

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Matheus Lopes Coelho

Percolação quase crítica na rede triangular

Belo Horizonte
2024

Matheus Lopes Coelho

Percolação quase crítica na rede triangular

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Marcelo Richard Hilário

Belo Horizonte
2024

Coelho, Matheus Lopes.

C672p Percolação quase-crítica na rede triangular [recurso eletrônico] / Matheus Lopes Coelho. – 2024
1 recurso online (77 f. il.) : pdf.

Orientador: Marcelo Richard Hilário.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 76-77.

1. Matemática - Teses. 2. Percolação (Física estatística) - Teses. 3. Teoria do ponto crítico (Análise matemática) – Teses. I. Hilário, Marcelo Richard. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Percolação Quase-Crítica na Rede Triangular

MATHEUS LOPES COELHO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Marcelo Richard Hilário
Orientador - UFMG

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG

Prof. Daniel Ungaretti Borges
UFRJ

Prof. Paulo Cupertino de Lima
UFMG

Belo Horizonte, 20 de setembro de 2024.

à minha família.
por me acompanharem nessa jornada.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha família, principalmente meus pais, Lúcia e Sílvio, e irmão, Andie, que me apoiaram desde sempre e me incentivaram durante toda minha jornada pela Matemática.

Aos amigos, agradeço pelo imenso apoio, pelos momentos de descontração, conversas e risadas, que ajudaram a passar pelas partes mais difíceis de um Mestrado. Agradeço especialmente à Rebeca, uma (muito mais que) amiga, companheira com quem posso contar em literalmente todos os momentos e que me incentiva nos momentos de maior fragilidade.

Agradeço aos meus professores, dos quais tive a maior honra e prazer de ser aluno. Em especial, agradeço ao meu orientador Marcelo Hilário, que desde o final de minha graduação, além de conhecimento e indicações, me transmitiu total confiança para a realização deste trabalho.

Aos colegas e amigos da Matemática, agradeço pela troca de conhecimentos e experiências. Tive momentos inesquecíveis e guardo cada um deles com muito carinho. Vocês foram essenciais para esta jornada.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é relacionar a percolação quase crítica com a percolação na criticalidade na rede triangular em duas dimensões. Como consequência, estudamos o comportamento desse modelo no ponto crítico através de comprimentos característicos. Baseado no artigo *Near-critical percolation in two dimensions* [14], de P. Nolin, apresentamos os chamados lemas de separação para eventos de braço, assim como consequências necessárias para a derivação dos expoentes críticos para alguns comprimentos característicos do modelo.

Palavras-chave: percolação quase crítica; expoentes críticos; eventos de braço.

Abstract

The goal of this work is to relate near-critical percolation to percolation at criticality on the triangular lattice in two dimensions. As a result, we study the behaviour of this model on the critical point through characteristic lengths. Based on the article *Near-critical percolation in two dimensions* [14], written by P. Nolin, we present the so called separation lemmas for arm events, as well as necessary consequences for the derivation of critical exponents of some characteristic lengths of the model.

Keywords: near critical percolation; critical exponents; arm events.

Sumário

Introdução	10
1 Propriedades básicas de Percolação	11
1.1 Notações	11
1.2 Propriedades gerais	13
1.3 Ferramentas técnicas	14
2 Visão geral da percolação quase-crítica	21
2.1 Comprimento característico	21
2.1.1 Estimativas tipo Russo-Seymour-Welsh	22
3 Separação entre braços	23
3.1 Eventos de braços	23
3.2 Braços bem-separados	24
3.3 Consequências da teoria de RSW	27
3.4 Resultado principal	30
3.5 Algumas consequências	36
4 Descrição da percolação crítica	40
4.1 Expoentes de braços para percolação crítica	40
4.2 Expoentes universais	43
5 Eventos de braços próximos da criticalidade	47
5.1 Enunciado e prova do Teorema	47
5.2 Informações complementares	56
6 Consequências para as funções características	58
6.1 Diferentes comprimentos característicos	58
6.2 Principais expoentes críticos	60
6.3 Expoente crítico para L	60
6.4 Decaimento exponencial uniforme e expoente crítico para θ	64
6.5 Expoentes críticos para χ, ξ	69
Referências	76

Introdução

A percolação foi introduzida na literatura matemática por Broadbent e Hammersley em [16] e é um dos principais objetos de estudo dos probabilistas. Dizemos que a realização de uma percolação de parâmetro p numa rede significa que cada sítio é declarado aberto (ou preto) com probabilidade p ou fechado (ou branco) com probabilidade $1 - p$, independentemente dos outros sítios.

Estamos interessados no estudo da rede triangular em duas dimensões. Sabemos que, nessa rede, nos regimes subcrítico e crítico ($p \leq 1/2$) quase certamente não existe aglomerado preto infinito e no regime supercrítico ($p > 1/2$), quase certamente existe aglomerado preto infinito. Kesten, em seu importante artigo [10], mostrou que o comportamento da percolação crítica ($p = 1/2$) e o comportamento da percolação quase crítica (quando p está “próximo” de $1/2$) estão fortemente relacionados. Em particular, foi mostrado que os expoentes que descrevem o comportamento de $\theta(p)$ quando $p \rightarrow 1/2^+$ e os expoentes dos eventos de braço para percolação crítica estão relacionados via relações de escala. Além disso, graças a invariância conforme do modelo de percolação na rede triangular com $p = 1/2$, provada por Smirnov [18], é possível derivar os expoentes críticos dos eventos de braços através dos expoentes críticos do SLE_6 , cuja existência e valores foram provados em [2, 3] por Lawler, Schramm e Werner.

O artigo de Kesten explica como a existência e os valores de alguns expoentes de eventos de braço nos permite provar a existência e os valores de expoentes que descrevem o comportamento da percolação quase-crítica. Em *Near-critical percolation in two dimensions*, Nolin [14] prova os resultados apresentados por Kesten em 1987 de maneira mais simples, utilizando ferramentas que não estavam a disposição quando Kesten escreveu seu artigo, como o expoente do evento de 5 braços e a desigualdade de Reimer.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo do artigo de Pierre Nolin [14], enunciando e provando os resultados nele presentes de maneira mais extensa, de forma a incluir ao máximo os detalhes de cada demonstração.

Os capítulos 1 e 2 focam em introduzir nosso objeto de estudo detalhadamente, enunciar as definições básicas e estabelecer ferramentas técnicas que vamos utilizar durante o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3, introduzimos os eventos de braço e enunciamos os chamados lemas de separação, além de algumas consequências desses lemas.

O capítulo 4 é focado em estudar a percolação na criticalidade, enunciando o “truque da troca de cores” e apresentando os expoentes críticos para eventos de braço, em especial os chamados expoentes “universais”. No capítulo 5, apresentamos uma das principais consequências dos lemas de separação: um teorema que, em particular, nos diz que a percolação crítica e a percolação “quase-crítica” estão fortemente relacionadas. Finalmente, no capítulo 6, utilizamos esse teorema e os expoentes obtidos no capítulo 4 para obter os expoentes críticos para alguns comprimentos característicos mais presentes na literatura (θ, χ, ξ).

Capítulo 1

Propriedades básicas de Percolação

1.1 Notações

Contexto

O foco principal deste trabalho é a percolação de sítios em duas dimensões, na rede triangular. A rede será denotada por $\mathbb{T} = (\mathbb{V}^T, \mathbb{E}^T)$, onde \mathbb{V}^T é o conjunto de vértices (ou sítios) e \mathbb{E}^T é o conjunto de arestas (ou elos), conectando sítios adjacentes.

A percolação de sítios usual de parâmetro p pode ser definida declarando cada sítio preto (ou aberto) com probabilidade p , e branco (ou fechado) com probabilidade $1-p$, com os estados dos sítios independentes uns dos outros. Desses parâmetros, construímos uma medida produto de probabilidade no conjunto das possíveis configurações, que é referida por \mathbb{P}_p , com a esperança correspondente a essa medida denotada por \mathbb{E}_p .

Mais geralmente, podemos associar a uma família de parâmetros $\hat{p} = (\hat{p}_v)_v$ uma medida produto $\hat{\mathbb{P}}$, onde cada sítio v é preto com probabilidade \hat{p}_v e branco com probabilidade $1-\hat{p}_v$, independentemente dos outros sítios.

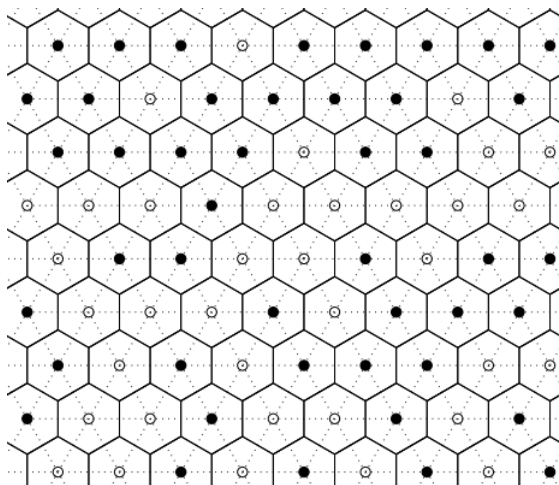


Figura 1.1: Podemos ver a percolação na rede triangular como uma coloração aleatória do seu grafo dual, a rede hexagonal.

Sistema de coordenadas

O sistema de coordenadas utilizado é o de coordenadas oblíquas, com a origem no 0 e a base dada por 1 e $e^{i\pi/3}$. Dados $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, denotamos o paralelogramo R de lados $a_j + b_k e^{i\pi/3}$, com $j, k \in 1, 2$, por $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$; seu interior por $\mathring{R} := (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ e sua borda $\partial R := R \setminus \mathring{R}$.

Denotamos por $\|z\|_\infty$ a norma infinito de um vértice z medida com respeito a esses dois eixos e denotamos d a distância associada a essa norma. O conjunto de pontos que estão a uma distância no máximo N de um sítio z com essa norma forma um losango, que denotamos por $S_N(z)$, centrado em z e tal que os seus lados são paralelos aos eixos base. Seu interior e sua borda são denotados, respectivamente, por $\mathring{S}_N(z)$ e $\partial S_N(z)$. Para descrever o processo de percolação, utilizamos $S_N := S_N(0)$ e denominamos esse objeto como “caixa de tamanho N ” como mostra a Figura 1.1. Note que $S_N = [-N, N] \times [-N, N]$ e também que

$$|S_N(z)| = (2N + 1)^2 \leq 9N^2$$

para alguma constante universal C_0 . Para quaisquer dois inteiros positivos $n \leq N$, definimos o anel centrado em z por $S_{n,N}(z) := S_N(z) \setminus \mathring{S}_n(z)$, com a notação natural $S_{n,N} := S_{n,N}(0)$.

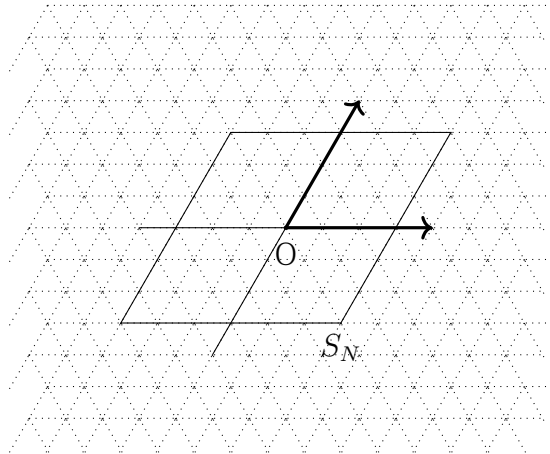


Figura 1.2: Sistema de coordenadas oblíquas sobre o qual estamos trabalhando, com o conjunto S_N a “caixa de tamanho N ”

Propriedades de conectividade

Dizemos que dois sítios x e y estão conectados, com a notação $x \rightsquigarrow y$, se existe um caminho composto apenas por sítios pretos de x a y . Similarmente, dizemos que x e y estão $*$ -conectados se existe um caminho consistido apenas por sítios brancos de x a y , que denotamos por $x \rightsquigarrow^* y$.

Permitimos, na definição anterior, que y seja “ ∞ ” e dizemos que x está conectado ao infinito ($x \rightsquigarrow \infty$) se existe um caminho infinito, auto-evitante e preto começando de x . Denotamos por

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \infty)$$

a probabilidade de 0 estar conectado ao infinito. De fato, por invariância por translação, essa é a probabilidade de qualquer sítio x estar conectado ao infinito.

Dado x um sítio, o conjunto de sítios pretos conectados a x é chamado de aglomerado de x , denotado $C(x)$ ($C(x) = \emptyset$ se x é branco). Analogamente, definimos $C^*(x)$ o aglomerado branco de x . Denotamos por $x \rightsquigarrow \infty$ se $|C(x)| = \infty$.

Sejam A, B dois conjuntos de vértices. Denotamos por $A \rightsquigarrow B$ como o evento que algum sítio $x \in A$ está conectado por sítios pretos a algum sítio $y \in B$. Para o evento que A está conectado a B utilizando apenas sítios de um conjunto de vértices C , usamos a notação $A \overset{C}{\rightsquigarrow} B$.

Cruzamentos

Um cruzamento da esquerda para a direita, ou cruzamento horizontal, do paralelogramo $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ é um caminho preto conectando os seus lados esquerdo, que definimos por $\{a_1\} \times [b_1, b_2]$, e direito, que definimos por $\{a_2\} \times [b_1, b_2]$. Para que a existência de cruzamentos dentro de duas caixas que compartilham apenas um dos lados seja completamente independente, convencionaremos que o cruzamento só dependa da existência de um caminho preto no interior do paralelogramo, ou seja, em $(a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$, com o estado dos sítios na extremidades podendo ser pretos ou brancos. Denotamos o evento da existência de tal caminho por $\mathcal{E}_H(R)$. Analogamente, definimos o cruzamento de cima para baixo, ou vertical, e denotamos o evento da sua existência por $\mathcal{E}_V(R)$. Definimos também os cruzamentos brancos e denotamos os eventos “existe cruzamento horizontal branco” e “existe cruzamento vertical branco” por $\mathcal{E}_H^*(R)$ e $\mathcal{E}_V^*(R)$, respectivamente.

A mesma definição vale para cruzamentos em anéis $S_{n,N}(z)$, da borda interna $\partial S_n(z)$ para a borda externa $\partial S_N(z)$, ou para domínios ainda mais gerais, saindo de uma parte da borda para a outra.

Comportamento assintótico

Para duas funções positivas f, g , a notação $f \asymp g$ significa que f e g têm a mesma ordem de magnitude, ou seja, existem constantes positivas e finitas C_1, C_2 tais que $C_1 g \leq f \leq C_2 g$, enquanto que $f \approx g$ significa que $\log f / \log g \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow 1/2$ ou quando $n \rightarrow \infty$, a depender do contexto.

1.2 Propriedades gerais

Na rede triangular, sabemos desde [11] que a percolação exibe uma transição de fase quando $p = 1/2$, chamado de *ponto crítico*: isso significa que

- Quando $p < 1/2$, não existe (quase certamente) um aglomerado infinito, ou equivalentemente, $\theta(p) = 0$. O intervalo $p \in [0, 1/2)$ é conhecido como regime subcrítico;
- Quando $p > 1/2$, existe (quase certamente) um aglomerado infinito, ou equivalentemente, $\theta(p) > 0$. Além disso, nesse caso, o aglomerado infinito é único. O intervalo $p \in [0, 1/2)$ é conhecido como regime subcrítico

Em ambos os regimes, as “correlações” decaem bastante rápido: temos a propriedade do *decaimento exponencial*:

- Para qualquer $p < 1/2$,

$$\exists C_1, C_2(p) > 0, \text{ tal que } \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_n) \leq C_1 e^{-C_2(p)n}.$$

- Podemos deduzir daí que, para qualquer $p > 1/2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_n, |C(0)| < \infty) \\ \leq \mathbb{P}_p(\exists \text{ circuito branco envolvendo } 0 \text{ e um sítio de } \partial S_n \text{ em seu interior}) \\ \leq C'_1 e^{-C'_2(p)n} \end{aligned}$$

para algum par de constantes $C'_1(p), C'_2(p) > 0$.

Note que a velocidade com que as correlações diminuem é governada por uma constante C_2 que depende de p - ela fica mais devagar a medida que p se aproxima de $1/2$. Para estudar o que acontece próximo do ponto crítico, precisamos controlar essa velocidade para diferentes valores de p : vamos mostrar (veja o Lema 6.4.1) uma propriedade de decaimento exponencial uniforme em $p < 1/2$ para as probabilidades de cruzamento de caixa.

O regime intermediário em $p = 1/2$ é chamado de regime *crítico*. É sabido que para a rede triangular, não existe aglomerado infinito na criticalidade: $\theta(1/2) = 0$. Portanto, para resumir:

$$\theta(p) > 0 \iff p > 1/2.$$

No regime crítico, as correlações não decaem exponencialmente, mas apenas polinomialmente. Por exemplo, limites de escala não triviais - com estruturas fractais - surgem (veja por exemplo a Seção 5.1 de [14] e suas referências). Esse regime particular, na rede triangular em duas dimensões, possui a propriedade de invariância conformal, provada por Smirnov [18], que nos permite descrevê-lo precisamente.

1.3 Ferramentas técnicas

Eventos monótonos

Um evento A é dito (monótono) não-decrescente se, uma vez que A ocorre, dada qualquer coleção de sítios brancos, ao invertermos o estado de cada sítio desta coleção, A continua ocorrendo, e (monótono) não-crescente se ele satisfaz a mesma propriedade, mas quando invertemos estados de sítios pretos para sítios brancos. Por exemplo, tome um paralelogramo $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ e considere os eventos $A_1 = \mathcal{C}_H(R)$, $A_2 = \{0 \rightsquigarrow \infty\}$, $A_3 = \mathcal{C}_H^*(R)$: os eventos A_1 e A_2 são não-decrescentes, enquanto que o evento A_3 é não-crescente.

Definimos o acoplamento usual dos processos de percolação para diferentes valores de p : associamos a cada sítio x a variável aleatória U_x uniforme em $[0, 1]$, independentes, e para cada p , obtemos a medida \mathbb{P}_p declarando cada sítio x preto se $U_x \leq p$, e branco caso contrário. Esse acoplamento mostra, por exemplo, que

$$p \rightarrow \mathbb{P}_p(A)$$

é uma função não-decrescente em p quando A é um evento não-decrescente. Em particular, a função $\theta(p)$ é monótona em p (veja [5]). Mais geralmente, podemos definir o mesmo acoplamento para uma medida produto qualquer $\hat{\mathbb{P}}$, onde cada sítio x tem uma probabilidade p_x de ser preto.

Desigualdades de correlação

As duas desigualdades mais comuns para percolação estão relacionadas a eventos monótonos: sejam A, B eventos não-decrescentes. Temos os seguintes resultados ([7, 5])

1. a desigualdade de Harris-FKG:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

2. a desigualdade de BK: se A e B dependem apenas de sítios em um conjunto finito, $A \circ B$ significando que A e B ocorrem disjuntamente, i.e. A e B ocorrem simultaneamente em dois conjuntos disjuntos de sítios, então:

$$\mathbb{P}(A \circ B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Além dessas duas desigualdades, vale uma generalização da desigualdade de BK, que foi conjecturada no artigo [7]. Dados quaisquer dois eventos A e B dependendo apenas de uma quantidade finita de sítios, se definirmos $A \square B$ como a ocorrência disjunta de A e B nessa situação, nós temos a desigualdade de Reimer [15]:

$$\mathbb{P}(A \square B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Vamos também utilizar a seguinte desigualdade:

$$\mathbb{P}_{1/2}(A \circ B) \leq \mathbb{P}_{1/2}(A \cap \tilde{B}),$$

onde \tilde{B} é o evento obtido ao inverter as configurações em B , ou seja, para cada configuração $\omega \in B$, invertemos o estado de cada um de seus sítios. Essa desigualdade é um passo intermediário para a prova da desigualdade de Reimer.

Além disso, vamos necessitar de dois resultados que seguem da desigualdade de FKG: o chamado “truque da raiz” e uma generalização para eventos localmente monótonos:

Lema 1.3.1 (Truque da raiz). Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos não-decrescentes. Temos que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{\mathbb{P}(A_i)\} \geq 1 - [1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i)]^{1/n} \quad (1.1)$$

Demonstração: Note que a desigualdade de FKG implica que para A, B eventos não-crescentes, ainda vale que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Sejam A_1, \dots, A_n eventos não-decrescentes. Aplicamos esse fato para seus eventos complementares A_1^c, \dots, A_n^c , que são não-crescentes. Também usamos o fato de que se dois eventos são não-crescentes, sua interseção também é, para obter

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i^c) \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{\mathbb{P}(A_i^c)\}^n. \quad (1.2)$$

Usamos as leis de De Morgan juntamente com a equação 1.2 para concluir que

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{1 - \mathbb{P}(A_i)\} \leq \mathbb{P}((\cup_{i=1}^n A_i)^c)^{1/n} = [1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i)]^{1/n},$$

de onde segue a desigualdade 1.1. ■

Lema 1.3.2. Sejam A^+, \tilde{A}^+ dois eventos não-decrescentes e A^-, \tilde{A}^- dois eventos não-crescentes e assumamos que existem três conjuntos disjuntos finitos $\mathcal{A}, \mathcal{A}^+$ e \mathcal{A}^- tais que A^+, A^-, \tilde{A}^+ e \tilde{A}^- dependem apenas dos sítios em $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^+, \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^-, \mathcal{A}^+$ e \mathcal{A}^- , respectivamente. Então, temos que:

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+ \cap \tilde{A}^- | A^+ \cap A^-) \geq \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^-)$$

para qualquer medida produto $\hat{\mathbb{P}}$.

Demonstração: Seja $\omega_{\mathcal{A}}$ uma configuração que fixa os estados dos sítios em \mathcal{A} . Condicionados a $\omega_{\mathcal{A}}$, os eventos $A^+ \cap \tilde{A}^+$ e $A^- \cap \tilde{A}^-$ são independentes, portanto

$$\hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap \tilde{A}^+ \cap A^- \cap \tilde{A}^- | \omega_{\mathcal{A}}) = \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap \tilde{A}^+ | \omega_{\mathcal{A}}) \hat{\mathbb{P}}(A^- \cap \tilde{A}^- | \omega_{\mathcal{A}}).$$

Pela desigualdade de FKG, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap \tilde{A}^+ | \omega_{\mathcal{A}}) &\geq \hat{\mathbb{P}}(A^+ | \omega_{\mathcal{A}}) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+ | \omega_{\mathcal{A}}) \\ &= \hat{\mathbb{P}}(A^+ | \omega_{\mathcal{A}}) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+) \end{aligned}$$

e, analogamente para A^- e \tilde{A}^- . Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap \tilde{A}^+ \cap A^- \cap \tilde{A}^- | \omega_{\mathcal{A}}) &\geq \hat{\mathbb{P}}(A^+ | \omega_{\mathcal{A}}) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+) \hat{\mathbb{P}}(A^- | \omega_{\mathcal{A}}) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^-) \\ &= \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap A^- | \omega_{\mathcal{A}}) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^-) \end{aligned}$$

O resultado segue ao somarmos sobre todas as configurações $\omega_{\mathcal{A}}$ dos estados dos sítios em \mathcal{A} . ■

Fórmula de Russo

A Fórmula de Russo nos permite estudar como as probabilidades de eventos variam conforme o parâmetro de percolação p varia. Dizemos que, para um evento não-decrescente A , o evento “ v é pivotal para A ” é composto das configurações ω tais que se declararmos o estado de v como preto, A ocorre, e A não ocorre caso v seja declarado branco. Note que esse evento é independente do estado do sítio v . Uma definição análoga vale para eventos decrescentes, substituindo “branco” por “preto” e vice-versa. Uma demonstração do Teorema a seguir pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.3.3 (Fórmula de Russo). Seja A um evento não-decrescente, dependendo apenas do estado de sítios em um conjunto finito S . Então

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{v \in S} \mathbb{P}_p(v \text{ é pivotal para } A).$$

Vamos precisar de uma generalização da Fórmula de Russo, para eventos que podem ser escritos como interseção de dois eventos monótonos, um não-decrescente e outro não-crescente.

Lema 1.3.4. Sejam A^+ e A^- dois eventos monótonos, respectivamente não-decrescente e não-crescente, dependendo apenas do estado de sítios contidos em algum conjunto finito de vértices S . Seja $\hat{p} = (\hat{p}_v)_{v \in S}$ uma família de funções diferenciáveis $\hat{p}_v: t \in [0, 1] \rightarrow \hat{p}_v(t) \in [0, 1]$, e denote por $(\hat{\mathbb{P}}_t)_{t \in [0, 1]}$ a medida produto cujas marginais têm distribuição de Bernoulli com parâmetro $\hat{p}_v(t)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\mathbb{P}}_t(A^+ \cap A^-) &= \sum_{v \in S} \frac{d}{dt} \hat{p}_v(t) \left[\hat{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } A^+ \text{ mas não para } A^-, A^- \text{ ocorre}) \right. \\ &\quad \left. - \hat{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } A^- \text{ mas não para } A^+, A^+ \text{ ocorre}) \right]. \end{aligned}$$

Demonstração: Dados A^+, A^- eventos monótonos, respectivamente crescente e decrescente, defina a função $\mathcal{P}: \hat{p} = (\hat{p}_v)_{v \in S} \rightarrow \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap A^-)$. Essa função é suave, pois é um polinômio. Dada uma pequena variação $\epsilon > 0$ em um sítio w , escrevemos a medida associada a essa variação por $\hat{\mathbb{P}}^{+\epsilon}$. Usando o acoplamento usual, temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}^{+\epsilon}(A^+ \cap A^-) - \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap A^-) &= \epsilon \times \hat{\mathbb{P}}(w \text{ é pivotal para } A^+ \text{ mas não para } A^-, A^- \text{ ocorre}) \\ &\quad - \epsilon \times \hat{\mathbb{P}}(w \text{ é pivotal para } A^- \text{ mas não para } A^+, A^+ \text{ ocorre}), \end{aligned}$$

visto que se w é pivotal para ambos eventos, mudar o estado de w não afeta a ocorrência de $A^+ \cap A^-$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{p}_w} \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap A^-) &= \hat{\mathbb{P}}(w \text{ é pivotal para } A^+ \text{ mas não para } A^-, A^- \text{ ocorre}) \\ &\quad - \hat{\mathbb{P}}(w \text{ é pivotal para } A^- \text{ mas não para } A^+, A^+ \text{ ocorre}) \end{aligned}$$

A Fórmula de Russo (generalizada) segue ao utilizar a Regra de Cadeia para calcular a derivada da função definida por $t \rightarrow \hat{\mathbb{P}}_t(A^+ \cap A^-)$ ao escrevê-la como a composição da função $t \rightarrow (\hat{p}_v(t))$ com a função $(\hat{p}_v)_{v \in S} \rightarrow \hat{\mathbb{P}}(A^+ \cap A^-)$. ■

Note que no Lema 1.3.4, se tomarmos $A^- = \Omega$, obtemos a Fórmula de Russo usual 1.3.4 para A^+ , com parâmetros que podem ser funções de t .

