mathbf{0}]_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{0}]_{4 \times 2} = [\mathbf{0}]_{2 \times 4}^T \quad (e)$$

$$[\mathbf{0}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3 CONSIDERAÇÕES ACERCA DA RIGIDEZ À TORÇÃO

As formulações apresentadas na Seção 2.2 têm por princípio o comportamento não-linear, influenciado apenas pelos efeitos das forças axiais e dos esforços de flexão. Na modelagem do pórtico espacial, a torção é admitida com relação linear, para se garantir a validade das equações de equilíbrio e compatibilidade dos deslocamentos.

Os termos da torção são posicionados na matriz de rigidez global de forma desacoplada dos demais deslocamentos e, portanto, sendo influenciados apenas pelas relações constitutivas.

Das hipóteses clássicas de Resistência dos Materiais, desconsiderando-se os efeitos da flexotorção, o momento torsor pode ser escrito conforme a seguir:

$$M_x = G.J. \frac{d\theta_x}{dx} \quad (2.24)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento,  $J$  é a constante de torção,  $\frac{d\theta_x}{dx} = \theta_x'$  a derivada do ângulo de torção em relação ao eixo  $x$ , e  $M_x$  igual ao momento torsor.

A relação entre momento torsor  $M_x$  e a derivada do ângulo de torção  $\frac{d\theta_x}{dx}$  é análoga à relação definida para barras sujeitas a carga axial. Portanto, a mesma função de interpolação utilizada para se descrever deslocamentos axiais é utilizada para se representar os ângulos de torção  $\theta_x$ , a saber:

$$\theta_x(x) = \left[ \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \quad \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \right] \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A matriz de rigidez resultante para barras em torção é a sua forma clássica, expressa na Equação (2.26) seguir:

$$[k] = \frac{G \cdot J}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez global pode ter os seus termos reorganizados, conforme mostrado na Equação (2.27):

$$\begin{bmatrix} N_{x1} \\ Q_{y1} \\ Q_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ Q_{y2} \\ Q_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1,6} & \dots & k_{12,12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

## 2.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

O estudo do elemento de pórtico, conforme demonstrado na Equação (2.22), constitui uma análise não linear, uma vez que a matriz de rigidez da estrutura,  $[\mathbf{K}]$ , varia com o campo de deslocamentos.

A Equação (2.22) pode ser reescrita, então, em termos das matrizes de constitutiva,  $[\mathbf{K}]_c$ , e de rigidez geométrica,  $[\mathbf{K}]_g$ , a partir do conjunto de equações (2.23):

$$\{[K]_c + [K]_g\} \cdot [q] = [r_m] \quad (2.28)$$

A matriz de rigidez constitutiva depende apenas das propriedades físicas do material e das propriedades geométricas iniciais do elemento finito, enquanto a matriz de rigidez geométrica varia em função do campo de deslocamentos, tornando a análise não linear.

O Método de Newton-Raphson é procedimento iterativo que possibilita encontrar raízes de funções não lineares a partir de uma previsão inicial (no caso de análise NLG de estruturas, toma-se como referência a resposta elástica inicial). A característica principal desse método é a busca por solução a uma taxa de convergência quadrática, o que faz com que esse método seja altamente efetivo, frequentemente empregado em problemas de otimização, quando se deseja minimizar a função objetivo (BELEGUNDU e CHANDRUPATLA, 2019).

A aplicação desse método em problemas de não linearidade geométrica consiste em procedimento incremental que visa à definição de um vetor resíduo  $[G]$  dependente do campo de deslocamentos  $[q]$ , de modo a buscar, iterativamente, o vetor de deslocamentos que resulta em  $[G] \cong [0]$ ; ou seja:

$$[G(q)] = [r_m] - \{[K]_c + [K]_g\} \cdot [q] \quad (2.29)$$

Expandindo-se a Equação (2.29) em série de Taylor e truncando-se nos termos lineares, obtém-se:

$$[G(q_i)] = [G(q_{i-1})] + \nabla[G(q_{i-1})] \cdot \{[q_i] - [q_{i-1}]\} \cong [0] \quad (a)$$

$$\begin{aligned} [G(q_i)] &= [r_m] - \{[K]_c + [K]_g\}_{i-1} \cdot [q_{i-1}] \\ &\quad - \{[K]_c + [K]_g\}_{i-1} \cdot \{[q_i] - [q_{i-1}]\} \end{aligned} \quad (b) \quad (2.30)$$

em que  $[q_i]$  corresponde ao campo de deslocamentos nodais da iteração  $i$ ,  $[G(q_i)]$  ao vetor resíduo de  $[q_i]$  e  $\nabla[G(q_{i-1})]$  à matriz Hessiana.

Uma vez calculado o vetor resíduo da iteração  $i$ , o campo de deslocamentos nodais da iteração  $i+1$  pode ser definido conforme a equação a seguir:

$$[\mathbf{q}_{i+1}] = [\mathbf{q}_i] + \{[\mathbf{K}]_c + [\mathbf{K}]_g\}_{i-1}^{-1} \cdot [\mathbf{G}(\mathbf{q}_i)] \quad (2.31)$$

O procedimento é repetido até que a diferença entre as duas aproximações consecutivas atinja um valor dentro da tolerância desejada pelo usuário; ou seja:  $[\mathbf{q}_{i+1}] \cong [\mathbf{q}_i]$ . O critério de convergência adotado no algoritmo é estabelecido na Equação (2.32).

$$\| [\mathbf{q}_{i+1}] - [\mathbf{q}_i] \| \leq tol \quad (2.32)$$

em que  $\| * \|$  representa a norma euclidiana e  $tol$ , a tolerância.

Um esquema representativo do processo iterativo de Newton-Raphson é mostrado na Figura 2.4, a seguir.

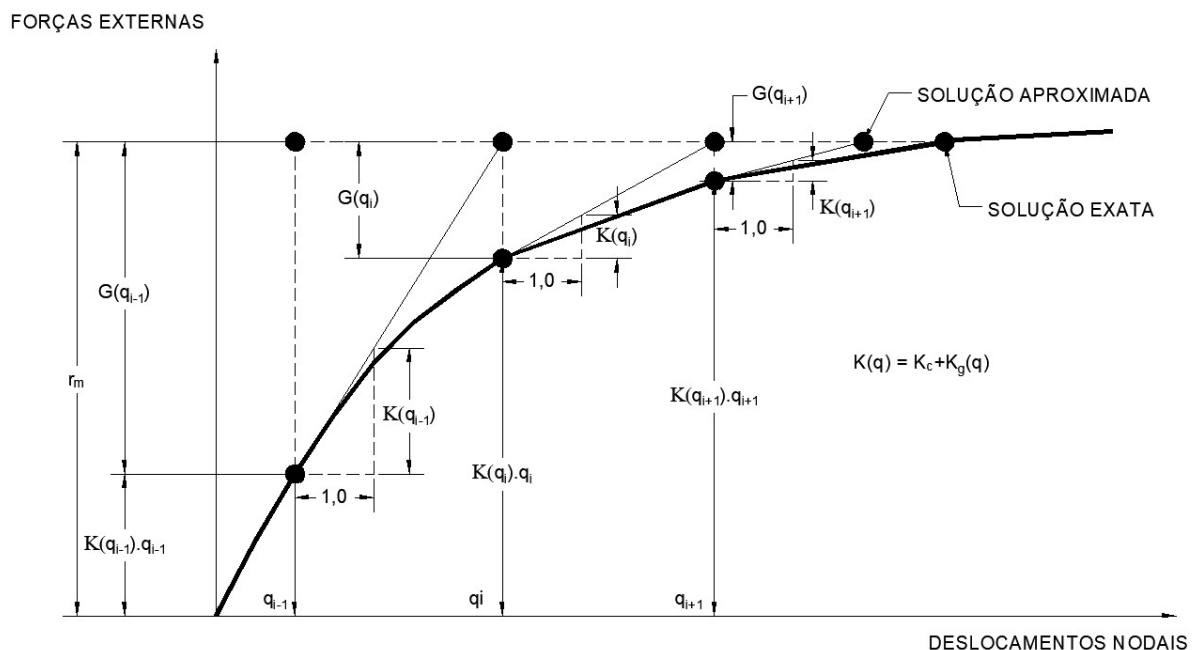


Figura 2.4 – Esquema representativo do processo iterativo do Método de Newton-Raphson.

## 2.5 IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGO EM MEF COM RECURSOS NA ANÁLISE NLG

O algoritmo do MEF para elementos de pórtico espacial foi inteiramente desenvolvido para análises lineares e não lineares geométricas de maneira modular, em *scripts*, por meio do Matlab<sup>®</sup>.

A partir da entrada de dados da geometria e propriedades físicas do contorno, a rotina é processada e os dados de saída podem ser avaliados no próprio ambiente do Matlab® ou ser exportados para arquivos de textos.

## 2.6 EXEMPLO 1 – ANÁLISES DOS EFEITOS GLOBAL E LOCAL $P-\Delta$ E $P-\delta$ .

Neste exemplo, apresenta-se a dedução analítica da matriz de rigidez associada apenas ao efeito global  $P - \Delta$ , referente aos deslocamentos laterais das estruturas, e da matriz de rigidez associada apenas ao efeito local  $P - \delta$ , decorrente dos deslocamentos locais, conforme mostrado na Figura 2.5.

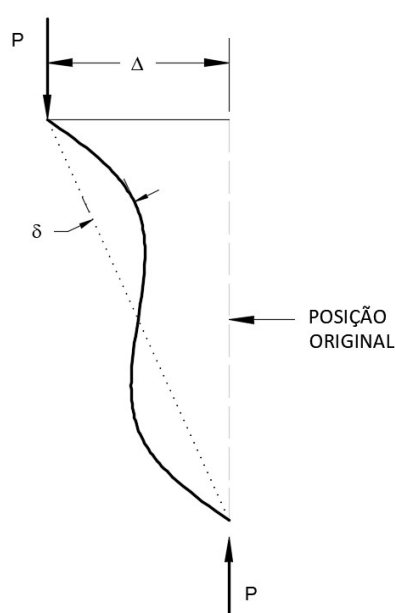


Figura 2.5 – Efeitos global  $P - \Delta$  e local  $P - \delta$ .

Considerando-se o deslocamento lateral do nível “i” de um pavimento (Figura 2.6), pode-se calcular o momento produzido pela carga vertical do nível como:

$$M_i = P_i \cdot \Delta_i \quad (2.33)$$

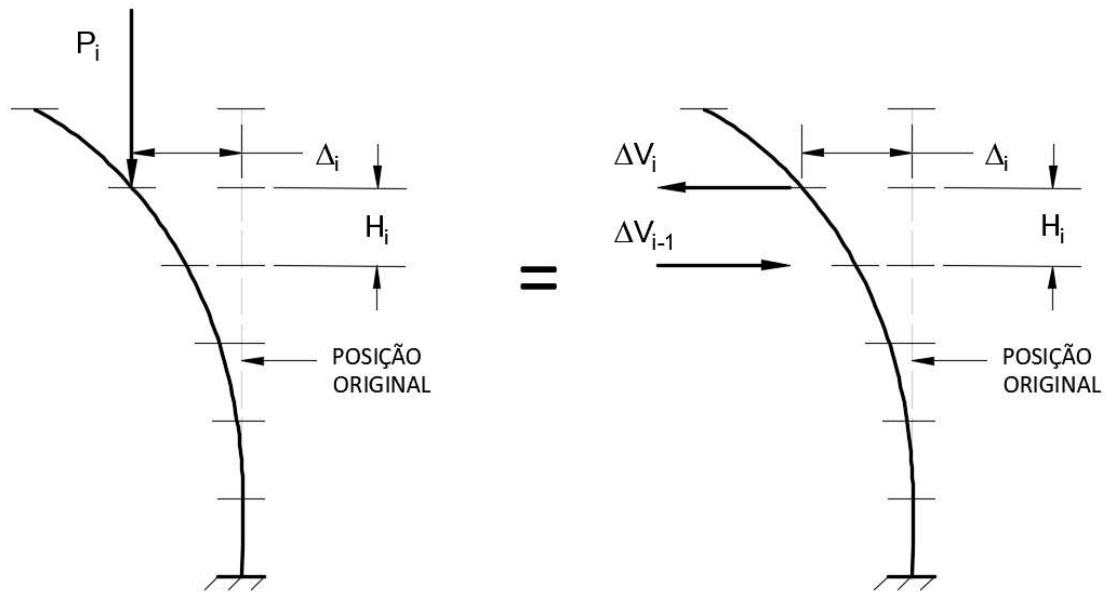


Figura 2.6 – Forças laterais equivalentes para o cálculo do efeito global  $P - \Delta$ .

Esse momento pode ser convertido em forças laterais equivalentes às aplicadas nos pavimentos “i” e “i-1”, considerando-se:

$$\Delta V_i = \frac{P_i \cdot \Delta_i}{H_i} \quad (2.34)$$

Esse problema ainda pode ser resolvido escrevendo-se a Equação (2.34) para os dois pavimentos adjacentes para a obtenção das cargas laterais equivalentes, que é função dos deslocamentos laterais relativos entre pavimentos.

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i \\ \Delta V_{i-1} \end{bmatrix} = \frac{P_i}{H_i} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Tendo-se como referência a Equação (2.34) e a matriz de rigidez geométrica apresentada na Equação (2.23)-(d), pode-se desmembrar a matriz de rigidez geométrica em duas outras, sendo uma contemplando os efeitos globais  $P - \Delta$  e, a outra, contemplando os efeitos locais  $P - \delta$ , conforme se mostra a seguir:

$$[k_g] = [k_g]_{\Delta} + [k_g]_{\delta} \quad (2.36)$$

em que:

$$[k_g]_{\Delta} = \frac{N_x}{30.l} \begin{bmatrix} 30 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

(2.37)

$$[k_g]_{\delta} = \frac{N_x}{30.l} \begin{bmatrix} 6 & 3l & 6 & -3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ 6 & -3l & 6 & -3l \\ -3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Sendo assim, a matriz de rigidez geométrica dos efeitos globais  $P - \Delta$  incide apenas sobre os deslocamentos laterais entre os nós de extremidades, o que causa alterações nas forças cortantes, devido à influência dos deslocamentos laterais e à força normal  $N_x$ . As demais parcelas da matriz geométrica são alocadas na matriz de rigidez geométrica que descreve o efeito local  $P - \delta$ .

## 2.7 EXEMPLO 2 – ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE UMA VIGA

Uma viga em balanço com vão de 6 m e seção transversal quadrada com lados de 20 cm está sujeita aos carregamentos concentrados dependentes da carga  $P = 220$  kN, conforme mostrado na Figura 2.7. O módulo de elasticidade de concreto foi adotado como igual a  $2,5 \cdot 10^7$  kPa. A tolerância admitida pelo critério de Newton-Raphson foi de  $10^{-4}$ .

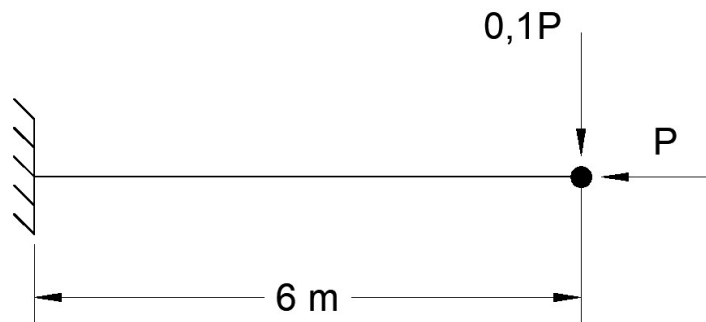


Figura 2.7 – Geometria da viga em balanço.

Os deslocamentos verticais lineares e não lineares máximos na extremidade da viga foram obtidos a partir do código desenvolvido em *script* do Matlab®. A carga crítica de

flambagem é  $P_{cr} = 230 \text{ kN}$  e foi determinada a partir de análises no *software* comercial SAP2000<sup>©</sup>. A

Figura 2.8 mostra o resultado encontrado em função da variação da carga  $P$  até o seu valor máximo, igual a 220 kN.

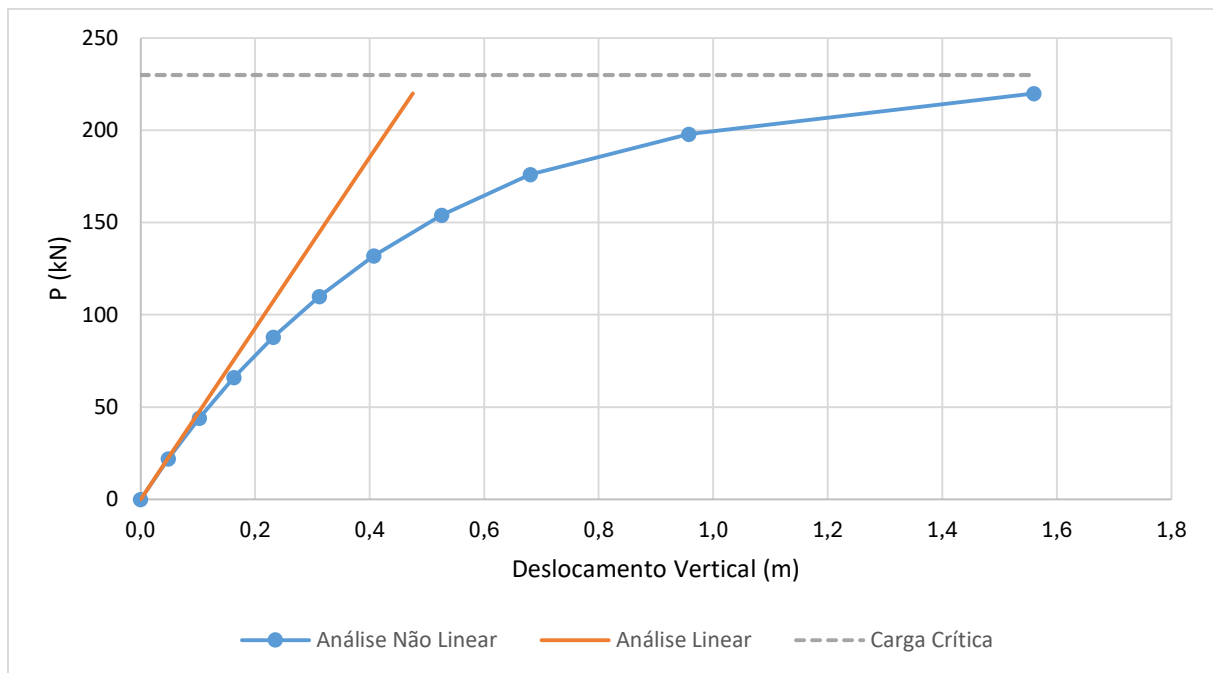


Figura 2.8 – Deslocamentos verticais máximos da viga em balanço.

Na Figura 2.8, nota-se que a curva linear no ponto inicial parte com a mesma inclinação da curva não linear. Isso ocorre porque, na origem, a matriz de rigidez tangente é igual à matriz de rigidez constitutiva do material. Também é possível observar o comportamento assintótico da curva não linear, ao final do processo iterativo, revelando proximidade da carga aplicada em relação à carga crítica da estrutura. Por fim, verifica-se boa aproximação do modelo de pórtico descrito em MEF, nesta seção, em relação aos modelos de elementos finitos descritos em *softwares* comerciais.

## 2.8 EXEMPLO 3 – ANÁLISE NUMÉRICA NÃO LINEAR DE UM EDIFÍCIO

Um exemplo numérico de um edifício foi simulado com comportamento geometricamente não linear. A estrutura simulada, mostrada na

Figura 2.9, apresenta 6 (seis) pavimentos, constituídos de 4 (quatro) pilares verticais e 4 (quatro) vigas horizontais por pavimento. A fundação do edifício é considerada

perfeitamente rígida, sem movimentos quaisquer de translação e rotação. As vigas apresentam seção transversal retangular com altura de 40 cm e largura de 20 cm e os pilares do edifício têm seção transversal quadrada com lados de 25 cm. O pé-direito de 3 m foi adotado para cada pavimento tipo e o módulo de elasticidade do concreto foi considerado para todos os elementos da estrutura com  $E = 2,5 \cdot 10^7$  kPa (Figura 2.9).

O edifício foi analisado sob forças laterais na direção do eixo cartesiano X e sob forças verticais na direção do eixo cartesiano Z, conforme mostrado na

Figura 2.9. A máxima carga  $P$  considerada neste estudo é 3.500 kN.

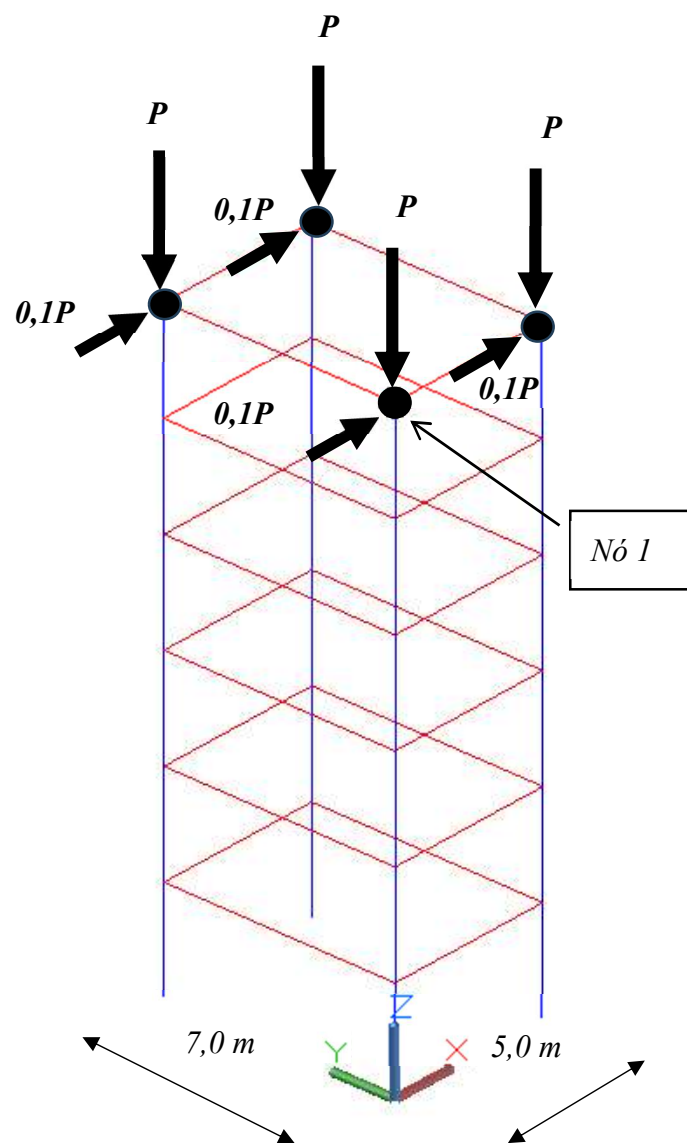


Figura 2.9 – Modelo geométrico do edifício com pilares indicados em azul e vigas indicadas em vermelho.

Os deslocamentos horizontais ao longo do eixo coordenado X do Nó 1 são mostrados na Figura 2.10. A tolerância admitida pelo critério de Newton-Raphson foi de  $10^{-3}$ .

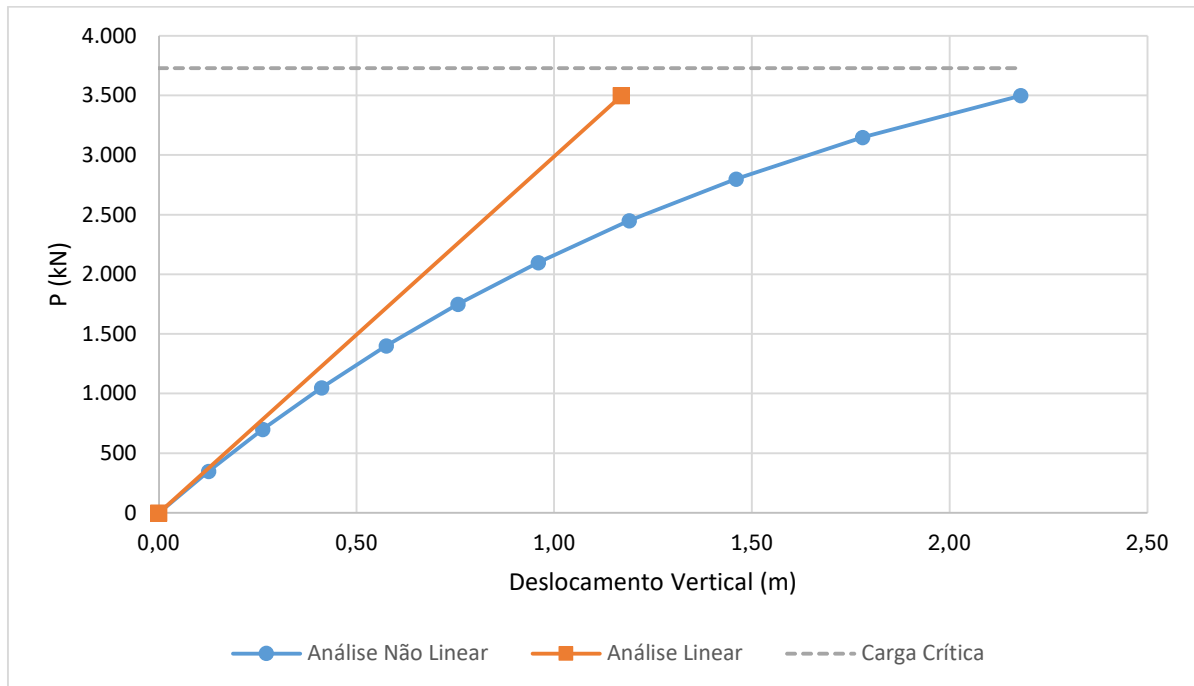


Figura 2.10 – Deslocamentos horizontais do Nó 1 na direção X.

Na Figura 2.10, percebe-se que a matriz de rigidez constitutiva da curva linear é igual à matriz de rigidez tangente da curva não linear na origem. Também há tendência de comportamento assintótico da curva não linear, indicando perda de rigidez da estrutura e proximidade da carga aplicada em relação à carga crítica  $P_{cr} = 3.730$  kN. O valor da carga crítica foi determinado a partir de análises no *software* comercial SAP2000<sup>©</sup>.

# 3

## DESCRIÇÃO VISCOELÁSTICA

### 3.1 ELEMENTOS BÁSICOS DA VISCOELASTICIDADE

As equações constitutivas dos materiais possibilitam descrever o desempenho aproximado de cada um deles. Os modelos matemáticos fenomenológicos desenvolvidos para se mapear o comportamento viscoelástico de um material resultam da combinação de elementos mecânicos básicos que exibem apenas o comportamento elástico ou apenas o comportamento viscoso. Esses elementos são idealizados, respectivamente, por molas e amortecedores.

#### 3.1.1 ELEMENTO ELÁSTICO GENERALIZADO

No elemento elástico generalizado, um corpo, ao ser solicitado por uma carga externa, sofrerá deformações imediatas, que permanecem constantes enquanto durar o carregamento. A característica principal desse elemento é o aparecimento de deformações imediatas e reversíveis; ou seja: surgem simultaneamente com as tensões e desaparecem com o descarregamento. Diz-se que o material possui a propriedade da elasticidade linear quando há proporcionalidade entre as tensões e deformações.

A relação constitutiva para o comportamento elástico linear é expressa pela Lei de Hooke generalizada, conforme a Equação (3.1):

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (3.1)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  o tensor de tensões,  $\epsilon_{lm}$  o tensor de deformações e  $C_{ij}^{lm} = C_{ijlm}$  a matriz constitutiva elástica. A matriz constitutiva elástica pode ser escrita, na forma indicial ou em notação matricial, para os casos de materiais isotrópicos, conforme indicado na Equação (3.2):

$$C_{ij}^{lm} = C_{ijlm} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{lm} + \mu \cdot (\delta_{ij} \cdot \delta_{jm} + \delta_{im} \cdot \delta_{jl}) \quad (3.2)$$

$$C_{ij}^{lm} = C_{ijklm} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

em que os termos  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, expressas por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
(3.3)

sendo os termos  $E$ ,  $G$  e  $\nu$ , respectivamente, iguais ao módulo de elasticidade longitudinal, ao módulo de elasticidade ao cisalhamento e ao coeficiente de Poisson.

A Equação (3.1) ainda pode ser reescrita em termos da matriz constitutiva elástica normalizada pelo módulo de elasticidade longitudinal,  $\bar{C}_{ij}^{lm}$ , a saber:

$$\sigma_{ij} = E \bar{C}_{ij}^{lm} \epsilon_{lm}$$
(3.4)

em que  $C_{ij}^{lm} = E \bar{C}_{ij}^{lm}$ .

A representação reológica unidimensional do elemento elástico é caracterizada por uma mola, com módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ), conforme apresentado na Figura 3.1:

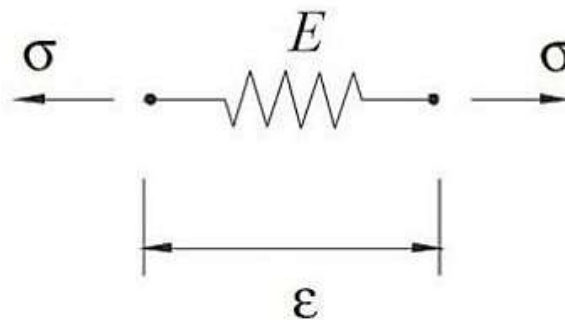


Figura 3.1 – Modelo unidimensional do elemento elástico

O modelo reológico elástico caracteriza-se por apresentar deformações e tensões que não variam com o tempo (Figura 3.2):



(a) Relação deformação x tempo.

(b) Relação tensão x tempo.

Figura 3.2 – Molas sujeitas aos fenômenos de fluência e de relaxação.

### 3.1.2 ELEMENTO VISCOZO GENERALIZADO

O modelo viscoso é comumente observado em fluidos, mas alguns sólidos também podem apresentar a mesma característica (BIRD *et al.*, 1987). A relação constitutiva para o comportamento viscoso é descrita pela Equação (3.5):

$$\sigma_{ij} = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (3.5)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  o tensor de tensões,  $\dot{\varepsilon}_{lm}$  a taxa de deformação e  $\eta_{ij}^{lm} = \eta_{ijklm}$  a matriz viscosa.

A matriz viscosa pode ser escrita em notação indicial ou em notação matricial, para o caso de materiais isotrópicos, conforme indicado na Equação (3.6):

$$\eta_{ij}^{lm} = \eta_{ijklm} = \theta_\lambda \cdot \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{lm} + \theta_\mu \cdot \mu \cdot (\delta_{ij} \cdot \delta_{jm} + \delta_{im} \cdot \delta_{jl}) \quad (3.6)$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \eta_{ijklm} = \begin{bmatrix} \lambda\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu & \lambda\theta_\lambda & \lambda\theta_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\theta_\lambda & \lambda\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu & \lambda\theta_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\theta_\lambda & \lambda\theta_\lambda & \lambda\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu\theta_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\theta_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\theta_\mu \end{bmatrix}$$

em que  $\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são coeficientes representativos da viscosidade do material. Esses podem ser determinados com base nos resultados de teste de tração uniaxial e teste de cisalhamento (CODA e MESQUITA, 2007). Os termos  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, expressas na Equação (3.3).

Segundo Mesquita (2002), na grande maioria dos materiais, a matriz viscosa pode ser apresentada de forma mais simples, dependendo apenas de um único parâmetro viscoso. Nesse caso, tem-se que  $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$  e, conseqüentemente, a Equação (3.6) torna-se mais simples, a saber:

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma [\lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{lm} + \mu \cdot (\delta_{ij} \cdot \delta_{jm} + \delta_{im} \cdot \delta_{jl})] = \gamma C_{ij}^{lm} \quad (3.7)$$

em que  $C_{ij}^{lm}$  corresponde à matriz constitutiva elástica, conforme mostrado na Equação (3.2).

A calibração adequada do parâmetro  $\gamma$  torna o modelo preciso e facilita a descrição do material em MEC. Quando essa hipótese não é válida, as formulações em MEC requerem integrais de convolução (LEONEL, 2009).

Nessas condições, a expressão (3.5) pode ser reescrita em função das deformações elásticas e das taxas de deformações, conforme a Equação (3.8):

$$\sigma_{ij} = \gamma \cdot C_{ij}^{lm} \cdot \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) ainda pode ser reescrita em termos da matriz constitutiva elástica normalizada pelo módulo de elasticidade longitudinal,  $\bar{C}_{ij}^{lm}$ , a saber:

$$\sigma_{ij} = \gamma \cdot E \cdot \bar{C}_{ij}^{lm} \cdot \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (3.9)$$

em que  $C_{ij}^{lm} = E \bar{C}_{ij}^{lm}$ .

A representação unidimensional do elemento viscoso ocorre por meio de um amortecedor, com coeficiente de viscosidade ( $\eta$ ), conforme mostrado na Figura 3.3:

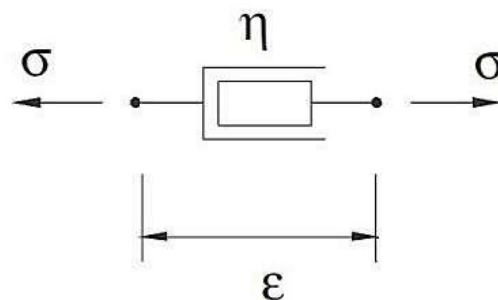


Figura 3.3 - Representação unidimensional do elemento viscoso.

Nos casos em que ocorre tensão constante ( $\sigma_0$ ), a taxa de deformação é também constante; portanto, a deformação cresce, linearmente, com o tempo. A Figura 3.4 ilustra o comportamento do material viscoso, demonstrando que a tensão seria diretamente proporcional à taxa de deformação do material.



(a) Relação deformação x tempo.

(b) Relação tensão x tempo.

Figura 3.4 – Amortecedores sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação.

Por ocasião do descarregamento – ou seja: quando a tensão torna-se nula –,  $\sigma_0=0$  em  $t = t_1$ , a taxa de deformação também é nula,  $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = 0$  –; portanto, a deformação torna-se constante; logo, irreversível.

## 3.2 MODELOS REOLÓGICOS UNIDIRECIONAIS

Um corpo, ao ser solicitado, responde com deformações que dependem da natureza do material de que é feito e da magnitude das tensões internas. Estabelecer a relação tensão-deformação é tarefa que, na maioria das vezes, enseja vários erros, devido à complexidade do comportamento do material e à variabilidade da sollicitação.

Descrevem-se, a seguir, alguns modelos reológicos compostos desenvolvidos para se simular o comportamento viscoelástico de alguns materiais.

### 3.2.1 MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell é um dos mais simples para análise do comportamento reológico de materiais. O modelo unidimensional é um arranjo composto por uma mola em série com um amortecedor (Figura 3.5). A deformação do modelo é dada pela soma das deformações na mola e no amortecedor. A mola apresenta módulo de elasticidade  $E$  e o amortecedor tem coeficiente de viscosidade  $\eta$ . O equilíbrio do sistema requer que a tensão seja

igual nos elementos mola e amortecedor. Trata-se de um modelo mais adequado para se descrever o comportamento de fluidos:

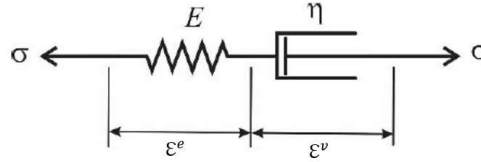


Figura 3.5 – Modelo de Maxwell.

A partir desse modelo, a deformação total é obtida pela soma das deformações elásticas e viscosas, na mola e no amortecedor. A relação constitutiva para modelos unidimensionais é apresentada na Equação (3.10):

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (3.10)$$

em que  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$  e  $\varepsilon^v$  correspondem, respectivamente, às deformações total, elástica e viscosa.

A igualdade das tensões nos dois elementos, mola e amortecedor, é verificada. Assim, a tensão total é equivalente à tensão elástica que, também, é igual à tensão viscosa; ou seja: tem-se a Equação (3.11):

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (3.11)$$

sendo  $\sigma$ ,  $\sigma^e = E\varepsilon^e$  e  $\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^v$  as respectivas as tensões total, elástica e viscosa.

Pela forma como a tensão se relaciona com a mola e o amortecedor, nota-se a impossibilidade de se realizar a soma direta indicada na Equação (3.10). Contudo, sabe-se que:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para o problema particular de tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , tem-se  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_0}{dt} = 0$ , o que resulta em  $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta} = \frac{\sigma_0}{\gamma E}$ . A solução da equação diferencial (3.12), para esse caso, resulta na Equação (3.13), tendo-se  $\varepsilon = \varepsilon_0$  em  $t = 0$ . Esse problema descreve o fenômeno de fluência no modelo de Maxwell:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{\eta} t = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (3.13)$$

Para o problema de deformação constante,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , a equação diferencial (3.12) pode ser resolvida para obtenção da tensão em função do tempo. Admitindo-se  $\sigma = \sigma_0 = E\varepsilon_0$  em  $t = 0$ , encontra-se a expressão a seguir, que descreve o fenômeno de relaxação no modelo de Maxwell:

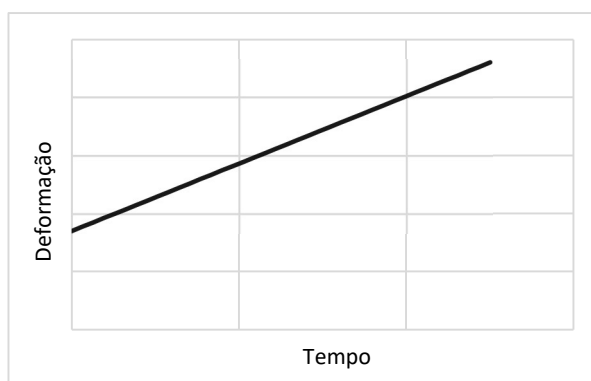
$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{-Et/\eta} \quad (3.14)$$

Alternativamente, a expressão (3.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

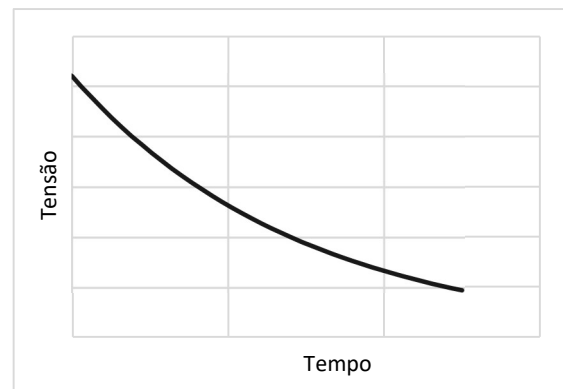
$$\varepsilon = E\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda_R}} \quad (3.15)$$

em que  $\lambda_R = \frac{E}{\eta}$  representa o tempo de relaxação do modelo de Maxwell.

A relação gráfica obtida para a deformação ao longo do tempo, mantendo-se a tensão constante, no modelo de Maxwell, é apresentada na Figura 3.6(a). Na Figura 3.6(b), mostra-se a relação de tensão em função do tempo, mantendo-se a deformação constante. Essas duas condições caracterizam, respectivamente, os fenômenos de fluência e relaxação no modelo de Maxwell.



(a) Relação deformação x tempo.



(b) Relação tensão x tempo.

Figura 3.6 – Modelo de Maxwell sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação.

O modelo de Maxwell é capaz de representar deformações elásticas instantâneas e de descrever, com razoável precisão, o fenômeno de relaxação; contudo, não apresenta, corretamente, o comportamento de fluência, indicando somente uma resposta linear, o que não condiz com resultados de ensaios correspondentes (RABELO, 2015 e NAVARRO, 2017). A principal aplicação do modelo de Maxwell ocorre na representação de fluidos.

### 3.2.2 MODELO DE KELVIN-VOIGT

O modelo de Kelvin-Voigt unidimensional corresponde a um arranjo em paralelo de uma mola com módulo de elasticidade  $E$  e de um amortecedor com coeficiente de viscosidade  $\eta$  (Figura 3.7):

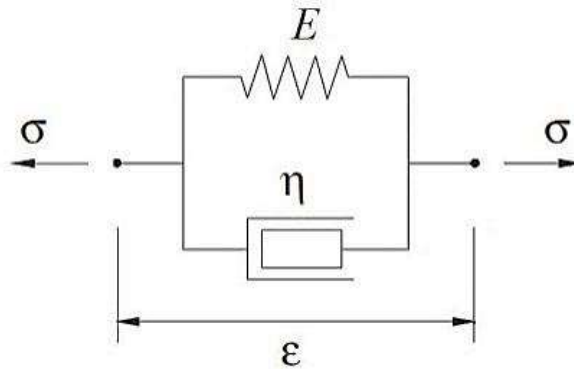


Figura 3.7 – Modelo unidimensional de Kelvin-Voigt.

Nesse modelo, ocorre a igualdade de deformações nos dois elementos, mola e amortecedor. Assim, a deformação total é equivalente à deformação elástica e igual à deformação viscosa; ou seja:

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (3.16)$$

em que  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$  e  $\varepsilon^v$  representam, respectivamente, as deformações total, elástica e viscosa.

A tensão total é obtida pela soma das tensões elásticas e viscosas, que ocorrem, respectivamente, na mola e no amortecedor, conforme descrito em (3.17):

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (3.17)$$

sendo  $\sigma$ ,  $\sigma^e$  e  $\sigma^v$ , respectivamente, as tensões total, elástica e viscosa.

As tensões elásticas são proporcionais à deformação elástica,  $\sigma^e = E\varepsilon^e$ , enquanto as tensões viscosas são proporcionais à taxa de deformação; ou seja:  $\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^v$ . Por isso, a expressão (3.17) pode ser reescrita, em termos de deformações elásticas e taxas de deformação, conforme a seguir:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.18)$$

Para o problema específico de tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , a Equação (3.18) pode ser reescrita, conforme a equação diferencial não homogênea (3.19):

$$\frac{\sigma_0}{\eta} = \frac{E}{\eta}\varepsilon + \dot{\varepsilon} \quad (3.19)$$

A solução da Equação (3.19) é apresentada na expressão a seguir, que descreve o fenômeno de fluência no modelo de Kelvin-Voigt:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \quad (3.20)$$

Alternativamente, a expressão (3.20) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_F}}\right) \quad (3.21)$$

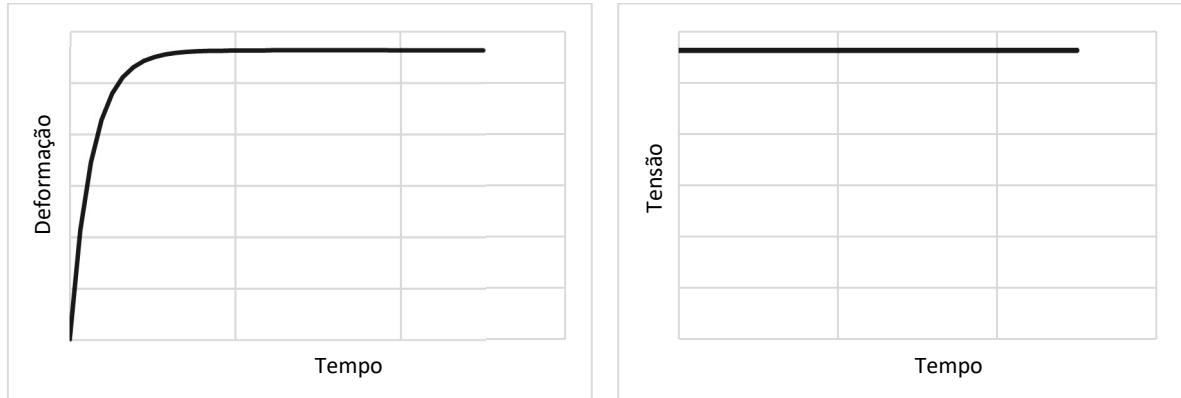
em que  $\lambda_F = \frac{\eta}{E}$  representa o tempo de retardo do modelo de Kelvin-Voigt.

Para o problema de deformação constante,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , a equação diferencial não homogênea (3.18) pode ser reescrita para descrever o fenômeno de relaxação no modelo de Kelvin-Voigt, conforme a seguir:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \quad (3.22)$$

A relação gráfica obtida para a deformação ao longo do tempo, mantendo-se a tensão constante, no modelo de Kelvin-Voigt, é apresentada na Figura 3.8(a). Na Figura 3.8(b), mostra-se a relação de tensão em função do tempo, mantendo-se a deformação constante. Essas

duas condições caracterizam, respectivamente, os fenômenos de fluência e relaxação no modelo de Kelvin-Voigt.



(a) Relação deformação x tempo.

(b) Relação tensão x tempo.

Figura 3.8 – Modelo de Kelvin-Voigt sujeito aos fenômenos de fluência e de relaxação.

A Figura 3.8(a) e a Figura 3.8(b) revelam que o modelo de Kelvin-Voigt não é capaz de simular as deformações elásticas instantâneas ou o fenômeno de relaxação dos materiais.

### 3.2.3 MODELO DE BOLTZMANN

O modelo de unidimensional de Boltzmann é um arranjo que envolve o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt associado, em série, com um elemento elástico, uma mola (Figura 3.9). O módulo de elasticidade da mola é representado por  $E_e$ , o módulo de elasticidade do elemento viscoelástico é indicado por  $E_{ve}$  e o coeficiente de viscosidade do elemento viscoelástico é dado por  $\eta$ .

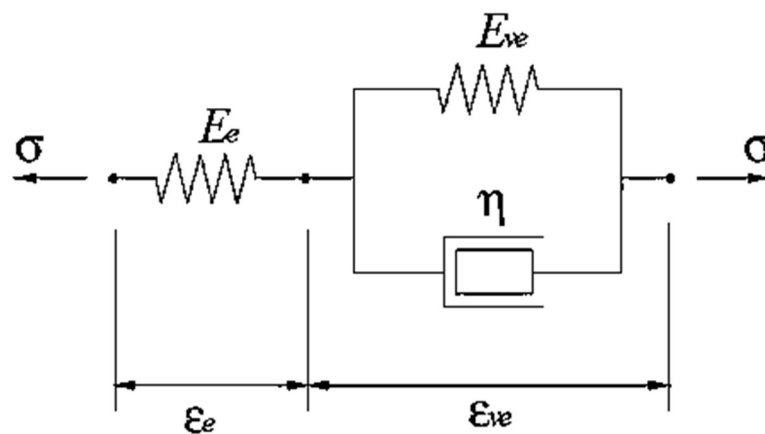


Figura 3.9 - Modelo unidimensional de Boltzmann.

Para esse caso, a tensão total é dada pela igualdade de tensões nos dois trechos, elástico e viscoelástico, representados, respectivamente, por  $\varepsilon_e$  e  $\varepsilon_{ve}$  na Figura 3.9. As relações reológicas associadas às tensões são:

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^{ve} \quad (3.23)$$

sendo  $\sigma$ ,  $\sigma^e$  e  $\sigma^{ve}$  as respectivas tensões total, elástica e viscoelástica.

A deformação total é obtida pela soma das deformações elásticas e viscosas, encontradas, respectivamente, na mola, trecho elástico, e no conjunto mola-amortecedor, trecho viscoelástico.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{ve} \quad (3.24)$$

em que  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$  e  $\varepsilon^{ve}$  representam, respectivamente, as deformações total, elástica e viscoelástica.

As tensões apresentadas na expressão (3.23) ainda podem ser associadas às deformações e à taxa de deformação do modelo, conforme apresentado a seguir:

$$\sigma = \sigma^e = E_e \varepsilon^e \quad (3.25)$$

$$\sigma^{el} = E_{ve} \varepsilon^{ve} \quad (3.26)$$

$$\sigma^v = \eta \dot{\varepsilon}^{ve} \quad (3.27)$$

Admitindo-se que  $\sigma^{el}$  corresponde às tensões elásticas referentes à mola em paralelo com o amortecedor;  $E_e$  e  $E_{ve}$  são iguais aos respectivos módulos de elasticidade dos trechos elástico e viscoelástico.

As relações de tensões no trecho viscoelástico permitem escrever a Equação (3.28) a seguir:

$$\sigma = \sigma^{ve} = \sigma^{el} + \sigma^v = E_{ve} \varepsilon^{ve} + \eta \dot{\varepsilon}^{ve} \quad (3.28)$$

A partir de (3.24), as taxas de deformação podem relacionadas para ambos os trechos do modelo de Boltzmann.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{ve} \quad (3.29)$$

sendo  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\varepsilon}^e$  e  $\dot{\varepsilon}^{ve}$  as respectivas taxas de deformações total, elástica e viscoelástica.

Com base nas expressões (3.23) e (3.25), é possível escrever a deformação elástica em termos da tensão total, a saber:

$$\varepsilon^e = \frac{1}{E_e} \sigma^e = \frac{1}{E_e} \sigma \quad (3.30)$$

Explicitando-se as deformações viscoelásticas na expressão (3.28), fazendo-se uso da Equação (3.29), obtém-se:

$$\varepsilon^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} \sigma - \frac{\eta}{E_{ve}} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e) \quad (3.31)$$

Substituindo-se as expressões de deformações elásticas e viscoelásticas apresentadas em (3.30) e (3.31) na definição das deformações totais em (3.24), obtém-se a relação (3.32).

$$\varepsilon = \left[ \frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_{ve}} \right] \sigma - \frac{\eta}{E_{ve}} (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e) \quad (3.32)$$

A expressão (3.33) fornece a formulação reológica do modelo de Boltzmann em termos da tensão.

$$\sigma = \left[ \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \varepsilon + \frac{\eta E_e}{E_e + E_{ve}} \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma} \right] \quad (3.33)$$

sendo  $\dot{\sigma}$  a taxa de variação da tensão total com o tempo ou a velocidade de tensão total.

Para o problema particular de tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , a Equação (3.33) pode ser utilizada para se obter a equação diferencial não homogênea a seguir:

$$\frac{E_e + E_{ve}}{E_e \eta} \sigma_0 = \frac{E_{ve}}{\eta} \varepsilon + \dot{\varepsilon} \quad (3.34)$$

A solução da equação diferencial (3.34) fornece a seguinte relação das deformações em função do tempo, a qual representa o fenômeno de fluência nos modelos de Boltzmann.

$$\varepsilon = \left[ \frac{\sigma_0}{E_e} - \frac{E_e + E_{ve}}{E_e E_{ve}} \sigma_0 \right] e^{-\frac{E_{ve} t}{\eta}} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_e E_{ve}} \sigma_0 \quad (3.35)$$

Alternativamente, a expressão (3.35) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = \left( \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E_R} \right) e^{-\frac{t}{\lambda_F}} + \frac{\sigma_0}{E_R} \quad (3.36)$$

em que  $\lambda_F = \frac{\eta}{E_{ve}}$  representa o tempo de retardo e  $E_R = \frac{E_e + E_{ve}}{E_e E_{ve}}$  corresponde ao módulo resultante do modelo de Boltzmann.

