

30

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

042  
R173g  
2110  
T

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHA PARA O CÁLCULO DE  
CAMPOS ELETROSTÁTICOS E MAGNETOSTÁTICOS BIDIMENSIONAIS  
ATRAVÉS DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Jaime Arturo Ramirez

ok 2006

1990

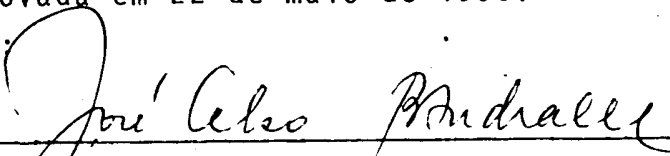
"GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHA PARA O CÁLCULO DE CAMPOS  
ELETROSTÁTICOS BIDIMENSIONAIS ATRAVÉS DO MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS"

JAIHE ARTURO RAMIREZ

Dissertação de Mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

Aprovada em 22 de maio de 1990.

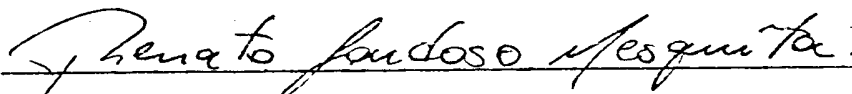
Por:



AN- José Celso Borges de Andrade (orientador)  
Dr. Ing. UPS - Toulouse-FR/Prof. CPGEE-UFMG



AN- João Antônio de Vasconcelos (orientador)  
Ms.C. UFPb - Paraíba/Prof. CPGEE-UFMG



- Renato Cardoso Mesquita  
Ms.C. CPGEE-UFMG/Prof. do CPGEE-UFMG



- José Roberto Cardoso  
Dr. USP-SP/Prof. da USP-SP



- Mário Fabiano Alves

Ph.D. University of Toronto - Canadá/Engo MF Consulto  
ria Ltda.

UFMG - BIBLIOTECA CENTRAL

Algumas pessoas contribuíram  
significativamente para a conclusão  
deste trabalho. A vocês, o meu  
sincero agradecimento.

Arturo Ramirez, Jaime

Geração automática de malha para cálculo de campos eletrostáticos e magnetostáticos bidimensionais  
043/A792g/1990/T  
(474009305/93)

(i)

## LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>		<u>Pág.</u>
1	Domínio $\Omega$ das funções $u$ e seu contorno $\Gamma$ .	010
2	Elementos triangulares planos e curvos ..	021
3	Elementos retangulares planos e curvos ..	021
4	Discretização de uma geometria complexa por elementos triangulares planos .....	022
5	Exemplo de campo eletrostático .....	023
6	Elemento utilizado para discretizar o domínio $\Omega$ .....	029
7	Exemplo de campo magnetostático .....	036
8	Condições de contorno caso magnetostático	039
9	Componentes da integral de linha .....	042
10	Nós, curvas e regiões utilizadas na especificação da região em forma de L ...	049
11	Fatores de qualidade de triângulos e de pares de triângulos .....	052
12	Malha de elementos com triangulação através da maximização do fator de qualidade $q$ de pares de triângulos, começando pelo ponto $P_i$ .....	053
13	Triângulo escaleno .....	054
14	Região em L a ser triangulada pelo Método de Lindholm .....	056

15	Definição das subregiões $R_1$ e $R_2$ .....	047
16	Malha inicial de elementos obtida para a região em L pelo Método de Lindholm .....	058
17	Polígonos de Voronoi .....	061
18	Triângulos de Delaunay .....	062
19	Localização do novo "nó" a ser inserido ..	063
20	Polígono de inserção .....	064
21	Novos triângulos de Delaunay .....	065
22	Conjunto de pontos a serem triangulados .....	066
23	Construção do polígono de Voronoi .....	067
24	Polígono de Voronoi .....	068
25	Construção dos triângulos de Delaunay ...	068
26	Triângulos de Delaunay formados .....	069
27	Região em L a ser triangulada pelo Método de Delaunay .....	070
28	Malha inicial de elementos obtida para a fig.(27) pelo Método de Delaunay .....	071
29	A e B são dois triângulos de uma malha, i, j, k e l são os nós que formam estes triângulos .....	076
30	Divisão dos triângulos A e B com a geração do nó m .....	076
31	Malha final, com 50 nós, referente à fig. (16) .....	078
32	Malha final, com 100 nós, referente	

	à fig.(16) .....	079
33	Malha final de elementos referente à fig. (28) com $CM = 1.25$ , $\gamma_1 = 30^\circ$ e $\gamma_2 = 15^\circ$ ..	089
34	Malha final de elementos referente à fig. (28) com $CM = 1.00$ , $\gamma_1 = 30^\circ$ e $\gamma_2 = 15^\circ$	090
35	Malha final de elementos referente à fig. (28) com $CM = 0.75$ , $\gamma_1 = 30^\circ$ e $\gamma_2 = 15^\circ$	091
36	Malha final de elementos referente à fig. (28) com $CM = 0.50$ , $\gamma_1 = 30^\circ$ e $\gamma_2 = 15^\circ$	092
37	Calha retangular .....	100
38	Delimitação da região referente à calha retangular.....	101
39	Malha inicial referente à calha retangular .....	102
40	Malha final referente à calha retangular .....	103
41	Equipotenciais referentes à calha retangular .....	104
42	Condições de contorno referentes à região em L .....	106
43	Malha inicial referente à região em L ...	106
44	Malha final referente à região em L ...	107
45	Equipotenciais referentes à fig.(44) ....	108
46	Malha final referente à fig.(43) admitindo-se $CM = 0.5$ , $\gamma_1 = 30^\circ$ e $\gamma_2 = 15^\circ$	109
47	Equipotenciais referentes à fig.(46) ....	110

48	Zoom referente à região de concentração dos menores triângulos da fig.(46) .....	111
49	Equipotenciais referentes à fig.(48) ....	112
50	Máquina elétrica de polos salientes .....	113
51	Representação de uma máquina elétrica ...	114
52	Representação simplificada de uma máquina elétrica .....	115
53	Definição do domínio da máquina elétrica simplificada .....	116
54	Malha inicial referente à fig.(53).....	117
55	Malha final referente à fig.(53) admitindo-se $CM = 0.5$ $\gamma_1 = 30^\circ$ e $\gamma_2 = 15^\circ$	118
56	Mapeamento do fluxo da máq. elétrica ....	119
57	Elemento linear unidimensional .....	133
58	Exemplo de aplicação do MEF em elemento linear unidimensional .....	136
59	Geometria em forma de L .....	138
60	Interseção das funções distância .....	146
61	Localização do nó interior .....	149
62	Malha com 1º nó interior .....	150
63	Programas do FEM - 2D .....	153
64	Início do pacote computacional FEM - 2D .	153
65	Início FEM - Entrada de Dados .....	154
66	Menu principal - FEM - Entrada de Dados .	154
67	Outro Menu - FEM - Entrada de Dados .....	155
68	Construção da região em L .....	155

69	Opção Zoom - FEM - Entrada de Dados .....	156
70	Zoom da fig.(69) .....	156
71	Definição potenciais do contorno .....	157
72	Gerando malha .....	157
73	Malha inicial gerada / Opção para otimizar .....	158
74	Constante Multiplicativa - CM .....	158
75	Ângulo de convergência $\gamma_1$ .....	159
76	Ângulo de convergência $\gamma_2$ .....	159
77	Malha final obtida .....	160
78	Início FEM - Processador de Dados .....	161
79	Leitura do arquivo gerado no FEM - Entrada de Dados .....	161
80	Definição do campo a ser calculado .....	162
81	Opção para montar o sistema linear (08).	162
82	Montando o sistema linear (08) .....	163
83	Precisão para se resolver o sistema (08).	163
84	Beta inicial para se resolver o sistema linear (08) .....	164
85	Resolvendo o sistema linear (08) .....	164
86	Opção para mudar precisão .....	165
87	Opção para gravar o arquivo .....	165
88	Início FEM - Saída de Dados .....	166
89	Modo de saída 1 .....	167
90	Leitura do arquivo gerado no FEM - Processador de Dados .....	167

91	Menu principal FEM - Saída de Dados .....	168
92	Malha inicial .....	168
93	Malha final .....	169
94	Opção para imprimir equipotenciais .....	169
95	Equipotenciais da região em L .....	170
96	Modo de saída 2 .....	170
97	Janela ativa 3 - Malha final .....	171
98	Janela ativa 2 - Zoom malha final .....	171
99	Janela ativa 4 - Equipotenciais .....	172

## SIMBOLOGIA

$\underline{A}(\underline{u})$	operador que define as equações que governam o problema
$\rightarrow$	
$A$	potencial vetor magnético
$A$	área do triângulo
$\underline{B}(\underline{u})$	operador de especificação das condições de contorno
$\rightarrow$	
$B$	vetor indução magnética
$B_x, B_y$	componentes do campo magnético nas direções $\vec{i}$ e $\vec{j}$ , respectivamente
$\rightarrow$	
$D$	vetor densidade de fluxo elétrico
$\rightarrow$	
$E$	vetor campo elétrico
$E_x, E_y$	componentes do campo elétrico nas direções $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$ , respectivamente
$E, F$	funções ou operadores que dependem de $\underline{A}$ e $\underline{B}$ e que são definidos através do cálculo variacional. $E$ pode significar também o módulo de um campo elétrico
$\underline{F}$	funções de interpolação em termos de coordenadas generalizadas
$G, g$	funções ou operadores pré-definidos que dependem de $\underline{A}$ e $\underline{B}$
$\rightarrow$	
$H$	vetor campo magnético
$\rightarrow$	
$J$	vetor densidade de corrente elétrica
$\underline{K}$	matriz de rigidez geral

$K$	parâmetro relacionado com a posição de $q_0$
$\underline{L}$	operador diferencial linear
$\underline{M}$	operador diferencial linear
$\underline{N}$	funções de interpolação, geralmente funções de forma
$P_1, P_2, P_3$ ... $P_i$	pontos arbitrários de $\mathbb{R}^2$
$R$	resíduo ou erro
$R_1, R_2$	subregiões
$S_e$	área de cada elemento
$X_i, X_j, X_k$	abscissas referentes aos nós $i, j$ e $k$ respectivamente
$Y_i, Y_j, Y_k$	ordenadas referentes aos nós $i, j$ e $k$ respectivamente
$W_e$	função de ponderação do erro
$a, b, c, d$	constantes relativas à função distância. $a$ pode também significar inclinação de uma reta
$a_1, a_2$	posições relativas de segmentos do contorno $\Gamma$ de uma determinada geometria
$\underline{a}$	parâmetros de interpolação
$\vec{a}_x, \vec{a}_y$	vetores unitários nas direções dos eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente
$a_i, a_j, a_l,$ $b_i, b_j, b_l,$ $c_i, c_j, c_l$	constantes que dependem da geometria do elemento

$c_1, c_2, c_3,$	
$c_4$	relativo às curvas superiores e inferiores de uma determinada subregião
$d_1, d_2$	comprimento de segmentos do contorno $\Gamma$ de uma determinada geometria
$e$	relativo a cada elemento, constante de Neper
$\underline{f}$	vetor independente
$\underline{f}(\underline{x})$	funções de $\underline{x}$ pré-definidas
$g$	função ou operador pré-definido que depende de $\underline{A}$ e $\underline{B}$
$i, j, k$	nós de um elemento triangular qualquer
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	vetores ortogonais unitários nas direções $Ox,$
$i, j, k$	$Oy$ e $Oz$ respectivamente
$m$	número de elementos
$n$	número de nós de um elemento
$n_x, n_y, n_z$	componentes do vetor $\vec{n}$ em coordenadas cartesianas
$\vec{n}$	vetor normal ao contorno $\Gamma$
$\vec{q}$	carga elétrica estática
$q$	fator de qualidade de um triângulo
$q_{12}$	fator de qualidade de dois triângulos adjacentes
$q_0, q_1, q_2$	parâmetros auxiliares no cálculo das constantes relativas à função distância
$s$	semi-perímetro do triângulo
$u$	função arbitrária

(x)

$\underline{u}$	vetor de função a determinar
$\underline{\hat{u}}$	vetor de função de aproximação de $\underline{u}$
$v$	função arbitrária
$\underline{x}$	vetor de coordenadas
$\Gamma$	contorno do domínio $\Omega$
$\theta$	variável da função distância
$\Pi$	funcional
$\Phi$	função distribuição de potencial
$\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$	valores especificados de potenciais nos nós $i, j$ e $k$
$\Omega$	domínio de estudo
$\alpha$	ângulo relacionado com a função distância
$\underline{\alpha}$	parâmetros de interpolação
$\delta$	operador diferencial
$\epsilon$	permissividade
$\mu$	permeabilidade
$\lambda$	máxima diferença de potencial permissível entre dois nós adjacentes
$\nabla^2$	operador Laplaciano
$\rightarrow$	
$\nabla \Phi$	gradiente da função $\Phi$
$\rightarrow$	
$\nabla \cdot$	divergente
$\rightarrow$	
$\nabla \times$	rotacional
$\frac{\partial}{\partial n}$	diferencial na direção normal ao contorno $\Gamma$