Teoria de Russo-Seymour-Welsh

É possível extrair diversas informações sobre percolação em algum grafo ao considerar percolação em seu grafo dual. Como estamos considerando percolação de sítios na rede triangular, consideramos também a percolação de sítios no seu grafo dual, a rede hexagonal. Como mostra a Figura 1.1, podemos ver a percolação de sítios na rede triangular como a percolação de sítios na rede hexagonal. Nesse sentido, a rede triangular possui a importante propriedade de auto-dualidade, de forma que diversas informações possam ser obtida apenas ao estudar a própria rede triangular. Uma das propriedades que segue dessa auto-dualidade é uma simetria para eventos de cruzamentos. Considerando um paralelogramo R , existe um cruzamento horizontal preto em R se e somente se não existe um cruzamento vertical branco em seu dual, neste caso, em R . Dessa simetria, temos que

$$\forall n, \mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{E}_H([0, n] \times [0, n])) = 1/2. \quad (1.3)$$

Em outras palavras, para todas as escalas, a probabilidade de cruzar uma caixa $n \times n$ é a mesma. Em particular, essa probabilidade é limitada por baixo. Este é o ponto de partida da chamada teoria de Russo–Seymour–Welsh (veja [5, 9]), que nos dá cotas inferiores para cruzamentos de paralelogramos na “direção difícil”, ou seja, cuja proporção dos lados é $\tau \times 1$ com $\tau \geq 1$.

Teorema 1.3.5 (Russo–Seymour–Welsh). Existem funções não-decrescentes $f_k(\cdot)$, $k \geq 2$, positivas em $(0, 1)$ que satisfazem o seguinte: se para algum parâmetro p a probabilidade de cruzar uma caixa $n \times n$ é pelo menos δ_1 , então a probabilidade de cruzar um paralelogramo de tamanho $kn \times n$ é pelo menos $f_k(\delta_1)$. Além disso, essas funções podem ser escolhidas satisfazendo a seguinte propriedade: $f_k(\delta) \rightarrow 1$ quando $\delta \rightarrow 1$, com $f_k(1 - \epsilon) = 1 - C_k \epsilon^{a_k} + o(\epsilon^{a_k})$, para $C_k, a_k > 0$.

Demonstração: Vamos trabalhar com hexágonos regulares: seguindo a Figura 1.3, denotamos os lados do hexágono por l_i (“lados esquerdos”), r_i (“lados direitos”), $i = 1, 2$, onde cada l_i e r_i são lados opostos. Também denotamos por t e b os lados de cima e de baixo do hexágono, que também são opostos. Perceba pela Figura 1.3 que cada um dos eventos de existência de cruzamento entre os lados ($\{l_i \rightsquigarrow r_i\}$ e $\{t \rightsquigarrow b\}$) têm a mesma probabilidade, tendo em vista as simetrias do hexágono.

Observe a Figura 1.3.1 e note que um cruzamento de um losango $N \times N$ induz um cruzamento da esquerda para a direita em um hexágono com lado de tamanho $N/2$. Vamos aplicar o truque da raiz 1.3.1, nos quatro eventos $\{l_i \rightsquigarrow r_j\}$:

$$\max_{i,j=1,2} (\mathbb{P}(\{l_i \rightsquigarrow r_j\})) \geq 1 - (1 - \delta)^{1/4},$$

onde δ é a probabilidade de existir um cruzamento da esquerda para a direita no hexágono de lado $N/2$. Isso implica que

$$\mathbb{P}(l_1 \rightsquigarrow r_1) = \mathbb{P}(l_2 \rightsquigarrow r_2) \geq (1 - (1 - \delta)^{1/4})^2 =: \tau(\delta).$$

visto que, caso $\mathbb{P}(l_1 \rightsquigarrow r_1) \geq 1 - (1 - \delta)^{1/4}$ não há o que fazer, e caso contrário basta considerar dois cruzamentos, $l_1 \rightsquigarrow r_2$ e $l_2 \rightsquigarrow r_1$.

Agora, tomamos dois hexágonos H, H' como na segunda parte da Figura 1.3, usando l'_i, r'_i para denotar os lados de H' . Vamos construir um caminho da esquerda (de H) para a direita (de H') em três passos, como mostra a Figura 1.3.

Para o primeiro passo, usando novamente o truque da raiz, com probabilidade de pelo menos $1 - (1 - \delta)^{1/2}$, existe um cruzamento da esquerda para a direita em H que intersecta $l'_1 \cup l'_2$ pela última vez em l'_2 . Denote por E_c o evento em que isto ocorre e que c é o caminho mais baixo da esquerda para a direita em H , considerando apenas a parte do caminho mais baixo antes de se intersectar com a faixa central de H' pela primeira vez. Definimos também c' como a reflexão sobre a faixa central de H' do trecho de c presente após a última interseção com l'_2 , como mostra a parte 2. da Figura 1.3.

Para o segundo passo, assumamos que E_c ocorre e condicione em c . Note que este evento depende apenas dos sítios situados abaixo do caminho mais baixo, ou seja, este evento é independente dos sítios acima de c . Consideramos o evento $\{c \rightsquigarrow^{H'} t'\}$, que depende apenas

de sítios acima de c , condicionado a E_c . Utilizando novamente o truque da raiz e usando as simetrias do hexágono, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(c \rightsquigarrow t' | E_c) &\geq 1 - [1 - \mathbb{P}(c \cup c' \rightsquigarrow t' | E_c)]^{1/2} \\ &\geq 1 - [1 - \mathbb{P}(l_1 \rightsquigarrow r_1)]^{1/2} \\ &= 1 - (1 - \tau(\delta))^{1/2}, \end{aligned}$$

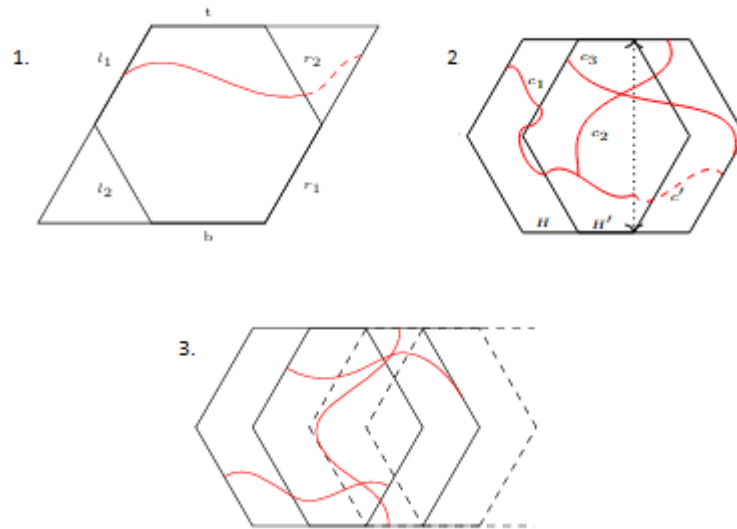


Figura 1.3: Principais passos para a prova de RSW para a rede triangular.

onde a primeira desigualdade segue do truque da raiz 1.3.1 com os eventos $\{c \rightsquigarrow t'\}$ e $\{c' \rightsquigarrow t'\}$, que são equiprováveis pois c' é uma reflexão de c . A segunda desigualdade segue de que, condicionado em E_c , $\{c \cup c' \rightsquigarrow t'\}$ pode ser comparado com o cruzamento do hexágono sem condicionamento, visto que em ambos os casos, esses eventos acontecem num ambiente de percolação independente, além do fato de que para qualquer c , o evento $\{t \rightsquigarrow b\}$ induz o evento $\{c \cup c' \rightsquigarrow t'\}$. Por fim, usamos as simetrias do hexágono e a definição de $\tau(\delta)$.

Para o terceiro passo, basta considerar um cruzamento saindo de l'_1 da esquerda para a direita no hexágono H' . Analogamente ao primeiro passo, com o truque da raiz, encontramos que $l'_1 \rightsquigarrow r'_1 \cup r'_2$ ocorre com probabilidade pelo menos $1 - (1 - \delta)^{1/2}$. Assim, com os três passos, utilizamos a desigualdade de FKG, visto que os eventos de cruzamento são não decrescentes, obtendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(l_1 \cup l_2 \rightsquigarrow r'_1 \cup r'_2) &\geq \mathbb{P}(\cup_c (E_c \cap c) \rightsquigarrow t' \cap l'_1 \rightsquigarrow r'_1 \cup r'_2) \\ &\geq \mathbb{P}(\cup_c (E_c \cap c) \rightsquigarrow t') \times \mathbb{P}(l'_1 \rightsquigarrow r'_1 \cup r'_2) \\ &= \sum_c (\mathbb{P}(c \rightsquigarrow t' | E_c) \times \mathbb{P}(E_c)) \times \mathbb{P}(l'_1 \rightsquigarrow r'_1 \cup r'_2) \\ &\geq (1 - (1 - \tau(\delta))^{1/2}) \times (1 - (1 - \delta)^{1/2})^2, \end{aligned}$$

onde na igualdade usamos que cada um dos eventos E_c é disjunto. A parte difícil está feita: agora é suficiente utilizar j "hexágonos longos" sucessivos, como indica a terceira parte da

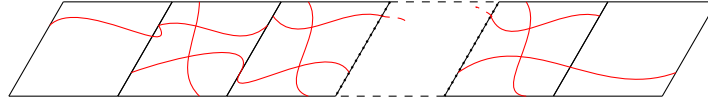


Figura 1.4: Construção que mostra que podemos tomar $f_k(\delta) = \delta^{k-2}(f_2(\delta))^{k-1}$.

Figura 1.3, com $j - 1$ cruzamentos de cima para baixo de hexágonos regulares, para j grande o suficiente. Fazemos a construção de forma que um cruzamento da esquerda para a direita num paralelogramo $2N \times N$ tem probabilidade pelo menos:

$$f_2(\delta) := (1 - (1 - \delta)^{1/2})^{2j} (1 - (1 - \tau(\delta))^{1/2})^{2j-1}.$$

Quando $\delta \rightarrow 1$, $\tau(\delta)$ e, conseqüentemente, $f_2(\delta)$, tendem a 1. Além disso f_2 admite, próximo a $\delta = 1$, um desenvolvimento assintótico da forma

$$f_2(1 - \epsilon) = 1 - C\epsilon^{1/8} + o(\epsilon^{1/8}). \quad (1.4)$$

Uma maneira de se convencer deste fato é notando que, ao expandir $f_2(1 - \epsilon)$, temos

$$f_2(1 - \epsilon) = [(1 - \epsilon)^2 (1 - [2\epsilon^{1/4} - \epsilon^{1/2}]^{1/2})^2]^j (1 - [2\epsilon^{1/4} - \epsilon^{1/2}]^{1/2})^{-1},$$

e os termos elevados a j podem ser simplificados como na equação 1.4, já que se $\alpha > 1/8$, então $\epsilon^\alpha \in o(\epsilon^{1/8})$, enquanto que o último termo converge a 1 quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Para concluir para qualquer $k \geq 2$, basta considerar a construção feita para $k = 2$ e replicar $k - 1$ vezes, como mostra a Figura 1.4, de forma que podemos tomar

$$f_k(\delta) = \delta^{k-2}(f_2(\delta))^{k-1}.$$

■

O Teorema de Russo-Seymour-Welsh combinado com a equação anterior 1.3 implica no seguinte resultado:

Corolário 1.3.6. Para cada $k \geq 1$, existe algum $\delta_k > 0$ tal que

$$\forall n, \mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_H([0, kn] \times [0, n]) \geq \delta_k).$$

Capítulo 2

Visão geral da percolação quase-crítica

2.1 Comprimento característico

Considere o losango $R_n = [0, n] \times [0, n]$. Quando $p = 1/2$, vimos que $\mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_H(R_n)) = 1/2$. Para $p < 1/2$ (regime sub-crítico), essa probabilidade tende a 0 quando n vai para infinito, e tende a 1 quando $p > 1/2$ (regime super-crítico). Introduzimos uma quantidade que mede a escala até a qual a probabilidade desses cruzamentos continua afastada do 0 e do 1: para cada $\epsilon \in (0, 1/2)$, definimos:

$$L_\epsilon(p) = \begin{cases} \min\{n : \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(R_n)) \leq \epsilon\}, & \text{quando } p < 1/2, \\ \min\{n : \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H^*(R_n)) \leq \epsilon\}, & \text{quando } p > 1/2. \end{cases}$$

Portanto, por definição,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(R_{L_\epsilon(p)-1})) > \epsilon$$

e

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(R_{L_\epsilon(p)})) \leq \epsilon,$$

se $p < 1/2$, e o mesmo com $*$ se $p > 1/2$.

Note que por simetria, também temos diretamente que $L_\epsilon(p) = L_\epsilon(1-p)$. Como $\mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_H(R_n)) = 1/2$ para todo n , convencionamos que $L_\epsilon(1/2) = +\infty$, de forma que a expressão “para todo $n \leq L_\epsilon(p)$ ” deva ser interpretada como “para todo n ” quando $p = 1/2$. Esta convenção também é consistente com a seguinte propriedade:

Proposição 2.1.1. Para cada $\epsilon \in (0, 1/2)$ fixo, $L_\epsilon(p) \rightarrow +\infty$ quando $p \rightarrow 1/2$.

Demonstração: Suponha que este não seja o caso. Então existe N e uma sequência $p_k \rightarrow 1/2$ (sem perda de generalidade, $p_k < 1/2$ para todo k) tal que para cada k , $L_\epsilon(p_k) \leq N$. Isso implica que

$$\mathbb{P}_{p_k}(\mathcal{C}_H(R_N)) \leq \epsilon.$$

Absurdo, pois note que a função $p \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(R_N))$ é contínua, visto que é um polinômio em p ; logo:

$$\mathbb{P}_{p_k}(\mathcal{C}_H(R_N)) \rightarrow \mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_H(R_N)) = 1/2, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$



2.1.1 Estimativas tipo Russo-Seymour-Welsh

Quando formos estudar percolação quase-crítica, vamos considerar medidas produto $\hat{\mathbb{P}}$ mais gerais que simplesmente as medidas \mathbb{P}_p ($p \in [0, 1]$). Elas terão parâmetros associados \hat{p}_v que podem depender do sítio v :

Definição 2.1.2. Uma medida $\hat{\mathbb{P}}$ é dita “entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} ” se é uma medida produto e se seus parâmetros \hat{p}_v estão todos entre p e $1 - p$.

Russo-Seymour-Welsh implica que para cada $k \geq 1$, existe algum $\delta_k = \delta_k(\epsilon) > 0$, dependendo apenas de ϵ , tal que para todo p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} ,

$$\forall n \leq L_\epsilon(p), \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, kn] \times [0, n])) \geq \delta_k,$$

visto que podemos considerar a função f_k relacionada ao Teorema 1.3.5 e referente à medida \mathbb{P}_p como uma cota inferior para essas probabilidades de cruzamento. Por simetria, essa cota também é válida para cruzamentos horizontais brancos.

Essas estimativas para probabilidades de cruzamento serão a base para a maioria dos argumentos utilizados daqui em diante. Eles implicam que quando $n \leq L_\epsilon(p)$, as probabilidades de cruzamento podem ser comparadas às probabilidades de cruzamento na percolação crítica, isto é, $L_\epsilon(p)$ é a escala até a qual uma medida de percolação entre p e $1 - p$ pode ser considerada “quase crítica”.

Na outra direção, será visto posteriormente que $L_\epsilon(p)$ também é a escala na qual a percolação começa a parecer sub- ou super-crítica. Assuma por exemplo que $p > 1/2$, sabemos que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) \geq 1 - \epsilon$$

Então, usando RSW (Teorema 1.3.5), temos que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) \geq 1 - \tilde{\epsilon}$$

onde $1 - \tilde{\epsilon} = f_2(1 - \epsilon)$ pode ser feito arbitrariamente próximo de 1 escolhendo um ϵ suficientemente pequeno.

Capítulo 3

Separação entre braços

Veremos que ao estudar a percolação crítica ou próxima da criticalidade, alguns eventos têm um papel essencial: os eventos de braços, que se referem à existência de cruzamentos (“braços”) em anéis $S_{n,N}$ ($n < N$), com as cores (preto ou branco) de cada cruzamento sendo prescritas.

3.1 Eventos de braços

Consideremos um inteiro $j \geq 1$. Uma sequência de cores σ é uma sequência $(\sigma_1, \dots, \sigma_j)$ de “preto” e “branco” de tamanho j . Usaremos “ P ” e “ B ” para identificar cada uma das cores. Além disso, identificamos duas sequências se elas são a mesma a menos de uma permutação cíclica: por exemplo, a sequência (preto, preto, branco, preto) é denotada por “ $PPBP$ ” e é a mesma que a sequência que (branco, preto, preto, preto), denotada por “ $BPPP$ ”. O conjunto dessas sequências é denotado por \mathfrak{B}_j . Definimos para cada sequência σ , sua sequência invertida $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_j)$, onde cada cor é substituída pela cor oposta.

A seguir, definimos os **eventos de braços** e alguns sub-eventos importantes. Dados dois inteiros $n \leq N$, definimos o evento

$$A_{j,\sigma}(n, N) := \{\partial S_n \rightsquigarrow_{j,\sigma} \partial S_N\}$$

que existem j braços monocromáticos disjuntos no anel $S_{n,N}$, cujas cores são prescritas por σ , quando consideradas em sentido anti-horário. Denotamos tal conjunto ordenado de cruzamentos por $\mathcal{C} = \{c_i\}_{1 \leq i \leq j}$ e dizemos que é “ σ -colorido”. Relembre que por convenção, não consideramos as cores dos vértices que estão nas extremidades de cada um dos c_i s. Assim, por exemplo, para $j = 1, \sigma = P$, $A_{j,\sigma}(0, N)$ apenas denota o evento que existe um caminho preto $0 \rightsquigarrow \partial S_N$, ignorando a cor de 0 e do sítio final. Outro exemplo é dado na Figura 3.1, no qual consideramos apenas os sítios no interior de $S_{n,N}$.

Note que uma objeção combinatória pode surgir pelo fato de estarmos lidando com uma rede discreta: se j é muito grande com relação a n , o evento $A_{j,\sigma}(n, N)$ pode ser vazio, simplesmente porque os braços não têm espaço o suficiente para chegarem em ∂S_n . Por exemplo, se $j \geq 7$, $A_{j,\sigma}(0, N) = \emptyset$. Na verdade, basta checar que n é grande o suficiente para que o número de vértices tocando o exterior de ∂S_n ($|\partial S_n|$ retirando as quinas agudas) seja pelo menos j : se isso é verdade, basta traçar linhas retas em direção ao exterior. Para cada inteiro positivo j , definimos $n_0(j)$ como sendo o menor inteiro não negativo n que satisfaz a condição anterior, e portanto temos que

$$\forall N \geq n_0(j), A_{j,\sigma}(n_0(j), N) \neq \emptyset.$$

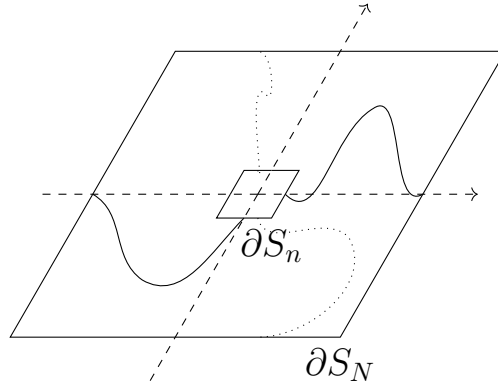


Figura 3.1: O evento $A_{4,\sigma}(n, N)$, com $\sigma = PBPB$

Note que $n_0(j) = 0$ para $j \in 1, \dots, 6$ e que $n_0(j) \leq j$. Para o comportamento assintótico, o valor exato de n é irrelevante visto que para quaisquer $n_1, n_2 \geq n_0(j)$ fixos,

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, N)) \asymp \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_2, N)).$$

De fato, tomando $n_1 \leq n_2$, um cruzamento em $S_{n_1, N}$ induz um cruzamento em $S_{n_2, N}$, de forma que

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, N)) \leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_2, N)),$$

enquanto que para a outra desigualdade, podemos utilizar RSW de maneira análoga ao que faremos a seguir na Proposição 3.3.1.

Observação 3.1.1. Note que, pela desigualdade de Reimer, dados dois inteiros positivos j, j' e duas sequências de cores σ, σ' com esses tamanhos, temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j+j', \sigma\sigma'}(n, N)) \leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N))\hat{\mathbb{P}}(A_{j',\sigma'}(n, N))$$

para qualquer medida $\hat{\mathbb{P}}$, $n \leq N$ (denotando por $\sigma\sigma'$ a concatenação de σ e σ').

3.2 Braços bem-separados

Nesta seção, vamos impor algumas restrições para os eventos $A_{j,\sigma}(n, N)$. Nosso objetivo principal é mostrar que podemos separar macroscopicamente as extremidades de quaisquer sequências de braços: com essa condição, a probabilidade de $A_{j,\sigma}(n, N)$ não diminui por mais do que um fator constante universal. Vamos nos utilizar desse fato para construir ferramentas técnicas essenciais para os resultados posteriores.

Daremos um significado adequado para a propriedade de estar “bem-separado” para um conjunto de cruzamentos. A seguir, vamos considerar cruzamentos em domínios de diferentes formas. Primeiro introduzimos a definição para paralelogramos de escala $(1 \times \tau)$ fixa, e depois vamos explicar como adaptar para os outros casos.

Primeiro, vamos pedir para que as extremidades destes cruzamentos estejam distantes umas das outras. Além disso, precisamos adicionar uma condição para que os cruzamentos possam ser facilmente estendidos: a existência de “espaços livres” nas suas extremidades. Isso nos leva à seguinte definição, similar às “cercas” de Kesten [10].

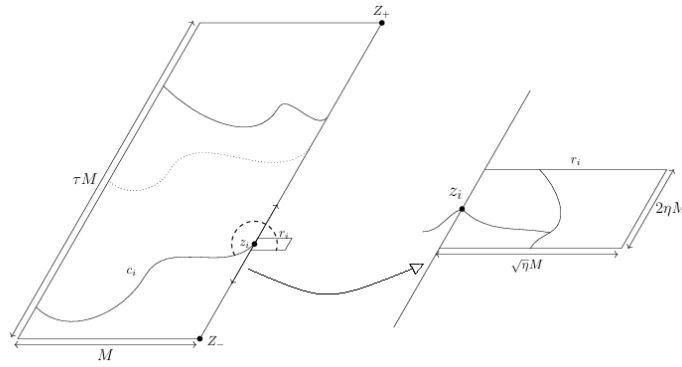


Figura 3.2: Um conjunto $\mathcal{C} = \{c_i\}$ bem-separado e a “cerca” de Kesten correspondente a z_i .

Definição 3.2.1. Considere um paralelogramo $M \times \tau M$ denotado por $R = [a_1, a_1 + M] \times [b_1, b_1 + \tau M]$, e $\mathcal{C} = \{c_i\}_{1 \leq i \leq j}$ um conjunto (σ -colorido) de cruzamentos disjuntos da esquerda para a direita. Escreva como z_i a extremidade de c_i do lado direito do paralelogramo e defina, para algum $\eta \in (0, 1]$, o paralelogramo $r_i = z_i + [0, \sqrt{\eta}M] \times [-\eta M, \eta M]$ ligado no lado direito de R .

Dizemos que \mathcal{C} está bem-separado (do lado direito) em escala η se são satisfeitas as condições abaixo (ilustradas na Figura 3.2):

1. A extremidade de cada cruzamento não está próxima das outras extremidades:

$$\forall i \neq j, \text{dist}(z_i, z_j) \geq 2\sqrt{\eta}M;$$

2. As extremidades estão distantes das quinas superior e inferior direitas do paralelogramo, denotadas por Z_- e Z_+ :

$$\forall i, \text{dist}(z_i, Z_{\pm}) \geq 2\sqrt{\eta}M;$$

3. Cada um dos r_i é cruzado verticalmente por um caminho \tilde{c}_i de mesma cor que c_i e estes caminhos estão conectados no interior de $S_{\sqrt{\eta}M}(z_i)$,

$$c_i \rightsquigarrow \tilde{c}_i \text{ em } \mathring{S}_{\sqrt{\eta}M}(z_i).$$

Para a terceira condição, pedimos que o caminho ligando c_i a \tilde{c}_i seja da mesma cor que eles. Além disso, note que este caminho não necessariamente está contido em r_i , mas sim em um paralelogramo centrado em z_i um pouco maior. Podemos interpretar \tilde{c}_i como uma pequena extensão de c_i no lado direito de R , que nos possibilitará utilizar a generalização de FKG para estender os c'_i s para a direita.

Definição 3.2.2. Dizemos que um conjunto $\mathcal{C} = \{c_i\}_{1 \leq i \leq j}$ de j cruzamentos disjuntos da esquerda para a direita de R pode ser feito bem-separado (do lado direito) se existe outro conjunto de caminhos $\mathcal{C}' = \{c'_i\}_{1 \leq i \leq j}$ de j cruzamentos disjuntos que são bem-separados do lado direito, i.e. satisfazem a Definição 3.2.1, tal que c'_i tem a mesma cor de c_i , e a mesma extremidade do lado esquerdo.

As mesmas definições se aplicam para conjuntos de cruzamentos serem bem-separados na esquerda e para cruzamentos de cima para baixo. Considere agora um conjunto de cruzamentos em um anel $S_{n,N}$. Podemos dividir esse conjunto em quatro subconjuntos, de acordo com o lado de ∂S_N no qual cada cruzamento chega. Por exemplo, tome o subconjunto dos cruzamentos chegando no lado direito: utilizamos as definições anteriores para checar se esse subconjunto é bem-separado. Dizemos que um conjunto de cruzamentos num anel $S_{n,N}$ é bem-separado se cada um dos subconjuntos anteriores é bem-separado ou, analogamente, o conjunto de cruzamentos é bem-separado nas duas bordas do anel. Note que pedir que os cruzamentos estejam distantes das quinas do paralelogramo garante que eles estão distantes dos cruzamentos nos outros paralelogramos adjacentes. Damos a mesma definição para a borda interna ∂S_n : neste caso, as extremidades dos caminhos estarem distantes das quinas também nos garante que as “cercas” associadas a cada caminho não se intersectem e que estejam contidos em S_n .

Estamos prontos para definir nosso primeiro sub-evento de $A_{j,\sigma}$: para quaisquer $\eta, \eta' \in (0, 1)$,

$$\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'}(n, N) := \{\partial S_n \rightsquigarrow_{j,\sigma}^{\eta/\eta'} \partial S_N\}$$

denota o evento $A_{j,\sigma}$ com a condição adicional de que o conjunto de caminhos seja bem-separado em escala η em ∂S_n e seja bem-separado em escala η' em ∂S_N .

Podemos prescrever as “zonas de aterrissagem” dos diferentes braços, ou seja, a posição de suas extremidades. Introduzimos uma última definição com respeito a isso:

Definição 3.2.3. Seja N inteiro positivo. Uma sequência de aterrissagem $\{I_i\}_{1 \leq i \leq j}$ em ∂S_N é uma sequência de intervalos disjuntos I_1, \dots, I_j em ∂S_N em ordem anti-horária. Dizemos que a sequência de aterrissagem é η -separada se:

1. $\text{dist}(I_i, I_{i+1}) \geq 2\sqrt{\eta}N, \forall i$;
2. $\text{dist}(I_i, Z) \geq 2\sqrt{\eta}N, \forall i$ e para toda quina Z de ∂S_N .

