

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas
Programa de pós-graduação em Filosofia

Lorenzo Rodrigues Frade

PLURALISMO LÓGICO E COMBINAÇÕES DE LÓGICAS

Belo Horizonte
2024

Lorenzo Rodrigues Frade

PLURALISMO LÓGICO E COMBINAÇÕES DE LÓGICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador(a): Abílio Azambuja Rodrigues Filho

Belo Horizonte
2024

100	Frade, Lorenzo Rodrigues.
F799p	Pluralismo lógico e combinações de lógicas [recurso eletrônico] / Lorenzo Rodrigues Frade. - 2024.
2024	1 recurso online (189 f.) : pdf
	Orientador: Abílio Azambuja Rodrigues.
	Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.
	Inclui bibliografia.
	1. Filosofia – Teses. 2. Lógica – Teses. 3. Lógica – Filosofia - Teses. I. Rodrigues, Abílio. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Pluralismo Lógico e Combinações de Lógicas

LORENZZO RODRIGUES FRADE

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Doutor em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica, Ciência, Mente e Linguagem.

Aprovada em 10 de julho de 2024, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Abilio Azambuja Rodrigues Filho - Orientador (UFMG)

Prof. Antônio Mariano Nogueira Coelho (UFMG)

Profa. Juliana Bueno Soler (UNICAMP)

Prof. Sanderson Molick Silva (IFPA)

Prof. Henrique Antunes Almeida (UFBA)

Belo Horizonte, 10 de julho de 2024.



Documento assinado eletronicamente por **Abilio Azambuja Rodrigues Filho, Professor do Magistério Superior**, em 11/07/2024, às 10:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sanderson Molick Silva, Usuário Externo**, em 11/07/2024, às 10:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Henrique Antunes Almeida, Usuário Externo**, em 11/07/2024, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Mariano Nogueira Coelho, Professor do Magistério Superior**, em 12/07/2024, às 11:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Juliana Bueno, Usuário Externo**, em 14/08/2024, às 09:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site



https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3360248** e o código CRC **EEB0F6E0**.

Referência: Processo nº 23072.236944/2024-51

SEI nº 3360248

Agradecimentos

Agradeço a cada um dos membros da banca por sua leitura cuidadosa. Ao meu orientador, Abílio Rodrigues, por toda a instrução que data dos anos de graduação na UFMG. Sou grato a todo o departamento de Filosofia da UFMG – a cada professor que contribuiu para minha longa formação nesta instituição. Em especial, agradeço aos professores da linha de pesquisa “Lógica, ciência, mente e linguagem”.

Agradeço aos colegas dos cursos de graduação, mestrado e doutorado que, mesmo quando pertencentes a outra linha de pesquisa, me foram de inestimável contribuição técnica e moral. Aos colegas do antigo Grupo de Estudos em Lógica da UFMG pela inestimável contribuição à minha formação, pelas intuições compartilhadas, e pela amizade. Em especial, agradeço a Edgar Campos pelas valiosas sugestões sobre a Lógica Intuicionista.

Por fim, agradeço a todos os amigos e familiares por todo o suporte emocional durante os anos em que esta tese foi escrita. Suas palavras de encorajamento e apoio foram fundamentais para manter minha motivação e determinação.

“São os primeiros cantos de um pobre poeta. Desculpai-os. As primeiras vozes do
sabiá não têm a doçura dos seus cânticos de amor.”

Álvares de Azevedo

Resumo

O pluralismo lógico, a tese segundo a qual existe mais de uma lógica correta, e o realismo lógico, a tese segundo a qual a lógica descreve uma realidade independente de crenças, práticas ou linguagem, parecem perspectivas antagônicas. Este trabalho apresenta uma abordagem pluralista compatível com uma perspectiva realista acerca da Lógica Clássica, onde as lógicas não-clássicas podem ser justificadas por meio de perspectivas anti-realistas, de modo a não competir com a Lógica Clássica. Tal abordagem é representada aqui por meio de lógicas modais, onde incorporamos (isto é, mergulhamos) lógicas não-clássicas em sistemas modais clássicos.

Gödel propôs um mergulho da Lógica Intuicionista (*INT*) na lógica modal *S4*, onde \Box significa *demonstrabilidade por quaisquer meios corretos*, interpretada aqui como um tipo de evidência factiva. Fitting, por outro lado, propôs um mergulho da Lógica Básica da Evidência (*BLE*) na lógica modal *KX4*, onde seu operador modal, representado aqui por \Box , é interpretado como disponibilidade de evidência não-factiva. Evidência não-factiva não garante a verdade da sentença, enquanto a evidência factiva sim.

Nesta tese, os sistemas modais *S4* e *KX4* são combinados para formar um único sistema, *SKX4+*, capaz de comportar ambos os mergulhos e representar o comportamento dedutivo de evidências factivas e não-factivas. Além dos axiomas de *S4* e *KX4*, *SKX4+* inclui o *princípio da conclusividade* (*CP*), que conecta os operadores \Box e \Box : $\Box A \rightarrow \neg \Box \neg A$. (*CP*) expressa a ideia de que evidência factiva para *A* cancela evidência não-factiva para $\neg A$.

Palavras-Chave: multimodalidades; evidência factiva e não-factiva; realismo lógico; pluralismo lógico; combinações de lógicas.

Abstract

Logical pluralism, the claim that there is more than one correct logic, and logical realism, the claim that logic describes a reality independent of beliefs, practices, or language, appear to be antagonistic perspectives. This thesis presents a pluralistic approach compatible with a realist perspective on Classical Logic, in which non-classical logics can be justified by anti-realist perspectives so as not to compete with Classical Logic. Such an approach is represented here by modal logics, where we embed non-classical logics into classical modal systems.

Gödel proposed an embedding of Intuitionistic Logic (*INT*) into the modal logic *S4*, where \Box means provability by any correct means, interpreted here as a kind of factive evidence. Fitting, on the other hand, proposed an embedding of the Basic Logic of Evidence (*BLE*) into the modal logic *KX4*, whose modal operator, represented here by \Box , is interpreted as non-factive evidence. Non-factive evidence does not guarantee the truth of the proposition, whereas factive evidence does.

In this thesis, the modal systems *S4* and *KX4* are combined into a single system, *SKX4*⁺, which can accommodate both embeddings and represent the deductive behavior of factive and non-factive evidence. In addition to the axioms of *S4* and *KX4*, *SKX4*⁺ includes the *conclusivity principle* (*CP*), which connects the operators \Box and \Box : $\Box A \rightarrow \neg \Box \neg A$. (*CP*) expresses the idea that factive evidence for *A* cancels non-factive evidence for $\neg A$.

Keywords: multimodalities; factive and non-factive evidence; logical realism; logical pluralism; combining logics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	REALISMO LÓGICO E PLURALISMO LÓGICO	17
2.1	Sobre o Realismo Lógico	18
2.1.1	Definindo o Realismo Lógico	18
2.1.2	A concepção realista de Aristóteles	23
2.1.3	A concepção realista de Frege	26
2.1.4	Realismo Lógico e propriedades da Lógica Clássica	29
2.2	Sobre o Pluralismo Lógico	40
2.2.1	Pluralismo e monismo	40
2.2.2	Uma pluralidade de propriedades de proposições	46
2.2.3	Outras abordagens pluralistas	52
2.2.3.1	O princípio da tolerância de Carnap e o Pluralismo Lógico	52
2.2.3.2	O pluralismo de Beall e Restall	60
3	INTERPRETAÇÕES NÃO REALISTAS PARA A PARACONSISTÊNCIA E PARACOMPLETUDE	66
3.1	A Lógica Intuicionista (INT)	66
3.2	A Lógica Básica da Evidência (BLE)	82
3.3	O mergulho da Lógica Intuicionista em S4	90
3.4	O mergulho de BLE em KX4	95
3.5	Uma prova de completude para S4 e para KX4	102
4	AS COMBINAÇÕES DE S4 COM KX4	128
4.1	A fusão de S4 com KX4	129
4.2	Um sistema multimodal	135
4.3	A completude de SKX4 e SKX4+	140
4.4	Alguns exemplos ilustrativos de fórmulas de SKX4+	151
5	CONCLUSÃO	158

6	APÊNDICE	160
6.1	Tablôs analíticos para LET_F	160
	REFERÊNCIAS	188

1 Introdução

O advento de uma pluralidade de lógicas não-clássicas fomenta a defesa de diferentes formas de pluralismo lógico. A expressão “pluralismo lógico” diz respeito não apenas ao fato de existir uma pluralidade de lógicas bem-sucedidas – pois este é um dado empírico, que não é passível de discussão. Em vez disso, “pluralismo lógico” se refere à tese segundo a qual existem várias lógicas corretas. Essa tese difere da mera descrição do sucesso de diferentes lógicas: mesmo que várias lógicas tenham vários adeptos, disso não se segue que estejam todas corretas. Seria factível que todas elas estivessem competindo entre si no mesmo propósito de ser a lógica correta. Poderia ser o caso que nenhuma delas fosse correta, ou que alguma fosse mais correta que as outras. Seria possível ainda que alguma delas estivesse correta, e os defensores das outras lógicas estivessem enganados.

Diante de um mesmo fato – o qual é a existência de diversas lógicas bem sucedidas – diferentes explicações podem ser dadas. Para o pluralista lógico, existe mais de uma lógica correta. A tese contrária – a de que existe uma única lógica correta – é conhecida como *monismo lógico*. O monista não nega a existência de outras lógicas bem sucedidas – e pode até concordar com seu uso instrumental. O ponto central para o monista é que a lógica tem um propósito canônico e somente uma lógica poderia cumprir adequadamente este propósito. Para o monista, esse seria o caso mesmo que, talvez, ainda não tenhamos certeza de qual seja a lógica correta.

Outra filosofia da lógica tradicionalmente influente é o *realismo lógico*, tese segundo a qual a lógica diz respeito à realidade – seja a estrutura da realidade, ou algum aspecto geral da realidade; seja da realidade material, ou de uma realidade imaterial ou platônica. O ponto para o realista, entretanto, é que a lógica não depende de nossa mente ou de nossas práticas: as leis lógicas são descrições de alguma realidade e não dependem de nós para serem como são. Assim, de modo análogo a como as leis da física descrevem a realidade material, as leis lógicas também descrevem aspectos de alguma realidade – ainda que sejam aspectos mais gerais e universais.

Um problema ocorre quando se pretende endossar uma perspectiva realista e uma perspectiva pluralista simultaneamente. De fato, se a lógica descreve a realidade, como pode haver diversas lógicas, sem que tenha de haver diversas realidades?

Note que não basta argumentar que diferentes lógicas descrevem diferentes partes da realidade, pois uma das características mais tradicionais da lógica é a sua universalidade. Por isso, se em alguns contextos algumas “leis lógicas” não valem, elas simplesmente não deveriam ser consideradas leis lógicas. Dessa forma, a mera variação de contexto não pode nos dar uma resposta satisfatória à questão da pluralidade – exceto se estivermos dispostos a prescindir da universalidade da lógica¹.

Pode-se, contudo, optar por abdicar do pluralismo lógico e adotar uma perspectiva monista e realista. Alternativamente, pode-se abdicar do realismo e ado-

¹ O argumento apresentado foi usado por (PRIEST, 2008) para criticar formas de pluralismo baseadas em variação de domínio. Com efeito, embora tenhamos razões para endossar o ponto de vista pluralista, a exigência de Priest referente a universalidade da lógica é razoável – e abordagens pluralistas precisam lidar com ela. Abordaremos mais este argumento na seção 2.2.

tar uma perspectiva anti-realista e pluralista. Contudo, como ambas perspectivas apresentam bons argumentos a seu favor, seria desejável encontrar uma forma de pluralismo que se conciliasse ao realismo acerca da Lógica Clássica. Na seção 2.1, argumentamos que a Lógica Clássica, de fato, é melhor compreendida sob uma perspectiva realista. Na seção 2.2 apresentamos brevemente algumas razões para endossar o pluralismo lógico.

Uma abordagem pluralista e realista pode ser alcançável se reservamos o aspecto realista e a noção de preservação de verdade a uma única lógica, e aceitarmos algumas outras lógicas como corretas em virtude da preservação de outras propriedades filosoficamente relevantes. De fato, a validade pode envolver preservar diferentes propriedades das premissas para a conclusão. A verdade é apenas uma delas.

Com efeito, nós dizemos que um argumento é válido quando é impossível que todas as premissas valham, mas a conclusão não valha. Mas o que significa uma proposição P valer? Na lógica clássica, significa que P é uma proposição verdadeira. Mas na lógica intuicionista, pode-se interpretar como significando que a proposição P foi demonstrada construtivamente. Usaremos uma noção próxima a essa, sugerida por (FITTING, 2017), e entenderemos que a asserção P na Lógica Intuicionista pode ser interpretada como *existe evidência factiva para P* . Como veremos na seção 3.2, em um tipo de lógica paraconsistente, chamada *Lógica Básica da Evidência*, a interpretação desejada pode se dar em termos de *ter evidência não-factiva para P* . Ficamos, assim, com três noções diferentes que podem ser preservadas das premissas para a conclusão: verdade, evidência factiva, e evidência não-factiva.

Ao nos referir à Lógica Intuicionista, optamos por usar o termo “evidência

factiva” para designar o tipo de evidência preservada das premissas para a conclusão. Isso porque na Lógica Intuicionista é preciso que P tenha sido demonstrada construtivamente para que se possa asserir P . Estamos, portanto, diante de um tipo de evidência que não admite erro: uma evidência factiva. Este tipo de evidência consiste em uma propriedade mais forte que verdade: com efeito, se tivermos evidência factiva para P , então P é verdadeira. Ao nos referir à Lógica Básica da Evidência (*BLE*), por outro lado, estamos diante de outro tipo de evidência: uma evidência sujeita ao erro. Por isso, a evidência de que trata *BLE* consiste em uma “evidência não-factiva” – que não implica a verdade de P .

Em uma forma de pluralismo baseada na pluralidade de propriedades de proposições que podem ser preservadas das premissas para a conclusão, nós podemos harmonizar diferentes lógicas que pretendam preservar diferentes propriedades, de forma compatível com uma perspectiva realista acerca da Lógica Clássica, como argumentamos na subseção 2.2.2, com base em (CARNIELLI; RODRIGUES, 2016).

Essa forma de pluralismo, contudo, tem uma correspondência formal, que consiste no emprego de lógicas modais para interpretar estas propriedades de proposições. Com efeito, “ter evidência factiva para” e “ter evidência não-factiva para” podem ser interpretados como modos, assim como “necessário que” ou “é obrigatório que”, entre outros. Contudo, para representar estas noções em lógica modal não é suficiente escolher sistemas modais adequados e interpretar seus operadores modais: é preciso uma função que traduza qualquer fórmula da lógica não modal (a Lógica Intuicionista ou a Lógica Básica da Evidência) em sua equivalente na lógica modal (nos sistemas $S4$ e $KX4$, respectivamente). Estas funções são chamadas *mergulhos*

(em inglês *embeddings*), e nós os apresentamos na seção 3.3 e na seção 3.4.

Todavia, como nosso objetivo é harmonizar diferentes lógicas que pretendem preservar diferentes propriedades de proposições, nós estamos buscando um único sistema capaz de acomodar as três noções: verdade, evidência factiva, e evidência não-factiva. Por isso, no capítulo 4 combinamos os sistemas modais $S4$ e $KX4$ a fim de encontrar um sistema bimodal capaz de acomodar ambos mergulhos (da Lógica Intuicionista e da Lógica Básica da Evidência), correspondendo tecnicamente a harmonia que filosoficamente argumentamos existir.

2 Realismo Lógico e Pluralismo Lógico

Diante do aparente conflito entre o pluralismo lógico e o realismo lógico, poder-se-ia pensar que a solução mais simples seria renunciar a uma dessas duas teses. Argumentamos, contudo, que o apelo para formas de pluralismo é muito forte para ser rechaçado – inclusive pelo fato de haver múltiplas lógicas bem sucedidas. Diversas lógicas parecem oferecer justificativas filosoficamente plausíveis para suas discordâncias em relação à Lógica Clássica, e esse fato por si nos motiva a reconhecer nelas algo de correto. Nas seções seguintes apresentamos razões para endossar uma forma de pluralismo lógico.

Argumentamos, também, que o realismo lógico consiste em uma perspectiva que não podemos prescindir. Não queremos dizer com isso que toda lógica tenha caráter realista, mas que, em primeiro lugar, perspectivas realistas são adequadas para justificar os principais axiomas da Lógica Clássica; e, em segundo lugar, que um aspecto realista da lógica sempre encontrou bons defensores, desde Aristóteles até a atualidade, que ofereceram bons argumentos em sua defesa. Isso significa que embora nem toda lógica diga respeito à realidade, é possível que exista uma realidade lógica que possa ser representada por uma lógica.

Exploramos argumentos a favor do realismo lógico na Seção seção 2.1 e argumentos a favor do pluralismo lógico na Seção seção 2.2. Considerando que existem razões convincentes para endossar ambas as perspectivas, propomos uma abordagem que permite harmonizar uma forma de realismo lógico com uma forma de plura-

lismo lógico. Esta proposta é apresentada na subseção 2.2.2, onde argumentaremos que três perspectivas – uma realista clássica, uma epistêmica intuicionista, e outra epistêmica paraconsistente – podem conviver em harmonia.

2.1 Sobre o Realismo Lógico

2.1.1 Definindo o Realismo Lógico

Uma forma de caracterizar o que se entende por *realismo* diz respeito à ideia de independência relativa a nós, isto é, à nossa mente, nossas práticas, etc. Por exemplo, as pessoas, em geral, têm uma visão anti-realista no que diz respeito a entidades da ficção: elas só existem em nossa mente, isto é, elas não têm existência independente de nós. Sobre eventos do mundo físico, por outro lado, a visão do senso comum é realista. Tomemos, por exemplo, a proposição p que diz *toda estrela tem um planeta que a orbita*¹. A perspectiva comum acerca de p é realista: ou p é uma proposição verdadeira, ou p é uma proposição falsa, e isso não depende de nós. De acordo com nossa visão realista acerca de estrelas e de planetas, acreditamos que estas entidades têm realidade própria: elas existem independentemente de nós ou do que sabemos sobre elas. É a própria realidade que determina se p é verdadeira, caso, de fato, todas as estrelas tenham um planeta a orbitando; ou se p é falsa, caso exista alguma estrela sem nenhum planeta em sua órbita.

O que queremos dizer com realismo lógico não difere da noção geral de realismo que acabamos de expor: ser *realista* acerca da lógica consiste na perspectiva

¹ Este exemplo é retirado de (GEORGE; VELLEMAN, 2002) p. 91.

segundo a qual as verdades da lógica não dependem de nossa mente, de nossas práticas, de nossa linguagem, etc.

(CHATEAUBRIAND, 2006) define a *concepção ontológica*² como a perspectiva segundo a qual a lógica investiga a estrutura da realidade.

Parece-me, portanto, que a combinação da lógica proposicional com a lógica de predicados deveria ser vista como uma investigação da estrutura geral da realidade, incluindo suas características possíveis e/ou necessárias, uma concepção da estrutura proposicional, uma concepção das relações de verdade entre as proposições e uma concepção de propriedades e operações que são especificamente propriedades e operações lógicas. Isso é, essencialmente, o que entendo por lógica como teoria ontológica. (CHATEAUBRIAND, 2006, p. 6)

(MCSWEENEY, 2017) oferece uma definição semelhante. Para ela, ser realista acerca da lógica é justamente defender que existe uma estrutura lógica no mundo, independente de nossa mente e linguagem: “logical realism, the view that there is mind-and-language independent logical structure in the world.” (MCSWEENEY, 2017, p. 1).

Resnik, em 1999, em um artigo contrário ao realismo lógico, definiu esta filosofia da lógica de modo análogo ao que apresentamos:

Logical realism is committed to at least two theses: First, there is a fact of the matter of whether something is a logical truth, a logical inconsistency or logically implies something else. (We can put this less contentiously as the thesis that claims about logical truth, etc. are true or false.) Second, that such facts (or the truth-values of such claims) are independent of us, our psychological make-up, our linguistic conventions and inferential practices. In other words, logical realism claims that matters of logic turn upon matters of fact and that these facts are not grounded in us or our practices. (RESNIK, 1999, p. 181)

² Para Chateaubriand, a lógica tem caráter ontológico e epistemológico. Nos convém, nesse momento, ressaltar sua caracterização do caráter ontológico da lógica.

Penelope Rush, em 2014, apresentou uma definição ainda mais próxima à caracterização que oferecemos. Rush associou o realismo acerca da lógica ao realismo acerca da matemática. Para ela, o realismo lógico consistiria na perspectiva segundo a qual a lógica descreve aspectos de um mundo cuja existência independe do pensamento humano.

Logic might chart the rules of the world itself; the rules of rational human thought; or both. The first of these possible roles suggests strong similarities between logic and mathematics: in accordance with this possibility, both logic and mathematics might be understood as applicable to a world (either the physical world or an abstract world) independent of our human thought processes. Such a conception is often associated with mathematical and logical realism. (RUSH, 2014, p. 13)

Dessa forma, para o realista, as verdades da lógica seriam as mesmas ainda que nós não existíssemos. Em contrapartida, caso se sustente que a lógica versa sobre as regras do pensamento ou linguagem humanas, uma perspectiva anti-realista estaria sendo endossada. Dois interessantes proponentes modernos de perspectivas anti-realistas em lógica são Michael Dummett e Neil Tennant. Embora o objetivo central desta tese consista na reconciliação de uma perspectiva realista com uma perspectiva pluralista, a crítica anti-realista nos é cara por ressaltar que a Lógica Clássica não é neutra em relação a pressupostos metafísicos, e é precisamente por isso que ocorre um aparente conflito com o pluralismo lógico ³.

Para Dummett, o significado de uma sentença é determinado pelo seu uso. Entender uma sentença de uma linguagem consiste em saber usá-la corretamente e reconhecê-la. Em particular, “an understanding of a mathematical statement consists

³ O problema do conflito entre realismo lógico e pluralismo lógico foi apresentado na Introdução.

in the capacity to recognize a proof of it when presented with one” (DUMMETT, 2000, p. 4). Nós aprendemos a linguagem matemática, aprendemos a reconhecer uma prova e a reconhecer uma refutação. Como nosso acesso à matemática depende apenas de provas, Dummett rejeita pressupostos realistas acerca da mesma:

In the case of a statement involving quantification over a finite, surveyable, domain, our knowledge of what it is for the statement to be true consists in our knowledge of how we might, at least in principle, set about to determine whether or not it is true: but in that of a statement involving quantification over an infinite domain, we have no such capacity, and hence to conceive of the statement as possessing a determinate, objective truth-value independently of our being able to prove or disprove it is to make a fallacious assimilation of the infinite to the finite case; our grasp of the use of mathematical statements cannot supply us with any such conception of truth for them. (DUMMETT, 2000, p.4)

Como consequência da rejeição aos pressupostos realistas da Lógica Clássica, Dummett rejeita o princípio do terceiro excluído e o princípio da bivalência, e advoga pela Lógica Intuicionista. Neil Tennant, contudo, aprofunda as críticas de Dummett e endossa uma forma de Lógica Intuicionista Relevante.

Neil Tennant sintetiza seu anti-realismo acerca da linguagem, significado e lógica em quatro ideias:

- I. when we are mastering language, and when we are exercising that mastery, all that is available to us for gleaning or conveying meaning is the overt, observable behaviour of fellow speakers;
- II. the meaning of any well-formed expression in our language depends in a rule-governed way on the meaning of its constituent simple expressions;
- III. when we have mastered a language, its sentences have a determinate meaning for us;
- IV. our knowledge of those meanings can be displayed by an appropriate exercise of recognitional capacities shared by competent speakers. (TENNANT, 1987, p. 3).

Isto é, para Tennant, (1) a linguagem, o significado e a lógica são aprendidas e praticadas com outras pessoas. (2) o significado de expressões bem formadas é sis-

tematicamente estruturado por meio de regras e de suas expressões mais simples. (3) as sentenças têm significado para quem domina sua linguagem. E (4), os significados podem ser compartilhados por falantes competentes dessa linguagem – indicando que seu anti-realismo não implica em um subjetivismo ou individualismo. (TENNANT, 1987, p. 3)

O compromisso fundamental do anti-realismo, contudo, persiste na dependência em relação a nós. Em suas quatro afirmações, observa-se a estruturação de uma perspectiva segundo a qual não há verdade ou significado lógico que independa de nossas próprias práticas e mentes. Nesse contexto, não haveria nenhuma verdade lógica independente de nós a qual poderíamos acessar, mas em vez disso aprendemos a linguagem da lógica e da matemática por meio de seu uso.

É importante notar que a rejeição de pressupostos realistas está no cerne das justificativas filosóficas para as lógicas não-clássicas apresentadas por Dummett e Tennant. A interpretação realista, contudo, convém a Lógica Clássica. Quando se enuncia princípios clássicos como o princípio do terceiro excluído ou o princípio de não contradição, a interpretação mais plausível não seria a de que se estivesse apenas inventando regras, ou descrevendo um sistema formal específico, mas representando algo que existe na realidade – e que estaria lá mesmo que nós não existíssemos para enunciar tais princípios. Em outras palavras, definir o realismo lógico como a perspectiva conforme a qual os fatos da lógica são independentes de nós é análogo a dizer que a lógica está fundada em uma realidade que não depende de nós, isto é, que a lógica descreve aspectos da realidade – seja da realidade material, seja de alguma realidade imaterial. Caso se rejeite a existência dessa realidade independente,

ou que possamos acessá-la, perde-se a principal forma de justificar os princípios fundamentais da Lógica Clássica, e se torna tentador rechaçá-la em favor de lógicas mais coerentes com o antirrealismo, como a Lógica Intuicionista.

2.1.2 A concepção realista de Aristóteles

Concepções realistas sobre a lógica estão presentes na bibliografia desde seu próprio surgimento, com Aristóteles. Em sua primeira formulação, Aristóteles defendia o princípio de não contradição com base em como a realidade é:

Evidently then such a principle is the most certain of all; which principle this is, let us proceed to say. It is, that the same attribute cannot at the same time belong and not belong to the same subject and in the same respect (ARISTÓTELES, 1941, Met Γ 3. 1005b 19, 20)

Isso significa que, para Aristóteles, nós não podemos aceitar uma contradição como $Pa \wedge \neg Pa$ porque é impossível, na realidade, que exista um objeto a que possua (Pa) e não possua ($\neg Pa$) uma mesma propriedade P sob o mesmo aspecto e ao mesmo tempo. De fato, Aristóteles se referia a objetos reais, e o fato de um objeto possuir um atributo deve ser atual, e não meramente potencial (GOTTLIEB, 2019). Dessa forma, entende-se que para Aristóteles o princípio da não contradição aparece, em sua primeira formulação, como um atributo da realidade: a realidade é tal que é impossível um mesmo objeto possuir e não possuir uma mesma propriedade simultaneamente e sob o mesmo aspecto. E este era, para ele, não só um princípio da realidade, mas o mais elementar de todos os princípios, a respeito do qual não

poderia haver erro. Como se observa, esta é uma abordagem realista, pois descreve uma estrutura lógica da realidade que existe independentemente de nossa mente.

Aristóteles oferece outras duas formulações do princípio de não contradição. A segunda formulação é aparentemente psicologista, e diz: “it is impossible for any one to believe the same thing to be and not to be” (ARISTÓTELES, 1941, Met Γ 3. 1005b 29-30). De acordo com esta segunda formulação, o princípio de não contradição se fundaria na impossibilidade de que um sujeito acredite que um objeto tem e não tem uma mesma propriedade. Contudo, como observa (GOTTLIEB, 2019), essa formulação apresenta um problema: se a tomarmos por seu valor de face, como uma descrição da impossibilidade de crença, a tese parece difícil de ser defendida. De fato, ao longo da história diversos pensadores tentaram sustentar a tese de que existem contradições reais. Aristóteles já estava ciente disso, e argumentava que as pessoas podem fazer afirmações contraditórias, mas não efetivamente crer nessas contradições. Ainda assim, é inverossímil que as pessoas que dizem crer em contradições reais estejam apenas se enganando, e não creiam realmente naquilo que buscam sustentar.

Uma forma mais razoável de se entender a segunda formulação é buscando derivá-la da primeira. De fato, era objetivo de Aristóteles derivar a segunda versão da primeira⁴, e ao interpretar dessa maneira podemos tornar a segunda formulação mais aceitável. Esta interpretação consiste na ideia de que a segunda formulação tem caráter prescritivo. Não se trata de descrever que as pessoas sejam incapazes de crer em contradições, mas de prescrever que elas não deveriam. Isto é: ninguém

⁴ Ver (ARISTÓTELES, 1941, Met Γ 3.).

pode racionalmente ou coerentemente crer que um determinado objeto possui e não possui uma determinada propriedade (ao mesmo tempo, e sob o mesmo aspecto)⁵. De fato, esta interpretação da segunda formulação deriva da primeira formulação: se um objeto não pode possuir e não possuir uma mesma propriedade, então não é coerente acreditar que um objeto possui e não possui uma mesma propriedade. De acordo com esta interpretação, a segunda formulação do princípio de não contradição preserva o caráter realista por ser derivada da primeira formulação.

Por fim, a terceira formulação do princípio de não contradição diz respeito a asserções contraditórias, e sustenta ser uma crença indisputável que tais asserções não sejam verdadeiras em simultâneo: “The most indisputable of all beliefs is that contradictory statements are not at the same time true” (ARISTÓTELES, 1941, Met Γ 6 1011b 13, 14). Łukasiewicz nomeia essa formulação como *formulação lógica* – distinguindo da *formulação ontológica* (a primeira que apresentamos) e da *formulação psicologista* (a segunda que apresentamos)⁶. (ŁUKASIEWICZ, 1971)

Poder-se-ia pensar que a formulação lógica tem um caráter proposicional, enquanto a formulação ontológica diz respeito a predicados. Este é um engano: para Aristóteles, toda asserção consiste em predicar uma coisa de outra. Dessa forma, a despeito de seu aparente caráter semântico, a terceira formulação se assemelha à primeira. (GOTTLIEB, 2019)

Note, ainda, que a concepção realista da primeira formulação é capaz de justificar a terceira formulação: se a realidade é tal que é impossível um objeto *a*

⁵ Esta interpretação também foi retirada de (GOTTLIEB, 2019).

⁶ Note que no artigo de Łukasiewicz a ordem das formulações está diferente daquela apresentada aqui, onde seguimos (GOTTLIEB, 2019). Em Łukasiewicz, a formulação psicológica aparece por último (c), e a formulação lógica é a segunda (b).

possuir e não possuir a propriedade P simultaneamente, então se justifica a mais indisputável das crenças, que diz exatamente isso: Pa e $\neg Pa$ não são verdadeiras simultaneamente.

Argumentamos, assim, por uma primazia da primeira formulação do princípio de não contradição sobre as demais formulações, que dela derivam. Com isso, entende-se o forte teor realista da filosofia da lógica de Aristóteles, que de modo próximo a nossa definição entendia ser na realidade, e não em nossa mente, que se funda o mais básico de todos os princípios: o princípio de não contradição.

2.1.3 A concepção realista de Frege

Outro pensador tradicional que argumentava por uma perspectiva realista e anti-psicologista da lógica foi Gottlob Frege. Para Frege, a lógica tinha uma relação especial com a verdade. De fato, é usual dizer que a Lógica Clássica trata da preservação de verdade, e é isso que Frege queria dizer quando falava das “leis do ser verdadeiro”:

Assim como a palavra “belo” indica a direção da estética, e a palavra “bom” a direção da ética, da mesma maneira a palavra “verdadeiro” indica a direção da lógica. De fato, todas as ciências têm a verdade como objetivo; mas a lógica se relaciona ainda de uma maneira muito especial com a mesma. [...] Descobrir verdades é tarefa de todas as ciências; à lógica cabe a descoberta das leis do ser verdadeiro. (FREGE, 2002, p. 11)

Esta é uma visão realista da lógica, na qual a lógica versa sobre o mundo, e não apenas sobre nossa mente, linguagem ou práticas. Isto é, as verdades da lógica, para Frege, não dependem de nós. Além disso, independentemente da relação feita entre

verdade e realidade, uma característica desejável de um conceito de verdade consiste em que a mesma não dependa de nós – do contrário se estaria se comprometendo com uma perspectiva radicalmente relativista. Ora, se a verdade não depende de nós, e a lógica diz respeito às leis do ser verdadeiro, então a lógica não depende de nós, como em nossa definição de realismo lógico. Isso significa que se nós tivermos uma visão na qual a lógica diz respeito a verdade, nós estaremos sendo realistas acerca da lógica.

É preciso, contudo, não tomar literalmente a afirmação de que a verdade indica a essência da lógica para Frege. De fato, ele argumentou mais tarde que a verdade é apenas uma tentativa frustrada, porém indispensável, de indicar a essência da lógica:

Pois a palavra “belo” indica de fato a essência da estética, assim como a palavra “bom” indica a essência da ética, enquanto a palavra “verdadeiro” é efetivamente apenas uma tentativa frustrada de indicar a essência da lógica, uma vez que aquilo que de fato está em jogo não está, de maneira alguma, na palavra “verdadeiro”, mas sim na força assertórica com a qual a sentença é afirmada. (FREGE, 1983)

Pode-se compreender que o fundamental para a caracterização da lógica não consiste no conteúdo da palavra verdade. Isto é: o propósito da lógica não é descrever o que é a verdade, tal qual o propósito da ética é descrever o que é o bem, e da estética o que é o belo. A relação da lógica com a verdade difere: seu propósito consiste no tratamento das condições de verdade, isto é, na preservação de verdade. Note, contudo, que Frege entende o conceito “verdade” de modo realista, isto é, independente de nós: “Para mim, o que é verdadeiro é algo objetivo e independente do sujeito que julga” (FREGE, 1964, p. 15).

A perspectiva realista de Frege se torna ainda mais evidente em suas críticas ao psicologismo. Atacando a tese segundo a qual as leis da lógica seriam leis psicológicas, Frege argumenta pela independência das leis lógicas em relação a nossa mente (FREGE, 1964). Note, contudo, que definimos a perspectiva realista precisamente por meio da independência em relação à nossa mente, linguagem ou práticas.

If being true is thus independent of being acknowledged by somebody or other, then the laws of truth are not psychological laws: they are boundary stones set in an eternal foundation, which our thought can overflow, but never displace. (FREGE, 1964, p. 13)

Por meio da analogia com as pedras demarcadoras que podem ser ultrapassadas, mas não deslocadas, Frege argumenta pela independência das leis lógicas em relação a nossa mente ou nossas práticas. Em outras palavras, mesmo que nós façamos inferências equivocadas, as leis da preservação de verdade permanecem inalteradas, pois não dependem de nós.

Nota-se, com isso, o caráter descritivo da lógica. Todavia, esse caráter descritivo deve ser entendido não como uma descrição de nossas práticas mentais, como diziam os psicologistas, mas como uma descrição das leis de preservação de verdade. Essas leis fazem parte da realidade e não dependem de nós – assim como as leis da física não dependem de nós. Por outro lado, podemos raciocinar erroneamente, de modo a não preservar verdade – mas as regras da preservação de verdade continuam as mesmas. Contudo, é nessa possibilidade de erro que se compreende o caráter prescritivo da lógica: ela nos prescreve como inferir corretamente se quisermos preservar verdade. No que diz respeito às ciências da natureza, não faria sentido pensar em um caráter prescritivo, uma vez que não podemos desobedecê-las. Ao conhecer a lei

da gravidade, nós estamos apenas descrevendo a realidade, mas não estamos prescrevendo nosso comportamento, uma vez que já somos natural e inevitavelmente sujeitos a ela. Quando, por outro lado, descrevemos uma lei de preservação de verdade, nós podemos raciocinar de acordo com ela (preservando a verdade das premissas para a conclusão) ou não (realizando inferências que não preservam verdade).

A visão realista de Frege também transparece quando ele argumenta que o matemático (como o lógico, já que, para ele, a matemática se funda na lógica) não pode criar objetos ou propriedades com suas definições. Em vez disso, argumenta que o matemático apenas nomeia propriedades que os objetos já possuem.

Just as the geographer does not create a sea when he draws boundary lines and says: the part of the ocean's surface bounded by these lines I am going to call the Yellow Sea, so too the mathematician cannot really create anything by his defining. Nor can one by pure definition magically conjure into a thing a property that in fact it does not possess – save that of now being called by the name with which one has named it. (FREGE, 1964, p. 11)

Esta é, de fato, uma visão realista acerca dos objetos matemáticos, na qual sua existência e suas propriedades já existem independentemente de nós, e tudo que se pode fazer é identificá-las, descobri-las, ou nomeá-las.

2.1.4 Realismo Lógico e propriedades da Lógica Clássica

Embora se possa endossar uma tese realista acerca da lógica sem endossar a Lógica Clássica, não é muito conveniente adotar a Lógica Clássica sem se comprometer com uma perspectiva realista. Com efeito, algumas das principais propriedades da Lógica Clássica, como o princípio do terceiro excluído, o princípio de não con-

tradição e o princípio da explosão parecem melhor fundamentados sob uma filosofia da lógica realista que sob uma perspectiva anti-realista.

Por exemplo, considere o princípio do terceiro excluído $P \vee \neg P$. Suponha, primeiro, que a proposição P signifique “toda estrela tem um planeta que a orbita”, retomando o exemplo retirado de (GEORGE; VELLEMAN, 2002) citado anteriormente. No senso comum, predomina uma visão realista acerca de estrelas e planetas. Por isso, é razoável que o princípio do terceiro excluído se aplique a este exemplo: ou P é uma proposição verdadeira, ou $\neg P$ é uma proposição verdadeira, ainda que não saibamos qual. Isso significa que a verdade de P está determinada e não depende de nós – de nosso conhecimento acerca de P , de nossas provas, de nossas práticas, de nossa linguagem, etc.

Considere agora, como exemplo, uma proposição G acerca da matemática que significa “todo número par maior ou igual a quatro é a soma de dois primos”⁷. Assim como ocorre com a proposição P , nós ainda não temos uma prova de G , nem uma prova de $\neg G$. Mas para Frege, que endossava uma posição realista acerca da matemática, uma proposição G sobre a matemática também conta com sua verdade determinada, ainda que nós a desconheçamos. Nós podemos apenas descobrir se G é verdadeira, ou se $\neg G$ é verdadeira. Contudo, como a verdade de G não depende de nós, podemos dizer para G o mesmo que dissemos para P : ou G é uma proposição verdadeira, ou $\neg G$ é uma proposição verdadeira, ainda que não saibamos qual.

Caso se prescindia da justificativa realista, por outro lado, a situação difere. Para o intuicionista, por exemplo, não existe verdade na matemática para além de

⁷ Esta proposição é conhecida como *conjectura de Goldbach*.

nossas provas. Os intuicionistas acreditam que a matemática consiste em uma criação da mente, de tal forma que a verdade de uma afirmação matemática consistiria em uma construção mental que a demonstre verdadeira. Dessa forma, não poderíamos dizer que a verdade de G (ou de $\neg G$) esteja determinada antes que provemos G , ou que demonstremos sua falsidade. Pode ser o caso, inclusive, que G nunca seja demonstrada ou refutada. Se nós não supusermos que a verdade de G está previamente determinada (isto é, se não formos realistas acerca de G), não é razoável sustentar que a proposição G possua valor de verdade antes mesmo de ser demonstrada ou refutada. Dessa forma, não seria possível asserir nem G , nem $\neg G$.

