

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Tamiris Roberta Calixto

UMA NOVA ABORDAGEM PARA
EXPERIMENTOS COM LUZ COMPRIMIDA:
explicações sem estados comprimidos e sem
emaranhamento em dois modos

Belo Horizonte
2024

Tamíris Roberta Calixto

**UMA NOVA ABORDAGEM PARA
EXPERIMENTOS COM LUZ COMPRIMIDA:
explicações sem estados comprimidos e sem
emaranhamento em dois modos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C154n Calixto, Tamíris Roberta.

Uma nova abordagem para experimentos com luz comprimida: explicações sem estados comprimidos e sem emaranhamento em dois modos / Tamíris Roberta Calixto. – 2024.

79 f. : il.

Orientador: Pablo Lima Saldanha.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 71-77.

1. Óptica quântica. 2. Eletromagnetismo. 3. Probabilidades. I. Título.
II. Saldanha, Pablo Lima. III. Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

CDU – 535.14 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente tese, intitulada "**Uma Nova Abordagem para Experimentos com Luz Comprimida: Explicações Sem Estados Comprimidos e Sem Emaranhamento em Dois Modos**" de autoria de **TAMÍRIS ROBERTA CALIXTO** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS**, em vinte e cinco de julho de 2024.

Belo Horizonte, 25 de julho de 2024.

Prof. Pablo Lima Saldanha
Orientador da estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Carlos Henrique Monken
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond
Departamento de Matemática/UFMG

Profa. Nadja Kolb Bernardes
Departamento de Física/UFPE

Prof. Arturo Antonio Lezama Astigarraga
Instituto de Física/Universidad de la República, Uruguai

Prof. Leonardo Antônio Mendes de Souza
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas/UFV - Campus Florestal



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Antônio Mendes de Souza, Usuário Externo**, em 26/07/2024, às 09:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Professor(a)**, em 26/07/2024, às 11:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 26/07/2024, às 12:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nadja Kolb Bernardes, Usuário Externo**, em 26/07/2024, às 16:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raphael Campos Drumond, Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2024, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Arturo Antonio Lezama Astigarraga, Usuário Externo**, em 08/08/2024, às 12:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3408905** e o código CRC **41319822**.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ATA

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 431ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR TAMÍRIS ROBERTA CALIXTO, orientada pelo professor Pablo Lima Saldanha, para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração física**. Às 09:00 horas de vinte e cinco de julho de dois mil e vinte e quatro, por videoconferência, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Pablo Lima Saldanha** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Carlos Henrique Monken** (Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG), **Nadja Kolb Bernardes** (Departamento de Física/UFPE), **Arturo Antonio Lezama Astigarraga** (Instituto de Física/Universidad de la República, Uruguai) e **Leonardo Antônio Mendes de Souza** (Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas/UFV - Campus Florestal) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo a mestre **TAMÍRIS ROBERTA CALIXTO** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de "**Uma Nova Abordagem para Experimentos com Luz Comprimida: Explicações Sem Estados Comprimidos e Sem Emaranhamento em Dois Modos**". A candidata fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação da candidata.

Belo Horizonte, 25 de julho de 2024.

Prof. Pablo Lima Saldanha
Orientador da estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Carlos Henrique Monken
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond
Departamento de Matemática/UFMG

Profa. Nadja Kolb Bernardes
Departamento de Física/UFPE

Prof. Arturo Antonio Lezama Astigarraga
Instituto de Física/Universidad de la República, Uruguai

Prof. Leonardo Antônio Mendes de Souza
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas/UFV - Campus Florestal

Candidata: Tamiris Roberta Calixto



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Antônio Mendes de Souza, Usuário Externo**, em 26/07/2024, às 09:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tamiris Roberta Calixto, Usuária Externa**, em 26/07/2024, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Professor(a)**, em 26/07/2024, às 11:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 26/07/2024, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nadja Kolb Bernardes, Usuário Externo**, em 26/07/2024, às 16:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raphael Campos Drumond, Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2024, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Arturo Antonio Lezama Astigarraga, Usuário Externo**, em 08/08/2024, às 12:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3408856** e o código CRC **88B6ADCC**.

À Cecília, o amor da minha vida. Por você e para você, para sempre.

Agradecimentos

Minha trajetória para a conclusão desta tese, sem dúvidas alguma, não foi nem de longe como eu imaginei que seria quando ingressei no doutorado em 2018. A pandemia de 2020 mudou o percurso de basicamente todos os rumos da minha vida, que se deu com o afastamento presencial e conclusão do trabalho feita 100% remotamente. Durante esse período de pandemia, meu marido e eu fomos felizmente surpreendidos pela gravidez de nossa filha, nosso grande amor, Cecília. Foi um marco da mudança radical em toda minha vida. Desde os hábitos, a forma de ver e pensar no mundo, os relacionamentos interpessoais e culminando com minha trajetória profissional.

Portanto, o primeiro agradecimento vai para o meu companheiro de alma, que esteve comigo nos momentos mais importantes da minha vida até hoje, Cacá. Obrigada por tudo! Agradeço também aos meus primeiros amores, mãe e pai, Lupe e Beto. Sem vocês nada faria sentido, muito obrigada pelo apoio e amor incondicionais! Aos meus irmãos, Sinara e Gil, por torcerem e acreditarem em mim, além de terem me presenteado e feito a vida mais bonita com meus pequenos Noah e Melina! Agradeço a minha irmã de outra mãe Brenda, por tudo e tanto, por se fazer presente mesmo estando longe, torcer e comemorar cada vitória, obrigada Preta! E claro, agradeço a pessoa mais importante do mundo para mim, a que faz meus dias terem sentido e sem dúvidas alguma, será para sempre a maior fonte das minha inspirações, minha filha Cecília.

Não poderia deixar de mencionar meu orientador, Pablo. Muito obrigada por ter me acompanhado nessa jornada, por ter sido uma pessoa com olhar sobretudo humano, obrigada por todos os ensinamentos e por todo tempo que passamos juntos nesses anos! Agradeço também a todos os professores da UFMG que tive a oportunidade de conviver, por todos os ensinamentos e conhecimento que tanto contribuíram para eu ter chegado até aqui. Agradeço também a todos os colegas, que tive o prazer de conviver, ter trocas (algumas científicas, outras nem tanto rsrs), dar muitas risadas, enfrentar vários minutos na fila do bandejão, tomar café na salinha e bater um papo online em pandemia. Em especial, agradeço imensamente ao meu amigo Marcello, por todo apoio, por ter ficado ao meu lado e me incentivado durante e após a gravidez, todas as conversas trocadas, as dicas e conselhos foram fundamentais para a conclusão desse trabalho! Agradeço também ao Felipe, a quem tive o prazer de conviver (mesmo que remotamente) durante a pandemia, sendo sua monitora. Felipe para mim é um exemplo de resiliência, dedicação e competência. Obrigada por todo período de trocas, pelo conhecimento que criamos juntos e pela amizade que ficou!

Agradeço às minhas amigas e aos meus amigos, que são parte da minha família,

tias e tios da Cecília, por estarem com a gente em todos os momentos: Sandra, Mariana, vó Nice, Aline, Deizi, Rodrigo, Sandro, Allan e também aos membros mais recentes, Amanda, Erik e Rafa. A vida é mais leve e bonita de ser vivida ao lado dos amigos, obrigada pessoal!

A todas as pessoas que foram importantes de alguma maneira na minha jornada, muito obrigada!

Agradeço também ao colegiado e à secretaria de Pós Graduação da Física da UFMG, pela compreensão e apoio que me deram no retorno após a maternidade. O apoio das instituições de ensino superior às mães, sejam elas estudantes ou professoras, faz toda diferença na jornada e construção da sociedade que construímos.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro fundamental para a conclusão deste trabalho.

Por último e mais importante, agradeço a Deus por ter me permitido chegar até aqui!

Resumo

Embora o estado quântico de um campo laser seja geralmente tratado como um estado coerente na óptica quântica, a fase absoluta desconhecida do laser permite representá-lo como uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias, equivalente a uma mistura de estados de Fock. Utilizando essa perspectiva, mostramos que ao empregar um estado de Fock para o laser, somos capazes de gerar previsões experimentais consistentes com aquelas obtidas assumindo um estado coerente, mas com explicações físicas distintas. Aplicamos esses conceitos a experimentos de luz comprimida em um e dois modos, demonstrando que os resultados experimentais típicos também podem ser previstos considerando o campo laser em um estado de Fock ou em uma mistura de estados de Fock e concluimos que, além de nenhum estado comprimido ser produzido, no caso de experimentos de estados de vácuo comprimido em dois modos, não há emaranhamento entre os modos de feixe "gêmeos" de sinal e *idler*. Fornecemos uma explicação física geral para a redução de ruído nos experimentos, utilizando o conceito de distribuição de probabilidade de fase relativa, proposta inicialmente por Luis e Sánchez-Soto [1], sendo que generalizamos a distribuição de fase relativa de dois modos proposta por Luis e Sánchez-Soto para tratar quatro modos ópticos: sinal, *idler* e dois osciladores locais. A explicação física se baseia em uma melhor definição de relação de fase, seja entre o campo sinal e o campo utilizado como oscilador local para o caso de experimentos de vácuo comprimido em um modo, seja na relação entre os quatro modos ópticos envolvido no caso de experimentos de estados de vácuo comprimido em dois modos: sinal, *idler* e dois osciladores locais.

Palavras-chave: Óptica Quântica em Variáveis Contínuas, Estados Comprimidos da Luz, Distribuição de Probabilidade de Fase Relativa.

Abstract

Although the quantum state of a laser field is generally treated as a coherent state in quantum optics, the unknown absolute phase of the laser allows it to be represented as a statistical mixture of coherent states with random phases, equivalent to a statistical mixture of Fock states. Using this perspective, we show that by employing a Fock state for the laser, we can generate experimental predictions consistent with those obtained by assuming a coherent state, but with different physical explanations. We apply these concepts to single-mode and two-mode squeezed light experiments, demonstrating that typical experimental results can also be predicted by considering the laser field in a Fock state or in a mixture of Fock states, and we conclude that, besides no squeezed state being produced, in the case of two-mode squeezed vacuum experiments, there is no entanglement between the "twin" beam modes of signal and idler. We provide a general physical explanation for the noise reduction in the experiments using the concept of relative phase probability distribution, initially proposed by Luis and Sánchez-Soto [1], and we generalize the two-mode relative phase distribution proposed by Luis and Sánchez-Soto to handle four optical modes: signal, idler, and two local oscillators. The physical explanation is based on a better definition of phase relation, either between the signal field and the field used as the local oscillator in the case of single-mode squeezed vacuum experiments, or the relation among the four optical modes involved in the case of two-mode squeezed vacuum experiments: signal, idler, and two local oscillators.

Keywords: Quantum Optics in Continuous Variables, Squeezed States of Light, Relative Phase Probability Distribution.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	18
2.1	Quantização do Campo	18
2.2	Campo Eletromagnético Clássico: Modos Ortogonais	19
2.3	Quantização do Campo	23
2.4	Estados de Fock	24
2.5	Estados Coerentes	26
2.6	Espaço de Fase: Quadraturas	29
3	ESTADOS COMPRIMIDOS DA LUZ	32
3.1	Estado de Vácuo Comprimido em Um Modo	32
3.1.1	Definição Matemática	33
3.1.2	Redução do Ruído: Variância da Quadratura Comprimida	35
3.1.3	Esquema para Geração e Caracterização de um Estado de Vácuo Comprimido	36
3.2	Estado de vácuo comprimido em dois modos	39
3.2.1	Definição Matemática	39
3.2.2	Variância nas Quadraturas	41
3.2.3	Esquema para Geração e Caracterização de Estados Comprimidos em Dois Modos	42
4	DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE FASE	45
4.1	Distribuição de Probabilidade de Fase para Um Modo	45
4.2	Distribuição de Probabilidade de Fase Relativa: Dois Modos	47
4.3	Associação com Detecção de Fase Relativa	49
5	RESULTADOS	52
5.1	Estado do Laser	52
5.2	Tratamento sem Compressão: Um Modo	54
5.2.1	Resultados Considerando a Base de Fock	54
5.2.2	Explicação Geral - Um Modo	59
5.3	Tratamento sem Compressão e sem Emaranhamento: Dois Modos	60
5.3.1	Distribuição de Probabilidade de Fase para um Campo de Quatro Modos	64
5.3.2	Experimentos com Mais de um Pulso de Laser	66
6	CONCLUSÃO	69

REFERÊNCIAS	71
ANEXOS	78
ANEXO A – EXPANSÃO $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$	79

1 Introdução

Um dos quesitos necessários para o estudo e compreensão dos fenômenos que a óptica quântica abrange é a conexão de resultados experimentais, provenientes de experimentos ópticos envolvendo a interação da luz laser com a matéria, com a descrição teórica apropriada para cada fenômeno observado. Para o desenvolvimento da óptica quântica, a quantização do campo eletromagnético é um passo fundamental. A luz quantizada pode ser pensada como um conjunto de fótons, quantas de excitações com quantidades discretas de energia $\hbar\omega$. A quantização do campo eletromagnético leva a um Hamiltoniano completamente análogo ao do oscilador harmônico para cada modo do campo. Assim sendo, o Hamiltoniano quântico que descreve a luz é equivalente a um conjunto infinito de osciladores harmônicos [2]. A óptica quântica abrange uma vasta gama de fenômenos como emaranhamento e superposição e tecnologias avançadas, que vão desde a geração e manipulação de estados quânticos da luz até a aplicação em áreas como informação quântica [3–14], metrologia quântica [15–26], criptografia quântica [27], computação quântica [28, 29], entre outras áreas [30, 31].

Os estados comprimidos da luz destacam-se por serem estados quânticos nos quais a incerteza (ou “ruído quântico”) em uma das quadraturas do campo eletromagnético é reduzida abaixo do limite do ruído de vácuo (imposto pelo princípio de incerteza de Heisenberg), enquanto que a incerteza na quadratura conjugada é aumentada [2]. Estes estados têm aplicações importantes em áreas onde a redução de ruído pode melhorar significativamente o desempenho de detecção, como em metrologia quântica e em várias tarefas de informação quântica [3, 15]. A geração de estados comprimidos envolve técnicas que exploram a não linearidade em cristais para converter fótons de um comprimento de onda em pares de fótons de comprimentos de onda diferentes do inicial. A detecção de tais estados é normalmente realizada através de um processo conhecido como detecção homódina balanceada [2]. No tratamento usualmente adotado para a geração e caracterização dos estados comprimidos da luz, utiliza-se que o estado do campo laser é um estado coerente com um grande número médio de fótons [2, 32].

Entretanto, é de conhecimento na literatura que, devido à falta de conhecimento *a priori* da fase do laser, seu estado é melhor descrito por uma mistura estatística de estados coerentes, o que é equivalente a uma mistura estatística de estados de Fock [32–37]. Portanto, considerar que o laser está em um estado coerente é uma aproximação tão válida quanto considerá-lo em um estado de Fock. O fato de que o estado quântico de um campo laser é mais adequadamente descrito como uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias (ou uma mistura estatística de estados de Fock) gerou uma série de discussões na literatura. O teletransporte quântico experimental utilizando estados

comprimidos [3] foi anteriormente criticado, pois, dado que o campo laser não é um estado coerente, os resultados experimentais não poderiam ser associados a um protocolo de teletransporte quântico [38]. Após um intenso debate [34, 39–42], emergiu um ponto de vista interessante argumentando que um referencial de fase deve ser estabelecido para qualquer protocolo de informação quântica em variáveis contínuas. Sob essa perspectiva, os resultados experimentais de [3] efetivamente demonstram a implementação de um protocolo de teletransporte quântico [39, 40].

A interpretação de diferentes experimentos muda completamente ao considerar o campo de laser em um estado de Fock em vez de um estado coerente. De fato, é possível explicar experimentos, como a interferência produzida pela superposição de dois campos de laser independentes [43] e a medição direta do campo elétrico das ondas de luz [44], assumindo que os campos de laser estão em estados de Fock [33, 45]. Essas diferentes interpretações para os mesmos experimentos certamente trazem questões intrigantes sobre as leis fundamentais por trás dos resultados experimentais, enriquecendo a compreensão dos sistemas em questão.

Nesta tese, descrevemos experimentos que produzem e caracterizam estados de vácuo comprimido em um e dois modos, considerando a descrição do campo de laser como uma mistura estatística de estados de Fock, e não em um estado coerente [36, 37]. Preveamos os resultados experimentais usuais, quando consideramos a base de Fock para descrever o campo do laser, mas com uma interpretação completamente diferente para o fenômeno físico envolvido. Apresentamos uma justificativa geral para a redução do ruído no sistema, para os dois casos: um e dois modos. Em ambos os casos, a distribuição de probabilidade de fase relativa entre os campos envolvidos no sistemas estudados foi o ponto chave para a explicação geral dos resultados. No caso dos estados de vácuo comprimido em um modo, utilizamos a distribuição de probabilidade de fase relativa introduzida por Luis e Sánchez-Soto [1], de onde concluímos que uma justificativa física independente da base (estado coerente ou de Fock) é em termos de uma melhor definição da fase relativa entre os campos de sinal e do oscilador local envolvidos no *setup* estudado. Essa distribuição de fase relativa de dois modos de Luis e Sánchez-Soto foi recentemente associada à informação de Fisher quântica para muitos estados puros úteis em metrologia quântica [46], que mostra uma relevância dessa distribuição de fase no âmbito da metrologia quântica. Para o caso dos estados de vácuo comprimido em dois modos fizemos algo semelhante, mas primeiro apresentamos uma generalização a distribuição de probabilidade de fase relativa para o caso em que temos quatro campos envolvidos: sinal, *idler* e os dois osciladores locais.

A tese está dividida em 4 capítulos. No capítulo 2 trazemos os fundamentos de óptica quântica, com a quantização do campo eletromagnético e apresentação de estados do campo fundamentais para o desenvolvimento da tese, os estados de Fock e estados coerentes, bem como muitas de suas propriedades. Também é apresentado outro conceito

de suma importância para o decorrer da tese que é o conceito de quadraturas do campo eletromagnético, que estão associadas com as componentes do campo eletromagnético oscilante defasados de 90° .

No capítulo 3 introduzimos os estados comprimidos da luz. Abordamos o estado de vácuo comprimido em um e dois modos, desde sua definição matemática, suas propriedades de redução de ruído até a apresentação um esquema para geração e caracterização de estados de vácuo comprimido, em um e dois modos.

O capítulo 4 abrange os conceitos de distribuição de probabilidade de fase, começando pela distribuição de probabilidade de fase para um modo do campo e chegando na distribuição de probabilidade de fase relativa, apresentando a distribuição de fase relativa introduzida por Luis e Sánchez-Soto [1]. Também apresentamos um breve comentário sobre a associação dessa distribuição com detecção de fase relativa.

Finalmente, no capítulo 5 temos os resultados obtidos em nosso tratamento para a produção e caracterização de estados comprimidos em um e dois modos. Inicialmente, apresentamos uma breve justificativa do estado do campo laser ser melhor descrito por uma mistura estatística de estados coerentes com fase aleatória, que é equivalente à uma mistura estatística de estados de Fock. Mostramos os resultados obtidos, para os dois casos tratados, quando consideramos o estado do laser na base dos estados de Fock, que nos leva a um tratamento sem o conceito de compressão ser empregado durante todo o processo. Apresentamos uma explicação geral, envolvendo a distribuição de probabilidade de fase relativa para os campos envolvidos, para o caso de dois modos, generalizamos a distribuição para quando temos quatro modos envolvidos. Os resultados apresentados nesta tese foram publicados nas referências [Phys. Rev. A **102**, 053723 (2020)] [36] e [Optics Communications **550**, 129945 (2024)] [37].

2 Quantização do Campo Eletromagnético

Nos pilares da óptica quântica está a quantização do campo eletromagnético. Muitos fenômenos da luz são bem descritos pela óptica clássica, em que o campo eletromagnético é tratado como um campo clássico. No entanto, vários fenômenos luminosos, especialmente quando se adentra no regime de poucos fótons, não são bem descritos pela teoria clássica, torna-se necessária a utilização de uma teoria mais robusta para a explicação física de tais experimentos. A óptica quântica utiliza-se portanto da teoria da quantização da radiação eletromagnética, onde os campos elétrico e magnético são agora definidos como operadores.

Neste capítulo, apresentaremos a quantização do campo eletromagnético livre. A quantização de um modo do campo eletromagnético livre é completamente análoga à quantização do oscilador harmônico. Assim sendo, o Hamiltoniano quântico que descreve a luz é equivalente a um conjunto infinito de osciladores harmônicos, um para cada modo do campo.

2.1 Quantização do Campo

O ponto de partida para a quantização do campo eletromagnético é a observação de que a luz pode ser modelada como uma onda eletromagnética. Para a explicação de diversos fenômenos observados em escala quântica é necessário que essa onda seja quantizada, ou seja, a energia da onda eletromagnética não varia de forma contínua, mas sim em múltiplos discretos chamados quanta de energia, representados por fótons. O processo de quantização do campo eletromagnético é realizado por meio da introdução de operadores de criação e aniquilação, que descrevem, respectivamente, a criação e a destruição de partículas. No contexto da óptica quântica, esses operadores são aplicados ao campo eletromagnético, permitindo a descrição da criação e aniquilação de fótons [2].