Dizemos que $\{I_i\}$ é uma sequência de aterrissagem de tamanho η se satisfaz

3. $\text{length}(I_i) \geq \eta N, \forall i$,

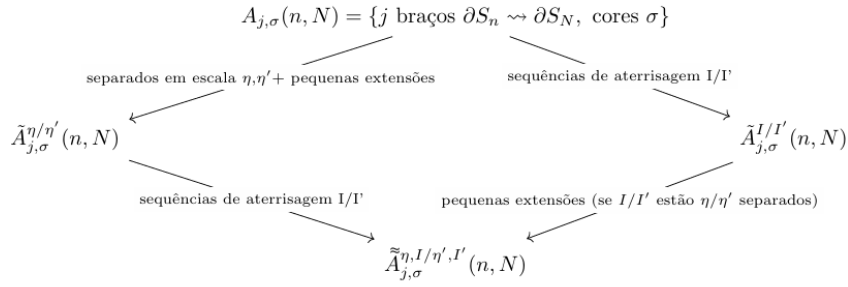
onde $\text{length}(I_i)$ denota o máximo das distâncias entre dois sítios de I_i .

Assim como no conjunto de caminhos, consideramos os índices da sequência de aterrissagem ciclicamente. Identificamos duas sequências de aterrissagem em ∂S_N e $\partial S_{N'}$ se são idênticas a menos de uma dilatação. Além disso, sempre que exigirmos que uma sequência de aterrissagem seja de tamanho η , estaremos considerando eventos nos quais é necessário também o conceito de conjunto de caminhos η -separados. Isso nos leva ao sub-evento de $\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'}(n, N)$: dadas duas sequências de aterrissagem $I = \{I_i\}_{1 \leq i \leq j}$ e $I' = \{I'_i\}_{1 \leq i \leq j}$,

$$\tilde{\tilde{A}}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N) := \{\partial S_n \rightsquigarrow_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'} \partial S_N\}$$

denota o evento $\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'}(n, N)$ com a condição adicional no conjunto de cruzamentos $\{c_i\}_{1 \leq i \leq j}$ que cada extremidade z_i e z'_i em, respectivamente, ∂S_n e ∂S_N satisfazem $z_i \in I_i$ e $z'_i \in I'_i$.

Por fim, temos também outro sub-evento intermediário entre A e \tilde{A} : $\tilde{\tilde{A}}_{j,\sigma}^{I/I'}(n, N)$, para o qual apenas adicionamos as sequências de aterrissagem I/I' para as extremidades dos j braços e apenas pedimos que a sequência de aterrissagem seja disjunta, mas não necessariamente η -separada. Note, porém, que se as sequências de aterrissagem são η/η' -separadas, temos que as extremidades dos cruzamentos são η/η' -separados também.



Observação 3.2.4. Se tomarmos, por exemplo, cores alternadas $\tilde{\sigma} = PBPB$ e as sequências de aterrisagem $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_4$ como sendo os quatro lados do paralelogramo S_N , respectivamente, lados direito, de cima, esquerdo e de baixo, o evento $\tilde{A}_{4,\tilde{\sigma}}^{\tilde{I}}(0, N)$ (o “.” significa que não colocamos nenhuma condição sobre a borda interna) é então o evento que 0 é pivotal para a existência de um cruzamento da esquerda para a direita de S_N .

3.3 Consequências da teoria de RSW

Antes de enunciar o resultado principal deste capítulo, precisamos de algumas consequências diretas de RSW relacionadas aos sub-eventos intermediários anteriormente definidos:

Proposição 3.3.1. Fixe $j \geq 1$, $\sigma \in \tilde{\mathfrak{G}}_j$ e $\eta_0, \eta'_0 \in (0, 1)$.

1. “Extensibilidade”: Temos

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', \tilde{I}'}(n, 2N)), \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\tilde{\eta}, \tilde{I}/\eta', I'}(n/2, N)) \asymp \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\tilde{\eta}, I/\eta', I'}(n, N))$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , $n \leq N \leq L(p)$, e todas as sequências de aterrisagem I/I' (respectivamente \tilde{I}/\tilde{I}') de tamanho η/η' (resp. $\tilde{\eta}/\tilde{\eta}'$) maior que η_0/η'_0 . Em outras palavras: “uma vez bem-separados, os braços podem ser facilmente estendidos”.

2. “Quasi-multiplicatividade”: Temos, para algum $C = C(\eta_0, \eta'_0) > 0$ que

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_3)) \geq C \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I_\eta, I_\eta}(n_1, n_2/4)) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta', I_{\eta'}, I_{\eta'}}(n_2, n_3))$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , $n_0(j) \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq L(p)$, com $n_2 \geq 4n_1$, e todas as sequências de aterrisagem $I_\eta/I_{\eta'}$ de tamanho η/η' maior que η_0/η'_0 .

3. Para quaisquer $\eta, \eta' > 0$, existe constante $C = C(\eta, \eta') > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , $n \leq N \leq L(p)$, existem duas sequências de aterrisagem I e I' de tamanho η e η' , que podem depender dos parâmetros mencionados, tal que:

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)) \geq C \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'}(n, N)).$$

Demonstração: A prova é baseada na utilização de várias construções de RSW repetidamente. Os eventos que estamos considerando não são monótonos quando σ é não constante, portanto vamos utilizar a generalização da desigualdade de FKG 1.3.2 para eventos localmente monótonos. A ideia para a demonstração do item 1. é “construir rodovias” para que

cada um dos j caminhos em $S_{n,N}$ possa ser estendido com probabilidade maior que uma constante universal positiva, tanto para o exterior quanto para o interior do anel. Isso vai nos dar uma cota superior para o evento $\tilde{\mathcal{A}}$, enquanto que a cota inferior será uma consequência do Teorema principal deste capítulo, cuja demonstração não depende desta cota.

Considere o evento $\tilde{\mathcal{A}}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',\tilde{I}'}(n, 2N)$. Note que o evento $\tilde{\mathcal{A}}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',\tilde{I}'}(n, N)$ inclui as “cercas” nas extremidades de cada um dos cruzamentos, portanto construímos os caminhos em $S_{\sqrt{\eta}N, 2N}$. Além disso, note que as zonas de aterrissagem em ∂S_N estarem η' -separadas restringe a quantidade máxima de braços para que o evento $\tilde{\mathcal{A}}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',\tilde{I}'}(n, N)$ seja não-vazio.

Definimos nossas j “rodovias” como sendo j anéis concêntricos em $S_{\sqrt{\eta}N, 2N}$, de forma que todos tenham (aproximadamente) a mesma largura $\left(\frac{N}{j}(2 - \sqrt{\eta'})\right)$, como mostra a Figura 3.3. Para cada um desses anéis, queremos indicar os “trechos” nos quais cada um dos caminhos deve percorrer. Os trechos são caixas do tipo $[0, \tau_i \frac{N}{j}(2 - \sqrt{\eta'})] \times [0, \frac{N}{j}(2 - \sqrt{\eta'})]$, para algum $\tau_i > 0$ podendo estar rotacionadas. A quantidade, localização na caixa e tamanho de cada trecho depende de j, σ, η' e do posicionamento das zonas de aterrissagem I e \tilde{I}' .

Dizemos que um caminho “muda de rodovia” quando o trecho que o caminho deve cruzar não está contido em apenas uma das rodovias. Por fim, dizemos que um cruzamento preto (branco) de $S_{n,N}$ é estendido para um cruzamento de $S_{n,2N}$ se para todos os trechos definidos para este caminho em $S_{N,2N}$, existe um cruzamento horizontal ou vertical, caso o trecho seja rotacionado, preto (branco).

A cor associada a cada uma das rodovias depende de σ e, a princípio, a posição em que cada um dos j caminhos muda de rodovia depende de I e \tilde{I}' , porém a quantidade de mudanças de rodovia depende apenas de j e tal quantidade atinge seu máximo quando as zonas de aterrissagem estão η'_0 -separadas.

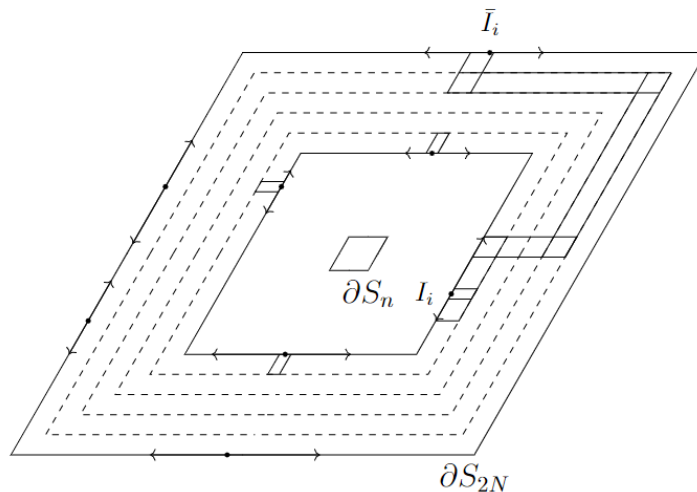


Figura 3.3: As rodovias entre ∂S_N e ∂S_{2N} . A teoria de RSW nos garante que o cruzamento de cada uma das caixas do “jeito difícil” ocorre com probabilidade longe de 0.

Utilizamos a desigualdade generalizada de FKG com $\mathcal{A} = S_{n, N(1+\sqrt{\eta'})}$. \mathcal{A}^+ sendo as rodovias pretas e \mathcal{A}^- sendo as rodovias brancas. Os eventos A^+, A^- escolhemos como sendo a existência dos cruzamentos pretos e brancos, respectivamente, em $S_{n,N}$, de forma que $A^+ \cap$

$A^- = \tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)$ e os eventos \tilde{A}^+, \tilde{A}^- , a existência dos cruzamentos pretos e brancos, respectivamente, nas suas rodovias correspondentes. A interseção destes eventos é justamente o evento em que existe extensão em $S_{N,2N}$ para os cruzamentos dados por $\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)$.

Note que $\tilde{A}^+ \cap \tilde{A}^-$ consiste de uma quantidade finita de eventos de cruzamentos horizontais de caixas de tamanho $[0, \tau_i \frac{N}{j} (2 - \sqrt{\eta'})] \times [0, \frac{N}{j} (2 - \sqrt{\eta'})]$, com $\tau_i > 0$. Dessa forma, o Teorema de RSW nos garante que para cada um desses eventos, a probabilidade que existam esses cruzamentos é pelo menos uma constante positiva, de forma que existe $C = C_{j,\sigma,\eta'_0} > 0$ tal que

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+ \cap \tilde{A}^-) = \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^+) \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}^-) \geq C.$$

Com isso obtemos que,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}\left(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, 2N)\right) &\geq \hat{\mathbb{P}}\left(A^+ \cap \tilde{A}^+ \cap A^- \cap \tilde{A}^-\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(A^+ \cap A^-\right) \hat{\mathbb{P}}\left(\tilde{A}^+ \cap \tilde{A}^- | A^+ \cap A^-\right) \\ &\geq C \hat{\mathbb{P}}\left(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)\right). \end{aligned}$$

Para o evento $\hat{\mathbb{P}}\left(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\tilde{\eta}, \tilde{I}/\tilde{\eta}', I'}(n/2, N)\right)$ e para o item 2, construções análogas são suficientes para demonstrar uma cota inferior, bastando construir as "rodovias" nas regiões para as quais os caminhos precisam ser estendidos.

Para o item 3, considere uma cobertura de ∂S_n (respectivamente ∂S_N) com no máximo $8\eta^{-1}$ (resp. $8\eta'^{-1}$) intervalos $\{I\}$ de tamanho η (resp. $\{I'\}$ de tamanho η'). Então para alguma dupla de sequências de aterrisagem I, I' :

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)) \geq (8\eta^{-1})^{-1} (8\eta'^{-1})^{-1} \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'}(n, N))$$

■

Como consequência dessa Proposição, temos as seguintes cotas a-priori para os eventos de braço:

Proposição 3.3.2. Fixe algum $j \geq 1$, $\sigma \in \tilde{\mathfrak{G}}_j$ e $\eta_0, \eta'_0 \in (0, 1)$. Então existem expoentes $0 < \alpha_j, \alpha' < \infty$ e constantes $0 < C_j, C' < \infty$, tais que

$$C_j \left(\frac{n}{N}\right)^{\alpha_j} \leq \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)) \leq C' \left(\frac{n}{N}\right)^{\alpha'}$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , $n \leq N \leq L(p)$, e todas as sequências de aterrisagem I/I' de tamanho η/η' maior que η_0/η'_0 .

Demonstração: Por simplicidade de notação, vamos considerar n, N como potências de dois: sejam $k \leq K$ tal que $n = 2^k$, $N = 2^K$. Temos, ao iterar o item 1, que, para algum $\delta_j = \delta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^k, 2^K)) &\geq \delta \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^k, 2^{K-1})) \\
&\geq \delta^2 \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^k, 2^{K-2})) \geq \dots \\
&\geq \delta^{K-k} = \delta^{C \log(\frac{N}{n})} \\
&= e^{C \log(\delta) \log(\frac{N}{n})} = \left(\frac{N}{n}\right)^{C \log(\delta)} \\
&= \left(\frac{n}{N}\right)^{-C \log(\delta)}.
\end{aligned}$$

Então, para $\alpha_j = -C \log(\delta) > 0$ temos a cota inferior. O fator C_j surge ao considerar o caso geral: para $n < N$ quaisquer, consideramos k, K tais que $2^{k-1} < n \leq 2^k$ e $2^K \leq N < 2^{K+1}$. Obtemos¹ que

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^{k-1}, 2^{K+1})) \asymp \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(n, N)) \asymp \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^k, 2^K)),$$

de onde obtemos que $\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(n, N)) \geq C_j \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^k, 2^K))$, para algum $C_j > 0$.

Para a cota superior, consideramos anéis concêntricos: em cada um deles, a probabilidade de existir quatro cruzamentos brancos de forma que um circuito se forme ao redor de S_n é limitada inferiormente por uma constante universal (considere os circuitos sendo pretos caso $\sigma = BB \dots B$). A existência de um circuito desses implica a não existência de nenhum braço preto (branco). Dessa forma, escrevendo $C_i = \{\text{não existe circuito branco em } S_{2^i, 2^{i+1}}\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(2^k, 2^K)) &\leq \hat{\mathbb{P}}(\cap_{i=k}^{K-1} C_i) \leq \prod_{i=k}^{K-1} \hat{\mathbb{P}}(C_i) \\
&\leq C' \left(\frac{n}{N}\right)^{\alpha'}
\end{aligned}$$

para algum $C' > 0$ e algum $\alpha' > 0$. ■

3.4 Resultado principal

O resultado principal sobre separação de braços é o seguinte:

Teorema 3.4.1. Fixe um inteiro $j \geq 1$, alguma sequência de cores $\sigma \in \tilde{\mathfrak{C}}_j$ e $\eta_0, \eta'_0 \in (0, 1)$. Então, temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta,I/\eta',I'}(n, N)) \asymp \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N))$$

uniformemente em todas as sequências de aterrisagem I/I' de tamanho η/η' maior que η_0/η'_0 , $p, \hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , e $n \leq N \leq L(p)$.

¹Essas relações não são triviais sem a utilização do Teorema 3.4.1. Como as cotas a-priori serão utilizadas apenas nas duas últimas seções, após a demonstração do Teorema 3.4.1, não é um empecilho citá-lo aqui.

A ideia principal para provar esse resultado é relacionar o evento $A_{j,\sigma}(n, N)$ a um evento $(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta_0, I_{\eta_0}/\eta'_0, I'_{\eta'_0}}(n, N))$ com escalas η_0/η'_0 fixas. Vamos utilizar técnicas de RSW e as propriedades demonstradas na última seção para, em anéis concêntricos em $S_{n,N}$, construir caminhos que “descem” para o ∂S_n em uma escala na qual a probabilidade de existirem cruzamentos bem separados é alta e “subir” para ∂S_N na escala “macroscópica” fixa, com um custo constante para chegar lá.

Demonstração: Primeiro, note que

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)) \leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N))$$

vale por inclusão de eventos. Além disso, é suficiente demonstrar o resultado para n, N como sendo potências de dois, visto que nesse caso, temos que, se k, K são tais que $2^{k-1} < n \leq 2^k$ e $2^K \leq N < 2^{K+1}$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N)) &\leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)) \\ &\leq C_1 \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(2^k, 2^K)) \\ &\leq C_2 \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta, I/\eta', I'}(n, N)), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é uma consequência da extensibilidade. Temos que lidar com as extremidades dos caminhos tanto na borda interior ∂S_n quanto na exterior ∂S_N do paralelogramo.

Extremidades exteriores

Vamos começar dividindo $S_{2^{K-1}, 2^K}$ em quatro regiões em formato de U, que vamos denotar por $U_{2^{K-1}}^{i, \text{ext}}$, $i = 1, \dots, 4$, como na Figura 3.4. O “ext” indica que um cruzamento nesta região conecta as duas partes demarcadas na borda. Para as extremidades internas, vamos utilizar as mesmas regiões em U, apenas demarcando áreas diferentes das bordas.

Uma observação chave contida no Lema a seguir é que em cada região em formato de U, qualquer conjunto de cruzamentos disjuntos pode ser feito bem-separado com probabilidade alta:

Lema 3.4.2. Para qualquer $\delta > 0$, existe uma escala $\eta = \eta(\delta) > 0$ tal que para todo p , qualquer $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e qualquer $N \leq L(p)$,

$$\hat{\mathbb{P}}(E_{U_N^{1, \text{ext}}}) \geq 1 - \delta,$$

com $E_{U_N^{1, \text{ext}}} := \{\text{qualquer conjunto de cruzamentos disjuntos no domínio } U_N^{1, \text{ext}} \text{ pode ser feito } \eta\text{-bem-separado}\}$.

Demonstração: Primeiro, note que a probabilidade de existir um cruzamento (seja ele branco ou preto) em $U_N^{1, \text{ext}}$ é menor que algum $1 - \delta'$, por RSW. Por isso e pela desigualdade de Reimer, temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(\text{existem pelo menos } T \text{ cruzamentos disjuntos em } U_N^{1, \text{ext}}) \leq (1 - \delta')^T.$$

Tome T tal que o lado direito da desigualdade acima seja menor que $\delta/4$.

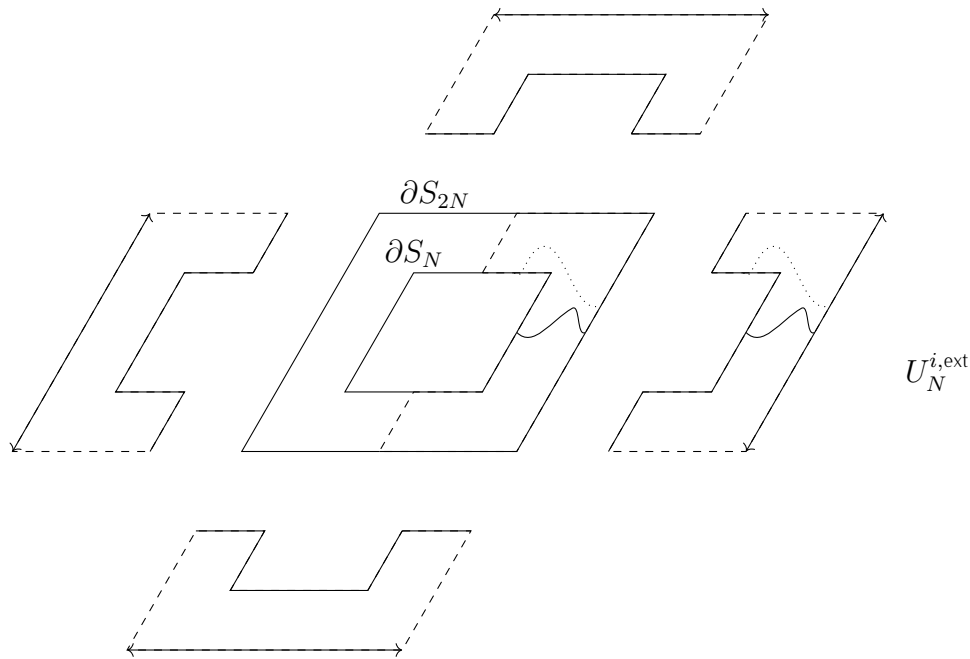


Figura 3.4: As quatro regiões em formato de U, nas quais consideramos cruzamentos entre as regiões demarcadas

Considere por enquanto qualquer $\eta \in (0, 1)$, que será escolhido apropriadamente durante prova. Utilizando RSW, vamos construir “barreiras” nas extremidades dos cruzamentos e nas quinas da região em U, de forma que nenhuma quina ou outro cruzamento de qualquer cor possa estar a uma distância menor ou igual a $2\sqrt{\eta}N$. A escolha de η é de forma que a probabilidade de essas barreiras existirem seja alta o suficiente.

Indicamos como construir cada uma dessas barreiras, primeiramente nas quinas e depois em cada extremidade de cruzamento. Considere Z_- por exemplo, e olhe para anéis concêntricos disjuntos centrados em Z_- da forma $S_{2^{l-1}, 2^l}(Z_-)$, com $\sqrt{\eta}N \leq 2^{l-1} < 2^l \leq \eta^{3/8}N$. Por um raciocínio análogo ao usado na prova da extensibilidade, podemos tomar pelo menos $-C \log \eta$ anéis disjuntos dessa forma, para alguma constante $C > 0$. Podemos também, por RSW, afirmar que a probabilidade de não existir um cruzamento preto em algum desses anéis é menor que $(1 - \delta'')$ para algum $\delta'' > 0$. Assim, a probabilidade de existir um cruzamento preto em no mínimo um desses anéis disjuntos é pelo menos

$$1 - (1 - \delta'')^{-C \log \eta}.$$

Considere agora anéis da forma $S_{2^{l-1}, 2^l}(Z_-)$, com $\eta^{3/8}N \leq 2^{l-1} < 2^l \leq \eta^{1/4}N$: analogamente, com probabilidade de pelo menos

$$1 - (1 - \delta'')^{-C' \log \eta},$$

para algum $C' > 0$, existe cruzamento branco em algum desses anéis. Dizemos que Z_- está “protegido” se existem os dois circuitos descritos. A mesma construção se aplica para Z_+ .

Nosso objetivo agora é fazer a mesma construção para as extremidades dos caminhos. Para isso, gostaríamos que as barreiras fossem construídas utilizando uma parte ainda não explorada do domínio, para continuar utilizando RSW livremente.

Considere a seguinte construção: tome c_1 o cruzamento monocromático mais baixo (*i.e.* o mais próximo do lado de baixo), c_2 o cruzamento monocromático mais baixo disjunto de c_1 e

assim por diante. Esse processo termina com t iterações, e denotamos por $\mathcal{C} = \{c_i\}_{1 \leq i \leq t}$ o conjunto de cruzamentos obtidos dessa maneira (se \mathcal{C} é vazio, convencionamos $t = 0$). Por definição de T , temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(t \geq T) \leq (1 - \delta')^T < \delta/4.$$

Denotamos por z_j a extremidade de c_j do lado direito e por $\sigma_j \in \{P, B\}$ sua cor. Para conseguir a independência necessária para aplicar uma construção como a anterior, vamos condicionar na existência dos caminhos sucessivos. Considere algum $j \in \{1, \dots, T\}$ e uma sequência ordenada de caminhos $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_j$ e suas cores $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_j$. Temos que o evento $E_j := \{t \geq j \text{ e } c_v = \tilde{c}_v, \sigma_v = \tilde{\sigma}_v \text{ para todo } v \in 1, \dots, j\}$ é independente do estado dos sítios acima de \tilde{c}_j , portanto, se condicionarmos com respeito a E_j , a percolação na região acima de \tilde{c}_j permanece com a mesma lei e podemos usar o Teorema de RSW.

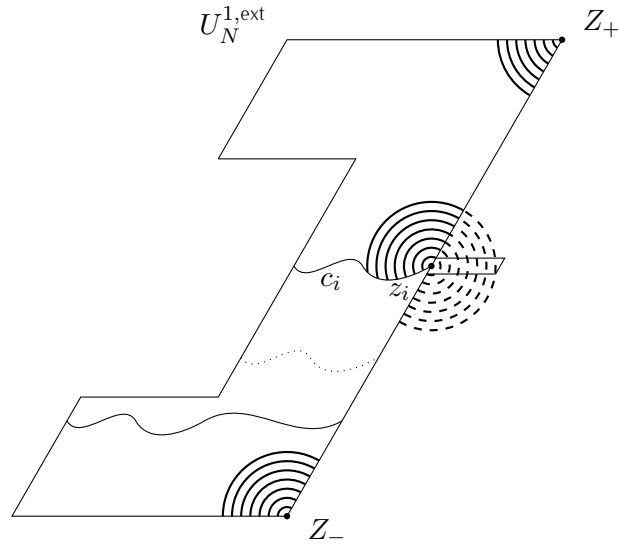


Figura 3.5: Utilizamos RSW nos anéis concêntricos em Z_+ , Z_- e ao redor da extremidade z_i de cada cruzamento c_i .

Podemos fazer a mesma construção acima de cada extremidade, como mostra a Figura 3.5: denotando por z_i a extremidade do caminho c_i , considere, por um lado, anéis disjuntos em cada z_j da forma $S_{2^{l-1}, 2^l}(z_j)$ com $\sqrt{\eta}N \leq 2^{l-1} < 2^l \leq \eta^{3/8}N$ e, por outro lado, anéis dessa mesma forma com $\eta^{3/8}N \leq 2^{l-1} < 2^l \leq \eta^{1/4}N$. Suponha, por exemplo, que $\tilde{\sigma}_j = P$. Com probabilidade pelo menos $1 - (1 - \delta'')^{-C_1 \log \eta}$, existe um cruzamento branco em algum dos anéis do primeiro conjunto e também um cruzamento preto em algum dos anéis do segundo conjunto (note que o circuito preto está mais distante de z_j que o branco). Precisamos também garantir que a pequena extensão de c_j exista na sua "cerca" correspondente. Para isso, consideramos anéis disjuntos da forma $S_{2^{l-1}, 2^l}(z_j)$ com $\sqrt{\eta}N \leq 2^{l-1} < 2^l \leq \eta^{3/8}N$: a probabilidade de existir um cruzamento preto em algum desses anéis é, também, pelo menos $1 - (1 - \delta'')^{-C'' \log \eta}$. Se esses três cruzamentos ocorrem, dizemos que o c_j está "protegido por cima". Somando sobre todas as possibilidades de $\tilde{c}, \tilde{\sigma}$, temos que, para algum C_1 ,

$$\hat{\mathbb{P}}(t \geq j \text{ e } c_j \text{ não está protegido por cima}) \leq (1 - \delta'')^{-C_1 \log \eta}.$$

Assim, para o conjunto de cruzamentos \mathcal{C} ,

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C} \text{ não está } \eta\text{-bem-separado}) \\ & \leq \hat{\mathbb{P}}(t \geq T) + \sum_{j=1}^{T-1} \hat{\mathbb{P}}(t \geq j \text{ e } c_j \text{ não está protegido por cima}) \\ & \quad + \hat{\mathbb{P}}(Z_- \text{ não está bem protegido}) + \hat{\mathbb{P}}(Z_+ \text{ não está bem protegido}). \end{aligned}$$

Cada termo na soma é menor que $(1 - \delta'')^{-C'' \log \eta}$ e, por definição de T , o primeiro termo é menor que $\delta/4$. Portanto (lembrando que T está fixo), escolhemos η de forma que

$$(T + 1)(1 - \delta'')^{-C'' \log \eta} + \frac{\delta}{4} < \delta.$$

Agora, assumindo que \mathcal{C} está η -bem-separado, vamos mostrar que qualquer outro conjunto (ordenado) $\mathcal{C}' = \{c'_j\}_{1 \leq j \leq t'}$ de $t' (\leq t)$ caminhos disjuntos também pode ser feito η -bem-separado. Para isso, substituímos recursivamente as extremidades de cada c'_j pela extremidade de algum c_v , usando a maximalidade de \mathcal{C} . Por exemplo, tome c'_1 : ele cruza pelo menos algum caminho c_v , pela maximalidade de \mathcal{C} . Denote por c_{v_1} o caminho mais abaixo cruzado por c'_1 e note que c'_1 não pode ter nenhum sítio abaixo de c_{v_1} , pela maximalidade e pela definição dos caminhos em \mathcal{C} . Definimos c''_1 da seguinte maneira: tome a parte de c'_1 entre sua extremidade z'_1 e a última interseção a_1 entre c'_1 e c_{v_1} e troque pela parte correspondente de c_{v_1} . Esse caminho tem a mesma extremidade de c_{v_1} do lado direito e podemos ver que a pequena extensão para a “cerca” ao redor de z_{v_1} também é herdada por esse novo caminho. De fato, essa extensão toca c_{v_1} num ponto b_1 : ou b_1 está entre a_1 e z_1 , e portanto c''_1 está automaticamente ligado à extensão \tilde{c}_{v_1} ou b_1 está antes de a_1 , e portanto c'_1 teve que cruzar o caminho ligando c_{v_1} a \tilde{c}_{v_1} , logo c''_1 está ligado a \tilde{c}_{v_1} .