Note que o mesmo argumento poderia ser utilizado para criticar o princípio da bivalência de uma perspectiva intuicionista. É importante ressaltar que ambos os princípios são distintos. Optamos por focar nas críticas intuicionistas ao princípio do terceiro excluído, em vez daquelas direcionadas à bivalência, devido ao fato de o princípio do terceiro excluído, quando considerado como regra de inferência, ser dual ao princípio da explosão (consulte (CARNIELLI; RODRIGUES, 2016) para mais detalhes). Não obstante, é conveniente apresentar uma importante passagem onde Lukasiewicz distingue os dois princípios clássicos:

To this assumption corresponds the basic theorem that every proposition is either true or false. For short I will term this the law of bivalence. Although this is occasionally called the law of the excluded middle, I prefer to reserve this name for the familiar principle of classical logic that two contradictory propositions cannot be false simultaneously. (LUKASIEWICZ, 1930, p. 164, 165)

O princípio do terceiro excluído pode ser justificado, contudo, à luz de uma abordagem realista. De acordo com esta perspectiva, pode-se interpretar o princípio

do terceiro excluído como significando que a realidade é tal que para qualquer proposição A acerca dela, ou A é verdadeira, ou $\neg A$ é verdadeira. Trata-se de uma descrição das propriedades lógicas da realidade. Note, ainda, que este é um princípio geral, que se aplica à realidade em sua totalidade. De fato, uma vez que se supõe que a existência e as propriedades do objeto de que tratamos não depende de nós – isto é, que o objeto, se existir, faz parte da realidade – então estamos justificados em invocar o princípio do terceiro excluído. Quando questionamos essa justificativa realista, por outro lado, como faz o intuicionista em relação à matemática, então o princípio perde sua validade universal, deixando de ser classificado como princípio lógico. Dessa forma, argumentamos que um dos mais fundamentais princípios da Lógica Clássica, o princípio do terceiro excluído, apresenta um ingrediente realista – fundado na própria realidade, que não depende de nós.

Algo análogo ocorre com o princípio de não contradição, para o qual, como foi apresentado na subseção 2.1.2, Aristóteles ofereceu uma justificativa realista. De modo análogo ao que ocorre com o princípio do terceiro excluído, argumentamos que o princípio de não contradição tem sua melhor justificativa em uma filosofia da lógica realista.

Como foi argumentado na subseção 2.1.2, a principal maneira de justificar o princípio de não contradição consiste no fato de a realidade não ser contraditória: a realidade é tal que não existe um objeto a e uma propriedade P , tal que $Pa \wedge \neg Pa$.

Note, contudo, que o princípio da explosão pode ser compreendido como uma forma mais efetiva de proibir contradições na realidade, sob pena de trivialidade:

The essential property of propositions, from the viewpoint of classical logic, is truth. Indeed, the more effective way of prohibiting

true contradictions is the principle of explosion, that together with excluded middle composes the deductive properties of classical negation. (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017, p. 2)

Note that EXP is not an inference that is really applied in reasoning. Nobody concludes an arbitrary proposition B from a pair of contradictory propositions A and $\neg A$ precisely because contradictory propositions, in both classical and intuitionistic logic, cannot be simultaneously true. EXP, in a certain sense, compared to PNC, is just a more effective way of saying that contradictions cannot be simultaneously true – as Aristotle (correctly) claimed some time ago. (FRADE; RODRIGUES, 2020, p. 323, 324)

Um importante opositor a este princípio é Graham Priest. Para ele, este princípio deve ser rejeitado como um princípio lógico justamente porque a realidade possui aspectos que apenas podem ser corretamente representados por meio de contradições: as *dialetéias*⁸. Note que ao optar por esta linha argumentativa, Priest parece não se opor à concepção realista da lógica: ele de fato supõe que a lógica descreve algum aspecto da realidade – apenas discorda que a realidade não seja contraditória. De fato, embora Priest afirme que o dialeteísmo não se compromete com uma noção específica de verdade (ver, por exemplo, (PRIEST, 2006, 53)), a ideia de contradições verdadeiras parece implicar na existência de algo no mundo que seja contraditório:

Dialetheism is simply the view that some contradictions are true. That is, there are some sentences (statements, propositions, or whatever one takes truth-bearers to be), α , such that both α and $\neg\alpha$ are true. This is a view about language (or language-like entities). One may therefore ask ‘does it follow that there are contradictions in the world’? In one quite unproblematic sense it does. If something is true, there must be something that makes it so. Call this the world. If some contradictions are true, then the world

⁸ Ver (PRIEST, 1979). Note, ainda, que a ideia de dois valores de verdade, ou um *glut*, já estava presente em (ASENJO, 1966), que Asenjo nomeia *antinomias*.

must be such as to make this the case. In this sense, the world is contradictory. ((PRIEST, 2006, 299))

Nesse sentido, o dialeteísmo se comprometeria com a ideia de que existe algo no mundo que torna verdadeiras duas sentenças contraditórias. Se é o mundo que as faz verdadeiras, e não apenas nossa linguagem, mente ou práticas, estamos diante de alguma forma de realismo. Com isso, argumentamos a visão de Priest é também uma visão realista acerca da lógica, na qual as verdades da lógica dependem de como a realidade é, e não apenas de nossa linguagem ou mente. De fato, não é preciso endossar a Lógica Clássica para se adotar uma perspectiva realista. Contudo, uma perspectiva realista parece a mais adequada para justificar a Lógica Clássica.

Embora esta não seja a única discussão relevante sobre o princípio da explosão⁹, encontramos no dialeteísmo o abandono desse princípio por meio de uma justificativa realista. É válido passar por alguns desses argumentos para elucidar que discussões sobre como a realidade é podem impactar em quais princípios lógicos devemos adotar. Isso significa que uma lógica pode ser fundada na própria realidade, no sentido que a realidade pode determinar nossos princípios lógicos. Trata-se de adotar uma perspectiva realista sobre a lógica – seja ela clássica, como a lógica endossada por Frege, ou não-clássica, como a lógica endossada por Priest. Isso não significa, contudo, que toda lógica tenha de ser determinada pela realidade, ou que pudéssemos harmonizar em nosso pluralismo diferentes lógicas por meio da justificativa realista¹⁰.

Um dos principais argumentos de Priest em defesa da existência de dialetéias se baseia na natureza do movimento – que ele advoga ser essencialmente contra-

⁹ Ver seção 3.2 para uma rejeição epistêmica do princípio da explosão.

¹⁰ Nossa abordagem pluralista será apresentada na seção 2.2, especialmente na subseção 2.2.2.

ditória. Para ilustrar sua tese, Priest apresenta um exemplo de uma caneta tocando um papel:

Let us start by discussing the thorny old question of the instant of change, which may be illustrated thus. As I write, my pen is touching the paper. As I come to the end of a word I lift it off. At one time it is on; at another it is off (that is, not on). Since the motion is continuous, there must be an instant at which the pen leaves the paper. At that instant, is it on the paper or off? (PRIEST, 2006, p. 160)

Este é, para Priest, um problema geral do movimento e dos estados de transição. Um exemplo análogo ao da caneta e do papel diz respeito à passagem de dentro para fora de um quarto: no instante exato em que o sujeito passa pela porta, ele estaria dentro ou fora do quarto? Esse tipo de problema pode ser formulado de uma maneira geral, que vale para todos os casos de transição: Em um certo instante t_0 , o sistema está em um estado s_0 (como a caneta que toca o papel, ou o sujeito que se encontra dentro de um quarto). Em outro instante t_1 , o sistema se encontra em outro estado s_1 (como a caneta que não está mais no papel, ou o sujeito que já está fora do quarto). A questão é: em qual estado está o sistema no instante de transição?

Quatro respostas gerais são possíveis:

- a) está apenas em s_0
- b) está apenas em s_1
- c) está em nenhum dos dois estados
- d) está em ambos estados.

O argumento de Priest é que a escolha entre *a*) e *b*) é uma escolha arbitrária. Nenhuma das duas opções parece mais correta que a outra. Assim, escolher uma das duas não seria propriamente uma resposta para o problema, mas uma evidência da natureza contraditória da questão: se é possível dizer tanto que está dentro, quanto que está fora, é porque de fato não está em nenhum dos dois, ou está nos dois estados em simultâneo.

A alternativa *d*) é, evidentemente, uma interpretação dialeteísta: a natureza do movimento é tal que, no instante de transição, o objeto se encontra dentro e fora simultaneamente. Contudo, Priest argumenta que a alternativa *c*) também é uma alternativa dialeteísta. Como fora significa “não dentro”, não estar dentro e não estar fora significa “não estar dentro e não estar não-dentro” ($\neg A \wedge \neg\neg A$). Dessa forma, independentemente de escolher entre *c*) e *d*), Priest argumenta que estaremos adotando uma concepção dialeteísta.

Independentemente do mérito deste argumento, destacamos ser a realidade que determina sua correção. Se, de fato, a natureza do movimento for contraditória, não devemos recorrer ao princípio da explosão ($A \wedge \neg A \vdash B$), pois a realidade não é trivial. Se, por outro lado, não houver contradições na realidade e o movimento puder ser corretamente descrito sem recorrer a contradições, então estaremos justificados em adotar o princípio da explosão. Trata-se de uma questão ontológica – de como verdadeiramente é a realidade. E se a lógica pode se fundar na realidade, ela não depende de nós. Dessa forma, é preciso que adotemos uma filosofia da lógica realista para corretamente descrever sua natureza.

Com efeito, o princípio da explosão ($A \wedge \neg A \vdash B$) revela uma conexão ainda

mais clara com a realidade independente de nós que o princípio do terceiro excluído. Segundo o princípio da explosão, qualquer proposição B se segue de uma contradição. Como a realidade evidentemente não é trivial, conclui-se que se a realidade for contraditória, o princípio da explosão é inadequado.

Se, por outro lado, a realidade não for contraditória, argumentamos que a melhor justificativa para o princípio da explosão consiste na perspectiva realista. Considere que se tentasse justificar o princípio da explosão por outros meios, como nossas práticas, nosso modo de pensar ou nosso discurso. Com efeito, o princípio da explosão não pode se justificar pelo discurso. Embora o princípio de não contradição talvez pareça adequado do ponto de vista da linguagem ou da argumentação – já que acreditamos que não podemos nos contradizer em nossa prática argumentativa – o mesmo não se aplica ao princípio da explosão. Isso porque nós não podemos, diante de um discurso contraditório, concluir que dele tudo se segue. Trivializar, desacreditar ou ridicularizar um discurso apenas pelo fato de ter nele uma contradição – que pode até ser sanável – consiste, na verdade, em uma má prática argumentativa: a falácia do espantalho.

Suponha, por exemplo, que um filósofo publique um livro defendendo determinada tese com bons argumentos, de modo a contribuir para tratamento de determinados problemas. Suponha, contudo, que em seu último capítulo ele cometa um deslize e publique uma tese contraditória. Se, por um lado, é razoável que se diga que ele não deveria ter se contradito (princípio da não contradição), é evidente que não devemos aplicar o princípio da explosão e dizer que do livro tudo se segue – como se aquela obra não fosse uma contribuição legítima, mas um trabalho cuja con-

sequência lógica são todas as proposições. Muito pelo contrário: a boa prática nos dita que devemos perdoar o deslize e interpretar o texto da melhor forma possível. Aplicar o princípio da explosão não seria uma atitude séria, mas apenas uma forma de ridicularizar a obra. Ridicularizar uma obra por um deslize seria um claro exemplo de falácia do espantalho. Por isso, não parece razoável uma justificativa do princípio da explosão por meio do discurso.

O princípio da explosão também não é um princípio que aplicamos nas ciências empíricas. De fato, as ciências empíricas são de algum modo flexíveis em seu tratamento das contradições. Um exemplo interessante pode ser observado na incompatibilidade entre mecânica quântica e relatividade geral. Segundo Maddy (MADDY, 2002, part II, cap. 6), essas duas teorias são incompatíveis porque elas pressupõem concepções diferentes do espaço-tempo. A relatividade geral supõe que o espaço-tempo é um continuum curvo, ou seja, que ele pode ser descrito por um sistema de coordenadas contínuas e bem definidas. Nesse sistema, a posição de um ponto no espaço-tempo pode ser especificada por quatro números reais (três coordenadas espaciais e uma temporal). A mecânica quântica, por outro lado, supõe que as grandezas físicas são quantizadas, ou seja, que elas só podem assumir valores discretos e múltiplos de uma unidade mínima. Além disso, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, não se pode medir precisamente uma partícula em um ponto real no espaço-tempo.

Dificuldades como esta podem motivar os cientistas na busca por uma superação da inconsistência, mas certamente não os impele a aplicar o princípio da explosão, ou a abandonar por completo uma das teorias.

Por outro lado, o princípio da explosão pode se justificar quando interpretado como um modo forte de descrever uma característica da realidade, a saber, a de que a realidade não é contraditória. É devido a essa visão acerca da realidade – a qual é uma visão realista, que descreve uma característica que não depende de nós – que podemos, por exemplo, aplicar o silogismo disjuntivo ($P \vee Q, \neg P \vdash Q$). De fato, se tomarmos como certo que não há contradições no mundo, e soubermos que a fórmula $\neg P$ é verdadeira, nós já saberemos que não pode ser o caso que a proposição P seja também verdadeira. Portanto, se tivermos um $P \vee Q$, poderemos concluir Q , já que essa é a única forma da disjunção $P \vee Q$ ser verdadeira, uma vez que P é uma proposição falsa.

Contudo, se, por um lado, a realidade pode justificar adequadamente o princípio da explosão, ela também poderia justificar sua rejeição, caso fosse encontrado na realidade um exemplo de dialetéia. Isso reforça nossa tese segundo a qual o princípio da explosão não consiste em um princípio sobre a linguagem ou o raciocínio, mas sobre a realidade, que não depende de nós – mas apenas de como a própria realidade é. Em outras palavras, se o princípio da explosão estiver correto, trata-se de uma propriedade da realidade. Também o princípio do terceiro excluído, como argumentamos, é melhor interpretado como uma propriedade da realidade. A Lógica Clássica, que se caracteriza pela adoção desses dois princípios, descreve, portanto, propriedades da realidade – propriedades estas que não dependem de nossa mente, linguagem ou práticas. Assim como definimos o conceito de realismo lógico na subseção 2.1.1.

É preciso, todavia, não confundir a tese segundo a qual a Lógica Clássica é melhor interpretada por um viés realista com a tese segundo a qual apenas a Lógica

Clássica pode ser justificada dessa forma. Com efeito, argumentamos que mesmo a rejeição de princípios válidos na Lógica Clássica pode ter como fundamento uma tese realista, como foi exemplificado pela Lógica do Paradoxo (LP) e pelas dialetéias. Por isso, é preciso compreender que o realismo lógico pode ser endossado por diversas lógicas. Note, contudo, que é implausível sustentar que mais de uma lógica descreva corretamente os aspectos lógicos da realidade. Uma vez que a universalidade da lógica consiste em um de seus traços mais tradicionais, não basta argumentar que lógicas diferentes descrevem diferentes partes da realidade. Por isso, neste trabalho, argumenta-se por uma forma de pluralismo lógico na qual apenas uma das lógicas envolvidas se justifica por meio de uma tese realista. Argumenta-se, também, que a Lógica Clássica consiste em uma forte candidata a ocupar este posto. As outras lógicas abarcadas por nosso pluralismo lógico serão justificadas por vias epistêmicas, e são apresentadas na seção 3.1 e na seção 3.2.

2.2 Sobre o Pluralismo Lógico

2.2.1 Pluralismo e monismo

Considerando a discussão sobre o Realismo Lógico, o que implica ser realista e os argumentos que sustentam o realismo, a discussão sobre o Pluralismo Lógico se torna mais compreensível. *Pluralismo lógico* é a tese segundo a qual existe mais de uma lógica correta. A perspectiva contrária ao pluralismo lógico é o *monismo lógico*, que advoga existir apenas uma lógica correta.

É importante não confundir o pluralismo lógico com o fato de existir uma

pluralidade de lógicas. O fato de existir uma pluralidade de lógicas certamente motiva a adoção do pluralismo lógico, mas não implica necessariamente no pluralismo lógico. De fato, a existência de uma pluralidade de lógicas é um dado empírico. Daí não se segue, por outro lado, que exista mais de uma lógica correta. Poderia ser o caso que fossem todas lógicas rivais, concorrendo no mesmo objetivo de ser a única lógica correta. Ou talvez algumas lógicas servissem apenas a aplicações práticas, mas não estivessem cumprindo o propósito principal da lógica.

Diante deste mesmo fato, o qual é a existência de uma pluralidade de lógicas, diferentes interpretações podem ser dadas. Podemos endossar uma perspectiva monista, adotando apenas uma lógica como correta; ou podemos adotar alguma perspectiva pluralista, que consideraria mais de uma lógica como correta.

(COOK, 2010) apresenta a seguinte definição sobre o que é ser pluralista e o que é ser monista sobre qualquer fenômeno: “One is a pluralist about a particular phenomenon X if and only if one thinks that there is more than one correct account of X, and one is a monist about X otherwise.” (COOK, 2010, p. 493).

Observa-se, contudo, que Pluralismo Lógico e Realismo Lógico aparentam ser teses antagônicas. De fato, se pensarmos que a lógica descreve a realidade, parece implausível a tese de que existem várias lógicas corretas: pois elas estariam descrevendo a realidade de maneira diferente e contraditória entre si. Por exemplo, se a Lógica Clássica descreve a realidade, então o princípio da explosão é uma propriedade da realidade. Se, por outro lado, a Lógica do Paradoxo¹¹ também descreve a realidade, então existem contradições verdadeiras – no sentido de haver algo no mundo

¹¹ A Lógica do Paradoxo é uma lógica paraconsistente baseada na existência de dialetéias. Ver seção 2.1. Ver também (PRIEST, 1979).

que torna verdadeiras duas proposições contraditórias¹². Não é possível que existam contradições na realidade e que, simultaneamente, valha o princípio da explosão¹³.

Este é apenas um exemplo de como pluralismo lógico e realismo lógico podem entrar em conflito. Com efeito, se formos realistas e pensarmos que a lógica diz respeito à realidade, diferentes lógicas implicam em diferentes teorias sobre a realidade. Se, então, formos pluralistas e acreditarmos que existem diferentes lógicas corretas, então estaremos afirmando que existem diferentes descrições corretas da realidade. Se a realidade é uma só, é difícil imaginar como poderíamos descrevê-la de diferentes modos – especialmente quando esses modos são incompatíveis entre si, como no exemplo entre a Lógica Clássica e a Lógica do Paradoxo.

A aparente contradição entre Pluralismo Lógico e Realismo Lógico é tamanha que por vezes o Monismo Lógico e o Realismo Lógico quase se confundem em alguns autores. Isso ocorre porque o realismo lógico implica que existe no máximo uma lógica que descreva corretamente (ou mais adequadamente) a realidade. De fato, é nesse sentido que se deve entender a expressão segundo a qual há apenas uma *única lógica verdadeira*. Essa tese é muito parecida com o monismo lógico, o qual consiste na tese segundo a qual existe uma única lógica correta, em sentido amplo. A partir da tese segundo a qual só pode haver uma lógica que descreve a realidade, é tentador inferir que este seja o propósito fundamental da lógica, e que as demais lógicas possuem apenas valor instrumental.

(TAHKO, 2009), por exemplo, ao advogar por uma forma de realismo nos mol-

¹² Ver subseção 2.1.4.

¹³ Exceto se prescindirmos da universalidade da lógica para restringir tais lógicas a partes distintas da realidade. A universalidade da lógica, contudo, consiste em uma de suas características mais fundamentais.

des daquela que apresentamos na seção 2.1, conclui que só pode haver (no máximo) uma única lógica verdadeira (em inglês, *the one true logic (OTL)*) que corresponda a realidade. Note, ainda, que Tahko usa como exemplo o princípio de não contradição (em inglês, *law of non-contradiction (LNC)*), o qual tratamos na subseção 2.1.2 e na subseção 2.1.4.

What I mean is that if principles that are usually considered as ‘logical’, such as LNC, are grounded in metaphysics, then we have good reasons to think that logic in general is grounded in metaphysics. Perhaps there are no such things as ‘logical principles’, as we might be able to ground them all in metaphysics. I wish to suggest that what we usually call ‘logical principles’, such as LNC, are perhaps a sub-category of metaphysical principles.

This suggests, among other things, that plausibly there can be only one true logic, that is, only one logic which fully corresponds with reality. This naturally follows from the idea that reality is one and undivided, that is, reality has a rigid structure and this structure can be described with a single formal system, if it can be described so at all. We may of course have different logics that describe reality, but they must be consistent and translatable to a single logic. (TAHKO, 2009, p. 44)

Em outras palavras, Tahko argumenta que uma vez que a lógica esteja fundada na realidade (ou na metafísica), e uma vez que a realidade é uma, não pode haver mais de uma lógica que a descreva corretamente. Isso parece sugerir que, ao adotarmos uma perspectiva realista, nós devemos ser monistas.

Priest, crítico do pluralismo lógico, parece também embasar suas críticas em uma forma de realismo. Em uma objeção a uma forma de pluralismo baseada na variação de domínio, Priest deixa transparecer seus pressupostos realistas:

if there are situations in which objects may not be self-identical, then self-identity is not a logical law at all. This does not mean that when reasoning about, e.g. macro-objects one may not use the

law, though. It is just a “contingent” property of certain domains, and may thus be invoked when reasoning about them. [(PRIEST, 2008) p. 198]

A exigência de universalidade feita por Priest é razoável. De fato, se uma suposta lei lógica não é universalmente aplicável, ela provavelmente não deveria ser considerada uma lei lógica.

Também (MCSWEENEY, 2019) advoga por uma forma de monismo a partir de seu realismo. Ao identificar como principal objetivo da lógica a descrição da realidade independente de nossa mente, conclui que só pode haver uma única lógica verdadeira que corresponda à realidade. Isso vai ao encontro dos pressupostos de Priest e da tese defendida por Tahko. Nós já argumentamos que essas teses parecem aproximar o realismo lógico do monismo lógico – de modo a quase confundir as duas teses. McSweeney, contudo, defende explicitamente uma visão monista a partir de sua filosofia da lógica realista:

We use all sorts of logics in specific arenas (e.g. we use fuzzy logic to program rice cookers), but we don’t think that fuzzy logic is the OTL, even if it is right to think of it as true of rice cooker programming. So, we really need the “OTL” to be the logic that correctly captures whatever it is that we think logic is for. (MCSWEENEY, 2019)

Em outras palavras, para McSweeney as lógicas que não concorrem no propósito de descrever a realidade têm apenas valor pragmático. Em sua visão monista, apenas a única lógica verdadeira (seja lá qual for ela) está correta – pois apenas ela descreve corretamente a estrutura da realidade. Todas as outras lógicas podem, no máximo, ter um valor pragmático, como em seu exemplo da Lógica Difusa, com valor pragmático para programação.

Torna-se claro, com isso, o argumento que leva do realismo lógico ao monismo lógico, e o evidente conflito com o pluralismo lógico: caso se adote uma perspectiva realista acerca da lógica, então se estará assumindo que as verdades da lógica não dependem de nós, mas de algum aspecto lógico da realidade. É razoável, portanto, supor que o propósito da lógica seja a descrição desse aspecto do real. Como a realidade é una, só pode haver uma única lógica verdadeira que corretamente represente seus aspectos lógicos. Isso significa que as outras lógicas não cumprem adequadamente o propósito fundamental da lógica. Portanto, elas teriam apenas um valor pragmático. Conclui-se daí o monismo: há apenas uma lógica correta.

Nota-se, com isso, que algumas das principais objeções ao pluralismo são, de fato, objeções metafísicas que, de alguma forma, inferem o monismo a partir do realismo.

É preciso, contudo, cuidado para não mal-interpretar a tese monista. Quando afirmamos que o monista aceita outras lógicas (além daquela que ele entende como a única lógica correta) apenas instrumentalmente, não queremos com isso diminuir o valor das aplicações pragmáticas de uma lógica, que certamente vão além de programar máquinas de arroz. Nem queremos, com isso, levar a crer que os monistas assim pensam as outras lógicas. É evidente que lógicos monistas podem coerentemente reconhecer as contribuições de diversas lógicas em aplicações pragmáticas. Contudo, essas aplicações pragmáticas – por mais valiosas que possam ser, e por mais que possam engendrar discussões filosóficas – não são, sob a perspectiva monista de McSweeney, o propósito canônico da lógica. Na seção seguinte, contudo, advogamos por uma forma de pluralismo compatível com o realismo que subjaz tais críticas.

Em nossa forma de pluralismo, podemos aceitar a tese metafísica de que existe apenas uma única lógica verdadeira – no sentido metafísico de haver apenas uma lógica que descreve corretamente a realidade – enquanto argumentamos que outras lógicas podem ser aceitas mediante justificativas epistêmicas.

2.2.2 Uma pluralidade de propriedades de proposições

Na subseção 2.2.1 argumentamos que a Lógica Clássica é melhor fundamentada se interpretada realisticamente. De fato, princípios lógicos como o princípio de não contradição e o princípio do terceiro excluído parecem melhor compreendidos como descrições da realidade que existe fora de nossas mentes. Isso significa que a realidade pode determinar quais são os princípios lógicos. Ou, dito de outra forma, que existe uma estrutura lógica na realidade que pode ser representada por uma lógica.

Na seção 2.2 observamos como uma perspectiva realista sobre a lógica, na qual a lógica descreve atributos da realidade, parece implicar no monismo lógico. De fato, parece implausível que exista mais de uma lógica correta que descreva a realidade (exceto, é claro, se estivermos falando de uma lógica L' que fosse um fragmento de outra lógica L – mas esse é um caso trivial e desinteressante para o pluralismo lógico).

A Lógica Clássica se caracteriza pela presença do princípio do terceiro excluído, que insere um ingrediente realista na lógica; e também pela presença do princípio da explosão, que, como argumentamos, é melhor justificado por uma perspectiva realista. Como tal, parece plausível sustentar que se trata de uma candidata a ser a única lógica verdadeira – no sentido de descrever a estrutura lógica da realidade.

Isto é: a Lógica Clássica tem caráter realista/ontológico.

De fato, qualquer lógica que queira concorrer com a Lógica Clássica nesse papel, adotando um sistema divergente da Lógica Clássica, não pode ser conciliada com a Lógica Clássica em uma forma de pluralismo. Esse é, como argumentamos, o caso da Lógica do Paradoxo: ou é o caso que existem contradições reais, e nesse caso a Lógica Clássica não descreve corretamente a realidade; ou, ao contrário, é o caso do princípio da explosão ser universalmente válido, sendo então a Lógica do Paradoxo quem não descreve corretamente a realidade, que não conteria dialetéias.

Há, contudo, espaço para uma forma de pluralismo filosoficamente significativa e compatível com o realismo lógico. Na subseção 2.2.1 foi observado como (TAHKO, 2009), (MCSWEENEY, 2019) e (PRIEST, 2008) argumentaram, ainda que com lógicas diferentes em mente, que só pode haver, no máximo, uma lógica verdadeira, no sentido realista que apresentamos. Contudo, embora se possa argumentar até mesmo que a preservação de verdade ou a descrição da estrutura lógica da realidade sejam as principais tarefas da lógica, não é razoável a tese segundo a qual estas são as únicas tarefas filosoficamente relevantes para uma lógica.

Ao contrário do que sustentou (MCSWEENEY, 2019), é preciso reconhecer que mesmo lógicas que não têm caráter realista (isto é, as lógicas que não pretendem descrever a realidade independente de nós) possuem valor filosófico que vai além do pragmático. Ao contrário, como sustentamos em (FRADE; RODRIGUES, 2020), algumas lógicas não-clássicas podem ter valor filosoficamente relevante, ainda que não realista.

É preciso, portanto, compreender quais os papéis uma lógica pode ter, para

então investigar se é razoável sustentar que existam várias lógicas corretas, ainda que não seja possível que existam várias lógicas que descrevam corretamente a realidade.

Com efeito, Popper apresenta três diferentes visões acerca de qual é a natureza da Lógica:

(A) The rules of logic are laws of thought. (A1) They are natural laws of thought—they describe how we actually do think; and we cannot think otherwise. (A2) They are normative laws—they tell us how we ought to think. (B) The rules of logic are the most general laws of nature—they are descriptive laws holding for any object whatsoever. (C) The rules of logic are laws of certain descriptive languages—of the use of words and especially of sentences. (POPPER, 1963, p. 206-207)

Nossa descrição do realismo lógico, que oferecemos na seção 2.1, parece compatível com o item (B) de Popper, que consiste em uma concepção ontológica, onde a lógica descreve as leis mais gerais da natureza. O item (A) diz respeito a uma visão epistêmica da lógica, que pode ser descritiva (A1) ou prescritiva (A2). O item (C), por fim, apresenta uma visão linguística da lógica.

De fato, a lógica entendida como no item (B) não abre espaço para o pluralismo, pois uma vez admitida a universalidade da lógica, não poderíamos ter diferentes lógicas enunciando as regras mais gerais da natureza. Este problema pode ser evitado se pensamos que lógicas diferentes têm naturezas diferentes. Suponha, por exemplo, que a natureza da Lógica Clássica seja melhor representada pelo item (B). Suponha agora uma lógica que descrevesse corretamente como devemos raciocinar (A2) (sobre uma propriedade diferente daquela da Lógica Clássica, que trata de preservação de verdade). Teríamos, portanto, duas lógicas corretas, justificadas e filosoficamente interessantes.

Note que nos prescrever como devemos pensar não é apenas uma aplicação pragmática importante, mas um dos propósitos tradicionais da lógica. Se uma lógica puder se justificar nesses termos epistêmicos e não concorrer com a lógica clássica no aspecto ontológico, teremos margem para uma forma de pluralismo que será simultaneamente interessante e compatível com o realismo lógico.

Argumentamos que tanto a Lógica Intuicionista quanto uma lógica paraconsistente¹⁴ podem ser justificadas por seu valor epistêmico. A justificativa epistêmica é mais significativa que a aplicação prática, mas não carrega a contradição de aceitar várias lógicas fundadas na realidade.

Com efeito, nossa forma de pluralismo se baseia no fato de que diferentes propriedades de proposições podem ser preservadas das premissas para a conclusão¹⁵. De fato, não é preciso que a noção de verdade esteja envolvida em todas as lógicas que pretendemos harmonizar em nosso pluralismo lógico. Reservamos o propósito de preservação de verdade à Lógica Clássica, a qual é uma candidata a ser a única lógica verdadeira, no sentido realista usado por (MCSWEENEY, 2019) e (TAHKO, 2009). Essa visão pode ser harmonizada com outras lógicas que preservem outras propriedades de proposições filosoficamente interessantes.

A Lógica Intuicionista pode ser harmonizada com uma perspectiva realista da Lógica Clássica quando interpretada como tratando não da preservação de verdade,

¹⁴ Nos referimos a Lógica Básica da Evidência (em inglês, *Basic Logic of Evidence (BLE)*), que será apresentada nos parágrafos seguintes, e em maior detalhe na seção 3.2. Ver também (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017).

¹⁵ A ideia de um pluralismo baseado nas diferentes propriedades de proposições que podem ser preservadas foi defendida por Carnielli e Rodrigues em diversos artigos, como, por exemplo, em (CARNIELLI; RODRIGUES, 2016).

mas da preservação de disponibilidade de prova construtiva¹⁶. Dizemos haver uma prova disponível para P quando temos uma testemunha. Por exemplo, se quisermos provar $\exists xFx$, não basta provar que esta fórmula é verdadeira, ou que a negação dela implica em uma contradição. É preciso indicar um objeto a que instancia o predicado F . Isto é, é preciso encontrar um Fa (nesse exemplo, a é uma *testemunha* de $\exists xFx$).

Contudo, seguindo a terminologia utilizada por (FITTING, 2017), nos referiremos à Lógica Intuicionista como preservando disponibilidade de evidência factiva. Com efeito, a leitura da Lógica Intuicionista enquanto um cálculo da preservação de evidência factiva não é incompatível com a leitura realista da Lógica Clássica, na qual a Lógica Clássica preservaria verdade e teria o papel de descrever a estrutura lógica da realidade independente de nós.

Também uma lógica paraconsistente pode se justificar epistemologicamente. Em vez de adotarmos a justificativa ontológica da Lógica do Paradoxo de Priest¹⁷, que de fato não é compatível com a justificativa ontológica da Lógica Clássica, nós podemos adotar uma lógica paraconsistente que se justifique em termos epistêmicos: a Lógica Básica da Evidência (*BLE*), cuja interpretação pretendida se dá em termos de preservação de evidência, onde evidência é entendida como um dado inconclusivo, que pode estar errado, e pode ser contraditório com outros dados inconclusivos (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017)¹⁸. Novamente, adotaremos a terminologia utilizada por (FITTING, 2017) e usaremos o termo evidência não-factiva em vez de apenas evidência para nos referir à propriedade preservada por *BLE*.

¹⁶ Ver (CARNIELLI; RODRIGUES, 2018), seção 5.1. Este argumento também é desenvolvido na seção 3.1 e na seção 3.3.

¹⁷ Ver (PRIEST, 1979).

¹⁸ Para uma exposição de *BLE*, ver seção 3.2.

Uma vez que essas duas lógicas (a Lógica Intuicionista e a Lógica Básica da Evidência) preservam propriedades diferentes daquela preservada pela Lógica Clássica, evita-se o risco de se relativizar a verdade, ou de se ter mais de uma lógica descrevendo a estrutura da realidade. Embora existam razões para se crer que a Lógica Clássica tem caráter ontológico, e reconheçamos a existência de outras lógicas que concorrem com ela nesse propósito, não é preciso concluir que toda lógica deve ter este propósito, ou que este é o único propósito que faz de uma lógica algo mais que um sistema formal tecnicamente aplicável. Fornecer um tratamento adequado da noção de evidência factiva ou da noção de evidência não-factiva são propósitos filosoficamente interessantes o suficiente para legitimar uma lógica. Para o pluralismo lógico, isso basta. Não é preciso que todas essas lógicas estejam descrevendo a realidade, de um ponto de vista realista. Ao contrário: para o realista é mais conveniente que apenas uma lógica cumpra esse papel.

Destacamos, ainda, que essa forma de pluralismo não fere a exigência de universalidade da lógica – o que seria uma crítica possível a abordagens pluralistas. Com efeito, as lógicas não-clássicas que adotamos em nosso pluralismo não são apenas fragmentos da Lógica Clássica, ou sistemas formais que somente seriam aplicáveis sob certos contextos que nos autorizariam a utilizar premissas adicionais. Em vez disso, podemos aplicar o cálculo de preservação de evidência factiva em quaisquer contextos, bem como podemos aplicar o cálculo de preservação de evidência não-factiva em quaisquer contextos. Em outras palavras, para qualquer conjunto de premissas Γ e conclusão C , podemos nos perguntar se a verdade de C se segue da verdade de Γ (Lógica Clássica), ou se a disponibilidade de evidência factiva para C se

segue da disponibilidade de evidência factiva para Γ (Lógica Intuicionista), ou ainda se a disponibilidade de evidência não-factiva para C se segue da disponibilidade de evidência não-factiva para Γ (Lógica Básica da Evidência).

2.2.3 Outras abordagens pluralistas

(EKLUND, 2017) distingue dois tipos de teses pluralistas acerca da lógica: o *pluralismo carnapiano*, que remete a (CARNAP, 1937), e o pluralismo do tipo de (BEALL; RESTALL, 2006). O “pluralismo carnapiano”¹⁹ consiste em um pluralismo relativo à linguagem, focando nas expressões lógicas, nos conectivos e nos quantificadores. Em contrapartida, o pluralismo de Beall e Restall tem como foco a noção de consequência lógica em si, que devido a alguma vagueza permitiria diferentes noções de validade.

Na subseção 2.2.3.1 analisamos o princípio da tolerância de Carnap e o pluralismo lógico que este princípio motiva. Em contrapartida, na subseção 2.2.3.2 é apresentada uma análise crítica do pluralismo de Beall e Restall.

2.2.3.1 O princípio da tolerância de Carnap e o Pluralismo Lógico

O propósito desta seção consiste em apresentar o Princípio da Tolerância de Carnap e investigar em que medida o mesmo pode ser identificado com uma forma de pluralismo lógico. Apesar de algumas perspectivas específicas de Carnap que podem ser obstáculos para o pluralismo, examinaremos também se o Princípio da To-

¹⁹ A expressão “pluralismo carnapiano” será questionada na seção seguinte. Como um grupo de teses pluralistas remetem a Carnap, mas não necessariamente se comprometem com os princípios carnapianos, preferimos usar a expressão “uma forma de pluralismo que remete a Carnap”.

lerância poderia ao menos motivar um pluralismo baseado na linguagem, ainda que prescindindo de algumas outras perspectivas carnapianas. Em seguida, analisaremos se uma forma de pluralismo baseada nas intuições de Carnap seria desejável, apresentando algumas das principais objeções a este tipo de abordagem. Por fim, apresentaremos algumas razões pelas quais o pluralismo apresentado na subseção 2.2.2, baseado em (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017) e justificado ao longo deste trabalho, consiste em uma alternativa mais plausível.

Com efeito, o debate sobre o pluralismo lógico reacendeu a discussão sobre uma perspectiva mais antiga que também pretendia findar conflitos concernentes a diferentes visões sobre a lógica²⁰. Trata-se do princípio da tolerância, defendido por Rudolf Carnap:

Principle of Tolerance: It is not our business to set up prohibitions, but to arrive at conventions.

[...]

In logic there are no morals. Everyone is at liberty to build up his own logic, i.e., his own form of language, as he wishes. All that is required of him is that, if he wishes to discuss it, he must state his methods clearly, and give syntactical rules instead of philosophical arguments (CARNAP, 1937, p.51-52)

Como observa (DIAS, 2015), o princípio da tolerância não consiste propriamente em uma resposta positiva que resolvesse o dilema dos fundamentos da matemática, mas em uma dissolução do problema. Com efeito, o propósito de Carnap era excluir da discussão questões sobre a justificativa da lógica e da matemática, uma vez que essas discussões seriam obstáculos para o desenvolvimento de linguagens diferentes da clássica, além de gerar pseudo-problemas. Buscando excluir as discussões

²⁰ Ver (RUSSELL; BLAKE-TURNER, 2023), (COOK, 2010), (RESTALL, 2002), (KOURI, 2016).

sobre “justificativa”, “verdade”, ou “correção” da lógica, a perspectiva carnapiana estimula uma forma pacífica de convivência entre diversas lógicas.

The first attempts to cast the ship of logic off from the terra firma of the classical forms were certainly bold ones, considered from the historical point of view. But they were hampered by the striving after ‘correctness’. Now, however, that impediment has been overcome, and before us lies the boundless ocean of unlimited possibilities (CARNAP, 1937, p.xv)

Com efeito, Carnap explora as possibilidades de adotar linguagens diferentes, desenvolvendo dois sistemas, *Language I* e *Language II*. A *Language I* se assemelha à intuicionista, enquanto a *Language II* consiste em uma teoria clássica e permite fórmulas indecidíveis e quantificação irrestrita. Note, contudo, que Carnap não se compromete com todas as intuições não-formais do intuicionismo em sua *Language I*:

Some of tendencies which are commonly designated as “finitist” or “constructivist” find, in a certain sense, their realization in our definite Language I. “In a certain sense”, let it be noted; for inasmuch as these tendencies are, as a rule, only vaguely formulated, an exact statement is not possible. [...] We hold that the problems dealt with by Intuitionism can be exactly formulated only by means of the construction of a calculus, and that all the non-formal discussions are to be regarded merely as more or less vague preliminaries to such a construction. (CARNAP, 1937, p.46)

A escolha entre as linguagens, contudo, seria pragmática. Caso o propósito seja evitar ou limitar contradições, *language I* parece mais adequada. Contudo, se o propósito for construir uma linguagem abrangente, capaz de provar mais do que os métodos construtivos são capazes, a *language II* parece mais apropriada. A princípio, tudo que se requer é que os princípios da linguagem sejam expressos claramente e sintaticamente.