Para o problema de deformação constante,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , a equação diferencial (3.33) pode ser utilizada para se obter a equação diferencial não homogênea a seguir:

$$\frac{E_e E_{ve}}{\eta} \varepsilon_0 = \frac{E_e + E_{ve}}{\eta} \sigma + \dot{\sigma} \quad (3.37)$$

A solução da equação diferencial (3.37) que rege o fenômeno de relaxação no modelo de Boltzmann pode ser escrita conforme a seguir:

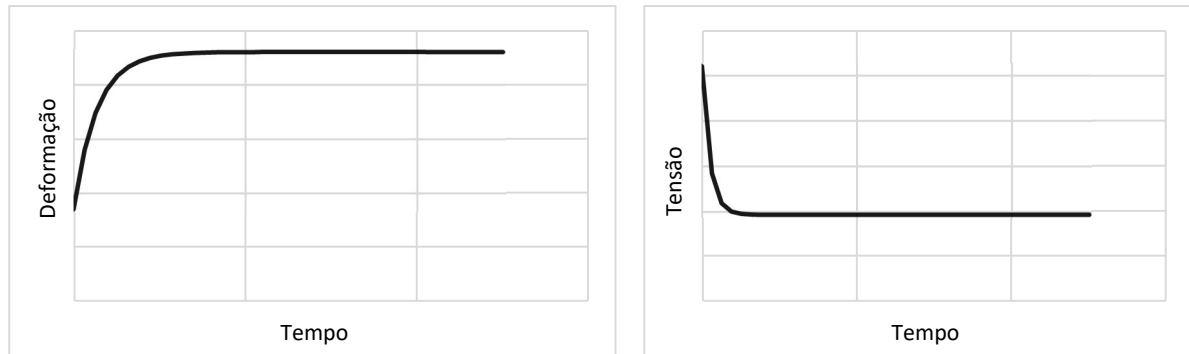
$$\sigma = \left( E_e \varepsilon_0 - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \varepsilon_0 \right) e^{-\frac{(E_e + E_{ve}) t}{\eta}} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_e E_{ve}} \varepsilon_0 \quad (3.38)$$

Alternativamente, a expressão (3.38) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma = (E_e \varepsilon_0 - E_R \varepsilon_0) e^{-\frac{t}{\lambda_R}} + E_R \varepsilon_0 \quad (3.39)$$

em que  $\lambda_R = \frac{\eta}{E_e + E_{ve}}$  representa o tempo de relaxação e  $E_R = \frac{E_e + E_{ve}}{E_e E_{ve}}$  corresponde ao módulo resultante do modelo de Boltzmann.

A relação gráfica obtida para a deformação ao longo do tempo, mantendo-se a tensão constante, no modelo de Boltzmann, é apresentada na Figura 3.10(a). Na Figura 3.10(b), mostra-se a relação de tensão em função do tempo, mantendo-se a deformação constante. Essas duas condições caracterizam, respectivamente, os fenômenos de fluência e relaxação no modelo de Boltzmann.



(a) Relação deformação x tempo.

(b) Relação tensão x tempo.

Figura 3.10 – Modelo de Boltzmann sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação.

A Figura 3.10(a) e a Figura 3.10(b) revelam que o modelo de Boltzmann é capaz de simular as deformações elásticas instantâneas ou representar adequadamente os fenômenos de fluência e relaxação.

### 3.2.4 MODELO DE ZENER

O modelo de unidimensional de Zener é um arranjo que envolve o modelo de Maxwell associado, em paralelo, com um elemento elástico, uma mola (MOURA *et al.*, 2011). O módulo de elasticidade da mola é representado por  $E_e$ , o módulo de elasticidade do elemento viscoelástico é indicado por  $E_{ve}$  e o coeficiente de viscosidade do elemento viscoelástico é dado por  $\eta$ .

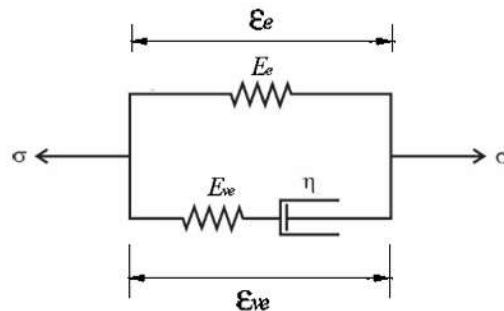


Figura 3.11 – Modelo unidimensional de Zener.

A partir da Figura 3.11, observa-se que a tensão total é dada pela soma das tensões nos dois trechos em paralelo, elástico e viscoelástico, representados, respectivamente, por  $\varepsilon_e$  e  $\varepsilon_{ve}$ . As relações reológicas associadas às tensões são:

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^{ve} \quad (3.40)$$

em que  $\sigma$ ,  $\sigma^e$  e  $\sigma^{ve}$ , representam, respectivamente, as tensões totais, elásticas e viscoelásticas.

O equilíbrio do trecho viscoelástico de Maxwell exige que a tensão viscoelástica,  $\sigma^{ve}$ , seja igual às tensões elástica e viscosa,  $\sigma^{el}$  e  $\sigma^v$ , que são desenvolvidas no elemento viscoelástico; ou seja:

$$\sigma^{ve} = \sigma^{el} = \sigma^v \quad (3.41)$$

A deformação total é obtida pela igualdade das deformações elásticas e viscoelásticas, encontradas, respectivamente, na mola e no conjunto mola-amortecedor do trecho viscoelástico:

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^{ve} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^v \quad (3.42)$$

sendo,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^{ve}$ ,  $\varepsilon^{el}$  e  $\varepsilon^v$  as correspondentes deformações total, elástica, viscoelástica, elástica do elemento viscoelástico e viscosa do elemento viscoelástico, respectivamente.

A partir das equações (3.40) e (3.42), é possível definir as tensões e deformações elásticas e viscosas por meio das seguintes relações:

$$\sigma^e = E_e \varepsilon^e = E_e \varepsilon \quad (3.43)$$

$$\sigma^{el} = E_{ve} \varepsilon^{el} \quad (3.44)$$

$$\sigma^v = \eta \dot{\varepsilon}^v \quad (3.45)$$

Relacionando-se a Equação (3.45) e as relações obtidas pela derivada no tempo das equações (3.42) e (3.44), tem-se a equação que descreve a taxa de deformação total do modelo de Zener:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}^{el}}{E_{ve}} + \frac{\sigma^v}{\eta} \quad (3.46)$$

Utilizando-se a relação (3.41) para se escrever a Equação (3.40) em termos de  $\sigma^v$ , pode-se considerar as equações (3.43) e (3.46) para se obter a seguinte expressão:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}^{el}}{E_{ve}} + \frac{1}{\eta} (\sigma - E_e \varepsilon) \quad (3.47)$$

Novamente, a Equação (3.40) pode ser reescrita em termos de  $\sigma^{el}$ , seguindo-se as relações da Equação (3.41). Derivando-se e relacionando-se as equações (3.40), e (3.44) em função do tempo, pode-se manipular a Equação (3.47) para se obter a seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{(\dot{\sigma} - E_e \dot{\varepsilon})}{E_{ve}} + \frac{1}{\eta} (\sigma - E_e \varepsilon) \quad (3.48)$$

Rearranjando-se os termos e isolando-se a tensão total ( $\sigma$ ), obtém-se a equação que descreve a relação reológica do modelo de Zener, qual seja:

$$\sigma = E_e \varepsilon + \frac{\eta(E_{ve} + E_e)}{E_{ve}} \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_{ve}} \dot{\sigma} \quad (3.49)$$

sendo  $\dot{\sigma}$  a taxa de variação da tensão total com o tempo ou a velocidade de tensão total.

Para o problema particular de tensão constante,  $\sigma = \sigma_0$ , a Equação (3.49) pode ser utilizada para se obter a equação diferencial não homogênea que rege o problema de fluência:

$$\frac{E_{ve}}{\eta(E_{ve} + E_e)} \sigma_0 = \frac{E_{ve} E_e}{\eta(E_{ve} + E_e)} \varepsilon + \dot{\varepsilon} \quad (3.50)$$

A solução da equação diferencial (3.50), que rege o fenômeno de fluência no modelo de Zener, pode ser escrita desta forma:

$$\varepsilon = \left( \frac{\sigma_0}{E_e + E_{ve}} - \frac{\sigma_0}{E_e} \right) e^{-\frac{E_e E_{ve}}{\eta(E_e + E_{ve})} t} + \frac{\sigma_0}{E_e} \quad (3.51)$$

Alternativamente, a expressão (3.51) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon = \left( \frac{\sigma_0}{E_R} - \frac{\sigma_0}{E_e} \right) e^{-\frac{t}{\lambda_F}} + \frac{\sigma_0}{E_e} \quad (3.52)$$

em que  $\lambda_F = \frac{\eta(E_{ve} + E_e)}{E_{ve} E_e}$  representa o tempo de retardo e  $E_R = E_e + E_{ve}$  corresponde ao módulo resultante do modelo de Zener.

Para o problema de deformação constante,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , a Equação (3.49) pode ser utilizada para se obter esta equação diferencial não homogênea que rege o problema de relaxação:

$$\frac{E_{ve} E_e}{\eta} \varepsilon_0 = \frac{E_{ve}}{\eta} \sigma + \dot{\sigma} \quad (3.53)$$

A solução da Equação Diferencial (3.53), que rege o fenômeno de relaxação no modelo de Zener, pode ser escrita conforme a seguir:

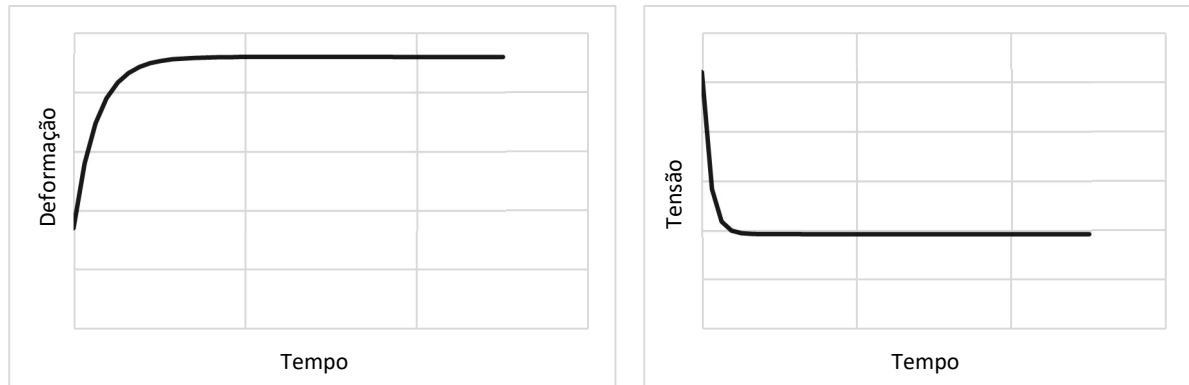
$$\sigma = [(E_e + E_{ve})\varepsilon_0 - E_e \varepsilon_0] e^{-\frac{E_{ve} t}{\eta}} + E_e \varepsilon_0 \quad (3.54)$$

Alternativamente, a Equação (3.54) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma = [E_R \varepsilon_0 - E_e \varepsilon_0] e^{-\frac{t}{\lambda_R}} + E_e \varepsilon_0 \quad (3.55)$$

em que  $\lambda_R = \frac{\eta}{E_{ve}}$  representa o tempo de relaxação e  $E_R = E_e + E_{ve}$  correspondente ao módulo resultante do modelo de Zener.

A relação gráfica obtida para a deformação ao longo do tempo, mantendo-se a tensão constante, no modelo de Boltzmann é apresentada na Figura 3.12(a). Na Figura 3.12(b), mostra-se a relação de tensão em função do tempo, mantendo-se a deformação constante. Essas duas condições caracterizam, respectivamente, os fenômenos de fluência e relaxação no modelo de Boltzmann.



(a) Relação deformação x tempo.

(b) Relação tensão x tempo.

Figura 3.12 – Modelo de Boltzmann sujeitos aos fenômenos de fluência e de relaxação.

Analogamente ao modelo de Boltzmann, a Figura 3.12(a) e a Figura 3.12(b) revelam que o modelo de Zener é capaz de simular as deformações elásticas instantâneas ou representar, adequadamente, os fenômenos de fluência e relaxação.

### 3.2.5 OUTROS MODELOS REOLÓGICOS

Outros arranjos com combinação em série ou em paralelo dos elementos molas e amortecedores são propostos na literatura técnica, visando melhor representar os comportamentos físicos de determinados materiais. Citam-se os modelos de Jeffreys e Burgers, além dos modelos generalizados de Maxwell-Wiechert, Kelvin-Voigt Modificado e Huet-Sayegh Modificado, que pressupõem combinações mais amplas dos arranjos básicos de Maxwell, Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener.

Uma descrição detalhada de outros modelos reológicos viscoelásticos pode ser encontrada em Navarro (2017).

### 3.3 MODELOS REOLÓGICOS MULTIDIRECIONAIS

Os modelos viscoelásticos unidirecionais, apresentados na Seção 3.2, podem ser aplicados no espaço substituindo-se os módulos de elasticidade e os coeficientes de viscosidade dos elementos mola e amortecedor pelas correspondentes relações constitutivas generalizadas dos elementos elástico e viscoso, conforme mostrado na Seção 3.1.

O modelo multidirecional de Maxwell é apresentado na equação a seguir, obtido a partir da expressão (3.12).

$$\epsilon_{lm} = E(\bar{C}_{ij}^{lm})^{-1} \sigma_{ij} + \gamma E(\bar{C}_{ij}^{lm})^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \quad (3.56)$$

em que  $\eta_{ij}^{lm} = \gamma C_{ij}^{lm} = \gamma E \bar{C}_{ij}^{lm}$ , conforme descrito na Seção 3.1.2.

O modelo multidirecional de Kelvin-Voigt é descrito na seguinte relação, a partir da expressão (3.18).

$$\sigma_{ij} = E \bar{C}_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} + \gamma E \bar{C}_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} \quad (3.57)$$

sendo  $\eta_{ij}^{lm} = \gamma C_{ij}^{lm} = \gamma E \bar{C}_{ij}^{lm}$ , conforme descrito na Seção 3.1.2.

A ampliação da Equação (3.33) no espaço fornece o modelo multidirecional de Boltzmann, a saber:

$$\sigma_{ij} = \left[ \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \bar{C}_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} + \gamma \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \bar{C}_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \bar{C}_{ij}^{lm} \dot{\sigma}_{ij} \right] \quad (3.58)$$

em que  $\eta_{ij}^{lm} = \gamma C_{ij}^{lm} = \gamma E_{ve} \bar{C}_{ij}^{lm}$ , conforme descrito nas seções 3.1.2 e 3.2.2.

Por fim, o modelo multidirecional de Zener segue as relações apresentadas na Equação (3.49); ou seja:

$$\sigma_{ij} = E_e \bar{C}_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} + \gamma (E_{ve} + E_e) \bar{C}_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} - \gamma \dot{\sigma}_{ij} \quad (3.59)$$

em que  $\eta_{ij}^{lm} = \gamma C_{ij}^{lm} = \gamma E_{ve} \bar{C}_{ij}^{lm}$ , conforme descrito nas seções 3.1.2 e 3.2.1.

### 3.4 CARACTERIZAÇÃO DA FLUÊNCIA

O fenômeno de fluência refere-se à capacidade de um material deformar-se ao longo do tempo, sob carga constante.

O tempo de retardo ( $\lambda_F$ ) é uma propriedade física dos materiais e está relacionado à taxa de deformação inicial obtida nos ensaios de fluência (FINDLEY *et al.*, 1989 e BECHO, 2020). Esse tempo é definido como o período necessário para a deformação atingir o seu valor máximo, sob um estado de tensão constante, supondo-se que a taxa de deformação inicial seja constante ao longo do tempo.

O tempo de retardo fornece uma estimativa do tempo requerido para o processo de fluência se aproximar da conclusão. Quanto menor o tempo de retardo, mais rapidamente ocorre o processo de fluência e o material é dito menos viscoso (MARQUES e CREUS, 2012). A representação gráfica do tempo de retardo e de outros parâmetros inerentes ao processo de fluência é ilustrado na Figura 3.13, a seguir:

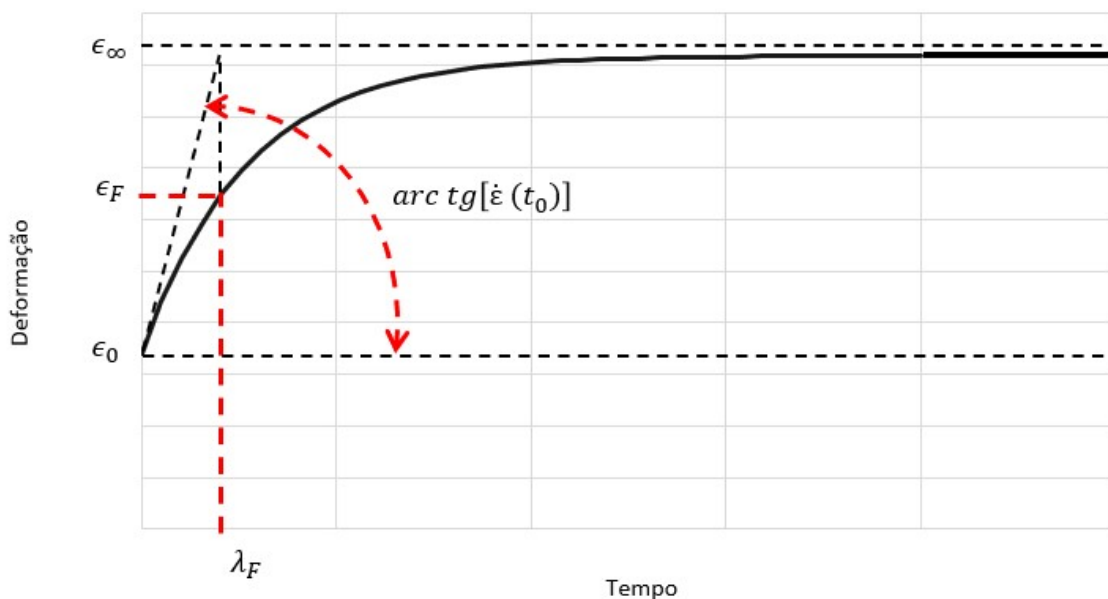


Figura 3.13 – Representação gráfica do processo de fluência e do tempo de retardo para o comportamento reológico ideal dos materiais.

Na Tabela 3.1, apresentam-se os parâmetros de fluência indicados na Figura 3.13 para os modelos reológicos viscoelásticos apresentados neste trabalho.

Tabela 3.1 – Parâmetros de fluência para alguns modelos reológicos.

Modelo	$\epsilon_0$	$\epsilon_F$	$\epsilon_\infty$	$\lambda_F$	Equação
Maxwell	$\frac{\sigma_0}{E}$	-	$\infty$	-	(3.13)
Kelvin-Voigt	0	$0,632 \frac{\sigma_0}{E}$	$\frac{\sigma_0}{E}$	$\frac{\eta}{E} = \gamma$	(3.20)
Boltzmann	$\frac{\sigma_0}{E_e}$	$\epsilon_0 + 0,632(\epsilon_\infty - \epsilon_0)$	$\frac{E_e + E_{ve}}{E_e E_{ve}} \sigma_0$	$\frac{\eta}{E_{ve}} = \gamma$	(3.36)
Zener	$\frac{\sigma_0}{E_e + E_{ve}}$	$\epsilon_0 + 0,632(\epsilon_\infty - \epsilon_0)$	$\frac{\sigma_0}{E_e}$	$\frac{\eta(E_{ve} + E_e)}{E_{ve} E_e}$ $= \frac{\gamma(E_{ve} + E_e)}{E_e}$	(3.52)

### 3.5 CARACTERIZAÇÃO DA RELAXAÇÃO

A relaxação em materiais diz respeito à capacidade de um material de sofrer com a redução de tensões internas no tempo, quando submetido a deformações constantes. Isso ocorre devido ao rearranjo das estruturas atômicas ou moleculares dentro do material, o que leva a uma redução nas tensões residuais.

Analogamente ao tempo de retardo, o tempo de relaxação ( $\lambda_R$ ) é uma propriedade dos materiais que corresponde ao tempo requerido para a tensão atingir seu valor mínimo, cessado o processo de relaxação, supondo-se taxa de tensão constante ao longo do tempo (BECHO, 2020). Quanto menor o tempo de relaxação, mais rapidamente ocorre o processo de relaxação e o material é dito menos viscoso (MARQUES e CREUS, 2012). A representação gráfica do tempo de relaxação e de outros parâmetros inerentes no processo de relaxação conforma a Figura 3.14, a seguir.

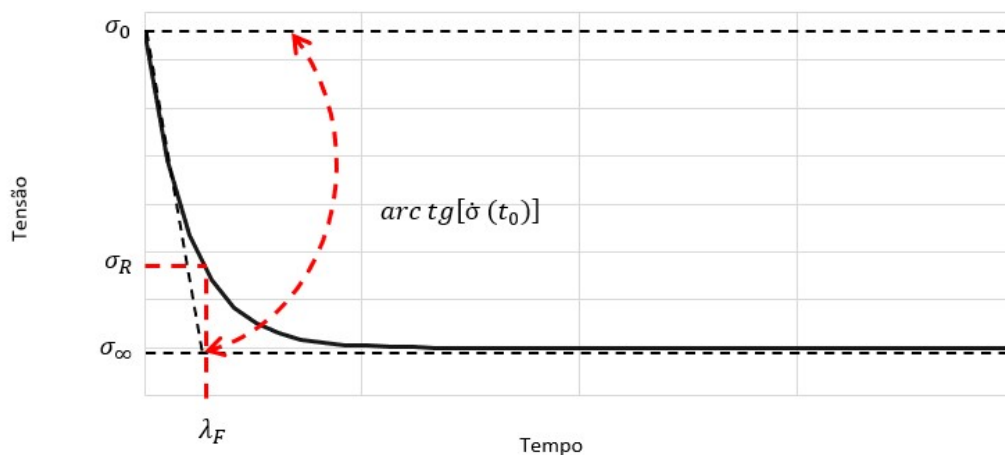


Figura 3.14 – Representação gráfica do processo de relaxação e do tempo de relaxação para o comportamento reológico ideal dos materiais.

Na Tabela 3.2, são apresentados os parâmetros de relaxação indicados na Figura 3.14 para os modelos reológicos viscoelásticos apresentados neste trabalho.

Tabela 3.2 – Parâmetros de fluência para alguns modelos reológicos.

Modelo	$\sigma_0$	$\sigma_F$	$\sigma_\infty$	$\lambda_R$	Equação
Maxwell	$E\epsilon_0$	$0,632E\epsilon_0$	0	$\frac{E}{\eta} = \frac{1}{\gamma}$	(3.15)
Kelvin-Voigt	$E\epsilon_0$	$E\epsilon_0$	$E\epsilon_0$	-	(3.22)
Boltzmann	$E_e\epsilon_0$	$\sigma_\infty + 0,632(\sigma_\infty - \sigma_0)$	$\frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \epsilon_0$	$\frac{\gamma\eta}{E_{ve} + E_e}$ $= \frac{\gamma E_{ve}}{E_{ve} + E_e}$	(3.39)
Zener	$(E_e + E_{ve})\epsilon_0$	$\sigma_\infty + 0,632(\sigma_\infty - \sigma_0)$	$E_e\epsilon_0$	$\frac{\eta}{E_{ve}} = \gamma$	(3.55)

# 4

## FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

### 4.1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma ferramenta numérica que permite a simulação de vários problemas da Mecânica do Contínuo com boa precisão e, em muitas ocasiões, sem a necessidade de discretização de todo o domínio do problema. Inicialmente, o método era conhecido como Método das Equações Integrais de Contorno, porque os problemas eram resolvidos por meio de equações integrais sobre o contorno do domínio. Posteriormente, Brebbia (1978) tratou esses problemas de forma mais conveniente e o intitulou Método dos Elementos de Contorno, a partir do desenvolvimento do Método das Equações Integrais de Contorno.

Na Elastostática, uma das principais vantagens do MEC é a sua capacidade de descrever o comportamento de um corpo, no seu domínio, por meio da solução de equações integrais sobre o contorno. Essa característica possibilita a redução da dimensionalidade da malha que seria utilizada para a simulação dos problemas em uma unidade; ou seja: problemas tridimensionais poderiam ser representados por meio de malhas bidimensionais, enquanto, os problemas bidimensionais, por meio de malhas unidimensionais. Essa característica torna esse método atraente; especialmente, para a modelagem de problemas de domínios infinito e semi-infinito (TELLES e BREBBIA, 1981; VENTURINI, 1983, BREBBIA *et al.*, 1984, BREBBIA e DOMÍNGUEZ, 1992, BECKER, 1992, CODA *et al.*, 1997, BARBIRATO, 1991 e 1999, MENDONÇA, 2002, HALL e OLIVETO, 2003; GALVIS *et al.*, 2021; e NARVÁEZ e USECHE, 2024).

Por outro lado, para se solucionar problemas do MEC, é necessário obter a solução fundamental da equação diferencial que rege o problema. A solução fundamental corresponde à resposta da equação diferencial a uma função delta de Dirac. Essa solução fundamental

apresenta termos com singularidades que, se não tratados adequadamente, podem comprometer a estabilidade da função numérica (SOUZA e CODA, 2005 e LEITE *et al.*, 2021). Segundo Becker (1992), embora a utilização de soluções fundamentais possa ser interpretada como uma desvantagem desse método, na verdade ela proporciona versatilidade e precisão.

A aplicação do MEC de maior interesse, nesta pesquisa, diz respeito à modelagem de domínios estendidos ao espaço semi-infinito para a simulação de solos. Nessas condições, a discretização do problema é realizada apenas no contorno, uma vez que a solução fundamental utilizada nesse método já contempla a influência de domínios infinito ou semi-infinito. A maior parte dos problemas em geomecânica tem extensa lista de referências com aplicações do MEC, como apontam por Davies e Banerjee (1978), Witt (1984), e Ai *et al.* (2014; 2021 e 2022).

Neste capítulo, apresentam-se, sucintamente, os conceitos da Elastostática, as soluções fundamentais para sólidos elásticos tridimensionais, as equações integrais que regem o método, bem como os problemas de singularidades, os tipos de elementos e o algoritmo básico para implementação do MEC.

## 4.2 RELAÇÕES ELASTOSTÁTICAS

Da Teoria da Elasticidade, tem-se que o equilíbrio estático em um corpo sólido paralelepípedo infinitesimal é expresso por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (4.1)$$

em que as componentes do tensor tensão são representadas por  $\sigma_{ij}$  e  $b_i$  representa as componentes de forças de corpo por unidade de volume. As derivadas espaciais são indicadas pela vírgula.

As forças superficiais (*tractions*) atuantes em um plano qualquer de área unitária podem ser determinadas por meio da seguinte relação:

$$p_i = \sigma_{ji}n_j \quad (4.2)$$

em que  $n_j$  representa os cossenos diretores normais ao plano da superfície e  $p_i$  representa as forças de superfície (termo também conhecido como vetor das tensões).

A equação (4.3), a seguir, representa a lei generalizada de Hooke e relaciona tensão e deformação para um material elástico isotrópico e que não apresenta mudança de temperatura:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (4.3)$$

sendo  $C_{ij}^{lm}$  o tensor constitutivo de constantes elásticas, dado por

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{lm} + \mu \cdot (\delta_{ij} \cdot \delta_{jm} + \delta_{im} \cdot \delta_{jl}) \quad (4.4)$$

em que os termos  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, expressas por:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

O tensor de Cauchy representa as deformações no corpo infinitesimal, que podem ser descritas, em termos de derivadas de deslocamentos, para pequenas deformações, segundo o tensor de deformações de Biot, conforme exposto a seguir:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.6)$$

Substituindo-se a Equação (4.6) na Equação (4.3), obtêm-se as tensões em termos de gradientes de deslocamentos. Aplicando-se o resultado dessa operação na Equação (4.1), obtém-se a Equação de Navier, descrita na seguinte forma:

$$u_{j,ll} + \frac{1}{1-2\nu} u_{l,lj} + \frac{1}{\mu} b_j = 0 \quad (4.7)$$

Empregando-se a Equação (4.6) e a Equação (4.3) e substituindo-se na Equação (4.2), as relações de força de superfície são dadas por:

$$p_i = \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{l,l} n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j \quad (4.8)$$

em que  $n_j$  representa os cossenos diretores na direção normal à superfície do corpo.

### 4.3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

#### 4.3.1 DOMÍNIOS INFINITOS

Seja um corpo em estado de equilíbrio no espaço,  $x_i$ , representado por deslocamentos prescritos, com contorno  $\Gamma$  e com domínio finito  $\Omega$ . O estado de equilíbrio desse corpo é representado pelo conjunto dos tensores de tensão, deformação, deslocamentos, carregamentos superficiais e forças desse corpo, representados, respectivamente, por  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $p_i$  e  $b_i$ . Um domínio  $\Omega^*$  com contorno  $\Gamma^*$  no infinito que contenha o corpo  $\Omega + \Gamma$  pode ser considerado, conforme apresentado na Figura 4.1. A região genérica  $\Omega^* + \Gamma^*$  é conhecida como a região de Kelvin. O estado de equilíbrio dessa nova região é denotado por  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$ , sujeita a uma força de corpo  $b_i^*$ .

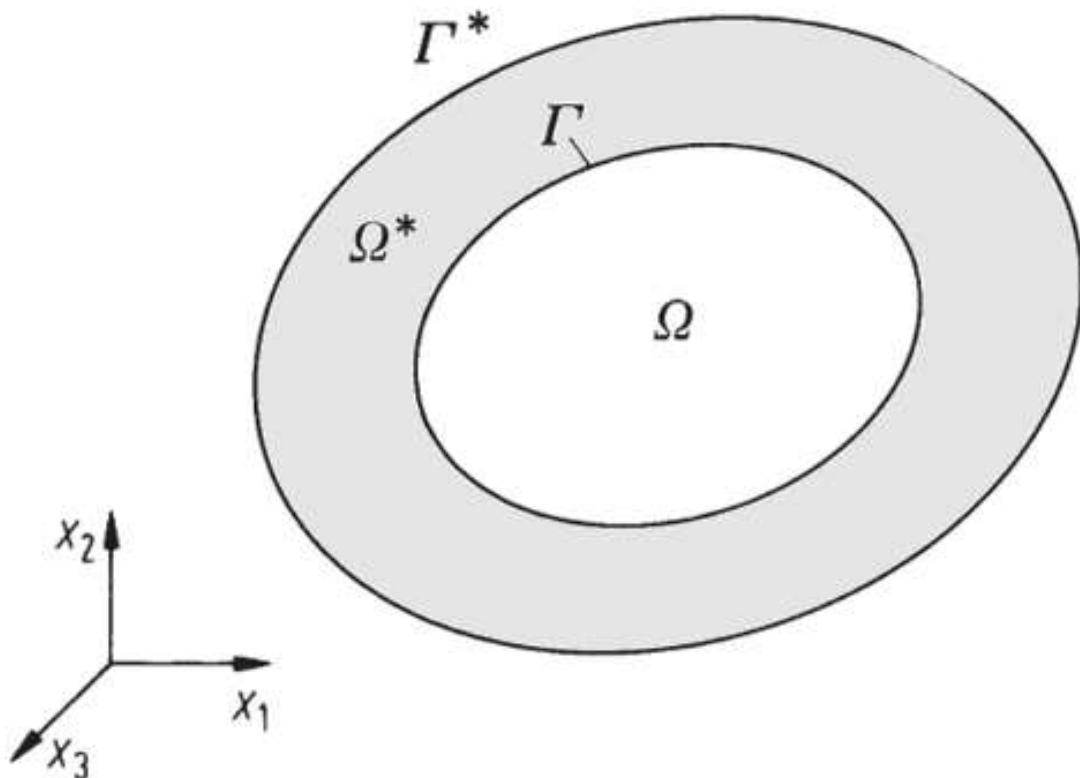


Figura 4.1 - Região genérica  $\Omega^* + \Gamma^*$  contendo o corpo  $\Omega + \Gamma$  com as mesmas propriedades elásticas.

A equação diferencial que rege o problema da Elastostática (4.9) reescrita para a região genérica  $\Omega^* + \Gamma^*$  é dada conforme a expressão matemática a seguir:

$$\sigma^*_{ij,j} + b^*_i = 0 \text{ em } \Omega^* \quad (4.9)$$

As forças de corpo,  $b^*_i$ , da região  $\Omega^* + \Gamma^*$  podem ser reescritas, assumindo-se que as componentes de  $b^*_i$  correspondem a um vetor de forças superficiais unitárias aplicadas em um ponto  $\xi \in \Omega^*$ , para cada uma das três direções ortogonais dadas pelos vetores unitários  $e_i$ . Isso pode ser representado como:

$$b^*_i = \Delta(\xi, x)e_i \quad (4.10)$$

em que  $\Delta(\xi, x)$  representa a função delta de Dirac;  $\xi$  é o ponto de carregamento singular, também denominado de ponto fonte; e  $x \in \Omega^*$  é denominado ponto campo.

A função delta de Dirac tem suas propriedades matemáticas estudadas na Teoria de Funções Generalizadas e constitui ferramenta capaz de representar forças concentradas na Teoria da Elasticidade. A função delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, x) &= 0 \text{ se } \xi \neq x & (a) \\ \Delta(\xi, x) &= \infty \text{ se } \xi = x & (b) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Escrevendo-se a Equação (4.7) em termos das soluções fundamentais e substituindo-se a Equação (4.10), chega-se à seguinte equação:

$$u^*_{j,kk} + \frac{1}{1-2\nu} u^*_{k,kj} + \frac{\Delta(\xi, x)e_i}{G} = 0 \quad (4.12)$$

Alternativamente, se cada ponto de carregamento é tomado como independente, os deslocamentos e as forças com asterisco (\*) podem ser escritos(as) da seguinte forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x)e_i \quad (4.13)$$

Fazendo-se  $e_i = \delta_{ki} \cdot e_k$  e substituindo-se a Equação (4.13) na Equação (4.12), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$u_{ki,jj}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{kj,ij}^* + \frac{\Delta(\xi, x)\delta_{ki}}{G} = 0 \quad (4.14)$$

Uma solução da equação diferencial (4.14) é a solução fundamental de Kelvin, que, para problemas tridimensionais, é dada por:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\} \quad (4.15)$$

A solução fundamental de Kelvin para problemas da elasticidade do estado plano de deformação (EPD) é dada por:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\} \quad (4.16)$$

Derivando-se as equações (4.15) e (4.16), em relação a  $x_i$ , obtêm-se as deformações  $\varepsilon_{jk}^*$  em qualquer ponto causadas uma carga pontual unitária aplicada em  $\xi$  na direção  $i$ . Aplicando-se cada resultado das deformações na Equação (4.3), que descreve a lei generalizada de Hooke, e, em seguida, relacionando-se à Equação (4.2), obtêm-se as soluções fundamentais para os problemas tridimensionais e de EPD, conforme se segue:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}, \quad (4.17)$$

em que  $\alpha = 2, 1$ ;  $\beta = 3, 2$  para problemas tridimensionais e de EPD, respectivamente. Nota-se, também, que  $r = r(\xi, x)$  representa a distância entre o ponto de carregamento  $\xi$  (ponto fonte) e o ponto campo  $x$ . Suas derivadas são tomadas com referência às coordenadas de  $x = x_i$ , como indicado a seguir:

$$\begin{aligned}
 r &= (r_i r_i)^{\frac{1}{2}} \\
 r_i &= x_i(x) - x_i(\xi) \\
 r_{,i} &= \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

As expressões do estado plano de deformações são válidas, também, para o estado plano de tensões, se  $\nu$  for substituído por  $\bar{\nu} = \nu/(1 + \nu)$  e se  $E$  for substituído por  $\bar{E} = (1 - \nu)E$ , para o caso de materiais isotrópicos.

A solução das equações diferenciais apresentadas neste capítulo é chamada de Solução Fundamental de Kelvin.

#### 4.3.2 DOMÍNIOS SEMI-INFINITOS

Uma segunda classe de soluções fundamentais foi desenvolvida para utilização visando à solução de problemas da elasticidade com domínio semi-infinito. Nesse caso, a região de Kelvin é subdividida por um plano horizontal infinito  $\bar{\Gamma}$  e a sua parte inferior é considerada como  $\Omega^* + \Gamma^*$ . Assim, a região de interesse torna-se um meio semi-infinito, com a parte plana de  $\Gamma^*$  sendo representada pela superfície  $\bar{\Gamma}$ . Supõe-se, sempre, que esse meio inferior contém a região  $\Omega + \Gamma$  e o plano  $x_1 = 0$  seja considerado como uma superfície de contorno  $\bar{\Gamma}$ , que é, aqui, considerada livre de forças de superfície (Figura 4.2):

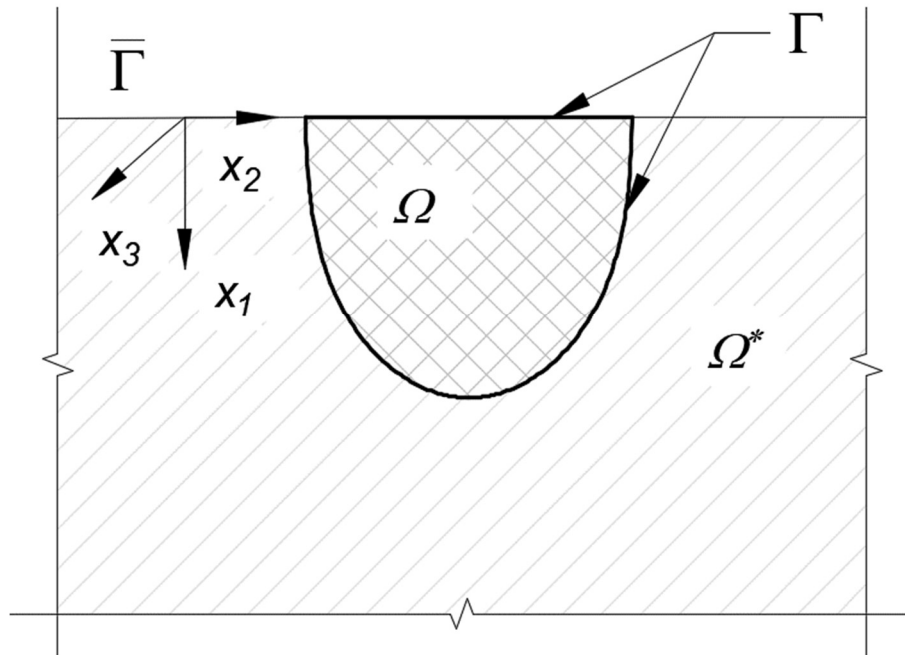


Figura 4.2 - Corpo  $\Omega + \Gamma$  localizado dentro do espaço semi-infinito  $x_1 \geq 0$ .

A distribuição de tensões devidas às cargas pontuais aplicadas dentro de um semiplano isotrópico foi apresentada por Melan (1932). A solução para o problema tridimensional equivalente (Figura 4.3) foi dada por Mindlin (1936), que desenvolveu não apenas as tensões, mas também os deslocamentos mobilizados por cargas concentradas que atuam em um meio sólido. A aplicação da solução fundamental de Mindlin no método dos elementos de contorno foi tratada por Nakaguma (1979).

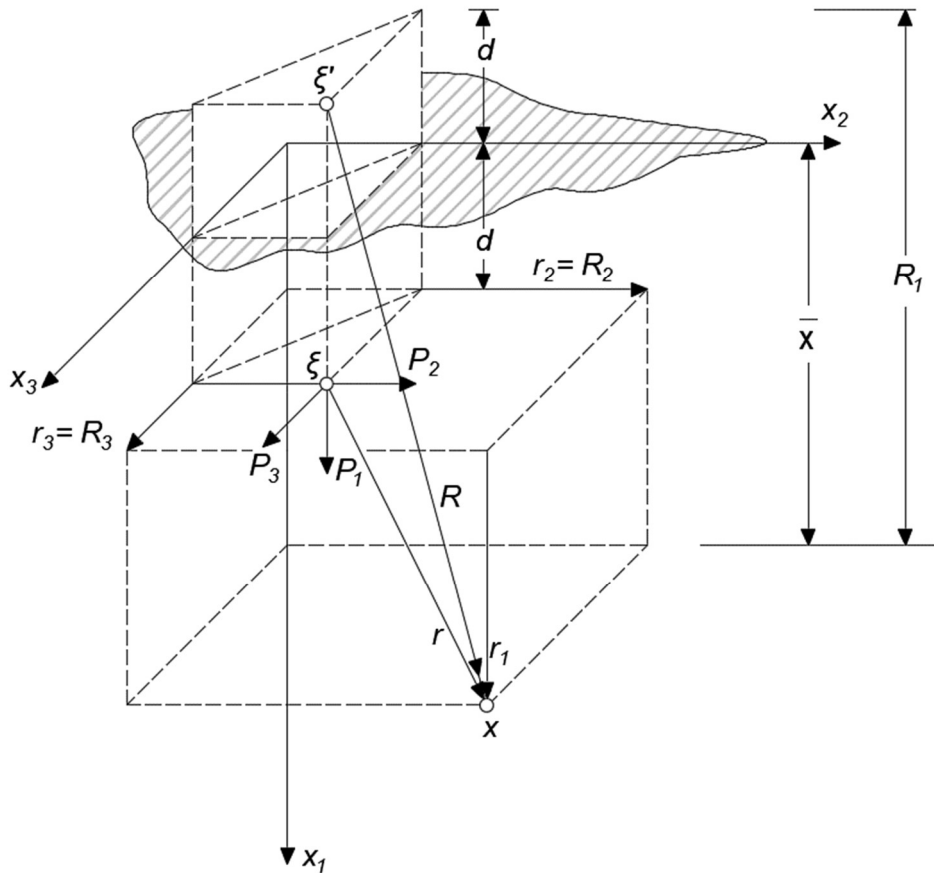


Figura 4.3 - Carga pontual unitária dentro de um semiespaço com  $P_1 = P_2 = P_3 = 1$ .

Com base no procedimento de Mindlin (1936), a solução fundamental completa de semiespaço pode ser obtida pela superposição de 18 núcleos de deformação, derivados da solução de Kelvin, sendo seis para cada um dos três componentes de força. A primeira solução singular empregada em cada direção de carga é a solução Kelvin única, apresentada na Seção 4.3.1. Todos os outros núcleos envolvem as coordenadas da imagem do ponto de carga em relação à superfície  $\bar{\Gamma}$ . Isso satisfaz a condição força sobre a superfície livre do espaço semi-infinito. Portanto, essa classe de soluções pode ser escrita como:

$$(\ )^* = (\ )^k + (\ )^c \quad (4.19)$$

onde  $( )^k$  e  $( )^c$  representam, respectivamente, a solução fundamental de Kelvin e a parte complementar. A parte correspondente à solução fundamental de Kelvin foi apresentada, na Seção 4.3.1, para duas e três dimensões. A parte complementar das soluções fundamentais para

problemas tridimensionais de semiespaço são dadas pelas seguintes expressões (BREBBIA *et al.*, 1984):

$$u_{11}^c = K_d \left\{ \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(3-4\nu)R_1^2 - 2c\bar{x}}{R^3} + \frac{6c\bar{x}R_1^2}{R^5} \right\} \quad (a)$$

$$u_{12}^c = K_d r_2 \left\{ \frac{(3-4\nu)r_1}{R^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} + \frac{6c\bar{x}R_1}{R^5} \right\} \quad (b)$$

$$u_{13}^c = \frac{r_3}{r_2} u_{12}^c \quad (c)$$

$$u_{21}^c = K_d r_2 \left\{ \frac{(3-4\nu)r_1}{R^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} - \frac{6c\bar{x}R_1}{R^5} \right\} \quad (d)$$

$$u_{22}^c = K_d \left\{ \frac{1}{R} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2c\bar{x}}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_1} \left( 1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_1)} \right) \right\} \quad (e) \quad (4.20)$$

$$u_{23}^c = K_d r_2 r_3 \left\{ \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} - \frac{6c\bar{x}}{R^5} \right\} \quad (f)$$

$$u_{31}^c = \frac{r_3}{r_2} u_{21}^c \quad (g)$$

$$u_{32}^c = u_{23}^c \quad (h)$$

$$u_{33}^c = K_d \left\{ \frac{1}{R} + \frac{(3-4\nu)r_3^2}{R^3} + \frac{2c\bar{x}}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_3^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_1} \left( 1 - \frac{r_3^2}{R(R+R_1)} \right) \right\} \quad (i)$$

em que:

$$R = (R_i R_i)^{1/2} \quad (a)$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (b)$$

(4.21)

$$R_i = x_i(x) - x_i(\xi') \quad (c)$$

$$c = x_1(\xi) \geq 0 \quad (d)$$

$$\bar{x} = x_1(x) \geq 0 \quad (e)$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \quad (f)$$

sendo ( $i = 1, 2, 3$ ).

As expressões complementares para as estimativas das tensões são dadas por:

$$\sigma_{111}^c = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_1}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)\bar{x}R_1^2 - 3cR_1(5\bar{x}-c)}{R^5} - \frac{30c\bar{x}R_1^3}{R^7} \right\} \quad (a)$$

$$\sigma_{121}^c = K_s r_2 \left\{ \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)\bar{x}R_1 - 3c(3\bar{x}+c)}{R^5} - \frac{30c\bar{x}R_1^2}{R^7} \right\} \quad (b)$$

$$\sigma_{131}^c = K_s r_3 \left\{ \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)\bar{x}R_1 - 3c(3\bar{x}+c)}{R^5} - \frac{30c\bar{x}R_1^2}{R^7} \right\} \quad (c)$$

$$\sigma_{221}^c = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)(3r_1 - 4\nu R_1)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 r_1 - 6cR_1[(1-2\nu)\bar{x} - 2\nu c]}{R^5} \right\} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{30cr_2^2\bar{x}R_1}{R^7} \\ & - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} \left( 1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_1)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (d)$$

$$\sigma_{231}^c = K_s r_2 r_3 \left\{ - \frac{3(3-4\nu)r_1}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^2(R+R_1)} \left( \frac{1}{R+R_1} + \frac{1}{R} \right) - \frac{30c\bar{x}R_1}{R^7} \right\} \quad (e)$$

$$\sigma_{331}^c = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)(3r_1 - 4\nu R_1)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_3^2 r_1 - 6cR_1[(1-2\nu)\bar{x} - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_3^2 \bar{x} R_1}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} \left( 1 - \frac{r_3^2}{R(R+R_1)} - \frac{r_3^2}{R^2} \right) \right\} \quad (f)$$

$$\sigma_{112}^c = K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)R_1^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left( c + (1-2\nu)R_1 + \frac{5\bar{x}R_1^2}{R^2} \right) \right\} \quad (g)$$

$$\sigma_{112}^c = K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)R_1^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left( c + (1-2\nu)R_1 + \frac{5\bar{x}R_1^2}{R^2} \right) \right\} \quad (h)$$

$$\sigma_{132}^c = K_s r_2 r_3 \left\{ -\frac{3(3-4\nu)R_1}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left( 1 - 2\nu + \frac{5\bar{x}R_1}{R^2} \right) \right\} \quad (i)$$

$$\sigma_{222}^c = K_s r_2 \left\{ \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} \left[ 3 - \frac{r_2^2(3R+R_1)}{R^2(R+R_1)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - (3-2\nu)R_1 + \frac{5r_2^2 \bar{x}}{R^2} \right] \right\} \quad (j)$$

$$\sigma_{232}^c = K_s r_3 \left\{ \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2(3R+R_1)}{R^2(R+R_1)} \right] - \frac{6c\bar{x}}{R^5} \left( 1 - \frac{5r_2^2}{R^2} \right) \right\} \quad (k)$$

$$\sigma_{332}^c = K_s r_2 \left\{ \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_3^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} \left[ 1 - \frac{r_3^2(3R+R_1)}{R^2(R+R_1)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ c - (1-2\nu)R_1 + \frac{5r_3^2 \bar{x}}{R^2} \right] \right\} \quad (l)$$

$$\sigma_{113}^c = \frac{r_3}{r_2} \sigma_{112}^c \quad (m)$$

$$\sigma_{123}^c = \sigma_{132}^c \quad (n)$$

$$\sigma_{133}^c = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_1}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_3^2 R_1}{R^5} - \frac{6c}{R^5} \left[ \bar{x}R_1 - (1-2\nu)r_3^2 - \frac{5r_3^2 \bar{x}R_1}{R^2} \right] \right\} \quad (o)$$

$$\sigma_{223}^c = K_s r_3 \left\{ \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2(3R+R_1)}{R^2(R+R_1)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ c - (1-2\nu)R_1 + \frac{5r_2^2 \bar{x}}{R^2} \right] \right\} \quad (p)$$

$$\sigma_{233}^c = K_s r_2 \left\{ \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_3^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} \left[ 1 - \frac{r_3^2(3R+R_1)}{R^2(R+R_1)} \right] - \frac{6c\bar{x}}{R^5} \left( 1 - \frac{5r_3^2}{R^2} \right) \right\} \quad (q)$$

$$\sigma_{333}^c = K_s r_3 \left\{ \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_3^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} \left[ 3 - \frac{r_3^2(3R+R_1)}{R^2(R+R_1)} \right] - \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - (3-2\nu)R_1 - \frac{5r_3^2 \bar{x}}{R^2} \right] \right\} \quad (r)$$

em que:

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (4.23)$$

As forças de superfície fundamentais podem ser calculadas a partir das formulações de tensão (4.22), conforme exposto a seguir:

$$p_{ij}^c = \sigma_{jki}^c n_k. \quad (4.24)$$

As expressões complementares não indicam singularidades para  $x_1 \geq 0$ ; ou seja: quando o ponto carregado está localizado dentro de  $\Omega^*$  ( $c > 0$ ). Se o ponto fonte estiver na superfície  $\bar{\Gamma}(c \rightarrow 0)$ , percebe-se que as expressões complementares somadas às da solução de Kelvin produzem a solução completa para o problema de Boussinesq-Cerruti (MINDLIN, 1936) em três dimensões.

Em Brebbia *et al.* (1984), é apresentada parte complementar das soluções fundamentais para problemas de domínio semi-infinito bidimensional do estado plano de tensões e do estado plano de deformações. Neste trabalho, o enfoque é dado a problemas tridimensionais.

#### 4.4 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

As equações integrais do contorno podem ser obtidas a partir da técnica de resíduos ponderados, em que a função ponderadora utilizada é a solução fundamental, conforme mostrado na Seção 4.3. Nesse contexto, aplicando-se a técnica dos resíduos ponderados sobre a equação de equilíbrio (4.1), tem-se a seguinte relação:

Conhecendo-se os deslocamentos e as forças de superfície que atuam em um corpo  $\Omega$  de contorno  $\Gamma$ , contido por um domínio,  $\Omega^* + \Gamma^*$ , a reciprocidade de Betti pode ser escrita conforme apresentado a seguir:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u^*_{ki} d\Omega = 0 \text{ em } \Omega \quad (4.25)$$

onde  $u^*_{ki}$  indica a solução fundamental, atuando em um ponto de um domínio infinito elástico e homogêneo para o problema de Kelvin, conforme já demonstrado na Seção 4.3.