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}$$

operador diferencial linear

$\mathbb{R}^2$

plano real

$|| \cdot ||$

distância Euclidiana em  $\mathbb{R}^2$

$\angle$

ângulo formado entre dois segmentos quaisquer

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$

ângulos de convergência

CM

constante multiplicativa

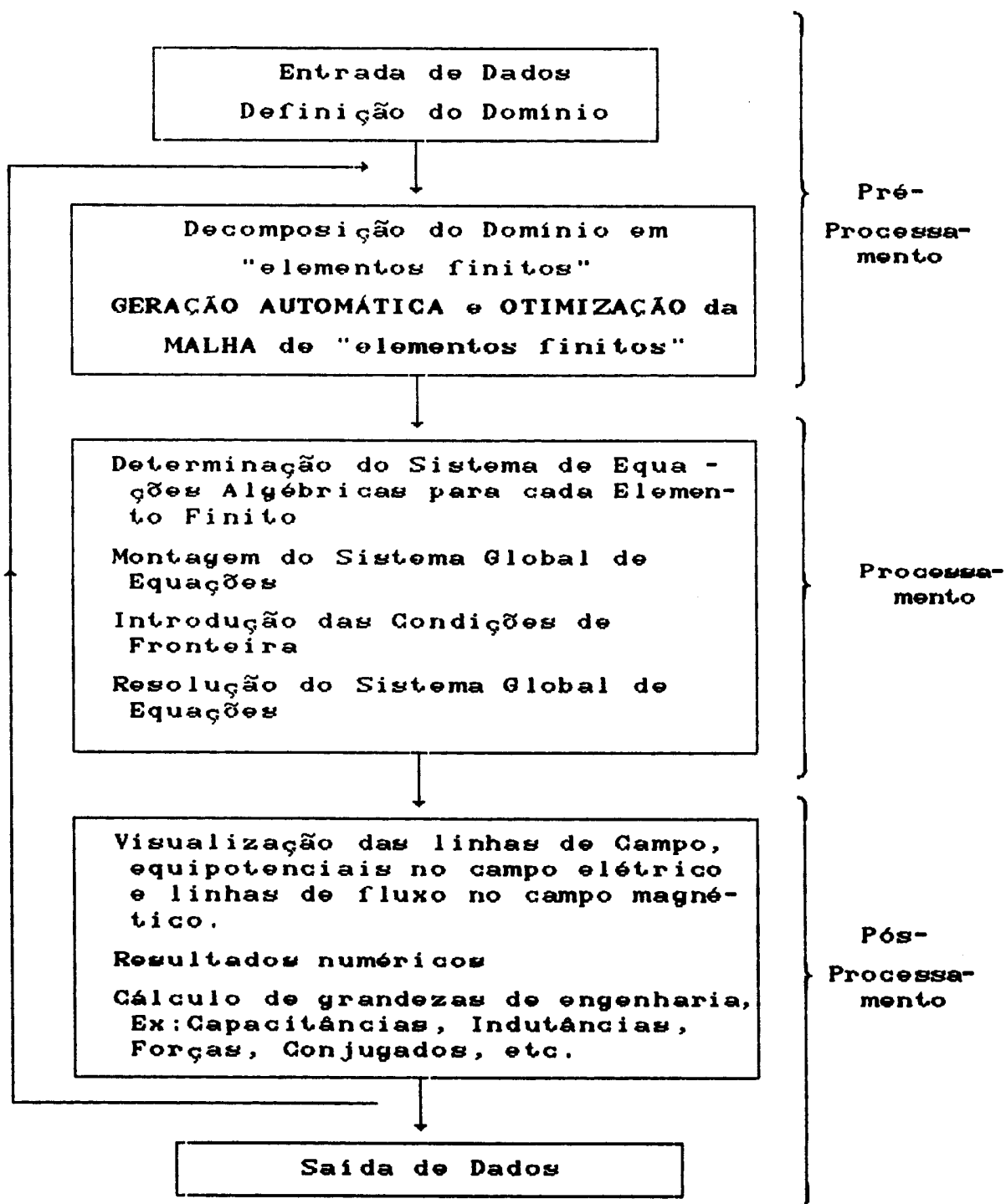
## CAPÍTULO - 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - Considerações Gerais

O estudo do comportamento dos campos elétricos e magnéticos sempre foi um grande desafio para os engenheiros eletricitas. Nos últimos anos, o advento do computador possibilitou a resolução de um grande número de equações integrais e diferenciais, facilitando cálculos de transitórios e de fluxo de carga em sistemas elétricos de potência, bem como auxiliando nos projetos de malhas de aterramento, nos projetos de equipamentos elétricos, etc. No cálculo de campos elétricos e magnéticos o computador possibilitou resolver problemas onde anteriormente uma solução analítica na maior parte dos casos era impossível.

De uma maneira geral os "programas" desenvolvidos para cálculo de campo se estruturam em três etapas, pré-processamento, processamento e pós-processamento, da seguinte forma:



A obtenção de resultados satisfatórios na utilização dos métodos numéricos, está diretamente relacionada com a qualidade da malha final de "elementos finitos" gerada na etapa de pré-processamento, como pode ser observado no fluxograma anterior.

Devido a sua grande importância, esta etapa tem merecido uma grande atenção por parte dos pesquisadores.

Dentre os métodos numéricos utilizados para resolver as equações matemáticas que governam o problema, destaca-se o Método de Elementos Finitos.

Na etapa de pós-processamento é feita uma análise visual e numérica dos resultados obtidos para depois decidir pela impressão dos resultados ou pelo início de um novo cálculo.

## 1.2 - Historico

Pode-se dizer que, no desenvolvimento dos "programas" de cálculo de campo, inicialmente os pesquisadores concentraram seus estudos na parte do processamento. Dentre os métodos numéricos utilizados para

resolver as equações integrais e diferenciais em contornos fechados, Método das Diferenças Finitas e o Método de Elementos Finitos (MEF), destacou-se o último. Desenvolvido originalmente na década de 50 para solucionar problemas ligados à engenharia mecânica, o MEF difundiu-se rapidamente para outras áreas do conhecimento. Particularmente na década de 60 e 70, o MEF sofreu um profundo e rigoroso estudo de fundamentação e revisão de suas equações matemáticas.

Associado à grande utilização do MEF em "programas" de cálculo de campo veio o desafio de discretizar o domínio de estudo em "elementos finitos". Nos últimos quinze anos, inúmeras técnicas de decomposição do domínio foram desenvolvidas, objetivando subdividir a região, a partir do seu contorno, em "elementos finitos" bem proporcionados e bem distribuídos. Torna-se evidente a importância da etapa de pré-processamento, uma vez que, quanto menores e melhor distribuídos forem estes "elementos finitos", mais a solução discretizada se aproxima da solução contínua, o que representaria o caso ideal.

É comum dividir esta etapa na parte da Geração Automática da Malha e na parte do Refino da Malha de Elementos.

No Brasil, os primeiros estudos de Geração Automática e Refino da Malha de Elementos datam desta década. Estes estudos vieram acompanhados também do desenvolvimento de "programas", utilizando o MEF, para cálculo de campos elétricos e magnéticos. Deve-se a BASTOS (1984), CARDOSO (1985) e RIBEIRO & SALDANHA (1986) os primeiros trabalhos. Pode-se dizer que hoje, quatro pequenos grupos se consolidam nessa área, a saber, UFMG/LEAT, UFSC/GRUCAD, USP e CEPEL/RIO.

O presente trabalho é o segundo no âmbito de uma dissertação de mestrado na UFMG. São exploradas a potencialidade das técnicas de Delaunay e Bryant para a Geração Automática de Malha para problemas bidimensionais. São apresentadas também as resoluções de cálculos de campos eletrostáticos e magnetostáticos bidimensionais através do MEF, utilizando a técnica desenvolvida de Geração Automática de Malha.

### 1.3 - Roteiro do Trabalho

O trabalho desenvolvido trata da Geração Automática de Malha para o Cálculo de Campos Eletrostáticos e Magnetostáticos Bidimensionais através do Método de Elementos Finitos. Foi desenvolvido um "programa", no

UFMG - BIBLIOTECA CENTRAL  
MEMORIA UFMG  
FEM-2D,

para auxiliar no estudo dos campos eletrostáticos e magnetostáticos em regiões complexas. A seguir é feito um breve resumo de cada capítulo deste trabalho.

No segundo Capítulo é feito o desenvolvimento de toda a teoria com os conceitos fundamentais envolvidos no Método dos Elementos Finitos.

No terceiro Capítulo são abordados os aspectos fundamentais envolvidos na Geração Automática da Malha Inicial de Elementos. São apresentadas as técnicas de Lindholm e Delaunay, onde destaca-se passo a passo a geração automática da malha inicial de elementos através da técnica de Delaunay.

No quarto Capítulo são abordados os aspectos fundamentais envolvidos no Refinamento da Malha de Elementos. São apresentados os conceitos sugeridos por Bryant para a introdução de nós interiores na malha inicial de elementos.

No quinto Capítulo é feita a aplicação da teoria desenvolvida. São mostrados exemplos de cálculo de campos eletrostáticos e magnetostáticos com geração automática da malha, em regiões complexas.

O sexto Capítulo refere-se as conclusões e propostas de trabalhos correlatos para dar prosseguimento a este.

O Apêndice A refere-se a um Exemplo de Aplicação do MEF em Problemas Unidimensionais.

O Apêndice B refere-se a uma explanação passo a passo da técnica de introdução de "nós" interiores (BRYANT, 1985) descrita no quarto Capítulo.

O Apêndice C refere-se ao "programa" FEM-2D, desenvolvido para microcomputadores e que utiliza a teoria apresentada no trabalho.

## CAPÍTULO - 2

### O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

#### 2.1 - Histórico

Deve-se a ZIENKIEWICZ (1965) as primeiras aplicações do método dos elementos finitos em problemas de eletromagnetismo, embora o método tenha sido primeiramente desenvolvido por engenheiros mecânicos na década de 50 para analisar sistemas estruturais de aviões.

COURANT (1943), apresentou o primeiro artigo sobre o tema, seguido por TURNER, et alii, (1956), CLOUGH (1960), que parece ter sido o primeiro a empregar o termo "elemento finito", e ARGYRIS (1963), dentre outros.

SILVESTER e CHARI (1970), apresentaram o primeiro artigo propondo a utilização deste método em problemas eletromagnéticos, incluindo, na sua formulação, a resolução de problemas não lineares.

Devido à sua grande utilização, o método de elementos finitos sofreu uma rigorosa análise teórica

baseada no cálculo variacional e no método de RAYLEYGH-RITZ (RAYLEYGH, 1877; RITZ, 1909). Na última década, vários autores contribuíram para o desenvolvimento da teoria matemática dos elementos finitos, entre eles BABUSKA e AZIZ (1972), CIARLET e RAVIART (1972), AUBIN (1972) e ODEN e REDDY(1976).

## 2.2 - Introdução

Será feita neste capítulo uma breve introdução sobre a formulação do método de elementos finitos sem a preocupação de um maior aprofundamento. Isso, deve-se ao fato desta matéria ser tratada em diversas bibliografias clássicas, (ZIENKIEWICZ, 1977), (HUEBNER, 1975), (SILVESTER & FERRARI, 1983), (SABONNADIÈRE & COULOMB, 1986), (CARDOSO, 1985), (RIBEIRO, 1987), (BASTOS, 1989), dentre outros.

O método dos elementos finitos é um procedimento numérico que consiste em dividir uma determinada região de estudo (domínio  $\Omega$ ) em "elementos finitos" e descrever o fenômeno físico (potencial elétrico  $\phi$  ou potencial vetor magnético  $\vec{A}$ ) através de equações simples sobre os elementos.

Será estudada neste capítulo, basicamente a aplicação do MEF à resolução das equações de Laplace e

Poisson que governam o comportamento dos campos eletrostáticos e magnetostáticos bidimensionais.

O primeiro passo é definir o domínio  $\Omega$  e as condições no contorno  $\Gamma$  de  $\Omega$ , (Figura 1) abaixo

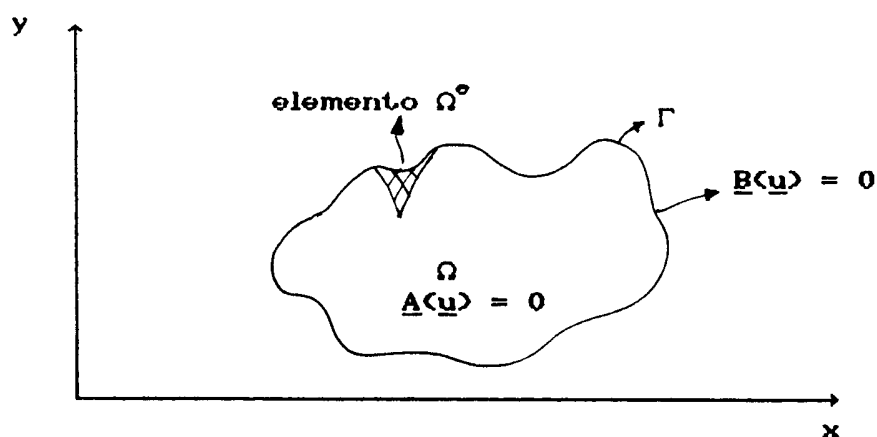


Figura 1 - Domínio  $\Omega$  das Funções  $\underline{u}$  e seu contorno  $\Gamma$

Depois de delimitar a região de estudo, para se resolver o problema, qualquer que seja ele, resta determinar as funções  $\underline{u}$  que devem satisfazer a um certo conjunto de equações diferenciais

$$\underline{A}(\underline{u}) = \begin{bmatrix} A_1(\underline{u}) \\ A_2(\underline{u}) \\ \vdots \\ A_n(\underline{u}) \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

e certas condições no contorno  $\Gamma$  de  $\Omega$  da forma

$$\underline{B}(\underline{u}) = \begin{bmatrix} B_1(\underline{u}) \\ B_2(\underline{u}) \\ \vdots \\ B_n(\underline{u}) \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

As funções  $\underline{u}$ , no presente trabalho, podem ser o potencial elétrico  $\Phi(x,y,z)$  ou as componentes do potencial vetor magnético  $u_1 = A_x(x,y,z)$ ,  $u_2 = A_y(x,y,z)$  e  $u_3 = A_z(x,y,z)$ .

O método de elementos finitos, por ser uma aproximação, permite escrever uma solução da forma

$$\underline{u} \approx \hat{\underline{u}} = \underline{N} \cdot \underline{a} \quad (3)$$

onde  $\underline{N}$  são funções de interpolação descritas em termos das variáveis independentes (como as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) e  $\underline{a}$  são parâmetros desconhecidos.

Os parâmetros  $\underline{a}$  são determinados a partir da resolução de um sistema de equações integrais da forma

$$\int_{\Omega} g_j(\underline{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} y_j(\underline{u}) \, d\Gamma = 0 \quad (j = 1, n) \quad (4)$$

onde  $g_j$  e  $y_j$  são funções ou operadores pré-definidos que dependem das equações diferenciais (1) e (2) e  $n$  é o número de parâmetros  $a$ .

Pode-se obter a forma integral (4) a partir das equações diferenciais (1) e (2), que regem o problema, por dois métodos distintos : o método dos resíduos (ZIENKIEWICZ, 1977; CARDOSO, 1985) e através do cálculo variacional (RIBEIRO, 1987; BASTOS, 1989).

A equação (4), sendo uma integral, permite a sua avaliação em intervalos discretos do domínio  $\Omega$  (elementos do domínio, por exemplo) nos quais as funções  $\underline{u}$  serão descritas por funções simples (polinômios, por exemplo). Isto pode ser feito porque as funções de interpolação na equação (3) serão aproximações no interior dos elementos e não em toda a região  $\Omega$ .

Dividindo-se a região  $\Omega$  em  $m$  intervalos (elementos), pode-se escrever

$$\underline{u} \approx \hat{u} = \sum_{e=1}^m \underline{N}_e \cdot \underline{a}_e = \underline{N} \cdot \underline{a} \quad (5)$$

onde  $\underline{N}_e$  são funções de interpolação locais.

Agora a equação (4) pode ser escrita como o somatório da própria equação aplicada a cada elemento

$$\int_{\Omega} \underline{g}_j \, d\Omega + \int_{\Gamma} g_j \, d\Gamma = \sum_{e=1}^m \left[ \int_{\Omega_e} \underline{g}_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} g_j \, d\Gamma \right] \quad (j = 1, n) \quad (6)$$

Se as equações diferenciais (1) e (2) forem lineares, ou seja, se elas puderem ser escritas como

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{u}) &= \underline{L} \underline{u} + \underline{p} = 0 && \text{em } \Omega \\ \underline{B}(\underline{u}) &= \underline{M} \underline{u} + \underline{t} = 0 && \text{em } \Gamma \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $\underline{L}$  e  $\underline{M}$  são operadores lineares e  $\underline{p}$  e  $\underline{t}$ , fontes, então o sistema de equações (4) implicará em um sistema de equações lineares da forma (ZIENKIEWICZ, 1977)

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{f} = 0 \quad (8)$$

onde

$$\underline{K}_{ij} = \sum_{e=1}^m \underline{k}^e_{ij} \quad ; \quad f_i = \sum_{e=1}^m \underline{f}^e_i \quad (9)$$

Resolvendo o sistema (8) para os parâmetros  $\underline{a}$  ter-se-á solucionado o problema.