Considere depois c'_2 e c_{v_2} analogamente ao que feito acima: necessariamente $v_2 > v_1$, visto que os conjuntos de cruzamentos estão ordenados e os cruzamentos são disjuntos. A mesma lógica se aplica e o resultado decorre de continuar o mesmo argumento até $c'_{t'}$. ■

Os braços estão bem-separados com probabilidade positiva.

Vamos executar a ideia principal de “descer” em anéis concêntricos e aplicamos o Lema 3.4.2 em cada um deles. Trabalhamos com duas escalas de separação diferentes:

- uma escala macroscópica fixa η'_0 que usaremos para estender os braços, associada a uma constante de extensão fixa.
- outra escala η' que é *bem pequena* ($\eta' \ll \eta'_0$), de forma que os j braços podem ser feitos η' -bem-separados com probabilidade bem alta.

Seja $\delta > 0$ (que será especificado mais tarde) e $\eta' > 0$ associado a ele pelo Lema 3.4.2. Começamos pela escala ∂S_{2^k} e olhamos para os cruzamentos induzidos pelos j braços. O Lema 3.4.2 nos diz que, com probabilidade muito alta, podemos modificar os j braços em $S_{2^{k-1}, 2^k}$ de forma que eles sejam η' -bem-separados. Além disso, note que o que ocorre em $S_{2^{k-1}, 2^k}$ é independente do que ocorre em $S_{2^{k-1}}$. Se os braços já estão bem separados, não temos o que fazer. Caso contrário, aplicamos novamente o Lema 3.4.2 para os anéis na próxima escala e, em cada um dos passos, temos uma probabilidade muito pequena de falhar. Mais precisamente, depois de um passo, temos que

$$A_{j,\sigma}(2^k, 2^K) \subseteq \tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta'}(2^k, 2^K) \cup \left(A_{j,\sigma}(2^k, 2^{K-1}) \cap \{\text{existe falha em algum dos } U_{2^{k-1}}^{i,\text{ext}}\} \right),$$

onde “falha” apenas significa que algum dos braços não está η' -bem-separado (note a diferença entre ser bem-separável e estar bem-separado). Por independência dos últimos dois eventos e pelo Lema 3.4.2, temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)) \leq \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/\eta'}(2^k, 2^K)) + (4\delta)\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^{K-1})). \quad (3.1)$$

Iteramos esse argumento e, depois de $K - k$ passos, obtemos:

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)) \leq \sum_{i=0}^{K-k} (4\delta)^i \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/\eta'}(2^k, 2^{K-i})).$$

Uma vez que os braços estão η' -bem-separados, “subimos” usando a escala macroscópica η'_0 , para a qual o custo de extensão é constante: pelo item 3 da Proposição 3.3.1, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ dependendo apenas de η' tais que para todo $1 \leq i' \leq i$, podemos escolher alguma sequência de aterrissagem $I_{\eta'}$, que pode depender de i' , tal que

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/\eta'}(2^k, 2^{K-i'})) \leq C_1 \hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{A}}_{j,\sigma}^{/\eta', I_{\eta'}}(2^k, 2^{K-i'})).$$

e, pelo item 1 da Proposição 3.3.1, podemos “subir” para a próxima escala com custo de C_2 :

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{A}}_{j,\sigma}^{/\eta', I_{\eta'}}(2^k, 2^{K-i'})) \leq C_2 \hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{\tilde{A}}}_{j,\sigma}^{/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^{K-i'+1})).$$

Por fim, se para alguma escala m os caminhos já estão η'_0 -bem-separados, usamos a extensibilidade para que, com um custo constante C_0 dependendo apenas de η'_0 , possamos sair de ∂S_m para ∂S_{2m} . Sendo assim, iterando esse argumento para todo m da forma 2^l , $K - i' \leq l \leq K - 1$, temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{\tilde{A}}}_{j,\sigma}^{/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^{K-i'})) \leq C_1 C_2 C_0^{i'-1} \hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{A}}}}_{j,\sigma}^{/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^K)).$$

Resta o problema do primeiro termo da soma 3.1, $\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/\eta'}(2^k, 2^K))$. Podemos assumir que começamos de 2^{K-1} e “ignorar” esse termo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)) &\leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^{K-1})) \leq \sum_{i=0}^{K-k-1} (4\delta)^i \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^{K-i-1})) \\ &\leq C_1 C_2 \left[\sum_{i=0}^{K-k-1} (4\delta C_0)^i \right] \hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{A}}}}_{j,\sigma}^{/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^K)). \end{aligned}$$

Temos que C_0 está fixo, portanto escolhemos δ de forma que $4\delta C_0 < 1/2$, de forma que, para algum $C_3 > 0$ que depende apenas de η' ,

$$C_1 C_2 \left[\sum_{i=0}^{K-k-1} (4\delta C_0)^i \right] < C_3.$$

Assim, concluímos o que queríamos para as extremidades exteriores:

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)) \leq C_3 \hat{\mathbb{P}}(\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{A}}}}_{j,\sigma}^{/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^K)).$$

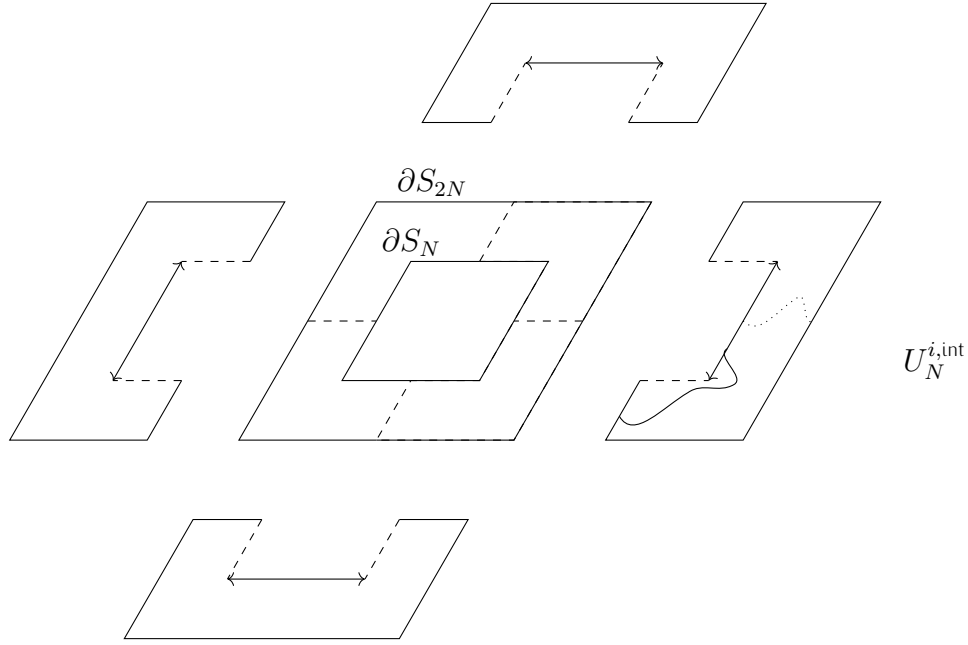


Figura 3.6: As mesmas regiões em U , considerando cruzamentos entre partes diferentes do domínio.

Extremidades interiores

A argumentação para as extremidades interiores é similar, com a única diferença sendo as áreas de chegada dos cruzamentos em cada uma das regiões em formato de U : consideramos os domínios $U_N^{i,int}$ tendo o mesmo formato de $U_N^{i,ext}$, porém com diferentes partes do domínio destacadas, como mostrado na Figura 3.6. Para essas regiões, o Lema 3.4.2 continua verdadeiro e, portanto, para alguns $C_1, C_2 > 0$ que dependem apenas de η associado a algum $\delta > 0$ pelo Lema 3.4.2:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^K)) &\leq \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^{k+1}, 2^K)) \leq \sum_{i=0}^{K-k-1} (4\delta)^i \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^{k+i+1}, 2^K)) \\ &\leq C_1 C_2 \left[\sum_{i=0}^{K-k-1} (4\delta C_0)^i \right] \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'_0, I_{\eta'_0}}(2^k, 2^K)). \end{aligned}$$

Note que utilizamos um análogo ao evento intermediário $\tilde{A}_{j,\sigma}^{\eta/\eta'_0}$, assim como no caso das extremidades exteriores, mas agora já com as sequências de aterrissagem e escalas apropriadas para a parte exterior. A conclusão segue ao escolher δ apropriado. ■

3.5 Algumas consequências

Mostramos aqui algumas consequências importantes do Teorema 3.4.1.

Extensibilidade

Proposição 3.5.1. Seja $j \geq 1$ e uma sequência de cores $\sigma \in \tilde{\mathfrak{C}}_j$. Então

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, 2N)), \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n/2, N)) \asymp \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N))$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e $n_0(j) \leq n \leq N \leq L(p)$.

Demonstração: Note que $\{A_{j,\sigma}(n/2, N)\} \subseteq \{A_{j,\sigma}(n, N)\}$ e $\{A_{j,\sigma}(n, 2N)\} \subseteq \{A_{j,\sigma}(n, N)\}$, portanto:

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, 2N)), \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n/2, N)) \leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N)).$$

A cota superior segue combinando o Teorema 3.4.1 com a cota superior provada para os eventos \tilde{A} . ■

Observação 3.5.2. A cota inferior para a extensibilidade para os eventos \tilde{A} também é consequência do Teorema 3.4.1.

Quasi-multiplicatividade

Proposição 3.5.3. Seja $j \geq 1$ e uma sequência de cores $\sigma \in \tilde{\mathfrak{C}}_j$. Então

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_2))\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_2, n_3)) \asymp \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_3))$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e $n_0(j) \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq L(p)$.

Demonstração: Por um lado, lembrando que os eventos de cruzamento dependem apenas do interior da região, temos

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_3)) \leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_2) \cap A_{j,\sigma}(n_2, n_3)) \leq \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_2))\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_2, n_3))$$

por independência dos eventos $A_{j,\sigma}(n_1, n_2)$ e $A_{j,\sigma}(n_2, n_3)$. Por outro lado, podemos assumir,

por causa da extensibilidade para os eventos A , que $n_2 \geq 8n_1$. Então, para algum η_0 , I_{η_0} , podemos utilizar novamente os resultados anteriores, o Teorema 3.4.1 e a Proposição 3.3.1, juntamente com a quasi-multiplicatividade para os eventos \tilde{A} para concluir que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_2))\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_2, n_3)) &\asymp \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_2/4))\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_2, n_3)) \\ &\asymp \hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/\eta_0, I_{\eta_0}}(n_1, n_2/4))\hat{\mathbb{P}}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/\eta_0, I_{\eta_0}}(n_2, n_3)) \\ &\asymp \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n_1, n_3)). \end{aligned}$$

■

Braços com defeitos

Em alguns casos, será necessário permitir que alguns braços sejam “atravessados” por braços de outra cor e, nesse caso, nossa noção de eventos de braços completamente monocromáticos não será suficiente. A partir daí, surge a motivação de comparar o evento da ocorrência de braços completamente monocromáticos com o evento de existirem braços monocromáticos a menos de um número fixo de “defeitos” (sítios com cor oposta).

Definimos $A_{j,\sigma}^{(d)}$ o evento que existem j braços disjuntos a_1, \dots, a_j de ∂S_n para ∂S_N das cores prescritas por σ , com a seguinte propriedade: para cada $i \in \{1, \dots, j\}$, a_i contém no máximo d sítios da cor $\tilde{\sigma}_i$. O resultado seguinte é uma consequência da propriedade da quasi-multiplicatividade e será necessário posteriormente.

Proposição 3.5.4. Seja $j \geq 1$ e $\sigma \in \mathfrak{G}_j$. Fixe um número de defeitos d . Então temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}^{(d)}(n, N)) \asymp (1 + \log(N/n))^d \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N))$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e $n_0(j) \leq n \leq N \leq L(p)$.

Demonstração: Introduzimos uma divisão logarítmica do anel $S_{n,N}$: tomamos k e K tais que $2^{k-1} < n \leq 2^k$ e $2^K \leq N < 2^{K+1}$. A ideia da prova é “retirar” os anéis nos quais temos defeitos em algum dos braços e “colar” os pedaços dos braços nos anéis remanescentes usando a propriedade da quasi-multiplicatividade.

Começemos pela cota superior: considere o evento auxiliar $\bar{A}_{j,\sigma}^{(D)}$ o evento onde cada um dos j braços têm, somados, no máximo D defeitos. Em particular, note que $A_{j,\sigma}^{(d)} \subseteq \bar{A}_{j,\sigma}^{(jd)}$. Vamos provar que vale, para algum $C_D > 0$,

$$\hat{\mathbb{P}}(\bar{A}_{j,\sigma}^{(D)}(n, N)) \leq C_D (1 + \log(N/n))^D \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N)).$$

Precisamos desse evento auxiliar para podermos aplicar indução no número de defeitos, como indicado em [14]: se consideramos o evento $A_{j,\sigma}^{(d)}$ e prosseguirmos como abaixo, não podemos afirmar que nos anéis posteriores ao anel com o primeiro defeito ocorre o evento $A_{j,\sigma}^{(d-1)}$.

Fazemos indução em D : a propriedade claramente vale para $D = 0$. Tome algum $D > 1$: considere o primeiro anel $S_{2^i, 2^{i+1}}$ no qual um defeito ocorre em algum dos j braços. Temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(\bar{A}_{j,\sigma}^{(D)}(n, N)) \leq \sum_{i=k}^{K-1} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^i)) \hat{\mathbb{P}}(\bar{A}_{j,\sigma}^{(D-1)}(2^{i+1}, 2^K)).$$

Temos, pela hipótese de indução, que $\hat{\mathbb{P}}(\bar{A}_{j,\sigma}^{(D-1)}(n, N)) \leq C_{D-1} (1 + \log(N/n))^{D-1} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{i+1}, 2^K))$ e, por quasi-multiplicatividade,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(\bar{A}_{j,\sigma}^{(D)}(n, N)) &\leq C_{D-1} (1 + \log(N/n))^{D-1} \sum_{i=k}^{K-1} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^i)) \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{i+1}, 2^K)) \\ &\leq C_{D-1} (1 + \log(N/n))^{D-1} \sum_{i=k}^{K-1} C' \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)) \\ &\leq C_D (1 + \log(N/n))^{D-1} (K - k) \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^k, 2^K)), \end{aligned}$$

e assim obtemos a cota superior desejada.

Para a cota inferior, vamos apresentar a ideia para mostrar que a probabilidade de existirem braços com exatamente um defeito está cotada longe de 0. Considere o evento E_α sendo a ocorrência da construção como a descrita a seguir em cada um dos j braços: considerando zonas de aterrissagem $I = \{I_i\}_{1 \leq i \leq j}$ em $\partial S_{2^\alpha+1}$, existe um “tripé”, dado por:

- um circuito d_1 da cor σ_i bloqueando a zona de aterrissagem I_i , sendo c_1 o circuito “mais baixo”, ou seja, mais próximo de I_i ;
- um circuito d_2 entre d_1 e ∂S_{2^α} da cor $\tilde{\sigma}_i$ bloqueando o circuito anterior, de forma que c_2 é o circuito mais próximo de c_1 ;
- um braço da cor σ_i saindo da zona de aterrissagem I_i e chegando em c_1 ;

com probabilidade de pelo menos $C_1 > 0$, por RSW. Assim, condicionados na existência de caminhos e circuitos como acima, temos que existe um braço da cor σ_i saindo de ∂S_{2^α} e chegando em c_2 com probabilidade de pelo menos $C_2 > 0$, também por RSW. Além disso, como c_2 é caminho mais baixo, todo sítio de c_2 está conectado a um sítio de c_1 por um caminho da cor σ_i . Dessa forma, segue que para alguma constante $C'_j > 0$, $\hat{\mathbb{P}}(E_\alpha) \geq C'_j$.

Além disso, note que para todo $k = i_0 < i_1 < \dots < i_d < i_{d+1} = K$, $A_{j,\sigma}^{(d)}(n, N) \supseteq A_{j,\sigma}^{(d)}(2^{k-1}, 2^{K+1}) \supseteq A_{j,\sigma}^{(d)}(2^{k-1}, 2^{K+1}) \cap \{ \text{cada um dos } j \text{ braços tem exatamente um defeito em cada um dos anéis } S_{2^{i_r}, 2^{i_{r+1}}}, 1 \leq r \leq d \}$, de forma que, se $K - k \geq d + 1$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}^{(d)}(n, N)) &\geq \sum_{k=i_0 < i_1 < \dots < i_d < i_{d+1}=K} \prod_{r=0}^d \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{i_{r+1}}, 2^{i_r})) \hat{\mathbb{P}}(E_{i_r}) \\ &\geq \sum_{k=i_0 < i_1 < \dots < i_d < i_{d+1}=K} C_d \prod_{r=0}^d \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{i_{r+1}}, 2^{i_r})) \\ &\geq C'_d \binom{K-k-1}{d} \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{k-1}, 2^{K+1})) \\ &\geq C''_d (K-k)^d \hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{k-1}, 2^{K+1})), \end{aligned}$$

e daí segue a cota inferior. ■

Anéis generalizados

Vamos precisar considerar eventos de braços um pouco mais gerais, em anéis da forma $R \setminus r$, com $r \subseteq \overset{\circ}{R}$ não necessariamente concêntricos. Os itens 1 e 2 dos lemas de separação para eventos \tilde{A} podem ser estendidos para esse caso. As definições de braços separados e bem-separáveis podem ser feitas da mesma forma e, para qualquer $\tau > 1$, podemos demonstrar resultados similares, uniformes nos parâmetros usuais e em paralelogramos r, R tais que $S_n \subseteq r \subseteq S_{\tau n}$ e $S_{N/\tau} \subseteq R \subseteq S_N$ para alguns $n, N \leq L(p)$:

$$\hat{\mathbb{P}}(\partial r \rightsquigarrow_{j,\sigma} \partial R) \asymp \hat{\mathbb{P}}(\partial S_n \rightsquigarrow_{j,\sigma} \partial S_N) \quad (3.2)$$

e similarmente para as condições de separabilidade nas bordas interna e externa.

Braços no meio plano

Até agora, estávamos interessados nos eventos de braços no plano todo: podemos definir da mesma maneira o evento $B_{j,\sigma}(n, N)$ que existem j braços que ficam no meio plano superior \mathbb{H} , com as cores prescritas por $\sigma \in \mathfrak{C}_j$ conectando $\partial S'_n$ a $\partial S'_N$, com a notação que $\partial S'_n = \partial S_n \cap \mathbb{H}$. Esses eventos são interessantes pois aparecem naturalmente ao estudarmos o comportamento de braços próximos a uma borda: por exemplo, ao estudar eventos que ocorrem num espaço reduzido, como entre ∂S_n e ∂S_N com $n < N$, e que necessitamos que os braços permaneçam estritamente contidos no espaço entre essas bordas.

Para esses eventos, é possível demonstrar que todos os resultados mencionados neste capítulo ainda valem para os eventos no meio plano. Além disso, esses eventos tem uma propriedade interessante que será utilizada logo em sequência de que existe uma maneira natural de se ordenar os diferentes braços, o que simplifica algumas coisas. Não vamos utilizar esses eventos daqui para frente para os resultados principais, apesar de mencionar resultados interessantes para esta classe de eventos.

Capítulo 4

Descrição da percolação crítica

Ao estudar a transição de fase da percolação, o regime crítico tem um importante papel: para o modelo da rede triangular, ele possui a forte propriedade de *invariância conforme* no limite de escala.

Vamos relacionar diversos eventos com os eventos de braços, que podem ser ligados a eventos de braços no ponto crítico, $p = 1/2$. Portanto, introduzimos a seguinte notação para $\sigma_j = PBPB\dots$: para qualquer $n_0(j) \leq n \leq N$,

$$\pi_j(n, N) := \mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma_j}(n, N)) \quad (4.1)$$

e, em particular,

$$\pi_j(N) := \mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma_j}(n_0(j), N)). \quad (4.2)$$

Note que com essa notação, a cota a-priori e a propriedade da quasi-multiplicatividade são escritas como

$$C_j(n/N)^{\alpha_j} \leq \pi_j(n, N) \leq C'(n/N)^{\alpha'}; \quad (4.3)$$

$$\pi_j(n_1, n_3) \asymp \pi_j(n_1, n_2)\pi_j(n_2, n_3). \quad (4.4)$$

4.1 Expoentes de braços para percolação crítica

Troca de cores

Nosso primeiro foco para o estudo da percolação no ponto crítico serão nos eventos de braços. Para os eventos de braços no meio plano, os $B_{j,\sigma}(n, N)$ definidos na última seção do Capítulo 3, um argumento combinatorial mostra que, uma vez fixado j , a sequência de cores prescritas σ não altera a probabilidade desses eventos ocorrerem.

Proposição 4.1.1 (Truque de troca de cores). Seja $j \geq 1$ inteiro qualquer. Se σ, σ' são duas sequências de cores quaisquer, então para todo $n_0(j) \leq n \leq N$,

$$\mathbb{P}_{1/2}(B_{j,\sigma}(n, N)) = \mathbb{P}_{1/2}(B_{j,\sigma'}(n, N)).$$

Demonstração: A prova é baseada no fato de existir uma maneira canônica de ordenar os braços: considerando o meio plano superior, podemos fazer o processo de exploração começando à esquerda da origem e determinar a ordem dos braços seguindo a ordem em que vão ocorrendo. Condicionando nos i braços mais a esquerda, a percolação no resto do domínio

continua inexplorada, de modo que podemos “inverter” as cores dos sítios nessa região: para qualquer sequência de cores σ , denotamos por

$$\tilde{\sigma}^{(i)} = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \tilde{\sigma}_{i+1}, \dots, \tilde{\sigma}_j)$$

a sequência com as mesmas i primeiras cores e as subsequentes invertidas (quando $i = 0$, apenas consideramos a sequência totalmente invertida). Como isso vale para toda configuração, temos que

$$\mathbb{P}_{1/2}(B_{j,\sigma}(n, N)) = \mathbb{P}_{1/2}(B_{j,\tilde{\sigma}^{(i)}}(n, N)).$$

Dadas duas sequências quaisquer σ, σ' , é possível sair de σ e chegar, utilizando um número finito de “inversões”, em σ' . ■

Esse resultado não é tão direto no caso do plano inteiro, visto que nesse caso não existe uma maneira canônica de ordenar os braços. Contudo, o argumento anterior pode ser adaptado para provar que as probabilidades diferem apenas por um fator constante, desde que exista uma interface: pelo menos um braço de cor preta e um braço de cor branca.

Proposição 4.1.2. Seja $j \geq 1$ um inteiro fixo qualquer. Se $\sigma, \sigma' \in \tilde{\mathfrak{G}}_j$ são duas sequências de cores não constantes (ou seja, ambas as cores estão presentes), então

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma}(n, N)) \asymp \mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma'}(n, N))$$

uniformemente em $n_0(j) \leq n \leq N$.

Demonstração: Assuma que $\sigma_1 = P$ e $\sigma_2 = B$ e fixe alguma sequência de aterrisagem I . Vamos substituir o evento $A_{j,\sigma}(n, N)$ pelo evento mais forte $\tilde{A}_{j,\sigma}^{I/}(n, N)$ e assim, podemos condicionar no evento em que o braço preto chega em I_1 e o branco em I_2 e esses são os braços (digamos, c_1 e c_2 , respectivamente) mais próximos uns dos outros: se isso ocorre, então note que existe uma *interface* entre esses caminhos, ou seja, c_1 é o caminho preto mais próximo de c_2 , então todo sítio em c_1 está cercado por caminhos brancos que impedem que ele toque ∂S_N e I_1 e todo sítio de c_2 está cercado por caminhos pretos analogamente. Dessa maneira, não existe nenhum cruzamento preto (branco) saindo de I_1 (I_2) e chegando em ∂S_N entre c_1 e c_2 .

Escolhemos I de forma que o ponto $(N, 0)$ está entre I_1 e I_2 . Os braços c_1 e c_2 podem ser determinados por um processo de exploração começando em $(N, 0)$: basta encontrar os primeiros dois cruzamentos saindo das zonas de aterrisagem como prescritos. A partir disso, podemos replicar a demonstração para o caso do meio plano: condicionamos na existência desses dois braços e “invertemos” as cores na região remanescente, condicionando nos braços consecutivos e repetimos este processo uma quantidade finita de vezes. ■

Enfatizamos que durante a argumentação anterior, é necessário fixar a sequência de aterrisagem e a existência de braços de cores opostas. O primeiro foi essencial para definirmos o processo de exploração. O segundo foi essencial visto que, dado um processo de exploração, esse processo de fato seria bem definido e terminaria. Caso a sequência de cores seja constante, podemos encontrar problemas onde a existência de um circuito nos impossibilita de condicionar os eventos em uma região que possa existir cruzamentos entre ∂S_n e ∂S_N . Dessa maneira, é esperado que o resultado anterior seja falso se σ é constante e σ' é não constante, o que parece surpreendente a primeira vista.

Derivação dos expoentes

Pelo fato de a percolação crítica na rede triangular ser conformemente invariante, ela tem uma ligação com o SLE_6 que torna possível demonstrar a existência dos “expoentes de braços” (multicromáticos) e derivar os seus valores ([17, 4]) que foram previstos pela literatura da Física (veja por exemplo [13] e suas referências).