A quantização do campo eletromagnético tem implicações profundas, levando à compreensão de fenômenos como a dualidade onda-partícula dos fótons, a probabilidade de emissão e absorção de fótons por sistemas atômicos, e o fenômeno quântico de emaranhamento. Além disso, ela desempenha um papel fundamental na compreensão de fenômenos relacionados à interação entre luz e matéria e é essencial para a compreensão de tecnologias modernas, como lasers e dispositivos optoeletrônicos.

A quantização do campo eletromagnético é uma peça central na construção teórica da física quântica e proporciona uma compreensão profunda da natureza dualística da luz eletromagnética no reino quântico. Essa abordagem teórica é essencial para a compreensão da física das partículas elementares e para o desenvolvimento de tecnologias que dependem

da manipulação controlada da luz em níveis quânticos.

2.2 Campo Eletromagnético Clássico: Modos Ortogonais

O campo eletromagnético num espaço livre de cargas e correntes satisfaz as equações de Maxwell no vácuo

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1d)$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são os campos elétrico e magnético e $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ é a velocidade da luz no vácuo, com μ_0 e ε_0 sendo, respectivamente, as constantes de permeabilidade magnética e permissividade elétrica do vácuo.

Os campos elétrico e magnético podem ser obtidos dos potenciais escalar, $\phi(\mathbf{r}, t)$, e vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Da equação (2.1d) podemos escrever o campo magnético como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

uma vez que a divergência de um rotacional também é zero. Substituindo esse resultado na equação (2.1a), temos o seguinte para o campo elétrico

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

de onde chegamos à expressão

$$\nabla \times \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] = 0. \quad (2.4)$$

Podemos assim escrever o termo entre colchetes como o gradiente de um potencial escalar, visto que o rotacional de um gradiente também é igual a zero, assim temos o campo elétrico dado em termos dos potenciais como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

Mudanças nos potenciais escalar e vetor são conhecidas como transformações de calibre e são definidas como [47]

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t), \quad (2.6b)$$

onde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é uma função arbitrária de \mathbf{r} e t . Os campos elétrico e magnético, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são invariantes sob essas transformações. Substituindo os potenciais transformados (2.6a) e (2.6b) nas equações dos campos elétrico e magnético, (2.5) e (2.11b), ficamos com

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\phi'(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = -\nabla\left[\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r}, t)\right] - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)] \\ \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \nabla \times [\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)].\end{aligned}\tag{2.7}$$

Considerando que as derivadas temporais e espaciais são permutáveis na equação do campo elétrico sob transformação de calibre, chegamos em

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\tag{2.8}$$

Usando novamente que o rotacional de um gradiente é igual a zero, temos que a equação do campo magnético sob transformação de calibre é

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).\tag{2.9}$$

Como visto acima, as equações de Maxwell são invariantes segundo o calibre, assim escolhendo o calibre de Coulomb, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são determinados a partir do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. O potencial vetor satisfaz a equação de onda homogênea e a imposição de divergência [32, 48]

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0,\tag{2.10a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0.\tag{2.10b}$$

E os campos elétrico e magnético são escritos em termos desse potencial vetor como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t),\tag{2.11a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).\tag{2.11b}$$

Note que substituindo as equações (2.11a) e (2.11b) na equação de Maxwell (2.1b), obtemos novamente que o potencial vetor satisfaz a equação de onda (2.10a).

Pode-se, por conveniência, restringir o campo descrito a um certo volume no espaço (considerar, por exemplo, que o campo está contido em uma cavidade cúbica com arestas de comprimento iguais a L e impor condições de contorno periódicas, obtendo soluções físicas para a equação de onda (2.10a) e num momento oportuno fazendo $L \rightarrow \infty$) e então escrever a expansão para o potencial vetor em termos de um conjunto discreto de modos ortogonais [2, 32]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}}[c_{\mathbf{k}}\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + c_{\mathbf{k}}^*\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}].\tag{2.12}$$

Substituindo a equação (2.12) na equação de onda (2.10a) teremos para cada modo

$$\nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.13)$$

Além disso, as funções $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ devem satisfazer a condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0$ e formam um conjunto ortonormal completo, ou seja,

$$\int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (2.14)$$

Como estamos considerando uma cavidade cúbica de arestas de lado L , o potencial vetor pode ser dado por uma combinação linear de ondas planas, com as funções $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ escritas como [32]

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, s) = L^{-3/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.15)$$

para cada modo normal do campo eletromagnético, sendo $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$ o vetor de polarização com índice de polarização $s = 1, 2$ (duas polarizações independentes) e \mathbf{k} o vetor de propagação. O vetor \mathbf{k} tem componentes [32]

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.16)$$

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

A polarização é ortogonal à direção de propagação devido à condição de transversalidade $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0$, assim $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} = 0$. Assim, podemos agora escrever o potencial vetor como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}}{L^{3/2}} \left[c_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (2.20)$$

com $c_{\mathbf{k}s}(t) = c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t}$. Os campos elétrico e magnético (2.11) correspondentes são então dados por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left[c_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - c_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right], \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \left[c_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - c_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]. \quad (2.21b)$$

A energia do campo é dada pela expressão

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV. \quad (2.22)$$

Identificando a frequência $\omega_k = ck$ e utilizando as relações

$$\int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV = V\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.23a)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}) = -k^2(\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}), \quad (2.23b)$$

obtemos as contribuições dos campos elétrico e magnético para a energia do campo H

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV &= \frac{-\varepsilon_0}{2V} \int_V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s, s'} \omega_k \omega_{\mathbf{k}'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'s'} \left[c_{\mathbf{k}s}(t) c_{\mathbf{k}'s'}(t) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} - \right. \\ &\quad - c_{\mathbf{k}s}^*(t) c_{\mathbf{k}'s'}(t) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} - c_{\mathbf{k}s}(t) c_{\mathbf{k}'s'}^*(t) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} + \\ &\quad \left. + c_{\mathbf{k}s}^*(t) c_{\mathbf{k}'s'}^*(t) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \right] dV \\ &= \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k^2 c_{\mathbf{k}s}(t) c_{\mathbf{k}s}^*(t) - R, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV &= \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}, s} k^2 c_{\mathbf{k}s}(t) c_{\mathbf{k}s}^*(t) - \\ &\quad - \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\mathbf{k}, s, s'} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}) \left[c_{\mathbf{k}s}(t) c_{-\mathbf{k}s'}(t) + c_{\mathbf{k}s}^*(t) c_{-\mathbf{k}s'}^*(t) \right] \\ &= \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k^2 c_{\mathbf{k}s}(t) c_{\mathbf{k}s}^*(t) + R, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$R = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\mathbf{k}, s, s'} \omega_k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'} \left[c_{\mathbf{k}s}(t) c_{-\mathbf{k}s'}(t) + c_{\mathbf{k}s}^*(t) c_{-\mathbf{k}s'}^*(t) \right], \quad (2.26)$$

que nos leva à seguinte expressão para a energia do campo

$$H = 2\varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k^2 c_{\mathbf{k}s}(t) c_{\mathbf{k}s}^*(t). \quad (2.27)$$

Para posterior quantização do campo, vamos reescrever H na forma Hamiltoniana introduzindo um par de variáveis canônicas que serão definidas como

$$q_{\mathbf{k}s}(t) = \varepsilon_0^{1/2} [c_{\mathbf{k}s}(t) + c_{\mathbf{k}s}^*(t)], \quad (2.28a)$$

$$p_{\mathbf{k}s}(t) = -i\omega_0 \varepsilon_0^{1/2} [c_{\mathbf{k}s}(t) - c_{\mathbf{k}s}^*(t)]. \quad (2.28b)$$

Assim, a energia do campo é agora escrita da forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, s} \left[p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t) \right], \quad (2.29)$$

ou seja, para cada modo k, s do campo eletromagnético temos a energia de um oscilador harmônico de massa unitária. Vemos que em termos das variáveis canônicas as equações

canônicas de movimento, dadas pelas equações de Hamilton [48, 49], são respeitadas uma vez que valem as relações

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}} = \frac{\partial q_{\mathbf{k}s}}{\partial t} \text{ e} \quad (2.30a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}} = -\frac{\partial p_{\mathbf{k}s}}{\partial t}. \quad (2.30b)$$

Ambas as variáveis oscilam sinusoidalmente com o tempo numa frequência ω_k .

2.3 Quantização do Campo

A quantização do campo eletromagnético segue uma analogia completa com a quantização do oscilador harmônico. Nesse contexto, o Hamiltoniano quântico que descreve a luz é equivalente a um conjunto infinito de osciladores harmônicos, sendo cada um associado a um modo específico do campo. Conseqüentemente, o espectro de energia para cada modo do campo quantizado segue o mesmo padrão característico de um oscilador harmônico quântico. Em particular, veremos que a energia mínima para um modo do campo eletromagnético é de $\hbar\omega/2$ e quanta de excitações, fótons, com uma energia de $\hbar\omega$ refletindo a natureza discreta da energia em níveis quânticos. O comportamento quântico desses fótons é análogo ao de partículas associadas aos osciladores harmônicos quânticos.

A quantização do Hamiltoniano para um oscilador harmônico é feita fazendo a correspondência das variáveis canônicas de posição e momento com os operadores de posição e momento $q_{\mathbf{k}s} \rightarrow \hat{q}_{\mathbf{k}s}$ e $p_{\mathbf{k}s} \rightarrow \hat{p}_{\mathbf{k}s}$. Esses operadores estão relacionadas ao princípio da incerteza de Heisenberg, que limita a precisão com que podemos conhecer simultaneamente a posição e o momento de uma partícula. Assim, eles devem satisfazer as relações de comutação [2, 48]

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'} \text{ e} \quad (2.31a)$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}]. \quad (2.31b)$$

Partindo da equação (2.29), o operador Hamiltoniano que descreve a energia do campo eletromagnético será portanto igual a

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} [\hat{p}_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_k^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^2(t)]. \quad (2.32)$$

Mas note que, nesse caso, \hat{q} e \hat{p} não estão associados a posição e momento, mas a quadraturas do campo eletromagnético, como será discutido mais tarde.

É conveniente introduzir aqui dois operadores, conhecidos como operadores de aniquilação e criação de fótons $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$, respectivamente. Para cada modo do campo, o operador de aniquilação deste modo é responsável por “remover” um fóton de um estado dado, enquanto o operador de criação está associado à “adição” de um fóton ao

estado. Posteriormente, veremos como ocorre a atuação destes operadores em estados relacionados ao campo eletromagnético, como os estados de Fock e coerente. Definimos então os operadores ¹

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}], \quad (2.33a)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}]. \quad (2.33b)$$

Esses operadores satisfazem as relações de comutação [2]

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} \text{ e} \quad (2.34a)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger]. \quad (2.34b)$$

Escrevendo os operadores $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$ em termos dos operadores de aniquilação e criação (2.33a) e (2.33b) e substituindo na equação (2.32) vemos que a equação que descreve a energia do sistema será dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left[\hat{n}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right], \quad (2.35)$$

onde foi atribuído $\hat{n}_{\mathbf{k}s} = \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s}$ como o operador número de fótons para cada modo, sendo que cada um desses modos possui um conjunto associado de autoestados de número de fótons, chamados de estados de Fock. Posteriormente, discutiremos mais sobre esse autoestados de \hat{H} .

Fazendo a correspondência das variáveis das equações (2.21) com os respectivos operadores, os campos elétrico e magnético serão agora também operadores, dados em termos dos operadores de criação e aniquilação pelas expressões

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L^3}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \text{ e} \quad (2.36a)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 L^3}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right], \quad (2.36b)$$

onde aqui escrevemos a dependência temporal do operador de aniquilação de forma explícita como $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0) e^{-i\omega_k t} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t}$.

2.4 Estados de Fock

Conhecidos também como estados de número, os estados de Fock oferecem uma abordagem conveniente para descrever sistemas com um número variável de partículas,

¹ A dependência temporal será suprimida nos operadores a seguir para não sobrecarregar a notação. Mas, a menos que seja escrito explicitamente, estamos aqui considerando que $\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) \equiv \hat{p}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) \equiv \hat{q}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$.

como é o caso do campo eletromagnético quantizado, sendo autoestados do Hamiltoniano que descreve a luz quantizada [2, 48]. Cada estado de Fock específico expressa o número de fótons presentes em diferentes modos do campo [48]

$$|\{n\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k},s}\rangle = |n_{\mathbf{k}_1,s_1}\rangle |n_{\mathbf{k}_2,s_2}\rangle \dots \quad (2.37)$$

O estado de Fock é um autoestado do operador número de fótons [48]

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s} |\{n\}\rangle = n_{\mathbf{k}s} |\{n\}\rangle. \quad (2.38)$$

Definindo o operador número total de fótons como a soma de todos os operadores número de fótons sobre todos os modos

$$\hat{n} |\{n\}\rangle = n |\{n\}\rangle \quad (2.39)$$

vemos que o estado de Fock é também um autoestado do operador número total de fótons, com autovalor dado pela soma do número total de ocupação sobre todos os modos n .

Como já mencionado, os estados de Fock são autoestados de energia do operador \hat{H} [2, 48]

$$\hat{H} |\{n\}\rangle = E |\{n\}\rangle, \quad (2.40)$$

com

$$E = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left(n_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.41)$$

Os operadores de aniquilação, (2.33a), e criação, (2.33b) alteram o número de fótons do modo \mathbf{k}, s em que eles estão atuando. O operador de aniquilação remove um fóton do modo, enquanto o operador de criação adiciona um fóton. Teremos para o operador criação, atuando no modo \mathbf{k}, s [48],

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger |n_{\mathbf{k}s}\rangle = g_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle, \quad (2.42)$$

com $g_{\mathbf{k}s}$ dado por

$$\langle n_{\mathbf{k}s} | \hat{a}_{\mathbf{k}s} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger | n_{\mathbf{k}s} \rangle = |g_{\mathbf{k}s}|^2 \langle n_{\mathbf{k}s} + 1 | n_{\mathbf{k}s} + 1 \rangle = |g_{\mathbf{k}s}|^2. \quad (2.43)$$

Utilizando a relação de comutação (2.34a) temos também que

$$\langle n_{\mathbf{k}s} | \hat{a}_{\mathbf{k}s} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger | n_{\mathbf{k}s} \rangle = \langle n_{\mathbf{k}s} | (1 + \hat{n}_{\mathbf{k},s}) | n_{\mathbf{k}s} \rangle = 1 + n_{\mathbf{k},s}, \quad (2.44)$$

assim mostramos que $g_{\mathbf{k}s} = \sqrt{1 + n_{\mathbf{k},s}}$ e

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{1 + n_{\mathbf{k},s}} |n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle. \quad (2.45)$$

De forma similar, é possível mostrar que

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},s}} |n_{\mathbf{k}s} - 1\rangle. \quad (2.46)$$

O estado fundamental, ou estado de vácuo (denotaremos por $|\{0\}\rangle$), é o estado em que todos os modos do campo encontram-se no menor estado de energia possível, ou seja, o número de ocupação em cada modo é zero $|\{0\}\rangle = |0\rangle |0\rangle |0\rangle \dots$ [2, 48]. Qualquer estado de Fock é gerado do estado de vácuo, aplicando sucessivamente operadores de criação no estado de vácuo [2, 48]

$$|\{m\}\rangle = \prod_{\mathbf{k},s} \left[\frac{(\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger)^{m_{\mathbf{k}s}}}{\sqrt{m_{\mathbf{k}s}!}} \right] |\{0\}\rangle. \quad (2.47)$$

Como não há partículas no estado de vácuo,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} |\{0\}\rangle = 0. \quad (2.48)$$

Os estados de Fock formam uma base completa e por serem autoestados de operadores Hermitianos, dois estados de Fock diferentes são ortonormais, assim temos as propriedades [48]

$$\sum_{\{n\}} |\{n\}\rangle \langle \{n\}| = \mathbb{I} \quad (2.49)$$

$$\langle \{n\} | \{m\} \rangle = \prod_{\mathbf{k},s} \delta_{n_{\mathbf{k}s} m_{\mathbf{k}s}} \quad (2.50)$$

O valor esperado do operador campo elétrico (2.36a), para um modo do campo, é facilmente calculado para o estado de Fock usando as propriedades dos operadores de criação e aniquilação atuando num estado de Fock, (2.45) e (2.46), e a ortogonalidade dos mesmos (2.50)

$$\langle n | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}} \langle n | [\hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}] | n \rangle = 0, \quad (2.51)$$

vemos que o resultado será sempre igual a zero, até mesmo no limite em que temos um número médio de fótons muito grande. No entanto, esperamos que nesse “limite clássico”, o valor esperado para o operador campo elétrico apresente um comportamento oscilatório, tal qual o caso clássico. Diante disso, introduziremos a seguir estados com esse tipo de comportamento e que são uma importante classe de estados do campo eletromagnético: os estados coerentes.

2.5 Estados Coerentes

Os estados coerentes são os que mais se assemelham ao comportamento clássico da luz. Eles têm a propriedade de manter uma fase constante ao longo do tempo, por possuírem um número indefinido de fótons, ao contrário dos estados de Fock, nos quais a fase é completamente indefinida e o número de fótons é bem definido [32]. Em ótica quântica, há um tipo de relação de incerteza entre o número de fótons e a fase do campo

ótico, como discutiremos posteriormente. Os estados coerentes da luz são autoestados do operador de aniquilação, assim para um modo do campo eletromagnético temos [48]

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.52)$$

onde α é um número complexo, evidenciando que esses estados não são afetados pela aniquilação de um fóton.

Uma maneira de se obter os estados coerentes é através da atuação do operador deslocamento no estado de vácuo [2, 32, 48]. Esse operador é escrito como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}. \quad (2.53)$$

Usando a identidade de Baker-Hausdorff [50], dada pela expressão

$$\begin{aligned} e^{i\hat{G}\lambda}\hat{A}e^{-i\hat{G}\lambda} &= \hat{A} + i\lambda[\hat{G}, \hat{A}] + \left(\frac{(i\lambda)^2}{2!}\right)[\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]] + \left(\frac{(i\lambda)^3}{3!}\right)[\hat{G}, [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]]] + \\ &+ \dots + \left(\frac{(i\lambda)^n}{n!}\right)[\hat{G}, [\hat{G}, \dots [\hat{G}, \hat{A}]] \dots] + \dots, \end{aligned} \quad (2.54)$$

podemos mostrar que

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}. \quad (2.55)$$

Atuando o operador (2.55) no estado de vácuo $|0\rangle$ temos

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle. \quad (2.56)$$

Expandindo a exponencial $e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$ em série de Taylor, reescrevemos a expressão acima como

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!} e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle. \quad (2.57)$$

Uma vez que [48]

$$e^{-\alpha^*\hat{a}} |0\rangle = \left[1 - \alpha^*\hat{a} + \frac{(\alpha^*\hat{a})^2}{2!} - \dots \right] |0\rangle = |0\rangle \quad (2.58)$$

e que

$$(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle, \quad (2.59)$$

obtemos finalmente a expressão para o estado coerente

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.60)$$

onde $|n\rangle$ representa os estados de Fock que indicam o número de fótons no modo considerado, e α é um parâmetro complexo que determina a amplitude e a fase do estado coerente.

Atuando o operador de aniquilação na expressão para o estado coerente (2.60), obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{a} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a} |n\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \alpha |\alpha\rangle,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

que é a relação mostrada na equação (2.52).

A distribuição de probabilidade para o número de fótons n , num estado coerente, é dada por uma distribuição de Poisson

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \tag{2.62}$$

com $\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}$, o número médio de fótons. A incerteza relativa para o operador número de fótons decresce com o aumento do número médio de fótons ($\Delta n / \bar{n} = 1/\sqrt{\bar{n}}$), onde $\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{\bar{n}}$. [2].

O valor esperado do operador campo elétrico (2.36a), para um modo do campo, agora considerando um estado coerente é então dado por

$$\langle \alpha | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \varepsilon_0 L^3}} [\alpha e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - \alpha^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]. \tag{2.63}$$

Decompondo α em sua forma polar, $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$, vemos explicitamente que o valor esperado para o operador campo elétrico² apresenta um comportamento oscilatório

$$\langle \alpha | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = 2|\alpha| \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \varepsilon_0 L^3}} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi). \tag{2.64}$$

O valor esperado do campo elétrico em um estado coerente muda de forma previsível e contínua, em contraste com os estados de Fock, que possuem número de partículas bem definido. Essa característica suave e “determinística” dos estados coerentes os torna semelhantes aos padrões clássicos de luz, onde o campo elétrico pode ser descrito de forma simples por meio das equações de Maxwell (2.1). No entanto, é importante destacar que os estados coerentes continuam sendo estados quânticos com características quânticas. Portanto, apesar de o valor esperado do campo elétrico exibir uma forma sinusoidal semelhante à clássica, os estados coerentes ainda apresentam flutuações quânticas intrínsecas, embora pequenas, ao longo do tempo [2].

² Pode-se mostrar de maneira completamente análoga que o campo magnético também apresentará um comportamento oscilatório.

2.6 Espaço de Fase: Quadraturas

Um outro conceito importante de se introduzir são os operadores de quadraturas no espaço de fase. Esses operadores são fundamentais para a descrição do comportamento de um campo eletromagnético em termos de variáveis conjugadas, como amplitude e fase. Os operadores de quadratura estão associados com as amplitudes dos campos oscilantes, defasados de 90° . Em outras palavras, podemos relacionar as quadraturas com as amplitudes do campo que oscilam com $\sin(\omega t + \theta)$ e $\cos(\omega t + \theta)$.