### 2.3 - Aplicação do Cálculo Variacional ao MEF

O princípio variacional consiste em encontrar a função  $\underline{u}$ , que é um elemento de uma classe de funções  $\underline{M}$  (ou é um elemento de um espaço vetorial normado) tal que um determinado funcional  $\Pi$  definido em  $\underline{M}$  assume seu menor valor possível em  $\underline{u}$ .

É importante ressaltar que, "a priori", o método variacional não tem nenhuma relação com o método dos elementos finitos. Este último é uma técnica numérica, que associada ao método variacional possibilita chegar à equação (8).

Em linguagem não rigorosa, a idéia matemática do método é a seguinte : supõe-se que se deseja resolver as equações (1) e (2); ao invés de resolvê-las pode-se procurar

o mínimo de uma função  $\Pi$ , admitindo que a mesma possua um mínimo, e que este seja exatamente a solução das equações (1) e (2).

Em termos físicos, a procura do estado onde o funcional energético é mínimo, corresponde ao estado de equilíbrio de todo sistema natural livre que possua uma certa energia potencial (BASTOS, 1989).

A forma mais geral do funcional é dada por

$$\Pi = \int_{\Omega} F\left(\underline{u}, \frac{\partial}{\partial x} \underline{u}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(\underline{u}, \frac{\partial}{\partial x} \underline{u}, \dots\right) d\Gamma \quad (10)$$

onde  $F$  e  $E$  são funções pré-definidas e  $\Gamma$  é o contorno do domínio  $\Omega$  de  $\underline{u}$ .

A solução para o problema contínuo é a função  $\underline{u}$  que faz com que o funcional seja estacionário com relação a pequenas variações arbitrárias  $\delta u$ , ou seja

$$\delta \Pi = 0 \quad (11)$$

onde  $\delta \Pi$  representa uma variação arbitrária de  $\Pi$ .

Manipulando-se a equação (10), obtém-se a seguinte equação (ZIENKIEWICZ, 1977)

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta \underline{u}^t \underline{A}(\underline{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \underline{u}^t \underline{B}(\underline{u}) \, d\Gamma \quad (12)$$

Sendo  $\delta \underline{u}$  uma variação arbitrária de  $\underline{u}$ , para que o funcional  $\Pi$  seja estacionário, baseado nas equações (1) e (2), deve-se ter

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{u}) &= 0 && \text{em } \Omega \\ \underline{B}(\underline{u}) &= 0 && \text{em } \Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

As equações (13) são as equações de Euler do funcional  $\Pi$  (KRASNOV, 1984).

O grande desafio e limitação do cálculo variacional é encontrar um funcional cujas equações de Euler sejam as equações diferenciais do problema (ZIENKIEWICZ, 1977).

Aproximando-se as funções  $\underline{u}$  pela equação (5), pode-se escrever

$$\delta \Pi = \frac{\delta \Pi}{\delta a_1} \delta a_1 + \frac{\delta \Pi}{\delta a_2} \delta a_2 + \dots = \frac{\delta \Pi}{\delta \underline{a}} \delta \underline{a} \quad (14)$$

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \underline{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \Pi}{\delta a_1} \\ \frac{\delta \Pi}{\delta a_2} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

de onde se determina os parâmetros  $\underline{a}$ .

Se as funções  $\underline{u}$  e suas derivadas ocorrem em potências não superiores a 2, o funcional  $\Pi$  é "quadrático". Com essa consideração o conjunto de equações (15) resultará em um conjunto de equações similares ao sistema de equações (8) (ZIENKIEWICZ, 1977)

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \underline{a}} = \underline{K} \underline{a} + \underline{f} = 0 \quad (16)$$

O sistema de equações lineares (16) tem a importante característica da matriz  $\underline{K}$  ser simétrica. O que nem sempre se aplica para o caso geral da equação (8) (ZIENKIEWICZ, 1977).

Um estudo mais aprofundado e bastante didático sobre a formulação variacional e sobre as técnicas de obtenção do funcional  $\Pi$  é apresentado nos trabalhos (RIBEIRO, 1987) e (BASTOS, 1989).

## 2.4 - Aplicação Do Método Dos Resíduos Ponderados (GALERKIN) ao MEF

Em alguns tipos de problemas, onde a procura de um funcional é difícil, emprega-se outros métodos desenvolvidos. Dentre eles, destaca-se o método de Galerkin.

Uma das grandes vantagens deste método, e talvez a razão da sua grande aceitação, vem do fato de que, para obtenção da formulação numérica, pode-se partir diretamente da equação que define o fenômeno físico em estudo, ao invés de utilizar um funcional, como é feito no método variacional.

Considera-se a representação geral de uma equação diferencial no domínio  $\Omega$  e no contorno  $\Gamma$ .

$$\underline{L}(u) + p = 0 \quad (17)$$

onde  $\underline{L}$  é um operador diferencial e  $p$  é o termo relativo às fontes.

Supõe-se que  $\hat{u}$  é a solução aproximada de (17).

Então

$$\underline{L}(\underline{Q}) + p = \underline{R} \quad (18)$$

onde  $\underline{R}$  é o resíduo ou erro que resulta da aproximação.

O método dos resíduos ponderados (GALERKIN) procura tornar o resíduo sobre todo o domínio  $\Omega$ , pequeno. Isto é feito, calculando-se a média ponderada do erro e fazendo-a nula sobre o domínio  $\Omega$ . Então escolhe-se  $n$  funções de ponderação  $w_i$  linearmente independentes.

$$\int_{\Omega} \left[ \underline{L}(\underline{Q}) + p \right] w_i d\Omega = \int_{\Omega} \underline{R} w_i d\Omega = 0$$

(i = 1, 2, ..., n)      (19)

O método de Galerkin faz então

$$w_i = N_i \quad (20)$$

onde  $N_i$  é a função de interpolação. Assim obtém-se

$$\int_{\Omega} \left[ \underline{L}(\underline{Q}) + p \right] N_i d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

Para um elemento com  $r$  nós, pode-se escrever

$$\int_{\Omega^e} \left[ \underline{L}(\underline{u}^e) + \underline{f}^e \right] N_i^e d\Omega^e = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (22)$$

onde  $e$  representa cada elemento do domínio  $\Omega$ .

$$\underline{u}^e = \left[ N^e \right] \left\{ \underline{u} \right\}^e \quad (23)$$

o estudo da integração por partes e redução da derivabilidade exigida pelo método de Galerkin será apresentado na sequência do trabalho.

### 2.5 - Tipo De Elemento Utilizado

Depois de se ter definido o domínio  $\Omega$ , ou seja, a região a ser estudada, o próximo passo para a solução de problemas utilizando o método dos elementos finitos é discretizar este domínio  $\Omega$ .

Vários tipos de elementos podem ser utilizados, dependendo da geometria a ser discretizada e da função de interpolação utilizada para aproximar a função  $\underline{u}$  em cada elemento.

Diferentes tipos de elementos são mostrados abaixo

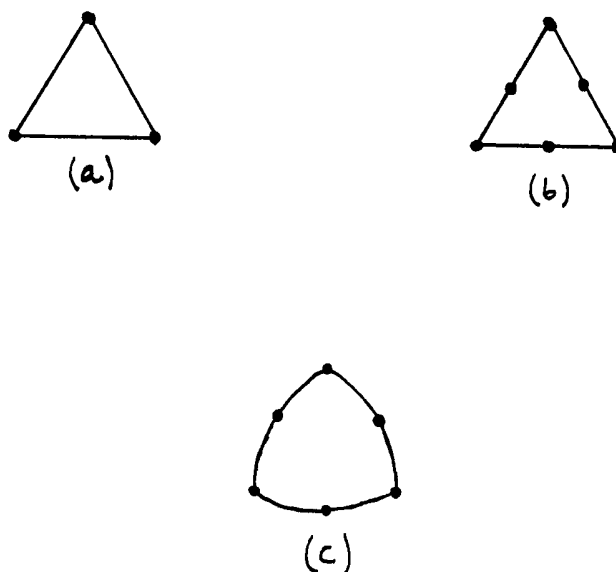


Figura 2 - Elementos triangulares planos e curvos.

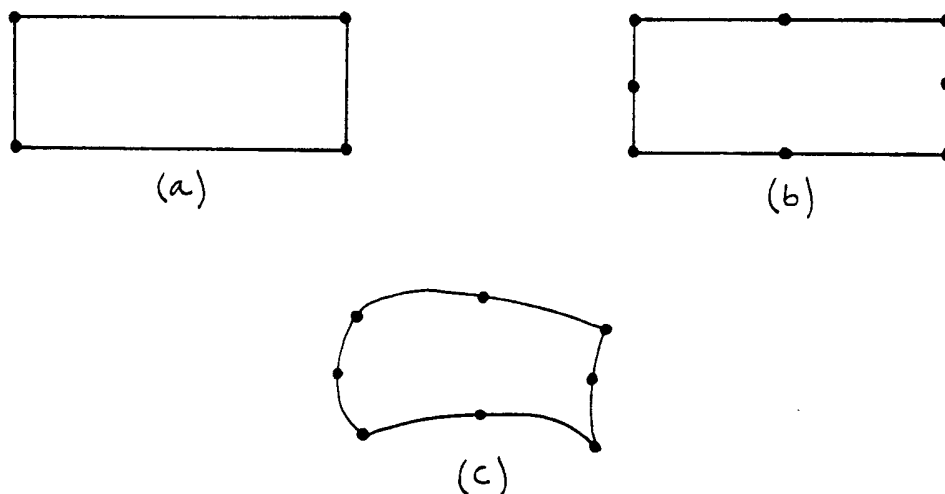
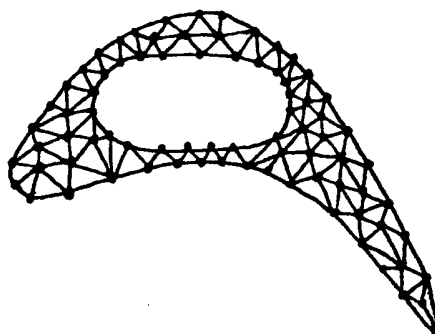


Figura 3 - Elementos quadrangulares planos e curvos.

Evidentemente que elementos pentagonais, hexagonais, etc. podem também ser utilizados. No presente trabalho escolheu-se o elemento triangular plano Figura (2a)

devido à facilidade de tratá-lo matematicamente (por um polinômio de primeira ordem) e à boa aproximação que o mesmo oferece para dividir geometrias complexas, conforme pode ser observado na Figura (4) abaixo.



**Figura 4 - Discretização de um geometria complexa por elementos triangulares planos**

Um estudo mais aprofundado sobre as técnicas de interpolação relacionada com os tipos de elementos mais comumente utilizados são descritos por CARDOSO (1985) e ZIENKIEWICZ (1977).

## 2.6 - Cálculo de Campos Eletrostáticos 2D Através do MEF

A seguir são deduzidas as equações matriciais que permitem calcular campos eletrostáticos em uma região do espaço em cujo contorno os potenciais são estabelecidos e, ou a componente normal do campo é nula. Supor a situação física da figura (5) abaixo, onde no domínio de estudo podem existir meios dielétricos de diferentes permissividades  $\epsilon$ .

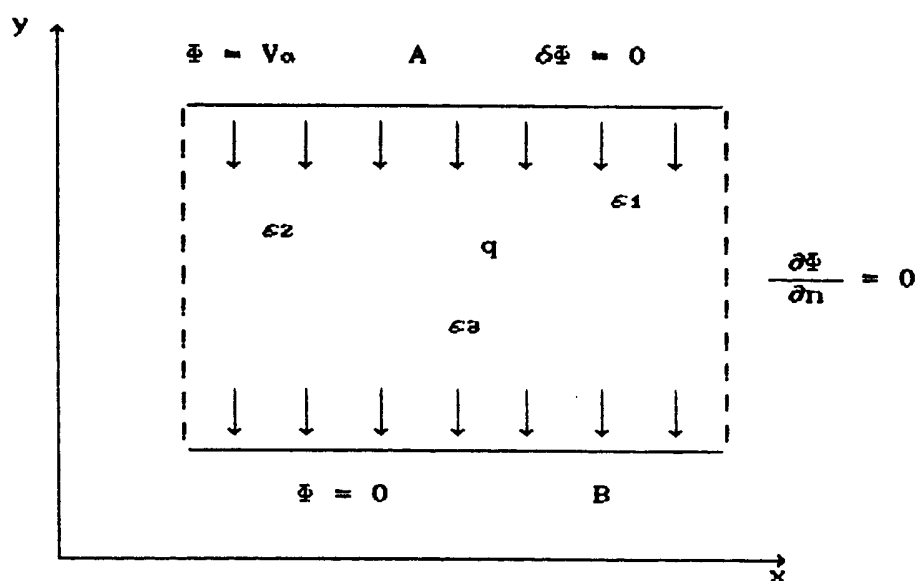


Figura 5 - Exemplo de Campo Eletrostático

Nas linhas A e B tem-se potenciais impostos, e imagina-se que exista uma carga estática  $q$  no interior do domínio, dada por sua densidade volumétrica de carga  $\rho$ .

Como  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , pode-se definir um potencial escalar elétrico  $\Phi$  (dado em volts) do qual deriva o campo elétrico  $\vec{E}$ , tal que

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} \Phi \quad (24)$$

como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (25)$$

e

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (26)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \epsilon (-\vec{\nabla} \Phi) &= \rho \end{aligned}$$

que sob forma explícita é

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \rho \quad (27)$$

Se houver só um meio no domínio, e este for homogêneo,  $\epsilon$  pode ser considerado constante. Assim

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad (28)$$

que é a equação de Poisson.

Se se considerar  $\rho = 0$ , a equação (27) transforma-se na equação de Laplace

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

As equações (27), (28) e (29) é que deverão ser solucionadas pelo MEF, onde, a obtenção de  $\Phi$  possibilita obter  $E$  através da equação (24).

A equação (29), para materiais homogêneos pode ser escrita como

$$A \left[ \Phi \right] = L \Phi = 0 \quad (30)$$

onde

$$L = - \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2}{\partial y^2} ; \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \quad (31)$$

Aplicando o princípio variacional, e observando-se que o operador Laplaciano é auto-adjunto (RIBEIRO, 1987), obtém-se

$$\begin{aligned} \Pi = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \Phi \epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] d\Omega \quad (32) \end{aligned}$$

Utilizando-se o teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial x} \epsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \epsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\Omega + \\ + \oint_{\Gamma} \Phi \epsilon \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) n_x d\Gamma \quad (33) \end{aligned}$$

onde  $n_x$  é o cosseno do ângulo entre a normal à superfície  $\Gamma$  e o eixo  $x$ . Equações semelhantes são obtidas para as derivadas com relação a  $y$  e  $z$ . A substituição destas equações em (32) resulta em

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} \epsilon \Phi \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} n_z \right] d\Gamma \quad (34) \end{aligned}$$

Assim

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon \left| \vec{\nabla} \Phi \right|^2 d\Omega - \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} \Phi \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma \quad (35)$$

como foi assumido que  $\delta \Phi$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  são nulos em  $\Gamma$ , tem-se

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon \left| \vec{\nabla} \Phi \right|^2 d\Omega \quad (36)$$

Possuindo a região  $\Omega$  simetria longitudinal, por exemplo, ao longo do eixo  $z$ , o problema tridimensional reduz-se a um problema bidimensional no plano  $xy$ , assim tem-se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\Pi}{\Delta z} = \iint_S \frac{1}{2} \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (38)$$

que corresponde à energia armazenada em  $\Omega$  por unidade de comprimento.  $S$  representa a área do domínio  $\Omega$ , transversal ao eixo  $z$ .