Aplicando-se a integração por partes e o Teorema da Divergência no primeiro termo na expressão (4.25), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \cdot u^*_{ki} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \cdot u^*_{ki})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u^*_{ki,j} d\Omega \quad (a)$$

$$(4.26)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} \cdot u^*_{ki} d\Omega = \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u^*_{ki,j} d\Omega \quad (b)$$

Substituindo-se a Equação (4.26) na Equação (4.25), pode-se escrever a seguinte relação:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} u^*_{ki,j} \cdot \sigma_{ij} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

sendo  $\Gamma$  a variável que define o contorno do corpo e  $n_j$  a componente do vetor normal à superfície.

Sabendo-se que  $\sigma_{ij} \cdot n_j = p_i$ , que  $u^*_{ki,j} = \varepsilon^*_{kij}$ , sendo  $\varepsilon^*_{kij}$  a solução fundamental das deformações, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} \cdot \sigma_{ij} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \quad (4.28)$$

A partir da Equação (4.3), tem-se que  $\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} = C_{ijlm} \epsilon_{lm}$ , assim:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} \cdot C_{ijlm} \varepsilon_{lm} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

As relações indicadas da Equação (4.30) permitem escrever o segundo termo da Equação (4.29) em função das soluções fundamentais em nível de tensão ou de deformação:

$$\varepsilon^*_{kij} \cdot C_{ijlm} \varepsilon_{lm} = \sigma^*_{klm} \cdot \varepsilon_{lm} = \sigma^*_{klm} \cdot u_{l,m} = \sigma^*_{kij} \cdot u_{i,j} \quad (4.30)$$

A Equação (4.31) mostra a Equação (4.29) escrita em termos da tensão fundamental:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma^*_{kij} \cdot u_{i,j} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \quad (4.31)$$

Aplicando-se a integração por partes e o Teorema da Divergência na segunda integral da Equação (4.31), encontra-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma^*_{kij} \cdot u_i \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^*_{kij} \cdot u_i \cdot d\Omega \\ + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Deve-se observar que a correlação entre as equações (4.9) e (4.10) fornece o seguinte:

$$\sigma^*_{ij,j} = -\Delta(\xi, x) e_i \quad (a)$$

$$\sigma^*_{ij,j} = -\Delta(\xi, x) \delta_{ki} \cdot e_k \quad (b) \quad (4.33)$$

$$\sigma^*_{kij,j} = -\Delta(\xi, x) \delta_{ki} \quad (c)$$

em que  $\Delta(\xi, x)$  é o delta de Dirac,  $\delta_{ki}$  é o delta de Kronecker,  $\xi$  e  $x$  são, respectivamente, o ponto de carregamento singular e o ponto campo, contidos no domínio  $\Omega$ , e  $e_i$  é o vetor unitário na direção  $i$ .

Aplicando-se a Equação (4.33)-(c) em (4.32) encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma^*_{kij} \cdot u_i \cdot n_j \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} -\delta_{ki} \cdot u_i \cdot \Delta(\xi, x) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega \quad (a)$$

$$= 0 \quad (4.34)$$

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma^*_{kij} \cdot u_i \cdot n_j \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} u_k \cdot \Delta(\xi, x) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \quad (b)$$

Substituindo-se  $\sigma^*_{kij} \cdot n_j = p_{ki}^*$  e aplicando-se as propriedades do delta de Dirac para obter  $\int_{\Omega} u_k \cdot \Delta(\xi, x) \cdot d\Omega = u_k(\xi)$  em  $\Omega$ , tem-se:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \cdot u_i \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega \quad (4.35)$$

A Equação (4.35) pode ser reescrita em função dos índices  $i$  e  $j$  e das coordenadas do pontos singular e campo ( $\xi$  e  $x$ ), conforme se expõe a seguir:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u^*_{ij}(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p^*_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u^*_{ij}(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (4.36)$$

A Equação (5.2) é conhecida, na literatura técnica, como Identidade Somigliana para Deslocamentos. Foi desenvolvida para a condição de ponto fonte,  $\xi$ , contido no domínio  $\Omega$ ; ou seja: se  $\xi \notin \Omega \rightarrow u_i(\xi) = 0$ . Isso é necessário para atender aos requisitos da função delta de Dirac. Na hipótese de o ponto fonte ( $\xi$ ) estar contido no contorno  $\Gamma$ , é necessário adotar procedimentos para remoção da singularidade pertencente ao contorno. Logo, a Equação (4.36) pode ser reescrita em função de um coeficiente  $c_{ij}$ , conforme a Equação (4.37):

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) \\
= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)d\Omega(x)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

em que o coeficiente  $c_{ij}(\xi)$  admite valores nulos para  $\xi$  fora do  $\Omega + \Gamma$ , igual a  $\delta_{ij}$  para  $\xi$  dentro do  $\Omega$  e igual a 0,5 para  $\xi$  sobre trecho suave de  $\Gamma$ . Para aplicações práticas, no entanto, o valor de  $c_{ij}(\xi)$ , pode ser calculado indiretamente, aplicando-se a Equação (4.37) para representar os movimentos de corpos rígidos.

Por fim, para problemas em que não há influência da força de corpo, a Equação (4.37) resume-se a:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) \tag{4.38}$$

As equações apresentadas neste capítulo são válidas para problemas elásticos de domínios fechados, abrangendo corpos finitos e infinitos (Solução de Kelvin), bem como domínios semi-infinitos (Solução de Mindlin).

#### 4.5 CONSTRUÇÃO DO SISTEMA ALGÉBRICO

Para a discretização do problema regido pela Equação (4.38), o contorno  $\Gamma$  é aproximado, empregando-se uma série de elementos. As coordenadas cartesianas  $[\mathbf{x}]$  de pontos localizados em cada elemento  $\Gamma_j$  são expressas em termos de funções de interpolação  $[\Psi]$  e as coordenadas nodais  $\mathbf{x}^m$  do elemento pela relação de matriz:

$$[\mathbf{x}] = [\Psi]^T [\mathbf{x}]^m \tag{4.39}$$

em que  $[\mathbf{x}]$  representa o vetor com as coordenadas  $x_1, x_2$  e  $x_3$  em problemas tridimensionais.

De maneira similar, deslocamentos e forças de superfície no contorno são aproximados sobre cada elemento por meio das funções de interpolação:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= [\Phi]^T [\mathbf{u}]^n & (a) \\ [\mathbf{p}] &= [\Phi]^T [\mathbf{p}]^n & (b) \end{aligned} \quad (4.40)$$

sendo que  $[\mathbf{u}]^n$  e  $[\mathbf{p}]^n$  contém os deslocamentos nodais e forças de superfície, respectivamente.

O sobrescrito  $m$  na Equação (4.39) refere-se ao número de pontos de contorno requeridos para se definir a geometria de cada elemento de contorno, enquanto o sobrescrito  $n$  na Equação (4.40) refere-se ao número de nós de contorno aos quais os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície estão associados.

Para o tratamento algébrico do problema, pode-se generalizar  $[\mathbf{u}]$  como o vetor de deslocamentos e  $[\mathbf{p}]$  como o vetor de forças de superfície, a saber:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} & (a) \\ [\mathbf{p}] &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} & (b) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Adicionalmente, é possível definir as duas matrizes conforme estas expressões:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]^* &= \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} & (a) \\ [\mathbf{p}]^* &= \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} & (b) \end{aligned} \quad (4.42)$$

em que  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  são os deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  devido a força unitária no ponto em consideração, agindo na direção  $i$ , conforme apresentado na Seção 4.3.

A Equação (4.38) pode ser escrita na forma matricial, conforme a seguir:

$$[\mathbf{c}][\mathbf{u}] + \int_{\Gamma} [\mathbf{p}]^* [\mathbf{u}] d\Gamma = \int_{\Gamma} [\mathbf{u}]^* [\mathbf{p}] d\Gamma . \quad (4.43)$$

Essa formulação é válida para um ponto carregado no contorno em  $\xi$ . Note-se que  $[\mathbf{p}]^*$  e  $[\mathbf{u}]^*$  são conhecidos e  $\mathbf{c}$  pode ser encontrado analiticamente ou a partir de condições de equilíbrio do corpo rígido. As variáveis são os valores de  $[\mathbf{u}]$  e  $[\mathbf{p}]$  sobre o contorno.

A Equação (4.43) pode ser escrita na forma matricial, para cada um dos nós em consideração, conforme se expõe a seguir:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{1i} & \dots & \hat{h}_{1r} \\ \hat{h}_{21} & h_{22} & \dots & \hat{h}_{2i} & \dots & \hat{h}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{h}_{i1} & \hat{h}_{i2} & & h_{ii} & & \hat{h}_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{h}_{r1} & \hat{h}_{r2} & & \hat{h}_{ri} & & h_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1i} & \dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2i} & \dots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2} & & g_{ii} & & g_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & & g_{ri} & & g_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_r \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Portanto, a Equação (4.44) pode ser escrita como:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{U}] = [\mathbf{G}][\mathbf{P}] \quad (4.45)$$

em que os termos da matriz  $\mathbf{H}$  são dados por:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \hat{h}_{ij} + c_i \text{ quando } i = j & (a) \\ h_{ij} &= \hat{h}_{ij} \text{ quando } i \neq j & (b) \end{aligned} \quad (4.46)$$

As condições de contorno, neste sistema, são de dois tipos, a saber:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_1 & (a) \\ p_i &= \bar{p}_i \text{ em } \Gamma_2 & (b) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Se os deslocamentos são conhecidos, é possível encontrar as forças de superfície e vice-versa. Isso implica que o sistema de equações (4.45) pode ser reordenado de tal forma que todas as incógnitas sejam escritas no lado esquerdo da equação, por meio do vetor  $[\mathbf{Y}]$ . O sistema algébrico correspondente é dado por:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{Y}] = [\mathbf{F}] \quad (4.48)$$

Os coeficientes  $c_i$  da Equação (4.46) podem ser obtidos, implicitamente, pela consideração de movimentos do corpo rígido em um corpo de contorno. Dessa maneira, tem-se um deslocamento de corpo rígido unitário em qualquer direção. A Equação (4.48) torna-se, então:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{I}]_l = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

sendo  $[\mathbf{I}]_l$  um vetor que define o deslocamento rígido unitário na direção  $l$ . Assim, os termos diagonais de  $[\mathbf{H}]$  são dados, simplesmente, por:

$$h_{ii} = - \sum_{i \neq j} h_{ij}, \quad (4.50)$$

que significa que os coeficientes  $c_i$  e  $\hat{h}_{ii}$  não precisam ser determinados explicitamente.

Uma vez resolvida a Equação (4.48), as forças e os deslocamentos ao longo de toda a superfície do corpo tornam-se conhecidos. Posteriormente, é possível calcular as tensões e os deslocamentos em qualquer ponto interno ao domínio.

A Expressão (4.50) é válida para um corpo finito ou infinito. No entanto, para domínios infinitos ou semi-infinitos, um termo adicional deve ser acrescentado à equação (BREBBIA *et al.*, 1984). A Expressão (4.50) para domínios infinitos e semi-infinitos resulta em:

$$h_{ii} = \delta_{ii} - \sum_{i \neq j} h_{ij} \quad (4.51)$$

sendo  $\delta_{ii}=1$ . Essa equação se aplica aos termos diagonais de corpos sem contornos em vez de Equação (4.50).

#### 4.6 ELEMENTOS

No MEC, todo o contorno do domínio é dividido em elementos, que podem apresentar aproximação constante ou de ordem superior. Malhas com maior quantidade de nós

tendem a apresentar resultados mais precisos, embora impliquem, também, maior esforço computacional.

Neste trabalho, utiliza-se o elemento triangular plano com aproximação constante ou com aproximação linear. Elementos com aproximação constante têm um único nó funcional, posicionado no centroide de sua área. Os elementos com aproximação linear permitem aproximações melhores, uma vez que contabilizam três nós funcionais para aproximação das respostas (Figura 4.4). A geometria do elemento triangular plano é definida a partir das coordenadas cartesianas dos três nós posicionados nos vértices, chamados, também, de nós geométricos (Figura 4.4):

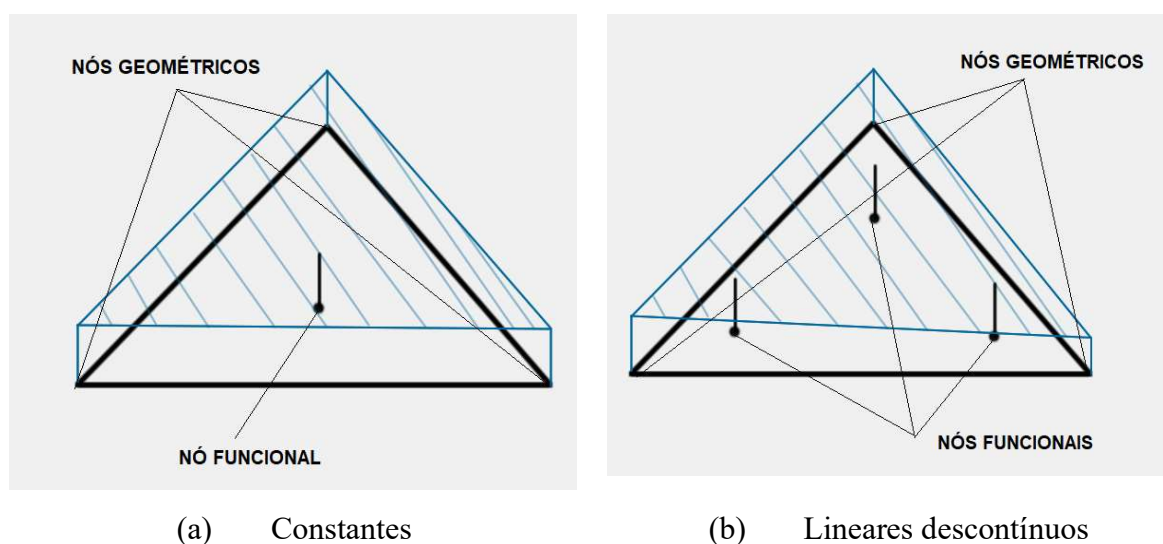


Figura 4.4 - Elementos triangulares.

A distância  $d$  é definida entre o vértice do triângulo e o seu centroide. A posição do nó funcional em relação ao vértice mais próximo é estabelecida a  $0,425 d$ , neste trabalho. Segundo Barbirato (1999), alguns testes foram processados, modificando-se a posição dos nós funcionais em relação aos nós geométricos correspondentes. Os resultados mais precisos ocorreram para o nó funcional localizado entre  $0,350 d$  e  $0,475 d$  do nó geométrico mais próximo.

O elemento triangular descrito é bastante conhecido, uma vez que foi desenvolvido para uso no MEF (COOK *et al.*, 1989); as coordenadas oblíquas (ou homogêneas) e as funções interpoladoras para o MEC são praticamente as mesmas utilizadas no MEF.

## 4.7 TRATAMENTO DE SINGULARIDADES NO PROCESSO DE INTEGRAÇÃO

Qualquer método numérico pode enfrentar problemas de convergência, em algumas ocasiões. Adotando-se o MEC, os problemas de convergência ocorrem, principalmente, devido às singularidades presentes em termos da formulação desenvolvida a partir da solução fundamental. Na literatura técnica, há uma variedade de métodos indicados para o tratamento das singularidades. Dentre várias obras que abordam esse tema, citam-se Barbirato (1999), Souza e Coda (2005), Ribeiro (2009), Leite *et al.* (2021) e Barroso (2022).

### 4.7.1 INTEGRAÇÃO NÃO-SINGULAR

A integral não-singular ocorre quando o ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado e quando o ponto fonte encontra-se distante desse elemento. Essa é a forma de integração mais simples do MEC porque, nessas circunstâncias, não há problemas de singularidades.

As componentes das matrizes H e G são obtidas por meio da integração numérica sobre cada elemento do contorno. No caso do elemento triangular plano com aproximações constante, linear ou quadrática, a integração é numérica, realizada por meio da quadratura de Hammer, a partir de funções das coordenadas homogêneas.

Neste trabalho, a integração de Hammer foi avaliada para aproximações com até 7 pontos de integração.

### 4.7.2 INTEGRAÇÃO QUASE-SINGULAR

A integral quase-singular ocorre quando o ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado, mas há proximidade entre eles. Nesses casos, o procedimento numérico de integração por meio da quadratura de Hammer tem a sua precisão afetada pela distância entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $x$ , já que as funções envolvidas tendem a apresentar singularidades, ou são quase-singulares.

Para solução desse tipo de problema, aplica-se a técnica de subdivisão do elemento a ser integrado. Com esse artifício, aumenta-se a efetividade do uso da quadratura de Hammer para integrais regulares. Com essa subdivisão, ocorrem mudanças na escada do problema, reduzindo-se os problemas de convergência.

No presente trabalho, leva-se em consideração a distância do ponto fonte ao centro do elemento  $j$ . Nos casos em que essa distância é inferior ao comprimento médio das arestas do

próprio elemento  $j$ , a integração é feita com 25 subelementos do elemento  $j$ , conforme descrito por Barbirato (1999).

Outros algoritmos destinados à subdivisão de elementos são descritos por Almeida (2003a), Souza e Coda (2005), Ribeiro (2009) e Barroso (2022).

### 4.7.3 INTEGRAÇÃO SINGULAR

A integração singular ocorre quando o ponto fonte  $\xi$  pertence ao próprio elemento  $j$ . Nesses casos, a solução de fundamental de Kelvin é aplicada, analiticamente, para redução da dimensão do problema, transformando-se as integrais do domínio em integrais de contorno do próprio elemento a ser integrado. Esse artifício reduz as singularidades do problema, porque faz com que as distâncias a serem consideradas sejam entre o ponto fonte  $\xi$  e as arestas do elemento  $j$ .

Após esse tratamento analítico, as integrais de contorno são calculadas, numericamente, por meio da quadratura de Gauss. Dadas as características desse procedimento, o método é também conhecido como semianalítico.

Nesta pesquisa, o método descrito foi utilizado para o tratamento da integração singular no MEC, utilizando-se a quadratura de Gauss para polinômios com até 12 pontos de integração.

## 4.8 IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGO PARA O MEC ELÁSTICO TRIDIMENSIONAL

O algoritmo do MEC para problemas elásticos de sólidos tridimensionais foi inteiramente desenvolvido de maneira modular, em *scripts*, por meio do Matlab<sup>®</sup>, conforme apresentado nos trabalhos Pimentel *et al.* (2021) e Lanes e Greco (2022).

O código implementado possibilita a análise do MEC, explorando-se o tipo de solução fundamental (Kelvin ou Mindlin); o tipo de elemento triangular (constante ou linear descontínuo) e a quantidade de pontos de integração numérica (Gauss e Hammer).

Fornecidos os dados geométricos, as propriedades físicas do contorno, bem como os deslocamentos e as forças superficiais prescritas, a rotina é processada e os dados de saída podem ser avaliados graficamente no próprio ambiente do Matlab<sup>®</sup> ou ser exportados para arquivos de texto.

Na Figura 4.5, apresenta-se o diagrama de atividade simplificado dos principais módulos do algoritmo.

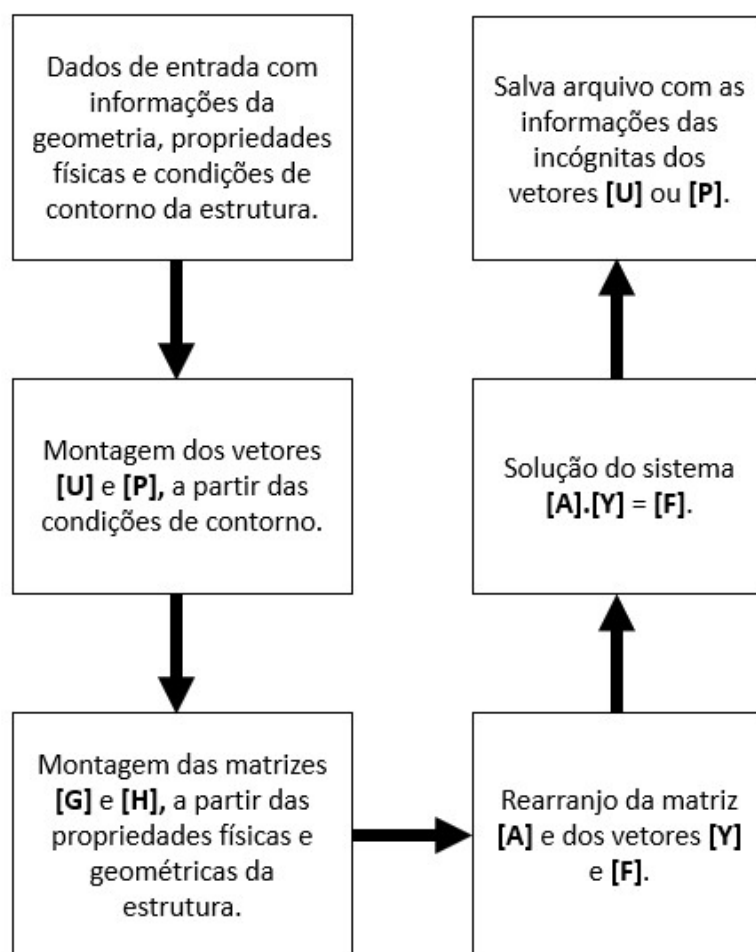


Figura 4.5 – Diagrama de atividades do código implementado para o MEC elástico tridimensional.

## 4.9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.9.1 SÓLIDO CRUCIFORME

O exemplo apresentado é um sólido cruciforme tracionado, em suas extremidades, com tensão de 1,0 MPa. O problema pode ser enunciado como elemento sólido elástico com formato de cruz. A solução fundamental de Kelvin foi aplicada para domínios finitos. Utilizaram-se duas malhas diferentes: a primeira, menos refinada, com 176 elementos; e, a segunda, mais refinada, com 704 elementos. Uma visão esquemática do problema e das malhas utilizadas, gerada pelo próprio *software*, é apresentada na Figura 4.6. O resultado considerado para o cálculo do erro relativo é dado por Barbirato (1999), sendo o valor do deslocamento axial máximo igual a  $2,16 \times 10^{-5}$  m, em ambas as direções.

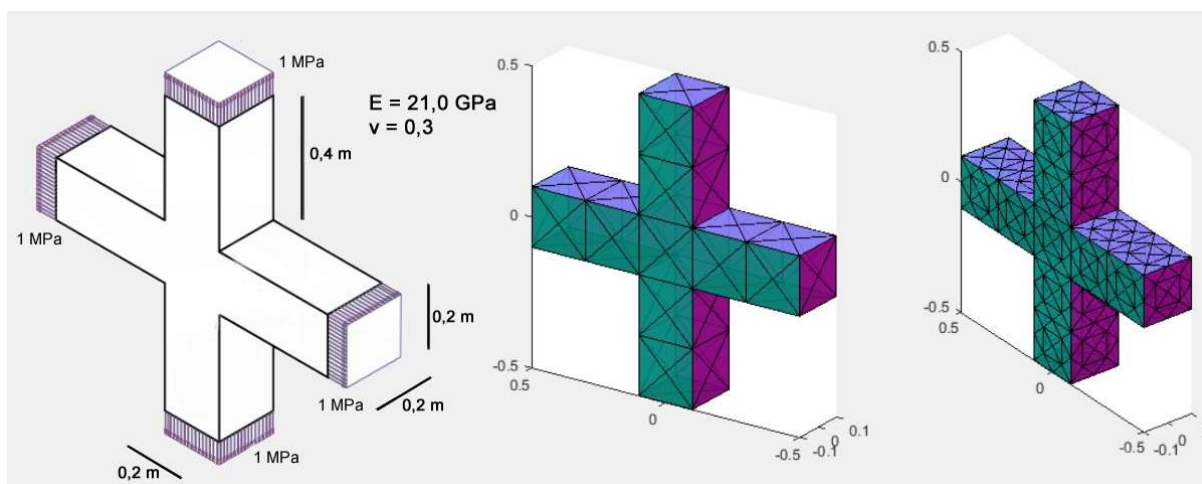


Figura 4.6 – Esquema e malhas para a solução do problema de sólido cruciforme tracionado. As malhas utilizadas foram de 176 e 704 elementos, respectivamente.

Os resultados obtidos na análise para o problema com elementos constantes estão dispostos na Tabela 4.1 e mostram que se reduziu o erro relativo, com o aumento do número de elementos.

Tabela 4.1 – Resultados para o problema do sólido cruciforme com elementos constantes.

Nº de Elementos	Deslocamento axial (m)	Erro relativo (%)	Tempo de processamento (s)
176	$2,23 \times 10^{-5}$	-3,49	932
704	$2,19 \times 10^{-5}$	-1,50	6.951

Os resultados obtidos na análise para o problema com elementos lineares estão apresentados na Tabela 4.2:

Tabela 4.2 – Resultados para o problema do sólido cruciforme com elementos lineares.

Nº de Elementos	Deslocamento axial (m)	Erro relativo (%)	Tempo de processamento (s)
176	$2,12 \times 10^{-5}$	2,75	1.389
704	$2,16 \times 10^{-5}$	0,20	11.445

Ambos os resultados mostraram que o erro relativo se reduz com o aumento do número de elementos. Além disso, os deslocamentos obtidos a partir da malha composta por elementos lineares descontínuos indicaram maior precisão do que os deslocamentos obtidos a partir da malha de elementos constantes. O processamento foi realizado em uma máquina equipada com um processador Intel® Core™ i5 de 2,8 GHz e 16 GB de memória RAM.

#### 4.9.1 PLANO HORIZONTAL CARREGADO

Esse exemplo é um caso clássico da solução de Mindlin apresentado em Barbirato (1999). Consiste em um plano horizontal sujeito a um carregamento uniforme. A Figura 4.7 apresenta um esquema do problema resolvido, as malhas utilizadas e as propriedades físicas dos materiais.

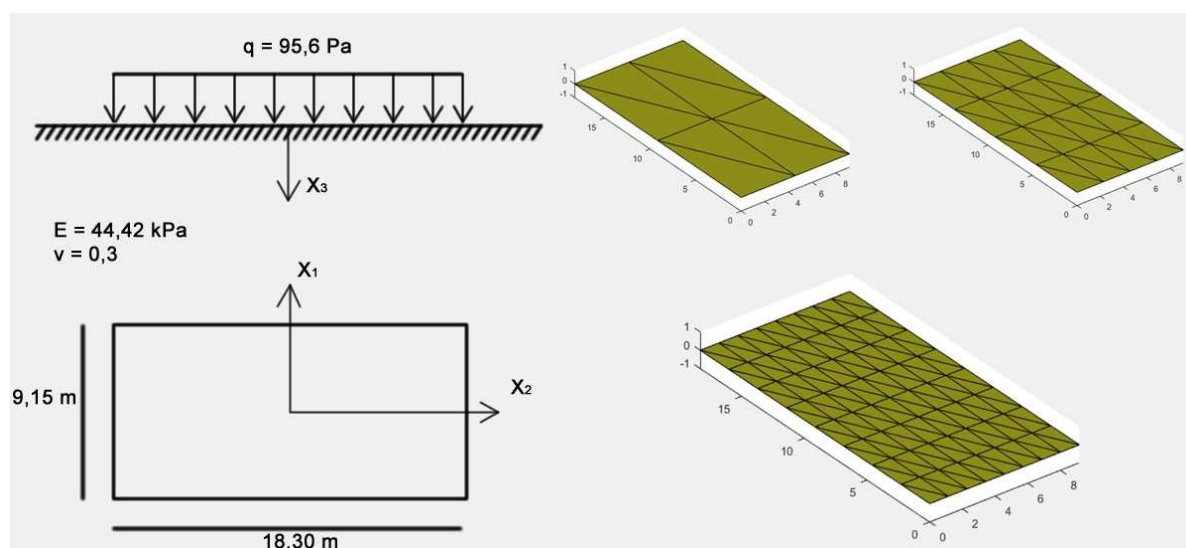


Figura 4.7 – Esquema e malhas para a solução do problema do plano horizontal carregado. As malhas utilizadas foram de 8, 32 e 128 elementos respectivamente.

A Tabela 4.3 e a Tabela 4.4 mostram os resultados encontrados e o erro relativo. O deslocamento normal ao plano, em  $x_3$ , na origem do sistema cartesiano, apresentado por Barbirato (1999), é de  $2,829 \times 10^{-2} m$ .

Tabela 4.3 – Problema do plano horizontal carregado com elementos constantes.

Nº de Elementos	Deslocamento axial (m)	Erro relativo (%)	Tempo de processamento (s)
8	$2,687 \times 10^{-2}$	-5,03	3
32	$2,794 \times 10^{-2}$	-1,23	49
128	$2,823 \times 10^{-2}$	-0,21	482

Tabela 4.4 – Problema do plano horizontal carregado com elementos lineares descontínuos

Nº de Elementos	Deslocamento axial (m)	Erro relativo (%)	Tempo de processamento (s)
8	$2,821 \times 10^{-2}$	-0,29	5
32	$2,847 \times 10^{-2}$	0,62	74
128	$2,846 \times 10^{-2}$	0,59	719

O exemplo do plano horizontal carregado apresentou ótimos resultados, utilizando-se tanto elementos constantes quanto elementos lineares descontínuos. O erro máximo encontrado para a malha mais grosseira e o tipo de elemento mais simples foi de cerca de 5%. O processamento foi realizado em uma máquina equipada com um processador Intel® Core™ i5 de 2,8 GHz e 16 GB de memória RAM.

# 5

## FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS NO MEC

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Materiais com comportamento viscoelástico exibem propriedades tanto viscosas quanto elásticas, quando submetidos a carregamentos constantes ou variáveis. A viscosidade desses materiais varia com as mudanças de temperatura. Em temperatura ambiente, além dos polímeros e óleos, outros materiais utilizados na construção civil podem apresentar comportamento viscoelástico. Entre eles, estão o solo e o concreto (VENTURINI, 1983; OLIVEIRA e LEONEL, 2017).

Nos solos, os modelos viscoelásticos permitem a consideração da deformação inicial e dos recalques por adensamento primário e adensamento secundário (GIBSON e LO, 1961; BARDEN, 1968). As respostas do material ao longo do tempo dependem, essencialmente, da forma como o carregamento varia e do modelo matemático escolhido para a sua idealização.

Este capítulo aborda a dedução das formulações do Método dos Elementos de Contorno em termos de materiais com comportamento viscoelástico para simulação dos solos. Essas formulações são apresentadas por meio dos modelos Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener, que possibilitam a representação de sólidos (CODA e MESQUITA, 2007).

A partir da equação integral do contorno, os termos foram reescritos em função das tensões, das deformações e das suas correspondentes taxas de variação com o tempo. Em todos os modelos, utilizou-se um único parâmetro viscoso; qual seja:  $\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma$ , conforme descrito no Capítulo 3.

### 5.2 MODELO DE KELVIN-VOIGT

### 5.2.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

A partir das equações (4.30) e (3.57), pode-se escrever a relação viscoelástica de Kelvin-Voigt, conforme se expõe a seguir:

$$\sigma_{ij} = E\bar{C}_{ij}^{lm}\epsilon_{lm} + \gamma E\bar{C}_{ij}^{lm}\dot{\epsilon}_{lm} = C_{ij}^{lm}\epsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm}\dot{\epsilon}_{lm} \quad (\text{a})$$

$$\sigma^*_{klm}\cdot\epsilon_{lm} = \varepsilon^*_{kij}\cdot C_{ij}^{lm}\cdot\epsilon_{lm} + \varepsilon^*_{kij}\cdot\gamma\cdot C_{ij}^{lm}\cdot\dot{\epsilon}_{lm} \quad (\text{b}) \quad (5.1)$$

Substituindo-se a Equação (5.1) na Equação (4.29), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki}\cdot p_i\cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij}\cdot C_{ij}^{lm}\cdot\epsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij}\cdot\gamma C_{ij}^{lm}\cdot\dot{\epsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki}\cdot b_i d\Omega = 0 \quad (5.2)$$

Assim, sabendo-se que:

$$\varepsilon^*_{kij}\gamma C_{ij}^{lm}\dot{\epsilon}_{lm} = \gamma\sigma^*_{klm}\dot{\epsilon}_{lm} = \gamma\sigma^*_{klm}\dot{u}_{l,m} = \gamma\sigma^*_{kij}\dot{u}_{i,j} \quad (5.3)$$

a Equação (5.2) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} u^*_{ki}p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma^*_{kij}u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma^*_{kij}\dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki}b_i d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

Aplicando-se a integração por partes e o Teorema da Divergência na segunda e na terceira integrais de (5.4), encontra-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u^*_{ki}p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma^*_{kij}n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^*_{kij,j}u_i d\Omega - \\ & \gamma \int_{\Gamma} \sigma^*_{kij}n_j\dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma^*_{kij,j}\dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki}b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Substituindo-se a relação  $\sigma^*_{kij}n_j = p^*_{ki}$  e a Equação (4.33)-(c), podem-se aplicar as propriedades de delta de Dirac para se obter  $\int_{\Omega} u_k\cdot\Delta(\xi, x)\cdot d\Omega = u_k(\xi)$  em  $\Omega$ , chegando-se a:

$$\begin{aligned} & c_{ki}(\xi)u_i(\xi) + \gamma c_{ki}(\xi)\dot{u}_i(\xi) \\ & = \int_{\Gamma} u^*_{ki}p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*_{ki}u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p^*_{ki}\dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{ki}b_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por fim, para problemas em que não há influência da força de corpo, a Equação (5.6) resume-se a:

$$c_{ki}(\xi)u_i(\xi) + \gamma c_{ki}(\xi)\dot{u}_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (5.7)$$

### 5.2.2 PROCEDIMENTOS DE INTEGRAÇÃO

O procedimento de integração numérica do modelo de Kelvin-Voigt, descrito MEC, é o mesmo apresentado na Seção 4.5. Portanto, é possível escrever a Equação (5.7) de forma matricial, análoga à descrição apresentada Equação (4.43) para problemas elásticos. Logo, tem-se:

$$[\mathbf{c}][\mathbf{u}] + \int_{\Gamma} [\mathbf{p}^*][\mathbf{u}]d\Gamma + \gamma[\mathbf{c}][\dot{\mathbf{u}}] + \gamma \int_{\Gamma} [\mathbf{p}^*][\dot{\mathbf{u}}]d\Gamma = \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^*][\mathbf{p}]d\Gamma \quad (5.8)$$

Essa formulação é válida para um ponto de carga no contorno em  $\xi$ . Note-se que  $[\mathbf{p}^*]$  e  $[\mathbf{u}^*]$  são conhecidos e  $\mathbf{c}$  podem ser encontrados analiticamente ou a partir de condições equilíbrio do corpo rígido. As variáveis são os valores de  $[\mathbf{u}]$ ,  $[\mathbf{p}]$  e  $[\dot{\mathbf{u}}]$  sobre o contorno atuantes no nó em um determinado tempo  $t$ .

A Equação (5.8) pode ser escrita, em termos das matrizes  $[\mathbf{H}]$  e  $[\mathbf{G}]$  e dos vetores  $[\mathbf{U}]$  e  $[\mathbf{P}]$ , conforme definido na Seção 4.5, da seguinte forma:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{U}(t)] + \gamma[\mathbf{H}][\dot{\mathbf{U}}(t)] = [\mathbf{G}][\mathbf{P}(t)] \quad (5.9)$$

em que o vetor  $[\dot{\mathbf{U}}(t)]$  representa a taxa dos deslocamentos nodais no tempo  $t$ .

Para se executar a integração temporal explícita, adotou-se aproximação linear, supondo-se que as taxas de deslocamento são obtidas a partir da diferença entre o valor do deslocamento no instante atual e o valor do deslocamento no instante imediatamente anterior, dividido pelo intervalo de tempo entre esses dois instantes, conforme relação apresentada, a seguir, para cada tempo do vetor  $[\mathbf{U}(t)]$ .

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \quad (5.10)$$

em que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Aplicando-se a expressão de taxa de deslocamento, apresentada na Equação (5.10), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}][\mathbf{U}(t_{n+1})] + \frac{\gamma}{\Delta t} [\mathbf{H}]\{[\mathbf{U}(t_{n+1})] - [\mathbf{U}(t_n)]\} &= [\mathbf{G}][\mathbf{P}(t_{n+1})] & (a) \\ [\bar{\mathbf{H}}][\mathbf{U}(t_{n+1})] &= [\bar{\mathbf{G}}][\mathbf{P}(t_{n+1})] + [\mathbf{F}(t_n)] & (b) \end{aligned} \quad (5.11)$$

em que  $[\bar{\mathbf{H}}] = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) [\mathbf{H}]$ ,  $[\bar{\mathbf{G}}] = [\mathbf{G}]e$  e  $[\mathbf{F}(t_n)] = \frac{\gamma}{\Delta t} [\mathbf{H}][\mathbf{U}(t_n)]$ .

### 5.3 MODELO DE BOLTZMANN

#### 5.3.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

A metodologia para se encontrar as representações integrais é basicamente a mesma, exigindo-se um pouco mais de esforço algébrico para se transformar todas as integrais de domínio para o contorno.

A partir das equações (4.30) e (3.58), as relações constitutivas de Boltzmann são obtidas e podem ser aplicadas na Equação (4.29), obtendo-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \bar{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \gamma \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \bar{C}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega & \quad (5.12) \\ + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega & = 0 \end{aligned}$$

admitindo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* E_e \bar{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} = u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.14)$$

Substituindo-se a Equação (5.13) no segundo termo da Equação (5.12) e a Equação (5.14) no quarto termo da Equação (5.12), tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega \quad (5.15)$$

$$+ \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0$$

Aplicando-se integração por partes e Teorema da Divergência na segunda e na quarta integrais da Equação ( 5.15), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[ \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ki,j}^* u_i d\Omega \right] \quad (5.16)$$

$$- \gamma \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega$$

$$+ \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[ \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega$$

$$= 0$$

Aplicando-se a Equação (4.33), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares, e fazendo-se  $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$  e  $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$ , encontra-se:

$$\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - c_{ij}(\xi) u_i(\xi) - \gamma \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega \quad (5.17)$$

$$+ \gamma \left[ \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p} d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0$$

Fazendo-se uso da Equação (4.33) para se descrever a solução fundamental em formas de taxas, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i \quad (a)$$

$$\dot{\sigma}_{kij,j} = -\Delta(\xi, x) \delta_{ki} \quad (b)$$
(5.18)

em que  $\dot{b}$  é a taxa de variação das componentes de forças volumétricas em relação ao tempo,  $\Delta(\xi, x)$  é o delta de Dirac,  $\delta_{ki}$  é o delta de Kronecker,  $\xi$  e  $x$  são, respectivamente, o ponto de carregamento singular e o ponto campo, contidos no domínio  $\Omega$ , e  $e_i$  é o vetor unitário na direção  $i$ .

A terceira integral da Equação (5.17) pode ser transformada em integral do contorno, admitindo-se a validade das seguintes relações:

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* u_{i,m} = \gamma \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (5.19)$$

Substituindo-se a Equação (5.19) na terceira integral da Equação (5.17) e aplicando-se as técnicas de integração por partes e o Teorema da Divergência, bem como a Equação (5.18)-(a), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + c_{ij}(\xi) \dot{u}_i(\xi) \quad (5.20)$$

Aplicando a Equação (5.20) na Equação (5.17), tem-se:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_i(\xi) + \gamma c_{ij}(\xi) \dot{u}_i(\xi) \\ = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \\ + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p} d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

A Equação (5.21) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. As 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 6<sup>a</sup> integrais e o termo  $c_{ij}(\xi)$  são as mesmas apresentadas na formulação elastostática e podem ser determinadas observando-se os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo; porém, essas podem contribuir para o comportamento viscoso, caso haja variações com o tempo das forças de superfície,  $\dot{p}$  e/ou das forças

volumétricas  $\dot{b}_i$ . Para os problemas analisados, o peso próprio não varia no tempo; então, pode-se considerar  $\dot{b} = 0$  e, conseqüentemente, a quinta integral se anula. Logo:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \gamma c_{ij}(\xi)\dot{u}_i(\xi) \\ = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \\ + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p} d\Gamma + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Rearranjando-se os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \gamma c_{ij}(\xi)\dot{u}_i(\xi) \\ = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \\ + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p} d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por fim, para problemas em que não há influência da força de corpo, a Equação (5.23) resume-se a:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \gamma c_{ij}(\xi)\dot{u}_i(\xi) + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \\ = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.24)$$

### 5.3.2 PROCEDIMENTOS DE INTEGRAÇÃO

Escrevendo-se a Equação (5.24) em termos de matrizes, tem-se:

$$[c][\mathbf{u}] + \int_{\Gamma} [\mathbf{p}^*][\mathbf{u}] d\Gamma + \gamma [c][\dot{\mathbf{u}}] + \gamma \int_{\Gamma} [\mathbf{p}^*][\dot{\mathbf{u}}] d\Gamma = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^*][\mathbf{p}] d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^*][\dot{\mathbf{p}}] d\Gamma \quad (5.25)$$

Essa formulação é válida para um ponto de carga no contorno em  $\xi$ . Note que  $[\mathbf{p}^*]$  e  $[\mathbf{u}^*]$  são conhecidos e  $\mathbf{c}$  podem ser encontrados analiticamente ou a partir de condições equilíbrio do corpo rígido. As variáveis são os valores de  $[\mathbf{u}]$ ,  $[\mathbf{p}]$ ,  $[\dot{\mathbf{u}}]$  e  $[\dot{\mathbf{p}}]$  sobre o contorno.

A Equação (4.44) pode ser escrita em termos das matrizes  $[\mathbf{H}]$  e  $[\mathbf{G}]$  e vetores  $[\mathbf{U}]$  e  $[\mathbf{P}]$ , conforme definidos na Seção 4.5, desta forma:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{U}(t)] + \gamma[\mathbf{H}][\dot{\mathbf{U}}(t)] = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}}[\mathbf{G}][\mathbf{P}(t)] + \gamma[\mathbf{G}][\dot{\mathbf{P}}(t)] \quad (5.26)$$

em que os vetores  $[\dot{\mathbf{U}}(t)]$  e  $[\dot{\mathbf{P}}(t)]$  representam, respectivamente, as taxas dos deslocamentos e forças superficiais nodais ao longo do tempo.

Visando executar a integração temporal de forma explícita, foram admitidas taxas de deslocamento e de forças superficiais a partir da diferença entre o valor da taxa correspondente no instante atual e o valor dessa mesma taxa no instante imediatamente anterior, dividido pelo intervalo de tempo entre esses dois instantes, conforme relação apresentada, a seguir, para cada tempo do vetor  $[\dot{\mathbf{U}}(t)]$  e  $[\dot{\mathbf{P}}(t)]$ .

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_{n+1}) &= \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} & (a) \\ \dot{p}(t_{n+1}) &= \frac{p(t_{n+1}) - p(t_n)}{\Delta t} & (b) \end{aligned} \quad (5.27)$$

em que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Aplicando-se a expressão de taxa de deslocamento, apresentada na Equação (5.10), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}][\mathbf{U}(t_{n+1})] + \frac{\gamma}{\Delta t}[\mathbf{H}]\{[\mathbf{U}(t_{n+1})] - [\mathbf{U}(t_n)]\} & (a) \\ = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}}[\mathbf{G}][\mathbf{P}(t_{n+1})] + \frac{\gamma}{\Delta t}[\mathbf{G}]\{[\mathbf{P}(t_{n+1})] - [\mathbf{P}(t_n)]\} & (5.28) \end{aligned}$$

$$[\bar{\mathbf{H}}][\mathbf{U}(t_{n+1})] = [\bar{\mathbf{G}}][\mathbf{P}(t_{n+1})] + [\mathbf{F}(t_n)] \quad (b)$$

em que  $[\bar{\mathbf{H}}] = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)[\mathbf{H}]$ ,  $[\bar{\mathbf{G}}] = \left(\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)[\mathbf{G}]$  e  $[\mathbf{F}(t_n)] = \frac{\gamma}{\Delta t}[\mathbf{H}][\mathbf{U}(t_n)] - \frac{\gamma}{\Delta t}[\mathbf{G}][\mathbf{P}(t_n)]$ .

#### 5.4 MODELO DE ZENER

#### 5.4.1 REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

Analogamente aos modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann, é possível relacionar a Equação (4.30) com a Equação (3.59), obtendo-se o seguinte:

$$\sigma^*_{klm} \cdot \varepsilon_{lm} = \varepsilon^*_{kij} \cdot C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \varepsilon^*_{kij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} - \varepsilon^*_{kij} \gamma \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.29)$$

em que  $C_{ijklm} = E_e \bar{C}_{ij}^{lm}$

Substituindo-se a Equação (5.29) na Equação (4.29), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} \cdot C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \cdot d\Omega - \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \cdot d\Omega \\ + \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} \gamma \dot{\sigma}_{ij} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

admitindo-se que:

$$\varepsilon^*_{kij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma^*_{klm} \varepsilon_{lm} = \sigma^*_{klm} u_{l,m} = \sigma^*_{kij} u_{i,j} \quad (5.31)$$

$$\varepsilon^*_{kij} \dot{\sigma}_{ij} = u^*_{ki,j} \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.32)$$

Substituindo-se a Equação (5.31) no segundo termo da Equação (5.30) e a Equação (5.32) no quarto termo da Equação (5.30), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma^*_{kij} u_{i,j} \cdot d\Omega - \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \cdot d\Omega \\ + \gamma \int_{\Omega} u^*_{ki,j} \dot{\sigma}_{ij} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Aplicando-se integração por partes e Teorema da Divergência na segunda e quarta integrais da Equação (5.33), encontra-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma^*_{kij} n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^*_{ki,j} u_i d\Omega \\
& - \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Omega} \varepsilon^*_{kij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \cdot d\Omega \\
& + \gamma \left[ \int_{\Gamma} u^*_{ki} \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u^*_{ki} \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Aplicando-se as relações apresentadas nas equações (4.33), (5.18)-(a) e (5.20) na Equação (5.33), analogamente ao procedimento demonstrado no Modelo de Boltzmann, encontra-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} p^*_{ki} u_i d\Gamma - c_{ij}(\xi) u_i(\xi) - \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Gamma} p^*_{ki} \dot{u}_i d\Gamma \\
& - \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} c_{ij}(\xi) \dot{u}_i(\xi) + \gamma \left[ \int_{\Gamma} u^*_{ki} \dot{p} d\Gamma - \int_{\Omega} u^*_{ki} \dot{b}_i d\Omega \right] \\
& + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Para os problemas analisados, como o peso próprio não varia no tempo; então, pode-se considerar  $\dot{b} = 0$  e, conseqüentemente, a quinta integral se anula. Logo:

$$\begin{aligned}
& c_{ij}(\xi) u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p^*_{ki} u_i d\Gamma + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} c_{ij}(\xi) \dot{u}_i(\xi) + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Gamma} p^*_{ki} \dot{u}_i d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma} u^*_{ki} \cdot p_i \cdot d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} u^*_{ki} \dot{p} d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{ki} \cdot b_j \cdot d\Omega
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Por fim, para problemas em que não há influência da força de corpo, a Equação (5.36) resume-se a:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} c_{ij}(\xi)\dot{u}_i(\xi) + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \\
= \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p} d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.37}$$

#### 5.4.2 PROCEDIMENTOS DE INTEGRAÇÃO

Escrevendo-se a Equação (5.37) em termos de matrizes, tem-se:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{c}][\mathbf{u}] + \int_{\Gamma} [\mathbf{p}^*][\mathbf{u}]d\Gamma + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} [\mathbf{c}][\dot{\mathbf{u}}] + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} \int_{\Gamma} [\mathbf{p}^*][\dot{\mathbf{u}}]d\Gamma \\
= \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^*][\mathbf{p}]d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^*][\dot{\mathbf{p}}]d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Essa formulação é válida para um ponto de carga no contorno em  $\xi$ . Note que  $[\mathbf{p}^*]$  e  $[\mathbf{u}^*]$  são conhecidos e  $[\mathbf{c}]$  podem ser encontrados analiticamente ou a partir de condições equilíbrio do corpo rígido. As variáveis são os valores de  $[\mathbf{u}]$ ,  $[\mathbf{p}]$ ,  $[\dot{\mathbf{u}}]$  e  $[\dot{\mathbf{p}}]$  sobre o contorno.

A Equação (4.44) pode ser escrita, em termos das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  e dos vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{P}$ , conforme definidos na Seção 4.5, da seguinte maneira:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{U}(t)] + \gamma \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} [\mathbf{H}][\dot{\mathbf{U}}(t)] = [\mathbf{G}][\mathbf{P}(t)] + \gamma [\mathbf{G}][\dot{\mathbf{P}}(t)] \tag{5.39}$$

em que os vetores  $[\dot{\mathbf{U}}(t)]$  e  $[\dot{\mathbf{P}}(t)]$  representam, respectivamente, as taxas dos deslocamentos e as forças superficiais nodais ao longo do tempo.

Em conformidade com o Modelo de Boltzmann, para se executar a integração temporal explícita foram admitidas taxas de deslocamento e de forças superficiais a partir da diferença entre o valor da taxa correspondente no instante atual e o valor dessa mesma taxa no instante imediatamente anterior, dividido pelo intervalo de tempo entre esses dois instantes, conforme relação apresentada a seguir para cada tempo do vetor  $[\dot{\mathbf{U}}(t)]$  e  $[\dot{\mathbf{P}}(t)]$ . Matematicamente:

$$\dot{u}(t_{n+1}) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t} \quad (\text{a})$$

$$\dot{p}(t_{n+1}) = \frac{p(t_{n+1}) - p(t_n)}{\Delta t} \quad (\text{b})$$

(5.40)

em que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Aplicando-se a expressão de taxa de deslocamento, apresentada na Equação (5.10), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$[\mathbf{H}][\mathbf{U}(t_{n+1})] + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} [\mathbf{H}]\{[\mathbf{U}(t_{n+1})] - [\mathbf{U}(t_n)]\} \quad (\text{a})$$

$$= [\mathbf{G}][\mathbf{P}(t_{n+1})] + \frac{\gamma}{\Delta t} [\mathbf{G}]\{[\mathbf{P}(t_{n+1})] - [\mathbf{P}(t_n)]\} \quad (\text{b})$$

(5.41)

$$[\bar{\mathbf{H}}][\mathbf{U}(t_{n+1})] = [\bar{\mathbf{G}}][\mathbf{P}(t_{n+1})] + [\mathbf{F}(t_n)] \quad (\text{b})$$

em que  $[\bar{\mathbf{H}}] = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e}\right) [\mathbf{H}]$ ,  $[\bar{\mathbf{G}}] = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) [\mathbf{G}]$  e  $[\mathbf{F}(t_n)] = \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{(E_{ve} + E_e)}{E_e} [\mathbf{H}][\mathbf{U}(t_n)] - \frac{\gamma}{\Delta t} [\mathbf{G}][\mathbf{P}(t_n)]$

## 5.5 IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGO PARA O MEC VISCOELÁSTICO

O algoritmo do MEC para problemas viscoelásticos foi inteiramente desenvolvido de maneira modular, em *scripts*, por meio do Matlab<sup>®</sup>.