De forma genérica, os operadores de quadratura são escritos em termos dos operadores de criação e aniquilação

$$\hat{X}(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}), \quad (2.65)$$

no entanto dois operadores de quadratura ortogonais importantes na descrição do campo eletromagnético são definidos como

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \text{e} \quad (2.66a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (2.66b)$$

que são análogos adimensionais aos operadores de posição e momento [2]. Notamos que quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ em (2.65), obtemos, respectivamente, os operadores (2.66a) e (2.66b). Quaisquer dois operadores de quadratura ortogonais entre si, satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}, \quad (2.67)$$

de onde segue a desigualdade [2]

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16}. \quad (2.68)$$

Em outras palavras, as quadraturas no espaço de fase estão ligadas ao princípio de incerteza de Heisenberg, uma vez que para um estado quântico específico a precisão simultânea com que se pode medir tanto a amplitude quanto a fase do campo é limitada.

É fácil ver que estado de vácuo minimiza o produto de incertezas dos operadores de quadratura (2.68) [2]

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_{vac} \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{16}. \quad (2.69)$$

A igualdade no produto de incertezas também é obtida com os estados coerentes. Em outras palavras, as incertezas para cada quadratura em um estado coerente são iguais às incertezas para esses operadores quando calculadas no estado de vácuo. Para o operador \hat{X}_1 temos

$$\langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha = \frac{1}{2} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*), \quad (2.70a)$$

$$\langle \hat{X}_1^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{4} \langle \alpha | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha| + 1) = \frac{1}{4}[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], \quad (2.70b)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_\alpha = \langle \hat{X}_1^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha^2 = \frac{1}{4}. \quad (2.70c)$$

Analogamente é possível mostrar que $\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_\alpha = 1/4$, que nos leva à igualdade

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_\alpha \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{16}. \quad (2.71)$$

Portanto, com estados coerentes, é possível se prever as quadraturas com a mesma precisão. Ao contrário do que ocorre na mecânica clássica, o estado do sistema não é precisamente determinado por um único ponto no espaço de fase, mas sim por uma região de incertezas no plano das quadraturas. Tanto o estado de vácuo quanto os estados coerentes possuem incertezas iguais para qualquer direção no espaço de fase. Na verdade, o estado de vácuo pode ser considerado também um estado coerente com número médio de fótons igual a zero.

A seguir, exploraremos uma classe significativa de estados quânticos da luz: os estados de vácuo comprimidos da luz. Esses estados são denominados assim porque a incerteza em uma determinada quadratura é menor do que a incerteza obtida quando calculada com relação a um estado de vácuo (ou um estado coerente). Em outras palavras, é possível haver maior precisão no conhecimento de uma quadratura específica, do que quando estamos considerando apenas o ruído associado ao estado de vácuo. A figura a seguir representa em 1(a) incertezas iguais em todas as direções do espaço de fase, tanto para o estado de vácuo quanto para o estado coerente e em 1(b) a compressão da quadratura ao longo de \hat{X}_1 na elipse de erro do estado de vácuo comprimido, em comparação com o círculo de erro do estado de vácuo.

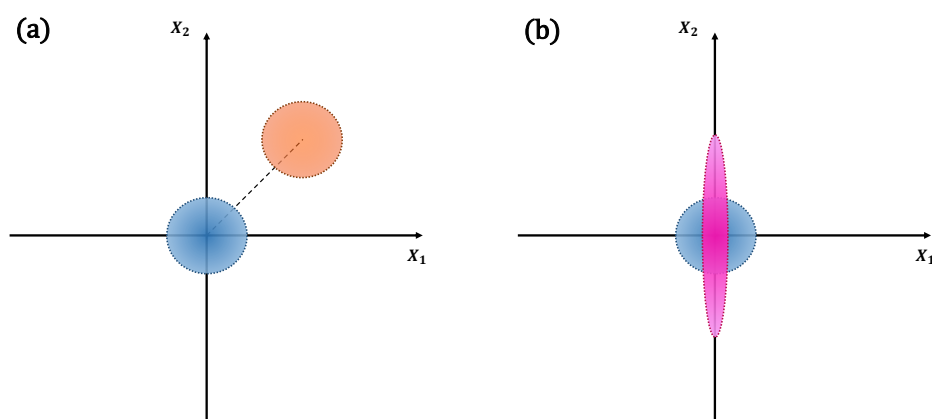


Figura 1 – Representação no espaço de fase: (a) estado de vácuo (azul) e estado coerente (laranja), ambos com incertezas iguais em todas as direções. (b) estado de vácuo comprimido (rosa), apresentando menor incerteza em \hat{X}_1 comparado ao estado de vácuo (azul).

3 Estados Comprimidos da Luz

Os estados comprimidos da luz são estados quânticos que apresentam uma redução na incerteza em uma quadratura específica em relação ao ruído do vácuo, que em outras palavras significa dizer que a variância em alguma quadratura é menor do que o ruído do vácuo [2, 32, 51]. Essa compressão na incerteza é uma característica particular de tais estados e tem diversas aplicações importantes em áreas como metrologia quântica e informação quântica [3, 4, 11–22]. Ao reduzir o ruído em uma quadratura específica, os estados comprimidos possibilitam alcançar uma precisão além do limite clássico, conhecida como limite de sub-shot-noise [2, 16, 32]. Um exemplo notável do uso de estados comprimidos da luz está na melhoria da sensibilidade dos detectores de ondas gravitacionais [15]. Esse assunto é bastante explorado em pesquisas atuais que visam aprimorar essa sensibilidade nos detectores de ondas gravitacionais [16, 17, 20–22, 52, 53]. Um outro poderoso recurso obtido com estados comprimidos da luz é o emaranhamento quântico. Estados comprimidos de dois ou mais modos são uma fonte de estados emaranhados, que são fundamentais para uma série de protocolos e aplicações em informação quântica [3, 4, 11–14].

A seguir, apresentaremos propriedades dos estados comprimidos. Em particular, trataremos do estado de vácuo comprimido da luz em um e dois modos, detalhando dois esquemas de geração e caracterização desses estados.

3.1 Estado de Vácuo Comprimido em Um Modo

Os estados comprimidos da luz são tipicamente gerados através da interação entre um campo laser, considerado estar em um estado coerente, e meios não lineares [2, 32, 51]. Um estado é considerado comprimido quando sua variância em uma quadratura é menor do que a variância correspondente no estado de vácuo, de acordo com o princípio de incerteza [2]

$$\langle [\Delta \hat{X}(\theta)]^2 \rangle < \frac{1}{4} \text{ ou } \langle [\Delta \hat{X}(\theta + \pi/2)]^2 \rangle < \frac{1}{4}, \quad (3.1)$$

com $\hat{X}(\theta)$ dada pela equação (2.65). Isso implica que, conforme uma quadratura é comprimida, a quadratura ortogonal é necessariamente alongada.

Uma maneira de se descrever a interação entre os modos para a geração de estados comprimidos da luz é através de um Hamiltoniano quadrático nos operadores de aniquilação e criação do modo do campo, já que os estados comprimidos resultam da geração de pares de fótons. Esse processo pode ser realizado por meio da conversão paramétrica descendente, onde um meio não linear é excitado por um campo clássico coerente de frequência ω_p , gerando pares de fótons de frequência $\omega_p/2$. O Hamiltoniano correspondente é dado por [2]

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_p\hat{b}^\dagger\hat{b} + i\hbar\chi^{(2)}(\hat{a}^2\hat{b}^\dagger - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}), \quad (3.2)$$

com \hat{b} sendo o operador de aniquilação do modo do campo *pump*, \hat{a} é o operador de aniquilação do modo do campo sinal e $\chi^{(2)}$ é uma susceptibilidade não-linear de segunda ordem [2].

Na aproximação paramétrica, assume-se que o campo *pump* está em um estado coerente muito intenso, $|\beta e^{-i\omega_p t}\rangle$, com um grande número médio de fótons, $|\beta| \gg 1$. Substituindo os operadores de aniquilação e criação pelos valores esperados, $\hat{b} \rightarrow \beta e^{-i\omega_p t}$ e $\hat{b}^\dagger \rightarrow \beta e^{i\omega_p t}$, o Hamiltoniano é aproximado como

$$\hat{H}^{(PA)} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar(\eta^*\hat{a}^2 e^{i\omega_p t} - \eta\hat{a}^{\dagger 2} e^{-i\omega_p t}) = H_0 + H_{int}. \quad (3.3)$$

Com essa escolha, o Hamiltoniano torna-se independente do tempo quando $\omega_p = 2\omega$, resultando em $\hat{H}_{int} = i\hbar(\eta^*\hat{a}^2 - \eta\hat{a}^{\dagger 2})$, e portanto o operador de evolução associado é [2]

$$\hat{U}_I(t, 0) = e^{(\eta^*t\hat{a}^2 - \eta t\hat{a}^{\dagger 2})}. \quad (3.4)$$

3.1.1 Definição Matemática

A geração do estado de vácuo comprimido envolve a aplicação do operador de compressão em um estado de vácuo,

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi) |0\rangle. \quad (3.5)$$

O operador de compressão é definido como

$$\hat{S}(\xi) = e^{[\frac{1}{2}(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2})]}, \quad (3.6)$$

onde $\xi = r e^{i\phi}$, r é o parâmetro de compressão e ϕ é o ângulo de compressão, com $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Este operador é unitário, obedecendo $\hat{S}(\xi)\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{S}(\xi) = \mathbb{I}$. Note que o operador de evolução (3.4) tem a mesma forma que o operador de compressão (3.6), com $2\eta t = \xi$.

Este operador de compressão, quando aplicado ao estado de vácuo, altera a distribuição de probabilidade das amplitudes dos modos do campo eletromagnético, resultando em uma redução do ruído em uma quadratura específica, enquanto aumenta o ruído na outra quadratura.

Vamos considerar

$$\hat{a} |0\rangle = 0, \quad (3.7)$$

aplicando o operador de compressão dos dois lados da igualdade e usando o fato de que é unitário, teremos [2]

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{S}(\xi) |0\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi) |\xi\rangle = 0. \quad (3.8)$$

Pela identidade de Baker-Hausdorff (2.54), vemos que

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi) = \frac{\hat{a}}{0!} + \frac{r/2[\hat{G}, \hat{a}]}{1!} + \frac{(r/2)^2[\hat{G}, [\hat{G}, \hat{a}]]}{2!} + \frac{(r/2)^3[\hat{G}, [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{a}]]]}{3!} + \dots, \quad (3.9)$$

onde

$$\hat{G} = e^{(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2})} = e^{-\frac{r}{2}}\hat{S}(\xi), \quad (3.10)$$

lembrando que $\xi = re^{i\phi}$. Calculando os comutadores em (3.9) e agrupando-se os termos em potências pares e ímpares de r teremos

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{a} \left(\frac{1}{0!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \right) + \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \left(\frac{r}{1!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \right), \quad (3.11)$$

onde identificamos que o termo no primeiro parênteses é a expansão em série de Taylor para o cosseno hiperbólico de r e o termo no segundo parênteses a expansão para o seno hiperbólico de r , que podem ser escritas como

$$\cosh r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (3.12)$$

Assim, substituindo o resultado da equação (3.11), com as identificações mostradas nas equações (3.12), na expressão (3.8) teremos a seguinte expressão

$$\left(\hat{a} \cosh r + e^{i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r \right) |\xi\rangle = 0. \quad (3.13)$$

Pelo fato dos estados de Fock formarem uma base completa, podemos também escrever o estado de vácuo comprimido como uma expansão na base dos estados de Fock,

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (3.14)$$

que substituindo na equação (3.13)

$$\left(\hat{a} \cosh r + e^{i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r \right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = 0, \quad (3.15)$$

nos leva à seguinte relação de recursão

$$C_{n+1} = -e^{-i\phi} \tanh r \sqrt{\frac{n}{n+1}} C_{n-1}. \quad (3.16)$$

Essa relação tem solução para n pares e ímpares, mas no nosso caso, estamos interessados apenas na solução que engloba o estado de vácuo ($n = 0$) [2], que nos leva à

$$\begin{aligned} C_{2m} &= -e^{i\phi} \tanh r \sqrt{\frac{2m-1}{2m}} C_{2m-2} = (-e^{i\phi} \tanh r)^m \sqrt{\frac{(2m-1)(2m-1-2)}{2m(2m-2)}} C_{2m-4} = \dots \\ C_{2m} &= (-e^{i\phi} \tanh r)^m \sqrt{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}} C_0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

com o duplo fatorial sendo definido por [54]

$$\begin{aligned} n!! &= \prod_{i=1}^{n/2} (2i), \text{ para } n \text{ par e} \\ n!! &= \prod_{i=1}^{(n+1)/2} (2i-1), \text{ para } n \text{ ímpar.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

O coeficiente C_0 é determinado pela condição de normalização

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |C_{2m}| &= 1 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left| (e^{-i\phi} \tanh r)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} C_0 \right|^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

usando as propriedades de duplo fatorial [54]

$$(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!} \quad \text{e} \quad (2m)!! = 2^m m!, \quad (3.20)$$

teremos

$$|C_0|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \tanh r^{2m} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} = 1. \quad (3.21)$$

Utilizando a relação mostrada no anexo A, vemos que

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, \quad (3.22)$$

o que nos leva à seguinte igualdade

$$|C_0|^2 (1 - \tanh r)^{-1/2} = 1, \quad (3.23)$$

de onde finalmente vemos que

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}. \quad (3.24)$$

Assim, obtemos a forma explícita do estado de vácuo comprimido, em um modo, na base de Fock

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{m=0}^{\infty} (-e^{i\phi} \tanh r)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} |2m\rangle. \quad (3.25)$$

Note que o estado de vácuo comprimido possui uma superposição quântica de números pares de fótons.

3.1.2 Redução do Ruído: Variância da Quadratura Comprimida

Para o estado de vácuo comprimido da equação (3.25), a redução da incerteza em uma das quadraturas é evidenciada pela diminuição da variância associada a essa quadratura. Por exemplo, se considerarmos que a quadratura (2.66a) é comprimida, a variância associada a essa quadratura será menor em comparação com o estado de vácuo.

Isso significa que o estado de vácuo comprimido exibe flutuações menores em \hat{X}_1 em relação ao estado de vácuo convencional. Por outro lado, a variância da quadratura (2.66b) será necessariamente maior.

Para calcular a variância do operador de quadratura (2.65), vamos calcular os valores esperados de $\hat{X}(\theta)$ e $\hat{X}(\theta)^2$, no estado de vácuo comprimido. É fácil ver que o valor esperado $\langle \hat{X}(\theta) \rangle$ é zero

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}(\theta) \rangle &= \langle \xi | \hat{X}(\theta) | \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

utilizando novamente o lema de Baker-Hausdorff (2.54) e identificando as séries de Taylor para os cossenos e senos hiperbólicos, chegamos à expressão para o valor esperado de $\hat{X}(\theta)$

$$\langle \hat{X}(\theta) \rangle = \frac{1}{2} \left[e^{-i\theta} \langle 0 | (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh r) | 0 \rangle + e^{i\theta} \langle 0 | (\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh r) | 0 \rangle \right] = 0. \quad (3.27)$$

Portanto, a variância do operador de quadratura para o estado de vácuo comprimido será igual ao valor esperado de $\hat{X}(\theta)^2$, $\langle [\Delta \hat{X}(\theta)]^2 \rangle = \langle \hat{X}(\theta)^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle [\Delta \hat{X}(\theta)]^2 \rangle &= \langle \xi | \hat{X}(\theta)^2 | \xi \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 0 | [e^{-i\theta} (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh r) + e^{i\theta} (\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh r)]^2 | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Abrindo o quadrado na expressão acima, usando as relações dos operadores criação e destruição (2.45), (2.46), (2.48) e agrupando os termos obtemos a variância do operador quadratura para um estado de vácuo comprimido,

$$\langle [\Delta \hat{X}(\theta)]^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos(2\theta - \phi)], \quad (3.29)$$

que está plotada no gráfico da figura 2 para alguns valores de ϕ , onde vemos que para alguns valores de θ a variância se torna menor do que a variância calculada para o estado de vácuo, caracterizando compressão naquela determinada quadratura. Em outras palavras, sempre que $\langle [\Delta \hat{X}(\theta)]^2 \rangle < 1/4$ existe compressão em alguma quadratura. Note também que, nesse caso, para a quadratura ortogonal, com θ avançado em $\pi/2$, a variância será maior que a do estado de vácuo, de forma que as relações de incerteza são respeitadas.

3.1.3 Esquema para Geração e Caracterização de um Estado de Vácuo Comprimido

O esquema para geração e caracterização de um estado de vácuo comprimido em um modo que foi tratado neste trabalho está ilustrado na figura 3. Considerando que há

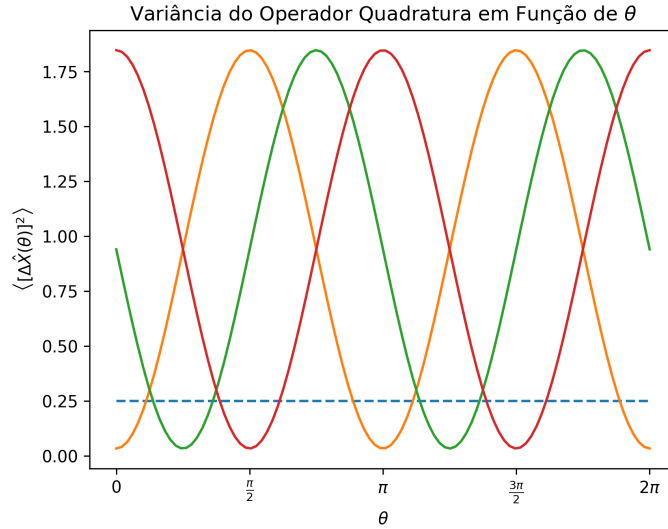


Figura 2 – Variância do operador quadratura fixando $r = 1$, para os valores de $\phi = 0$ em laranja, $\phi = \pi/2$ em verde e $\phi = \pi$ em vermelho. A linha tracejada em azul representa a variância da quadratura calculada para um estado de vácuo.

um estado coerente deixando o laser, estados coerentes com amplitudes reduzidas são transmitidos e refletidos pelo divisor de feixes BS_1 . O campo refletido passa pelo cristal não linear NLC_1 , onde ocorre a geração do segundo harmônico que é um fenômeno não linear em que dois fótons de frequência ω são combinados dentro de um material não linear para produzir um único fóton de frequência dobrada 2ω .

O campo com frequência 2ω é refletido pelo espelho dicróico DM_1 e o campo com frequência ω é transmitido. O campo refletido vai para um oscilador paramétrico óptico (OPO), que consiste basicamente em um cristal não linear inserido dentro de uma cavidade óptica. Os campos ficam confinados nesta cavidade do OPO, amplificando o sinal gerado por conversão paramétrica descendente estimulada e devido ao cristal não-linear do OPO, o Hamiltoniano para o campo eletromagnético fica equivalente ao Hamiltoniano da equação (3.2), gerando o estado de vácuo comprimido no modo de frequência ω [2, 32]. O espelho dicróico DM_2 na saída do OPO reflete o campo 2ω e transmite o campo ω para o modo a .

Estados comprimidos são normalmente caracterizados por meio de detecção homódina, como é mostrado na figura 3. Na detecção homódina o campo conhecido como sinal no modo a , que contém o estado comprimido, é combinado no divisor de feixes BS_2 , considerado simétrico 50:50, com um campo de referência chamado de oscilador local, que é um estado coerente com amplitude larga $|\beta e^{i\varphi}\rangle_{a_0}$ (com β e φ reais), no modo a_0 . A intensidade medida pelo detector D_1 é proporcional à $\hat{c}^\dagger \hat{c}$, com $\hat{c} = (\hat{a}_0 + i\hat{a})/\sqrt{2}$ sendo o operador aniquilação do campo no modo c e similarmente para os outros modos, enquanto a intensidade medida pelo detector D_2 é proporcional à $\hat{b}^\dagger \hat{b}$, com $\hat{b} = (\hat{a} + i\hat{a}_0)/\sqrt{2}$. Definindo

3.2 Estado de vácuo comprimido em dois modos

Os estados de vácuo comprimido em dois modos apresentam fortes correlações entre dois modos diferentes do campo eletromagnético [2]. Por isso, esses estados têm uma relevância significativa em protocolos de informação quântica, pois são uma fonte robusta de emaranhamento, que é um recurso fundamental para tais protocolos [3, 4, 11–14].

Analogamente ao operador de compressão em um modo, o operador de compressão em dois modos também é unitário $\hat{S}_2(\xi)\hat{S}_2^\dagger(\xi) = \hat{S}_2^\dagger(\xi)\hat{S}_2(\xi) = \mathbb{I}$ e é definido como

$$\hat{S}_2(\xi) = e^{(\xi^* \hat{a} \hat{b} - \xi \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger)}, \quad (3.34)$$

onde $\xi = re^{i\phi}$ e, novamente, r e ϕ são os parâmetros de compressão. Os operadores \hat{a} e \hat{b} atuando cada um em um modo distinto.