Esta perspectiva parece indicar um pluralismo acerca da lógica. Com efeito, dado um problema ou argumento, podemos explorar as consequências de formulá-lo em uma linguagem ou em outra. Mas não faria sentido, segundo esta perspectiva, questionar – para além de questões pragmáticas – se aquele argumento é “realmente” válido, ou qual a “real” resposta para aquele problema – independentemente da linguagem adotada.

Esta perspectiva vai ao encontro da crítica de Quine às lógicas não-clássicas, segundo a qual mudar de lógica consistiria em mudar de assunto.

By the reasoning of a couple of pages back, whoever denies the law of excluded middle changes the subject. This is not to say that he is wrong in so doing. In repudiating ‘ p or $\sim p$ ’ he is indeed giving up classical negation, or perhaps alternation, or both; and he may have his reasons. (QUINE, 1986, 83)

Como observa (RESTALL, 2002), a despeito das críticas quineanas às lógicas chamadas por ele “divergentes” ²¹, Quine compartilha com Carnap a premissa segundo a qual a noção de consequência lógica faz parte da linguagem adotada. A divergência reside no fato de que, para Quine, ao mudar o assunto, deixa-se de estar falando sobre “lógica”. Nas palavras de Restall, Quine concorda com Carnap em uma tese fundamental: “Any difference in logical consequence is due to a difference in languages.” (RESTALL, 2002, p.431).

Embora esteja fora de nosso escopo analisar ou refutar as críticas de Quine às lógicas não-clássicas, sua expressão representa o âmago da perspectiva que comentamos nesta seção: a de que lógicas diferentes expressam coisas diferentes, atribuindo

²¹ Note que o termo é usado pejorativamente. Evidentemente, Quine não tinha nenhuma pretensão pluralista. Contudo, ao criticar lógicas não-clássicas, Quine exprime o cerne da noção pluralista relativa à linguagem que abordamos nesta seção.

diferentes significados aos conectivos. Na passagem abaixo, Quine argumenta que uma negação não explosiva não seria reconhecida como negação, e que o lógico não-clássico estaria apenas ‘mudando de assunto’.

To turn to a popular extravaganza, what if someone were to reject the law of non-contradiction and so accept an occasional sentence and its negation both as true? An answer one hears is that this would vitiate all science. Any conjunction of the form ‘ $p \sim p$ ’ logically implies every sentence whatever; therefore acceptance of one sentence and its negation as true would commit us to accepting every sentence as true, and thus forfeiting all distinction between true and false. In answer to this answer, one hears that such a full-width trivialization could perhaps be staved off by making compensatory adjustments to block this indiscriminate deducibility of all sentences from an inconsistency. Perhaps, it is suggested, we can so rig our new logic that it will isolate its contradictions and contain them. My view of this dialogue is that neither party knows what he is talking about. They think they are talking about negation, ‘ \sim ’, ‘not’; but surely the notation ceased to be recognizable as negation when they took to regarding some conjunctions of the form ‘ $p \sim p$ ’ as true, and stopped regarding such sentences as implying all others. Here, evidently, is the deviant logician’s predicament: when he tries to deny the doctrine he only changes the subject. (QUINE, 1986, p.81)

Com efeito, a lógica paraconsistente apresentada na seção 3.2 possui uma negação que pode ser interpretada como estando “falando de outro assunto”, uma vez que, em sua interpretação pretendida, $p \wedge \neg p$ em *BLE* significa “há evidência disponível para p e para $\neg p$ ”, e não, como ocorreria na Lógica Clássica, “ p e $\neg p$ são verdadeiras”. Nesse sentido, a lógica não-clássica de fato “mudou o assunto”. Contudo, não há razão para negar o nome “lógica” a tais tipos de tratamento – como se a verdade fosse a única propriedade de proposição que pudesse ser objeto da lógica.

O Princípio da Tolerância de Carnap, contudo, é limitado. Em primeiro lugar, é preciso considerar que o Princípio da Tolerância não parece ser tolerante com contradições. Este é um fator muito limitante para quem pretendesse incluir alguma lógica paraconsistente em um pluralismo de inspiração carnapiana. Não é claro se este obstáculo poderia ser contornado por uma releitura contemporânea – isto é, por um pluralismo fundado na linguagem que, embora inspirado no Princípio da Tolerância, não estivesse comprometido com toda a filosofia de Carnap. Na passagem abaixo, contudo, Carnap supõe a presença de contradições como um impeditivo para a construção de uma linguagem.

It is true that certain procedures, e.g., those admitted by constructivism or intuitionism, are safer than others. Therefore it is advisable to apply these procedures as far as possible. However, there are other forms and methods which, though less safe because we do not have a proof of their consistency, appear to be practically indispensable for physics. In such a case there seems to be no good reason for prohibiting these procedures so long as no contradictions have been found. (CARNAP, 1963, p. 49)

Em outras palavras, nossa liberdade para construir nossa própria linguagem, de que prega o Princípio da Tolerância, não abarca a possibilidade da construção de uma linguagem paraconsistente, o que pode ser indesejável para uma tese pluralista.

Além disso, mesmo uma adaptação do Princípio da Tolerância para englobar a diversidade de lógicas que temos hoje pode não consistir em uma forma muito desejável de pluralismo lógico. (COOK, 2010) argumenta que a perspectiva de Carnap endossa alguma forma de pluralismo, no sentido em que defende que existem diferentes tratamentos adequados para a consequência lógica. Contudo, o Princípio da Tolerância não se equivale ao que Cook chama de *pluralismo lógico substancial*,

que consistiria em endossar diferentes tratamentos para a consequência lógica mesmo quando a linguagem está fixada. É importante notar que a posição carnapiana é incompatível com este tipo de pluralismo: para tal, como observa Cook, seria preciso algum parâmetro externo à linguagem para julgar as diversas noções de consequência lógica e o quanto se adéquam à linguagem natural. Contudo, para Carnap, não há um ponto de vista “externo” que nos permita questionar a adequação de uma lógica, porque esse tipo de pergunta só pode ser feita no interior de uma linguagem. Portanto, para Carnap, não há fatos lógicos básicos que possam ser encontrados apenas pela análise lógica – os fatos da lógica não são externos a nós, mas impostos a nós pela estrutura linguística que adotamos. E este parece ser um aspecto central não só para a perspectiva de Carnap, mas para qualquer pluralismo lógico que seja relativo à linguagem adotada.

Note, ainda, que na ausência de um ponto de vista “externo” – isto é, se partirmos do pressuposto do pluralismo baseado na linguagem segundo o qual os fatos da lógica nos são impostos pela estrutura da linguagem – a própria adequação da expressão “pluralismo lógico” a este tipo de perspectiva se torna questionável. Com efeito, é incerto se uma perspectiva carnapiana seria bem descrita como uma forma de pluralismo lógico²². De fato, conforme apresentamos na subseção 2.2.1, pluralismo lógico consiste na tese segundo a qual existe mais de uma lógica correta. Para Carnap, por outro lado, é mais razoável afirmar que o conceito não se aplica. Isto é, dado um mesmo argumento em linguagem natural, o pluralismo lógico afirma que este argumento pode ser avaliado por duas ou mais lógicas diferentes e corre-

²² Ver (RUSSELL; BLAKE-TURNER, 2023), (DIAS, 2015), (COOK, 2010).

tas, tal que a conclusão do argumento possa ser consequência lógica segundo uma lógica, mas não segundo outra. Contudo, na visão carnapiana ocorre algo diferente: na ausência de um parâmetro externo, não se pode afirmar que “lógicas diferentes avaliam diferentemente o mesmo argumento”. Em vez disso, como não há lógica dissociada de sua linguagem, é preciso afirmar que as duas ou mais lógicas estejam expressando (e formalizando) argumentos diferentes – pois estão falando línguas diferentes, assuntos diferentes, com estruturas lógicas diferentes. E é justamente por isso que as lógicas não estão discordando entre si. Contudo, se diversas lógicas não podem avaliar diferentemente um mesmo argumento, pois não podem formular o mesmo argumento em uma mesma linguagem – nem há uma linguagem universal ou externa para comparar duas lógicas – então é questionável em que medida tal perspectiva poderia ser descrita como “pluralista”.

Na abordagem apresentada em subseção 2.2.2, contudo, este tipo de objeção não se aplica: o parâmetro externo é preservado, bem como a perspectiva realista acerca da Lógica Clássica. Embora a perspectiva pluralista apresentada neste trabalho não incorpore todas as lógicas não-clássicas, ela não está sujeita às dificuldades apresentadas nesta seção. Note que o pluralismo lógico advindo da pluralidade de propriedades de proposições, embora se assemelhe à “mudança de assunto” – isto é, ao princípio de que lógicas diferentes podem estar falando de assuntos diferentes – não é equivalente a um pluralismo baseado na linguagem, uma vez que não depende da estrutura linguística, nem da pluralidade de linguagens, mas apenas da multiplicidade de propriedades de proposições que podem ser preservadas das premissas para a conclusão. Note, ainda, que um mesmo argumento em linguagem natural pode ser

interpretado diferentemente no pluralismo apresentado neste trabalho – ao contrário do que ocorre com o pluralismo baseado na linguagem. Com efeito, suponha que se queira avaliar um argumento em linguagem natural da forma $\Gamma \vdash C$. Pode-se avaliar se a verdade, a disponibilidade de evidência factiva ou a disponibilidade de evidência não-factiva de C se segue das respectivas propriedades de Γ (ou mesmo se uma propriedade pode se seguir de outra. Ver capítulo 4).

Na seção 3.3 e na seção 3.4 argumentamos que esta perspectiva é melhor compreendida se interpretada por meio de lógicas modais. Nesse sentido, podemos dizer que, por exemplo, a Lógica Intuicionista (ver seção 3.1) “fala de um assunto diferente”, isto é, expressa algo distinto da Lógica Clássica quando afirma $p \vee \neg p$. Mas apenas no mesmo sentido em que uma lógica modal como $S4$ (ver seção 3.3) também diz algo diferente quando afirma $\Box p \vee \Box \neg p$. De fato, como afirma Quine, não se está “negando a doutrina”, mas mudando a interpretação. Contudo, em nossa interpretação, a comunicação entre as lógicas é possível (ver capítulo 4), ao contrário do que ocorre na perspectiva de Carnap, onde não há parâmetro externo para comparar diferentes linguagens.

2.2.3.2 O pluralismo de Beall e Restall

Na seção anterior foi apresentada uma visão pluralista baseada em variações de linguagem. Nesta seção será investigada outra forma de pluralismo, que se baseia em uma espécie de imprecisão da noção de consequência lógica. Na perspectiva apresentada na subseção 2.2.3.1, a noção de consequência lógica pode diferir entre duas lógicas devido ao fato de a própria linguagem diferir entre as duas lógicas. No

pluralismo de Beall e Restall, por outro lado, é a noção de validade que admite mais de uma interpretação. Assim, lógicas rivais podem estar modelando aspectos diferentes da noção de consequência lógica.

Beall e Restall partem de um princípio geral de consequência lógica, que nomeiam *Generalised Tarski Thesis (GTT)*, que eles acreditam capturar de modo geral a noção de consequência lógica.

Generalised Tarski Thesis (GTT): An argument is valid_x if and only if, in every case_x in which the premises are true, so is the conclusion. (BEALL; RESTALL, 2006, p. 29)

Segundo Beall e Restall, contudo, *GTT* é vaga, e portanto insuficiente para definir o que é consequência lógica, pois existem diversas formas de determinar o que significa ser um *case* em *GTT*. Cada determinação de *case* gera uma lógica distinta, e existem ao menos duas interpretações corretas do que é um *case* em *GTT*. Por isso, (RUSSELL; BLAKE-TURNER, 2023) nomeia o pluralismo de Beall e Restall como um *pluralismo lógico baseado em casos*. Nós usaremos esta mesma nomenclatura, para diferenciar do pluralismo lógico baseado na linguagem da subseção 2.2.3.1.

Note que diferentemente da perspectiva pluralista por nós endossada na subseção 2.2.2, no pluralismo de Beall e Restall a noção de preservação de verdade é mantida para todas as lógicas harmonizadas em sua visão pluralista ²³. A pluralidade, contudo, seria justificada pelas diferentes formas como se pode especificar em que consiste um caso, e em que consiste uma proposição ser verdadeira em um caso.

²³ Com efeito, isso é afirmado explicitamente em mais de uma oportunidade: em “Logic is a matter of preservation of truth in all cases. This is the heart of logical consequence. However, this is not the end of the matter.” (BEALL; RESTALL, 2000, p. 477), e em “For us, logic is a matter of preservation of truth in all cases. We take that to be the heart of logical consequence, the settled core of follows from.” (BEALL; RESTALL, 2006, p. 35).

Por exemplo, uma interpretação de *cases* que resulta na Lógica Clássica consiste em interpretá-los como mundos possíveis (*case_w*, nos termos de Beall e Restall). Nessa especificação, temos que:

An argument is valid if and only if, in any world in which the premises are true, so is the conclusion. (Equivalently: ... if and only if it is impossible for each premise to be true but for the conclusion to not be true.) (BEALL; RESTALL, 2006, p. 37)

Outra especificação possível que também resultaria na Lógica Clássica consiste em interpretar *case* em *GTT* como modelos tarskianos. Assim,

An argument is valid if and only if, in every model in which the premises are true, so is the conclusion. (BEALL; RESTALL, 2006, p. 39)

A Lógica Relevante também é considerada no pluralismo de Beall e Restall. Nesse caso, a especificação de *case* em *GTT* consistiria em *situations*²⁴:

Relevant consequence arises from *GTT* by dropping the completeness and consistency of classical cases. We will pursue that option by letting *cases_x* be *situations* along the lines of Barwise and Perry (BEALL; RESTALL, 2006, p. 49)

Por fim, uma especificação de *case* em *GTT* para a Lógica Intuicionista também é oferecida em termos construtivos: “an argument is constructively valid if and only if a construction for the premises provides a construction for the conclusion” (BEALL; RESTALL, 2006, p.61). É preciso, contudo, especificar em que consiste uma construção. Por isso, a especificação de *case* em *GTT* para o intuicionismo consistiria em *stages*, isto é, estágios de modelos de Kripke para a Lógica Intuicionista:

²⁴ Os autores referenciam (BARWISE; PERRY, 1983).

We will start by formalising the picture of ‘constructions’ mentioned at the start. Just as worlds stand to classical logic, and systems of situations stand to relevant logic, so too systems of stages stand to intuitionistic logic. Stages can be thought of as steps in a process of construction or verification. (BEALL; RESTALL, 2006, p.62)

É importante destacar, contudo, que Beall e Restall distanciam seu pluralismo de interpretações baseadas na linguagem (ver subseção 2.2.3.1) e buscam argumentar que as lógicas não-clássicas de que tratam não estão mudando o sentido dos conectivos, mas operando de modo diferente por adentrarem “outro campo”:

We must emphasize at this point that the non-traditional treatment of negation does not mean that we are modeling a non-classical negation. Quite to the contrary. Our treatment of negation is not the traditional one simply because we are entering a new field – the logic of situations. It has not been traditional to formally model claims of the form ‘ A is true in situation x ’; once you do so, and once you acknowledge that situations are restricted parts of the world, it becomes clear that you ought reject the classical treatment of negation when applied to situations. This is completely consistent with the classical treatment of the truth or falsity of negation simpliciter. (BEALL; RESTALL, 2000, p. 482)

Ao tratar da Lógica Intuicionista, os autores usam o termo “mudança de contexto” para diferenciar a validade intuicionista da clássica. Na visão de Beall e Restall, seu pluralismo lógico permitiria afirmar que determinada inferência seja classicamente válida, mas não intuicionisticamente válida – sem a necessidade de rechaçar a validade clássica para justificar uma noção de validade não construtiva:

What is important, here, is that for a pluralist it does not follow that $A \vee \sim A$ is not true, or even, not necessarily true. It is consistent to maintain that all of the truths of classical logic hold, and that all of the arguments of classical logic are valid with the use of constructive mathematical reasoning, and the rejection of certain classical inferences. The crucial fact which makes this position

consistent is the shift in context. Classical inferences are valid, classically; they are not constructively valid. If we use a classical inference step, say the inference from $\forall x(A \vee B)$ to $\exists xA \vee \forall xB$, then we have not (we think) moved from truth to falsity, and we cannot move from truth to falsity. It is impossible for $\forall x(A \vee B)$ to be true and for $\exists xA \vee \forall xB$ to be false; however, such an inference can take one from a truth which can be constructed to one which cannot, as we have seen. So, the inference, despite being classically valid, can be rejected on the grounds of nonconstructivity. (BEALL; RESTALL, 2000, p. 487)

Assim, diferentemente de um pluralismo baseado na linguagem, o pluralismo de Beall e Restall seria relativo a uma vagueza presente na noção de consequência lógica em si, que poderia ser codificada de diferentes formas por diversas lógicas. Desta forma, lógicas diferentes não estariam falando linguagens completamente distintas, mas apenas abordando outro aspecto da noção de consequência lógica.

“When a constructivist says ‘not’, she means not; she does not mean something else, foreign to the classical mathematician. The constructivist differs from the classical reasoner only in her use of tighter canons of inference” (BEALL; RESTALL, 2000, p. 487)

Nesse aspecto, o pluralismo de Beall e Restall parece se aproximar da proposta endossada em subseção 2.2.2, a partir de (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017). Com efeito, Beall e Restall partem da mesma intuição ao reconhecerem que inferências classicamente válidas, mas intuicionisticamente inválidas, não podem nos levar da verdade para a falsidade, mas podem nos levar de verdades cuja prova está disponível para verdades cuja prova não está disponível. Eles também partem de intuições corretas ao perceberem que o pluralismo lógico não deve ser fundado em uma mudança de significado ou de linguagem, mas na riqueza da noção de consequência lógica, que admite mais de uma abordagem.

Contudo, apesar de algumas intuições valiosas, o pluralismo de Beall e Restall ainda define consequência lógica em termos de preservação de verdade. É difícil entender como o pluralismo acerca da lógica não resultaria em um pluralismo acerca da verdade. Não nos parece razoável apelar para uma forma de relativismo alético, no qual diferentes abordagens da consequência lógica preservariam a verdade, mas em cada caso a noção de verdade seria relativa a algo diferente. Argumentamos que o único sentido em que um predicado de verdade poderia ser considerado como um predicado relacional, como ‘ x é verdadeira de acordo com y ’, seria ‘ x é verdadeira de acordo com a realidade’, o que consiste em um predicado de um só lugar²⁵.

²⁵ Esse argumento foi apresentado em (FRADE; RODRIGUES, 2020).

3 Interpretações não realistas para a para-consistência e paracompletude

3.1 A Lógica Intuicionista (INT)

Na seção 2.2 advogamos por uma forma de pluralismo baseada nas propriedades de proposições que podem ser preservadas das premissas para a conclusão. Argumentamos, a partir disso, que a Lógica Intuicionista pode ser conciliada com a Lógica Clássica, pois enquanto a Lógica Clássica tem caráter ontológico, buscando preservar verdade e descrever uma realidade independente de nós; a Lógica Intuicionista tem um caráter epistêmico, admitindo a interpretação segundo a qual a mesma preserva disponibilidade de evidência factiva, não tendo com isso o propósito de descrever nenhuma realidade independente de nós. Com efeito, a Lógica Intuicionista não é adequadamente compreendida sob um viés realista (de acordo com nossa definição. Ver seção 2.1), razão pela qual não apresenta conflito com a Lógica Clássica enquanto descrição de uma realidade que independa de nós.

Como essas duas lógicas preservam propriedades diferentes e não concorrem enquanto descrição da realidade, elas podem conviver pacificamente em nosso pluralismo. Nesta seção, argumentaremos por uma interpretação epistêmica da Lógica Intuicionista, onde mostramos que, desde seus textos fundadores, a Lógica Intuicionista buscava tratar da preservação de uma propriedade diferente da verdade em seu sentido usual – no qual a verdade de uma proposição não depende de nossas

crenças, práticas, etc. Em vez disso, esta lógica parece tratar da preservação de uma propriedade mais forte que verdade, como a disponibilidade de prova construtiva. De fato, a disponibilidade de prova construtiva é uma noção mais forte que a noção de verdade porque podemos ter proposições verdadeiras para as quais não temos provas construtivas disponíveis, mas não podemos ter provas disponíveis para proposições falsas.

Todavia, não nos comprometeremos com esta interpretação. Nos bastará, nas páginas seguintes, ilustrar como a Lógica Intuicionista tem um apelo por uma noção mais forte que a de verdade (seja ela qual for), que de alguma forma se relaciona a noção de prova. Com efeito, nós optamos por interpretar a Lógica Intuicionista como preservando evidência factiva. Uma prova é, de fato, uma evidência factiva, diante da qual não resta dúvida sobre sua veracidade.

Nossa forma de pluralismo será mais interessante caso se mostre plausível interpretar a Lógica Intuicionista sob este viés – mesmo que talvez não seja a leitura mais natural para um intuicionista convicto.

A Lógica Intuicionista surgiu com o propósito de representar em um sistema lógico as ideias da matemática construtiva de Brouwer. De modo independente, a Lógica Intuicionista foi formalizada primeiro por Andrei Kolmogorov (KOLMOGOROV, 2002), e depois por Arend Heyting¹, aluno de Brouwer.

De fato, a lógica para Brouwer tinha uma função subordinada à matemática. A própria matemática, no que lhe concerne, era vista como uma construção mental,

¹ A formalização de Heyting foi apresentada pela primeira vez em 1928, como *Prize essay on the formalization of intuitionistic logic*. Uma versão revisada foi publicada mais tarde, em (HEYTING, 1930) e (HEYTING, 1930b).

de modo que toda a linguagem da matemática teria o propósito de comunicação e de memória. A lógica seria apenas um caso especial dessa linguagem matemática.

People try by means of sounds and symbols to originate in other people copies of mathematical constructions and reasonings which they have made themselves; by the same means they try to aid their own memory. In this way the *mathematical language* comes into being, and as its special case the *language of logical reasoning* (BROUWER, 1975, p. 73)

Como, para Brouwer, a linguagem da matemática tinha apenas a função pragmática de comunicação e memória, a matemática seria independente de sua própria linguagem. Contudo, a matemática não seria, para ele, independente de nós: ao contrário, ela seria produto de nossa criação mental. De fato, o mundo fora de nossa mente é irrelevante para a matemática de Brouwer:

truth is only in reality i.e. in the present and past experiences of consciousness. Amongst these are things, qualities of things, emotions, rules (state rules, cooperation rules, game rules) and deeds (material deeds, deeds of thought, mathematical deeds). But expected experiences, and experiences attributed to others are true only as anticipations and hypotheses; in their contents there is no truth. (BROUWER, 1975, p. 488)

Observa-se aqui uma visão anti-realista da verdade, onde a verdade é compreendida apenas enquanto experiência da consciência. Disso se segue, por um lado, uma razão clara para a rejeição do terceiro excluído: nós não podemos dizer que para qualquer p nós tenhamos em nossa mente uma demonstração (ou mesmo uma experiência) de p ou de $\neg p$. Muitas das vezes nós não temos nenhuma das duas coisas. Portanto, não podemos afirmar que $p \vee \neg p$ valha irrestritamente.

Por outro lado, fica claro que a perspectiva de Brouwer não concorre com uma perspectiva realista acerca da Lógica Clássica – uma vez que não busca descre-

ver nenhum aspecto do real que independa de nós. Um conflito verdadeiro ocorre, contudo, entre a filosofia da matemática de Brouwer e a filosofia da matemática clássica. Ou, ainda, sobre o conceito de verdade de Brouwer e o conceito de verdade da lógica clássica. Com efeito, enquanto a Lógica Clássica, como foi argumentado na seção 2.1, é melhor compreendida como uma descrição da realidade que existe independente de nós, a lógica de Brouwer descreve os procedimentos mentais de uma matemática que só existe enquanto construção mental. Principalmente no que diz respeito à matemática, não há, para Brouwer, uma realidade independente de nós a ser descrita ou representada: apenas existe o que foi demonstrado.

Ainda assim, como a filosofia de Brouwer adota uma noção de verdade incompatível com aquela da Lógica Clássica, ela não convém ao pluralismo lógico endossado neste trabalho, onde advogamos por uma forma de pluralismo que seja compatível com uma perspectiva realista acerca da Lógica Clássica.

Para nossos propósitos, mais interessante que a justificativa de Brouwer são as justificativas de Heyting e Kolmogorov para a Lógica Intuicionista. Nelas se pode, efetivamente, compreender a Lógica Intuicionista enquanto um cálculo da demonstrabilidade construtiva. Além disso, tais justificativas da Lógica Intuicionista não precisam se comprometer com a filosofia brouweriana da matemática. Dessa forma, mesmo quem adotasse uma filosofia da matemática realista – onde as verdades matemáticas existem independentemente de nossas provas – poderia apreciar a Lógica Intuicionista por seu valor informativo: isto é, além de se saber o que é verdadeiro, com o uso da Lógica Clássica, pode-se saber o que é construtivamente demonstrável, com o uso da Lógica Intuicionista.

Com efeito, para asserir A na Lógica Intuicionista nós precisamos ter uma prova construtiva de A – ou um algoritmo que nos diga como construir A . Assim, o significado dos operadores lógicos pode ser dado em termos de prova. Apresentamos abaixo as cláusulas que mais tarde foram chamadas de *interpretação BHK* (*Brouwer-Heyting-Kolmogorov*):

- \perp is not provable. A proof of $\neg A$ is a construction which transforms an hypothetical proof of A into a contradiction.
- A proof of $A \wedge B$ consists of a proof of A and a proof of B .
- A proof of $A \vee B$ consists of a proof of A or a proof of B .
- A proof of $A \rightarrow B$ is a construction which transforms any proof of A into a proof of B .
- A proof of $\exists x A(x)$ is given by presenting an element d of the domain and a proof of $A(d)$.
- A proof of $\forall x A(x)$ is a construction which transforms every proof that d belongs to the domain into a proof of $A(d)$. (TRO-ELSTRA; DALEN; DALEN, 1988)

Dessa definição podemos destacar algumas características interessantes da Lógica Intuicionista. Primeiro, observa-se que uma prova de $\exists x A(x)$ exige a presença de uma *testemunha*, isto é, de um elemento d do domínio tal que se possa provar $A(d)$. Nota-se também uma justificativa para o abandono do princípio do terceiro excluído. Pela cláusula da disjunção, uma prova de $A \vee \neg A$ consistiria em uma prova de A ou uma prova de $\neg A$. Entretanto, é evidente que existem proposições P tais que não há uma prova disponível para P , nem uma prova para $\neg P$.

Todavia, ao contrário de Brouwer, Heyting não queria se comprometer explicitamente com a hipótese contrária: a de que não há verdades transcendentais na matemática – que independem de nossas provas. Isto é: com a hipótese de que a matemática só existe enquanto construção mental. Seu argumento a favor da

matemática construtivista de Brouwer e da Lógica Intuicionista que subjaz a ela se baseava não na negação da existência de verdades matemáticas independentes de nós, mas na defesa de que tais verdades não poderiam adentrar as provas matemáticas.

Here, then, is an important result of the intuitionistic critique: The idea of an existence of mathematical entities outside our minds must not enter into the proofs. I believe that even the realists, while continuing to believe in the transcendent [transcendente] existence of mathematical entities, must recognize the importance of the question of knowing how mathematics can be built up without the use of this idea. (HEYTING, 1930, p. 306)

Nessa citação, Heyting argumenta que mesmo os realistas deveriam reconhecer a importância da Lógica Intuicionista enquanto um cálculo do que pode ser provado sem o recurso à tese realista de que as verdades da matemática são independentes de nossas provas. Esta é, de fato, uma abordagem interessante para nossa forma de pluralismo: se entendermos a Lógica Intuicionista como um tratamento das demonstrações construtivas, o aparente conflito entre Lógica Clássica e Lógica Intuicionista pode ser superado. Segundo o ponto de vista do lógico clássico, se aceitaria o terceiro excluído enquanto um princípio classicamente correto, isto é, para qualquer P , ou P é verdadeira, ou $\neg P$ é verdadeira. Contudo, o lógico clássico pode concordar com o lógico intuicionista que não é verdade que para toda proposição P , nós tenhamos uma prova (ou evidência factiva) de P ou uma prova (ou evidência factiva) de $\neg P$.

Note, entretanto, que segundo a interpretação de Heyting não seria legítimo aplicar a Lógica Clássica ao domínio da matemática, o que constituiria uma ameaça a universalidade da lógica. Esta, contudo, não é a perspectiva endossada nesta tese. A defesa metodológica ou epistêmica da Lógica Intuicionista, tal como Heyting apre-

senta, nos é cara. Ainda assim, não é preciso que se comprometa com a perspectiva intuicionista de Heyting acerca da matemática para apreciar tal argumento.

Heyting reforça sua interpretação da Lógica Intuicionista como uma lógica independente de questões filosóficas em diversas passagens. Ele reforça que seu objetivo não é negar a existência de verdades matemáticas, mas defender um sistema que não as pressupõe:

Intuitionism is not a philosophical system on the same level with realism, idealism, or existentialism. The only philosophical thesis of mathematical intuitionism is that no philosophy is needed to understand mathematics. On the contrary, every philosophy is conceptually much more complicated than mathematics. (HEYTING, 1974, p. 79)

De fato, se a Lógica Intuicionista pretende apenas descrever as bases lógicas para o raciocínio acerca de demonstrações construtivas, então ela não concorre com a Lógica Clássica enquanto descrição da realidade. Com efeito, segundo a interpretação de Heyting, a realidade não é relevante para a Lógica Intuicionista – ao contrário do que ocorre com a Lógica Clássica (conforme argumentamos na seção 2.1).

A concepção de Heyting já parecia indicar uma forma de pluralismo. Além de não se comprometer com uma tese anti-realista (a de que a matemática só existe enquanto construção mental), Heyting não rejeitava a Lógica Clássica na totalidade, apenas argumentava pela necessidade da Lógica Intuicionista para o tratamento das construções mentais matemáticas:

(class) I never understood why logic should be reliable everywhere else, but not in mathematics.

(Int) We have spoken about that subject before. The idea that for the description of some kinds of objects another logic may be more

adequate than the customary one has sometimes been discussed. But it was Brouwer who first discovered an object which actually requires a different form of logic, namely the mental mathematical construction [L. E. J. Brouwer 1908]. The reason is that in mathematics from the very beginning we deal with the infinite, whereas ordinary logic is made for reasoning about finite collections. (HEYTING, 1984, p. 66)

Heyting não pretendia, portanto, defender que a Lógica Intuicionista fosse a única lógica verdadeira naquele sentido realista defendido pelos monistas lógicos que apresentamos na subseção 2.2.1, e nem parecia se opor à ideia de que a Lógica Clássica poderia ocupar este papel de uma lógica que descrevesse corretamente a realidade que existe independente de nós – afinal, ele não se opõe, no diálogo acima, ao emprego da Lógica Clássica fora da matemática.

O problema, para Heyting, consiste principalmente no emprego do terceiro excluído a construções mentais. Com efeito, o princípio do terceiro excluído parece pressupor a realidade do objeto de que trata. Como argumentamos na seção 2.1, o princípio do terceiro excluído se justifica adequadamente enquanto uma propriedade lógica da realidade: a realidade é tal que para qualquer proposição P , ou P é o caso, ou $\neg P$ é o caso. Isso ocorre porque a verdade ou falsidade de P já está determinada antes mesmo que saibamos disso. No que se refere a construções mentais, por outro lado, isso não faz muito sentido: qual parte da realidade poderia tornar verdadeira ou falsa uma construção mental que ainda não foi construída? Ao contrário do que ocorre com as proposições acerca de objetos que existem independentemente de nós, não faz sentido sustentar que uma construção mental seja verdadeira ou falsa independentemente de nosso conhecimento acerca dela.

Dessa forma, a Lógica Intuicionista parece mais adequada que a Lógica Clássica

no tratamento de construções mentais. Uma construção mental só existe a partir do momento em que é construída. Assim, embora seja correto dizer “eu tenho uma construção mental de p ou eu não tenho uma construção mental de p ”, não seria correto afirmar “eu tenho uma construção mental de p ou eu tenho uma construção mental de $\neg p$ ”. Em alguns casos nós não temos construções mentais nem de p , nem de $\neg p$, e o reconhecimento disso não coloca em dúvida a universalidade da Lógica Clássica.

A discussão pode persistir, contudo, no plano da filosofia da matemática: será a matemática apenas uma construção mental, ou existirá independentemente de nós? Todavia, mesmo que forneçamos uma resposta realista a esta questão, advogando pela independência da matemática em relação às nossas provas, ainda será útil investigar como a matemática poderia ser construída sem o recurso a essa tese realista.

Isso significa que a Lógica Intuicionista não está tratando da verdade em um sentido realista, tal qual argumentamos na seção 2.1. Ao contrário, Heyting reforça em diversas passagens que sua lógica é apropriada para o tratamento da demonstrabilidade construtiva. Ou, para usar a simbologia de (HEYTING, 1931), para tratar de proposições do tipo $+p$, isto é, p é demonstrável (TROELSTRA, 1990).

Na passagem abaixo, em uma carta de Heyting para Becker, Heyting deixa claro que sua lógica se aplica à proposições do tipo p é demonstrável. Isso significa, justamente, que sua lógica pretende tratar de um tipo de evidência factiva.

eine andere Sache ist es, dass die Anwendung meiner Logik auf konstruktive Fragen beschränkt ist. Was ich damit meine, möge das folgende Beispiel erhellen. Es seien zwei Folgen von reellen

Zahlen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ vorgelegt. Die Aussage 'Für jedes i ist $a_i = b_i$ ' lässt zweierlei Auffassung zu. a). Sie kann die Aufgabe bedeuten, einen allgemeinen Beweis zu suchen, der sich bei der Wahl eines bestimmten Index i zu einen Beweis für $a_i = b_i$. spezialisiert; b) man kann darunter die Erwartung verstehen, dass es, wenn man immer wieder einen Index i beliebig wählt, jedesmal gelingen wird, $a_i = b_i$ zu beweisen. Der Unterschied ist klar, wenn man auf a) und b) die Negation anwendet. Es wäre denkbar, dass die Annahme eines Beweises wie unter a) gefördert, als widerspruchsvoll erwiesen wäre, ohne dass dieser Widerspruch auch die Annahme unter b) treffen würde. Meine Logik gilt dann, wenn jede Aussage in der Art wie unter a) verstanden wird; die Logik der nicht-konstruktiven Erwartungen b) würde sich viel verwickelter gestalten; ich halte ihre Aufstellung nicht für sehr fruchtbar.... (TROELSTRA, 1990, p.8) ²

Contudo, se a Lógica Intuicionista diz respeito não a verdade, mas a alguma noção relacionada a prova construtiva, uma asserção p não pode significar o mesmo para o lógico clássico e para o lógico intuicionista. De fato, enquanto fornecer o valor designado para p (isto é, $v(p) = 1$) significa p é verdadeira na Lógica Clássica, o mesmo não ocorre na Lógica Intuicionista: para Heyting, a asserção p na Lógica Intuicionista significa “nós sabemos como provar p ”:

To satisfy the intuitionistic demands, the assertion must be the observation of an empirical fact, that is, of the realization of the expectation expressed by the proposition p . Here, then, is the *Brouwerian assertion* of p : *It is known how to prove p* . We will denote this by $\vdash p$. (HEYTING, 1930, p. 307)

² Em tradução livre: “Outra questão é que a aplicação da minha lógica está limitada a questões construtivas. O que quero dizer com isso pode ser esclarecido pelo seguinte exemplo. Suponha-se que duas sequências de números reais $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ sejam apresentadas. A afirmação ‘Para cada i , $a_i = b_i$ ’ pode ser entendida de duas maneiras. a) Pode significar a tarefa de buscar uma prova geral que, ao escolher um determinado índice i , se especialize em uma prova para $a_i = b_i$. b) Pode ser entendida como a expectativa de que, ao escolher repetidamente um índice i arbitrariamente, será possível provar $a_i = b_i$ em cada caso. A diferença é clara quando se aplica a negação a a) e b). É concebível que a suposição de uma prova como em a) se mostre contraditória, sem que essa contradição também afete a suposição em b). Minha lógica é válida quando cada afirmação é entendida da maneira como em a); a lógica das expectativas não construtivas b) seria muito mais complexa; não considero sua formulação muito frutífera...”

Vale destacar qual é a noção de demonstrabilidade adotada. Para o intuicionista, quando nós dizemos $\vdash p$ nós estamos dizendo que possuímos um algoritmo para provar p construtivamente. É apenas a partir do momento em que fornecemos um algoritmo para construir p que podemos asserir p . Não faz sentido, para o intuicionista, dizer que p já era verdadeira e só agora o provamos, ou que p já tinha a característica de ser demonstrável, mas só agora foi demonstrado. Na Lógica Intuicionista, p receberia o valor 0 (isto é, $v(p) = 0$) enquanto tal algoritmo não fosse fornecido. Uma vez que saibamos como construir p , por outro lado, p passa a poder ser asserido (isto é, $v(p) = 1$).

Precisamente, quando afirmamos, ao longo deste trabalho, que há uma prova construtiva disponível para p , queremos dizer o mesmo: p pode ser demonstrada construtivamente e nós sabemos como fazê-lo. Esta é, portanto, uma forte forma de evidência que se pode ter para p : uma evidência factiva.

É preciso notar, contudo, que isso difere de afirmar que p é verdadeira. Com efeito, para o intuicionista toda proposição recebe o valor 0 até que seja demonstrada construtivamente. Caso interpretássemos a asserção intuicionista como significando verdade, como ocorre na Lógica Clássica, teríamos um cenário contra-intuitivo: estaríamos afirmando que uma proposição p era falsa em um dado tempo t_0 , e teria passado a ser verdadeira em um dado tempo t_1 , quando tivesse sido demonstrada construtivamente. É de fato mais plausível acompanhar Heyting e interpretar a asserção intuicionista como se referindo a disponibilidade de prova construtiva, e não a verdade da proposição. A substituição da expressão “disponibilidade de prova construtiva” pela expressão “evidência factiva” também cumpre este papel: em um

dado tempo t_0 , antes de qualquer prova, não haveria evidência factiva disponível para p (isto é, $v_{t_0}(p) = 0$). Todavia, após p ser provada construtivamente em t_1 , uma evidência factiva para p passaria a estar disponível (isto é, $v_{t_1}(p) = 1$).

Se, por outro lado, obtivermos uma prova não construtiva de p (mas não uma prova construtiva), poderemos concluir que p é uma proposição classicamente verdadeira, e que, portanto, $\neg p$ não é demonstrável. Com efeito, se $\vdash_{CL} p$, então $\vdash_{INT} \neg\neg p$ ³. Não seria coerente, portanto, que um lógico intuicionista dissesse, diante disso, que p é uma proposição falsa, em um sentido realista. Entretanto, é razoável que ele sustente que na Lógica Intuicionista $v(p) = 0$. Com efeito, se não há evidência factiva para p , p não pode ser asserido na Lógica Intuicionista.

A interpretação de Heyting nos fornece uma abordagem desejável para o pluralismo lógico: uma leitura da Lógica Intuicionista enquanto cálculo de uma propriedade ligada a prova construtiva, que se diferencia da verdade. Se a Lógica Intuicionista não trata da verdade nem da realidade, ela não entra em conflito com a Lógica Clássica enquanto descrição da realidade. Abre-se, assim, caminho para conciliação entre uma visão pluralista da lógica e uma visão realista acerca da Lógica Clássica.

Também a interpretação de (KOLMOGOROV, 2002) nos é adequada. Embora tenha repercutido menos por ser escrita em língua russa, como observa (TROELSTRA, 1990), foi de Andrei Kolmogorov a primeira formalização de um fragmento da Lógica Intuicionista. Kolmogorov entendia como objeto da Lógica Intuicionista os problemas – o que também consiste em uma interpretação epistêmica e não ontológica da lógica.

³ Onde CL representa a Lógica Clássica (*Classical Logic*) e INT representa a Lógica Intuicionista.