Além de todos os recursos apresentados na Seção 4.8, o código computacional possibilita análises do MEC para problemas viscoelásticos, segundo os modelos de Kelvin-Voigt, Boltzmann ou Zener, fornecendo dados ao longo do tempo.

Na Figura 5.1, apresenta-se o diagrama de atividade simplificado dos principais módulos desse algoritmo.

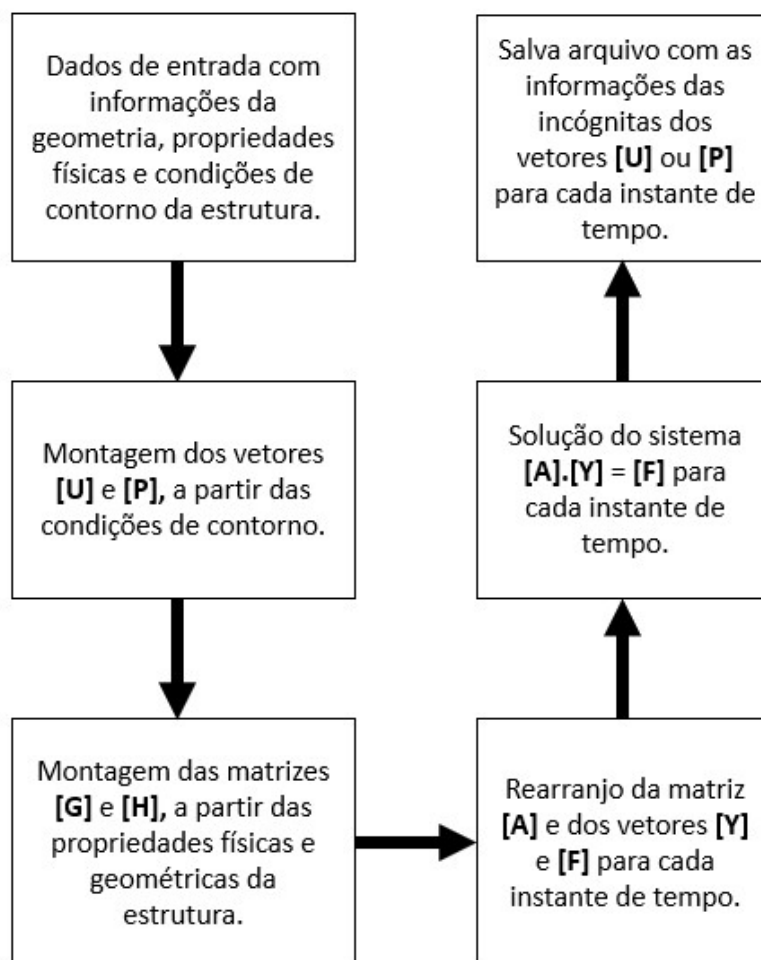


Figura 5.1 – Diagrama de atividades do código implementado para o MEC viscoelástico.

## 5.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 5.6.1 PLANO HORIZONTAL CARREGADO SOB FLUÊNCIA DE KELVIN-VOIGT

O mesmo exemplo do plano horizontal carregado, apresentado para o problema elástico da Seção 4.9.1, é avaliado por meio do Método dos Elementos de Contorno no Modelo de Kelvin-Voigt. Admite-se malha de elementos lineares descontínuos com 8 elementos, módulo de elasticidade,  $E = 44,45$  kPa, coeficientes de Poisson,  $\nu = 0,30$ , coeficiente representativo de viscosidade,  $\gamma = 10$  anos e geometria, conforme indicado na Figura 5.2. O processamento foi realizado em uma máquina equipada com um processador Intel® Core™ i5 de 2,8 GHz e 16 GB de memória RAM.

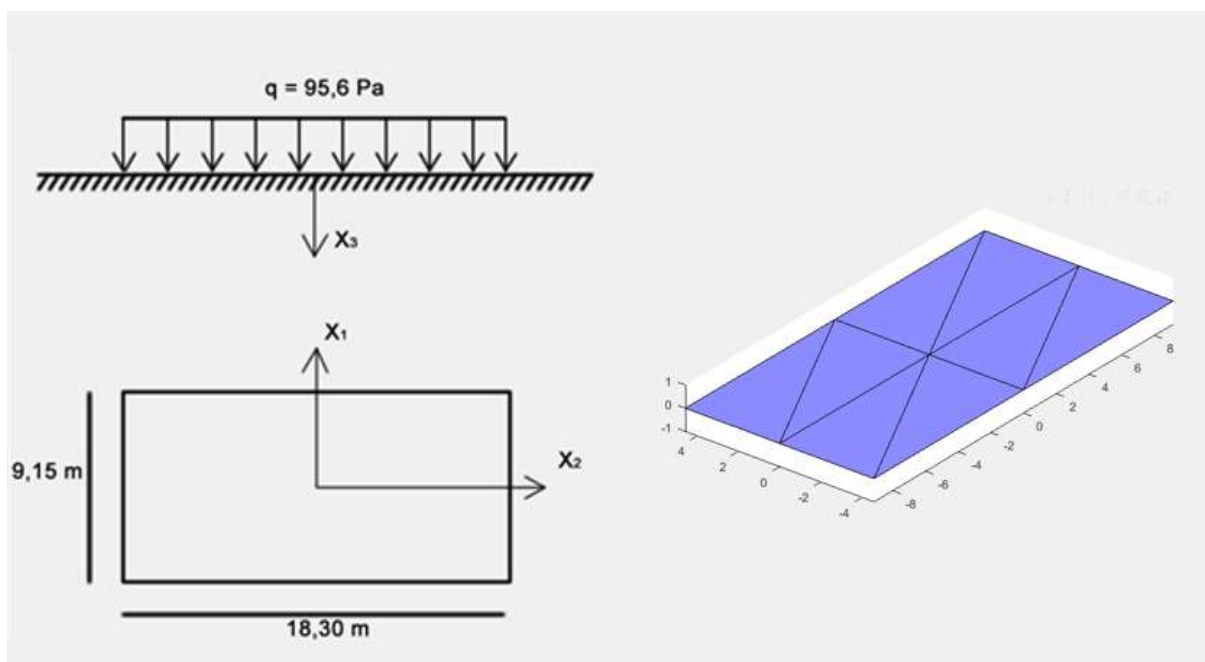


Figura 5.2 – Problema do plano horizontal carregado com análise viscoelástica de Kelvin-Voigt.

O deslocamento normal ao plano ( $U_3$ ) ao longo do eixo  $x_3$ , na origem do sistema cartesiano, foi avaliado, ao longo de 50 anos, para diversos períodos de tempo, a saber  $\Delta t = 0,1$  anos,  $\Delta t = 0,5$  anos,  $\Delta t = 1,0$  ano,  $\Delta t = 5$  anos e  $\Delta t = 10$  anos (Figura 5.3).

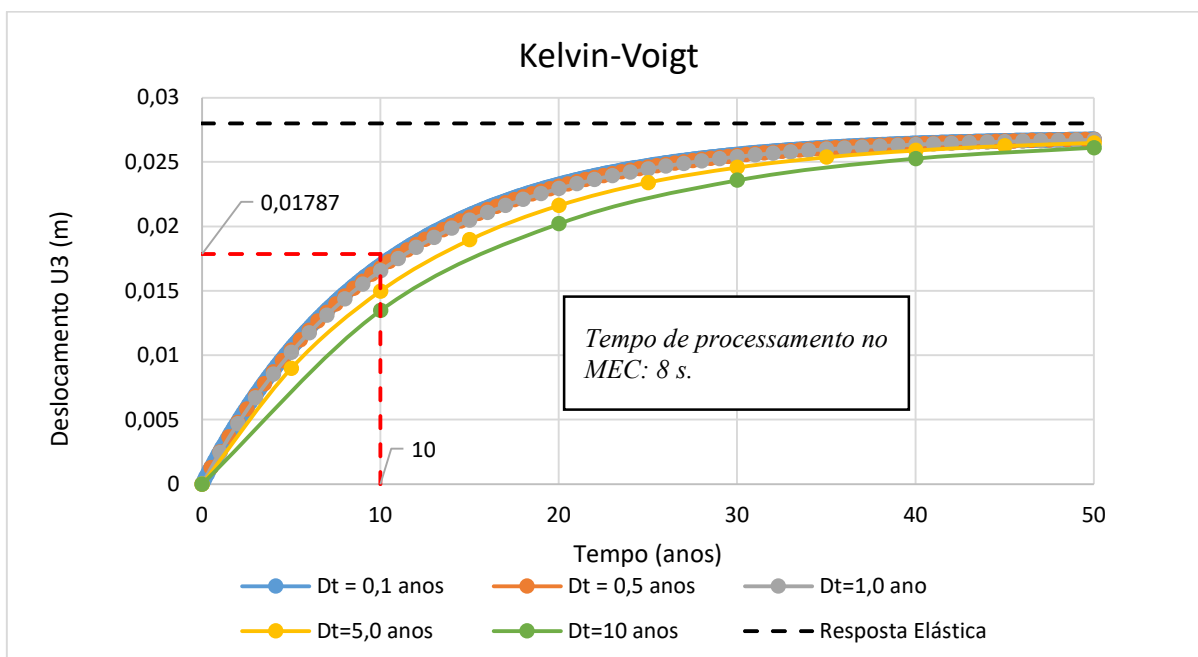


Figura 5.3 – Deslocamento vertical  $U_3$  em função do tempo por meio de Kelvin-Voigt na origem do sistema cartesiano do plano horizontal carregado.

Os resultados apresentados na Figura 5.3 mostram que o deslocamento viscoelástico, na direção 3, tende para a resposta elástica  $u = 2,829 \times 10^{-2} \text{ m}$  para qualquer valor do intervalo de tempo,  $\Delta t$ . Contudo, conforme a Equação (5.10), quanto maior  $\Delta t$ , menores são as taxas de deslocamento  $\dot{u}$ , tornando as curvas de deslocamentos pelo tempo menos inclinadas. Quanto menor  $\Delta t$ , mais preciso torna-se a relação do deslocamento pelo tempo.

Conforme apresentado na Seção 3.4, problemas com tensão constante ao longo do tempo ( $\sigma = \sigma_0$ ) são caracterizados como de fluência. Para esse tipo de problema, o tempo de retardo ( $\lambda_F$ ) é uma propriedade física dos materiais que possibilita identificar a maior taxa de deformação associada ao problema, uma vez que  $\lambda_F$  está relacionado à taxa de deformação inicial dos ensaios de fluência (FINDLEY *et al.*, 1989 e BECHO, 2020).

A partir das relações apresentadas na Tabela 3.1, nota-se que,  $\lambda_F = \gamma = 10 \text{ anos}$ . Por outro lado, com base nessa mesma tabela, também se pode concluir que o deslocamento viscoelástico associado ao tempo de retardo deve ser da ordem de  $u_F = 0,632u_\infty = 1,787 \times 10^{-2} \text{ m}$  para o exemplo Plano Horizontal Carregado descrito no Modelo de Kelvin-Voigt.

A Figura 5.3 revela que a curva que mais se aproxima da resposta esperada para o comportamento viscoelástico do Modelo de Kelvin-Voigt, na condição de fluência, é a correspondente ao  $\Delta t = 0,1$  anos, validando a hipótese de valores menores de  $\Delta t$  para os problemas elásticos transientes.

### 5.6.2 PLANO HORIZONTAL CARREGADO SOB FLUÊNCIA DE BOLTZMANN

O mesmo exemplo do Plano Horizontal Carregado, apresentado nas seções 4.9.1 e 5.6.1, é avaliado por meio do Método dos Elementos de Contorno, no Modelo de Boltzmann. Admite-se malha de elementos lineares descontínuos com 8 elementos, módulo de elasticidade,  $E_e = E_{ve} = 44,45 \text{ kPa}$ , coeficientes de Poisson,  $\nu = 0,30$ , coeficiente representativo de viscosidade,  $\gamma=10$  anos e geometria, conforme indicado na Figura 5.2

O deslocamento normal ao plano ( $U_3$ ) ao longo do eixo  $x_3$ , na origem do sistema cartesiano, foi avaliado, ao longo de 50 anos, para diversos intervalos de tempo, a saber  $\Delta t = 0,1$  ano,  $\Delta t = 0,5$  ano,  $\Delta t = 1$  ano,  $\Delta t = 5$  anos e  $\Delta t = 10$  anos (Figura 5.4). O processamento foi realizado em uma máquina equipada com um processador Intel® Core™ i5 de 2,8 GHz e 16 GB de memória RAM.

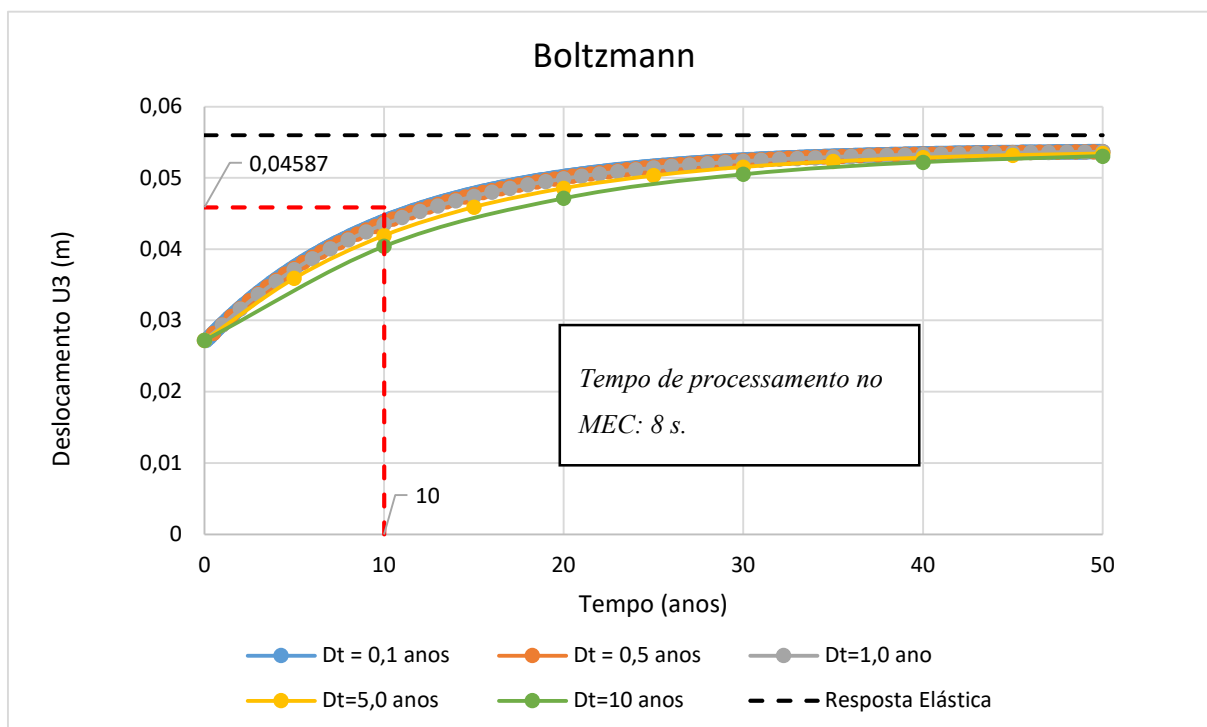


Figura 5.4 – Deslocamento vertical  $U_3$  em função do tempo por meio de Boltzmann na origem do sistema cartesiano do plano horizontal carregado.

Conforme mostrado na Figura 5.4, o Modelo de Boltzmann indica um agrupamento da resposta elástica imediata, no tempo inicial, e da resposta viscoelástica ao longo do tempo. A resposta elástica condiz com a apresentada na Seção 4.9.1 e a viscoelástica é a mesma indicada no modelo de Kelvin-Voigt, Seção 5.6.1.

Para o exemplo apresentado, o deslocamento viscoelástico, na direção 3, tende para a resposta elástica final  $u_\infty = 2 \times 2,829 \times 10^{-2} \text{ m} = 5,658 \times 10^{-2} \text{ m}$  para qualquer valor do intervalo de tempo,  $\Delta t$ . Analogamente ao Modelo de Kelvin-Voigt, quanto maior  $\Delta t$ , menores são as taxas de deslocamento  $\dot{u}$ , tornando-se as curvas de deslocamentos pelo tempo menos inclinadas na região transiente. Quanto menor  $\Delta t$ , mais precisa se torna a relação do deslocamento pelo tempo.

Conforme apresentado na Seção 3.4, problemas com tensão constante ao longo do tempo ( $\sigma = \sigma_0$ ) são caracterizados como de fluência. Para esse tipo de problema, o tempo de retardo ( $\lambda_F$ ) é uma propriedade física dos materiais que possibilita identificar a maior taxa de deformação associada ao problema, uma vez que  $\lambda_F$  está relacionado à taxa de deformação inicial dos ensaios de fluência (FINDLEY *et al.*, 1989 e BECHO, 2020).

A partir das relações apresentadas na Tabela 3.1, nota-se que, para o Modelo de Boltzmann,  $\lambda_F = \gamma = 10$  anos. O deslocamento viscoelástico associado ao tempo de retardo deve ser da ordem de  $u_F = u_0 + 0,632u_\infty = 4,587 \times 10^{-2} m$  para o exemplo Plano Horizontal Carregado descrito no Modelo de Boltzmann.

A Figura 5.4 revela que a curva que mais se aproxima da resposta esperada para o comportamento viscoelástico do Modelo de Boltzmann, na condição de fluência, é a correspondente ao  $\Delta t = 0,1$  ano, validando a hipótese de valores menores de  $\Delta t$  para os problemas elásticos transientes.

### 5.6.3 PLANO HORIZONTAL CARREGADO SOB FLUÊNCIA DE ZENER

Neste capítulo, o Plano Horizontal Carregado, apresentado nas seções 4.9.1, 5.6.1 e 5.6.2, é avaliado por meio do Método dos Elementos de Contorno no Modelo de Zener. Admite-se malha de elementos lineares descontínuos com 8 elementos, módulo de elasticidade,  $E_e = E_{ve} = 0,5 \times 44,45$  kPa, coeficientes de Poisson,  $\nu = 0,30$ , coeficiente representativo de viscosidade,  $\gamma = 0,5 \times 10$  anos e conforme indicado na Figura 5.2.

O deslocamento normal ao plano (U3) ao longo do eixo  $x_3$ , na origem do sistema cartesiano, foi avaliado, ao longo de 50 anos, para diversos intervalos de tempo, a saber  $\Delta t = 0,1$  ano,  $\Delta t = 0,5$  ano,  $\Delta t = 1,0$  ano,  $\Delta t = 5$  anos e  $\Delta t = 10$  anos (Figura 5.5). O processamento foi realizado em uma máquina equipada com um processador Intel® Core™ i5 de 2,8 GHz e 16 GB de memória RAM.

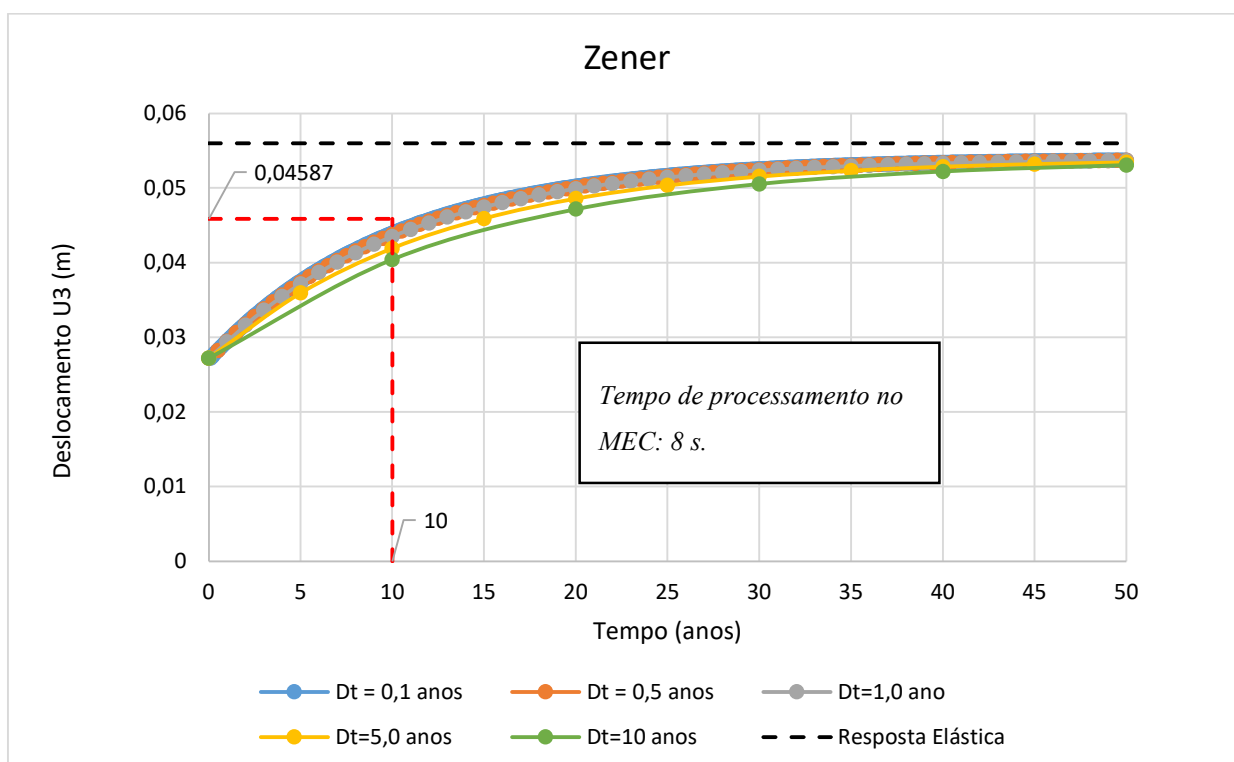


Figura 5.5 – Deslocamentos U3 em função do tempo por meio de Zener na origem do sistema cartesiano do plano horizontal carregado.

Conforme mostrado na Figura 5.5, o Modelo de Zener indica um agrupamento da resposta elástica imediata, no tempo inicial, e da resposta viscoelástica ao longo do tempo. A resposta elástica condiz com a que foi apresentada na Seção 4.9.1 e a resposta viscoelástica segue os critérios do Modelo de Maxwell (Seção 3.2.1).

Para os parâmetros adotados, o deslocamento viscoelástico descrito pelo Modelo de Zener, na direção 3, atinge a resposta elástica final  $u_{\infty} = 2 \times 2,829 \times 10^{-2} \text{ m} = 5,658 \times 10^{-2} \text{ m}$  para qualquer valor do intervalo de tempo,  $\Delta t$ . Analogamente aos modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann, quanto maior  $\Delta t$ , menores são as taxas de deslocamento  $\dot{u}$ , tornando as curvas de deslocamentos pelo tempo menos inclinadas na região transiente. Quanto menor  $\Delta t$ , mais precisa torna-se a relação do deslocamento pelo tempo.

Conforme apresentado na Seção 3.4, problemas com tensão constante ao longo do tempo ( $\sigma = \sigma_0$ ) são caracterizados como de fluência. Para esse tipo de problema, o tempo de retardo ( $\lambda_F$ ) é uma propriedade física dos materiais que possibilita identificar a maior taxa de deformação associada ao problema, uma vez que  $\lambda_F$  está relacionado à taxa de deformação inicial dos ensaios de fluência (FINDLEY *et al.*, 1989; MAINARDI e SPADA, 2011; BECHO, 2020).

A partir das relações apresentadas na Tabela 3.1, nota-se que, para o Modelo de Zener,  $\lambda_F = \frac{\gamma(E_{ve} + E_e)}{E_e} = 10 \text{ anos}$ . O deslocamento viscoelástico associado ao tempo de retardo deve ser igual ao obtido pelo Modelo de Boltzmann; ou seja:  $u_F = u_0 + 0,632u_\infty = 4,587 \times 10^{-2} \text{ m}$ .

A Figura 5.5 revela que a curva que mais se aproxima da resposta esperada para o comportamento viscoelástico do Modelo de Boltzmann, na condição de fluência, é a correspondente ao  $\Delta t = 0,1$  ano, validando a hipótese de valores menores de  $\Delta t$  para os problemas elásticos transientes.

#### 5.6.4 PLANOS HORIZONTAIS CARREGADOS EM DATAS DISTINTAS

O problema teórico apresentado neste capítulo é original e exemplifica duas áreas vizinhas carregadas em instantes distintos, simulando uma ampliação planejada de um determinado projeto. Visa-se, com isso, avaliar os deslocamentos verticais ocorridos nos pontos P1 e P2 localizados, respectivamente, no centro dos planos 1 e 2. O Plano 1 está submetido a um carregamento superficial de 95,6 kPa no instante  $t = 0$ , enquanto, o Plano 2, carregado com a mesma carga distribuída de 95,6 kPa a partir do instante  $t = 10$  anos. Não há cenário de descarregamento das áreas.

A Figura 5.6 mostra a distância entre os pontos P1 e P2 e a geometria das áreas planas carregadas. O processamento foi realizado em uma máquina equipada com um processador Intel® Core™ i5 de 2,8 GHz e 16 GB de memória RAM.

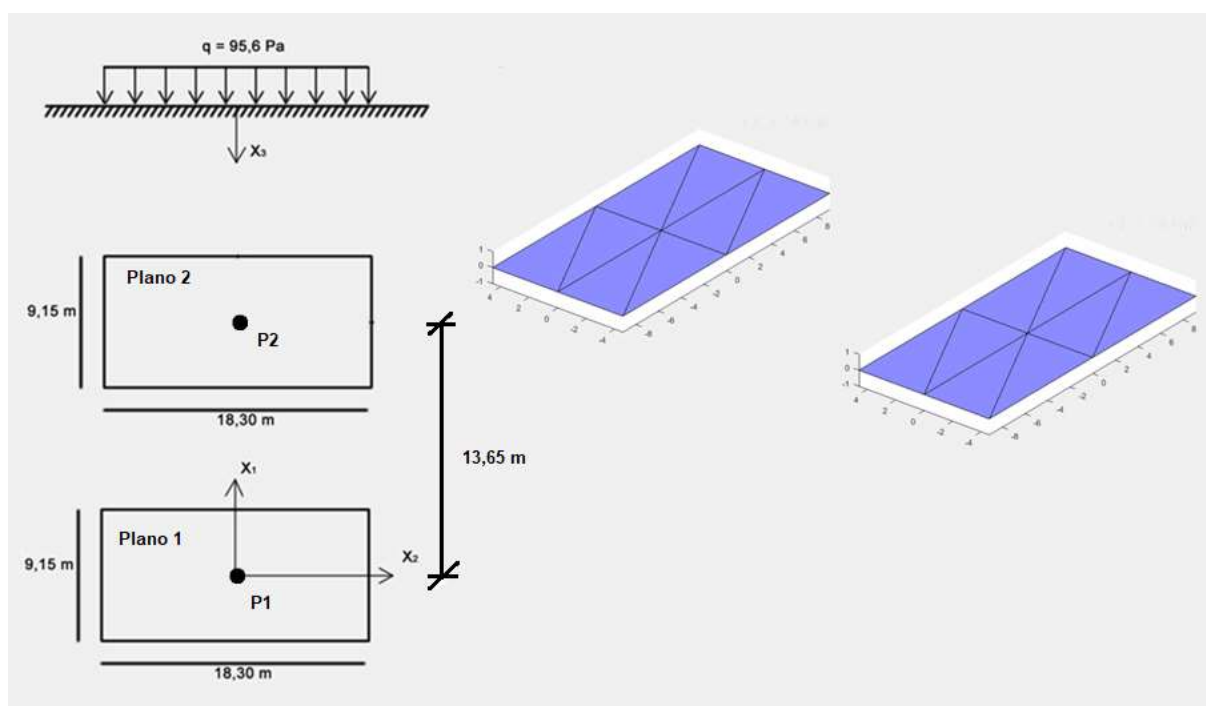


Figura 5.6 – Planos horizontais carregados em datas distintas.

Admite-se o modelo viscoelástico de Boltzmann, malha de elementos lineares descontínuos com 8 elementos, módulo de elasticidade,  $E_e = E_{ve} = 44,45$  kPa, coeficientes de Poisson,  $\nu = 0,30$  e coeficiente representativo de viscosidade,  $\gamma = 10$  anos.

As evoluções dos deslocamentos verticais nos pontos P1 e P2 estão representadas na Figura 5.7 e na Figura 5.8. Devido à continuidade do meio, conforme proposto na Solução de Mindlin, os carregamentos aplicados no Plano 1 causam deslocamentos em todo o meio, tanto no Ponto P1 como no Ponto P2. O mesmo ocorre para carregamentos aplicados no Plano 2. Em razão da simetria do problema, os deslocamentos verticais finais dos pontos P1 e P2 são os mesmos e atingem  $u_\infty = 6,894 \times 10^{-2}$  m.

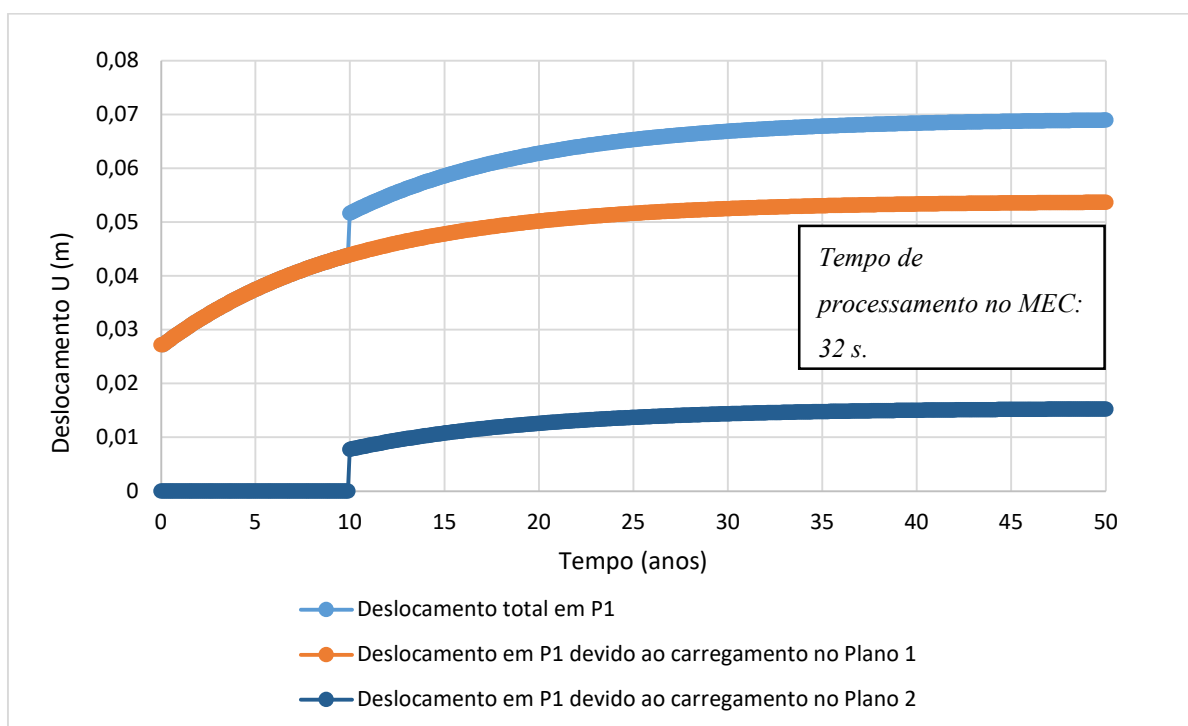


Figura 5.7 – Deslocamentos verticais no Ponto P1 para carregamentos vizinhos aplicados em datas distintas.

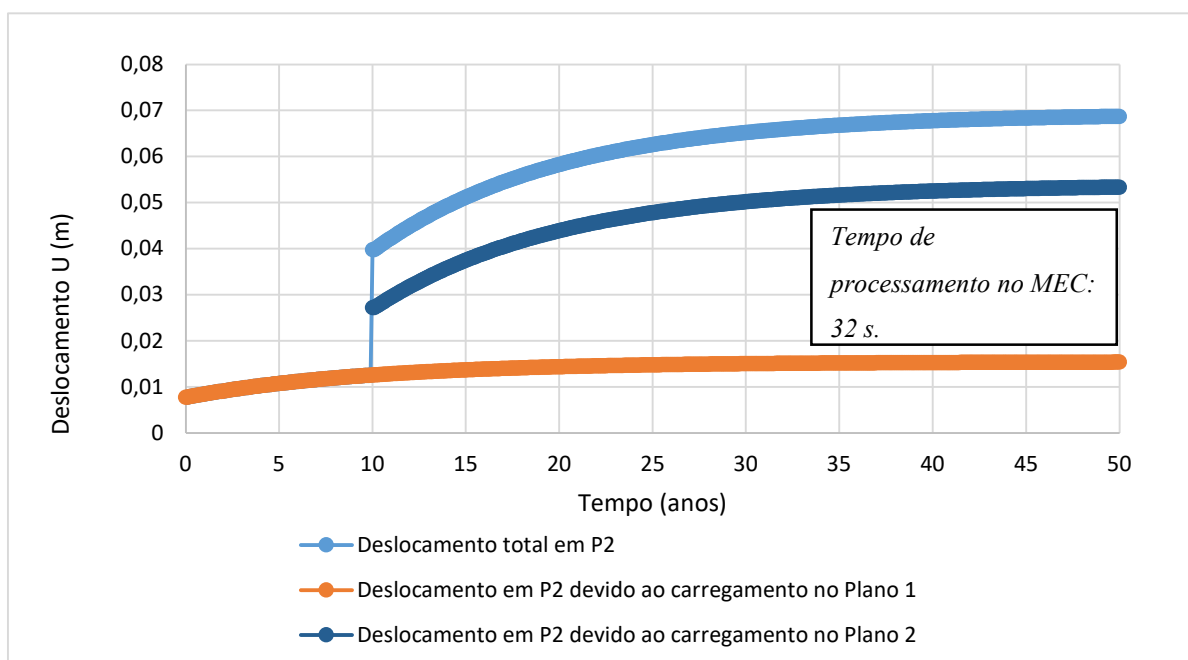


Figura 5.8 – Deslocamentos verticais no Ponto P2 para carregamentos vizinhos aplicados em datas distintas.

# 6

## ACOPLAMENTO ITERATIVO ENTRE MEF/MEC

### 6.1 INTRODUÇÃO

Existem várias técnicas propostas para o acoplamento entre elementos finitos e elementos de contorno. Segundo Brebbia e Domínguez (1992), três delas se destacam. A primeira utiliza a solução em MEF para estabelecer condições de contorno do MEC. Essa aproximação é empírica; porém, muito utilizada, e produz resultados razoáveis. A principal desvantagem dessa abordagem reside na impossibilidade de se avaliar as interações entre os subsistemas, uma vez que a parcela em MEC não influencia na parcela em MEF, e vice-versa. A segunda técnica, proposta por Singh (1988) e por Swoboda (1987), trata o domínio discretizado em MEC com formulações semelhantes às formulações do MEF, sendo possível representar o problema acoplado do MEC e do MEF em um único sistema de equações escrito em MEF, por meio de condições de equilíbrio e compatibilidade. Em geral, essa metodologia conduz a matrizes não simétricas no MEF. Matrizes simétricas são computacionalmente mais efetivas, porque permitem o uso das técnicas de armazenamento em banda (MESQUITA, 2002). A terceira opção foi proposta por Brebbia e Georgiou (1979) e é equivalente à segunda, porque permite acoplar todo o problema em um único sistema de equações, escrito, porém, com formulações do MEC.

A segunda e a terceira técnicas descritas são conhecidas, na literatura técnica, como métodos de acoplamento direto (ou monolítico), porque resultam em um sistema único de equações, estruturado com formulações do MEF ou do MEC. Numericamente, com elas se alcançam os mesmos resultados. Utilizar uma ou outra depende, principalmente, do problema no sentido de qual parcela é dominante no problema em análise; ou seja: elementos finitos ou elementos de contorno. Em muitos trabalhos publicados, os algoritmos propostos são baseados no acoplamento direto dos métodos, como se pode observar em Mesquita (2002), Almeida (2003a), Almeida (2003b), Ribeiro *et al.* (2005), Silva *et al.* (2012), Reis (2014), Huang e Qian (2024), e Azhir *et al.* (2024), entre outros.

Entretanto, uma série de trabalhos também propõe o uso de estratégias iterativas para se realizar o acoplamento entre os domínios do MEC e do MEF. Essa alternativa é bastante atraente, uma vez que essa técnica simples possibilita interação entre os sistemas MEC e MEF, garantindo-se equilíbrio e condições de compatibilidade desses sistemas.

O acoplamento direto do MEF com MEC para o estudo do adensamento dos solos pode não ser conveniente, uma vez que as equações desses dois métodos precisariam ser escritas em função do tempo. Além disso, os algoritmos baseados na técnica de separação de variáveis, usados para se integrar as equações de movimento no MEF, poderiam não funcionar tão bem no MEC, como, por exemplo, o Método de Newmark. O uso de técnicas baseadas no Método das Diferenças Finitas (MDF) poderia demandar intervalos de tempo muito pequenos, aumentando muito o tempo de processamento dos modelos. Por outro lado, o acoplamento iterativo do MEC com o MEF, proposto neste trabalho, demanda apenas a solução do problema estático não-linear geométrico do MEF, eliminando a necessidade de discretização temporal. A separação das diferentes partes do problema mantém os sistemas de equações mais bem condicionados. A propósito, muitos estudos foram publicadas sobre o uso de estratégias iterativas, tais como os de Lin *et al.* (1996), Soares Jr. *et al.* (2005), Yan *et al.* (2006), Soares Jr. *et al.* (2008), Warszawski *et al.* (2008) e Godinho e Soares Jr. (2017).

## 6.2 ALGORITMO DE ACOPLAMENTO ITERATIVO

No presente trabalho, utilizou-se o acoplamento iterativo para se combinar MEC e MEF nas análises da ISE no tempo. Esse procedimento atende as condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamentos do problema, possibilitando o estabelecimento de um procedimento simples e efetivo para a análise da ISE em rotinas de escritórios de projetos.

Uma vez conhecidos os parâmetros viscoelásticos da massa de solo, é possível realizar a ISE no tempo, baseando-se no método de Chamecki (1956). A superestrutura é, inicialmente, analisada como elástica linear com apoios indeslocáveis. A partir das reações de apoio, calculam-se os recalques. Os recalques obtidos são impostos na superestrutura, obtendo-se uma nova configuração dos esforços e, conseqüentemente, novas reações de apoio. Para as novas reações, são recalculados os recalques e, mais uma vez, são impostos na superestrutura. Repete-se o processo até que haja convergência nos valores das reações de apoio ou dos recalques. Alcançada a convergência, passa-se ao próximo instante de tempo. Essas etapas estão organizadas considerando-se os seguintes passos:

- a) passo 1: análise da superestrutura a partir do MEF, considerando-se apoios rígidos;
- b) passo 2: com as reações concentradas obtidas no passo 1, obtêm-se as reações distribuídas por meio de tensões na projeção das sapatas e os recalques do solo no MEC;
- c) passo 3: de posse das reações do MEF e dos deslocamentos do MEC, encontrados no passo anterior, calcula-se o coeficiente de reação vertical;
- d) passo 4: as vinculações anteriores da superestrutura são substituídas pelas molas de Winkler, obtidas no passo 3, para nova análise em MEF;
- e) passo 5: com os resultados da nova análise, comparam-se as diferenças entre os recalques fornecidos pelos modelos MEF e MEC; e
- f) passo 6: caso a diferença entre deslocamentos supere a tolerância do projeto, retoma-se ao passo 3. Em caso contrário, passa-se ao próximo instante de tempo, retomando-se ao passo 3 até o fim do processo iterativo.

O Apêndice A deste trabalho, apresenta revisão bibliográfica com relação ao coeficiente de reação vertical, pelas hipóteses de Winkler, empregadas no passo “c” do algoritmo de acoplamento iterativo.

A Figura 6.1 mostra o diagrama de atividade do algoritmo proposto para a análise da Interação solo-estrutura, levando-se em consideração a influência do recalque no tempo.

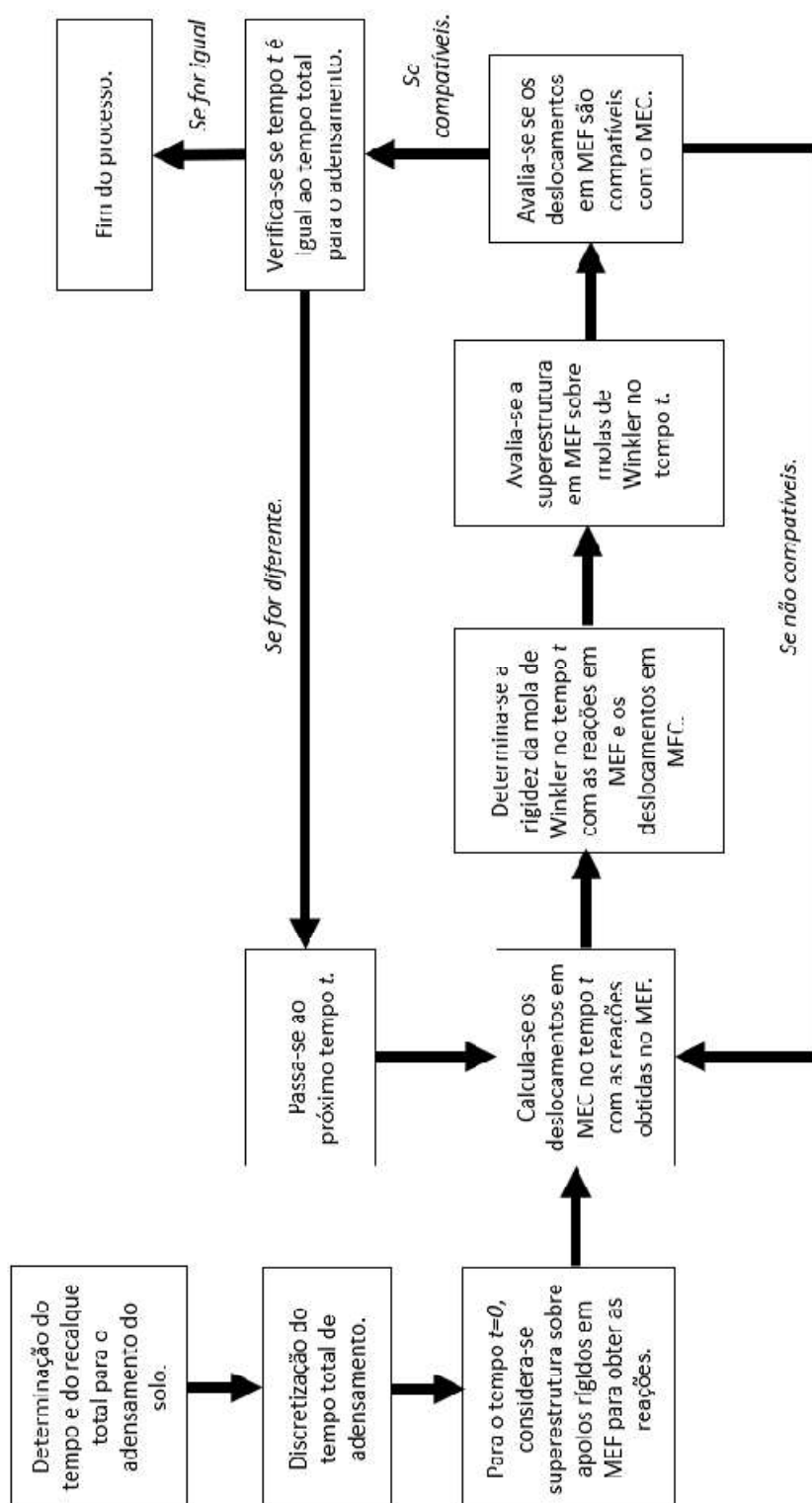


Figura 6.1 – Diagrama de atividade do algoritmo para a Interação Solo-Estrutura no tempo.

## 6.3 EXEMPLO DE UM EDIFÍCIO

### 6.3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA HIPOTÉTICO

Um problema comumente observado em regiões da costa litorânea brasileira diz respeito às edificações construídas sobre solos de argila mole em fundação direta. Segundo Dias (2010), entre 1940 e 1970, a cidade brasileira de Santos esteve em constante crescimento imobiliário, tendo praticamente toda a sua orla ocupada por grandes construções. Seu solo superficial é composto por uma camada de areia compacta, podendo atingir mais de 30 m de profundidade, sobreposta a uma camada espessa de argila mole. Vários edifícios, com mais de 12 pavimentos, foram construídos sobre fundações rasas. Naquela época, as construtoras alegavam que não havia viabilidade técnica ou econômica para o uso de fundações profundas (TEIXEIRA, 1994). Como resultado, registros do histórico de monitoramento nesses edifícios indicam taxas de recalques de até 13 mm/ano (MAFFEI *et al.*, 2003).

Outro ponto que merece destaque diz respeito aos critérios de paralização em ensaios de resistência à penetração em sondagens (SPT). A NBR 6484 (ABNT, 2020) estabelece que, na ausência de critério de paralisação específico, as sondagens a percussão podem ser interrompidas, se o índice de resistência à penetração (N) superar 25 golpes consecutivamente para uma profundidade de 10 m. O avanço da sondagem também pode ser suspenso, se N atingir números superiores a 30 e 35 golpes consecutivos nas profundidades de 8 e 6 m, respectivamente. A interpretação dos ensaios de sondagem deve ser realizada de forma cuidadosa, tendo-se em vista a possibilidade de se encontrar solos moles abaixo de espessas camadas de solos resistentes.

Neste capítulo, o problema analisado é um exemplo hipotético, inspirado na publicação de Cavalcanti *et al.* (2016). Foram realizadas simplificações na geometria da estrutura do edifício e no perfil do solo apresentado pelos autores. Admite-se edifício de 19 pavimentos em concreto armado, com módulo de elasticidade  $E = 26$  GPa, pé-direito de 3 m, apoiado sobre fundação rasa (LANES *et al.*, 2023). As geometrias do pavimento tipo e da fundação do edifício são mostrados, respectivamente, na Figura 6.2a e na Figura 6.2b, apresentadas a seguir:

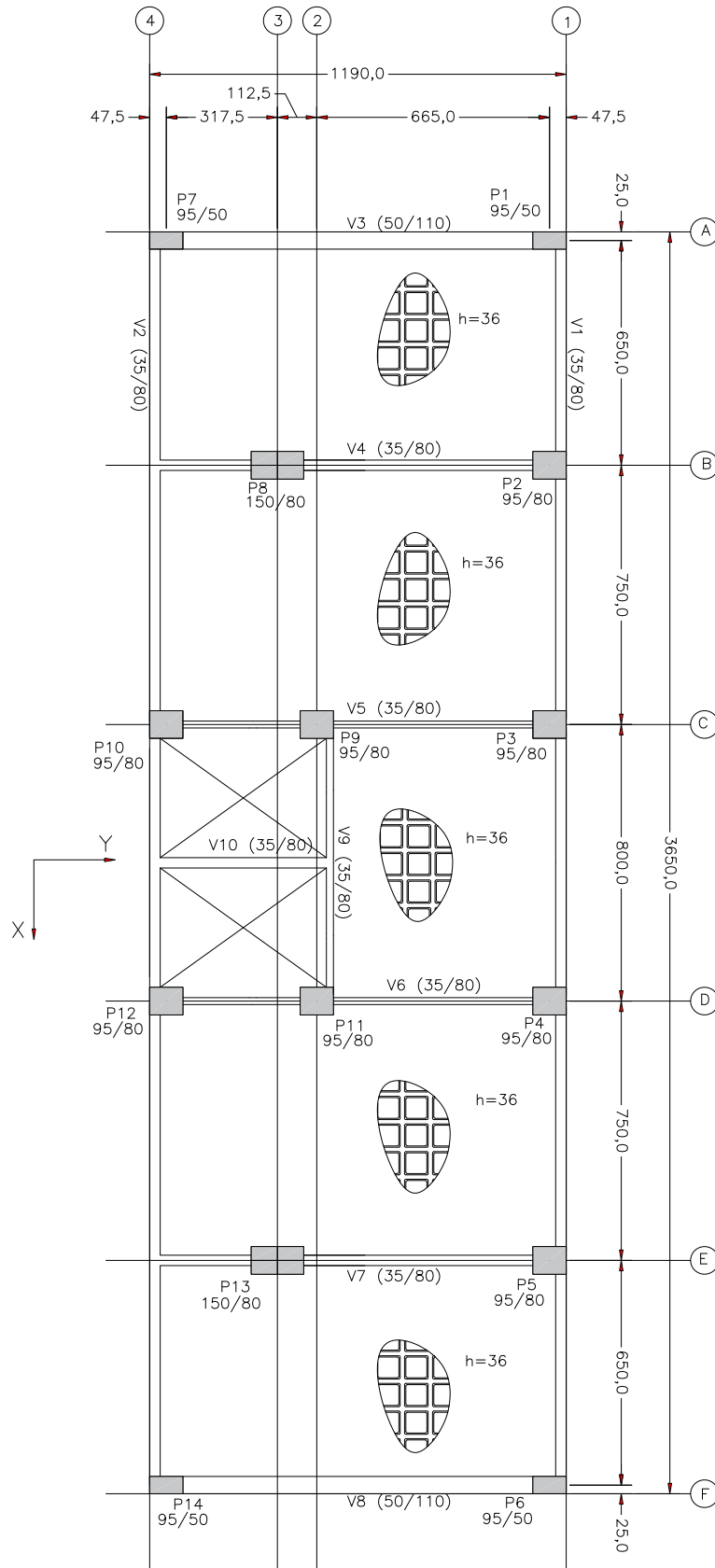


Figura 6.2a – Pavimento tipo (cm).