Os estados de vácuo comprimido em dois modos são gerados de maneira semelhante ao estado de vácuo comprimido em um modo, pelo processo de conversão paramétrica descendente, porém numa configuração não-degenerado uma vez que os fótons em cada par gerado são emitidos em dois modos distinguíveis [55]. O Hamiltoniano desse processo pode ser escrito como [2]

$$\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar\omega_p \hat{c}^\dagger \hat{c} + i\hbar\xi^{(2)}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{c}), \quad (3.35)$$

onde o modo c contém o campo *pump*, que está em um estado coerente, $|\gamma e^{-i\omega_p t}\rangle$, com um grande número médio de fótons, $|\gamma| \gg 1$. Com a aproximação paramétrica ($\hat{c} \rightarrow \gamma e^{-i\omega_p t}$ e $\hat{c}^\dagger \rightarrow \gamma e^{-i\omega_p t}$), o Hamiltoniano é aproximado como

$$\hat{H}^{(PA)} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + i\hbar(\eta^* \hat{a} \hat{b} e^{i\omega_p t} - \eta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{-i\omega_p t}) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}. \quad (3.36)$$

Escolhendo $\omega_p = \omega_a + \omega_b$, o Hamiltoniano será independente do tempo, com o Hamiltoniano de interação dado por

$$\hat{H}_{int} = i\hbar(\eta^* \hat{a} \hat{b} - \eta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger). \quad (3.37)$$

O operador de evolução associado adquire a forma de um operador de compressão em dois modos $\hat{U}_{int}(t, 0) = e^{(\eta^* t \hat{a} \hat{b} - \eta t \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger)}$, com $\eta t = \xi$ [2].

3.2.1 Definição Matemática

De maneira semelhante ao estado de vácuo comprimido em um modo, o estado de vácuo comprimido em dois modos é gerado a partir da atuação do operador de compressão em dois modos no estado de vácuo de dois modos [2]

$$|\xi\rangle_2 = \hat{S}_2(\xi) |0\rangle_a |0\rangle_b, \quad (3.38)$$

onde o operador de compressão em dois modos é dado pela expressão (3.34).

De maneira análoga à sessão anterior, vamos novamente considerar

$$\hat{a} |0, 0\rangle = 0. \quad (3.39)$$

Atuando o operador de compressão em dois modos nos dois lados da igualdade e usando a unitariedade do operador $\hat{S}_2(\xi)$, teremos

$$\hat{S}_2(\xi)\hat{a}\hat{S}_2^\dagger(\xi)\hat{S}_2(\xi) |0, 0\rangle = \hat{S}_2(\xi)\hat{a}\hat{S}_2^\dagger(\xi) |\xi\rangle_2 = 0. \quad (3.40)$$

Usando novamente a identidade de Baker-Hausdorff (2.54), chegamos na relação [2]

$$\hat{S}_2(\xi)\hat{a}\hat{S}_2^\dagger(\xi) = \hat{a} \cosh r + e^{i\phi}\hat{b}^\dagger \sin r \quad (3.41)$$

e assim

$$\left(\hat{a} \cosh r + e^{i\phi}\hat{b}^\dagger \sin r\right) |\xi\rangle_2 = 0. \quad (3.42)$$

Na base dos estados de Fock, em dois modos, teremos [2]

$$|\xi\rangle_2 = \sum_{n,m} C_{n,m} |n, m\rangle, \quad (3.43)$$

que substituindo na equação (3.42) nos leva à equação de autovalores

$$\sum_{n,m} C_{n,m} [\cosh r \sqrt{n} |n-1, m\rangle + e^{i\phi} \sinh r \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle] = 0 \quad (3.44)$$

$$C_{n+1,m} \cosh r \sqrt{n+1} + e^{i\phi} C_{n,m+1} \sinh r \sqrt{m+1} = 0,$$

como estamos interessados apenas na solução que engloba o estado de vácuo comprimido em dois modos ($|0, 0\rangle$) temos que [2]

$$C_{m,m} = (-e^{i\phi} \tanh r)^m C_{0,0}. \quad (3.45)$$

O coeficiente $C_{0,0}$ é determinado pela condição de normalização [2]

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |C_{m,m}|^2 &= 1 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left|(-e^{i\phi} \tanh r)^m C_{0,0}\right|^2 &= 1 \\ \sum_{m=0}^{\infty} (\tanh r)^{2m} |C_{0,0}|^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Para $x^2 < 1$, a fórmula de uma série geométrica é dada pela expressão

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad (3.47)$$

que podemos utilizar para determinar a forma do coeficiente $C_{0,0}$, que nos leva à

$$C_{0,0} = \frac{1}{\cosh r}. \quad (3.48)$$

Portanto o estado de vácuo comprimido em dois modos, na base dos estados de Fock, é dado por [2]

$$|\xi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{i\phi} \tanh r)^n |n, n\rangle, \quad (3.49)$$

onde vemos que há uma superposição quântica com termos que têm o mesmo número de fótons em cada modo.

3.2.2 Variância nas Quadraturas

Como o estado de vácuo comprimido em dois modos apresenta fortes correlações entre os modos, a compressão das flutuações quânticas acontece em uma superposição dos modos [2]. Podemos escrever um operador de quadratura como uma combinação das quadraturas nos modos de interesse, a e b , da seguinte forma

$$\hat{X}(\theta_a, \theta_b) = \frac{\hat{X}(\theta_a) + \hat{X}(\theta_b)}{\sqrt{2}}, \quad (3.50)$$

onde

$$\hat{X}(\theta_j) = \frac{\hat{j}e^{-i\theta_j} + \hat{j}^\dagger e^{i\theta_j}}{2}, \quad \text{com } j = a, b. \quad (3.51)$$

Assim como no caso do estado de vácuo comprimido em um modo, aqui também devemos calcular os valores esperados de $\hat{X}(\theta_a, \theta_b)$ e $\hat{X}(\theta_a, \theta_b)^2$, agora no estado de vácuo comprimido em dois modos. Utilizando o lema de Baker-Hausdorff (2.54), é possível obter as seguintes relações

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(\xi)\hat{a}\hat{S}_2(\xi) &= \hat{a} \cosh r - e^{i\phi}\hat{b}^\dagger \sinh r \\ \hat{S}_2(\xi)\hat{b}\hat{S}_2(\xi) &= \hat{b} \cosh r - e^{i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r \\ \hat{S}_2(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}_2(\xi) &= \hat{a}^\dagger \cosh r - e^{-i\phi}\hat{b} \sinh r \\ \hat{S}_2(\xi)\hat{b}^\dagger\hat{S}_2(\xi) &= \hat{b}^\dagger \cosh r - e^{-i\phi}\hat{a} \sinh r. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Utilizando as relações acima, vemos que $\langle \hat{X}(\theta_a, \theta_b) \rangle$ também será zero

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}(\theta_a, \theta_b) \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle 0, 0 | [(\hat{a} \cosh r - e^{i\phi}\hat{b}^\dagger \sinh r)e^{-i\theta_a} + (\hat{a}^\dagger \cosh r - e^{-i\phi}\hat{b} \sinh r)e^{i\theta_a} + \\ &\quad + (\hat{b} \cosh r - e^{i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r)e^{-i\theta_b} + (\hat{b}^\dagger \cosh r - e^{-i\phi}\hat{a} \sinh r)e^{i\theta_b}] |0, 0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A variância do operador quadratura para o estado de vácuo comprimido em dois modos será portanto $\langle [\hat{X}(\theta_a, \theta_b)]^2 \rangle = \langle \hat{X}(\theta_a, \theta_b)^2 \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle [\hat{X}(\theta_a, \theta_b)]^2 \rangle &= {}_2\langle \xi | \hat{X}(\theta_a, \theta_b)^2 | \xi \rangle_2 \\ &= \frac{1}{8} \langle 0, 0 | [\hat{S}_2^\dagger(\xi) (\hat{a}e^{-i\theta_a} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta_a} + \hat{b}^{-i\theta_b} + \hat{b}^\dagger e^{i\theta_b})]^2 |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Somente os termos com $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ e $\hat{b}\hat{b}^\dagger$ serão não nulos, de forma que a variância do operador quadratura para o estado de vácuo comprimido em dois modos se reduz a

$$\begin{aligned} \langle [\hat{X}(\theta_a, \theta_b)]^2 \rangle &= \frac{1}{8} [2 \cosh^2 r + 2 \sinh^2 r - 2e^{i(\theta_a + \theta_b - \phi)} - 2e^{-i(\theta_a + \theta_b - \phi)}] \\ &= \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cos(\theta_a + \theta_b - \phi) \cosh r \sinh r]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Da equação (3.55), vemos que variâncias para $\hat{X}(\theta_a, \theta_b)$ menores do que 1/4 caracterizam compressão em dois modos e implicam em emaranhamento [2].

3.2.3 Esquema para Geração e Caracterização de Estados Comprimidos em Dois Modos

O esquema mostrado na Figura 4 ilustra um experimento para a geração e caracterização do estado de vácuo comprimido em dois modos. Considerando o estado do campo laser como um estado coerente, dois estados coerentes com amplitudes menores são transmitidos e refletidos no divisor de feixe BS_1 . O campo refletido, com frequência ω , interage com o cristal não linear NLC_1 , onde ocorre a geração do segundo harmônico, produzindo um campo de frequência 2ω . O espelho dicróico DM_1 reflete apenas o campo 2ω para um oscilador paramétrico óptico OPO. O vácuo comprimido em dois modos é gerado através da interação desse campo de frequência 2ω com o cristal não linear NLC_2 dentro do OPO, por meio de conversão paramétrica descendente não-degenerada [55]. O Hamiltoniano de interação para o campo eletromagnético nessa situação pode ser aproximado pelo da equação (3.37). Aqui, consideramos que os dois modos (sinal e *idler*) têm polarização ortogonal, de modo que o PBS na saída do OPO os separa, após o espelho dicróico DM_2 remover o campo 2ω .

Os campos que foram divididos em modos a (sinal) e b (*idler*) são posteriormente combinados com os campos dos osciladores locais que vêm dos modos c e d , assumidos estar em estados coerentes intensos $|\beta e^{i\varphi_a}\rangle$ e $|\beta e^{i\varphi_b}\rangle$, respectivamente (com β , φ_a e φ_b reais). BS_3 e BS_4 são divisores de feixe simétricos 50:50 e $\lambda/2$ é uma placa de onda que tem o objetivo de tornar a polarização dos modos a e c idêntica. Medidas de intensidade de luz pelos detectores De , Df , Dg e Dh completam a detecção homódina, essas intensidades sendo relacionadas às quadraturas do campo eletromagnético quântico nos modos a e b [2, 55].

A variância da soma das diferenças do número de fótons, $\hat{n}_{ef} = \hat{n}_e - \hat{n}_f$ e $\hat{n}_{gh} = \hat{n}_g - \hat{n}_h$, é relacionada com a variância do operador quadratura $\hat{X}(\theta_a, \theta_b)$. Novamente, temos que a variância será dada por

$$\langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg})]^2 \rangle = \langle (\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg})^2 \rangle - \langle (\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg}) \rangle^2, \quad (3.56)$$

onde os operadores de aniquilação são $\hat{e} = (\hat{a} + i\hat{c})/\sqrt{2}$, $\hat{f} = (i\hat{a} + \hat{c})/\sqrt{2}$, $\hat{g} = (i\hat{b} + \hat{d})/\sqrt{2}$ e $\hat{h} = (\hat{b} + i\hat{d})/\sqrt{2}$. Então temos $(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg}) = i(\hat{a}^\dagger \hat{c} - \hat{c}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{d} + -\hat{d}^\dagger \hat{b})$, que nos leva a

$$\begin{aligned} \langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg})]^2 \rangle &= \langle -(\hat{a}^\dagger \hat{c} - \hat{c}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{d} + -\hat{d}^\dagger \hat{b})^2 \rangle - \\ &\quad - \langle i(\hat{a}^\dagger \hat{c} - \hat{c}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{d} + -\hat{d}^\dagger \hat{b}) \rangle^2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

como estamos considerando estados coerentes intensos para os osciladores locais, utilizando novamente a aproximação paramétrica e substituindo os operadores de criação e aniquilação associados aos modos c e d pelas amplitudes, $\beta e^{i\varphi_a}$ e $\beta e^{i\varphi_b}$ na equação (3.57), conseguimos relacionar a variância da soma das diferenças do número de fótons com a variância do

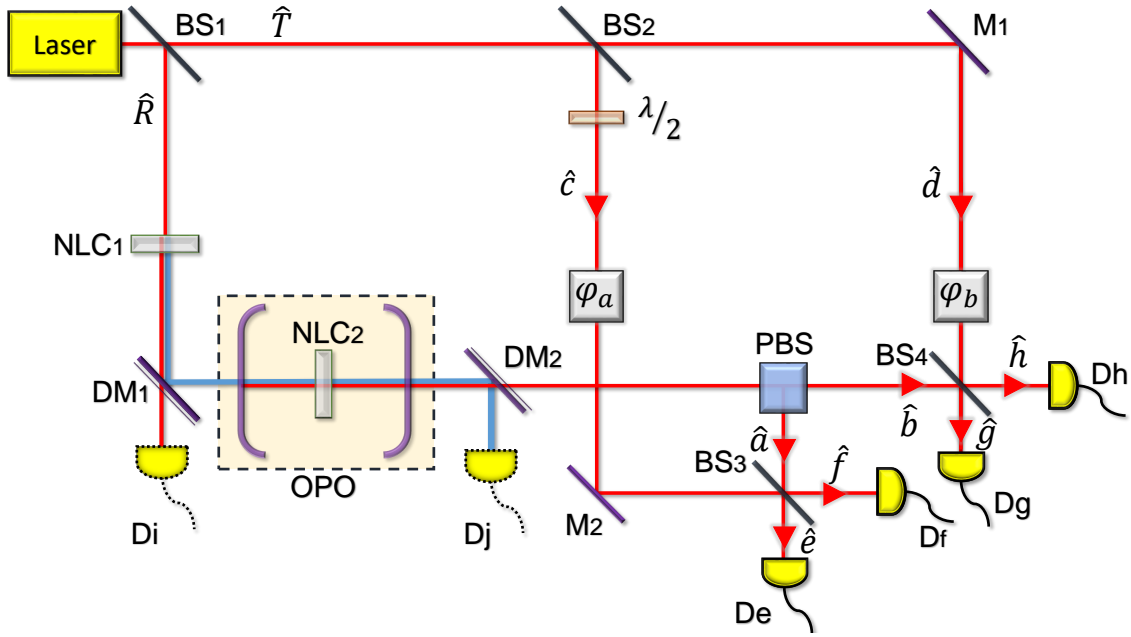


Figura 4 – Esquema para produção e caracterização de um estado de vácuo comprimido em dois modos: BS(1,2,3,4) - divisores de feixe, NLC(1,2) - cristais não lineares, DM(1,2) - espelhos dicróicos, OPO - oscilador paramétrico óptico, $\lambda/2$ - placa de meia onda, PBS - divisor de feixe polarizante, M(1,2) - espelho e D(e,f,g,h,i,j) - detectores.

operador quadratura (3.50)

$$\begin{aligned} \langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg})]^2 \rangle &\approx 8\beta^2 \left(\langle \hat{X}(\theta_a, \theta_b)^2 \rangle - \langle \hat{X}(\theta_a, \theta_b) \rangle^2 \right) \\ &\approx 2\beta^2 [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos(\theta_a + \theta_b - \phi)] \end{aligned} \quad (3.58)$$

As quadraturas $\hat{X}(\theta_a, \theta_b) = [\hat{X}(\theta_a) + \hat{X}(\theta_b)] / \sqrt{2}$ medidas podem ser alteradas mudando as fases dos osciladores locais φ_a e φ_b , uma vez que $\theta_i = \varphi_i + \pi/2$. Variâncias para $\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg}$ menores que $2\beta^2$ implicam em variâncias para $\hat{X}(\theta_a, \theta_b)$ menores que $1/4$, caracterizando compressão e implicando em emaranhamento de dois modos. Na figura 5, vemos uma representação da equação 3.58. Para que a compressão seja caracterizada, é necessária uma combinação dos parâmetros θ_a e θ_b , embora matematicamente a expressão seja similar à expressão obtida no caso do vácuo comprimido em um modo, a interpretação é em termos da superposição dos modos a e b [2].

Variância de $\langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg})]^2 \rangle$ em função de θ_a e θ_b e o plano $2\beta^2$

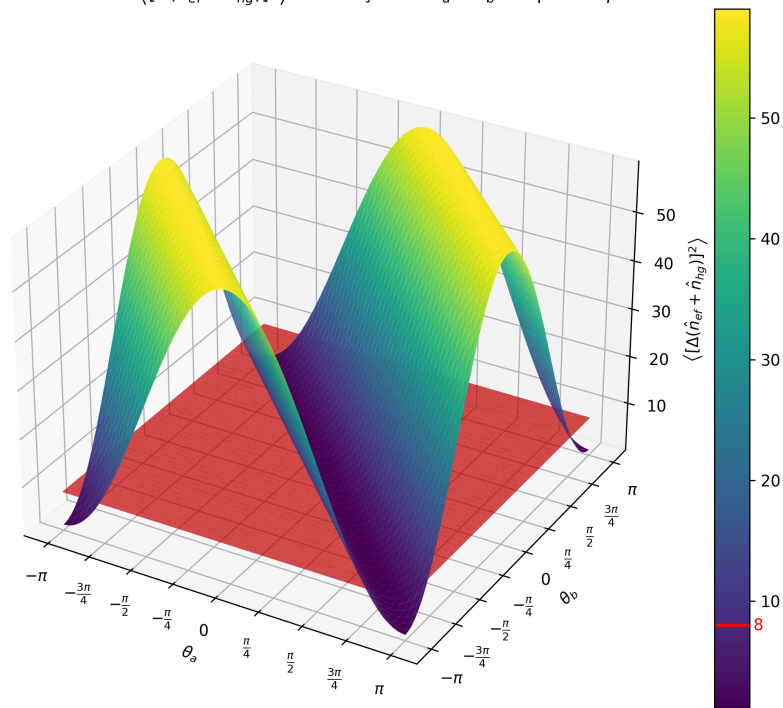


Figura 5 – Variância de $\langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg})]^2 \rangle$ em função de θ_a e θ_b e o plano $2\beta^2$ em vermelho, fazendo $r = 1$, $\phi = 0$ e $\beta^2 = 4$. Vemos que variando as fases dos osciladores locais, θ_a e θ_b são alterados de forma que a variância para a soma das diferenças do número de fótons $\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{hg}$ é menor do que $2\beta^2$.

4 Distribuição de Probabilidade de Fase

A definição de um operador Hermitiano de fase “ $\hat{\phi}$ ” por vezes pode parecer algo natural, uma vez que aparentemente fase e número de fótons são observáveis complementares. Assim seria desejável que tais “operadores” obedecessem a relação de comutação $[\hat{n}, \hat{\phi}] = i$ e portanto as flutuações no número de fótons e fase deveriam satisfazer $\Delta n \Delta \phi \gg 1/2$ [2]. No entanto a existência desse operador de fase para um único modo do campo não é verificada uma vez que o espectro de autovalores do operador \hat{n} é limitado por baixo, o que significa que ele não inclui os inteiros negativos [1, 2, 56]. Uma maneira de se contornar este problema seria a introdução de um operador diferença de fase, o que faz mais sentido, visto que de um ponto de vista prático uma fase absoluta não tem qualquer significado e todo tipo de medidas são tomadas com relação a um referencial de fase [1, 56]. Assim, a variável conjugada ao operador diferença de fase é a diferença no número de fótons, que não tem nenhuma restrição quanto ao limite inferior [1, 56].

O nosso foco aqui não irá se ater na definição de operadores de fase ou de diferença de fase, mas sim na distribuição de probabilidade de fase, que é uma propriedade fundamental para descrever o comportamento estatístico, caracterizar e manipular estados quânticos da luz. A seguir abordaremos com mais detalhes a distribuição de probabilidade de fase para um modo e a distribuição de probabilidade de fase relativa, para dois modos do campo eletromagnético quantizado.

4.1 Distribuição de Probabilidade de Fase para Um Modo

Uma vez que o espectro do operador número é limitado por baixo [1, 2, 56], o operador exponencial de fase \hat{E} que emerge da decomposição polar do operador de aniquilação, $\hat{a} = \hat{E} \sqrt{n}$ não é unitário [1]. Na base dos estados de Fock, o operador \hat{E} pode ser escrito como [2]

$$\hat{E} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1|, \quad (4.1)$$

de tal forma que

$$\hat{E}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \langle n|. \quad (4.2)$$

Esses operadores não comutam e não são unitários, de forma que não é possível haver um operador de fase Hermitiano único, pois os operadores \hat{E} e \hat{E}^\dagger não podem ser funções de um operador comum [57]. Contudo, embora não haja um operador de fase em óptica quântica, é possível definir estados de fase para um único modo do campo, como os estados

de fase de um modo de Susskind e Glogower [58]

$$|\vartheta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\vartheta} |n\rangle, \quad (4.3)$$

que são autoestados do operador \hat{E} , com autovalores $e^{i\vartheta}$.

A distribuição de probabilidade de fase para um sistema ρ , em termos dos estados de fase (4.3) pode ser definida como

$$P(\vartheta) = \langle \vartheta | \rho | \vartheta \rangle. \quad (4.4)$$

Para um estado de Fock $|n\rangle$, temos que $\rho = |n\rangle\langle n|$ e portanto a distribuição de probabilidade de fase será

$$P(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}, \quad (4.5)$$

que é uma distribuição de probabilidade uniforme, como esperado para esse estado, já que os estados de Fock têm um número fixo de fótons e são autoestados do operador \hat{n} [2] devendo, portanto, ter uma incerteza em fase máxima.

