DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 913

PROJETO DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS NÃO LINEARES VIA TÉCNICAS BASEADAS EM ESCALONAMENTO DE GANHOS

Mateus Paresqui Berruezo

DATA DA DEFESA: 29/02/2016

Projeto de Controladores para Sistemas Não Lineares via Técnicas Baseadas em Escalonamento de Ganhos

Mateus Paresqui Berruezo

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Prof. Leonardo Antônio Borges Tôrres, Dr.
Prof. Reinaldo Martinez Palhares, Dr.

Belo Horizonte, fevereiro de 2016

"Projeto de Controladores para Sistemas Não Lineares Via Técnicas Baseadas em Escalonamento de Ganhos"

Mateus Paresqui Berruezo

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 29 de fevereiro de 2016.

Por:

Leonardo A. B. Tôrres
Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôrres
DELT (UFMG) - Orientador

Reinaldo Martinez Palhares
Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares
DELT (UFMG) - Coorientador

Alexandre R. Mesquita
Prof. Dr. Alexandre Rodrigues Mesquita
DELT (UFMG)

Víctor Costa da Silva Campos
Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos
DEELT (UFOP)

Agradecimentos

A Deus pelas oportunidade e bênçãos para que eu pudesse batalhar pelos meus próprios sonhos.

Ao meu pai, José Landa, e minha mãe, Maria Zeli, pelo apoio e incentivo aos estudos. Ao meu irmão Lucas, pelos momentos de descontração e por toda ajuda relativa ao mestrado.

Aos colegas e amigos do DIFCOM, pela amizade e conversas. Aos amigos Vinícius Mariano e Victor Campos, pelas incontáveis explicações e discussões esclarecedoras, os dois contribuíram muito para meu desenvolvimento.

A Gerdau por entender que seus colaboradores devem ter um senso de realização, e permitir que o trabalho e o mestrado coexistissem simultaneamente.

Em especial, aos meus orientadores, Leonardo Tôrres e Reinaldo Palhares, pela paciência, otimismo, conversas, conselhos e principalmente por acreditar no meu potencial. Serei eternamente grato por terem me aceitado como orientado. Ao prof. Rodney Rezende Saldanha por ter intervido na hora exata e corrigido meu rumo de volta a direção certa.

Obrigado.

"Where there's a will, there's a way."
— Old English Proverb

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **xiii**

Abstract **xv**

Lista de Figuras **xviii**

Lista de Tabelas **xix**

Lista de Abreviações **xxi**

1 Introdução **1**

1.1 Técnicas de Projeto baseadas em Escalonamento de Ganhos 1

1.2 Motivação 2

1.3 Objetivos 2

1.4 Justificativa 3

1.5 Organização do Texto 3

2 Representações baseadas em Modelos Lineares Locais **5**

2.1 Introdução 5

2.2 Representações Matemáticas de Sistemas Lineares 5

2.2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo 6

2.2.2 Sistemas Lineares Variantes no Tempo 6

2.2.3 Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes 7

2.3 Representações Matemáticas de Incertezas para Sistemas Lineares 8

2.3.1 Incertezas Politópicas 10
2.3.2 Incertezas Limitadas em Norma 11
2.4 Escalonamento de Ganhos Clássico 12
2.4.1 Extensão de Incertezas Politópicas para Sistemas Lineares Locais 16
2.4.2 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos Clássico 16
2.5 Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares a Parâmetros Variantes 18
2.5.1 Extensões de Incertezas Paramétricas para Sistemas LPV 20
2.5.2 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares a Parâmetros Variantes 21
2.6 Escalonamento de Ganhos por Linearizações Baseadas em Velocidade . 23
2.6.1 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos via Linearizações Baseadas em Velocidade 25
2.7 Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares Fracionárias . . 27
2.7.1 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares Fracionárias 30
2.8 Escalonamento de Ganhos por Representações Fuzzy Takagi-Sugeno . . 31
2.8.1 Extensão de Incertezas Limitadas em Norma para Sistemas Lineares Locais 33
2.8.2 Extensão de Representações Fuzzy TS Incertos para Sistemas com Modelos de Referência 34
2.8.3 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos por Representações Fuzzy TS 37
2.9 Equivalência das Representações LPV Politópicas e Fuzzy Takagi-Sugeno 39
2.10 Modelos Lineares x Representação Local 41
2.11 Considerações Finais 47

3 Estratégias de Síntese Robusta Baseadas em Escalonamento de Ganhos 51

3.1 Introdução 51

3.2 Síntese Robusta Baseada em Escalonamento de Ganhos Clássico 51

3.2.1 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Escalonamento de Ganhos Clássico 55

3.3 Síntese Robusta Baseada em Representações Lineares a Parâmetros Variantes 55

3.3.1 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Representações Lineares a Parâmetros Variantes 58

3.4 Síntese Robusta a partir de Representações via Linearizações Baseadas em Velocidade 59

3.4.1 Robô de Junta Flexível - Controlador através de Representações via Linearizações Baseadas em Velocidade 60

3.5 Síntese Robusta Baseada em Representações Lineares Fracionárias 61

3.5.1 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Representações Lineares Fracionárias 63

3.6 Síntese Robusta Baseada em Representações Fuzzy Takagi-Sugeno . . . 64

3.6.1 Extensão da Síntese Robusta para Sistemas Descritos por Representações Fuzzy TS Incertas com Modelos de Referência 66

3.6.2 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Representações Fuzzy Takagi-Sugeno 68

3.7 Considerações Finais 68

4 Exemplos de Aplicação 71

4.1 Introdução 71

4.2 Comentários acerca do Robô de Junta Flexível 71

4.3 Estabilização do Pêndulo Deslizante Incerto 72

4.4 Controle do Movimento Longitudinal de uma Aeronave de Asa Fixa . . 78

4.4.1 Controle do Modelo Longitudinal de um VANT Utilizando um Modelo de Referência e Descrições Fuzzy TS 85

4.5 Considerações Finais 88

5 Conclusões **93**

5.1 Visão Geral do Trabalho 93

5.2 Comparação das Estratégias Baseadas em Escalonamento de Ganho . . . 94

5.2.1 Representação: Escalonamento de Ganhos Clássico 94

5.2.2 Representação: LPV Politópica 95

5.2.3 Representação: Mista VBL\LPV 95

5.2.4 Representação: LFR Limitada em Norma 96

5.2.5 Representação: Fuzzy TS via Transformação do Produto Tensorial 96

5.2.6 Síntese: Escalonamento de Ganhos Clássico 97

5.2.7 Síntese: LPV Politópica 97

5.2.8 Síntese: Mista VBL\LPV 98

5.2.9 Síntese: LFR Limitada em Norma 98

5.2.10 Síntese: Fuzzy TS PDC via Transformação do Produto Tensorial . 98

5.3 Propostas de Continuidade 99

Bibliografia **109**

A Robô de Junta Flexível **111**

A.1 Definição do Sistema 111

B Parametrização da Dinâmica Longitudinal do VANT de Asa Fixa **115**

C Provas dos Teoremas **121**

C.1 Teorema 3.3.1 121

C.2 Teorema 3.5.1 122

C.3 Teorema 3.6.1 124

Resumo

O controle de sistemas não lineares é uma área na Teoria de Controle que vem sendo estudada extensivamente ao longo dos anos. Dentre as estratégias encontradas na literatura estão aquelas em que o sistema não linear é aproximado por um conjunto de sistemas lineares locais. Por sua vez, o controlador é construído sobre a aproximação e realizado de tal forma que seus ganhos são alterados de acordo com os sinais do sistema original. A este tipo de abordagem dá-se o nome de Controle baseado em Escalonamento de Ganhos.

Este trabalho procura esclarecer como cada uma das etapas de representação e síntese de controladores para sistemas não lineares são tratadas no contexto de projeto por Escalonamento de Ganhos. Para ilustrar as peculiaridades dessa abordagem, exemplos passo-a-passo do projeto são mostrados para cinco técnicas pertencentes à classe de representações por modelos lineares locais. Posteriormente são apresentadas as condições para a síntese de um controlador robusto às incertezas paramétricas.

As estratégias são implementadas em três estudos de caso com o intuito de, gradualmente, expor os pontos positivos e negativos de cada uma das cinco estratégias. No último estudo de caso, em que se considera o controle do movimento longitudinal de um VANT (Veículo Aéreo não Tripulado), são discutidas, abertamente, as diversas simplificações praticadas em trabalhos na literatura, assim como as características empíricas encontradas em algumas abordagens.

Palavras-chave: Representações de sistemas não lineares; Modelos lineares locais; Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes; Controle por Escalonamento de Ganhos; Síntese robusta para sistemas não lineares.

Abstract

Nonlinear systems control is a field in Control Theory that has been extensively studied throughout the years. Among many of the strategies found in the literature, there are those in which the nonlinear system is approximated by a collection of local linear models. The controller is built upon this approximation and synthesized in a way that its parameters are changed depending on the signals from the original system. This leads to the so called Gain Scheduling Control.

This work is dedicated to enlighten how each stage associated with the plant representation and controller synthesis is conducted in a Gain Scheduling context. A step-by-step approach is conducted for five different strategies to illustrate the process of obtaining a local linear model based representation. Robust controller synthesis conditions are then explored in order to obtain a controller that is capable of stabilizing the nonlinear system even in the presence of parametric uncertainties.

Finally, each strategy is applied in three case studies that, gradually, bring to light the ups and downs of each of the five approaches. In the last example, the longitudinal control of a UAV (Unmanned Aerial Vehicle), multiple simplifications practiced in the literature are discussed, as well as the empirical nature found in some of the mentioned techniques.

Keywords: Non linear systems representations; Local linear models; Linear Parameter Varying Systems; Gain Scheduling Control; Non linear robust control.

Lista de Figuras

2.1 Representação Multimodelo. 21
2.2 Sistema não linear incerto parametrizado. 28
2.3 Representação Linear Fracionaria do sistema parametrizado incerto. . . 28
2.4 Controle por modelo de referência completo. 35
2.5 Controle por modelo de referência parcial. 36
2.6 Funções de Pertinência para o Robô de Junta Flexível. 39
2.7 Retratos de Fase para as cinco aproximações. 44
2.8 Retratos de Fase para as cinco aproximações. 45
2.9 RF - Sobreposição Original e Linearizado. 46
2.10 RF - Sobreposição Original e LFR. 47
2.11 RF - Sobreposição Original, Repres. LPV 1, 2 e Fuzzy TS. 48
2.12 RF - Sobreposição Original e Repres. Fuzzy TS com o menor valor singular descartado. 49
2.13 RF - Sobreposição Original e Repres. Fuzzy TS com os dois menores valores singulares descartados. 50

3.1 Código de cores para as simulações com termos incertos. 52
3.2 Estratégia de projeto para Escalonamento de Ganhos Clássico. 53
3.3 Chaveamento de Controladores por sinal de escalonamento. 53
3.4 Estratégia de projeto para Escalonamento de Ganhos Clássico com sobreposição de regiões de síntese. 54
3.5 Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Escalonamento de Ganhos Clássico. 56
3.6 Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Representação LPV. . . . 59
3.7 Sistema em malha fechada utilizando um controlador diferencial. 59
3.8 Aproximação do elemento derivador por um filtro. 60
3.9 Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Linearização Baseada em Velocidade. 61
3.10 Estratégia para síntese LFR com realimentação estática. 62
3.11 Estratégia para síntese LFR com realimentação parametrizada. 63

3.12 Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Representação Linear Fracionaria. 64
3.13 Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Representação Fuzzy TS. 69

4.1 Resposta em malha fechada do Robô de Junta Flexível sujeito a cinco estratégias de controle distintas. 72
4.2 Diagrama do Pêndulo Deslizante. 73
4.3 Respostas em malha fechada para o pêndulo deslizante. 76
4.4 Funções de pertinência para M_1, M_2 e M_3. 77
4.5 Simulação em malha fechada do VANT com o controlador por Escalonamento de Ganhos Classico. 87
4.6 Funções de pertinência obtidas para o modelo do VANT pela Transformação do Produto Tensorial. 89
4.7 Simulação em malha fechada do VANT com o controlador misto Linear\Fuzzy TS. 90

A.1 Esquema Simplificado do Robô de Junta Flexível 111
A.2 Comportamento oscilatório para $x_1(0) = \theta_1(0) = \pi/3$. 113

Lista de Tabelas

2.1 Diferenças entre as representações LPV Politópica e Fuzzy Takagi-Sugeno. 42

4.1 Valores das constantes do sistema do Pêndulo Deslizante. 79
4.2 Valores das constantes do sistema do VANT. 90
4.3 Valores dos coeficientes aerodinâmicos do VANT. 91
4.4 Envelope de voo para análise. 91

A.1 Valores das constantes do sistema do Robô de Junta Flexível. 114

B.1 Parametrização da dinâmica da velocidade. 116
B.2 Parametrização da dinâmica do ângulo de ataque. 117
B.3 Parametrização da dinâmica da velocidade angular de arfagem. 118
B.4 Parametrização da dinâmica do ângulo de arfagem. 118
B.5 Parametrização da dinâmica da altitude. 119

Lista de Abreviações

ARX	Modelo Auto-regressivo com Entradas Exógenas (*Auto-regressive Models with Exogenous Inputs*);
BMI	Desigualdades Matriciais Bilineares (*Bilinear Matrix Inequality*);
HOSVD	Decomposição em Valores Singulares de Alta Ordem (*High Order Singular Value Decompostion*);
LFR	Representação Linear Fracionaria (*Linear Fractional Representation*);
LFT	Transformação Linear Fracionaria (*Linear Fractional Transformation*);
LIT	Linear Invariante no Tempo;
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequality*);
LPV	Linear a Parâmetros Variantes (*Linear Parameter Varying*);
LVT	Linear Variante no Tempo;
MIMO	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas (*Multiple-Input Multiple-Output*);
PDC	Compensação Paralela Distribuída (*Parallel Distributed Compensation*);
PPGEE	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica;
qLPV	quase-LPV (*quasi-LPV*);
RF	Retrato de Fase;
RMSE	Raiz do Erro Médio Quadrático (*Root Mean Error Square*);
SISO	Uma Entrada e Uma Saída (*Single-Input Single-Output*);
SVD	Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition*);
SVM	Máquina de Vetores de Suporte (*Support Vector Machine*);
TPMT	Transformação do Produto Tensorial (*Tensor Product Model Transformation*);
TS	Takagi-Sugeno;
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais;
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado;
VBL	Linearização Baseada em Velocidade (*Velocity Based Linearization*).

Capítulo 1

Introdução

1.1 Técnicas de Projeto baseadas em Escalonamento de Ganhos

Algumas das abordagens para controle de sistemas não lineares remetem ao uso de técnicas chamadas de controle por "Escalonamento de Ganhos". Este termo, se utilizado fora de um contexto, torna-se muito abrangente. Simplificadamente, o Escalonamento de Ganhos está associado a técnicas em que o controlador tem seus parâmetros alterados de acordo com: (i) a faixa de operação do sistema; (2) uma especificação de instantes de tempo pré-estabelecidos; ou (3) até mesmo a ocorrência de eventos externos ao sistema (Rugh e Shamma, 2000). A mudança nos ganhos pode ser feita de diversas maneiras, como projetar um controlador único e dinâmico cujos coeficientes são escalonados, realizar uma combinação de controladores descritos por regras fuzzy, chavear diretamente entre controladores locais, projetar um controlador com um núcleo estático e tratar a variação de seus coeficientes como um bloco de realimentação, dentre outras.

A abrangência da denominação "Escalonamento de Ganhos" pode trazer uma sobrecarga de informações desconexas ao leitor iniciante no assunto, já que cada técnica possui particularidades que nem sempre são intercambiáveis. Uma grande vantagem nessas abordagens é a representação das dinâmicas de sistemas não lineares como uma coleção de sistemas lineares que, por sua vez, são utilizados na análise e síntese. Adotar esse tipo de descrição permite adaptar estratégias de controle para sistemas lineares que estão relativamente bem desenvolvidas na literatura (Rugh e Shamma, 2000; Leith e Leithead, 2000; Rotondo et al., 2015).

O controle de sistemas não lineares por Escalonamento de Ganhos é uma tarefa difícil de ser sistematizada principalmente devido aos muitos graus de liberdade na escolha de uma formulação adequada (Bruzelius, 2002). De uma maneira geral, diversos trabalhos procuram dividir o ofício em quatro etapas (Kaminer, 1995; Wang, 1999; Rugh e Shamma, 2000; Won et al., 2011):

1. Obter uma representação ou aproximação válida do sistema não linear,

2. Utilizar técnicas de controle linear para projetar um controlador para a descrição aproximada do sistema,

3. Implementar o controlador de forma que os seus coeficientes sejam alterados de acordo com as variáveis de escalonamento,

4. Validar o desempenho do controlador projetado no sistema original.

A maneira como cada uma dessas etapas é tratada dependerá da estratégia adotada. Neste trabalho pretende-se evidenciar como esses passos são realizados para cinco estratégias diferentes.

1.2 Motivação

Este trabalho tem como objetivo prover uma visão geral de algumas das técnicas clássicas e modernas de projeto para sistemas não lineares incertos utilizando uma abordagem de controle por escalonamento de ganhos no tempo contínuo. Esse tipo de estratégia tem se mostrado efetiva para a análise e controle de sistemas não lineares. Tais técnicas vêm sendo aplicadas em diversas áreas, sendo algumas delas a robótica (Paijmans et al., 2008; Hoffmann et al., 2014), indústria aeroespacial (mísseis (Wu et al., 2002; Hughes et al., 2002; Pellanda et al., 2002), aeronaves (Wang, 1999; Gabernet, 2007; Hjartarson et al., 2014), especificamente Veículos Aéreos Não Tripulados (Natesan et al., 2006, 2008; Chumalee, 2010; Vanek et al., 2014; Rangajeeva e Whidborne, 2011), etc.), indústria química (Bachnas, 2012), automobilística (Poussot-Vassal et al., 2008) e setor energético (Cao et al., 2015) dentre outros.

Neste trabalho, o projeto por Escalonamento de Ganhos é investigado a partir das etapas de representação do sistema e de síntese de um controlador robusto não linear, cuja mudança contínua dos coeficientes do controlador ocorre de acordo com os valores dos sinais ou variáveis de escalonamento. A variação dos ganhos do controlador é vantajosa e permite que condições de estabilidade e rastreamento relativos ao sistema não linear incerto sejam satisfeitas mesmo em uma ampla faixa de operação.

1.3 Objetivos

- Investigar e comparar estratégias de controle para sistemas não lineares incertos baseadas em escalonamento de ganhos. Na comparação será enfatizada a generalidade da técnica quanto à classe de problemas que podem ser abordados, além da existência de garantias de estabilidade robusta na presença de incertezas paramétricas.

- Aplicar as técnicas selecionadas previamente a problemas de controle, buscando avaliá-las em aplicações práticas.

1.4 Justificativa

- Conhecer as premissas de representação e síntese, assim como limitações e qualidades para cada uma das estratégias. Desta forma é possível fazer uma escolha inicial do projeto tecnicamente direcionada, buscando resultados finais desejados como garantias de estabilidade e desempenho mesmo sob presença de incertezas.
- Entender quais, se são necessárias, e impactos de simplificações realizadas nas representações dos sistemas não lineares e síntese do controlador, assim como clarificar o porquê de tais simplificações serem encontradas na literatura.

1.5 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos da seguinte forma:

O Capítulo 1 é dedicado a uma breve introdução sobre o que é o projeto baseado em Escalonamento de Ganhos, assim como qual a motivação e justificativa para pesquisar o presente assunto.

No Capítulo 2 são apresentadas cinco estratégias baseadas em Escalonamento de Ganhos e como cada uma é utilizada para gerar uma representação de um sistema não linear incerto, o Robô de Junta Flexível. É realizado também um comparativo entre duas das cinco estratégias. Por fim é feito um estudo da capacidade de aproximação da dinâmica de um sistema não linear pelas estratégias baseadas em modelos locais.

No Capítulo 3 são definidas as estruturas dos controladores baseados em Escalonamento de Ganhos para cada uma das cinco estratégias apresentadas no Capítulo 2. As condições para síntese robusta são formuladas em um problema de Desigualdades Matriciais Lineares e os controladores são colocados em malha fechada com o Robô de Junta Flexível incerto.

No Capítulo 4 são comparados e comentados os resultados obtidos para o Robô de Junta Flexível incerto. Mais à frente, toda a metodologia investigada é aplicada a mais dois estudos de caso, o Pêndulo Deslizante e o Controle Longitudinal de uma Aeronave de Asa Fixa utilizando um modelo de referência. Este capítulo visa mostrar limitações e fazer uma crítica às estratégias apresentadas no Capítulo 2.

Por fim, no Capítulo 5 são expostas as conclusões e considerações finais sobre o trabalho, os pontos positivos e negativos de todas as técnicas apresentadas e as sugestões de propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Representações baseadas em Modelos Lineares Locais

2.1 Introdução

Um dos passos cruciais para a síntese de um bom sistema de controle é a existência de uma representação adequada do sistema a ser controlado. Para abordagens baseadas em Escalonamento de Ganhos isso significa obter representações lineares exatas ou aproximações que capturem a dinâmica do sistema não linear. Neste capítulo é introduzida a descrição linear parametrizada utilizada em todo este trabalho, especificamente em cinco estratégias de representação de sistemas não lineares comumente encontradas na literatura. Outros dois pontos são estudados, a equivalência entre duas das representações e a qualidade da aproximação por modelos lineares locais.

Nos Capítulos 2 e 3 é utilizado um sistema não linear para evidenciar as peculiaridades de representação e síntese para cada uma das cinco estratégia estudadas neste trabalho. O sistema utilizado foi o Robô de Junta Flexível Incerto, e sua descrição e equações se encontram no Apêndice A. Uma vez que as técnicas de projeto forem apresentadas, as mesmas serão utilizadas para síntese de controladores para outros sistemas, de forma a comparar a viabilidade e capacidade de aproximação.

2.2 Representações Matemáticas de Sistemas Lineares

Um ponto comum em todas as técnicas utilizadas neste e na maioria dos trabalhos que lidam com Escalonamento de Ganhos é a representação de sistemas não lineares como um sistema intermediário ao linear e ao não linear. Assume-se que modelos não lineares utilizados neste trabalho são descritos na forma de equações diferenciais ordinárias, de tal forma que representem a dinâmica do sistema real estudado. Considere que o sistema não linear é dado pelo conjunto de equações abaixo

$$\Phi_{NL} \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),w(t),u(t)), \\ z(t) = h(x(t),w(t),u(t)), \\ y(t) = g(x(t),w(t)), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $x(t) \in R^{n_x}$ são os estados do sistema, $u(t) \in R^{n_u}$ são as entradas de controle, $w(t) \in R^{n_w}$ são sinais externos ao sistema como distúrbios e referência a ser seguida, $z(t) \in R^{n_z}$ são as saídas de desempenho, como o erro, e $y(t) \in R^{n_y}$ são as saídas medidas do sistema. Adotar que a saída do sistema não depende diretamente de sinais de entrada (não há termo de ação direta) não é uma simplificação impeditiva já que a maioria dos atuadores possui algum tipo de dinâmica interna. Para entender um pouco mais sobre a descrição parametrizada é feita uma breve revisão dos modelos Lineares Invariantes no Tempo (LIT), Lineares Variantes no Tempo (LVT) e suas diferenças com modelos Lineares a Parâmetros Variantes (LPV).

2.2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo são uma classe de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais de coeficientes constantes que respeitam o princípio da superposição. Na representação em espaço de estados isso implica em coeficientes constantes nas matrizes de estados utilizadas na representação, dada por

$$\Phi_{LIT} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t), \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{1w} w(t) + D_{1u} u(t), \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{2w} w(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

com as variáveis definidas anteriormente e cujas matrizes $(A; \ldots; D_{2w})$ possuem dimensões apropriadas. No contexto de sistemas não lineares, sistemas LIT geralmente representam aproximações desses sistemas válidas apenas em regiões próximas aos pontos de análise. A teoria de análise e síntese para sistemas LIT está muito bem desenvolvida na literatura, incluindo representações de incertezas, critérios de estabilidade e garantias de desempenho.

2.2.2 Sistemas Lineares Variantes no Tempo

Sistemas Lineares Variantes no Tempo são uma classe de sistemas dinâmicos, descritos por equações diferenciais que respeitam o princípio da superposição, porém seus coeficientes variam com o tempo. Na representação em espaço de estados isso implica em matrizes de dimensões adequadas cujos coeficientes variam com o tempo, de forma que

$$\Phi_{LVT}(t) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_w(t)w(t) + B_u(t)u(t), \\ z(t) = C_1(t)x(t) + D_{1w}(t)w(t) + D_{1u}(t)u(t), \\ y(t) = C_2(t)x(t) + D_{2w}(t)w(t), \end{cases} \tag{2.3}$$

com as variáveis definidas anteriormente e cujas matrizes $(A(t); \ldots; D_{2w}(t))$ possuem dimensões apropriadas. Condições de análise e síntese para este tipo de sistema estão

relacionadas com as trajetórias a serem seguidas. Para este tipo de sistema são definidas condições iniciais e tempo de análise específicos e o estudo do mesmo é feito sobre a trajetória descrita pelo sistema (Tsakalis e Ioannou, 1992).

2.2.3 Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes

Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes, introduzidos em Shamma (1988), são uma possível representação de uma classe de sistemas não lineares cujas não linearidades podem ser parametrizadas de acordo com as chamadas variáveis de escalonamento, ρ, pertencentes a uma região de operação limitada $\rho \in \Omega_\rho \subset R^{n_\rho}$. Formalmente, se as variáveis de escalonamento são exógenas ao sistema a representação é denominada LPV e se todas, ou parte delas, forem internas ao sistema, quase-LPV (qLPV). Em ambos os casos, tais sinais variam com o tempo. Na representação em espaço de estados isso conduz a matrizes cujos coeficientes são alterados de acordo com essas variáveis, isto é,

$$\Phi_{LPV}(\rho(t)) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B_w(\rho(t))w(t) + B_u(\rho(t))u(t), \\ z(t) = C_1(\rho(t))x(t) + D_{1w}(\rho(t))w(t) + D_{1u}(\rho(t))u(t), \\ y(t) = C_2(\rho(t))x(t) + D_{2w}(\rho(t))w(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Fundamentalmente, o sistema LPV possui ligações com os outros dois sistemas de acordo com o ponto de vista adotado. Se considerada uma trajetória pré-definida $\rho = \rho(t)$ o sistema se aproxima da descrição LVT e, se for considerada uma trajetória fixa constante $\rho = \rho_0$, o sistema é reduzido a uma representação linear invariante com o tempo (Shamma, 2012).

As diferenças entre sistemas LPV e LIT são facilmente percebidas, já para sistemas LPV e LVT elas são um pouco mais sutis e, portanto, cabe um esclarecimento. Em sistemas LIT e LVT, a trajetória, ou a variação no tempo do vetor de variáveis de escalonamento (constante no caso LIT) é conhecida a priori. Desta maneira, os coeficientes da representação em espaço de estados $(A(t); \ldots; D_{2w}(t))$ devem ser conhecidos de antemão da análise/síntese, criando a percepção de uma natureza *off-line* da análise. Já em sistemas LPV, a trajetória não é conhecida a priori. Em vez disso, são impostas regiões limitadas para os parâmetros que caracterizam a representação em espaço de estados e, em alguns casos, também para variação destes parâmetros. Tais parâmetros são medidos ou estimados durante a operação, reforçando a natureza *on-line* da análise e da atuação do controlador (Shamma e Athans, 1991; Rugh e Shamma, 2000; Bamieh e Giarre, 2001). Desta maneira, a variação da dinâmica do sistema não está associada diretamente com o tempo, mas com variações de um sinal "livre". Portanto, a dependência explícita com o tempo não será adotada e será feita a referência de $\rho(t)$ simplesmente como ρ. É interessante notar que, ao definir uma região de operação, as análises LPV (estabilidade, rejeição a distúrbio, rastreamento, etc.) serão válidas para uma família de sistemas LVT em vez de um sistema LVT único, já que a trajetória não

foi definida, apenas se supôs limitada (Shamma, 2012). A infinidade de trajetórias que o sistema LPV contém, semelhante a uma Inclusão Linear Diferencial (LDI), o torna automaticamente uma descrição mais conservadora do que uma descrição LVT adotada para uma única trajetória. Uma possível maneira de reduzir esse conservadorismo é escolher uma descrição LPV adequada, cautelosamente escolhendo as variáveis de parametrização e intervalos de análise das mesmas (Bruzelius et al., 2004).

Existem algumas propriedades importantes que devem ser consideradas na formulação LPV inicial para que seja factível o projeto de um sistema de controle adequado. A primeira é que exista uma relação entre os parâmetros $\rho \in \Omega_\rho$ e as variáveis livres, de tal forma que a representação LPV e a descrição do sistema não linear original sejam iguais, isto é,

$$\begin{cases} f(x,w,u) = A(\rho)x + B_w(\rho)w + B_u(\rho)u, \\ h(x,w,u) = C_1(\rho)x + D_{1w}(\rho)w + D_{1u}(\rho)u, \\ g(x,w,0) = C_2(\rho)x + B_{2w}(\rho)w. \end{cases}$$

O principal ponto desta suposição é garantir que as trajetórias do sistema LPV e do sistema original sejam as mais próximas possíveis (Bruzelius, 2004), desta forma o controlador desenvolvido a partir da representação LPV será adequado para estabilização do sistema não linear original. Esse requisito nem sempre é válido devido a dificuldades em se obter um modelo exato. Em alguns casos especiais de aproximação é possível determinar qual a diferença entre a planta original e a representação LPV e podem-se adotar medidas de controle robusto para projetar um controlador que leve em consideração os erros de modelo (Senthilkumar, 2010; Campos et al., 2015).

Uma hipótese comumente encontrada é a de que os parâmetros de escalonamento são conhecidos e medidos ou estimados dentro da região de operação $\rho \in \Omega_\rho$, justamente para que o escalonamento seja possível. Alguns autores como Tanaka e Sano (1994) discutem o projeto de controladores com variáveis de escalonamento ou premissa incertas ou premissas que dependem de sinais das entradas e saídas (Al-Gallaf, 2008; Betancor-Martín et al., 2013), mas tais abordagem levam a condições de análise e síntese mais complexas e não foram consideradas neste trabalho.

2.3 Representações Matemáticas de Incertezas para Sistemas Lineares

Devido à natureza linear das representações baseadas em Escalonamento de Ganhos, é natural recorrer a essa descrição para tentar modelar outras características do sistema como, por exemplo, suas incertezas. O controle robusto é um ramo da Teoria de Controle que visa a análise do sistema e síntese do controlador mesmo sob influência de incertezas que podem ser provenientes de ruídos de medição, distúrbios externos

ou do próprio modelo do sistema.

Em geral, as incertezas podem ser classificadas como incertezas não paramétricas, paramétricas, não estruturadas e estruturadas.

- Incertezas não paramétricas: São incertezas em relação à dinâmica, estrutura ou ordem do sistema. Normalmente são provenientes de dinâmicas não modeladas (Cuenca, 2009), simplificações no processo de identificação, retardos no tempo, modos de alta frequência (Pereira, 2008) e inclusão de dinâmica de atuadores e sensores, dentre outras. São incertezas que não estão limitadas aos coeficientes das equações do sistema.

- Incertezas paramétricas: São incertezas presentes diretamente nos coeficientes das equações do sistema. Normalmente são originados devido à imprecisão de medição, falhas num processo de fabricação e desgastes (Cardoso, 2006). A principal característica desse tipo de incerteza é que a estrutura e ordem do modelo são exatamente conhecidas e as incertezas nos parâmetros estão contidas dentro de um conjunto conhecido ou limitado (Scherer, 2001).

- Incertezas não estruturadas: São aquelas cujo bloco de incertezas que perturbam o sistema não possui uma estrutura em particular. Neste caso, a matriz de incertezas é limitada em norma, porém sua estrutura interna não é definida e, em geral, não podem ser escritas em função de um único parâmetro (Silva, 2005). É usual representar a maneira como essa incerteza afeta o sistema através de configurações especiais em conjunto com a planta, como a configuração aditiva, multiplicativa e aditiva inversa dentre outras (Balas et al., 2015).

- Incertezas estruturadas: São aquelas cujo bloco de incertezas que perturbam o sistema são parcial ou completamente conhecidos em estrutura e valores. Desta maneira é possível reescrever o sistema incerto utilizando descrições politópicas, polinomiais, multi-simplex e limitadas em norma, de forma a evidenciar a magnitude e localização do termo incerto. Essas informações podem ser diretamente incorporadas na síntese, permitindo obter um controlador robusto a tais incertezas.

Ao longo deste trabalho serão estudados sistemas sujeitos exclusivamente a incertezas presentes nos coeficientes das equações diferenciais, ou seja, paramétricas. Alguns trabalhos como Marcos et al. (2010) projetam controladores utilizando estratégias de controle ótimo ou que minimizam algum tipo de norma, como a $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, e, durante a etapa de simulação, alteram coeficientes da planta original para testar a robustez do controlador. Esse tipo de abordagem não deve ser classificada como robusta no sentido de projeto, já que a informação referente às incertezas não foi considerada na etapa de síntese. A descrição formal das incertezas deve acontecer *a priori* a esta etapa,

desta forma podem-se escrever condições especificadas por Desigualdades Matriciais Lineares (LMI) que incorporem a descrição, levando a controladores naturalmente robustos.

No que se diz respeito a encontrar a descrição das incertezas presentes no sistema, existem duas abordagens clássicas. Em casos que não se conhecem as equações do sistema ou em que se irão utilizar de métodos de identificação para obter o modelo, é usual utilizar métodos numéricos para obter a descrição das mesmas. Uma maneira é utilizando uma grade de amostragem com valores dentro dos limites dos parâmetros incertos. A acurácia de tal abordagem dependerá diretamente do espaçamento entre elementos dessa grade sendo que, quanto menor, melhor. Evidentemente, a única maneira de garantir a melhor representação possível seria fazer o intervalo da grade extremamente pequeno, porém tal condição é inviável devido a restrições computacionais.

Em sistemas regidos por equações conhecidas com estrutura e valor das incertezas bem definidos é possível utilizar técnicas algébricas. A seguir são apresentadas duas abordagens para representar incertezas em sistemas lineares e, ao longo do trabalho, elas serão estendidas para as representações parametrizadas de sistemas não lineares.

2.3.1 Incertezas Politópicas

Considere o sistema linear sujeito a incertezas paramétricas

$$\hat{\Phi}_{LIT}\begin{cases}\dot{x}(t) = \hat{A}(\delta)x(t) + \hat{B}_w(\delta)w(t) + \hat{B}_u(\delta)u(t),\\ z(t) = \hat{C}_1(\delta)x(t) + \hat{D}_{1w}(\delta)w(t) + \hat{D}_{1u}(\delta)u(t),\\ y(t) = \hat{C}_2(\delta)x(t) + \hat{D}_{2w}(\delta)w(t),\end{cases} \tag{2.5}$$

tal que o vetor de incertezas δ é desconhecido, porém limitado em valores máximos e mínimos pertencentes a intervalos definidos,

$$\delta \triangleq [\delta_1,\ldots,\delta_{n_d}]^T, \qquad com \qquad \delta \in \Omega_\delta = [\underline{\delta_1},\overline{\delta_1}]\times\ldots\times[\underline{\delta_{n_d}},\overline{\delta_{n_d}}]. \tag{2.6}$$

O sistema incerto pode ser escrito como a combinação convexa de todos os possíveis valores extremos das incertezas para todos os $N_d = 2^{n_d}$ possíveis termos incertos (Minh e Rani, 2009), tal que

$$\hat{\Phi}_{LIT}(\delta) \subseteq \Phi_{LIT}(\beta) = \beta_1 \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & B_{w_1} & B_{u_1}\\ C_{1_1} & D_{1w_1} & D_{1u_1}\\ C_{2_1} & D_{2w_1} & 0\end{bmatrix}}_{\Phi_{LIT_1}} + \ldots + \beta_{N_d} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{N_d} & B_{w_{N_d}} & B_{u_{N_d}}\\ C_{1_{N_d}} & D_{1w_{N_d}} & D_{1u_{N_d}}\\ C_{2_{N_d}} & D_{2w_{N_d}} & 0\end{bmatrix}}_{\Phi_{LIT_{N_d}}}, \tag{2.7}$$

com

$$\sum_{j=1}^{N_d} \beta_j = 1 \qquad e \qquad \beta_j \geq 0, \forall j = 1,\ldots,N_d.$$

Portanto o sistema incerto estará contido num politopo $\mathcal{P}$ formado pelos sistemas com todas as combinações das incertezas,

$$\mathcal{P} = co\{\Phi_{LIT_1};\ldots;\Phi_{LIT_j};\ldots;\Phi_{LIT_{N_d}}\}, \tag{2.8}$$

onde *co* representa o fecho convexo $\mathcal{P}$ formado pelo conjunto de sistemas vértices (Φ_{LIT_j}). Um sistema vértice j, no contexto de incertezas, é o conjunto de matrizes do sistema ($A_j;\ldots;D_{2w_j}$) dados para uma possível combinação de valores de incertezas. A quantidade de sistemas nesse politopo cresce exponencialmente com o número de termos incertos, aumentando consideravelmente a carga computacional das análises. A principal vantagem dessa representação é a simplicidade de se obter os modelos que representam o sistema incerto.

2.3.2 Incertezas Limitadas em Norma

Considere uma segunda descrição do sistema linear sujeito a incertezas paramétricas

$$\hat{\Phi}_{LIT}\begin{cases}\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B_w + \Delta B_w(t))w(t) + (B_u + \Delta B_u(t))u(t),\\ z(t) = (C_1 + \Delta C_1(t))x(t) + (D_{1w} + \Delta D_{1w}(t))w(t) + (D_{1u} + \Delta D_{1u}(t))u(t),\\ y(t) = (C_2 + \Delta C_2(t))x(t) + (D_{2w} + \Delta D_{2w}(t))w(t).\end{cases} \tag{2.9}$$

Neste tipo de formulação é realizada a separação matemática dos termos incertos e dos nominais. Esse procedimento é necessário para representar cada uma das matrizes incertas como a multiplicação de outras três matrizes da forma

$$\Delta\Upsilon(t) = M_\Upsilon \Delta_\Upsilon(t) N_\Upsilon \qquad com \qquad \Upsilon \in \{A; B_w; B_u; \ldots; D_{2w}\} \qquad e \qquad \|\Delta_\Upsilon(t)\| < 1. \tag{2.10}$$

As matrizes M_Υ e N_Υ definem a estrutura e a magnitude das incertezas no sistema. O termo central $\Delta_\Upsilon(t)$ é desconhecido, porém limitado em norma, representando as incertezas em si. Esta descrição de incerteza não aumenta a quantidade de sistemas vértices, porém aumenta o número de matrizes agregadas ao sistema necessárias para descrever os termos incertos.