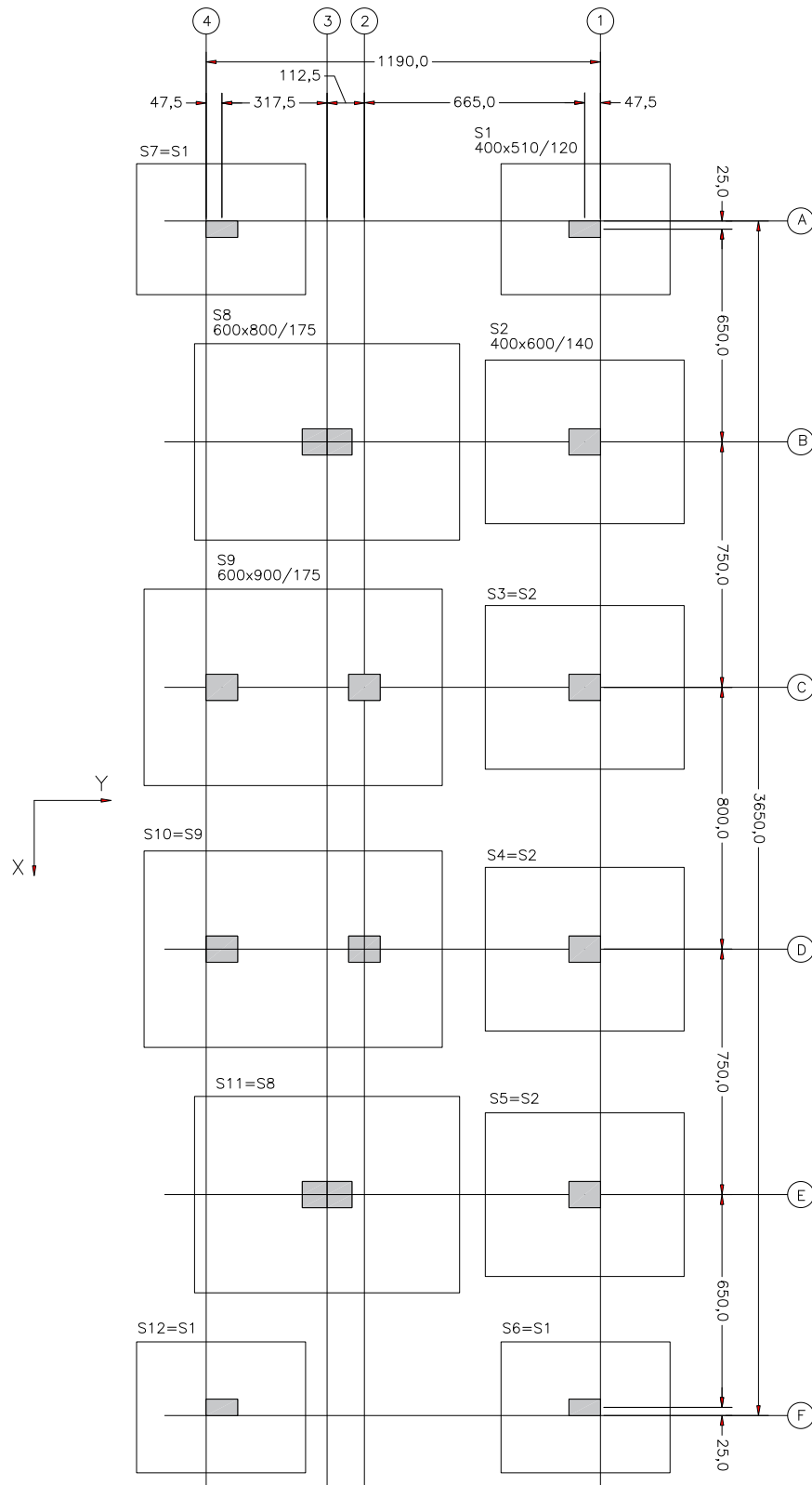


Figura 6.2b – Fundações (cm).  
 Figura 6.2 – Projeto do edifício.

As lajes do edifício foram projetadas para suportar o peso próprio, de cerca de 8,7 kN/m<sup>2</sup>, a carga acidental média igual a 1,7 kN/m<sup>2</sup> e a carga permanente adicional de 8,4 kN/m<sup>2</sup>, contemplando-se alvenarias e revestimentos. A ação do vento não é considerada neste estudo. As propriedades geométricas das vigas e pilares estão indicadas, respectivamente, na Tabela 6.1 e na Tabela 6.2, dispostas a seguir:

Tabela 6.1 – Geometria das vigas do edifício.

Estrutura	Largura da seção (cm)	Altura da seção (cm)
V1=V2=V4=V5=V6=V7=V9=V10	35	80
V3=V8	50	110

Tabela 6.2 – Geometria dos pilares do edifício.

Estrutura	Largura da seção paralela ao Eixo X (cm)	Largura da seção paralela ao Eixo Y (cm)
P1=P6=P7=P14	50	95
P2=P3=P4=P5=P9=P10=P11=P12	80	95
P8=P13	80	150

A dimensão de cada sapata é mostrada na Tabela 6.3:

Tabela 6.3 – Dimensão das sapatas do edifício.

Sapata	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
Dimensões (m)	4,0 × 5,1	5,0 × 6,0	5,0 × 6,0	4,0 × 5,1	6,0 × 8,0	6,0 × 8,0
Altura da sapata (m)	1,20	1,40	1,40	1,20	1,75	1,75
Área em planta (m <sup>2</sup> )	20,4	30,0	30,0	20,4	48,0	48,0

As tensões médias de trabalho em cada sapata, atuantes antes da ocorrência do adensamento, estabelecidas na condição de apoios rígidos, são apresentadas na Tabela 6.4:

Tabela 6.4 – Pressão de contato média para condição de apoios rígidos.

Sapata	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
Pressões verticais médias (kPa)	332,0	356,0	337,0	360,0	385,0	357,0

O perfil de sondagem, apresentado na Figura 6.3, é representativo de toda a área do edifício. Nota-se que há uma espessa camada de argila mole, de baixa resistência, localizada a cerca de 11 m de profundidade da cota de assentamento da sapata. Os parâmetros físicos do solo também estão indicados nessa mesma figura. O nível do lençol freático aparece na cota altimétrica -4,0 m e a camada de areia fina, superficial, com aproximadamente 2 m de espessura, foi removida para a construção do edifício. A perspectiva do modelo ISE descrito é mostrado na Figura 6.4:

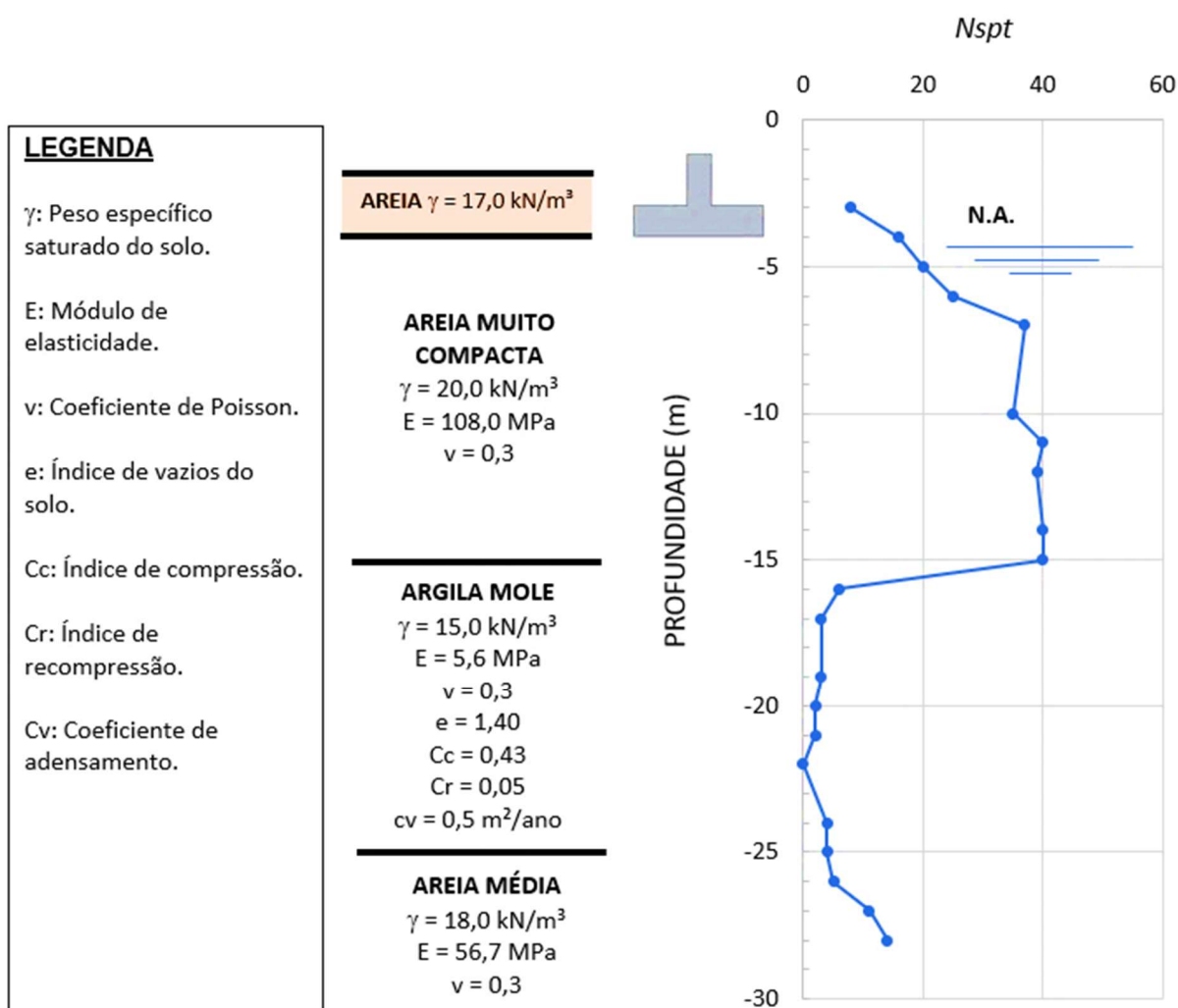


Figura 6.3 – Perfil de sondagem.

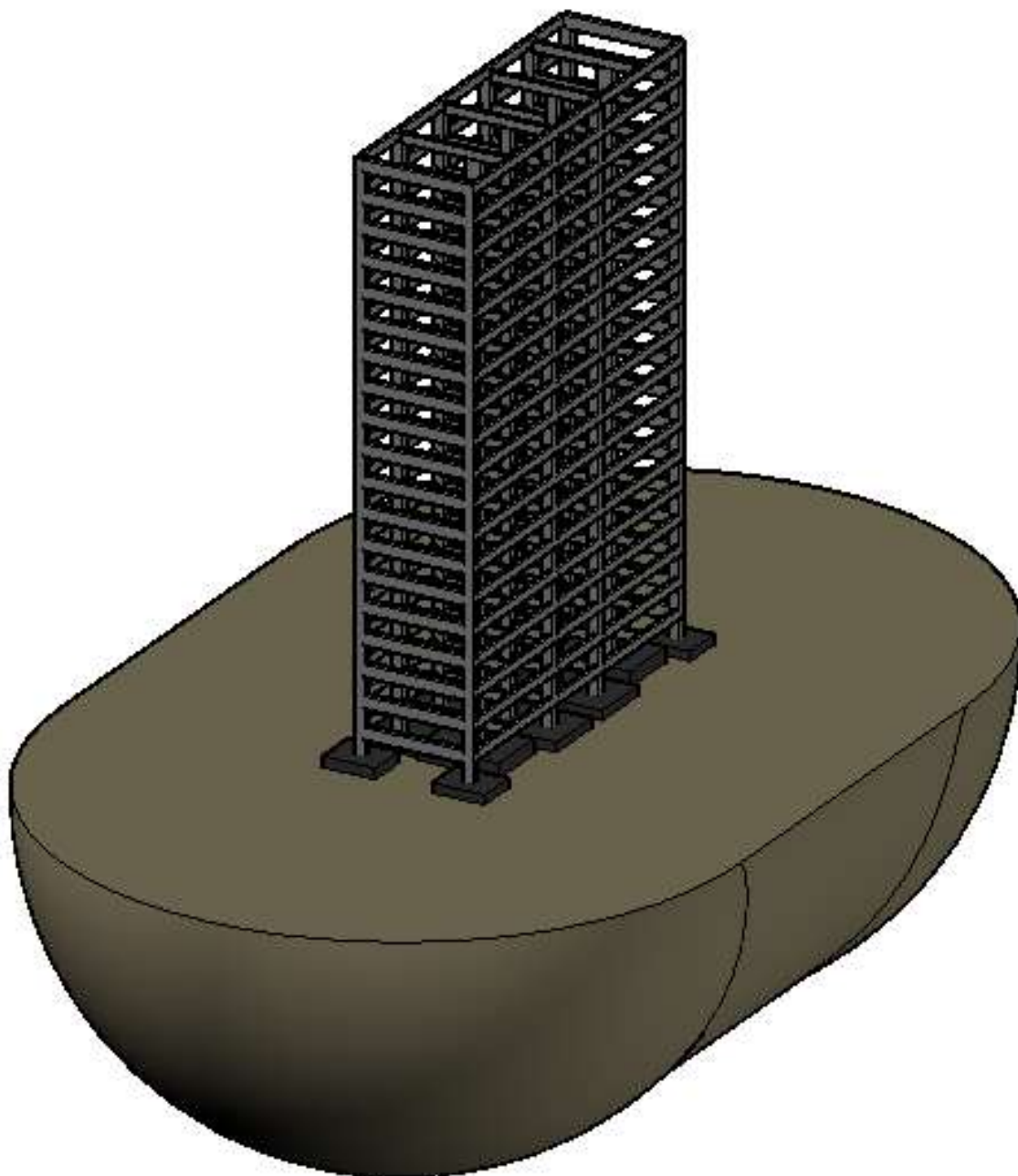


Figura 6.4 – Perspectiva do modelo ISE.

### 6.3.2 PROPRIEDADES FÍSICAS DO MACIÇO

Abaixo da cota de apoio das sapatas, o maciço de solo foi representado em três camadas, a saber: uma primeira camada de solo superficial, constituída de areia predominantemente compacta, com 11 m de espessura (Camada 1); uma segunda camada intermediária de solo, composta de argila com consistência predominantemente mole, com 10

m de espessura (Camada 2); e uma última camada mais profunda de solo (Camada 3), composta por areia de compactidade entre média a compacta (Figura 6.5).

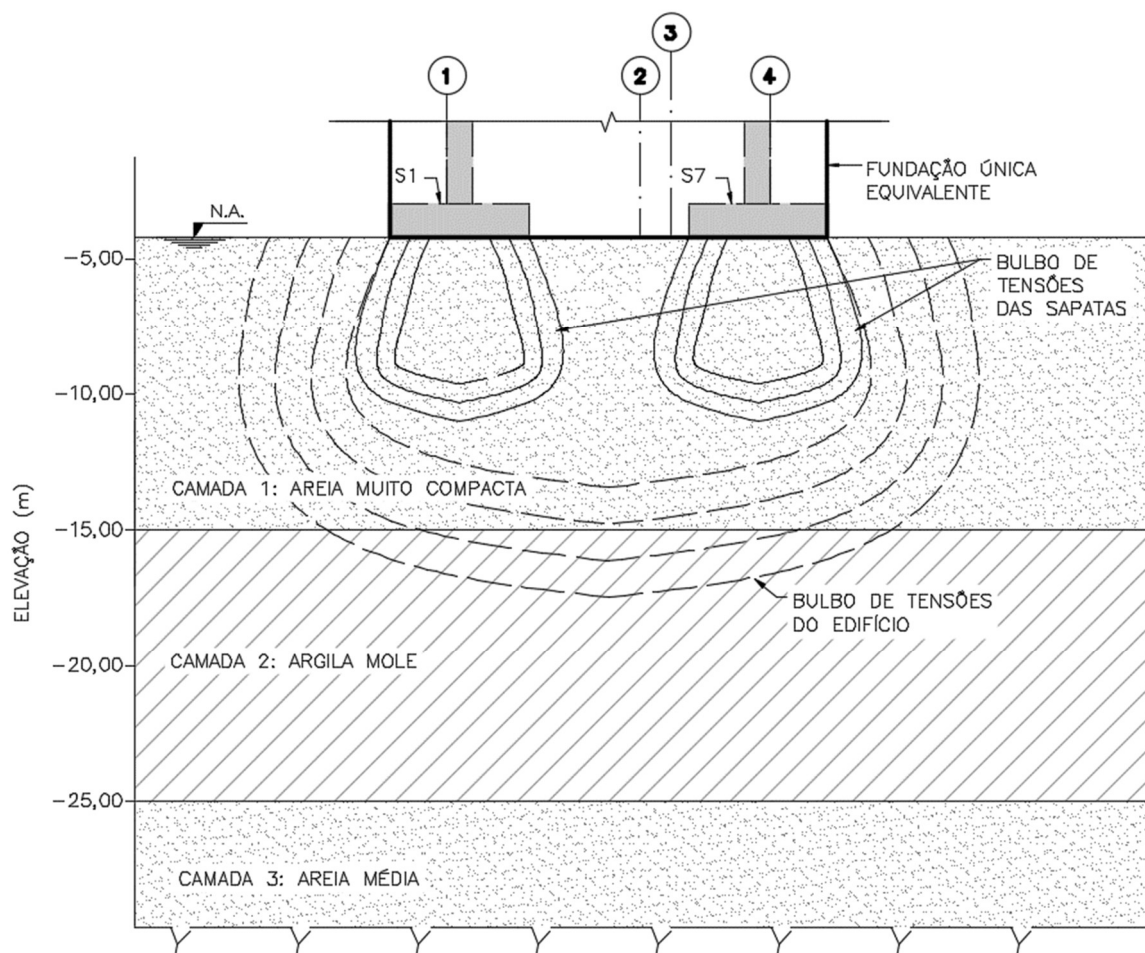


Figura 6.5 – Modelo geotécnico.

O recalque imediato é influenciado por essas três camadas. Neste exemplo, opta-se por utilizar o modelo de Steinbrenner (Apêndice A), para se mensurar a influência de cada uma delas e para se obter a rigidez do maciço, representado pelo módulo de elasticidade equivalente do solo ( $E_{eq}$ ). Admite-se espreadimento das cargas verticais em 26,5 graus com a vertical (Apêndice A). Alternativamente, poderia ter sido empregado o MEC para a obtenção dos deslocamentos no topo de cada camada, obtendo-se maior precisão no espreadimento das cargas verticais.

O conjunto de sapatas é substituído por uma sapata única fictícia e flexível, com dimensões em planta de 40 m x 16,1 m, correspondente à projeção do prédio na superfície do terreno, para avaliação dos recalques médios na fundação. Essa hipótese é estabelecida com

base no princípio de superposição dos bulbos de tensões entre sapatas, dada a continuidade do maciço de solo.

Considerando-se a linearidade física do solo, os deslocamentos do edifício são obtidos para uma pressão de contato unitária; ou seja:  $\sigma = 1,0 \text{ kPa}$ . A Tabela 6.5 apresenta o resultado obtido para cada camada, após emprego do procedimento descrito no Apêndice A.

Tabela 6.5 – Análise do recalque imediato para pressão unitária na superfície.

Cota (m)	$\sigma$ (kPa)	B (m)	L (m)	L/B	$I_w$	Camada 1	Camada 2	Camada 3
						$w_{i,1}$ (mm)	$w_{i,2}$ (mm)	$w_{i,3}$ (mm)
-4	1	16,1	40	2,48	1,39	<b>0,19</b>	-	-
-15	0,47	27,1	51	1,88	1,26	<b>0,13</b>	<b>2,59</b>	-
-25	0,28	37,1	61	1,64	1,19	-	<b>2,05</b>	<b>0,20</b>
<b>Recalque por camada</b>						<b>0,05</b>	<b>0,55</b>	<b>0,20</b>

O recalque imediato, decorrente da pressão unitária na superfície do terreno, é encontrado por meio da soma das parcelas de deslocamento em cada camada:

$$w_i = 0,05 \text{ mm} + 0,55 \text{ mm} + 0,20 \text{ mm} = 0,80 \text{ mm} \quad (6.1)$$

O módulo de elasticidade equivalente ( $E_{eq}$ ) é determinado a partir do recalque imediato do solo estratificado; ou seja:

$$E_{eq} = \sigma \cdot B \cdot \left( \frac{1 - \nu^2}{w_i} \right) \cdot I_w = 24,5 \text{ MPa} \quad (6.2)$$

em que  $\sigma = 1,0 \text{ kPa}$ ,  $B = 16,1 \text{ m}$ ,  $w_i = 0,80 \text{ mm}$ ,  $I_w = 1,39$  e  $\nu = 0,30$ .

O recalque total esperado para o adensamento do solo pode ser determinado aplicando-se a Equação (A.4) do Apêndice A. Fazendo-se a tensão de pré-adensamento  $\sigma'_{vm} = 169 \text{ kPa}$ , a tensão efetiva inicial  $\sigma'_{v0} = 135 \text{ kPa}$  e o acréscimo de tensão efetiva no centro da camada de argila  $\Delta\sigma'_z = 78 \text{ kPa}$ , obtém-se:

$$w_a = \frac{10 \text{ m}}{1 + 1,40} \cdot \left[ 0,05 \cdot \log \left( \frac{169 \text{ kPa}}{135 \text{ kPa}} \right) + 0,43 \cdot \log \left( \frac{213 \text{ kPa}}{169 \text{ kPa}} \right) \right] = 0,198 \text{ m}$$

Obtido o recalque total por adensamento ( $w_a = 0,198 \text{ m}$ ) e conhecido o coeficiente de adensamento da argila mole ( $c_v = 0,5 \text{ m}^2/\text{ano}$ ), é possível calibrar a Teoria do Adensamento de Terzaghi para se identificar os parâmetros viscosos do solo.

A previsão do tempo necessário para a estabilização dos recalques por adensamento é realizada por meio da correlação entre o fator tempo e o grau de adensamento médio. Como os limites superior e inferior da camada de argila são constituídos por material arenoso, assumem-se dois limites de drenagem, o que resulta em caminho de drenagem  $Hd = 5 \text{ m}$ . O grau de adensamento médio igual a 90% fornece  $T_v = 0,848$ ,  $t = 42,4 \text{ anos}$  e deslocamento igual a  $198 \text{ mm} \times 90\% \sim 178,2 \text{ mm}$ .

O desenvolvimento dos deslocamentos verticais da massa de solo ao longo do tempo é mostrado na Figura 6.6, a seguir, tendo-se como base a Teoria do Adensamento de Terzaghi.

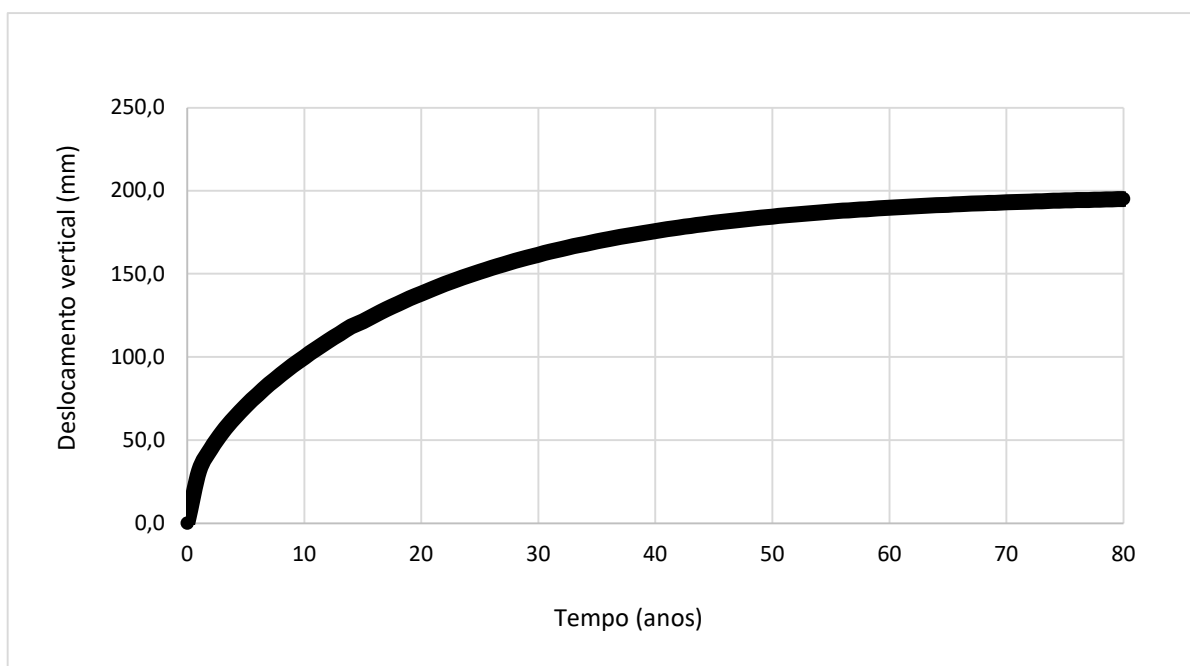


Figura 6.6 – Deslocamentos verticais segundo a Teoria do Adensamento de Terzaghi.

## 6.4 PARAMETRIZAÇÃO DOS MODELOS REOLÓGICOS

### 6.4.1 KELVIN-VOIGT

Conhecendo-se as propriedades físicas do solo, o modelo de Kelvin-Voigt pode ser descrito para representar o adensamento, empregando-se o conceito de fluência nos materiais (Seção 3.4).

Novamente, com base no princípio de superposição dos bulbos de tensões, o conjunto de sapatas foi substituído por uma única sapata fictícia e flexível, com dimensões em planta de 40 m x 16,1 m, correspondente à projeção do prédio na superfície do terreno. Aplicando-se a Equação (A.10) do Apêndice A e fazendo-se  $w_i = w_a = 198 \text{ mm}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $B = 16,1 \text{ m}$ ,  $L = 40 \text{ m}$ ,  $I_w = 1,39$  e  $\sigma = 220 \text{ kPa}$ , encontra-se módulo de elasticidade de Kelvin-Voigt,  $E = 23,0 \text{ MPa}$ .

Pode-se, ainda, admitir a analogia entre o adensamento e o comportamento de fluência do maciço de solo para obter a deformação associada ao tempo de retardo (Seção 3.4); ou seja:

$$\epsilon_F = 0,632 \frac{\sigma_0}{E} = 0,632x \frac{220 \text{ kPa}}{23.000 \text{ kPa}} = 6,04x10^{-3} \quad (6.3)$$

O deslocamento do solo, na superfície do terreno, no instante igual ao tempo de retardo, pode ser expresso por:

$$w_a = B \cdot I_w \cdot \epsilon_F = 16,1 \text{ m} \times 1,39 \times 6,04x10^{-3} = 135 \text{ mm} \quad (6.4)$$

Logo, o recalque por adensamento  $w_a = 135 \text{ mm}$  corresponde ao grau de adensamento médio  $U(t) = 68,1\%$ , o que condiz com  $t = 19$  anos, pela Teoria do Adensamento de Terzaghi (Apêndice A). No modelo de Kelvin-Voigt, o coeficiente representativo de viscosidade do material é igual ao tempo de retardo; ou seja:  $\lambda_F = \gamma = 19$  anos.

Portanto, os parâmetros do modelo de Kelvin-Voigt para a simulação do maciço de solo são dados por  $E = 23,0 \text{ MPa}$  e  $\gamma = 19$  anos.

#### 6.4.2 BOLTZMANN

O módulo de elasticidade do elemento viscoelástico ( $E_{ve}$ ) e o parâmetro de viscosidade ( $\gamma$ ) do modelo de Boltzmann são iguais aos correspondentes valores obtidos para o modelo de Kelvin-Voigt. O módulo de elasticidade da mola isolada do modelo de Boltzmann é igual ao módulo de elasticidade equivalente do solo estratificado; ou seja:  $E_e = E_{eq}$  na Equação (6.2). Portanto, têm-se os seguintes valores para o modelo de Boltzmann:  $E_e = 24,5 \text{ MPa}$ ,  $E_{ve} = 23,0 \text{ MPa}$  e  $\gamma = 19$  anos.

### 6.4.3 ZENER

A parametrização do modelo de Zener pode ser realizada por meio da equivalência existente com o modelo de Boltzmann para o problema de fluência dos materiais (Tabela 3.1).

$$\frac{1}{E_e} = \frac{24,5 \text{ MPa} + 23,0 \text{ MPa}}{24,5 \text{ MPa} \times 23,0 \text{ MPa}} \rightarrow E_e = 11,9 \text{ MPa} \quad (\text{a})$$

$$\frac{1}{E_e + E_{ve}} = \frac{1}{24,5 \text{ MPa}} \rightarrow E_{ve} = 12,6 \text{ MPa} \quad (\text{b}) \quad (6.5)$$

$$\frac{\gamma(E_{ve} + E_e)}{E_e} = 19 \text{ anos} \rightarrow \gamma = 9,2 \text{ anos} \quad (\text{c})$$

Portanto, têm-se os seguintes valores para o modelo de Zener:  $E_e = 11,9 \text{ MPa}$ ,  $E_{ve} = 12,6 \text{ MPa}$  e  $\gamma = 9,2 \text{ anos}$ .

### 6.5 MALHA

A malha em MEF da superestrutura do edifício é mostrada na Figura 6.7. Na construção dessa malha, foram considerados módulo de elasticidade igual a 26 GPa e as propriedades geométricas indicadas na Figura 6.2a, utilizando-se os elementos de pórtico para análises não lineares, conforme descritos no Capítulo 2.

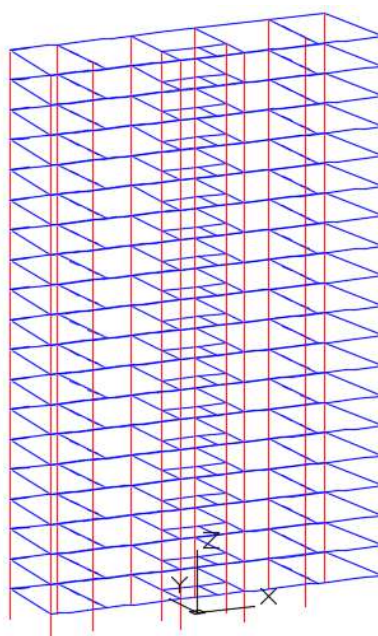


Figura 6.7 – Malha de elementos finitos com elementos de viga (em azul) e pilares (em vermelho) para simular a superestrutura de 19 pavimentos.

A Figura 6.8 apresenta a malha de MEC, composta por 96 elementos triangulares com aproximação linear e 288 nós descontínuos, conforme indicado na Seção 4.6.

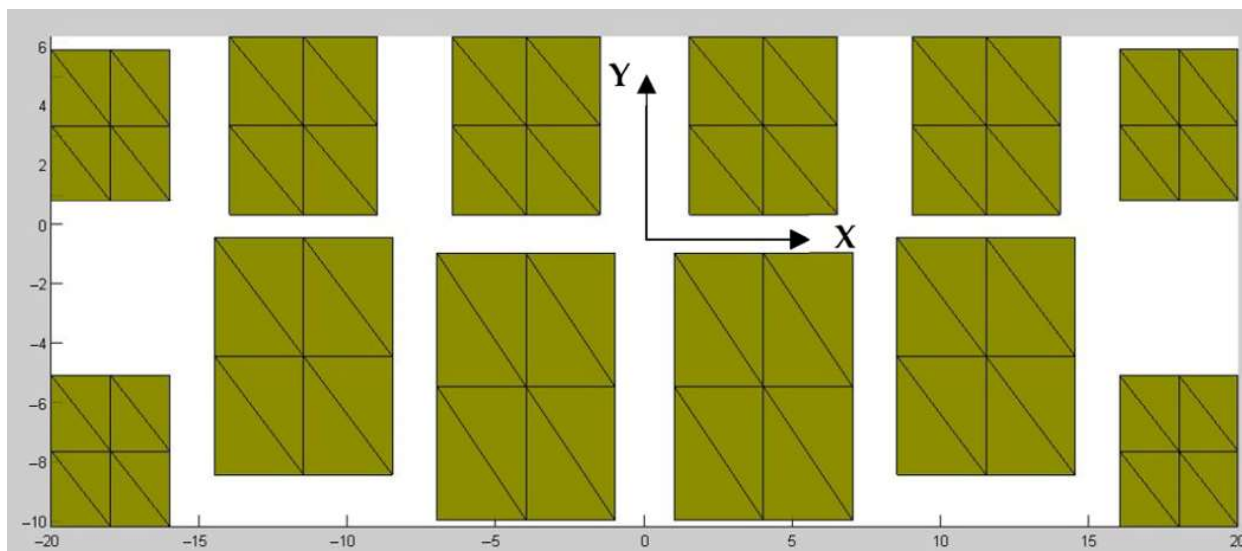


Figura 6.8 – Sapatas do edifício simuladas em MEC.

Alternativamente, o modelo do maciço de solo poderia ser simulado em MEF, utilizando-se as famílias de elementos sólidos convencionais. Contudo, esse tipo de simulação resulta em elevado custo computacional, devido à necessidade de se representar um domínio semi-infinito por meio de um domínio limitado. Outra opção seria a aplicação do MEF utilizando-se a família de elementos infinitos, conforme proposto por Bettles (1977). No entanto, o MEC é reconhecido, na literatura técnica, por apresentar maior precisão para esses casos, uma vez que as soluções fundamentais são obtidas para cada problema específico.

A análise conjunta apenas do solo e da fundação, sem se considerar a superestrutura, é denominada interação solo-fundação. Trata-se de estudo particular da ISE que envolve o deslocamento das sapatas sob carga constante ao longo do tempo por meio do MEC (Capítulo 5), sem interação com a superestrutura no MEF. Essa avaliação permite identificar os máximos deslocamentos e distorções angulares na fundação, na hipótese de ausência ou perda de rigidez da superestrutura.

## 6.6 ISE NO MODELO DE KELVIN-VOIGT

Os resultados de rigidez de mola, forças verticais e deslocamentos de sapatas são apresentados, respectivamente, na Tabela 6.6, na Tabela 6.7 e na Tabela 6.8, para todas as iterações do acoplamento iterativo entre MEF/MEC.

Foram definidos os intervalos de tempo 20, 40 e 80 anos para compatibilidade dos deslocamentos. Observa-se que foram necessárias cinco iterações para convergência do deslocamento no tempo igual a 20 anos, duas iterações para o intervalo de tempo igual a 40 anos e apenas uma iteração para o intervalo de tempo igual a 80 anos, com erros inferiores a 2%, considerados aceitáveis para esse tipo de análise.

Tabela 6.6 – Evolução das molas de Winkler no MEF para o modelo de Kelvin-Voigt (kN/m).

Tempo (anos)	Iteração	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
20	1	Infinita	Infinita	Infinita	Infinita	Infinita	Infinita
	2	65.174	80.881	73.209	68.562	127.485	112.589
	3	71.642	79.508	72.545	77.218	123.684	111.139
	4	74.986	78.628	72.425	80.533	119.840	110.699
	5	76.652	78.340	72.463	82.069	118.432	110.863
40	1	56.954	57.384	53.706	60.832	86.049	81.807
	2	58.033	56.874	53.435	62.192	85.057	81.451
80	1	51.362	50.490	47.411	54.976	75.428	72.279

Tabela 6.7 – Evolução das reações no MEF para o modelo de Kelvin-Voigt (kN/m).

Tempo (anos)	Iteração	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
20	1	6.778	10.676	10.103	7.336	18.485	17.114
	2	7.809	10.336	9.721	8.726	17.563	16.337
	3	8.323	10.143	9.705	9.261	16.897	16.162
	4	8.585	10.028	9.710	9.520	16.462	16.186
	5	8.714	9.985	9.721	9.612	16.263	16.198
40	1	8.714	9.985	9.721	9.612	16.263	16.198
	2	8.937	9.896	9.672	9.951	15.991	16.046
80	1	8.937	9.896	9.672	9.951	15.991	16.046

Tabela 6.8 – Evolução dos deslocamentos no MEC para o modelo de Kelvin-Voigt (mm).

Tempo (anos)	Iteração	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
20	1	104	132	138	107	145	152
	2	109	130	134	113	142	147
	3	111	129	134	115	141	146
	4	112	128	134	116	139	146
	5	113	128	134	116	139	146
40	1	153	174	181	158	189	198
	2	154	174	181	160	188	197
80	1	174	196	204	181	212	222

A evolução dos deslocamentos das sapatas, considerando-se a interação solo-estrutura, é mostrada na Figura 6.9. Nota-se que os deslocamentos médios das sapatas convergem para o deslocamento esperado para o solo, em conformidade com a Teoria do Adensamento de Terzaghi.

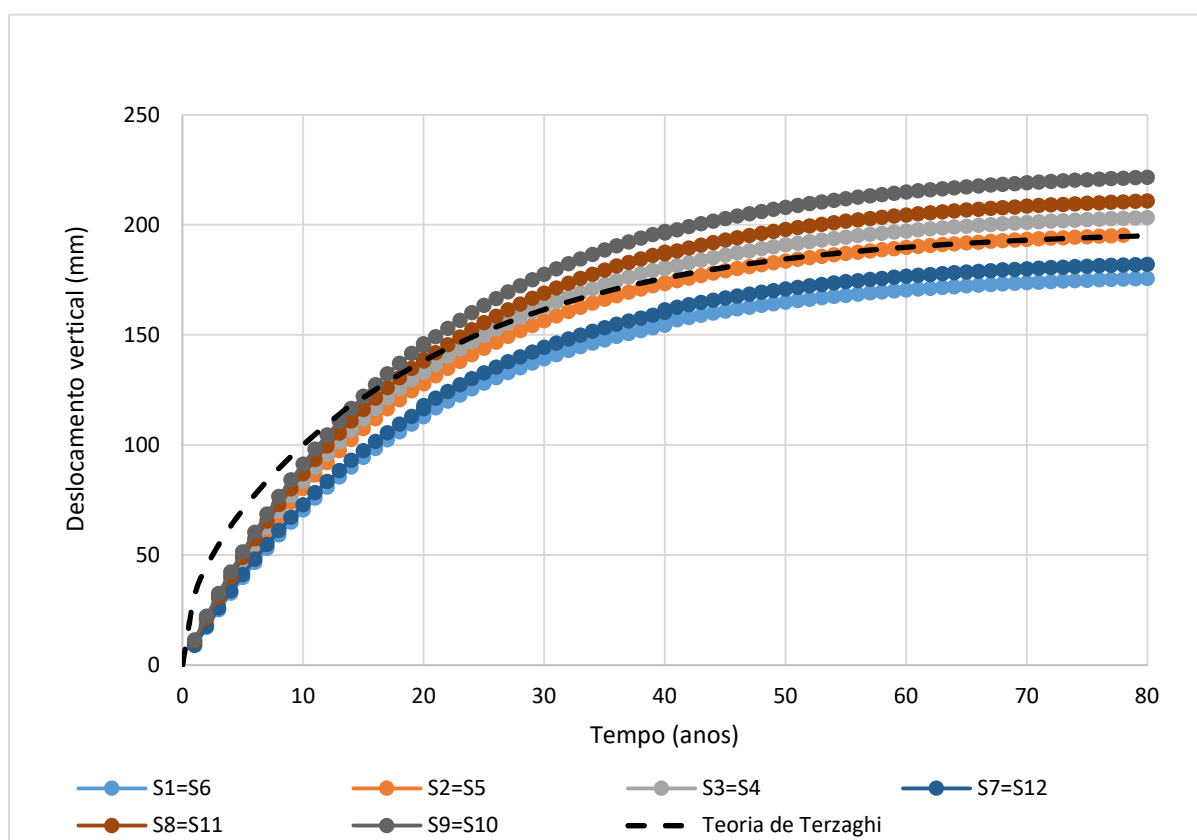


Figura 6.9 – Deslocamentos vertical das sapatas a partir do modelo de Kelvin-Voigt para representação da Teoria do Adensamento de Terzaghi na interação solo-estrutura.

As distorções angulares obtidas entre duas sapatas por meio do modelo de Kelvin-Voigt na ISE após o processo de adensamento são apresentadas na Tabela 6.9, a seguir:

Tabela 6.9 – Distorção angular entre sapatas após o processo de adensamento segundo o modelo de Kelvin-Voigt para a interação solo-estrutura.

$\delta/l$	S1=S6	S2=S5	S3=S4	S7=S12	S8=S11	S9=S10
<b>S1</b>	-	1/295	1/467	1/1.564	1/267	1/345
<b>S2</b>	1/295	-	1/938	1/849	1/486	1/445
<b>S3</b>	1/467	1/938	-	1/773	1/1.350	1/489
<b>S7</b>	1/1.564	1/849	1/773	-	1/222	1/345
<b>S8</b>	1/267	1/486	1/1.350	1/222	-	1/750
<b>S9</b>	1/345	1/445	1/489	1/345	1/750	-

Nessa Tabela 6.9, nota-se que as distorções angulares entre as sapatas S1 e S2, S1 e S8 e S7 e S8 superam o limite indicado por Skempton e MacDonald (1956) para ocorrência de trincas em alvenarias.

Devido à rigidez do edifício na ISE, ocorre transferência dos esforços na estrutura, modificando-se as reações nas sapatas. A Figura 6.10 mostra a razão entre o acréscimo de reação pela reação inicial das sapatas do edifício. Nota-se que as sapatas S1, S6, S7 e S12 sofrem acréscimos de cargas, enquanto as demais sapatas ficam sujeitas a um decréscimo de esforços. Os acréscimos de carregamentos atingem cerca de 39%, nas sapatas S7 e S12, e de 35% nas sapatas S1 e S6.

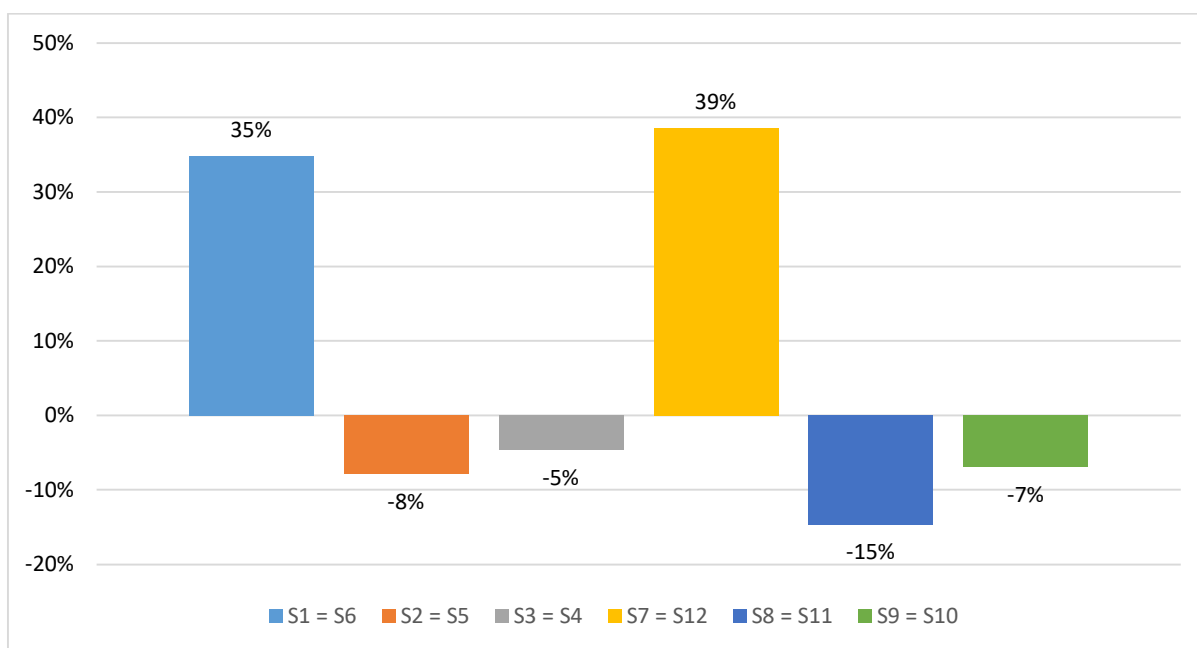


Figura 6.10 – Variação das reações nas sapatas em relação ao tempo ao início e término do processo de adensamento no modelo de Kelvin-Voigt.

Nas sapatas, as tensões admissíveis poderiam ser inicialmente assumidas como iguais a 400 kPa para todos os elementos de fundação, a partir de relações empíricas em ensaios de resistência à penetração em sondagens (SPT). As tensões atuantes em S1 = S6 e S7 = S12 alcançam cerca de 449 kPa e 500 kPa, respectivamente, ao final do adensamento.

A partir da Equação (3.17), a tensão total  $\sigma_{ij}$ , no modelo de Kelvin-Voigt, é dada pela soma das parcelas de tensões elástica e viscosa. Ao final do processo de adensamento, as tensões totais e viscosas nas sapatas mais solicitadas (S7 e S12) atingem 500 kPa. No entanto, durante o processo de adensamento, a tensão elástica é inferior à tensão total, sendo proporcional à deformação do solo e às constantes constitutivas, conforme a expressão a seguir:

$$\sigma_{ij}^e = E \bar{C}_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (6.6)$$

Admitindo-se linearidade entre deslocamentos e deformações elásticas ( $\epsilon_{lm}$ ), é possível estimar o deslocamento por adensamento que provoca tensão atuante igual à tensão admissível do solo; ou seja:

$$w_a = \frac{183 \text{ mm}}{(500 \text{ kPa} - 360 \text{ kPa})} \cdot (400 \text{ kPa} - 360 \text{ kPa}) = 52 \text{ mm} \quad (6.7)$$

Avaliando-se a Figura 6.9, conclui-se que o deslocamento por adensamento, igual a 52 mm na Sapata S7=S12, ocorre no instante  $t = 5$  anos, contados a partir do início do processo de adensamento, o que poderia indicar redução da vida útil da estrutura projetada.

A Figura 6.11 apresenta a evolução da rigidez da mola de Winkler durante o processo de adensamento, indicando redução da rigidez do solo ao longo do tempo e a tendência de esse parâmetro tornar-se constante nas proximidades do tempo de retardo; ou seja:  $\lambda_F = 19$  anos.

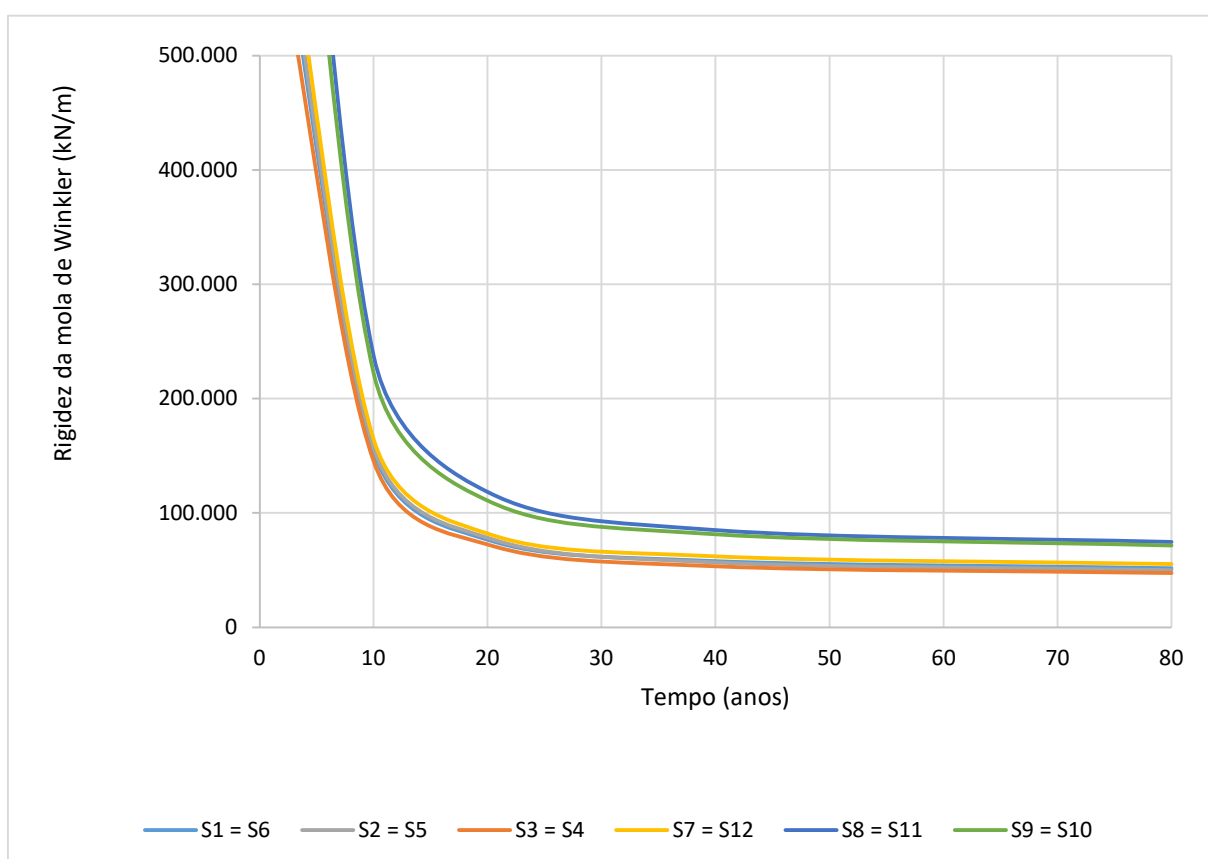


Figura 6.11 – Evolução da rigidez da mola de Winkler no modelo de Kelvin-Voigt.

Os resultados apresentados nesta seção indicam que, se a estrutura apresentar ductilidade suficiente, os recalques por adensamento tendem a se tornar uniformes. Contudo, em razão da perda progressiva de rigidez do solo, o edifício se torna relativamente mais rígido e sujeito a maior transferência de carga.

## 6.7 ISE NO MODELO DE BOLTZMANN

Para o modelo de Boltzmann, apresentam-se os resultados de rigidez de mola, forças verticais e deslocamentos de sapatas, respectivamente, na Tabela 6.10, na Tabela 6.11 e na Tabela 6.12, para todas as iterações do acoplamento MEC/MEF. Foram definidos os tempos 0, 20, 40 e 80 anos para compatibilidade dos deslocamentos. Observa-se que foram necessárias cinco iterações para convergência do deslocamento no tempo 0; quatro iterações para a convergência do deslocamento no tempo igual a 20 anos; duas iterações para o tempo igual a 40 anos; e apenas uma iteração para o tempo igual a 80 anos, com margem de erro inferior a 2%, considerada aceitável para este tipo de análise.

Tabela 6.10 – Evolução das molas de Winkler no MEF para o modelo de Boltzmann (kN/m).

Tempo (anos)	Iteração	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
0	1	Infinita	Infinita	Infinita	Infinita	Infinita	Infinita
	2	41.840	52.079	47.431	44.194	81.793	72.515
	3	46.320	51.094	46.296	50.908	79.263	71.010
	4	49.181	50.648	46.385	53.405	77.027	70.289
	5	50.542	50.056	46.501	54.729	75.730	70.316
20	1	32.003	31.043	29.058	34.274	47.471	44.282
	2	32.738	30.844	28.925	35.428	46.660	43.879
	3	33.247	30.868	28.965	35.935	46.200	43.757
	4	33.491	30.823	29.061	36.180	45.850	43.774
40	1	29.242	26.874	25.369	31.592	40.030	38.221
	2	29.382	26.793	25.363	31.942	39.777	38.145
80	1	27.717	25.242	23.875	30.129	37.443	35.906

Tabela 6.11 – Evolução das reações no MEF para o modelo de Boltzmann (kN).