Esse comportamento é diferente quando pensamos nos estados coerentes. A distribuição de probabilidade de fase para um estado coerente $|\alpha e^{i\phi}\rangle$ é dada por [2]

$$P(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} |\langle \vartheta | \alpha \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\vartheta-\phi)} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} \right|^2. \quad (4.6)$$

O somatório na expressão acima, em geral é resolvido de forma numérica para obtenção da distribuição de probabilidade. Porém, uma aproximação analítica dos resultados pode ser obtida no limite de um grande número médio de fótons, $|\alpha|^2 \gg 1$ [57]. Neste limite, a distribuição Poissoniana do número de fótons da equação (2.62) é bem aproximada por uma distribuição Gaussiana [2, 57]

$$P_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}} e^{-\frac{(|\alpha|^2-n)^2}{2|\alpha|^2}}. \quad (4.7)$$

Podemos então substituir na amplitude $\langle \vartheta | \alpha \rangle$ a raiz quadrada de P_n e realizar a integral em n , de maneira que teremos [57]

$$\begin{aligned} \langle \vartheta | \alpha \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(2\pi|\alpha|^2)^4} \int e^{in(\phi-\vartheta)} e^{-\frac{(|\alpha|^2-n)^2}{4|\alpha|^2}} dn \\ &= \left(\frac{4|\alpha|^2}{2\pi} \right)^{1/4} e^{-|\alpha|^2(\phi-\vartheta)^2} e^{i|\alpha|^2(\phi-\vartheta)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A distribuição de probabilidade de fase resultante é então dada pela expressão,

$$P(\vartheta) \approx \sqrt{\frac{2|\alpha|^2}{\pi}} e^{-2|\alpha|^2(\vartheta-\phi)}. \quad (4.9)$$

Essa é uma distribuição gaussiana, com pico em $\vartheta = \phi$. O pico desta Gaussiana se torna cada vez mais estreito a medida que o número médio de fótons cresce. Na Figura 6 vemos o gráfico da distribuição de probabilidade de fase (4.6) em função de ϑ para diferentes números médios de fótons do campo, $|\alpha|^2$. Vemos que quanto maior o valor do número médio de fótons, $|\alpha|^2$, menor será a largura da distribuição de probabilidade de fase, em outras palavras, menor a incerteza na fase. Isso acontece porque quanto maior o número médio de fótons, maior a incerteza no número de fótons para um estado coerente, o que evidencia uma relação de complementaridade entre número de fótons e fase. Assim as relações de incerteza permitem que a fase seja melhor definida em estados coerentes com número médio de fótons elevado, o que de fato ocorre.

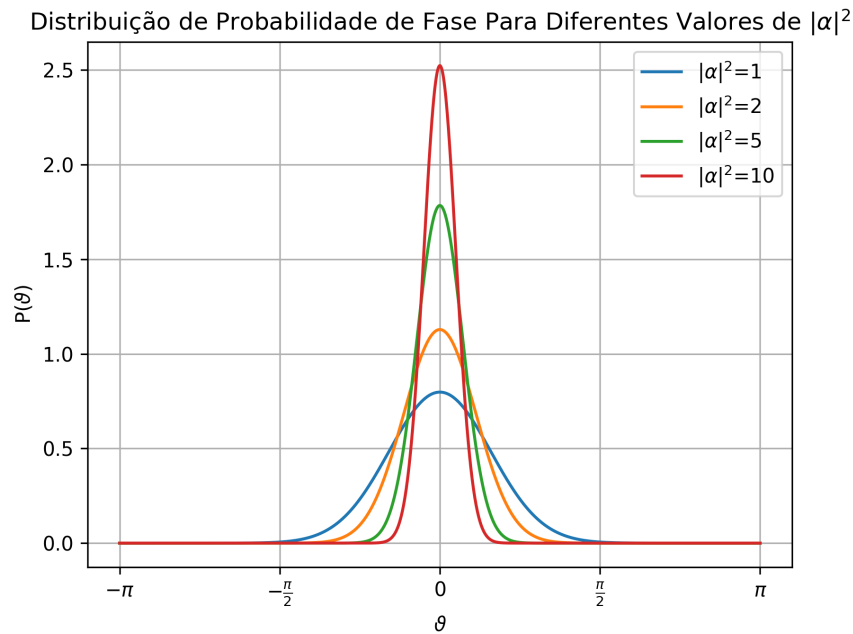


Figura 6 – Distribuição de probabilidade de fase para um estado coerente para diferentes valores de $|\alpha|^2$, considerando $\phi = 0$ na equação (4.6).

4.2 Distribuição de Probabilidade de Fase Relativa: Dois Modos

A distribuição de probabilidade de fase relativa para dois modos pode ser definida a partir da distribuição de fase de cada modo. Essa distribuição é importante em muitos contextos da óptica quântica, especialmente em experimentos que envolvem interferência entre os dois modos de luz. Em metrologia, por exemplo, se queremos inferir que fase foi incluída em um dos braços de um interferômetro por alguma razão (a passagem de uma onda gravitacional, por exemplo), quanto melhor definida for a fase relativa entre os modos, mais precisa deve ser essa inferência. Um exemplo é a associação dessa distribuição de fase relativa com a informação de Fisher quântica para muitos estados puros que são

úteis no contexto de metrologia quântica [46]. A distribuição de probabilidade para a diferença de fase definida por Luiz e Sánchez-Soto [1] é dada pela seguinte função

$$P(\Phi) = \int d\theta \langle \theta + \Phi, \theta | \rho | \theta + \Phi, \theta \rangle, \quad (4.10)$$

onde $\Phi = \phi_1 - \phi_2$, com ϕ_1 sendo a fase no modo 1 e ϕ_2 a fase no modo 2. Assim, $P(\Phi)$ depende da porção do estado quântico com a diferença de fase entre os modos sendo Φ , independentemente da fase em cada um dos modos. Usando o estado mostrado equação (4.3), para escrever o estado de fase $|\theta + \Phi, \theta\rangle$, a distribuição de probabilidade para diferença de fase é reescrita como [1]

$$\begin{aligned} P(\Phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n_1, n'_1} \sum_{n_2, n'_2} e^{i(n_1 - n'_1)\Phi} \int d\phi_2 \frac{e^{i(n_1 + n_2 - n'_1 - n'_2)\phi_2}}{2\pi} \langle n'_1, n'_2 | \rho | n_1, n_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{N'=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n'_1=0}^{N'} e^{i(n_1 - n'_1)\Phi} \int \frac{d\phi_2}{2\pi} e^{i(N - N')\phi_2} \langle n'_1, N - n'_1 | \rho | n_1, N - n_1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde fizemos as mudanças de variáveis $N = n_1 + n_2$ e $N' = n'_1 + n'_2$. Utilizando a relação $\int d\phi_2 e^{i(N - N')\phi_2} = 2\pi \delta_{N, N'}$, a distribuição de probabilidade de fase relativa se reduz a

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n'_1=0}^N e^{i(n_1 - n'_1)\Phi} \langle n'_1, N - n'_1 | \rho | n_1, N - n_1 \rangle. \quad (4.12)$$

Assim, define-se a distribuição de probabilidade para diferença de fase finalmente como [1, 56, 59, 60]

$$P(\Phi) = \sum_{N=0}^{\infty} \langle \Phi^{(N)} | \rho | \Phi^{(N)} \rangle, \quad (4.13)$$

onde os estados $|\Phi^{(N)}\rangle$ estão no subespaço H_N , com número total de fótons N e são definidos como

$$|\Phi^{(N)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n_1=0}^N e^{in_1\Phi} |n_1, N - n_1\rangle. \quad (4.14)$$

Esses estados são autoestados comuns do número total de fótons (com autovalor N) e de diferentes operadores de diferença de fase (com autovalor de Φ) entre os dois modos considerados [1, 56, 61]. Além disso, estão ligados a medidas ótimas de fase em interferômetros [59, 60].

Nos nossos resultados mostraremos que, considerando a variância da distribuição de probabilidade de fase relativa introduzida por Luis e Sánchez-Soto [1], somos capazes de fornecer uma explicação geral para a diminuição do ruído nos experimentos de geração e caracterização de estados de vácuo comprimido em um modo [36]. Além disso, mostraremos uma generalização da distribuição de probabilidade de fase relativa para quando temos quatro modos envolvidos e sua relação com a explicação física para redução de ruído em experimentos de geração e caracterização de estados de vácuo comprimido em dois modos [37].

4.3 Associação com Detecção de Fase Relativa

É relevante mencionar que a informação de Fisher obtida a partir da distribuição de fase relativa em dois modos proposta por Luis e Sánchez-Soto (4.13) foi recentemente demonstrada estar associada à informação de Fisher quântica para muitos estados puros úteis em metrologia quântica, destacando o valor desta distribuição de fase no campo da metrologia quântica, no artigo [46], do qual fui segunda autora. O trabalho em questão também foi tema de tese de doutorado de Felipe Fortes Braz [62].

A diferença de fase entre dois modos ópticos em um interferômetro é fundamental na metrologia, com aplicações relevantes, como na detecção de ondas gravitacionais [15, 21, 55, 63]. A metrologia quântica fotônica busca se aproximar ao máximo do limite de Heisenberg, que representa a precisão máxima de medição imposta pela natureza quântica da luz. Com o uso de recursos únicos da mecânica quântica, como estados comprimidos e estados emaranhados, é possível melhorar a precisão das medidas em sistemas ópticos [64–66]. A incerteza mínima na estimativa de fase (*phase sensing*) com luz clássica escala com $1/\sqrt{\bar{N}}$, onde \bar{N} é o número médio de fótons, conhecido como limite quântico padrão. Porém, com fontes de luz quântica, a incerteza mínima pode escalar com $1/\bar{N}$, o que é conhecido como o limite de Heisenberg [64, 65, 67].

Considere um estado inicial da forma [46]

$$|\psi\rangle = \sum_{N,k} A_{N,k} |k\rangle_a |N-k\rangle_b, \quad (4.15)$$

que passa por uma evolução, onde uma fase θ é introduzida entre os modos a e b , o estado após a evolução é [46]

$$|\psi_\theta\rangle = e^{i\hat{n}_a\theta} |\psi\rangle. \quad (4.16)$$

O limite de precisão para uma estratégia de medição da fase θ introduzida é denominado limite de Cramér-Rao [64, 66, 68]

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{\sqrt{pF(\theta)}}, \quad (4.17)$$

onde p é o número de repetições do experimento e $F(\theta)$ é a informação de Fisher definida por [64, 66]

$$F(\theta) = \int dx \frac{1}{P(x, \theta)} \left[\frac{dP(x, \theta)}{d\theta} \right]^2, \quad (4.18)$$

sendo $P(x, \theta)$ a distribuição de probabilidade de obter um resultado x de uma medição quando o parâmetro estimado é θ . A maximização de $F(\theta)$ sobre todas as possíveis medidas quânticas resulta na informação de Fisher quântica F_Q para o estado quântico $|\psi\rangle$ na evolução $e^{i\hat{n}_a\theta}$, que estabelece a precisão limite [64, 66, 68, 69]. Para estados puros, a informação de Fisher para esse tipo de evolução é [64, 66]

$$F_Q = 4\Delta^2 n_a = 4[\langle\psi|\hat{n}_a^2|\psi\rangle - (\langle\psi|\hat{n}_a|\psi\rangle)^2]. \quad (4.19)$$

A incerteza mínima possível na estimativa da fase θ , de acordo com as regras da mecânica quântica, para um estado $|\psi\rangle$ sobre a evolução $e^{i\hat{n}_a\theta}$ é

$$\Delta\theta_{min} = \frac{1}{\sqrt{pF_Q}}. \quad (4.20)$$

Para estados do tipo (4.15), a distribuição de probabilidade de fase relativa (4.13) se reduz à

$$P_N(\Phi) = \left| \langle \Phi^{(N)} | \psi_N \rangle \right|^2, \quad (4.21)$$

com $|\Phi^{(N)}\rangle$ dado pela equação (4.13). Essa distribuição reflete o quão bem definida é a fase relativa entre os modos para esse estado quântico. Existe uma relação de incerteza entre a diferença de fase e a diferença no número de fótons entre os dois modos. Se a diferença no número de fótons entre os modos é bem conhecida, teremos uma distribuição uniforme para a diferença de fase. Por outro lado, para distribuições com diferença de fase bem localizada, a diferença no número de fótons possui uma grande incerteza associada [46].

Quando consideramos um estado com número total de fótons fixo N , é possível chegar na desigualdade [46]

$$\Delta\Phi\Delta n_a \geq \frac{\pi}{2}, \quad (4.22)$$

a partir da desigualdade entre a largura da distribuição de diferença de fase, $\Delta\Phi$, e a largura da distribuição da diferença de fótons, Δn_- , dada usualmente por $\Delta\Phi\Delta n_- \geq \pi$, visto que para esses estados $n_- = n_a - n_b = 2n_a - N$ e portanto $\Delta n_- = 2\Delta n_a$. É possível comparar a desigualdade (4.22) com a desigualdade mostrada na equação (4.17), para $p = 1$ e substituindo a informação de Fisher pela informação de Fisher quântica F_Q (4.19), de onde obtém-se que

$$\Delta\theta\Delta n_a \geq \frac{\pi}{2}, \quad (4.23)$$

ou seja, embora representem duas entidades diferentes, $\Delta\theta$ e $\Delta\Phi$ obedecem a mesma desigualdade com Δn_a . Para detectar uma perturbação na fase, essa perturbação deve ser grande o suficiente para realmente mover a distribuição de fase inicial. Se a perturbação for muito pequena em relação à incerteza inicial na fase, não poderemos detectá-la com precisão. Portanto, o menor desvio detectável na fase (que é aproximadamente igual à incerteza na estimativa da fase $\Delta\theta$) deve ser aproximadamente do mesmo tamanho que a incerteza inicial na fase $\Delta\Phi$. Se pensarmos na distribuição de fase como uma curva suave, descrevendo como a fase varia ao longo do tempo ou do espaço, qualquer perturbação nessa curva pode afetar a medição da fase. No entanto, é importante observar que, para distribuições periódicas de diferença de fase, mesmo um desvio de fase menor que a incerteza inicial pode alterar significativamente a distribuição. Isso ocorre porque, se a distribuição de fase for periódica, um pequeno desvio na fase pode resultar em uma mudança perceptível na forma da distribuição ao longo de um ciclo completo, assim é

importante encontrar uma maneira mais precisa e confiável de entender como uma pequena mudança na fase afeta a distribuição de fase relativa.

Nós mostramos que a distribuição de probabilidade de diferença de fase pode ser associada com a precisão na medição da variação da fase relativa em interferometria, aplicando a distribuição de probabilidade de fase relativa proposta por Luis e Sánchez-Soto [1] a vários estados quânticos da luz úteis em metrologia quântica fotônica [46]. Foi mostrado numericamente que a informação de Fisher obtida a partir dessa distribuição de fase relativa de Luis e Sánchez-Soto é equivalente à informação de Fisher quântica para os estados considerados, com diferenças médias da ordem de 0,1% [46]. Esses resultados indicam que a distribuição de fase relativa pode ser empregada para prever a incerteza mínima possível na detecção de fase em metrologia quântica, especialmente para estados puros [46].

5 Resultados

Apresentaremos a descrição de experimentos que geram e caracterizam estados de vácuo comprimidos da luz em um e dois modos, levando em consideração uma descrição de mistura estatística de estados coerentes para se descrever o estado do laser, em vez de um estado coerente. Na base de estados de Fock, demonstramos que os experimentos podem ser explicados sem a geração de estados de luz comprimida em qualquer parte dos setups mostrados nas figuras 3 e 4, para um modo e dois modos, respectivamente, e sem que o conceito de compressão seja utilizado em toda análise. Apresentaremos uma explicação física geral para a redução de ruído nos experimentos utilizando da distribuição de fase relativa de Luis e Sánchez-Soto [56], sendo que generalizamos a distribuição para tratar os quatro modos envolvidos na configuração do esquema da figura 4.

5.1 Estado do Laser

Um campo laser é normalmente descrito por um estado coerente visto que essa descrição é altamente eficaz para muitos fenômenos observados em experimentos com laser [41, 51, 70, 71]. No entanto, a fase absoluta do campo laser geralmente não é conhecida com precisão *a priori* [32, 33, 36, 37, 45]. Isso ocorre porque a fase absoluta é uma quantidade global e não pode ser diretamente medida sem uma referência externa [34, 35, 40]. Portanto, ao lidar com a fase desconhecida, é mais apropriado considerar o campo laser como uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias,

$$\hat{\rho}_l = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} |\alpha e^{i\phi'}\rangle\langle\alpha e^{i\phi'}| = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n|, \quad (5.1)$$

com α real e $P_n = \alpha^{2n} e^{-\alpha^2} / n!$ sendo a distribuição de probabilidade Poissoniana para o número de fótons com número médio de fótons igual a α^2 [32, 33]. Vemos que essa equação é obtida a partir da equação (2.60), onde temos os estados coerentes na base dos estados de Fock.

Considerando a visão adotada por Klaus Mølmer na referência [Phys. Rev. A **55**, 3195-3203 (1997)] [33], coerência óptica pode ser pensada como sendo uma superposição coerente de estados com diferentes números de fótons. A coerência é crucial para vários fenômenos ópticos quânticos, como interferência e emaranhamento. No entanto, gerar e manter coerência pode ser desafiador [33]. Uma maneira de demonstrar a dificuldade em gerar coerência é considerar a dinâmica de um sistema quântico interagindo com seu ambiente, levando à decoerência. Vamos tomar um exemplo de um sistema quântico de átomos numa cavidade laser. O Hamiltoniano desse sistema de átomos interagindo com o

campo eletromagnético dentro de uma cavidade óptica pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_C + \hat{H}_M + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (5.2)$$

onde

$$\hat{H}_C = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.3)$$

é o Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado,

$$\hat{H}_M = \sum_{\gamma,i} E_{\gamma,i} |i_\gamma\rangle\langle i_\gamma| \quad (5.4)$$

é o Hamiltoniano do meio (aqui representado pelos átomos na cavidade) e

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \sum_{\mathbf{k}s,\gamma,i} (f_{\gamma,\mathbf{k}s}^{i,j} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger |i_\gamma\rangle\langle j_\gamma| + f_{\gamma,\mathbf{k}s}^{*i,j} \hat{a}_{\mathbf{k}s} |j_\gamma\rangle\langle i_\gamma|) \quad (5.5)$$

é o Hamiltoniano de interação, que mostra que para cada fóton criado, um átomo γ faz a transição do nível i para o nível j , de forma que o estado $|i_\gamma\rangle$ passa para o estado $|j_\gamma\rangle$, enquanto que para cada fóton absorvido pela cavidade, um átomo γ faz a transição do nível j para o nível i , e agora o estado $|j_\gamma\rangle$ passa para o estado $|i_\gamma\rangle$. O termo de interação \hat{H}_{int} pode fazer com que a coerência do sistema decaia ao longo do tempo devido ao emaranhamento com o ambiente, de maneira que a coerência do sistema é afetada pela interação com o ambiente pelas flutuações e perdas do campo dentro da cavidade.

A partir da equação (5.5), observa-se que o estado atômico j possui maior energia em relação ao estado i , enquanto o número total de excitações no sistema permanece constante. Após a evolução, o sistema se encontra em uma superposição de estados, onde há emaranhamento entre o campo e os átomos. Ao calcular a matriz densidade para este estado e obter a matriz densidade reduzida para o campo, ao traçar a parte referente aos átomos, percebe-se que a matriz reduzida é diagonal no número de fótons, indicando a ausência de coerência óptica entre os estados. Além disso, mesmo processos incoerentes de transição dos átomos entre os estados i e j não conseguem gerar superposições coerentes de estados com energias diferentes [33, 45]. Portanto, o campo quântico de luz produzido em uma cavidade laser possui um campo elétrico fundamentalmente indeterminado, pois seu valor esperado na base de Fock é nulo. Isso implica que o estado do laser não pode ser considerado um estado coerente, como comumente é assumido.

Assim, vemos que considerar o estado de um campo laser como um estado coerente é, na verdade, uma aproximação, uma vez que não possui uma fase absoluta conhecida. O estado de um campo laser é melhor descrito por uma mistura estatística de estados coerentes ou, equivalentemente, por uma mistura estatística de estados de Fock, não possuindo uma coerência óptica [32, 33], dada pela equação (5.1). Esse fato gerou um debate sobre se a implementação experimental de teleporte quântico com estados de luz comprimida [3] realmente poderia ser considerada um protocolo de teleporte quântico [34, 38–41]. A

eventual conclusão foi que em qualquer protocolo de informação quântica com variáveis contínuas, um referencial de fase deve ser estabelecido [40, 41], de modo que a ausência de uma fase absoluta em um campo laser não é um problema, assim um protocolo de teleporte quântico foi de fato realizado na referência [3]. Essa discussão está relacionada à questão sobre se a coerência, como a superposição quântica de estados de energia no regime óptico (como em um estado coerente), é uma *ficção*, como inicialmente argumentado por Mølmer [33], ou um *fato*. Mas se considerarmos que um estado quântico se refere não apenas às propriedades intrínsecas de um sistema, mas também à sua relação com partes externas, não há dilema. Nessa visão, a coerência como ficção está associada a um tratamento interno do referencial de fase, enquanto a coerência como fato está associada a um tratamento externo do referencial de fase, sendo ambas as visões válidas [40].