2.4 Escalonamento de Ganhos Clássico

A abordagem por Escalonamento de Ganhos Clássico foi uma das primeiras a serem estudadas no âmbito de projetar controladores cujos ganhos fossem alterados durante a operação da planta. Sua premissa é obter representações locais do sistema não linear e projetar um controlador local distinto para cada ponto escolhido. Desta forma, podem-se utilizar técnicas de controle linear clássico que estão amplamente desenvolvidas. Em geral, o sistema não linear é linearizado em pontos de equilíbrio que fazem parte da região de análise Ω_ρ. A maneira mais usual é utilizando a linearização Jacobiana em torno de uma quantidade arbitrária de pontos de equilíbrio. Isto gera um conjunto de sistemas LIT locais que representam exatamente o sistema não linear no ponto de equilíbrio e aproximadamente em torno do mesmo. Define-se um ponto de equilíbrio em (2.1) como

$$p^{eq} = (x^{eq}, w^{eq}, u^{eq}),$$

tal que

$$\begin{cases} 0 = f(x^{eq}, w^{eq}, u^{eq}), \\ z^{eq} = h(x^{eq}, w^{eq}, u^{eq}), \\ y^{eq} = g(x^{eq}, w^{eq}). \end{cases} \tag{2.11}$$

Desta maneira pode-se representar localmente o sistema não linear através da linearização no ponto p^{eq},

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(p^{eq}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p^{eq}} (x(t) - x^{eq}) + \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{p^{eq}} (w(t) - w^{eq}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p^{eq}} (u(t) - u^{eq}) + t.o.s., \\ z(t) = h(p^{eq}) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{p^{eq}} (x(t) - x^{eq}) + \left.\frac{\partial h}{\partial w}\right|_{p^{eq}} (w(t) - w^{eq}) + \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{p^{eq}} (u(t) - u^{eq}) + t.o.s., \\ y(t) = g(p^{eq}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{p^{eq}} (x(t) - x^{eq}) + \left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_{p^{eq}} (w(t) - w^{eq}) + t.o.s. \end{cases} \tag{2.12}$$

Desconsiderando os termos de ordem superior ($t.o.s.$) e por se tratar de um ponto de equilíbrio, isto é,

$$f(p^{eq}) = 0, \tag{2.13}$$

com a seguinte mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} &\delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - 0, \qquad \delta z(t) = z(t) - z^{eq}, \qquad \delta y(t) = y(t) - y^{eq}, \\ &\delta x(t) = x(t) - x^{eq}, \qquad \delta u(t) = u(t) - u^{eq}, \qquad \delta w(t) = w(t) - w^{eq}, \end{aligned}$$

e definindo

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p^{eq}} = A, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{p^{eq}} = B_w, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p^{eq}} = B_u,\\
&\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{p^{eq}} = C_1, \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial w}\right|_{p^{eq}} = D_{1w}, \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{p^{eq}} = D_{1u},\\
&\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{p^{eq}} = C_2, \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_{p^{eq}} = D_{2w},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

é possível escrever

$$\Phi^{eq}\begin{cases}
\delta\dot{x}(t) \approx A\delta x(t) + B_w\delta w(t) + B_u\delta u(t),\\
\delta z(t) \approx C_1\delta x(t) + D_{1w}\delta w(t) + D_{1u}\delta u(t),\\
\delta y(t) \approx C_2\delta x(t) + D_{2w}\delta w(t).
\end{cases} \tag{2.15}$$

Adotando essa representação, a abordagem por Escalonamento de Ganhos é concretizada fazendo com que os pontos de equilíbrio sejam alterados por uma variável ρ, gerando uma família de sistemas linearizados, escalonados por ρ. É possível construir um modelo parametrizado baseado apenas em modelos locais obtidos pela linearização em uma quantidade arbitrária de pontos, especificados por

$$p^{eq}(\rho) = (x^{eq}(\rho), w^{eq}(\rho), u^{eq}(\rho)),$$

tais que

$$\Phi^{eq}_{Lin}(\rho)\begin{cases}
0 = f(x^{eq}(\rho), w^{eq}(\rho), u^{eq}(\rho)),\\
z^{eq}(\rho) = h(x^{eq}(\rho), w^{eq}(\rho), u^{eq}(\rho)),\\
y^{eq}(\rho) = g(x^{eq}(\rho), w^{eq}(\rho)).
\end{cases} \tag{2.16}$$

Parametrizando as linearizações do sistema,

$$\Phi_{Lin}(\rho)\begin{cases}
\delta\dot{x}(t) = A(\rho)\delta x(t) + B_w(\rho)\delta w(t) + B_u(\rho)\delta u(t),\\
\delta z(t) = C_1(\rho)\delta x(t) + D_{1w}(\rho)\delta w(t) + D_{1u}(\rho)\delta u(t),\\
\delta y(t) = C_2(\rho)\delta x(t) + D_{2w}(\rho)\delta w(t),
\end{cases} \tag{2.17}$$

onde agora existe uma dependência explícita com o parâmetro variante,

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - 0, \qquad \delta z(t) = z(t) - z^{eq}(\rho), \qquad \delta y(t) = y(t) - y^{eq}(\rho),\\
&\delta x(t) = x(t) - x^{eq}(\rho), \qquad \delta u(t) = u(t) - u^{eq}(\rho), \qquad \delta w(t) = w(t) - w^{eq}(\rho),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p^{eq}(\rho)} = A(\rho), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{p^{eq}(\rho)} = B_w(\rho), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p^{eq}(\rho)} = B_u(\rho),\\
&\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{p^{eq}(\rho)} = C_1(\rho), \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial w}\right|_{p^{eq}(\rho)} = D_{1w}(\rho), \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{p^{eq}(\rho)} = D_{1u}(\rho),\\
&\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{p^{eq}(\rho)} = C_2(\rho), \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_{p^{eq}(\rho)} = D_{2w}(\rho).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Os modelos locais são então interpolados, por exemplo, linearmente. Enquanto tal estratégia é matematicamente simples, ela gera uma representação que, na melhor das hipóteses, é aproximada. O sistema original é um sistema dinâmico único, enquanto o modelo apresentado é uma série de sistemas LIT, cada um com suas próprias entradas, saída e estados, agrupados por algum artifício matemático. Em suma, os dois sistemas possuem ligações fracas e não se pode garantir que as dinâmicas dos dois sejam sequer similares (Bruzelius, 2004).

Apesar da a linearização Jacobiana a partir das equações não lineares ser um método bastante comum encontrado na literatura para Escalonamento de Ganhos, existem autores que empregam métodos de identificação numérica caixa-cinza ou caixa-preta. As técnicas de identificações são divididas em duas classes, globais e locais. Na identificação global visa-se obter o sistema parametrizado diretamente através de experimentos em que as entradas, estados e parâmetros de escalonamento estão constantemente variando. A identificação local consiste em utilizar diversos modelos LIT (obtidos por linearização, dados de entrada/saída ou congelamento das variáveis de escalonamento) e utilizar uma técnica de interpolação para gerar um modelo parametrizado (Turk et al., 2015). A vantagem da identificação global é a capacidade de capturar melhor a dinâmica do sistema e fornecer uma aproximação de alta fidelidade, porém a abordagem é restrita em muitos casos já que nem sempre é possível controlar perfeitamente a maneira como os estados se comportam e como as variáveis de escalonamento afetam o sistema (Caigny et al., 2008). Na identificação local podem ser aplicadas técnicas bem desenvolvidas de identificação LIT, porém a aproximação só será aceitável para sistemas com dependência estática nos parâmetros de escalonamento (dependência nos valores instantâneos dos parâmetros). Ela também é indicada principalmente para sistemas que possuem uma dinâmica mais lenta (Caigny et al., 2008) e a captura da mesma dependerá, em grande parte, da estratégia de interpolação (Khalate et al., 2009).

Apesar do foco deste trabalho ser o modelamento algébrico, a identificação numérica vem crescendo rapidamente no número de publicações, porém não sem questões que ainda devem ser respondidas. Em Bachnas (2012) é aplicada uma estratégia caixa-cinza para identificar uma coluna de destilação de alta pureza. Assim como no caso fenomenológico, é gerada uma quantidade arbitrária de sistemas LTI baseados em pontos de operação da planta. São utilizados três tipos de interpolações nos parâmetros

de escalonamento ρ: por função de base radial, polinomial e bilinear. O autor alerta que a quantidade de sistemas locais que devem ser levantados, assim como quais variáveis de escalonamento devem ser escolhidas são uma tarefa a ser definida pelo projetista e não existe um procedimento sistemático para tal escolha. Um fato ainda mais agravante é que a aproximação local não garante que a dinâmica do sistema não linear seja capturada. Isso é comprovado quando o autor simula o sistema identificado, evidenciando a presença de oscilações ausentes no sistema original. Tal comportamento não consegue ser explicado pelo autor do artigo.

Em Khalate et al. (2009) é utilizada uma estratégia de minimização sobre a distância euclidiana entre o sistema original e o estimado, também utilizando modelos LTI em pontos de operação. O sistema estimado é realizado como uma função polinomial das variáveis de escalonamento, sendo estas escolhidas arbitrariamente. Ainda, são necessárias simplificações como desconsiderar transientes entre os pontos de operação e conhecer exatamente o sistema não linear original, fato impeditivo em identificação tipo caixa-preta.

Mesmo em trabalhos recentes como em Nanhu e Wen (2013) a linearização em pontos de operação é necessária. Nesse trabalho, o autor sugere que a escolha de número de funções base polinomiais para a aproximação LPV seja baseada em uma decomposição de valores singulares do sistema. Nota-se que tal estratégia é adotada apenas para evitar uma escolha aleatória inicial das funções base do modelo. Apesar da aproximação final ser visualmente semelhante ao sistema original, a resposta em frequência para pontos fixos diverge em alguns casos. Por fim, não são apresentadas garantias matemáticas de que a aproximação represente de fato o sistema original ou possa ser usada em uma classe mais ampla de sistemas não lineares.

Em trabalhos que lidam exclusivamente com identificação em vez de projeto, são aplicadas estratégias baseadas em modelos ARX (*Auto-regressive Models with Exogenous Inputs*) ou SVM (*Support Vector Machine*), gerando modelos mistos LPV-ARX ou LPV-SVM, identificados através de mapeamentos de entrada-saída. Tais métodos são principalmente utilizados em sistemas de "fácil" identificação (Larimore et al., 2015) por sofrerem de problemas como parametrizações restritas para poder obter um modelo em espaço de estados, grande carga computacional, dificuldade na convergência do problema de otimização iterativo não linear (Verdult et al., 2002), falha na identificação da dinâmica do sistema e aumento exponencial na complexidade computacional com o número de estados, entradas, saídas e variáveis de escalonamento (Wingerden e Verhaegen, 2002).

É interessante notar que, em geral, a principal preocupação é obter um modelo do sistema não linear de forma a gerar uma representação qualquer em que seja possível projetar um controlador. Mesmo que garantias de desempenho e estabilidade não existam durante a síntese, a mesma é conduzida e testada exaustivamente em simulações. Uma classe de problemas em que tal fenômeno é recorrente é o controle de aeronaves de asa fixa. Uma revisão de trabalhos que abordam essa classe de sistemas será feita

na Seção 4.4.

2.4.1 Extensão de Incertezas Politópicas para Sistemas Lineares Locais

A análise linear local do Escalonamento de Ganhos Clássico elimina as relações com o sistema original, e é difícil obter uma descrição formal única das incertezas que garantam uma conexão com o sistema não linear. Portanto, neste caso, as incertezas são tratadas individualmente para cada sistema linearizado. Se for utilizada a linearização analítica podem-se escrever as incertezas, politópicas ou limitadas em norma, de acordo com as derivadas parciais do sistema. Se a linearização numérica for aplicada, é usual gerar uma grade com diversos valores de parâmetros e realizar a linearização múltiplas vezes para um mesmo ponto até que seja obtida a descrição do pior caso para incertezas.

2.4.2 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos Clássico

Nesta seção o Robô de Junta Flexível é escrito para uma representação por Escalonamento de Ganhos Clássico. O primeiro passo é obter pontos de equilíbrio dentro da região de análise. Da equação (A.2) tem-se,

$$\begin{cases} 0 = x_2, \\ 0 = -\frac{mgl}{I_1}\sin(x_1) - \frac{K}{I_1}x_1 + \frac{K}{I_1}x_3, \\ 0 = x_4, \\ 0 = \frac{K}{I_2}x_1 - \frac{K}{I_2}x_3 + \frac{1}{I_2}u. \end{cases} \tag{2.19}$$

Definindo $x_1 = x_1^{eq}$ como o ponto de equilíbrio de interesse é possível escrever uma parametrização das demais variáveis da forma

$$\begin{cases} x_2^{eq} = 0, \\ x_3^{eq} = \left[\frac{mgl}{I_1}\sin(x_1^{eq}) + \frac{K}{I_1}x_1^{eq}\right]\frac{I_1}{K}, \\ x_4^{eq} = 0, \\ u^{eq} = \left[-\frac{K}{I_2}x_1^{eq} + \frac{K}{I_2}x_3^{eq}\right]I_2. \end{cases} \tag{2.20}$$

Se $x_1^{eq} = \rho$ parametrizam-se os pontos de equilíbrio como

$$p^{eq}(\rho) = ([\rho,0,x_3^{eq}(\rho),0]^T; u^{eq}(\rho,x_3^{eq})),$$

com

$$x_3^{eq}(\rho) = \left[\frac{mgl}{I_1}\sin(\rho) + \frac{K}{I_1}\rho\right]\frac{I_1}{K}, \qquad e \qquad u^{eq}(\rho,x_3^{eq}) = \left[-\frac{K}{I_2}\rho + \frac{K}{I_2}x_3^{eq}(\rho)\right]I_2.$$

Se o objetivo do problema é a estabilização da junta no ângulo zero, o único ponto de equilíbrio a ser considerado na região é esse:

Estabilização em $x_1^{eq} = \rho = 0$, portanto

$$x_1^{eq} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3^{eq} = 0, \\ u^{eq} = 0. \end{cases}$$

Obtendo as derivadas parciais,

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial u}\right|_{p^{eq}(\rho)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \delta x_2,$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left(-\frac{mgl}{I_1} - \frac{K}{I_1}\right)\delta x_1, \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{p^{eq}(\rho)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \frac{K}{I_1}\delta x_3,$$

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_3}{\partial u}\right|_{p^{eq}(\rho)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f_3}{\partial x_4}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \delta x_4,$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \frac{K}{I_2}\delta x_1, \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right|_{p^{eq}(\rho)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right|_{p^{eq}(\rho)} = -\frac{K}{I_2}\delta x_3, \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial u}\right|_{p^{eq}(\rho)} = \frac{1}{I_2}\delta u,$$

tem-se que

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \\ \delta\dot{x}_3 \\ \delta\dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{I_1} - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \delta u. \tag{2.21}$$

Utilizando a representação politópica para incertezas,

$$\delta_m = m \in [\underline{m},\overline{m}] \qquad e \qquad \delta_K = K \in [\underline{K},\overline{K}],$$

cujo universo de incertezas é a combinação convexa dos valores extremos,

$$\Omega_\delta = \delta_m \times \delta_K = [\underline{m},\overline{m}] \times [\underline{K},\overline{K}],$$

geram-se quatro possíveis vértices para cada sistema linearizado. Para o único ponto de equilíbrio os quatro sistemas gerados são

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\\ \delta\dot{x}_3\\ \delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{mgl}{I_1} - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{I_2}\end{bmatrix} u,$$

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\\ \delta\dot{x}_3\\ \delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{mgl}{I_1} - \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\overline{K}}{I_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{\overline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\overline{K}}{I_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{I_2}\end{bmatrix} u,$$

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\\ \delta\dot{x}_3\\ \delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{\overline{m}gl}{I_1} - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{I_2}\end{bmatrix} u,$$

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}_1\\ \delta\dot{x}_2\\ \delta\dot{x}_3\\ \delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{\overline{m}gl}{I_1} - \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\overline{K}}{I_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{\overline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\overline{K}}{I_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_1\\ \delta x_2\\ \delta x_3\\ \delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{I_2}\end{bmatrix} u.$$

2.5 Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares a Parâmetros Variantes

A representação (q)LPV genérica consiste, sumariamente, em substituir os termos não lineares por parâmetros ρ que variam de acordo com algum sinal externo ou interno ao sistema. Em descrições puramente LPV os sinais de escalonamento são normalmente dados em função do tempo, enquanto para formulações qLPV são parametrizados diretamente pelos estados do sistema. Em ambos os casos existe uma região Ω_ρ fixa de valores definidos que podem ser assumidos por esses sinais.

As representações LPV podem ser feitas de diversas maneiras. Por exemplo, Yiqing et al. (2012) realiza a aproximação como uma combinação politópica de sistemas lineares através dos sinais de escalonamento. Wu e Pranja (2004) adotam uma expansão polinomial da planta. Theis et al. (2015) utilizam uma parametrização LPV cuja análise é feita por gradeamento.

Há ainda casos em que não se possui a equação do sistema original, ou em que a obtenção manual do modelo é extremamente complexa e neste caso opta-se por técnicas de identificação. Bamieh e Giarre (2001) aplicam algoritmos de mínimos quadrados e mínimos quadrados ponderados, Previdi e Lovera (2001) usam uma rede

neural para identificar os coeficientes da aproximação e as funções de ativação atuam como agentes escalonadores e em Feng et al. (2015) é utilizado um algoritmo genético para obter uma aproximação do sistema não linear original. Todas essas descrições distintas se encaixam no universo LPV, mas a única conexão entre elas é o sistema não linear original já que cada formulação possui peculiaridades que impactam tanto na representação quanto na síntese, particularmente em relação ao número e dimensões das condições LMI.

Considere que o modelo LPV genérico seja dado por

$$\Phi_{LPV}(\rho)\begin{cases}\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B_w(\rho)w(t) + B_u(\rho)u(t),\\ z(t) = C_1(\rho)x(t) + D_{1w}(\rho)w(t) + D_{1u}(\rho)u(t),\\ y(t) = C_2(\rho)x(t) + D_{2w}(\rho)w(t).\end{cases} \tag{2.22}$$

A transformação do sistema não linear para a forma LPV não é trivial, principalmente devido a não unicidade dessa formulação. Tal fato é explorado na Seção 2.10 no final deste capítulo.

Neste trabalho o foco adotado foi a representação LPV dos sistemas não lineares através de um modelo exclusivamente quase-LPV politópico. Um sistema LPV é denominado politópico quando ele pode ser representado pelas matrizes de estado $(A(\rho); \ldots; D_{2w}(\rho))$ onde o vetor de variáveis de escalonamento varia sobre um politopo fixo, e as dependências das matrizes de estado sobre ρ é afim, resultando numa representação politópica escrita como

$$\Phi_{Poly}(\rho)\begin{cases}\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho)\{A_i x(t) + B_{w_i} w(t) + B_{u_i} u(t)\},\\ z(t) = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho)\{C_{1_i} x(t) + D_{1w_i} w(t) + D_{1u_i} u(t)\},\\ y(t) = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho)\{C_{2_i} x(t) + D_{2w_i} w(t)\},\end{cases} \tag{2.23}$$

cujas matrizes LIT $(A_i; \ldots; D_{2w_i})$, que representam o sistema sobre o politopo, são chamadas de sistemas vértices. A função $\Pi_i(\rho) \in R^+$, usada na decomposição politópica e escalonamento, respeita as seguintes restrições matemáticas,

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho) = 1 \qquad e \qquad \Pi_i(\rho) \geq 0,\ \forall i = 1 \ldots N,\ \forall \rho \in \Omega_\rho,$$

garantindo uma representação convexa do sistema. A decomposição politópica do sistema qLPV sobre uma determinada região Ω_ρ pode ser feita, por exemplo, utilizando a técnica da não linearidade de setor proposta inicialmente em Kawamoto et al. (1992) para sistemas monovariáveis e depois estendida por Tanaka e Ohtake (2001) para sistemas multivariáveis. Outra maneira é usando a técnica da caixa delimitadora (*bounding box*) como apresentada em Rotondo et al. (2015). Em ambos os casos os sistemas vértices são combinados convexamente gerando a aproximação ou o modelo exato do sistema, descrito por (2.23).

2.5.1 Extensões de Incertezas Paramétricas para Sistemas LPV

A partir da descrição LPV politópica é possível expandir a descrição de incertezas paramétricas utilizada na abordagem linear. Inicialmente, as incertezas politópicas serão estendidas para este tipo de parametrização LPV. Considere a representação simplificada do sistema LPV politópico incerto,

$$\hat{\Phi}_{Poly}(\rho) = \Pi_1 \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_{w_1} & \hat{B}_{u_1} \\ \hat{C}_{1_1} & \hat{D}_{1w_1} & \hat{D}_{1u_1} \\ \hat{C}_{2_1} & \hat{D}_{2w_1} & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}_{Poly_1}} + \ldots + \Pi_N \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_N & \hat{B}_{w_N} & \hat{B}_{u_N} \\ \hat{C}_{1_N} & \hat{D}_{1w_N} & \hat{D}_{1u_N} \\ \hat{C}_{2_N} & \hat{D}_{2w_N} & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}_{Poly_N}}. \tag{2.24}$$

Os sistemas vértices ($\hat{\Phi}_{Poly_i}$) gerados são agora sistemas vértices incertos e não devem entrar nas etapas posteriores de projeto sem que as incertezas sejam adequadamente representadas. Conforme descrito na Seção 2.3.1 cada sistema linear incerto pode ser decomposto em uma combinação convexa de sistemas conhecidos. Aplicando essa estratégia a um dos sistemas vértices que compõem a descrição LPV tem-se,

$$\hat{\Phi}_{Poly_i}(\delta) \subseteq \Phi_{Poly_i}(\beta) = \beta_{i1} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{i1} & B_{w_{i1}} & B_{u_{i1}} \\ C_{1_{i1}} & D_{1w_{i1}} & D_{1u_{i1}} \\ C_{2_{i1}} & D_{2w_{i1}} & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_{Poly_{i1}}} + \ldots + \beta_{ij} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{iN_d} & B_{w_{iN_d}} & B_{u_{iN_d}} \\ C_{1_{iN_d}} & D_{1w_{iN_d}} & D_{1u_{iN_d}} \\ C_{2_{iN_d}} & D_{2w_{iN_d}} & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_{Poly_{ij}}}, \tag{2.25}$$

com

$$\sum_{j=1}^{N_d} \beta_{ij} = 1 \qquad e \qquad \beta_{ij} \geq 0, \forall j = 1, \ldots, N_d, \forall \delta \in \Omega_\delta.$$

Desta maneira cada matriz de um respectivo sistema vértice ($\Phi_{Poly_{ij}}$) é agora conhecida, objetivando representar as incertezas paramétricas originalmente presentes no sistema não linear que se refletem nos parâmetros dos modelos lineares locais associados a diferentes regiões de operação. Trata-se de uma representação multimodelo do sistema, um politopo para a região de operação e outro para as incertezas. Essa representação multimodelo é ilustrada na Figura 2.1.

Apesar de terem sido impostas condições nas funções de "escalonamento" das incertezas (β_{ij}), estas não são conhecidas e o único objetivo é aplicar restrições e limites para as incertezas. Como tanto o modelo quanto as incertezas possuem uma forma politópica, é possível que condições que nunca serão realizadas no sistema real sejam capturadas pelo modelo LPV incerto, gerando assim uma representação conservadora.

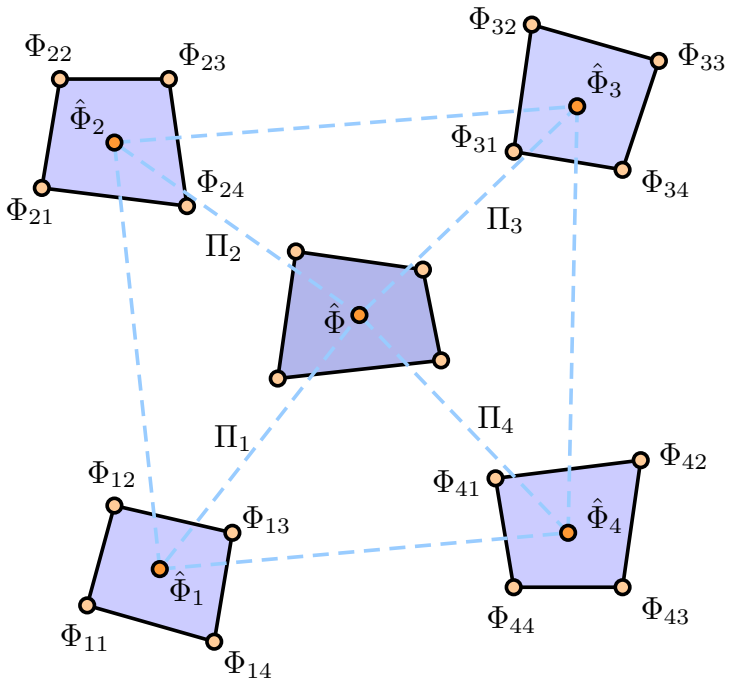


Figura 2.1: Representação Multimodelo.

2.5.2 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares a Parâmetros Variantes

Modelos puramente LPV não utilizam de linearizações para obter a representação do sistema original, em vez disso é necessário definir quais serão os parâmetros variantes do sistema. Uma possível representação, não única, consiste em substituir os termos não lineares por variáveis de escalonamento. Como o Robô de Junta Flexível possui apenas um termo não linear o parâmetro ρ e a matriz de estados do sistema podem ser escritos como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{I_1}\rho - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} u,$$

com

$$\rho = \frac{\sin(x_1)}{x_1} \qquad e \qquad \rho = [\underline{\rho}, \overline{\rho}].$$

Os limites são facilmente calculados uma vez que se conhece ao intervalo a qual a variável parametrizada pertence. Desta maneira é possível utilizar a seguinte decom-

posição politópica

$$\Pi_1(\rho) = \frac{\rho - \underline{\rho}}{\overline{\rho} - \underline{\rho}}, \qquad \Pi_2(\rho) = \frac{\overline{\rho} - \rho}{\overline{\rho} - \underline{\rho}}. \tag{2.26}$$

Se $\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t)$ escreve-se,

$$A(\rho) = \Pi_1(\rho)A_1 + \Pi_2(\rho)A_2,$$
$$B(\rho) = \Pi_1(\rho)B_1 + \Pi_2(\rho)B_2,$$

obedecendo as condições de convexidade,

$$\Pi_1(\rho) + \Pi_2(\rho) = 1 \qquad e \qquad \Pi_1(\rho) \geq 0, \Pi_2(\rho) \geq 0, \forall \rho \in \Omega_\rho, \tag{2.27}$$

e cujas matrizes são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{I_1}\overline{\rho} - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{I_1}\underline{\rho} - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Considerando as incertezas como descritas na Seção 2.5.1,

$$\hat{A}_i = \sum_{j=1}^{N_d} \beta_{ij} A_{ij}, \qquad e \qquad \hat{B}_i = \sum_{j=1}^{N_d} \beta_{ij} B_{ij},$$

finalmente gera-se a descrição LPV incerta do Robô de Junta Flexível,

$$\hat{A}_1 = \beta_{11}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{\underline{I_1}}\underline{\rho} - \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{\underline{I_1}}\overline{\rho} - \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \beta_{13}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{\underline{I_1}}\overline{\rho} - \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{14}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{\underline{I_1}}\overline{\rho} - \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\underline{I_2}} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_2 = \beta_{21}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{\underline{I_1}}\underline{\rho} - \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{22}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{\underline{I_1}}\underline{\rho} - \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \beta_{23}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{\underline{I_1}}\underline{\rho} - \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\underline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\underline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{24}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{\underline{I_1}}\underline{\rho} - \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 & \frac{\overline{K}}{\underline{I_1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 & -\frac{\overline{K}}{\underline{I_2}} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\underline{I_2}} \end{bmatrix}.$$

2.6 Escalonamento de Ganhos por Linearizações Baseadas em Velocidade

A técnica da linearização local é restrita a aproximações da planta em torno de pontos de equilíbrio. Essa abordagem pode gravemente degradar o desempenho do sistema de controladores locais devida à falta de representatividade fora dos pontos de linearização. Tal fato é facilmente evidenciado se os pontos de equilíbrio estiverem distantes uns dos outros. Uma abordagem alternativa são as chamadas linearizações globais obtidas via a Linearização Baseada em Velocidade (VBL) proposta por Leith e Leithead (1997), ou o Método D (*D-Method*) para escalonamento de ganhos proposto por Kaminer (1995).

A VBL consiste em derivar as equações diferenciais do sistema não linear original gerando uma versão aumentada do mesmo. Diferenciando a equação (2.1) obtém-se,

$$\Phi_{VBL}(\rho)\begin{cases} \xi(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) = \check{A}(\rho)\xi(t) + \check{B}_w(\rho)\dot{w}(t) + \check{B}_u(\rho)\dot{u}(t), \\ \dot{z}(t) = \check{C}_1(\rho)\xi(t) + \check{D}_{1w}(\rho)\dot{w}(t) + \check{D}_{1u}(\rho)\dot{u}(t), \\ \dot{y}(t) = \check{C}_2(\rho)\xi(t) + \check{D}_{2w}(\rho)\dot{w}(t). \end{cases} \tag{2.30}$$

Assim como no Escalonamento de Ganhos Clássico existe a linearização, porém ela será feita para um ponto de operação arbitrário dentro do espaço de análise, definido como $p^{op}(\rho) = (x^{op}(\rho), w^{op}(\rho), u^{op}(\rho))$. As matrizes da VBL são descritas por

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{A}(\rho), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{B}_w(\rho), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{B}_u(\rho), \\
&\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{C}_1(\rho), \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial w}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{D}_{1w}(\rho), \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{D}_{1u}(\rho), \\
&\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{C}_2(\rho), \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial w}\right|_{p^{op}(\rho)} = \check{D}_{2w}(\rho).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Para um ponto de operação p^{op} fixo qualquer esse sistema é linear e representa exatamente o sistema original se condições iniciais forem escolhidas corretamente, de tal forma que $\xi(0) = \dot{x}(0)$. A Linearização Baseada em Velocidade prevalece sobre a Linearização Clássica no sentido de representar o sistema num ponto de operação arbitrário, fora do equilíbrio. Se o sistema for parametrizado por $\rho = (x^{op}, w^{op}, u^{op})$ forma-se uma família de sistemas VBL que aproxima o sistema não linear para um espaço de análise Ω_ρ. Portanto, tal representação descreve toda a dinâmica do sistema não linear com um grau de aproximação arbitrário (Leith e Leithead, 2000), desde que os pontos de operação sejam escolhidos suficientemente próximos (Leith e Leithead, 1997). Tal condição é muitas vezes inviável e desnecessária e, na prática, são usados apenas alguns pontos chaves no envelope de operação em Ω_ρ para aproximar o sistema original. A relação da família VBL com o sistema original é tão forte que é possível relacionar a estabilidade do sistema não linear com a estabilidade da família VBL, se os membros que compõem a família VBL forem uniformemente estáveis e que a evolução do sistema não linear original seja suficientemente lenta (Leith e Leithead, 1998, 2000).

A VBL, apesar de se basear em uma estratégia de linearização, aparece na literatura em datas posteriores ao desenvolvimento da abordagem LPV. Em diversos trabalhos a Linearização Baseada em Velocidade é utilizada como um suporte para obter uma família de sistemas lineares que, posteriormente, são escalonados através de outras estratégias. Em Cai et al. (2010) é utilizada uma representação e controle LPV, já em Leith e Leithead (1999), Leith e Leithead (2001) e Gao et al. (2004), os sistemas locais são combinados usando regras fuzzy. Tal abordagem é interessante quando não se sabe qual parametrização LPV escolher para os termos não lineares, pois ela gera as matrizes de espaço de estados automaticamente. Na literatura é claramente visível a linha de pesquisa em que a VBL deixa de ser utilizada independentemente e passa a ser incorporada em outras descrições, gerando sistemas mistos VBL\LPV ou VBL\Fuzzy TS. Em virtude disso, neste trabalho optou-se por adotar uma abordagem moderna mista em que se combinam descrições VBL e LPV politópicas.

No entanto, existem algumas dificuldades em usar essa representação sendo a primeira a dependência da VBL com os próprios pontos de operação. Em sistemas nos

quais a VBL depende de mais de uma variável de estado e sinais de entrada, os pontos de operação devem ser escolhidos para gerar condições que são de fato realizadas pelo sistema original, caso contrário pode-se tornar inviável projetar um controlador. Outro fator igualmente problemático é quando o ponto de operação inclui a escolha de valores dos sinais de entradas, tal que $p^{op}(\rho) = (x^{op}(\rho),0,u^{op}(\rho))$. Muitas vezes não se sabe durante a síntese os possíveis valores que as entradas podem assumir durante a operação, sendo necessário escolhe-los arbitrariamente. Esse fato torna ainda mais difícil gerar uma aproximação em conjunto com as técnicas fuzzy, já que as premissas das regras dependeriam da medição da entrada de controle. Tal cenário ocorre em Leith e Leithead (2001) e ele é solucionado simplesmente ignorando todos os termos que dependem dos valores de entrada u^{op}, não sendo provida nenhuma explicação clara e nem seus efeitos na aproximação do sistema original. Outros trabalhos que empregam a VBL como Cai et al. (2011) em que se faz necessário escolher os pontos de operação, considera-se que eles já são determinados e fornecidos através de conhecimento especialista, dificultando a sistematização do uso dessa técnica.

A extensão das incertezas para essa estratégia também é um ponto que merece atenção. Como o modelo é gerado da diferenciação do sistema original, as incertezas devem ser paramétricas e estáticas, de forma que suas derivadas não entrem na formulação. No conhecimento do autor, não existe material na literatura que formalmente explore incertezas para formulações VBL. Em Cai et al. (2011) as incertezas do sistema original são abertamente ignoradas pelo autor durante o processo da síntese. Para contornar o problema os autores aplicam a síntese $\mathcal{H}_\infty$, seguida de simulações. Uma possível abordagem para contornar esse problema é adotar incertezas paramétricas invariantes no tempo e utilizar a representação politópica para gerar um modelo conservador, porém simplificado que permita conduzir a síntese de um controlador robusto.

2.6.1 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos via Linearizações Baseadas em Velocidade

Para obter a família de sistemas a partir Linearização Baseada em Velocidade do Robô de Junta Flexível é necessário diferenciar novamente as equações (A.2). Utilizando $\dot{x}(t) = \xi(t)$ escreve-se

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -\frac{mgl}{I_1}\cos(x_1^{op})\xi_1 - \frac{K}{I_1}\xi_1 + \frac{K}{I_1}\xi_3, \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 = \frac{K}{I_2}\xi_1 - \frac{K}{I_2}\xi_3 + \frac{1}{I_2}\dot{u}. \end{cases} \tag{2.32}$$

cujas condições iniciais devem ser

$$\begin{cases} \xi_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0), \\ \xi_2(0) = \dot{x}_2(0) = -\frac{mgl}{I_1}\sin(x_1(0)) - \frac{K}{I_1}x_1(0) + \frac{K}{I_1}x_3(0), \\ \xi_3(0) = \dot{x}_3(0) = x_4(0), \\ \xi_4(0) = \dot{x}_4(0) = \frac{K}{I_2}x_1(0) - \frac{K}{I_2}x_3(0) + \frac{1}{I_2}u(0), \end{cases} \tag{2.33}$$

As matrizes de espaço de estados são geradas automaticamente e dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{I_1}f(\rho) - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \dot{u},$$

Utilizando uma representação mista VBL\LPV e aplicando a decomposição politópica nos moldes da Seção 2.5.2 as funções a serem parametrizadas são escritas como

$$\rho = x_1^{op}, \qquad f(\rho) = \cos(\rho) \qquad e \qquad f(\rho) = [f_{min}, f_{max}].$$

Os pontos de operação parametrizados poderiam assumir uma quantidade arbitrária de valores, mais isso tornaria a descrição inviável computacionalmente. Acredita-se que os valores extremos dos intervalos sejam suficientes para representar a dinâmica de forma aceitável. Desta forma, dois sistemas vértices já incorporando a descrição das incertezas são obtidos

$$\hat{A}_1 = \beta_{11}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{I_1}f_{max} - \frac{K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\underline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{I_1}f_{max} - \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\overline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \beta_{13}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{I_1}f_{max} - \frac{\underline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\underline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\underline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{14}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{I_1}f_{max} - \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\overline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_2 = \beta_{21}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{I_1} f_{min} - \frac{\underline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\underline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\underline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{22}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{mgl}}{I_1} f_{min} - \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\overline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \beta_{23}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{I_1} f_{min} - \frac{\underline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\underline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\underline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\underline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} + \beta_{24}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{mgl}}{I_1} f_{min} - \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 & \frac{\overline{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\overline{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix}.$$

2.7 Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares Fracionárias

O conceito da Representação Linear Fracionaria é muito utilizado em problemas de controle robusto e permite reescrever um sistema LIT incerto como um sistema LIT nominal realimentado por um bloco de incertezas. Esta estratégia pode ser explorada para sistemas não lineares com representações LPV se for considerado que o sistema original é um sistema LIT em malha fechada com um bloco de parâmetros alterados em função das variáveis de escalonamento (Packard, 1994). Desta forma existe uma representação mista LPV\LFT. O bloco de parâmetros pode conter as não linearidades parametrizadas assim como as incertezas, sendo uma vantagem da LFR a inclusão automática das incertezas na própria estrutura. Tal propriedade permite que a formulação apresentada para esta seção já inclua possíveis incertezas paramétricas. O ato de remover os elementos não constantes da matriz de estados é uma estratégia conhecida como "retirando os deltas" (*pulling out the deltas*) na literatura referente a controle robusto. Considere a LFR de um sistema não linear incerto dada por

$$\Phi_{LFR}(\rho,\delta)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_\Delta w_\Delta(t) + B_w w(t) + B_u u(t), \\ z_\Delta(t) = C_\Delta x(t) + D_{\Delta\Delta} w_\Delta(t) + D_{\Delta w} w(t) + D_{\Delta u} u(t), \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{1\Delta} w_\Delta(t) + D_{1w} w(t) + D_{1u} u(t), \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{2\Delta} w_\Delta(t) + D_{2w} w(t), \\ w_\Delta(t) = \Delta(\rho,\delta) z_\Delta(t), \end{cases} \tag{2.34}$$

onde $z_\Delta \in R^{n_\Delta}$ e $w_\Delta \in R^{n_\Delta}$ são os canais de realimentação com a matriz de termos variantes e incertos. O bloco de realimentação, $\Delta(\rho,\delta)$, possui uma estrutura específica dada por

$$\Delta(\rho,\delta) = diag(\delta_{\rho_1} I_{s_1},\ldots,\delta_{\rho_{n_p}} I_{s_{n_p}},\delta_1 I_{r_1},\ldots,\delta_{N_d} I_{r_{N_d}}) = diag(\delta_\rho I_s,\delta I_r), \tag{2.35}$$

onde s_i indica o número de termos referentes ao parâmetro ρ_i e r_j o número de termos referentes as incertezas δ_j. A disposição diagonal de $\Delta(\rho,\delta)$ indica quantos e quais são os termos variantes da LFR. As matrizes identidade $I_{s_{np}}$ são relativas ao termos parametrizados ρ, e as matrizes identidade $I_{r_{N_d}}$ fazem referência às incertezas. Por exemplo, se $s_1 = 2$, o termo $\delta_{\rho_1} I_2$ indica que a LFR foi originada de um sistema com dupla parametrização em ρ_1. A realimentação da matriz de parâmetros com a parte nominal da LFR é dada pelo operador $T = F_u(M,\Delta(\rho,\delta))$, sendo que,

$$M = \begin{bmatrix} D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \\ D_{1\Delta} & D_{1w} & D_{1uu} \\ D_{2\Delta} & D_{2w} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Delta(\rho,\delta) = \Delta = \begin{bmatrix} \rho I_s & 0 \\ 0 & \delta I_r \end{bmatrix},$$

desta forma,

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = F_u(M,\Delta) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} D_{1w} & D_{1u} \\ D_{2w} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{1\Delta} \\ D_{2\Delta} \end{bmatrix} \Delta (I - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} \begin{bmatrix} D_{\Delta 1} & D_{\Delta 2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}.$$

O sistema parametrizado e sua descrição LFR são ilustrados, respectivamente, nas Figuras 2.2 e 2.3.