Teorema 4.1.3. Fixe algum $j \geq 1$. Então para qualquer sequência de cores não constante $\sigma \in \tilde{\mathfrak{G}}_j$,

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma}(n_0(j), N)) \approx N^{-\alpha_j},$$

quando $N \rightarrow \infty$, com

- $\alpha_1 = 5/48$,
- para $j \geq 2$, $\alpha_j = (j^2 - 1)/12$.

Damos uma breve ideia de como isso é provado. Considere o processo de exploração radial em um disco unitário: usando a propriedade da invariância conforme no limite de escala, podemos provar que esse processo converge para um SLE_6 radial, para o qual é possível calcular probabilidades de desconexão. Isso implica que

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma})(\eta n, n) \rightarrow g_j(\eta),$$

para alguma função $g_j(\eta) \sim \eta^{\alpha_j}$, quando $\eta \rightarrow 0$. Então, o resultado desejado segue da propriedade da quase-multiplicatividade em anéis concêntricos de módulo fixo.

Como mencionado anteriormente, acredita-se que esse teorema é *falso* para sequências de cores constantes. Nesse caso, a probabilidade deveria ser menor ou, equivalentemente, o expoente crítico, caso exista, deveria ser maior. Portanto, para $j \geq 2$, existem dois expoentes diferentes: o expoente α_j de j -braços multicromático (ou simplesmente expoente de j -braços) e o expoente α'_j de j -braços monocromático, para o qual não se sabe uma fórmula fechada e não existe uma previsão de qual seja seu valor.

Note também que a derivação destes expoentes usando SLE_6 nos dá apenas uma equivalência logarítmica, porém existem razões para acreditar que vale uma equivalência mais forte “ \asymp ”: por exemplo, esse é o caso para os expoentes computados na próxima subseção.

Mencionamos também que é possível derivar da mesma maneira os “expoentes de meio plano”:

Teorema 4.1.4. Fixe algum $j \geq 1$. Então para qualquer sequência de cores $\sigma \in \mathfrak{G}_j$,

$$\mathbb{P}_{1/2}(B_{j,\sigma}(n'_0(j), N)) \approx N^{-\beta_j}$$

quando $N \rightarrow \infty$, com

$$\beta_j = j(j+1)/6.$$

Observação 4.1.5. Como mencionado anteriormente, a rede triangular é até o presente momento a única rede para a qual a invariância conforme foi provada e, como consequência, é a única rede para a qual a existência e os valores dos expoentes de braços foram estabelecidos, com a exceção dos expoentes “universais” que vamos derivar a seguir.

4.2 Expoentes universais

Vamos investigar agora alguns expoentes em particular, para os quais existem previsões heurísticas e derivações elementares: os expoentes de 2 e 3 braços no meio plano, $\beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ e o expoente de 5 braços no plano, $\alpha_5 = 2$. Eles são todos inteiros e foram estabelecidos antes da derivação usando SLE_6 , além de servirem como estimativas a-priori para provar a convergência para o SLE_6 . Além disso, a equivalência para neste caso é mais forte: trocamos o “ \approx ” por um “ \asymp ”.

Teorema 4.2.1. Quando $N \rightarrow \infty$,

1. Para qualquer $\sigma \in \mathfrak{G}_2$,

$$\mathbb{P}_{1/2}(B_{2,\sigma}(0, N)) \asymp N^{-1}$$

2. Para qualquer $\sigma \in \mathfrak{G}_3$,

$$\mathbb{P}_{1/2}(B_{3,\sigma}(0, N)) \asymp N^{-2}$$

3. Para qualquer $\sigma \in \mathfrak{G}_5$ não monocromático,

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_{5,\sigma}(0, N)) \asymp N^{-2}$$

Demonstração: Vamos utilizar apenas o item 3, portanto damos uma prova completa apenas para esse item, e para os dois primeiros, descrevemos os passos para a prova.

Pelo truque da troca de cores, é suficiente mostrar a afirmação para $\sigma = PBPPB$. Usando invariância por translação, temos que $\mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_{N/2}(v)) = \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_{N/2})$, para qualquer $v \in S_{N/2}$. Além disso, $S_{N/2}(v) \subset S_N$, de forma que, por extensibilidade dos eventos de braço,

$$\mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \asymp \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \quad (4.5)$$

uniformemente em $N, v \in S_{N/2}$. Portanto, é suficiente mostrar que o número de sítios em $S_{N/2}$ que satisfazem tal evento de 5 braços é de ordem 1.

Começamos pela cota superior. A ideia é fixar áreas de aterrissagem em ∂S_N e mostrar que existe no máximo 1 sítio $v \in S_{N/2}$ para o qual o evento $\{v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N\}$ ocorre e v é preto. Tome a sequência de aterrissagem I_1, \dots, I_5 como na Figura 4.1 e considere o evento

$$A_v := \{v \rightsquigarrow_{5,\sigma}^I \partial S_N\} \cap \{v \text{ é preto}\}.$$

Note que $\mathbb{P}_{1/2}(A_v) = \frac{1}{2} \mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma}^I \partial S_N)$ visto que a existência dos braços é independente do estado do sítio v , portanto $\mathbb{P}_{1/2}(A_v) \asymp \mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma}^I \partial S_N)$. Afirmamos que A_v ocorre em no máximo um sítio v . De fato, suponha que ocorrem A_v e A_w simultaneamente e denote por r_1, \dots, r_5 e r'_1, \dots, r'_5 seus braços correspondentes. Note que $r_1 \cup r_4 \cup \{v\}$ é um cruzamento preto da esquerda para a direita, como mostra a Figura 4.1, de forma que separa as áreas de aterrissagem I_3 e I_5 . Portanto, $w \in r_1 \cup r_4 \cup \{v\}$ pois, caso contrário, não existiriam simultaneamente braços brancos ligando w a I_3 e a I_5 . O mesmo argumento mostra que $w \in r_1 \cup r_3 \cup \{v\}$. Como os braços são disjuntos, segue que $w \in r_1 \cup \{v\}$. Mas note que $r_2 \cup r_5$ é um cruzamento branco de cima para baixo que separa I_1 de I_4 a menos de um sítio preto (v), de forma que apenas um braço pode “atravessar” $r_2 \cup r_5$. Logo, os braços $r'_1 \cup \{w\}$ e $r'_2 \cup \{w\}$ devem ambos conter v . Como $r'_1 \cap r'_2 = \emptyset$, concluímos que $v = w$.

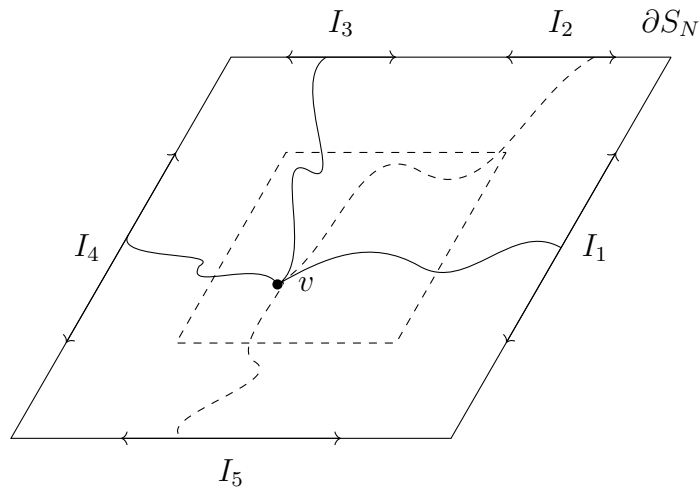


Figura 4.1: A sequência de aterrissagem para o expoente de 5 braços no plano

Conseqüentemente, a cota da união nos dá

$$1 \geq \mathbb{P}_{1/2}(\cup_{v \in S_{N/2}} A_v) = \sum_{v \in S_{N/2}} \mathbb{P}_{1/2}(A_v) \asymp N^2 \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N),$$

que nos dá a cota superior.

Para a cota inferior, a ideia é construir os 5 braços e concluir, utilizando RSW, que a probabilidade dessa construção ocorrer está limitada por baixo. Considere as faixas horizontais $[-N, N] \times [0, N/8]$ e $[-N, N] \times [-N/8, 0]$. Com uma probabilidade de pelo menos $\delta > 0$, existe um cruzamento horizontal preto na primeira faixa juntamente com um cruzamento horizontal branco, que denotamos por b , na segunda faixa. Assuma que esse é o caso e condicione no cruzamento preto da esquerda para a direita acima de b mais baixo, que denotamos por c . Note que esse cruzamento não necessariamente está contido na primeira faixa, mas por construção está acima de algum caminho branco contido na segunda faixa. Além disso, como c é caminho mais baixo, todo sítio contido nesse caminho tem 3 braços induzidos por essa construção: 2 braços pretos e 1 braço branco entre os dois braços pretos. Como condicionamos no caminho mais baixo, a percolação da região acima de c continua inexplorada.

Considere agora as faixas verticais $[-N/8, 0] \times [-N, N]$ e $[0, N/8] \times [-N, N]$. Ainda por RSW, c está conectado ao topo por um caminho preto na primeira faixa e branco na segunda faixa com uma probabilidade de pelo menos $\delta' > 0$. Assuma que esses caminhos existem e denote por v_1 e v_2 os sítios em c onde eles chegam. Novamente, consideramos o caminho preto c' mais à direita e denotamos por v o sítio em c entre v_1 e v_2 onde esse caminho chega. Note que o sítio v tem 5 braços das cores desejadas: os três primeiros braços da primeira construção, um braço preto da definição de v e um braço branco do fato de c' ser caminho mais a direita e estar entre v_1 e v_2 . Além disso, por construção, $v \in S_{N/2}$, logo,

$$\mathbb{P}_{1/2}(\cup_{v \in S_{N/2}} \{v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N\}) \geq C$$

para alguma constante universal $C > 0$. Além disso, por 4.5 aliada a cota da união, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(\cup_{v \in S_{N/2}} \{v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N\}) &\leq \sum_{v \in S_{N/2}} \mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \\ &\leq C' N^2 \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \end{aligned}$$

Assim, segue a cota inferior

$$\mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \geq C'' N^{-2}.$$

Para os expoentes de meio plano, a ideia para a demonstração é tentar replicar os argumentos anteriores de maneira apropriada. Para o expoente de 2 braços, tomando $\sigma = PB$, fixe duas zonas de aterrissagem I_1, I_2 em $\partial S'_N$. Para a cota superior, tome o segmento $[-N/2, N/2] \times \{0\}$ e note que no máximo um sítio nesse segmento pode ter um braço preto chegando em I_1 e um braço branco chegando em I_2 , visto que os próprios braços separam as duas zonas de aterrissagem. Para a cota inferior, o argumento é análogo: construímos um cruzamento preto na faixa, como na Figura 4.2, saindo de I_1 e chegando em $[-N/2, 0] \times \{0\}$ e um cruzamento branco na faixa saindo de I_2 e chegando em $[0, N/2] \times \{0\}$. Depois disso, consideramos o cruzamento preto que chega mais à direita em $[-N/2, N/2] \times \{0\}$. O sítio no qual esse cruzamento chega satisfaz o evento de 2 braços. Por RSW, essa construção ocorre com probabilidade pelo menos $C > 0$ e daí segue o item 1.

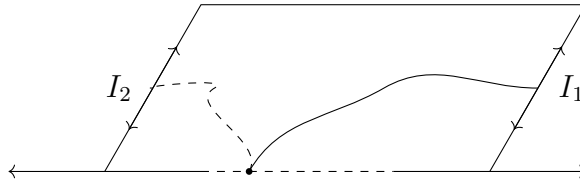


Figura 4.2: Sequência de aterrissagem para o expoente de 2 braços no meio-plano.

Para o expoente de 3 braços, tomamos $\sigma = PBP$ e escolhemos zonas de aterrissagem I'_1, I'_2, I'_3 . Para a cota inferior, também fazemos uma construção de RSW: podemos construir um cruzamento preto, digamos c' , saindo de I'_1 e chegando em I'_3 passando por $S_{N/2} \cap \mathbb{H}$. Assumindo que esse é o caso e condicionando no caminho mais baixo, RSW nos garante que existe um cruzamento saindo de I'_2 e chegando em c' com uma probabilidade de pelo menos $\delta > 0$.

Para a cota superior, note primeiro que para todo $v \in S'_{N/2}$, $\mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{I'} \partial S'_N) = \mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+S_N \cdot I'} \partial S'_N(v))$, por invariância por translação. Podemos provar, por RSW, que para alguma constante $C' > 0$,

$$\mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+S_N \cdot I'} \partial S'_N(v)) \leq C' \mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+(\hat{s}_N) \cdot I'} \partial S'_N(v)),$$

isto é, a probabilidade dos braços serem estritamente positivos (não utilizarem sítios da mesma "altura" de v) é da mesma ordem de magnitude (a menos dos sítios próximos da origem) da probabilidade dos braços estarem contidos no meio plano superior a v . Além disso, note que a probabilidade desses eventos ocorrerem é independente do estado de v .

Definindo o evento $A'_v = \{v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+(\hat{s}_N) \cdot I'} \partial S'_N(v)\} \cap \{v \text{ é preto}\}$, note que $\mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+S_N \cdot I'} \partial S'_N(v)) \leq \frac{C'}{2} \mathbb{P}_{1/2}(A'_v)$, e com argumentos similares ao caso de 5 braços no plano, notamos que no máximo 3 sítios em $S'_{N/2}$ podem satisfazer esse evento simultaneamente: suponha que ocorre A'_v e sejam r_1, r_2, r_3 os braços em questão. Note que $r_1 \cup r_3 \cup \{v\}$ separam a região abaixo desse cruzamento preto de I'_2 . Além disso, r_2 impede a existência de cruzamentos pretos na região acima de $r_1 \cup r_3 \cup \{v\}$, visto que os braços devem ser estritamente positivos. Por fim, como os braços são estritamente positivos, limitamos o número de sítios em $r_1 \cup r_3$ que podem satisfazer esse evento. Logo, utilizando extensibilidade (para os eventos de braço de meio plano), e que

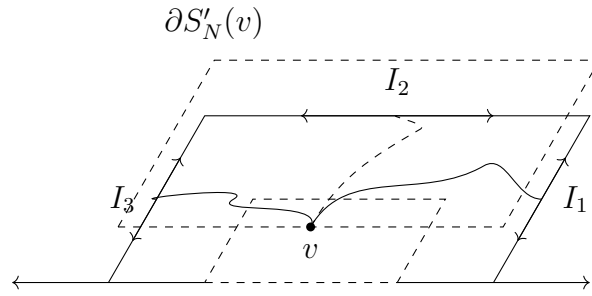


Figura 4.3: Sequência de aterrissagem para o expoente de 3 braços no meio-plano. Os braços estritamente positivos permitem que apenas para 3 sítios, ocorra o evento A'_v .

$$\{v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+S_{N'} \cdot I'} \partial S'_N\} \subseteq \{v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+S_{N'} \cdot I'} \partial S'_{2N}(v)\},$$

concluimos que

$$N^2 \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{I'} \partial S'_N) \leq C'' \sum_{v \in S'_{N/2}} \mathbb{P}_{1/2}(v \rightsquigarrow_{3,\sigma}^{v+S_{N'} \cdot I'} \partial S'_N) \leq C'''$$

e daí segue a cota superior desejada. ■

Note que a prova para o Teorema 4.2.1 só depende de argumentos baseados em RSW e dos lemas de separação (que também dependem somente de argumentos baseados em RSW). Portanto, temos por consequência alguns teoremas que valem para a percolação quase crítica: para \mathbb{P}_p , quando $N \leq L(p)$, valem as estimativas acima, em primeiro momento apenas para as sequências de cores usadas nas provas. De fato, nosso objetivo na próxima seção é estender esse resultado para quaisquer duas sequências de cores não constantes. Além disso, para uma medida $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , temos que ter um cuidado adicional: $\hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N)$ não necessariamente se mantém na mesma ordem de magnitude quando v varia. Ambas as afirmações são consequências do Teorema 5.1.1 provado na seção seguinte, que vai utilizar como estimativa a-priori o seguinte resultado relativo à probabilidade do evento de 5 braços:

Lema 4.2.2. Para $\sigma = \sigma_5 = PBPPB$, temos

$$\sum_{v \in S_{N/2}} \hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \asymp \sum_{v \in S_{N/8}} \hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N) \asymp 1$$

uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e $N \leq L(p)$.

Demonstração: Basta notar que vale a afirmação do item 3 do Teorema 4.2.1 para $\hat{\mathbb{P}}$ e que $\hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_N) \asymp \hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_N)$ para todo $v \in S_{N/2}$. Logo

$$1 \asymp N^2 \hat{\mathbb{P}}(A_{5,\sigma_5}(0, N)) \asymp \sum_{v \in S_{N/2}} \hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma} \partial S_N),$$

onde a última relação segue da extensibilidade. Argumentando analogamente com a caixa $S_{N/8}$, o mesmo argumento se aplica e segue o resultado. ■

Capítulo 5

Eventos de braços próximos da criticalidade

5.1 Enunciado e prova do Teorema

Gostaríamos de estudar a mudança da probabilidade dos eventos $A_{j,\sigma}(n, N)$ conforme o parâmetro p varia. Definimos, baseado nas probabilidades dos eventos de cruzamentos, a escala $L(p)$ na qual a percolação pode ser vista aproximadamente como crítica, e sendo assim, esperamos que essas probabilidades não variem muito conforme p varia, desde que n, N permaneçam nessa escala. De fato, é o que acontece:

Teorema 5.1.1. Fixe $j \geq 1$ inteiro e $\sigma \in \tilde{\mathfrak{G}}_j$ uma sequência de cores. Então,

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N)) \asymp \hat{\mathbb{P}}'(A_{j,\sigma}(n, N))$$

uniformemente em $p, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\mathbb{P}}'$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e $n_0(j) \leq n \leq N \leq L(p)$.

Em particular, se tomarmos $\hat{\mathbb{P}}' = \mathbb{P}_{1/2}$, temos que as probabilidades dos eventos de braços permanecem aproximadamente equivalentes às da criticalidade:

$$\hat{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(n, N)) \asymp \mathbb{P}_{1/2}(A_{j,\sigma}(n, N)).$$

Observação 5.1.2. Note que a propriedade do decaimento exponencial com respeito a $L(p)$ provada na próxima seção mostra que essa escala é de fato a mais apropriada. De fato, suponha $p > 1/2$: a probabilidade de existir um braço branco tende a 0 exponencialmente (no ponto crítico essa probabilidade decai polinomialmente), enquanto que a probabilidade de existir um número positivo de braços pretos disjuntos tende a uma constante positiva.

Demonstração: Dividimos a prova do Teorema em três passos principais. Ressaltamos que precisaremos da generalização da Fórmula de Russo 1.3.4 justamente para esse resultado.

Simplificações

Em vista dos lemas de separação, podemos demonstrar esse Teorema nos restringindo a casos. Tome $\mathbb{P} \in \{\hat{\mathbb{P}}, \hat{\mathbb{P}}'\}$: por quasi-multiplicatividade, para $n \geq n_0(j)$,

$$\mathbb{P}(A_{j,\sigma}(n, N)) \asymp \mathbb{P}(A_{j,\sigma}(n_0(j), n))^{-1} \mathbb{P}(A_{j,\sigma}(n_0(j), N)),$$

logo podemos nos restringir ao caso $n = n_0(j)$. Podemos também demonstrar o resultado para $\hat{\mathbb{P}}'$ fixo e $\hat{\mathbb{P}}$ variando, logo podemos assumir que, para $p < 1/2$, $\hat{\mathbb{P}}' = \mathbb{P}_p$. Dessa forma,

denotando por \hat{p}_v os parâmetros de $\hat{\mathbb{P}}$, segue por hipótese que $\hat{p}_v \geq p$ para todo sítio v . Além disso, vamos supor que os tamanhos dos anéis como sendo potências de dois: sejam k_0, K inteiros de forma que $2^{k_0-1} < n_0 \leq 2^{k_0}$ e $2^K \leq N < 2^{K+1}$. Então para $\mathbb{P} \in \{\hat{\mathbb{P}}, \mathbb{P}_p\}$,

$$\mathbb{P}(A_{j,\sigma}(n_0, N)) \asymp \mathbb{P}(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)).$$

Como dito, para estimar a mudança na probabilidade quando p é trocado por \hat{p}_v , vamos precisar de uma caracterização para os sítios pivotais: localmente, cada sítio pivotal tem 4 braços, de cores alternadas. Portanto, para analisar essas eventos de braços nas vizinhanças dos sítios, precisamos tratar os casos dos sítios muito próximos de $\partial S_{2^{k_0}}$ e ∂S_{2^K} de maneira diferente. Sendo assim, definimos uma medida intermediária $\tilde{\mathbb{P}}$ definida com os parâmetros $\tilde{p}_v = p$ em $S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}$, na qual fazemos uma mudança de parâmetros de forma que $\tilde{p}_v = \hat{p}_v$ em $S_{2^{k_0}, 2^K} \setminus S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}$. Assim, a medida intermediária $\tilde{\mathbb{P}}$ como definida está entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} e $\tilde{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{k_0+3}, 2^{K-3})) = \mathbb{P}_p(A_{j,\sigma}(2^{k_0+3}, 2^{K-3}))$. Com essa igualdade e por extensibilidade, é suficiente mostrar o resultado para essa medida em vez de \mathbb{P}_p : temos que

$$\tilde{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)) \asymp \tilde{\mathbb{P}}(A_{j,\sigma}(2^{k_0+3}, 2^{K-3})) = \mathbb{P}_p(A_{j,\sigma}(2^{k_0+3}, 2^{K-3})) \asymp \mathbb{P}_p(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)).$$

Por fim, o evento $A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)$ não pode ser escrito como interseção como na Fórmula de Russo, porém podemos considerar o evento fortificado $\tilde{A}_{j,\sigma}^{/I'}(2^{k_0}, 2^K)$, para alguma sequência de aterrisagem $I' = I'_1, \dots, I'_j$. Para esse evento, podemos superar essa dificuldade. Pelos lemas de separação, sabemos que, para $\mathbb{P} \in \{\tilde{\mathbb{P}}, \hat{\mathbb{P}}\}$

$$\mathbb{P}(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)) \asymp \mathbb{P}(\tilde{A}_{j,\sigma}^{/I'}(2^{k_0}, 2^K)),$$

logo é suficiente provar o Teorema para esse evento fortificado por essa sequência de aterrisagem.

Aparece a derivada do logaritmo da probabilidade

Estudamos sucessivamente três casos, a fim de reduzir o problema para o cálculo de uma mesma integral. Os casos ficam sucessivamente mais complicados, porém técnicas muito parecidas são suficientes para lidar com isso: começamos com o caso de um braço, depois para o caso de uma quantidade par de braços de cores alternadas e depois o caso geral. Para os dois primeiros casos, uma solução muito parecida é suficiente, visto que a presença de dois braços de cores opostas após cada um dos braços na verdade ajuda a existência de um sítio com 4 braços. Para o último caso, para aplicar a mesma ideia, precisamos da noção de "braços com defeitos", que será suficiente para nosso objetivo.

Caso 1: $j = 1$

Para o primeiro caso, considere por exemplo $\sigma = P$. Defina a família de medidas $(\tilde{\mathbb{P}}_t)_{t \in [0,1]}$ cujos parâmetros são definidos pela interpolação entre os parâmetros de \mathbb{P}_p e $\hat{\mathbb{P}}$: para todo $v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}$

$$\tilde{p}_v(t) = t\hat{p}_v + (1-t)p.$$

Note que essa medida está entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} para todo $t \in [0, 1]$, e que sua derivada em t é dada por

$$\frac{d}{dt}\tilde{p}_v(t) = \begin{cases} \hat{p}_v - p, & \text{se } v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso, a Fórmula de Russo generalizada apenas com um evento não decrescente nos dá:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{I'}(2^{k_0}, 2^K)) = \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p)\tilde{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } \tilde{A}_{1,\sigma}^{I'}(2^{k_0}, 2^K)). \quad (5.1)$$

Como dito no início da prova, vamos caracterizar o evento acima em termos de eventos de cruzamentos de caixa: o evento $\{v \text{ é pivotal para } \tilde{A}_{1,\sigma}^{I'}(2^{k_0}, 2^K)\}$ acontece se, e somente se, o seguinte acontecer:

- existe um braço r_1 saindo de $\partial S_{2^{k_0}}$ e chegando em I'_1 com $v \in r_1$, tal que $r_1 \setminus \{v\}$ é preto ($\tilde{A}_{1,\sigma}^{I'}(2^{k_0}, 2^K)$ ocorre se v é preto);
- existe um caminho c_1 com $v \in c_1$ e tal que $c_1 \setminus \{v\}$ é branco, de forma que c_1 separa $\partial S_{2^{k_0}}$ de I'_1 (c_1 pode ser um circuito ao redor de $\partial S_{2^{k_0}}$ ou um caminho com as duas extremidades em ∂S_{2^K}). Nesse caso, não existe braço preto de $\partial S_{2^{k_0}}$ para I'_1 quando v é branco.

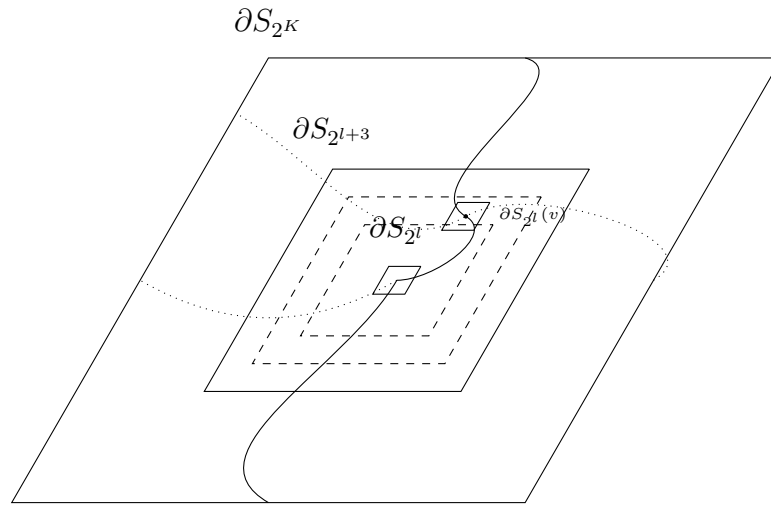


Figura 5.1: Se um vértice v é pivotal para $A_{j,\sigma}$ nos casos 1 e 2, o evento de 4 braços ocorre localmente.

Observamos também que a existência de dois braços pretos disjuntos chegando em I'_1 não permite que um sítio seja pivotal nesse evento. Calcular a probabilidade desses eventos é inviável, porém podemos analisar o que acontece na vizinhança de um sítio pivotal. Dessa forma, vamos definir o losango $R(v)$ ao redor de v . Se $0 \in R(v)$, não podemos dizer nada com respeito a eventos de braços saindo de v , dessa forma gostaríamos de evitar esse problema. Caso contrário, v ser pivotal implica na existência de 4 braços de cores alternadas saindo de v : r_1 nos dá os braços pretos e c_1 , os brancos. Além disso, se $R(v)$ for “pequeno demais”, não será possível reconstruir os cruzamentos através dos fragmentos de braços dentro de $R(v)$. Por isso, utilizamos uma escala grande o suficiente para reconstruir os braços do lado de

fora, evitando incluir o 0 e o exterior de ∂S_{2^K} em $R(v)$: se $2^{l+1} < \|v\|_\infty \leq 2^{l+2}$ para algum $l > 1$, definimos $R(v) = S_{2^l}(v)$.