No caso de simetria axial, tem-se em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\Pi}{2\pi} = \iint_S \frac{1}{z} \epsilon \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] r \, dr \, dz \quad (39)$$

onde o fator  $2\pi$  é relativo à integração ao longo da coordenada  $\theta$ .

Observa-se que o funcional corresponde exatamente à energia armazenada no campo elétrico na região  $\Omega$ . Com isto, a condição do funcional ser estacionário corresponde à minimização da energia na região  $\Omega$ , como descrito no item 2.3.

Discretizando-se a região  $\Omega$  em  $m$  elementos, de área, como na figura (6) a seguir

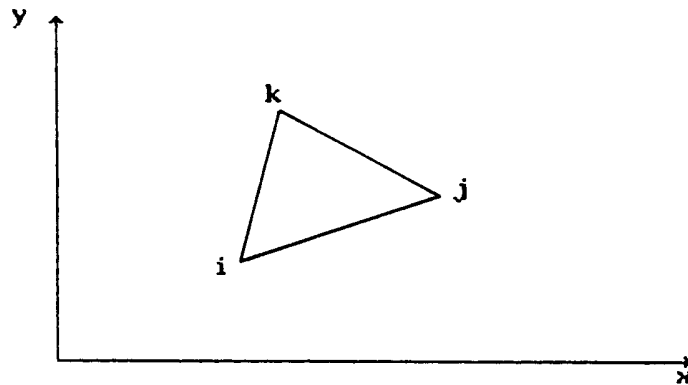


Figura 6 - Elemento utilizado para discretizar o domínio  $\Omega$

pode-se escrever

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \iint_{S_e} \frac{1}{2} \epsilon_e \left| \vec{\nabla} \Phi_e \right|^2 dx dy \quad (40)$$

A função distribuição de potencial  $\Phi$  foi aproximada no interior de cada elemento pela seguinte equação

$$\Phi_e(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (41)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são constantes. O potencial foi aproximado por um polinômio linear, completo porque contém o termo constante e todos os possíveis termos lineares em  $x$  e  $y$ .

É importante ressaltar que a função distribuição

de potencial, equação (41), utilizada para aproximar o potencial  $\Phi$  no interior de cada elemento finito, corresponde a aproximar o campo elétrico  $\vec{E}$  em cada elemento por uma constante dada por

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = E_x = \alpha z \quad (42)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = E_y = \alpha a$$

Evidentemente que um outro tipo de elemento finito mais complexo, como os descritos no item anterior, poderia ter sido utilizado para discretizar o domínio da figura (5). Teoricamente, pode-se atribuir a elementos finitos mais complexos uma melhor precisão de resultados, com menor número de elementos (BASTOS, 1989). Na prática, constata-se que os elementos de primeira ordem, quando corretamente aplicados, fornecem bons resultados, como será verificado na sequência do trabalho.

Considerando-se as condições nodais, tem-se

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \Phi_i \quad \text{em } x = X_i, y = Y_i \\
 \Phi &= \Phi_j \quad \text{em } x = X_j, y = Y_j \\
 \Phi &= \Phi_k \quad \text{em } x = X_k, y = Y_k
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Substituindo-se a equação (43) em (41) tem-se

$$\begin{aligned}
 \Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\
 \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\
 \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix}
 \tag{45}$$

Da equação (45) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix} \quad (46)$$

que resulta em

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \left[ (X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k \right] \quad (47a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[ (Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k \right] \quad (47b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} \left[ (X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k \right] \quad (47c)$$

onde

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A$$

e A é a área do triângulo.

Substituindo-se  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  em (41) e rearranjando, tem-se uma equação para  $\Phi$  em termos das três funções de forma, já que as mesmas só dependem da geometria do elemento. Assim

$$\Phi_e = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \quad (48)$$

onde

$$N_i = \frac{1}{2A} \left[ a_i + b_i x + c_i y \right]$$

$$N_j = \frac{1}{2A} \left[ a_j + b_j x + c_j y \right] \quad (49)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} \left[ a_k + b_k x + c_k y \right]$$

e

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$$

$$a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \quad (50a)$$

$$a_k = X_i Y_j - X_j Y_i$$

$$b_i = Y_j - Y_k$$

$$b_j = Y_k - Y_i \quad (50b)$$

$$b_k = Y_i - Y_j$$

$$\begin{aligned}
 c_i &= X_k - X_j \\
 c_j &= X_i - X_k \\
 c_k &= X_j - X_i
 \end{aligned}
 \tag{50c}$$

Da equação (52) pode-se escrever

$$\Phi_e(x,y) = [N] \{ \Phi \}
 \tag{51}$$

$$\text{onde } [N] = [N_i \quad N_j \quad N_k] \quad \text{e} \quad \{ \Phi \} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}$$

Substituindo-se a equação (51) na equação (38) ou (39), dependendo da simetria ser longitudinal ou axial, ter-se-á escrito o funcional  $\Pi$  em função dos potenciais dos nós da malha de elementos.

A minimização do funcional  $\Pi$  (ou da energia armazenada na região  $\Omega$ ) requer, que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\Phi}} = 0
 \tag{52}$$

onde  $\underline{\Phi}$  é o vetor de potenciais nos nós da malha de elementos.

Assim, tem-se para cada elemento

$$\frac{\partial \pi^{\circ}}{\partial \underline{\Phi}^{\circ}} = \underline{K}^{\circ} \underline{\Phi}^{\circ} \quad (53)$$

Substituindo-se a equação (53) para cada elemento na equação (52), obtém-se

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{\Phi}} = \underline{K} \underline{\Phi} = 0 \quad (54)$$

A determinação dos potenciais nos nós da malha de elementos é feita, então, através da resolução do sistema linear dado pela equação (54).

Poderia ter sido aplicado o Método de Galerkin para resolver a equação (28), entretanto, optou-se neste caso pelo Método Variacional apenas para exemplificá-lo. A potencialidade do Método de Galerkin é aplicada a seguir no Cálculo de Campos Magnetostáticos 2D através do MEF.

### 2.7 - Cálculo de Campos Magnetostáticos 2D Através do MEF

A seguir são deduzidas as equações que permitem calcular campos magnetostáticos em uma região do espaço em cujo contorno os potenciais vetores são estabelecidos. Supor a situação física da figura (7) abaixo, onde no domínio de estudo podem existir meios magnéticos de diferentes permeabilidades  $\mu$ .

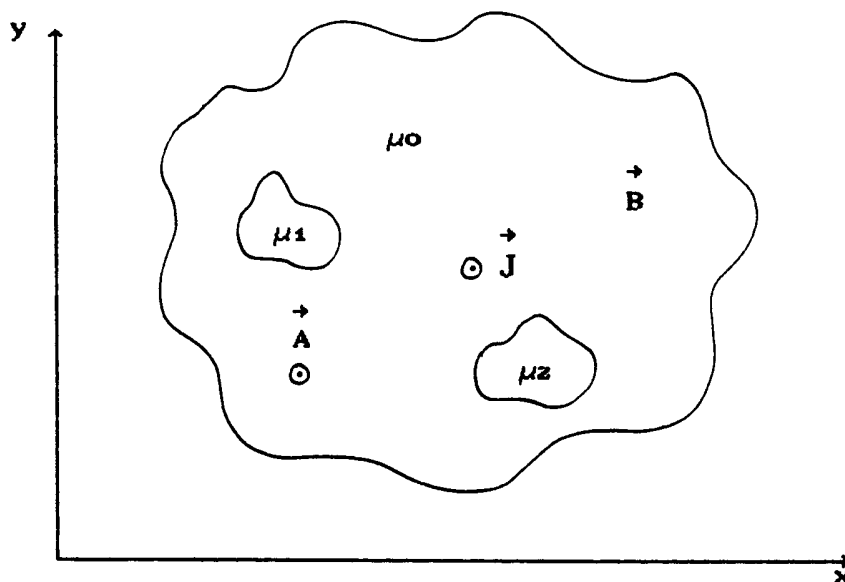


Figura 7 - Exemplo de Campo Magnetostático

Para abordar este tipo de problema utiliza-se o potencial vetor  $\vec{A}$ , que é relacionado com a indução  $\vec{B}$  através de

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (55)$$

Para problemas bidimensionais (2D), o vetor  $\vec{J}$  e o vetor  $\vec{A}$  têm apenas componentes perpendiculares ao plano  $Oxy$  mostrado na figura (7).

Chamando  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  os vetores ortogonais unitários nas direções  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  tem-se

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A \vec{k} \\ \vec{J} &= J \vec{k} \\ \vec{B} &= B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \end{aligned} \quad (56)$$

Para estabelecer a formulação relativa a este caso, utilizam-se as equações

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (57)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (58)$$

Tem-se então

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{J} \quad (59)$$

onde  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , neste caso bidimensional, é

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{j} \quad (60)$$

ou seja,  $B_x = \frac{\partial A}{\partial y}$  e  $B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$ .

Aplicando-se (60) em (59), e admitindo-se que para o caso bidimensional proposto não haja variação de grandezas na direção Oz, tem-se

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} = \vec{J} \vec{k}$$

ou seja, igualando-se os componentes na direção Oz, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} = - J \quad (61)$$

que é a equação de Poisson relativa ao potencial vetor magnético.

A equação (61) é que deve ser solucionada pelo MEF, onde a obtenção de  $\vec{A}$  possibilita obter  $\vec{B}$  através da equação (55).

A região da figura (7) é então discretizada em  $m$  elementos (e), que podem ser triângulos planos como no caso anterior.

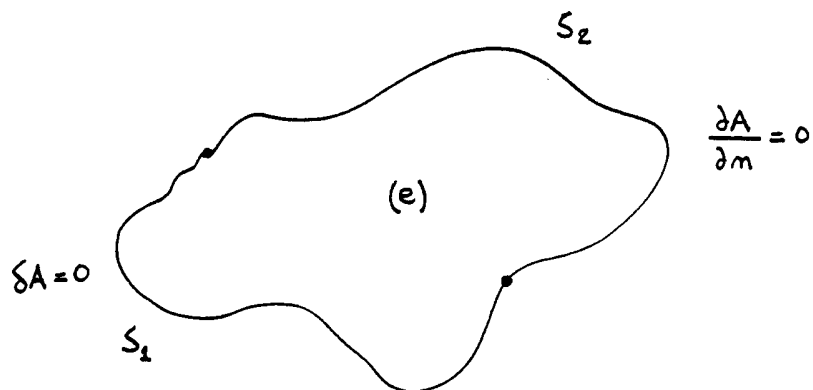


figura 8 - Condições de contorno caso magnetostático

Supõe-se que o elemento seja cercado pelas curvas  $S_1$  e  $S_2$ , sobre as quais são definidas as condições de contorno. Sobre  $S_1$  tem-se  $\delta A = 0$  e sobre  $S_2$  tem-se  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ .

Utilizando-se a aproximação

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n N_i A_i \quad (62)$$

onde  $N_i$  é a função de interpolação como a equação (41). Assim obtém-se a equação do resíduo

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + J = R \quad (63)$$

Aplicando-se a ponderação de Galerkin, que procura tornar o resíduo sobre todo o domínio  $\Omega$ , pequeno, e utilizando as equações (19) e (20) obtém-se

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + J \right] N_i \, dx \, dy = 0 \quad (64)$$

Integrando-se por partes obtém-se, para cada elemento

$$\iint_{\Omega^{\circ}} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} N_i^{(\circ)} dx dy = \oint_{S_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} N_i dy - \iint_{\Omega^{\circ}} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dy \quad (65a)$$

$$\iint_{\Omega^{\circ}} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} N_i^{(\circ)} dx dy = \oint_{S_2} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} N_i dy - \iint_{\Omega^{\circ}} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dx dy \quad (65b)$$

Observa-se que a integração por partes reduz a ordem da derivada. Substituindo-se as equações (65) na equação (64), tem-se

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega^{\circ}} \frac{1}{\mu^{\circ}} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial N_i^{\circ}}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial N_i^{\circ}}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega^{\circ}} J N_i^{\circ} dx dy \\ + \oint_{S_2} \frac{1}{\mu^{\circ}} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} n_y \right] N_i^{\circ} d\Sigma = 0 \quad (66) \end{aligned}$$

onde  $n_x$  e  $n_y$  são as componentes do vetor normal unitário à  $S_2$ . Analisando separadamente a integral de linha, tem-se

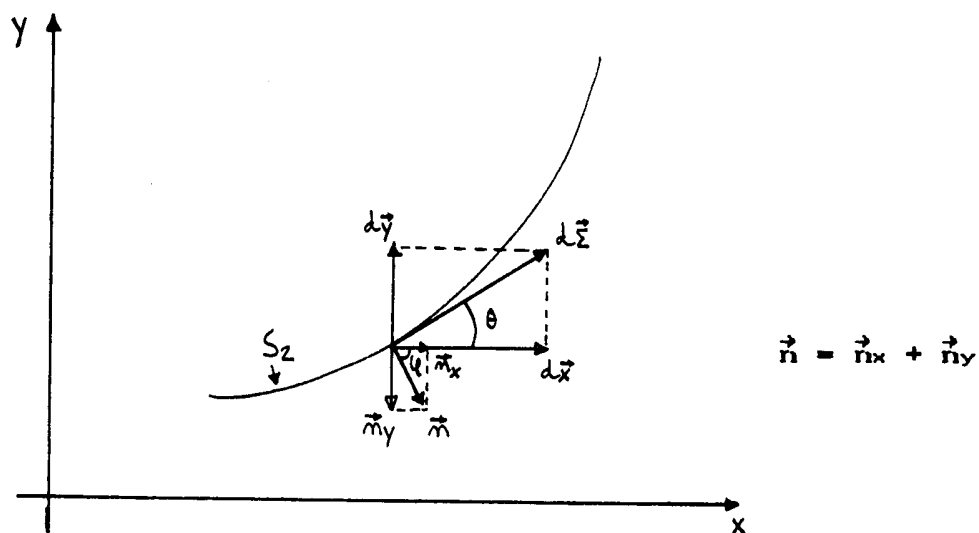


figura 9 - Componentes da integral de linha

$$dx = d\Sigma \cos \theta = d\Sigma \sin \varphi = n_y d\Sigma$$

$$dy = d\Sigma \sin \theta = d\Sigma \cos \varphi = n_x d\Sigma$$

$$\oint_{S_z} \left[ \frac{\partial A}{\partial x} n_x + \frac{\partial A}{\partial y} n_y \right] N_i d\Sigma = \oint_{S_z} N_i \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{a}_y \right] \cdot \vec{n} d\Sigma =$$

$$= \oint_{S_z} N_i \vec{\nabla} A \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (67)$$

mas a condição de contorno sobre  $S_z$  requer que

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \vec{\nabla} A \cdot \vec{n} = 0 \quad (68)$$

logo,

$$\oint_{S_z} N_i^\circ \vec{\nabla} \Lambda \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \quad (69)$$

com isso, a equação (66) se reduz a

$$- \iint_{\Omega^\circ} \frac{1}{\mu^\circ} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial N_i^\circ}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial N_i^\circ}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega^\circ} J N_i^\circ dx dy = 0 \quad (70)$$

mas

$$\Lambda^\circ = \left[ N^\circ \right] \left\{ A \right\}^\circ \quad (71)$$

então

$$\iint_{\Omega^\circ} \frac{1}{\mu^\circ} \left[ \frac{\partial N_i^\circ}{\partial x} \left[ \frac{\partial N^\circ}{\partial x} \right] \left\{ A \right\}^\circ + \frac{\partial N_i^\circ}{\partial y} \left[ \frac{\partial N^\circ}{\partial y} \right] \left\{ A \right\}^\circ \right] dx dy +$$

$$- \iint_{\Omega^\circ} J N_i^\circ dx dy = 0 \quad (72)$$

$$\iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu^e} \left[ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \left[ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right] + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \left[ \frac{\partial N^e}{\partial y} \right] \right] \{A\}^e dx dy - \iint_{\Omega^e} J N_i^e dx dy = 0 \quad (73)$$

Na forma matricial, tem-se

$$[N]^e \{A\}^e - [K']^e = 0 \quad (74)$$

onde

$$N_{ij} = \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \quad (75)$$

$$K' = \iint_{\Omega^e} J N_i dx dy$$

A determinação dos potenciais vetores  $\vec{A}$  é feita resolvendo-se as equações (74) e (75). A obtenção de  $\vec{B}$  é feita utilizando-se a equação (55).