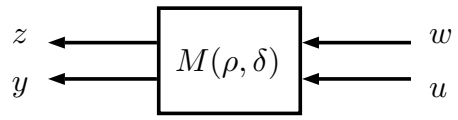


Figura 2.2: Sistema não linear incerto parametrizado.

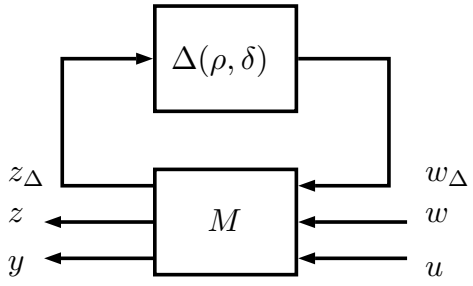


Figura 2.3: Representação Linear Fracionaria do sistema parametrizado incerto.

A Transformação Linear Fracionária (LFT) provoca um aumento da dimensão[1] do sistema devido a incertezas e parâmetros variantes gerarem novos canais de realimentação no sistema. Diversos trabalhos lidam diretamente com desenvolvimento de estratégias para redução de dimensão de uma LFR, mas este ainda é um campo em aberto. Algumas dessas estratégias são a Decomposição 1-D e n-D, técnicas baseadas no Gramiano Generalizado (*Generalized Gramian*) e no próprio conhecimento do projetista (Magni, 2005). Neste trabalho não houve uma preocupação em reduzir as dimensões das LFR, pelo contrário, deseja-se mostrar que o aumento da dimensão da planta existe e é significativo.

Procedimentos para escrever as matrizes parametrizadas antes de gerar o canal de realimentação estão sujeitos aos mesmos desafios dessa etapa na representação LPV tal que, se o sistema não for linearizado, deve-se encontrar uma parametrização que não é única. Caso as matrizes sejam obtidas por linearizações, para cada termo variante da família de sistemas LIT é escrita uma função multivariável racional arbitrária cujos coeficientes são identificados através de aproximações polinomiais ou técnicas de otimização. Neste caso, é necessária uma extensiva validação junto ao sistema não linear, pois podem existir erros grosseiros entre o modelo e a planta (Valášek et al., 2015).

Retirar as incertezas e termos não lineares das matrizes de estados não é uma tarefa trivial, porém é sistematizável. Demonstrações completas da LFT para obter uma LFR podem ser encontradas em Helmersson (1995) ou Bett e Lemmon (1997). Uma particularidade da LFR é que só é possível escrevê-la para sistemas compostos de funções racionais. Outros tipos de funções como trigonométricas, logarítmicas e demais termos como tabelas devem ser aproximadas, por exemplo, por expansão de Taylor, aproximações polinomiais, mínimos quadrados e demais métodos numéricos ou analíticos.

Assim como nas estratégias mostradas anteriormente, para cada elemento incerto ou parametrizações de termos não lineares devem existir limites máximos e mínimos conhecidos. Desta forma estes termos podem ser divididos numa parte nominal e uma parte incerta limitada referente aos possíveis valores assumidos por eles. A descrição normalizada considera $\rho \in [\underline{\rho},\overline{\rho}]$ é escrita como $\rho = \rho_0 + \rho_v\delta_\rho(t)$, onde

$$\rho_0 = \frac{\overline{\rho} + \underline{\rho}}{2}, \qquad \rho_v = \frac{\overline{\rho} - \underline{\rho}}{2}, \quad e \quad |\delta_\rho(t)| < 1. \tag{2.36}$$

Para fins de análise e síntese, neste trabalho será utilizado um modelo incerto simplificado do sistema (2.4), definido como

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\rho,\delta)x + B_u(\rho,\delta)u, \\ y = C_2(\rho,\delta)x + D_{2u}(\rho,\delta)u, \end{cases} \tag{2.37}$$

[1]Neste trabalho, o termo "aumento da dimensão" do sistema significa um aumento no número de variáveis e matrizes necessárias para descrever o sistema original através da Representação Linear Fracionária.

no qual se assume:

1. O termo ρ é a parametrização de um estado,

2. As matrizes A, B_u, C_2, D_{2u} dependem de ρ ou de funções racionais de ρ,

3. $A(\rho,\delta)x = 0$ para $x = 0$, implicando que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio,

4. $C_2(\rho,\delta)x = 0$ e B_u, D_{2u} não possuem singularidades na origem.

Essas condições garantem que o sistema descrito por (2.37) seja racional.

2.7.1 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos por Representações Lineares Fracionárias

O Robô de Junta Flexível não pode ser diretamente transformado na forma LFR devido ao termo trigonométrico em (A.2). Para contornar esse problema foi realizada a aproximação por ângulos pequenos

$$\sin(x_1) \approx x_1 - \frac{x_1^3}{6}.$$

Adotando a parametrização $\rho = x_1$ é possível escrever a seguinte representação em espaço de estados do sistema incerto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\hat{m}gl}{I_1} + \frac{\hat{m}gl}{6I_1}\rho^2 - \frac{\hat{K}}{I_1} & 0 & \frac{\hat{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\hat{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\hat{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} u.$$

Emprega-se a forma normalizada para ρ e para os termos incertos uma vez que os intervalos de valores que essas variáveis podem assumir são conhecidos. De acordo com (2.36), são definidos

$$\rho = \rho_0 + \rho_v\delta_\rho(t), \qquad \hat{m} = m_0 + m_v\delta_m(t) \qquad e \qquad \hat{K} = K_0 + K_v\delta_K(t). \tag{2.38}$$

Adotando a escrita da LFR para parâmetros e incertezas escalares conforme mostrado em Helmersson (1995), se obtêm uma possível descrição para o Robô de Junta Flexível,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \hdashline z_\rho \\ z_\rho \\ z_m \\ z_m \\ z_k \\ \hdashline z_k \\ \hdashline z_k \\ \hdashline z_k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc:ccccc:ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{gl\rho_0^2 m_0}{6I_1} - \frac{glm_0}{I_1} - \frac{K_0}{I_1} & 0 & \frac{K_0}{I_1} & 0 & gl & gl\rho_0 & gl\rho_0^2 & -gl & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_0}{I_2} & 0 & -\frac{K_0}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hdashline \frac{\rho_0\rho_v m_0}{6I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_v & \rho_0\rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_v m_0}{6I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_v}{6I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_v}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_v}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{K_v}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \frac{K_v}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{K_v}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hdashline w_\rho \\ w_\rho \\ w_m \\ w_m \\ w_k \\ \hdashline w_k \\ \hdashline w_k \\ \hdashline w_k \end{bmatrix}, \tag{2.39}$$

cuja matriz de parâmetros é $\Delta(\rho,\delta) = diag(\delta_\rho I_2, \delta_m I_2, \delta_K I_4)$.

Essa representação é suficiente e contém as matrizes com subscrito Δ de (2.34) necessárias para a LFR e, consequentemente, para a etapa de síntese.

2.8 Escalonamento de Ganhos por Representações Fuzzy Takagi-Sugeno

A modelagem por regras Fuzzy Takagi-Sugeno consiste em aproximar o sistema não linear (2.1) através de uma combinação convexa de sistemas lineares locais, ponderados por regras fuzzy com antecedentes dados por variáveis de premissas e conjuntos fuzzy. O consequente de cada regra será um modelo local LIT (Guerra. et al., 2015).

Na modelagem Fuzzy TS em geral, as variáveis de premissas são as próprias variáveis de estado ou funções das mesmas. Considere que a i-ésima regra de um modelo Fuzzy TS incerto a tempo contínuo com r regras seja dada por

$$\Phi_{Regra-i\ TS}(\rho) \begin{cases} \text{Se } \rho_1 \text{ é } \mathrm{M}_{1i} \text{ e } \ldots \text{ e } \rho_{n_p} \text{ é } \mathrm{M}_{n_p i} \text{ então:} \\ \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{w_i} w(t) + B_{u_i} u(t), \\ z(t) = C_{1_i} x(t) + D_{1w_i} w(t) + D_{1u_i} u(t), \\ y(t) = C_{2_i} x(t) + D_{2w_i} w(t), \end{cases} \tag{2.40}$$

onde ρ são as variáveis de premissa e M_{in_ρ} os conjuntos fuzzy. O sistema final é dado como a ponderação de cada uma das regras que são utilizadas para representar o sistema não linear. Desta forma, após o processo de defuzzificação, escreve-se o sistema como

$$\Phi_{Fuzzy-TS}(\rho)\begin{cases}\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho)\{A_i x(t) + B_{w_i} w(t) + B_{u_i} u(t)\},\\ z(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho)\{C_{1_i} x(t) + D_{1w_i} w(t) + D_{1u_i} u(t)\},\\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho)\{C_{2_i} x(t) + D_{2w_i} w(t)\},\end{cases} \tag{2.41}$$

e

$$h_i(\rho) = \frac{\omega_i(\rho)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(\rho)} \qquad com \qquad \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) = 1 \; e \; h_i(\rho) \geq 0, \forall i = 1 \ldots r, \tag{2.42}$$

$$\omega_i(\rho) = \prod_{j=1}^{n_p} \mu_{ij}(\rho_j) \qquad com \qquad \sum_{j=1}^{r} \omega_i(\rho) \geq 0 \; e \; \omega_i(\rho) \geq 0, \forall i = 1 \ldots r, \tag{2.43}$$

no qual $\omega_i(\rho)$ é o peso associado a cada i-ésima regra calculado das funções de pertinência e $\mu_{ij}(\rho_j)$ é o grau de pertinência de ρ_j sobre os conjuntos fuzzy das regras.

As estratégias para se obterem as aproximações por modelos fuzzy locais encontram-se em aberto. Ainda assim, existem técnicas padrões muito utilizadas na literatura. A primeira é a não linearidade de setor (Tanaka e Wang, 2001), uma das estratégias mais populares para se obter as regras e conjuntos Fuzzy TS. Nesta abordagem, cada parametrização de um termo não linear é feita por um setor, dando origem a duas regras Fuzzy TS. Desta maneira, o número de regras será dado por uma potência de dois. Essa exponenciação é uma das grandes responsáveis por inviabilidades computacionais para modelos com uma grande quantidade de não linearidades. Outro problema é a parametrização dos termos não lineares, que não é única. Muitos poucos avanços foram feitos no que diz respeito a essas duas condições que atingiram seu ponto máximo em 2005 (Guerra. et al., 2015).

Em Abonyi et al. (2005) são utilizadas estratégias de agrupamento (*clustering*) para gerar automaticamente regras fuzzy que aproximem uma função, por exemplo, não linear. É possível considerar que cada função seja um termo numa matriz de estados, desta maneira, aproximar as diversas funções que compõem a matriz de estados e depois combiná-las geraria uma representação Fuzzy TS válida. O principal problema com essa estratégia é que o agrupamento pode gerar uma quantidade elevada de regras e, se a matriz de estados possuir muitos termos a serem aproximados, a quantidade final de regras será altíssima tornando o sistema computacionalmente inviável.

É possível também recorrer a um conhecimento especialista para montar as regras e as funções de pertinência. Nesta abordagem, um especialista no sistema é responsável por fornecer as diversas regras e variáveis de premissa que, quando combinadas, geram a aproximação do sistema. Um inconveniente é que a abordagem especialista pode fornecer conjuntos e variáveis de premissa mal definidos por serem expressos linguisticamente. Essa abordagem é muitas vezes inviável na formulação Fuzzy TS,

principalmente por esta ser dificilmente interpretável (Tewari, 2009).

Uma estratégia que vem ganhando cada vez mais atenção é a chamada Transformação do Produto Tensorial (TPMT). A TPMT é uma técnica numérica que busca a aproximação de uma função dentro de um intervalo definido. Essa aproximação gera uma série de politopos convexos que, quando combinados através de funções peso, aproximam a função original. Como as técnicas Fuzzy TS também utilizam de uma combinação convexa, as aproximações feitas pelo TPMT podem ser usadas para modelar as matrizes de espaço de estados do sistema original, esse procedimento é realizado em Petres et al. (2004), Kolonic et al. (2006), Takarics e Baranyi (2013). A técnica pode ser dividida em quatro etapas (Campos, 2011):

1. Amostragem da função: É feita a discretização (através de grade com N_{grid} elementos por variável) do espaço Ω_ρ sobre todas as variáveis de premissas ρ das quais deseja usar para aproximar a função. Um tensor é construído através da amostragem da função em cada ponto dessa grade para cada variável de premissa.

2. Decomposição em valores singulares de alta ordem (HOSVD): É utilizada a HOSVD para decompor o tensor de amostras na direção das variáveis utilizadas na primeira etapa. Isso permite que a função seja escrita como um produto tensorial em função das variáveis de premissa e conjuntos pesos.

3. Transformações nas funções pesos: São realizadas algumas transformações matemáticas tanto no tensor quanto nas funções peso, para permitir que as funções peso tenham uma forma e característica semelhante às funções de pertinência fuzzy.

4. Aproximações das funções peso: As funções peso obtidas nas etapas anteriores são discretas para cada ponto da grade. Portanto é necessário utilizar de interpolações para gerar funções peso contínuas para o intervalo Ω_ρ.

Neste trabalho optou-se por usar a técnica da transformação do produto tensorial para gerar as regras e conjuntos fuzzy.

2.8.1 Extensão de Incertezas Limitadas em Norma para Sistemas Lineares Locais

As representações para incertezas em sistemas descritos através de regras Fuzzy TS estão mais presentes na literatura como uma extensão das incertezas limitadas em norma (Senthilkumar, 2010). Para isso, considere a i-ésima regra que compõe uma descrição Fuzzy TS incerta

$$\Phi_{Regra-i\ TS}(\rho)\begin{cases}\text{Se } \rho_1 \text{ é } \mathrm{M}_{1i} \text{ e } \ldots \text{ e } \rho_{n_p} \text{ é } \mathrm{M}_{n_p i} \text{ então:}\\ \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_{w_i} + \Delta B_{w_i}(t))w(t) + (B_{u_i} + \Delta B_{u_i}(t))u(t),\\ z(t) = (C_{1_i} + \Delta C_{1_i}(t))x(t) + (D_{1w_i} + \Delta D_{1w_i}(t))w(t) + (D_{1u_i} + \Delta D_{1u_i}(t))u(t),\\ y(t) = (C_{2_i} + \Delta C_{2_i}(t))x(t) + (D_{2w_i} + \Delta D_{2w_i}(t))w(t).\end{cases} \tag{2.44}$$

Assim como na Seção 2.3.2 o sistema incerto é subdividido em uma parte nominal e em uma parte variante no tempo, porém limitada em norma. Consequentemente, para cada regra Fuzzy TS será necessário uma partição das matrizes de incertezas. Essa divisão, por regra, pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix}\Delta A_i(t) & \Delta B_{w_i}(t) & \Delta B_{u_i}(t)\\ \Delta C_{1_i}(t) & \Delta D_{1w_i}(t) & \Delta D_{1u_i}(t)\\ \Delta C_{2_i}(t) & \Delta D_{2w_i}(t) & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M_{x_i}F_{x_i}(t)(N_{x_i} & N_{xw_i} & N_{xu_i})\\ M_{z_i}F_{z_i}(t)(N_{z_i} & N_{zw_i} & N_{zu_i})\\ M_{y_i}F_{y_i}(t)(N_{y_i} & N_{yw_i} & 0)\end{bmatrix}, \tag{2.45}$$

onde as matrizes M e N determinam a magnitude e a forma como as incertezas estão presentes nas matrizes de estados e o termo $F(t)$ define a parte não conhecida, respeitando $F^T(t)F(t) < I$. Naturalmente, é possível transformar os produtos em (2.45) em um somatório de matrizes por termo incerto. Por exemplo, para a matriz A escreve-se

$$\Delta A_i = \sum_{l=1}^{L} M_{x_i l}F_{x_i l}(t)N_{x_i l}, \tag{2.46}$$

onde L é o número de termos necessários para expressar a matriz de incertezas como um somatório de matrizes incertas, e $|F_{x_i l}(t)| < 1$ é o termo desconhecido, porém limitado em norma relativo à incerteza l. A descrição das incertezas por regra garante que o sistema não linear incerto estará contido na representação Fuzzy TS incerta.

2.8.2 Extensão de Representações Fuzzy TS Incertos para Sistemas com Modelos de Referência

Em casos nos quais o controle não está limitado a uma estabilização, sendo necessário um rastreamento, procura-se remodelar a filosofia de projeto. Uma técnica utilizada para rastreamento nos quais as variáveis controladas são os estados é o chamado controle por modelo de referência. Esta abordagem consiste em incluir um sistema secundário que recebe valores de referência externos e os transforma em uma dinâmica a ser seguida pela planta. Os sinais de saída do modelo de referência são normalmente utilizados em conjunto com os sinais de saída ou estados da planta para gerar uma ação de controle responsável por igualar os sinais da planta e da referência. No que diz respeito à realimentação de estados, dois tipos de modelos de referência são encontrados na literatura:

- Modelo sobre os erros nos estados: Utilizado quando a dimensão do modelo de referência é igual a dimensão da planta, desta maneira existe um sinal de referência para cada um dos estados do sistema. A ação de controle neste tipo de configuração é diretamente sobre o erro entre os estados do modelo de referência e os estados do sistema original (Tong et al., 2000). Eventualmente, pode-se adicionar uma realimentação mista incluindo estados originais ou do modelo de referência. Este tipo de abordagem pode ser visto na Figura 2.4.

- Modelo sobre os erros nas saídas: Utilizado quando a dimensão do modelo de referência é inferior a dimensão da planta, desta maneira deseja-se que apenas alguns dos estados sigam uma trajetória pré-definida. A ação de controle neste tipo de configuração é normalmente sobre a integral do erro entre a saída do modelo de referência e da planta, sendo, ainda possível, a realimentação direta dos estados do modelo ou da própria entrada do modelo de referência (Campos, 2011). Este tipo de abordagem pode ser visto na Figura 2.5.

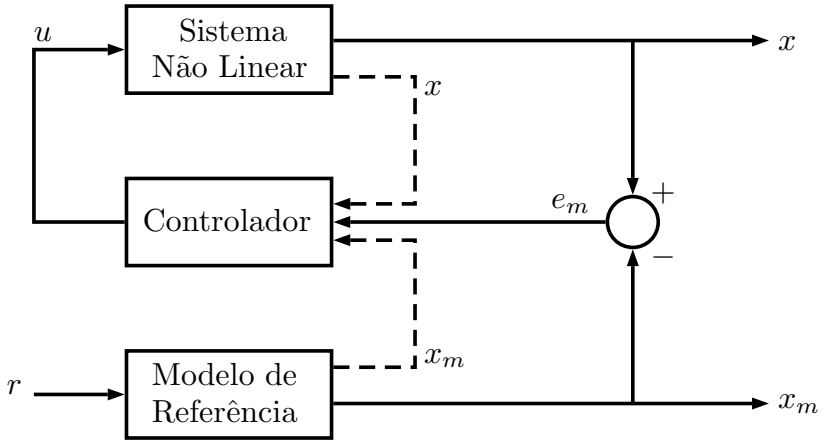


Figura 2.4: Controle por modelo de referência completo.

Neste trabalho, o controle por modelo de referência é utilizado em um VANT (Veículo Aéreo Não Tripulado) de asa fixa na Seção 4.4, cujo principal objetivo é o controle da altitude e da velocidade sendo que os demais estados podem ser considerados livres. Portanto a abordagem baseada no modelo de referência sobre os erros nas saídas será utilizada. O modelo de referência adotado neste trabalho é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \\ y_m(t) = C_m x_m(t). \end{cases} \tag{2.47}$$

onde $x_m(t)$, $y_m(t)$ são os estados e saídas do modelo de referência e r os sinais externos de referência. Para tornar a representação padrão utiliza-se uma descrição aumentada

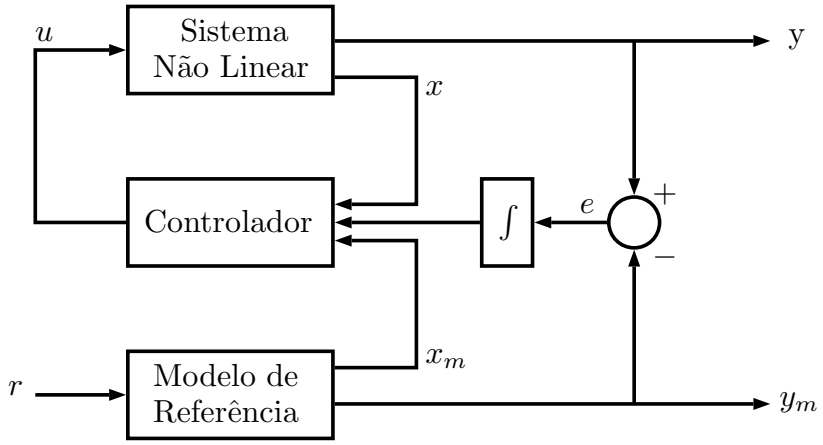


Figura 2.5: Controle por modelo de referência parcial.

da planta em conjunto com o modelo de referência. Para o estudo de caso da Seção 4.4 optou-se por uma descrição Fuzzy TS simplificada no qual o sistema aumentado, baseado nas equações (2.41), é dado por

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) \left\{ (\widetilde{A}_i + \Delta\widetilde{A}_i)\widetilde{x}(t) + \widetilde{B}_{w_i}\widetilde{w}(t) + (\widetilde{B}_{u_i} + \Delta\widetilde{B}_{u_i})u(t) \right\}, \\ z(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) \left\{ \widetilde{C}_{1_i}\widetilde{x}(t) \right\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) \left\{ \widetilde{C}_{2_i}\widetilde{x}(t) \right\}, \end{cases} \tag{2.48}$$

cujas novas matrizes são escritas como

$$\widetilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & A_m & 0 \\ C_{2_i} & -C_m & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{B}_{w_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{B}_{u_i} = \begin{bmatrix} B_{u_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.49}$$

$$C_{1_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad C_{2_i} = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

$$\Delta\widetilde{A}_i(t) = \begin{bmatrix} M_{x_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{x_i}(t) \begin{bmatrix} N_{x_i} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{M}_{x_i} F_{x_i}(t) \widetilde{N}_{x_i}, \tag{2.51}$$

$$\Delta\widetilde{B}_i(t) = \begin{bmatrix} M_{x_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{x_i}(t) \begin{bmatrix} N_{xu_i} \end{bmatrix} = \widetilde{M}_{x_i} F_{x_i}(t) \widetilde{N}_{xu_i}, \tag{2.52}$$

e os novos sinais são definidos como $\widetilde{x}(t) = [x^T(t)\ x_m^T(t)\ \int e^T(t)]^T$ e $\widetilde{w}(t) = r^T(t)$.

2.8.3 Robô de Junta Flexível - Representação Matemática para uso em Escalonamento de Ganhos por Representações Fuzzy TS

A primeira etapa do modelamento Fuzzy TS para o Robô de Junta Flexível consiste em definir uma representação na forma de espaço de estados e, posteriormente, obter as regras que aproximam a representação. Para fins de comparação, será utilizada a mesma equação que o caso LPV, porém já incluindo os termos incertos, isto é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\hat{m}gl}{I_1}\frac{\sin(x_1)}{x_1} - \frac{\hat{K}}{I_1} & 0 & \frac{\hat{K}}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\hat{K}}{I_2} & 0 & -\frac{\hat{K}}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} u. \tag{2.53}$$

A transformação pelo produto tensorial implica em amostrar as matrizes de (2.53) para a variável de premissa ρ em sua totalidade de valores que pode assumir. Devido à presença de incertezas, aplicar a TPMT resultaria em regras que dependeriam diretamente da medição dos termos incertos que é uma condição impeditiva. A solução é particionar o sistema conforme indicado na Seção 2.8.1. Uma vez que se conhecem os valores mínimos e máximos dos termos incertos é possível escrever

$$\begin{aligned} \hat{m} &= m_0 + m_v\delta_m(t), \quad & m_0 &= (\overline{m} + \underline{m})/2, \quad & m_v &= (\overline{m} - \underline{m})/2, \quad & e \quad \delta_m(t) \in [-1,1], \\ \hat{K} &= K_0 + K_v\delta_K(t), \quad & K_0 &= (\overline{K} + \underline{K})/2, \quad & K_v &= (\overline{K} - \underline{K})/2, \quad & e \quad \delta_K(t) \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Desta forma separa-se o sistema incerto, gerando uma nova representação, isto é,

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bu,$$

com uma parte nominal

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_0gl}{I_1}\frac{\sin(x_1)}{x_1} - \frac{K_0}{I_1} & 0 & \frac{K_0}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_0}{I_2} & 0 & -\frac{K_0}{I_2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix}, \tag{2.54}$$

e uma incerta, escrita como o somatório aos moldes de (2.46)

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_vgl}{I_1}\frac{\sin(x_1)}{x_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_m(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{I_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_K(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_v}{I_2} \end{bmatrix} \delta_K(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.55}$$

O próximo passo consiste em definir a variável de premissa ρ, grade de amostragem N_{grid} e aplicar a transformação do produto tensorial em (2.54). O tensor gerado possuirá um número de elementos igual a $20 \cdot N_{grid}$ ($[AB]$ com grade de N_{grid} divisões). Apesar de tal procedimento ser padrão, é possível diminuir significativamente o tamanho do tensor se apenas os termos variantes forem considerados conforme sugerido em Petres (2006). Para isso define-se,

$$\rho = x_1 \qquad e \qquad f(\rho) = \frac{sin(\rho)}{\rho},$$

cujo tensor possui $1 \cdot N_{grid}$ elementos ($[f(\rho)]$ com grade de N_{grid} divisões). Outro ponto interessante é que a matriz de incertezas possui a mesma função a ser aproximada que a matriz nominal. Sendo assim, não existe necessidade de aplicar o TPMT a ela e suas regras serão as mesmas do sistema nominal.

Para o Robô de Junta Flexível especificado no Apêndice A, definiu-se todo intervalo possível de análise para compor os limites do conjunto da variável de parametrização, portanto $\rho = x_1 \in [-\pi/2,\pi/2]$. O número de divisões da grade impacta na qualidade da aproximação sendo que, quanto mais fina melhor, a um custo de maior necessidade de memória e poder de processamento computacional. Para a aproximação de $f(\rho)$ escolheu-se $N_{grid} = 100$, gerando um erro de aproximação RMS (%) de 10^{-16} entre a função original e a aproximação por regras Fuzzy TS. As duas regras obtidas foram

$$\Phi_{Regra-1\ TS}(\rho) \begin{cases} \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_1 \text{ então:} \\ f_1(\rho) = 1, \end{cases} \qquad e \qquad \Phi_{Regra-2\ TS}(\rho) \begin{cases} \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_2 \text{ então:} \\ f_2(\rho) = 0.6663, \end{cases} \tag{2.56}$$

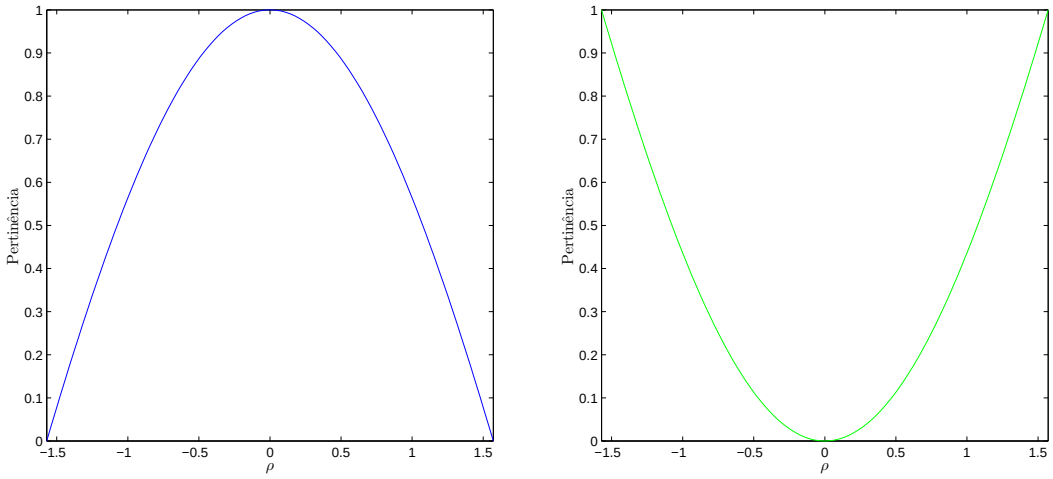
cujos conjuntos estão mostrados na Figura 2.6.

Finalmente, a representação por regras Fuzzy TS é escrita como

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2} h_i(\rho)[(A_i + \Delta A_i(t))x + Bu], \tag{2.57}$$

cujas matrizes serão as mesmas das equações (2.54) e (2.55), porém com a aproximação do termo não linear dada pelas regras (2.56). Desta maneira, tem-se

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_0 g l}{I_1} f_i(\rho) - \frac{K_0}{I_1} & 0 & \frac{K_0}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_0}{I_2} & 0 & -\frac{K_0}{I_2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix},$$



(a) Função de Pertinência para M_1. (b) Função de Pertinência para M_2.

Figura 2.6: Funções de Pertinência para o Robô de Junta Flexível.

$$\Delta A_i(t) = \begin{bmatrix} -\frac{m_v g l}{I_1} f_i(\rho) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_m(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_v}{I_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_K(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_v}{I_2} \end{bmatrix} \delta_K(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.58}$$

2.9 Equivalência das Representações LPV Politópicas e Fuzzy Takagi-Sugeno

Historicamente, as origens das estratégias LPV e Fuzzy TS para representação e controle de sistemas não lineares são distintas. Acredita-se que tal fato tenha contribuído para que as duas abordagens fossem estudas quase sempre de maneiras independentes na literatura. São poucos os trabalhos que comparam ou fazem citações explicitas às duas técnicas, alguns deles sendo Rong e Irwin (2003), Rotondo et al. (2015) e Guerra. et al. (2015). Outro fator que pode ter contribuído para tal separação é a própria abrangência do termo LPV que faz alusão a uma quantidade grande de estratégias. Nesta seção deseja-se lançar uma luz sobre o assunto e mostrar que, sobre certas condições, existem equivalências entre as duas abordagens.

Para a representação LPV politópica adotada neste trabalho é interessante notar que as diferenças se tornam sutis, de uma natureza mais conceitual do que propriamente matemática. Por exemplo, para ofício de comparação, o Robô de Junta Flexível sem incertezas foi modelado da seguinte maneira utilizando a estratégia Fuzzy TS

$$1^\circ\ \textit{Regra}: \begin{cases} \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_1 \text{ então:} \\ \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-mgl-K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \end{cases} \tag{2.59}$$

$$2^\circ\ \textit{Regra}: \begin{cases} \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_2 \text{ então:} \\ \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-0.6366mgl-K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \end{cases} \tag{2.60}$$

com a parametrização $\rho = x_1$ e os seguintes conjuntos fuzzy:

$$M_1(\rho) = \frac{\sin(\rho)/\rho - \sin(\pi/2)/(\pi/2)}{1 - \sin(\pi/2)/(\pi/2)}, \qquad M_1(\rho) = \frac{1 - \sin(\rho)/\rho}{1 - \sin(\pi/2)/(\pi/2)}. \tag{2.61}$$

Por sua vez, a descrição LPV politópica é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Pi_1}(\rho)\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-mgl-K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \mathbf{u}\right) + \mathbf{\Pi_2}(\rho)\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-0.6366mgl-K}{I_1} & 0 & \frac{K}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{I_2} & 0 & -\frac{K}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \mathbf{u}\right),$$

com a parametrização $\rho = \sin(x_1)/x_1$ e as seguintes funções de escalonamento

$$\Pi_1(\rho) = \frac{\rho - \sin(\pi/2)/(\pi/2)}{1 - \sin(\pi/2)/(\pi/2)}, \qquad \Pi_2(\rho) = \frac{1 - \rho}{1 - \sin(\pi/2)/(\pi/2)}. \tag{2.62}$$

Nota-se que ambas as representações são muito semelhantes, principalmente porque as duas respeitam as condições de convexidade. Extrapolando ligeiramente as formalidades matemáticas, se as funções de escalonamento forem interpretadas como as variáveis e conjuntos dos antecedente das regras fuzzy e os sistemas vértices forem vistos como os consequentes das regras, as duas representações seriam equivalentes. Tal equivalência é mais fácil de ser visualizada quando se analisa a representação fuzzy como um todo, incluindo a etapa de defuzzificação.

Essa comparação é interessante para mostrar que os resultados teóricos obtidos para a representação LPV Politópica e Fuzzy TS são intercambiáveis a certo nível, por exemplo, relativos a representações de incertezas paramétricas. Por outro lado, existem trabalhos que consideram a representação Fuzzy TS nada mais do que um caso

específico da LPV (Liu et al., 2015), sendo tal afirmação equívoca devido a origem e aos termos utilizados ao se referenciar as duas estratégias. Algumas das diferenças entre as duas abordagens podem ser vistas na Tabela 2.1.

2.10 Modelos Lineares x Representação Local

No intuito de estudar a capacidade de aproximação por modelos lineares locais, foi elaborada uma comparação entre o modelo não linear original e algumas das estratégias apresentadas anteriormente. Um ponto que merece atenção especial quando se discutem aproximações é a medida do erro entre o sistema real e o modelo utilizado. Uma maneira simples de se medir a qualidade do modelo é, por exemplo, calcular o RMS sobre a derivada do sistema original em relação à aproximação (Chumalee, 2010; Campos, 2011), obter as regiões de estabilidade (Papachristodoulou e Papageorgiou, 2005) ou aplicar sinais de controle e comparar as respostas (Yiqing et al., 2012). Outra maneira também interessante é utilizar o retrato de fase para visualizar as possíveis trajetórias do sistema original e do modelo.

Nas seções anteriores foi utilizado um sistema de dimensão quatro no qual visualizar o retrato de fase torna-se impeditivo. Nesta seção é apresentado um exemplo simples, de dimensão dois, para evidenciar se os modelos locais são adequados para representar um sistema não linear arbitrário, assim como quais são os problemas de se utilizar uma representação simplificada. Considere o seguinte sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2(1+2x_1)\sin(x_2) - 4x_1, \qquad x_1,x_2 \in [-a,a]. \end{cases} \tag{2.63}$$

Utilizando as metodologias das seções anteriores obtêm-se as seguintes representações:

Linear

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad com \qquad p^{eq} = ([0,0]^T). \tag{2.64}$$

LPV 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad com \qquad \rho = -2(1+2x_1)\frac{\sin x_2}{x_2}. \tag{2.65}$$

LPV 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad com \qquad \rho_1 = -4(1+\sin(x_2)) \qquad e \qquad \rho_2 = -2\frac{\sin(x_2)}{x_2}. \tag{2.66}$$

LPV	**Fuzzy TS**
Variável de Escalonamento	Variável de Premissa
Modelo usa descrição matemática padrão	Modelo é descrito por conjuntos e técnicas fuzzy
Decomposição politópica	Separação em regras
Combinação convexa dos vértices	Superposição das regras

Tabela 2.1: Diferenças entre as representações LPV Politópica e Fuzzy Takagi-Sugeno.

LFR

Substituindo-se a função trigonométrica e parametrizando-se o estado, tem-se

$$\sin x_2 \approx x_2 - \frac{1}{6}x_2^3 \qquad e \qquad \rho = x_2. \tag{2.67}$$

Utilizando a notação normalizada,

$$\rho(\delta_\rho) = \rho_0 + \rho_v \delta_\rho, \tag{2.68}$$

finalmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hdashline z_\rho \\ \hdashline z_\rho \\ z_\rho \\ z_\rho \\ \hdashline z_\rho \\ z_\rho \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c:cccc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-4\rho_0 + 0.66\rho_0^3 - 4) & (-2 + \rho_0^2) & -4 & 0.66 & 0.66\rho_0 & 0.66\rho_0^2 & 0.33 & 0.33\rho_0 \\ \hdashline \rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \rho_0^2\rho_v & 0 & 0 & 0 & \rho_v & \rho_0\rho_v & 0 & 0 \\ \rho_0\rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_v & 0 & 0 \\ \rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \rho_0\rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_v \\ 0 & \rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline w_\rho \\ \hdashline w_\rho \\ w_\rho \\ w_\rho \\ \hdashline w_\rho \\ w_\rho \end{bmatrix},$$

e $\Delta = \delta_\rho I_6$.

Fuzzy TS

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -4(1+\sin(x_2)) & -2\frac{\sin(x_2)}{x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \qquad com \qquad \rho = x_2. \tag{2.69}$$

Aplicado a TPMT para todo intervalo $\rho \in [-a,a]$, com $N_{grid} = 100$.

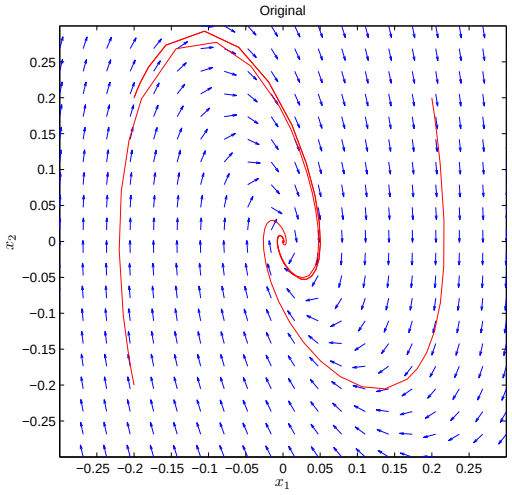
Inicialmente deseja-se cobrir um espaço de análise reduzido e definiu-se x_1,$x_2 \in [-0.3,0.3]$. Para visualização das trajetórias, escolheu-se os pontos iniciais como $(x_1,x_2) = (-0.2,-0.2)$, $(0.2,0.2)$ e $(-0.2,0.2)$. Os Retratos de Fase estão mostrados na Figura 2.7.