Tempo (anos)	Iteração	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
0	1	6.778	10.676	10.103	7.336	18.485	17.114
	2	7.874	10.270	9.630	9.011	17.517	16.190
	3	8.557	10.130	9.555	9.720	16.715	15.815
	4	8.895	9.961	9.533	10.070	16.282	15.751
	5	9.057	9.810	9.502	10.076	16.282	15.765
20	1	9.057	9.810	9.502	10.076	16.282	15.765
	2	9.363	9.685	9.372	10.628	15.911	15.533
	3	9.575	9.662	9.385	10.852	15.615	15.403
	4	9.679	9.648	9.387	10.963	15.452	15.365
40	1	9.679	9.648	9.387	10.963	15.452	15.365
	2	9.784	9.592	9.359	11.148	15.314	15.296
80	1	9.784	9.592	9.359	11.148	15.314	15.296

Tabela 6.12 – Evolução dos deslocamentos no MEC para o modelo de Boltzmann (mm).

Tempo (anos)	Iteração	S1 = S6	S2 = S5	S3 = S4	S7 = S12	S8 = S11	S9 = S10
0	1	162	205	213	166	226	236
	2	170	201	208	177	221	228
	3	174	200	206	182	217	225
	4	176	199	205	184	215	224
	5	177	198	205	184	215	224
20	1	283	316	327	294	343	356
	2	286	314	324	300	341	354
	3	288	313	324	302	338	352
	4	289	313	323	303	337	351
40	1	331	359	370	347	386	402
	2	333	358	369	349	385	401
80	1	353	380	392	370	409	426

A evolução dos deslocamentos das sapatas, considerando-se a interação solo-estrutura, é mostrada na Figura 6.12, disposta acima.

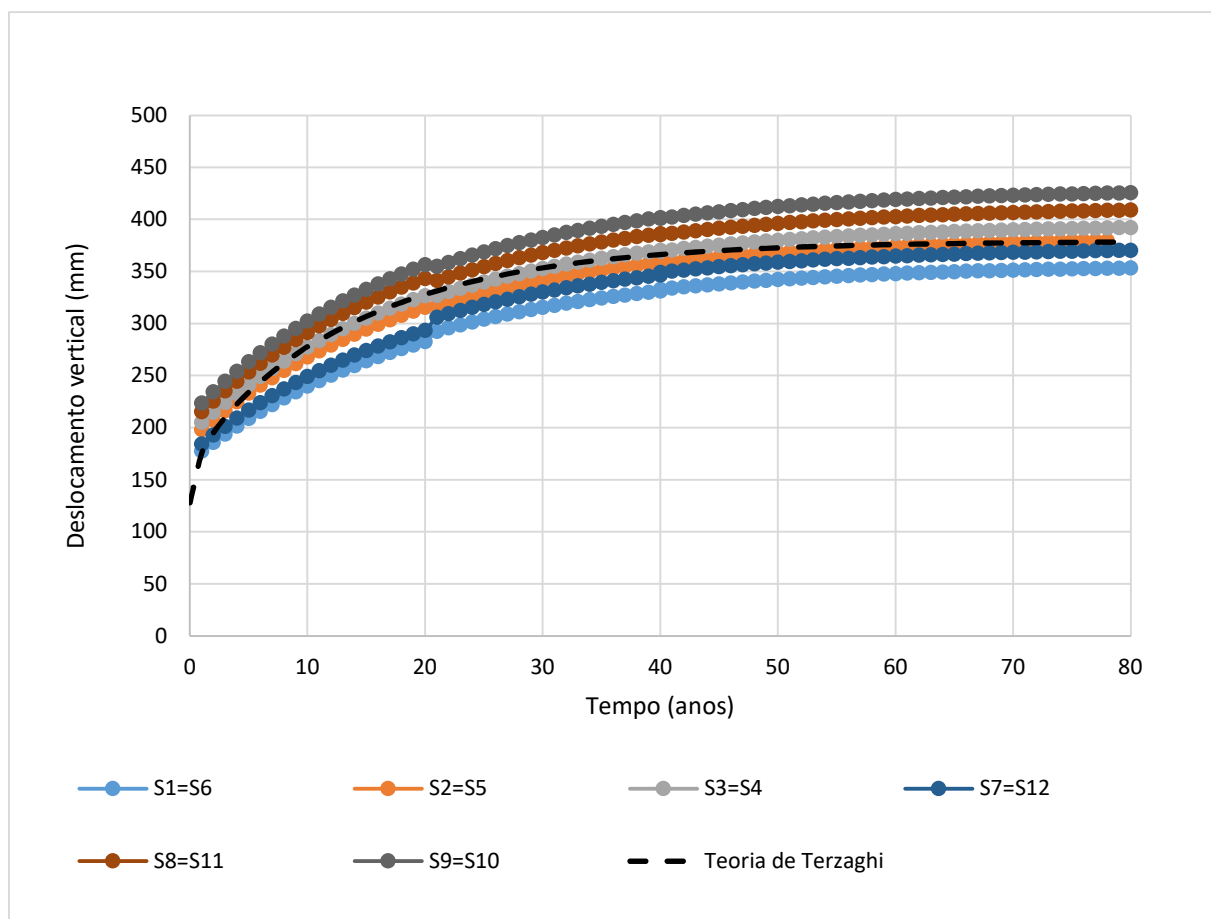


Figura 6.12 – Deslocamentos vertical das sapatas a partir do modelo de Boltzmann para representação da Teoria do Adensamento de Terzaghi na interação solo-estrutura.

Comparando-se a Figura 6.10 e a Figura 6.12, os deslocamentos das sapatas S1=S6, S7=S12 e S2=S5 são maiores no modelo de Boltzmann, enquanto os deslocamentos das demais sapatas são menores. No gráfico, esse resultado é observado pela aproximação das curvas de deslocamento das sapatas à curva que representa o deslocamento do solo na Teoria de Terzaghi. Esse comportamento indica que, no modelo de Boltzmann, os deslocamentos ao longo do tempo tendem a ser menos díspares, se comparados aos calculados segundo o modelo de Kelvin-Voigt.

As distorções angulares obtidas entre duas sapatas por meio do modelo de Boltzmann na interação solo-fundação, associadas ao recalque inicial, são apresentadas na Tabela 6.13, a seguir:

Tabela 6.13 – Distorção angular entre sapatas após o recalque inicial segundo modelo de Boltzmann para a interação solo-estrutura.

$\delta/l$	S1=S6	S2=S5	S3=S4	S7=S12	S8=S11	S9=S10
S1	-	1/310	1/500	1/1.564	1/267	1/352
S2	1/310	-	1/1.071	1/910	1/1/457	1/445
S3	1/500	1/1.071	-	1/847	1/1.080	1/463
S7	1/1.564	1/910	1/847	-	1/222	1/354
S8	1/267	1/457	1/1.080	1/222	-	1/833
S9	1/352	1/445	1/463	1/354	1/833	-

Nota-se que a distorção angular entre as sapatas não supera o limite indicado por Skempton e MacDonald (1956) para danos estruturais durante o recalque imediato, embora ocorram distorções angulares com potencial comprometimento das paredes em alvenaria.

As distorções angulares obtidas entre duas sapatas por meio do modelo de Boltzmann na interação solo-estrutura, associadas ao final do processo de adensamento, são apresentadas na Tabela 6.14, a seguir:

Tabela 6.14 – Distorção angular entre sapatas após o processo de adensamento segundo modelo de Boltzmann para a interação solo-estrutura.

$\delta/l$	S1=S6	S2=S5	S3=S4	S7=S12	S8=S11	S9=S10
S1	-	1/241	1/359	1/644	1/181	1/227
S2	1/241	-	1/625	1/1.273	1/268	1/251
S3	1/359	1/625	-	1/809	1/635	1/259
S7	1/644	1/1.273	1/809	-	1/177	1/253
S8	1/181	1/268	1/635	1/177	-	1/441
S9	1/227	1/251	1/259	1/253	1/441	-

Comparando-se os resultados obtidos por meio do modelo de Kelvin-Voigt com os encontrados por meio do modelo de Boltzmann, observa-se que o recalque, ao longo do tempo, no segundo modelo, indicou valores menos díspares do que no primeiro modelo. Essa diferença ocorre porque não é possível descrever o recalque imediato segundo as hipóteses de Kelvin-Voigt e, portanto, o solo apresenta-se mais rígido em relação ao solo simulado por meio do modelo de Boltzmann. Dessa forma, as sapatas mostram-se relativamente mais flexíveis no

modelo de Kelvin-Voigt, se comparadas aos resultados à luz da teoria de Boltzmann. O comportamento é análogo ao que ocorre em placas, em que maior rigidez da placa implica recalques mais uniformes, conforme apresentado no Apêndice A deste trabalho.

No modelo de Boltzmann, pode-se avaliar a variação das reações nas sapatas no instante inicial (após o recalque inicial) e no instante final (após o processo de adensamento). A Figura 6.13 mostra a variação do acréscimo de carga nas sapatas após o processo de adensamento. O acréscimo de carga atinge cerca de 11% para as sapatas S7 e S12 e de 8% para as sapatas S1 e S6.

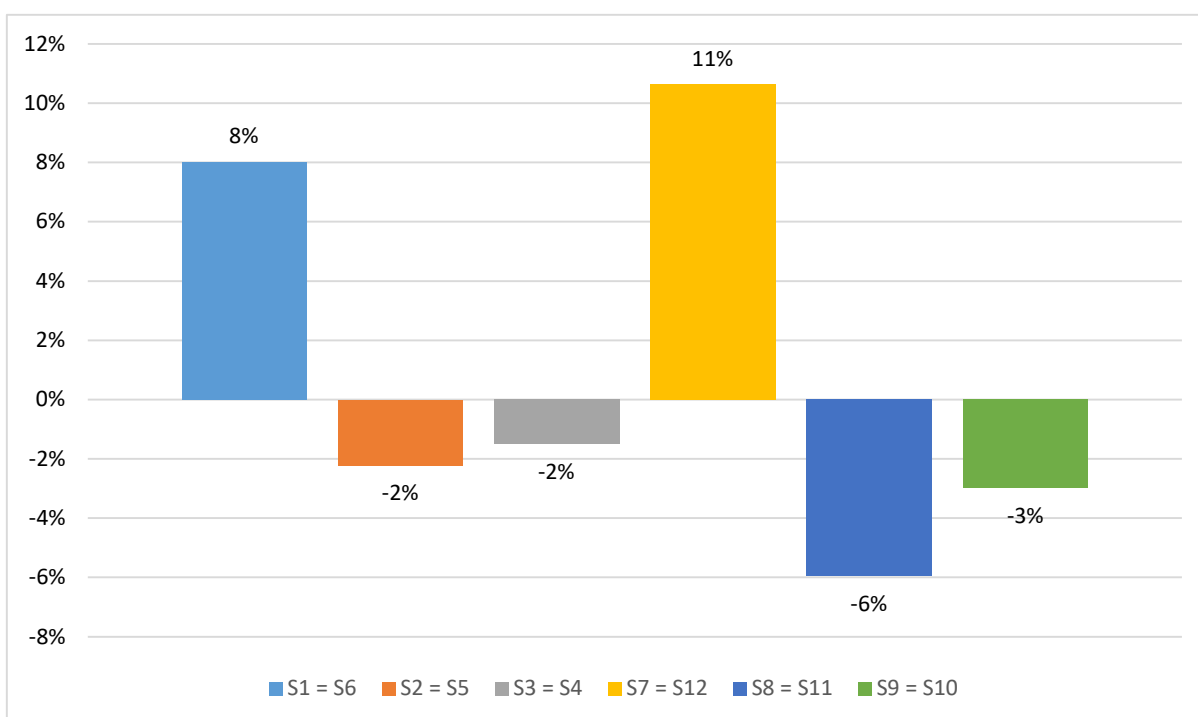


Figura 6.13 – Variação das reações nas sapatas após recalque por adensamento no modelo de Boltzmann.

A tensão atuante em S1=S6 e S7=S12 alcança cerca de 444,0 kPa e 494 kPa, respectivamente, considerando-se apenas o recalque imediato. Após o adensamento, as sapatas S1=S6 e S7=S12 alcançam, respectivamente, as tensões 480 kPa e 547 kPa. Tendo-se a tensão admissível igual a 400 kPa, a partir de relações empíricas em ensaios de resistência à penetração em sondagens (SPT), as tensões atuantes superam a tensão admissível durante ao final do recalque imediato, diferentemente das hipóteses de Kelvin-Voigt, o que indica o tempo de 5 anos para igualdade das tensões atuantes e tensões admissíveis em S7=S12.

Na Figura 6.14, representa-se a evolução da rigidez da mola de Winkler durante o processo de adensamento, indicando a tendência de esse parâmetro tornar-se constante nas proximidades do tempo de retardo; ou seja:  $\lambda_F = 19$  anos.

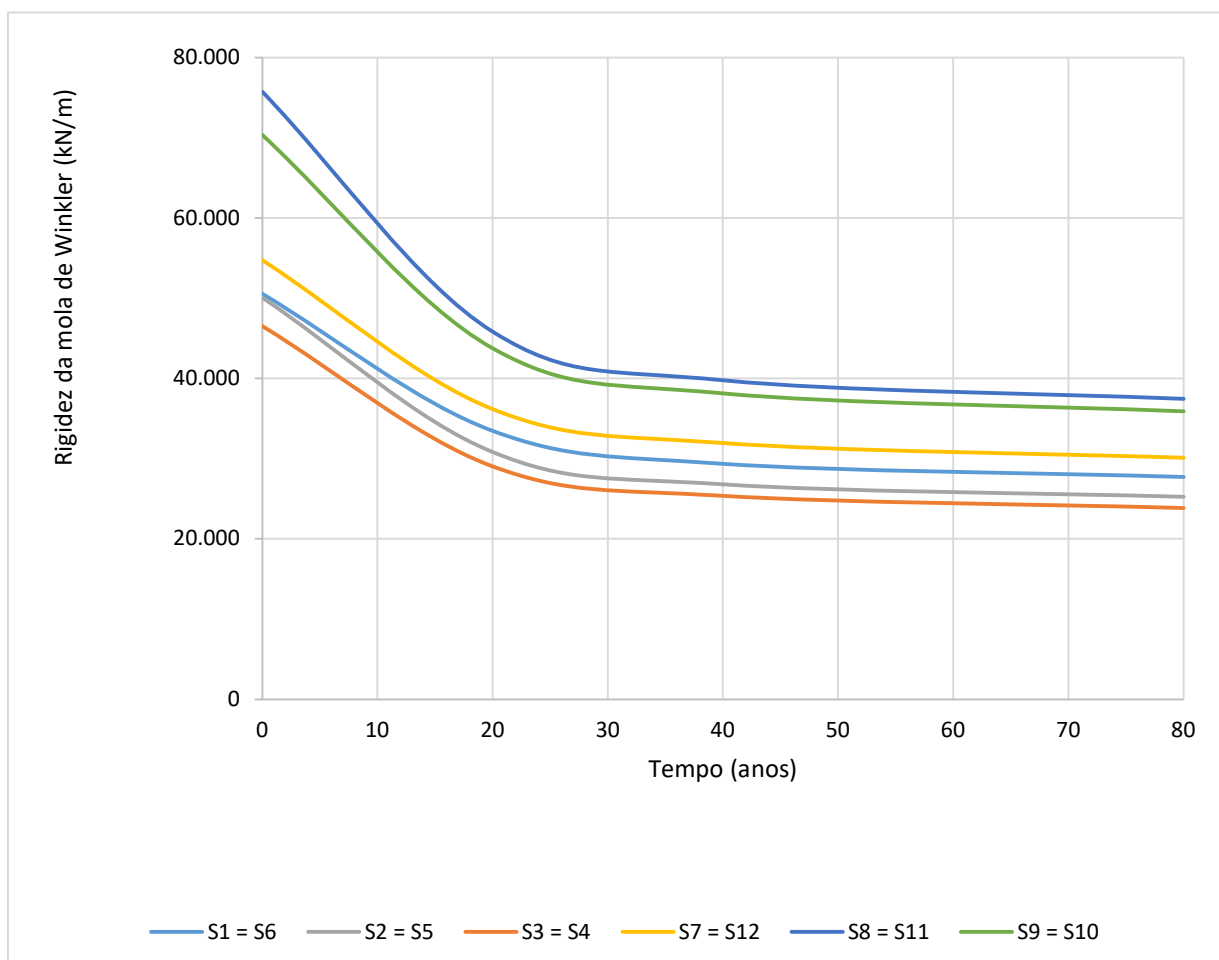


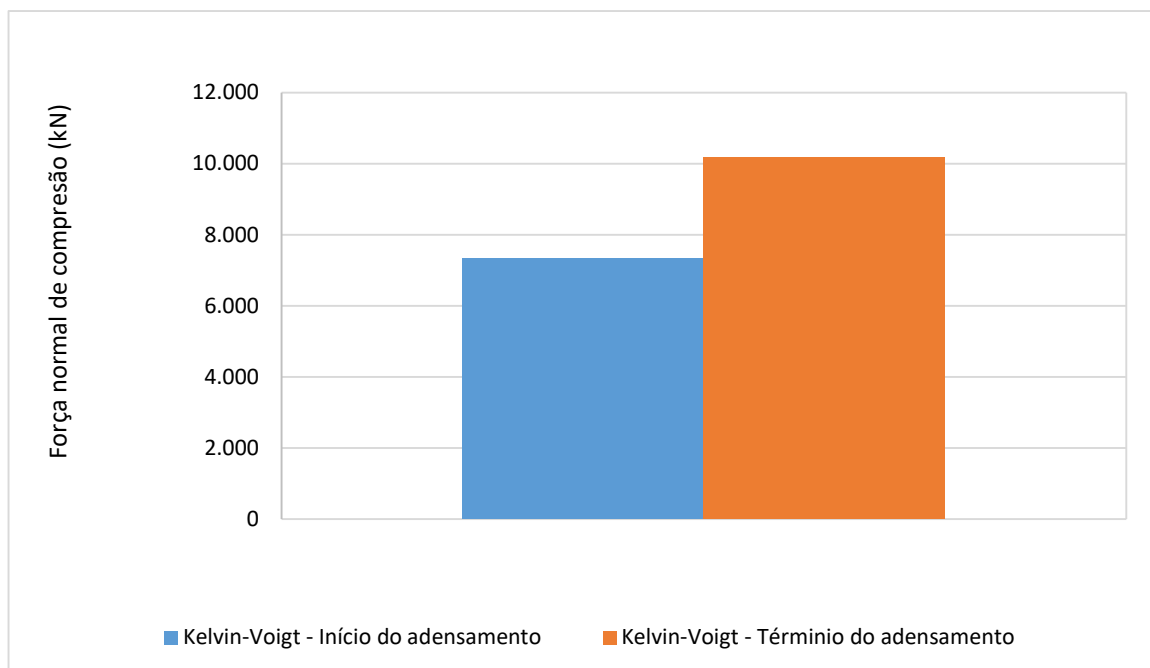
Figura 6.14 – Variação das reações nas sapatas decorrente apenas do adensamento no modelo de Boltzmann.

## 6.8 ANÁLISE DA SUPERESTRUTURA

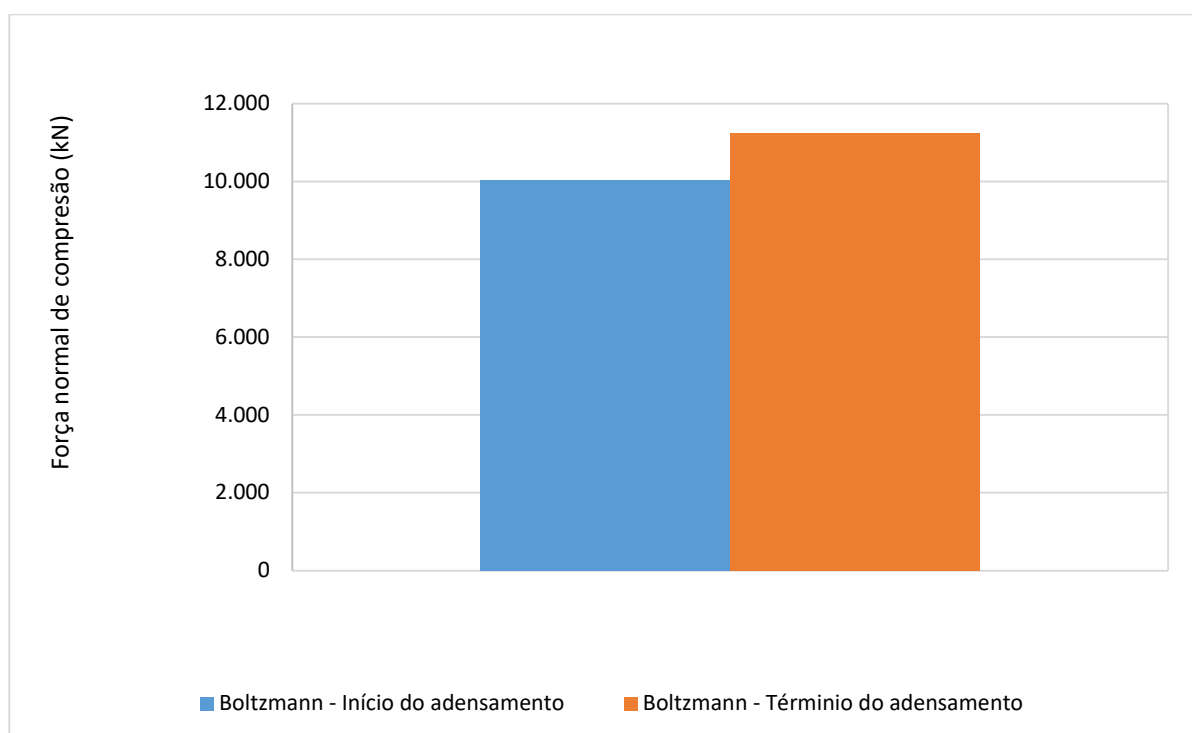
A seguir, apresenta-se um estudo comparativo entre os resultados obtidos com a redistribuição dos esforços na estrutura devido ao processo de adensamento, segundo as hipóteses de Kelvin-Voigt e de Boltzmann.

### 6.8.1 PILAR P7

As forças normais de compressão e os momentos fletores que atuam nos planos XZ e YZ sobre o Pilar P7, obtidos pelos métodos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann, são apresentados, respectivamente na Figura 6.15, na Figura 6.16 e Figura 6.17, dispostas a seguir.

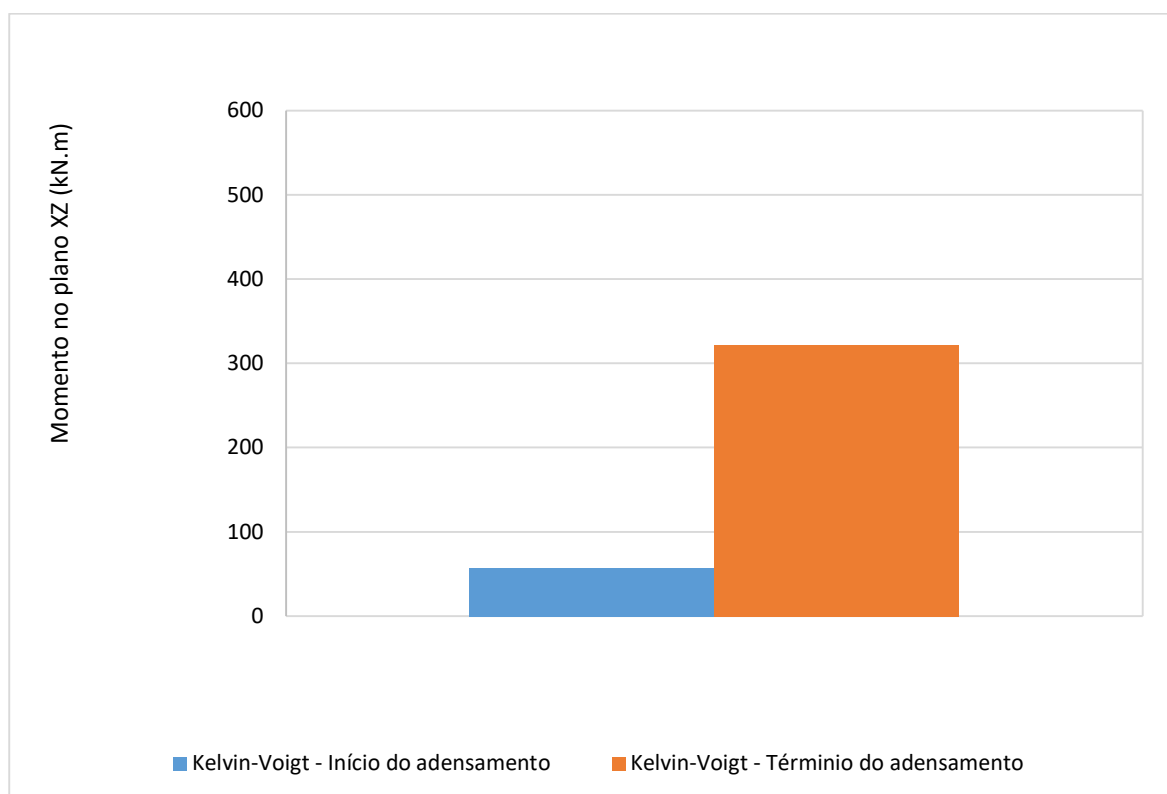


(a) Modelo de Kelvin-Voigt.

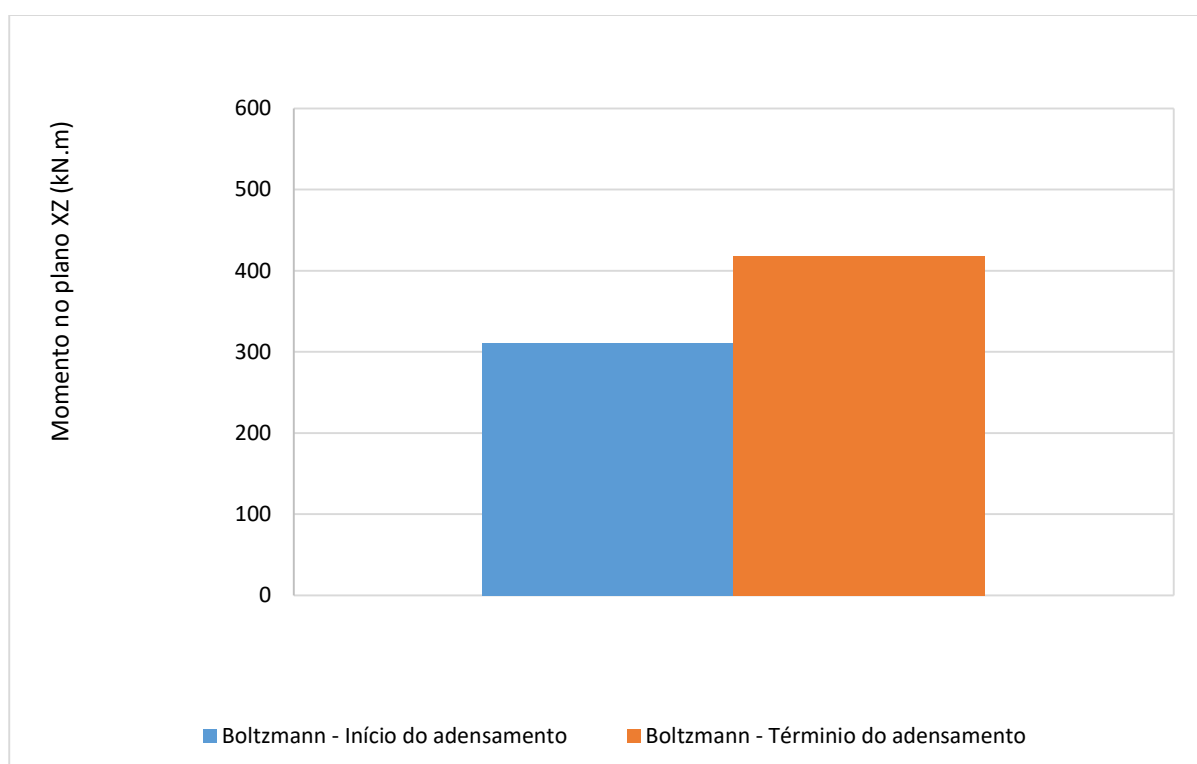


(b) Modelo de Boltzmann.

Figura 6.15 – Força de compressão em P7 para os modelos reológicos avaliados.

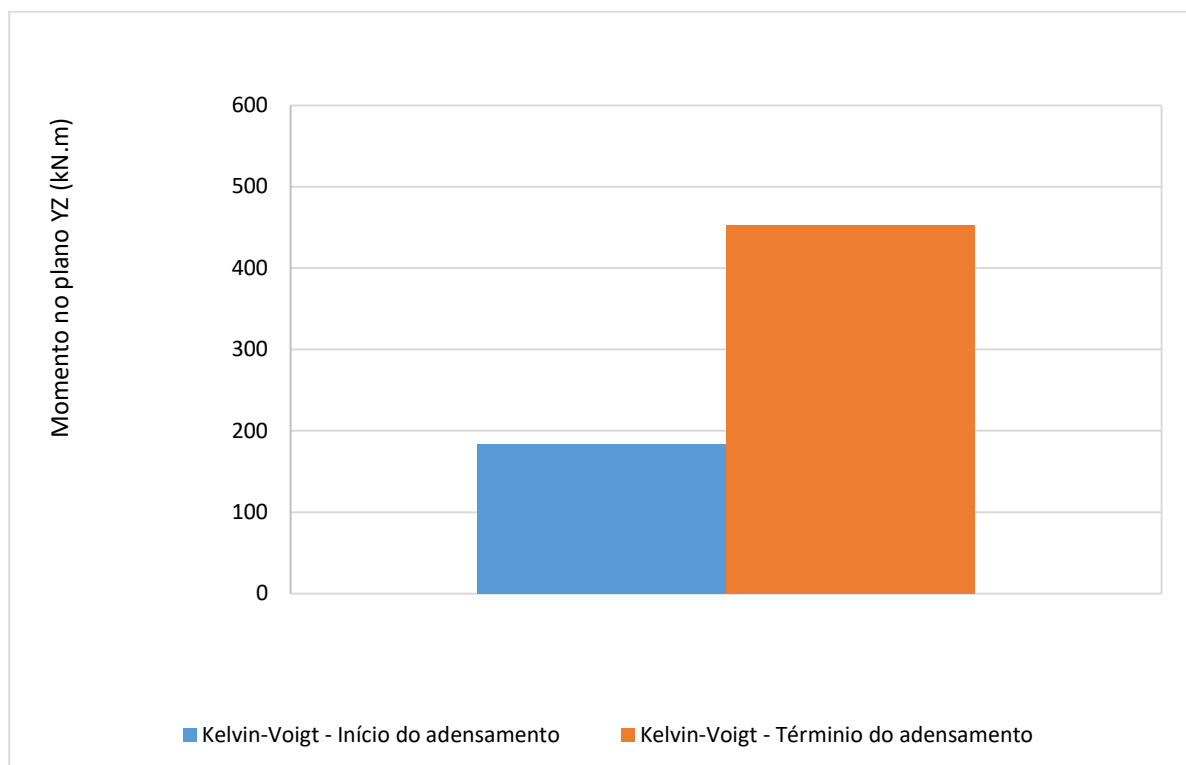


(a) Modelo de Kelvin-Voigt.

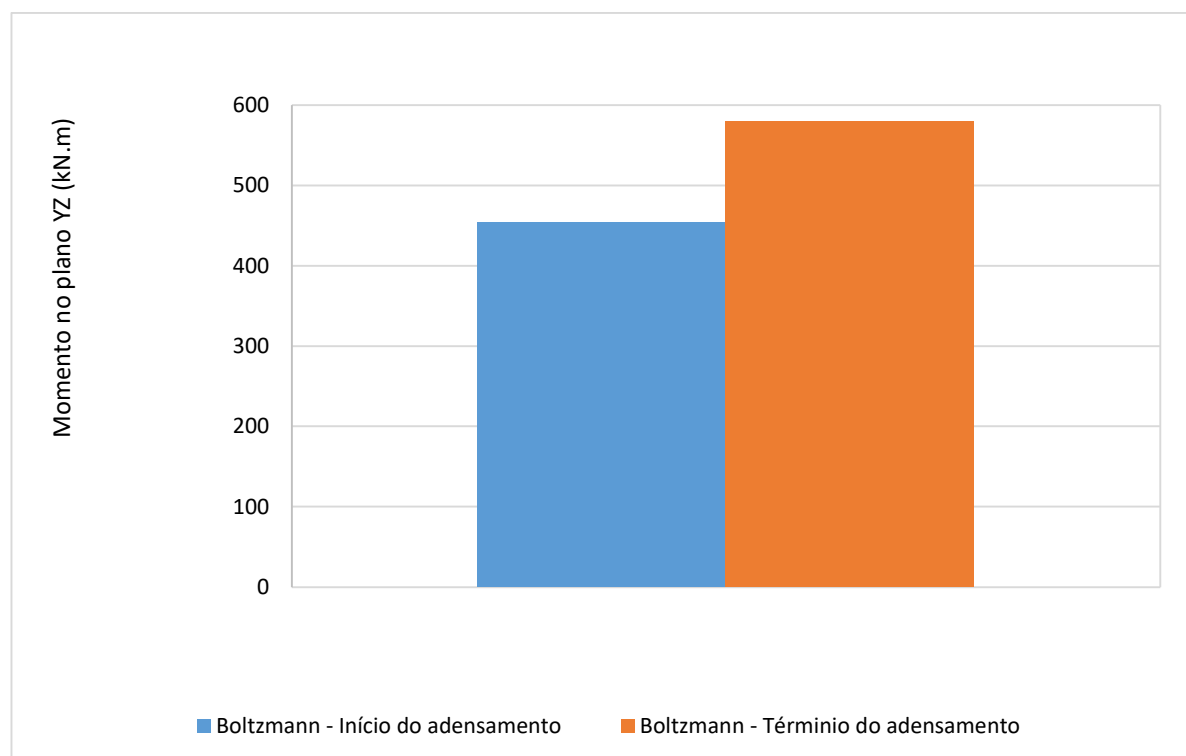


(b) Modelo de Boltzmann.

Figura 6.16 – Momento fletor no plano XZ em P7 para os modelos reológicos avaliados.



(a) Modelo de Kelvin-Voigt.



(b) Modelo de Boltzmann.

Figura 6.17 – Momento fletor no plano YZ em P7 para os modelos reológicos avaliados.

Durante o processo de adensamento, o Pilar P7 sofre acréscimo dos esforços internos nos modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann. No primeiro modelo, a redistribuição dos esforços é maior. O acréscimo dos esforços de compressão ao final do processo de adensamento representa cerca de 39% do valor do esforço de compressão inicial. Já no modelo de Boltzmann, esse acréscimo representa cerca de 10% do valor da força de compressão observada após o recalque imediato.

## 6.8.2 VIGA V2

As forças cortantes e os momentos fletores que atuam sobre a Viga V2 são apresentados, respectivamente, na Figura 6.18 e na Figura 6.19.

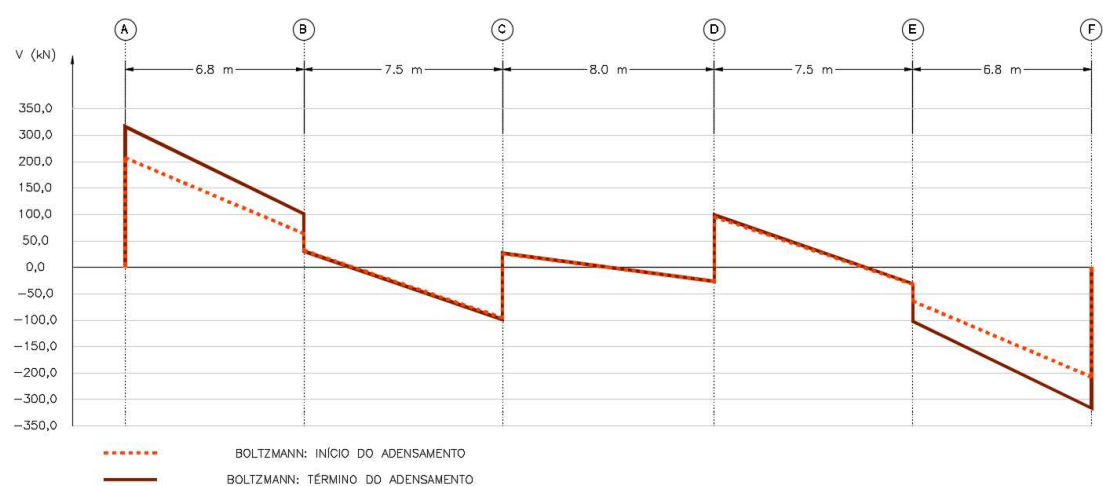
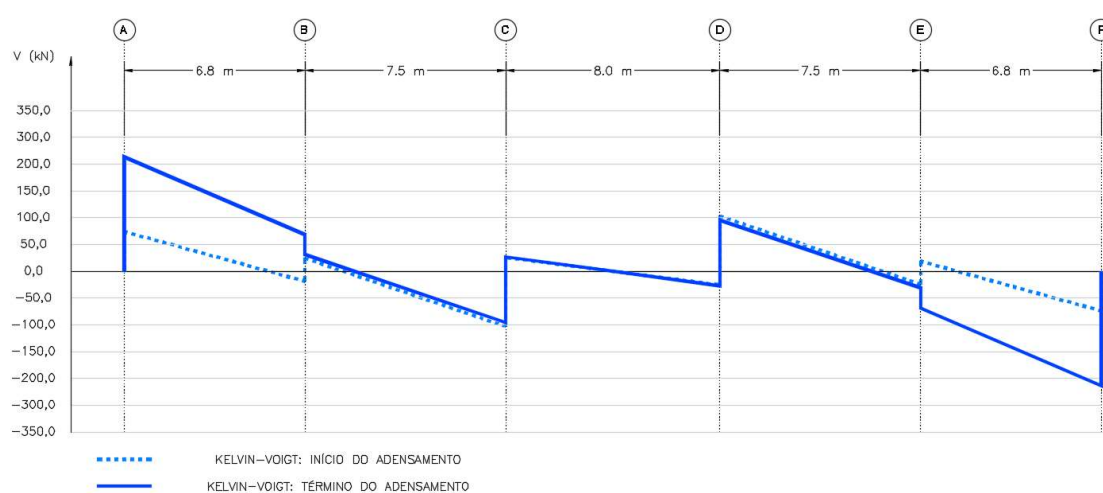
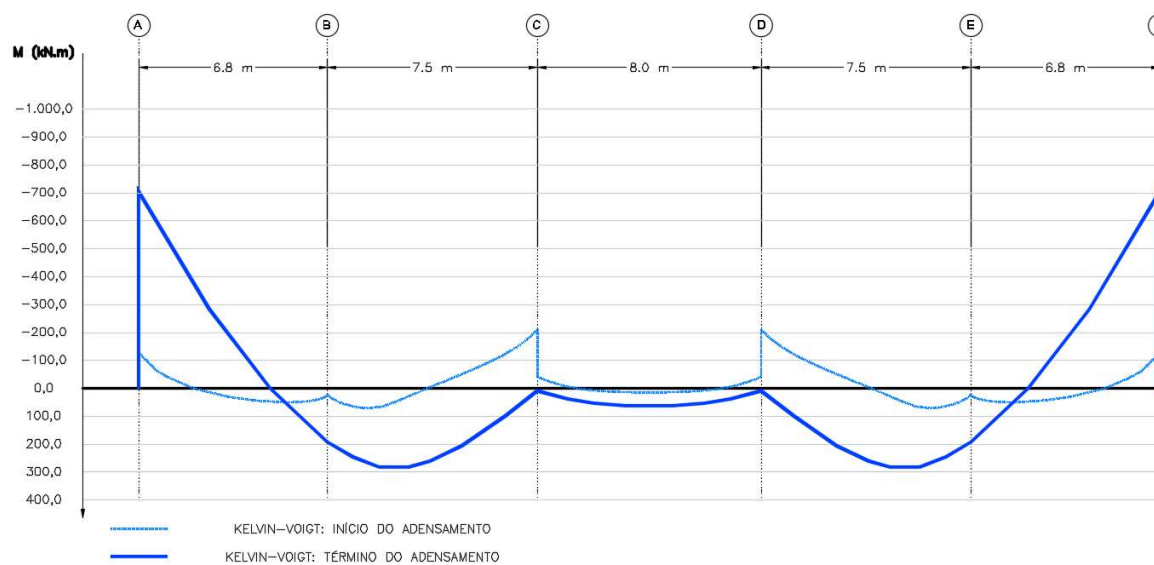
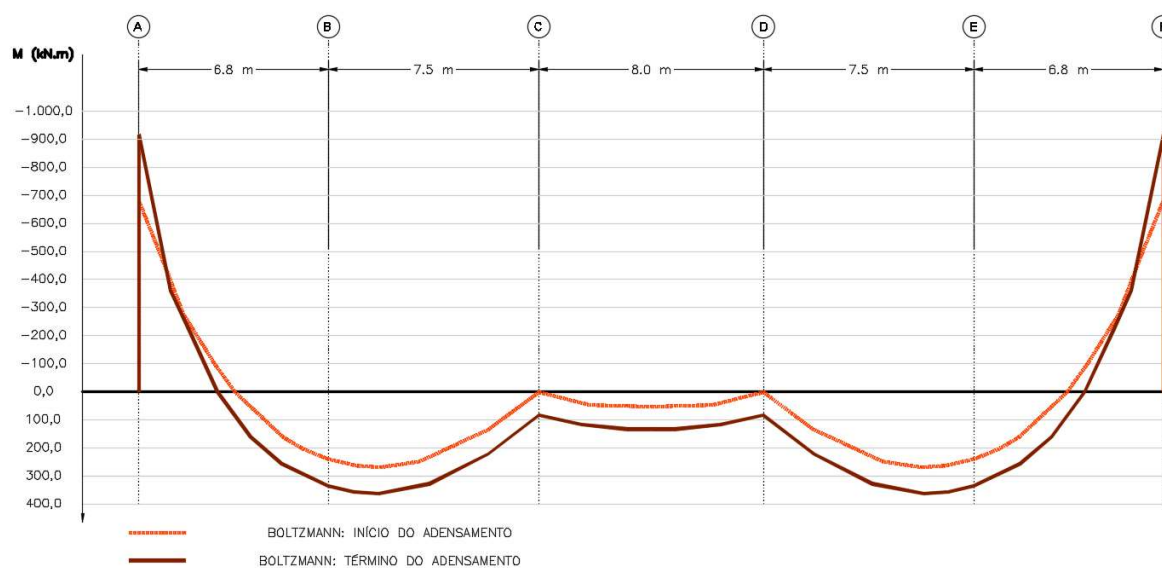


Figura 6.18 – Força cortante em V2 para os modelos reológicos avaliados.



(a) Modelo de Kelvin-Voigt.



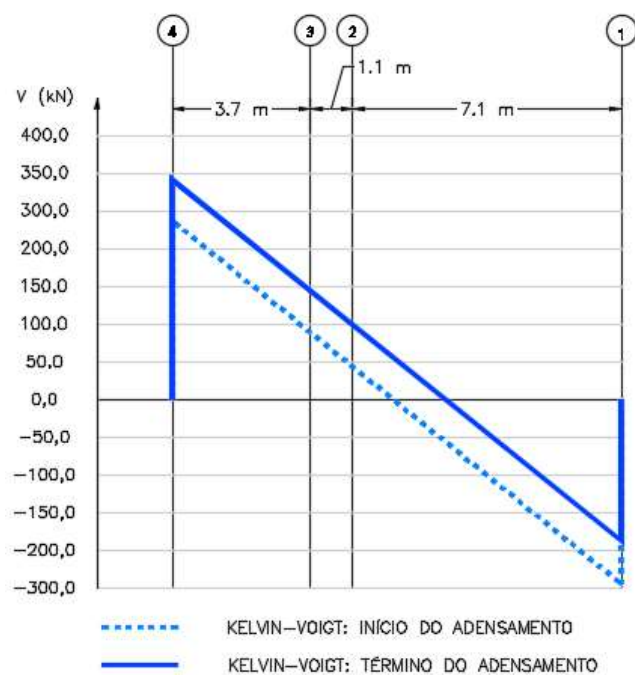
(b) Modelo de Boltzmann.

Figura 6.19 – Momento fletor em V2 para os modelos reológicos avaliados.

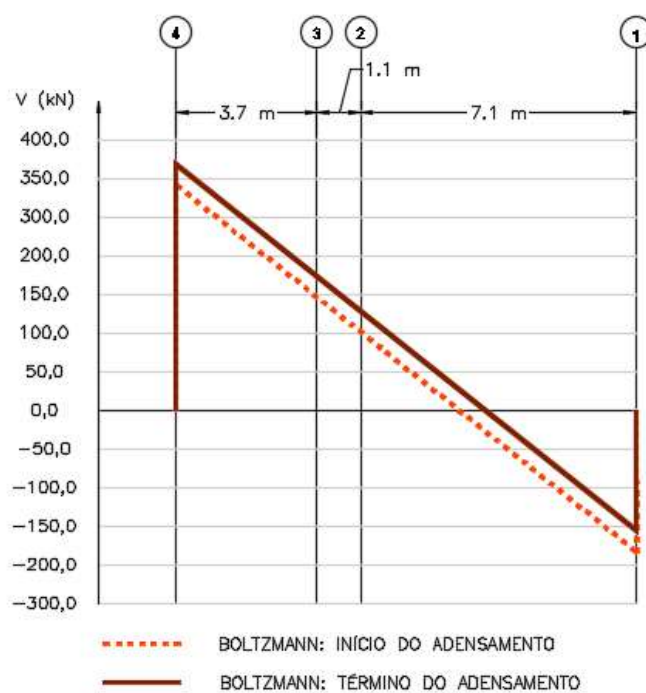
Durante o processo de adensamento, a Viga V2 sofre acréscimo dos esforços internos, segundo os modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann. Nota-se, ainda, que os apoios iniciais dos eixos C e D, proporcionados pelas vigas V5 e V6, tornam-se praticamente inefetivos durante o processo de adensamento, provocando efeito análogo ao aumento do vão da viga.

### 6.8.3 VIGA V3

As forças cortantes e os momentos fletores que atuam sobre a Viga V3 são apresentados, respectivamente, na Figura 6.20 e Figura 6.21.

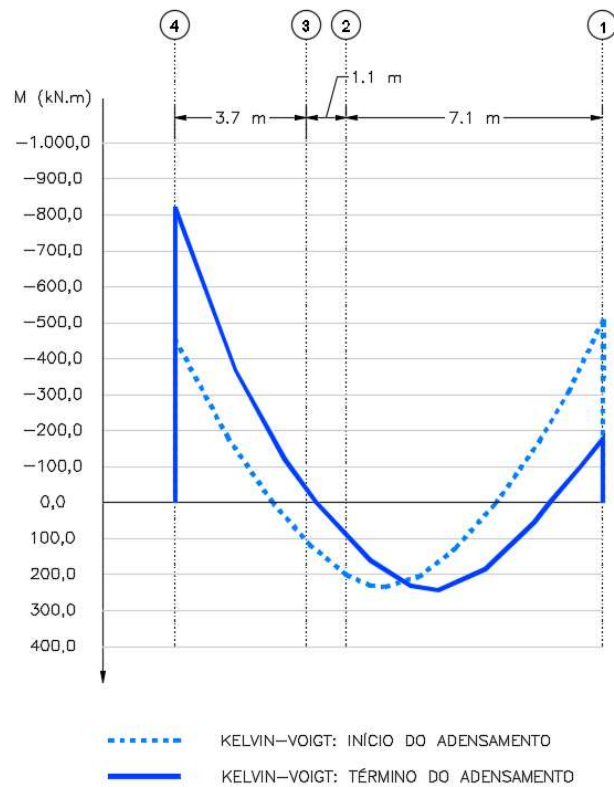


(a) Modelo de Kelvin-Voigt.

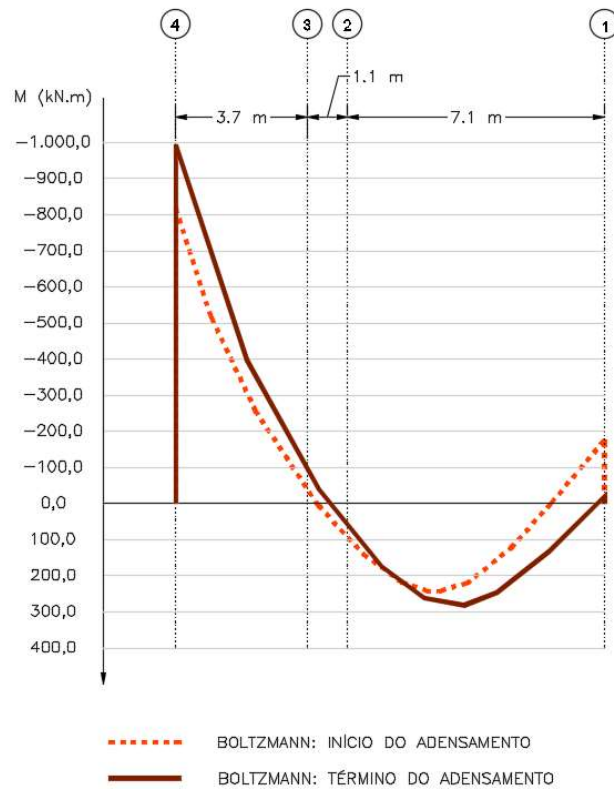


(b) Modelo de Boltzmann.

Figura 6.20 – Força cortante em V3 para os modelos reológicos avaliados.



(a) Modelo de Kelvin-Voigt.



(b) Modelo de Boltzmann.

Figura 6.21 – Momento fletor em V3 para os modelos reológicos avaliados.

A Viga V3 sofre acréscimo dos esforços internos, segundo os modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann. Analogamente ao que ocorre com relação à Viga V2 e ao Pilar P7, a transferência dos esforços solicitantes, no modelo de Kelvin-Voigt, supera a verificada no modelo de Boltzmann durante o adensamento. Essa característica revela que, no processo de adensamento, o modelo de Kelvin-Voigt, proporciona menor rigidez relativa (MEYERHOF, 1953).

# 7

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 CONCLUSÕES

As formulações em Método dos Elementos de Contorno foram deduzidas por meio das teorias da viscoelasticidade de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener para representarem os comportamentos dos solos. Os tratamentos dos materiais sob os fenômenos de fluência e relaxação também foram abordados, visando ao estabelecimento de correlações entre os modelos viscoelásticos, nessas condições. Os principais parâmetros que permitem as correlações entre eles são: os tempos de retardo ou de relaxação, deformações inicial e final ou tensões inicial e final.