## 2.8 - Conclusão

Procurou-se neste Capítulo fazer uma abordagem introdutória sobre o Método de Elementos Finitos.

Aplicou-se o Cálculo Variacional e o Método dos Resíduos Ponderados (Galerkin) ao MEF para resolver as equações que governam os problemas eletrostáticos e magnetostáticos bidimensionais (equações de Poisson e Laplace (28), (29) e (61)). O Apêndice A ilustra uma aplicação do MEF em problemas unidimensionais.

Utilizou-se elementos triangulares planos de 1<sup>o</sup> ordem para subdividir o domínio ( $\Omega$ ) de estudo, devido a boa aproximação que os mesmos oferecem para discretizar geometrias complexas e à facilidade de tratá-los matematicamente.

No Capítulo seguinte será destacada a importância da Geração Automática da Malha Inicial de Elementos. Será demonstrada a necessidade de se obter triângulos o mais próximo possível do equilátero para se alcançar resultados satisfatórios na utilização do MEF. Serão apresentadas as técnicas de Lindholm e Delaunay.

## CAPÍTULO - 3

### A GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA MALHA INICIAL DE ELEMENTOS

#### 3.1 - Introdução

Uma das grandes dificuldades de utilização do MEF está relacionada com a Geração Automática da Malha Inicial de Elementos e com o desenvolvimento de técnicas eficientes de distribuição dos elementos finitos em todo o domínio.

A geração da malha inicial de elementos consiste basicamente na primeira discretização do domínio em "elementos finitos". Essa primeira discretização é feita a partir das condições fornecidas na delimitação do domínio ( $\Omega$ ). Na maioria dos casos, a função em estudo  $u$  (que pode ser o potencial elétrico  $\Phi$ , ou o potencial vetor magnético  $\vec{A}$ ) é conhecida apenas nos limites do domínio. Em consequência forma-se a malha inicial sem "nós" interiores, ou seja, somente com os "nós" fornecidos na delimitação da região de estudo.

O grande desafio dos pesquisadores nessa área,

resume-se no desenvolvimento de técnicas simples de geração automática da malha inicial de elementos para possibilitar o desenvolvimento de "programas" eficientes. Além de serem simples, essas técnicas devem implicar em uma malha que contenha triângulos, o mais próximo possível dos equiláteros, para que os erros envolvidos no cálculo sejam minimizados.

Particularmente nos últimos quinze anos, inúmeras técnicas de geração automática da malha inicial de elementos foram desenvolvidas (BASTOS, 1989), (CARDOSO et alii, 1989), (SALDANHA & RIBEIRO, 1986), (SABONNADIÈRE & COULOMB, 1986), (SILVESTER, 1985), (FREEMAN, 1985), (SHEPHARD, 1985), (CAVENDISH et alii, 1985), (GENDES et alii, 1983) e (LINDHOLM, 1983), objetivando superar o desafio encontrado.

São apresentadas neste Capítulo duas técnicas: (LINDHOLM, 1983) e Delaunay (GENDES et alii, 1983), (CAVENDISH et alii, 1985). Especial atenção é dedicada à técnica de Delaunay, utilizada mundialmente nos "programas" desenvolvidos.

### 3.2 - O Método de Lindholm

A técnica de geração da malha inicial de elementos

sugerida por Lindholm (LINDHOLM, 1983) é de filosofia bastante simples.

A malha de elementos inicial é obtida através da triangulação de cada uma das regiões que compõem a geometria a ser estudada.

A triangulação de cada região é feita simplesmente unindo-se os pontos consecutivos dos conjuntos de curvas que definem cada região.

Entretanto, haverá várias configurações de malhas possíveis para a mesma região se esta união for aleatória. A melhor configuração, porém, é aquela em que os triângulos da malha são o mais próximo possível de serem equiláteros (LINDHOLM, 1983).

### 3.2.1 - Especificação de Geometrias

A especificação de geometrias no caso bi-dimensional, portanto  $\mathbb{R}^2$ , é feita subdividindo-se o domínio  $\Omega$  a ser estudado em subregiões convexas, nas quais não seja possível construir nenhum triângulo "indesejável".

Considerar a região em  $L$  a seguir

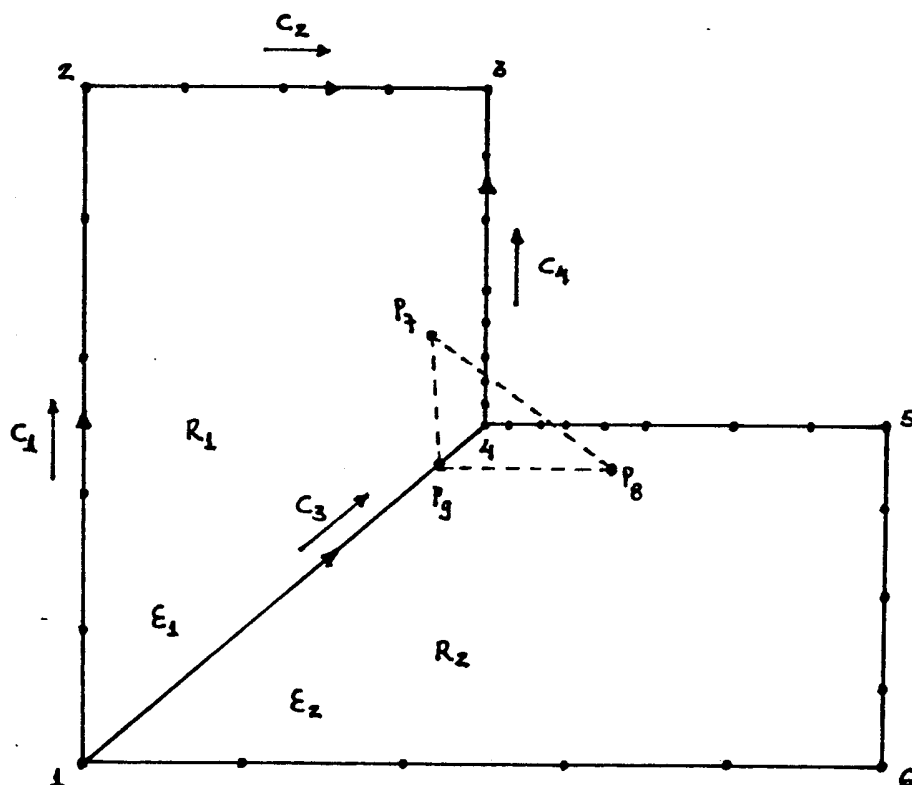


Figura 10- Nós, curvas e regiões utilizadas na especificação da região em L.

A especificação da região acima em L consiste, basicamente, em dividir a geometria em duas sub-regiões  $R_1$  e  $R_2$ , que são especificadas por dois conjuntos de curvas, denominados superiores e inferiores, sendo que os dois conjuntos possuem os pontos inicial e final comuns. As curvas são formadas por um conjunto de pontos ordenados (nós), o que lhes confere um sentido (RIBEIRO, 1987).

Para a região em L da Figura (10), por exemplo, a região 1,  $R_1$ , é especificada da seguinte forma

curvas superiores :  $c_1$  e  $c_2$

curvas inferiores :  $c_3$  e  $c_4$

permissividade :  $\epsilon_1$

É importante observar que dessa maneira fica impossível criar triângulos do tipo  $P_7$ ,  $P_8$ ,  $P_9$ .

### 3.2.2 - A Geração da Malha Inicial de Elementos

A triangulação de cada subregião criada é feita simplesmente unindo-se os pontos consecutivos dos conjuntos de curvas superiores e inferiores.

Como existirão várias configurações de malhas possíveis para a mesma subregião se esta união for arbitrária, o que se procura é construir as malhas com a melhor configuração, ou seja, aquelas em que os seus triângulos sejam o mais próximo possível dos equiláteros (LINDHOLM, 1983).

Faz-se necessário, portanto, quantificar "o mais próximo possível de ser equilátero". A noção de ser equilátero é baseado no fator de qualidade  $q$  de um triângulo, definido como a razão entre o diâmetro do círculo inserido e o raio do círculo circunscrito ao mesmo. Este

fator varia de 0, triângulo degenerado em um conjunto de pontos colineares, a 1, triângulo equilátero (LINDHOLM, 1983).

Considerar um triângulo formado por lados de comprimento  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O fator de qualidade do mesmo é dado por

$$q = \frac{8 (s - a) (s - b) (s - c)}{a b c} \quad (76)$$

onde  $s$  é o semi-perímetro do triângulo.

Pares de triângulos adjacentes formarão uma configuração ótima quando o fator de qualidade  $q_{12}$  desta configuração for o maior possível. Este fator é definido por

$$q_{12} = 2 \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right)^{-1} \quad (77)$$

onde  $q_1$  e  $q_2$  são os fatores de qualidade de cada um dos triângulos. O fator 2 foi introduzido para que  $q_{12}$  tenha a mesma faixa de variação do fator de qualidade de um triângulo (LINDHOLM,1983).

A Figura (11) abaixo apresenta vários triângulos com os seus respectivos fatores de qualidade. Também são mostrados os fatores de qualidade de pares de triângulos adjacentes, onde a linha tracejada corresponde ao fator de qualidade entre parênteses.

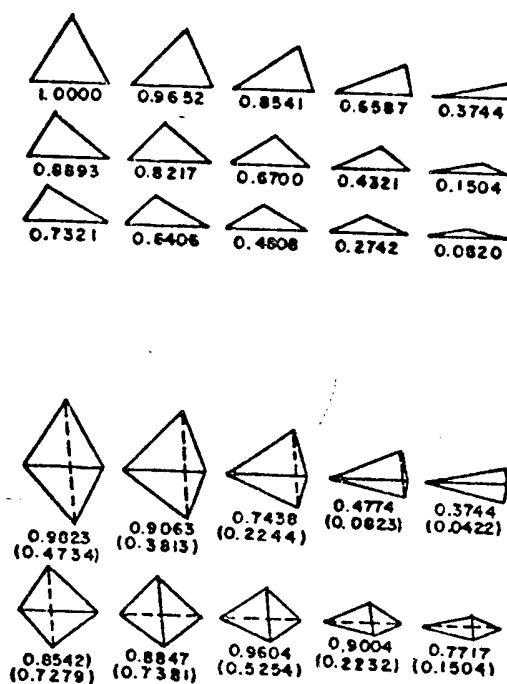


Figura 11 - Fatores de qualidade de triângulos e de pares de triângulos (LINDHOLM, 1983).

Depois de definir o fator de qualidade dos triângulos, pode-se proceder à triangulação de cada subregião a partir de um de seus dois pontos externos, de

maneira a se obter o máximo fator de qualidade para os pares de triângulos consecutivos, como é mostrado a seguir.

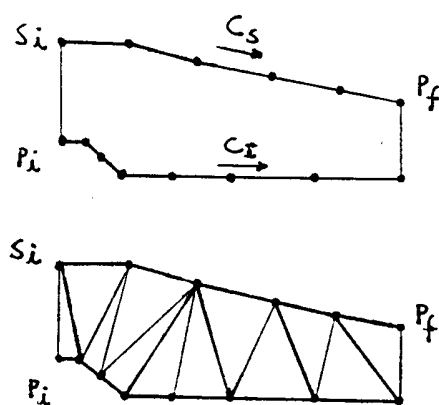


Figura 12 - Malha de elementos com triangulação através da maximização do fator de qualidade  $q$  de pares de triângulos, começando pelo ponto  $P_i$ .

### 3.2.2.1 - A Necessidade de se Construir Triângulos Equiláteros

Supor o triângulo escaleno  $i, j, k$  abaixo, com os potenciais  $\Phi_i, \Phi_j$  e  $\Phi_k$  conhecidos e que se deseja calcular o potencial no ponto  $A$

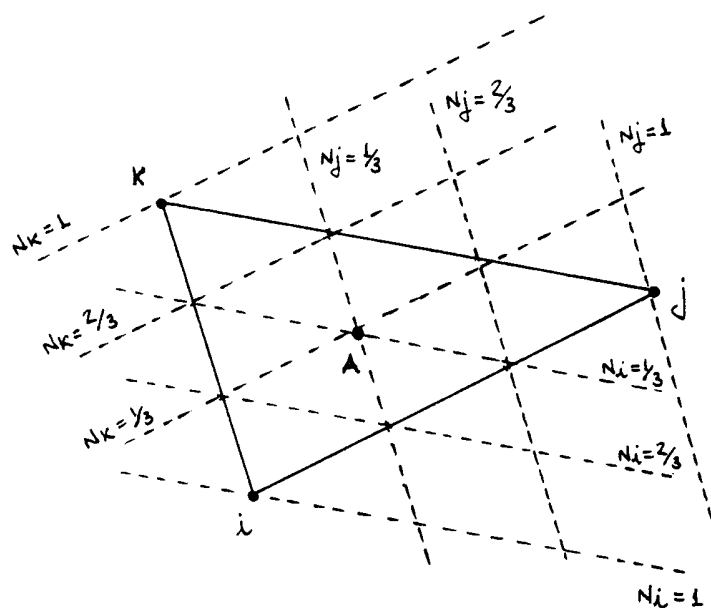


Figura 13 - Triângulo Escaleno

Utilizando-se as condições nodais e a equação (48) que estabelece

$$\Phi_e(x,y) = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$$

obtém-se para o ponto A

$$\Phi_A (x_A, y_A) = \frac{1}{3} N_i \Phi_i + \frac{1}{3} N_j \Phi_j + \frac{1}{3} N_k \Phi_k \quad (78)$$

$$\Phi_A (x_A, y_A) = \frac{1}{3} \left[ N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \right] \quad (79)$$

Observa-se a partir das equações (78) e (79) que independentemente dos valores dos potenciais  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$  e  $\Phi_k$  os nós i, j e k contribuem igualmente para o cálculo do potencial no ponto A.