Nesta primeira tentativa de aproximar o sistema é interessante notar que o retrato de fase de todas as representações são iguais, ou extremamente próximos, ao do sistema não linear original. Para este caso em especial, simplificar o sistema real por uma representação linearizada em torno do ponto de equilíbrio $p^{eq} = (0,0)$ seria aceitável para as etapas de análise e projeto. Um ponto de alerta é que apesar de resultados muito semelhantes, a representação LPV do sistema não linear não é única. Nota-se que, para a representação LPV, foram feitas duas parametrizações distintas. Isso foi feito propositadamente para evidenciar a não unicidade na escolha do modelo. Matematicamente, a escolha da representação gera impactos significativos no modelo. Enquanto o modelo LPV 1 depende das duas variáveis de estado do sistema, o LPV 2 depende apenas de uma. Isso pode levar a resultados de análise completamente diferentes, e a escolha de como parametrizar o sistema de maneira correta pode depender diretamente da experiência do projetista (Bruzelius et al., 2004).

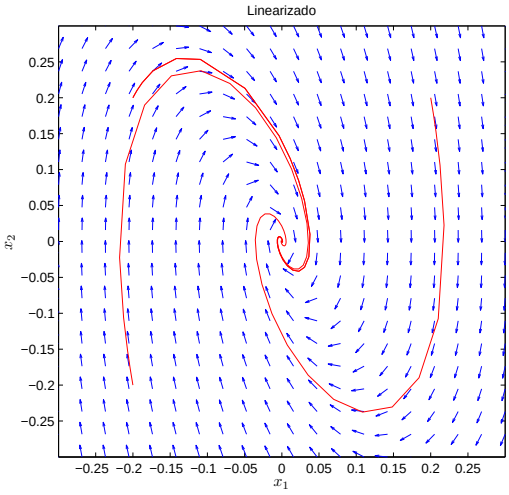
Resultados iniciais bons na aproximação podem servir como justificativa para afirmar que as representações locais são facilmente expandidas para qualquer intervalo, ou mesmo que linearizações em torno de pontos de equilíbrio sejam satisfatórias para qualquer classe de sistema não linear. Para mostrar que as aproximações nem sempre são válidas um novo teste é feito. Neste segundo momento o intervalo de valores é dez vezes maior, ou seja, x_1,$x_2 \in [-3,3]$. Para visualização das novas trajetórias, escolheram-se os pontos iniciais como $(x_1,x_2) = (-2,-2)$, $(2,-2)$, $(-2,1)$ e $(2,1)$. Utilizando as mesmas estratégias para aproximação é possível obter os retratos de fase mostrados na Figura 2.8.

Pode-se claramente observar uma diferença nos retratos de fase, em alguns casos com ângulos maiores que 90° entre elementos do campo vetorial. Para explicar melhor esse fenômeno cada caso é analisado separadamente, e o retrato de fase do sistema original é sobreposicionado junto ao da aproximação.

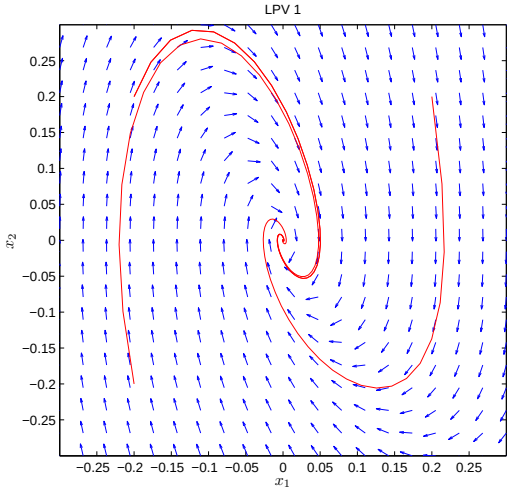
Original x Linear (Figura 2.9): A aproximação por linearização é aceitável próxima ao ponto de equilíbrio, mas começa a divergir significativamente ao se afastar dele. A diferença é fortemente evidenciada ao se comparar as trajetórias entre os dois sistemas. Portanto, a representação por linearização Jacobiana é boa perto do ponto de equilíbrio, mas para regiões de análise extensas ela, em geral, não deve ser adotada.



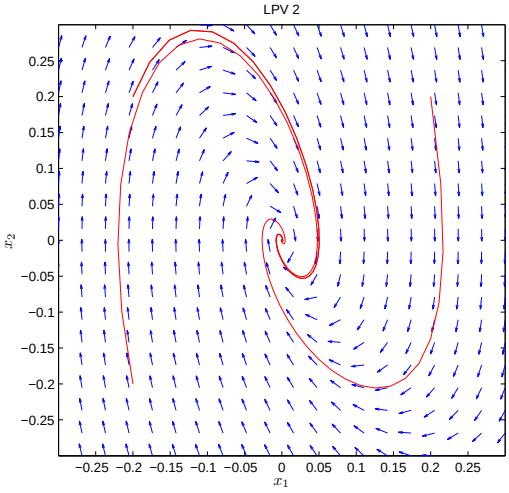
(a) RF - Original.



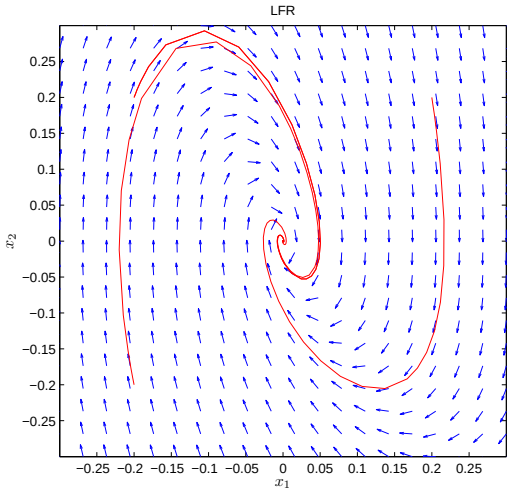
(b) RF - Linearizado.



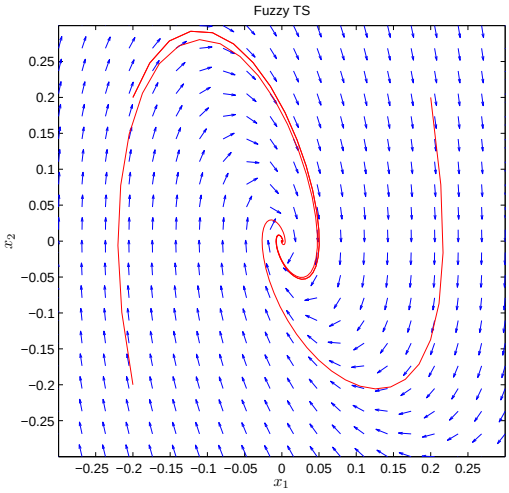
(c) RF - Repres. LPV1.



(d) RF - Repres. LPV2.

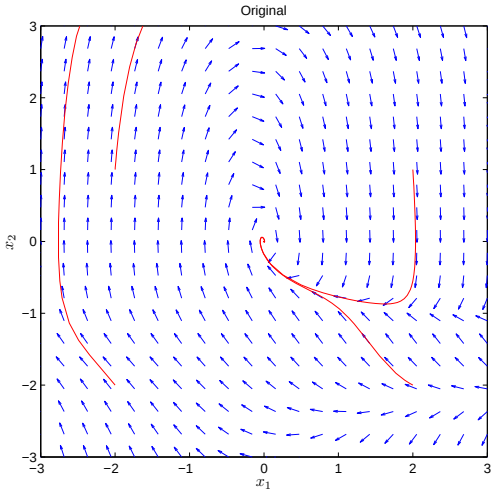


(e) RF - LFR.

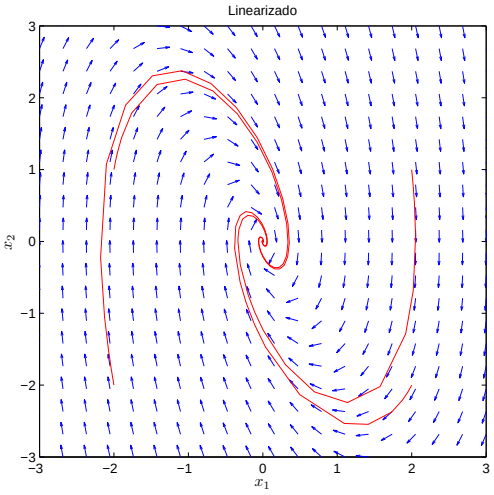


(f) RF - Repres. Fuzzy TS.

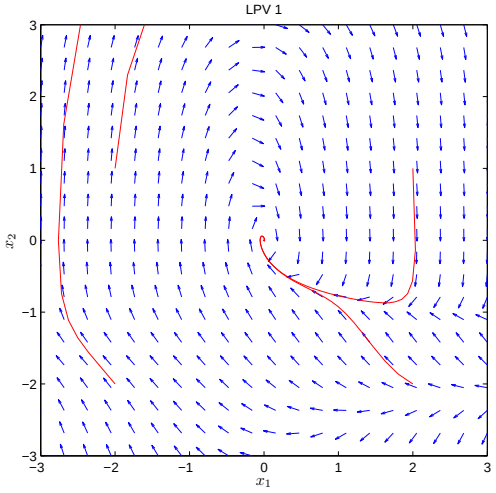
Figura 2.7: Retratos de Fase para as cinco aproximações.



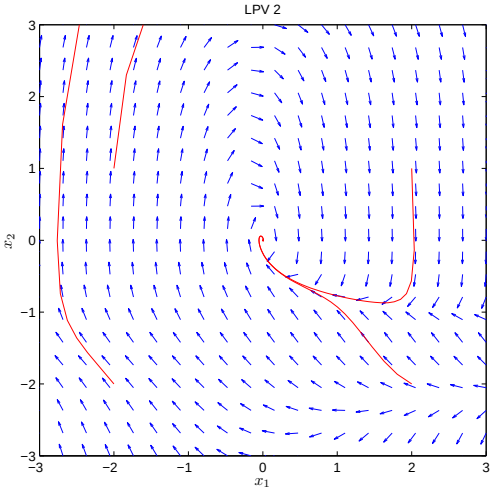
(a) RF - Original.



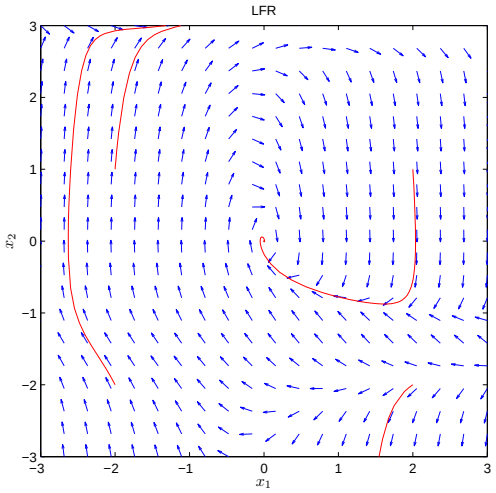
(b) RF - Linearizado.



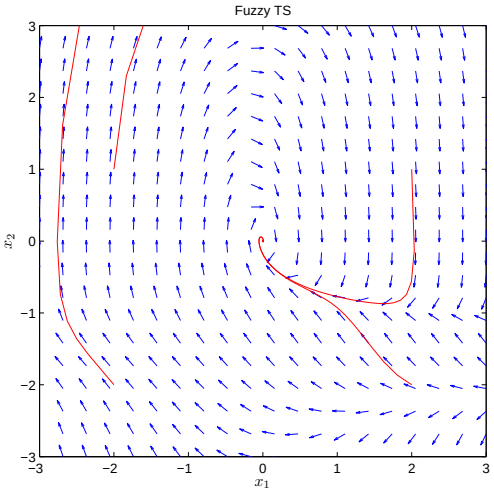
(c) RF - Repres. LPV1.



(d) RF - Repres. LPV2.



(e) RF - LFR.



(f) RF - Repres. Fuzzy TS.

Figura 2.8: Retratos de Fase para as cinco aproximações.

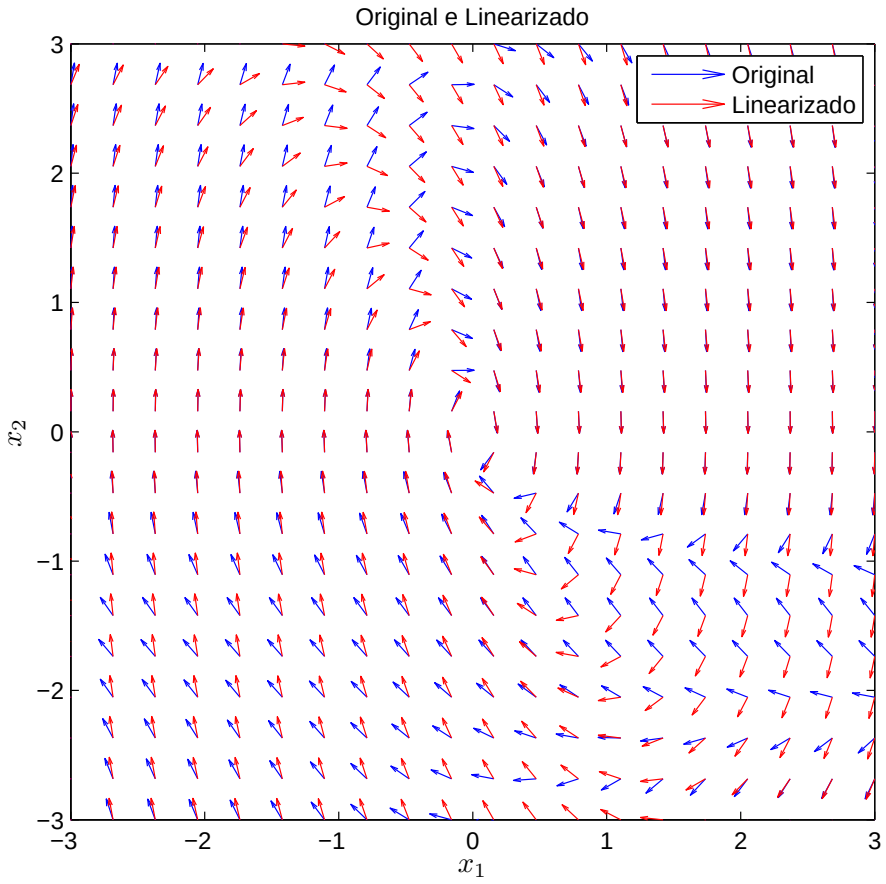


Figura 2.9: RF - Sobreposição Original e Linearizado.

Original x LFR (Figura 2.10): Nota-se uma pequena diferença entre o sistema real e a LFR, porém, a partir da Figura 2.8(e) percebe-se que essa diferença foi suficiente para causar uma trajetória divergente. A origem da diferença nos dois retratos de fase não está na Representação Linear Fracionária em si, mas na simplificação que foi necessária fazer no termo trigonométrico. Como a representação LFR só pode ser aplicada a funções racionais o termo trigonométrico foi aproximado por série de Taylor, levando a uma simplificação da equação diferencial original. Em geral, a LFR será tão boa quanto a aproximação das funções não racionais, e exata para sistemas não lineares que apresentarem apenas esse tipo de função.

Original x LPV x Fuzzy TS (Figura 2.11): As representações LPV Politópicas e Fuzzy TS são capazes de gerar um modelo satisfatório para o sistema não linear, capturando a dinâmica do sistema original para o intervalo definido.

Original x Fuzzy TS (Figuras 2.12 e 2.13): Um último ponto que merece destaque é a aproximação por representações Fuzzy TS utilizando a TPMT. Por se tratar de um método numérico algumas simplificações podem ser feitas para reduzir a carga com-

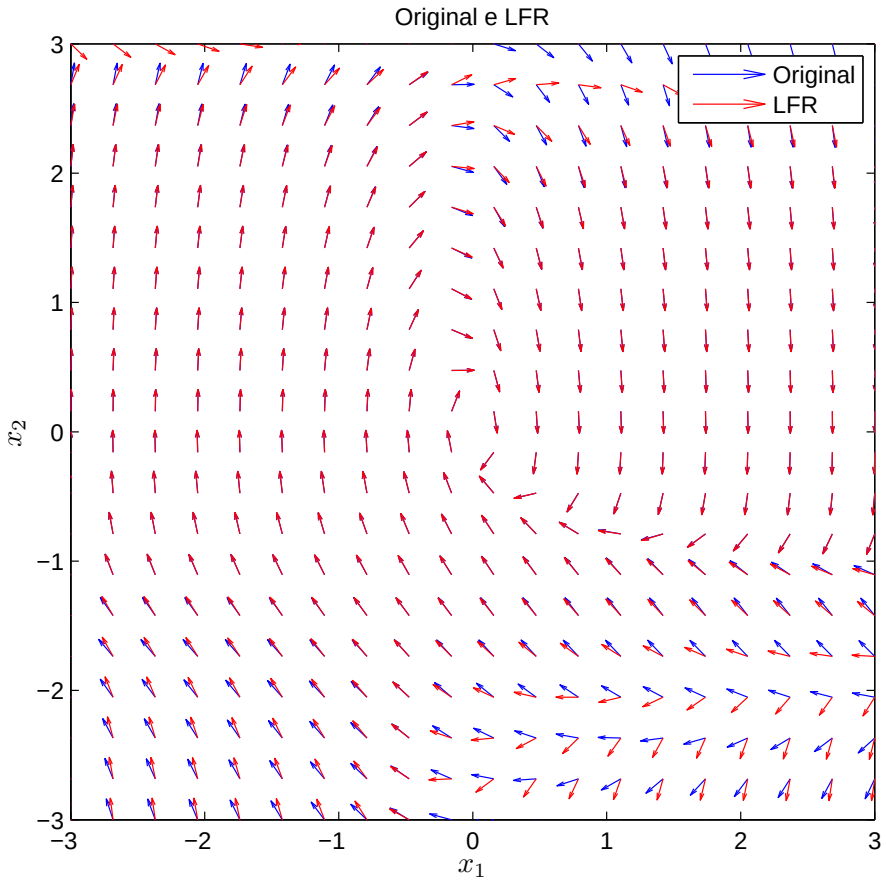


Figura 2.10: RF - Sobreposição Original e LFR.

putacional. Pode-se aumentar a distância entre os elementos da grade de amostragem ou, para reduzir a complexidade do modelo, descartar valores singulares na etapa da HOSVD. A principal desvantagem da simplificação é um impacto direto na qualidade do modelo. A HOSVD gera três valores singulares para o sistema (2.69). Para o menor valor singular descartado (Figura 2.12) percebe-se que a aproximação ainda é aceitável, porém para dois valores singulares descartados (Figura 2.13) a aproximação diverge significativamente.

2.11 Considerações Finais

Neste capítulo foi demonstrado como cada uma das cinco estratégias baseadas em modelos locais são usadas para gerar a descrição parametrizada de um sistema não linear. É essencial que a descrição capture as dinâmicas do sistema original uma vez que são essas descrições que são utilizadas na etapa de síntese do controlador. Um segundo ponto estudado foi a equivalência da descrição LPV Politópica com a Fuzzy TS cujas

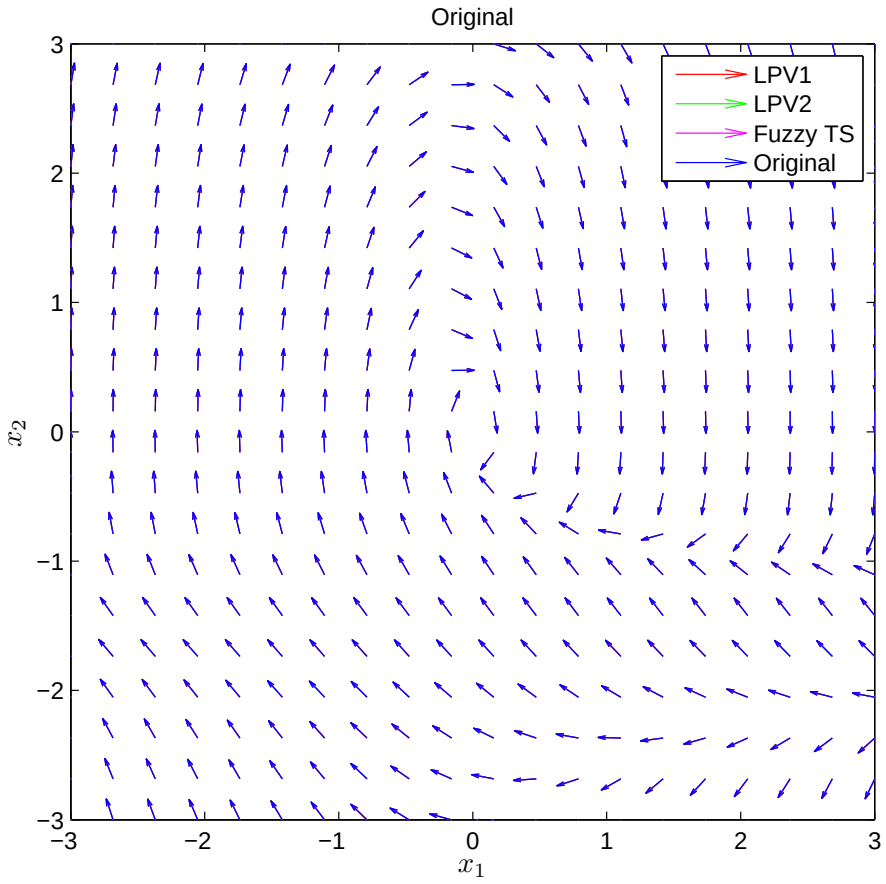


Figura 2.11: RF - Sobreposição Original, Repres. LPV 1, 2 e Fuzzy TS.

diferenças conceituais são mais preponderantes do que as matemáticas. Por último, foi investigada a capacidade de aproximação das representações por modelos locais de um sistema não linear arbitrário. Concluiu-se que, apesar das representações não únicas, quando usadas corretamente essas técnicas são capazes de capturar a dinâmica do sistema não linear.

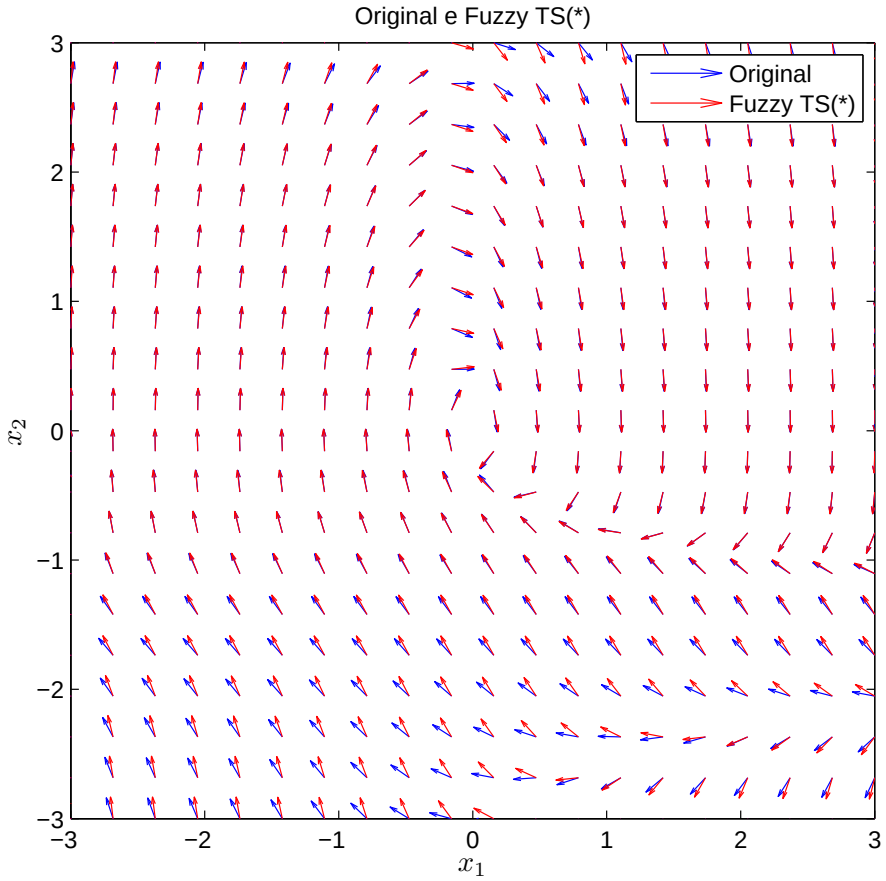


Figura 2.12: RF - Sobreposição Original e Repres. Fuzzy TS com o menor valor singular descartado.

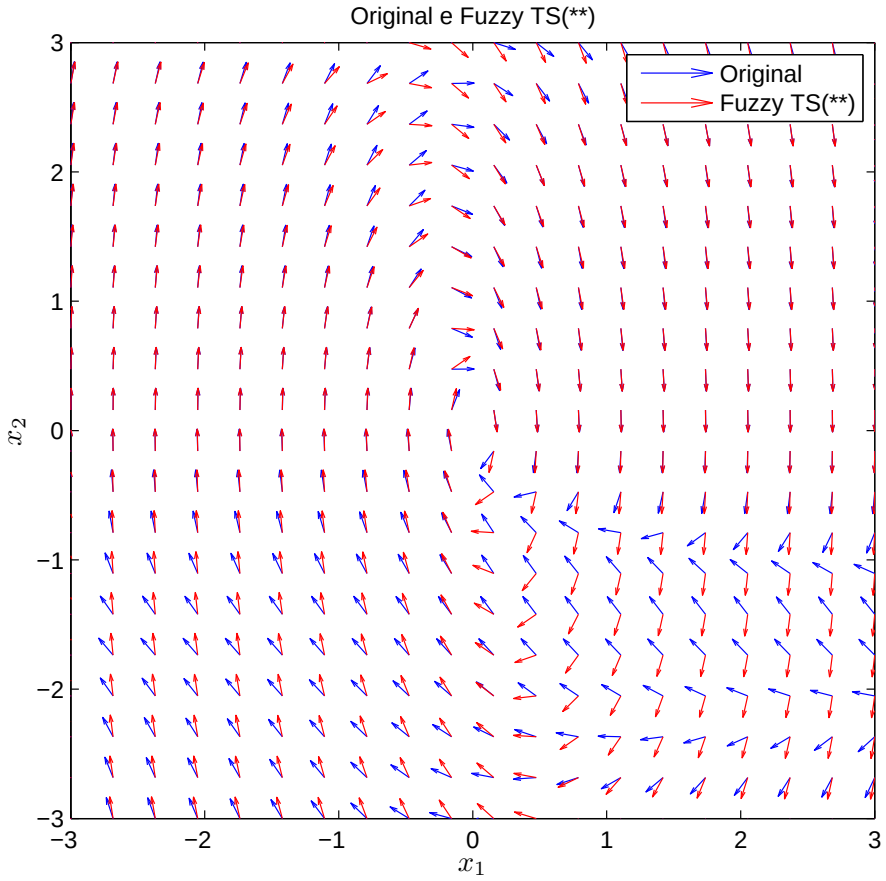


Figura 2.13: RF - Sobreposição Original e Repres. Fuzzy TS com os dois menores valores singulares descartados.

Capítulo 3

Estratégias de Síntese Robusta Baseadas em Escalonamento de Ganhos

3.1 Introdução

A etapa de síntese é a que talvez tenha mais importância para o projetista, pois é nela que se determinam as condições para se encontrar um controlador estabilizante. Esta etapa tem como premissa que o modelo em espaço de estados da planta seja fielmente capaz de descrever o sistema original. Em casos de sistemas incertos ou aproximações é necessário que estas estejam bem descritas para serem incorporadas nas condições de síntese. Neste capítulo serão apresentadas as cinco estratégias de síntese robusta, relativas às cinco descrições desenvolvidas no Capítulo 2. Para efeito ilustrativo, o Robô de Junta Flexível será utilizado para comparar o desempenho de cada um dos tipos de controladores.

O desempenho dos controladores projetados utilizando cada uma das representações será medida de acordo com suas respostas em malha fechada junto ao sistema não linear original. Para o Robô de Junta Flexível dois testes foram realizados, sendo que a posição angular do braço ($x_1 = \theta_1$) é a variável final de análise. No primeiro foram realizadas simulações para diferentes valores dos termos incertos (massa e constante de elasticidade da mola) para uma mesma condição inicial ($x_1 = \pi/3$). As curvas foram identificadas utilizando um esquema de cores conforme mostrado na Figura 3.1. O segundo teste consistiu em utilizar o mesmo controlador para diferentes condições iniciais dentro do universo de análise que, conforme definido no Apêndice A, é $x_1 \in [-\pi/2,\pi/2]$.

3.2 Síntese Robusta Baseada em Escalonamento de Ganhos Clássico

O controle por Escalonamento de Ganhos Clássico consiste em projetar um controlador independente para cada sistema local obtido na etapa de modelamento utilizando de técnicas de controle linear. Desta maneira, existe uma família de plantas lineares parametrizadas por $\rho \in \Omega_\rho$ e uma família de controladores locais parametrizados também por $\rho \in \Omega_\rho$ responsáveis por estabilizar, localmente, cada um dos sistemas (Nichols

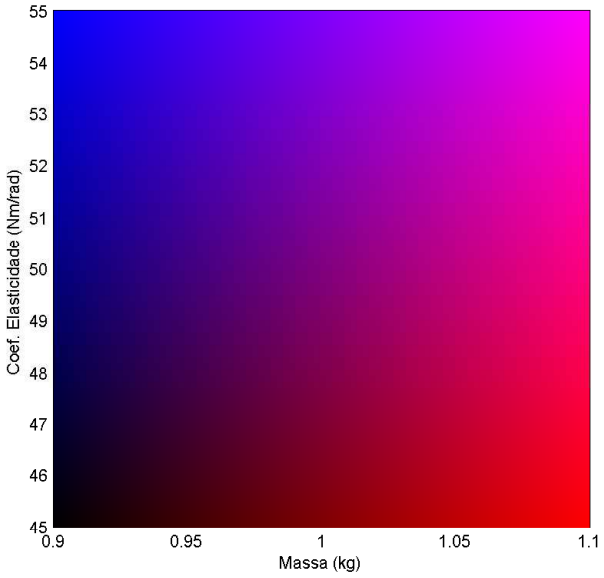


Figura 3.1: Código de cores para as simulações com termos incertos.

et al., 1993). Essa abordagem pode ser vista na Figura 3.2. Nesta etapa podem-se adicionar condições de desempenho como tempo de assentamento, tempo de subida e condições para rejeição de distúrbios ou incertezas. Se as condições de síntese forem cumpridas, cada controlador irá, localmente, garantir as condições de projeto. O controlador parametrizado é escrito como

$$\Psi_{Lin}(\rho) \left\{ u(t) = K(\rho)x(t). \right. \tag{3.1}$$

Por se tratar de uma abordagem puramente linear, múltiplas técnicas para obtenção de controladores robustos são facilmente encontradas na literatura, dentre elas a alocação robusta de pólos, Síntese-μ e estabilidade quadrática robusta. Todas essas estratégias garantem condições de estabilidade e desempenho para o sistema linear, mas não para a combinação deles.

O grande desafio deste tipo de controle é fazer com que a família de controladores seja capaz de estabilizar o sistema não linear para a região Ω_ρ como um todo. O escalonamento deve ser feito de maneira cuidadosa, de forma que as propriedades locais sejam satisfeitas mesmo durante o chaveamento ou interpolação dos controladores. Muitos autores utilizam de métodos intuitivos para realizar o escalonamento, mas, devido à falta de rigor matemático, critérios de desempenho e estabilidade raramente podem ser garantidos. Alguns desses métodos são a interpolação dos zeros, pólos e ganhos dos controladores (Nichols et al., 1993): Para cada controlador local, seus pólos e zeros são obtidos e depois interpolados através de uma função contínua dependente de todas (ou algumas) das variáveis de escalonamento. As funções de interpolação

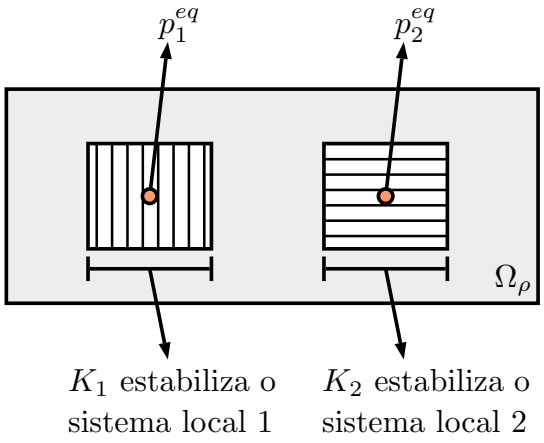


Figura 3.2: Estratégia de projeto para Escalonamento de Ganhos Clássico.

são feitas individualmente para cada pólo/zero do controlador e não tem relação direta com o escalonamento da planta. Em um trabalho mais recente (Paijmans et al., 2008) foram realizados testes utilizando este tipo de interpolação e concluiu-se que o erro foi muito superior a uma formulação completamente LPV.

Chaveamento de controladores: O particionamento local da planta pode sugerir ao projetista que o escalonamento entre controladores seja chaveado, de maneira que, se as variáveis de escalonamento se encontram mais perto de um sistema local do que de outro, os ganhos do controlador são imediatamente alterados. Um sistema de controle desse tipo pode ser visto na Figura 3.3.

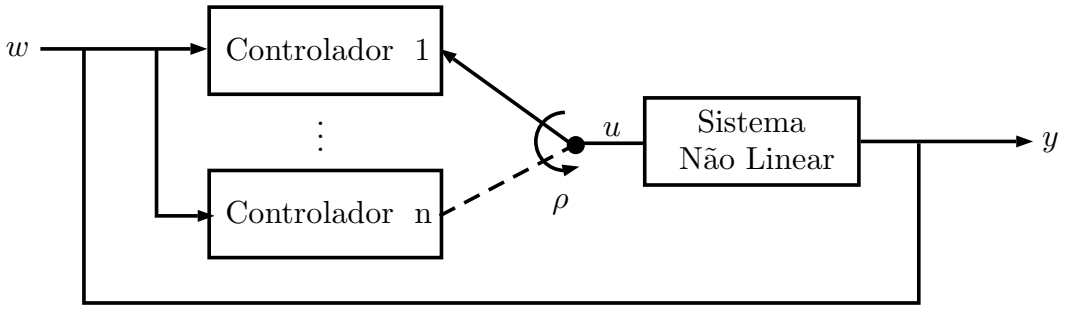


Figura 3.3: Chaveamento de Controladores por sinal de escalonamento.

Tal estratégia pode causar descontinuidades severas que podem comprometer a estabilidade do sistema (Chen e Juang, 2011) ou gerar condições indesejadas como os chaveamentos de alta frequência (*chattering*) (Rugh e Shamma, 2000). Porém é possível encontrar casos na literatura em que as regiões e condições do chaveamento são levadas em consideração na síntese, gerando controladores que garantem a estabilidade

(Shimomura, 2003; Chen e Juang, 2011).

Interpolação dos coeficientes dos controladores: Em Leith e Leithead (1998) é realizada uma interpolação dos valores de cada coeficiente das matrizes dos controladores locais, gerando um controlador cujos coeficientes são suavemente escalonados. Porém esta estratégia sofre de diversos problemas citados pelos próprios autores, como a escolha das funções de escalonamento, a restrição de escolha de alguns termos do controlador assim como o aumento da dimensão do mesmo. Estes e outros fatores levam aos próprios autores a questionar a praticidade na implementação do controlador.

Sobreposição de regiões: Em Stilwell e Rugh (2000) propõe-se encontrar pontos de equilíbrio que se sobrepõem para que o escalonamento não provoque nenhum tipo de descontinuidade, tal abordagem requer que seja possível obter pontos de equilíbrio próximos. A estratégia é ilustrada na Figura 3.4.

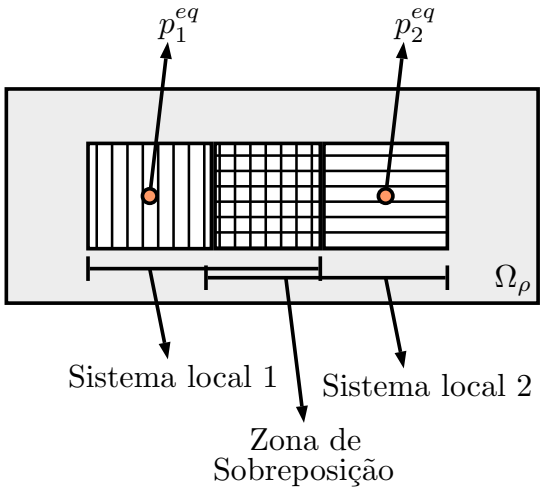


Figura 3.4: Estratégia de projeto para Escalonamento de Ganhos Clássico com sobreposição de regiões de síntese.

A família de controladores deve ser capaz de estabilizar o sistema para toda essa região de sobreposição, gerando uma interpolação suave e sem descontinuidades na ação de controle. Utilizar esse método, com condições especiais de interpolação, gera controladores com garantias de estabilidade de desempenho, porém é difícil encontrar uma grande quantidade de sistemas que satisfaçam essas condições (Stilwell e Rugh, 2000).

Neste trabalho, quando obtidos mais de um ponto de equilíbrio, optou-se pela interpolação linear dos controladores para cada uma das regiões entre pontos. Tal abordagem foi escolhida no âmbito de comparar o uso de uma estratégia ingênua com outras de formalismo matemático sólido.

3.2.1 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Escalonamento de Ganhos Clássico

Em especial, para o Robô de Junta Flexível, analisou-se apenas um único ponto de equilíbrio, gerando um único controlador cujo objetivo é estabilizar o sistema para todo intervalo de predefinido. Como não se consideraram informações do intervalo na síntese, não é possível fazer uma previsão de como a resposta em malha fechada se comportaria. Os ganhos do controlador encontrado foram

$$K = \begin{bmatrix} 18.8257 & 1.4262 & -23.2155 & -5.4453 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

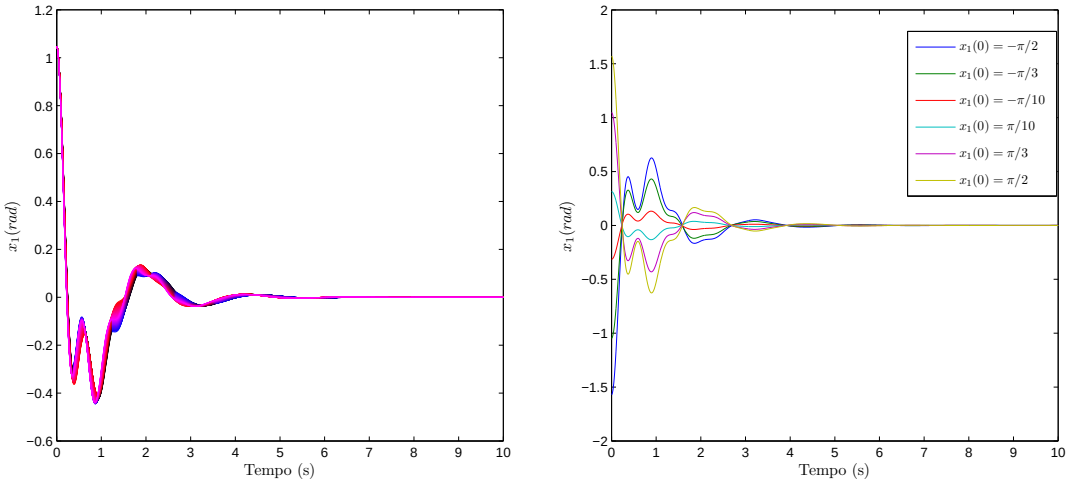
e as respostas em malha fechada se encontram em:

- Simulações para diferentes valores de incertezas - Figura 3.5(a),
- Simulações para diferentes condições iniciais - Figura 3.5(b).