5.2 Tratamento sem Compressão: Um Modo

Como mencionado anteriormente, devido à falta do conhecimento *a priori* da fase absoluta do laser, o estado do campo laser pode ser escrito como uma mistura estatística de estados coerentes, ou de maneira análoga, como uma mistura estatística de estados de Fock [32, 33] como na equação (5.1). Note que se o laser está em um estado coerente $|\alpha e^{i\phi'}\rangle$, a fase ϕ' define a fase ϕ do estado comprimido da equação (3.25), $|\xi\rangle = 1/\sqrt{\cosh r} \sum_{m=0}^{\infty} (-e^{i\phi} \tanh r)^m \sqrt{(2m)!/(2^m m!)} |2m\rangle$. Então se existe uma combinação incoerente de fases absolutas para o campo do laser como na equação (5.1), conseqüentemente a combinação incoerente de quadraturas comprimidas resultará em um estado não-comprimido para o campo no modo a da figura 7. A representação no espaço de fases para esse estado é observado na figura 8.

No esquema da figura 7, observe que a fase ϕ' do campo laser também define a fase φ do oscilador local no modo a_0 da figura 7. Assim, em relação à fase do oscilador local, o estado quântico do campo no modo a da figura 7 é um estado comprimido. Uma vez que o oscilador local é responsável por estabelecer o referencial de fase, sob essa perspectiva, os experimentos representados pelo arranjo da figura 7 de fato demonstram compressão.

5.2.1 Resultados Considerando a Base de Fock

Contudo, de acordo com a equação (5.1), considerar que o laser é descrito por um estado coerente é uma aproximação tão boa quanto considerar um estado de Fock para descrevê-lo. Desse forma, é possível chegar nos mesmos resultados experimentais da equação (3.33), $\langle(\Delta\hat{n}_{bc})^2\rangle \approx \beta^2[\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos(2\theta - \phi)]$, considerando a base de Fock para o campo laser, mas com uma explicação completamente diferente para o fenômeno.

Se um estado de Fock $|M\rangle$ for considerado como o estado de saída do campo laser

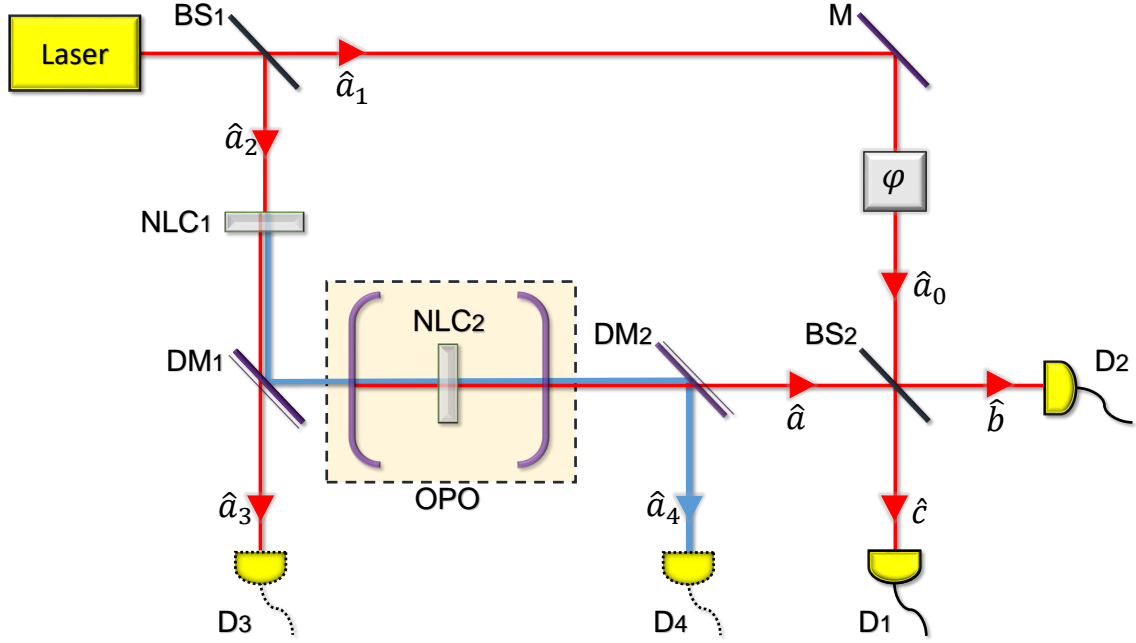


Figura 7 – Esquema para produção e caracterização de um estado de vácuo comprimido em um modo. BS(1,2) - divisores de feixe, NLC(1,2) - cristais não lineares, DM(1,2) - espelhos dicróicos, OPO - oscilador paramétrico óptico, M - espelho, D(1,2,3,4) - detectores, φ - fase ajustável.

no arranjo da figura 7, o estado logo após o divisor de feixe BS_1 é um estado emaranhado da forma $|\psi_0\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} A_s |M-s\rangle_{a_1} |s\rangle_{a_2}$, onde s é o número de fótons refletidos, $M-s$ é o número de fótons transmitidos, e A_s é um coeficiente complexo. Posteriormente, no cristal não linear NLC_1 ocorre a geração de segundo harmônico e os fótons com frequência 2ω vão para o OPO, onde ocorre a conversão paramétrica descendente. Uma vez que no processo de conversão paramétrica descendente fótons com frequência 2ω são convertidos em pares de fótons com frequência ω , apenas números pares de fótons são permitidos no modo a . Vamos primeiro considerar o caso em que o campo *pump* 2ω que incide no OPO está em um estado de Fock $|n\rangle_{2\omega}$. Neste caso, considerando uma evolução Hamiltoniana para o estado do sistema no OPO como descrita na equação (3.2), onde cada fóton aniquilado do modo 2ω gera dois fótons no modo a

$$\sum_m C_{n,m} |n-m\rangle_{2\omega} |2m\rangle_a, \quad (5.6)$$

onde $C_{n,m}$ é a amplitude de probabilidade de gerar m pares de fótons no OPO. Se o campo *pump* incidente estiver em um estado de Fock $|n'\rangle_{2\omega}$ com $|n'-n| \ll n$, devemos ter um estado com coeficientes $C_{n',m} \approx C_{n,m}$, já que o campo *pump* incidente teria essencialmente a mesma intensidade e a amplitude de probabilidade de gerar m pares de fótons deve ser essencialmente a mesma. Se, por outro lado, o campo *pump* 2ω incidente estiver em um estado coerente intenso $|\alpha\rangle_{2\omega}$, esse campo não é modificado pelo OPO e o campo no modo a é dado pela equação (3.25), $|\xi\rangle = 1/\sqrt{\cosh r} \sum_{m=0}^{\infty} (-e^{i\phi} \tanh r)^m \sqrt{(2m)!/2^m m!} |2m\rangle$, [2,55]. Dessa forma, concluímos que os coeficientes $C_{n,m}$ da equação (5.6) podem ser substituídos

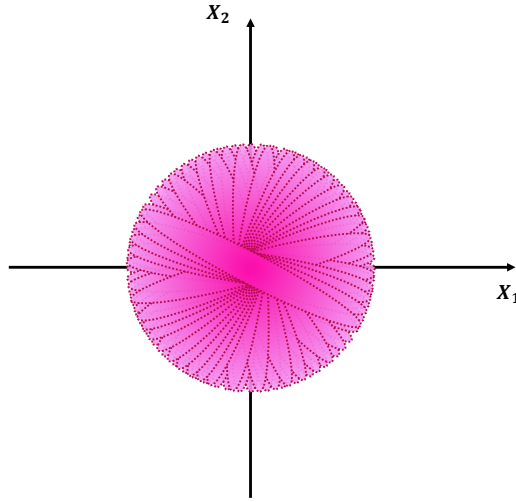


Figura 8 – Representação no espaço de fase do estado não-comprimido para o campo no modo a da figura 7 quando considera-se uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias para o campo laser: uma mistura estatística de estados comprimidos com fases arbitrárias e diferentes não apresenta compressão para uma dada quadratura preferencial, a aleatoriedade da fase faz com que não seja possível atribuir compressão a uma quadratura específica.

pelos coeficientes C_m da equação (3.25), uma vez que a amplitude de probabilidade para gerar m pares de fótons no OPO deve ser a mesma se o campo *pump* incidente for um estado de Fock $|n\rangle$ ou um estado coerente $|\alpha\rangle$ com $|\alpha|^2 = n$ grande, com uma pequena incerteza relativa no número de fótons.

Apenas para simplificar a discussão, consideramos a presença de dois detectores perfeitos D_3 e D_4 que contam os números de fótons N_{a_3} e N_{a_4} que saem pelos modos a_3 e a_4 . O número total de fótons nos modos a e a_0 é, portanto, $N = M - N_{a_3} - 2N_{a_4}$, de modo que o estado logo antes do divisor de feixe BS_2 é

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |2m\rangle_a |N - 2m\rangle_{a_0} e^{i(N-2m)\varphi}, \quad (5.7)$$

onde C_m é a amplitude de probabilidade de gerar m pares de fótons no OPO. Esses coeficientes C_m são os mesmos que os da equação (3.25), como discutido acima. Considerando também que o número de fótons no modo a é muito menor do que N , como necessário no processo de detecção homódina, chegamos ao seguinte resultado para a variância da diferença no número de fótons detectados por D_1 e D_2 $\hat{n}_{bc} \equiv \hat{n}_b - \hat{n}_c = i(\hat{a}^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a})$ para o estado da equação (5.7) é dada pela equação (3.33) quando o número de fótons no modo

a é muito menor que N . Usando o estado da equação (5.7) temos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle &= \langle \psi | (\hat{n}_b - \hat{n}_c)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a} - \hat{a}_0 \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a} \hat{a}_0^\dagger \hat{a} \right) | \psi \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ |C_m|^2 [N(4m+1) - 8m^2] \right. \\ &\quad + C_{m+1}^* C_m \sqrt{(N-2m)(N-2m-1)(2m+2)(2m+1)} e^{2i\theta} \\ &\quad \left. + C_m^* C_{m+1} \sqrt{(N-2m)(N-2m-1)(2m+2)(2m+1)} e^{-2i\theta} \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $\theta = \varphi + \pi/2$. Fazendo a aproximação $N - 2m \approx N - 2m - 1 \approx N$, obtemos

$$\langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle \approx N \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ |C_m|^2 (4m+1) + 2\text{Re} \left[C_m^* C_{m+1} \sqrt{(2m+2)(2m+1)} e^{-2i\theta} \right] \right\}, \quad (5.9)$$

Substituindo os coeficientes C_m da equação (3.25), temos

$$\langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle \approx N [A - B \cos(2\theta - \phi)], \quad (5.10)$$

com

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cosh r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (\tanh^2 r)^m (1 + 4m), \\ B &= \frac{\sinh r}{\cosh^2 r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (\tanh^2 r)^m (2 + 4m). \end{aligned}$$

Usando as relações

$$\begin{aligned} (1-x)^{-1/2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} x^m, \\ \frac{d}{dx} (1-x)^{-1/2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} x^{m-1} m = \frac{1}{2} (1-x)^{-3/2}, \end{aligned}$$

com $x = \tanh^2 r$, após algumas manipulações chegamos a valores para A e B que levam a equação (5.10) à

$$\langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle \approx N [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos(2\theta - \phi)], \quad (5.11)$$

com $\theta = \varphi + \pi/2$. Este resultado é equivalente ao da equação (3.33) para $N \approx \beta^2$.

Note que, ao considerar o campo laser em um estado de Fock, usando a equação (5.7), concluímos que o estado quântico do campo no modo a não é um estado comprimido, mas uma mistura estatística de números pares de fótons da forma $\sum_{m=0}^{\infty} |C_m|^2 |2m\rangle\langle 2m|$. Portanto, a explicação física do fenômeno descrito na figura 7 na base de estados de Fock não envolve compressão. Os resultados experimentais podem ser associados ao estado emaranhado entre os modos a e a_0 descrito na equação (5.7). Para cada par de fótons detectados pelos detectores D_1 e D_2 , há uma indistinguibilidade fundamental sobre se

eles vieram diretamente do laser para o modo a_0 ou se foram convertidos pelo NLC_1 em um fóton de frequência 2ω e convertidos pelo OPO em um par de fótons com frequência ω novamente, chegando ao BS_2 através do modo a . A interferência entre essas duas amplitudes de probabilidade resulta no aumento ou na diminuição do ruído representado na equação (5.11), dependendo da fase φ do interferômetro.

Essencialmente o mesmo resultado da equação (5.11) é obtido quando a descrição mais realista do campo laser da equação (5.1) é empregada, que consiste em uma mistura estatística de estados de Fock. Se o número de fótons do campo laser inicial é desconhecido e o número de fótons que saem pelos modos a_3 e a_4 também é desconhecido, haverá uma distribuição de probabilidade no valor de N na equação (5.11), com um valor médio \bar{N} e um desvio padrão ΔN . Mas como temos $\Delta N/\bar{N} \propto 1/\sqrt{\bar{N}} \rightarrow 0$ nessa situação, os resultados são essencialmente os mesmos com a substituição $N \rightarrow \bar{N}$ na equação (5.11).

Vamos comentar agora como as explicações físicas dos resultados experimentais dos arranjos da figura 7 estão diretamente relacionadas à base escolhida para descrever o estado quântico do laser a partir da equação (5.1), e como essas explicações físicas são inconsistentes entre si. Na base de estados coerentes, um estado comprimido é produzido no OPO da figura 7 e uma detecção homódina é realizada no campo a com o campo a_0 atuando como um oscilador local. Mesmo se o campo laser não tiver uma fase absoluta definida, estando no estado misto da equação (5.1), a fase do oscilador local atua como uma fase de referência. Mas observe que esta explicação é inconsistente com a descrição do campo laser na base de estados de Fock, pois neste caso não pode haver superposição coerente de diferentes estados de Fock no campo do modo a , sendo apenas misturas estatísticas de estados de Fock possíveis, de modo que não pode haver compressão. Se, por outro lado, usarmos a base de estados de Fock para descrever o campo laser, a formação de estados emaranhados como o da equação (5.7) é responsável por explicar os resultados experimentais do arranjo da figura 7. Uma vez que os resultados da equação (5.11) não têm uma forte dependência do número de fótons detectados N , se o estado do laser tem uma pequena incerteza relativa no número de fótons, como no estado misto da equação (5.1), os resultados são essencialmente os mesmos. Mas observe que esta explicação é inconsistente com a descrição do estado do campo laser na base de estados coerentes, pois a incidência de um estado coerente em um divisor de feixe resulta em um estado separado para os modos transmitido e refletido, de modo que nenhum emaranhamento como expresso na equação (5.7) pode ocorrer. Portanto, nenhuma dessas explicações apresentadas é geral, já que cada uma funciona apenas em uma base específica para a representação do campo laser.

5.2.2 Explicação Geral - Um Modo

Agora, fornecemos uma explicação geral para o fenômeno, válida em qualquer base (estados coerentes ou estados de Fock), relacionada à variância da distribuição de fase relativa entre o campo de sinal e o campo do oscilador local. Como visto, a distribuição de probabilidade de fase relativa entre dois modos da mesma frequência em um estado é dado pela equação (4.13). Substituindo o estado quântico da equação (5.7) na equação (4.13), temos

$$\begin{aligned} P_\psi(\Phi) &= \sum_{N=0}^{\infty} \langle \Phi^{(N)} | \psi \rangle \langle \psi | \Phi^{(N)} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \left| \langle \Phi^{(N)} | \psi \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \left| \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{-in_1\Phi} e^{i(N-2m)\varphi} \langle n_1 | 2m \rangle \langle N - n_1 | N' - 2m \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

como estamos tratando do regime em que temos um grande número de fótons $N \gg 1$, novamente teremos um delta $\delta_{n_1, 2m}$ em $\langle n_1 | 2m \rangle$ e posteriormente outro $\delta_{N, N'}$ em $\langle N - 2m | N' - 2m \rangle$ e assim temos como resultado final

$$P_\psi(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{m=0}^{m_{max}} C_m e^{-2im(\Phi+\varphi)} \right|^2, \quad (5.13)$$

com $m_{max} \approx N/2$. Se, como estamos considerando aqui, o número de fótons no modo a é muito menor que N , de modo que $|C_m|$ é negligenciável quando $2m$ é da ordem de N , podemos considerar $m_{max} \rightarrow \infty$, de modo que $P_\psi(\Phi)$ é independente de N neste limite. Portanto, quando o estado puro da equação (5.7) é substituído por um estado misto com $\Delta N/N$ pequeno, temos a mesma distribuição de diferença de fase da equação (5.13). Note também que, ao considerar o problema na base de estado coerente para o laser, a equação (4.13) fará uma projeção em um autoestado do número total de fótons nos modos a_0 e a , de modo que seguindo as aproximações adotadas também chegamos na distribuição de diferença de fase da equação (5.13).

Na figura 9(a), plotamos a distribuição de probabilidade da diferença de fase da equação (5.13) quando os coeficientes C_m são dados pela equação (3.25) com $\phi = 0$, $r = 1$ e $r = 2$, considerando também $\varphi = 0$. Existem dois picos nessas distribuições, em $\Phi = \pi/2$ e $\Phi = 3\pi/2$, cujas larguras diminuem com o aumento de r . Na verdade, a variância de cada pico tem a mesma dependência com r que o desvio padrão da quadratura comprimida para o estado de vácuo comprimido da equação (3.25), que decai como e^{-r} [2, 32]. A figura 9(b) demonstra esse comportamento, onde é plotado o logaritmo da razão entre a variância de $P_\psi(\Phi)$, σ_ψ^2 , e a variância quando o modo a está no estado de vácuo, σ_0^2 , em função de r , considerando apenas a região entre $\Phi = 0$ e $\Phi = \pi$. A linha verde tracejada corresponde a uma dependência $\sigma_\psi^2 = \sigma_0^2 e^{-r}$. Uma vez que, pela equação (3.31), o desvio padrão de \hat{n}_{bc} é proporcional ao desvio padrão de $\hat{X}(\theta)$, seu valor mínimo é proporcional a σ_ψ^2 . Assim, uma explicação geral para a diminuição do desvio padrão de \hat{n}_{bc} com o aumento do parâmetro

r , válida em qualquer descrição de base do estado do campo laser, é uma diminuição na variância da fase relativa dos campos nos modos a e a_0 na figura 7.

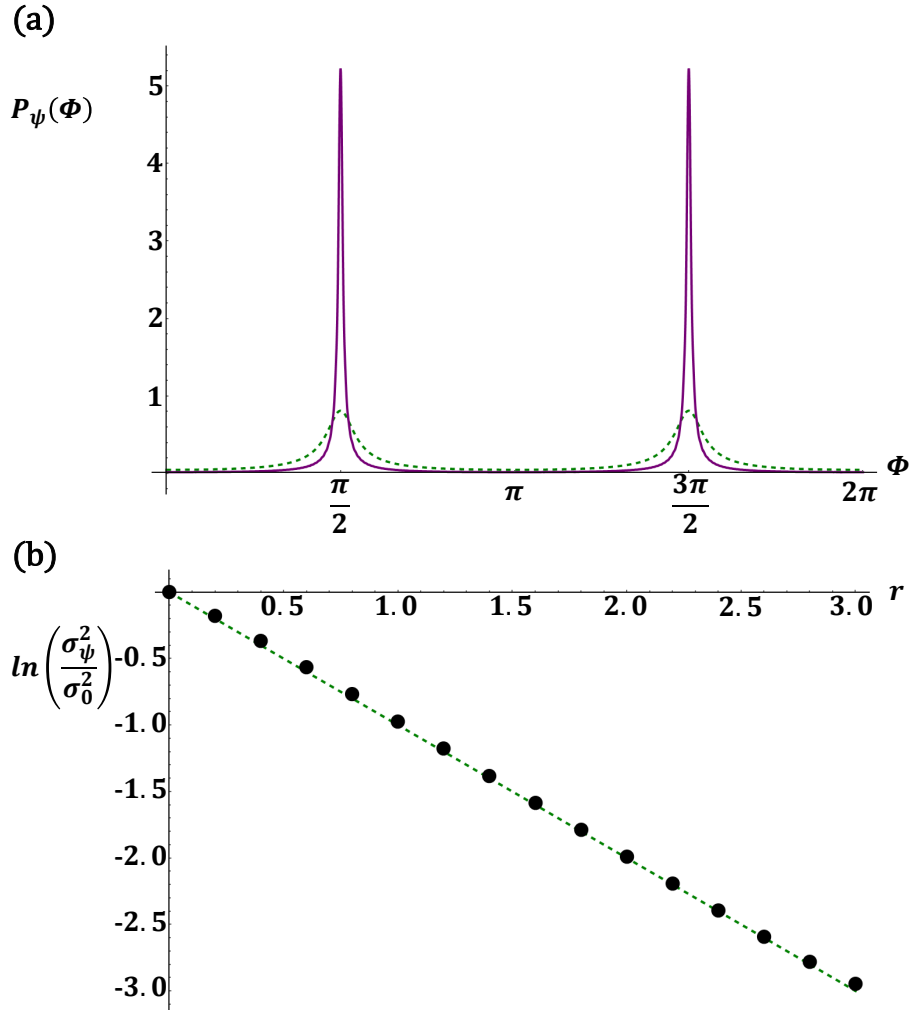


Figura 9 – Distribuições de probabilidade para a diferença de fase entre os campos sinal e oscilador local em estados de vácuo comprimido. (a) $P_\psi(\Phi)$ da equação (5.13) para $\varphi = 0$ e C_m dado pela equação (3.25) com $\phi = 0$, $r = 1$ (linha pontilhada verde) e $r = 2$ (linha sólida roxa). (b) Logaritmo da razão entre a variância de $P_\psi(\Phi)$ da equação (5.13), σ_ψ^2 , e a variância quando o modo a está no estado de vácuo, σ_0^2 , em função de r , considerando apenas a região entre $\Phi = 0$ e $\Phi = \pi$. A linha pontilhada verde corresponde a uma dependência $\sigma_\psi^2 = \sigma_0^2 e^{-r}$. Utilizamos $m_{max} = 200$ na equação (5.13) para todos os gráficos.