Como admitiu-se que  $d_{iA} \neq d_{jA} \neq d_{kA}$  (triângulo escaleno) conclui-se que a equação (79) seria verdadeira se, e somente se, o triângulo i, j, k fosse equilátero; ou seja, o cálculo do potencial do ponto A teria uma contribuição igual dos potenciais dos nós i, j e k se, e somente se, estivesse à uma distância igual dos nós i, j e k.

Assim, conclui-se finalmente que os triângulos equiláteros fornecem uma melhor aproximação para a equação (48) na utilização do MEF. Uma demonstração matemática mais rigorosa é dada por (ODEN & REDDY, 1976).

### 3.2.3 - Malhas Iniciais de Elementos Obtidas pelo Método de Lindholm

A seguir é mostrada a malha inicial de elementos, obtida para a região em L, figura (10), através da simulação feita no pacote computacional FEM (RIBEIRO, 1987).

Seja a figura (14) abaixo, a região em L a ser triangulada. É importante ressaltar que a mesma não possui nenhum nó interior, ou seja, é totalmente descrita através dos seus nós do contorno.

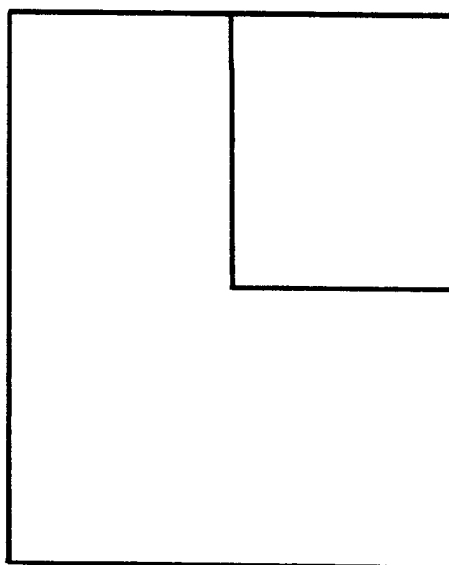


Figura 14 - Região em L a ser Triangulada pelo Método de Lindholm

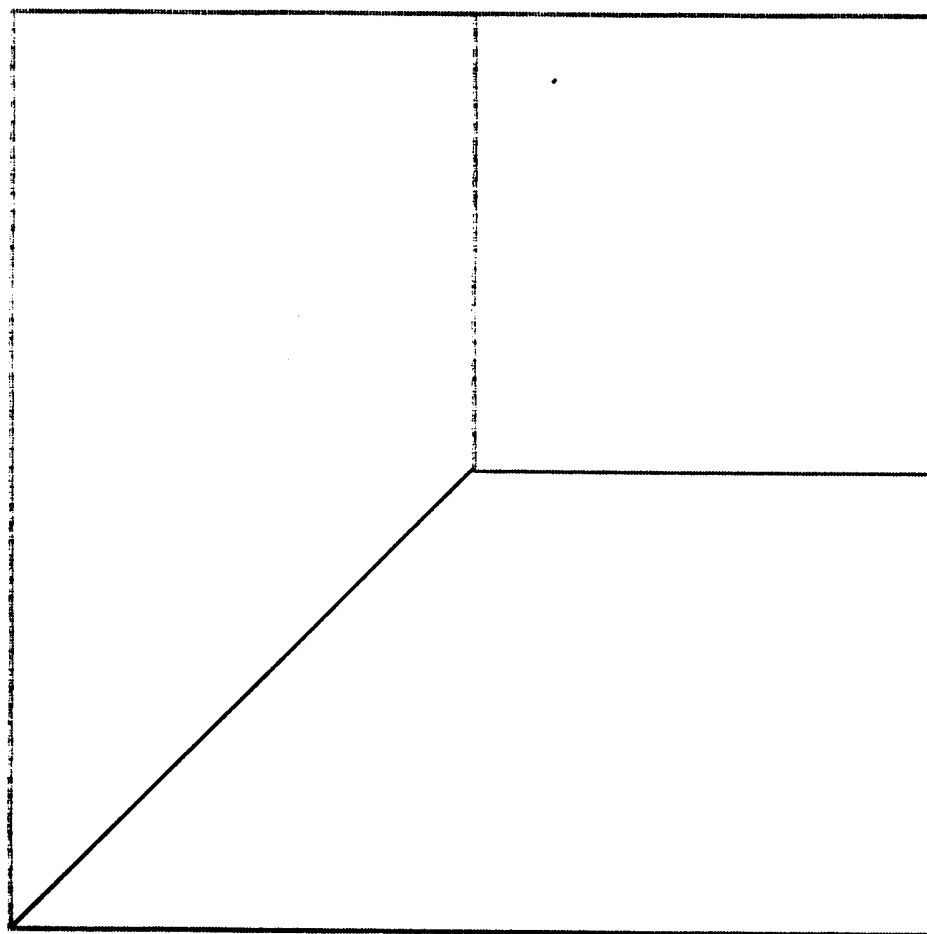


Figura 15 - Definição da subregiões  $R_1$  e  $R_2$

Inicialmente foi feita a subdivisão da região em duas subregiões  $R_1$  e  $R_2$ , figura (15). Aplicando-se o método de Lindholm obtém-se

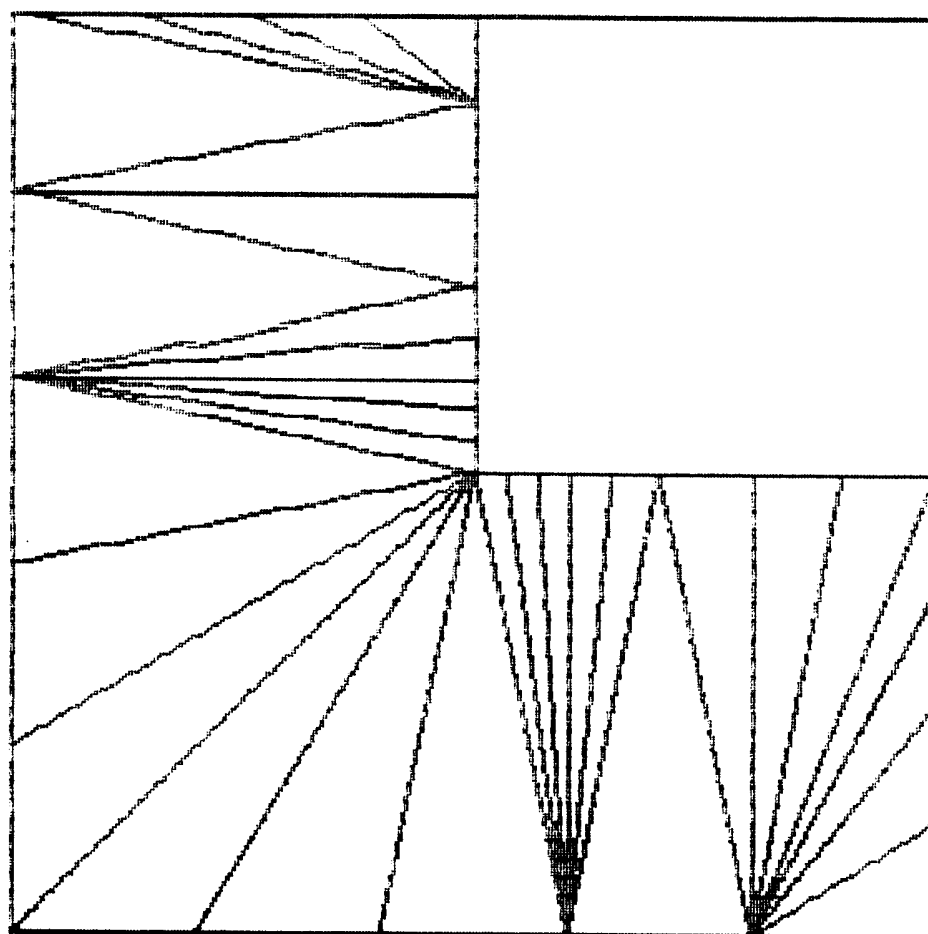
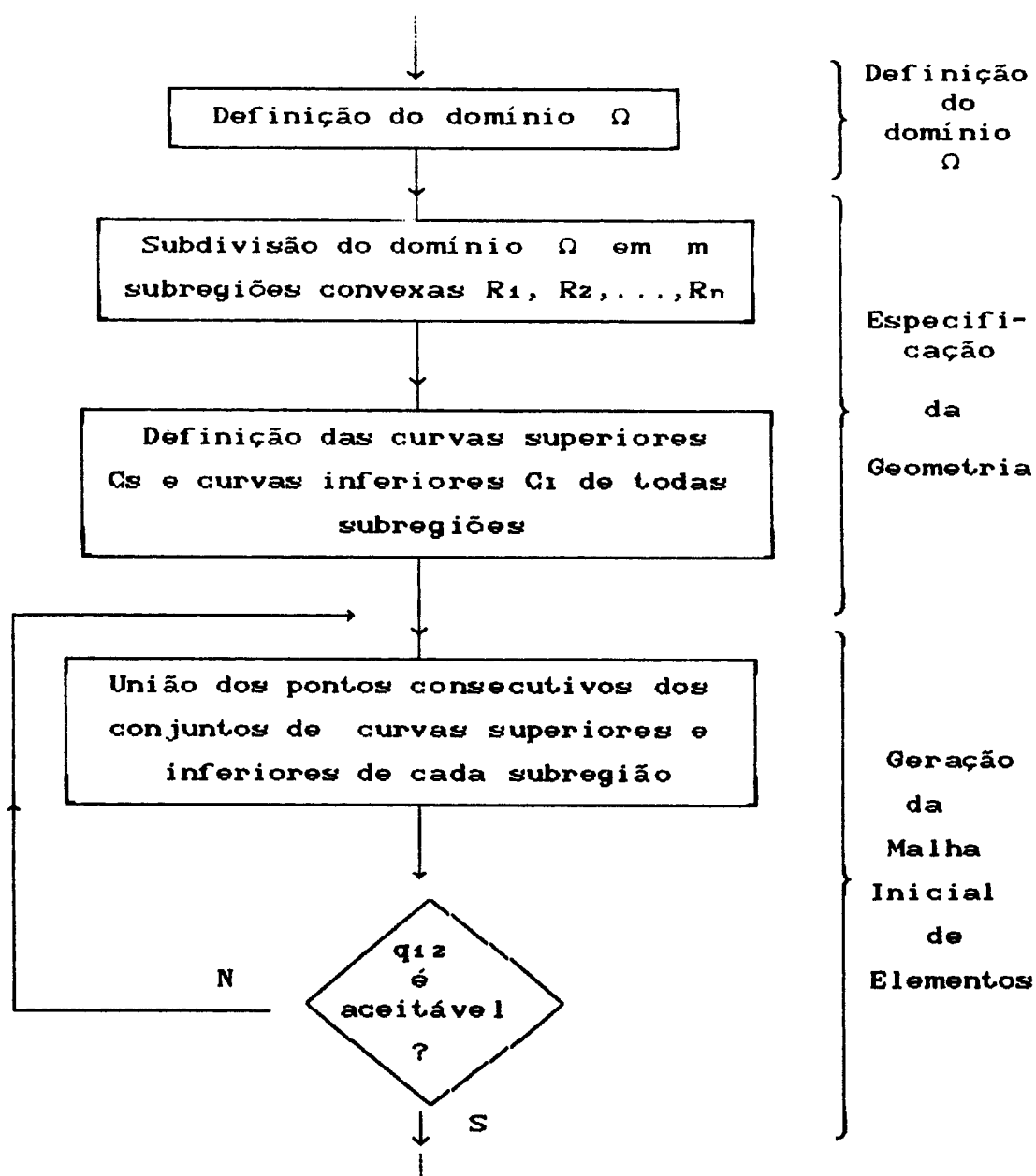


Figura 16 - Malha Inicial de Elementos Obtida para a Região em L pelo Método de Lindholm

## 3.2.4 - Fluxograma do Método de Lindholm



### 3.3 - O Método de Triangulação de Delaunay

Embora um número arbitrário de pontos de um plano possa ser triangulado de diferentes formas, em 1934 o matemático Delaunay provou que para qualquer conjunto de pontos, existe uma triangulação única que maximiza a soma dos menores ângulos da malha. Em outras palavras, dado um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^2$ , a triangulação de Delaunay provê um conjunto de triângulos o mais próximo possível do equilátero (CENDES et alii, 1983).

O método envolve dois processos distintos. No primeiro, os "nós" são inseridos dentro e sobre o contorno de cada subregião do domínio a ser discretizado. No segundo, os "nós" são automaticamente triangulados, formando uma malha de elementos bem proporcionados, isto é, com fator de qualidade próximo de 1 (um).

#### 3.3.1 - A Construção do Polígono de Voronoi

O método de triangulação de Delaunay faz uso da "Dirichlet Tessellation", construção geométrica definida pelos matemáticos para provar teoremas.

Considera-se o caso bi-dimensional. Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , pontos discretos no plano real e a coleção  $V_i, 1 \leq i \leq N$ , onde :

$$V_i = \left\{ x : \|x - P_i\| < \|x - P_j\| \forall j \neq i \right\} \quad (80)$$

onde  $\|\cdot\|$  é a distância Euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ .  $V_i$  representa a região do plano cujos pontos estão mais perto do "nó"  $P_i$  que de qualquer outro "nó". Portanto,  $V_i$  é um polígono convexo denominado Polígono de Voronoi. Os contornos desses polígonos são perpendiculares aos segmentos que unem os pontos  $P_i$  e, interceptam cada segmento no respectivo ponto médio. Esta coleção de polígonos de Voronoi é chamada de "Dirichlet Tessellation".

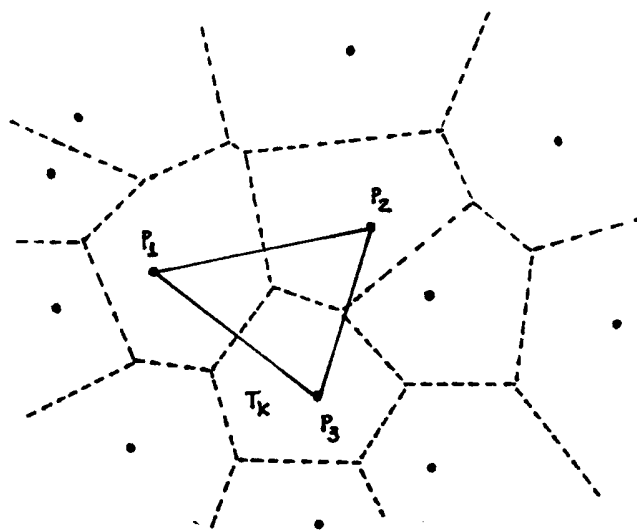


Figura 17 - Polígonos de Voronoi

### 3.3.2 - A Formação dos Triângulos de Delaunay

Os triângulos de Delaunay são construídos a partir dos polígonos de Voronoi. Da figura (17) pode-se verificar que o vértice de um polígono de Voronoi é sempre compartilhado com dois outros polígonos vizinhos. Para construir os triângulos de Delaunay basta conectar os três pontos inseridos, pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  da figura (18), associados aos respectivos polígonos adjacentes. O conjunto de triângulos formados dessa forma é chamado de Triangulação de Delaunay.