3.3 Síntese Robusta Baseada em Representações Lineares a Parâmetros Variantes

A síntese LPV permite obter um controlador descrito por um sistema dinâmico cujos coeficientes são naturalmente escalonados. A estrutura desse controlador não segue um padrão obrigatório, porém está usualmente vinculada à técnica de representação LPV utilizada na etapa anterior. A síntese é geralmente reformulada num problema descrito por condições LMI, formuladas com critérios de estabilidade de Lyapunov. A grande vantagem de se utilizar este método é transformar a etapa de síntese do controlador num problema de programação convexa, que utiliza de eficientes métodos numéricos para obter as soluções. As especificações em malha fechada podem ser formuladas através de condições LMI que incorporem tais critérios, como minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ (Apikarian e Gahinet, 1995), síntese robusta a incertezas, alocação de pólos em regiões específicas (Rotondo et al., 2013), dentre outros.

Alguns trabalhos como Wu e Pranja (2004), reformulam a maneira de escrever o sistema (2.22) através de uma dependência polinomial com as variáveis de escalonamento. Ao impor essas condições, as LMI podem ser escritas de maneira a se tornar um problema de dimensão finita. Consequentemente, o controlador adotado também possuirá a forma polinomial. Apesar de o foco deste trabalho ser a realimentação de estados, inúmeros trabalhos como Wu (1995) e Wu et al. (2002), aplicam diretamente a realimentação de saída. Uma desvantagem dessa abordagem é uma ordem maior dos controladores que costumam possuir estados internos próprios. Neste caso, as LMI a serem resolvidas também são consideravelmente mais complexas e podem se tornar bilineares nas variáveis de decisão, gerando condições que devem ser resolvidas iterativamente.



(a) Incertezas Paramétricas. (b) Condições Iniciais.

Figura 3.5: Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Escalonamento de Ganhos Clássico.

Desigualdades Matriciais Lineares baseadas na estabilidade quadrática de Lyapunov são bastante comuns na literatura para obter um controlador com garantias de estabilidade sobre toda região de análise. Para a realimentação de estados com uma única matriz de Lyapunov constante é possível escrever

$$
\begin{aligned}
&V(x) = x^T P x, \\
&V(x) > 0 \implies P > 0, \\
&\dot{V}(x) < 0 \implies (A(\rho) + B(\rho)K(\rho))^T X + X(A(\rho) + B(\rho)K(\rho)) < 0.
\end{aligned}
$$

Como as matrizes do sistema são parametrizadas por um termo que pode assumir qualquer valor dentro de uma região delimitada, este problema possui uma quantidade infinita de matrizes e, consequentemente, a resolução das LMI também se torna um problema de dimensão infinita. Quando tal fato ocorre adota-se um procedimento de gradeamento no espaço de análise Ω_ρ de forma a "amostrar" o sistema LPV. As LMI são então solucionadas pontualmente, e as mesmas matrizes resultado são usadas para resolver novamente as mesmas LMI, mas com uma grade muito mais fina (Wu et al., 2002). Essa estratégia é computacionalmente exigente, principalmente se o número de parâmetros ρ é alto já que o número de LMI a serem resolvidas cresce exponencialmente. Em todo caso, a garantia de estabilidade será perdida, a não ser que se faça o intervalo entre os elementos da grade extremamente pequeno.

Por outro lado, adotar uma descrição politópica para a planta é vantajoso, pois permite descrever a dinâmica do sistema com uma quantidade finita de sistemas vértices. A representação politópica dá origem uma família de controladores vértices que

imitam a estrutura da planta. A realimentação de estados será dada por

$$\Psi_{Poly}(\rho) \left\{ u(t) = K(\rho)x(t), \tag{3.3}$$

$$K(\rho) = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho) K_i, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho) = 1 \qquad e \qquad \Pi_i(\rho) \geq 0, \forall i = 1 \ldots N, \forall \rho \in \Omega_\rho.$$

A quantidade limitada de sistemas vértices permite escrever uma quantidade finita de LMIs a serem resolvidas para a síntese do controlador. Baseando-se na estabilidade quadrática de Lyapunov, o controlador pode ser encontrado através das condições LMI definidas no Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.1. Condições de Síntese Robusta para Representações Lineares a Parâmetros Variantes Politópicas [1]

O sistema não linear incerto descrito pela formulação LPV politópica como em (2.23), cuja lei de controle é definida por

$$K(\rho) = \sum_{k=1}^{N} \Pi_k(\rho) K_k, \tag{3.5}$$

será, em malha fechada, assintoticamente estável perante a incertezas politópicas como definidas na Seção 2.5.1 se as seguintes condições LMI forem satisfeitas:
Se existirem matrizes

$$X = X^T \in \mathbb{R}^{n_x}, \qquad Y_k \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \ \forall k = 1 \ldots N, \tag{3.6}$$

que satisfaçam as condições

$$X > 0,$$

$$A_{ij}X + B_{ij}Y_i + * < 0, \qquad \forall i = 1 \ldots N, \qquad j = 1 \ldots N_d,$$

$$\left(\frac{A_{ij}X + B_{ij}Y_k + A_{kj}X + B_{kj}Y_i}{2} \right) + * < 0, \qquad \forall j = 1 \ldots N_d, \qquad i < k \leq N, \textit{ tal que } \Pi_i(\rho) * \Pi_k(\rho) \neq 0$$

[1] No artigo intitulado "Comparando Diferentes Estratégias de Controle para Sistemas Não Lineares Incertos Baseadas em Escalonamento de Ganhos", publicado pelo presente autor no XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), o Teorema 1 é utilizado para a síntese de um controlador LPV, porém o mesmo se encontra errado. O autor não havia considerado todas as possíveis combinações de sistemas vértices, incertezas e controladores como realizado no Apêndice C.1. A formulação correta levaria a condições como as da equação (C.4), porém tal resultado leva a condições muito conservadoras e de pouca valia. Uma alternativa para o Teorema 3 do artigo é o Teorema 3.3.1 apresentado neste trabalho que fornece condições para a síntese mais relaxadas.

então as matrizes do controlador por realimentação de estados serão dadas por $K_k = Y_k X^{-1}$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista no Apêndice C.1. □

Enquanto o Teorema 3.3.1 gera condições suficientes para obter controladores robustos, ele é bastante conservador. Na literatura são encontrados alguns trabalhados que relaxam as condições de síntese para sistemas LPV politópicos, no entanto são consideradas algumas condições restritivas, que não são aplicáveis a todas as classes de representações LPV. Por exemplo, em Apkarian et al. (1995) e Rotondo et al. (2014) são apresentadas condições mais relaxadas, porém é exigido que a matriz B seja constante. Outras formas de relaxação consistem em explorar as formas das funções de escalonamento ou pertinência como mostrado em Campos (2015).

Por se tratar de uma LDI, o modelo LPV descrito na região Ω_ρ é muitas vezes conservador, já que inclui todas as possíveis trajetórias do sistema nessa região. Controladores LPV obtidos a partir dessas descrições são capazes de satisfazer as especificações de desempenho com garantias de estabilidade para todas as trajetórias contidas em Ω_ρ. Porém, apenas algumas dessas trajetórias são de fato realizáveis gerando um controlador superdimensionado e, portanto, igualmente conservador. A vantagem da descrição LPV é a possibilidade de conceber um controlador quando não se sabe exatamente a trajetória a ser seguida pelo sistema.

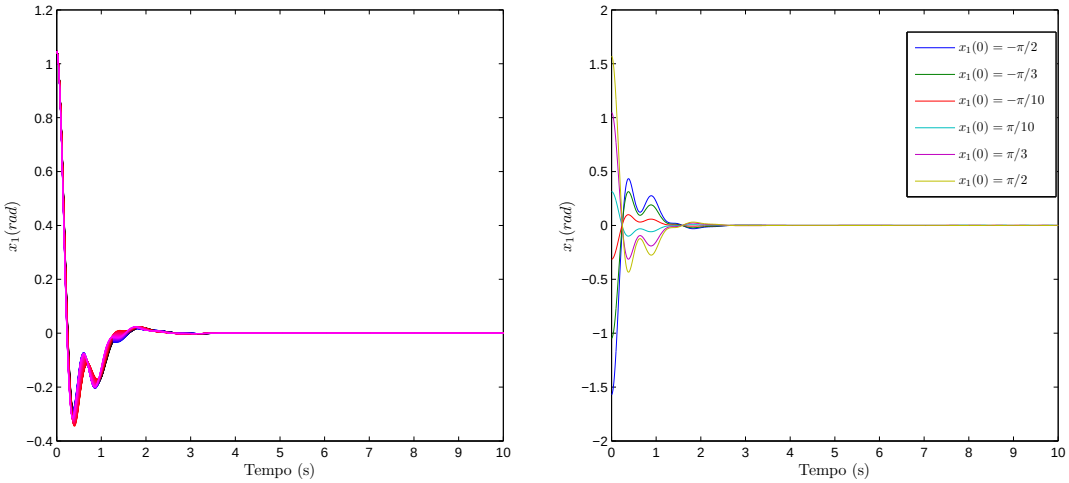
3.3.1 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Representações Lineares a Parâmetros Variantes

Utilizando a abordagem politópica para síntese do controlador e a parametrização da planta como na Seção 2.5.2, é possível obter os seguintes ganhos de controladores vértices

$$K_1 = \begin{bmatrix} 35.1713 & 1.4898 & -41.2507 & -8.2090 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} 37.4130 & 2.0751 & -37.6858 & -8.2090 \end{bmatrix},$$

e as respostas em malha fechada se encontram em:

- Simulações para diferentes valores de incertezas - Figura 3.6(a),
- Simulações para diferentes condições iniciais - Figura 3.6(b).



(a) Incertezas Paramétricas. (b) Condições Iniciais.

Figura 3.6: Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Representação LPV.

3.4 Síntese Robusta a partir de Representações via Linearizações Baseadas em Velocidade

O controlador a partir da representação via VBL, também chamado de controlador diferencial (Kaminer, 1995), é responsável por gerar uma ação de controle dependente da derivada dos estados ou saídas do sistema. Evidentemente isso gera um problema, já que a nova representação se baseia em sinais que não estão normalmente disponíveis para medição. Em Kaminer (1995) e Cai et al. (2011) propõe-se resolver esse impedimento usando um derivador nos sinais de saída da planta. Outra particularidade nesse tipo de controlador é a ação de controle incremental de acordo com a variação incremental dos sinais realimentados. Neste caso, é usual utilizar um integrador na saída do controlador ao invés de realimentar diretamente o sinal de controle. Essas duas particularidades são mostradas na Figura 3.7.

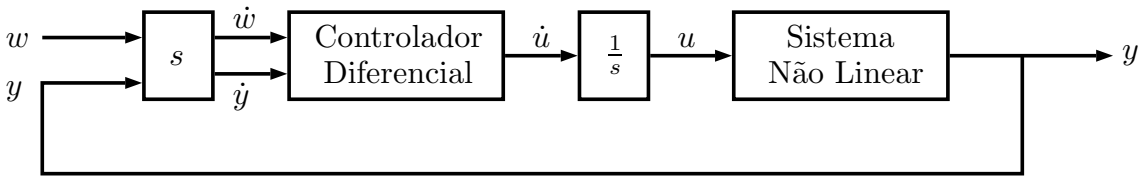


Figura 3.7: Sistema em malha fechada utilizando um controlador diferencial.

Na prática é impossível utilizar um diferenciador puro, sendo este substituído por um filtro, ilustrado na Figura 3.8, cujas propriedades são aproximadas de um derivador

quando se faz a constante $\epsilon > 0$ suficientemente pequena. Nota-se que tal artifício pode gerar problemas na implementação prática, principalmente em sistemas de controle que utilizam a realimentação dos sinais de saída da planta. Ao aplicar esse filtro nesses sinais pode-se aumentar o efeito de ruídos indesejados que eventualmente estejam presentes nas medições.

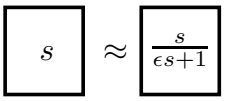


Figura 3.8: Aproximação do elemento derivador por um filtro.

No que diz respeito à solução do sistema VBL , ela será dada pela solução do sistema linear obtido pela combinação dos modelos VBL congelados no ponto de operação p^{op}. Ao escolher a representação politópica como forma de descrição do sistema parametrizado, as condições de síntese LPV que permitem obter os controladores podem ser diretamente aplicadas. O ação de controle incremental será dada por

$$\Psi_{VBL}(\rho) \begin{cases} \dot{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \check{\Pi}_i(\rho) \check{K}_i \xi(t), \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $\check{\Pi}_i(\rho)$ respeita as mesmas condições de convexidade impostas a (3.4). Devido a descrição mista VBL\LPV do sistema, as mesmas condições do Teorema 3.3.1 podem ser utilizadas para obter os ganhos dos controladores. No entanto, estas serão mais conservadoras do que o necessário já que este teorema é válido para qualquer condição inicial, enquanto o sistema aumentado pela VBL necessita de condições iniciais específicas conforme mostrado na Seção 2.6.1.

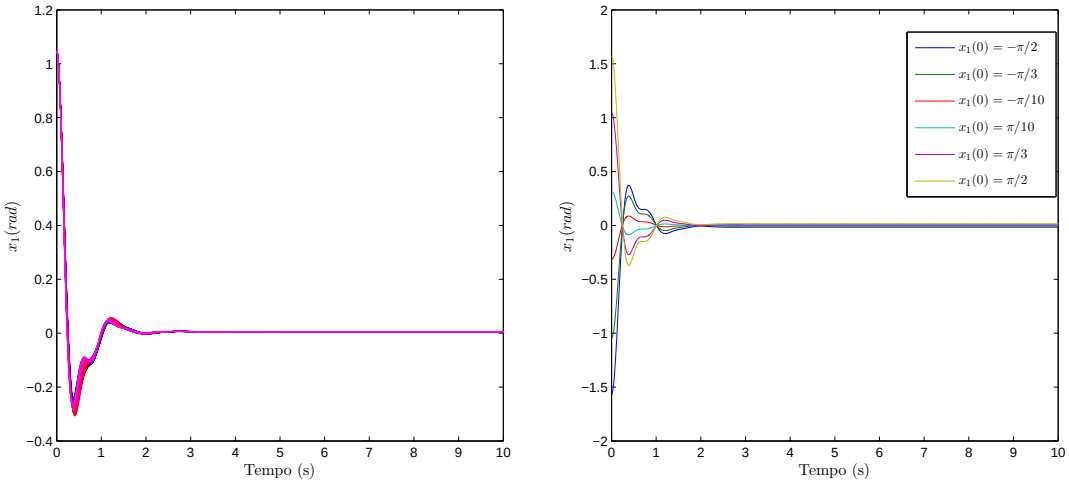
3.4.1 Robô de Junta Flexível - Controlador através de Representações via Linearizações Baseadas em Velocidade

Utilizando a metodologia desenvolvida na Seção 2.6, os ganhos obtidos para o controlador diferencial foram

$$K_1 = \begin{bmatrix} 43.7860 & -3.2661 & -84.6791 & -11.1714 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} 44.4711 & -3.6456 & -86.5791 & -11.3889 \end{bmatrix},$$

e as respostas em malha fechada se encontram em:

- Simulações para diferentes valores de incertezas - Figura 3.9(a),
- Simulações para diferentes condições iniciais - Figura 3.9(b).



(a) Incertezas Paramétricas. (b) Condições Iniciais.

Figura 3.9: Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Linearização Baseada em Velocidade.

3.5 Síntese Robusta Baseada em Representações Lineares Fracionárias

A síntese para sistemas não lineares utilizando a representação linear fracionária exige que o sistema se encontre nessa forma específica, mas assim como no caso LPV, existem diversas maneiras de se obter um controlador. Dentre elas, duas se destacam na literatura. Em Ghaoui e Scorletti (1996) o sistema não linear é considerado como um sistema LIT sujeito a perturbações não lineares. Desta forma, as não linearidades e incertezas estão contidas no bloco de realimentação da LFR. Esse bloco é limitado em norma uma vez que se conhecem os limites para os termos não lineares e incertezas. Consequentemente, a formulação LFR aumentada não entra diretamente na estrutura para definição do controlador, ao invés disso, ela é utilizada para garantir a estabilidade perante a um elipsoide de incertezas. É interessante notar que, para este tipo de abordagem, opta-se por abrir mão de informações importantes do modelo como a própria estrutura dos termos não lineares e incertos e a maneira como eles variam. Essa escolha leva a uma descrição potencialmente conservadora, mas também a formulações de síntese numérica e estrutural simples, assim como controladores LIT de fácil implementação. Para este tipo estratégia, a realimentação de estados é bem definida na literatura. Esta abordagem é ilustrada na Figura 3.10.

Em Apkarian et al. (1995) parte-se para extensões de metodologias $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares. Neste caso, a formulação LFR aumentada entra diretamente na estrutura para definição do controlador, gerando sistemas dinâmicos de dimensão elevada. As condições LMI para este tipo de abordagem são complexas, necessitando de

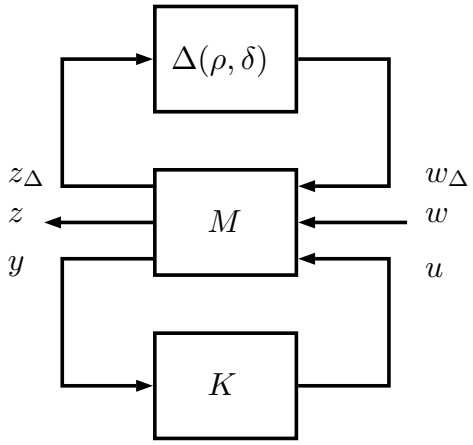


Figura 3.10: Estratégia para síntese LFR com realimentação estática.

simplificações tanto na estrutura da planta quanto do controlador no intuito de tornar o problema tratável. Na literatura, os trabalhos que utilizam esta estratégia são exclusivamente relacionados à realimentação de saída. A Figura 3.11 mostra o sistema em malha fechada.

Utilizando a primeira abordagem, pode-se escrever o controlador como

$$\Psi_{LFT} \left\{ u(t) = Kx(t), \tag{3.8}$$

gerando a seguinte descrição do sistema (2.34) sujeito às simplificações (2.37):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_u K)x(t) + B_\Delta w_\Delta(t), \\ z_\Delta(t) = (C_\Delta + D_{\Delta u} K)x(t) + D_{\Delta\Delta} w_\Delta(t), \\ w_\Delta(t) = \Delta(t) z_\Delta(t), \qquad \|\Delta(t)\| \leq \sigma^{-1}. \end{cases} \tag{3.9}$$

O Teorema 3.5.1 pode ser usado para obter o controlador K.

Teorema 3.5.1. Condições de Síntese Robusta para Representações Lineares Fracionarias (Ghaoui e Scorletti, 1996)

O sistema não linear incerto descrito pela formulação LFR limitada em norma como em (2.37), cuja lei de controle é definida por

$$u(t) = Kx(t), \tag{3.10}$$

será, em malha fechada, assintoticamente estável perante a incertezas paramétricas limitadas em norma se as seguintes condições LMI forem satisfeitas:
Se existirem matrizes

$$Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n_x}, \qquad Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, \qquad T \qquad e \qquad \text{escalar } \sigma,$$

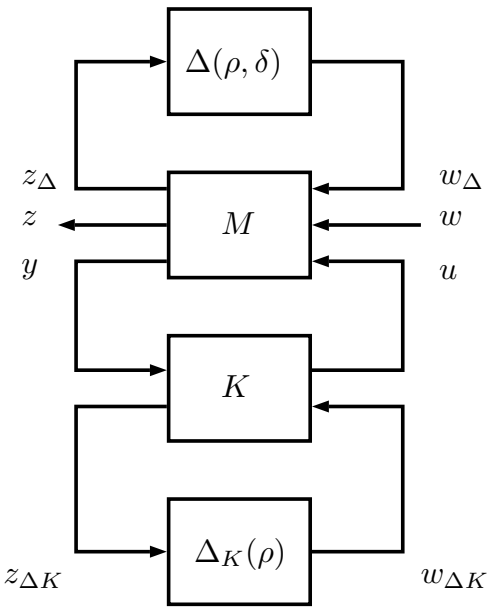


Figura 3.11: Estratégia para síntese LFR com realimentação parametrizada.

que satisfaçam as condições

$$Q > 0, \qquad T > 0, \qquad \sigma > 0,$$
$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_\Delta T B_\Delta^T + B_u Y + Y^T B_u^T & QC_\Delta^T + Y^T D_{\Delta u}^T + B_\Delta T D_{\Delta\Delta}^T \\ C_\Delta Q + D_{\Delta u} Y + D_{\Delta\Delta} T B_\Delta^T & D_{\Delta\Delta} T D_{\Delta\Delta}^T - \sigma^2 T \end{bmatrix} < 0,$$

então a matriz do controlador por realimentação de estados dado será dada por $K = YQ^{-1}$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista no Apêndice C.2. □

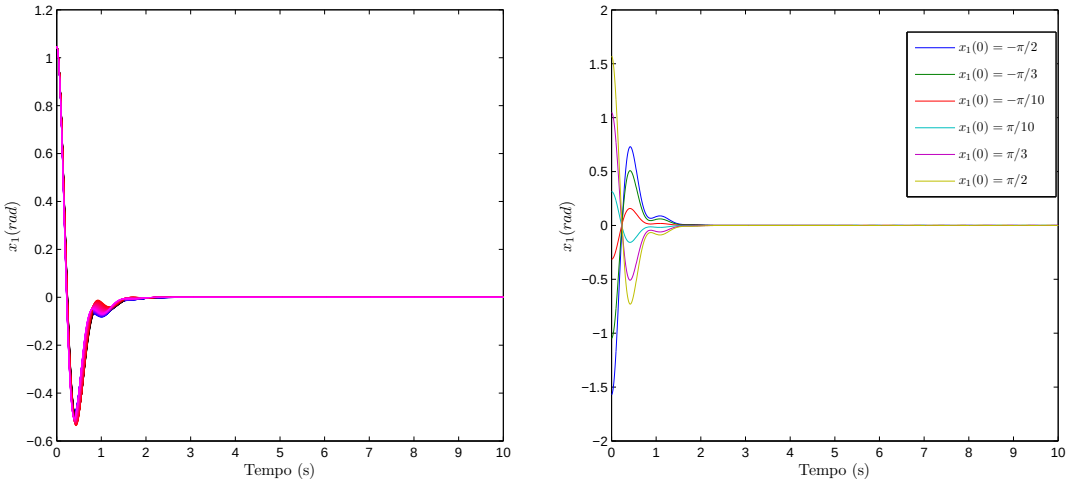
3.5.1 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Representações Lineares Fracionárias

Aplicando as condições de síntese como em Ghaoui e Scorletti (1996) e utilizando a parametrização da Seção 2.7.1, os seguintes ganhos para o controlador são obtidos

$$K = \begin{bmatrix} 45.5321 & 1.7827 & -55.0194 & -15.8066 \end{bmatrix},$$

e as respostas em malha fechada se encontram em:

- Simulações para diferentes valores de incertezas - Figura 3.12(a),
- Simulações para diferentes condições iniciais - Figura 3.12(b).



(a) Incertezas Paramétricas. (b) Condições Iniciais.

Figura 3.12: Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Representação Linear Fracionaria.

3.6 Síntese Robusta Baseada em Representações Fuzzy Takagi-Sugeno

A estratégia de controle fuzzy para sistemas não lineares muito encontrada na literatura é a chamada Compensação Paralela Distribuída (PDC). Esta técnica consiste em gerar a ação de controle através de uma combinação convexa dos controladores ponderados por regras Fuzzy TS cujas variáveis de premissa e conjuntos fuzzy são as mesmas que aproximam o sistema original na sua representação (Tanaka e Wang, 2001). Assim como no caso LPV, procura-se escrever o problema de síntese como um problema de programação convexa utilizando LMI, cujos critérios de desempenho podem ser incorporados ao problema de otimização.

A i-ésima regra do controlador PDC a tempo contínuo é escrita como:

$$\Psi_{Regra-i\ TS}(\rho)\begin{cases}\text{Se } \rho_1 \text{ é } \mathrm{M}_{1i} \text{ e } \ldots \text{ e } \rho_{n_p} \text{ é } \mathrm{M}_{n_p i} \text{ então:} \\ u(t) = K_i x(t),\end{cases} \tag{3.11}$$

onde ρ são as mesmas variáveis de premissa e $M_{n_p i}$ são os mesmos conjuntos fuzzy utilizados em (2.40). O processo de defuzzificação na ação de controle é escrito como

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) K_i x(t), \tag{3.12}$$

cuja propriedade de convexidade é mantida através das condições,

$$h_i(\rho) = \frac{\omega_i(\rho)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(\rho)} \qquad com \qquad \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) = 1 \; e \; h_i(\rho) \geq 0, \forall i = 1 \ldots r, \; e,$$

$$\omega_i(\rho) = \prod_{j=1}^{n_p} \mu_{ij}(\rho_j) \qquad com \qquad \sum_{j=1}^{r} \omega_i(\rho) \geq 0 \; e \; \omega_i(\rho) \geq 0, \forall i = 1 \ldots r.$$

Portanto, o sistema incerto (2.44) em malha fechada com o controlador PDC (3.12) pode ser através de um somatório duplo, isto é,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(\rho) h_j(\rho) \Big\{ (A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t)) K_j \Big\} x(t). \tag{3.13}$$

As condições de síntese são derivadas da equação de malha fechada e com o particionamento das incertezas limitadas em norma conforme descrito em (2.46). Utilizando a estabilidade quadrática de Lyapunov as condições LMI do Teorema 3.6.1 são escritas.

Teorema 3.6.1. Condições de Síntese Robusta para Representações Através de Regras Fuzzy Takagi-Sugeno Incertas

O sistema não linear incerto descrito pela formulação Fuzzy TS como em (2.44), cuja lei de controle é definida por

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} h_j(\rho) K_j x(t), \tag{3.14}$$

será, em malha fechada, assintoticamente estável perante a incertezas limitadas em norma como definidas na Seção 2.8.1 se as seguintes condições LMI forem satisfeitas:

Se existirem matrizes

$$X = X^T \in \mathbb{R}^{n_x}, \qquad Y_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \; \forall j = 1, \ldots r, \qquad \text{e escalar } \epsilon_l > 0 \; \forall l = 1, \ldots L,$$

que satisfaçam as condições

$$\begin{gathered} X > 0, \\ \Xi_{ii} < 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, r, \\ \frac{1}{r-1} \Xi_{ii} + \frac{1}{2} (\Xi_{ij} + \Xi_{ji}) < 0, \qquad 1 \leq i \neq j \leq r, \end{gathered}$$

$$\Xi_{ij} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} XA_i^T + Y_j^T B_i^T + * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \hline \epsilon_1 M_{x_i 1}^T & -\epsilon_1 I & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ \epsilon_L M_{x_i L}^T & & & -\epsilon_L I & & & \\ \hline N_{x_i 1} X + N_{x u_i 1} Y_j & & & & -\epsilon_1 I & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & \\ N_{x_i L} X + N_{x u_i L} Y_j & & & & & & -\epsilon_L I \end{array}\right],$$

então as matrizes do controlador por realimentação de estados serão dadas por $K_i = Y_i X^{-1}$.

Demonstração. A demonstração pode ser vista no Apêndice C.3. □

3.6.1 Extensão da Síntese Robusta para Sistemas Descritos por Representações Fuzzy TS Incertas com Modelos de Referência

Ao adotar sistemas com modelo de referência descritos pela representação Fuzzy TS como em (2.48), a ação de controle por realimentação de estados também deverá incluir os estados do modelo de referência e a integral do erro entre as saídas dos dois sistemas, isto é,

$$u(t) = K_1(\rho)x(t) + K_2(\rho)x_m(t) + K_3(\rho)\int e(t)dt, \tag{3.15}$$

cuja representação para sistemas Fuzzy TS com realimentação de estados é,

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} h_j(\rho)\left\{K_{1_j}x(t) + K_{2_j}x_m(t) + K_{3_j}\int e(\tau)d\tau\right\}, \tag{3.16}$$

nos quais $x(t)$ são os estados do sistema original, $x_m(t)$ são os estados do modelo de referência e $e(t)$ é o erro entre as saídas do sistema e do modelo de referência. As condições de síntese para sistemas com referência nos estados usualmente seguem estratégias de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ entre a saída desempenho e o sinal de referência. No contexto de estabilidade de Lyapunov isso se resume a mostrar que

$$\dot{V}(x) + z^T z - \gamma^2 \widetilde{w}^T \widetilde{w} < 0, \tag{3.17}$$

o que implica em $\|z\|_2 < \gamma\|r\|_2$. Como a própria representação Fuzzy TS considerada já incorpora as incertezas, essa condição também é válida no âmbito de síntese robusta. A expressão (3.17) pode ser facilmente convertida em uma desigualdade matricial linear. Utilizando a mesma abordagem do Teorema 3.6.1, as condições do Teorema 3.6.2 são obtidas.

Teorema 3.6.2. Condições de Síntese Robusta para Representações Através de Regras Fuzzy Takagi-Sugeno Incertas com Modelo de Referência

O sistema não linear incerto descrito pela formulação Fuzzy TS como em (2.48), cuja lei de controle é definida por,

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} h_j(\rho)\widetilde{K}_j\widetilde{x}(t), \qquad e \qquad \widetilde{K}_j = \begin{bmatrix} K_{1_j} & K_{2_j} & K_{3_j} \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

será, em malha fechada, assintoticamente estável perante a incertezas limitadas em norma como definidas na Seção 2.8.1 e possuirá um ganho $\mathcal{L}_2$ induzido menor que γ se as seguintes condições LMIs forem satisfeitas:

Se existirem matrizes

$$X = X^T \in \mathbb{R}^{n_x}, \qquad \widetilde{Y}_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x} \; \forall j = 1, \ldots r, \qquad \text{e escalar } \epsilon_l > 0 \; \forall l = 1, \ldots L,$$

que satisfaçam as condições

$$X > 0,$$
$$\widetilde{\Xi}_{ii} < 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, r,$$
$$\frac{1}{r-1}\widetilde{\Xi}_{ii} + \frac{1}{2}(\widetilde{\Xi}_{ij} + \widetilde{\Xi}_{ji}) < 0, \qquad 1 \leq i \neq j \leq r$$

$$\widetilde{\Xi}_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} X\widetilde{A}_i^T + \widetilde{Y}_j^T\widetilde{B}_{u_i}^T + * & * & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \widetilde{B}_{w_i}^T & -\gamma^2 I & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \widetilde{C}_{1_i}X & 0 & -I & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \hline \epsilon_1\widetilde{M}_{x_i1}^T & 0 & 0 & -\epsilon_1 I & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ \epsilon_L\widetilde{M}_{x_iL}^T & 0 & 0 & & & -\epsilon_L I & & & \\ \hline \widetilde{N}_{x_i1}X + \widetilde{N}_{xu_i1}\widetilde{Y}_j & 0 & 0 & & & & -\epsilon_1 I & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & & & \ddots & \\ \widetilde{N}_{x_iL}X + \widetilde{N}_{xu_iL}\widetilde{Y}_j & 0 & 0 & & & & & & -\epsilon_L I \end{array}\right],$$

então as matrizes do controlador por realimentação de estados serão dadas por $\widetilde{K}_i = \widetilde{Y}_i X^{-1}$.

Demonstração. Basta aplicar as condições do Teorema 3.6.1 para a nova condição (3.17). □

3.6.2 Robô de Junta Flexível - Controlador Baseado em Representações Fuzzy Takagi-Sugeno

Adotando a realimentação de estados com o controlador PDC, é possível gerar as duas regras de controle

$$1^\circ \; Regra : \begin{cases} \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_1 \text{ então:} \\ K_1 = \begin{bmatrix} 36.7748 & 0.3658 & -45.9068 & -10.1544 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

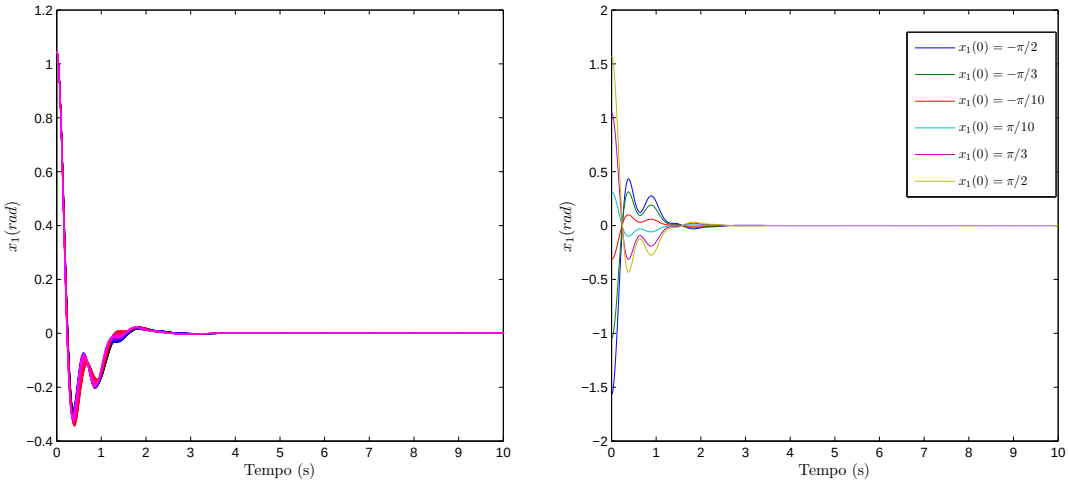
$$2^\circ \; Regra : \begin{cases} \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_2 \text{ então:} \\ K_2 = \begin{bmatrix} 35.9857 & 0.3713 & -45.8731 & -10.4702 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

onde os conjuntos fuzzy M_1 e M_2 são os mesmos obtidos na Seção 2.8.3. As respostas em malha fechada se encontram em:

- Simulações para diferentes valores de incertezas - Figura 3.13(a),
- Simulações para diferentes condições iniciais - Figura 3.13(b).

3.7 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentadas todas as condições LMIs necessárias para se obter um controlador robusto a incertezas utilizando cada uma das cinco técnicas estudadas. Os controladores foram colocados em malha fechada com o Robô de Junta Flexível e foram feitas simulações para diferentes valores de parâmetros incertos e condições iniciais. A análise preliminar dos resultados mostra que as cinco técnicas obtiveram um bom desempenho e seriam capazes de estabilizar o sistema não linear mesmo para uma ampla faixa de operação e com presença de incertezas paramétricas.



(a) Incertezas Paramétricas. (b) Condições Iniciais.

Figura 3.13: Respostas para o Sistema em Malha Fechada - Representação Fuzzy TS.

Capítulo 4

Exemplos de Aplicação

4.1 Introdução

Neste capítulo serão comentados alguns pontos importantes sobre as representações e condições de síntese de controladores desenvolvidas nos Capítulos 2 e 3. Também serão comentados sobre procedimentos no que se diz respeito a tentar obter uma sistematização dos métodos apresentados. Os resultados dos projetos para o Robô de Junta Flexível serão discutidos comparando o desempenho de cada uma das cinco estratégias. Por último, mais dois estudos de caso são analisados no intuito de levantar questões importantes sobre as representações baseadas em modelos locais.

4.2 Comentários acerca do Robô de Junta Flexível

Nos Capítulos 2 e 3 foram expostas as estratégias de representação e síntese de controladores para o Robô de junta flexível. Conforme observado em todas as respostas do sistema original, as cinco abordagens foram satisfatórias para estabilizar o sistema numa ampla faixa de operação mesmo sujeito a incertezas paramétricas na massa da haste e no coeficiente de elasticidade da mola. A compilação das respostas para o sistema nominal, sem incertezas, pode ser vista na Figura 4.1.

Verifica-se que a pior resposta foi a do controlador linear e esse comportamento pode ser justificado devido à natureza local da síntese, uma vez que o intervalo de operação não foi considerado. O controlador estático da LFR é o mais rápido, porém com o maior *overshoot* de todos. Esse resultado pode estar ligado à própria LFR limitada em norma, que captura todas as incertezas, não linearidades e suas variações, num elipsoide com todas as representações não consideradas na modelagem, tornando a descrição conservadora. Os controladores LPV, VBL e Fuzzy TS possuem respostas bem similares, com uma boa proporção de tempo de estabilização e *overshoot*.