Assim como Heyting ofereceu uma definição informal de prova na Lógica Intuicionista através do significado dos operadores lógicos, Kolmogorov apresentou o significado dos operadores lógicos com base na ideia de que toda fórmula da Lógica Intuicionista designa um problema.

If a and b are two problems, then $a \wedge b$ designates the problem “to solve both problems a and b ”, while $a \vee b$ designates the problem “to solve at least one of the problems a and b ”. Furthermore, $a \supset b$ is the problem “to solve b provided that the solution for a is given” or, equivalently, “to reduce the solution of b to the solution of a ” [...] $\neg a$ designates the problem “to obtain a contradiction provided that the solution of a is given” [...] $(x)a(x)$ stands in general for the problem “to give a general method for the solution of $a(x)$ for every single value of x ”. (KOLMOGOROV, 1932, p. 59)

Assim como Heyting não define prova, Kolmogorov não define problema, fornecendo apenas alguns exemplos (KOLMOGOROV, 1932). É interessante, contudo, notar as similitudes entre as duas interpretações. Assim como ocorria na interpretação de Heyting, a rejeição do princípio do terceiro excluído fica clara com a definição acima: se a fórmula $A \vee \neg A$ significa “resolver ao menos um dos problemas, A ou $\neg A$ ”, ela certamente não vale para qualquer A . Afinal, existem problemas sem solução conhecida.

A interpretação de Kolmogorov também parece compatível com nosso pluralismo. Com efeito, um cálculo de problemas não precisa entrar em conflito com um cálculo da preservação de verdade. De fato, um lógico clássico também reconheceria que não podemos, para qualquer proposição p , dizer que temos uma solução para o problema p ou uma solução para $\neg p$. A Lógica Intuicionista, entendida dessa maneira, não é propriamente uma lógica rival da Lógica Clássica, mas uma lógica que trata da preservação de outra propriedade de proposições. Enquanto a Lógica

Clássica trata da questão de se a verdade da conclusão se segue da verdade das premissas, a Lógica Intuicionista, nos termos de Kolmogorov, trata da questão de se a solução para o problema da conclusão é derivável a partir da suposição de uma solução para os problemas das premissas.

As interpretações de Heyting e Kolmogorov, na verdade, são equivalentes, como reconheceu o próprio Heyting (HEYTING, 1958). Argumentamos que nos dois casos podemos entender a asserção intuicionista como designando disponibilidade de evidência factiva. Isto é, uma proposição p na Lógica Intuicionista não significaria “ p é verdadeira”, mas “temos evidência factiva para p ”.

A partir dessa leitura, nossa proposta pluralista se torna mais compreensível. Com efeito, poder-se-ia pensar que diferentes lógicas estivessem discutindo sobre a possibilidade ou não de se derivar uma conclusão a partir de um conjunto de premissas. Por exemplo, considere o argumento abaixo:

$$A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \vdash B$$

Poder-se-ia pensar que a divergência entre o lógico clássico e o lógico intuicionista consistiria em saber se podemos ou não derivar B a partir de $A \rightarrow B$ e $\neg A \rightarrow B$. Argumentamos, contudo, que esta interpretação negligencia o mais importante: o que significa a asserção B que pretendemos concluir. Efetivamente, se estamos falando da verdade de B , especialmente em uma noção transcendente de verdade, como argumentamos na seção 2.1, então a inferência parece difícil de se refutar: se é verdade que A implica B , e que $\neg A$ implica B , então não é possível que B não seja verdadeira.

Mas se, por outro lado, a asserção B for a asserção intuicionista, então, na interpretação de Heyting, o que se estaria dizendo é que:

Tenho uma construção que transforma qualquer prova de A em uma prova de B . Tenho uma construção que transforma qualquer prova de $\neg A$ em uma prova de B . Logo, tenho um algoritmo para demonstrar (construtivamente) B

O raciocínio acima é simplesmente incorreto. Não há controvérsias entre o lógico clássico e o lógico intuicionista aqui, mas de uma interpretação diferente dos conectivos. Isto é, trata-se de duas inferências distintas. Dito de outra forma, temos aqui o tratamento de diferentes propriedades de proposições que podem ser preservadas das premissas para a conclusão. A propriedade em questão pode ser a verdade, como na Lógica Clássica, ou a disponibilidade de evidência factiva, como na Lógica Intuicionista, ou ainda a disponibilidade de evidência não-factiva, como em BLE. Esta foi, efetivamente, a defesa que fizemos na subseção 2.2.2, agora iluminada pela discussão intuicionista. Não pretendemos, com isso, argumentar que toda lógica não-clássica possa ser interpretada dessa forma. Argumentamos, contudo, que ao menos algumas lógicas, como a Lógica Intuicionista e a Lógica Básica da Evidência (ver seção 3.2), podem ser compreendidas como cálculos de propriedades diferentes da verdade.

Com efeito, uma interpretação da Lógica Intuicionista compreendida como um cálculo de evidências factivas se mostra epistemologicamente plausível para o lógico clássico. Como observa (DUBUCS, 2008), a Lógica Intuicionista e a Lógica Clássica realmente alcançaram uma coexistência pacífica.

Actually, the efforts that have been made to make intuitionistic *logic* intelligible, acceptable, or even advantageous to classically-minded people may have been quite successful (there is no need to be a Brouwerian zealot to understand that ‘the object a satisfies Φ ’ is more informative than ‘ $\exists x\Phi x$ ’) (DUBUCS, 2008, p. 52)

De fato, esta interpretação epistêmica da Lógica Intuicionista é compatível com a Lógica Clássica. Isso não significa, é claro, que a filosofia da matemática construtivista seja compatível com a filosofia da matemática clássica. Ainda assim, compreender o que pode ser conhecido construtivamente, bem como investigar a matemática sem o recurso à suposição de sua existência transcendente (que independe de nós), são justificativas adequadas para a Lógica Intuicionista – que se mostra interessante mesmo para aquele que adota uma filosofia da matemática realista. Acreditamos que tal justificativa tenha valor filosófico o suficiente para que se possa designar a Lógica Intuicionista como uma lógica correta. Dessa forma, nossa abordagem se mostra pluralista, por admitirmos que existe mais de uma lógica correta – ainda que isso não valha para o plano ontológico, onde acreditamos existir apenas uma lógica que descreve corretamente a realidade. Com efeito, embora a justificativa ontológica tenda a ocupar um lugar mais nobre, o valor epistêmico de uma lógica não pode ser negligenciado. Com isso, argumentamos que uma justificativa epistêmica para lógicas não-clássicas seja o suficiente para a adoção de uma perspectiva pluralista acerca da lógica.

3.2 A Lógica Básica da Evidência (BLE)

Há também uma lógica paraconsistente cuja interpretação pretendida se dá em termos de preservação de evidência: a *Basic Logic of Evidence (BLE)*^{4,5}. Como comentamos na subseção 2.2.2, nossa forma de pluralismo deriva da pluralidade de propriedades que podem ser preservadas das premissas para a conclusão. Por isso, *BLE* consiste em uma lógica que por sua própria interpretação pretendida já se candidata ao nosso pluralismo – já que não tem o propósito de preservar verdade e concorrer com a Lógica Clássica.

Em *BLE*, a evidência é interpretada como um dado que pode ser inconclusivo – que pode estar errado. Dessa forma, ter evidência para uma proposição A é o mesmo que ter uma razão para crer que A é verdade. Mesmo que talvez estejamos enganados e A se revele falsa. Uma evidência para A não implica nem mesmo em uma crença em A . Pode ser o caso em que simplesmente reconheçamos a existência de alguma razão para se crer em A , ainda que talvez também tenhamos razão para crer em $\neg A$ – isto é, nós podemos tanto ter razões para crer que A é uma proposição verdadeira, quanto razões para crer que A é uma proposição falsa. Isso não necessariamente significa que nós cremos tanto em A quanto em $\neg A$. O mais razoável, de fato, seria que suspendêssemos o juízo quanto a verdade de A diante de dados contraditórios. O que não é razoável, por outro lado, seria que aplicássemos o princípio da explosão diante dos dados contraditórios A e $\neg A$. Por isso, *BLE* é uma lógica paraconsistente, não contando com o princípio da explosão ($A \wedge \neg A \vdash B$) como um de seus axiomas

⁴ Lógica Básica da Evidência. Ver (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017).

⁵ A lógica *BLE* é equivalente a mais conhecida Lógica *N4* de Nelson. Para mais informações, consulte (FITTING, 2017) pg. 1150.

(isto é, $A \wedge \neg A \not\vdash_{BLE} B$).

Note também que estamos falando de um tipo de evidência muito diferente daquela evidência factiva que tínhamos na Lógica Intuicionista. Enquanto na Lógica Intuicionista nós só podíamos asserir A quando A já havia sido demonstrada construtivamente, nós temos aqui um tipo muito mais fraco de evidência: uma evidência sujeita ao erro. Por isso, ela não é factiva. Assim, seguindo a terminologia de (FITTING, 2017), nos referiremos a evidência de BLE como uma evidência não-factiva.

Ao raciocinar sobre evidências não-factivas, contudo, percebe-se que, por vezes, temos razão para crer tanto em A quanto em $\neg A$, e, por vezes, nós não temos razão para crer em nenhum dos dois. Isso porque, às vezes, não há dado algum nem sobre A , nem sobre $\neg A$. Por isso, BLE também não conta como um de seus axiomas o princípio do terceiro excluído ($A \vee \neg A$) – pois não podemos para qualquer proposição A garantir que tenhamos evidência não-factiva para A ou evidência não-factiva para $\neg A$.

Em BLE , quando dizemos que A vale, isto é, quando concedemos o valor designado para A (quando $A = 1$), estamos apenas dizendo que existem evidências não-factivas – isto é, evidências que podem estar erradas – de que A é o caso. O mesmo ocorre quando dizemos que a negação de A vale (quando $\neg A = 1$) – isso significa apenas que temos evidências não-factivas para $\neg A$. Dessa forma, mesmo a negação é vista positivamente. A negação de A , isto é, $\neg A$, não consiste em uma ausência de A . Mas, em vez disso, em uma presença de uma evidência não-factiva de que A seja falso.

Nota-se, assim, que a paraconsistência em BLE não deriva de uma con-

tradição na realidade. Não há, em *BLE*, o compromisso com verdades contraditórias. O que existe, em vez disso, são dados contraditórios que nos deparamos no dia a dia e nas ciências. Alguns dados nos fornecem razões para crer em A , enquanto outros dados nos fornecem razões para crer em $\neg A$. Em alguns cenários temos razões para crer em ambos ($A = 1$ e $\neg A = 1$), em outros cenários podemos não ter razões para crer em nenhum dos dois ($A = 0$ e $\neg A = 0$).

Devido à visão positiva da negação, um sistema de dedução natural para *BLE* é melhor apresentado com regras para eliminar e introduzir a negação para cada operador lógico. Isso ocorre com base na ideia de refutação. Por exemplo, como veremos a seguir, a negação de A é condição suficiente para se refutar $A \wedge B$. Por isso, se tivermos uma evidência para $\neg A$, nós teremos uma evidência para $\neg(A \wedge B)$. Isto é, a inferência que leva de $\neg A$ para $\neg(A \wedge B)$ preserva evidência não-factiva.

Um raciocínio análogo se aplica às regras de introdução e eliminação da negação para cada operador lógico. Um sistema de dedução natural para *BLE* conta ainda com as regras usuais de introdução e eliminação de cada operador (\vee , \wedge , \rightarrow) e a regra de dupla negação. Evidentemente, o sistema não poderia contar com uma regra genérica de introdução da negação, como $(A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \vdash \neg A)$, pois a partir dela seria possível derivar o princípio da explosão. Além disso, tal regra contrariaria o espírito de *BLE*: uma proposição A pode implicar proposições contraditórias B e $\neg B$ sem que, com isso, tenhamos uma evidência não-factiva de $\neg A$. Reproduziremos, abaixo, o sistema de dedução natural para *BLE* apresentado por (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017).

Definição 3.2.1 *Lógica Básica da Evidência*

Seja L_1 uma linguagem com um número enumerável de letras sentenciais $\{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots\}$, o conjunto de conectivos $\{\rightarrow, \vee, \wedge, \neg\}$, e os sinais de parêntesis. O conjunto de fórmulas é obtido indutivamente da maneira usual. A Lógica Básica da Evidência (BLE) é definida sobre a linguagem L_1 seguindo as seguintes regras de dedução natural, onde A , B e C são metavariables que varrem fórmulas e $[X]$ significa que a hipótese X foi descarregada:

Regras de Dedução Natural para BLE

Introdução da Conjunção:

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} I_{\wedge}$$

Introdução da Disjunção:

$$\frac{A}{A \vee B} I_{\vee} \qquad \frac{B}{A \vee B} I_{\vee}$$

Introdução da Implicação:

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} I_{\rightarrow}$$

Eliminação da Conjunção:

$$\frac{A \wedge B}{A} E_{\wedge} \qquad \frac{A \wedge B}{B} E_{\wedge}$$

Eliminação da Disjunção:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} E_{\vee}$$

Eliminação da Implicação:

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} E_{\rightarrow}$$

Introdução da negação para a conjunção:

$$\frac{\neg A}{\neg(A \wedge B)} I_{\neg \wedge} \qquad \frac{\neg B}{\neg(A \wedge B)} I_{\neg \wedge}$$

Introdução da negação para a disjunção:

$$\frac{\neg A \quad \neg B}{\neg(A \vee B)} I_{\neg \vee}$$

Introdução da negação para a implicação:

$$\frac{A \quad \neg B}{\neg(A \rightarrow B)} I_{\neg \rightarrow}$$

Eliminação da negação para a disjunção:

$$\frac{\neg(A \vee B) \quad \neg A}{\neg A} E_{\neg \vee} \qquad \frac{\neg(A \vee B) \quad \neg B}{\neg B} E_{\neg \vee}$$

Eliminação da negação para a implicação:

$$\frac{\neg(A \rightarrow B)}{A} E_{\neg \rightarrow} \quad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\neg B} E_{\neg \rightarrow}$$

Eliminação da negação para a conjunção:

$$\frac{\neg(A \wedge B) \quad \begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [\neg B] \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} E_{\neg \wedge}$$

Dupla Negação:

$$\frac{A}{\neg\neg A} DN \quad \frac{\neg\neg A}{A} DN$$

Nos capítulos anteriores advogamos por uma perspectiva filosófica segundo a qual diferentes propriedades de proposições podem ser preservadas das premissas para a conclusão, sendo, segundo esta linha argumentativa, dessa pluralidade de propriedades de proposições que advém a justificativa para uma pluralidade de lógicas (ainda que não seja possível harmonizar todas as lógicas, como argumentamos na seção 2.2), em uma forma de pluralismo capaz de conciliar verdade, evidência factiva e evidência não-factiva. Esta forma de pluralismo tem uma correspondência no âmbito técnico: trata-se do emprego de lógicas modais para representar estas propriedades.

Com efeito, quando falamos da Lógica Intuicionista como preservadora de evidência factiva, estamos falando de um “modo”. De fato, a expressão “existe evidência factiva para p ” (ou mesmo, na terminologia de Heyting, “temos um algoritmo para provar p ”) é similar a outros modos como “é necessário que p ” (lógica modal), “é obrigatório que p ” (lógica deôntica), “sempre será o caso que p ” (lógica

temporal), ou “ x acredita que p ” (lógica doxástica), entre outras⁶. Um raciocínio análogo se aplica à leitura epistêmica da paraconsistência, onde uma lógica paraconsistente preserva disponibilidade de evidência não-factiva, como na Lógica Básica da Evidência (ver seção 3.2).

A leitura da Lógica Intuicionista e da Lógica Básica da Evidência em termos modais é interessante porque torna estas lógicas ainda mais compreensíveis e aceitáveis para um lógico clássico. Afinal, as lógicas modais tradicionais são clássicas – e o lógico modal já aceita diferentes modos de proposições, como apresentamos acima. Esta é uma maneira de formalizar nossa filosofia pluralista da lógica, onde podemos ser realistas acerca da Lógica Clássica e ainda aceitar outras lógicas como corretas de uma forma filosoficamente significativa.

Deste modo, em vez de duas ou mais lógicas divergirem se uma conclusão se segue ou não de um conjunto de premissas, interpretamos duas lógicas não-clássicas como tratando de diferentes modos como uma conclusão pode ou não se seguir de um conjunto de premissas. Assim, podemos dizer que a verdade de uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas Γ , mas talvez a disponibilidade de evidência factiva para A não se siga da disponibilidade de evidência factiva para Γ ; ou, em outro cenário, talvez a disponibilidade de evidência não-factiva para A não se siga da disponibilidade de evidência não-factiva para Γ . Esta leitura tem o mérito de não rivalizar com a abordagem clássica da inferência lógica. Em vez disso, estamos lendo as proposições de um modo mais rico, considerando não apenas se uma proposição p é verdadeira ou falsa, mas se temos algum tipo de evidência (factiva ou não-factiva)

⁶ Para uma apresentação geral de diferentes lógicas modais, consulte (GARSON, 2018).

para p .

Esse modo de ler proposições de algumas lógicas não-clássicas tem similaridades com os modos de lógicas modais. Ocorre, porém, que se quisermos expressar adequadamente a Lógica Intuicionista ou a Lógica Básica da Evidência, não basta selecionar um sistema modal e interpretar seu operador modal \Box como significando “existe evidência (factiva ou não-factiva, dependendo da lógica) para”. Do contrário, acabaríamos com sistemas muito estranhos que não representariam a lógica pretendida. Por exemplo, mesmo o sistema modal normal mais fraco (K) conta com a regra de necessitação, que diz que se A é um teorema, então $\Box A$ é um teorema (Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$). Como esse sistema é clássico, e a Lógica Clássica conta com o terceiro excluído, segue-se daí que $\Box(p \vee \neg p)$ é uma fórmula válida. Assim, se estivéssemos apenas lendo o operador modal como significando “existe evidência factiva para”, não teríamos como representar a rejeição ao terceiro excluído.

É preciso, portanto, encontrar um método para realizar uma conversão adequada de uma fórmula da lógica de origem em uma fórmula de nosso sistema modal. É apenas através dessa conversão, a que chamamos *mergulho* (em inglês: *embedding*), que poderemos representar adequadamente as noções de disponibilidade de evidência factiva e de disponibilidade de evidência não-factiva em lógicas modais. Na seção 3.3 apresentamos um método já conhecido que realiza o mergulho da Lógica Intuicionista no sistema modal $S4$. Na seção 3.2 apresentamos a Lógica Básica da Evidência (BLE), cuja interpretação pretendida se dá em termos de preservação de evidência não-factiva, para na seção 3.4 apresentarmos um método que realiza o mergulho de BLE no sistema modal $KX4$ (consulte (FITTING, 2017) para mais detalhes).

3.3 O mergulho da Lógica Intuicionista em $S4$

A leitura da Lógica Intuicionista, enquanto uma lógica que preserva disponibilidade de evidência factiva, pode ser representada pelo mergulho (*embedding*) que (GÖDEL, 1986) realizou da Lógica Intuicionista no sistema modal $S4$, no qual o operador modal \Box foi interpretado como $\Box A = \text{“}A \text{ é demonstrável”}$.

Alguns trechos desta seção, bem como da seção 3.4, da seção 3.5 e do capítulo 4, fazem parte de um artigo nosso⁷, em inglês, submetido para publicação (CARNIELLI et al., 2024).

Independentemente da fidelidade do mergulho de Gödel aos compromissos filosóficos do intuicionismo, a interpretação por ele adotada representa uma propriedade mais forte que verdade, adequada aos nossos propósitos de combinar três propriedades de proposições em um único sistema. Contudo, é preciso uma ressalva: a noção de demonstrabilidade envolvida deve ser compreendida como “demonstrável por quaisquer meios corretos”, e não como “demonstrável em determinado sistema formal”. Isso porque é possível expressar no sistema que $\Box(\perp) \rightarrow (\perp)$ é uma fórmula válida. De fato, $\Box(\perp) \rightarrow (\perp)$ é uma instância do axioma $(T)(\Box A \rightarrow A)$, presente em $S4$ ⁸. Como \perp , por definição, é sempre falso, segue-se daí, por *modus tollens*, $\neg\Box\perp$. Assim, se tomássemos $\Box A$ como significando “ A é demonstrável em determinado sistema formal”, a leitura de $\neg\Box\perp$ seria “não é o caso que \perp é demonstrável em determinado sistema formal”. Isto é, nós teríamos provado, no interior do sistema, que o sistema é consistente. Mas provar a consistência de um sistema no interior dele

⁷ O artigo citado foi escrito por Walter Carnielli, Lorenzo Frade, Abilio Rodrigues e Juliana Bueno-Soler.

⁸ Ver Definição 3.3.2 para os Axiomas de $S4$.

próprio é impossível, como mostra o segundo teorema da incompletude de Gödel (ver (GÖDEL, 1986) e (GÖDEL, 1992)). Por isso, a noção de demonstrabilidade adotada precisa ser vaga: $\Box A$ significa “ A é demonstrável por quaisquer meios corretos” (ver (TROELSTRA, 1986)). Note que esta é uma noção mais forte que verdade, uma vez que se A foi demonstrada por qualquer meio correto, então A é verdadeira. Contudo, A poderia ser verdadeira sem ter sido demonstrada. Isto é, uma demonstração correta de A implica na verdade de A , mas a verdade de A não implica na posse de uma demonstração correta de A . Isso significa que a noção de “demonstrabilidade por quaisquer meios corretos” é mais forte que a noção de “verdade”, de modo a servir aos nossos propósitos.

Note, ainda, que podemos facilmente adaptar a interpretação de Gödel de $\Box A$ como “ A é demonstrável por quaisquer meios corretos” para $\Box A =$ “nós temos evidência factiva para A ”. Com efeito, uma demonstração é precisamente uma evidência factiva – uma evidência de acordo com a qual não resta mais possibilidade de erro. E é precisamente isso que o Axioma da factividade (T) diz: ($\Box A \rightarrow A$). Isto é, em nossa leitura: se nós temos evidência factiva para A , então A é verdadeira.

O mergulho de Gödel da Lógica Intuicionista em $S4$ consiste em um método de tradução no qual qualquer fórmula F da Lógica Intuicionista pode ser convertida em uma fórmula F' de $S4$. Gödel mostrou que se F é válida na Lógica Intuicionista, então F' é válida em $S4$. Também a conversa é verdadeira: se F' é válida em $S4$, então F é válida na Lógica Intuicionista, como demonstrou (MCKINSEY; TARSKI, 1948). Dessa forma, temos que:

$$\vDash_{INT} F \quad \text{se, e somente se} \quad \vDash_{S4} F'$$

O sistema $S4$ é uma extensão da Lógica Proposicional Clássica, acrescida do operador modal \Box e dos axiomas abaixo. Interpretaremos o operador modal de $S4$ como “temos evidência factiva para”. Assim, lemos $\Box A$ como *Temos evidência factiva para A* .

Como o sistema modal $S4$ é uma extensão do sistema modal K , o sistema modal normal mais simples, nós apresentaremos primeiro o sistema K , para depois estendê-lo a $S4$. O operador \Diamond é definido de maneira usual:

$$\Diamond A \stackrel{\text{Def}}{=} \neg \Box \neg A$$

Usaremos parêntesis para distinguir axiomas de sistemas modais. Por exemplo, *Axioma(K)* possui parêntesis, enquanto o sistema modal K não possui. Os demais axiomas apresentados, como (4), (T) e (X) seguem a mesma notação.

Definição 3.3.1 (*O sistema modal K*)

Seja L_2 uma linguagem com um conjunto enumerável de letras sentenciais $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, o conjunto de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, e o operador modal $\{\Box\}$, além de parênteses. O conjunto de fórmulas de L_2 é obtido recursivamente da maneira usual. A lógica K é definida sobre a linguagem L_2 pelo seguinte cálculo de Hilbert:

Axiomas-esquemas:

1. *Axiomas da Lógica Proposicional Clássica: todo axioma da Lógica Proposicional Clássica é também um axioma de K ;*
2. *Axioma de distribuição (K): $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;*

Regras de Inferência:

1. *Regra de necessitação:* Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$;
2. *Substituição Uniforme:* Se $\vdash A$, e p é qualquer variável atômica ocorrendo em A , então a fórmula bem formada que resulta da substituição uniforme de p por B (denotada por $A[p/B]$) é tal que $\vdash A[p/B]$.
3. *Modus Ponens:*

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

Definição 3.3.2 (*O sistema modal S4*)

O sistema S4 é obtido a partir de K adicionando os seguintes axiomas-esquema ao seu cálculo de Hilbert:

Axiomas-esquemas:

1. *Axioma (4):* $\Box A \rightarrow \Box \Box A$;
2. *Axioma (T):* $\Box A \rightarrow A$.

Gödel mergulhou a Lógica Intuicionista em S4 por meio de uma função representada em uma tabela de conversão. Apresentaremos esta “tabela” na forma de uma definição.

Definição 3.3.3 *Mergulho da Lógica Intuicionista em S4*

Sejam A e B metavariables que varrem fórmulas, seja p uma letra proposicional, seja X^f a tradução da fórmula X . Então, o mergulho de qualquer formula A da lógica intuicionista em $S4$, A^f , é obtido por meio da função abaixo.

$$1. p^f \equiv \Box p$$

$$2. (\neg A)^f \equiv \neg \Box A^f$$

$$3. (A \rightarrow B)^f \equiv \Box A^f \rightarrow \Box B^f$$

$$4. (A \vee B)^f \equiv \Box A^f \vee \Box B^f$$

$$5. (A \wedge B)^f \equiv \Box A^f \wedge \Box B^f$$

Por exemplo, caso se queira traduzir $p \rightarrow \neg\neg p$ da Lógica Intuicionista para $S4$, note, pela cláusula 1, que $p^f = \Box p$. Observe agora que, pela cláusula 2, $(\neg p)^f = \neg \Box(p^f)$. Substituindo (p^f) pela sua tradução, temos então que $(\neg p)^f = \neg \Box \Box p$. Aplicando-se, então, a cláusula 2 a $\neg\neg p$, temos que $(\neg\neg p)^f = \neg \Box(\neg p)^f$. Substituindo $(\neg p)^f$ por sua tradução, temos que $(\neg\neg p)^f = \neg \Box \neg \Box \Box p$. Agora, pela cláusula 3, $(p \rightarrow \neg\neg p)^f = \Box p^f \rightarrow \Box(\neg\neg p)^f$. Substituindo p^f e $(\neg\neg p)^f$ pelas traduções apresentadas, temos que $(p \rightarrow \neg\neg p)^f = \Box \Box p \rightarrow \Box \neg \Box \neg \Box \Box p$. Como esperado, $\Box \Box p \rightarrow \Box \neg \Box \neg \Box \Box p$ é válida em $S4$, assim como $p \rightarrow \neg\neg p$ é válida na Lógica Intuicionista.

Note, contudo, que $S4$ consiste em uma extensão da Lógica Clássica. Isso significa que em $S4$ valem todos os teoremas da Lógica Clássica, inclusive $P \vee \neg P$. Além disso, pela regra de necessitação (ver 3.3.1), temos que $\Box(P \vee \neg P)$ é um teorema de $S4$. Em nossa leitura de \Box como “temos evidência factiva para”, essa fórmula

significaria que nós temos evidência factiva para $P \vee \neg P$. Isso pode parecer contra-intuitivo para quem pretende lidar com as intuições intuicionistas. Observe, contudo, que para representar o $P \vee \neg P$ intuicionista não basta colocar o símbolo \Box à esquerda da fórmula. Será preciso converter toda a fórmula da Lógica Intuicionista em $S4$ usando a definição acima. De fato, a conversão de $P \vee \neg P$ da Lógica Intuicionista em $S4$, seguindo a Definição 3.3.3 acima, é $\Box\Box P \vee \Box\neg\Box\Box P$, que não é uma fórmula válida em $S4^9$.

3.4 O mergulho de BLE em $KX4$

Analogamente ao mergulho realizado por Gödel da Lógica Intuicionista em $S4$ (ver seção 3.3), Fitting realizou um mergulho de BLE no sistema modal $KX4$ (FITTING, 2017). Ao contrário de $S4$, $KX4$ não possui o axioma da facticidade (Axioma $(T) = \Box A \rightarrow A$). Em $S4$ o axioma da facticidade era apropriado porque nós interpretávamos o operador modal como se referindo a evidências factivas. De fato, se nós temos uma evidência factiva para A , então a proposição A é verdadeira. Contudo, em $KX4$ nós pretendemos lidar com a noção de evidência não-factiva. A disponibilidade de evidência não-factiva para A certamente não implica a verdade de A .

Ao contrário de $S4$, em $KX4$ nós podemos nos enganar: nós podemos ter evidências para proposições falsas. Por isso, $KX4$ conta, em vez do axioma (T) , com o axioma (X) , também conhecido como $(C4)$, que diz:

⁹ Um modelo que serve de contraexemplo para a fórmula $\Box\Box P \vee \Box\neg\Box\Box P$ em $S4$ consiste em $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$; $R = \{w_0Rw_0, w_0Rw_1, w_0Rw_2, w_1Rw_1, w_1Rw_3, w_2Rw_2, w_3Rw_3\}$; $v_{w_0}(P) = 0$, $v_{w_2}(P) = 1$, $v_{w_3}(P) = 0$.

$$(X) \text{ (ou (C4))} \quad \Box\Box A \rightarrow \Box A$$

Como estamos lidando com diferentes sistemas modais, reservaremos o símbolo \Box para $S4$ e usaremos o símbolo \Box para nos referirmos ao operador modal de $KX4$. Considerando que pretendemos abordar a noção de evidência não-factiva, a qual é uma noção mais fraca que verdade (pois podemos ter evidências não-factivas para algo que, na verdade, é falso), a leitura intuitiva de $\Box P$ consiste em: existe evidência não-factiva disponível para P . Assim, o axioma (X) pode ser lido como “se existe evidência não-factiva de que existe evidência não-factiva para A , então existe evidência não-factiva para A ” – o que é razoável.

Embora $KX4$, a exemplo de $S4$, seja uma extensão de K , optamos por apresentá-lo por inteiro, em vez de estender K a $KX4$, uma vez que estaremos adotando símbolos diferentes em $KX4$ (\Box e \Diamond) daqueles usados quando definimos K (ver Definição 3.3.1). O operador \Diamond é definido de maneira usual:

$$\Diamond A \stackrel{\text{Def}}{=} \neg\Box\neg A$$

Definição 3.4.1 (*O sistema modal $KX4$*)

Seja L_3 uma linguagem com um conjunto enumerável de letras sentenciais $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, o conjunto de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, e o operador modal $\{\Box\}$, além de parênteses. O conjunto de fórmulas de L_3 é obtido recursivamente da maneira usual. Sejam A e B metavaráveis que varrem fórmulas. A lógica $KX4$ é definida sobre a linguagem L_3 pelo seguinte cálculo de Hilbert:

Axiomas-esquemas:

1. *Axiomas da Lógica Proposicional Clássica: todo axioma da Lógica Proposicional Clássica é também um axioma de $KX4$;*
2. *Axioma de distribuição (K): $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;*
3. *Axioma (4): $\Box A \rightarrow \Box \Box A$;*
4. *Axioma (X): $\Box \Box A \rightarrow \Box A$.*

Regras de Inferência:

1. *Regra de necessitação: Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$;*
2. *Substituição Uniforme: Se $\vdash A$, e p é qualquer variável atômica ocorrendo em A , então a fórmula bem formada que resulta da substituição uniforme de p por B (denotada por $A[p/B]$) é tal que $\vdash A[p/B]$.*
3. *Modus Ponens:*

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

Observe, contudo, que o axioma (X) é derivável do axioma (T) em $S4$ ¹⁰. Mais especificamente, trata-se de uma instância do axioma (T) com $(\Box A)$ substituindo A . Dessa forma, X é um teorema de $S4$, e o sistema $S4$ consiste em uma extensão do sistema $KX4$ (ou, em outras palavras, $KX4$ é um subsistema de $S4$).

¹⁰ Ver Definição 3.3.2 para o Axioma (T) e os demais axiomas de $S4$.

Assim como fez Gödel¹¹ ao mergulhar a Lógica Intuicionista em $S4$, Fitting também apresentou uma função que mergulha BLE em $KX4$. Contudo, ao contrário da Lógica Intuicionista, onde temos que lidar apenas com a presença e com a ausência de evidência factiva para uma proposição p ou uma fórmula F , em BLE nós precisamos lidar tanto com a ausência ou presença de evidências não-factivas a favor de uma proposição p , quanto com a ausência ou presença de evidências não-factivas contra uma proposição p (isto é, com a ausência ou presença de evidências não-factivas para $\neg p$).

Isso requer um esforço adicional para lidar com as negações, que, como vimos, são tratadas positivamente¹². Por isso, Melvin Fitting apresentou tanto uma função para evidências não-factivas contra uma proposição, quanto uma função para evidências não-factivas a favor de uma proposição¹³. Reproduzimos ambas funções abaixo. Suponha que para cada letra proposicional p existe uma letra \bar{p} que significa o oposto de p . Isto é, enquanto p transmite a informação de que p é verdadeira, \bar{p} transmite a informação de que p é falsa.

Definição 3.4.2 *Função para evidências não-factivas favoráveis.*

Sejam A e B metavaráveis que varrem fórmulas. Seja p uma letra proposicional.

1. $p^f \equiv \Box p$

¹¹ Apresentamos o mergulho de Gödel na Definição 3.3.3.

¹² Ver seção 3.2 para uma apresentação da Lógica Básica da Evidência.

¹³ A função para evidências não-factivas para uma proposição está disponível em (FITTING, 2017) p. 1153. A função para evidências não-factivas contra uma proposição está disponível em (FITTING, 2017) p. 1160.

$$2. (A \wedge B)^f \equiv \Box(A^f \wedge B^f)$$

$$3. (A \vee B)^f \equiv \Box(A^f \vee B^f)$$

$$4. (A \rightarrow B)^f \equiv \Box(A^f \rightarrow B^f)$$

Definição 3.4.3 *Função para evidências não-factivas desfavoráveis (evidências contrárias)*

.

Sejam A e B metavariables que varrem fórmulas. Seja p uma letra proposicional.

$$1. (X \wedge Y)^a = \Box(X^a \vee Y^a);$$

$$2. (X \vee Y)^a = \Box(X^a \wedge Y^a);$$

$$3. (X \rightarrow Y)^a = \Box(X^f \wedge Y^a);$$

$$4. (\neg X)^a = X^f;$$

$$5. (\neg X)^f = X^a;$$

$$6. p^a = \Box \bar{p}.$$

Contudo, como o próprio autor observa, é possível eliminar a necessidade de lidar com as evidências não-factivas contra uma proposição convertendo, primeiro, a fórmula à sua forma normal da negação. Nós seguiremos este método, apresentando primeiro uma função que converte qualquer fórmula X da Lógica Intuicionista em sua forma normal da negação, X^N . Em seguida, apresentamos o mergulho da Lógica Básica da Evidência (BLE) em $KX4$.

Definição 3.4.4 *Forma Normal da Negação*

Sejam A e B metavariables que varrem fórmulas. A Forma normal da negação de qualquer fórmula A , A^N , é obtida pela função abaixo.

1. $p^N \equiv p$
2. $(\neg p)^N \equiv \bar{p}$
3. $(A \wedge B)^N \equiv A^N \wedge B^N$
4. $(\neg(A \wedge B))^N \equiv (\neg A)^N \vee (\neg B)^N$
5. $(A \vee B)^N \equiv A^N \vee B^N$
6. $(\neg(A \vee B))^N \equiv (\neg A)^N \wedge (\neg B)^N$
7. $(A \rightarrow B)^N \equiv A^N \rightarrow B^N$
8. $(\neg(A \rightarrow B))^N \equiv A^N \wedge (\neg B)^N$
9. $(\neg\neg A)^N \equiv A^N$

Definição 3.4.5 *Mergulho da Lógica Básica da Evidência (BLE) em KX4*

Sejam A e B metavariables que varrem fórmulas. Seja p uma letra proposicional. O mergulho de qualquer fórmula A de BLE em KX4, A^k , é obtido da seguinte forma:

- 1) Converta a fórmula A de BLE em sua forma normal da negação, A^N , seguindo a Definição 3.4.4.
- 2) Em seguida, submeta a fórmula A^N à função 3.4.2. Isto é, obtenha $(A^N)^f$.

Com isso, temos um método para converter qualquer fórmula F de BLE em uma fórmula F' de $KX4$, tal que:

$$\models_{BLE} F \quad \text{se, e somente se} \quad \models_{KX4} F'$$

Dessa forma, analogamente ao que ocorre com a Lógica Intuicionista no mergulho de Gödel (ver seção 3.3), obtemos aqui uma interpretação modal da Lógica Básica da Evidência. Ao mergulhar BLE em $KX4$, podemos interpretar a paraconsistência de uma forma compatível com a Lógica Clássica, inclusive quando adotada uma perspectiva realista acerca da mesma, como discutido na seção 2.1. Com efeito, em vez de rivalizar com a Lógica Clássica acerca da adequação do princípio da explosão ($P \wedge \neg P \vdash Q$), pode-se interpretar que esta regra de inferência preserva verdade, mas que não preserva disponibilidade de evidência não-factiva. O mergulho apresentado nos fornece meios para tal interpretação. De fato, a conversão de $(P \wedge \neg P \vdash Q)$ de BLE para $KX4$ seria $\boxplus(\boxplus P \wedge \boxplus \overline{P}) \vdash \boxplus Q$. O que na leitura pretendida de \boxplus como “existe evidência não-factiva para” significaria que: se temos evidência não-factiva de que temos evidência não-factiva para P e para \overline{P} , então temos evidência não-factiva para Q . Um lógico clássico, ainda que endosse o princípio da explosão enquanto uma regra de inferência preservadora de verdade, pode concordar que a proposição acima é falsa: por vezes nós temos evidência não-factiva para P e evidência não-factiva para o oposto de P (isto é, \overline{P}), e disso não podemos concluir a presença de evidência não-factiva para toda proposição Q .

A divergência entre a Lógica Clássica e BLE , portanto, não é sobre quais princípios ou regras de inferência valem e quais não valem. A discordância é sobre que tipo de propriedade se está buscando preservar com estas regras de inferência.

Quando falamos de verdade, recorremos a certas regras. Quando passamos a falar sobre evidência não-factiva, precisamos recorrer a outras regras. O mergulho de *BLE* em *KX4*, que é uma extensão da Lógica Clássica, torna explícita esta distinção e harmoniza ambas lógicas por preservarem propriedades diferentes: enquanto uma é um cálculo da preservação de verdade, a outra é um cálculo da preservação de disponibilidade de evidência não-factiva.

3.5 Uma prova de completude para *S4* e para *KX4*

A completude de *S4* e *KX4* pode ser demonstrada simultaneamente por meio de uma prova ao estilo Henkin. Uma prova geral foi apresentada por (CARNIELLI; PIZZI, 2008), seguindo (LEMMON; SCOTT, 1977), onde a completude é demonstrada para diversas extensões de *K*.

Alguns trechos dessa seção, bem como da seção 3.3, da seção 3.4 e do capítulo 4, fazem parte de um manuscrito, em inglês, submetido para publicação (CARNIELLI et al., 2024).

O sistema *K* é o sistema modal normal mais simples, consistindo em uma extensão da Lógica Clássica com a regra de necessitação e o axioma de distribuição. Como é usual, assumimos que *K* e todas as suas extensões, incluindo, é claro, *S4* e *KX4*, estão fechados sob *Modus Ponens* e Substituição Uniforme.