Entre as contribuições originais e relevantes deste trabalho, destaca-se a extensão da análise da ISE para análises no tempo, visando garantir a segurança e a funcionalidade das estruturas ao longo de toda a sua vida útil, possibilitando análises de estruturas esbeltas, sensíveis às alterações geométricas. Estudos similares não foram identificados em publicações anteriores.

Um procedimento racional para o estudo da ISE sob adensamento do solo foi proposto por meio das teorias de viscoelasticidade de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener. O algoritmo iterativo de Chamecki (1956) foi estendido para análises no tempo, utilizando-se como princípio o acoplamento iterativo do MEF com o MEC. Essa alternativa é bastante simples e efetiva e garante o equilíbrio e as condições de compatibilidade dos domínios. A separação das diferentes partes do problema possibilita que os sistemas de equações sejam melhor condicionados.

A metodologia foi aplicada em um estudo de caso que possibilitou comparar as respostas fornecidas por meio das teorias de Kelvin-Voigt e Boltzmann. São estas as principais conclusões:

- a) dada a incapacidade de reprodução das deformações imediatas do solo por meio do modelo de Kelvin-Voigt, o recalque total fornecido a partir desse modelo é inferior ao recalque total encontrado por meio do modelo de Boltzmann;
- b) em razão da maior flexibilidade dos solos no modelo de Boltzmann, a superestrutura tende a apresentar maior rigidez relativa frente ao terreno, se comparada à superestrutura em solo calibrado adotando-se o modelo de Kelvin-Voigt. Com isso, os deslocamentos da superestrutura tendem a se apresentarem menos díspares, se obtidos conforme o modelo de Boltzmann, quando comparados aos obtidos em conformidade com o modelo de Kelvin-Voigt;
- c) como o modelo de Kelvin-Voigt parte da condição de apoios indeslocáveis, com rigidez infinita, o adensamento causa perda substancial de rigidez no solo e na fundação, provocando redistribuição significativa dos esforços solicitantes, o que pode fugir da realidade;
- d) no modelo de Boltzmann, apesar de a parcela de recalque no tempo ser significativa em relação à parcela de recalque imediato, a maior transferência de cargas ocorre durante o recalque imediato. A transferência de cargas durante o processo de adensamento, porém, não deve ser desprezada;
- e) mesmo para recalques supostos uniformes nos maciços de solos, constatou-se a possibilidade do desenvolvimento de recalques diferenciais na superestrutura, o que pode justificar as recomendações de Burland *et al.* (1977) acerca do controle indireto do recalque diferencial por meio do recalque total; e
- f) os esforços solicitantes ao final do processo de adensamento, em ambos os modelos, mostraram-se da mesma ordem de grandeza, embora o modelo de Boltzmann tenha apresentado valores maiores do que os obtidos pelo modelo de Kelvin-Voigt.

Com a pesquisa desenvolvida, calibraram-se os modelos reológicos de Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener para estudos sobre o adensamento do solo por meio da Teoria do

Adensamento de Terzaghi (LANES *et al.*, 2023). Esses três modelos podem ser utilizados para análises dos deslocamentos verticais do solo ao longo do tempo; contudo, os modelos de Boltzmann e Zener mostraram-se mais adequados, por considerarem o comportamento verdadeiro dos solos, com parcelas do recalque imediato e no tempo.

Outra contribuição original e supostamente relevante deste trabalho diz respeito à implementação de rotinas computacionais desenvolvidas por meio de *scripts* a partir do Matlab<sup>®</sup>. Foram desenvolvidas rotinas em MEF, para análises não lineares geométricas de estruturas, e, em MEC, para análises de sólidos tridimensionais viscoelásticos de domínio finito ou semi-infinito. Os resultados fornecidos por essas rotinas revelaram baixo tempo de processamento e respostas com boa precisão para os estudos realizados registrados tese. A rotina desenvolvida possibilita, ainda, a construção de gráficos interativos e análises de respostas parciais após o processamento dos dados, além da possibilidade de reutilização do código em futuros projetos de pesquisas sobre o tema.

O procedimento proposto neste trabalho ainda permite estender a sua aplicação a outros casos práticos, como, por exemplo: em estruturas históricas, sujeitas a deformações no tempo, em decorrência de estágios distintos de carregamentos ocasionados por construções vizinhas.

Nesse contexto, conclui-se que todos os objetivos da pesquisa foram satisfatoriamente alcançados. Como resultado adicional, espera-se que este trabalho contribua para avanços em revisões normativas direcionadas às análises da ISE, e para novas pesquisas relacionadas à ISE e a métodos numéricos.

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Estruturas construídas sobre argila mole exigem atenção especial com relação ao seu processo de adensamento, não apenas para fundações rasas, conforme abordado na pesquisa aqui relatada, mas também para fundações profundas. Quando estacas atravessam camadas de argila mole, em adensamento, é possível que o solo recalque mais do que as estacas, o que configura atrito negativo. Esse mecanismo se desenvolve ao longo do tempo, em decorrência do adensamento. Os estudos apresentados neste trabalho podem contribuir para pesquisas relacionadas a esse tema.

Outro tema que pode ser explorado com relação às deformações lentas diz respeito à fluência em pilares esbeltos de concreto. A fluência nas estruturas resulta em maior flexibilidade do sistema ao longo do tempo, causando redistribuição dos esforços. Esse

fenômeno pode ser avaliado por meio da ISE, considerando-se a não linearidade geométrica e o comportamento viscoelástico dos solos, tendo-se como referência os resultados apresentados neste trabalho.

Alternativamente, abordagens viscoelásticas sobre o solo podem ser discutidas por meio da Teoria da Porosidade e confrontada com a Teoria do Adensamento, conforme apresentado nesta pesquisa. Há, por exemplo, a possibilidade de abordagens sobre o solo envolvendo outros modelos reológicos como, por exemplo, os visco-elasto-plásticos.

Em relação ao MEC, a dependência em relação ao ponto fonte, o mal condicionamento das matrizes e a sensibilidade com relação às singularidades são elementos que dificultam suas aplicações com mais amplitude. Recomendam-se estudos que possam contribuir para o estabelecimento e a adoção de estratégias apropriadas às escolhas de malhas confiáveis, objetivando-se a utilização simples e efetiva do método (SOUZA e CODA, 2005 e LEITE *et al.*, 2021).

No âmbito do MEF, pode-se explorar o elemento infinito (BETTES, 1977), também conhecido por Método do Elemento Infinito (MEI), bem como os métodos sem malha. Esses procedimentos são capazes de simular sistemas que se estendem indefinidamente, podendo fornecer bons resultados. Adicionalmente, podem-se testar modelos numéricos desenvolvidos por meio de programas comerciais (como o Abaqus<sup>©</sup> e o Ansys<sup>©</sup>) ou acadêmicos (como o OpenSees – *The Open System for Earthquake Engineering Simulation* –, da Universidade de Berkeley), para se confrontarem resultados obtidos por meio do MEC.

Finalmente, recomendam-se investigações de campo e monitoramentos de obras existentes sujeitas a recalques de fundação, bem como ensaios de laboratório que possibilitem correlacionar parâmetros geotécnicos com modelos reológicos para análises da ISE.

## REFERÊNCIAS

ABOELELA, A. E.; EBID, A. M.; FAYED, A. L. Estimating the subgrade reaction at deep braced excavation bed in dry granular soil using genetic programming (GP). *Results in Engineering*, v. 13, p. 100328, mar. 2022.

AGUIAR, V. N.; ANDRADE, M. do E. S.; MARTINS, I. S. M.; RÉMY, J. P. P.; MARIA, P. E. L. S. Compressibility and consolidation properties of Santos soft clay near Barnabé Island. *Soils and Rocks*, v. 44, n. 4, e2021074821, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.28927/SR.2021.074821>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

AI, Z. Y.; CHENG, Y. C.; CAO, G. J. A quasistatic analysis of a plate on consolidating layered soils by analytical layer-element/finite element method coupling. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 38, n. 13, p. 1362-1380, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.2261>>. Acesso em: 03 out. 2023.

AI, Z. Y.; CHU, Z. H.; CHENG, Y. C. Time-dependent interaction between superstructure, raft and layered cross-anisotropic viscoelastic saturated soils. *Applied Mathematical Modelling*, v. 89, parte1, p. 333-347, jan. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.018>>. Acesso em: 03 out. 2023.

AI, Z. Y.; JIANG, Y. H.; ZHAO, Y. Z.; MU, J. J. Time-dependent performance of ribbed plates on multi-layered fractional viscoelastic cross-anisotropic saturated soils. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 137, p. 1-15, abr. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.01.006>>. Acesso em: 03 out. 2023.

ALEXANDRE, L. J.; MANSUR, W. J.; LOPES, F. D. R.; SANTA MARIA, P. E. L. D. Soil-structure interaction with time-dependent behaviour of both concrete and soil. *Latin American Journal of Solids and Structures*, São Paulo, Universidade de São Paulo, v. 19, n. 5, p.1-21, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78257081>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

ALMEIDA, V. S. *Análise da interação solo não-homogêneo/Estrutura via acoplamento MEC/MEF*. Orientador: João Batista de Paiva. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003a.

ALMEIDA, F. P. A. *Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas*. Orientador: Humberto Breves Coda. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003b.

ALMEIDA, M. S. S.; FUTAI, M. M.; LACERDA, W. A.; MARQUES, M. E. S. Laboratory behaviour of Rio de Janeiro soft clays. Part 1: index and compression properties. *Soils & Rocks*, São Paulo, v. 31, n. 2, p. 69-75, 2008.

ALVES FILHO, A. *Elementos Finitos - A base da tecnologia CAE - Análise não linear*. São Paulo: Érica / Saraiva, 2012.

ALIPOUR, M. M.; RAJABI, I. R. A. J. Viscoelastic Substrates Effects on the Elimination or Reduction of the Sandwich Structures Oscillations Based on the Kelvin-Voigt Model. *Latin American Journal of Solids and Structures*, São Paulo, Universidade de São Paulo, v. 14, p. 2463-2496, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78254096>>. Acesso em: 12 fev. 2021.

AN, R.; XIE, K. H.; DENG, Y. B.; WANG, K. Approximate solution for one-dimensional consolidation of structured soils under time-dependent loading. *Rock and Soil Mechanics*, v. 33, n. 10, p. 3194-3200, 2012.

AQUINO, R. D. *Análise não-linear geométrica de edifícios 3D considerando a deformabilidade do solo*. 2008. Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia Civil) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6122: Projeto e execução de fundações*. Rio de Janeiro, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6484: Solo - Sondagens de simples reconhecimento com SPT - Método de ensaio*. Rio de Janeiro, 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6489: Solo - Prova de Carga Estática Em Fundação Direta*. Rio de Janeiro, 2019.

AZHIR, P.; MARNANI, J. A.; PANJI, M.; ROHANIMANESH, M. S. A Coupled Finite-Boundary Element Method for Efficient Dynamic Structure-Soil-Structure Interaction Modeling. *Mathematical and Computational Applications*, v. 29, n. 2, p. 24, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/mca29020024>>. Acesso em: 15 abr. 2024.

BARBIRATO, J. C. C. *Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin*. 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

BARBIRATO, J. C. C. *Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento*. Orientador: Wilson Sérgio Venturini. 1999. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BARDEN, L. Primary and Secondary Consolidation of Clay and Peat. *Géotechnique*, v. 18, n. 1, p. 1-24, 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.1968.18.1.1>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

BARROSO, E. S. *Geração de malhas de alta ordem para análise isogeométrica utilizando elementos de Bézier racionais*. Orientador: Joaquim Bento Cavalcante Neto. 2022. Tese

(Doutorado em Ciência da Computação) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2022.

BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BECHO, J. S. *Formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico*. Orientador: Felício Bruzzi Barros. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.

BECHO, J. S. *Método dos elementos finitos posicional em análise viscoelástica: elementos de pórtico com cinemática de Reissner*. Orientador: Marcelo Grecco. 2020. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

BECKER, A. *The boundary element method in engineering: a complete course*. London: McGraw-Hill, 1992.

BELEGUNDU, A. D.; CHANDRUPATLA, R. T. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. 3. ed. New York: Cambridge University Press, 2019.

BERARDI, R.; LANCELLOTTA, R. Stiffness of granular Soils from field performance. *Géotechnique*, v. 41, n. 1, p. 149-157, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.1991.41.1.149>>. Acesso em: 19 maio 2021.

BETTES, P. Infinite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, v. 11, [s. n.], p. 53-64, 1977.

BEZIH, K.; CHATEAUNEUF, A.; DEMAGH, R. Effect of Long-Term Soil Deformations on RC Structures Including Soil-Structure Interaction. *Civil Engineering Journal*, Mazandaran, Irã, v. 6, n. 12, p. 2290-2311, 2020. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.28991/cej-2020-03091618>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, p. 155-164, 1941. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1712886>>. Acesso em: 19 maio 2021.

BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. *Dynamics of Polymeric Liquids*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

BOOKER, J. R.; CARTER, J. P.; SMALL, J. C.; BROWN, P. T.; POULOS, H. G. Some recent applications of numerical methods to geotechnical analysis. *Computers & Structures*, v. 31, n. 1, p. 81-92, 1989. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90170-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90170-3)>. Acesso em: 03 out. 2022.

BORGES, R. V. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Elasticidade Não-Linear*. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2013.

BREBBIA, C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMÍNGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. 2. ed. Southampton: WIT Press, 1992.

BREBBIA, C. A.; GEORGIU, P. Combination of boundary and finite elements in elastostatics. *Applied Mathematical Modelling*, v. 3, n. 2, p. 212-220, 1979.

BREBBIA, C.; TELLES, J.; WROBEL, L. *Boundary element technique*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BRESSANI, L. A.; NÚÑEZ W. P.; SCHMITT, L. A.; RIZZON, M. M.; VICTORINO, D. R.; HIRSCH, F.; BRITO, L. A. T.; VITORELLO, T. Caracterização de depósitos de argilas moles na região metropolitana de Porto Alegre e estudo preliminar de melhorias desses solos por meio da adição de cal. *Revista ANTT*, Agência Nacional de Transportes Terrestres, v. 3, n. 2, p. 112-123, 2011.

BURLAND, J. B.; BROMS, B. B.; MELLO, V. F. B. de Behavior of foundations and structures. INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING, 9., 1977, Tóquio. *Anais [...]*. Tóquio: Japanese Society of Soil Mechanics and Foundations Engineering, jul. 1977. Seção 2.

BURLAND, J. B.; BURBIDGE, M. C. Settlement of foundations on sand and gravel. *Proceedings of the Institutions of Civil Engineers*, v. 78, n. 6, parte 1, p. 1325-1381, 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/iicep.1985.1058>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

CAICEDO, B.; ALONSO, E.; MENDONZA, C. C.; ALCOVERRO, J. The collapse of Space building. *Géotechnique*, v. 69, n. 3, p. 260-273, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/jgeot.17.P.265>>. Acesso em: 10 out. 2022.

CALDAS, R. *Análise numérica de pilares mistos aço-concreto*. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2004.

CASAGRANDE, A. The determination of the pre-consolidation load and its practical significance. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING, 1., 1936, Cambridge. *Annals [...]*. Cambridge: International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, v. 3, p. 60, 1936.

CAVALCANTI, C. S.; GUSMÃO, A. D.; SUKAR, S. F. Estudo da interação solo-estrutura em um edifício com patologias de fundações na região metropolitana do Recife. *Revista de Engenharia e Pesquisa Aplicada*, v. 2, n. 1, p. 13-20, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.25286/repa.v2i1.387>>. Acesso em: 08 fev. 2021.

CHAMECKI, S. Consideração da rigidez no cálculo de recalques de fundações. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE MECÂNICA DOS SOLOS E ENGENHARIA DE

FUNDAÇÕES, 1., 1956, Porto Alegre. *Anais [...]*. Porto Alegre: Ipsis Gráfica e Editora, v. 1, [s. n.], p. 35-80, 1956.

CHANG, B.; THOMAS, J.; RAYCHOWDHURY, P.; GAJAN, S.; KUTTER, B. H. *Soil-foundation-structure interaction: shallow foundations*. San Diego, California: SSRP 07/24, University of California, 2007.

CIGNA F.; TAPETE, D. Urban growth and land subsidence: Multi-decadal investigation using human settlement data and satellite InSAR in Morelia, Mexico. *Science of the Total Environment*, v. 811, n. 10, mar. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2021.152211>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

CINTRA, J. C. A.; AOKI, N. *Fundações por estacas: projeto geotécnico*. São Paulo: Oficina de Textos, 2011.

CODA, H. B.; VENTURINI, W. S.; KOMATSU, J. S.; SILVA, N. A. BEM/FEM coupling for the continuum media-frame structure interaction. *International Journal of Boundary Elements Methods Communications*, v. 8, n. 2, p. 73-78, 1997.

CODA, H. B.; MESQUITA, A. D. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells. *Applied Mathematical Modelling*, v. 31, n. 6, p. 1171-1185, jun. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.04.003>>. Acesso em: 04 maio 2021.

COLARES, G. M. *Programa para análise da integração solo-estrutura no projeto de edifícios*. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

COSENZA, P.; KOROŠAK, D. Secondary consolidation of clay as an anomalous diffusion process. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 38, n. 12, p. 1231-1246, ago. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.2256>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

CREMER, C.; PECKER, A. A.; DAVENE, L. Cyclic macro-element of soil structure interaction: material and geometrical nonlinearities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 25, n. 13, p. 1257-1284, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.175>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 1997. v. 1: Advanced Topics.

CRISFIELD, M. A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 2000. v. 1: Essentials.

DAVIES, T. G.; BANERJEE, P. K. The displacement field due to a point load at the interface of a two layer elastic half-space. *Géotechnique*, v. 28, n. 1, p. 43-56, 1978. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.1978.28.1.43>>. Acesso em: 09 ago. 2022.

DHADSE, G. D.; RAMTEKKAR, G. D.; BHATT, G. Finite Element Modeling of Soil Structure Interaction System with Interface: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 28, p. 3415-3432, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11831-020-09505-2>>. Acesso em: 13 jan. 2023.

DHADSE, G.; RAMTEKKAR, G.; BHATT, G. Influence due to interface in finite element modeling of soil-structure interaction system: a study considering modified interface element. *Research on Engineering Structures and Materials*, v. 8, n. 1, p. 127-154, 2022.

DIAS, M. S. *Análise do comportamento de edifícios apoiados em fundação direta no bairro da Ponta da Praia na cidade de Santos*. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/D.3.2010.tde-20082010-160223>>. Acesso em: 09 ago. 2022.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). *Eurocode 7: Geotechnical design - Part 1: General rules*. EN 1997-1, Brussels, 2004.

FATHIPOUR, H.; PAYAN, M.; SIAHMAZGI, A. S.; CHENARI, R. J.; SENETAKIS, K. Numerical study on the bearing capacity of strip footing resting on partially saturated soil subjected to combined vertical-horizontal-moment loading. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, v. 27, n. 3, p. 1317-1350, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/19648189.2022.2080769>>. Acesso em: 18 jul. 2023.

FENG, J.; MA, X.; LIU, X.; WANG, L.; WU, Z.; MEI, G. Analytical solution for one-dimensional consolidation of structured soft soils with continuous drainage boundary. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño de Ingeniería*, v. 40, n. 1, p. 1-14, 2024. Disponível em: <[https://www.scipedia.com/public/Feng\\_et\\_al\\_2024a](https://www.scipedia.com/public/Feng_et_al_2024a)>. Acesso em: 19 fev. 2024.

FERREIRA, S. R. M.; OLIVEIRA, J. T. R.; CADETE, A. N.; DE ASSIS ROCHA, F. M.; DE OLIVEIRA, M. S. Comportamento tensão-deformação-resistência de uma argila orgânica mole da região norte da cidade do Recife - PE, Brasil. *Research, Society and Development*, v. 11, n. 3, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.33448/rsd-v11i3.26123>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. New York: Dover Publications, 1989.

GALVÍN, P.; ROMERO, A. A 3D time domain numerical model based on half-space Green's function for soil-structure interaction analysis. *Computational Mechanics*, v. 53, p. 1073-1085, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00466-013-0949-1>>. Acesso em: 06 out. 2023.

GALVIS, A. F.; PRADA, D. M.; MOURA, L. S.; ZAVAGLIA, C.; FOSTER, J. M.; SOLLERO, P.; WROBEL, L. C. BESLE: Boundary element software for 3D linear elasticity. *Computer Physics Communications*, v. 265, n. 108009, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108009>>. Acesso em: 18 jul. 2023.

GARBELLINI, C.; LALOU, L. Soil-structure interaction of surface footings. *Computers and Geotechnics*, v. 134, p. 104103, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2021.104103>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

GIBSON, R. E.; LO, K. Y. A theory of consolidation for soils exhibiting secondary compression. *Norwegian Geotechnical Institute Publications*, Oslo, v. 41, p. 1-41, 1961.

GODINHO, L.; SOARES JR., D. Numerical simulation of soil-structure elastodynamic interaction using iterative-adaptive BEM-FEM coupled strategies. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 82, p. 141-161, set. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.06.011>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

GOURVENEC, S. M.; VULPE, C.; MURTHYT, T. G. A method for predicting the consolidated undrained bearing capacity of shallow foundations. *Géotechnique*, v. 64, n. 3, p. 215-225, mar. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.13.P.101>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

GUSMÃO FILHO, J. A. *Contribuição à prática de fundações: a experiência de Recife*. 1995. Tese (Professor Titular) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1995.

HALL, W.; OLIVETO, G. *Boundary element methods for soil-structure interaction*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

HOLANDA JÚNIOR, O. G. *Interação solo-estrutura para edifícios de concreto armado sobre fundações diretas*. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

HUANG, M.; LI, J. Consolidation of viscoelastic soil by vertical drains incorporating fractional-derivative model and time-dependent loading. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 43, n. 1, p. 239-256, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.2861>>. Acesso em: 12 jul. 2022.

HUANG, M.; CHANG, L.; ZHOU, S.; ZHOU, S.; KANG, J. One-Dimensional Consolidation of Viscoelastic Soils Incorporating Caputo-Fabrizio Fractional Derivative. *Applied Sciences*, v. 11, n. 3, p. 927, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app11030927>>. Acesso em: 12 jul. 2022.

HUANG, C.; QIAN, J. FEM-BEM modeling dynamic responses of saturated soil around a fluid-filled lined tunnel subjected to water hammer. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 176, p. 108311, jan. 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.108311>>. Acesso em: 18 mar. 2024.

JANBU, N.; BJERRUM, L.; KJAERNSLI, B. Veiledning ved Losning av Fundamenteringsoppgaver. *Norwegian Geotechnical Institute*, Oslo, n. 16, p. 30-32, 1956.

KHOSRAVIFARDSHIRAZI, A.; JOHARI, A.; JAVADI, A. A.; KHANJANPOUR, M. H.; KHOSRAVIFARDSHIRAZI, B.; AKRAMI, M. Role of Subgrade Reaction Modulus in Soil-

Foundation-Structure Interaction in Concrete Buildings. *Buildings*, v. 12, n. 5, p. 540, abr. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/buildings12050540>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

KACPRZAK, G.; ZBICIAK, A.; JÓSZEFIAK, K.; NOWAKE, P.; FRYDRYCH, M. One-Dimensional Computational Model of Gyttja Clay for Settlement Prediction. *Sustainability*, v. 15, n. 3, p. 1759, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/su15031759>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

LEITE, L. F. P.; MELO, R. S.; ROCHA, F. C. Analytical Expressions for the Singularities Treatment in the Three-dimensional Elastostatic Boundary Element Method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, v. 7, n. 2, p. 739-751, 2021. Disponível em: <[doi: 10.22055/jacm.2020.35017.2539](https://doi.org/10.22055/jacm.2020.35017.2539)>. Acesso em: 27 nov. 2023.

LANES, R. M.; GRECO, M.; ALMEIDA, V. S. Viscoelastic Soil-structure Interaction Procedure for Building on Footing Foundations Considering Consolidation Settlements. *Buildings*, v. 13, n. 3, p. 813, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/buildings13030813>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

LANES, R. M.; GRECO, M. Simulação da interação solo-estrutura considerando-se a influência de sapatas isoladas e de um conjunto de sapatas. In: ENMC - ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 25., 2022, Belo Horizonte. *Anais [...]* Belo Horizonte: Universidade Federal do Minas Gerais, 2022. p. 1-10.

LEONEL, E. D. *Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga*. Orientador: Wilson Sérgio Venturini. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LIN, C. C.; LAWTON, E. C.; CALIENDO, J. A.; ANDERSON, L. R. An iterative finite element-boundary element algorithm. *Computers & Structures*, v. 59, n. 5, p. 899-909, jun. 1996. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00285-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00285-5)>. Acesso em: 14 abr. 2021.

LOUKIDIS, D.; TAMIOLAKIS, G.-P. Spatial distribution of Winkler spring stiffness for rectangular mat foundation analysis. *Engineering Structures*, v. 153, p. 443-459, dez. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.10.001>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

MAINARDI, F.; SPADA, G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal Special Topics*, v. 193, p. 133-160, abr. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1>>. Acesso em: 18 jul. 2023.

MAFFEI, C. E. M.; GONÇALVES, H. H. S.; PIMENTA, P. M. Renivelamento do Edifício Núncio Malzone: Projeto e Aspectos Estruturais. In: WORKSHOP PASSADO PRESENTE E FUTURO DOS EDIFÍCIOS DA ORLA MARÍTIMA DE SANTOS, BRASI, 2003. Santos, SP. *Anais [...]*. Santos: Associação Brasileira de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica - Núcleo Regional de São Paulo - ABMS-NRSP, 2003. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/directbitstream/9614f1ef-355e-4d56-87b8-ee1932a88b72/goncalves-2003-renivelamento.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2023.

MASSAD, F. *Solos marinhos da Baixada Santista: características e propriedades geotécnicas*. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.

MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. *Computational viscoelasticity*. Heidelberg: Springer, 2012. (Springer Briefs in Applied Sciences and Technology - Computational Mechanics)

MELAN, E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innem beanspruchten Halbscheibe. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*, v. 12, n. 6, p. 343-346, 1932. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/zamm.19320120603>>. Acesso em: 22 mar. 2021.

MENDONÇA, A. V. *Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras constantes: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno*. Orientador: João Batista de Paiva. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MESQUITA, A. D. *Novas metodologias e formulações para tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo*. Orientador: Humberto Breves Coda. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MEYERHOF, G. G. The Ultimate bearing capacity of foundations. *Géotechnique*, v. 2, n. 4, p. 301-332, 1951. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.1951.2.4.301>>. Acesso em: 22 mar. 2021.

MEYERHOF, G. G. Some recent foundation research and its application to design. *Structural Engineering*, v. 31, n. 6, p. 151-167, 1953.

MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, v. 7, n. 5, p. 195-202, 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1745385>>. Acesso em: 22 mar. 2021.

MOAYED, R. Z.; NAEINI, S. A. Evaluation of modulus of subgrade reaction (Ks) in gravelly soils based on SPT results. *IAEG 2006 Paper Number 505*, The Geological Society of London, 2006.

MOHAMMAD, D. S.; HUAT, B. B. K.; JAAFAR, M. S.; ALKARNI, A. review of static soil-framed structure interaction. *Interaction and Multiscale Mechanics*, v. 6, n. 1, p. 51-81, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.12989/imm.2013.6.1.051>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

MORAES, M. da C. *Estruturas de Fundações*. São Paulo: McGraw-Hill, 1976.

MOURA, M. F. S. F. de; MORAIS, A. B. de; MAGALHÃES, A. G. de *Materiais Compósitos - Materiais, Fabrico e Comportamento Mecânico*. 2. ed. Porto: Publindústria Edições Técnicas, 2011.

NACCACHE, E.; ALMEIDA, V. S. Analysis of a framed structure considering the ssi and subjected to dynamic wind load. *IBERIAN-LATIN AMERICAN CONGRESS ON*

COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 38., 2017, Florianópolis, SC. *Anais [...]*. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2017.

NAEINI, S.A.; MOYAED, Z. R.; ALLAHYARI, F. Subgrade reaction modulus (Ks) of clayey soils based on field tests. *Journal of Engineering Geology*, Korean Society of Engineering Geology, v. 8, n. 1, p. 2021-2046, Spring 2014.

NAKAGUMA, R. K. *Three dimensional elastostatics using the boundary element method*. 1979. Thesis (PhD) - University of Southampton, Southampton, UK, 1979.

NARVÁEZ, A.; USECHE, J. Addressing arbitrary body forces in 2D elasticity coupling the Radial Basis Integration Method with boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 163, p. 517-530, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.04.003>>. Acesso em: 11 jul. 2024.

NAVARRO, R. Modelos viscoelásticos aplicáveis a materiais reais: uma revisão. *Revista Eletrônica de Materiais e Processos*, Campina Grande, Universidade Federal de Campina Grande, v. 12, n. 1, p. 1-20, 2017.

NAVFAC, DM-7.2. *Foundation and Earth Structures - Design Manual 7.2*. Alexandria, E.U.A.: Department of the Navy, Naval Facilities Engineering Command, 1982.

OLEK, B. S. Experimental evidence about misconception of Terzaghi's 1-D consolidation theory in terms of degree of consolidation. In: *E3S Web of Conferences*, v. 106. EDP Sciences, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910601013>>. Acesso em: 18 jun. 2023.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. A BEM formulation applied in the mechanical material modelling of viscoelastic cracked structures. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, Teerã, Islamic Azad University, v. 9, p. 1-12, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40091-016-0144-7>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

OLIVEIRA, H. L.; CHATEAUNEUF, A.; LEONEL, E. D. Probabilistic mechanical modelling of concrete creep based on the boundary element method. *Advances in Structural Engineering*, v. 22, n. 2, p. 337-348, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1369433218788088>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

ORGULHO DE SER PAULISTA [*Blogspot*]. São Paulo, 27 ago. 2017. Disponível em: <<https://orgulhodeserpaulista.blogspot.com/2017/08/canais-de-santos-historia-de-um.html>>. Acesso em: 22 jan. 2022.

ORTIGÃO, J. A. R. *Introdução à Mecânica dos Solos dos Estados Críticos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, LTC Editores, 2007.

PALMEIRA, E. M.; FAHEL, A. R. S.; ORTIGÃO, J. A. R. Aterros Reforçados com Geossintéticos sobre Solos Moles. In: ENCONTRO SOBRE PROPRIEDADES DE ARGILAS BRASILEIRAS, 2001. *Anais [...]*. Rio de Janeiro, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001. p. 206-220. Disponível em:

<[https://www.researchgate.net/publication/356175348\\_Aterros\\_Reforcados\\_com\\_Geossinteticos\\_Sobre\\_Solos\\_Moles](https://www.researchgate.net/publication/356175348_Aterros_Reforcados_com_Geossinteticos_Sobre_Solos_Moles)>. Acesso em 21 jan. 2023.

PANTELIDIS, L. The equivalent modulus of elasticity of layered soil mediums for designing shallow foundations with the Winkler spring hypothesis: A critical review. *Engineering Structures*, v. 201, p. 109452, dez. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109452>>. Acesso em: 18 jul. 2023.

PAVAN, R. C.; COSTELLA, M. F.; GUARNIERI, G. Interação solo-estrutura para sistemas estruturais reticulados sobre fundações rasas. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 7, n. 2, p. 260-285, abr. 2014. Disponível em: <doi:10.1590/S1983-41952014000200005>. Acesso em: 15 ago. 2022.

PET CIVIL UFJF [Blog]. As construções tortas da Cidade do México. PET CIVIL UFJF, Juiz de Fora, Programa de Educação Tutorial da Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2021. Disponível em: <<https://petcivilufjf.wordpress.com/2011/08/25/as-construcoes-tortas-da-cidade-do-mexico/>>. Acesso em: 10 jan. 2022.

PERLOFF, W. H. Pressure distribution and settlement. In: WINTERKRON, H. F.; FANG, H. Y. (Ed.). *Foundation Engineering Handbook*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1975. p. 148-196.

PIMENTEL, G. T.; LANES, R. M.; GRECO, M. Implementação computacional do método dos elementos de contorno em MATLAB para problemas sólidos tridimensionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 24., 2021, e ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 12., 2021. *Anais [...]*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2021. p. 1-10.

PINTO, C. de S. *Curso Básico de Mecânica dos Solos*. 3. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2016.

PINTO, C. de S. Propriedades dos solos. In: FALCONI, F.; CORRÊA, C. N.; ORLANDO, C.; SCHIMDT, C.; ANTUNES, W. R.; ALBUQUERQUE, P. J.; HACHICH, W.; NIYAMA, S. (Org.). *Fundações: Teoria e Prática*. 3. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2019. p. 55-120.

PORTO, T. B.; PEREIRA, A. B.; RIBEIRO, C. M.; BORTONE, T. P.; OLIVEIRA NETO, A. R. Study of the interaction of concrete walls with the foundation structure. *REM - International Engineering Journal*, v. 74, n. 2, p. 145-153, abr.-jun. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/0370-44672020740088>>. Acesso em: 08 ago. 2022.

POULOS, H. G. Settlement analysis of structural foundation system. In: SOUTH EAST ASIAN CONFERENCE ON SOIL ENGINEERING, 4., 1975, Kuala Lumpur, Malásia. *Anais [...]*. Kuala Lumpur, Malásia, v. 4, p. 52-52, 1975.

POWRIE, W. *Soil Mechanics: Concepts and Applications*. London: Spon Press, 2018.

RABELO, J. *Formulação posicional não linear utilizando viscoelasticidade para análise de estruturas treliçadas*. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, 2015.

RAHGOOY, K.; BAHMANPOUR, A.; DERAKHSHANDI, M.; BAGHERZADEH-KHALKHALI, A. Distribution of elastoplastic modulus of subgrade reaction for analysis of raft foundations. *Geomechanics and Engineering*, v. 28, n. 1, p. 89-105, jan. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.12989/gae.2022.28.1.089>>. Acesso em: 21 jan. 2023.

RAMALHO, M. A. *Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico*. Orientador: Wilson Sérgio Venturini. 1990. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

REIS, J. H. C. *Interação solo-estrutura de grupo de edifícios com fundações superficiais em argila mole*. 2000. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

REIS, L. A. *Acoplamento MEC-MEF para análise de pórtico linear sobre base elástica*. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2014.932397>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

RIBEIRO, D. B.; ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. Uma técnica alternativa para analisar o problema da interação solo estratificado-fundação superestrutura via acoplamento MEC-MEF. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, Associação Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo, RS, v. 2, n. 2, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.5335/rsee.v2i2.291>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

RIBEIRO, D. B. *Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise de interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF*. Orientador: João Batista de Paiva. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

ROSA, L. M. P.; DANZIGER, B. R.; CARVALHO, E. M. L. Soil-structure interaction analysis considering concrete creep and shrinkage. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 11, n. 3, p. 564-585, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S1983-41952018000300008>>. Acesso em: 26 jan. 2022.

SANDRONI, S. S.; BRUGGER, P. J.; ALMEIDA, M. S. S.; LACERDA, W. A. Geotechnical properties of Sergipe clay. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON RECENT DEVELOPMENTS IN SOIL AND PAVEMENT MECHANICS, 6., 1997, Rio de Janeiro. *Anais [...]*. Rio de Janeiro: 1997.

SANTOS, A. A.; BRIDI, L.; PIRES, P. Caracterização da subsuperfície na transição entre formação barreiras e depósitos quaternários em Vitória - ES. *Revista de Ciência, Tecnologia e Inovação*, Unifeso - Centro Universitário da Serra dos Órgãos, Teresópolis, RJ, v. 3, n. 4, p. 79-93, jul. 2018.

SCHMERTMANN, J. H. Static Cone to Compute Static Settlement Over Sand. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, American Society of Civil Engineers, Reston, VA, v. 96, n. 3, p. 1011-1043, 1970. Disponível em: <<https://doi.org/10.1061/JSFEAQ.0001418>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

SCHMERTMANN, J. H. *Guidelines for Cone Penetration Test: Performance and Design*. Washington, DC: U.S. Department of Transportation. Federal Highway Administration, Office of Research and Development, 1978. Disponível em: Disponível em: <[https://rosap.ntl.bts.gov/view/dot/958/dot\\_958\\_DS1.pdf](https://rosap.ntl.bts.gov/view/dot/958/dot_958_DS1.pdf)>. Acesso em: 08 ago. 2022.

SHI, X.; CHEN, C.; DAI, K.; DENG, J.; WEN, N.; YIN, Y.; DONG, X. Monitoring and predicting the subsidence of Dalian Jinzhou Bay International Airport, China by integrating inSAR observation and Terzaghi consolidation theory. *Remote Sensing*, Basileia, Suíça, v. 14, n. 10, p. 2332, maio 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/rs14102332>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

SILVA, W. Q.; CODA, H. B. Numerical combination for nonlinear analysis of structures coupled to layered soils. *Latin American Journal of Solids and Structures*, São Paulo, Universidade de São Paulo, v. 9, n. 2, p. 1-23, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1679-78252012000200004>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

SINGH, R. B.; SHARMA, K. G.; VARADARAJAN, A. Elasto-plastic analysis of tunnel excavation in layered rock medium by coupled FEBEM. *Numerical Methods in Geomechanics*, Balkema, INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN GEOMECHANICS, 6., 11-15 abr. 1988, Innsbruck, Áustria. *Anais [...]*. Innsbruck, Áustria, 11-15 abr. 1988. v. 1-3, p. 941-950.

SIQUEIRA, D. C.; ALMEIDA, C. A. A.; DA SILVA, R. G. L.; MORANDINI, T. L. C.; VIANA, H. F.; COSTA, R. S.; LAVALL, A. C. C. Influence of soil-structure interaction modeling on the behavior of multi-story plane steel frames with shallow footing foundations. *Research, Society and Development*, v. 12, n. 1, p. e9512139320-e9512139320, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.33448/rsd-v12i1.39320>>. Acesso em: 06 mar. 2023.

SKEMPTON, A. W. The Bearing Capacity of Clays. In: \_\_\_\_\_. *Selected papers on soil mechanics*. London: Thomas Telford Limited, 1984. p. 50-59. (Texto original apresentado, em 1951, pelo autor, no *Building Research Congress*, realizado em Londres, e publicado nas páginas 180 a 189 dos anais desse evento.)

SKEMPTON, A. W.; MACDONALD, D. H. The allowable settlement of buildings. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, v. 5, n. 6, p. 727-768, 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/ipeds.1956.12202>>. Acesso em: 03 dez. 2021.

SOARES JR., D. An optimised FEM-BEM time-domain iterative coupling algorithm for dynamic analyses. *Computers & Structures*, v. 86, n. 19-20, p. 1839-1844, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.04.001>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

SOARES. L. Por que a Torre de Pisa nunca caiu. *Olhar Digital [Blog]*, 07 jan. 2024. Disponível em: <<https://olhardigital.com.br/2024/01/07/ciencia-e-espaco/por-que-a-torre-de-pisa-nunca-caiu/>>. Acesso em: 08 jan. 2024.

SOARES JR., D.; VON ESTORFF, O.; MANSUR, W. J. Efficient non-linear solid-fluid interaction analysis by an iterative BEM/FEM coupling. *International Journal for Numerical*

*Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, v. 64, n. 11, p. 1416-1431, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1408>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

SOUZA, V. J. B.; CODA, H. B. Algoritmos de Integração Eficientes para o Método dos Elementos de Contorno Tridimensional. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, v. 7, n. 26, p. 97-130, 2005.

SOUZA, R. A. de; REIS, J. H. C. Interação Solo-Estrutura para Edifícios Sobre Fundações Rasas. *Acta Scientiarum Technology*, Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, v. 30, n. 2, p. 161-171, 2008.

STEINBRENNER, W. Tafeln zur Setzungsberechnung. *Die StraBe*, Organ des Generalinspektors für das deutsche Straßenwesen, Volk und Reich Verlag Berlin, Berlin, v. 1, p. 121-124, 1934.

SWOBODA, G.; MERTZ, W.; BEER, G. Rheological analysis of tunnel excavation by means of coupled finite element (FEM)-boundary element (BEM) analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, v. 11, p. 115-129, 1987.

TAMAYO, J. L. P.; AWRUCH, A. M. On the validation of a numerical model for the analysis of soil-structure interaction problems. *Latin American Journal of Solids and Structures*, São Paulo, Universidade de São Paulo, v. 13, n. 8, p. 1545-1575, ago. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78252450>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

TAYLOR, D. W. *Fundamentals of Soil Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1948.

TEIXEIRA, A. H. Fundações rasas na baixada santista. In: FALCONI, F. F.; NEGRO JR., A. *Solos do Litoral de São Paulo*. São Paulo: Associação Brasileira de Mecânica de Solos - ABMS, 1994. Cap. 6, p. 137-154.

TEIXEIRA, A. H.; GODOY, N. S. Análise, projeto e execução de fundações rasas. In: FALCONI, F.; CORRÊA, C. N.; ORLANDO, C.; SCHIMDT, C.; ANTUNES, W. R.; ALBUQUERQUE, P. J.; HACHICH, W.; NIYAMA, S. (Org.). *Fundações teoria e prática*. 3. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2019. Cap. 7, p. 225-261.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. Boundary element solution for half-plane problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 17, n. 12, p. 1149-1158, 1981. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90094-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90094-9)>. Acesso em: 03 dez. 2021.

TERZAGHI, K. Principles of Soil Mechanics. IV. Settlement and Consolidation of Clay. *Engineering News-Record*, v. 95, n. 22, p. 874-878, 1925.

TERZAGHI, K. *Theoretical Soil Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 1943.

TERZAGHI, K. Influence of Geological Factors on the Engineering Properties of Sediments *Economic Geology*, Society of Economic Geologists, Fifty Anniversary, v. 5, p. 557-618, 1955. (Harvard Soil Mechanics series, 50). Disponível em: <<https://doi.org/10.5382/AV50.15>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

TERZAGHI, K.; PECK, R. B. *Soil Mechanics in Engineering Practice*. New York: John Wiley & Sons, 1948.

TIAN, Y.; WU, W.; JIANG, G.; EL NAGGAR, M. H.; MEI, G.; XU, M.; LIANG, R. One-dimensional consolidation of soil under multistage load based on continuous drainage boundary. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 44, n. 8, p. 1170-1183, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.3055>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R. *Fundações: Critérios de Projeto - Investigação do subsolo - Fundações superficiais*. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2014. v. 1.

VENTURINI, W. *Boundary Element Method in Geomechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

VESIC, A. S. Bearing capacity of shallow foundations. *Foundation Engineering Handbook*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1971. Cap. 3, p. 121-147.

VIEIRA, M. N. A.; ALVES, C. N.; FERREIRA, V. S.; BARBOSA, C. N. L. Modelagem de propriedades geológico-geotécnicas em solos de Belém do Pará. *Research, Society and Development*, v. 10, n. 2, 2021. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i2.12664>>. Acesso em: 20 nov. 2023.

VLLADKAR, M. N.; RANJAN, G.; SHARMA, R. P. Soil-structure interaction in the time domain. *Computers & Structures*, v. 46, n. 3, p. 429-442, fev. 1993. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90213-W](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90213-W)>. Acesso em: 03 dez. 2021.

XIE, K. H.; XIA, C. Q.; AN, R.; YING, H. W.; WU, H. A study on one-dimensional consolidation of layered structured soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 40, n. 7, p. 1081-1098, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nag.3176>>. Acesso em: 11 jan. 2021.

YAN, B.; DU, J.; HU, N.; SEKINE, H. A domain decomposition algorithm with finite element-boundary element coupling. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 27, p. 519-25, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10483-006-0412-y>>. Acesso em: 15 ago. 2022.

WANG, L.; SUN, D.; LI, P.; XIE, Y. Semi-analytical solution for one-dimensional consolidation of fractional derivative viscoelastic saturated soils. *Computer and Geotechnics*, v. 83, p. 30-39, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2016.10.020>>. Acesso em: 27 nov. 2023.

WARSAWSKI, A.; SOARES JR., D.; MANSUR, W. J. A FEM-BEM coupling procedure to model the propagation of interacting acoustic-acoustic/acoustic-elastic waves through axisymmetric media. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, v. 197, n. 45, p. 3828-3835, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.03.005>>. Acesso em: 11 jan. 2021.

WITT, M. Solutions of plates on a heterogeneous elastic foundation. *Computers & Structures*, v. 18, n. 1, p. 41-45, 1984. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90080-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90080-4). Acesso em: 15 ago. 2022.

ZHU, H.; LIU, L.; PEI, H.; SHI, B. Settlement analysis of viscoelastic foundation under vertical line load using a fractional Kelvin-Voigt model. *Geomechanics and Engineering*, v. 4, n. 1, p. 67-78, 2012.

# Apêndice A

## RELAÇÕES ENTRE SOLOS E FUNDAÇÕES

### RASAS

#### A) INTRODUÇÃO

Os solos e as fundações podem exercer impactos significativos sobre a estabilidade e o comportamento das estruturas. Neste apêndice, apresentam-se conceitos gerais e as principais características dos solos e das fundações rasas.

Em relação aos solos, abordam-se modos de ruptura, tensões admissíveis, pressões de contato (forças de superfícies ou *tractions*, conforme conceitos da Mecânica dos Sólidos) e os parâmetros de compressibilidade dos solos. Os conceitos de recalque e de coeficiente de reação vertical são tratados por meio da análise conjunta dos solos e das fundações.

#### B) MODOS DE RUPTURA NOS SOLOS

O aumento gradativo da ação de uma sapata sobre o solo provoca o surgimento de superfícies potenciais de ruptura no interior do maciço. A ruptura é caracterizada quando a tensão aplicada atinge a resistência máxima do solo, denominada capacidade de carga, ou tensão de ruptura ( $\sigma_f$ ).

Conforme afirma Terzaghi (1943), essa capacidade de carga está associada aos mecanismos de ruptura geral ou de ruptura local. A ruptura geral ocorre em solos menos deformáveis. Trata-se de um tipo de ruptura súbita, podendo ocasionar o tombamento da sapata e a formação de irregularidades na superfície do terreno, e está vinculada a pequenos valores de recalques. Em oposição a esse modo de falha, a ruptura local ocorre em solos mais deformáveis. Em vez da ocorrência do tombamento em sapatas, nota-se a evolução exponencial dos recalques, devido à compressão do solo subjacente. A Figura A1, a seguir, mostra as características típicas desses dois modos de ruptura:

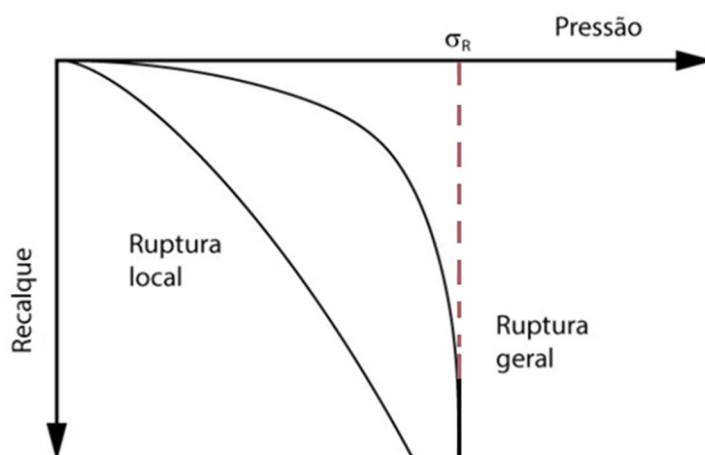


Figura A1 – Modos de ruptura em solos.

Vesic (1975) renomeou o modo de ruptura local de Terzaghi (1943) como ruptura por punção e definiu um modo de falha adicional, o qual chamou de ruptura local, um tipo intermediário de falha entre os modos de ruptura geral e por punção, sem um mecanismo específico, para representar rupturas em solos de compactidade ou consistência média.

### C) TENSÕES ADMISSÍVEIS DO SOLO

A tensão admissível de uma sapata ( $\sigma_a$ ) é sempre fixada, levando-se em conta critérios de segurança à ruptura e os recalques admissíveis.

O critério de segurança à ruptura visa proteger a fundação de uma ruptura catastrófica, sendo, normalmente, satisfeito mediante a aplicação de um coeficiente de segurança adequado à tensão que causa a ruptura do solo ( $\sigma_f$ ).

O critério de recalques admissíveis implica a adoção de uma tensão que conduza a fundação a recalques que a superestrutura possa suportar. É o critério que rege a maioria dos problemas práticos, sendo, também, o mais difícil de ser avaliado, em virtude da dificuldade na estimativa dos recalques aos quais estará sujeita a fundação projetada.

A tensão admissível de uma sapata pode ser estimada segundo métodos teóricos, semiempíricos ou por meio de provas de carga.

- Métodos Teóricos

Os métodos teóricos possibilitam a determinação da capacidade de carga com base em superfícies potenciais de ruptura do solo.

Terzaghi (1943) propôs um modelo de falha aplicado, inicialmente, a solos com modo de ruptura geral. Foram definidas três regiões de ruptura: Região A, Região B e Região C (Figura A2). Após a ruptura da cunha de solo sob a base da sapata, representada pela Região A, pressupõe-se a ocorrência de empuxos laterais sobre a Região B que, por consequência, transmite esforços à Região C, mobilizando-se as resistências ao cisalhamento ao longo de toda a superfície de ruptura.

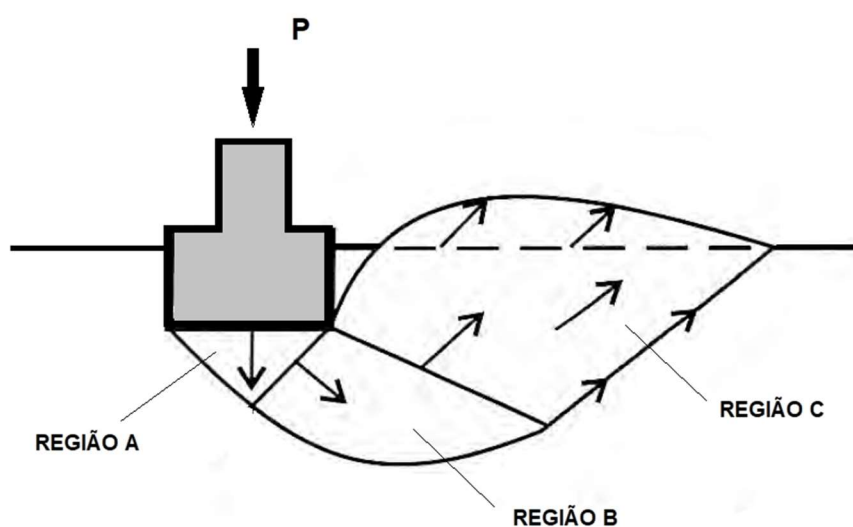


Figura A2 – Modelo de ruptura proposto por Terzaghi (1943).

Dada a impossibilidade de um desenvolvimento teórico para a capacidade de carga por ruptura local, Terzaghi (1943) propôs a utilização das mesmas formulações para ruptura geral, impondo-se uma redução empírica dos parâmetros coesão e ângulo de atrito do solo (CINTRA e AOKI, 2011).