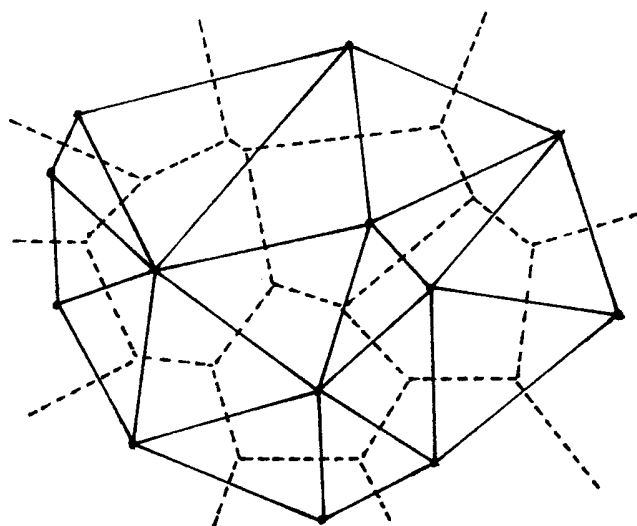


Figura 18 - Triângulos de Delaunay

### 3.3.3 - A Introdução de Novos "NÓS"

Para se inserir novos pontos nodais à malha, deve-se fazê-lo um de cada vez. Um bom procedimento para se introduzir novos "nós" à malha foi proposto por Watson. Sabe-se que três pontos não colineares definem tanto um triângulo, quanto um círculo circunscrito ao triângulo. Para o caso bidimensional, Watson observou que três pontos nodais formarão um triângulo de Delaunay se, e somente se, o círculo definido por estes três pontos nodais não contiver, em seu interior, nenhum outro ponto nodal da malha.

Inserido o novo ponto nodal, deve-se observar em quais círculos, definidos acima, ele está contido.

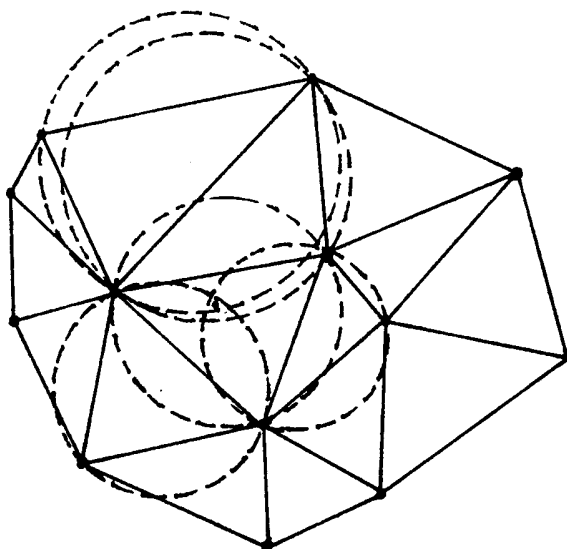


Figura 19 - Localização do Novo "Nó" a ser Inserido

Feito isso, retiram-se os lados comuns a dois triângulos com círculo circunscrito que contenham o nó introduzido. Assim, constroi-se o polígono de inserção.

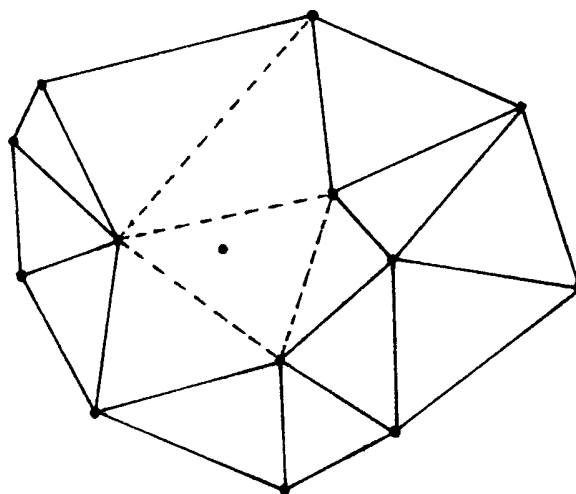


Figura 20 - Polígono de inserção

Deve-se agora tomar esse novo "nó" como ponto nodal e ligá-lo aos vértices de todos os triângulos, dos

quais foram retirados um dos lados e, com isso, ter-se-á construído novos triângulos de Delaunay.

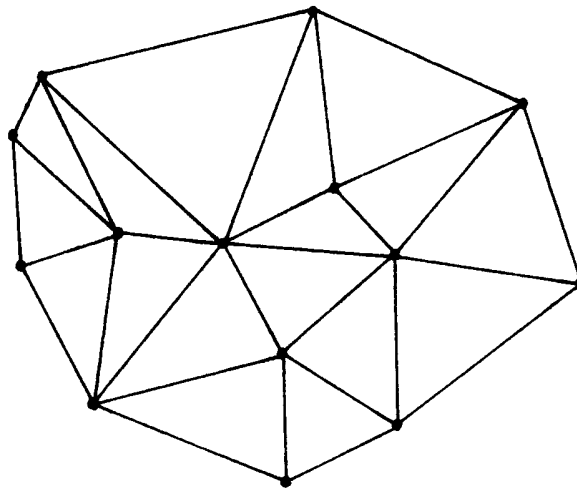


Figura 21 - Novos Triângulos de Delaunay

Esse processo pode ser repetido para novos "nós", desde que se mantenha a afirmação de Watson : que três pontos nodais formarão um triângulo de Delaunay se, e

somente se, o círculo definido por esses três pontos não contiver nenhum outro ponto nodal da malha (CAVENDISH et alii, 1985).

### 3.3.4 - A Triangulação de Delaunay Passo a Passo

Apresenta-se a seguir, as construções geométricas necessárias para se chegar à Triangulação de Delaunay.

Considera-se o conjunto de pontos abaixo como sendo os pontos a serem triangulados



Figura 22 - Conjunto de Pontos a serem Triangulados

A partir desses pontos, constroi-se o polígono de Voronoi, figuras (23) e (24). Depois constroi-se os triângulos de Delaunay, figuras (25) e (26).

Observa-se na figura (24) que nenhum dos seis pontos ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$ ) está inscrito em nenhum dos círculos formados, condição "si ne qua non". Observa-se também que os vértices do polígono de Voronoi constituem os centros dos respectivos círculos.

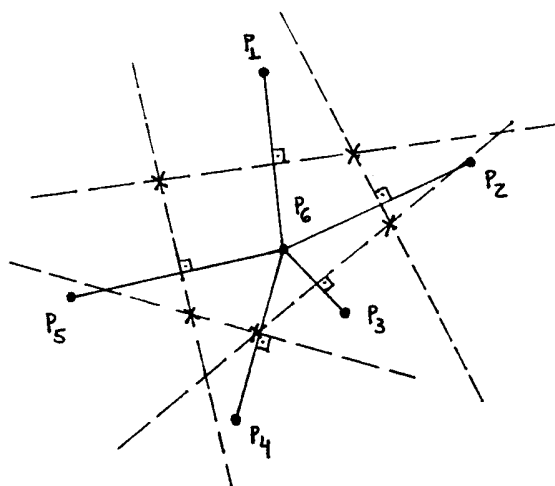


Figura 23 - Construção do Polígono de Voronoi

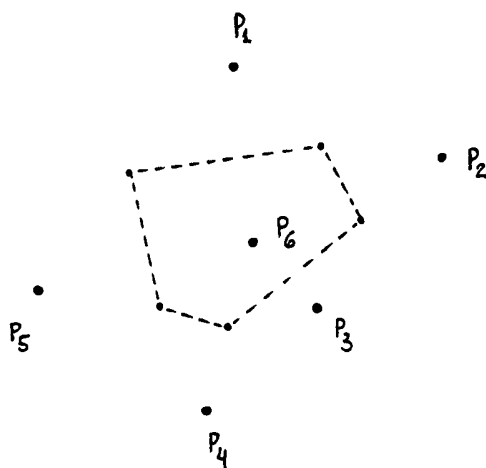


Figura 24 - Polígono de Voronoi

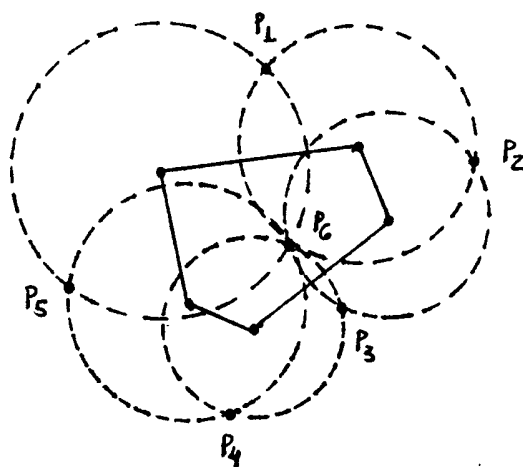


Figura 25 - Construção dos Triângulos de Delaunay

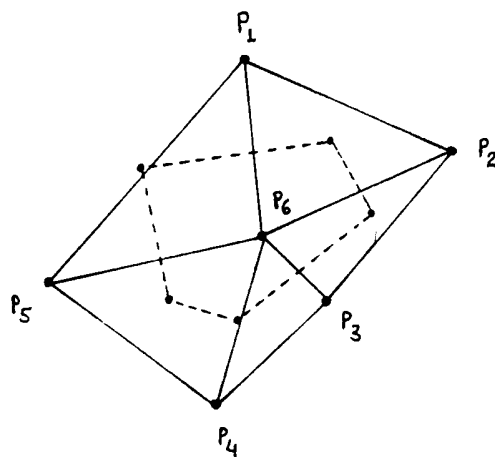


Figura 26 - Triângulos de Delaunay Formados

3.3.5 - Malhas Iniciais de Elementos Obtidas com o Método de Delaunay

A seguir é mostrada a malha de elementos inicial obtida para a região em L, figura (10), através da simulação feita no pacote computacional FEM-2D.

Seja a figura (27) a seguir a região em L a ser triangulada. Como no caso anterior, figura (14), a mesma não possui nenhum nó interior.