Com a definição dada, podemos checar que $R(v) \subseteq S_{2^l, 2^{l+3}}$, de forma que para qualquer $t \in [0, 1]$, $\tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow \partial R(v)) \leq \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow \partial S_{2^l})$ (e analogamente para $\{\partial S_{2^{l+3}} \rightsquigarrow \partial S_{2^K}\}$). Além disso, usando extensibilidade e quasi-multiplicatividade, conseguimos recuperar o evento original, visto que obtemos que para alguma constante universal $C_1 > 0$,

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow \partial S_{2^l}) \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l+3}} \rightsquigarrow \partial S_{2^K}) \leq C_1 \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)).$$

Daí, reunindo essas informações, temos

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } \tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \\ & \leq \tilde{\mathbb{P}}_t(\{\partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow \partial S_{2^l}\} \cap \{\partial S_{2^{l+3}} \rightsquigarrow \partial S_{2^K}\} \cap \{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)\}) \\ & = \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow \partial S_{2^l}) \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l+3}} \rightsquigarrow \partial S_{2^K}) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_1 \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)), \end{aligned}$$

onde a igualdade vale por independência dos três eventos, visto que eles são definidos em conjuntos de sítios disjuntos (lembrando que $\sigma_4 = PBPB$). Substituímos em 5.1 para obter:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \\ & \leq C_1 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \end{aligned}$$

Dividimos por $\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K))$ para que a derivada do logaritmo da probabilidade apareça:

$$\frac{d}{dt} \log[\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{1,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K))] \leq C_1 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)).$$

Dessa forma, integrando ambos os lados, vemos que é suficiente demonstrar que

$$\int_0^1 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) dt \leq C, \quad (5.2)$$

para alguma constante universal $C > 0$. Obtivemos o que gostaríamos e agora vamos partir para os outros dois casos: apesar dos cálculos serem diferentes, vamos reduzir o problema a essa desigualdade.

Caso 2: j par e σ alternando

Nesse caso, para $A^+ = A^+(2^{k_0}, 2^K)$, $A^- = A^-(2^{k_0}, 2^K)$, podemos escrever

$$\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K) = A^+ \cap A^-$$

com $A^+ = \{\text{ocorrem } j/2 \text{ braços pretos disjuntos } r_i : \partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow I'_i, i \in \{1, 3, \dots, j-1\}\}$ e $A^- = \{\text{ocorrem } j/2 \text{ braços brancos disjuntos } r_i : \partial S_{2^{k_0}} \rightsquigarrow I'_i, i \in \{2, 4, \dots, j\}\}$.

A partir daqui, prosseguimos como no primeiro caso: defina a família de medidas $(\tilde{\mathbb{P}}_t)_{t \in [0,1]}$ como a interpolação dos parâmetros das medidas \mathbb{P}_p e $\hat{\mathbb{P}}$ em $S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}$. Obtemos da a Fórmula de Russo generalizada que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \\ &= \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \left[\tilde{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } A^+ \text{ mas não para } A^-, A^- \text{ ocorre}) \right. \\ & \quad \left. - \tilde{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } A^- \text{ mas não para } A^+, A^+ \text{ ocorre}) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Note que o evento $\{v \text{ é pivotal para } A^+ \text{ mas não para } A^-, A^- \text{ ocorre}\}$ acontece se, e somente se, para algum $i' \in \{1, 3, \dots, j-1\}$, tivermos

- existem j braços disjuntos monocromáticos r_1, \dots, r_j saindo de $\partial S_{2^{k_0}}$ e chegando em I'_1, \dots, I'_j , com $v \in r_{i'}$: r_i é branco se i é par e preto se i é ímpar, com a possível exceção de $r_{i'}$ em v (o evento $\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)$ acontece se v é preto);
- existe um caminho $c_{i'}$ com $v \in c_{i'}$ e tal que $c_{i'} \setminus \{v\}$ é branco, de forma que $c_{i'}$ separa $\partial S_{2^{k_0}}$ de $I'_{i'}$ ($c_{i'}$ deve ser um caminho com as duas extremidades em ∂S_{2^K} , podendo incluir os cruzamentos vizinhos $r_{i'-1}$ e $r_{i'+1}$). Nesse caso, não existe braço preto de $\partial S_{2^{k_0}}$ para $I'_{i'}$ quando v é branco.

Definimos $R(v)$ como no caso anterior e as mesmas observações valem: para qualquer $t \in [0, 1]$, por quasi-multiplicatividade e extensibilidade, existe constante universal $C_2 > 0$ tal que

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^l)) \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{l+3}, 2^K)) \leq C_2 \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)).$$

Com isso e com a caracterização de um sítio ser pivotal, obtemos, por independência entre os três eventos, que

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } A^+ \text{ mas não para } A^-, A^- \text{ ocorre}) \\ & \leq \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^l) \cap A_{j,\sigma}(2^{l+3}, 2^K) \cap \{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)\}) \\ & = \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^l)) \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{l+3}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_2 \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)). \end{aligned}$$

O mesmo argumento vale para $\{v \text{ é pivotal para } A^- \text{ mas não para } A^+, A^+ \text{ ocorre}\}$. Substituindo em 5.3, obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \right| \\ & \leq 2C_2 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)), \end{aligned}$$

e dividindo por $\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K))$, obtemos a derivada do logaritmo da probabilidade:

$$\left| \frac{d}{dt} \log \left[\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}_{j,\sigma}^{:/I'}(2^{k_0}, 2^K)) \right] \right| \leq 2C_2 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)),$$

Como prometido, reduzimos o problema a calcular 5.2.

Caso 3: quaisquer j, σ

No caso geral, o fato de podermos ter braços consecutivos de mesma cor é um problema para identificarmos, assim como fizemos nos casos anteriores, um caminho de cor oposta que “bloqueie” a zona de aterrissagem, portanto vamos precisar da noção de braços com defeitos para aplicar essa mesma ideia. Por exemplo, se $v \in r_i$ e esse braço é preto, ainda temos os dois braços pretos saindo de v , mas não necessariamente os dois braços brancos alcançam $\partial R(v)$.

Para simplificar a noção de um vértice ser pivotal, definimos um evento novo: agrupamos os braços consecutivos de mesma cor. Seja $(r_{i_q}, r_{i_q+1}, \dots, r_{i_q+l_q-1})$ sequência de l_q braços de mesma cor, tomamos um intervalo \tilde{I}_q cobrindo todas as $I_i, i_q \leq i \leq i_q + l_q - 1$ e trocamos a condição “ $r_i \rightsquigarrow I_i$ para todo $i_q \leq i \leq i_q + l_q - 1$ ” por “ $r_i \rightsquigarrow \tilde{I}_q$ para todo $i_q \leq i \leq i_q + l_q - 1$ ”. Construímos dessa forma o evento $\tilde{A} = \tilde{A}^+ \cap \tilde{A}^-$; note que é um evento intermediário entre $A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)$ e $\tilde{A}_{j,\sigma}^{/I'}(2^{k_0}, 2^K)$, portanto

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}) \asymp \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)). \quad (5.4)$$

Com esse evento alternativo, podemos utilizar o Teorema de Menger (veja [1], Teorema 3.3.1): considerando o conjunto de todos os braços, por exemplo pretos, que saem de $\partial S_{2^{k_0}}$ e chegam em \tilde{I}_q como acima, se existe v pivotal para a ocorrência desses caminhos, então o Teorema de Menger garante que a quantidade total, digamos T , de braços pretos disjuntos saindo de $\partial S_{2^{k_0}}$ e chegando em \tilde{I}_q é exatamente l_q . De fato, pelo Teorema de Menger, se $T > l_q$, a quantidade mínima de sítios cujos estados precisaríamos trocar para não existir l_q caminhos disjuntos é pelo menos 2, ou seja, não temos sítio pivotal para esse evento. Dessa forma, vale que: $\{v \text{ é pivotal para } \tilde{A}^+ \text{ mas não para } \tilde{A}^-, \tilde{A}^- \text{ ocorre}\}$ acontece se, e somente se, para algum braço $r_{i'}$ num conjunto de braços pretos $(r_{i_q}, r_{i_q+1}, \dots, r_{i_q+l_q-1})$:

- existem j braços disjuntos monocromáticos r_1, \dots, r_j saindo de $\partial S_{2^{k_0}}$ e chegando em seus respectivos \tilde{I}_q (um número apropriado de braços para cada intervalo), com $v \in r_{i'}$: cada um dos braços é da cor prescrita, exceto possivelmente $r_{i'}$ em v (o evento \tilde{A} acontece se v é preto);
- existe um caminho $c_{i'}$ separando $\partial S_{2^{k_0}}$ de \tilde{I}_q : esse caminho é branco, exceto em, no máximo, $l_q - 1$ sítios e, além deles, possivelmente em v . (podemos separar $\partial S_{2^{k_0}}$ de \tilde{I}_q trocando o estado de, no máximo, $l_q - 1$ sítios quando v é branco).

Novamente, tomamos o mesmo losango $R(v) \subseteq S_{2^l, 2^{l+3}}$ associado a v . Se o evento de 4 braços saindo de v , $\{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^{l-1}}(v)\}$, ocorre, a conclusão segue por extensibilidade, utilizando os mesmos argumentos dos casos anteriores. Caso contrário, existe algum $l', 1 \leq l' \leq l - 2$, tal que o defeito em $c_{i'}$ mais próximo de v ocorre em $S_{2^{l'+1}}(v) \setminus S_{2^{l'}}(v)$: nesse caso, o evento de 4 braços acontece no pedaço anterior ao primeiro defeito ($\{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^{l'}}(v)\}$ ocorre), enquanto que o evento de 6 braços com no máximo j defeitos ocorre no pedaço posterior ao primeiro defeito ($\{\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{6,\sigma_6}^{(j)} \partial S_{2^{l'}}(v)\}$ ocorre, onde $\sigma_6 = PPBPPB$). Dessa maneira, definimos o evento $E(v)$:

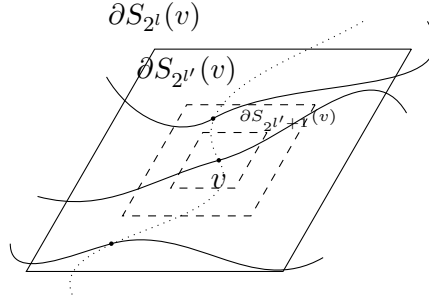


Figura 5.2: No terceiro caso, eventos mais complicados podem acontecer, com 4 braços localmente e 6 braços saindo da caixa $\partial S_{2^{l'+1}}$

$$E(v) := \{ \text{existe } l' \in \{1, \dots, l-2\} \text{ tal que } v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{l'}}(v) \text{ e } \partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{6, \sigma_6}^{(j)} \partial S_{2^l}(v) \} \\ \cup \{ v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{l-1}}(v) \}.$$

Mostraremos agora que para alguma constante universal $C_7 > 0$,

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(E(v)) \leq C_7 \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \quad (5.5)$$

Vamos lidar primeiramente com o evento de 6 braços com defeitos: pela Proposição 3.5.4, a probabilidade desse evento acontecer é aproximadamente a mesma do evento sem defeitos, com uma correção logarítmica. Usando a consequência da desigualdade de Reimer 3.1.1 e a cota a-priori para um braço 3.3.2, obtemos:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{6, \sigma_6}^{(j)} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_3 (l-l')^j \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{6, \sigma_6} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_3 (l-l')^j \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{2, PP} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_4 (l-l')^j \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) 2^{-\alpha'(l-l')}. \end{aligned}$$

Para estimar a probabilidade de $E(v)$, basta somar sobre as possibilidades de l' : por quase-multiplicatividade,

$$\begin{aligned} & \sum_{l'=1}^{l-2} \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{l'}}(v)) \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{6, \sigma_6} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_4 \sum_{l'=1}^{l-2} \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{l'}}(v)) \tilde{\mathbb{P}}_t(\partial S_{2^{l'+1}}(v) \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) (l-l')^j 2^{-\alpha'(l-l')} \\ & \leq C_5 \sum_{l'=1}^{l-2} \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) (l-l')^j 2^{-\alpha'(l-l')} \\ & = C_5 \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \sum_{l'=1}^{l-2} (l-l')^j 2^{-\alpha'(l-l')} \\ & \leq C_6 \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^l}(v)), \end{aligned}$$

visto que $\sum_{l'=1}^{l-2} (l-l')^j 2^{-\alpha'(l-l')} \leq \sum_{r=1}^{\infty} r^j 2^{-\alpha'r} < \infty$. Dessa forma, encontramos a equação 5.5. A partir daí, a argumentação é a mesma do caso 2:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } \tilde{A}^+ \text{ mas não para } \tilde{A}^-, \tilde{A}^- \text{ ocorre}) \\ & \leq \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^l)) \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{l+3}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}_t(E(v)) \\ & \leq C_7 \tilde{\mathbb{P}}_t(A_{j,\sigma}(2^{k_0}, 2^K)) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \\ & \leq C_8 \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de 5.4. Daí, obtemos

$$\left| \frac{d}{dt} \log \left[\tilde{\mathbb{P}}_t(\tilde{A}) \right] \right| \leq C_9 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)),$$

e a equação 5.2 seria suficiente.

Soma final

Agora só nos resta provar 5.2, ou seja, que para alguma constante universal $C > 0$,

$$\int_0^1 \sum_{v \in S_{2^{k_0+3}, 2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) dt \leq C. \quad (5.6)$$

A principal relação que vamos utilizar na prova segue da Fórmula de Russo, com a qual podemos contar sítios com 4 braços. Sejam N qualquer e $\bar{\mathbb{P}}$ uma medida entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , então

$$\int_0^1 \sum_{v \in S_N} (\bar{p}_v - p) \bar{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4}^{\bar{I}} \partial S_N) dt = \bar{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H(S_N)) - \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(S_N)) \leq 1, \quad (5.7)$$

onde \bar{I} é a sequência de aterrissagem que consiste dos 4 lados de ∂S_N .

Assuma que $v \in S_{2^{l+1}, 2^{l+2}}$ como antes. Vamos subdividir esse anel em 12 sub-caixas de tamanho 2^{l+1} (cada sub-caixa é uma “cópia” de S_{2^l} , como na Figura 5.3), que denotamos por $\tilde{R}_{2^{l+1}}^i$ ($i \in \{1, \dots, 12\}$). Pelo menos uma dessas sub-caixas contém v , a denotamos por $\tilde{R}(v)$. A cada uma dessas caixas associamos uma caixa maior $\tilde{R}'_{2^{l+1}}$ de tamanho 2^{l+2} (“cópias” de $S_{2^{l+1}}$), com notação análoga $\tilde{R}'(v)$. Note que

$$\{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^{l+2}}(v)\} \subseteq \{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial \tilde{R}'(v)\} \subseteq \{v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)\},$$

portanto, temos, por extensibilidade, que

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^l}(v)) \asymp \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial \tilde{R}'(v)).$$

Dessa forma, é suficiente encontrar uma cota superior para

$$\sum_{j=k_0+3}^{K-4} \sum_{i=1}^{12} \int_0^1 \sum_{v \in \tilde{R}_{2^j}^i} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial \tilde{R}_{2^j}^i) dt, \quad (5.8)$$

e para isso vamos mostrar que para cada $i \in \{1, \dots, 12\}$ e fixo $t \in [0, 1]$,

$$S_j^{i,(4)} := \sum_{v \in \tilde{R}_{2^j}^i} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial \tilde{R}_{2^j}^i)$$

de fato decai rápido o suficiente quando, começando de $j = K-4$, fazemos j decrescer. Tendo isso em vista, gostaríamos de trabalhar com uma medida que tenha alguma regularidade entre essas sub-caixas. Para cada $\tilde{R}_{2^j}^i$, definimos a nova medida $\tilde{\mathbb{P}}$ dentro de S_{2^k} duplicando os parâmetros da caixa $\tilde{R}_{2^j}^i$ periodicamente dentro de $S_{2^{k-3}}$ e tomando $\bar{p}_v = p$, se $v \notin S_{2^{k-3}}$. Como essa caixa tem tamanho 2^{j+1} , essa medida contém $2^{2(K-j-3)}$ cópias da caixa original, que vamos denotar por (\bar{R}'_q) . Também consideramos uma caixa menor de tamanho 2^j centrada em \bar{R}'_q , que denotamos por \bar{R}_q .

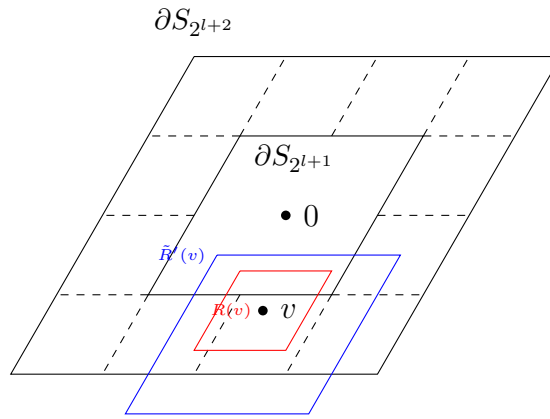


Figura 5.3: Substituímos cada $R(v) = S_{2^l}(v)$ por alguma das $\tilde{R}_{2^{l+1}}^i$, ($i = 1, 2, \dots, 12$)

Restringimos a soma aos sítios na união dos \bar{R}'_q 's: vamos utilizar que $\cup_q \bar{R}'_q \subset S_{2^k}$ para obter

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in S_{2^{K-3}}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^k}) \\ & \geq \sum_q \sum_{v \in \bar{R}'_q} (\bar{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^k}) \\ & \geq C_1 \sum_q \sum_{v \in \bar{R}'_q} (\bar{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial \bar{R}'_q) \tilde{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^k}) \\ & = C_1 \left(\sum_q \tilde{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2^k}) \right) S_j^{i,(4)} \tag{5.9} \\ & \geq C_2 \left(\sum_q \tilde{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2^k}) \tilde{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow \partial S_{2^k})^{-1} \right) S_j^{i,(4)} \\ & \geq C_3 2^{\alpha'(K-j)} \left(\sum_q \tilde{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2^k}) \right) S_j^{i,(4)}, \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade utilizamos a desigualdade de Reimer e, na última, a cota a-priori para um braço.

Agora, definimos analogamente a caixa \bar{R}''_q de tamanho 2^{j+2} centrada em \bar{R}'_q . Dessa vez, temos que $\cup_q \bar{R}''_q \supseteq S_{2^k}$. Além disso, pelo Lema 4.2.2, $\sum_{v \in \bar{R}'_q} \tilde{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial \bar{R}''_q) \asymp 1$. Daí, para o evento de 5 braços,

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \in S_{2K-3}} \bar{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K}) &\leq \sum_q \sum_{v \in \bar{R}'_q} \bar{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial \bar{R}'_q) \bar{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K}) \\
 &\leq C_4 \left(\sum_q \bar{\mathbb{P}}_t(\partial \bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K}) \right).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Também pelo Lema 4.2.2, $\sum_{v \in S_{2K-3}} \bar{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K}) \asymp 1$ e, por extensibilidade, temos que $\bar{\mathbb{P}}_t(\partial \bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K}) \asymp \bar{\mathbb{P}}_t(\partial \bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K})$. Com isso e com a relação de 5 braços acima (equação 5.10),

$$\sum_q \tilde{\mathbb{P}}_t(\bar{R}'_q \rightsquigarrow_{5,\sigma_5} \partial S_{2K}) \geq C_5 \tag{5.11}$$

para alguma constante universal $C_5 > 0$. Substituindo na expressão de 4 braços anterior (equação 5.9), isso implica que

$$S_j^{i,(4)} \leq C_6 2^{-\alpha'(K-j)} \sum_{v \in S_{2K-3}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2K}). \tag{5.12}$$

Finalmente, note que a equação 5.7 nos dá que, para alguma constante universal $C'' > 0$

$$\int_0^1 \sum_{v \in S_{2K-3}} (\bar{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial S_{2K}) dt \leq C''.$$

Integrando 5.12 e utilizando a relação acima, temos que

$$\int_0^1 \sum_{v \in \bar{R}'_{2j}} (\hat{p}_v - p) \tilde{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4,\sigma_4} \partial \bar{R}'_{2j}) dt \leq C_7 2^{-\alpha'(K-j)}$$

A soma da equação 5.8 é, portanto, menor que

$$\sum_{j=k_0+3}^{K-4} 12C_7 2^{-\alpha'(K-j)} \leq C_8 \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-\alpha'r} < \infty,$$

o que completa a prova. ■

5.2 Informações complementares

Teorema para anéis generalizados

Podemos obter uma versão do Teorema 5.1.1 para losangos não concêntricos. Por exemplo, para qualquer $\eta > 0$ fixo,

$$\hat{\mathbb{P}}(\partial S_n(v) \rightsquigarrow \partial S_N) \asymp \mathbb{P}_p(\partial S_n \rightsquigarrow \partial S_N) \tag{5.13}$$

uniformemente em $v \in S_{(1-\eta)N}$. Isso segue do comentário feito para anéis generalizados (equação 3.2) combinado com o Teorema 5.1.1 aplicado na medida $\hat{\mathbb{P}}^v$ ($\hat{\mathbb{P}}$ transladado por v).

Uma cota complementar

Uma das consequências do Teorema 5.1.1 é que a percolação quase crítica dentro da janela de tamanho $L(p)$ pode ser vista, assintoticamente, como a percolação crítica. Seguindo as ideias da prova anterior, podemos obter uma cota na outra direção: a probabilidade do evento de um braço varia uma quantidade não negligenciável, como a probabilidade de eventos de cruzamento, ou seja, existe uma diferença macroscópica para o regime crítico.

Proposição 5.2.1. Existe uma constante universal $\tilde{C} > 1$ tal que para todo $p > 1/2$,

$$\mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \geq \tilde{C} \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}). \quad (5.14)$$

Demonstração: Tome K tal que $2^K \leq L(p) < 2^{K+1}$ e considere a família de medidas $(\hat{\mathbb{P}}_t)_{t \in [0,1]}$ que é a interpolação linear entre $\mathbb{P}_{1/2}$ e \mathbb{P}_p . Escreva $A = \{0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}\}$. Por argumentos de colagem (como o argumento utilizado para o cálculo da soma final do Teorema 5.1.1), temos que para qualquer $v \in S_{2^{K-4}, 2^{K-3}}$,

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbb{P}}_t(v \text{ é pivotal para } A) \\ & \geq C_1 \hat{\mathbb{P}}_t(0 \rightsquigarrow \partial S_{2^{K-5}}) \hat{\mathbb{P}}_t(S_{2^{K-2}} \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \hat{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{K-5}}(v)) \\ & \geq C_2 \hat{\mathbb{P}}_t(0 \rightsquigarrow \partial S_{2^K}) \hat{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{K-5}}(v)). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log [\hat{\mathbb{P}}_t(A)] & \geq \sum_{v \in S_{2^{K-4}, 2^{K-3}}} (p - 1/2) \hat{\mathbb{P}}_t(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{2^{K-5}}(v)) \\ & \geq C_3 (p - 1/2) L(p)^2 \hat{\mathbb{P}}_t(0 \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{L(p)}), \end{aligned}$$

visto que cada sítio $v \in S_{2^{K-4}, 2^{K-3}}$ produz uma contribuição de ordem $\hat{\mathbb{P}}_t(0 \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{L(p)})$. Na próxima seção (Proposição 6.14), vamos mostrar que $(p - 1/2) L(p)^2 \hat{\mathbb{P}}_t(0 \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{L(p)}) \asymp 1$, o que nos permite concluir o resultado (isso não causa nenhum problema, visto que não vamos utilizar esse resultado mais a frente). ■

Capítulo 6

Consequências para as funções características

6.1 Diferentes comprimentos característicos

Um *comprimento característico* é uma quantidade cuja intenção é medir uma escala “típica” do sistema. Esses comprimentos são utilizados para prever o comportamento do sistema e é esperado que, apesar de existirem diferentes definições naturais para tais quantidades, produzam tamanhos de mesma ordem de magnitude. Para a percolação em duas dimensões, as três definições mais comuns são:

Escala de tamanho finito

Os comprimentos L_ϵ definidos no início do trabalho, introduzidos em [6], são conhecidos como “comprimentos característicos de escala de tamanho finito”:

$$L_\epsilon(p) = \begin{cases} \min\{n : \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(R_n) \leq \epsilon)\}, & \text{quando } p < 1/2, \\ \min\{n : \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H^*(R_n) \leq \epsilon)\}, & \text{quando } p > 1/2. \end{cases} \quad (6.1)$$

Raio médio de um aglomerado finito

O raio médio (quadrático) de um aglomerado finito mede o tamanho “típico” de um aglomerado finito, e pode ser definido como

$$\xi(p) = \left[\frac{1}{\mathbb{E}[|C(0)|; |C(0)| < \infty]} \sum_x \|x\|_\infty^2 \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \right]^{1/2} \quad (6.2)$$

Probabilidades de conexão

Uma possível terceira definição seria via decaimento das correlações. Tome primeiramente $p < 1/2$. Para dois sítios x, y consideramos a probabilidade de conexão entre eles

$$\tau_{x,y} := \mathbb{P}_p(x \rightsquigarrow y), \quad (6.3)$$

e consideramos o máximo das probabilidades de conexão entre sítios a uma distância n

$$\tau_n := \sup_{x \in \partial S_n} \tau_{0,x}, \quad (6.4)$$

que está bem definido por invariância por translação. Gostaríamos de estudar o limite quando $n \rightarrow \infty$ dessa quantidade. Para isso, precisamos do seguinte resultado referente à convergência de sequências sub-aditivas:

Lema 6.1.1. Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência tal que, para todo $m, n \geq 1$,

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n.$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} \quad (6.5)$$

Demonstração: Sejam $k, n \geq 1$. Existem $q, r \in \mathbb{N}_\neq$, com $r \leq k$, tais que $n = kq + r$. Logo, pela definição de sequência sub-aditiva, temos

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{kq+r}}{n} \leq \frac{qa_k + a_r}{n} \leq \frac{qa_k}{qk} + \frac{m_k}{n},$$

com $m_k = \max\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Dessa forma, como isso vale para todo k , obtemos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{k \geq 1} \frac{a_k}{k}$. Como, pela definição de ínfimo, temos a desigualdade inversa, vale a igualdade 6.5, como queríamos. ■

Para estudar o limite quando $n \rightarrow \infty$ de τ_n , note que para quaisquer $n, m \geq 0$, temos

$$\tau_{n+m} \geq \tau_n \tau_m,$$

que garante que a sequência $(-\log \tau_n)_{n \geq 0}$ é sub-aditiva. Pelo Lema 6.1.1, a sequência $(-\log \tau_n/n)_{n \geq 0}$ converge, de forma que existe uma constante $\tilde{\xi}(p) > 0$ (possivelmente ∞) tal que

$$-\frac{\log \tau_n}{n} \rightarrow \frac{1}{\tilde{\xi}(p)} = \inf_m \left(-\frac{\log \tau_m}{m} \right) \quad (6.6)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Com esse limite e pelas definições, note a seguinte cota a-priori:

$$\mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x) \leq e^{-\|x\|_\infty / \tilde{\xi}(p)}. \quad (6.7)$$

Para $p > 1/2$, utilizamos a simetria entre p e $1-p$ e consideramos os eventos para braços de cor branca: consideramos

$$\tau_n^* := \sup_{x \in \partial S_n} \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow^* x), \quad (6.8)$$

e definimos $\tilde{\xi}(p)$ analogamente. Vale uma cota a-priori idêntica:

$$\mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow^* x) \leq e^{-\|x\|_\infty / \tilde{\xi}(p)}. \quad (6.9)$$

Perceba que esse comprimento herda a propriedade de simetria:

$$\tilde{\xi}(p) = \tilde{\xi}(1-p).$$

Relações entre os diferentes comprimentos

Como dito anteriormente, esperamos que esses comprimentos característicos tenham a mesma ordem de magnitude, o que de fato ocorre: como consequência dos lemas de separação e dos teoremas anteriormente demonstrados, vamos mostrar que, para $\epsilon, \epsilon' \in (0, 1/2)$, $L_\epsilon \asymp L_{\epsilon'}$; posteriormente que $L \asymp \xi$ e finalmente, que $L \asymp \tilde{\xi}$.