Um ponto que merece atenção é a validade dos controladores. O bom desempenho para todos eles pode gerar a falsa expectativa de que toda representação é adequada e, portanto, deve-se escolher a mais simples para controle do sistema não linear. Se este fosse o caso, a representação por linearizações locais sempre seria a escolhida e isso não procede. De fato, o fato do controlador baseado em linearizações locais ter sido capaz de estabilizar o sistema não é nada mais do que uma coincidência

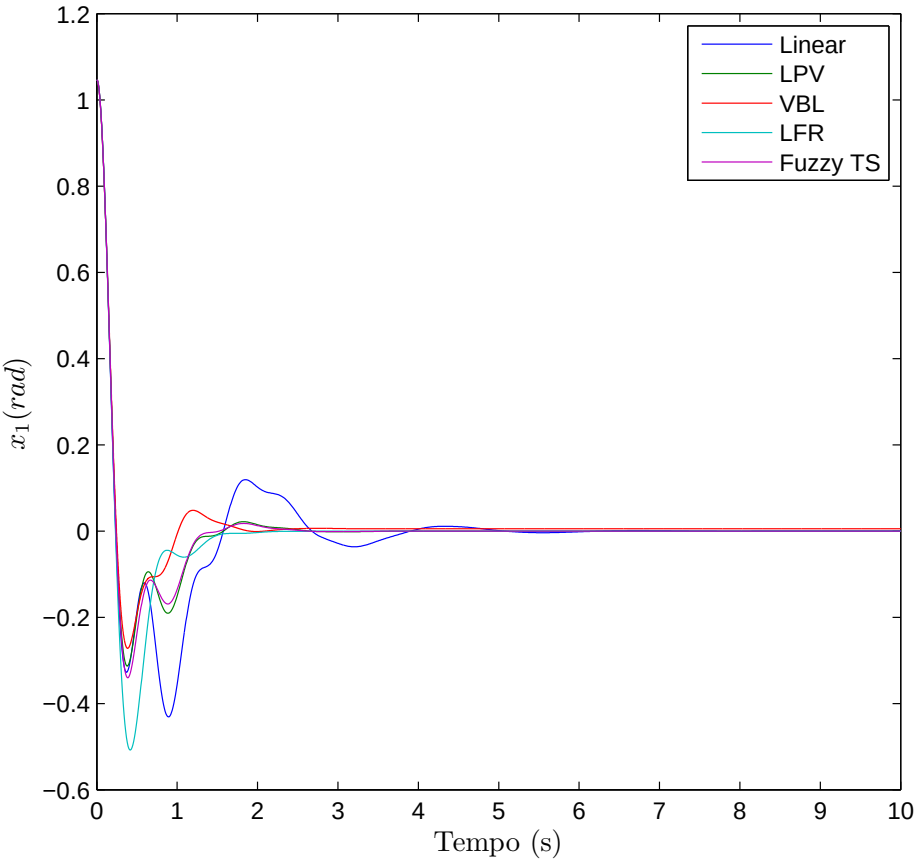


Figura 4.1: Resposta em malha fechada do Robô de Junta Flexível sujeito a cinco estratégias de controle distintas.

já que informações do intervalo de operação e, consequentemente, da dinâmica do sistema nesse intervalo, foram negligenciadas. O bom resultado do controlador linear local está ligado à natureza simples e fácil de controlar da planta. Percebe-se que mesmo na descrição LPV politópica incerta os ganhos dos controladores (3.3.1) para as extremidades do intervalo de análise são basicamente os mesmos. Isso significa que, em teoria, eles poderiam ser substituídos por um único controlador. Simplificadamente, o Robô de Junta Flexível é um sistema interessante para o entendimento de estratégias baseadas em Escalonamento de Ganhos, mas não para justificar o verdadeira vantagem de se utilizar um controlador baseado nelas.

4.3 Estabilização do Pêndulo Deslizante Incerto

Com o objetivo de comparar o desempenho de um controlador linear ao de um não linear é apresentado o segundo estudo de caso, o controle do Pêndulo Deslizante. O

Pêndulo Deslizante é uma simplificação do Pêndulo no Carro, desenvolvido como um cenário desafiador para testar estratégias de controle. Em aplicações da sociedade são utilizados para equilibrar cargas suspensas por uma haste, como no diciclo *Seagway*. Considere o modelo simplificado ilustrado na Figura 4.2, cujas equações são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{mgl}{J}\sin(x_1) - u\frac{ml}{J}\cos(x_1), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $x_1 = \theta$ é o ângulo de rotação, $x_2 = \dot{\theta}$ é a velocidade angular, u é a aceleração horizontal do pivô e m, l, g, J são, respectivamente, a massa do pêndulo, o comprimento da haste, a aceleração da gravidade e o momento de inércia da haste. O valor das constantes do sistema podem ser vistas na Tabela 4.1. O objetivo é controlar o pêndulo no ponto de equilíbrio instável $\theta = 0°$ dentro do intervalo aberto $\theta = (-\pi/2, \pi/2)$. O sistema possui dois termos não lineares, sendo que um deles aparece junto à entrada de controle.

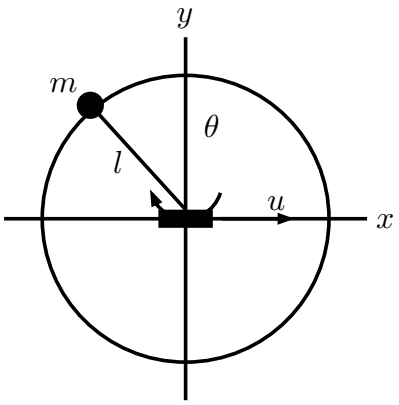


Figura 4.2: Diagrama do Pêndulo Deslizante.

O primeiro desafio é obter a descrição parametrizada. Como existem apenas dois termos não lineares é possível encontrar uma parametrização natural de tal forma que não sejam geradas descontinuidades e que a ação de controle esteja presente. Escreve-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J}\frac{\sin(x_1)}{x_1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{J}\cos(x_1) \end{bmatrix} u. \tag{4.2}$$

Aplicando as metodologias dos Capítulos 2 e 3 os seguintes modelos e controladores são obtidos:

Linear

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{mgl}{J} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{ml}{J}\end{bmatrix}u, \qquad com \qquad p^{eq} = ([0,0]^T). \tag{4.3}$$

O controlador obtido foi

$$K = \begin{bmatrix}11.8153 & 1.6755\end{bmatrix}.$$

Resposta em malha fechada nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b).

LPV

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{mgl}{J}\rho_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{ml}{J}\rho_2\end{bmatrix}u, \qquad \rho_1 = \frac{\sin(x_1)}{x_1} \qquad e \qquad \rho_2 = \cos(x_1).$$

São obtidos quatro sistemas vértices e, consequentemente, quatro controladores vértices,

$$K_1 = \begin{bmatrix}14.7830 & 3.6000\end{bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{bmatrix}423.5877 & 103.1534\end{bmatrix},$$
$$K_3 = \begin{bmatrix}18.2097 & 3.6000\end{bmatrix}, \qquad K_4 = \begin{bmatrix}521.7758 & 103.1534\end{bmatrix}.$$

Resposta em malha fechada na Figura 4.3(c).

VBL

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{mgl}{J}\cos(x_1^{op}) + u^{op}\frac{ml}{J}\sin(x_1^{op}) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{ml}{J}\cos(x_1^{op})\end{bmatrix}\dot{u}. \tag{4.4}$$

O termo em vermelho foi destacado para evidenciar que ele viola a regra de dependência com valores de entrada do sistema que não são disponíveis antes da etapa de projeto. Assim como em Leith e Leithead (2001) esse termo é descartado e espera-se que o mesmo não seja necessário para fornecer uma boa aproximação da planta. Utilizando a decomposição politópica como na Seção 2.6.1, são obtidos quatro sistemas vértices e quatro controladores,

$$K_1 = \begin{bmatrix}-22.2097 & 2.1727\end{bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{bmatrix}-521.7758 & 75.2114\end{bmatrix}, \tag{4.5}$$
$$K_3 = \begin{bmatrix}19.9162 & 2.1727\end{bmatrix}, \qquad K_4 = \begin{bmatrix}327.8252 & 75.2225\end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Resposta em malha fechada na Figura 4.3(d).

LFR

Aproximação dos termos trigonométricos e parametrização:

$$\sin x_1 \approx x_1 - \frac{1}{6}x_1^3, \qquad \cos x_1 \approx 1 - \frac{1}{2}x_1^2 \qquad e \qquad \rho = x_1.$$

Utilizando a notação normalizada,

$$\rho(\delta_\rho) = \rho_0 + \rho_v \delta_\rho,$$

finalmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_\rho \\ \dot{z}_\rho \\ \dot{z}_\rho \\ \dot{z}_\rho \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:c} 0 & 1 & 0 & 0 & ml & ml\rho_0 & ml - \frac{ml}{2}\rho_0^2 \\ mgl - \frac{mgl}{6J}\rho_0^2 & 0 & -mgl & -mgl\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \frac{\rho_0\rho_v}{6J} & 0 & 0 & \rho_v & 0 & 0 & 0 \\ \rho_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_v & \rho_0\rho_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_v}{2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_\rho \\ w_\rho \\ w_\rho \\ w_\rho \\ u \end{bmatrix},$$

e $\Delta = \delta_\rho I_4$.
O controlador obtido foi

$$K = \begin{bmatrix} 357.0551 & 40.8192 \end{bmatrix}.$$

Resposta em malha fechada na Figura 4.3(e).

Fuzzy TS

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J}\frac{\sin(\rho)}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J}\cos(\rho) \end{bmatrix} u, \qquad com \qquad \rho = x_1 \; e \; N_{grid} = 300. \tag{4.7}$$

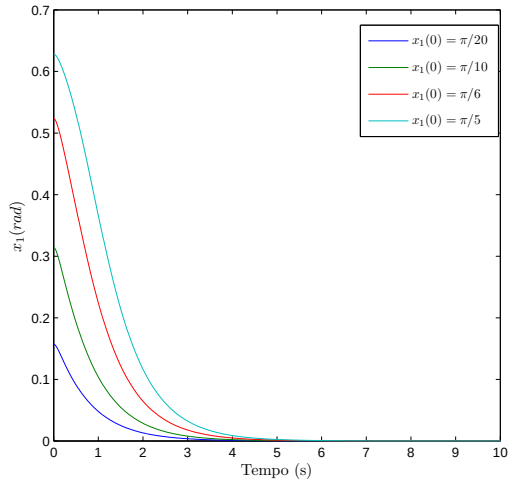
A TPMT completa (sem descarte de valores singulares) fornece três regras, mostradas na Figura 4.4. Portanto são gerados três controladores cujas regras são

$$\begin{cases} 1^\circ \; Regra : \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_1 \text{ então:} \\ K_1 = \begin{bmatrix} 932.5571 & 253.4627 \end{bmatrix}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^\circ \; Regra : \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_2 \text{ então:} \\ K_1 = \begin{bmatrix} 12.2899 & 6.5401 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

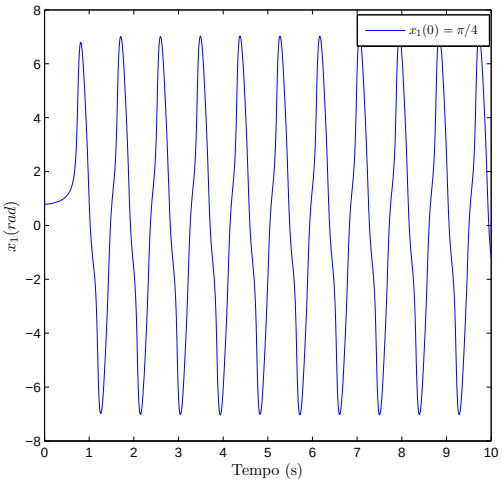
$$\begin{cases} 3^\circ \; Regra : \text{Se } \rho \text{ é } \mathrm{M}_3 \text{ então:} \\ K_1 = \begin{bmatrix} 23.1005 & 9.1853 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Resposta em malha fechada na Figura 4.3(f).

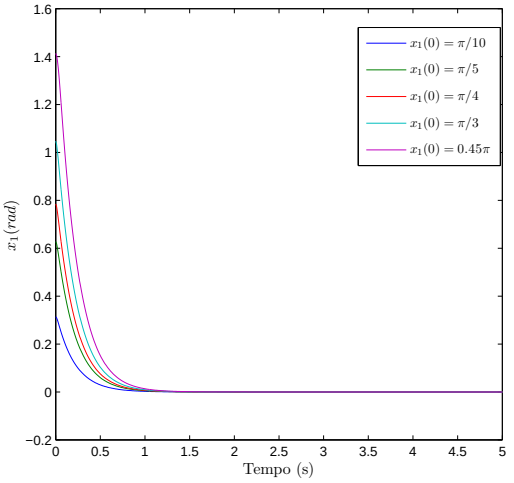
As simulações fornecem informações importantes e previstas em seções anteriores



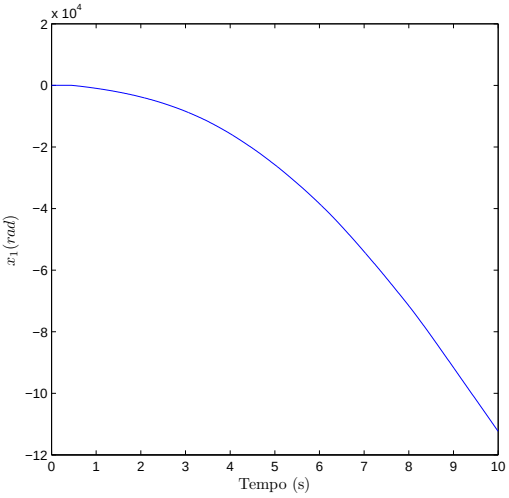
(a) Linear, C.I. $< \pi/4$



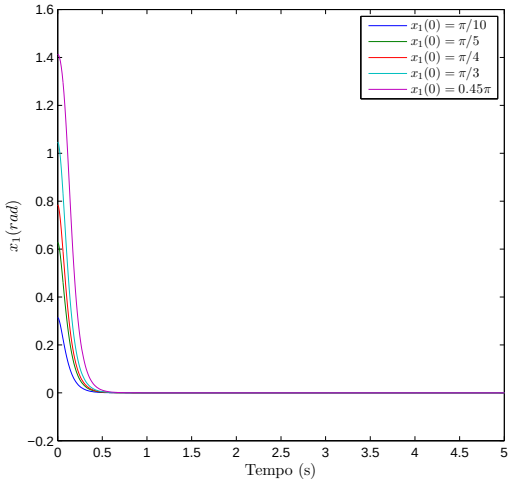
(b) Linear, C.I. $> \pi/4$



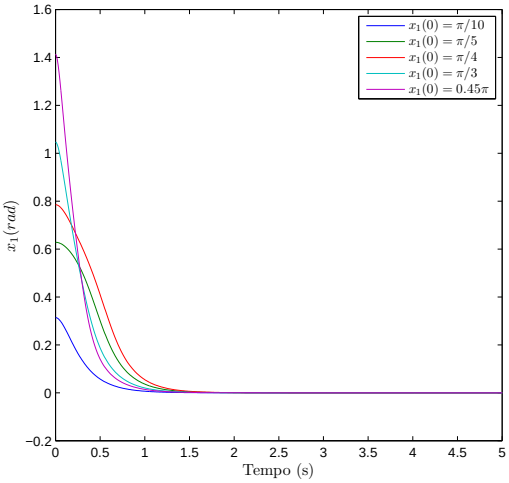
(c) Representação LPV.



(d) VBL\LPV.



(e) Representação Linear Fracionaria.



(f) Representação Fuzzy TS.

Figura 4.3: Respostas em malha fechada para o pêndulo deslizante.

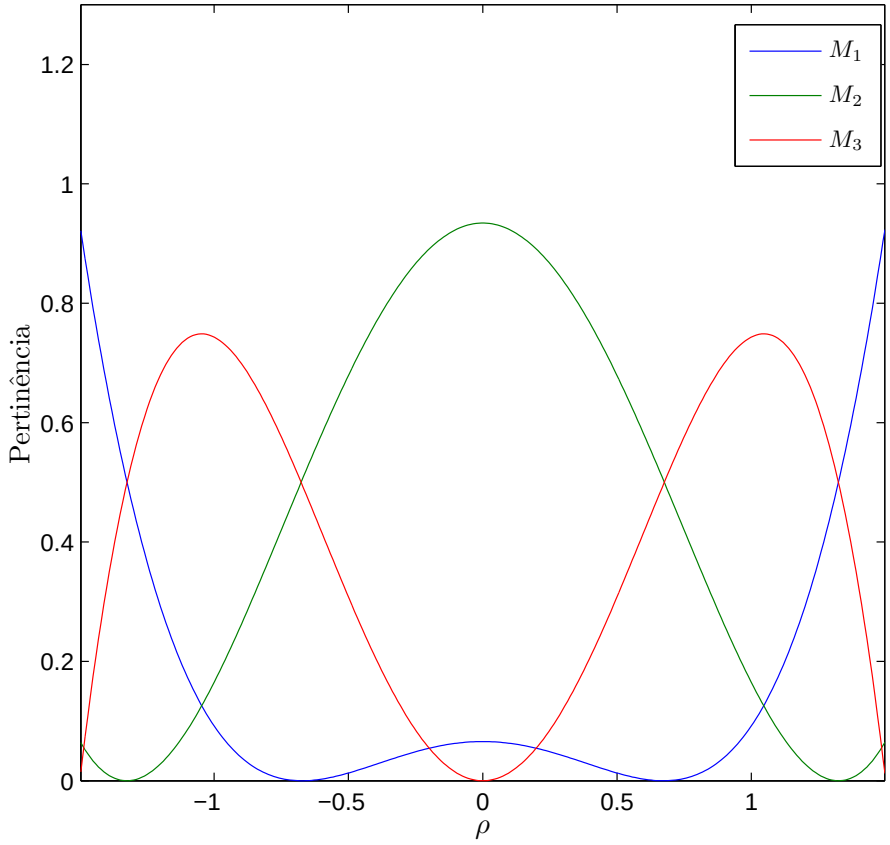


Figura 4.4: Funções de pertinência para M_1, M_2 e M_3.

sobre as descrições utilizadas. A principal é a falha do controlador linear para uma condição longe do ponto de equilíbrio. Para ângulos iniciais superiores a $\pi/5$ radianos o sistema entra em oscilação e o controlador não é capaz de estabilizá-lo, isso representa uma faixa de operação proibida de mais de 50% do intervalo de operação definido. Note que isso pode ser inferido pelas outras descrições uma vez que próximo a região de equilíbrio os ganhos LPV e Fuzzy TS são baixos, mas ao se afastar dela os ganhos aumentam significativamente. Esse fenômeno também pode ser deduzido pelas próprias equações do Pêndulo Deslizante, já que quanto mais afastado de 0° menor o efeito da ação de controle, sendo necessário um controlador com ganhos maiores.

Um ponto preocupante, mas que não causa surpresa, é que a descrição mista VBL\LPV não foi capaz de estabilizar o sistema. Acredita-se que o principal agravante foi o descarte do termo dependente de valores de u^{op}. Ignorar esse termo implica que o sistema original (4.1) não é mais fielmente descrito pela VBL. Isso demonstra uma limitação dessa técnica pois, em situações normais, u^{op} teria de ser definido empiricamente, tornando essa estratégia difícil de ser sistematizada.

Por último, Representação Linear Fracionária foi capaz de estabilizar o sistema para todo intervalo mesmo utilizando um controlador único. Isso é explicado uma vez que as condições de síntese consideram o elipsóide que contém as variações dos termos não lineares. Em sínteses LFR como da Seção 3.5 a maior dificuldade não está em um único controlador estabilizar uma ampla faixa de operação de um sistema não linear (tal fato é garantido pelas condições LMI), o desafio está em encontrar uma solução para as LMI, ou seja, obter o controlador em si.

4.4 Controle do Movimento Longitudinal de uma Aeronave de Asa Fixa

O controle de aeronaves de asa fixa é um problema que vem sendo estudado extensivamente ao longo dos anos. Existe uma grande quantidade de trabalhos que utilizam estratégias de controle baseadas em Escalonamento de Ganhos que se dedicam exclusivamente a obter um modelo representativo e controladores que possam ser aplicados na prática. Para entender um pouco mais os desafios inerentes desse estudo de caso, o problema é formalizado como:

- Fornecida uma referência de altitude e velocidade a ser seguida pela aeronave, obter um controlador em malha fechada que atue nos comandos de profundor e tração levando a aeronave a seguir o comportamento desejado.

Como o principal desafio é controlar a velocidade e a altitude em um eixo da aeronave podem-se realizar algumas simplificações e considerar apenas a Dinâmica Longitudinal da Aeronave descrita por

$$\begin{cases} \dot{V}_T = \frac{\bar{q}S}{m}(C_{X_r}\cos(\alpha) + C_{Z_r}\sin(\alpha)) + \frac{F_T}{m}\cos(\alpha) - g\sin(\theta-\alpha), \\ \dot{\alpha} = q - \frac{\bar{q}S}{mV_T}(C_{X_r}\sin(\alpha) - C_{Z_r}\cos(\alpha)) - \frac{F_T}{mV_T}\sin(\alpha) + \frac{g}{V_T}\cos(\theta-\alpha), \\ \dot{q} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_Y}C_{m_T}, \\ \dot{\theta} = q, \\ \dot{h} = V_T\sin(\theta-\alpha), \end{cases} \tag{4.8}$$

onde V_T é a velocidade da aeronave, α é o ângulo de ataque, q é a velocidade de arfagem, θ é o ângulo de arfagem e h é a altitude da aeronave. Nota-se que, apesar de este ser um sistema de dimensões reduzidas (5 estados), ele é altamente não linear e possui uma série de termos trigonométricos e coeficientes cujos valores são dados por tabelas (C_{X_r},C_{Z_r},C_{m_T}). Enquanto algumas técnicas conseguem lidar com os termos trigonométricos, as tabelas são um impeditivo em qualquer uma das estratégias apresentadas no Capítulo 2. É usual, em sistemas relacionados à área aeroespacial, simplificar os coeficientes aerodinâmicos, sendo os mesmos aproximados por funções racionais. Neste

Termo	**Valor**
Aceleração da gravidade (g)	$9.81\ m/s^2$
Massa do pêndulo (m)	$1\ Kg\ \pm\ 10\%$
Comprimento da haste (l)	$1\ m$
Momento de inércia da haste (J)	$1\ kgm^2$

Tabela 4.1: Valores das constantes do sistema do Pêndulo Deslizante.

trabalho, os coeficientes aerodinâmicos são substituídos por funções racionais que minimizam o erro com tabela real para o intervalo de análise. Desta forma são necessárias equações adicionais, neste trabalho sendo escritas como em (4.9) . Por último, a força de tração é substituída por um comando direto (δ_T), representando uma percentagem da tração máxima da turbina, tal que $F_T = T\delta_T$. Os coeficientes e constantes do VANT utilizado neste trabalho foram retirados de Chumalee (2010) e se encontram nas Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4.

$$\begin{cases} C_{X_r} = C_{X_0} + C_{X_\alpha}\alpha + C_{X_q}\left(\frac{q\bar{c}}{2V_T}\right) + C_{X_{\delta_e}}\delta_e, \\ C_{Z_r} = C_{Z_0} + C_{Z_\alpha}\alpha + C_{Z_q}\left(\frac{q\bar{c}}{2V_T}\right) + C_{Z_{\delta_e}}\delta_e, \\ C_{m_T} = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_q}\left(\frac{q\bar{c}}{2V_T}\right) + C_{m_{\delta_e}}\delta_e. \end{cases} \tag{4.9}$$

Na literatura existe uma dificuldade visível em encontrar um modelo global, e até mesmo local, sem utilizar de técnicas que simplifiquem consideravelmente a dinâmica da aeronave. Tal dificuldade está intrinsecamente ligada às não linearidades severas do sistema assim como aos altos graus de liberdade na parametrização do sistema. Isso é mais bem ilustrado ao se aplicar as estratégias apresentadas no Capítulo 2 a este problema. Como a maioria absoluta dos trabalhos utilizam da técnica baseada em linearizações apresentada na Seção 2.4, esta é comentada por último.

Linearização Baseada em Velocidade: Duas abordagens são possíveis, a primeira utilizando pontos de operação arbitrários e a segunda utilizando uma descrição mista VBL\LPV conforme feito no Capítulo 2. Utilizando a primeira estratégia, o desafio está em definir um envelope de análise para sete variáveis (5 estados + 2 entradas), tarefa extremamente complexa, principalmente sem conhecimento prévio do sistema. Já a segunda estratégia consiste em obter as matrizes de estados A e B em função dos pontos de operação e utilizar de outra técnica para montar o modelo no envelope de

análise. Conforme mostrado na Seção 2.6, a técnica VBL já fornece as matrizes de estados automaticamente. Utilizando uma análise superficial das linearizações das equações (4.8) e (4.9), é possível escrever

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_T}{\partial V_T}(V_T,\alpha,q,\delta_e) & \frac{\partial \dot{V}_T}{\partial \alpha}(V_T,\alpha,q,\theta,\delta_e,\delta_T) & \frac{\partial \dot{V}_T}{\partial q}(V_T,\alpha) & \frac{\partial \dot{V}_T}{\partial \theta}(\alpha) & 0 \\ \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial V_T}(V_T,\alpha,\theta,\delta_e,\delta_T) & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha}(V_T,\alpha,q,\theta,\delta_e,\delta_T) & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial q}(\alpha) & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \theta}(V_T,\alpha) & 0 \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial V_T}(V_T,\alpha,q,\delta_e) & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}(V_T) & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q}(V_T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial V_T}(\alpha,\theta) & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \alpha}(V_T,\alpha,\theta) & 0 & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \theta}(V_T,\alpha,\theta) & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}_T}{\partial \delta_e}(V_T,\alpha) & \frac{\partial \dot{V}_T}{\partial \delta_T}(\alpha) \\ \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \delta_e}(V_T,\alpha) & \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \delta_T}(V_T,\alpha) \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_e}(V_T) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Se essas matrizes fossem transformadas num politopo, seriam necessários mais de meio milhão ($2^{19} = 524288$) de sistemas vértices ou regras Fuzzy TS para fielmente representar a aeronave. Mesmo que fosse possível obter condições LMI que satisfizessem esse número de matrizes, os controladores seriam numericamente frágeis. Sendo que qualquer desvio das variáveis, por mais ínfimo que fosse, poderia contribuir para levar a um descontrole ou perda de desempenho do sistema. Ademais, ambos os métodos sofrem do problema descrito na Seção 2.6, os modelos devem ser parametrizados pelos valores das entradas (ângulo do profundor e comando de tração), normalmente desconhecidos na etapa de projeto e raramente utilizados como sinais de escalonamento. Percebe-se uma dificuldade da sistematização do projeto para a abordagem mista VBL\LPV.

Linear a Parâmetros Variantes: Utilizando a estratégia LPV politópica conforme apresentada na Seção 2.5 duas grandes dificuldades são encontradas. A primeira é em relação ao número de sistemas vértices gerados, tal problema foi evidenciado na formulação mista VBL\LPV. A segunda é em relação à descrição LPV em si. Conforme evidenciado no Capítulo 2, a descrição LPV não é única e não existem procedimentos claros que gerem a representação LPV mais adequada. Mesmo em trabalhos que buscam maneiras sistemáticas de obter representações, estas podem ser inviáveis de se testar ou podem comprometer seriamente a relação com o sistema não linear original (Nagy et al., 2010). Alguns problemas que podem surgir de parametrizações incorretas são:

Realizações mínimas: É interessante buscar representações LPV que utilizem o menor número de parâmetros, já que isso implica diretamente num menor número de condições LMI a serem satisfeitas para obter um controlador, tal fato foi exposto no Capítulo 3. Porém uma descrição mínima nem sempre irá representar o sistema de

maneira satisfatória. Suponha que a equação da dinâmica da velocidade em (4.8) seja parametrizada da seguinte maneira

$$\dot{V}_T = \left[\frac{\bar{q}S}{mV_T}(C_{X_r}\cos(\alpha) + C_{Z_r}\sin(\alpha)) - \frac{g}{V_T}\sin(\theta-\alpha)\right]V_T + \frac{T\delta_T}{m}\cos(\alpha). \tag{4.12}$$

Se a mesma estratégia for utilizada para parametrizar os demais termos da dinâmica longitudinal, é possível obter matrizes de espaço de estados do tipo

$$A = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \quad B = \begin{bmatrix} \rho_{16} & \rho_{17} \\ \rho_{26} & \rho_{27} \\ \rho_{36} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

onde $\rho_{ij} = f_{ij}(estados)$ é uma parametrização qualquer válida.

Apesar do número de regras ter sido reduzido de 2^{19} para 2^{10} (redução de 99,8046875% no número de sistemas vértices ou regras Fuzzy TS!), este modelo certamente não representa o sistema original devido ao bloco de zeros, ignorando grande parte da dinâmica e dos parâmetros do sistema. Em Rotondo et al. (2015) se propõe um teste com todas as possíveis combinações entre os termos que podem dar origem a parametrizações para se obter as matrizes de estado, porém a grande quantidade de termos não lineares do modelo longitudinal e o elevado número de variáveis impede tal procedimento.

Falta de Controlabilidade/Observabilidade: A parametrização equívoca pode gerar modelos locais não controláveis/observáveis, sendo impossível obter controladores para o sistema. Ainda na dinâmica da velocidade, pode-se realizar a seguinte parametrização

$$\dot{V}_T = * + \frac{T\delta_T}{m}\frac{\cos(\alpha)}{V_T}V_T, \tag{4.14}$$

onde $*$ indica uma ou múltiplas parametrizações quaisquer válidas.

Se a mesma estratégia for utilizada para parametrizar os demais termos da dinâmica longitudinal, é possível obter matrizes de espaço de estados do tipo

$$A = \begin{bmatrix} \rho_{11}(estados,\delta_e,\delta_T) & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & 0 \\ \rho_{21}(estados,\delta_e,\delta_T) & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & 0 \\ \rho_{31}(estados,\delta_e) & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \rho_{41} & \rho_{42} & 0 & \rho_{44} & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

onde $\rho_{ij} = f_{ij}(estados)$ é uma parametrização qualquer válida.

Sendo impossível obter um controlador estabilizante para o sistema. Em geral, este tipo de parametrização é evitada por motivos claros, mas foi apresentada por ser uma parametrização possível.

Singularidades na representação: Dependendo da maneira como se escreve a função não linear a ser parametrizada podem ocorrer descontinuidades no modelo obtido, gerando diferenças severas entre o modelo e o sistema original. Considere mais uma vez a dinâmica da velocidade, parametrizada agora da seguinte forma

$$\dot{V}_T = * + g\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\alpha}\alpha + \frac{T\delta_T}{m}\cos(\alpha), \tag{4.16}$$

onde $*$ indica uma ou múltiplas parametrizações quaisquer válidas.

Ao escrever a matriz de estados, um dos termos presentes será

$$g\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\alpha}. \tag{4.17}$$

Porém, se α e θ pertencerem a intervalos simétricos que contenham zero (como é comum para variáveis que representam ângulos), essa função incluirá divisões por zero, gerando uma singularidade matemática.

Em geral, as técnicas de representação não consideram formalmente esses e outros sérios problemas relacionados à obtenção do modelo. Muitas vezes são ignoradas a relação das escolhas de parametrização com o sistema original, validade do modelo obtido para uso na etapa de síntese, consequências da implementação prática de um controlador LPV baseado em tais modelos, etc. Ademais, a maioria das técnicas de parametrização são baseadas em manipulações matemáticas não sistemáticas e não únicas, e requerem níveis elevados de conhecimento a respeito do sistema (Abbas et al., 2014). Portanto, para a Dinâmica Longitudinal da Aeronave, a abordagem puramente LPV não seria a mais adequada.

Fuzzy Takagi-Sugeno: Assim como no caso LPV, os principais problemas ao se obter o modelo Fuzzy TS são o número de sistemas vértices (no caso fuzzy, o número de regras Fuzzy TS) e como obter uma representação aceitável. Pode-se argumentar que aplicar uma técnica numérica permitiria obter um modelo válido mais facilmente, mas tal afirmação não é verdadeira. A transformação do produto tensorial requer que as matrizes $A(\rho)$ e $B(\rho)$ estejam definidas, uma premissa não trivial. Ao tentar utilizar a estratégia da transformação do produto tensorial a diversas parametrizações arbitrárias válidas, o autor obteve um número de regras altas para cada variável, porém os erros (RMS%) nas derivadas entre o sistema não linear original e a aproximação por regras Fuzzy TS foram superiores a 100%, indicando claramente uma falta de equivalência entre os dois. Desta forma, a abordagem através de representações puramente Fuzzy TS não são facilmente sistematizáveis para o VANT de asa fixa.

Representação Linear Fracionária: A transformação do sistema para uma representação LFR exata não é possível devido aos termos trigonométricos presentes na maioria das equações que compõem a dinâmica longitudinal da aeronave. Consequentemente, o primeiro passo é aproximar esses termos por funções racionais. Como o intervalo de análise dos ângulos de arfagem e ataque são normalmente pequenos e próximos a zero, pode-se aproximar essas funções para ângulos pequenos

$$\cos(\beta) = 1 - \frac{\beta^2}{2} \qquad e \qquad \sin(\beta) = \beta - \frac{\beta^3}{6}. \tag{4.18}$$

Uma vez que todas as funções que compõem a dinâmica longitudinal são racionais, pode-se obter uma representação LFR. Novamente, caso não se utilize da linearização, o problema de parametrização dos termos não lineares e obtenção das matrizes $A(\rho)$ e $B(\rho)$ permanece. Além disso, um problema adicional com esse tipo de representação é o aumento da ordem do sistema. Para evidenciar este problema, uma possível parametrização completa da dinâmica da velocidade do modelo longitudinal foi realizada, gerando um bloco de parâmetros realimentados de dimensão 66 ($\Delta(\delta_\rho) = diag(\delta_{V_T} I_{24}, \delta_\alpha I_{34}, \delta_\theta I_8)$). O modelo completo parametrizado possui dimensão 165 (Apêndice B). O aumento da dimensão do problema impacta diretamente na quantidade e dimensão das condições LMI necessárias para se obter um controlador. Para alguns tipos de estratégias de síntese a dimensão do controlador é diretamente proporcional à dimensão da planta e, para o caso LFR, da dimensão da planta aumentada. Consequentemente, as dimensões do controlador seriam altíssimas. Assim como nos casos anteriores, a síntese através de LFR não seria a linha de ação mais adequada.

Ganho Escalonado Clássico ou por Linearizações Locais: Dentre todas as estratégias mencionadas anteriormente, esta é a que se destaca no quesito de quantidade de trabalhos presentes na literatura referentes ao controle baseado em Escalonamento de Ganhos para aeronaves de asa fixa. O principal atrativo desta técnica é a simplicidade de obtenção do modelo. Tanto em trabalhos em que se é utilizada a forma algébrica ou técnicas de identificação local, as matrizes de estado são encontradas facilmente nos pontos de equilíbrio em todo envelope de voo. O modelo final surge de uma miscelânea de abordagens diferentes presentes na literatura, combinando estratégias baseadas em linearizações, identificação, formulações LPV, Fuzzy TS, LFR, dentre outras. Em sua maioria, sendo muito efetivas durante a simulação junto ao sistema não linear original. No entanto, o principal problema é a falta e a dificuldade de se mensurar o quanto e até que ponto de fato o modelo linearizado representa o sistema não linear original.

Em Natesan et al. (2006), Fujimori e Ljung (2006), Gabernet (2007), Chumalee (2010), Hjartarson et al. (2014) e Vanek et al. (2014) a análise e síntese são realizadas sobre modelos linearizados numericamente e posteriormente interpolados por uma estratégia de escalonamento de ganhos. Tal procedimento persiste mesmo em trabalhos recentes que utilizam formulações LPV politópicas (Ameho e Prempain, 2011; Lan et al., 2015)

descrições LFR com blocos de parâmetros, e modelos Fuzzy TS por linearizações algébricas (Tanaka et al., 2014) e numéricas (Campos, 2011). Em abordagens que utilizam da LFR, as não linearidades geram modelos de ordens muito altas. Em Döll e Berard (2008) um modelo linearizado (apenas angulo de ataque, arfagem e velocidade de arfagem) incerto não mínimo é gerado, com um bloco de incertezas de dimensão 510 e posteriormente reduzido para dimensão 137. Em Tu e Liu (2015) e feita a substituição dos termos trigonométricos e reduções numéricas para obter uma LFR de ordem 48.

Estratégias alternativas são propostas em Shin et al. (2002), Marcos e Balas (2004), Shin e Gregory (2007) em que se utiliza a Substituição de Função (*Function substitution*) ou a Transformação de Estado (*State Transformation*) para gerar um modelo LPV aproximado. Na Substituição de Função o modelo não linear é substituído por uma combinação linear de funções dos parâmetros de escalonamento. Para isso é necessário decompor as funções utilizando um ponto de equilíbrio arbitrário, denominado ponto de referência. Críticas a esse modelo são que o sistema LPV resultante dependerá fortemente do ponto de referência escolhido que pode variar consideravelmente dependendo do envelope de operação. Outro fator agravante é que o modelo obtido pode não capturar propriedades de estabilidade do sistema não linear original.

A inclusão formal de incertezas é ainda mais problemática no caso de aeronaves devido ao aumento exponencial (incertezas politópicas) no número de modelos ou linear (incertezas limitadas em norma) na quantidade de matrizes para descrição das mesmas. A simplificação usual quando necessário considerar o cenário de não exatidão nos parâmetros é empregar estratégias de minimização de algum tipo de norma como, por exemplo, a $\mathcal{H}_\infty$, e simular para diferentes valores de parâmetros (Wua et al., 2008; Marcos et al., 2010).

Esses e muitos outros trabalhos na literatura convergem para um ponto comum: é realizada alguma tipo de manipulação ou aproximação para se obter um modelo simplificado, que não possui garantias matemáticas de gerar uma aproximação exata, ou mesmo próxima da real para uma região de operação qualquer (Lin, 2002). A representatividade do modelo e estabilidade do sistema são examinados através de exaustivas simulações. Os projetos que tem sucesso utilizando estratégias baseadas em linearizações são fortemente baseadas em regras heurísticas genéricas que usualmente aparecem como frases do tipo "é necessária uma variação lenta na dinâmica do sistema e na variável de escalonamento" ou "as variáveis de escalonamento devem capturar as não linearidades da planta" ambas originadas no início das pesquisas relacionadas ao Escalonamento de Ganhos (Shamma, 1988; Åström e Wittenmark, 1994). Essas frases são guias que relembram a natureza empírica dessas estratégias. No entanto, a necessidade de gerar um modelo simplificado é clara e está diretamente relacionada a quantidade de parâmetros de escalonamento e dimensão da descrição que seriam necessários para gerar um modelo LPV global, assim como a não unicidade da representação LPV, aos muitos graus de liberdade nas parametrizações e as severas não linearidades presentes em aeronaves de asa fixa.

Independente deste levantamento, em todos os trabalhos citados nesta revisão foi possível gerar uma família de controladores capaz de estabilizar ou controlar a aeronave para uma região pré-definida Ω_ρ. Tal fato é comprovado pelas simulações em qualquer um dos trabalhos citados, realizadas com o modelo não linear original. É interessante notar que mesmo um sistema com não linearidades complexas pode ser controlado utilizando técnicas que não garantem a estabilidade e desempenho para o sistema original.

É necessário reconhecer que a dificuldade de obter provas matemáticas não pode ser impeditivo para abrir mão do controle de um sistema tão benéfico para a sociedade, como é o caso da aeronave de asa fixa. Neste caso, procura-se realizar extensivos e exaustivos testes e simulações de operação, e seguir as regras gerais para obter um modelo, mesmo que empíricas. Por exemplo, aplicar a estratégia da linearização em pontos de equilíbrio não garante automaticamente que o modelo gerado seja satisfatório. O projetista deve cautelosamente escolher as variáveis que possuem maior probabilidade de impactar diretamente na captura da dinâmica. Ao analisar as equações do modelo longitudinal, percebe-se que a velocidade, o ângulo de ataque a o ângulo de arfagem estão intrinsecamente ligados ao sistema. Isso fica mais evidente se a parametrização individual dos termos for feita, como no Apêndice B. Neste caso, é interessante notar que a velocidade de arfagem contribuí muito pouco para a aproximação do modelo e, considerá-lo, poderia levar a uma sobrecarga de sistemas vértices ou regras Fuzzy TS (Chumalee, 2010; Campos, 2011).