5.3 Tratamento sem Compressão e sem Emaranhamento: Dois Modos

Assim como no caso do estado de vácuo comprimido em um modo, os resultados experimentais do esquema da figura 10 também devem ser previsíveis com o uso de um estado de Fock para o campo laser, ou uma mistura estatística de estados de Fock como

de fótons, como considerado na dedução da equação (3.49), ou se é uma combinação de estados de Fock com o mesmo número médio de fótons e uma pequena incerteza no número de fótons, como considerado na dedução da equação (5.14). Supomos que $m \ll N'$, o que é uma condição necessária para o processo de detecção homódina (a amplitude dos campos de osciladores locais deve ser muito maior do que a dos campos de sinal e idler). Também consideramos um divisor de feixe balanceado 50:50 BS₂, de modo que $N' \approx N - N' \approx N/2$, e $\sum_{N'} |Q_{N'}|^2 = 1$.

Usando as considerações acima, deduzimos a variância da soma das diferenças no número de fótons $\hat{n}_{ef} = \hat{n}_e - \hat{n}_f$ e $\hat{n}_{gh} = \hat{n}_h - \hat{n}_g$ nos detectores correspondentes da figura 10. Empregamos a expressão usual $[\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh})]^2 = \langle (\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh})^2 \rangle - \langle (\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh}) \rangle^2$, com $\hat{n}_{ef} = \hat{n}_e - \hat{n}_f$ e $\hat{n}_{gh} = \hat{n}_h - \hat{n}_g$. Com os operadores de aniquilação dados por

$$\begin{aligned}\hat{e} &= \frac{\hat{a} + i\hat{c}e^{i\varphi_a}}{\sqrt{2}}, \\ \hat{f} &= \frac{i\hat{a} + \hat{c}e^{i\varphi_a}}{\sqrt{2}}, \\ \hat{g} &= \frac{i\hat{b} + \hat{d}e^{i\varphi_b}}{\sqrt{2}} \text{ e} \\ \hat{h} &= \frac{\hat{b} + i\hat{d}e^{i\varphi_b}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Assim, temos

$$(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh}) = \hat{a}^\dagger \hat{c}e^{i\theta_a} + \hat{c}^\dagger \hat{a}e^{-i\theta_a} + \hat{b}^\dagger \hat{d}e^{i\theta_b} + \hat{d}^\dagger \hat{b}e^{-i\theta_b},\tag{5.16}$$

onde $\theta_i = \varphi_i + \pi/2$ para $i = \{a, b\}$. Usando o estado da equação (5.14), teremos

$$\begin{aligned}\langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh})]^2 \rangle &= \langle \Psi | (\hat{a}^\dagger \hat{c}e^{i\theta_a} + \hat{c}^\dagger \hat{a}e^{-i\theta_a} + \hat{b}^\dagger \hat{d}e^{i\theta_b} + \hat{d}^\dagger \hat{b}e^{-i\theta_b})^2 | \Psi \rangle \\ &= \sum_{N'} |Q_{N'}|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ |C_m|^2 [N(2m+1) - 4m^2] + \right. \\ &\quad + 2C_m^* C_{m+1} (m+1)(N' - m)(N - N' - m)e^{-i(\theta_a + \theta_b)} \\ &\quad \left. + 2C_{m+1}^* C_m (m+1)(N' - m)(N - N' - m)e^{i(\theta_a + \theta_b)} \right\}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Novamente, considerando a condição para o processo de detecção homódina $m \ll N'$, fazendo a aproximação $N' \approx N - N' \approx N/2$, e considerando $\sum_{N'} |Q_{N'}|^2 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh})]^2 \rangle &\approx N \sum_{m=0}^{\infty} \left[|C_m|^2 (2m+1) + \right. \\ &\quad + C_m^* C_{m+1} e^{-i(\theta_a + \theta_b)} (m+1) + \\ &\quad \left. + C_{m+1}^* C_m e^{i(\theta_a + \theta_b)} (m+1) \right].\end{aligned}\tag{5.18}$$

Com a forma explícita dos coeficientes C_m dada pela Eq. (3.49), a expressão acima é

escrita como

$$\begin{aligned} \langle [\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh})]^2 \rangle \approx N \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{sech}^2 r \left[(\tanh r)^{2m} (2m+1) - \right. \\ \left. - 2(\tanh r)^{2m+1} (m+1) \cos(\theta_a + \theta_b - \phi) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para $x^2 < 1$, a fórmula de uma série geométrica é

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad (5.20)$$

a partir da qual obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^{2n-1}. \quad (5.21)$$

Podemos aplicar a equação (5.20) e a equação (5.21) na equação (5.19) com $x = \tanh r$, e usando também as relações $\tanh r = \sinh r / \cosh r$, $\operatorname{sech} r = 1 / \cosh r$, e $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$ para chegar à expressão

$$[\Delta(\hat{n}_{ef} + \hat{n}_{gh})]^2 \approx N[\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos(\theta_a + \theta_b - \phi)]. \quad (5.22)$$

Este resultado é equivalente às previsões da equação (3.58) quando $N \approx 2\beta^2$.

Assim, prevemos os mesmos resultados experimentais considerando tanto o campo laser em um estado de Fock, como em um estado coerente no esquema da figura (10). Mas observe que a partir da equação (5.14) deduzimos o seguinte estado reduzido para os modos a e b

$$\hat{\rho}'_{ab} = \sum_{m=0}^{\infty} |C_m|^2 |m_a, m_b\rangle \langle m_a, m_b|, \quad (5.23)$$

que não é um estado emaranhado ou comprimido, sendo uma mistura estatística de estados com igual número de fótons nos modos a e b . Portanto, os resultados experimentais não podem ser associados à geração de estados de luz comprimida de dois modos nem à existência de emaranhamento de dois modos no sistema. Eles estão associados às propriedades não clássicas do estado de quatro modos da equação (5.14). Para cada par de fótons que são detectados por $[D_e$ ou $D_f]$ e $[D_g$ ou $D_h]$, há uma indistinguibilidade fundamental sobre se esses fótons foram ambos gerados no OPO e chegaram nos modos a e b ou se vieram dos modos do oscilador local e chegaram nos modos c e d . Todo o setup da figura (10) deve ser visto como um interferômetro complexo para descrever os resultados experimentais neste caso.

Se considerarmos o estado mais realista da equação (5.1) para o campo laser, com uma combinação incoerente de estados de Fock, e também considerarmos que o número de fótons em D_i e D_j na figura 10 não são medidos, o estado da equação (5.14) será substituído por uma mistura estatística onde o número total de fótons N é desconhecido. No entanto, para um grande número médio de fótons \bar{N} , a incerteza relativa $\Delta N / \bar{N}$ deve ser pequena e a previsão experimental para a estatística da equação (5.22) deve ser a mesma com \bar{N} substituindo N .

5.3.1 Distribuição de Probabilidade de Fase para um Campo de Quatro Modos

Vimos que a explicação física dos resultados experimentais para a geração e caracterização do estado de vácuo comprimido em dois modos no esquema da figura (10) é bastante diferente se usarmos a base de estados coerentes para descrever o campo laser ou a base de estados de Fock para descrever esse campo. Na situação discutida anteriormente na subseção 5.2.2, usamos a distribuição de fase relativa de dois modos introduzida por Luis e Sánchez-Soto [1] para apresentar uma justificativa geral para a redução de ruído do sistema, em termos de uma melhor definição da fase relativa entre os campos sinal e oscilador local [37]. Aqui, faremos algo semelhante para os experimentos de vácuo comprimido em dois modos que discutimos acima, mas primeiro precisamos adaptar a definição da distribuição de fase relativa para o caso de quatro campos: sinal, idler e dois osciladores locais.

O ponto de partida são os estados de fase de um único modo de Susskind e Glogower [2, 58] visto na equação (4.3), $|\vartheta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\vartheta} |n\rangle$. Como visto, esses estados são considerados como tendo uma fase bem definida ϑ , embora não haja um operador de fase na óptica quântica [48]. Em seguida, consideramos estados de fase para os quatro modos, fixando a fase do modo a como $\vartheta_a = \vartheta_b + \vartheta_c - \vartheta_d - \Phi$

$$\begin{aligned} |\Phi^{(4)}\rangle &= |\vartheta_b + \vartheta_c - \vartheta_d - \Phi\rangle_a |\vartheta_b\rangle_b |\vartheta_c\rangle_c |\vartheta_d\rangle_d \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_a=0}^{\infty} \sum_{n_b=0}^{\infty} \sum_{n_c=0}^{\infty} \sum_{n_d=0}^{\infty} e^{in_a(\vartheta_d + \vartheta_c - \vartheta_b - \Phi)} \times \\ &\quad \times e^{in_b\vartheta_b} e^{in_c\vartheta_c} e^{in_d\vartheta_d} |n_a\rangle_a |n_b\rangle_b |n_c\rangle_c |n_d\rangle_d. \end{aligned} \quad (5.24)$$

$|\Phi^{(4)}\rangle$ é um estado com a seguinte relação de fase bem definida entre os quatro modos: $(\vartheta_b - \vartheta_d) - (\vartheta_a - \vartheta_c) = \Phi$. Rearranjando os termos exponenciais e realizando mudanças de variáveis adequadas ($n = n_d + n_a$, $l = n_c + n_a$ e $k = n_b - n_a$), este estado é escrito como

$$\begin{aligned} |\Phi^{(4)}\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_a=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-in_a\Phi} e^{ik\vartheta_b} e^{il\vartheta_c} \times \\ &\quad \times e^{in\vartheta_d} |n_a\rangle_a |k + n_a\rangle_b |l - n_a\rangle_c |n - n_a\rangle_d. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Usando o estado de quatro modos da equação (5.25), é possível calcular a distribuição de probabilidade para a relação de fase de quatro modos $\Phi = (\vartheta_b - \vartheta_d) - (\vartheta_a - \vartheta_c)$ dentro do interferômetro da figura 10,

$$P(\Phi) = \int d\vartheta_b \int d\vartheta_c \int d\vartheta_d \langle \Phi^{(4)} | \hat{\rho} | \Phi^{(4)} \rangle, \quad (5.26)$$

onde $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ é o operador de densidade do estado da equação (5.14) produzido dentro do interferômetro. A equação (5.26) corresponde a uma generalização da distribuição de fase relativa de dois modos introduzida por Luis e Sánchez-Soto [1] para o caso de quatro modos. Para estados puros, a distribuição de probabilidade de fase é dada pela expressão

$$P(\Phi) = \int d\vartheta_b \int d\vartheta_c \int d\vartheta_d \left| \langle \Phi^{(4)} | \Psi \rangle \right|^2. \quad (5.27)$$

Usando as Eqs. (5.25) e (5.14), temos

$$\langle \Phi^{(4)} | \Psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{N', m} e^{-iN'\vartheta_c} e^{-i(N-N')\vartheta_d} e^{im\Phi} Q_{N_c} C_m. \quad (5.28)$$

Substituindo equação (5.28) na equação (5.27), usando a relação $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{n,n'}$, e, como mencionado antes, assumindo que $\sum_{N'} |Q_{N'}|^2 = 1$, finalmente obtemos a expressão para a distribuição de probabilidade da relação de fase de quatro modos $\Phi = (\vartheta_b - \vartheta_d) - (\vartheta_a - \vartheta_c)$ para o estado da equação (5.14)

$$P(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{m=0}^{\infty} e^{-im\Phi} C_m \right|^2. \quad (5.29)$$

Na figura 11, plotamos a distribuição de probabilidade da relação de fase conforme descrita pela equação (5.29) quando os coeficientes C_m são dados pela equação (3.49) com $r = 0.5$, $r = 1$ e $r = 1.5$, sempre com $\phi = 0$. Para as três curvas, há um pico em $\Phi = \pi$ e a largura dessas distribuições diminui com o aumento do parâmetro de compressão r .

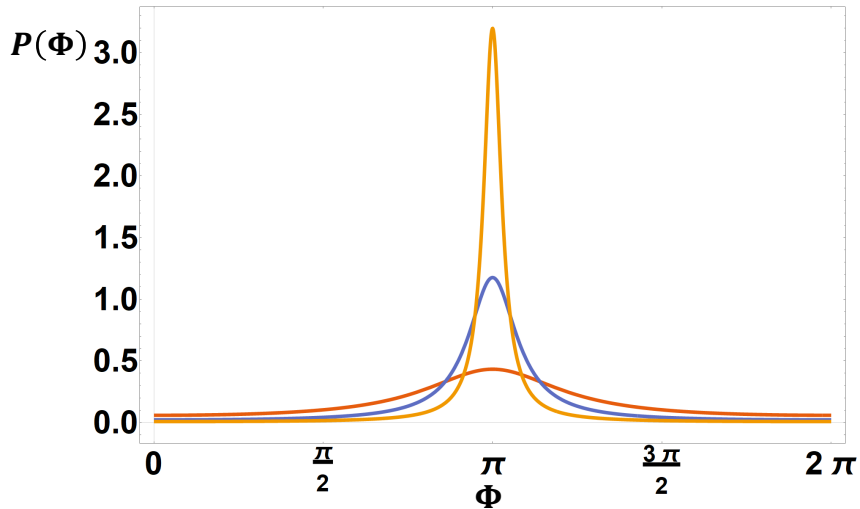


Figura 11 – Distribuição de probabilidade de fase $P(\Phi)$ da equação (5.29) com C_m dado pela equação (3.49) para os parâmetros de compressão $r = 0.5$ (vermelho), $r = 1$ (roxo) e $r = 1.5$ (laranja). Para as três distribuições, consideramos $\phi = 0$ na equação (3.49) e um limite superior $m_{max} = 10000$ para m no somatório da equação (5.29).

As variâncias dessas distribuições de probabilidade de fase exibem um comportamento exponencialmente decrescente com o parâmetro r para $r > 1$. Para uma melhor visualização, na figura 12 é mostrado o logaritmo natural da razão entre a variância de $P(\Phi)$ para experimentos de compressão em dois modos, σ_ψ^2 , e a variância quando os modos a e b da figura 10 estão no estado de vácuo de dois modos $|0, 0\rangle$, σ_0^2 , em função do parâmetro de compressão r . A linha contínua mostra a função $-2r + 0.5$, que se ajusta bem aos pontos computados para $r > 1$. Esse comportamento é independente da base, o que significa que

se um estado coerente for considerado para descrever o estado inicial do campo laser, os resultados para as distribuições de probabilidade da relação de fase considerada entre os quatro modos são essencialmente os mesmos. A variância da quadratura comprimida, quando consideramos um estado de vácuo de dois modos de equação (3.49), tem um comportamento análogo, já que decai como e^{-2r} [2]. Pode-se ver que para r pequeno, a variância das distribuições de probabilidade de fase na figura 12 não se ajusta bem à linha contínua. Mas se observarmos a figura 11 e notarmos que as distribuições de probabilidade para $r < 1$ não decaem para zero nos extremos 0 e 2π , concluímos que a variância não é uma boa medida da dispersão de fase nesses casos, já que $P(\Phi)$ é uma função 2π -periódica. Note que a fase Φ é definida como a soma/diferença entre 4 fases, cada uma estando no intervalo entre $-\pi$ e π , de modo que podem haver valores entre -4π e $+4\pi$. Mas as fases Φ que diferem por um múltiplo inteiro de 2π são equivalentes. Por esse motivo, se a distribuição de fase $P(\Phi)$ não tender a zero nos extremos 0 e 2π (ou θ e $\theta + 2\pi$), sua variância não é uma boa medida da dispersão de fase. Portanto, não é surpresa que não tenhamos um bom acordo entre os pontos e a linha contínua na figura 11 para $r < 1$. Infelizmente, não conseguimos encontrar uma boa medida para a dispersão de fase a ser usada neste trabalho em vez da variância de $P(\Phi)$. Mas observe que a figura 12 mostra, pelo menos qualitativamente, que a variância de $P(\Phi)$ diminui com o aumento do parâmetro de compressão do sistema para $r < 1$. Por outro lado, há um bom acordo entre os pontos e a linha contínua na figura 12 para $r > 1$, já que as distribuições de probabilidade são mais localizadas nesse regime, de modo que uma relação quantitativa entre a variância de $P(\Phi)$ e o nível de compressão do sistema pode ser feita nesse caso.

Podemos concluir que uma explicação geral para a redução de ruído nos experimentos representados na figura (10) é uma melhor localização da relação de fase relativa $\Phi = (\vartheta_b - \vartheta_d) - (\vartheta_a - \vartheta_c)$ entre os quatro modos considerados: sinal, idler e os dois osciladores locais. Essa relação de fase localizada indica que a flutuação em $(\vartheta_b - \vartheta_d)$ acompanha a flutuação em $(\vartheta_a - \vartheta_c)$, gerando um alto grau de correlação entre as diferenças de fótons $\hat{n}_{ef} = \hat{n}_e - \hat{n}_f$ e $\hat{n}_{gh} = \hat{n}_g - \hat{n}_h$ para r grande e fases adequadas no interferômetro da figura (10). Isso pode ser considerado a razão fundamental para a redução de ruído expressa nas equações (3.58) e (5.22).

5.3.2 Experimentos com Mais de um Pulso de Laser

Nesta seção, discutimos brevemente o caso em que há um atraso da luz do laser usada como osciladores locais em relação ao pulso de laser que gera a compressão da luz. Para simplificar, consideraremos um laser pulsado (com fase travada) em que o primeiro pulso que sai da cavidade do laser é duplicado em frequência e usado para bombear o OPO, enquanto o segundo pulso que sai da cavidade é usado para produzir os osciladores locais. Supondo que o estado inicial da cavidade do laser esteja um estado

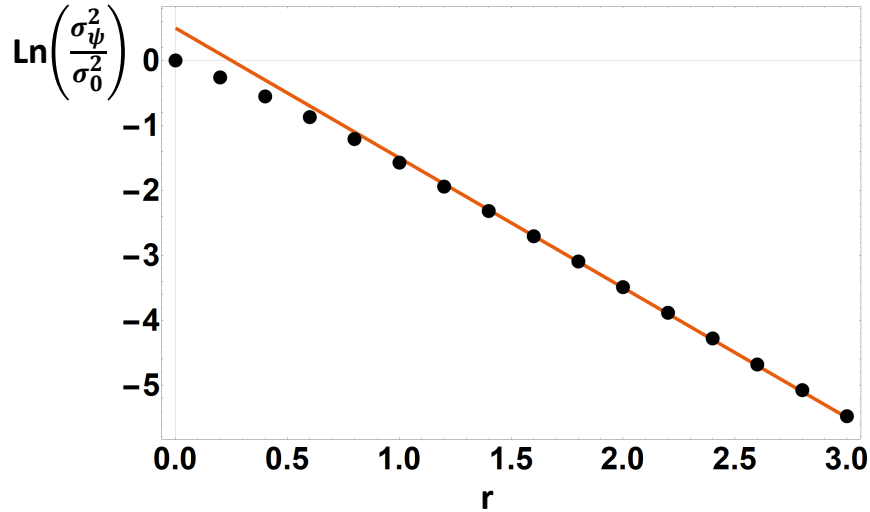


Figura 12 – Logaritmo natural da razão entre a variância de $P(\Phi)$ da equação (5.29) para experimentos de compressão em dois modos, σ_ψ^2 , e a variância quando os modos a e b estão no estado $|0, 0\rangle$, σ_0^2 , em função do parâmetro de compressão r . Todos os pontos foram obtidos usando um limite superior igual a $m_{max} = 10000$ para m na equação (5.29) e $\phi = 0$ na equação (3.49), considerando a fase Φ entre 0 e 2π . A linha contínua corresponde à uma dependência do tipo $\sigma_\psi^2 = \sigma_0^2 e^{-2r+0.5}$.

de Fock com M fótons $|M\rangle_{\text{las.}}$, após a emissão dos dois pulsos, o estado do sistema é $\sum_{k,l} A_{k,l} |k\rangle_1 |l\rangle_2 |M - k - l\rangle_{\text{las.}}$, ignorando qualquer geração de fótons na cavidade do laser neste período em nosso modelo simplificado. $|k\rangle_1$ é um estado com k fótons no primeiro pulso e $|l\rangle_2$ um estado com l fótons no segundo pulso. Seguindo os passos que nos levaram à equação (5.14), o estado do sistema nos modos a , b , c e d da figura (10), mais o modo da cavidade do laser, é

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,l,p} C_m B_{l,p} |m\rangle_a |m\rangle_b |p\rangle_c |l-p\rangle_d |M' - l - 2m\rangle_{\text{las.}}, \quad (5.30)$$

onde $M' = M - N_i - 2N_j$ é o número total de fótons do sistema após a subtração dos N_i fótons detectados por D_i e dos N_j fótons detectados por D_j na figura (10). Considere que o número de fótons na cavidade do laser também é medido e o valor encontrado é $M_{\text{las.}}$. O número total de fótons restantes no sistema é dado por $N = M' - M_{\text{las.}}$, e devemos impor a condição $M' - l - 2m = M_{\text{las.}}$, ou $l = N - 2m$, na equação (5.30). O estado do sistema então se torna

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,l,p} C_m B_{N-2m,p} |m\rangle_a |m\rangle_b |p\rangle_c |N - 2m - p\rangle_d. \quad (5.31)$$

O estado acima é equivalente ao da equação (5.14) se definirmos $p = N' - m$ e observarmos que $B_{N-2m,p} \approx B_{N,p}$ para $N \gg 2m$, de modo que as mesmas previsões experimentais são feitas. Em particular, a previsão para a variância da soma das diferenças de número de fótons $\hat{n}_{ef} = \hat{n}_e - \hat{n}_f$ e $\hat{n}_{gh} = \hat{n}_h - \hat{n}_g$ nos detectores correspondentes da figura (10)

é a mesma que na equação (5.22). Novamente, se considerarmos o estado mais realista da equação (5.1) para o campo do laser, e também que o número de fótons no campo da cavidade do laser, em D_i , e em D_j não são medidos, o estado da equação (5.31) será substituído por uma mistura estatística onde o número total de fótons N é desconhecido, mas com uma pequena variação relativa no número de fótons. Nesse caso, a previsão experimental para a estatística da equação (5.22) deve ser a mesma com o número médio de fótons substituindo N , como antes.