A prova apresentada por (CARNIELLI; PIZZI, 2008), que explicaremos nesta seção, consiste em uma prova geral da completude para qualquer extensão de *K* com um número finito de axiomas no formato $G^{k,l,m,n}$, onde:

$$G^{k,l,m,n}: \quad \diamond^k \Box^l p \rightarrow \Box^m \diamond^n p$$

Cada índice do esquema acima representa o número de repetições dos operadores modais¹⁴. Por exemplo, se o axioma começar com dois \diamond à esquerda, o índice k será dois. Se não houver nenhum \diamond à esquerda, o índice k será zero. Note que tanto os axiomas de $KX4$ ¹⁵, quanto os axiomas de $S4$ ¹⁶ são instâncias do esquema $G^{k,l,m,n}$.

De fato, tanto $KX4$ quanto $S4$ estendem K com o Axioma (4): $\Box A \rightarrow \Box \Box A$. Seguindo o esquema $G^{k,l,m,n}$, o Axioma (4) não tem nenhuma ocorrência de \diamond , o que significa que os índices k e n serão 0. Contudo, o Axioma (4) possui uma ocorrência de \Box no antecedente (o índice $l = 1$), e duas ocorrências no conseqüente (o índice $m = 2$), portanto, o Axioma (4), nesta notação, consiste em $G^{0,l,2,0}$.

Também o Axioma (X) ($\Box \Box A \rightarrow \Box A$) e o Axioma (T) ($\Box A \rightarrow A$) são instâncias do esquema $G^{k,l,m,n}$. Nos dois casos, nós não temos nenhuma ocorrência de \diamond , então os índices k e n serão 0. No caso do Axioma (X), temos duas ocorrências de \Box no antecedente (índice $l = 2$) e uma ocorrência no conseqüente (índice $m = 1$), portanto, temos que Axioma (X) = $G^{0,2,1,0}$. O Axioma (T), por sua vez, conta apenas com uma ocorrência de \Box no antecedente, e nada mais. Portanto, Axioma (T) = $G^{0,1,0,0}$.

A prova da completude que apresentaremos, por conseguinte, valerá tanto para $KX4$, quanto para $S4$, as quais são ambas extensões de K com um número finito de axiomas que instanciam o esquema $G^{k,l,m,n}$.

¹⁴ Evidentemente, o esquema acima também se aplica aos operadores modais de $KX4$, a despeito de estarmos usando símbolos diferentes para os mesmos. Por exemplo, o axioma (X) $\Box \Box p \rightarrow \Box p$ terá os índices $k = 0$, $l = 2$, $m = 1$ e $n = 0$.

¹⁵ Para os axiomas de $KX4$, ver Definição 3.4.1.

¹⁶ Para os axiomas de $S4$, ver Definição 3.3.2.

Definição 3.5.1 (*Frame*)

Um frame \mathfrak{F} é um par $\langle W, R \rangle$, onde W consiste em um conjunto não-vazio chamado universo de \mathfrak{F} , e R consiste em uma relação binária entre os elementos de W .

Definição 3.5.2 (*Modelo*)

Um modelo \mathfrak{M} é um par $\langle \mathfrak{F}, v \rangle$, onde \mathfrak{F} é um frame (ver Definição 3.5.1) e $v : \text{Var} \times W \rightarrow \{0, 1\}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $v(p, w) = 1$ ou $v(p, w) = 0$;
2. $v(\neg A, w) = 1$ sse $v(A, w) = 0$;
3. $v(A \rightarrow B, w) = 1$ sse $v(A, w) = 0$ ou $v(B, w) = 1$;
4. $v(A \wedge B, w) = 1$ sse $v(A, w) = 1$ e $v(B, w) = 1$;
5. $v(A \vee B, w) = 1$ sse $v(A, w) = 1$ ou $v(B, w) = 1$;
6. $v(\Box A, w) = 1$ sse $v(A, w') = 1$, para todo $w' \in W$ tal que wRw' .

Lema 3.5.3 *Seja S um sistema modal normal qualquer (K ou uma extensão de K), então:*

(DR1) se $\vdash_S A \rightarrow B$, então $\vdash_S \Box A \rightarrow \Box B$

(DR2) se $\vdash_S A \rightarrow B$, então $\vdash_S \Diamond A \rightarrow \Diamond B$

Prova.

(DR1) se $\vdash_S A \rightarrow B$, então $\vdash_S \Box A \rightarrow \Box B$

1. $\vdash_S A \rightarrow B$ hip
2. $\vdash_S \Box(A \rightarrow B)$ nec.
3. $\vdash_S \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ Axioma K
4. $\vdash_S \Box A \rightarrow \Box B$ MP 2, 3

(DR2) se $\vdash_S A \rightarrow B$, então $\vdash_S \Diamond A \rightarrow \Diamond B$

1. $\vdash_S A \rightarrow B$ hip
2. $\vdash_S \neg B \rightarrow \neg A$ contraposição
3. $\vdash_S \Box \neg B \rightarrow \Box \neg A$ (DR1)
4. $\vdash_S \neg \Diamond B \rightarrow \neg \Diamond A$ def. \Diamond
5. $\vdash_S \Diamond A \rightarrow \Diamond B$ contraposição

□

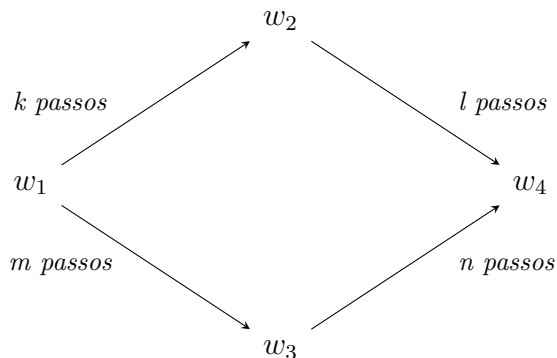
Todo axioma que instancia o esquema $G^{k,l,m,n}$, contudo, possui um esquema de relação de acessibilidade R correspondente, expresso pela seguinte formula:

$$C^{k,l,m,n}: \quad \forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 ((w_1 R^k w_2 \wedge w_1 R^m w_3) \rightarrow \exists w_4 (w_2 R^l w_4 \wedge w_3 R^n w_4))$$

Onde cada índice k, l, m, n de R representa o número de passos em que w_i acessa w_j na relação R . Por exemplo, se tivermos $w_1 R^2 w_3$, isso significa que w_1 acessa w_3 em dois passos, isto é, $w_1 R w_i$ e $w_i R w_3$. Contudo, quando o índice é igual a zero, isto é, quando w_i acessa w_j em zero passos ($w_i R^0 w_j$), então $w_i = w_j$.

O que $C^{k,l,m,n}$ significa, portanto, é que se w_1 acessa w_2 em k passos, e w_1 acessa w_3 em m passos, então existe um w_4 tal que w_2 acessa w_4 em l passos, e

w_3 acessa w_4 em n passos. Esta relação se assemelha a um losango, podendo ser visualizada no seguinte gráfico:



Proposição 3.5.4 *Se A é uma instância do esquema $G^{k,l,m,n}$, então A é válida em todos os frames onde R satisfaz a condição $C^{k,l,m,n}$.*

Prova. Prova por redução ao absurdo: suponha que uma instância de $G^{k,l,m,n}$ não seja válida em um *frame* que satisfaz a condição $C^{k,l,m,n}$. Contudo, para que a instância de $G^{k,l,m,n}$ não seja válida em dado *frame*, é preciso existir um mundo onde o antecedente de $G^{k,l,m,n}$ seja verdadeiro e o conseqüente falso. Isto é, é preciso existir um mundo w_1 tal que:

a) $v(\diamond^k \square^l A, w_1) = 1$.

b) $v(\square^m \diamond^n A, w_1) = 0$.

A partir de a), nós temos que existe um mundo w_2 , acessível a partir de w_1 em k passos, em que $v(\square^l A, w_2) = 1$. Isso significa que $v(A) = 1$ para qualquer mundo w_i acessível a partir de w_2 em l passos.

Mas a partir de b), nós temos que existe um mundo w_3 , acessível a partir de w_1 em m passos, onde $v(\diamond^n A, w_3) = 0$. Isso significa que $v(A) = 0$ para qualquer mundo w_i acessível a partir de w_3 em n passos.

Todavia, pela nossa hipótese, a relação R satisfaz a condição $C^{k,l,m,n}$. O que significa que se w_1 acessa w_2 em k passos e w_1 acessa w_3 em m passos, então existe um w_4 tal que w_2 acessa w_4 em l passos e w_3 acessa w_4 em n passos.

Temos, portanto, uma contradição, pois a partir de a) concluímos que $v(A) = 1$ para qualquer mundo w_i acessível a partir de w_2 em l passos, e temos que de fato w_2 acessa w_4 em l passos. Portanto, $v(A, w_4) = 1$.

Mas a partir de b) concluímos que $v(A) = 0$ para qualquer mundo w_i acessível a partir de w_3 em n passos, e temos que de fato w_3 acessa w_4 em n passos. Portanto, $v(A, w_4) = 0$.

Assim, ao supor que uma instância de $G^{k,l,m,n}$ não é válida em um *frame* que satisfaz a condição $C^{k,l,m,n}$, concluímos que $v(A, w_4) = 0$ e $v(A, w_4) = 1$, o que é impossível. Portanto, por redução ao absurdo, temos que se A é uma instância do esquema $G^{k,l,m,n}$, então A é válida em todos os *frames* que satisfazem a condição $C^{k,l,m,n}$.

□

Como consequência, temos que:

Corolário 3.5.5 (*correção*) *Todo teorema de K estendido com uma instância de $G^{k,l,m,n}$ é válido em todos os frames nos quais R satisfaz a condição $C^{k,l,m,n}$.*

Prova. Inferida da proposição 3.5.4.

□

Ainda seguindo a notação utilizada por (CARNIELLI; PIZZI, 2008), escreveremos G^∞ para nos referir a uma instância específica de $G^{k,l,m,n}$ (como, por exemplo,

$G^{0,2,1,0}$), e C^∞ para nos referir a condição $C^{k,l,m,n}$ correspondente (em nosso exemplo, $C^{0,2,1,0}$). Dessa forma, enuncia-se a seguinte proposição:

Proposição 3.5.6 *Se A é válida em todos os frames que satisfazem uma condição específica C^∞ , então A é um teorema do sistema K estendido com G^∞ ¹⁷.*

Note que $\not\vdash_S \neg A$ significa que A é consistente com referência ao sistema S . Um conjunto Γ de fórmulas bem formadas é dito consistente com respeito a um sistema S quando S não exclui dedutivamente nenhuma conjunção de fórmulas de Γ . Isto é, $\not\vdash_S \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$, para qualquer A_1, \dots, A_n de Γ .

Analogamente, $\mathfrak{F} \models B$ significa que B é válida em todos os modelos de todos os *frames* da classe \mathfrak{F} . E $\mathfrak{F} \not\models B$ significa que B é falsa em algum modelo de algum *frame* de \mathfrak{F} .

A Proposição 3.5.6 diz que se A é válida em todos os frames que satisfazem uma condição específica C^∞ , então A é um teorema do sistema K estendido com G^∞ . Como A é uma fórmula qualquer, ela pode ser uma fórmula negada ($\neg A$). Então, por contraposição, temos que se $\neg A$ não é um teorema do sistema K estendido com G^∞ , então $\neg A$ não é válida em todos os frames que satisfazem uma condição específica C^∞ .

Contudo, dizer que “ $\neg A$ não é um teorema do sistema K estendido com G^∞ ” é o mesmo que dizer “ A é consistente com o sistema K estendido com G^∞ ($\not\vdash_{K+G^\infty} \neg A$)”. Além disso, dizer que “ $\neg A$ não é válida em todos os frames que

¹⁷ As proposições 3.5.6 e 3.5.7 serão provadas simultaneamente mais tarde, por meio da Proposição 3.5.22. Essas duas proposições foram apresentadas agora, contudo, por indicarem o caminho da demonstração.

satisfazem uma condição específica C^∞ ” significa que “ $\neg A$ é falsa (portanto, A é verdadeira) em algum modelo de algum *frame* que satisfaz a condição C^∞ .”

Consequentemente, a Proposição 3.5.6 é equivalente a:

Proposição 3.5.7 *Se A é consistente com o sistema K estendido com G^∞ ($\#_{K+G^\infty} \neg A$), então A é válida em algum modelo de algum *frame* satisfazendo a condição C^∞ ($\#_{K+G^\infty} \neg A$)*¹⁸.

Assim, para provar a completude, basta mostrar que para cada fórmula A consistente com G^∞ existe um modelo $K + G^\infty$ que satisfaz A . Para isso, a demonstração segue o método de Henkin com duas etapas:

- (i) Constrói-se um modelo canônico de $K + G^\infty$ onde cada mundo é um conjunto particular de fórmulas dependentes de $K + G^\infty$;
- (ii) Mostra-se que para qualquer fórmula A , se A é consistente com $K + G^\infty$, então A é válida no modelo canônico.

Definição 3.5.8 (*Sistema Maximal Consistente*)

Seja w um conjunto de fórmulas. w é uma extensão maximal consistente de um sistema S se, e somente se:

- (i) $S \subseteq w$;
- (ii) w é consistente;

¹⁸ As proposições 3.5.6 e 3.5.7 serão provadas simultaneamente mais tarde, por meio da Proposição 3.5.22. Essas duas proposições foram apresentadas agora, contudo, por indicarem o caminho da demonstração.

(iii) para toda fórmula bem formada A , $A \in w$ ou $\neg A \in w$.

Definição 3.5.9 (As fórmulas bem formadas desnecessitadas de w)

O conjunto $Den(w) \stackrel{Def}{=} \{A: \Box A \in w\}$ consiste no conjunto das fórmulas desnecessitadas de w .

Isto é, definimos um conjunto $Den(w)$ tal que para toda fórmula $\Box A$ de w , A , sem o \Box , será elemento de $Den(w)$. Assim, se, por exemplo, $\Box(A \rightarrow B)$ é elemento de w , $(A \rightarrow B)$ é elemento de $Den(w)$.

Definição 3.5.10 (Modelo Canônico)

O modelo canônico de S é uma tripla $\langle W_S, R_S, v_S \rangle$ tal que:

1. W_S é o conjunto de todas as extensões maximais consistentes de S ;
2. $wR_S w'$ se, e somente se, $Den(w) \subseteq w'$, para todo w, w' de W_S ;
3. Para toda variável atômica p :

$$v_S(p, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in w \\ 0 & \text{se } p \notin w \end{cases}$$

Definição 3.5.11 (Frame Canônico)

O frame canônico de S é o par $\langle W_S, R_S \rangle$ tal que $\langle W_S, R_S, v_S \rangle$ é o modelo canônico de S .

No que diz respeito à relação de acessibilidade entre dois mundos w, w' pertencentes a W_S do modelo canônico de S , w está na relação R_S com w' se, e somente se, o conjunto de todas as fórmulas A tal que $\Box A \in w$ está contido em w' . Isto é:

Definição 3.5.12 Para todo $w, w' \in W$ do modelo canônico de um sistema S :

$wR_S^n w'$ se, e somente se, $Den^n(w) \subseteq w'$.

Lema 3.5.13 Se w é uma extensão maximal consistente de um sistema S , então:

1. Para toda fórmula A , exatamente um elemento do conjunto $\{A, \neg A\}$ pertence a w ;
2. $A \wedge B \in w$ se, e somente se, $A \in w$ e $B \in w$;
3. $A \vee B \in w$ se, e somente se, $A \in w$ ou $B \in w$;
4. se $\vdash_S A$, então $A \in w$;
5. se $A \in w$ e $A \rightarrow B \in w$, então $B \in w$;
6. se $A \in w$ e $\vdash_S A \rightarrow B$, então $B \in w$.

Prova. 1. Pela definição de conjunto maximal consistente (ver Definição 3.5.8), no item (iii), temos que $A \in w$ ou $\neg A \in w$. Pelo item (ii), contudo, não é possível que ambos A e $\neg A$ pertençam a w . Portanto, exatamente um elemento do conjunto $\{A, \neg A\}$ pertence a w .

2. Direção $A \wedge B \in w \Rightarrow A \in w$ e $B \in w$;

Suponha $A \wedge B \in w$. Então $w \vdash_S A \wedge B$. Consequentemente, $w \vdash_S A$. Como w é maximal, $A \in w$ ou $\neg A \in w$. Suponha $\neg A \in w$. Portanto, $w \vdash_S \neg A$. Mas isso contradiz $w \vdash_S A$, o que contraria a hipótese que w é maximal consistente. Portanto, $A \in w$. O raciocínio para B é idêntico.

Direção $A \in w$ e $B \in w \Rightarrow A \wedge B \in w$:

Suponha $A \in w$ e $B \in w$, mas $A \wedge B \notin w$. Como w é maximal, $\neg(A \wedge B) \in w$. Portanto, $w \vdash_S A$, $w \vdash_S B$, $w \vdash_S \neg(A \wedge B)$. Isto é, $w \vdash_S \perp$. Mas isso é impossível, pois w é consistente. Portanto, $A \wedge B \in w$.

3. Direção $A \vee B \in w \Rightarrow A \in w$ ou $B \in w$:

Suponha que $A \vee B \in w$, mas $A \notin w$ e $B \notin w$. Como w é maximal, $\neg A \in w$ e $\neg B \in w$. Portanto, $w \vdash_S \neg A$ e $w \vdash_S \neg B$. Consequentemente, $w \vdash_S \neg(A \vee B)$. Mas como $A \vee B \in w$, $w \vdash_S A \vee B$. O que é impossível, pois w é consistente. Portanto, $A \in w$ ou $B \in w$.

Direção $A \in w$ ou $B \in w \Rightarrow A \vee B \in w$:

Caso 1: $A \in w$. Suponha que $A \vee B \notin w$. Então, $\neg(A \vee B) \in w$. Portanto, $w \vdash_S \neg(A \vee B)$. Mas como $A \in w$, $w \vdash_S A$. Consequentemente, $w \vdash_S A \vee B$. Isto é, $w \vdash_S \perp$. O que é impossível, pois w é consistente. Portanto, $A \vee B \in w$.

Caso 2: $B \in w$. O raciocínio é análogo ao do Caso 1.

4. Suponha que $\vdash_S A$, mas $A \notin w$. Como w é maximal, $\neg A \in w$. Mas isso significa que $\not\vdash_S \neg\neg A$. Isto é, $\not\vdash_S A$. Mas isso contradiz nossa suposição de que $\vdash_S A$.

5. Suponha que $A \in w$ e $A \rightarrow B \in w$, mas $B \notin w$. Como w é maximal, $\neg B \in w$. Então, $w \vdash_S A$, $w \vdash_S A \rightarrow B$ e $w \vdash_S \neg B$. Isto é, $w \vdash_S \perp$, o que é impossível, pois w é consistente. Portanto, $B \in w$.

6. Suponha que $A \in w$ e $\vdash_S A \rightarrow B$. Por 4., temos que $A \rightarrow B \in w$. Mas por 5., nós temos que se $A \in w$ e $A \rightarrow B \in w$, então $B \in w$. Portanto, $B \in w$.

□

Lema 3.5.14 (*Lema de Lindenbaum*)

Todo conjunto S -consistente de fórmulas modais tem pelo menos uma extensão maximal consistente.

Prova.

Suponha que enumeremos todas as fórmulas da linguagem de uma lógica modal proposicional S :

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

Seja Γ um conjunto S -consistente. Seja $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$ uma sequência enumerável de conjuntos definida recursivamente como:

$$\Gamma_0 = \Gamma;$$

$$\text{Se } \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ é } S\text{-consistente, então } \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\};$$

$$\text{Se } \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ é } S\text{-inconsistente, então } \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\}.$$

Precisamos, agora, provar que se Γ_n é S -consistente, então Γ_{n+1} é S -consistente.

A prova será por contraposição.

Suponha que Γ_{n+1} seja S -inconsistente. Pela forma como Γ_{n+1} é construída, se $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ fosse S -consistente, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$. Mas isso significaria que Γ_{n+1} é S -consistente, contrariando nossa hipótese. Portanto, $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ é S -inconsistente. Então, por construção, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$. Como, por hipótese, Γ_{n+1} é S -inconsistente, $\Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$ é S -inconsistente.

Isto é, $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ é S -inconsistente, e $\Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$ também é S -inconsistente. Isso significa que existe um número finito de fórmulas $B_1, \dots, B_i \in \Gamma_n$ tais que $\vdash_S \neg(B_1 \wedge \dots \wedge B_i \wedge A_{n+1})$. E também temos um número finito de fórmulas $C_1, \dots,$

$C_j \in \Gamma_n$ tais que $\vdash_S \neg(C_1 \wedge \cdots \wedge C_j \wedge \neg A_{n+1})$. Consequentemente, $\vdash_S \neg(B_1 \wedge \cdots \wedge B_i \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_j)$. Logo, Γ_n tem um subconjunto finito inconsistente: $\{B_1, \dots, B_i, C_1, \dots, C_j\}$. Portanto, Γ_n é inconsistente.

Tendo demonstrado que se Γ_n é consistente, então Γ_{n+1} é consistente, nós agora definiremos um conjunto de fórmulas Γ_{max} como a união de todos os Γ_i :

$$\Gamma_{max} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Nós já demonstramos que cada Γ_i é S -consistente. Além disso, pela construção, cada Γ_{n+1} é um conjunto consistente que é a união de Γ_n com uma fórmula A_{n+1} ou $\neg A_{n+1}$. Portanto, a união de todos os Γ_i é S -consistente. Isto é, Γ_{max} é S -consistente.

Além disso, nota-se que para cada fórmula A_i , $A_i \in \Gamma_i$, ou $\neg A_i \in \Gamma_i$. Como $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{max}$, segue-se que $A_i \in \Gamma_{max}$, ou $\neg A_i \in \Gamma_{max}$. Isto é, Γ_{max} é maximal.

Portanto, Γ_{max} atende aos três critérios da Definição 3.5.8. Isto é, Γ_{max} é um conjunto maximal consistente.

□

Lema 3.5.15 *Se w é uma extensão maximal consistente de S contendo $\neg \Box A$, então $Den(w) \cup \{\neg A\}$ é um conjunto S -consistente.*

Prova.

Provaremos a contraposição, isto é, que se $Den(w) \cup \{\neg A\}$ não é um conjunto S -consistente, então w não é uma extensão maximal consistente de S contendo $\neg \Box A$. De fato, suponha que $Den(w) \cup \{\neg A\}$ é S -inconsistente. Então $Den(w) \cup \{\neg A\}$

tem um subconjunto finito $\{B_1, \dots, B_n, \neg A\}$ que é inconsistente com w . Portanto, $B_1 \wedge \dots \wedge B_n \rightarrow A$ é uma tese de S . Com a aplicação de (DR1) (ver Lema 3.5.3), temos que $\Box B_1 \wedge \dots \wedge \Box B_n \rightarrow \Box A$ também é uma tese de S . Portanto, $\{\Box B_1, \dots, \Box B_n, \neg \Box A\}$ é S -inconsistente. Como $\{\Box B_1, \dots, \Box B_n, \neg \Box A\} \subseteq w$, w não é uma extensão maximal consistente de S contendo $\neg \Box A$.

□

A fim de lidar com fórmulas com prefixo \Diamond , definiremos primeiro o conjunto de fórmulas possibilitadas de w :

Definição 3.5.16 *(As fórmulas possibilitadas de w)*

O conjunto $Poss(w) \stackrel{Def}{=} \{\Diamond A : A \in w\}$ consiste no conjunto das fórmulas possibilitadas de w .

Corolário 3.5.17 *Suponha que w e w' sejam extensões maximais consistentes de um sistema modal normal qualquer. Então $Den(w) \subseteq w'$ se, e somente se, $Poss(w') \subseteq w$.*

Prova.

Sejam w e w' extensões maximais consistentes de um sistema modal normal qualquer. Provaremos, primeiro, que se $Den(w) \subseteq w'$, então $Poss(w') \subseteq w$. Suponha que $Den(w) \subseteq w'$, mas $Poss(w') \not\subseteq w$. Então existe uma fórmula A tal que $A \in w'$, mas $\Diamond A \notin w$. Contudo, como w é maximal, $\neg \Diamond A \in w$. Mas $\Diamond A = \neg \Box \neg A$. Portanto, $\neg \neg \Box \neg A \in w$. Isto é, $\Box \neg A \in w$. Como $Den(w) \subseteq w'$, segue-se que $\neg A \in w'$. Mas isso contradiz $A \in w'$. Portanto, w' é inconsistente, contrariando a hipótese de que w e w' são extensões maximais consistentes.

Provaremos, agora, que se $Poss(w') \subseteq w$, então $Den(w) \subseteq w'$. De fato, suponha que $Poss(w') \subseteq w$, mas $Den(w) \not\subseteq w'$. Então existe uma fórmula A tal que $\Box A \in w$ e $A \notin w'$. Como w' é maximal, então $\neg A \in w'$. Portanto, $\Diamond \neg A \in Poss(w')$. Como $Poss(w') \subseteq w$, $\Diamond \neg A \in w$. Mas nós já tínhamos que $\Box A \in w$. Contudo, $\Box A$ é equivalente a $\neg \Diamond \neg A$. Portanto, w é inconsistente, contrariando nossa hipótese de que w e w' são extensões maximais consistentes.

□

Com isso, podemos demonstrar o Teorema Fundamental de Modelos Canônicos.

Proposição 3.5.18 (*Teorema Fundamental de Modelos Canônicos*)

Seja $\langle W, R, v \rangle$ um modelo canônico de um dado sistema modal normal S .

Então, para qualquer fórmula A e para qualquer $w \in W$:

$$v(A, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in w \\ 0 & \text{se } A \notin w \end{cases}$$

Prova.

A prova se dá por indução no comprimento das fórmulas. Pela definição de modelo canônico (Definição 3.5.10), a Proposição 3.5.18 vale para toda variável p .

1) Para uma fórmula do tipo $\neg A$, 1.1) suponha que $\neg A \in w$. Então como w é maximal consistente, $A \notin w$. Mas por hipótese indutiva, se $A \notin w$, então $v(A, w) = 0$. Portanto, $v(\neg A, w) = 1$, pois w é consistente.

1.2) Suponha agora que $\neg A \notin w$. Como w é maximal, segue-se que $A \in w$. Mas por hipótese indutiva, se $A \in w$, então $v(A, w) = 1$. Portanto, $v(\neg A, w) = 0$.

2) Para uma fórmula com conjunção, $A \wedge B$, 2.1) suponha que $A \wedge B \in w$. Então, pelo Lema 3.5.13, $A \in w$ e $B \in w$. Portanto, por hipótese indutiva, $v(A, w) = 1$ e $v(B, w) = 1$. Logo, $v(A \wedge B, w) = 1$.

2.2) Suponha agora que $A \wedge B \notin w$. Portanto, pelo Lema 3.5.13, $A \notin w$, ou $B \notin w$. Então, por hipótese indutiva, $v(A, w) = 0$, ou $v(B, w) = 0$. Em qualquer dos casos, segue-se que $v(A \wedge B, w) = 0$.

3) Para uma fórmula com disjunção, $A \vee B$, a prova é análoga. 3.1) Suponha que $A \vee B \in w$. Então, pelo Lema 3.5.13, $A \in w$ ou $B \in w$. Então, por hipótese indutiva, $v(A, w) = 1$, ou $v(B, w) = 1$. Em qualquer dos casos, segue-se que $v(A \vee B, w) = 1$.

3.2) Suponha agora que $A \vee B \notin w$. Então, pelo Lema 3.5.13, $A \notin w$ e $B \notin w$. Então, por hipótese indutiva, $v(A, w) = 0$, e $v(B, w) = 0$. Portanto, $v(A \vee B, w) = 0$.

4) Para uma fórmula com implicação, $A \rightarrow B$, 4.1) suponha que $A \rightarrow B \in w$. Pelo Lema 3.5.13, temos que ou $A \in w$, ou $\neg A \in w$. 4.1.1) Se $A \in w$, então, pelo mesmo Lema 3.5.13, $B \in w$ (pois $A \rightarrow B \in w$). Portanto, por hipótese indutiva, $v(A, w) = 1$, e $v(B, w) = 1$. Isto é, $v(A \rightarrow B, w) = 1$. 4.1.2) Se, por outro lado, $\neg A \in w$, então, pelo mesmo lema, $A \notin w$. Portanto, por hipótese indutiva, temos que $v(A, w) = 0$. Portanto, $v(A \rightarrow B, w) = 1$.

4.2) Suponha agora que $A \rightarrow B \notin w$. Então $\neg(A \rightarrow B) \in w$. Mas isso é equivalente a $(A \wedge \neg B) \in w$. Então $A \in w$ e $\neg B \in w$. Portanto, $B \notin w$. Então, por hipótese indutiva, temos que $v(A, w) = 1$ e $v(B, w) = 0$. Isto é, $v(A \rightarrow B, w) = 0$.

5) Resta, agora, lidar com as fórmulas com operadores modais. 5.1) Suponha que $\Box A \in w$. Então para todo w' tal que wRw' , $A \in w'$. Então, por hipótese indutiva,

$v(A, w') = 1$ para todo w' tal que wRw' . Portanto, $v(\Box A, w) = 1$.

5.2) Suponha, agora, que $\Box A \notin w$. Como $Den(w) = \{A : \Box A \in w\}$, então $A \notin Den(w)$. Logo, $Den(w) \cup \{\neg A\}$ é um conjunto S -consistente. Então, pelo Lema de Lindenbaum (Lema 3.5.14), existe um w' tal que $Den(w) \cup \{\neg A\} \subseteq w'$. Portanto, $\neg A \in w'$. Logo, $v(\neg A, w') = 1$ e $v(A, w') = 0$. Como wRw' (pois $Den(w) \cup w'$. Ver Definição 3.5.12), segue-se que $v(\Box A, w) = 0$.

6) Como $\Diamond A$ é definido como $\neg\Box\neg A$, a prova para $\Diamond A$ se segue trivialmente da prova para $\Box A$. De fato, suponha que 6.1) $\Diamond A \in w$. Isso é o mesmo que $\neg\Box\neg A \in w$. Como w é maximal, isso significa que $\Box\neg A \notin w$, o que, pelo caso acima, significa que $v(\Box\neg A, w) = 0$. Portanto, $v(\neg\Box\neg A, w) = 1$, isto é, $v(\Diamond A, w) = 1$.

6.2) Suponha agora que $\Diamond A \notin w$. Isso significa que $\neg\Box\neg A \notin w$. Como w é maximal consistente, daí se segue que $\Box\neg A \in w$. O que, pela prova para $\Box A$, implica em $v(\Box\neg A, w) = 1$. Portanto, $v(\neg\Box\neg A, w) = 0$. Isto é, $v(\Diamond A, w) = 0$.

□

Deste teorema se segue como corolário que ser um teorema de um sistema S é equivalente a ser válido no modelo canônico baseado em S .

Corolário 3.5.19 *Para toda fórmula A , A é válida no modelo canônico de S se, e somente se, $\vdash_S A$.*

Prova.

Demonstraremos primeiro que para toda fórmula A , se A é válida no modelo canônico de S , então $\vdash_S A$. A prova será por contraposição. Suponha que $\not\vdash_S A$. Então $\{\neg A\}$ é S -consistente. Então, pelo Lema de Lindembaum (Lema 3.5.14),

existe pelo menos uma extensão maximal consistente w de $S \cup \{\neg A\}$. Como w é consistente, temos que $A \notin w$. Portanto, pelo Teorema Fundamental de Modelos canônicos (Proposição 3.5.18), $v(A, w) = 0$. Portanto, A não é válida no modelo canônico.

Mostraremos agora que se $\vdash_S A$, então A é válida no modelo canônico de S . De fato, suponha que $\vdash_S A$. Então, pelo Lema 3.5.13, para todo w que for um conjunto maximal consistente de S , $A \in w$. Então, pela proposição 3.5.18, $v(A, w) = 1$ para todo $w \in W$. Portanto, A é válida no modelo canônico.

□

A partir deste resultado é possível demonstrar a completude para o sistema K .

Corolário 3.5.20 (*Completude do sistema K*)

A é uma fórmula válida em todos os K -frames se, e somente se, $\vdash_K A$.

Prova. Direção 1) Se A é uma fórmula válida em todos os K -frames, então $\vdash_K A$:

Suponha que A seja uma fórmula válida em todos os K -frames. Logo, A será válida em todos os modelos e cada K -frame. Então A é válida no modelo canônico de K . Mas de acordo com o Corolário 3.5.19, A é válida no modelo canônico de K se, e somente se, $\vdash_K A$. Portanto, $\vdash_K A$.

Direção 2) Se $\vdash_K A$, então A é uma fórmula válida em todos os K -frames:

Será provado por contraposição. Suponha que A não seja válida em algum K -frame. Isto é, suponha que existe um modelo tal que $v(A, w) = 0$. Portanto,

$v(A, w') = 0$ para toda extensão maximal consistente w' de w . Logo, A não é válida no modelo canônico para K . Consequentemente, pelo Corolário 3.5.19, $\not\vdash_K A$.

□

Definição 3.5.21 *Um sistema S é canônico se e somente se o modelo canônico de S é um frame para S .*

A proposição abaixo nos permitirá demonstrar a completude para todas as extensões de K com instâncias do esquema G^∞ , como é o caso de $KX4$ (que estende K com $(X) = G^{0,2,1,0}$ e com $(4) = G^{0,1,2,0}$) e $S4$ (que estende K com $(T) = G^{0,1,0,0}$ e com $(4) = G^{0,1,2,0}$).

Antes de demonstrar a Proposição 3.5.22, note, contudo, que ela requer apenas que o sistema modal contenha $K + G^\infty$ para podermos concluir que a relação de acessibilidade do frame canônico do sistema satisfaça a condição C^∞ . Isso significa que se um sistema contém mais de uma instância do esquema $G^{k,l,m,n}$, por exemplo, $K + G^{\infty 1} + G^{\infty 2}$, então a relação de acessibilidade do frame canônico desse sistema satisfará conjuntamente as condições $C^{\infty 1}$ e $C^{\infty 2}$.

Proposição 3.5.22 *Seja S qualquer sistema modal normal consistente contendo $K + G^\infty$. Então a relação de acessibilidade do frame canônico de S satisfaz a condição C^∞ .*

Prova.

Cada instância de G^∞ pertence a toda extensão maximal consistente w de S . Suponha que $w_1 R^k w_2$ e $w_1 R^m w_3$ valham no frame canônico de S . Defina o conjunto Λ da seguinte forma:

$$\Lambda = \{A: \Box^l A \in w_2\} \cup \{B: \Box^n B \in w_3\}$$

A prova se divide da seguinte forma: no *Passo 1*, mostramos que Λ é S -consistente. No *Passo 2* mostraremos que de fato existe um w_4 tal que $w_2 R^l w_4$, e $w_3 R^n w_4$, isto é, que S satisfaz a condição C^∞ .

Passo 1: Precisamos mostrar que Λ é S -consistente. Hipótese: $w_1 R^k w_2$ e $w_1 R^m w_3$. A prova se dará por redução ao absurdo. Suponha que Λ seja S -inconsistente. Então existe um conjunto finito $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\} \subseteq \Lambda$ tal que $\{A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_m\}$ seja S -inconsistente. Ou seja, $\vdash_S \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_m)$. Seja $\alpha = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, e $\beta = B_1 \wedge \dots \wedge B_m$. Então $\vdash_S \neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \vdash_S \neg\alpha \vee \neg\beta \Leftrightarrow \vdash_S \alpha \rightarrow \neg\beta$. Então, aplicando *DR2* (ver Lema 3.5.3) n vezes, temos $\vdash_S \Diamond^n \alpha \rightarrow \Diamond^n \neg\beta$. Mas isso é equivalente a $\vdash_S \Diamond^n \alpha \rightarrow \neg\Box^n \beta$.

Por outro lado, como cada $A_i \in \Lambda$, para $i = 1, \dots, n$, temos que cada $\Box^l A_i$ pertence ao conjunto maximal consistente w_2 . Então, pelo Lema 3.5.13 item 2., a conjunção de todos os $\Box^l A_i$ pertence a w_2 . Isto é, $\Box^l A_1 \wedge \dots \wedge \Box^l A_n \in w_2$. Mas isso é equivalente a $\Box^l(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \in w_2$. Isto é, $\Box^l \alpha \in w_2$. Como $w_1 R^k w_2$, então $\Diamond^k \Box^l \alpha \in w_1$. Como w_1 é extensão maximal consistente de $K + G^\infty$, então $\Diamond^k \Box^l \alpha \rightarrow \Box^m \Diamond^n \alpha \in w_1$. Portanto, por *Modus Ponens*, temos que $\Box^m \Diamond^n \alpha \in w_1$.

Por raciocínio análogo, como cada $B_j \in \Lambda$, para $j = 1, \dots, m$, temos que cada $\Box^n B_j \in w_3$, portanto, $\Box^n \beta \in w_3$.

Por hipótese, temos que $w_1 R^m w_3$. Já mostramos que $\Box^m \Diamond^n \alpha \in w_1$. Então $\Diamond^n \alpha \in w_3$.

Já mostramos que $\vdash_S \Diamond^n \alpha \rightarrow \neg\Box^n \beta$. Como w_3 é extensão maximal consistente de S , segue-se que $\Diamond^n \alpha \rightarrow \neg\Box^n \beta \in w_3$. Então, por *Modus Ponens*, segue-se que

$\neg \Box^n \beta \in w_3$. Mas isso contradiz $\Box^n \beta \in w_3$. Logo, Λ é S -consistente.

Passo 2: Como Λ é consistente, pelo Lema de Lindenbaum (Lema 3.5.14), Λ tem pelo menos uma extensão maximal consistente. Seja w_4 esta extensão maximal consistente. Portanto, $\Lambda \subseteq w_4$. Ou seja, $\{A: \Box^l A \in w_2\} \cup \{B: \Box^n B \in w_3\} \subseteq w_4$. Logo, $\{A: \Box^l A \in w_2 \subseteq w_4\}$ e $\{B: \Box^n B \in w_3 \subseteq w_4\}$. Isto é, $Den^l(w_2) \subseteq w_4$ e $Den^n(w_3) \subseteq w_4$. Ou seja, $w_2 R^l w_4$, e $w_3 R^n w_4$.

Portanto, se $w_1 R^k w_2$ e $w_1 R^m w_3$, então existe w_4 tal que $w_2 R^l w_4$, e $w_3 R^n w_4$. Isto é, a relação de acessibilidade do frame canônico de S satisfaz a condição C^∞

□

A partir desse resultado, é fácil demonstrar as proposições 3.5.6 e 3.5.7, que são equivalentes. Dessa forma, fica demonstrada a completude para todas as extensões de K com uma única instância de $G^{k,l,m,n}$, como, por exemplo, o sistema $K4$, que consiste em $K + G^{0,l,2,0}$. Isto é:

Teorema 3.5.23 (*completude para sistemas modais normais com uma única instância de $G^{k,l,m,n}$*).

Se A é válida em todos os frames que satisfazem uma condição específica C^∞ , então A é um teorema do sistema K estendido com G^∞ .

Prova. Suponha que A seja válida em todos os frames que satisfazem uma condição específica C^∞ . Pela Proposição 3.5.22, o frame canônico de $K + G^\infty$ satisfaz a condição C^∞ . Então A é válida no frame canônico de $K + G^\infty$. Portanto, A é válida no modelo canônico de $K + G^\infty$. Mas pelo corolário 3.5.19, A é válida no

modelo canônico de $K + G^\infty$ se, e somente se, $\vdash_{K+G^\infty} A$. Logo, A é um teorema do sistema K estendido com G^∞

□

Nós agora demonstraremos a completude para sistemas que estendem K com várias instâncias de $G^{k,l,m,n}$, como os sistemas $KX4$ e $S4$, que estamos interessados.

Teorema 3.5.24 (*completude para sistemas modais normais com duas instâncias de $G^{k,l,m,n}$*)

Se A é válida em todos os frames que satisfazem duas condições específicas C_1^∞ e C_2^∞ , então A é um teorema do sistema K estendido com G_1^∞ e G_2^∞ .

Prova.