4.4.1 Controle do Modelo Longitudinal de um VANT Utilizando um Modelo de Referência e Descrições Fuzzy TS

Inicialmente neste trabalho, para o controle do VANT de asa fixa, adotou-se uma estratégia puramente Fuzzy TS parametrizada conforme o Apêndice B. Nesta parametrização, ainda que tenha sido uma escolha arbitrária do autor, consideraram-se as boas práticas encontradas na literatura. Apesar de inúmeros testes e parametrizações distintas, não foi possível obter um modelo aceitável a partir da transformação do produto tensorial.

Em uma segunda tentativa optou-se por utilizar descrições puramente baseadas em linearizações Jacobianas. Para essa linha de estudo foram definidas as variáveis de escalonamento e um espaço de operação, definido por $\Omega_\rho = [\underline{V_T},\overline{V_T}]\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]\times[\underline{\theta},\overline{\theta}]\times[\underline{h},\overline{h}]$. Utilizando 15 divisões em cada dimensão do envelope foi possível obter uma família de sistemas lineares parametrizados por ρ. Por se tratar de uma abordagem com efeito local, mas escalonada, é necessário fazer uma pequena alteração na ação de controle (3.15), sendo definida agora como

$$u(t) = u_0(\rho) + K_1(\rho)(x(t) - x_0(\rho)) + K_2(x_m(t) - x_{m_0}(\rho)) + K_3 \int e(t)dt, \tag{4.19}$$

onde as variáveis com subscritos de índice zero indicam os valores das variáveis para os pontos de equilíbrio em Ω_ρ. A forma como as variáveis são escalonadas dependerá diretamente da estratégia utilizada. No caso do Escalonamento de Ganhos por modelos linearizados foi feita uma interpolação linear, conforme sugerido na Seção 3.2. Os resultados para diversas referências de velocidade e altitude se encontram nas Figuras 4.5(a) e 4.5(b).

Uma maneira de melhorar as respostas consiste em combinar a linearização com uma estratégia de Escalonamento de Ganhos. Optou-se por uma descrição mista Linearizada\Fuzzy TS como em trabalhos citados na Seção 4.4. Seguindo a metodologia proposta em Campos (2011), os seguintes passos são realizados sobre as equações da planta:

- Define-se $\rho = [V_T \ \alpha \ \theta \ h]^T$ como o vetor de variáveis de premissa. Para cada uma dessas variáveis é construído um vetor de amostras, x^p, composto pelo valor da variável de premissa dentro do envelope de voo Ω_ρ. Neste caso específico, cada variável possui 13 divisões dentro do intervalo $\rho \in [\underline{\rho},\overline{\rho}]$.

- Procura-se o ponto de equilíbrio $p^{eq} = (x^{eq},u^{eq})$ mais próximo de x^p e os estados não parametrizados de x^p são substituídos pelo de x^{eq}.

- O sistema é linearizado em $p^{op} = (x^p,u^{eq})$, que não é necessariamente um ponto de equilíbrio, gerando um modelo afim do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x - x^p) + B(u - u^{eq}) + f(x^p,u^{eq}), \\ y = C(x - x^p) + D(u - u^{eq}) + g(x^p,u^{eq}). \end{cases} \tag{4.20}$$

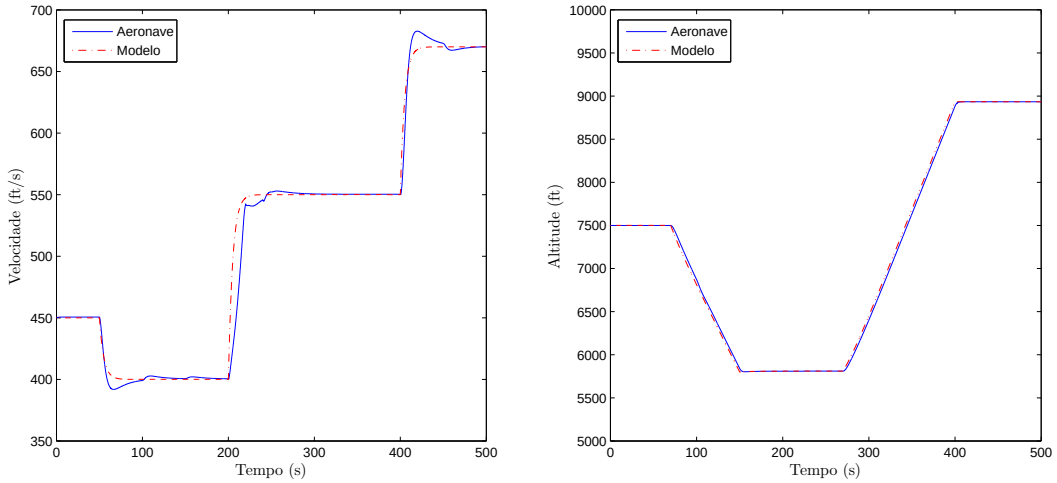
- É obtida a mudança de variáveis necessária para tornar o modelo linear, isto é,

$$\begin{cases} \dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u, \end{cases}$$

  onde $\delta x = x - x_0$, $x_0 = x^p + d_x$, $\delta u = u - u_0$, $u_0 = u^{eq} + d_u$, $\delta y = y - y_0$, $y_0 = g(x^p,u^{eq}) + Cd_u + Dd_u$ e d_x, d_u são as mudanças de variáveis necessárias para linearizar o sistema.

- Aplica-se a transformação do produto tensorial no tensor formado pela família de matrizes A, B, C e D e, separadamente, num segundo tensor formado pelas mudanças de variáveis x_0, u_0 e y_0.

$$S_d = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix}, \qquad e \qquad S_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$



(a) Referência de Velocidade e comportamento do VANT.

(b) Referência de Altitude e comportamento do VANT.

Figura 4.5: Simulação em malha fechada do VANT com o controlador por Escalonamento de Ganhos Classico.

- A ação de controle é realizada como em (3.16), porém por se tratar de uma abordagem local, é necessária uma modificação nos mesmos padrões da ação de controle linearizada. Escreve-se

$$u(t) = u_0(\rho) + \sum_{i=1}^{r} h_i(\rho) \left\{ K_{1_i}(x(t) - x_0(\rho)) + K_{2_i}(x_m(t) - x_{m_0}(\rho)) + K_{3_i} \int e(t)dt \right\} \quad (4.22)$$

com x_{m_0} obtido a partir das relações entre x, x_m e y. Os pontos de equilíbrio (tensor S_0) são "escalonados" por regras Fuzzy TS diferentes daquelas que aproximam o sistema, podendo ter um número muito superior de regras. Note que isso não é um impeditivo, uma vez que a informação referente ao valor dos pontos de equilíbrio não entra diretamente na etapa de síntese.

Seguindo a metodologia apresentada, foram obtidos os conjuntos Fuzzy TS para cada uma das variáveis de premissa, ilustrados na Figura 4.6. Utilizando das condições de síntese propostas na Seção 3.6.1, são obtidos 24 controladores, um para cada regra. A resposta em malha fechada para o modelo longitudinal não linear se encontra nas Figuras 4.7(a) e 4.7(b).

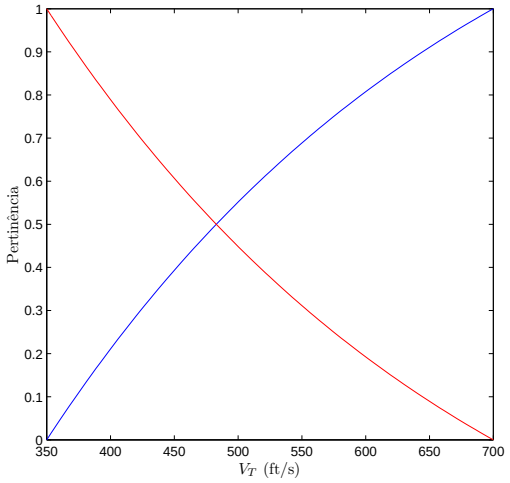
Nota-se que as respostas aos comandos de referência estão notavelmente superiores ao modelo puramente linear. Acredita-se que dois fatores são responsáveis pela resposta ruim da abordagem puramente linear, sendo eles a interpolação linear e os controladores independentes por ponto de equilíbrio. Em relação a resposta através da abordagem Linearizada\Fuzzy TS dois fatores também podem estar ligados à melhor resposta. O primeiro é a combinação não linear das matrizes dos controladores

através das regras Fuzzy TS. O segundo é que na estratégia Fuzzy TS todo o intervalo é considerado para a síntese, em contrapartida na linear a síntese é pontual. Nota-se ainda que a metodologia Linearizada\Fuzzy TS apresentada é facilmente sistematizada e aplicada a uma quantidade significativa de sistemas. No entanto, o sucesso de tal abordagem não está ligado a técnica utilizada e sim a dinâmica permissível do sistema. No momento em que se aplicaram linearizações perdem-se as garantias de estabilidade e desempenho globais do sistema, e apenas as locais permanecem. Este exemplo foi utilizado para demonstrar a dificuldade em se obter um modelo parametrizado puro, e que outras estratégias encontradas na literatura são capazes de estabilizar o sistema, mesmo sem garantias. Questionamentos a respeito da validade do modelo devem se tornar mais explícitos quando o tema do Escalonamento de Ganhos for abordado. Estratégias baseadas em linearizações, apesar de problemáticas, devem ser utilizadas como último recurso em meio tempo ao qual pesquisas paralelas buscam formalizar condições para gerar modelos e sistemas de controle com garantias de representabilidade e estabilização.

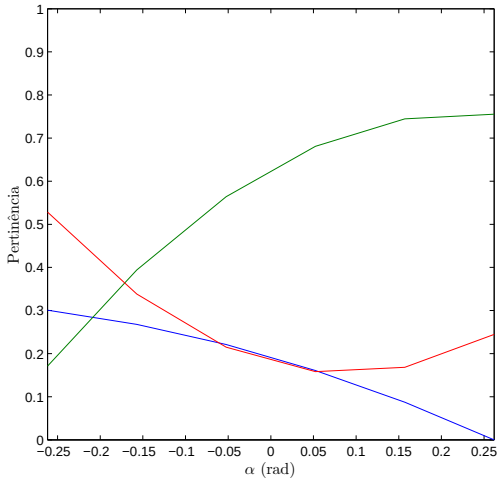
4.5 Considerações Finais

Neste capítulo procurou-se evidenciar e criticar simplificações que são realizadas na etapa de modelamento e síntese utilizando representações baseadas em modelos lineares locais. Primeiramente comentou-se os resultados bons do controlador para o Robô de Junta Flexível. A seguir foi considerado um caso um pouco mais complexo, o Pêndulo Deslizante, para mostrar que controladores lineares nem sempre são eficientes. Comentou-se como é difícil criar um procedimento sistemático de representação da planta devido ao alto grau de liberdade na escolha da parametrização e dos pontos de operação.

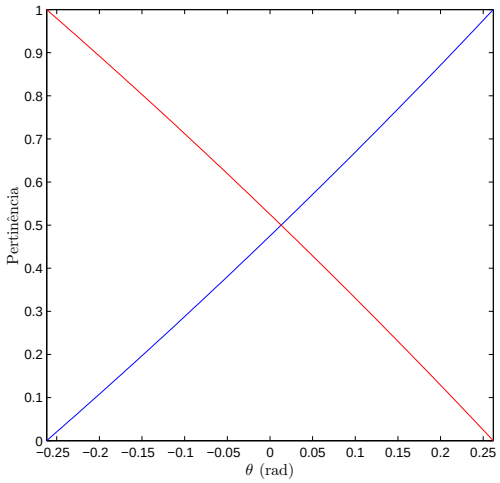
Por último foi apresentado um sistema altamente complexo, o modelo longitudinal de uma aeronave de asa fixa, e detalhado quais as dificuldades de se obter um modelo global e até mesmo local que representasse esse sistema. Mesmo sendo um problema constantemente estudado na literatura diversas simplificações necessitam de ser adotadas para seja possível obter um sistema de controle. A principal desvantagem das simplificações é a falta de garantias de estabilidade e desempenho para o sistema em malha fechada.



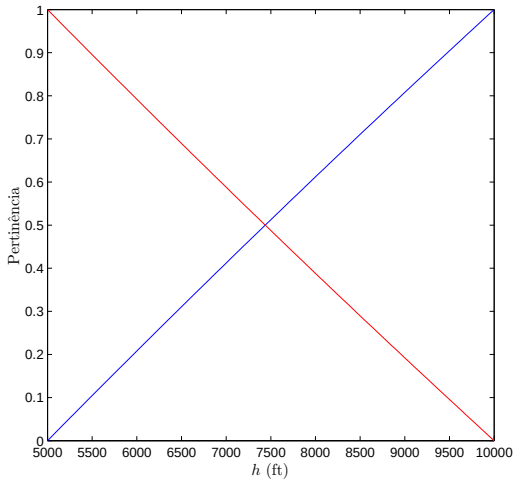
(a) Funções de pertinência para V_T.



(b) Funções de pertinência para α.

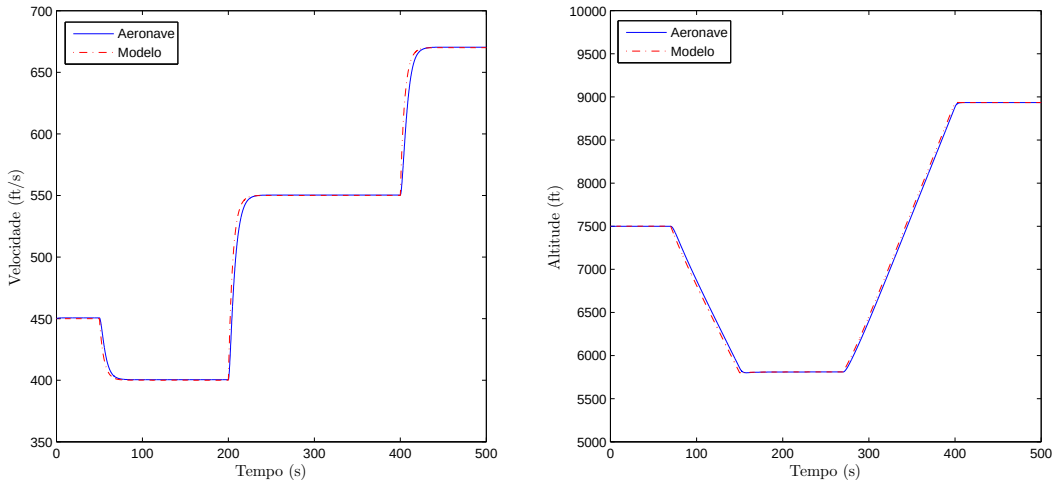


(c) Funções de pertinência para θ.



(d) Funções de pertinência para h.

Figura 4.6: Funções de pertinência obtidas para o modelo do VANT pela Transformação do Produto Tensorial.



(a) Referência de Velocidade e comportamento do VANT.

(b) Referência de Altitude e comportamento do VANT.

Figura 4.7: Simulação em malha fechada do VANT com o controlador misto Linear\Fuzzy TS.

Termo	**Valor**
Área da superfície da asa (S)	$76\ ft^2$
Corda média da asa ($\bar{c}$)	$4\ ft$
Massa da Aeronave (m)	$108.7\ slug\ \pm\ 10\%$
Potência do comando de tração (T)	$1800\ lb_f$
Aceleração da gravidade (g)	$32.17\ ft/s^2$
Pressão dinâmica à 7500 ft ($\bar{q}$)	$1.89 \times 10^{-3}\ lb_f/ft^2$
Momento de inércia em relação ao eixo Y (I_Y)	$1789\ slug - ft^2$

Tabela 4.2: Valores das constantes do sistema do VANT.

Coeficiente	C_{X_0}	C_{X_α}	C_{X_q}	$C_{X_{\delta e}}$
Valor	-0.0213	0.0898	-0.1355	-0.0202
Coeficiente	C_{Z_0}	C_{Z_α}	C_{Z_q}	$C_{Z_{\delta e}}$
Valor	-0.1824	-4.8202	-2.1895	-0.3064
Coeficiente	C_{m_0}	C_{m_α}	C_{m_q}	$C_{m_{\delta e}}$
Valor	0.0643	-0.4157	-5.2417	-0.7363

Tabela 4.3: Valores dos coeficientes aerodinâmicos do VANT.

Termo	**Intervalo**
Velocidade longitudinal (V_t)	[350,700] ft/s
Ângulo de ataque (α)	$[-\pi/12,\pi/12]$ *rad*
Velocidade de arfagem (q)	[*livre*] rad/s
Ângulo de arfagem (θ)	$[-\pi/12,\pi/12]$ *rad*
Altitude (h)	[5000,10000] ft

Tabela 4.4: Envelope de voo para análise.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Visão Geral do Trabalho

Neste trabalho foram estudadas cinco estratégias baseadas em escalonamento de ganhos para a representação e controle de sistemas não lineares. Para cada uma foi mostrado como se obtêm modelos de um sistema não linear incerto. Também foram estudadas as condições para síntese robusta com garantias de estabilidade e desempenho.

No Capítulo 1 foram expostos os motivos da pesquisa e o detalhamento dos objetivos e justificativas para estudar estratégias de projeto baseadas em modelos lineares locais.

No Capítulo 2 foi feita uma breve introdução sobre os sistemas Lineares a Parâmetros Variantes, sendo que esses são uma maneira possível de representar sistemas não lineares. A grande vantagem da descrição LPV é que a mesma permite que se tirem vantagens de estratégias lineares para representar sistemas não lineares. Ainda no Capítulo 2 foram definidas cinco estratégias para estudo, assim como suas formulações matemáticas para incluir incertezas. Durante todo o capítulo foi feita referência ao sistema do Robô de Junta Flexível Incerto para exemplificar como cada abordagem gera um modelo e lida com possíveis incertezas paramétricas.

No final do Capítulo 2 foi realizada uma comparação local entre um sistema não linear e suas aproximações, evidenciando que as aproximações lineares são boas em geral, porém não existe uma maneira sistemática para escolhê-las. Outro fator preocupante que foi exposto é que aproximações nos modelos, principalmente por linearizações Jacobianas, podem implicar em diferenças severas com o sistema real.

A etapa de síntese robusta para cada uma das cinco estratégias foi detalhada no Capítulo 3. Condições LMI que incorporam descrições de incertezas foram obtidas, garantindo condições de estabilidade e desempenho robusto para cada uma das descrições. Novamente, o Robô de Junta Flexível foi referenciado e foi possível obter um controlador estabilizante para cada uma das cinco estratégias. A resposta em malha fechada dos controladores por escalonamento de ganhos foram analisadas, e as cinco abordagens foram capazes de estabilizar o sistema original.

O Capítulo 4 foi dedicado a criticar particularidades das estratégias baseadas em Escalonamento de Ganhos como apresentadas na literatura. Para isso foram remetidos outros dois estudos de casos, a estabilização do pêndulo deslizante e o controle longitudinal de um VANT de asa fixa.

O pêndulo deslizante foi escolhido para evidenciar problemas de algumas das técnicas apresentadas que normalmente não são explicitados na literatura. Ao utilizar a metodologia do Capítulo 2 as técnicas baseadas em linearizações locais e linearizações baseadas em velocidade falharam devido a simplificações não adequadas.

No final do Capítulo 4 foi apresentado um dos casos mais curiosos relativos ao controle baseado em Escalonamento de Ganhos presente na literatura, o controle longitudinal de aeronaves de asa fixa. Na maioria de trabalhos presentes na literatura, as estratégias apresentadas neste trabalho são apenas um suporte, uma maneira de agrupar os sistemas que são obtidos localmente por linearização nos pontos de equilíbrio. Tal linha de trabalho leva a violações nas garantias de estabilidade e desempenho do controlador final. Neste capítulo foi detalhado o motivo da dificuldade de se obter uma representação puramente LPV para este tipo de sistema.

5.2 Comparação das Estratégias Baseadas em Escalonamento de Ganho

A grande quantidade se estratégias de síntese e representação podem levar o projetista a se questionar sobre qual estratégia utilizar quando se deparar com um cenário de projeto. No intuito de prover uma comparação simples entre as estratégias apresentadas neste trabalho serão apresentados os pontos positivos e negativos das etapas de representação e síntese.

5.2.1 Representação: Escalonamento de Ganhos Clássico

Pontos Positivos:

- Extremamente fácil de obter os modelos locais, seja por linearizações numéricas ou por manipulações nas equações do sistema não linear.
- Pode ser utilizado como base para outras estratégias de Escalonamento de Ganhos.
- Permite descrições politópicas ou limitadas em norma para as incertezas.

Pontos Negativos:

- Modelos obtidos possuem validade local e, em geral, a representação não possuí conexão com o sistema original.
- Captura da dinâmica do sistema a ser aproximado depende da estratégia de escalonamento.
- Representatividade apenas local para as incertezas.

5.2.2 Representação: LPV Politópica

Pontos Positivos:

- Capaz de capturar a dinâmica semi-global do sistema não linear.
- Os sistemas vértices e as funções de escalonamento são relativamente simples de serem obtidas para matrizes de estados já parametrizadas.
- Descrições politópicas ou limitadas em norma para as incertezas e garantia que o sistema não linear incerto esteja contido nessas descrições.

Pontos Negativos:

- Politopos são normalmente uma aproximação conservadora e geram um crescimento exponencial do número de sistemas vértices de acordo com os termos a serem parametrizados.
- Não unicidade da parametrização do sistema e, consequentemente, matrizes de estados.
- Parametrizações arbitrárias podem levar a erros graves de aproximação do sistema.
- Descrição politópica das incertezas leva a um crescimento exponencial no número de modelos locais com cada parâmetro incerto.
- Descrição limitada em norma das incertezas leva a um crescimento no número e dimensões de matrizes necessárias para caracterizar as incertezas.

5.2.3 Representação: Mista VBL\LPV

Pontos Positivos:

- Matrizes de estados são obtidas automaticamente não sendo necessária uma escolha da parametrização
- Ao contrário da linearização local, a linearização baseada em velocidade aproxima o sistema para um intervalo semi-global mesmo fora de pontos de equilíbrio.
- Descrições politópcias para as incertezas e garantia que o sistema não linear incerto esteja contido nessas descrições.

Pontos Negativos:

- Aumento da ordem do sistema quando considerados os estados originais.

- Modelo parametrizado pode depender diretamente de valores das entradas do sistema.
- Necessita de condições iniciais específicas para que a aproximação seja válida.
- Descrição politópica das incertezas leva a um crescimento exponencial no número de modelos locais com cada parâmetro incerto.

5.2.4 Representação: LFR Limitada em Norma

Pontos Positivos:

- Transforma o sistema não linear em um sistema linear sujeito a "incertezas não lineares", simplificando a descrição do mesmo.
- Descrição LFR já concebida para incorporar diversos tipos de incertezas.

Pontos Negativos:

- Não unicidade da parametrização do sistema e, consequentemente, matrizes de estados.
- Parametrizações arbitrárias podem levar a erros graves de aproximação do sistema.
- Potencialmente conservadora uma vez que negligencia informações relativas aos termos não lineares.
- Descrição limitada em norma das incertezas e não linearidades leva a um crescimento no número e dimensões de matrizes necessárias para caracterizar o sistema.

5.2.5 Representação: Fuzzy TS via Transformação do Produto Tensorial

Pontos Positivos:

- Capaz de capturar a dinâmica semi-global do sistema não linear.
- Permite obter as matrizes de cada regra e os conjuntos fuzzy numericamente para matrizes de estados já parametrizadas.
- Descrições politópicas ou limitadas em norma para as incertezas e garantia que o sistema não linear incerto esteja contido nessas descrições.

Pontos Negativos:

- Não unicidade da parametrização do sistema e, consequentemente, matrizes de estados.
- Parametrizações arbitrárias podem levar a erros graves de aproximação do sistema.
- Alto custo computacional da TPMT pode tornar inviável obter uma aproximação satisfatória.
- Descrição politópica das incertezas leva a um crescimento exponencial no número de modelos locais com cada parâmetro incerto.
- Descrição limitada em norma das incertezas leva a um crescimento no número e dimensões de matrizes necessárias para caracterizar as incertezas.

5.2.6 Síntese: Escalonamento de Ganhos Clássico

Pontos Positivos:

- Maior probabilidade de uma família de controladores ser obtida, já que o controlador deve estabilizar apenas um sistema localmente.
- Número de LMI cresce linearmente com o número de modelos locais.

Pontos Negativos:

- Controladores com garantias de estabilidade e desempenho, perante ou não incertezas, apenas locais.

5.2.7 Síntese: LPV Politópica

Pontos Positivos:

- Controlador parametrizado que garante estabilidade e critérios de desempenho do sistema não linear descrito por uma parametrização LPV adequada.
- Número finito de LMI, em relação a outras técnicas LPV.

Pontos Negativos:

- Número de LMI cresce exponencialmente com o número de termos não lineares e parâmetros incertos.
- Requer uma estratégia de escalonamento conforme modelo para implementar o controlador.

5.2.8 Síntese: Mista VBL\LPV

Pontos Positivos:

- Controle incremental, com ação integral.

Pontos Negativos:

- Necessita de derivadores.
- Sinais de realimentação podem sofrer maior efeito de ruídos.

5.2.9 Síntese: LFR Limitada em Norma

Pontos Positivos:

- Controlador extremamente simples e de fácil implementação.
- Garantias de estabilidade e desempenho, com presença ou não de incertezas, para um sistema não linear descrito por uma LFR adequada.

Pontos Negativos:

- Dificuldade de obter um controlador para sistemas altamente não lineares ou com regiões de operação extensas.

5.2.10 Síntese: Fuzzy TS PDC via Transformação do Produto Tensorial

Pontos Positivos:

- Controlador parametrizado que garante estabilidade e critérios de desempenho do sistema não linear descrito por uma representação Fuzzy TS adequada.

Pontos Negativos:

- A TPMT pode gerar um número alto de regras, aumentando a dificuldade de se obter um controlador.
- Requer uma estratégia de escalonamento conforme regras do modelo para implementar o controlador.

É importante notar que a escolha final da estratégia a ser utilizada não está ligada somente ao número de vantagens e desvantagens de cada técnica. A filosofia de projeto e complexidade do sistema não linear são alguns dos fatores que contribuem para que uma abordagem seja mais ou menos efetiva que outra. Por exemplo, se é desejado um sistema de controle de simples implementação que garanta estabilidade do sistema não

linear perante a incertezas paramétricas pode-se optar pela LFR limitada em norma, que gera um controlador único. Se o intervalo de operação for extremamente largo e não for possível obter um controlador único, pode-se partir para estratégias LPV ou Fuzzy TS. Mesmo assim, existirão sistemas em que modelos locais parametrizados sejam inviáveis, neste caso devido à imensa quantidade de não linearidades ou parâmetros, como é o caso do VANT mostrado na Seção 4.4. Outro fator que pode contribuir na escolha é a popularidade da estratégia na literatura. É possível encontrar inúmeros trabalhos que lidam com projeto baseado em modelos lineares locais e representações LPV, LFR e Fuzzy TS, enquanto trabalhos relacionados a VBL vem caindo desde o ano 2000. Talvez o fator que mais contribua para a escolha do método na literatura seja a familiaridade do projetista com o mesmo, já que são encontrados poucos trabalhos dedicados a comparar estratégias de representação e síntese baseadas em modelos locais.

5.3 Propostas de Continuidade

A pesquisa apresentada neste trabalho sugere que o universo do controle baseado em Escalonamento de Ganhos ainda é muito atrativo para investigações mais detalhadas. Algumas extensões deste trabalho são sugeridas nesta seção.

Comparação de estratégias de controle baseadas em escalonamento de ganhos para tempo discreto: Todo este trabalho foi direcionado para o estudo de modelagem e síntese para tempo contínuo. Porém os sistemas de controle são computadores digitais e seria interessante comparar as mesmas estratégias, mas para formulações no tempo discreto. Incluir análises de obtenção do modelo discreto, formulações de incertezas, tempos de amostragem, atrasos no tempo, etc.

Obtenção do modelo: A base para o projeto de um controlador satisfatório é uma boa representação do sistema não linear. Como mostrado no Capítulos 2 e 4, obter esse modelo nem sempre é uma tarefa simples. Duas vertentes de modelamento podem ser seguidas. Na área de identificação de modelos pode-se buscar estratégias de identificação caixa cinza e caixa preta que garantam captura da dinâmica do sistema original com certo grau de incerteza conhecido e limitado. No modelamento algébrico o principal ponto deve ser a sistematização do procedimento para escrever as matrizes de estados, com garantias de representação da dinâmica do sistema original.

Comparação entre mesmas classes de estratégias: No intuito de mostrar diferentes estratégias baseadas em escalonamento de ganhos, este trabalho não focou diretamente nas linhas de pesquisa individuais de cada uma delas. Seria interessante comparar diferentes abordagens dentro de uma mesma linha de pesquisa. Por exemplo, comparar técnicas LPV baseadas em representações politópicas, polinomiais, por gradeamento, técnicas Fuzzy PDC com não PDC, estratégias LFR limitadas em norma e aquelas que se usam informações do bloco de realimentação, são algumas das vertentes encontradas nas próprias formas parametrizadas. A compilação de todas essas informações

poderia trazer novos olhares sobre as estratégias baseadas em escalonamento de ganho e desenvolver condições que justificassem, matematicamente, a escolha da melhor estratégia para cada tipo de problema.

Observadores e realimentação de saída: Neste trabalho foram investigadas abordagens baseadas exclusivamente em realimentação de estados. Tal condição pode ser restritiva ou até mesmo impeditiva em alguns sistemas devido a dificuldades nas medições dos estados. Para contornar esse problema podem-se projetar observadores de estados, ou então empregar estratégias de realimentação das saídas do sistema. É de grande valia listar limitações e vantagens e comparar as mesmas com a realimentação de estados, no quesito de complexidade computacional e de implantação.

Relaxações nas condições LMI: A maioria das condições LMI apresentadas nesta pesquisa são rudimentares e apresentam baixo grau de relaxação. Isso foi necessário para incluir condições de estabilidade robusta para cinco abordagens diferentes num mesmo trabalho. No entanto, para cada uma das linhas de pesquisa existem trabalhos inteiros dedicados a obter relaxações que geram condições LMI menos conservadoras. Seria proveitoso estudar mais a fundo essas condições, pois elas podem ser um fator decisivo para escolha da estratégia a ser escolhida.

Referências Bibliográficas

Abbas, H. M. S., Tóth, R., Petreczky, M., Meskin, N., e Mohammadpour, J. (2014). Embedding of nonlinear systems in a linear parameter–varying representation. *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, 19(1):6907–6913. Cape Town, South Africa.

Abonyi, J., Feil, B., Nemeth, S., e Arva, P. (2005). Modified Gath–Geva clustering for fuzzy segmentation of multivariate time–series. *Fuzzy Sets and Systems*, 149:39–56.

Al-Gallaf, E. A. (2008). Clustered based Takagi–Sugeno neuro–fuzzy modeling of a multivariable nonlinear dynamic system. *Asian Journal of Control*, 7(3):163–176.

Ameho, Y. e Prempain, E. (2011). Linear parameter varying controllers for the ADMIRE aircraft longitudinal dynamics. *2011 American Control Conference*, páginas 1315–1320. San Francisco, California, USA.

Apikarian, P. e Gahinet, P. (1995). A convex characterization of gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):853–864.

Apkarian, P., Gahinet, P., e Becker, G. (1995). Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261.

Bachnas, A. A. (2012). *Linear Parameter-Varying Modeling of a High-Purity Distillation Collumn*. Dissertação de Mestrado, Delft University of Technology.

Balas, G., Chiang, R., Packard, A., e Safonov, M. (2015). *Robust Control Toolbox User's Guide*. The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, USA.

Bamieh, B. e Giarre, L. (2001). LPV models: Identification for gain scheduling control. *2001 European Control Conference*, páginas 3092–3097.

Betancor-Martín, C. S., Montiel-Nelson, J. A., e Vega-Martínez, A. (2013). Direct inverse control for a conical tank by using Takagi–Sugeno fuzzy model. *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*, 2(11):5327–5342.

Bett, C. J. e Lemmon, M. (1997). On linear fractional representations of multidimensional rational matrix functions. Relatório técnico, University of Notre Dame.

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15. SIAM Studies in Applied Mathematics.

Bruzelius, F. (2002). *LPV-Based Gain Scheduling: An $\mathcal{H}_\infty$ - LMI approach*. Dissertação de Mestrado, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.

Bruzelius, F. (2004). *Linear parameter-varying systems and approach to gain scheduling*. Tese de Doutorado, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.

Bruzelius, F., Pettersson, S., e Breitholtz, C. (2004). Linear parameter-varying descriptions of nonlinear systems. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 2:1374–1379. Boston, Massachusetts, USA.

Cai, G. B., Duan, G. R., e Hu, C. H. (2010). A velocity-based LPV modeling and control framework for nonlinear tracking. *29th Chinese Control Conference (CCC)*. Beijing, China.

Cai, G. B., Duan, G. R., e Hu, C. H. (2011). A velocity-based lpv modeling and control framework for an airbreathing hypersonic vehicle. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 7(5):2269–2281.

Caigny, J. D., Camino, J. F., e Swevers, J. (2008). Identification of MIMO LPV models based on interpolation. *International Conference on Noise and Vibration Engineering - ISMA2008*. Leuven, Belgium.

Campos, V. (2015). *Takagi–Sugeno Models in a Tensor Product Approach: Exploiting the representation*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil.

Campos, V. C. (2011). *Projeto de controladores Takagi-Sugeno baseados em modelos de referência*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

Campos, V. C. S., Tôrres, L. A. B., e Palhares, R. M. (2015). Revisiting the TP model transformation: Interpolation and rule reduction. *Asian Journal of Control*, 17(2):392–401.

Cao, G., Grigoriadis, K. M., e Nyanteh, Y. D. (2015). LPV control for the full region operation of a wind turbine integrated with synchronous generator. *The Scientific World Journal*, páginas 1–15.

Cardoso, A. J. L. (2006). *Supervisão e Controlo de Sistemas Dinâmicos com Tolerância a Falhas – Contribuição para uma abordagem estruturada e robusta*. Tese de Doutorado, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal.

Chen, S. H. e Juang, J. C. (2011). A switching control design via sum–of–squares approach for a class of polynomial T-S fuzzy model. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 7(7):4363–4376.

Chumalee, S. (2010). *Robust Gain-Scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control for Unmaned Aerial Vehicles*. Tese de Doutorado, Canfield University, Cranfield, UK.

Cuenca, R. B. (2009). *Controle Robusto Aplicado a Trocadores de Calor*. Dissertação de Mestrado, Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia.

Döll, C. e Berard, C. (2008). Modelling of the 3–DOF nonlinear aircraft behaviour via small standard forms. *26th International Congress of the Aeronautical Sciences*.

Feng, K., Lu, J., e Chen, J. (2015). Identification and model predictive control of lpv models based on LS–SVM for MIMO system. *CIESC Journal*, 66(1):197–205.

Fujimori, A. e Ljung, L. (2006). Parameter estimation of polytopic models for a linear parameter varying aircraft system. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 49(165):129–136.

Gabernet, A. F. (2007). *Controllers for Systems with Bounded Actuators: Modeling and control of an F-16 aircraft*. Dissertação de Mestrado, University of California.

Gao, R., O'Dwyer, A., McLoone, S., e Coyle, E. (2004). State feedback integral control by velocity-based multiple model networks. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston, Massachusetts, USA.

Ghaoui, L. E. e Scorletti, G. (1996). Control of rational systems using linear–fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(9):1273–1284.

Guerra., T. M., Sala, A., e Tanaka, R. K. (2015). Fuzzy control turns 50: 10 years later. *Fuzzy Sets and Systems*. http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2015.05.005.

Helmersson, A. (1995). *Methods for Robust Gain Scheduling*. Tese de Doutorado, Linköping University, Linköping, Sweden.

Hjartarson, A., Seiler, P., e Balas, G. (2014). LPV analysis of a gain scheduled control for an aeroelastic aircraft. *2014 American Control Conference*. Portland, Oregon, USA.

Hoffmann, C., Hashemi, S. M., Abbas, H. S., e Werner, H. (2014). Synthesis of lpv controllers with low implementation complexity based on a reduced parameter set. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(6):2393–2398.

Hughes, E. J., Tsourdos, A., e White, B. A. (2002). Multiobjective design of a fuzzy controller for a nonlinear missile autopilot. *Proceedings. 2002 IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, páginas 15–20. Glasgow, Scotland, UK.

Kaminer, I. (1995). A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 31(8):1185–1191.

Kawamoto, S., Tada, K., Ishigame, A., e Taniguchi, T. (1992). An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. San Diego, California, USA.

Khalate, A. A., Bombois, X., Tóth, R., e Babuska, R. (2009). Optimal experimental design for LPV identification using a local approach. *15th IFAC Symposium on System Identification*. Saint–Malo, France.

Kolonic, F., Poljugan, A., e Petrovic, I. (2006). Tensor product model transformation–based controller design for gantry crane control system – an application approach. *Acta Polytechnica Hungarica*, 3(4):95–112.

Lan, X., Wang, Y., e Liu, L. (2015). Dynamic decoupling tracking control for the polytopic lpv model of hypersonic vehicle. *Science China Information Sciences*, 58(9):1–14.

Larimore, W., Cox, P., e Tóth, R. (2015). CVA identification of nonlinear systems with LPV state-space models of affine dependence. *2015 American Control Conference*. Chicago, Illinois, USA.

Leith, D. J. e Leithead, W. E. (1997). Analysis of gain-scheduled and nonlinear systems by velocity–based linearisation families. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1:424–429.

Leith, D. J. e Leithead, W. E. (1998). Gain-scheduled controller design: An analytic framework directly incorporating non-equilibrium plant dynamics. *International Journal of Control*, 70(2):249–269.

Leith, D. J. e Leithead, W. E. (1999). Analytic framework for blended multiple model systems using linear local models. *International Journal of Control*, 72(7):605–619.

Leith, D. J. e Leithead, W. E. (2000). Survey of gain scheduling analysis & design. *International Journal of Control*, 73(11):1001–1025.

Leith, D. J. e Leithead, W. E. (2001). Velocity-based gain-scheduled lateral auto-pilot for an agile missile. *Control Engineering Practice*, 9(10):1079–1093.

Lin, Z. (2002). *Gain scheduling of aircraft pitch attitude and control of discrete, affine, linear parametrically varying systems*. Tese de Doutorado, Iowa State University, Iowa, USA.

Liu, Y., Ban, X., Wu, F., e Lam, H. K. (2015). A gain–scheduling control approach for takagi–sugeno fuzzy systems based on linear parameter–varying control theory. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 138(1):1–9.

Magni, J. F. (2005). User manual of the linear fractional representation toolbox. Relatório técnico, ONERA.

Marcos, A. e Balas, G. (2004). Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(2):218–228.

Marcos, A., Veenman, J., Scherer, C., Zaiacomo, G. D., Mostaza, D., Kerr, M., Köroglu, H., e Bennani, S. (2010). Application of lpv modeling, design and analysis methods to a re-entry vehicle. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Toronto, Ontario, Canada.