Van Enk e Fucks [34] e Pegg [72] mostraram explicitamente como pode haver coerência de fase entre a luz que sai de uma cavidade a laser em momentos diferentes para lasers contínuos [34] e pulsados [72]. Mesmo que o estado inicial da cavidade tenha uma fase completamente indeterminada, sendo uma mistura estatística de estados de Fock, há uma relação de fase bem definida entre os diferentes pulsos de um campo a laser com fase travada [72]. A fase de cada pulso não é bem definida, com o valor esperado do operador de campo elétrico sendo zero em todos os momentos, mas a relação de fase entre pulsos consecutivos é bem definida. Essa relação de fase bem definida está associada à correlação entre o número de fótons dos diferentes pulsos do laser e os campos da cavidade a laser [72]. Essa correlação está presente na discussão do parágrafo anterior, sendo essencial para prever corretamente os resultados experimentais sobre a compressão de dois modos. Portanto, as medidas homódinas funcionam mesmo se os campos dos osciladores locais não vêm do mesmo pulso que gerou o campo de luz comprimida.

6 Conclusão

Descrevemos experimentos que produzem e caracterizam estados de vácuo comprimido em um e dois modos, levando em consideração o fato de que o campo laser usado nos experimentos não é um estado coerente, mas uma combinação incoerente de estados coerentes com fases aleatórias, o que é equivalente a uma combinação incoerente de estados de Fock. Apesar de conduzir aos mesmos resultados experimentais, existem diferenças nas interpretações físicas dos resultados observados quando diferentes bases (estados coerentes ou Fock) são usadas para descrever o estado do campo laser.

Nos esquemas de geração e caracterização de estados de vácuo comprimido em um modo, quando utilizamos a base de Fock, os experimentos são analisados sem a produção de um estado comprimido de luz em nenhuma parte dos experimentos e sem o uso do conceito de compressão na análise. Nessa abordagem, o estado de Fock para o laser resulta na produção de emaranhamento entre o modo do campo sinal, que sai do meio não linear, e o modo usado como oscilador local na detecção homódina. A interferência desses modos em um divisor de feixe gera as mesmas previsões experimentais que aquelas obtidas ao considerar um estado coerente para descrever o laser. Concluimos que uma explicação geral para a diminuição das flutuações da diferença de intensidades medidas pelos detectores D_1 e D_2 no esquema da Fig. 7 com o aumento do parâmetro de compressão r é uma melhor definição da diferença de fase entre os campos nos modos a e a_0 . Esta explicação é válida em qualquer base que usemos para descrever o estado do campo laser, ao contrário da geração de estado comprimido de vácuo pelo OPO, que é válida apenas na base de estado coerente para o estado do laser, e da geração de emaranhamento entre os modos a e a_0 , que é válida apenas na base de estado de Fock para o estado do laser.

Nos esquemas de geração e caracterização de estados de vácuo comprimido em dois modos, assim como o caso do estado de vácuo comprimido em um modo, não há produção de um estado comprimido em qualquer parte do experimento, bem como o conceito de compressão não é utilizado durante a análise quando consideramos a base de Fock para o estado do laser. Além disso, concluimos que não há emaranhamento entre os modos sinal e *idler*, o que é um tanto quanto curioso, visto que esse *setup* é frequentemente usado para implementar protocolos de informação quântica baseados em emaranhamento, como o teletransporte quântico [3, 8–10]. No entanto vale ressaltar que, embora não haja emaranhamento quando consideramos apenas os modos sinal e *idler*, pode haver emaranhamento quando os osciladores locais são levados em conta, mas essa análise de emaranhamento de quatro modos está fora do escopo do presente trabalho. Estendemos a distribuição de fase relativa de dois modos de Luis e Sánchez-Soto [1] para descrever uma relação de fase entre os quatro modos relevantes no experimento: sinal,

idler e dois osciladores locais. Concluímos que uma explicação física geral para a redução de ruído no sistema é a redução na variância de uma distribuição de probabilidade de relação de fase entre esses quatro modos com o aumento do parâmetro de compressão r .

As interpretações físicas gerais apresentadas no escopo deste trabalho sobre experimentos com estados de vácuo comprimido da luz são robustas, independentemente da base utilizada para descrever o estado do campo laser. Esperamos que essa compreensão mais profunda do fenômeno da compressão de luz, com tantas aplicações, possa trazer esclarecimentos fundamentais para este importante cenário físico na óptica quântica e informação quântica, inspirando avanços frutíferos nessas campos.

Referências

- [1] A. Luis e L. L. Sánchez-Soto: *Probability Distributions for the Phase Difference*. Phys. Rev. A, 53:495–501, 1996. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.53.495>. Citado 9 vezes nas páginas 11, 12, 16, 17, 45, 48, 51, 64 e 69.
- [2] C. C. Gerry e P. L. Knight: *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2008. Citado 26 vezes nas páginas 15, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 55, 59, 64 e 66.
- [3] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein C. A. Fuchs H. J. Kimble e E. S. Polzik: *Unconditional Quantum Teleportation*. Science, 282(5389):706–709, 1998, ISSN 0036-8075. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.282.5389.706>. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 32, 39, 53, 54 e 69.
- [4] M. Chen, N. C. Menicucci e O. Pfister: *Experimental Realization of Multipartite Entanglement of 60 Modes of a Quantum Optical Frequency Comb*. Phys. Rev. Lett., 112:120505, 2014. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.120505>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 39.
- [5] M. Kues, C. Reimer, J. Lukens W. Munro A. Weiner D. Moss e R. Morandotti: *Quantum Optical Microcombs*. Nature Photonics, 13:170–179, 2019. <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0363-0>. Citado na página 15.
- [6] M. Erhard, M. Krenn e A. Zeilinger: *Advances in High-dimensional Quantum Entanglement*. Nature Reviews Physics, 2:365–381, 2020. <https://doi.org/10.1038/s42254-020-0193-5>. Citado na página 15.
- [7] S. L. Braunstein e P. van Loock: *Quantum Information with Continuous Variables*. Rev. Mod. Phys., 77:513–577, 2005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.513>. Citado na página 15.
- [8] G. J. Milburn e S. L. Braunstein: *Quantum Teleportation with Squeezed Vacuum States*. Phys. Rev. A, 60:937–942, 1999. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.60.937>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 69.
- [9] P. T. Cochrane, G. J. Milburn e W. J. Munro: *Teleportation Using Coupled Oscillator States*. Phys. Rev. A, 62:062307, 2000. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.62.062307>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 69.
- [10] Zhi-Hui Yan *et al.*: *Generation of Non-classical States of Light and their Application in Deterministic Quantum Teleportation*. Fundamental Research, 1(1):43–49,

- 2021, ISSN 2667-3258. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325820300054>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 69.
- [11] A. S. Coelho, F. A. S. Barbosa, K. N. Cassemiro A. Villar M. Martinelli e P. Nussenzveig: *Three-Color Entanglement*. *Science*, 326(5954):823–826, 2009, ISSN 0036-8075. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1178683>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 39.
- [12] A. Dutt, K. Luke, S. Manipatruni A. L. Gaeta P. Nussenzveig e M. Lipson: *On-Chip Optical Squeezing*. *Phys. Rev. Applied*, 3:044005, 2015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.3.044005>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 39.
- [13] L. F. Muñoz-Martínez *et al.*: *Exploring Six Modes of an Optical Parametric Oscillator*. *Phys. Rev. A*, 98:023823, 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.023823>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 39.
- [14] Y. Israel, L. Cohen, X. B. Song J. Joo H. S. Eisenberg e Y. Silberberg: *Entangled Coherent States Created by Mixing Squeezed Vacuum and Coherent Light*. *Optica*, 6(6):753–757, 2019. <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-6-6-753>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 39.
- [15] J. Aasi *et al.*: *Enhanced Sensitivity of the LIGO Gravitational Wave Detector by Using Squeezed States of Light*. *Nature Photonics*, 7:613–619, 2013. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 49.
- [16] R. Schnabel: *Squeezed States of Light and their Applications in Laser Interferometers*. *Physics Reports*, 684:1 – 51, 2017, ISSN 0370-1573. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157317300595>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- [17] M. Tse *et al.*: *Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the Era of Gravitational-Wave Astronomy*. *Phys. Rev. Lett.*, 123:231107, 2019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.231107>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- [18] C. M. Caves: *Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer*. *Phys. Rev. Lett.*, 45:75, 1981. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.45.75>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- [19] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann e R. Schnabel: *Detection of 15 dB Squeezed States of Light and their Application for the Absolute Calibration of Photoelectric Quantum Efficiency*. *Phys. Rev. Lett.*, 117:110801, 2016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.110801>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.

- [20] F. Acernese *et al.*: *Increasing the Astrophysical Reach of the Advanced Virgo Detector via the Application of Squeezed Vacuum States of Light*. Phys. Rev. Lett., 123:231108, 2019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.231108>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- [21] Y. Zhao *et al.*: *Frequency-Dependent Squeezed Vacuum Source for Broadband Quantum Noise Reduction in Advanced Gravitational-Wave Detectors*. Phys. Rev. Lett., 124:171101, 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.171101>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 49.
- [22] L. McCuller *et al.*: *Frequency-Dependent Squeezing for Advanced LIGO*. Phys. Rev. Lett., 124:171102, 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.171102>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- [23] P. M. Anisimov *et al.*: *Quantum Metrology with Two-Mode Squeezed Vacuum: Parity Detection Beats the Heisenberg Limit*. Phys. Rev. Lett., 104:103602, 2010. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.103602>. Citado na página 15.
- [24] I. Ruo-Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares N. Samantaray P. Traina e M. Genovese: *One- and Two-mode Squeezed Light in Correlated Interferometry*. Phys. Rev. A, 92:053821, 2015. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.053821>. Citado na página 15.
- [25] J. P. Dowling e K. P. Seshadreesan: *Quantum Optical Technologies for Metrology, Sensing, and Imaging*. Journal of Lightwave Technology, 33(12):2359–2370, 2015. Citado na página 15.
- [26] M. Yap, P. Altin, T. Mcrae B. Slagmolen R. Ward e D. McClelland: *Generation and Control of Frequency-Dependent Squeezing via Einstein–Podolsky–Rosen Entanglement*. Nature Photonics, 14:1–4, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0582-4>. Citado na página 15.
- [27] T. Eberle, V. Händchen e R. Schnabel: *Stable Control of 10 dB Two-Mode Squeezed Vacuum States of Light*. Opt. Express, 21(9):11546–11553, 2013. <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-21-9-11546>. Citado na página 15.
- [28] Y. Zhao, Y. Okawachi, J. K. Jang X. Ji M. Lipson e A. L. Gaeta: *Near-Degenerate Quadrature-Squeezed Vacuum Generation on a Silicon-Nitride Chip*. Phys. Rev. Lett., 124:193601, 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.193601>. Citado na página 15.
- [29] F. Kosuke e S. Takeda: *Building a Large-Scale Quantum Computer with Continuous-Variable Optical Technologies*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Opti-

- cal Physics, 55(1):012001, 2022. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6455/ac489c>. Citado na página 15.
- [30] M. Ban: *Quantum Dense Coding via a Two-Mode Squeezed-Vacuum State*. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 1(6):L9, 1999. <https://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/1/6/101>. Citado na página 15.
- [31] B. W. Walshe, B. Q. Baragiola, R. N. Alexander e N. C. Menicucci: *Continuous-Variable Gate Teleportation and Bosonic-Code Error Correction*. Phys. Rev. A, 102:062411, 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.062411>. Citado na página 15.
- [32] W. F. Walls e G. J. Milburn: *Quantum Optics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. Citado 12 vezes nas páginas 15, 20, 21, 26, 27, 32, 37, 38, 52, 53, 54 e 59.
- [33] K. Mølmer: *Optical coherence: A convenient fiction*. Phys. Rev. A, 55:3195–3203, 1997. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.55.3195>. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 52, 53 e 54.
- [34] C. A. and Fuchs, S. J. van Enk: *Quantum State of an Ideal Propagating Laser Field*. Phys. Rev. Lett., 88:027902, 2001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.027902>. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 52, 53 e 68.
- [35] D. T. Pegg e J. Jeffers: *Quantum Nature of Laser Light*. Journal of Modern Optics, 52(13):1835–1856, 2005. <https://doi.org/10.1080/09500340500106857>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 52.
- [36] T. R. Calixto e P. L. Saldanha: *Describing Squeezed-Light Experiments without Squeezed-Light States*. Phys. Rev. A, 102:053723, 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.053723>. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 17, 48 e 52.
- [37] T. R. Calixto e P. L. Saldanha: *Describing Two-Mode Squeezed-Light Experiments without Two-Mode Entanglement or Squeezing*. Optics Communications, 550:129945, 2024, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401823006934>. Citado 6 vezes nas páginas 15, 16, 17, 48, 52 e 64.
- [38] T. Rudolph e B. C. Sanders: *Requirement of Optical Coherence for Continuous-Variable Quantum Teleportation*. Phys. Rev. Lett., 87:077903, 2001. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.077903>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 53.
- [39] B. C. Sanders, S. D. Bartlett, T. Rudolph e P. L. Knight: *Photon-Number Superselection and the Entangled Coherent-State Representation*. Phys. Rev. A, 68:042329, 2003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.042329>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 53.

- [40] S. D. Bartlett, T. Rudolph e R. W. Spekkens: *Dialogue Concerning Two Views on Quantum Coherence: Factist and Fictionist*. Int. J. Quant. Info., 4:17–43, 2006. <https://doi.org/10.1142/S0219749906001591>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 52, 53 e 54.
- [41] S. D. Bartlett, T. Rudolph e R. W. Spekkens: *Reference Frames, Superselection Rules, and Quantum Information*. Rev. Mod. Phys., 79:555–609, 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.555>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 52, 53 e 54.
- [42] M. Jarzyna e R. Demkowicz-Dobrzański: *Quantum Interferometry with and without an External Phase Reference*. Phys. Rev. A, 85:011801, 2012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.011801>. Citado na página 16.
- [43] R. L. Pfleegor e L. Mandel: *Interference of Independent Photon Beams*. Phys. Rev., 159:1084–1088, 1967. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.159.1084>. Citado na página 16.
- [44] E. Goulielmakis *et al.*: *Direct Measurement of Light Waves*. Science, 305(5688):1267–1269, 2004, ISSN 0036-8075. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1100866>. Citado na página 16.
- [45] P. L. Saldanha: *Quantum Analysis of the Direct Measurement of Light Waves*. New J. Phys., 16:013021, 2014. <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/16/1/013021>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 52 e 53.
- [46] F. Braz, T. R. Calixto e P. Saldanha: *Relative Phase Distribution and the Precision of Optical Phase Sensing in Quantum Metrology*. Optics Communications, 527:128954, 2022. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401822006010>. Citado 5 vezes nas páginas 16, 48, 49, 50 e 51.
- [47] J. D. Jackson: *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999. Citado na página 19.
- [48] L. Mandel e E. Wolf: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 20, 23, 25, 26, 27 e 64.
- [49] N. A. Lemos: *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2007. Citado na página 23.
- [50] L. E. Ballentine: *Quantum Mechanics A Modern Development*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998. Citado na página 27.
- [51] Breitenbach, G., S. Schillerand e J. Mlynek: *Measurement of the Quantum States of squeezed Light*. Nature, 387:471–475, 1997. <https://doi.org/10.1038/387471a0>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 52.

- [52] F. Meylahn, B. Willke e H. Vahlbruch: *Squeezed States of Light for Future Gravitational Wave Detectors at a Wavelength of 1550 nm*. Phys. Rev. Lett., 129:121103, 2022. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.121103>. Citado na página 32.
- [53] D. Ganapathy *et al.*: *Broadband Quantum Enhancement of the LIGO Detectors with Frequency-Dependent Squeezing*. Phys. Rev. X, 13:041021, 2023. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.13.041021>. Citado na página 32.
- [54] D. Callan: *A combinatorial survey of identities for the double factorial*. arXiv, 0906.1317, 2009. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0906.1317>. Citado na página 35.
- [55] A. I. Lvovsky: *Squeezed Light*, capítulo 5, páginas 121–163. John Wiley Sons, Ltd, 2015, ISBN 9781119009719. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119009719.ch5>. Citado 4 vezes nas páginas 39, 42, 49 e 55.
- [56] A. Luis e L. L. Sánchez-Soto: *Phase-Difference Operator*. Phys. Rev. A, 48:4702–4708, 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.4702>. Citado 3 vezes nas páginas 45, 48 e 52.
- [57] S. Barnett e D. Pegg: *On the Hermitian Optical Phase Operator*. Journal of Modern Optics, 36, 1989. <https://doi.org/10.1080/09500348914550021>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- [58] L. Susskind e J. Glogower: *Quantum Mechanical Phase and Time Operator*. Phys. Phys. Fiz., 1:49, 1964. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.49>. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 64.
- [59] B. C. Sanders e G. J. Milburn: *Optimal Quantum Measurements for Phase Estimation*. Phys. Rev. Lett., 75:2944–2947, 1995. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.2944>. Citado na página 48.
- [60] A. Luis e J. Peřina: *Optimum Phase-Shift Estimation and the Quantum Description of the Phase Difference*. Phys. Rev. A, 54:4564–4570, 1996. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.4564>. Citado na página 48.
- [61] S. M. Barnett e D. T. Pegg: *Quantum Theory of Optical Phase Correlations*. Phys. Rev. A, 42:6713–6720, 1990. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.42.6713>. Citado na página 48.
- [62] F. F. Braz: *Associação entre Distribuição de Probabilidade de Fase Óptica e Detecção de Fase Relativa em Metrologia Quântica Fotônica*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2022. <http://hdl.handle.net/1843/48410>. Citado na página 49.

- [63] The LIGO Scientific Collaboration: *A Gravitational Wave Observatory Operating Beyond the Quantum Shot-Noise Limit*. *Nature Physics*, 7:962–965, 2011. <https://doi.org/10.1038/nphys2083>. Citado na página 49.
- [64] Demkowicz-Dobrzański, Rafal, Marcin Jarzyna e Jan Kołodyński: *Quantum Limits in Optical Interferometry*. Volume 60 de *Progress in Optics*, capítulo 4, páginas 345–435. Elsevier, 2015. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079663815000049>. Citado na página 49.
- [65] E. Polino, M. Valeri, N. Spagnolo e F. Sciarrino: *Photonic Quantum Metrology*. *AVS Quantum Science*, 2:024703, 2020. <https://pubs.aip.org/avs/aqs/article/2/2/024703/997285/Photonic-quantum-metrology>. Citado na página 49.
- [66] S. Pirandola, B. Bardhan, T. Gehring C. Weedbrook e S. Lloyd: *Advances in Photonic Quantum Sensing*. *Nature Photonics*, 12, 2018. <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0301-6>. Citado na página 49.
- [67] V. Giovannetti, S. Lloyd e L. Maccone: *Quantum-Enhanced Measurements: Beating the Standard Quantum Limit*. *Science*, 306(5700):1330–1336, 2004. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1104149>. Citado na página 49.
- [68] L. Pezzè, A. Smerzi, M. Oberthaler R. Schmied e P. Treutlein: *Quantum Metrology with Nonclassical States of Atomic Ensembles*. *Reviews of Modern Physics*, 90, 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.035005>. Citado na página 49.
- [69] S. L. Braunstein e C. M. Caves: *Statistical Distance and the Geometry of Quantum States*. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3439–3443, 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.3439>. Citado na página 49.
- [70] S. M. Barnett e P. M. Radmore: *Methods in Theoretical Quantum Optics*. Oxford University Press, 2005. Citado na página 52.
- [71] S. M. Dutra: *Cavity Quantum Eledrodynamics, The Strange Theory of Light in a Box*. John Wiley Sons, Inc., 2005. Citado na página 52.
- [72] D. T. Pegg: *Intrinsic Phase Coherence of Laser Light*. *Phys. Rev. A*, 79:053837, 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.79.053837>. Citado na página 68.

Anexos

ANEXO A – Expansão $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$

Seja $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$. Avaliando essa função e suas derivadas no ponto $x = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
 f(x, x = 0) &= 1 \\
 f'(x, x = 0) &= \frac{1}{2} \\
 f''(x, x = 0) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 f'''(x, x = 0) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &\vdots \\
 f^n(x, x = 0) &= \frac{(2n - 1)}{2} \cdot \frac{(2n - 3)}{2} \cdot \frac{(2n - 5)}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{(2n - 1)!!}{2^n},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde foi utilizada a propriedade de duplo fatorial para um número ímpar. A partir da relação de duplo fatorial com o fatorial, para um número ímpar $2n - 1$, dada por

$$(2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \tag{A.2}$$

é possível escrever então a expansão para a função $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ como

$$(1 - x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}. \tag{A.3}$$