Note que a Proposição 3.5.22 requer apenas que o sistema modal normal consistente contenha $K + G^\infty$ para concluir que a relação de acessibilidade do frame canônico de S satisfaça a condição G_1^∞ . Portanto, um sistema normal modal consistente que contenha ambos, G_1^∞ e G_2^∞ , terá uma relação de acessibilidade do frame canônico que satisfaz ambos, C_1^∞ e C_2^∞ . Portanto, basta mostrar que $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ é consistente para que se possa concluir que a relação de acessibilidade do frame canônico de S satisfaz conjuntamente C_1^∞ e C_2^∞ . De fato, podemos mostrar que $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ é consistente apresentando um frame em que o sistema seja válido.

O frame fornecido a seguir¹⁹ consiste em um exemplo de um frame em que $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ é válido. Considere o seguinte frame $\mathfrak{F} = \langle \mathbb{Q}, R_{\mathbb{Q}} \rangle$, onde \mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais e $R_{\mathbb{Q}}$ consiste em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. \mathfrak{F} satisfaz todas as condições $C^{k,l,m,n}$.

¹⁹ Este exemplo também foi retirado de (CARNIELLI; PIZZI, 2008, p. 101).

De fato, podemos ler $w_i R_{\mathbb{Q}}^k w_j$ como “existem pelo menos n (para $n > 0$) racionais entre w_i e w_j ”. Então é claro que este frame satisfaz qualquer relação $C^{k,l,m,n}$: se $w_1 R_{\mathbb{Q}}^k w_2 \wedge w_1 R_{\mathbb{Q}}^m w_3$, existe um w_4 tal que $w_2 R_{\mathbb{Q}}^l w_4 \wedge w_3 R_{\mathbb{Q}}^n w_4$. Isso porque existem infinitos racionais entre w_2 e w_4 , e entre w_3 e w_4 . Portanto, existem pelo menos l (para $l > 0$) racionais entre w_2 e w_4 , e também existem pelo menos n (para $n > 0$) racionais entre w_3 e w_4 .

Como \mathfrak{F} satisfaz todas as condições $C^{k,l,m,n}$, \mathfrak{F} satisfaz conjuntamente quaisquer C_1^∞ e C_2^∞ , o que significa que $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ é consistente. Disso se segue a completude para o sistema $K + G_1^\infty + G_2^\infty$. De fato, suponha que A seja válida em todos os frames que satisfazem conjuntamente duas condições específicas C_1^∞ e C_2^∞ . Então, pela Proposição 3.5.22, o frame canônico de $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ satisfaz conjuntamente C_1^∞ e C_2^∞ . Isso significa que A é válida no frame canônico (e conseqüentemente no modelo canônico) de $K + G_1^\infty + G_2^\infty$. Mas então, pelo Corolário 3.5.19, $\vdash_{K+G_1^\infty+G_2^\infty} A$.

□

A mesma demonstração pode ser estendida para qualquer sistema modal normal com n instâncias de $G^{k,l,m,n}$. Mas para nossos propósitos, precisamos apenas de duas instâncias de $G^{k,l,m,n}$. Isto é, este resultado prova a completude para $K + G^{0,1,0,0} + G^{0,1,2,0}$ (S4), e $K + G^{0,2,1,0} + G^{0,1,2,0}$ (KX4).

Analogamente ao que ocorre na Proposição 3.5.5, como corolário, temos que:

Teorema 3.5.25 (correção) *Todo teorema do sistema K estendido com várias instâncias de $G^{k,l,m,n}$ é válido em todos os frames nos quais R satisfaz simultaneamente todas as condições $C^{k,l,m,n}$ correspondentes.*

Prova.

Suponha G_1^∞ e G_2^∞ sejam duas instâncias diferentes de G . Pela Proposição 3.5.4, se A é uma instância do esquema $G^{k,l,m,n}$, então A é válida em todos os frames em que R satisfaz a condição $C^{k,l,m,n}$. Logo, G_1^∞ é válida em todos os frames que R satisfaz C_1^∞ , e analogamente G_2^∞ é válida em todos os frames em que R satisfaz C_2^∞ . Portanto, os axiomas de $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ são válidos em todos os frames que satisfazem simultaneamente C_1^∞ e C_2^∞ . Então todos os teoremas de $K + G_1^\infty + G_2^\infty$ são válidos em todos os frames que satisfazem simultaneamente C_1^∞ e C_2^∞ . O mesmo raciocínio pode ser aplicado para qualquer número finito de instâncias de G .

□

Especificamente, temos que $K + G^{0,2,1,0} + G^{0,1,2,0}$ ($KX4$) e $K + G^{0,1,0,0} + G^{0,1,2,0}$ ($S4$) são completos (Teorema 3.5.24) e corretos (Teorema 3.5.25) com relação às suas respectivas classes de *frames*. Além disso, note que as propriedades da relação R em $KX4$ e em $S4$ são instâncias de $C^{k,l,m,n}$, correspondendo aos respectivos axiomas $G^{k,l,m,n}$. De fato:

Reflexividade:

$$\forall w(wRw) \text{ se, e somente se, } C^{0,1,0,0}.$$

Transitividade:

$$\forall w \forall w' \forall w''((wRw' \wedge w'Rw'') \rightarrow wRw'') \text{ se, e somente se, } C^{0,1,2,0}.$$

Densidade:

$$\forall w \forall w'(wRw' \rightarrow \exists w''(wRw'' \wedge w''Rw')) \text{ se, e somente se, } C^{0,2,1,0}.$$

Desta forma, a partir dos axiomas de $KX4$ e de $S4$, e das correspondentes instâncias de $C^{k,l,m,n}$, identifica-se que $KX4$ é transitiva e densa, enquanto $S4$ é, além disso, reflexiva. Dessa forma, fica claro que se segue do Teorema 3.5.24 e do Teorema 3.5.25 que:

Corolário 3.5.26 *O sistema modal $KX4$ é correto e completo com relação à sua classe de frames. Isto é:*

(i) *(Completude de $KX4$) Se A é válida em todos os frames que satisfazem as condições $C^{0,2,1,0}$ (densidade) e $C^{0,1,2,0}$ (transitividade), então A é um teorema do sistema K estendido com $G^{0,2,1,0}$ (axioma X) e $G^{0,1,2,0}$ (axioma 4), isto é, A é teorema de $KX4$.*

(ii) *(Correção de $KX4$) Todo teorema do sistema $KX4$ (K estendido com $G^{0,2,1,0}$ (axioma X) e $G^{0,1,2,0}$ (axioma 4)) é válido em todos os frames nos quais R satisfaz simultaneamente as condições $C^{0,2,1,0}$ e $C^{0,1,2,0}$, isto é, nos quais R é densa e transitiva.*

Prova. Teorema 3.5.24 e Teorema 3.5.25.

□

Corolário 3.5.27 *O sistema modal $S4$ é correto e completo com relação à sua classe de frames. Isto é:*

(i) *(Completude de $S4$) Se A é válida em todos os frames que satisfazem as condições $C^{0,1,0,0}$ (reflexividade) e $C^{0,1,2,0}$ (transitividade), então A é um te-*

orema do sistema K estendido com $G^{0,1,0,0}$ (axioma T) e $G^{0,1,2,0}$ (axioma 4), isto é, A é teorema de $S4$.

(ii) (Correção de $S4$) Todo teorema do sistema $S4$ (K estendido com $G^{0,1,0,0}$ (axioma T) e $G^{0,1,2,0}$ (axioma 4)) é válido em todos os frames nos quais R satisfaz simultaneamente as condições $C^{0,1,0,0}$ e $C^{0,1,2,0}$, isto é, nos quais R é reflexiva e transitiva.

Prova. Teorema 3.5.24 e Teorema 3.5.25.

□

Estes sistemas são interessantes porque nos permitem expressar as noções de evidência factiva e de evidência não-factiva. No próximo capítulo buscaremos combinar $S4$ e $KX4$ a fim de obter um único sistema capaz de expressar ambas noções de evidência.

4 As combinações de $S4$ com $KX4$

A fim de exibir um sistema modal capaz de lidar com três propriedades de proposições diferentes – a verdade da Lógica Clássica, a evidência não-factiva da Lógica Básica da Evidência (BLE), e a evidência factiva, que é uma forma de interpretar a Lógica Intuicionista – nós apresentamos um mergulho (*embedding*) da Lógica Intuicionista no sistema modal $S4$ na seção 3.3, de acordo com (GÖDEL, 1986). Depois, apresentamos um mergulho de BLE no sistema modal $KX4$, conforme realizado por (FITTING, 2017). Mostramos, também, que tanto $S4$ quanto $KX4$ são sistemas completos e corretos com relação às suas respectivas classes de *frames*, na seção 3.5. Alguns trechos desse capítulo, bem como da seção 3.3, da seção 3.4, e da seção 3.5 fazem parte de um manuscrito, em inglês, submetido para publicação (CARNIELLI et al., 2024).

Nós estamos buscando, contudo, um único sistema capaz de representar tanto a noção de evidência não-factiva de BLE , quanto a noção de evidência factiva da Lógica Intuicionista. Por isso, precisamos de um sistema que combine os dois sistemas modais: $S4$ e $KX4$.

Neste capítulo, será apresentada uma fusão de $S4$ e $KX4$ na seção 4.1. Contudo, na seção 4.2 recorreremos aos sistemas basilares, pois esta ferramenta nos garante os resultados metateóricos de completude e correção para diferentes combinações de $S4$ e $KX4$ com diversos axiomas ponte, enquanto o método da fusão, abordado

na seção 4.1, exigiria uma demonstração de tais resultados para cada sistema que contivesse um axioma ponte diferente. Na seção 4.3, demonstra-se a completude para $SKX4$ e todos os sistemas que estendem $SKX4$ com um número finito de instâncias do axioma esquema $G(a, b, c, d)$ (ver Definição 4.2.5), a partir de (CARNIELLI; PIZZI, 2008, capítulo 8.6).

4.1 A fusão de $S4$ com $KX4$

Com efeito, duas ou mais lógicas podem ser combinadas em um único sistema. A fusão consiste em um dos métodos mais simples de combinação de lógicas modais. Este método foi apresentado pela primeira vez por (THOMASON, 1984). (CARNIELLI; CONIGLIO, 2020)

Um exemplo filosoficamente interessante de fusões de lógicas aparece em (SCHURZ, 1991), onde o autor oferece um tratamento da Lei de Hume¹. Hume afirmava não ser possível derivar um *dever ser* a partir de um *é*, o que engendrou muitas discussões no ramo da Ética. Por isso, Schurz realizou uma fusão entre uma lógica deontica e uma lógica alética a fim de investigar suas relações e verificar a possibilidade de se realizar a passagem do *é* para o *deve ser*. Neste caso, é apenas com a inserção explícita de um princípio de ponte que se torna possível realizar a passagem de um operador modal para o outro. (SCHURZ, 1997)

Nesta seção, realizaremos uma fusão entre os sistemas modais $KX4$ e $S4$, para, com isso, encontrar um sistema capaz de lidar tanto com \Box , que representa uma

¹ Ou Guilhotina de Hume, ou ainda problema do ser e dever ser. Ver (HUME, 2000), Livro III, Parte I, Seção II, p. 509.

noção de evidência factiva, quanto com \Box , que representa uma noção de evidência não-factiva.

Definição 4.1.1 *Fusão de $S_1 \otimes S_2$*

Sejam S_1 e S_2 duas lógicas modais normais definidas sobre a mesma assinatura clássica $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. A fusão $S_1 \otimes S_2$ consiste na lógica bimodal normal com dois operadores modais independentes, \Box e \Box , adicionados à assinatura comum.

A semântica de $S_1 \otimes S_2$ é dada pela classe de modelos \mathcal{M} , tais que $\mathcal{M} = \langle W, R_{S4}, R_{KX4}, V \rangle$, onde $\mathcal{M}_{\Box} = \langle W, R_{S4}, V \rangle$ pertence à classe de modelos de S_1 e $\mathcal{M}_{\Box} = \langle W, R_{KX4}, V \rangle$ pertence à classe de modelos de S_2 . O conjunto W é compartilhado por ambas.

Como usual, W , o conjunto dos mundos, é um conjunto não-vazio; R , a relação de acessibilidade, é uma relação binária $R \subseteq W \times W$, e v é um mapa valorativo que atribui valor de verdade (1 ou 0) a cada variável proposicional em cada mundo, isto é, $v : Var \times W \rightarrow \{0, 1\}$.

Suponha que as lógicas $S4$ e $KX4$ sejam definidas sobre a mesma assinatura clássica $\Sigma = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Seja \Box o operador modal de $S4$, e \Box o operador modal de $KX4$. Sejam \mathcal{M}_{S4} e \mathcal{M}_{KX4} as classes de modelos para $S4$ e $KX4$, respectivamente. Como $S4$ e $KX4$ são lógicas modais normais, cujos operadores modais \Box e \Box satisfazem a regra de necessitação e o axioma da normalidade (K), a fusão de $S4$ com $KX4$, isto é, $S4 \otimes KX4$, será uma lógica bimodal com dois operadores modais independentes, \Box e \Box , com os conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$.

A semântica de $S4 \otimes KX4$ será dada pela classe das estruturas de Kripke \mathcal{M} da forma:

$$\mathcal{M} = \langle W, R_{S4}, R_{KX4}, V \rangle$$

Onde $\langle W, R_{S4}, V \rangle$ pertence a \mathcal{M}_{S4} , e $\langle W, R_{KX4}, V \rangle$ pertence a \mathcal{M}_{KX4} , e o conjunto de mundos W é compartilhado entre ambos. Dessa forma, a relação de acessibilidade R_{S4} é usada para avaliar \Box , enquanto a relação de acessibilidade R_{KX4} é usada para avaliar \boxplus .

Como a linguagem de $S4 \otimes KX4$ é gerada livremente pela união das assinaturas de $S4$ e $KX4$, ela conterá fórmulas mistas, com ambos operadores \Box e \boxplus . Suponha, por exemplo, que queiramos saber se uma estrutura \mathcal{M} satisfaz $\Box\boxplus p$ em um dado mundo $w \in W$. Como o operador mais externo é um \Box , devemos usar a relação de acessibilidade R_{S4} . Então nós temos que:

\mathcal{M} satisfaz $\Box\boxplus p$ em um dado mundo $w \in W$ se, e somente se, para todo $w_i \in W$ tal que $wR_{S4}w_i$, \mathcal{M} satisfaz $\boxplus p$ em w_i .

Mas agora precisamos avaliar se \mathcal{M} satisfaz $\boxplus p$ em w_i . Como o operador agora é \boxplus , devemos usar a relação de acessibilidade R_{KX4} , e teremos que:

\mathcal{M} satisfaz $\boxplus p$ em w_i se, e somente se, para todo $w_j \in W$ tal que $w_iR_{KX4}w_j$, $w_j \in V(p)$.

Já do ponto de vista axiomático, os axiomas de $S4 \otimes KX4$ consistirão na união dos axiomas de $S4$ (ver Definição 3.3.2) com os axiomas de $KX4$ (ver Definição 3.4.1). Isso significa que teremos duas regras de necessitação (uma para \Box , e outra para \boxplus), dois axiomas de distribuição (K) e dois axiomas (4). A regra de Modus Ponens é uma só, já que $KX4$ e $S4$ compartilham a mesma implicação clássica (\rightarrow).

Definição 4.1.2 ($S4 \otimes KX4$)

Seja L_4 uma linguagem com um número enumerável de letras sentenciais $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, o conjunto de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, e os operadores modais $\{\Box, \Box\}$, além de parêntesis. O conjunto de fórmulas de L_4 é obtido recursivamente de maneira usual. A lógica $S4 \otimes KX4$ é definida sobre a linguagem L_4 pelo seguinte cálculo de Hilbert:

Axiomas-esquema:

1. Axiomas da Lógica Proposicional Clássica: todo axioma da Lógica Proposicional Clássica é também um axioma de $S4 \otimes KX4$;
2. Axioma de Distribuição $(K)^\Box$: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
3. Axioma de Distribuição $(K)^\Box$: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
4. Axioma $(4)^\Box$: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$;
5. Axioma $(4)^\Box$: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$;
6. Axioma (T) : $\Box A \rightarrow A$;
7. Axioma (X) : $\Box \Box A \rightarrow \Box A$.

Regras de inferência:

1. Regra de necessitação $^\Box$: Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$;

2. *Regra de necessitação \Box* : Se $\vdash A$, então $\vdash \Box A$;
3. *Substituição Uniforme*: Se $\vdash A$, e p é qualquer variável atômica ocorrendo em A , então a fórmula bem formada que resulta da substituição uniforme de p por B (denotada por $A[p/B]$) é tal que $\vdash A[p/B]$.
4. *Modus Ponens*:

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

Note, contudo, que como nossa nova linguagem possui fórmulas mistas, os axiomas-esquema acima podem ser substituídos por fórmulas contendo ambos operadores, \Box e \Box . Assim, por exemplo, podemos substituir A por $\Box p$ no Axioma T , e obteremos $\Box \Box p \rightarrow \Box p$.

Esta interação entre os dois operadores modais, \Box e \Box , contudo, é muito restrita. As interações entre \Box e \Box deveriam expressar as relações entre evidências factivas e não-factivas. Por isso, em vez de apenas justapor os axiomas de $KX4$ e $S4$, nós podemos querer introduzir um ou mais axiomas de ponte para relacionar os dois operadores modais.

Por isso, apresentaremos um axioma de ponte a que chamamos Princípio da Conclusividade (em inglês, *Conclusivity Principle (CP)*):

Definição 4.1.3 *Princípio da Conclusividade (CP)*

$$\text{Princípio da Conclusividade (CP)} = \Box A \vdash \neg \Box \neg A$$

Este potencial axioma pretende representar o princípio de LET_J^2 de que uma evidência factiva para A cancela qualquer evidência não-factiva para $\neg A$ (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017, p. 4).

Este princípio também é logicamente equivalente a:

$$\Box A \vdash \Diamond A$$

É importante notar que o princípio acima não pode ser derivado dos axiomas de $S4 \otimes KX4$, que apresentamos na Definição 4.1.2. Uma maneira simples de demonstrar isso é fornecer um modelo que o falsifique. De fato, seja o conjunto de mundos, W , $W = \{w_0, w_1\}$. Seja $R_{KX4} = \{w_0 R_{KX4} w_1\}$ e $R_{S4} = \{w_0 R_{S4} w_0, w_1 R_{S4} w_1\}$. Por fim, seja $v_{w_0}(A) = 1$, $v_{w_1}(A) = 0$.

Observa-se, contudo, que embora tenhamos demonstrado que $S4$ é completo com referência à classe de frames \Box -transitivos e reflexivos, e que $KX4$ é completo com referência à classe de frames \Box -reflexivos e densos, nós ainda não temos como garantir que o mesmo valha para $S4 \otimes KX4 + (CP)$. Embora seja possível provar a completude de $S4 \otimes KX4 + (CP)$ diretamente, a seção abaixo recorrerá aos sistemas basilares a fim de oferecer um método geral que garanta a completude para qualquer sistema que estenda $S4 \otimes KX4$ com um número finito de axiomas esquema $G(a, b, c, d)$ (ver Definição 4.2.5). Dessa forma, se pode explorar não apenas o axioma ponte proposto, mas potencialmente outras interações entre evidência factiva e não-factiva.

² Logic of Evidence and Truth. Ver (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017).

4.2 Um sistema multimodal

Nós pretendemos expressar, em um único sistema, tanto a noção de evidência factiva, quanto a noção de evidência não-factiva. Queremos também ter a capacidade técnica de adicionar axiomas-ponte filosoficamente relevantes sem, com isso, perder resultados metateóricos importantes, como a completude e a correção.

Por isso, em vez de realizar a fusão entre $KX4$ e $S4$, nós recorreremos a um sistema multimodal, seguindo o aparato técnico fornecido por (CARNIELLI; PIZZI, 2008).

Seja Σ nossa assinatura proposicional, onde $\Sigma = \{\rightarrow, \vee, \wedge, \neg\}$. Seja (Var) uma classe de variáveis proposicionais. Seja Φ_0 um conjunto fixo de *parâmetros atômicos modais*, que deve ser entendido como um sistema de rótulos, cujos elementos são:

- a ;
- b ;
- o parâmetro identidade, 1;
- o parâmetro nulo, 0.

Sejam \odot e \cup dois *operadores de formação*. Nossa *linguagem proposicional multimodal* é então definida como $MML = \langle Var, \Sigma, \langle \Phi_0, \odot, \cup \rangle \rangle$.

Seja ‘ a ’ o rótulo para \Box e ‘ b ’ o rótulo para \Box . Portanto, $[a]p$ significa o mesmo que $\Box p$, e $[b]p$ significa o mesmo que $\Box p$. Isto é, $[a]p$ representa “existe evidência factiva para p ” e $[b]p$ representa “existe evidência não-factiva para p ”.

A classe Φ de Parâmetros Multimodais será indutivamente definida a partir de \odot e \cup da seguinte forma:

Definição 4.2.1 (*A classe de parâmetros multimodais Φ*)

1. Se $a \in \Phi_0$, então $a \in \Phi$.
2. Se $a, b \in \Phi$, então $a \cup b \in \Phi$ e $a \odot b \in \Phi$.
3. Φ não tem nenhum outro elemento.

A classe de operadores modais, Θ , pode agora ser definida da seguinte forma:

Definição 4.2.2 (*A classe de operadores modais Θ*)

- Se $a \in \Phi$, então $[a] \in \Theta$

Nós também podemos definir o *diamante* (\diamond) em termos de *box* (\square) como usual:

- $\langle a \rangle A \stackrel{\text{Def}}{=} \neg[a]\neg A$

O conjunto de fórmulas (For) é obtido indutivamente de maneira usual adicionando a seguinte cláusula:

- Se A é uma fórmula e $a \in \Phi$, então $[a]A$ (e $\langle a \rangle A$) é uma fórmula.

Definição 4.2.3 (*Um sistema multimodal normal*).

Um sistema multimodal normal S^{Φ_0} baseado em Φ_0 é uma coleção de fórmulas multimodais bem formadas contendo todas as tautologias do Cálculo Proposicional Clássico, fechado sob Modus Ponens e Substituição Uniforme, além de:

- (K) $[a](p \rightarrow q) \rightarrow ([a]p \rightarrow [a]q)$, para cada $a \in \Phi_0$;
- (Nec^a) $\vdash A$ implica $\vdash [a]A$, para cada $a \in \Phi_0$.

Definição 4.2.4 (Um sistema multimodal padrão).

Um sistema multimodal S^Φ é padrão se ele é normal e para cada parâmetro multimodal $a, b, \in \Phi$ e $p \in Var$:

$$(MM1) \quad [a \cup b]p \equiv [a]p \wedge [b]p;$$

$$(MM2) \quad \langle a \cup b \rangle p \equiv \langle a \rangle p \vee \langle b \rangle p;$$

$$(MM3) \quad [a \odot b]p \equiv [a][b]p;$$

$$(MM4) \quad \langle a \odot b \rangle p \equiv \langle a \rangle \langle b \rangle p;$$

$$(MM5) \quad [1]p \equiv p;$$

$$(MM6) \quad \langle 1 \rangle p \equiv p;$$

$$(MM7) \quad [0]p \equiv \top;$$

$$(MM8) \quad \langle 0 \rangle p \equiv \perp.$$

Definição 4.2.5 (Um sistema basilar).

Seja S^Φ um sistema multimodal normal e padrão. Sejam a, b, c, d parâmetros arbitrários em Φ . Então S^Φ é dito basilar se S^Φ estender K apenas com instâncias do seguinte axioma:

$$G(a, b, c, d) \stackrel{Def}{=} \langle a \rangle [b]p \rightarrow [c] \langle d \rangle p$$

Os sistemas que nos interessam aqui são sistemas multimodais padrão com apenas dois rótulos: a rotulando \square e b rotulando \boxplus . Estamos considerando siste-

mas diferentes porque existem princípios de ponte distintos que alguém pode querer adotar (ou não) para representar as relações entre evidências factivas e evidências não-factivas. Acreditamos que o princípio de ponte que apresentamos, o Princípio da Conclusividade (CP), descreve corretamente essas relações. No entanto, as ferramentas fornecidas aqui permitem adotar um sistema sem qualquer princípio de ponte ou com o princípio de ponte que endossamos ³.

Agora é possível apresentar os axiomas do sistema multimodal *SKX4* utilizando nossa linguagem multimodal *MML*:

Definição 4.2.6 (*SKX4*)

O sistema multimodal SKX4 é definido sobre a linguagem multimodal MML pelo seguinte cálculo de Hilbert:

Axiomas-esquema:

1. *Axiomas da Lógica Proposicional Clássica: todo axioma da Lógica Proposicional Clássica é também um axioma de SKX4;*
2. *Axioma de distribuição (K)^a : $[a](A \rightarrow B) \rightarrow ([a]A \rightarrow [a]B)$;*
3. *Axioma de distribuição (K)^b : $[b](A \rightarrow B) \rightarrow ([b]A \rightarrow [b]B)$;*
4. *Axioma (4)^a : $[a]A \rightarrow [a][a]A$;*
5. *Axioma (4)^b : $[b]A \rightarrow [b][b]A$;*

³ Na verdade, qualquer princípio de ponte que siga a forma *G* apresentada acima funcionará - no sentido de que o sistema resultante será correto e completo com relação à sua classe de *frames*. Mas pode não ser filosoficamente razoável. Observe, também, que alguns supostos “princípios-ponte” podem ser derivados dos axiomas do próprio sistema básico (consulte a Definição 4.2.6), portanto não precisam ser adicionados como axiomas.

6. *Axioma (T)* : $[a]A \rightarrow A$;

7. *Axioma (X)* : $[b][b]A \rightarrow [b]A$.

Regras de inferência:

1. *Regra de necessitação (NEC)^a*: Se $\vdash A$, então $\vdash [a]A$;

2. *Regra de necessitação (NEC)^b*: Se $\vdash A$, então $\vdash [b]A$;

3. *Substituição Uniforme*: Se $\vdash A$, e p é qualquer variável atômica ocorrendo em A , então a fórmula bem formada que resulta da substituição uniforme de p por B (denotada por $A[p/B]$) é tal que $\vdash A[p/B]$.

4. *Modus Ponens*:

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

O sistema acima, contudo, consiste apenas em uma justaposição dos axiomas de $KX4$ e $S4$, tal qual na fusão (ver seção 4.1). É preciso, ainda, apresentar em nossa linguagem modal o Princípio da Conclusividade (CP), o qual estabelece que se nós tivermos evidência factiva para A , nós não poderemos mais ter evidência não-factiva para $\neg A$.

Princípio da Conclusividade (CP): $[a]A \rightarrow \neg[b]\neg A$

De agora em diante, nos referiremos a $SKX4 + CP$ como $SKX4+$. É fácil perceber que (CP) não pode ser derivado dos axiomas de $SKX4$ (ver Definição

4.2.6), assim como ocorria na fusão (sem recurso a linguagem *MML*. Ver seção 4.1). Veja o contra-modelo apresentado após a Definição 4.1.3.

Também é importante notar que o Princípio da Conclusividade é uma instância de $G(a, b, c, d)$. De fato:

$$[a]A \rightarrow \langle b \rangle A \quad = \quad G(1, a, 1, b)$$

Isso significa que $SKX4+$ (assim como $SKX4$, evidentemente) consiste em um sistema basilar (ver Definição 4.2.5). Isso é importante porque nós vamos provar os resultados de completude e correção para este tipo de sistema.

4.3 A completude de $SKX4$ e $SKX4+$

Uma prova da completude para $SKX4$ e todas as suas extensões com instâncias de $G(a, b, c, d)$, incluindo, é claro, $SKX4+$, pode ser obtida por meio de uma generalização da prova que apresentamos na seção 3.5. Essa demonstração é um caso particular da prova da completude para sistemas basilares apresentada por (CARNIELLI; PIZZI, 2008) no capítulo 8.6.

Seja W o conjunto de mundos. Considere as seguintes relações do produto cartesiano $W \times W$:

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| (i) $0 = \emptyset$ | A relação vazia; |
| (ii) $1 = W \times W$ | A relação universal; |

(iii) $Id = \langle w, w \rangle : w \in W$ A relação identidade (ou diagonal).

Considere, ainda, as seguintes operações sobre relações:

- (i) $R \cup S = \{\langle w, w' \rangle : wRw' \vee wSw'\}$ União;
- (ii) $R \cap S = \{\langle w, w' \rangle : wRw' \wedge wSw'\}$ Interseção;
- (iii) $R \odot S = \{\langle w, w' \rangle : \exists w''(wRw'' \wedge w''Sw')\}$ Produto relativo (composição);
- (iv) $R \oplus S = \{\langle w, w' \rangle : \forall w''(wRw'' \vee w''Sw')\}$ Soma relativa;
- (v) $\bar{R} = \{\langle w, w' \rangle : \langle w, w' \rangle \notin R\}$ Complementação;
- (vi) $R^{-1} = \{\langle w, w' \rangle : \langle w', w \rangle \in R\}$ Inversa;
- (vii) $R \Rightarrow S = \{\langle w, w' \rangle : \forall w''(wRw'' \supset w''Sw')\}$ Implicação relativa;
- (viii) $R \triangleright S = \{\langle w, w' \rangle : wRw' \wedge \exists w''(w''Sw)\}$ Restrição.

Um frame multi-relacional (ou multiframe) consiste em um par $\mathcal{F} = \langle W, \Omega \rangle$, onde W é um conjunto de mundos e Ω é um conjunto de relações binárias sobre W .

Definição 4.3.1 *Seja S^Φ um sistema basilar. Seja Φ o conjunto dos parâmetros modais sobre Φ_0 . Então $\mathcal{F} = \langle W, \Omega \rangle$ é um multiframe para S^Φ se existe uma função $p : \Phi \rightarrow \Omega$ associando uma relação R em Ω para cada parâmetro modal a em Φ , e R satisfaz as seguintes condições:*

1. $p(1) = Id$ (i.e. $R_1 = Id$) Relação identidade
2. $p(a \cup b) = p(a) \cup p(b)$ (i.e. $R_{a \cup b} = R_a \cup R_b$) União

3. $p(a \odot b) = p(a) \odot p(b)$ (i.e., $R_{a \odot b} = R_a \odot R_b$) Composição
4. $p(0) = 0$ (i.e., $R_0 = \emptyset$) Relação Vazia

Agora nós podemos definir um conjunto maximal consistente de fórmulas, tal qual fizemos para o caso monomodal:

Proposição 4.3.2 *Todo conjunto consistente de fórmulas multimodais Γ pode ser estendido para um conjunto maximal consistente Γ' .*

Prova. A prova é análoga àquela do Lema 3.5.14.

□

A partir de um multiframe $\mathcal{F} = \langle W, \Omega \rangle$, pode-se obter um multi-modelo \mathcal{M} atribuindo uma valoração v ao multiframe \mathcal{F} , assim como no caso monomodal.

Definição 4.3.3 *O multi-modelo canônico para o sistema basilar S^Φ é uma tripla $\mathcal{M} = \langle W_S, \Omega_S, v_S \rangle$, onde:*

1. W_S é a classe de extensões maximais consistentes de S ;
2. Para todo $a \in \Phi$, as relações $Rs_a \in \Omega_S$ são definidas como:

$$wRs_a w' \text{ se, e somente se } Den_a(w) \subseteq w', \text{ onde } Den_a(w) = \{A : [a]A \in w\}.$$

3. Para toda variável atômica p ,

$$v_S(p, w) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in w \\ 0 & \text{se } p \notin w \end{cases}$$

É importante observar que o item 2 da definição acima corresponde a uma generalização da Definição 3.5.12. Ademais, vale observar que Den_a funciona como uma “desnecessitação” multimodal, análoga àquela noção de “possibilitação” do Corolário 3.5.17.

A verdade de uma fórmula em um mundo de um multiframe $\mathcal{M}, w \models A$ é definida do modo usual adicionando a seguinte cláusula:

$\mathcal{M}, w \models [a]A$ se, e somente se, $\mathcal{M}, w' \models A$ para todo w' tal que $\langle w, w' \rangle \in p(a)$.

Lema 4.3.4 *Seja $\mathcal{F} = \langle W_S, \Omega_S \rangle$ um frame canônico e $p_S : \Phi \rightarrow \Omega_S$ definido como $p_S(a) = R_{S_a}$. Então p_S satisfaz as seguintes condições:*

1. $p_S(1) = Id$;
2. $p_S(a \cup b) = p_S(a) \cup p_S(b)$;
3. $p_S(a \odot b) = p_S(a) \odot p_S(b)$;
4. $p_S(0) = 0$.

Prova.

Sejam w e w' extensões maximais consistentes de um sistema modal normal qualquer.

1. $R_{S_1} = Id$.

(\Rightarrow) Suponha $\langle w, w' \rangle \in R_{S_1}$. Por definição, $wR_{S_1}w'$ se, e somente se, $Den_1(w) \subseteq w'$. Mas $Den_1(w) = \{A : [1]A \in w\}$. Isto é, $\{A : [1]A \in w\} \subseteq w'$.

Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM5)), $[1]A \equiv A$. Portanto, $\{A : A \in w\} \subseteq w'$. Isto é, $w \subseteq w'$. Como w e w' são conjuntos maximais consistentes, $w \subseteq w'$ se, e somente se, $w = w'$. Portanto, $\langle w, w' \rangle \in Id$.

(\Leftarrow) Suponha $\langle w, w' \rangle \in Id$. Então, $w = w'$. Conseqüentemente, $\{A : A \in w\} \subseteq w'$. Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM5)), $[1]A \equiv A$. Portanto, $\{A : [1]A \in w\} \subseteq w'$. Isto é, $Den_1(w) \subseteq w'$. Portanto, $wR_{S_1}w'$. Ou seja, $\langle w, w' \rangle \in R_{S_1}$.

2. $R_{S_{a \cup b}} = R_{S_a} \cup R_{S_b}$.

(\Rightarrow) Suponha que $\langle w, w' \rangle \in R_{S_{a \cup b}}$. Isto é, $wR_{S_{a \cup b}}w'$. Por definição, $wR_{S_{a \cup b}}w'$ se, e somente se, $Den_{a \cup b}(w) \subseteq w'$. Mas $Den_{a \cup b}(w) = \{A : [a \cup b]A \in w\}$. Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM1)), $[a \cup b]A \equiv [a]A \wedge [b]A$. Logo, $Den_{a \cup b}(w) = \{A : [a \cup b]A \in w\} = \{A : [a]A \wedge [b]A \in w\} = \{A : [a]A \in w\} \cap \{A : [b]A \in w\} = Den_a(w) \cap Den_b(w)$.

Segue que $wR_{S_{a \cup b}}w'$ se, e somente se, $Den_a(w) \cap Den_b(w) \subseteq w'$. Mas $Den_a(w) = \{A : [a]A \in w\}$ e $Den_b(w) = \{A : [b]A \in w\}$. Portanto, $\{A : [a]A \in w\} \cap \{A : [b]A \in w\} \subseteq w'$. Suponha, por absurdo, que $\langle w, w' \rangle \notin R_{S_a}$ e $\langle w, w' \rangle \notin R_{S_b}$. Isso significa que $\{A : [a]A \in w\} \not\subseteq w'$ e $\{A : [b]A \in w\} \not\subseteq w'$. Portanto, $\{A : [a]A \in w\} \cap \{A : [b]A \in w\} \not\subseteq w'$. Mas isso contradiz nosso resultado anterior. Portanto, $\langle w, w' \rangle \notin R_{S_a}$ ou $\langle w, w' \rangle \notin R_{S_b}$. Isto é, $wR_{S_a}w'$ ou $wR_{S_b}w'$. Portanto, $\langle w, w' \rangle \in R_{S_a} \cup R_{S_b}$.

(\Leftarrow) Suponha que $\langle w, w' \rangle \in R_{S_a} \cup R_{S_b}$. Então $wR_{S_a}w'$ ou $wR_{S_b}w'$. Isto é, $Den_a(w) \subseteq w'$ ou $Den_b(w) \subseteq w'$. Portanto, $Den_a(w) \cap Den_b(w) \subseteq w'$. Isto

é, $\{A : [a]A \wedge [b]A \in w\} \subseteq w'$. Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM1)), $[a \cup b]A = [a]A \wedge [b]A$. Portanto, $\{A : [a \cup b]A \in w\} \subseteq w'$. Isto é, $\langle w, w' \rangle \in R_{S_{a \cup b}}$.

3. $R_S(a \odot b) = R_{S_{a \odot b}}$.

(\Rightarrow) Suponha que $\langle w, w' \rangle \in R_{S_{a \odot b}}$. Por definição, $Den_{a \odot b}(w) \subseteq w'$. Isto é, $\{A : [a \odot b]A \in w\} \subseteq w'$ (note que $A \in w'$). Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM3)), $[a \odot b]A \equiv [a][b]A$. Logo, $\{A : [a][b]A \in w\} \subseteq w'$ (note que $[a][b]A \in w$). Como $[a][b]A \in w$, então para todo w'' tal que $w R_{S_a} w''$, $[b]A \in w''$. Dado que $A \in w'$ e $[b]A \in w''$, então existe w'' tal que $\langle w, w'' \rangle \in R_{S_a}$ e $\langle w'', w' \rangle \in R_{S_b}$. Então, pela operação de composição, $\langle w, w' \rangle \in R_{S_a} \odot R_{S_b}$.

(\Leftarrow) $\langle w, w' \rangle \in R_{S_a} \odot R_{S_b}$. Então existe w'' tal que $\langle w, w'' \rangle \in R_{S_a}$ e $\langle w'', w' \rangle \in R_{S_b}$. Então, $Den_a(w) \subseteq w''$ e $Den_b(w'') \subseteq w'$. Como $\{A : [b]A \in w''\} \subseteq w'$, para todo $A \in w'$, $[b]A \in w''$. Como $Den_a(w) \subseteq w''$, então para todo $A \in w'$, $[a][b]A \in w$. Portanto, $\{A : [a][b]A \in w\} \subseteq w'$. Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM3)), isso é equivalente a $\{A : [a \odot b]A \in w\} \subseteq w'$. Isto é, $\langle w, w' \rangle \in R_{S_{a \odot b}}$.

4. $R_{S_0} = \emptyset$ Suponha, por absurdo, que $R_{S_0} \neq \emptyset$. Isto é, suponha que $\langle w, w' \rangle \in R_{S_0}$. Por definição, $Den_0(w) \subseteq w'$. Isto é, $\{A : [0]A \in w\} \subseteq w'$. Como o sistema é padrão (ver Definição 4.2.4 (MM7)), $[0]A \equiv \top$. Como $\top \in w$, então $A \in w'$, para todo A . Isto é, $A \in w'$ e $\neg A \in w'$. Mas isso contradiz o fato de w e w' serem extensões maximais consistentes.

□

Observe que este Lema garante que o multiframe canônico satisfaça as condições da Definição 4.3.1. Portanto:

Proposição 4.3.5 (*Teorema Fundamental para Sistemas Basilares*). *Se $\mathcal{M} = \langle W_S, \Omega_S, v_S \rangle$ é o modelo canônico para um sistema basilar S , $w \in W_S$ e A é uma fórmula multimodal, então $\mathcal{M}, w \models A$ se, e somente se, $A \in w$.*

Prova.

A prova será por indução sobre a complexidade de A .

(1) Se A for uma fórmula atômica p : pela definição de verdade em um modelo, $\mathcal{M}, w \models p$ significa que $v_S(p, w) = 1$. Mas pela Definição 4.3.3, $v_S(p, w) = 1$ se, e somente se, $p \in w$. Logo, $\mathcal{M}, w \models p$ se, e somente se, $p \in w$.

(2.1) Se A for uma fórmula da forma $\neg B$: $\mathcal{M}, w \models \neg B$ se, e somente se, $\mathcal{M}, w \not\models B$. Mas por hipótese indutiva, se $\mathcal{M}, w \not\models B$, então $B \notin w$. Como w é maximal consistente, se $B \notin w$, então $\neg B \in w$. Logo, se $\mathcal{M}, w \models \neg B$, então $\neg B \in w$.