6.2 Principais expoentes críticos

Vamos estudar três funções habitualmente usadas para descrever o comportamento da percolação.

- $\xi(p) = \left[\frac{1}{\mathbb{E}[|C(0)|; |C(0)| < \infty]} \sum_x \|x\|_\infty^2 \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \right]^{1/2}$ média quadrática de um aglomerado finito;
- $\theta(p) := \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \infty)$. Essa função pode ser vista como a densidade do aglomerado infinito C_∞ no sentido que por ergodicidade temos que

$$\frac{1}{|S_N|} |S_N \cap C_\infty| \xrightarrow{q.c.} \theta(p) \quad (6.10)$$

quando $N \rightarrow \infty$.

- $\chi(p) = \mathbb{E}_p[|C(0)|; |C(0)| < \infty]$ o tamanho médio de um aglomerado finito.

Teorema 6.2.1 (Expoentes críticos). As seguintes estimativas para leis de potência valem:

- i. Quando $p \rightarrow 1/2$,

$$\xi(p) \asymp \tilde{\xi}(p) \asymp L(p) \approx |p - 1/2|^{-4/3}. \quad (6.11)$$

- ii. Quando $p \rightarrow 1/2^+$,

$$\theta(p) \approx |p - 1/2|^{5/36}. \quad (6.12)$$

- iii. Quando $p \rightarrow 1/2$,

$$\chi(p) \approx |p - 1/2|^{-43/18}. \quad (6.13)$$

Os expoentes correspondentes são geralmente denotados por, respectivamente, ν , β e γ . Esse Teorema vai ser provado ao longo das próximas subseções como consequência dos expoentes (Teorema 4.1.3) para eventos de braço para percolação crítica com as estimativas estabelecidas para percolação quase crítica.

6.3 Expoente crítico para L

Derivamos o expoente crítico para $L_\epsilon(p)$ ao contar os sítios pivotais para o evento de cruzamento horizontal de uma caixa de tamanho $L_\epsilon(p)$, que coincidem com os sítios pivotais para o evento $A_{4, \sigma_4}^{\bar{I}}$, com $\sigma_4 = PBPB$ e \bar{I} sendo os lados da caixa.

Proposição 6.3.1 ([10, 17]). Dado $\epsilon \in (0, 1/2)$ fixo, temos

$$|p - 1/2| (L_\epsilon(p))^2 \pi_4(L_\epsilon(p)) \asymp 1. \quad (6.14)$$

Observação 6.3.2. O expoente crítico para L_ϵ segue da Proposição e do expoente do evento de 4 braços, $\alpha_4 = 5/4$, enunciado no Teorema 4.1.3: quando $p \rightarrow 1/2$,

$$\begin{aligned} 1 &\approx |p - 1/2| (L_\epsilon(p))^2 (L_\epsilon(p))^{-5/4} = |p - 1/2| (L_\epsilon(p))^{3/4} \\ &\implies L_\epsilon(p) \approx |p - 1/2|^{-4/3} \end{aligned}$$

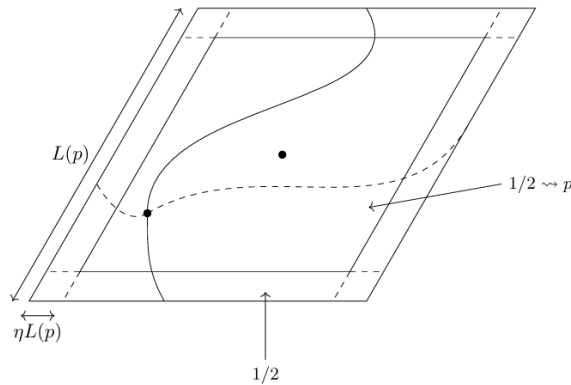


Figura 6.1: Se nos restringirmos aos sítios em $[\eta L(p), \eta(1 - L(p))]^2$, esses sítios produzem contribuições de mesma ordem de magnitude

Demonstração: Por simetria, podemos assumir que $p > 1/2$. A ideia para a prova é utilizar a fórmula de Russo para estimar a variação na probabilidade do evento $\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)$ entre $1/2$ e p , que faz o evento $\tilde{A}_{4, \sigma_4}^{\cdot/\bar{I}}$ aparecer. Pela definição de $L_\epsilon(p)$, a variação na probabilidade de eventos de cruzamento é de ordem 1, e os sítios “não tão próximos da borda” produzem contribuições de mesma ordem. O resultado segue ao mostrarmos que, juntando todos os sítios, eles produzem uma variação não negligenciável para as probabilidades de cruzamento. Para isso, vamos precisar do seguinte Lema:

Lema 6.3.3. Para qualquer $\delta > 0$, $\exists \eta_0 > 0$ tal que para todo p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , temos: para qualquer paralelogramo $[0, n] \times [0, m]$ de lados $n, m \leq L_\epsilon(p)$ cuja razão é menor que 2 (ou seja, $1/2 \leq n/m \leq 2$), para qualquer $\eta \leq \eta_0$,

$$\left| \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, m])) - \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, (1 + \eta)n] \times [0, m])) \right| \leq \delta$$

Demonstração: Por inclusão de eventos, é claro que

$$\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, m])) \geq \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, (1 + \eta)n] \times [0, m])).$$

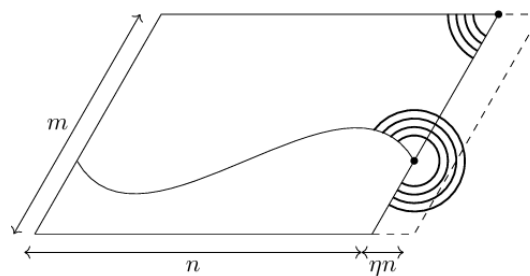


Figura 6.2: É possível estender cruzamentos em $[0, n] \times [0, m]$ para cruzamentos no paralelogramo maior $[0, (1 + \eta)n] \times [0, m]$ utilizando anéis concêntricos ao redor de Z_+ e da extremidade do caminho no primeiro paralelogramo

Para a outra cota, vamos utilizar a mesma ideia usada para a prova do Lema 3.4.2: utilizamos anéis concêntricos para “proteger” o topo direito de $[0, n] \times [0, m]$, Z_+ , assim como o sítio na borda direita da caixa no qual o cruzamento horizontal chega.

Considere as partes de anéis centrados em Z_+ de raio 2^l tal que $\eta^{3/4}n \leq 2^l < \eta^{1/2}n$, de forma que esses anéis estejam contidos na caixa $[0, n] \times [0, m]$. Escolhemos η_0 de forma que a probabilidade de existir pelo menos um cruzamento branco em um dos anéis seja de pelo menos $1 - \delta/100$, de forma que a probabilidade de existir um cruzamento horizontal preto chegando a uma distância menor que $\eta^{3/4}n$ de Z_+ seja menor que $\delta/100$. Note que RSW garante que a cota inferior da probabilidade de existir cruzamento branco em um dos anéis dependa somente da quantidade de anéis, de forma que sempre possamos escolher um η_0 que satisfaça essa propriedade.

Assumindo que esse evento ocorre, condicionamos no cruzamento horizontal preto mais baixo, que denotamos por c e cuja interseção com a borda direita da caixa $[0, n] \times [0, m]$ denotamos por z , e aplicamos RSW em anéis de raio 2^l , com $\eta n \leq 2^l < \eta^{3/4}n$, centrados em z , como mostra a Figura 6.2. Note que um cruzamento preto em algum desses anéis necessariamente estende o cruzamento c para a borda direita da caixa de lado $(1 + \eta)n$. Além disso, a existência dessa extensão é independente de c , pois não depende dos sítios abaixo de c . Com isso,

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, (1 + \eta)n] \times [0, m])) \\ & \geq \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, m])) \hat{\mathbb{P}}(\text{existe cruzamento preto em algum dos anéis da forma } 2^l) \end{aligned}$$

Escolhendo η_0 pequeno o suficiente, a probabilidade de existir alguma dessas extensões, é de pelo menos $1 - \delta/100$, de forma que

$$\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, (1 + \eta)n] \times [0, m])) \geq (1 - \delta/100) \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, m]))$$

e daí segue o resultado. ■

Voltamos para a demonstração da Proposição. Tome η_0 associado a $\delta = \epsilon/100$ pelo Lema 6.3.3, escreva $\eta = \eta_0/4$ e defina a medida $\hat{\mathbb{P}}^{(\eta)}$ com parâmetros

$$\hat{p}_v^{(\eta)} = \begin{cases} p, & \text{se } v \in [\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)]^2, \\ 1/2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que $\hat{\mathbb{P}}^{(\eta)}(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2))$ e $\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2))$ estão muito próximas ao mostrar que estão próximas de $\hat{\mathbb{P}}^{(\eta)}(\mathcal{C}_H([\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)]^2)) = \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)]^2))$. De fato, para qualquer medida $\tilde{\mathbb{P}} \in \{\hat{\mathbb{P}}^{(\eta)}, \mathbb{P}_p\}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)) & \leq \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) \\ & = 1 - \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_V^*([\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) \\ & \leq 1 - \left(\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_V^*([\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)]^2)) - 2\delta \right) \\ & = \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([\eta L_\epsilon(p), (1 - \eta)L_\epsilon(p)]^2)) + 2\delta, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade vale por inclusão de eventos e a segunda segue do Lema 6.3.3, que utilizamos duas vezes, para reduzir o tamanho da caixa dos lados esquerdo e direito. Por

outro lado, também vale

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)) &\geq \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) - 2\delta \\ &= 1 - \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_V^*([\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) - 2\delta \\ &\geq 1 - \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_V^*([\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)]^2)) - 2\delta \\ &= \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_H([\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)]^2)) - 2\delta. \end{aligned}$$

Em particular, obtemos pela própria definição de $L_\epsilon(p)$ que

$$\hat{\mathbb{P}}^{(\eta)}(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)) \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)) - 4\delta \geq (1/2 + \epsilon) - 4\delta,$$

ou seja, os sítios em $[\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)]$ produzem uma contribuição não negligenciável para a variação da probabilidade dos eventos de cruzamento.

Aplicamos agora a fórmula de Russo para as medidas $(\hat{\mathbb{P}}_t^{(\eta)})_{t \in [0,1]}$ cujos parâmetros são uma interpolação entre p e $1/2$, $\hat{p}_v^{(\eta)}(t) = t \cdot \hat{p}_v^{(\eta)} + (1-t) \cdot 1/2$, e os eventos $\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)$, e obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sum_{v \in [\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)]^2} (p-1/2) \hat{\mathbb{P}}_t^{(\eta)}(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4}^{\cdot I} \partial[0, L_\epsilon(p)]^2) dt \\ &= \hat{\mathbb{P}}^{(\eta)}(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)]^2)) - \mathbb{P}_{1/2}([0, L_\epsilon(p)]^2) \geq \epsilon/2, \end{aligned}$$

portanto essa quantidade é de ordem 1. Finalmente, uma vez que η está fixado, utilizamos os lemas de separação para concluir que, uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , e $v \in [\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)]^2$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4}^{\cdot I} \partial[0, L_\epsilon(p)]^2) &\asymp \hat{\mathbb{P}}(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{\frac{\eta}{2} L_\epsilon(p)}(v)) \\ &\asymp \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{\frac{\eta}{2} L_\epsilon(p)}) \\ &\asymp \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow_{4, \sigma_4} \partial S_{L_\epsilon(p)}). \end{aligned}$$

O resultado segue ao notar que na integral anterior,

$$\sum_{v \in [\eta L_\epsilon(p), (1-\eta)L_\epsilon(p)]^2} (p-1/2) \hat{\mathbb{P}}_t^{(\eta)}(v \rightsquigarrow_{4, \sigma_4}^{\cdot I} \partial[0, L_\epsilon(p)]^2) \asymp (L_\epsilon(p))^2 \pi_4(L_\epsilon(p)).$$

■

Os resultados que vimos até então valem para qualquer valor $\epsilon \in (0, 1/2)$ fixo, em particular a Proposição 6.14. Combinamos esse resultado com o expoente de 4 braços para encontrar que o comportamento assintótico de L_ϵ quando $\epsilon \rightarrow 0$ não depende do valor de ϵ .

Corolário 6.3.4. Para quaisquer $\epsilon, \epsilon' \in (0, 1/2)$,

$$L_\epsilon(p) \asymp L_{\epsilon'}(p). \quad (6.15)$$

Demonstração: Assumimos que $\epsilon \leq \epsilon'$, de forma que $L_\epsilon(p) \geq L_{\epsilon'}(p)$. Precisamos mostrar que para alguma constante $C > 0$, $L_\epsilon(p) \leq CL_{\epsilon'}(p)$. Pela Proposição anterior, sabemos que

$$|p-1/2|(L_\epsilon(p))^2 \pi_4(L_\epsilon(p)) \asymp 1 \asymp |p-1/2|(L_{\epsilon'}(p))^2 \pi_4(L_{\epsilon'}(p)),$$

de forma que para alguma constante C_1 ,

$$\frac{(L_\epsilon(p))^2 \pi_4(L_\epsilon(p))}{(L_{\epsilon'}(p))^2 \pi_4(L_{\epsilon'}(p))} \leq C_1.$$

A quasi-multiplicatividade nos dá que $\pi_4(L_\epsilon(p)) \leq C' \pi_4(L_{\epsilon'}(p)) \pi_4(L_{\epsilon'}(p), L_\epsilon(p))$, para alguma constante C' , de forma que

$$\left(\frac{(L_\epsilon(p))}{(L_{\epsilon'}(p))} \right)^2 \leq C_1 \frac{\pi_4(L_{\epsilon'}(p))}{\pi_4(L_\epsilon(p))} \leq C_2 \pi_4(L_{\epsilon'}(p), L_\epsilon(p))^{-1}.$$

A desigualdade de Reimer juntamente com o expoente de 5 braços e a cota a-priori para o evento de 1 braço nos dão que

$$\pi_4(L_{\epsilon'}(p), L_\epsilon(p)) \geq \pi_1(L_{\epsilon'}(p), L_\epsilon(p))^{-1} \pi_5(L_{\epsilon'}(p), L_\epsilon(p)) \geq C_3 \left(\frac{L_{\epsilon'}(p)}{L_\epsilon(p)} \right)^{2-\alpha'}.$$

Juntando as duas desigualdades anteriores, obtemos que

$$L_\epsilon(p) \leq C_4^{1/\alpha'} L_{\epsilon'}(p),$$

como queríamos. ■

6.4 Decaimento exponencial uniforme e expoente crítico para θ

Gostaríamos de mostrar que $L(p)$ é de fato a escala correta na qual a percolação quase crítica pode ser tratada como a percolação crítica. Até agora, nossos argumentos para os lemas de separação, eventos de braços perto da criticalidade e o expoente crítico para L foram baseados em RSW em escala $n \leq L(p)$, onde a percolação crítica e quase crítica puderam ser tratadas simultaneamente. Por outro lado pela definição de $L(p)$, quando $n > L(p)$ a figura começa a mudar para a de uma percolação super/sub-crítica.

Para isso, vamos mostrar uma propriedade de decaimento exponencial uniforme em p . Essa propriedade será utilizada para ligar L aos outros comprimentos característicos: vamos encontrar as seguintes expressões para θ, ξ e η em função de L :

1. $\theta(p) \asymp \pi_1(L(p))$,
2. $\xi(p) \asymp L(p)^2 \pi_1^2(L(p))$,
3. $\chi(p) \asymp L(p)$.

Os expoentes críticos para esses comprimentos saem diretamente dessas expressões, visto que já sabemos os expoentes para L e para os eventos de braço.

Decaimento exponencial uniforme

O Lema a seguir mostra que as correlações decaem exponencialmente com respeito a $L(p)$. Isso nos permite controlar a velocidade desse decaimento conforme p varia.

Lema 6.4.1. Para qualquer $\epsilon \in (0, 1/2)$, existem constantes $C_i = C_i(\epsilon) > 0$ ($i = 1, 2$) tais que para todo $p < 1/2$, todo n ,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, n])) \leq C_1 e^{-C_2 n / L_\epsilon(p)}. \quad (6.16)$$

Demonstração: Primeiramente, demonstramos a seguinte relação: para $C' = 10^2$,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2n] \times [0, 4n])) \leq C' [\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, 2n]))]^2. \quad (6.17)$$

De fato, é suficiente mostrar que um cruzamento horizontal em $[0, 2n] \times [0, 4n]$ induz um cruzamento horizontal em dois sub-paralelogramos de tamanho $[0, n] \times [0, 2n]$. Definimos os 4 sub-paralelogramos horizontais $[0, 2n] \times [in, (i+1)n]$, ($i = 0, \dots, 3$) e 6 sub-paralelogramos verticais $[in, (i+1)n] \times [jn, (j+2)n]$, ($i = 0, 1, j = 0, 1, 2$), como na Figura 6.3.

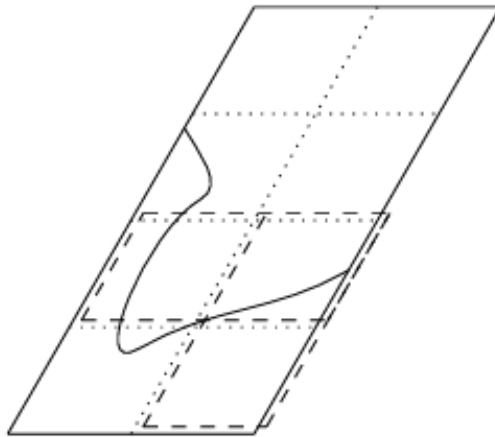


Figura 6.3: Pelo menos dois dos paralelogramos são cruzados do jeito “fácil”

Assumimos a ocorrência de um cruzamento horizontal (que denotamos por c) no paralelogramo maior que se inicia à esquerda de algum dos sub-paralelogramos verticais. Algum dos dois cenários ocorre:

- c cruza a metade do paralelogramo maior, $\{n\} \times [0, 4n]$, antes de cruzar o sub-paralelogramo vertical do jeito difícil (induzindo um cruzamento do jeito fácil em um dos paralelogramos verticais),
- c cruza um dos paralelogramos verticais do jeito difícil antes de cruzar a metade do paralelogramo maior (induzindo um cruzamento do jeito fácil em um dos paralelogramos horizontais).

Dessa forma, estamos apenas considerando c (da esquerda para a direita) antes da primeira interseção com $\{n\} \times [0, 4n]$. Considerando c a partir a última interseção com $\{n\} \times [0, 4n]$, reaplicamos o argumento anterior e, com isso, obtemos os dois cruzamentos em sub-paralelogramos, como queríamos. Esses cruzamentos são disjuntos por construção, então a afirmação segue como consequência da desigualdade de BK: denotamos cada um dos 10 sub-paralelogramos por R_i e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2n] \times [0, 4n])) &\leq \mathbb{P}_p(2 \text{ sub-paralelogramos são cruzados do jeito fácil}) \\
&\leq \sum_{i,j \in \{1, \dots, 10\}} \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H(R_i) \circ \mathcal{C}_H(R_j)) \\
&\leq \sum_{i,j \in \{1, \dots, 10\}} [\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, 2n]))]^2 \\
&\leq C' [\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, 2n]))]^2,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Lembramos que por definição, $\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)] \times [0, L_\epsilon(p)])) \leq \epsilon_0$ se $\epsilon \leq \epsilon_0$. Portanto, a teoria de RSW implica que para todo $\tilde{\epsilon} > 0$, podemos tomar ϵ_0 pequeno o suficiente para obter, dependendo de ϵ e independentemente de p que existe $\tilde{\epsilon}$ tal que

$$\tilde{\epsilon} \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, L_\epsilon(p)] \times [0, 2L_\epsilon(p)])).$$

Iterando a afirmação e tomando $\tilde{\epsilon}$ como acima, temos que

$$\begin{aligned}
C' \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2^k L_\epsilon(p)] \times [0, 2^{k+1} L_\epsilon(p)])) &\leq C' (C' \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2^{k-1} L_\epsilon(p)] \times [0, 2^k L_\epsilon(p)]))^2) \\
&\leq C'^2 (C' \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2^{k-2} L_\epsilon(p)] \times [0, 2^{k-1} L_\epsilon(p)]))^2) \\
&\leq \dots \leq (C' \tilde{\epsilon})^{2^k}.
\end{aligned}$$

Em particular, escolhemos $\tilde{\epsilon} = 1/(e^2 C')$. Para cada inteiro $n \geq L_\epsilon(p)$, tomamos $k = k(n)$ inteiro tal que $2^k \leq n/L_\epsilon(p) < 2^{k+1}$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, n])) &\leq \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, 2^k L_\epsilon(p)] \times [0, 2^{k+1} L_\epsilon(p)])) \\
&\leq e^{-2^{k+1}} \\
&\leq e^{1-n/L_\epsilon(p)}.
\end{aligned}$$

Note que essa desigualdade vale inclusive para $n \leq L_\epsilon(p)$. Dessa maneira, provamos essa propriedade do decaimento exponencial para qualquer ϵ menor que algum ϵ_0 fixo (dado por RSW). O resultado para todo $\epsilon \in (0, 1/2)$ segue do corolário 6.3.4. ■

Note que para a demonstração do Lema, não utilizamos nenhum dos resultados obtidos até então, exceto pela equivalência dos comprimentos para diferentes valores de ϵ . Dessa forma, essa propriedade do decaimento exponencial uniforme poderia ser demonstrada anteriormente, mas apenas para valores de ϵ pequenos o suficiente.

Observação 6.4.2. Será útil obter um resultado similar para cruzamentos em paralelogramos alongados “do jeito fácil”: para qualquer $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, kn])) \leq C_1^{(k)} e^{-C_2^{(k)} n/L_\epsilon(p)} \quad (6.18)$$

para constantes $C_i^{(k)}$ (dependendo de k e de ϵ). Esse resultado segue do Lema anterior, combinado com o fato de que no Teorema 1.3.5 podemos tomar f_k satisfazendo $f_k(1 - \epsilon) = 1 - C_k \epsilon^{a_k} + o(\epsilon^{a_k})$ para C_k, a_k .

Consequência para θ

Quando $p > 1/2$, mostramos agora que a uma distância $L(p)$ da origem, já não estamos “tão longe do infinito” no sentido que, uma vez que alcançamos essa distância, com probabilidade positiva (limitada inferiormente longe de 0 uniformemente em p) chegamos ao infinito.

Corolário 6.4.3. Temos

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \infty) \asymp \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \quad (6.19)$$

uniformemente em $p > 1/2$.

Demonstração: Sabendo que $\theta(p) \leq \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)})$, é suficiente considerar paralelogramos sobrepostos, como mostra a Figura 6.4, com cada um com o dobro do tamanho do anterior: o primeiro sendo $[0, L(p)] \times [0, 2L(p)]$, o segundo sendo $[0, 4L(p)] \times [0, 2L(p)]$, o terceiro sendo $[0, 4L(p)] \times [0, 8L(p)]$ e assim por diante. A teoria de RSW nos garante que a probabilidade de existir um cruzamento horizontal em $[0, L(p)] \times [0, \frac{1}{8}L(p)]$ é maior que alguma constante. Dessa forma, a probabilidade da existência de 4 cruzamentos como mostra a Figura 6.4 é pelo menos δ^4 para algum $\delta > 0$.

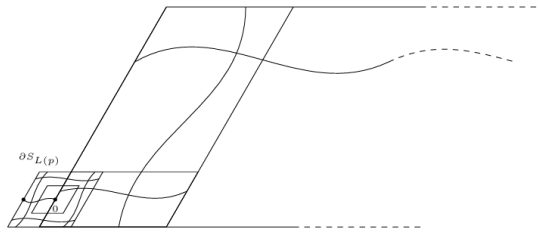


Figura 6.4: Consideramos paralelogramos sobrepostos, com o tamanho dobrando a cada passo. A construção em $S_{L(p)}$ ocorre com probabilidade longe de 0 por RSW

Voltando a atenção aos paralelogramos maiores, a observação 6.4.2 nos dá que a probabilidade de existir um cruzamento branco do “jeito fácil” no k -ésimo paralelogramo é cotada superiormente por $C_1 e^{-C_2 2^k}$, de forma que, ao utilizar FKG, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \infty) &\geq \delta^4 \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_V([0, 2^k L(p)] \times [0, 2^{k+1} L(p)])) \\ &\geq \delta^4 \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \prod_{k=0}^{\infty} (1 - C_1 e^{-C_2 2^k}) \\ &\geq C' \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}), \end{aligned}$$

visto que $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - C_1 e^{-C_2 2^k}) > 0$. ■

Combinamos o que obtemos (6.19) com o Teorema 5.1.1 para obter que, para $p > 1/2$,

$$\theta(p) \asymp \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \asymp \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) = \pi_1(L(p)). \quad (6.20)$$

Com o expoente de 1 braço ($\alpha_1 = 5/48$) enunciado no Teorema 4.1.3, e com o expoente crítico encontrado para $L(p)$ na observação 6.3.2, derivamos o expoente crítico para θ : quando $p \rightarrow 1/2^+$

$$\theta(p) \approx (L(p))^{-5/48} \approx ((p - 1/2)^{-4/3})^{-5/48} = (p - 1/2)^{5/36},$$

como enunciado no item ii. do Teorema 6.2.1.

Equivalência entre L e $\tilde{\xi}$

Para essa subseção, assumimos $p < 1/2$ para fixar ideias. Uma construção como a utilizada na prova de RSW (Figura 1.4) nos dá que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, kL(p)] \times [0, L(p)])) \geq \delta_2^{k-1} \delta_1^{k-2} = C_1 e^{-C_2 k L(p)/L(p)}, \quad (6.21)$$

de forma que $L(p)$ mede exatamente a velocidade do decaimento. Com isso, comparamos os dois comprimentos:

Corolário 6.4.4. Temos que

$$\tilde{\xi} \asymp L(p). \quad (6.22)$$

Demonstração: Considere $x \in \partial S_n$ e assumamos, por exemplo, que x está na parte direita de ∂S_n : nesse caso, $0 \rightsquigarrow x$ implica que $\mathcal{C}_H([0, n] \times [n, n])$ acontece. de forma que

$$\begin{aligned} \tau_{0,x} = \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x) &\leq \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, 2n])) \\ &\leq C_1^{(2)} e^{-C_2^{(2)} n/L(p)} \end{aligned}$$

Por definição de τ_n , como a desigualdade acima vale para todo $x \in \partial S_n$, segue que $\tau_n \leq C_1^{(2)} e^{-C_2^{(2)} n/L(p)}$, que nos dá que $\tau_{kL(p)} \leq C_1^{(2)} e^{-C_2^{(2)} k}$ e

$$-\frac{\log(\tau_{kL(p)})}{kL(p)} \geq -\frac{\log(C_1^{(2)}) - C_2^{(2)} k}{kL(p)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{C_2^{(2)}}{L(p)}.$$

Portanto, segue que $\frac{1}{\tilde{\xi}(p)} = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log(\tau_{kL(p)})}{kL(p)} \geq \frac{C_2^{(2)}}{L(p)}$ e obtemos a primeira desigualdade: $\tilde{\xi}(p) \leq CL(p)$.