A partir das hipóteses estabelecidas por Terzaghi (1943), muitos pesquisadores se dedicaram ao aprimoramento dos cálculos da capacidade de cargas de fundações por sapatas, modificando as hipóteses pioneiras ou tratando de casos específicos, o que gerou a publicação de vários métodos (*e.g.*: MEYERHOF, 1951; SKEMPTON, 1951; VESIC, 1975).

A estimativa da tensão admissível pode ser obtida dividindo-se a tensão de ruptura por um fator de segurança (FS); ou seja:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_f}{FS} \quad (A.1)$$

O FS depende do método e do problema em análise, mas, geralmente, o seu valor é igual a ou superior a 3.

Teixeira e Godoy (2019) comentam que, em geral, os métodos teóricos apresentam imprecisões e limitações inerentes às formulações para a determinação da capacidade de carga. Além disso, apresentam dificuldades de ordem prática quanto à avaliação da resistência ao cisalhamento dos solos envolvidos.

- Métodos Empíricos e semiempíricos

Os métodos semiempíricos relacionam resultados de ensaios com tensões admissíveis e devem ser observados os domínios de validade de suas aplicações, bem como as dispersões dos dados e as limitações regionais associadas a cada método. A estimativa de parâmetros é feita com base no ensaio de resistência à penetração em sondagens ou por meio do ensaio de penetração estática de cone.

O ensaio de resistência à penetração em sondagens (SPT - *Standard Penetration Test*) é, na prática, o mais utilizado. Terzaghi e Peck (1948) propuseram as primeiras recomendações sobre o tema, sendo elas posteriormente adaptadas, por outros autores, para se ajustarem às condições existentes nas localidades ou regiões em que atuavam (TEIXEIRA e GODOY, 2019). Chamando-se de N o número de golpes necessários para a penetração dos 30 cm finais do amostrador padrão do ensaio SPT (esse N é também denominado índice de resistência à penetração), pode-se estimar a tensão admissível do solo como:

$$\sigma_a = \frac{N}{50} \text{ (MPa)} \quad (A.2)$$

válida para qualquer solo natural com  $5 \leq N \leq 20$ .

O valor da resistência à penetração aplicado à Equação é o valor médio das camadas de apoio, estimado dentro da profundidade do bulbo de tensões sob as sapatas, o qual apresenta profundidade de aproximadamente  $1,5B$ , em que B corresponde à menor dimensão da sapata em planta.

O ensaio de resistência à penetração estática de cone (CPT - *Cone Penetration Test*) também possibilita estimar a tensão admissível para o projeto de sapatas com base nos valores da resistência de ponta,  $q_c$  (MPa), conforme exposto a seguir:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{q_c}{10} \text{ (MPa)}, \text{ para sapatas apoiadas sobre argilas} & \text{(a)} \\ \sigma_a &= \frac{q_c}{15} \text{ (MPa)}, \text{ para sapatas apoiadas sobre areias} & \text{(b)} \end{aligned} \quad \text{(A.3)}$$

válido para  $q_c > 1,5 \text{ MPa}$  e  $\sigma_a \leq 0,4 \text{ MPa}$ .

O valor da resistência de ponta corresponde ao valor médio estimado dentro da profundidade do bulbo de tensões sob as sapatas, o qual apresenta profundidade de aproximadamente  $1,5B$ , em que  $B$  corresponde à menor dimensão da sapata em planta.

O emprego das equações (A.2) e (A.3) pressupõe, ainda, que, abaixo da cota de apoio das sapatas, não ocorram solos com características inferiores às das camadas de suporte. Na hipótese de ocorrerem camadas menos resistentes em profundidade, deve-se avaliar se as tensões propagadas pelas sapatas, no topo dessas camadas, são inferiores às suas tensões admissíveis.

- Provas de Carga

A prova de carga sobre placas é um ensaio que permite avaliar a capacidade de carga superficial do solo e constitui um teste em modelo reduzido de sapatas. Frente à pequena dimensão das placas utilizadas, os bulbos de tensões são relativamente rasos, fazendo com que apenas o solo situado imediatamente abaixo da placa seja solicitado durante o teste. Nessas circunstâncias, o ensaio é incapaz de fornecer informações acerca dos comportamentos de solos mais profundos, eventualmente mobilizados por uma sapata ou por um conjunto delas.

Segundo Teixeira e Godoy (2019), o código de obras da cidade estadunidense de Boston estabeleceu dois princípios para a determinação da tensão admissível do solo, a saber: o critério de recalque,  $\sigma_a \leq \sigma_{10}$ , e o critério de ruptura,  $\sigma_a \leq \frac{\sigma_{25}}{FS}$ , em que  $FS = 2,0$  corresponde ao fator de segurança,  $\sigma_{10}$  é igual à tensão associada ao recalque de 10 mm e  $\sigma_{25}$  à tensão correspondente ao recalque de 25 mm. Esse código foi imposto para provas de carga sobre placas quadradas de 30,5 mm x 30,5 mm. O recalque de 10 mm corresponde a cerca de  $1/3B$ ,

em que  $B$  indica a dimensão em planta de um dos lados da placa. O recalque de 25 mm corresponde a aproximadamente  $4/5B$ .

No Brasil, a execução da prova de carga sobre placas é regulamentada pela NBR 6489 (ABNT, 2019), que admite, para os ensaios, uma placa de aço com 80 cm de diâmetro. Ela é carregada em estágios, em que um novo estágio de carga somente é aplicado após cessados os recalques do estágio anterior. O teste prossegue até que seja alcançado um recalque total de 25 mm ou até que seja atingido o dobro da tensão admissível no solo. Nesse contexto, observa-se que, enquanto o critério de ruptura do código de obras da cidade americana de Boston admite recalques limites iguais a  $4/5B$ , o critério da NBR 6489 (ABNT, 2019) admite recalques significativamente menores. Ainda que criticáveis na sua origem, os critérios mencionados mostraram-se adequados, quando aplicados em projeto de fundações de edifícios de grande porte no Brasil (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

- Pressões de Contato nos Solos

Na área de Geotecnia, as tensões normais exercidas sobre a superfície de contato da base de uma sapata com o solo de apoio são denominadas pressões de contato. A distribuição das pressões de contato depende das propriedades elásticas do meio suporte, da rigidez à flexão da sapata, da distribuição das cargas sobre a sapata e da profundidade do apoio (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Para uma placa flexível apoiada à superfície do solo, a distribuição das pressões de contato é uniforme, tanto no caso das areias como no das argilas. Nas areias, o bordo da sapata sofre maiores recalques do que o centro, porque a areia situada adjacente ao bordo é apenas parcialmente confinada e, portanto, é mais compressível. Nas argilas, a sapata tem um recalque em forma de sela, com o maior recalque ocorrendo no centro da placa (Figura A.3), a seguir:



Figura A.3 – Pressões de contato em placas flexíveis.

Em uma placa rígida, os deslocamentos de translação e rotação são uniformes, sem a ocorrência de deflexões na superfície da fundação. Analogamente à situação configurada com

placas flexíveis, a distribuição de pressão do solo de uma fundação rígida depende do tipo de solo, conforme mostrado na Figura A.4, disposta a seguir:

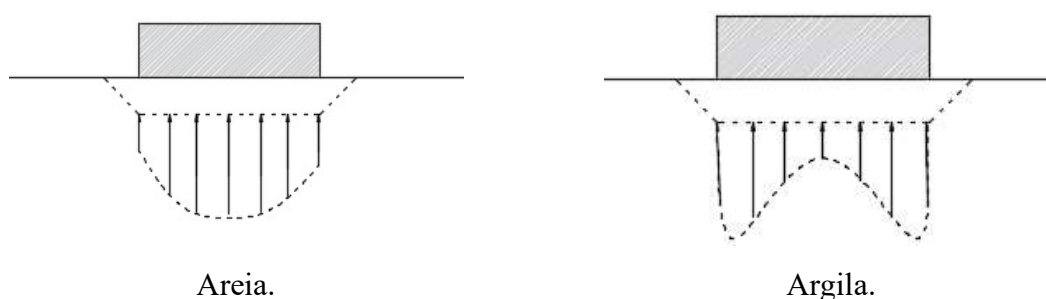


Figura A.4 – Pressões de contato em placas rígidas.

Nos bordos da placa, onde pode ocorrer maior concentração de carga, a pressão de contato não ultrapassa a capacidade de carga do solo, o que resulta em redistribuição das pressões ao longo da base da sapata. À medida que se aumenta a profundidade do apoio da sapata, a resistência ao cisalhamento torna-se maior e, nesses casos, a distribuição das pressões de contato tende a ser mais uniforme.

- Parâmetros de Compressibilidade dos Solos

Na Teoria da Elasticidade, o módulo de elasticidade é uma propriedade mecânica dos materiais que descreve o seu comportamento elástico; ou seja: a sua capacidade de se deformar e de retornar à sua forma original, quando / após submetido a uma ação. Ele expressa medida de rigidez do material e o seu valor é normalmente determinado por meio de ensaios uniaxiais, obtendo-se a razão entre a tensão axial e a sua deformação axial. Materiais elásticos ideais representados por módulos de elasticidade constante são denominados hookeanos, uma vez que seguem a Lei de Hooke. Eles são denominados não-hookeanos, em caso contrário (BORGES, 2013).

No entanto, na natureza, os solos, normalmente, apresentam deformações irreversíveis, estão sujeitos a pressões confinantes crescentes com a profundidade e são caracterizados como materiais não-hookeanos.

Pinto (2019) afirma que, em casos práticos, a irreversibilidade não deve ser objeto de preocupação, uma vez que as tensões atuam, normalmente, em um mesmo sentido, carregamento ou escavação. As pressões confinantes interferem na capacidade de deformação dos materiais, fazendo com que o parâmetro de deformabilidade seja influenciado pelas tensões

desviadoras, e não apenas pelas tensões axiais. Define-se, portanto, o conceito de módulo de deformabilidade dos solos, em substituição ao módulo de elasticidade tradicional, utilizado na Teoria da Elasticidade, com o objetivo de se representar a razão entre a tensão desviadora (diferença entre tensão axial e tensão confinante) e a deformação axial dos solos. Neste trabalho, a denominação dada ao módulo de deformabilidade é estendida ao módulo de elasticidade dos solos.

O módulo de elasticidade dos solos pode ser classificado como não drenado ou drenado. O primeiro deles possibilita mensurar a rigidez do solo saturado, sem que ocorra a drenagem, comum em solos argilosos com baixa permeabilidade. O segundo parâmetro, por sua vez, possibilita a medida da rigidez, quando o solo se encontra sob condições de drenagem, como ocorre em camadas de solos permeáveis de areia ou cascalho. O módulo de elasticidade drenado é, geralmente, mais baixo do que o não drenado, uma vez que a drenagem reduz a poropressão e aumenta as tensões efetivas, o que resulta em maior deformação do solo sob um dado carregamento. Nesse contexto, é recomendável que o módulo de elasticidade dos solos seja determinado por meio de ensaios triaxiais drenados ou não drenados.

Teixeira e Godoy (2019) apresentam correlações semiempíricas, a partir dos ensaios de resistência à penetração em sondagens (SPT), ou por meio do ensaio de resistência à penetração estática de cone (CPT) para a determinação dos módulos de elasticidade dos solos ( $E$ ), conforme mostrado nas equações (A.4)-(a) e (A.4)-(b), respectivamente.

$$E = \alpha \cdot K \cdot N \quad (a)$$

$$E = \alpha \cdot q_c \quad (b)$$

(A.4)

em que  $N$  é o número de golpes necessários para a penetração dos 30 cm finais do amostrador-padrão obtido do ensaio SPT (também denominado índice de resistência à penetração),  $q_c$  é a resistência de ponta medida no ensaio CPT,  $\alpha$  é o coeficiente empírico dado pela Tabela A.1 e  $K$  é o coeficiente empírico indicado na Tabela A.2.

Tabela A.1 – Coeficiente  $\alpha$  (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Solo	$\alpha$
Areia	3
Silte	5
Argila	7

Tabela A.2 – Coeficiente K (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Solo	K (MPa)
Areia com pedregulhos	1,1
Areia	0,9
Areia siltosa	0,7
Areia argilosa	0,55
Silte arenoso	0,45
Silte	0,35
Argila arenosa	0,3
Silte argiloso	0,25
Argila siltosa	0,2

Quanto à representação da não linearidade dos solos, uma prática comum, na ausência de informações mais precisas, é a representação do módulo de elasticidade secante, com o objetivo de representar a relação linear entre dois pontos da curva que relaciona tensões desviadoras e deformações axiais.

O coeficiente de Poisson depende do tipo de solo e do seu comportamento. Argila mole, com comportamento geomecânico não drenado, por exemplo, apresenta coeficiente de Poisson obrigatoriamente igual a 0,5 (POWRIE, 2018). Valores típicos do coeficiente de Poisson são apresentados na Tabela A.3, a seguir:

Tabela A.3 – Coeficiente de Poisson (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Solo	$\nu$
Areia pouco compacta	0,2
areia compacta	0,4
silte	0,3 a 0,5
argila saturada	0,4 a 0,5
argila não saturada	0,1 a 0,3

O coeficiente de Poisson igual a 0,5 de silte e argila saturada representa o limite de material incompressível, próximo ao comportamento dos fluidos e da borracha ideal.

Souza e Reis (2008) observam, no entanto, que esse parâmetro pode ser considerado como igual a 0,3, para simulações numéricas, uma vez que a sua variação causa pouca diferença para a obtenção dos resultados em análises da ISE.

## D) RECALQUES EM FUNDAÇÕES RASAS

Os deslocamentos verticais de uma fundação são decorrentes de deformações cisalhantes em resposta às tensões aplicadas sobre o maciço de solo. Se as tensões cisalhantes induzidas são pequenas quando comparadas à resistência ao cisalhamento do solo, essas tensões são aproximadamente proporcionais às deformações correspondentes, ocasionando mudanças na forma do solo, sem redução do volume.

Outra parcela de recalque deriva de deformações volumétricas ou por adensamento, com diminuição do índice de vazios do solo, e é denominada recalque por adensamento primário. No caso de argilas saturadas, esse adensamento ocorre com a dissipação gradual das sobrepressões neutras induzidas pelo carregamento da fundação. Decorrido um período de tempo suficiente para que as pressões neutras se aproximem de zero, a argila continua a reduzir o seu volume, fenômeno denominado de recalque por adensamento secundário, o qual se processa linearmente com o logaritmo do tempo.

O recalque total de uma fundação pode ser calculado com a adição das parcelas de recalque imediato, por adensamento primário e por adensamento secundário, conforme ilustra esta Equação:

$$w = w_i + w_a + w_s \quad (\text{A.5})$$

em que  $w$  é o recalque total,  $w_i$  é o recalque imediato,  $w_a$  é o recalque por adensamento primário e  $w_s$  é o recalque por adensamento secundário.

Ortigão (2007) afirma que essa divisão de recalques em parcelas ocorre somente para fins didáticos. Na prática, os três tipos de recalques ocorrem simultaneamente.

- Recalques Imediatos

Nos casos em que as sapatas se apoiam diretamente em solos densos e resistentes, predominam as deformações imediatas. Os recalques imediatos,  $w_i$ , também denominados recalques iniciais, são previstos a partir de métodos teóricos, fundamentados na Teoria da Elasticidade, ou por métodos empíricos. Os métodos teóricos consistem em fórmulas deduzidas a partir da Teoria dos Potenciais ou a partir de soluções fundamentais, tal como aquela apresentada por Mindlin (1936).

Pela Teoria da Elasticidade, a Equação (A.6) pode ser utilizada para a determinação dos valores de deslocamentos imediatos em solos, onde forem válidas as hipóteses de meios elásticos, homogêneos, isotrópicos e contínuos (PERLOFF, 1975).

$$w_i = \sigma \cdot B \cdot \left( \frac{1 - \nu^2}{E} \right) \cdot I_w \quad (\text{A.6})$$

sendo  $B$  a menor dimensão da base da sapata,  $\nu$  o coeficiente de Poisson do solo,  $E$  o módulo de elasticidade (ou de deformabilidade) do solo e  $I_w$  o fator de influência que depende da rigidez da sapata e da razão  $L/B$ , em que  $L$  é igual a maior dimensão da base (Tabela A.4).

Tabela A.4 – Fator de influência para sapatas retangulares (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

L/B	1	1,5	2	5	10	100
Sapatas Flexíveis (valor médio)	0,95	1,15	1,3	1,83	2,25	3,69
Sapatas Rígidas	0,82	1,06	1,2	1,7	2,1	3,4

Por serem os solos materiais cuja massa não é contínua, por serem heterogêneos, não isotrópicos, e com módulo de elasticidade que pode crescer com a profundidade, é necessário muito discernimento para se estimar a grandeza do recalque por meio das fórmulas desenvolvidas em função da Teoria da Elasticidade, conforme indicado na Equação (A.6). Apesar disso, as equações são usualmente empregadas para obtenção de estimativas dos recalques (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Em meios elásticos não homogêneos, os recalques não aumentam na proporção direta com a dimensão da sapata porque o módulo de elasticidade não é constante com a profundidade. No caso mais comum, têm-se subcamadas cada vez menos compressíveis sob a base da fundação. A variabilidade do módulo de elasticidade com a profundidade deve ser levada em consideração para estimativa dos recalques no solo. Há, no mercado, muitos *softwares* disponíveis que possibilitam esse tipo de abordagem.

A técnica de Steinbrenner (1934) é uma metodologia que permite avaliar recalques de solos compostos por multicamadas. Esse procedimento considera que o encurtamento de cada camada é determinado pela diferença entre o deslocamento do topo e o deslocamento da base da camada correspondente. O encurtamento total do maciço de solos seria, então, determinado pela soma dos encurtamentos de todas as camadas.

Dessa forma, por exemplo, considerando-se um maciço de solos constituído por duas camadas dispostas sobre um meio indeslocável, calcula-se o deslocamento do topo da Camada 1 até o infinito e da base da Camada 1 até o infinito. A diferença entre os dois valores será o encurtamento do deslocamento da Camada 1. Em seguida, calcula-se o deslocamento do topo da Camada 2 até o infinito e da base da Camada 2 até o infinito. A diferença entre os dois valores corresponde ao encurtamento da Camada 2. O encurtamento total do maciço de solos será a soma dos encurtamentos das camadas 1 e 2 (Figura A.5).

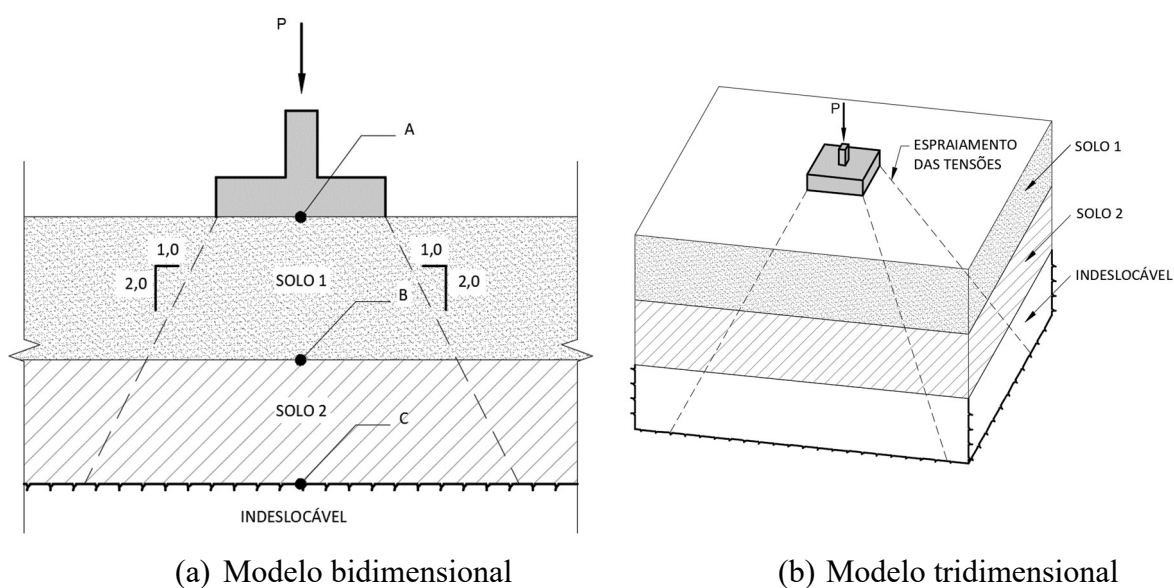


Figura A.5 – Solo estratificado – técnica de Steinbrenner.

Para o cálculo do recalque das camadas inferiores, supõe-se a existência de uma sapata fictícia apoiada em seu topo, com dimensões ampliadas, devido à propagação das tensões em profundidade. A propagação das tensões é comumente admitida na inclinação aproximada de  $26,5^\circ$  com a vertical (Figura A.5).

Dessa forma, o recalque de múltiplas camadas ( $w^{AC}$ ), indicado na Figura A.5, pode ser determinado da seguinte forma:

$$w^{AB} = w^{A1} - w^{B1} \text{ (Solo 1)} \quad (\text{a})$$

$$w^{BC} = w^{B2} - w^{C2} \text{ (Solo 2)} \quad (\text{b}) \quad (\text{A.7})$$

$$w^{AC} = w^{AB} + w^{BC} \quad (\text{c})$$

sendo  $w^{A1}$  o recalque do Ponto A, considerando-se o semiespaço infinito homogêneo 1,  $w^{B1}$  e  $w^{B2}$  o recalque do Ponto B, considerando-se os semiespaços infinitos homogêneos 1 e 2, respectivamente, e  $w^{C2}$  o recalque no Ponto C, considerando-se o semiespaço infinito homogêneo 2.

Janbu *et al.* (1956) descrevem uma metodologia para a solução de problemas de camadas de solos sobre espessuras finitas, sobrepostas a um material considerado rígido ou indeformável, podendo-se considerar o embutimento da fundação. A formulação matemática para esse tipo de problema é apresentada na Equação (A.8), qual seja:

$$w_i = \mu_0 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\sigma B}{E} \quad (\text{A.8})$$

em que  $\mu_0$  e  $\mu_1$  são os correspondentes fatores de influência do embutimento da sapata e da espessura da camada de solo (Figura A.6).

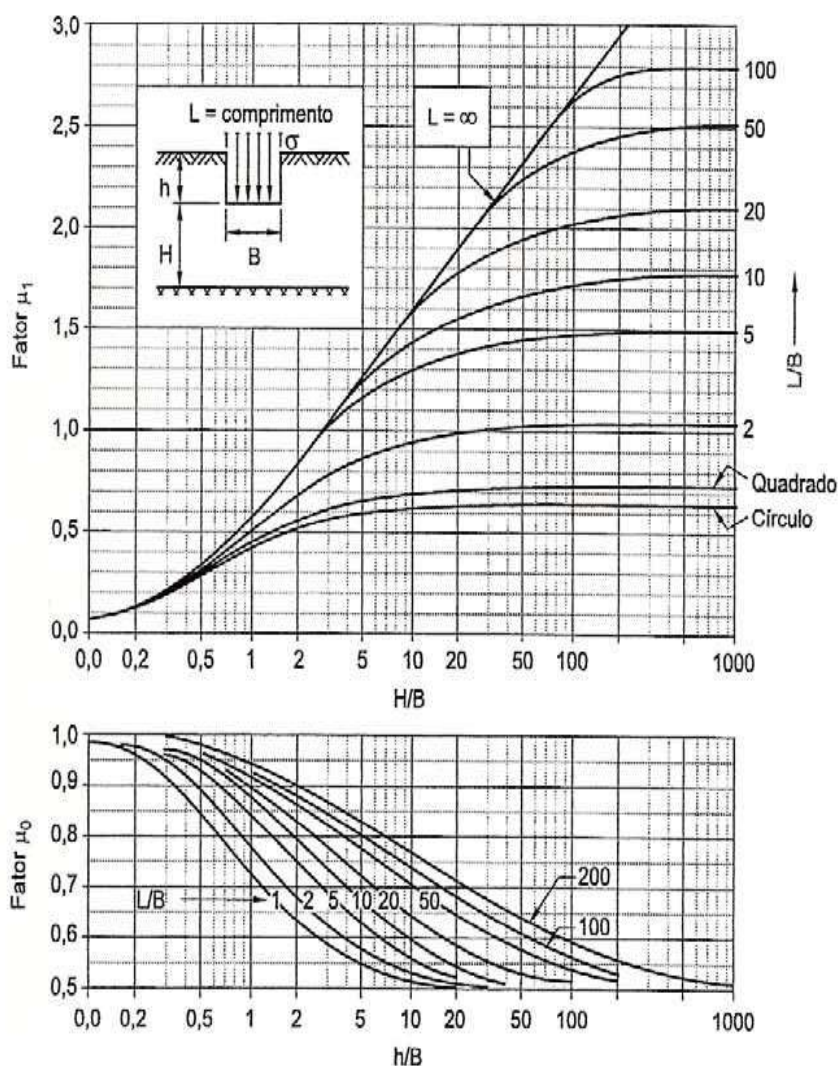


Figura A.6 – Fatores  $\mu_0$  e  $\mu_1$  para o cálculo de recalques imediatos de fundação superficial flexível em camada de argila finita.

Fonte: JANBU *et al.*, 1956.

Com base na Equação (A.8), Cintra e Aoki (2011) apresentam um procedimento alternativo para a estimativa dos recalques em camadas estratificadas do solo. Esse procedimento é análogo ao de Steinbrenner e consiste, inicialmente, na determinação da parcela de recalque oriunda apenas da camada de solo superficial, por meio da Equação (A.8), considerando-se como indeslocável o topo da camada imediatamente abaixo. Os recalques das camadas subsequentes são determinados de forma similar e a soma de todas as parcelas de recalque corresponderia ao recalque total do maciço estratificado.

A principal condição necessária para o sucesso dessa metodologia baseia-se na divisão em subcamadas pouco espessas, tornando-se razoável a hipótese de adotar um valor

constante para o módulo de elasticidade em cada estrato. Esse método é simplificado e apresenta resultados razoavelmente satisfatórios. Outras metodologias e adaptações de métodos existentes podem ser encontradas em Schmertmann (1970), Schmertmann *et al.* (1978), Burland e Burbidge (1985) e Berardi e Lancellotta (1991).

- Recalques por Adensamento Primário

O recalque por adensamento primário ocorre de forma lenta, devido à expulsão da água presente no solo. Conceitualmente, esse processo inicia-se a partir do término do recalque imediato. Em casos nos quais se observa a presença de camadas espessas de argilas moles, saturadas e em profundidade, em relação à cota de apoio da fundação, o adensamento primário pode ser a parcela de recalque predominante.

A expressão que possibilita a determinação do recalque por adensamento primário ( $w_a$ ) em solos normalmente adensados, é esta:

$$w_a = \frac{C_c \cdot H}{1 + e_0} \cdot \log \left( \frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma'_z}{\sigma'_{v0}} \right) \quad (\text{A.9})$$

sendo  $e_0$  o índice de vazios inicial,  $H$  igual à espessura da camada de argila,  $\sigma'_{v0}$  a tensão efetiva inicial e  $\Delta\sigma'_z$  o acréscimo de tensão efetiva no meio da camada de argila.

O índice de compressão ( $C_c$ ) foi definido, por Terzaghi (1925), para indicar a proporcionalidade existente entre diferença dos índices de vazios e a diferença entre os logaritmos das tensões correspondentes.

A experiência mostra que  $C_c$ , é função da plasticidade dos solos. Com relação a solos extremamente compressíveis, encontrados nas baixadas litorâneas brasileiras, é possível correlacionar o índice de compressão com o limite de liquidez dos solos – a sua consistência ou capacidade de se deformar ou de fluir, quando submetidos a forças –, conforme afirmam Ortigão (2007), Pinto (2016) e Teixeira e Godoy (2019).

Entende-se como tensão de pré-adensamento,  $\sigma'_{vm}$ , a máxima tensão efetiva experimentada pelo solo em todo o seu histórico de tensões. A condição em que se observa  $\sigma'_{vm} = \sigma'_{v0}$  representa uma característica de solos normalmente adensados.

Eventualmente, tensões de pré-adensamento podem ser sensivelmente superiores às tensões efetivas de solos sedimentares. Isso seria um sinal de que, no passado, o solo esteve

sujeito a tensões maiores do que a tensão efetiva instalada; ou seja:  $\sigma'_{v0} < \sigma'_{vm}$ . Nessas condições, o solo é denominado pré-adensado ou sobreadensado.

A expressão que possibilita a determinação do recalque por adensamento primário,  $w_a$ , em solos pré-adensados, é dada por:

$$w_a = \frac{H}{1 + e_0} \cdot \left[ C_r \cdot \log \left( \frac{\sigma'_{vm}}{\sigma'_{v0}} \right) + C_c \cdot \log \left( \frac{\sigma'_{vm} + \Delta\sigma'_z}{\sigma'_{vm}} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

sendo o índice de recompressão ( $C_r$ ) definido de forma similar ao índice de compressão,  $C_c$ .

- Recalques por Adensamento Secundário

A parcela de recalque oriunda do adensamento secundário ( $w_s$ ) inicia-se, conceitualmente, ao término do adensamento primário, após as pressões neutras se dissiparem. Esse tipo de recalque é o que caracteriza, de fato, o efeito de fluência em solos, uma vez que solos ficam submetidos a pressões efetivas constantes ao longo do tempo.

Essa parcela de recalque é importante nos casos de solos orgânicos ou turfosos (TEIXEIRA e GODOY, 2019); contudo, na maioria dos solos, a fluência é menos importante, porque a sua magnitude é menor do que as demais parcelas de recalque. Por essa razão, ela não é considerada na maioria das análises.

Medições de recalques por adensamento secundário realizados, ao longo de muitos anos, em estruturas, permitem classificar os solos em termos da fluência. Em solos arenosos, recalques são praticamente inexistentes. Quanto a argilas, é comum assumir parcelas pequenas do recalque total, de cerca de 3 a 10% (COSENZA e KOROSAK, 2014).

- Previsão do Tempo de Adensamento

A previsão do comportamento do solo ao longo do tempo é um dos problemas mais desafiadores em Mecânica dos Solos. Isso ocorre devido à complexidade dos comportamentos dos solos, que podem variar conforme a sua composição, histórico de carregamento, umidade, temperatura e outros fatores ambientais (REIS, 2014).

Tradicionalmente, o modelo mais utilizado para a previsão por adensamento primário de solos saturados é o de Terzaghi (1925). Esse modelo baseia-se em um dispositivo mecânico de analogia água-mola (Figura A.7) e consiste num cilindro indeformável preenchido por água. Em seu interior, é instalado um pistão, suportado por uma mola de compressibilidade

linear. O cilindro tem uma válvula de drenagem. Nessa analogia proposta por Terzaghi (1925), o cilindro representa uma massa de solo confinada, a mola representa o esqueleto sólido e, a válvula, a permeabilidade do material.

O recalque por adensamento primário, caracterizado pelo acréscimo de pressão efetiva ao longo do tempo, é dependente da mudança de rigidez do meio, devido às interações estabelecidas entre fluidos e sólidos. Em solos saturados, o aumento de pressão externa faz com que a água intersticial flua entre os grãos, por causa do acréscimo inicial de pressões neutras. Com a drenagem dos poros, a poropressão é convertida em pressão efetiva na porção sólida. O acréscimo de pressões efetivas ao longo do tempo resulta no adensamento. Em solos permeáveis, o tempo necessário para a conclusão do fluxo total de água é curto, tornando o problema praticamente independente do tempo. Contudo, para solos finos (como argilas), o tempo necessário para o término do fluxo de água é significativo.

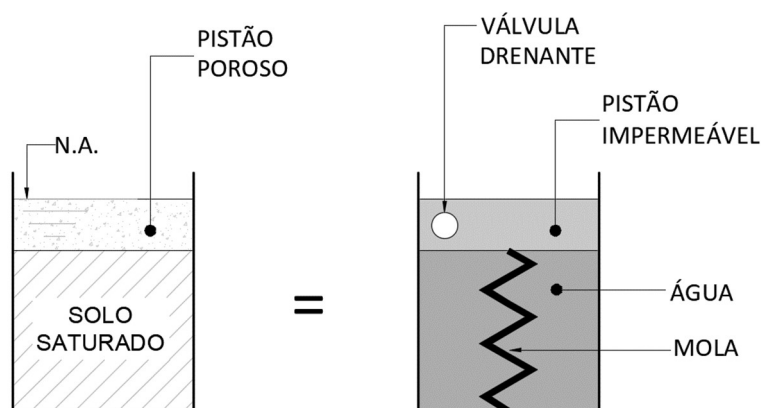


Figura A.7 – Modelo de analogia água - mola de Terzaghi.  
 Fonte: TERZAGHI, 1925.

Posteriormente, a Teoria do Adensamento de Terzaghi foi estendida a condições tridimensionais por Biot (1941), considerando o escoamento de fluidos em meios porosos, segundo a Lei de Darcy: meios porosos, quando submetidos a tensões, têm o seu comportamento mecânico determinado não apenas pelas suas características estruturais intrínsecas, mas também pelo comportamento do fluido que preenche a matriz porosa do meio. Nas equações constitutivas descritas pela Teoria da Elasticidade, Biot incorporou o termo poropressão ( $p$ ) e introduziu o coeficiente de tensão efetiva,  $\alpha$ , denominado coeficiente de Biot-Willis. A teoria de Biot (1941) ficou conhecida como Teoria da Poroelasticidade.

Apesar de muitos desenvolvimentos nessa área, a Teoria do Adensamento de Terzaghi ainda é a formulação teórica mais amplamente empregada se para prever esse efeito (OLEK, 2019 e SHI *et al.*, 2022). A equação diferencial parcial que rege o adensamento primário por meio da dissipação das poropressões é expressa por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

em que  $c_v$  é o coeficiente de adensamento do solo,  $t$  é o instante de tempo,  $u$  é a poropressão e  $z$  é a coordenada em profundidade de um ponto no solo.

As hipóteses válidas para a aplicação dessa equação são: meios homogêneos e incompressíveis, validade da lei de Darcy para todos os gradientes hidráulicos, fluxo unidimensional,  $c_v$  constante e pequenas deformações.

A solução da equação, proposta por Terzaghi (1925), é dada por:

$$u(z, t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2\Delta\sigma_v}{M} \cdot \text{sen}\left(\frac{Mz}{H_d}\right) e^{-T_v M^2} \quad (\text{A.12})$$

em que  $M = 0.5\pi(2m + 1)$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,  $H_d$  é o caminho de drenagem,  $\Delta\sigma_v$  é o acréscimo de tensão vertical total e  $T_v$  é o fator tempo dado por:

$$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H_d^2} \quad (\text{A.13})$$

O grau de adensamento local,  $U_z(z, t)$ , é definido pela razão entre a poropressão dissipada até o instante de tempo  $t$  e a poropressão total causada pelo carregamento. A relação matemática que descreve esse parâmetro é mostrada a seguir:

$$U_z(z, t) = 1 - \frac{u(z, t) - u(z, t_\infty)}{u(z, t_0) - u(z, t_\infty)} \quad (\text{A.14})$$

sendo  $t_0$  e  $t_\infty$  iguais, respectivamente, aos instantes de tempo inicial e final.

O grau de adensamento médio ( $U(t)$ ) representa a razão entre o recalque ocorrido no instante,  $t_0$ , e o recalque final esperado para o instante  $t_\infty$  para toda a espessura de solo sujeita ao adensamento.

Taylor (1948) propôs as seguintes equações empíricas para representarem o fator tempo ( $T_v$ ) em termos do grau de adensamento médio:

$$T_v = \frac{\pi}{4} [U(t)]^2 \text{ para } U(t) < 0.6 \quad (\text{a})$$

$$T_v = -0.933 \log[1 - U(t)] - 0.085 \text{ para } U(t) > 0.9 \quad (\text{b})$$

(A.15)

Essas equações se ajustam muito bem à equação teórica. A primeira delas mostra que o trecho inicial da curva de recalques é parabólica e indica que, para recalques inferiores a 60% do total, se um certo valor de recalque ocorreu num tempo  $t$ , o dobro desse valor será atingido num tempo quatro vezes maior.

Nas análises temporais do processo de adensamento, o coeficiente de adensamento ( $c_v$ ) do solo é fundamental, porque ele representa a velocidade de dissipação do excesso de pressões neutras. Quanto maior o valor de  $c_v$ , menor será o tempo de adensamento. Esse coeficiente geralmente é determinado a partir de ensaios de laboratório com amostras de solo.

Os métodos mais utilizados para a determinação do coeficiente de adensamento são: o método do logaritmo do tempo, conforme mostrado por Casagrande (1936), e o método raiz quadrada do tempo, conforme mostrado por Taylor (1948). Ambos são desenvolvidos a partir do ajuste de resultados em ensaios de adensamento.

No entanto, a experiência tem revelado que o tempo de ocorrência do adensamento em obras reais de Engenharia é inferior àqueles estimados em ensaios. Essa diferença acontece especialmente porque, na Teoria do Adensamento de Terzaghi, admite-se a hipótese de drenagem unidirecional vertical que, na prática, pode não ser apropriada, devido à possibilidade de drenagem horizontal adicional. As melhores estimativas de  $c_v$  são obtidas por meio de retroanálises (TEIXEIRA e GODOY, 2019).

Ortigão (2007) também comenta que o coeficiente de adensamento é uma propriedade variável de acordo com a permeabilidade e compressibilidade dos solos. À medida que o solo adensa, tanto a permeabilidade quanto a compressibilidade, e, conseqüentemente,  $c_v$ , diminuem. Experiências em ensaios de laboratório e medições de campo revelam valores

elevados de  $c_v$  para argilas pré-adensadas, reduzindo-se muito o seu valor quando o material se torna normalmente adensado.

Aguiar *et al.* (2021) avaliaram o adensamento de solo mole por meio de um aterro experimental da cidade de Santos - SP. Os resultados obtidos indicaram valores mais frequentes entre  $0,3 \text{ m}^2/\text{ano}$  e  $0,8 \text{ m}^2/\text{ano}$  no domínio de compressão virgem. A Figura A.8 mostra a faixa de variação do coeficiente de adensamento para argilas típicas da região do Rio de Janeiro, obtidos em mais de cem ensaios edométricos (ORTIGÃO, 2007). Observa-se que a dispersão dos resultados é muito grande para intervalos de tempo nos quais o material está sujeito a pressões efetivas inferiores a  $100 \text{ kPa}$ . Nessa região, a dispersão dos resultados de  $c_v$  decorre do pré-adensamento dos solos, tornando a dispersão dos resultados muito grande, em torno de  $1$  a  $3,5 \text{ m}^2/\text{ano}$ , no universo amostrado. Para intervalos em que a pressão efetiva excede  $100 \text{ kPa}$ , os valores de  $c_v$  ficam, predominantemente, entre  $0,5 \pm 0,3 \text{ m}^2/\text{ano}$ .

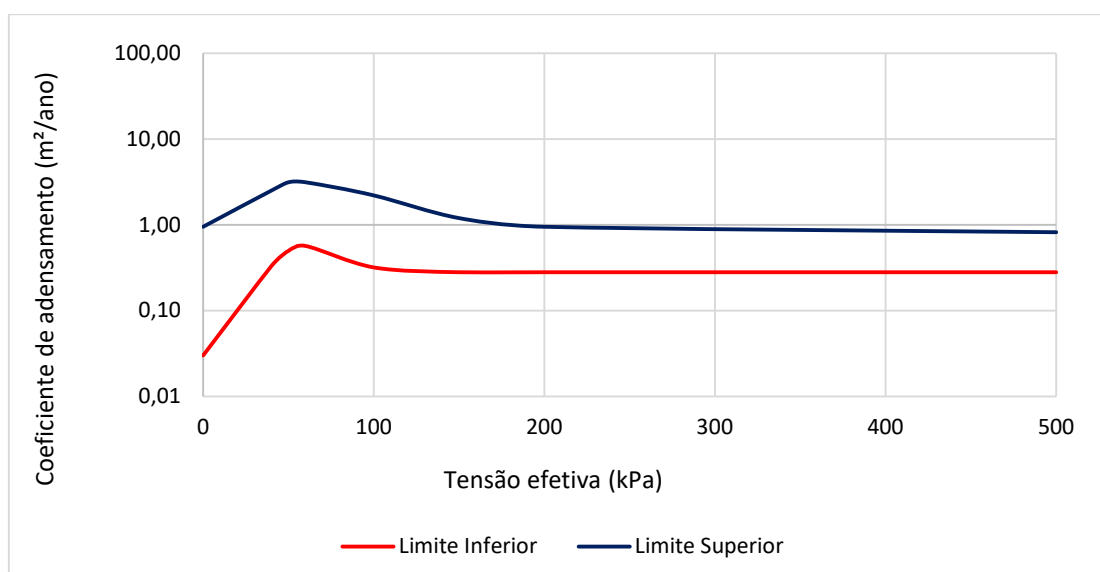


Figura A.8 - Faixa dos valores dos coeficientes de adensamento para argilas da região do Rio de Janeiro obtidos a partir de ensaios edométricos.

Fonte: Adaptado de ORTIGÃO, 2007.

- Recalques Admissíveis

O recalque total pode ser classificado como uniforme, diferencial uniforme ou distorcional angular. Os dois primeiros causam os respectivos movimentos de corpo rígido de translação e rotação no edifício, podendo ter impactos sobre a funcionalidade e a estabilidade

da estrutura. O recalque distorcional angular, por sua vez, causa deformações adicionais na estrutura, podendo comprometer os seus elementos.

De acordo com a NBR 6122 (ABNT, 2019), a tensão admissível e a carga admissível dependem da sensibilidade da construção projetada aos recalques que futuramente ocorrerão; principalmente, os recalques diferenciais que causarão distorções angulares nas peças estruturais. Elevados recalques nas fundações poderão levar à ruptura das estruturas e, conseqüentemente, à ruína da construção, devido ao acréscimo de esforços produzidos, ou, ainda, prejudicar a sua funcionalidade.

Skempton e MacDonald (1956) analisaram centenas de edifícios e associaram a ocorrência de danos a valores limites à distorção angular,  $\delta/l$ , onde  $\delta$  é o recalque diferencial entre dois pilares, e  $l$  a distância entre eles. Os valores limites são apresentados em Skempton-MacDonald, que estabelece  $\frac{\delta}{l} = 1:300$  e  $\frac{\delta}{l} = 1:150$  para danos associados a trincas em paredes e a danos estruturais em vigas e pilares de edifícios usuais, respectivamente.

Teoricamente, uma estrutura que sofre com recalques uniformes não apresenta danos estruturais, mesmo para valores exagerados de recalque total. Entretanto, na prática, recalques totais uniformes normalmente não ocorrem em edificações reticuladas, devido às diferenças de rigidez entre seus elementos. Além disso, outros fatores contribuem para a ocorrência de recalques diferenciais, tais como excentricidade das cargas, incertezas sobre a real grandeza das cargas atuantes e heterogeneidade do subsolo, sendo, portanto, a limitação do recalque total uma das maneiras de se limitar os recalques diferenciais (CEN, 2004; TEIXEIRA e GODOY, 2019).

## E) COEFICIENTE DE REAÇÃO VERTICAL DA FUNDAÇÃO

O módulo de reação vertical é uma constante que corresponde à razão entre a tensão aplicada sobre o solo e o recalque ocorrido. No modelo de Winkler, a pressão e o deslocamento verticais estão relacionados, conforme se expõe a seguir:

$$\sigma = k_v \cdot w \quad (\text{A.16})$$

em que  $\sigma$  é a pressão aplicada,  $k_v$  é o módulo de reação vertical e  $w$  é o recalque.

O coeficiente de reação vertical pode ser determinado por meio do ensaio de placas, por meio de correlações existentes na literatura técnica ou a partir da estimativa do recalque teórico da fundação.

Com base nos ensaios de placa, o coeficiente de reação vertical deve ser corrigido em função da geometria da fundação. Essa correção deriva do fato de esse coeficiente não depender apenas das propriedades mecânicas do solo, mas, também, da rigidez relativa entre estrutura e solo, conforme indicado na Equações (A.17)-(a), para solos arenosos, e (A.17)-(b), para solos argilosos (CINTRA e AOKI., 2011; VELLOSO e LOPES, 2014 e TEIXEIRA e GODOY, 2019):

$$k_{v,f} = k_{v,p} \left( \frac{B_f + B_p}{2B_f} \right)^2 \quad (a) \quad (A.17)$$

$$k_{v,f} = k_{v,p} \left( \frac{A_p}{A_f} \right) \quad (b)$$

sendo  $k_{v,f}$  o módulo de reação vertical da fundação,  $k_{v,p}$ , o módulo de reação vertical da placa,  $B_f$  a largura da fundação e  $B_p$  a largura da placa.

Terzaghi (1955) correlacionou o coeficiente de reação vertical com os ensaios de resistência à penetração em sondagens (SPT) em areias (Figura A.9) e em argilas (Figura A.10), utilizando ensaio de placas com dimensões de 30,5 x 30,5 cm:

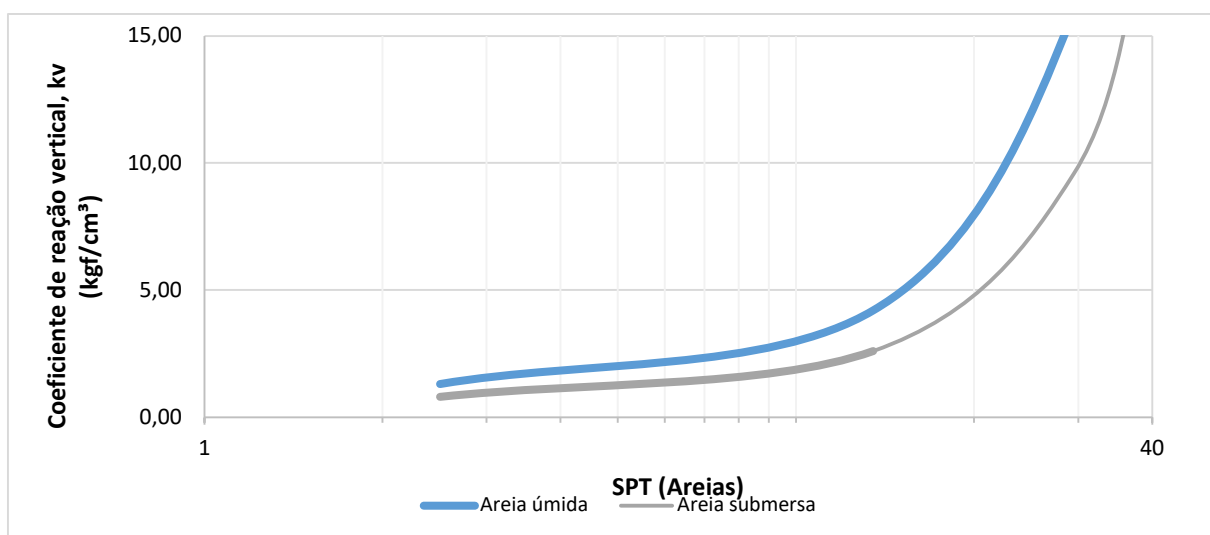


Figura A.9 –  $k_v$  em areias a partir do ensaio de placas com 30,5 cm x 30,5 cm.  
Fonte: Adaptado de TERZAGHI, 1955.

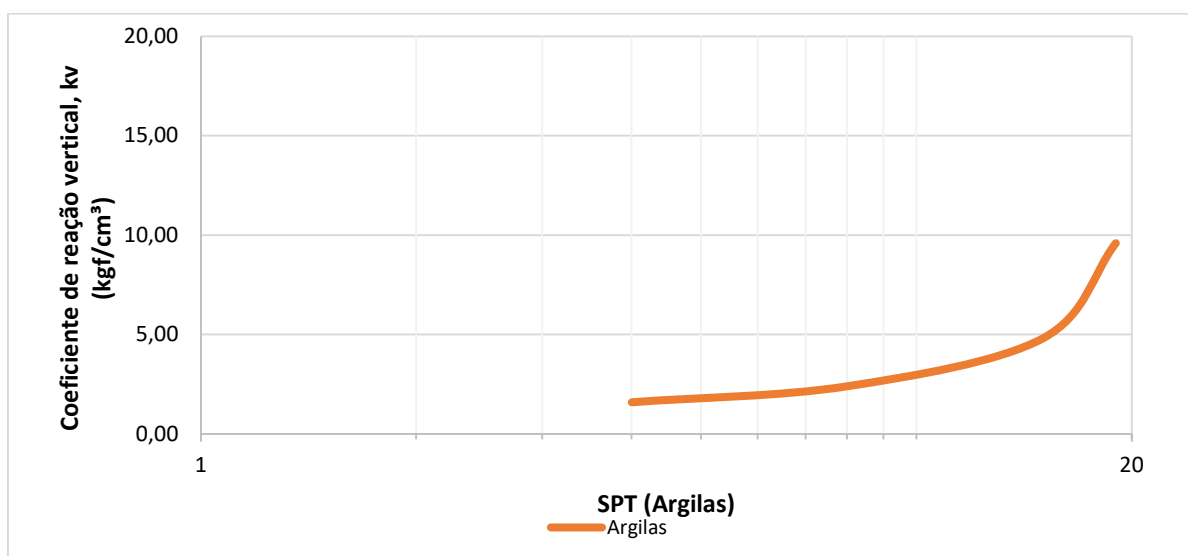


Figura A.10 – kv em argilas a partir do ensaio de placas com 30,5 cm x 30,5 cm.  
Fonte: Adaptado de TERZAGHI, 1955.

Inúmeros trabalhos foram publicados com o intuito de relacionar valores para  $k_v$  a algumas propriedades do solo, sob condições e aplicações específicas. Entre eles estão, por exemplo, os de Moraes (1976), Navfac (1982), Moayed e Naeini (2006), Naeini *et al.* (2014) e Aboelela *et al.* (2022).

A forma direta para a determinação do módulo de reação vertical é associada aos recalques esperados para uma dada fundação e consiste em calcular as reações de apoio, levando-se em consideração as ações aplicadas sobre o sistema solo-fundação.

Baseando-se na Teoria da Elasticidade, a Equação (A.18) pode ser utilizada para a determinação dos valores de deslocamentos imediatos em solos elásticos, homogêneos, isotrópicos e contínuos (PERLOFF, 1975):

$$k_v = \left( \frac{E}{1 - \nu^2} \right) \cdot \frac{I_w}{B} \quad (\text{A.18})$$

em que  $B$  é a menor dimensão da base da sapata retangular,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do solo,  $E$  é o módulo de elasticidade do solo e  $I_w$  é o fator de influência, que depende da rigidez da sapata e da razão  $L/B$ , sendo  $L$  igual à maior dimensão da base (Tabela A.4). Em sapatas rígidas, admitem-se deslocamentos uniformes de translação e rotação, sem a ocorrência de deflexões da superfície solo-fundação.