(2.2) Por outro lado, se $\neg B \in w$, então, como w é consistente, $B \notin w$. Mas por hipótese indutiva, se $B \notin w$, então $\mathcal{M}, w \not\models B$.

(3.1) Se A for uma fórmula da forma $B \wedge C$: por definição, $\mathcal{M}, w \models B \wedge C$ se, e somente se, $\mathcal{M}, w \models B$ e $\mathcal{M}, w \models C$. Por hipótese indutiva, se $\mathcal{M}, w \models B$, então $B \in w$. O mesmo se aplica a C . Como w é maximal consistente, $B \in w$ e $C \in w$ implicam em $B \wedge C \in w$.

(3.2) Note que $B \wedge C \in w$ implica em $B \in w$ e $C \in w$. Por hipótese indutiva, se $B \in w$, então $\mathcal{M}, w \models B$. O mesmo se aplica a C . Logo, $\mathcal{M}, w \models B \wedge C$.

(4.1) Se A for uma fórmula da forma $B \vee C$: por definição, $\mathcal{M}, w \models B \vee C$ se, e somente se, $\mathcal{M}, w \models B$ ou $\mathcal{M}, w \models C$. Suponha que $\mathcal{M}, w \models B$. Por hipótese

indutiva, se $\mathcal{M}, w \models B$, então $B \in w$. Então $B \vee C \in w$, pois w é maximal consistente. O mesmo raciocínio se aplica para a hipótese de $\mathcal{M}, w \models C$.

(4.2) Como $B \vee C \in w$, pelo menos uma é o caso: $B \in w$ ou $C \in w$. Por hipótese indutiva, se $B \in w$, então $\mathcal{M}, w \models B$. Logo, $\mathcal{M}, w \models B \vee C$. O mesmo se aplica a hipótese de $C \in w$.

(5.1) Se A for uma fórmula da forma $B \rightarrow C$: por definição, $\mathcal{M}, w \models B \rightarrow C$ se, e somente se, $\mathcal{M}, w \not\models B$ ou $\mathcal{M}, w \models C$. Suponha que $\mathcal{M}, w \not\models B$. Então, por hipótese indutiva, $B \notin w$. Como w é maximal consistente, $\neg B \in w$. Consequentemente, $\neg B \vee C \in w$. Isto é, $B \rightarrow C \in w$. Suponha, por outro lado, que $\mathcal{M}, w \models C$. Então, por hipótese indutiva, $C \in w$. Portanto, $\neg B \vee C \in w$. Isto é, $B \rightarrow C \in w$.

(5.2) Como $B \rightarrow C \in w$, ao menos uma é o caso: $B \notin w$ ou $C \in w$. Suponha que $B \notin w$. Como w é maximal consistente, $\neg B \in w$. Por hipótese indutiva, se $\neg B \in w$, então $\mathcal{M}, w \models \neg B$. Consequentemente, $\mathcal{M}, w \models \neg B \vee C$. Isto é, $\mathcal{M}, w \models B \rightarrow C$. Suponha, por outro lado, que $C \in w$. Então, por hipótese indutiva, $\mathcal{M}, w \models C$. Portanto, $\mathcal{M}, w \models \neg B \vee C$. Isto é, $\mathcal{M}, w \models B \rightarrow C$.

(6.1) Se A for uma fórmula da forma $[a]B$: Suponha $\mathcal{M}, w \models [a]B$. Por definição, $\mathcal{M}, w \models [a]B$ se, e somente se, para todo w' tal que $wRs_a w'$, $\mathcal{M}, w' \models B$. Por hipótese indutiva, se $\mathcal{M}, w' \models B$, então $B \in w'$. Portanto, para todo w' tal que $wRs_a w'$, $B \in w'$. Portanto, $[a]B \in w$.

(6.2) Suponha que $[a]B \in w$. Então $B \in Den_a(w)$. Pela Definição 4.3.3, para qualquer w' , $wRs_a w'$ se, e somente se $Den_a(w) \subseteq w'$, onde $Den_a(w) = \{A : [a]A \in w\}$. Portanto, $B \in w'$ para todo w' tal que $wRs_a w'$. Por hipótese indutiva, se $B \in w'$, então $\mathcal{M}, w' \models B$. Portanto, para todo w' tal que $wRs_a w'$, $\mathcal{M}, w' \models B$. Logo, $\mathcal{M}, w \models [a]B$.

□

Agora é preciso generalizar a propriedade $C^{k,l,m,n}$ que introduzimos na prova para os casos monomodais (ver Proposição 3.5.4). Com efeito, a condição C para sistemas basilares multimodais consiste em uma generalização direta de $C^{k,l,m,n}$. Dado um axioma ponte do tipo $G(a, b, c, d)$, a condição da interação $C(a, b, c, d)$ vale se, e somente se:

$$p(a)^{-1} \odot p(c) \subseteq p(b) \odot p(d)^{-1}$$

Isto é, para todo w, w' e w'' , se $\langle w, w' \rangle \in p(a)$ e $\langle w, w'' \rangle \in p(c)$, então existe um w''' tal que $\langle w', w''' \rangle \in p(b)$ e $\langle w'', w''' \rangle \in p(d)$.

Proposição 4.3.6 (*Completude de sistemas basilares multimodais $G^{(a,b,c,d)}$*).

Seja S um sistema multimodal normal que estende K com um número finito de instâncias do axioma esquema $G(a, b, c, d) = \langle a \rangle [b] p \rightarrow [c] \langle d \rangle p$. Seja $\Gamma \cup \{A\}$ um conjunto de sentenças de S . Portanto, se $\Gamma \models_S A$, então $\Gamma \vdash_S A$.

Prova.

A prova se dá por contraposição. Suponha que $\Gamma \not\vdash_S A$. Isso significa que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ é consistente em S . Então, pela Proposição 4.3.2, $\Gamma \cup \{\neg A\}$ pode ser estendido a um conjunto maximal consistente w . Isto é, temos que: $A \in w$, $\Gamma \subseteq w$, e como w é maximal consistente, $A \notin w$.

Seja $\mathcal{M} = \langle W_S, \Omega_S, v_S \rangle$ o modelo canônico para S . Como w é maximal consistente, $w \in W_S$. Pela Proposição 4.3.5, para cada fórmula A e para cada $w \in W_S$:

$\mathcal{M}, w \models A$ se, e somente se, $A \in w$.

Como $A \notin w$, $\mathcal{M}, w \not\models A$. Além disso, como $\Gamma \subseteq w$, para todo $B \in \Gamma$, $B \in w$. Pela Proposição 4.3.5, segue-se que para todo $B \in \Gamma$, $\mathcal{M}, w \models B$. Dessa forma, temos um modelo \mathcal{M} em que todas as fórmulas de Γ são verdadeiras, mas A é falsa. Portanto, $\Gamma \not\models_S A$.

□

Proposição 4.3.7 *Seja $G(a, b, c, d)$ uma instância do axioma esquema $G(a, b, c, d) = \langle a \rangle [b]p \rightarrow [c] \langle d \rangle p$. Então $G(a, b, c, d)$ é válida em todos os multi-frames \mathcal{F} nos quais as relações de acessibilidade satisfazem a propriedade de interação $C(a, b, c, d)$.*

Prova. Sejam $R_{S_a}, R_{S_b}, R_{S_c}, R_{S_d} \in \Omega_S$ relações que satisfazem a propriedade de interação $C(a, b, c, d)$. Suponha, por absurdo, que uma instância do esquema $G(a, b, c, d)$ não seja válida em algum multi-modelo baseado em \mathcal{F} . Então existe um mundo w_1 tal que:

$$(i). \ v(\langle a \rangle [b]p, w_1) = 1;$$

$$(ii). \ v([c] \langle d \rangle p, w_1) = 0.$$

A partir de (i), temos que existe um mundo w_2 tal que $w_1 R_{S_a} w_2$ e $v([b]p, w_2) = 1$. Portanto, para todo w' tal que $w_2 R_{S_b} w'$, $v(p, w') = 1$.

A partir de (ii), temos que existe um mundo w_3 tal que $w_1 R_{S_c} w_3$ e $v(\langle d \rangle p, w_3) = 0$. Portanto, para todo w'' tal que $w_3 R_{S_d} w''$, $v(p, w'') = 0$.

Pela operação Inversa, como $w_1 R_{S_a} w_2$, $w_2 R_{S_a}^{-1} w_1$. Como $w_1 R_{S_c} w_3$, pelo produto relativo (composição), $\langle w_2, w_3 \rangle \in R_{S_a}^{-1} \odot R_{S_c}$. Como o multi-modelo satisfaz a propriedade de interação $C(a, b, c, d)$, então $R_{S_a}^{-1} \odot R_{S_c} \subseteq R_{S_b} \odot R_{S_d}^{-1}$. Portanto,

$\langle w_2, w_3 \rangle \in R_{S_b} \odot R_{S_d}^{-1}$. Pela operação de produto relativo (composição), existe w_4 tal que $\langle w_2, w_4 \rangle \in R_{S_b}$ e $\langle w_4, w_3 \rangle \in R_{S_d}^{-1}$. Pela Inversa, temos que $\langle w_3, w_4 \rangle \in R_{S_d}$. Mas por (i), como $\langle w_2, w_4 \rangle \in R_{S_b}$, $v(p, w_4) = 1$. Por outro lado, por (ii), como $\langle w_3, w_4 \rangle \in R_{S_d}$, segue-se que $v(p, w_4) = 0$. Contradição.

□

Proposição 4.3.8 (*Correção de sistemas basilares multimodais $G^{(a,b,c,d)}$*).

Seja S um sistema multimodal normal que estende K com um número finito de instâncias do axioma esquema $G(a, b, c, d) = \langle a \rangle [b] p \rightarrow [c] \langle d \rangle p$. Cada teorema de S é válido em todos os multi-frames nos quais as relações em Ω_S satisfazem à propriedade de interação $C(a, b, c, d)$.

Prova. Os axiomas de K são válidos em todos os frames relacionais, portanto também são válidos em todos os multi-frames. Pela Proposição 4.3.7, cada instância do axioma $G(a, b, c, d) = \langle a \rangle [b] p \rightarrow [c] \langle d \rangle p$ é válida em todos os multi-frames nos quais as relações de acessibilidade satisfazem à propriedade de interação $C(a, b, c, d)$. Portanto, todos os axiomas de S são válidos em todos os multi-frames nos quais as relações de acessibilidade satisfazem a propriedade de interação $C(a, b, c, d)$. Como *Modus Ponens* e as regras de necessitação (*NEC*) preservam validade, o mesmo se aplica aos teoremas de S .

□

Como $SKX4+$ consiste em um sistema multimodal normal que estende K com um número finito de axiomas que instanciam o esquema $G(a, b, c, d) = \langle a \rangle [b] p \rightarrow [c] \langle d \rangle p$, os resultados acima se aplicam a $SKX4+$ (bem como a $SKX4$, é claro).

4.4 Alguns exemplos ilustrativos de fórmulas de $SKX4+$

Nesta seção, discutimos alguns exemplos que ilustram as propriedades de $SKX4+$. O primeiro exemplo mostra que se há evidência factiva para A , então há evidência factiva de que há evidência não-factiva para A :

Exemplo 4.4.1 $\vdash [a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A$

Prova.

$$1. \vdash [a]([a]A \rightarrow \langle b \rangle A) \rightarrow ([a][a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A) \quad \text{Axioma (K)}^a$$

$$2. \vdash [a]A \rightarrow \langle b \rangle A \quad \text{CP}$$

$$3. \vdash [a]A \rightarrow [a][a]A \quad \text{Axioma (4)}^a$$

$$4. \vdash [a]([a]A \rightarrow \langle b \rangle A) \quad \text{(NEC)}^a, 2$$

$$5. \vdash ([a]A \rightarrow ([a][a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A)) \rightarrow (([a]A \rightarrow [a][a]A) \rightarrow ([a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A))$$

Class

$$6. \vdash ([a][a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A) \rightarrow ([a]A \rightarrow ([a][a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A)) \quad \text{Class}$$

$$7. \vdash [a][a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A \quad \text{MP 1, 4}$$

$$8. \vdash [a]A \rightarrow ([a][a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A) \quad \text{MP 6, 7}$$

$$9. \vdash ([a]A \rightarrow [a][a]A) \rightarrow ([a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A) \quad \text{MP 5, 8}$$

$$10. \vdash [a]A \rightarrow [a]\langle b \rangle A \quad \text{MP 3, 9}$$

□

O exemplo seguinte mostra que se há evidência não-factiva de que há evidência factiva para A , então há evidência não-factiva para A :

Exemplo 4.4.2 $\vdash [b][a]A \rightarrow [b]A$

Prova.

1. $\vdash [a]A \rightarrow A$ *Axioma (T)*
2. $\vdash [b]([a]A \rightarrow A)$ *(NEC)^b, 1*
3. $\vdash [b]([a]A \rightarrow A) \rightarrow ([b][a]A \rightarrow [b]A)$ *Axioma (K)^b*
4. $\vdash [b][a]A \rightarrow [b]A$ *MP 2, 3*

□

Observe que o exemplo acima não depende de CP , ou seja, seria válido mesmo em $SKX4$. Além disso, observe que $[a][b]A \rightarrow [b]A$ é obtido imediatamente do axioma (T) . Isso significa que a presença de dois operadores $[a]$ e $[b]$ em sequência implicará em um único $[b]$, independentemente de qual ocorrer primeiro. Este resultado é intuitivamente plausível: ter evidência factiva da presença de evidência não-factiva para uma proposição, bem como ter evidência não-factiva de que existe evidência factiva para tal proposição, ambos implicam evidência não-factiva para tal proposição.

Exemplo 4.4.3 *É importante notar que a fórmula $[a]A \rightarrow [b]A$ é inválida em $SKX4+$. $\nvdash [a]A \rightarrow [b]A$;*

Prova. O modelo a seguir fornece um contraexemplo: $W = \{w_1, w_2\}$, $R_a = \{w_1 R_a w_1, w_2 R_a w_2\}$, $R_b = \{w_1 R_b w_2\}$, $V_{w_1}(A) = 1$, $V_{w_2}(A) = 0$.

□

Isto indica que a presença de evidência factiva para uma proposição não implica a presença de evidência não-factiva para essa proposição.

Este resultado é desejável porque separa a presença de evidência factiva da presença de evidência não-factiva. Isso nos permite afirmar que as evidências disponíveis para certas proposições, como as que descrevem uma prova matemática, são factivas, sem implicar a existência de evidências não-factivas, como as utilizadas na previsão do tempo.

Se por algum motivo o leitor discordar e desejar esta interação entre os operadores modais, é relevante observar que $[a]A \rightarrow [b]A$, assim como qualquer instância do esquema $G(a, b, c, d)$, poderia ser adicionado a $SKX4+$ (ou a $SKX4$) como um axioma-ponte, e os resultados metateóricos seriam preservados, como demonstrado na seção 4.3.

Exemplo 4.4.4 *Se $\vdash A$, então $\vdash [b]A$ se, e somente se, $\vdash [a]A$.*

Prova.

1. $\vdash A$
2. $\vdash [b]A$ (NEC)^b, 1
3. $\vdash [b]A \rightarrow ([a]A \rightarrow [b]A)$ Class

- | | |
|---|-------------------------------|
| 4. $\vdash [a]A \rightarrow [b]A$ | <i>MP</i> , 2, 3 |
| 5. $\vdash [a]A$ | <i>(NEC)</i> ^a , 1 |
| 6. $\vdash [a]A \rightarrow ([b]A \rightarrow [a]A)$ | <i>Class</i> |
| 7. $\vdash [b]A \rightarrow [a]A$ | <i>MP</i> , 5, 6 |
| 8. $\vdash ([a]A \rightarrow [b]A) \rightarrow (([b]A \rightarrow [a]A) \rightarrow ([b]A \leftrightarrow [a]A))$ | <i>Class</i> |
| 9. $\vdash ([b]A \rightarrow [a]A) \rightarrow ([b]A \leftrightarrow [a]A)$ | <i>MP</i> , 4, 8 |
| 10. $\vdash [b]A \leftrightarrow [a]A$ | <i>MP</i> , 7, 9 |

□

Uma das virtudes de *SKX4+* é sua capacidade de suportar tanto o mergulho da Lógica Intuicionista em *S4* (veja a seção 3.3) quanto o mergulho de *BLE* em *KX4* (veja a seção 3.4). Além disso, é possível combinar fórmulas de *BLE*, representando evidências não-factivas, com aquelas de *S4*, representando evidências factivas.

Suponha que tenhamos evidências não-factivas que nos levem de *A* a *B*; isto é, temos a fórmula $A \rightarrow B$ em *BLE*. Agora, suponha que encontremos evidências factivas para *A*. Ou seja, suponha que temos *A* na Lógica Intuicionista. Isso implica a presença de evidências não-factivas para *B*? Para responder a isto, primeiro precisamos traduzir cada fórmula de acordo com o seu respectivo mergulho. Seguindo a Definição 3.4.5, a tradução de $A \rightarrow B$ de *BLE* é $[b]([b]A \rightarrow [b]B)$, e a tradução de *B* é $[b]B$. A tradução de *A* da Lógica Intuicionista, seguindo a Definição 3.3.3, é, trivialmente, $[a]A$.

Exemplo 4.4.5 $[b]([b]A \rightarrow [b]B), [a]A \not\vdash [b]B$.

Prova. O modelo a seguir fornece um contraexemplo: $W = \{w_1, w_2\}$, $R_a = \{w_0 R_a w_0, w_1 R_a w_1\}$, $R_b = \{w_0 R_b w_1\}$, $V_{w_1}(A) = 1, V_{w_2}(A) = 0, V_{w_1}(B) = 1, V_{w_2}(B) = 0$.

□

Note, contudo, que $[b]([b]A \rightarrow [b]B), [b]A \vdash [b]B$ em $SKX4$. Isto é, se tivermos evidência não factiva de que uma evidência não-factiva para A implica em uma evidência não-factiva para B , e, além disso, tivermos evidência não-factiva para A , então teremos evidência não-factiva para B .

Exemplo 4.4.6 $[b]([b]A \rightarrow [b]B), [b]A \vdash [b]B$

Prova.

1. $[b]([b]A \rightarrow [b]B)$ *pr.*
2. $[b]A$ *pr.*
3. $([b]([b]A \rightarrow [b]B)) \rightarrow ([b][b]A \rightarrow [b][b]B)$ *Axioma (K)^b*
4. $[b][b]A \rightarrow [b][b]B$ *MP 1, 3*
5. $[b]A \rightarrow [b][b]A$ *Axioma (4)^b*
6. $[b][b]A$ *MP, 2, 5*
7. $[b][b]B$ *MP, 4, 6*
8. $[b][b]B \rightarrow [b]B$ *Axioma (X)^b*

9. $[b]B$ *MP* 7, 8

□

À primeira vista, os resultados dos exemplos 4.4.5 e 4.4.6 podem parecer contra-intuitivos: se a presença de evidências não-factivas para A ($[b]A$) nos leva a inferir B (Exemplo 4.4.6), por que a presença de evidências factivas ($[a]A$) não faria o mesmo (Exemplo 4.4.5)? No entanto, é importante observar que isso é precisamente aquilo que o Exemplo 4.4.3 nos mostra. Isto é, que não podemos deduzir evidências não-factivas para A a partir de evidências factivas para A em $SKX4+$. No entanto, se adicionarmos a fórmula do Exemplo 4.4.3 como um axioma a $SKX4$, poderemos facilmente demonstrar a validade do Exemplo 4.4.5:

Prova. $[b]([b]A \rightarrow [b]B), [a]A \vdash [b]B$.

1. $[b]([b]A \rightarrow [b]B)$ *pr.*
2. $[a]A$ *pr.*
3. $([b]([b]A \rightarrow [b]B)) \rightarrow ([b][b]A \rightarrow [b][b]B)$ *Axioma (K)^b*
4. $[b][b]A \rightarrow [b][b]B$ *MP* 1, 3
5. $[a]A \rightarrow [b]A$ *Exemplo* 4.4.3
6. $[b]A$ *MP* 2, 5
7. $[b]A \rightarrow [b][b]A$ *Axioma (4)^b*
8. $[b][b]A$ *MP* 6, 7

9. $[b][b]B$ *MP* 4, 8
10. $[b][b]B \rightarrow [b]B$ *Axioma* $(X)^b$
11. $[b]B$ *MP* 9, 10

□

Note, contudo, que o Exemplo 4.4.3 é inválido em $SKX4+$, assim como o Exemplo 4.4.5. Assim, é somente com a adição de um novo axioma-ponte a $SKX4$, como a fórmula $[a]A \rightarrow [b]A$ abordada no Exemplo 4.4.3, que o Exemplo 4.4.5 se torna demonstrável.

5 Conclusão

Face ao aparente conflito entre Realismo Lógico e Pluralismo Lógico, exploramos algumas razões que motivam as duas posições na seção 2.1 e na seção 2.2, respectivamente. Apresentamos, também, uma forma de pluralismo a qual argumentamos ser compatível com o Realismo Lógico, na subseção 2.2.2.

Esta forma de pluralismo harmoniza uma interpretação realista acerca da Lógica Clássica com interpretações não realistas sobre outras lógicas. No capítulo 3, apresentamos interpretações não realistas para a Lógica Intuicionista, na seção 3.1, e para a Lógica Básica da Evidência, na seção 3.2. Segundo argumentamos, estas lógicas podem ser interpretadas como preservando, respectivamente, evidência factiva e evidência não-factiva.

Visando reforçar esta tese pluralista e advogar pela possibilidade de se harmonizar uma interpretação realista acerca da lógica clássica com interpretações não realistas acerca de algumas lógicas não-clássicas, apresentamos os mergulhos da Lógica Intuicionista no sistema modal $S4$ (seção 3.3) e da Lógica Básica da Evidência no sistema modal $KX4$ (seção 3.4). Na seção 3.5 a completude dos sistemas $S4$ e $KX4$ é provada simultaneamente. A possibilidade de traduzir uma fórmula da Lógica Intuicionista ou da Lógica Básica da Evidência em um sistema modal clássico é interessante porque possibilita exibir uma correspondência técnica da tese pluralista que defendemos.

Contudo, como nosso objetivo consiste em harmonizar as três propriedades –

verdade, evidência factiva e evidência não-factiva – buscamos um único sistema capaz de comportar ambos mergulhos, no capítulo 4. Primeiro, exploramos a fusão de $S4$ e $KX4$ na seção 4.1. Todavia, a fim de adicionar um axioma ponte e melhor representar as interações entre evidência factiva e evidência não-factiva, apresentamos um sistema bimodal, $SKX4^+$ na seção 4.2. Na seção 4.3 a completude deste sistema é provada.

Note que $SKX4^+$ consiste em um sistema modal clássico, onde a noção de preservação de verdade está presente. Além disso, o sistema permite o mergulho da Lógica Intuicionista, para tratar da noção de evidência factiva, e da Lógica Básica da Evidência, para tratar da noção de evidência não-factiva. Assim, temos um único sistema capaz de abordar as três noções harmoniosamente. Dessa forma, podemos representar em um sistema formal a compatibilidade que argumentamos existir no âmbito conceitual.

6 Apêndice

6.1 Tablôs analíticos para LET_F

Apresentamos abaixo um sistema de tablôs completo, correto e decidível para a lógica LET_F . Este mesmo sistema de tablôs e seus resultados metateóricos, bem como alguns trechos do texto, foram publicados, em inglês, em (CARNIELLI; FRADE; RODRIGUES, 2022). LET_F é um membro das chamadas lógicas da evidência e verdade (em inglês, *logics of evidence and truth*, ou *LETs*) (RODRIGUES; BUENOSOLER; CARNIELLI, 2020) (CARNIELLI; RODRIGUES, 2017). Uma forte motivação impulsionando as *LETs* consiste no fato de em cenários reais podermos lidar tanto com evidências inconclusivas (ou não-factivas), quanto com evidências conclusivas (ou factivas ¹). As evidências não-factivas podem ser contraditórias, pois podemos ter evidência tanto para A quanto para $\neg A$. Mas podemos também não ter evidência alguma para A , nem para $\neg A$. Portanto, as *LETs*, além de paraconsistentes, são paracompletas. Note, contudo, que as *LETs* não permitem evidências factivas e contraditórias. De fato, a presença de evidência factiva implica a verdade de uma proposição, e as *LETs* oferecem uma abordagem paraconsistente, porém não dialeteísta. Assim, as *LETs* são capazes de lidar tanto com preservação de verdade (como na Lógica Clássica), quanto com preservação de evidência não-factiva.

Nesta tese, também tratamos de uma forma de internalizar em um mesmo

¹ Sobre a terminologia evidência factiva e evidência não-factiva, continuamos seguindo (FITTING, 2017).

sistema diferentes propriedades de proposição. Por isso recorreremos ao mergulho de Gödel na seção 3.3, e ao mergulho de Fitting na seção 3.4. Em $SKX4$ e $SKX4^+$, apresentadas no capítulo 4, ambos mergulhos podem ser efetuados. A lógica LET_F , contudo, conta com suas próprias ferramentas para tratar de contextos distintos de evidência factiva e evidência não-factiva.

Com efeito, LET_F foi introduzida em (RODRIGUES; BUENO-SOLER; CARNIELLI, 2020), e consiste em uma extensão da *logic of first-degree entailment* (FDE), ou lógica de Belnap-Dunn. LET_F estende FDE adicionando um operador de classicidade, \circ , e seu dual, \bullet , um operador de não-classicalidade. A proposição $\circ A$, portanto, significa que A se comporta classicamente. Isso pode ser compreendido como uma afirmação de que a evidência para A é factiva. De forma dual, a proposição $\bullet A$ pode ser lida como afirmando que a evidência para A é não-factiva.

A semântica de LET_F

A linguagem L_5 de LET_F é composta por letras sentenciais enumeráveis p_1, p_2, \dots , os conectivos unários \circ , \bullet , e \neg , os conectivos binários \wedge e \vee , e sinais de pontuação. O conjunto de fórmulas de L_5 , também denotado por L_5 , é definido da forma usual. Letras maiúsculas A, B, C, \dots serão usadas como metavariables para as fórmulas de L_5 , e letras maiúsculas gregas $\Gamma, \Delta, \Sigma, \dots$ como metavariables para conjuntos de fórmulas de L_5 .

(RODRIGUES; BUENO-SOLER; CARNIELLI, 2020) apresentaram um sistema de dedução natural junto a seguinte semântica para LET_F :

Definição 6.1.1 [*Semântica valorativa para LET_F*]

Uma semântica valorativa para LET_F é uma coleção de valorações de LET_F definidas como se segue. Uma função $v : L_5 \rightarrow \{0, 1\}$ é uma valoração de LET_F se ela satisfaz as seguintes cláusulas:

$$(v1) \ v(A \wedge B) = 1 \text{ se, e somente se } v(A) = 1 \text{ e } v(B) = 1;$$

$$(v2) \ v(A \vee B) = 1 \text{ se, e somente se } v(A) = 1 \text{ ou } v(B) = 1;$$

$$(v3) \ v(\neg(A \wedge B)) = 1 \text{ se, e somente se } v(\neg A) = 1 \text{ ou } v(\neg B) = 1;$$

$$(v4) \ v(\neg(A \vee B)) = 1 \text{ se, e somente se } v(\neg A) = 1 \text{ e } v(\neg B) = 1;$$

$$(v5) \ v(A) = 1 \text{ se, e somente se } v(\neg\neg A) = 1;$$

$$(v6) \ \text{Se } v(\circ A) = 1, \text{ então } v(A) = 1 \text{ se, e somente se } v(\neg A) = 0;$$

$$(v7) \ v(\bullet A) = 1 \text{ se, e somente se } v(\circ A) = 0.$$

Definição 6.1.2 Uma fórmula A é consequência semântica de Γ , $\Gamma \models A$, se, e somente se, para toda valoração v , se $v(B) = 1$ para todo $B \in \Gamma$, então $v(A) = 1$.

Nota: A semântica acima é não-determinística no sentido de que o valor semântico de fórmulas complexas não é sempre funcionalmente determinado por suas partes. Por exemplo, não podemos determinar o valor de $\circ(A \wedge B)$ a partir dos valores de A e de B .

Os Tablôs analíticos para LET_F

Como a interpretação pretendida de LET_F consiste na preservação de evidência não-factiva, quatro cenários são possíveis, tal qual em BLE (ver seção 3.2): podemos

ter evidência não-factiva para A e para $\neg A$ simultaneamente; podemos ter evidência que apenas A é verdadeira; podemos ter evidência que apenas $\neg A$ é verdadeira; ou podemos não ter evidência alguma sobre A .

Estes quatro cenários possíveis se refletem nas regras para tablôs para LET_F que veremos abaixo. De fato, considere os rótulos 0 e 1 para se referir a marcadores matemáticos intuitivamente relacionados aos valores semânticos 0 e 1. Então não podemos, por exemplo, considerar que $0(A)$ significa o mesmo que $1(\neg A)$. Em um caso, estamos dizendo que não temos evidência não-factiva de que A seja verdade. No outro, estamos dizendo que nós temos evidência não-factiva de que $\neg A$ é verdadeira. E nós podemos, como já mencionamos, ter evidência não-factiva de que $\neg A$ é verdadeira e ainda assim ter evidência não-factiva de que A também é verdadeira.

Este tratamento positivo da negação não nos permite construir um tablô onde desconsideramos o valor semântico e simplesmente começamos com as premissas e a negação da conclusão. Em vez disso, precisaremos considerar os quatro cenários:

1. $1(A)$;
2. $0(A)$;
3. $1(\neg A)$;
4. $0(\neg A)$.

Com isso, precisaremos também de quatro regras para a conjunção e de quatro regras para a disjunção, pois não poderemos, por exemplo, considerar $1(A \wedge B)$ como sendo o mesmo que $0(\neg(A \wedge B))$. Nós precisaremos, também, de regras para lidar com os símbolos \circ e \bullet .

Apresentamos, abaixo, um conjunto de regras para tablôs para LET_F que constituem um método de prova completo, correto e decidível para LET_F . Estamos considerando, informalmente, as noções usuais de árvore, ramos e nós.

Definição 6.1.3 *Regras de Tablôs para LET_F*

Regra 1

$$\begin{array}{c} 1(A \wedge B) \\ 1(A) \\ 1(B) \end{array}$$

Regra 2

$$\begin{array}{c} 0(A \wedge B) \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0(A) \quad 0(B) \end{array}$$

Regra 3

$$\begin{array}{c} 1(\neg(A \wedge B)) \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1(\neg A) \quad 1(\neg B) \end{array}$$

Regra 4

$$\begin{array}{c} 0(\neg(A \wedge B)) \\ 0(\neg A) \\ 0(\neg B) \end{array}$$

Regra 5

$$\begin{array}{c} 1(A \vee B) \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1(A) \quad 1(B) \end{array}$$

Regra 6

$$\begin{array}{c} 0(A \vee B) \\ 0(A) \\ 0(B) \end{array}$$

Regra 7

$$\begin{array}{c} 1(\neg(A \vee B)) \\ 1(\neg A) \\ 1(\neg B) \end{array}$$

Regra 8

$$\begin{array}{c} 0(\neg(A \vee B)) \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0(\neg A) \quad 0(\neg B) \end{array}$$

Regra 9

$$\begin{array}{l} 1(\neg\neg A) \\ 1(A) \end{array}$$

Regra 10

$$\begin{array}{l} 0(\neg\neg A) \\ 0(A) \end{array}$$

Regra 11

$$\begin{array}{c} 1(\circ A) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} 1(A) & 0(A) \\ 0(\neg A) & 1(\neg A) \end{array} \end{array}$$

Regra 12

$$\begin{array}{l} 1(\bullet A) \\ 0(\circ A) \end{array}$$

Regra 13

$$\begin{array}{l} 0(\bullet A) \\ 1(\circ A) \end{array}$$

Note que o sistema não conta com uma regra para $0(\circ A)$. Uma suposta regra nos permitira concluir $1(\bullet A)$ a partir de $0(\circ A)$, e produziria um *loop* infinito com a *Regra 12*. Além de produzir um *loop*, essa suposta regra se mostra desnecessária. Com efeito, suponha que um ramo b contivesse a fórmula $0(\circ A)$, e que com a aplicação desta regra hipotética concluíssemos $1(\bullet A)$ e fechássemos o ramo. Isso significa que o ramo continha $0(\bullet A)$. Ora, então poderíamos ter, em vez disso, aplicado a *Regra 13* e obtido $1(\circ A)$, o que também fecharia o ramo.

Note, ainda, que a cláusula semântica para $\circ A$ (ver 6.1.1) possui apenas uma condição necessária para $v(\circ A) = 1$, e a ausência de uma regra para $0(\circ A)$ reflete este fato.

A *Regra 11* também merece um comentário adicional: note que o símbolo \circ em LET_F expressa a noção de classicalidade. Isso significa que a fórmula $\circ A$ expressa a ideia de que A se comporta classicamente. Ou seja: a negação para A é clássica: ou A ou $\neg A$ vale, mas não ambas. Isso é garantido pela *Regra 11*.

Definição 6.1.4 *Tablô de LET_F*

1. Um tablô para um conjunto Δ de fórmulas consiste em uma árvore cujo primeiro nó contém todas as fórmulas de Δ e cujos nós subsequentes são obtidos pela aplicação das regras de tablô definidas em 6.1.3.
2. Um ramo está fechado se existir uma fórmula F tal que $1(F)$ e $0(F)$ ocorre no ramo. Se um ramo não estiver fechado, então ele está aberto. Um tablô é dito fechado se todos os seus ramos estiverem fechados.
3. Se nenhuma regra puder ser aplicada a nenhum ramo aberto, o tablô está terminado. Evidentemente, todo tablô fechado está também terminado.
4. Um tablô fechado foi podado se todas as fórmulas de Δ que não foram usadas em seus ramos foram deletadas.
5. Existe uma prova de A a partir de Γ , $\Gamma \vdash A$, se existe um tablô fechado para o conjunto $\{1(B) : B \in \Gamma\} \cup \{0(A)\}$.

Γ pode ser vazio. Neste caso, uma prova de $\vdash A$ se reduz a um tablô para $\{0(A)\}$.

Teorema 6.1.5 *Compacidade*

$\Gamma \vdash A$ se, e somente se, $\Gamma_0 \vdash A$, para $\Gamma_0 \subset \Gamma$, Γ_0 finito.

Prova. Note que um tablô fechado podado é finito, uma vez que todo tablô consiste em uma coleção finita de ramos e todo ramo fechado é finito. Portanto, após um procedimento de poda, apenas um subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$ foi utilizado. Isto é, o procedimento de poda deleta quaisquer possíveis coleções infinitas de sentenças de Γ não usadas no processo de fechamento do tablô.

□

Um tablô analítico é um procedimento por redução ao absurdo, cujo propósito é obter um tablô fechado, provando, portanto, $\Gamma \vdash A$. Na Lógica Clássica, por exemplo, para provar $\Gamma \vdash A$, nós devemos mostrar que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ é insatisfatível. Por isso, um tablô para a Lógica Clássica começa listando todas as fórmulas de Γ e, em seguida, a negação da conclusão ($\neg A$), com o propósito de mostrar que aquele estado de coisas (onde temos todas as fórmulas de Γ e $\neg A$) é insatisfatível – o que nos tablôs consiste em encontrar contradições em todos os ramos.

Mas isso é possível porque na lógica clássica satisfatibilidade e consistência são equivalentes. Em LET_F isso não ocorre. Por isso, em LET_F , para provar $\Gamma \vdash A$, nós começamos listando todas as fórmulas F de Γ com o rótulo “1” ($1(F)$, $1(F')$, etc. Ver Definição 6.1.4). Então escrevemos $0(A)$. Assim, em vez de buscar um par de fórmulas B e $\neg B$ (que fechariam um ramo no tablô para Lógica Clássica), nós buscamos um par de fórmulas $1(B)$ e $0(B)$. Do ponto de vista intuitivo, como os rótulos 1 e 0 estão intuitivamente relacionados aos valores semânticos 1 e 0, o que buscamos para fechar o ramo é uma espécie de “contradição na metateoria”. Isto é, embora LET_F admita que possamos ter evidências não-factivas contraditórias

acerca de uma proposição (por exemplo $1(A)$ e $1(\neg A)$), não é possível que exista e não exista evidência para uma proposição ($1(A)$ e $0(A)$).

Como veremos adiante, o método dos tablôs para LET_F sempre termina (ver 6.1.7). Se o tablô estiver aberto, o ramo aberto fornece uma valoração que consiste em um contraexemplo para $\Gamma \vdash A$. Mostraremos que o método dos tablôs para LET_F constitui em um procedimento de decisão elegante para LET_F .

Completude e Correção

Demonstraremos, a seguir, que o método de tablôs para LET_F apresentado é completo e correto. Começaremos apresentando uma definição de complexidade (\mathcal{C}) para qualquer fórmula de LET_F .

Definição 6.1.6 *Complexidade*

A complexidade de uma fórmula F da linguagem de LET_F é dada pela função $\mathcal{C} : F \rightarrow \mathbb{N}$, tal que:

1. $\mathcal{C}(p) = 0$;
2. $\mathcal{C}(\neg A) = \mathcal{C}(A) + 1$;
3. $\mathcal{C}(A * B) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B) + 1$, para $*$ $\in \{\wedge, \vee\}$;
4. $\mathcal{C}(\circ A) = \mathcal{C}(A) + 2$;
5. $\mathcal{C}(\bullet A) = \mathcal{C}(A) + 3$.

Teorema 6.1.7 *Terminação*

Todo tablô de LET_F termina: após um número finito de passos, nenhuma regra pode ser aplicada.

Prova. Se segue do fato de que cada regra resulta em fórmulas com menor complexidade, ou fórmulas nas quais nenhuma regra pode ser aplicada.

□

Definição 6.1.8 *Ramo LET_F -satisfável*

Um ramo b é LET_F -satisfável se existe uma valoração de LET_F v tal que para toda fórmula que ocorre em b :

1. *Se $1(F)$ está em b , então $v(F) = 1$,*
2. *Se $0(F)$ está em b , então $v(F) = 0$.*

Neste caso, a valoração v satisfaz o ramo b .

Note que nenhum ramo fechado é LET_F -satisfável, pois não pode existir valoração tal que $v(F) = 1$ e $v(F) = 0$. Além disso, vale notar que um ramo LET_F -satisfável não é o mesmo que um ramo classicamente satisfável. Com efeito, um ramo b pode ser LET_F -satisfável mesmo se ocorrer $1(F)$ e $1(\neg F)$ no ramo. O ramo somente seria LET_F -insatisfável se ele estivesse fechado, isto é, se ocorresse, para alguma fórmula F , $1(F)$ e $0(F)$ no ramo, conforme 6.1.4.

Lema 6.1.9 *Ramos Satisfáveis*

(i) Se uma regra não-ramificadora for aplicada a um ramo LET_F -satisfável, o resultado é outro ramo LET_F -satisfável.

(ii) Se uma regra ramificadora for aplicada a um ramo LET_F -satisfável, pelo menos um dos ramos resultantes é um ramo LET_F -satisfável.

Prova.

Para provar (i), precisamos mostrar que toda regra não-ramificadora aplicada a um ramo LET_F -satisfável resulta em outro ramo LET_F -satisfável. Nós precisamos mostrar que isso vale para todas as regras não-ramificadoras.