Por outro lado, a equação 6.21 nos dá que $\mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, kL(p)]^2)) \geq \tilde{C}_1 e^{-\tilde{C}_2 k}$ para $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$. Além disso, a invariância por translação e a definição de $\tau_{kL(p)}$ nos dão

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, kL(p)]^2)) &= \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([-\frac{k}{2}L(p), \frac{k}{2}L(p)]^2)) \\ &\leq \sum_{x \in S_{\frac{k}{2}L(p)}} \mathbb{P}_p(x \rightsquigarrow \partial S_{kL(p)}(x)) \\ &= \sum_{x \in S_{\frac{k}{2}L(p)}} \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{kL(p)}) \\ &\leq (kL(p) + 1)^2 \tau_{kL(p)}, \end{aligned}$$

visto que um cruzamento horizontal em $[-\frac{k}{2}L(p), \frac{k}{2}L(p)]^2$ implica que algum dos sítios nessa caixa tenha um caminho que percorra a distância de $kL(p)$. Consequentemente,

$$\tau_{kL(p)} \geq \frac{1}{(kL(p) + 1)^2} \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, kL(p)]^2)) \geq \frac{1}{(kL(p))^2} \tilde{C}_1 e^{-\tilde{C}_2 k}.$$

Daí,

$$-\frac{\log(\tau_{kL(p)})}{kL(p)} \leq -\frac{\log(\tilde{C}_1) - 2 \log(kL(p)) - \tilde{C}_2 k}{kL(p)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{C}_2}{L(p)},$$

implicando a outra desigualdade: $\tilde{\xi}(p) \geq C'L(p)$. ■

6.5 Expoentes críticos para χ, ξ

Algumas estimativas

Enunciamos aqui algumas estimativas que vamos utilizar para encontrar os expoentes críticos restantes. As mesmas foram derivadas primeiramente para percolação crítica (veja [12, 8]), mas os mesmos argumentos são suficientes para o caso de percolação quase crítica, quando $n \leq L(p)$.

Lema 6.5.1. Uniformemente em p , $\hat{\mathbb{P}}$ entre \mathbb{P}_p e \mathbb{P}_{1-p} , e $n \leq L(p)$, temos:

1. $\hat{\mathbb{E}}[|x \in S_n : x \rightsquigarrow \partial S_n|] \asymp n^2 \pi_1(n)$
2. Para qualquer $t \geq 0$,

$$\sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x) \asymp \sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow_{S_n} x) \asymp n^{t+2} \pi_1^2(n)$$

Em particular, o item 2 do Lema 6.5.1 com $t = 0$ implica que

$$\hat{\mathbb{E}}[|x \in S_n : x \rightsquigarrow 0|] \asymp \hat{\mathbb{E}}[|x \in S_n : x \rightsquigarrow_{S_n} 0|] \asymp n^2 \pi_1^2(n).$$

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que na Proposição 3.3.2, podemos tomar $\alpha_1 = 1/2$ para $j = 1$, ou seja, para quaisquer $n < N$ inteiros,

$$\pi_1(n, N) \geq C(n/N)^{1/2}. \quad (6.23)$$

De fato, considere a divisão de S_N em sub-caixas, cópias de S_n , e destaquemos a faixa central de sub-caixas, que denotamos por $R_n^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, N/n\}$. Note que um cruzamento horizontal de S_N induz dois cruzamentos disjuntos (um para a esquerda e outro para a direita) de alguma dessas cópias de S_n para ∂S_N . A desigualdade de BK nos dá que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_H(S_N)) &\leq \mathbb{P}_{1/2}(\cup_{i=1}^{N/n} \{R_n^{(i)} \rightsquigarrow \partial S_N\} \circ \{R_n^{(i)} \rightsquigarrow \partial S_N\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N/n} \mathbb{P}_{1/2}(\{R_n^{(i)} \rightsquigarrow \partial S_N\} \circ \{R_n^{(i)} \rightsquigarrow \partial S_N\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N/n} \mathbb{P}_{1/2}(\{R_n^{(i)} \rightsquigarrow \partial S_N\})^2 \\ &= \frac{N}{n} \pi_1(n, N)^2. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{C}_H(S_N)) = 1/2$, obtemos $\pi_1(n, N) \geq C(n/N)^{1/2}$.

Prova do item 1. Usaremos que

$$\hat{\mathbb{E}}[|x \in S_n : x \rightsquigarrow \partial S_n|] = \sum_{x \in S_n} \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_n). \quad (6.24)$$

Para a cota inferior, para qualquer $x \in S_n$, consideramos a medida $\hat{\mathbb{P}}^x$ que é a translação de $\hat{\mathbb{P}}$ por x . Temos que

$$\hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_n) \geq \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_{2n}(x)) \geq \hat{\mathbb{P}}^x(0 \rightsquigarrow \partial S_{2n}) \geq C_1 \hat{\mathbb{P}}^x(0 \rightsquigarrow \partial S_n) \geq C_2 \pi_1(n),$$

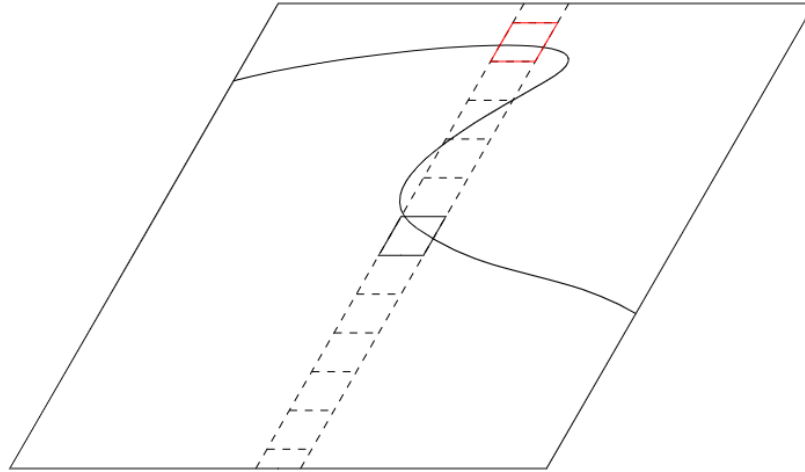


Figura 6.5: Um cruzamento horizontal em S_N induz pelo menos 2 cruzamentos disjuntos em alguma das caixas na faixa central.

onde na penúltima desigualdade utilizamos extensibilidade e na última desigualdade utilizamos o Teorema 5.1.1.

Para a cota superior, vamos somar sobre paralelogramos concêntricos ao redor de 0, e consideramos o evento $\{x \rightsquigarrow \partial S_{d(x, \partial S_n)}(x)\} \supseteq \{x \rightsquigarrow \partial S_n\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S_n} \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_n) &\leq \sum_{x \in S_n} \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_{d(x, \partial S_n)}(x)) \\ &= \sum_{x \in S_n} \hat{\mathbb{P}}^x(0 \rightsquigarrow \partial S_{d(x, \partial S_n)}) \\ &\leq C_1 n \times \sum_{j=1}^n C_1 n \times C_2 \mathbb{P}_{1/2}(0 \rightsquigarrow \partial S_j). \end{aligned}$$

Usamos que temos no máximo $C_1 n$ sítios a uma distância $j \leq n$ de ∂S_n e novamente o Teorema 5.1.1. Limitamos a última soma inferiormente: usando quase-multiplicatividade,

$$C_3 n \sum_{j=1}^n \pi_1(j) = C_3 n \pi_1(n) \sum_{j=1}^n \frac{\pi_1(j)}{\pi_1(n)} \leq C_4 n \pi_1(n) \sum_{j=1}^n \pi_1(j, n)^{-1}.$$

Como $\pi_1(j, n) \geq C(j/n)^{1/2}$, e portanto,

$$\sum_{x \in S_n} \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_n) \leq C_4 n \pi_1(n) \left(n^{1/2} \sum_{j=1}^n j^{-1/2} \right) \leq C_5 n^2 \pi_1(n),$$

como queríamos.

Prova do item 2. Por inclusão de eventos,

$$\sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x) \geq \sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow_{S_n} x),$$

portanto é suficiente mostrar uma cota superior para o lado esquerdo da equação e uma cota inferior para o lado direito.

Começamos pela cota inferior: como $n \leq L(p)$, a probabilidade de existir um circuito preto c em $S_{2n/3,n}$ ao redor de $\partial S_{2n/3}$ (evento que denotamos por E_n) é de pelo menos δ^4 por RSW. Assuma que esse evento ocorre que $0 \rightsquigarrow \partial S_n$. Note que para todo $x \in S_{n/3,2n/3}$, se $x \rightsquigarrow \partial S_{2n}(x)$, em particular esse caminho cruza o circuito preto c , de forma que $x \xrightarrow{S_n} 0$ ocorre. Portanto, para $x \in S_{n/3,2n/3}$, usando a desigualdade de FKG, extensibilidade e o Teorema 5.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(0 \xrightarrow{S_n} x) &\geq \hat{\mathbb{P}}(\{E \text{ ocorre}\} \cap \{0 \rightsquigarrow \partial S_n\} \cap \{x \rightsquigarrow \partial S_{2n}(x)\}) \\ &\geq \delta^4 \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow \partial S_n) \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow \partial S_{2n}(x)) \\ &\geq C_1 \pi_1^2(n). \end{aligned}$$

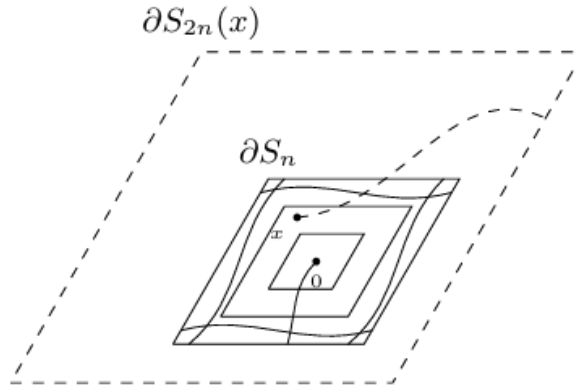


Figura 6.6: Com essa construção, que ocorre com probabilidade longe do 0 por RSW, qualquer sítio x em $S_{n/3,2n/3}$ conectado a uma distância de $2n$ também está conectado a 0 em S_n

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \xrightarrow{S_n} x) &\geq \sum_{x \in S_{n/3,2n/3}} \|x\|_\infty^t C_1 \pi_1^2(n) \\ &\geq \sum_{x \in S_{n/3,2n/3}} (n/3)^t C_1 \pi_1^2(n) \\ &\geq C_2 n^{t+2} \pi_1^2(n). \end{aligned}$$

Voltemos agora para a cota superior: defina $k = k(n)$ tal que $2^k < n \leq 2^{k+1}$ e considere uma divisão logarítmica de S_n . Temos

$$\sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x) \leq C_1 + \sum_{j=3}^{k+1} \sum_{x \in S_{2^{j-1}, 2^j}} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x).$$

Seja $x \in S^{2^{j-1}, 2^j}$. Note que $S_{2^{j-2}}$ e $S_{2^{j-2}}(x)$ são disjuntas, logo por independência de eventos,

$$\hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x) \leq \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow \partial S_{2^{j-2}}) \hat{\mathbb{P}}(x \rightsquigarrow S_{2^{j-2}}(x)).$$

Pelos mesmos argumentos anteriores (Teorema 5.1.1 e extensibilidade), essa quantidade é no máximo $C_2\pi_1^2(2^{j-1})$. Como $|S_{2^{j-1}, 2^j}| \leq C_32^{2j}$ e para tal x , $\|x\|_\infty^t \leq 2^j$, a soma é limitada por

$$\sum_{j=3}^{k+1} C_32^{2j} \cdot (2^j)^t \cdot C_2\pi_1^2(2^{j-1}) \leq C_42^{(2+t)k} \pi_1^2(2^k) \cdot \left[\sum_{j=3}^{k+1} 2^{(2+t)(j-k)} \frac{\pi_1^2(2^{j-1})}{\pi_1^2(2^k)} \right]$$

Novamente utilizamos a quasi-multiplicatividade e a cota a-priori para 1 braço para afirmar que $\frac{\pi_1^2(2^{j-1})}{\pi_1^2(2^k)} \leq C_6\pi_1(2^{j-1}, 2^k)^{-1} \leq C_72^{-(j-k)/2}$, além de que, pela definição de $k = k(n)$, $2^{(2+t)k} \pi_1^2(2^k) \leq C_5n^{2+t} \pi_1^2(n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^{k+1} 2^{(2+t)(j-k)} \frac{\pi_1^2(2^{j-1})}{\pi_1^2(2^k)} &\leq C_7 \sum_{j=3}^{k+1} 2^{(2+t)(j-k)} 2^{-(j-k)} \\ &\leq C_8 \sum_{l=-1}^{k-3} 2^{-(1+t)l} \end{aligned}$$

Como $\sum_{l=-1}^{\infty} 2^{-(1+t)l} < \infty$, esse termo é no máximo uma constante $C_9 > 0$. Dessa maneira, reunindo as equações:

$$\sum_{x \in S_n} \|x\|_\infty^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x) \leq C_{10}n^{2+t} \pi_1^2(n).$$

■

O Lema 6.5.2 a seguir nos permite associar diretamente L com χ e ξ . A ideia principal é mostrar que os sítios muito distantes de 0 têm uma contribuição negligenciável, por causa da propriedade do decaimento exponencial, de forma que os sítios em $S_{L(p)}$ contribuam com uma parcela relevante da soma total.

Lema 6.5.2. Para qualquer $t \geq 0$, temos

$$\sum_x \|x\|_\infty^t \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \asymp L(p)^{t+2} \pi_1^2(L(p)) \quad (6.25)$$

uniformemente em p .

Demonstração: A cota inferior segue do item 2 do Lema 6.5.1 e da seguinte inclusão de eventos: para todo $x \in S_{L(p)}$

$$\{0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty\} \supseteq \{0 \overset{S_{L(p)}}{\rightsquigarrow} x \cap \exists \text{ circuito branco ao redor de } \partial S_{L(p)} \text{ em } S_{L, 2L}\},$$

e esses dois eventos são independentes por dependerem de conjuntos disjuntos. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \sum_x \|x\|_\infty^t \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) &\geq \sum_{x \in S_{L(p)}} \|x\|_\infty^t \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \\ &\geq \mathbb{P}_p(\exists \text{ circuito branco ao redor de } \partial S_{L(p)} \text{ em } S_{L, 2L}) \sum_{x \in S_{L(p)}} \|x\|_\infty^t \mathbb{P}_p(0 \overset{S_{L(p)}}{\rightsquigarrow} x) \\ &\geq \delta^4 \sum_{x \in S_{L(p)}} \|x\|_\infty^t \mathbb{P}_p(0 \overset{S_{L(p)}}{\rightsquigarrow} x), \end{aligned}$$

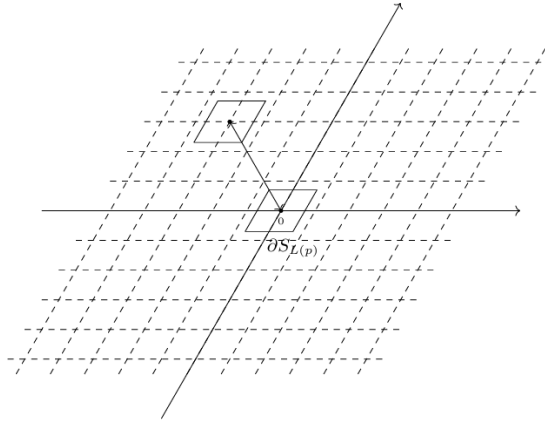


Figura 6.7: Para a cota superior, consideramos translações de $S_{L(p)}$ e somamos suas contribuições individuais.

com a última desigualdade dada por RSW. O item 2 do Lema ?? nos permite afirmar que

$$\sum_{x \in S_{L(p)}} \|x\|_{\infty}^t \mathbb{P}_p(0 \overset{S_{L(p)}}{\rightsquigarrow} x) \geq CL^{t+2} \pi_1^2(L(p)),$$

onde segue a cota inferior.

Para a cota superior, vamos cobrir o plano por translações de $S_{L(p)}$ e usaremos o decaimento exponencial para as cópias diferentes da original. Consideramos a família de paralelogramos $S_{L(p)}(2n_1L(p), 2n_2L(p))$ (que vamos denotar por simplicidade por $S_L^{(n_1, n_2)}$), para quaisquer n_1, n_2 inteiros, como mostra a Figura 6.7. Podemos separar a contribuição de $S_{L(p)}$ ($= S_L^{(0,0)}$) do resto, para obter:

$$\begin{aligned} & \sum_x \|x\|_{\infty}^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \\ & \leq \sum_{x \in S_{L(p)}} \|x\|_{\infty}^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \\ & + \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \sum_{x \in S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}} \|x\|_{\infty}^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \end{aligned}$$

Com o item 2 do Lema 6.5.1, mostramos que o primeiro termo é da ordem de magnitude desejada:

$$\sum_{x \in S_{L(p)}} \|x\|_{\infty}^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \leq CL(p)^{t+2} \pi_1^2(L(p)).$$

Para os termos restantes, vamos mostrar que cada paralelogramo a uma distância $kL(p)$ da origem nos dá uma contribuição de ordem $\pi_1(L(p)) \cdot L^t \cdot \mathbb{E}_p[|x \in S_{L(p)} : x \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}|] \asymp L^{t+2} \pi_1(L(p))$ (pelo item 1) multiplicada por uma quantidade que decai exponencialmente, de forma que a série referente a esses termos convirja. Reagrupando os termos de acordo com

sua distância da origem, temos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{(n_1, n_2) \\ \|(n_1, n_2)\|_{\infty} = k}} \sum_{x \in S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}} \|x\|_{\infty}^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \\
 & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{(n_1, n_2) \\ \|(n_1, n_2)\|_{\infty} = k}} \sum_{x \in S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}} [(2k+1)L(p)]^t \hat{\mathbb{P}}(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \\
 & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{(n_1, n_2) \\ \|(n_1, n_2)\|_{\infty} = k}} C'(kL(p))^t \mathbb{E}_p[|C(0) \cap S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}|; |C(0)| < \infty],
 \end{aligned}$$

onde usamos que a distância máxima de um sítio em $S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}$ para a origem é de $(2k+1)L(p)$. Agora precisamos separar nos casos sub-crítico e super-crítico: em ambos os casos, vamos provar que, para constantes $C_1, C_2 > 0$,

$$\mathbb{E}_p[|C(0) \cap S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}|; |C(0)| < \infty] \leq C_1 L^2 \pi_1^2(L(p)) e^{-C_2 k}. \quad (6.26)$$

Para $p < 1/2$, vamos utilizar a propriedade do decaimento exponencial para paralelogramos longos (observação 6.4.2) e o fato de que para que $\{\partial S_{L(p)} \rightsquigarrow \partial S_{kL(p)}\}$ ocorra, basta que existam uma quantidade finita (dependendo apenas de k) cruzamentos em paralelogramos da forma $[0, n] \times [0, kn]$ do jeito fácil: temos que

$$\mathbb{P}_p(\partial S_{L(p)} \rightsquigarrow \partial S_{kL(p)}) \leq C'' \mathbb{P}_p(\mathcal{C}_H([0, n] \times [0, kn])) \leq C_3 e^{-C_4 k}.$$

Com isso, por independência, quando $\|(n_1, n_2)\|_{\infty} = k$, temos

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_p[|C(0) \cap S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}|; |C(0)| < \infty] \\
 & \leq \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \cdot \mathbb{E}_p[|x \in S_{L(p)}^{(n_1, n_2)} : x \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}|] \\
 & \quad \cdot \mathbb{P}_p(\partial S_{L(p)} \rightsquigarrow \partial S_{(2k-1)L(p)}) \\
 & \leq \pi_1(L(p)) \cdot (C''' L(p)^2 \pi_1(L(p))) \cdot C'_3 e^{-C'_4 k},
 \end{aligned}$$

onde no primeiro termo utilizamos o Teorema 5.1.1 e no segundo termo utilizamos a definição de esperança, que $|S_{L(p)}| = CL(p)^2$ e o Teorema 5.1.1.

Para $p > 1/2$, conseguimos um resultado análogo que pode ser deduzido do caso sub-crítico: denotando por \bar{C} o aglomerado correspondente ao cruzamento em questão, temos que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_p(\partial S_{L(p)} \rightsquigarrow \partial S_{kL(p)}, |\bar{C}| < \infty) \\
 & \leq \mathbb{P}_p(\exists \text{ circuito branco em torno de um sítio de } \partial S_{L(p)} \text{ e um sítio de } \partial S_{kL(p)}) \\
 & \leq C_5 e^{-C_6 k}.
 \end{aligned}$$

Com isso, utilizamos a desigualdade de FKG para um evento não-crescente (a existência do circuito branco) e outros eventos não-decrescentes, além da independência desses eventos para obter

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_p[|C(0) \cap S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}|; |C(0)| < \infty] \\
 & \leq \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}) \cdot \mathbb{E}_p[|x \in S_{L(p)}^{(n_1, n_2)} : x \rightsquigarrow \partial S_{L(p)}^{(n_1, n_2)}|] \\
 & \quad \cdot \mathbb{P}_p(\exists \text{ circuito branco em torno de um sítio de } \partial S_{L(p)} \text{ e um sítio de } \partial S_{kL(p)}) \\
 & \leq \pi_1(L(p)) \cdot (C'''(L(p))^2 \pi_1(L(p))) \cdot C'_5 e^{-C_6 k},
 \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade segue dos mesmos argumentos do caso sub-crítico. Como existem no máximo $C^{(3)}k$ paralelogramos a uma distância k da origem, para alguma constante $C^{(3)}$, o somatório anterior é no máximo

$$\sum_{k=1}^{\infty} C^{(3)}k \cdot C'k^t L(p)^t \cdot C_1 L(p)^2 \pi_1^2(L(p)) e^{-C_2 k} \leq C^{(4)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{t+1} e^{-C_2 k} \right) L(p)^{t+2} \pi_1^2(L(p)).$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} k^{t+1} e^{-C_2 k} < \infty$, daí segue a cota superior desejada. ■

Expoentes críticos para χ e ξ

O Lema 6.5.2 anterior para $t = 0$ nos diz o seguinte:

Proposição 6.5.3. Temos que

$$\chi(p) = \mathbb{E}_p[|C(0)|; |C(0)| < \infty] \asymp L(p)^2 \pi_1^2(L(p)) \quad (6.27)$$

Em outras palavras, o tamanho médio de um aglomerado finito é equivalente (assintoticamente) ao tamanho médio de um aglomerado finito próximo da criticalidade. Podemos derivar o expoente crítico para esse comprimento característico, usando o expoente crítico para o evento de 1 braço e o expoente de $L(p)$:

$$\chi(p) \approx L(p)^2 [L(p)^{-5/48}]^2 \approx |p - 1/2|^{-43/18}. \quad (6.28)$$

Como enunciado no Teorema 6.2.1, vale o seguinte:

Proposição 6.5.4. Temos que

$$\xi(p) \asymp L(p).$$

Demonstração: Relembramos que ξ foi definido via a fórmula

$$\xi(p) = \left[\frac{1}{\mathbb{E}[|C(0)|; |C(0)| < \infty]} \sum_x \|x\|_{\infty}^2 \mathbb{P}_p(0 \rightsquigarrow x, |C(0)| < \infty) \right]^{1/2}.$$

O Lema 6.5.2 para $t = 2$ e a Proposição 6.5.3 nos permitem concluir que

$$\xi(p) \asymp \left[\frac{L(p)^4 \pi_1^2(L(p))}{L(p)^2 \pi_1^2(L(p))} \right]^{1/2} = L(p) \quad (6.29)$$

Em particular, segue que o expoente de ξ :

$$\xi(p) \approx |p - 1/2|^{-4/3}. \quad (6.30)$$

Referências

- [1] Diestel, R. *Graph theory*. 2^a ed. New York: Springer, 2000.
- [2] G.F. Lawler O. Schramm, W. Werner. "Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents". Em: *Acta Mathematica* 187 (2001), pp. 237–273.
- [3] G.F. Lawler O. Schramm, W. Werner. "Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents". Em: *Acta Mathematica* 187 (2001), pp. 275–308.
- [4] G.F. Lawler O. Schramm, W. Werner. "One-arm exponent for critical 2D percolation". Em: *Elec. J. Probab.* 7 (2002), paper no. 2.
- [5] Grimmett, G.R. *Percolation*. 2^a ed. New York: Springer, 1999.
- [6] J. T. Chayes L. Chayes, J. Frölich. "The low-temperature behavior of disordered magnets". Em: *Comm. Math. Phys.* 100 (1985), pp. 399–437.
- [7] J. Van den Berg, H. Kesten. "Inequalities with applications to percolation and reliability". Em: *J. Appl. Probab.* 22 (1985), pp. 556–569.
- [8] Kesten, H. "A scaling relation at criticality for 2D-percolation, in Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems". Em: *IMA Volumes in Mathematics and its Applications* 8 (1987), pp. 203–212.
- [9] Kesten, H. *Percolation theory for mathematicians*. Boston: Birkhäuser, 1982.
- [10] Kesten, H. "Scaling relations for 2D-percolation". Em: *Comm. Math. Phys* 109 (1987), pp. 109–156.
- [11] Kesten, H. "The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$ ". Em: *Comm. Math. Phys.* 74, 41-59 74 (1980), pp. 41–59.
- [12] Kesten, H. "The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation". Em: *Probab. Th. Rel. Fields* 73 (1986), pp. 369–394.
- [13] M. Aizenman B. Duplantier, A. Aharony. "Path crossing exponents and the external perimeter in 2D percolation". Em: *Phys. Rev. Lett* 83 (1999), pp. 1359–1362.
- [14] Nolin, P. "Near-critical percolation in two dimensions". Em: *Electron. J. Probab.* 13.55 (2008), pp. 1562–1623.
- [15] Reimer, D. "Proof of the van den Berg–Kesten conjecture". Em: *Combin. Probab. Comput* 9 (2000), pp. 27–32.
- [16] S. R. Broadbent, J. M. Hammersley. "Percolation processes: I. crystals and mazes." Versão 53. Em: *CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* 3 (1957), pp. 629–641.
- [17] S. Smirnov, W. Werner. "Critical exponents for two-dimensional percolation". Em: *Math. Res. Lett* 8 (2001), pp. 729–744.

-
- [18] Smirnov, S. "Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits". Em: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333 (2001), pp. 239–244.