Minh, V. T. e Rani, A. M. A. (2009). Linear quadratic state feedback design for switched linear systems with polytopic uncertaities. *International Journal of Advanced Science and Technology*.

Nagy, A. M., Mourot, G., Marx, B., Ragot, J., e Schutz, G. (2010). Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(6):2790–2799.

Nanhu, C. e Wen, J. (2013). LPV model identification for motion control systems. *2013 American Control Conference*. Washington D. C., USA.

Natesan, K., D.Gu., W., Postlethwaite, I., e Jianchi, C. (2006). Design of flight controllers based on simplified LPV model of a UAV. *45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, California, USA.

Natesan, K., Gu, D., e Postlethwaite, I. (2008). Trajectory tracking controller design for an unmanned air vehicle. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, South Korea.

Nichols, R. A., Reichert, R. T., e Rugh, W. J. (1993). Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2):69–79.

Ozgoli, S. e Taghirad, H. D. (2006). A survey on the control of flexible joint robots. *Asian Journal of Control*, 8(4):1–15.

Packard, A. (1994). Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22(2):79–92.

Paijmans, B., Symens, W., Brussel, H. V., e Swevers, J. (2008). Identification of interpolating affine LPV models for mechatronic systems with one varying parameter. *European Journal of Control*, 14(1):16–29.

Papachristodoulou, A. e Papageorgiou, C. (2005). Robust stability and performance analysis of a longitudinal aircraft model using sum of squares techniques. *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Control and Automation Intelligent Control*, páginas 1275–1280.

Pellanda, P. C., Apkarian, P., e Tuan, H. D. (2002). Missile autopilot design via a multi-channel LFT/LPV control method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(1):1–20.

Pereira, R. P. (2008). *Robustez e Sensibilidade Paramétrica de Controladores com Base na Identificação Bayesiana – Abordagem Contínua*. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.

Petersen, I. R. e Hollot, C. V. (1986). A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 2(4):397–411.

Petres, Z. (2006). *Polytopic Decomposition of Linear Parameter–Varying Models by Tensor-Product Model Transformation*. Tese de Doutorado, Budapest University of Technology and Economics, Budapest, Hungary.

Petres, Z., Reskó, B., e Bárányi, P. (2004). TP model transformation based control of the TORA system. *Production Systems and Information Engineering*, 2:159–175.

Poussot-Vassal, C., Sename, O., Dugard, L., Gáspár, P., Szabó, Z., e Bokor, J. (2008). The design of a chassis system based on multi–objective qLPV control. *Periodica Polytechnica*, 36(1–2):93–97.

Previdi, E. e Lovera, M. (2001). Identification of a class of nonlinear parametrically varying models. *European Control Conference (ECC)*, páginas 3086–3091. Porto, Portugal.

Rangajeeva, S. L. M. D. e Whidborne, J. F. (2011). Linear parameter varying control of a quadrotor. *6th IEEE International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS)*, páginas 483–488.

Åström, K. J. e Wittenmark, B. (1994). *Adaptive Control*. Prentice Hall, 2 edição.

Rong, Q. e Irwin, G. W. (2003). Lmi–based control design for discrete polytopic lpv systems. *European Control Conference (ECC)*, páginas 1489–1494. Cambridge, UK.

Rotondo, D., Nejjari, F., e Puig, V. (2013). Fault tolerant control design for polytopic uncertain lpv systems. *21st Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)*, páginas 66–72.

Rotondo, D., Nejjari, F., e Puig, V. (2014). Robust state-feedback control of uncertain LPV systems: An LMI-based approach. *Journal of the Franklin Institute*, 351:2781–2803.

Rotondo, D., Puig, V., Nejjari, F., e Witczak, M. (2015). Automated generation and comparison of Takagi–Sugeno and polytopic quasi–LPV models. *International Journal of Control*, 277(15):44–64.

Rugh, W. J. e Shamma, J. S. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10):1401–1425.

Scherer, C. (2001). Theory of robust control. `http://www.dcsc.tudelft.nl/~cscherer/robust/RCNotes.pdf`. Mechanical Engineering Systems and Control Group–Delft University of Technology, 2011, April, [Online].

Senthilkumar, D. (2010). *Design of robust fuzzy controllers for uncertain nonlinear systems*. Tese de Doutorado, Indian Institute of Technology Guwahati, Assam, India.

Shamma, J. (1988). *Analysis and design of gain scheduled control systems*. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA.

Shamma, J. S. (2012). An overview of LPV systems. In Mohammadpour, J. e Scherer, C. W., editors, *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer US, New York, USA.

Shamma, J. S. e Athans, M. (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter–varying plants. *Automatica*, 27(3):559–564.

Shimomura, T. (2003). Hybrid control of gain-scheduling and switching: A design example of aircraft control. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, Colorado, USA.

Shin, J. e Gregory, I. (2007). Robust gain-scheduled fault tolerant control for a transport aircraft. *Proceedings of 16th IEEE International Conference on Control Applications Part of IEEE Multi-conference on Systems and Control*.

Shin, J. Y., Balas, G. J., e Kaya, M. A. (2002). Blending methodology of linear parameter varying control synthesis of F-16 aircraft system. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(6):1040–1048.

Silva, S. (2005). *Projeto de controladores robustos para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista.

Stilwell, D. J. e Rugh, W. J. (2000). Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers. *Automatica*, 36(5):665–671.

Takarics, B. e Baranyi, P. (2013). Tensor-product-model-based control of a three degrees-of-freedom aeroelastic model. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(5):1527–1533.

Tanaka, K., Ikeda, T., e Wang, H. O. (1996). Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, $\mathcal{H}_\infty$ control theory, and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions Fuzzy Systems*, páginas 1–13.

Tanaka, K. e Ohtake, H. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, 37(4):372–378.

Tanaka, K. e Sano, M. (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions Fuzzy Systems*, 2(2):119–134.

Tanaka, K. e Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequalities approach*. John Wiley & Sons, New York, United States of America.

Tanaka, M., Yamaguchi, K., Ogura, D., Chen, Y. J., e Tanaka, K. (2014). Nonlinear control of F16 aircraft via multiple nonlinear model generation for any trimmed equilibriums. *International Journal of Fuzzy Systems*, 16:40–152.

Tewari, A. (2009). *Prior knowledge based identification of Takagi–Sugeno–Kang fuzzy models for static nonlinear systems*. Tese de Doutorado, The Pennsylvania State University, Pensilvania, USA.

Theis, J., Pfifer, H., Knoblach, A., Saupe, F., e Werner, H. (2015). Linear parameter-varying feedforward control: A missile autopilot design. *Guidance, Navigation, and Control Conference*.

Tong, S., Wang, T., e Li, H. (2000). Fuzzy robust tracking control for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 30:72–90.

Tsakalis, K. S. e Ioannou, P. A. (1992). *Linear Time-Varying Systems: Control and Adaptation*. Prentice Hall, 1 edição.

Tu, H. F. e Liu, L. (2015). Nonlinear symbolic lft model for uav. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 24(2):143–150.

Turk, D., Pipeleers, G., e Swevers, J. (2015). A combined global and local identification approach for LPV systems. *34th Benelux Meeting on Systems and Control*. Lommel, Belgium.

Valášek, M., Šika, Z., Vampola, T., e Hecker, S. (2015). Reduced-order modeling. In Kozek, M. e Schirrer, A., editors, *Modeling and Control for a Blended Wing Body Aircraft*. Springer International Publishing, Gewerbestrasse, Switzerland.

Vanek, B., Peni, T., Szabo, Z., e Bokor, J. (2014). Fault tolerant LPV control of the GTM UAV with dynamic control allocation. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Maryland, USA.

Verdult, V., Ljung, L., e Verhaegen, M. (2002). Identification of composite local linear state-space models using a projected gradient search. *International Journal of Control*, 75(16–17).

Wang, C. (1999). *Aircraft Autopilot Design Using a Sampled–Data Gain Scheduling Technique*. Dissertação de Mestrado, Ohio University, Ohio, USA.

Wingerden, J. W. e Verhaegen, M. (2002). Subspace identification of bilinear and LPV systems for open and closed–loop data. *Automatica*, 45(2):372–381.

Won, D. Y., Tahk, M. J., e Kim, H. J. (2011). A multi-model approach to gain-scheduling control for agile missile autopilot design. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 18(1):7462–7467. Milano, Italy.

Wu, F. (1995). *Control of Linear Parameter Varying Systems*. Tese de Doutorado, University of California Berkeley, Berkeley, California, USA.

Wu, F., Packard, A., e Balas, G. (2002). Systematic gain-scheduling control design: a missile autopilot example. *Asian Journal of Control*, 4(3):341–347.

Wu, F. e Pranja, S. (2004). A new solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis. *Procedings of 2004 American Control Conference*. Boston, Massachusetts, USA.

Wua, S., Chena, P., Hsub, C., e Changc, K. (2008). Gain-scheduled control of PVTOL aircraft dynamics with parameter-dependent disturbance. *Journal of the Franklin Institute*, 345(8):906–925.

Yiqing, H., ans Q. Chengshan, S. C., Ruimin, Z., e Jingmei, Z. (2012). Polytopic lpv gain-scheduled control for a flexible air–breathing hypersonic vehicle. *31st Chinese Control Conference (CCC)*, páginas 329–334. Hefei, China.

Apêndice A

Robô de Junta Flexível

A.1 Definição do Sistema

Manipuladores robóticos de junta flexíveis são uma classe de manipuladores robóticos muito utilizados em indústrias que necessitam de alto grau de flexibilidade e especialização. São utilizados em máquinas de soldagem automática, manipuladores espaciais, em cirurgiões robóticos e mãos articuladas (Ozgoli e Taghirad, 2006). Porém tais vantagens implicam em sistemas mecânicos complexos e as juntas mecânicas são normalmente compostas por molas para conceder flexibilidade aos manipuladores. Há ainda a classe de manipuladores que consideram movimentos rotatórios com presença de massa que podem acumular grande quantidade de energia e provocar oscilações indesejadas. Tais fatores implicam em não linearidades complexas e requerem sistemas de controle especializados. Ao longo deste trabalho será considerado um manipulador simplificado, porém que ainda apresente parte dessa dificuldade de controle. Seja o manipulador robótico apresentado na Figura A.2,

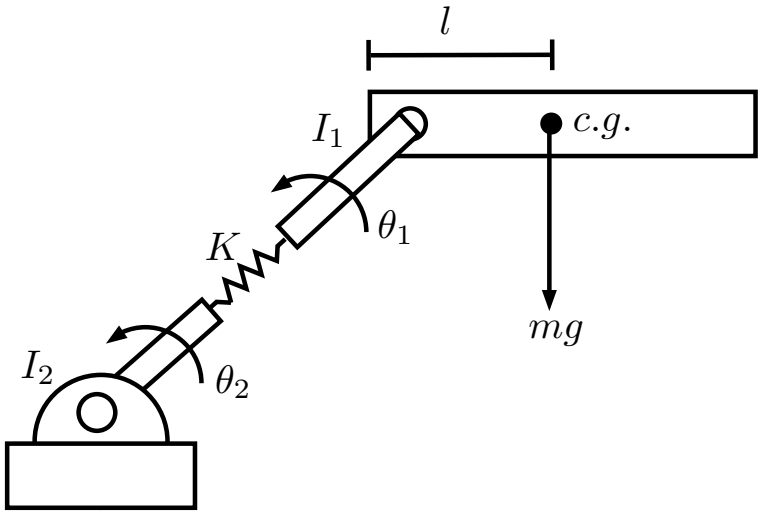


Figura A.1: Esquema Simplificado do Robô de Junta Flexível

cujo modelo dinâmico pode ser descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 + mgl\sin(\theta_1) + K(\theta_1 - \theta_2) = 0, \\ I_2\ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_1) = u, \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde u é o torque exercido pelo motor, I_1 é o momento de inércia da junta, I_2 é a inércia do motor, m é a massa da haste acoplada pela junta, l é o comprimento até o centro de gravidade da haste acoplada pela junta, g é a gravidade, K é a constante elástica da mola, θ_1 e θ_2 são as posições angulares da junta e do atuador. Os valores das constantes podem ser vistos na Tabela A.1.

Claramente essa descrição possui um termo não linear e, se for considerada uma região de movimentação da junta dentro do intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$, tal sistema não pode ser considerado LIT já que sua dinâmica é significativamente alterada ao longo da região de operação. Para tornar o problema mais interessante, deseja-se projetar um controlador capaz de estabilizar a junta caso a mesma esteja numa posição diferente do ângulo de atuação do motor. O fato motivador para o projeto é o comportamento do sistema caso esse cenário ocorra. Para ilustrar o evento, suponha que o motor se encontra no ângulo 0° ($\theta_2 = 0$) e parado ($\dot{\theta}_2 = 0$). Suponha também que a haste seja rotacionada e mantida ($\dot{\theta}_1 = 0$) até a posição de 30° ($\theta_1 = \pi/6$) e depois seja solta. O comportamento da haste é ilustrado na Figura A.2. Este sistema se mantém em oscilação constante, incapaz de se estabilizar naturalmente com a passagem do tempo. O comportamento oscilatório é absolutamente indesejado e justifica a síntese de um controlador para sua estabilização. Ao longo deste trabalho, o robô manipulador será recorrentemente referenciado para evidenciar como cada etapa é tratada nas diferentes técnicas para gerar um modelo e controlador para sistemas não lineares.

Com uma simples mudança de variáveis é possível reescrever o sistema (A.1) numa forma padrão

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = -\frac{mgl}{I_1}\sin(x_1) - \frac{K}{I_1}x_1 + \frac{K}{I_1}x_3, \\ \dot{x_3} = x_4, \\ \dot{x_4} = \frac{K}{I_2}x_1 - \frac{K}{I_2}x_3 + \frac{1}{I_2}u, \end{cases} \tag{A.2}$$

onde $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$ e $x_4 = \dot{\theta}_2$.

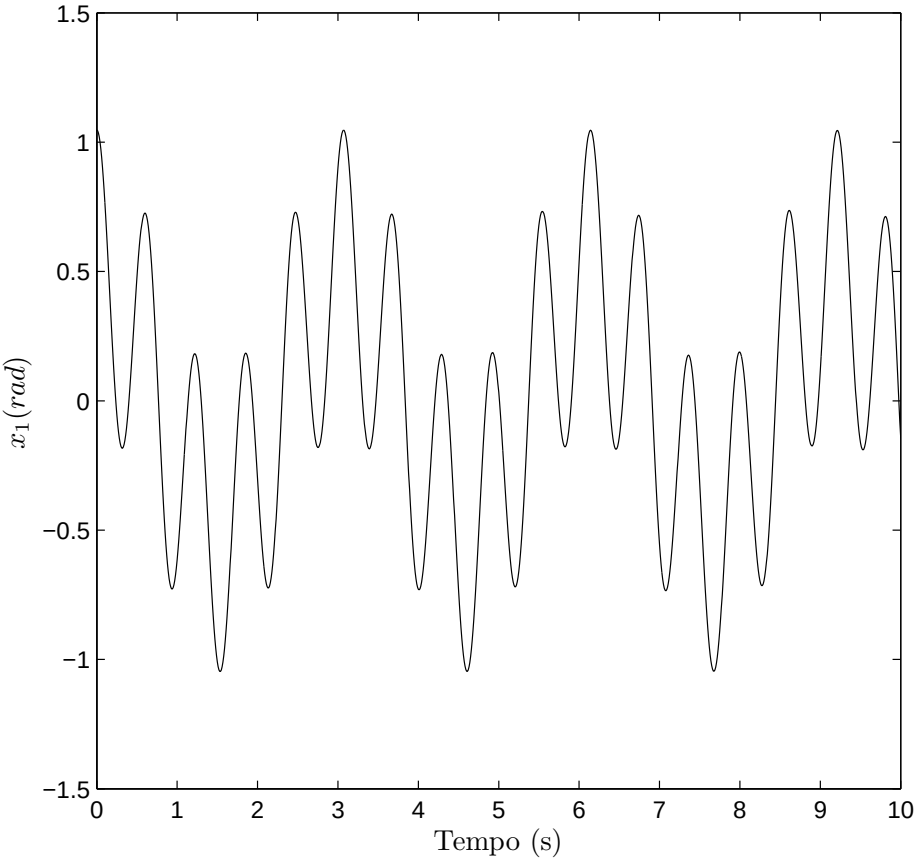


Figura A.2: Comportamento oscilatório para $x_1(0) = \theta_1(0) = \pi/3$.

Termo	**Valor**
Aceleração da gravidade (g)	$9.81\ m/s^2$
Massa da haste (m)	$1\ Kg\ \pm\ 10\%$
Comprimento da haste (c.g.) (l)	$1\ m$
Momento de inércia da junta (I_1)	$1\ kgm^2$
Momento de inércia do motor (I_2)	$1\ kgm^2$
Constante elástica (K)	$50\ Nm/rad\ \pm\ 10\%$

Tabela A.1: Valores das constantes do sistema do Robô de Junta Flexível.

Apêndice B

Parametrização da Dinâmica Longitudinal do VANT de Asa Fixa

Nesta seção é feita a parametrização completa das equações do movimento longitudinal da aeronave de asa fixa. A parametrização proposta é apenas uma das infinitas possibilidades e os termos foram organizados de maneira a obedecer as regras gerais descritas na Seção 4.4, incluindo condições de controlabilidade.

LPV		LFR	
Termo	Parâmetro	Termo	Bloco de Realimentação
$\dot{V}_T =$	$N.A.$	$\dot{V}_T =$	$N.A.$
$\frac{pS}{2m}C_{X_0}V_T^2\cos(\alpha)$	V_T	$(V_T)\frac{pS}{2m}C_{X_0}\left(V_T - \frac{V_T\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_2,\delta_\alpha I_2)$
$\frac{pS}{2m}C_{X_\alpha}V_T^2\alpha\cos(\alpha)$	α	$(\alpha)\frac{pS}{2m}C_{X_\alpha}\left(V_T^2 - \frac{V_T^2\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_4,\delta_\alpha I_2)$
$\frac{pS}{2m}C_{X_q}V_T^2\cos(\alpha)\frac{q\bar{c}}{2V_T}$	q	$(q)\frac{pS\bar{c}}{4m}C_{X_q}\left(V_T - \frac{V_T\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_2,\delta_\alpha I_2)$
$\frac{pS}{2m}C_{X_{\delta_e}}V_T^2\delta_e\cos(\alpha)$	δ_e	$(\delta_e)\frac{pS}{2m}C_{X_{\delta_e}}\left(V_T^2 - \frac{V_T^2\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_4,\delta_\alpha I_2)$
$\frac{pS}{2m}C_{Z_0}V_T^2\sin(\alpha)$	V_T	$(V_T)\frac{pS}{2m}C_{Z_0}\left(V_T\alpha - \frac{V_T\alpha^3}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_2,\delta_\alpha I_4)$
$\frac{pS}{2m}C_{Z_\alpha}V_T^2\alpha\sin(\alpha)$	α	$(\alpha)\frac{pS}{2m}C_{Z_\alpha}\left(V_T^2\alpha - \frac{V_T^2\alpha^3}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_4,\delta_\alpha I_4)$
$\frac{pS}{2m}C_{Z_q}V_T^2\sin(\alpha)\frac{q\bar{c}}{2V_T}$	q	$(q)\frac{pS\bar{c}}{4m}C_{Z_q}\left(V_T\alpha - \frac{V_T\alpha^3}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_2,\delta_\alpha I_4)$
$\frac{pS}{2m}C_{Z_{\delta_e}}V_T^2\delta_e\sin(\alpha)$	δ_e	$(\delta_e)\frac{pS}{2m}C_{Z_{\delta_e}}\left(V_T^2\alpha - \frac{V_T^2\alpha^3}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T}I_4,\delta_\alpha I_4)$
$\delta_T\frac{\cos(\alpha)}{m}$	δ_T	$(\delta_T)\frac{1}{m}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$	$\delta_\alpha I_2$
$-g\theta\frac{\sin(\theta)\cos(\alpha)}{\theta}$	θ	$-(\theta)g\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_\alpha I_4,\delta_\theta I_4)$
$g\alpha\frac{\cos(\theta)\sin(\alpha)}{\alpha}$	α	$-(\alpha)g\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$	$diag(\delta_\alpha I_4,\delta_\theta I_4)$

Tabela B.1: Parametrização da dinâmica da velocidade.

LPV		LFR	
Termo	Parâmetro	Termo	Bloco de Realimentação
$\dot{\alpha} =$	$N.A.$	$\dot{\alpha} =$	$N.A.$
q	q	$(q)1$	$N.A.$
$-\frac{pS}{2V_T m} C_{X_0} V_T^2 \sin(\alpha)$	V_T	$-(V_T)\frac{pS}{2m} C_{X_0}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)$	$\delta_\alpha I_4$
$-\frac{pS}{2V_T m} C_{X_\alpha} V_T^2 \alpha \sin(\alpha)$	α	$-(\alpha)\frac{pS}{2m} C_{X_\alpha}\left(V_T\alpha - \frac{V_T\alpha^3}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_2, \delta_\alpha I_4)$
$-\frac{pS}{2V_T m} C_{X_q} V_T^2 \sin(\alpha)\frac{q\bar{c}}{2V_T}$	q	$-(q)\frac{pS\bar{c}}{4m} C_{X_q}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)$	$\delta_\alpha I_4$
$-\frac{pS}{2V_T m} C_{X_{\delta_e}} V_T^2 \delta_e \sin(\alpha)$	δ_e	$(\delta_e)\frac{pS}{2m} C_{X_{\delta_e}}\left(\frac{V_T\alpha^3}{6} - V_T\alpha\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_2, \delta_\alpha I_4)$
$\frac{pS}{2V_T m} C_{X_0} V_T^2 \cos(\alpha)$	V_T	$(V_T)\frac{pS}{2m} C_{X_0}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$	$\delta_\alpha I_2$
$\frac{pS}{2V_T m} C_{X_\alpha} V_T^2 \alpha \cos(\alpha)$	α	$(\alpha)\frac{pS}{2m} C_{X_\alpha}\left(V_T - \frac{V_T\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_2, \delta_\alpha I_2)$
$\frac{pS}{2V_T m} C_{X_q} V_T^2 \cos(\alpha)\frac{q\bar{c}}{2V_T}$	q	$(q)\frac{pS\bar{c}}{4m} C_{X_q}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$	$\delta_\alpha I_2$
$\frac{pS}{2V_T m} C_{X_{\delta_e}} V_T^2 \delta_e \cos(\alpha)$	δ_e	$(\delta_e)\frac{pS}{2m} C_{X_{\delta_e}}\left(V_T - \frac{V_T\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_2, \delta_\alpha I_2)$
$-\delta_T \frac{\sin(\alpha)}{m V_T}$	δ_T	$-\delta_T \frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{V_T} - \frac{\alpha^3}{6V_T}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_2, \delta_\alpha I_4)$
$\frac{g}{V_T}\cos(\theta)\cos(\alpha)$	V_T	$(V_T)\frac{g}{V_T^2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_8, \delta_\alpha I_4, \delta_\theta I_4)$
$\frac{g}{V_T}\sin(\theta)\sin(\alpha)$	V_T	$(\theta)\frac{g}{V_T}\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_4, \delta_\alpha I_8, \delta_\theta I_4)$

Tabela B.2: Parametrização da dinâmica do ângulo de ataque.

LPV		LFR	
Termo	Parâmetro	Termo	Bloco de Realimentação
$\dot{q} =$	$N.A.$	$\dot{q} =$	$N.A.$
$\frac{pS\bar{c}V_T^2}{2I_Y}C_{m_0}$	V_T	$(V_T)\frac{pS\bar{c}V_T}{2I_Y}C_{m_0}$	δ_{V_T}
$\frac{pS\bar{c}V_T^2}{2I_Y}C_{m_\alpha}\alpha$	α	$(\alpha)\frac{pS\bar{c}V_T^2}{2I_Y}C_{m_0}$	$\delta_{V_T}I_2$
$\frac{pS\bar{c}V_T^2}{2I_Y}C_{m_q}\frac{q\bar{c}}{2V_T}$	q	$(q)\frac{pS\bar{c}^2V_T}{4I_Y}C_{m_q}$	δ_{V_T}
$\frac{pS\bar{c}V_T^2}{2I_Y}C_{m_{\delta_e}}\delta_e$	δ_e	$(\delta_e)\frac{pS\bar{c}V_T^2}{2I_Y}C_{m_{\delta_e}}$	$\delta_{V_T}I_2$

Tabela B.3: Parametrização da dinâmica da velocidade angular de arfagem.

LPV		LFR	
Termo	Parâmetro	Termo	Bloco de Realimentação
$\dot{\theta} =$	$N.A.$	$\dot{\theta} =$	$N.A.$
q	q	$(q)1$	$N.A.$

Tabela B.4: Parametrização da dinâmica do ângulo de arfagem.

LPV		LFR	
Termo	Parâmetro	Termo	Bloco de Realimentação
$\dot{h} =$	$N.A.$	$\dot{h} =$	$N.A.$
$V_T \sin(\theta) \cos(\alpha)$	V_T	$(\theta)V_T\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_4, \delta_\alpha I_4, \delta_\theta I_4)$
$-V_T \cos(\theta) \sin(\alpha)$	V_T	$-(\alpha)V_T\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$	$diag(\delta_{V_T} I_4, \delta_\alpha I_4, \delta_\theta I_4)$

Tabela B.5: Parametrização da dinâmica da altitude.

Apêndice C

Provas dos Teoremas

C.1 Teorema 3.3.1

A prova do teorema consiste em aplicar diretamente a estabilidade quadrática de Lyapunov ao sistema multimodelo em malha fechada[1]. Considere a ação de controle dada por,

$$u = \sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho) K_i x, \tag{C.1}$$

e a descrição multimodelo da planta incerta, dada pelo somatório duplo,

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_d} \Pi_i(\rho) \beta_{ij} (A_{ij} x + B_{ij} u). \tag{C.2}$$

Utilizando as condições de estabilidade quadrática de Lyapunov para o sistema em malha fechada, tem-se

$$x^T \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_d} \Pi_i(\rho) \beta_{ij} \sum_{k=1}^{N} \Pi_k(\rho) (A_{ij} + B_{ij} K_k) \right)^T P x + *, \tag{C.3}$$
$$\forall i,k = 1 \ldots N, \forall j = 1 \ldots N_d.$$

Uma vez que a representação da planta, as incertezas e os controladores estão contidos num politopo convexo, as seguintes condições são verdadeiras

[1]No artigo intitulado "Comparando Diferentes Estratégias de Controle para Sistemas Não Lineares Incertos Baseadas em Escalonamento de Ganhos", publicado pelo presente autor no XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), o Teorema 1 é utilizado para a síntese de um controlador LPV, porém o mesmo se encontra errado. O autor não havia considerado todas as possíveis combinações de sistemas vértices, incertezas e controladores como realizado no Apêndice C.1. A formulação correta levaria a condições como as da equação (C.4), porém tal resultado leva a condições muito conservadoras e de pouca valia. Uma alternativa para o Teorema 3 do artigo é o Teorema 3.3.1 apresentado neste trabalho que fornece condições para a síntese mais relaxadas.

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i(\rho) = 1, \Pi_i(\rho) \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j = 1, \beta_j \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} \Pi_k(\rho) = 1, \Pi_k(\rho) \geq 0.$$

Finalmente, com as mudanças de variáveis $P^{-1} = X$, $Y_k = K_k X$, aplicando a transformação de congruência e ao fazer uso das condições de convexidade do sistema multimodelo obtém-se uma condição suficiente e muito conservadora para a estabilidade quadrática, que é,

$$XA_{ij}^T + Y_k^T B_{ij}^T + A_{ij}X + B_{ij}Y_k < 0 \qquad \forall i,k = 1 \ldots N, \forall j = 1 \ldots N_d. \tag{C.4}$$

É possível relaxar a condição (C.4) se uma nova formulação for adotada. Para isso, considere o termo $G_{ijk} = A_{ij} + B_{ij}K_k$, desta forma o sistema em malha fechada pode ser reescrito como (Tanaka e Wang, 2001)

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_d} \Pi_i(\rho)\Pi_i(\rho)\beta_{ij}G_{iji}x + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_d} \Pi_i(\rho)\beta_{ij}\sum_{i<k} \Pi_k(\rho)\left(\frac{G_{ijk} + G_{kji}}{2}\right)x. \tag{C.5}$$

Além disso, ainda é possível considerar as informações referentes as funções de escalonamento. Sem em algum momento existir a relação $\Pi_i(\rho) * \Pi_k(\rho) = 0$, as condições LMI relativas a esses termos podem ser removidas. Desta forma, novas condições suficientes para a estabilidade quadrática podem ser obtidas, tais que $P > 0$ e

$$G_{iji}^T P + PG_{iji} < 0, \qquad \forall i = 1 \ldots N, \qquad j = 1 \ldots N_d,$$
$$\left(\frac{G_{ijk} + G_{kji}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ijk} + G_{kji}}{2}\right) < 0, \qquad \forall j = 1 \ldots N_d, \qquad i < k \leq N, \textit{ tal que } \Pi_i(\rho) * \Pi_k(\rho) \neq 0$$

Após aplicar as mesmas propriedades que permitiram obter (C.4), escreve-se

$$X > 0,$$
$$A_{ij}X + B_{ij}Y_i + * < 0, \qquad \forall i = 1 \ldots N, \qquad j = 1 \ldots N_d,$$
$$\left(\frac{A_{ij}X + B_{ij}Y_k + A_{kj}X + B_{kj}Y_i}{2}\right) + * < 0, \qquad \forall j = 1 \ldots N_d, \qquad i < k \leq N, \textit{ tal que } \Pi_i(\rho) * \Pi_k(\rho) \neq 0$$

provando-se o teorema 3.3.1.

C.2 Teorema 3.5.1

A prova do teorema consiste em expandir as condições de estabilidade robusta para sistemas com incertezas limitadas em norma do tipo (2.37). É interessante analisar,

primeiramente, o sistema para o caso não forçado ($u = 0$) já que as condições para ação de controle não nula são facilmente incorporadas.

Considere a formulação LFR do sistema (2.37) como sendo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\Delta w_\Delta \\ z_\Delta = C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} w_\Delta \\ w_\Delta = \Delta(\rho,\delta) z_\Delta \\ \|\Delta(\rho,\delta)\| \leq \sigma^{-1}. \end{cases} \tag{C.6}$$

Utilizando o fato deste sistema ser limitado em norma, da matriz Δ ser bloco diagonal e de resultados mostrados no trabalho Boyd et al. (1994), admiti-se que toda trajetória do sistema (C.6) também é uma trajetória (e vice-versa) do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\Delta \Lambda^{-1} w_\Delta \\ z_\Delta = \Lambda C_\Delta x + \Lambda D_{\Delta\Delta} \Lambda^{-1} w_\Delta \\ w_\Delta = \Delta(\rho,\delta) z_\Delta \\ \|\Delta(\rho,\delta)\| \leq \sigma^{-1}, \end{cases} \tag{C.7}$$

para toda matriz diagonal Λ não singular. Desta forma, podem ser escritas as condições para estabilidade, isto é,

$$\begin{gathered} x^T P x > 0, \\ \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + z_\Delta^T z_\Delta - \sigma^{-2} w_\Delta^T w_\Delta < 0. \end{gathered} \tag{C.8}$$

Desta forma, obtêm-se a condição $P > 0$ e

$$(Ax + B_\Delta \Lambda^{-1} w_\Delta)^T P x + * + (\Lambda C_\Delta x + \Lambda D_{\Delta\Delta} \Lambda^{-1} w_\Delta)^T (\Lambda C_\Delta x + \Lambda D_{\Delta\Delta} \Lambda^{-1} w_\Delta) - \sigma^{-2} w_\Delta^T w_\Delta < 0,$$

que também pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C_\Delta^T \Lambda^2 C_\Delta & PB_\Delta \Lambda^{-1} + C_\Delta^T \Lambda^2 D_{\Delta\Delta} \Lambda^{-1} \\ (PB_\Delta \Lambda^{-1} + C_\Delta^T \Lambda^2 D_{\Delta\Delta} \Lambda^{-1})^T & \Lambda^{-1} D_{\Delta\Delta}^T \Lambda^2 D_{\Delta\Delta} \Lambda^{-1} - I\sigma^2 \end{bmatrix} < 0. \tag{C.9}$$

Aplicando a transformação de congruência dada pela matriz G e fazendo a substituição

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \qquad \Lambda^2 = S, \qquad S > 0,$$

as novas condições LMI podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C_\Delta^T S C_\Delta & PB_\Delta + C_\Delta^T S D_{\Delta\Delta} \\ B_\Delta^T P + D_{\Delta\Delta}^T S C_\Delta & D_{\Delta\Delta}^T S D_{\Delta\Delta} - S\sigma^2 \end{bmatrix} < 0. \tag{C.10}$$

Equivalentemente, para $P = Q^{-1}$ e $T > 0$ diagonal, podem-se escrever outras condições

a partir de (C.2), isto é,

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_\Delta T B_\Delta^T & QC_\Delta^T + B_\Delta T D_{\Delta\Delta}^T \\ C_\Delta Q + D_{\Delta\Delta} T B_\Delta^T & D_{\Delta\Delta} T D_{\Delta\Delta}^T - T\sigma^2 \end{bmatrix} < 0. \tag{C.11}$$

O Teorema 3.5.1 é provado simplesmente repetindo a análise descrita nesta seção ao se substituir $u = Kx$.

C.3 Teorema 3.6.1

Para provar este teorema é necessário utilizar os seguintes lemas presentes na literatura:

Lema C.3.1. (Tanaka e Wang, 2001):
Se a Desigualdade Matricial Linear parametrizada por

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j G_{ij} < 0, \tag{C.12}$$

com

$$\sum_{i=1}^{r} h_i = 1 \; e \; h_i \geq 0, \forall i = 1 \ldots r \qquad e \qquad \sum_{j=1}^{r} h_j = 1 \; e \; h_j \geq 0, \forall j = 1 \ldots r,$$

é satisfeita, então as seguintes condições são verdadeiras

$$G_{ii} < 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, r, \tag{C.13}$$

$$\frac{1}{r-1} G_{ii} + \frac{1}{2}(G_{ij} + G_{ji}) < 0, \qquad 1 \leq i \neq j \leq r. \tag{C.14}$$

Lema C.3.2. (Tanaka et al., 1996):
Sejam M_l e N_l matrizes de dimensões apropriadas e $\|\Delta_l\|_F^2 \leq 1$, então:

$$\max_{\|\Delta_N\|_F \leq 1} \sum_{l=1}^{L} \xi^T P M_l \Delta_l N_l \xi = \sqrt{\xi^T \left(\sum_{l=1}^{L} P M_l M_l^T P \right) \xi \xi^T \left(\sum_{l=1}^{L} N_l^T N_l \right) \xi}. \tag{C.15}$$

Lema C.3.3. (Petersen e Hollot, 1986):
Sejam $\mathcal{A} > 0$, $\mathcal{M} \geq 0$ e $\mathcal{N} \geq 0$ matrizes de dimensões apropriadas. Assumindo que $(\eta^T \mathcal{A} \eta)^2 - 4(\eta^T \mathcal{M} \eta)(\eta^T \mathcal{N} \eta) > 0$ para todo $\eta \neq 0$, então existe um escalar $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon^2 \mathcal{M} + \epsilon \mathcal{A} + \mathcal{N} < 0$.

Demonstração. Prova do Teorema 3.6.1

Considere a função de Lyapunov $V(t) = x^T(t)Px(t)$ cuja derivada sobre uma trajetória é dada por:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j x^T(t)[P((A_i + \Delta A_i(t)) + (B_i + \Delta B_i(t))K_j) + *]x(t).$$

Separando as matrizes $\Delta A_i(t)$ e $\Delta B_i(t)$, considerando os somatórios do produto $h_i h_j$ igual a um e utilizando a notação como da Seção 2.8.1 para as matrizes incertas, escreve-se, para $\dot{V}(t) < 0$,

$$x^T(P(A_i + B_i K_j) + *)x + x^T\left(P\sum_{l=1}^{L} M_{x_i l}F_{x_i l}(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j) + *\right)x < 0.$$

Utilizando o Lema C.3.2 para remover o termo $F_{x_i l}$, temos

$$x^T(P(A_i+B_iK_j)+*)x+2\sqrt{x^T\left(\sum_{l=1}^{L} PM_{x_i l}M_{x_i l}^T P\right)xx^T\left(\sum_{l=1}^{L}(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)^T(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)\right)x} < 0,$$

ou então

$$-x^T A_F x > 2\sqrt{(x^T M_F x)(x^T N_F x)}, \tag{C.16}$$

com a substituição de variáveis

$$A_F = (P(A_i + B_i K_j) + *), \qquad M_F = \sum_{l=1}^{L} PM_{x_i l}M_{x_i l}^T P \qquad e \qquad N_F = \sum_{l=1}^{L}(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)^T(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j).$$

Elevando a equação (C.16) ao quadrado, tem-se

$$(x^T A_F x)^2 - 4(x^T M_F x)(x^T N_F x) > 0. \tag{C.17}$$

Aplicando o Lema C.3.3 à (C.17) e voltando às variáveis originais, escreve-se

$$(P(A_i + B_i K_j) + *) + \sum_{l=1}^{L} PM_{x_i l}\epsilon_i^{-1}M_{x_i l}^T P + \sum_{l=1}^{L}(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)^T\epsilon_i(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j) < 0. \tag{C.18}$$

Apesar de esta não ser uma condição LMI, se considerarmos que

$$\sum_{l=1}^{L} PM_{x_i l}\epsilon_i^{-1}M_{x_i l}^T P = [PM_{x_i 1} \quad \dots \quad M_{x_i l}]\epsilon_i^{-1}[M_{x_i 1}^T P \quad \dots \quad M_{x_i l}^T P]^T,$$

$$\sum_{l=1}^{L}(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)^T\epsilon_i(N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j) =$$

$$[(N_{x_i 1} + N_{xu_i 1}K_j)^T \quad \dots \quad (N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)^T]\epsilon_i[(N_{x_i 1} + N_{xu_i 1}K_j) \quad \dots \quad (N_{x_i l} + N_{xu_i l}K_j)]^T,$$

realizando a mudança de variáveis $X = P^{-1}$ e $Y_i = K_i X$, pré e pós multiplicando (C.18) por X e utilizando o complemento de Schur duas vezes é possível obter

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} XA_i^T + Y_j^T B_i^T + * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \hline \epsilon_1 M_{x_i 1}^T & -\epsilon_1 I & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ \epsilon_L M_{x_i L}^T & & & -\epsilon_L I & & & \\ \hline N_{x_i 1}X + N_{xu_i 1}Y_j & & & & -\epsilon_1 I & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & \\ N_{x_i L}X + N_{xu_i L}Y_j & & & & & & -\epsilon_L I \end{array}\right] < 0. \tag{C.19}$$

Aplicando o Lema C.3.1 à LMI (C.19), obtém-se as condições do Teorema 3.6.1.

□