Começaremos com as regras para a conjunção. Para a Regra 1, suponha que b seja um ramo LET_F -satisfável contendo $1(A \wedge B)$. Então, pela Definição 6.1.8, existe uma valoração v tal que v satisfaz b e $v(A \wedge B) = 1$. Aplicando a Regra 1 a b obtemos um ramo b' tal que $1(A)$ e $1(B)$, assim como $1(A \wedge B)$, estão em b' . Pela Definição 6.1.1, como $v(A \wedge B) = 1$, temos que $v(A) = 1$ e $v(B) = 1$. Portanto, b' é um ramo satisfável. Raciocínios análogos se aplicam a: Regra 4, Regra 6, Regra 7, Regra 9, e Regra 10. Para Regra 12, suponha que b seja um ramo satisfável contendo $1(\bullet A)$. Pela Definição 6.1.8, existe uma valoração v tal que $v(\bullet A) = 1$, e pela Definição 6.1.1, $v(\circ A) = 0$. Uma aplicação da Regra 12 origina um ramo b' tal que $0(\circ A)$ está em b' , e v satisfaz b' . Um raciocínio análogo se aplica a Regra 13.

Para provar (ii), devemos mostrar que toda regra ramificadora aplicada a um ramo LET_F -satisfável resulta em pelo menos um ramo LET_F -satisfável. Nós precisamos mostrar que este é o caso para cada regra ramificadora.

Começaremos com as regras para conjunção. Para a Regra 2, suponha que b seja um ramo LET_F -satisfável contendo $0(A \wedge B)$. Então existe uma valoração v tal que v satisfaz b . Além disso, ou $v(A) = 0$ ou $v(B) = 0$. Uma aplicação da Regra 2 da origem a dois ramos: b' e b'' , tais que $0(A)$ ocorre em b' e $0(B)$ ocorre

em b'' . Portanto, ou v satisfaz b' ou v satisfaz b'' . Raciocínios análogos se aplicam a Regra 3, Regra 5, e Regra 8. Para Regra 11, suponha que b seja um ramo satisfável contendo $1(\circ A)$. Portanto, existe uma valoração v , tal que v satisfaz b e $v(\circ A) = 1$. Então pela Definição 6.1.1, ou $v(A) = 1$ e $v(\neg A) = 0$, ou $v(A) = 0$ e $v(\neg A) = 1$. Mas se aplicarmos a Regra 11 a b , o ramo bifurcará em dois ramos: b' com $1(A)$ e $0(\neg A)$, e b'' com $0(A)$ e $1(\neg A)$. Portanto, ou v satisfaz b' , ou v satisfaz b'' .

□

Teorema 6.1.10 *Correção*

Se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \vDash A$.

Prova.

A prova se dá por redução ao absurdo. Suponha que $\Gamma \vdash A$, mas $\Gamma \not\vDash A$. Seja b o primeiro nó do tablô de LET_F para $\Gamma \vdash A$, com toda fórmula F de Γ recebendo o rótulo 1 ($1(F_1)$, $1(F_2)$, etc.) e A recebendo rótulo 0 ($0(A)$). Se segue de $\Gamma \not\vDash A$ que existe uma valoração de LET_F v tal que para toda fórmula F de Γ , $v(F) = 1$, e $v(A) = 0$. Portanto, pela Definição 6.1.8, b é satisfável. Mas o Lema 6.1.9 nos garante que se uma regra for aplicada a b , pelo menos um dos ramos resultantes será satisfável. Portanto, após um número finito de aplicações de regras, o tablô de LET_F para $\Gamma \vdash A$ terminará com pelo menos um ramo satisfável. Existe, portanto, uma valoração v' tal que para toda fórmula F que ocorre em b' , se $1(F)$ está em b' , $v(F) = 1$, e se $0(F)$ ocorre em b' , $v(F) = 0$, e b' não pode conter nenhuma fórmula F tal que $1(F)$ e $0(F)$ estejam ambos em b' , do contrário v' não seria uma valoração. Mas então b' é um ramo aberto, e $\Gamma \not\vDash A$, o que contradiz nossa hipótese inicial. Logo, $\Gamma \vdash A$

□

Para provar a completude do método dos tablôs para LET_F em relação a semântica de LET_F (se $\Gamma \models A$, então $\Gamma \vdash A$), nós mostraremos a contrapositiva: $\Gamma \not\models A$, então $\Gamma \not\vdash A$. Mas $\Gamma \not\models A$ significa que existe um ramo aberto em nosso tablô de LET_F . Seja b este ramo aberto. Nós queremos mostrar que existe uma valoração de LET_F v induzida por b tal que para toda fórmula F de Γ , $v(F) = 1$ e $v(A) = 0$. Portanto, $\Gamma \not\vdash A$. Por isso, definiremos primeiro uma valoração induzida por um ramo aberto de LET_F .

Definição 6.1.11 *Semi-valorção de LET_F induzida por b*

Seja um literal uma letra proposicional ou a negação de uma letra proposicional. Seja b um ramo aberto de um tablô terminado de LET_F . A semi-valorção s induzida por b é tal que:

- Para todo literal l tal que $1(l)$ está em b , $s(l) = 1$;
- Para todo literal l tal que $1(l)$ não está em b , $s(l) = 0$;
- Se $1(\circ A)$ está em b , então $s(\circ A) = 1$ e $s(\bullet A) = 0$;
- Se $1(\circ A)$ não está em b , então $s(\circ A) = 0$ e $s(\bullet A) = 1$;
- $s(\neg \circ A) = 1$ se, e somente se $1(\neg \circ A)$ está em b ;
- $s(\neg \bullet A) = 1$ se, e somente se $1(\neg \bullet A)$ está em b .

Lema 6.1.12 *Valoração induzida por um ramo aberto*

Seja b um ramo aberto de um tablô terminado. Então existe uma valoração de LET_F v induzida por b tal que para toda fórmula F :

- (i) Se $1(F)$ está em b , $v(F) = 1$,
- (ii) Se $0(F)$ está em b , $v(F) = 0$.

Prova. O lema acima será provado por indução na complexidade de F (ver Definição 6.1.6).

(1) Se F é um literal, $\circ A$, $\bullet A$, $\neg\circ A$, ou $\neg\bullet A$, definimos $v(F) = s(F)$.

(2) $F = A \wedge B$.

(2.1) Se $1(A \wedge B)$ está em b , como o tablô está terminado, a Regra 1 foi aplicada, portanto $1(A)$ e $1(B)$ estão ambos em b . Então, por hipótese indutiva, $v(A) = 1$ e $v(B) = 1$. Portanto, definimos $v(A \wedge B) = 1$.

(2.2) Se $0(A \wedge B)$ está em b , a Regra 2 foi aplicada e o tablô se bifurcou em dois ramos: b' e b'' . Em b' , nós temos $0(A)$, e em b'' , $0(B)$. Como b é um ramo aberto de um tablô terminado, nós temos duas opções não excludentes: (i) b' é um ramo aberto, (ii) b'' é um ramo aberto. Se (i) $1(A)$ não está b' . Além disso, por hipótese indutiva, $v(A) = 0$. Se (ii), $1(B)$ não está b'' . Além disso, por hipótese indutiva, $v(B) = 0$. Em ambos os casos, definimos $v(A \wedge B) = 0$.

A valoração v definida em (2.1) e (2.2) claramente satisfaz a Definição 6.1.1.

(3) $F = \neg(A \wedge B)$.

(3.1) Se $1(\neg(A \wedge B))$ está em b , como o tablô está terminado, a Regra 3 foi aplicada e o tablô se bifurcou em dois ramos: b' e b'' . Em b' , nós temos $1(\neg A)$, e em b'' $1(\neg B)$. Como b é um ramo aberto de um tablô terminado, nós temos duas opções

não excludentes: (i) b' é um ramo aberto e $0(\neg A)$ não está em b' ; (ii) b'' é um ramo aberto e $0(\neg B)$ não está em b'' . Se (i), por hipótese indutiva, temos que $v(\neg A) = 1$. Definimos então $v(\neg(A \wedge B)) = 1$. Se (ii), por hipótese indutiva, temos que $v(\neg B) = 1$. Definimos então $v(\neg(A \wedge B)) = 1$.

(3.2) Se $0(\neg(A \wedge B))$ está em b , então, como o tablô está terminado, a Regra 4 foi aplicada, portanto $0(\neg A)$ está em b e $0(\neg B)$ está em b . Mas como o ramo está aberto, $1(\neg A)$ não está em b e $1(\neg B)$ não está em b . Então, por hipótese indutiva, $v(\neg A) = 0$ e $v(\neg B) = 0$. Definimos então $v(\neg(A \wedge B)) = 0$.

A valoração v definida em (3.1) e (3.2) claramente satisfaz a Definição 6.1.1.

Os casos (4) $F = A \vee B$ e (5) $F = \neg(A \vee B)$ são análogos

(6) $F = \neg\neg A$.

Se $1(\neg\neg A)$ está em b , a Regra 9 foi aplicada e $1(A)$ também estará em b . Por hipótese indutiva, $v(A) = 1$, e então definimos $v(\neg\neg A) = 1$. Por um raciocínio análogo, se $0(\neg\neg A)$ está em b , definimos $v(\neg\neg A) = 0$.

A valoração v definida em (6) satisfaz a Definição 6.1.1.

Nós mostramos que a valoração v que definimos satisfaz as cláusulas (v1) a (v5) da Definição 6.1.1. Mostraremos agora que v também satisfaz as cláusulas (v6) e (v7).

(7) $F = \circ A$.

(7.1) Se $1(\circ A)$ está em b , então, pelo item (1), $v(\circ A) = 1$ e $v(\bullet A) = 0$. Como o tablô está terminado, a Regra 11 foi aplicada e o tablô se bifurcou em dois ramos: b' e b'' , tais que: (i) $1(A)$ e $0(\neg A)$ ocorrem em b' , e (ii) $0(A)$ e $1(\neg A)$ ocorrem em b'' . Como b está aberto, ou b' ou b'' está aberto. Se b' está aberto, então por hipótese indutiva $v(A) = 1$ e $v(\neg A) = 0$. Se b'' está aberto, então por hipótese indutiva $v(A) = 0$ e

$v(\neg A) = 1$. Então, v satisfaz a Definição 6.1.1 (cláusula(v6)).

(7.2) Se $0(\circ A)$ está em b , então, como b está aberto, $1(\circ A)$ não está em b , e pelo item (1), $v(\circ A) = 0$ e $v(\bullet A) = 1$.

(8) $F = \bullet A$.

(8.1) Se $1(\bullet A)$ está em b , então, como o tablô está terminado, a Regra 12 foi aplicada e $0(\circ A)$ está em b . Como o ramo está aberto, $1(\circ A)$ não está em b . Pelo item (1), $v(\bullet A) = 1$ e $v(\circ A) = 0$.

(8.2) Se $0(\bullet A)$ está em b , então, como o tablô está terminado, $1(\circ A)$ está em b . Pelo item (1), $v(\bullet A) = 1$ e $v(\circ A) = 0$.

(9) $F = \neg \circ A$.

Se $1(\neg \circ A)$ está em b , $v(\neg \circ A) = 1$ por definição. Se $1(\neg \circ A)$ não está em b , $v(\neg \circ A) = 0$ por definição. Um raciocínio análogo se aplica a $F = \neg \bullet A$.

Portanto, a valoração v , como definida, é uma valoração de LET_F legítima.

□

Teorema 6.1.13 *Completeness*

Se $\Gamma \models A$, então $\Gamma \vdash A$.

Prova. Nós provaremos a contrapositiva: se $\Gamma \not\models A$, então $\Gamma \not\vdash A$. Suponha $\Gamma \not\models A$. Então existe um tablô de LET_F terminado com pelo menos um ramo aberto b tal que $0(A)$ está em b e para toda fórmula F de Γ , $1(F)$ está em b . Mas pelo Lema 6.1.12, para toda fórmula F de um ramo aberto b de um tablô de LET_F terminado, existe uma interpretação v , induzida por este ramo b , tal que para cada fórmula F de b , se $1(F)$ estiver em b , $v(F) = 1$, e se $0(F)$ estiver em b , $v(F) = 0$. Então existe

uma valoração de LET_F tal que $v(A) = 0$ e para toda fórmula F de Γ , $v(F) = 1$. Portanto, $\Gamma \not\models A$.

□

Decidibilidade

Definição 6.1.14 *Subfórmula generalizada*

1. Se B é uma subfórmula de A (no sentido usual) e $A \neq B$, então B é uma subfórmula imediata de A .
2. Se B é uma subfórmula imediata de A , então B é uma subfórmula generalizada de A .
3. $\neg A$ e $\neg B$ são subfórmulas generalizadas de $\neg(A \wedge B)$ e de $\neg(A \vee B)$.
4. $\neg A$ é uma subfórmula generalizada de $\circ A$.
5. $\circ A$ é uma subfórmula generalizada de $\bullet A$.
6. Se C é uma subfórmula generalizada de B e B é uma subfórmula generalizada de A , então C é uma subfórmula generalizada de A .

Como consequência da definição acima, A e $\neg A$ são ambas subfórmulas generalizadas de $\circ A$ e $\bullet A$, já que $\circ A$ é uma subfórmula generalizada de $\bullet A$. Note também que se B é uma subfórmula generalizada de A , então $\mathcal{C}(B) < \mathcal{C}(A)$. De fato, pela definição de complexidade (Definição 6.1.6), este resultado é evidente para quando B é uma subfórmula imediata de A . A cláusula 4 é garantida pelo fato da Definição

6.1.6.2 conceder complexidade menor que 6.1.6.4. Analogamente, a cláusula 5 é garantida pelo fato da Definição 6.1.6.4 conceder complexidade menor que 6.1.6.5. O único caso que requer alguma atenção é o da cláusula 3. Note que $\mathcal{C}(\neg(A * B))$ (onde $*$ $\in \{\wedge, \vee\}$) $= 1 + 1 + \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$. Note também que $\mathcal{C}(\neg A) = \mathcal{C}(A) + 1$. Portanto, $\mathcal{C}(\neg A) < \mathcal{C}(\neg(A * B))$. Analogamente, $\mathcal{C}(\neg B) = \mathcal{C}(B) + 1$. Portanto, $\mathcal{C}(\neg B) < \mathcal{C}(\neg(A * B))$.

Teorema 6.1.15 *Decidibilidade*

O método de tablôs para LET_F consiste em um procedimento de decisão para LET_F .

Prova. Todo termo que ocorre em um tablô de LET_F para $\Gamma \vdash A$ consiste em fórmulas assinaladas de $\Gamma \cup \{A\}$, no primeiro nó, e subfórmulas generalizadas assinaladas de $\Gamma \cup \{A\}$ nos nós seguintes. Cada regra de tablôs produz subfórmulas generalizadas da fórmula a qual a regra é aplicada. Como cada subfórmula generalizada tem complexidade inferior aquela da fórmula da qual ela é subfórmula generalizada, a complexidade das fórmulas que ocorrem no tablô diminui monotonicamente pela aplicação das regras, até que todos os ramos do tablô estejam ou fechados, ou cheguem a fórmulas de complexidade menor para as quais nenhuma regra pode ser aplicada: um literal com rótulo 0 ou 1, $0(\circ A)$, $1(\neg \circ A)$, $0(\neg \circ A)$, $1(\neg \bullet A)$ ou $0(\neg \bullet A)$. Portanto, os tablôs para LET_F oferecem um procedimento de decisão para LET_F .

□

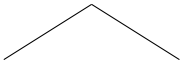
Alguns exemplos de Tablôs para LET_F

Fornecemos abaixo alguns exemplos de tablôs para LET_F a fim de ilustrar algumas propriedades LET_F , bem como o funcionamento do método de prova.

Exemplo 6.1.16

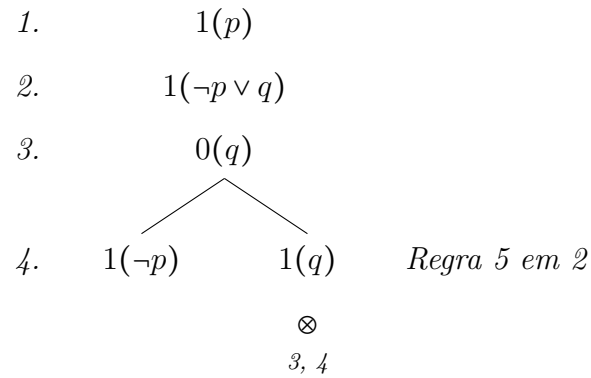
Podemos definir \perp em LET_F como $p \wedge \neg p \wedge \circ p$. Então, $\perp \vdash B$, para qualquer B .

$$(p \wedge \neg p) \wedge \circ p \vdash q$$

1.	$1((p \wedge \neg p) \wedge \circ p)$	
2.	$0(q)$	
3.	$1(p \wedge \neg p)$	<i>Regra 1 em 1</i>
4.	$1(\circ p)$	<i>Regra 1 em 1</i>
5.	$1(p)$	<i>Regra 1 em 3</i>
6.	$1(\neg p)$	<i>Regra 1 em 3</i>
		
7.	$1(p)$	<i>Regra 11, 4</i>
8.	$0(\neg p)$	<i>Regra 11, 4</i>
	\otimes	\otimes
	$6, 8$	$5, 7$

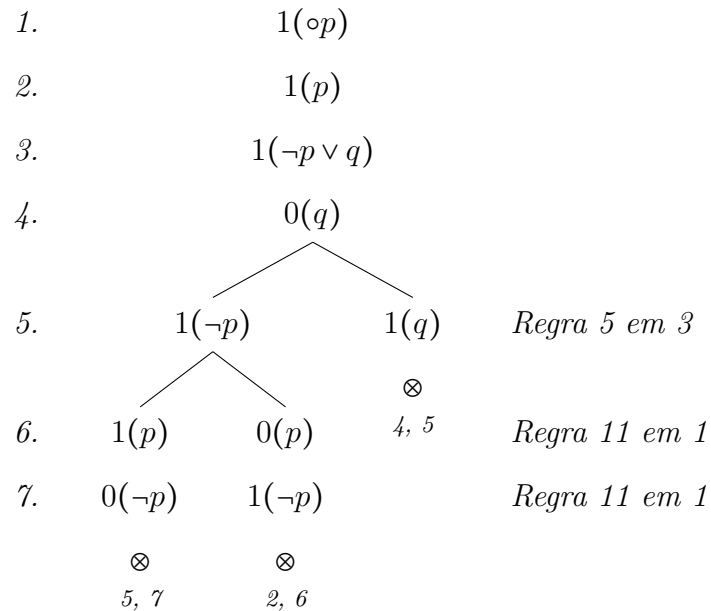
Exemplo 6.1.17 [*Modus ponens*]

Em LET_F , tratamos $A \rightarrow B$ como $\neg A \vee B$. Como o silogismo disjuntivo não vale em LET_F , isso significa que o modus ponens também não vale. De fato,

$$p, \neg p \vee q \not\vdash q$$


O ramo aberto fornece um contraexemplo: $v(p) = v(\neg p) = 1$ e $v(q) = 0$.

Note, contudo, que se p for clássico, podemos recuperar o modus ponens, como pode ser observado abaixo (ver (RODRIGUES; BUENO-SOLER; CARNIELLI, 2020, Fact 32)).

$$\circ p, p, \neg p \vee q \vdash q$$


Exemplo 6.1.18 [*Prova por casos*]

Como o terceiro excluído não vale em LET_F , não se pode proceder usualmente para realizar uma demonstração por casos, a partir de uma fórmula $p \vee \neg p$. Contudo, em LET_F é possível recorrer a outras formas de prova por casos, a saber, a partir das fórmulas $\vdash (p \vee \neg p) \vee \bullet p$ e $\vdash \circ p \vee \bullet p$.

$$\vdash (p \vee \neg p) \vee \bullet p$$

1. $0((p \vee \neg p) \vee \bullet p)$
 2. $0(p \vee \neg p)$ *Regra 6, 1*
 3. $0(\bullet p)$ *Regra 6, 1*
 4. $0(p)$ *Regra 6, 2*
 5. $0(\neg p)$ *Regra 6, 2*
 6. $1(\circ p)$ *Regra 13, 3*
-
7. $1(p)$ $0(p)$ *Regra 11, 6*
 8. $0(\neg p)$ $1(\neg p)$ *Regra 11, 6*

$$\vdash \circ p \vee \bullet p$$

1. $0(\circ p \vee \bullet p)$
2. $0(\circ p)$ *Regra 6 em 1*
3. $0(\bullet p)$ *Regra 6 em 1*
4. $1(\circ p)$ *Regra 13 em 3*

$$\otimes$$

$$2, 4$$

Os operadores \bullet e \circ funcionam como se $\bullet A$ fosse uma negação clássica de $\circ A$, e vice-versa. Na verdade, $\circ A, \bullet A \vdash B$ proíbe que $\circ A$ e $\bullet A$ valham simultaneamente, sob pena de trivialidade.

Observe, no entanto, que $\circ A \vee \neg \circ A$ não é válida em LET_F . Na verdade, o tablô abaixo nos mostra que as fórmulas $\circ p$ e $\neg \circ p$ são independentes.

$\nVdash \circ p \vee \neg \circ p$

1. $0(\circ p \vee \neg \circ p)$
2. $0(\circ p)$ *Regra 6 em 1*
3. $0(\neg \circ p)$ *Regra 6 em 1*

O 6.1.18 indica que $\neg \circ p$ e $\bullet p$ não são equivalentes. Abaixo isso será demonstrado pelo método dos tablôs.

Exemplo 6.1.19 $\neg \circ p \nVdash \bullet p$

1. $1(\neg \circ p)$
2. $0(\bullet p)$
3. $1(\circ p)$ *Regra 13 em 2*
4. $1(p)$ $0(p)$ *Regra 11 em 3*
5. $0(\neg p)$ $1(\neg p)$ *Regra 11 em 3*

$$\bullet p \nVdash \neg \circ p$$

1. $1(\bullet p)$
2. $0(\neg \circ p)$
3. $0(\circ p)$ *Regra 12 em 1*

Exemplo 6.1.20 [*Algumas propriedades de \circ e \bullet*]

$$p, \neg p \vdash \bullet p$$

1. $1(p)$
 2. $1(\neg p)$
 3. $0(\bullet p)$
 4. $1(\circ p)$ *Regra 13 em 3*
- \swarrow
 $1(p)$

\searrow
 $0(p)$
5. $1(p)$ $0(p)$ *Regra 11 em 4*
 6. $0(\neg p)$ $1(\neg p)$ *Regra 11 em 4*
- \otimes
 $2, 6$

\otimes
 $1, 5$

$$\bullet p \nVdash p \wedge \neg p$$

1. $1(\bullet p)$
 2. $0(p \wedge \neg p)$
 3. $0(\circ p)$ *Regra 12 em 1*
- \swarrow
 $0(p)$

\searrow
 $0(\neg p)$
4. $0(p)$ $0(\neg p)$ *Regra 2 em 2*

$$\circ p \vdash p \vee \neg p$$

1.	$1(\circ p)$	
2.	$0(p \vee \neg p)$	
3.	$0(p)$	<i>Regra 6 em 2</i>
4.	$0(\neg p)$	<i>Regra 6 em 2</i>
	\swarrow	
5.	$1(p)$	<i>Regra 11 em 1</i>
	\searrow	
6.	$0(\neg p)$	<i>Regra 11 em 1</i>
	\otimes	
	$3, 5$	
	\otimes	
	$4, 6$	

$$p \vee \neg p \not\vdash \circ p$$

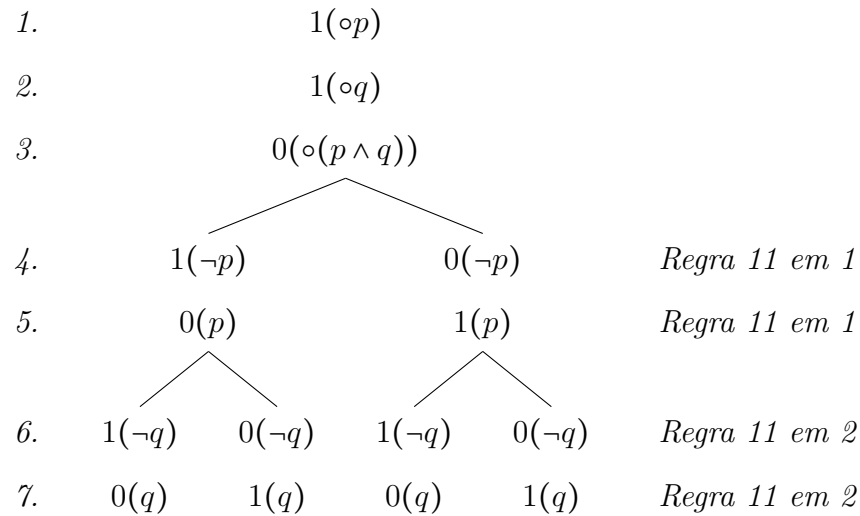
1.	$1(p \vee \neg p)$	
2.	$0(\circ p)$	
	\swarrow	
3.	$1(p)$	<i>Regra 5 em 1</i>
	\searrow	
	$1(\neg p)$	

Exemplo 6.1.21 [*Propagação da Classicalidade*]

Este exemplo visa ilustrar que o operador \circ não se propaga para fórmulas mais complexas. Isto é, dadas duas fórmulas $\circ A$ e $\circ B$, não se pode concluir $\circ \neg A$, $\circ(A \wedge B)$, ou $\circ(A \vee B)$.

Como exemplo, provaremos pelo método dos tablôs que $\circ p, \circ q \not\vdash \circ(p \wedge q)$.

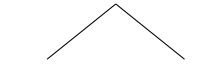
$$\circ p, \circ q \not\vdash \circ(p \wedge q)$$



É importante notar, contudo, que embora em LET_F o operador \circ não se propague, se $\circ p_1, \dots, \circ p_n$, então qualquer fórmula formada a partir de um conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$ com os operadores $\{\neg, \wedge, \vee\}$ se comportará classicamente (consulte (RODRIGUES; BUENO-SOLER; CARNIELLI, 2020, Fact 31) para mais detalhes).

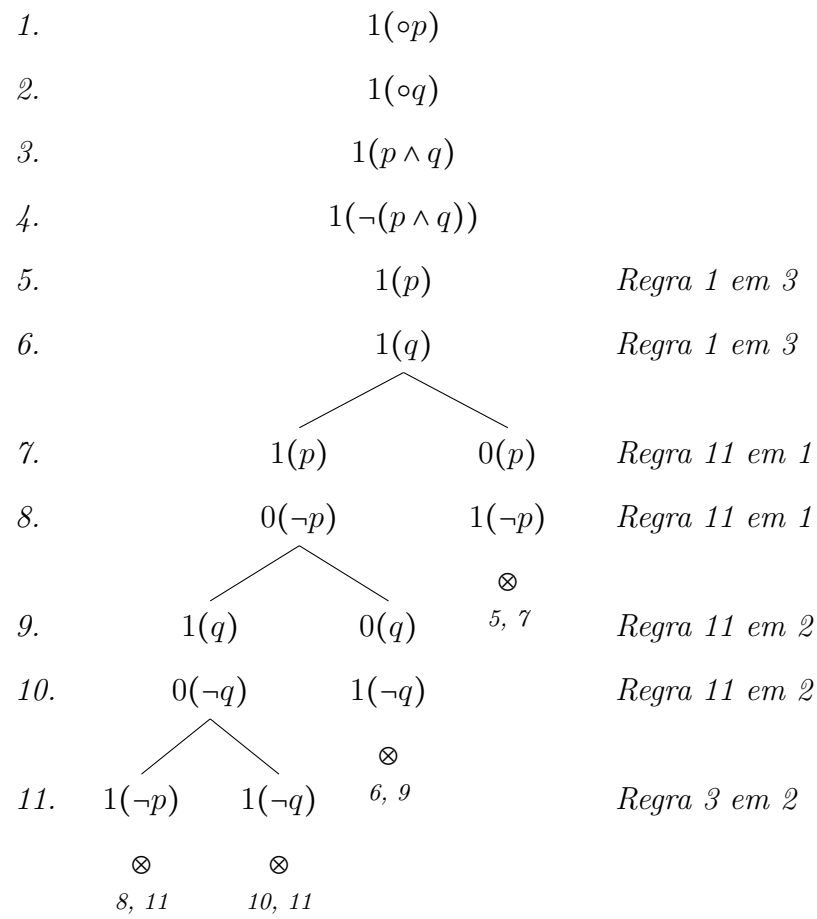
Como exemplo, usaremos o método dos tablôs para mostrar que o conjunto $\beta = \{\circ p, \circ q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ não é satisfável, embora o conjunto $\alpha = \{p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ seja satisfável.

$$\alpha = \{p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$$

- | | | |
|----|---|---------------------|
| 1. | 1($p \wedge q$) | |
| 2. | 1($\neg(p \wedge q)$) | |
| 3. | 1(p) | <i>Regra 1 em 1</i> |
| 4. | 1(q) | <i>Regra 1 em 1</i> |
| |  | |
| 5. | 1($\neg p$) 1($\neg q$) | <i>Regra 3 em 2</i> |

Note que qualquer um dos dois ramos abertos do tablô nos fornece uma valoração que satisfaz o conjunto $\alpha = \{p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$. No tablô abaixo, contudo, todos os ramos se fecham, demonstrando a insatisfatibilidade do conjunto $\beta = \{\circ p, \circ q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$.

$$\beta = \{\circ p, \circ q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$$



Considerações finais

O método dos tablôs para LET_F apresentado neste apêndice e publicado em (CARNIELLI; FRADE; RODRIGUES, 2022) consiste em um procedimento de prova completo e correto. Os exemplos explorados evidenciam a eficiência do método por meio de fórmulas que possuem interesse filosófico, uma vez que exibem propriedades significativas de LET_F .

A lógica LET_F é de especial interesse nessa tese por sua capacidade de tratar tanto de contextos onde se possui evidência factiva (usando-se o operador \circ), quanto de contextos onde a evidência disponível é não-factiva (usando-se o operador \bullet).

Referências

- ARISTÓTELES. Translation of aristotle's metaphysics. In: MCKEON, R. (Ed.). *The Basic Works of Aristotle*. 2nd. ed. New York: Random House, 1941. Tradução do capítulo, para o Inglês, de ROSS, W. D.
- ASENJO, F. G. A calculus for antinomies. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Duke University Press, v. 16, n. 1, p. 103–105, 1966.
- BARWISE, J.; PERRY, J. *Situations and Attitudes*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1983.
- BEALL, J.; RESTALL, G. Logical pluralism. *Australasian Journal of Philosophy*, Oxford University Press, v. 78, n. 4, p. 475–493, 2000.
- BEALL, J. C.; RESTALL, G. *Logical Pluralism*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- BROUWER, L. E. J. *Collected Works: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Amsterdam and Oxford: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier Publishing Company, inc., 1975. v. 1. ISBN 0 7204 2076 8; 0 444 1 0474 7.
- CARNAP, R. *Logical Syntax of Language (International Library of Philosophy, 2001)*. London: Routledge, 1937. ISBN 9780415225533; 0415225531.
- CARNAP, R. Intellectual autobiography. In: SCHILPP, P. A. (Ed.). *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Illinois: Open Court, 1963, (Library of Living Philosophers, 1999, v. 11). ISBN 0812691539; 9780812691535.
- CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M. E. Combining Logics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2020. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020.
- CARNIELLI, W.; FRADE, L.; RODRIGUES, A. Analytic proofs for logics of evidence and truth. *South American Journal of Logic*, v. 6, p. 325–345, 2022.
- CARNIELLI, W. et al. A note on factive and non-factive evidence: Combining the modal logics s_4 and kx_4 . Submetido para publicação. 2024.

CARNIELLI, W.; PIZZI, C. *Modalities and Multimodalities*. Dordrecht: Springer, 2008.

CARNIELLI, W.; RODRIGUES, A. Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views. In: *The Logica Yearbook 2015*. London: College Publications, 2016.

CARNIELLI, W.; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. *Synthese*, Setembro 2017. Disponível em: <http://philsci-archive.pitt.edu/14115/>.

CARNIELLI, W.; RODRIGUES, A. Inferential semantics, paraconsistency and preservation of evidence. *Graham Priest on Dialetheism and Paraconsistency (Springer, forthcoming)*, 2018. Disponível em: <http://bit.ly/INFSMTS>.

CHATEAUBRIAND, O. Lógica, ontologia e epistemologia. In: *XI Encontro Nacional de Filosofia*. Salvador: Quarteto Editora, 2006. p. 107–146. Plenárias da ANPOF 2004/2006.

COOK, R. T. Let a thousand flowers bloom: A tour of logical pluralism. *Philosophy Compass*, v. 5, n. 6, p. 492–504, 2010. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1747-9991.2010.00286.x>.

DIAS, D. B. Carnap's principle of tolerance and logical pluralism. *Argumentos: Revista de Filosofia (Online)*, v. 13, p. 225–236, 2015. Disponível em: <http://www.periodicos.ufc.br/argumentos/article/view/19094>.

DUBUCS, J. Truth and experience of truth. In: VAN ATTEN, M. et al. (Ed.). *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007) the Cerisy conference*. 1. ed. Basileia: Birkhäuser Verlag, 2008. p. 50–59.

DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism (Oxford Logic Guides, 39)*. 2. ed. Oxford: Clarendon Press, 2000. ISBN 0198505248; 9780198505242.

EKLUND, M. Making sense of logical pluralism. *Inquiry*, Informa UK Limited, v. 63, n. 3–4, p. 433–454, maio 2017. ISSN 1502-3923. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/0020174X.2017.1321499>.

FITTING, M. Paraconsistent logic, evidence, and justification. *Studia Logica*, Springer Science and Business Media LLC, Dordrecht, v. 105, n. 6, p. 1149–1166, fev. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11225-017-9714-3>.

- FRADE, L.; RODRIGUES, A. Some remarks on logical realism and logical pluralism. In: *Abstract Consequence and Logics*. London: College Publications, 2020.
- FREGE, G. *Basic Laws of Arithmetic*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1964.
- FREGE, G. *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*. 2. ed. Hamburg: Meiner, 1983. vol. I.
- FREGE, G. O pensamento [1918]. In: ALCOFORADO, P. (org. e trad.). *Investigações lógicas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. P. 9-39.
- GARSON, J. Modal logic. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2018. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.
- GEORGE, A.; VELLEMAN, D. J. *Philosophies of Mathematics*. Oxford: Blackwell, 2002.
- GÖDEL, K. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus (1933). In: FEFERMAN, S. et al. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works*. Oxford: Oxford University Press, 1986. v. 1.
- GÖDEL, K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems (1931)*. Estados Unidos: Dover Publications, 1992. ISBN 0486669807,9780486669809.
- GOTTLIEB, P. Aristotle on non-contradiction. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2019. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019.
- HEYTING, A. On intuitionistic logic. In: MANCOSU, P. (Ed.). *From Brouwer To Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press (1998), 1930.
- HEYTING, A. The formal rules of intuitionistic logic. In: MANCOSU, P. (Ed.). *From Brouwer To Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press (1998), 1930b.
- HEYTING, A. Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 1-2, p. 106–115, jan. 1931. Disponível em: (<https://doi.org/10.1007/bf02028151>).

HEYTING, A. Intuitionism in mathematics. In: KLIBANSKI, R. (Ed.). *Philosophy in the mid-century: A survey*. Florença: La Nuova Italia, 1958. v. 1.

HEYTING, A. Intuitionistic views on the nature of mathematics. *Synthese*, Springer Science and Business Media LLC, v. 27, n. 1-2, p. 79–91, 1974. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf00660890>.

HEYTING, A. Disputation. In: *Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press, 1984. p. 66–76. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139171519.004>.

HUME, D. *Tratado da Natureza Humana*. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

KOLMOGOROV, A. Zur deutung der intuitionistischen logik. *Mathematische Zeitschrift*, Springer Science and Business Media LLC, v. 35, n. 1, p. 58–65, dez. 1932. Traduzido do alemão para o inglês por James McKinna, Edinburgh 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf01186549>.

KOLMOGOROV, A. On the principle of excluded middle [1925]. In: HEIJENOORT, J. van (Ed.). *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 2002, (Source Books in History of Sciences). ISBN 0674324498,9780674324497.

KOURI, T. A new interpretation of carnap's logical pluralism. *Topoi 2016-aug 25 vol. 38 iss. 2*, v. 38, aug 2016.

LEMMON, E.; SCOTT, D. *An Introduction to Modal Logic*. Oxford: Blackwell, 1977. (Oxford).

LUKASIEWICZ, J. Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic. In: BORKOWSKI, L. (Ed.). *Selected Works*. Amsterdam,: North-Holland Pub. Co., 1930. p. 153–178.

LUKASIEWICZ, J. On the principle of contradiction in aristotle. *The Review of Metaphysics*, Philosophy Education Society Inc., v. 24, n. 3, p. 485–509, 1971. ISSN 00346632. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/20125812>.

MADDY, P. *Naturalism in mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2002. 254 p. ISBN 0-19-823573-9.

MCKINSEY, J. C. C.; TARSKI, A. Some theorems about the sentential calculi of lewis and heyting. *Journal of Symbolic Logic*, Association for Symbolic Logic, v. 13, n. 1, p. 1–15, 03 1948.

MCSWEENEY, M. M. Following logical realism where it leads. *Philosophical Studies*, Springer Science and Business Media LLC, v. 176, n. 1, p. 117–139, nov. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11098-017-1008-0>.

MCSWEENEY, M. M. Logical realism and the metaphysics of logic. *Philosophy Compass*, Wiley, v. 14, n. 1, p. e12563, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/phc3.12563>.

POPPER, K. *Conjectures and Refutations*. New York: Harper & Row, 1963.

PRIEST, G. The logic of paradox. *Journal of Philosophical Logic*, v. 8, n. 1, p. 219–241, 1979.

PRIEST, G. *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2006.

PRIEST, G. *Doubt Truth to be a Liar*. Oxford: Oxford University Press, 2008.

QUINE, W. V. *Philosophy of logic*. London, England: Harvard University Press, 1986.

RESNIK, M. D. Against logical realism. *History and Philosophy of Logic*, Taylor & Francis, v. 20, n. 3-4, p. 181–194, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/01445349950044134>.

RESTALL, G. Carnap's tolerance, meaning, and logical pluralism. *The Journal of Philosophy 2002-aug vol. 99 iss. 8*, v. 99, aug 2002.

RODRIGUES, A.; BUENO-SOLER, J.; CARNIELLI, W. Measuring evidence: a probabilistic approach to an extension of Belnap-Dunn logic. *Synthese*, 2020.

RUSH, P. Logical realism. In: RUSH, P. (Ed.). *The Metaphysics of Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN 1107039649.

RUSSELL, G.; BLAKE-TURNER, C. Logical Pluralism. In: ZALTA, E. N.; NODELMAN, U. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2023. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

SCHURZ, G. How far can hume's is-ought thesis be generalized? *Journal of Philosophical Logic*, Springer Science and Business Media LLC, v. 20, n. 1, p. 37–95, fev. 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf00454742>.

SCHURZ, G. *The Is-Ought Problem : an Investigation in Philosophical Logic*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. ISBN 978-94-017-3375-5.

TAHKO, T. The law of non-contradiction as a metaphysical principle. *The Australasian Journal of Logic*, v. 7, p. 32–47, 06 2009.

TENNANT, N. *Anti-realism and Logic: Truth as Eternal*. Oxford: Oxford University Press, 1987.

THOMASON, R. H. Combinations of tense and modality. In: GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic: Volume II: Extensions of Classical Logic*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1984. p. 135–165. ISBN 978-94-009-6259-0. Disponível em: (https://doi.org/10.1007/978-94-009-6259-0_3).

TROELSTRA, A. S. Introductory note to 1933f. In: FEFERMAN, S. et al. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works*. Oxford: Oxford University Press, 1986. v. 1.

TROELSTRA, A. S. On the early history of intuitionistic logic. In: *Mathematical Logic*. Springer US, 1990. p. 3–17. Disponível em: (https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0609-2_1).

TROELSTRA, A. S.; DALEN, D. V.; DALEN, D. van. *Constructivism in Mathematics, Vol 1: Volume 121*. London, England: Elsevier Science, 1988. (Studies in logic and the foundations of mathematics).