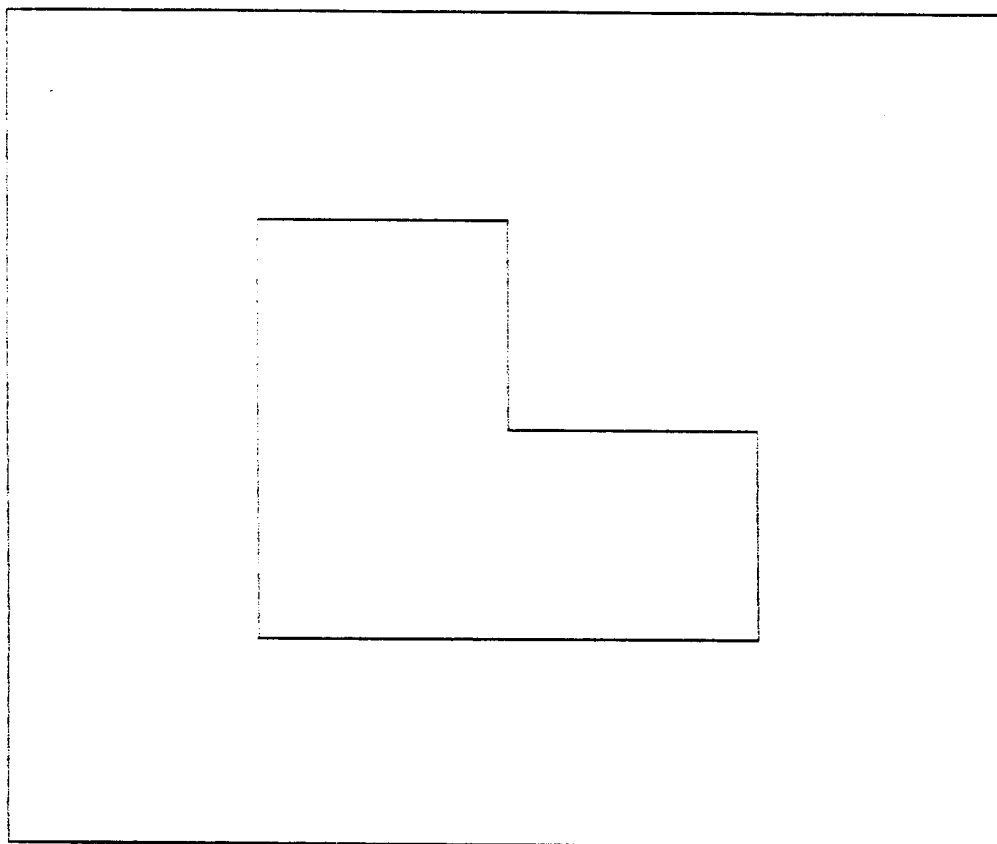


Figura 27 - Região em L a ser Triangulada pelo Método de  
Delaunay

Aplicando-se o método de Delaunay à região em L  
da figura (27) obtém-se

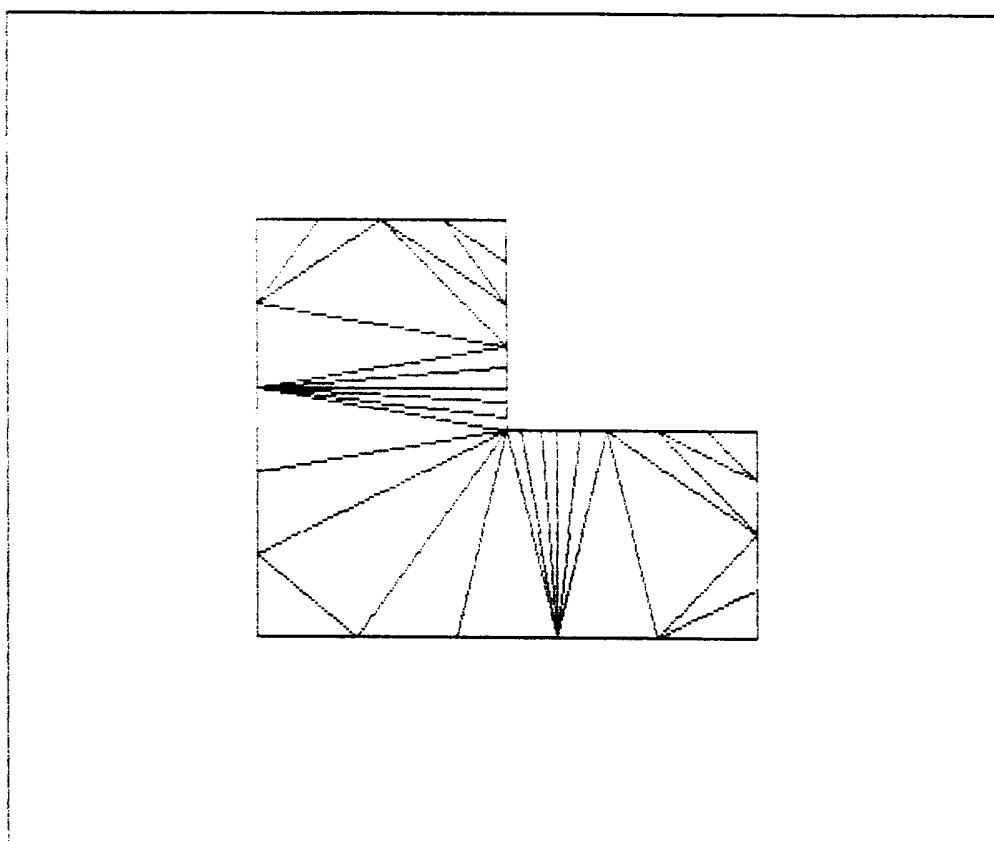
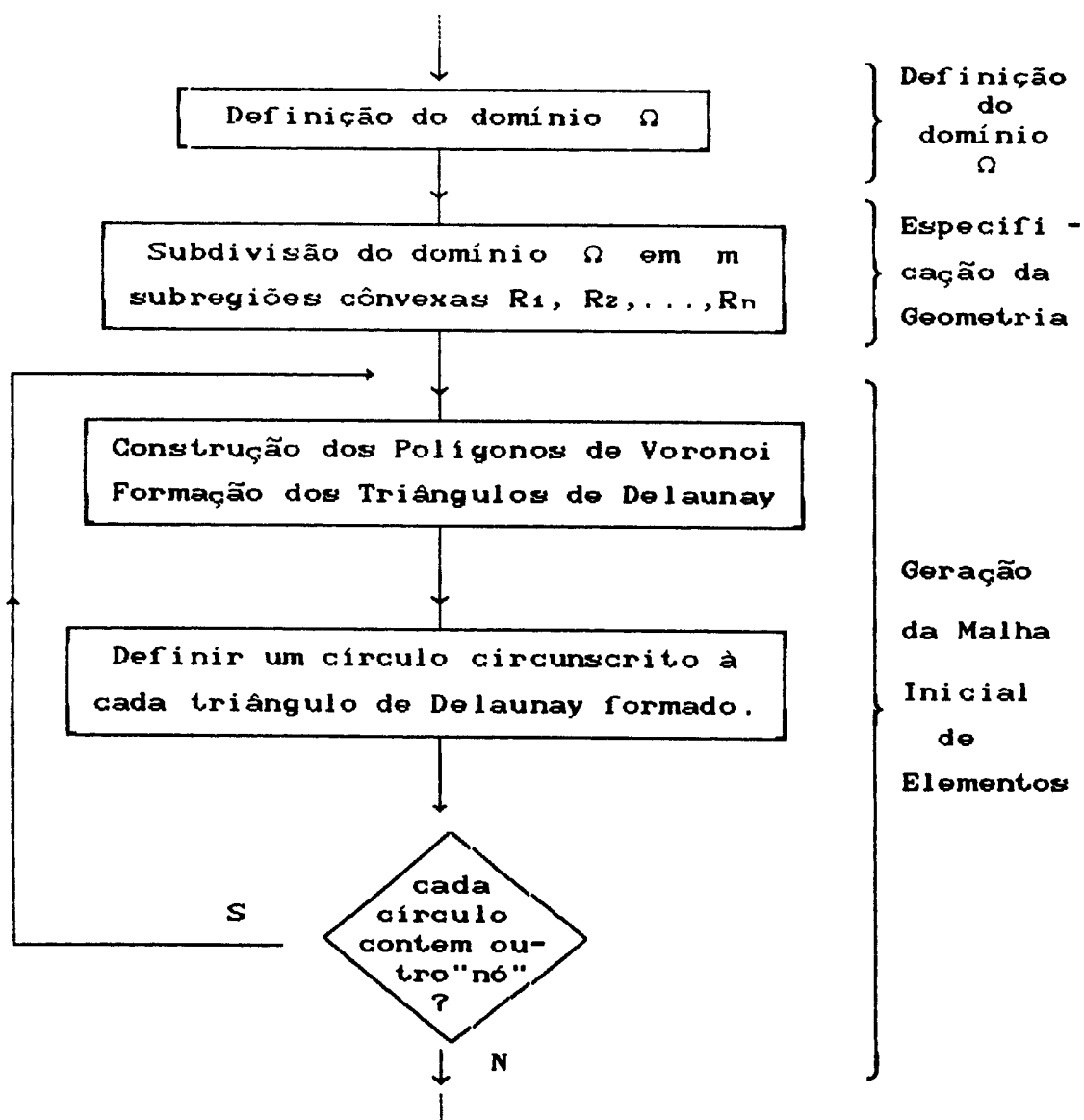


Figura 28 - Malha inicial de elementos obtida para a fig.(27) pelo método de Delaunay

## 3.3.6 - Fluxograma do Método de Delaunay



### 3.4 - Conclusão

Destacou-se neste Capítulo a importância da Geração Automática da Malha Inicial de Elementos. Demonstrou-se que os triângulos equiláteros fornecem uma melhor aproximação na utilização do MEF. Apresentou-se as técnicas de Lindholm e Delaunay, sendo esta última mundialmente utilizada nos pacotes computacionais desenvolvidos.

Aplicou-se as técnicas de Lindholm e Delaunay para gerar a malha inicial de uma região em L, a partir dos "nós" especificados apenas no contorno da geometria. Obteve-se resultados similares pelos dois métodos, figuras (16) e (28). Observa-se nas figuras citadas que o conjunto dos triângulos gerados possui um baixo fator de qualidade, com isso conclui-se pela necessidade de refinar a malha inicial. Este refino visa introduzir "nós" no interior do domínio, de forma a construir novos triângulos o mais próximo possível do equilátero.

O estudo do Refino da Malha de Elementos será feito no Capítulo seguinte.

## CAPÍTULO - 4

### O REFINO DA MALHA DE ELEMENTOS

#### 4.1 - Introdução

O estudo da melhoria da Malha Inicial está diretamente relacionado com a Geração Automática da Malha Inicial de Elementos.

Nesta etapa subsequente, o grande desafio, resume-se em subdividir e distribuir adequadamente os triângulos, "elementos finitos", obtidos na malha inicial. A subdivisão deve ser feita de maneira a formar novos triângulos com um bom fator de qualidade, e de tal forma que os menores triângulos fiquem concentrados onde houver uma maior variação da função em estudo  $u$ .

Inúmeras técnicas de melhoria, associadas à Geração Automática da Malha Inicial de Elementos, foram desenvolvidas (BASTOS, 1989), (CARDOSO, 1989), (SALDANHA & RIBEIRO, 1986), (COULOMB, 1989), (ZHOU et alii, 1989), (FUJITA et alii, 1988), (HAHN et alii, 1988), (YIXIN et alii, 1988), (PINCHUK & SILVESTER, 1985), (BRYANT, 1985),

objetivando superar o novo desafio encontrado. Essas técnicas de Refino podem ser classificadas em dois grupos, um primeiro no qual utiliza-se apenas critérios geométricos para subdividir e distribuir os novos triângulos, e um segundo grupo no qual utiliza-se alguma estimativa de erro sobre a função  $u$  em cada triângulo da malha inicial para subdividir e distribuir os novos triângulos.

São apresentadas neste Capítulo, duas técnicas de Refino. Inicialmente são consideradas as malhas geradas pelas técnicas descritas no Capítulo anterior, sem "nós" interiores. A partir das malhas iniciais são estudadas as técnicas da "Diferença de Potencial", (RIBEIRO, 1987), e de Bryant, (BRYANT, 1985).

#### 4.2 - O Método da Diferença de Potencial

A técnica da diferença de potencial para refino da malha de elementos é muito simples.

Ela consiste, basicamente, em impor uma diferença de potencial máxima permissível entre dois "nós" adjacentes da malha.

Considerar a figura (29) abaixo

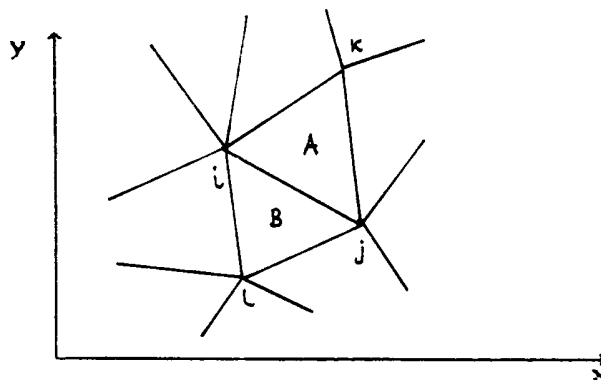


Figura 29 - A e B são dois Triângulos de uma Malha  
i, j, k e l são os "nós" que formam  
estes triângulos

Se

$$|\Phi_i - \Phi_j| > \lambda \quad (81)$$

então os triângulos A e B deverão ser divididos em quatro novos triângulos figura (30), onde  $\lambda$  é um valor especificado a priori (RIBEIRO, 1987).

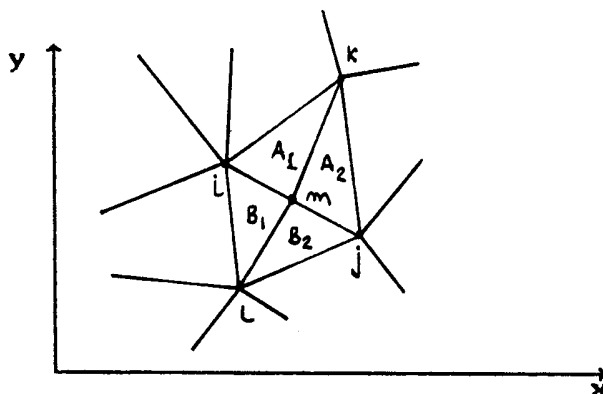


Figura 30 - Divisão dos Triângulos A e B com a geração do  
"nó" m

É importante ressaltar que embora a técnica da diferença de potencial seja simples para introduzir novos "nós" à malha inicial, a mesma não leva em consideração o fator de qualidade  $q_{12}$  na geração dos novos triângulos  $A_1$  e  $A_2$ , por exemplo. Dessa forma, pode-se formar pares de triângulos adjacentes com um baixo fator de qualidade de maneira a comprometer o resultado final.

#### 4.2.1 - Malhas de Elementos Refinadas pelo Método da Diferença de Potencial

A seguir, são mostradas as malhas finais de elementos, referentes à figura (16), obtidas através do método de otimização da Diferença de Potencial, em simulação feita com o pacote computacional FEM (RIBEIRO, 1987).

Foi considerado um potencial  $\Phi = 100V$  nos cantos internos da região em L e  $\Phi = 0$  nos cantos externos.

A partir da figura (16), malha inicial, são obtidas as configurações abaixo, admitindo-se  $\lambda = 1V$ .

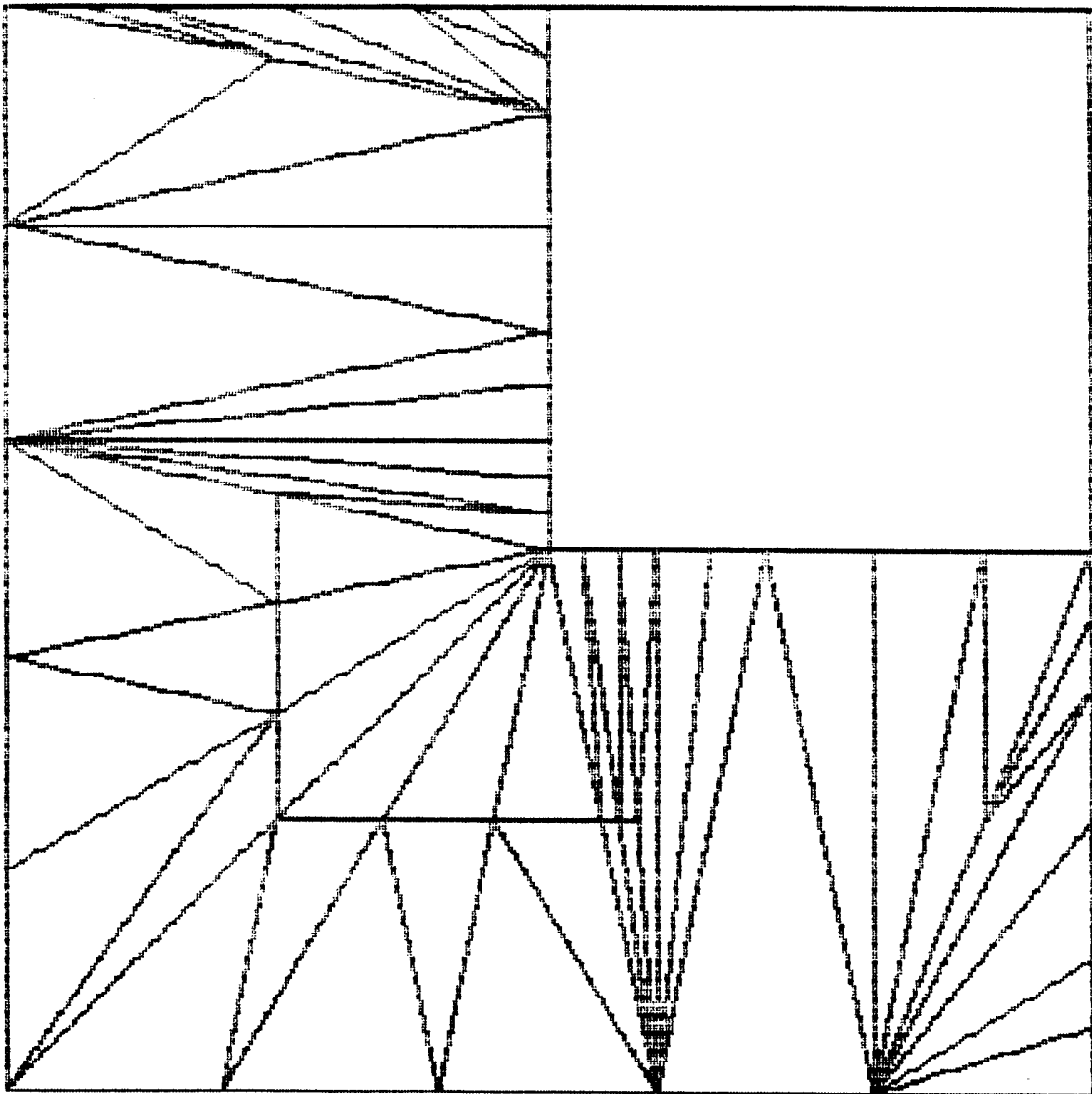


Figura 31 - Malha final, com 50 nós, referente à fig.(16)

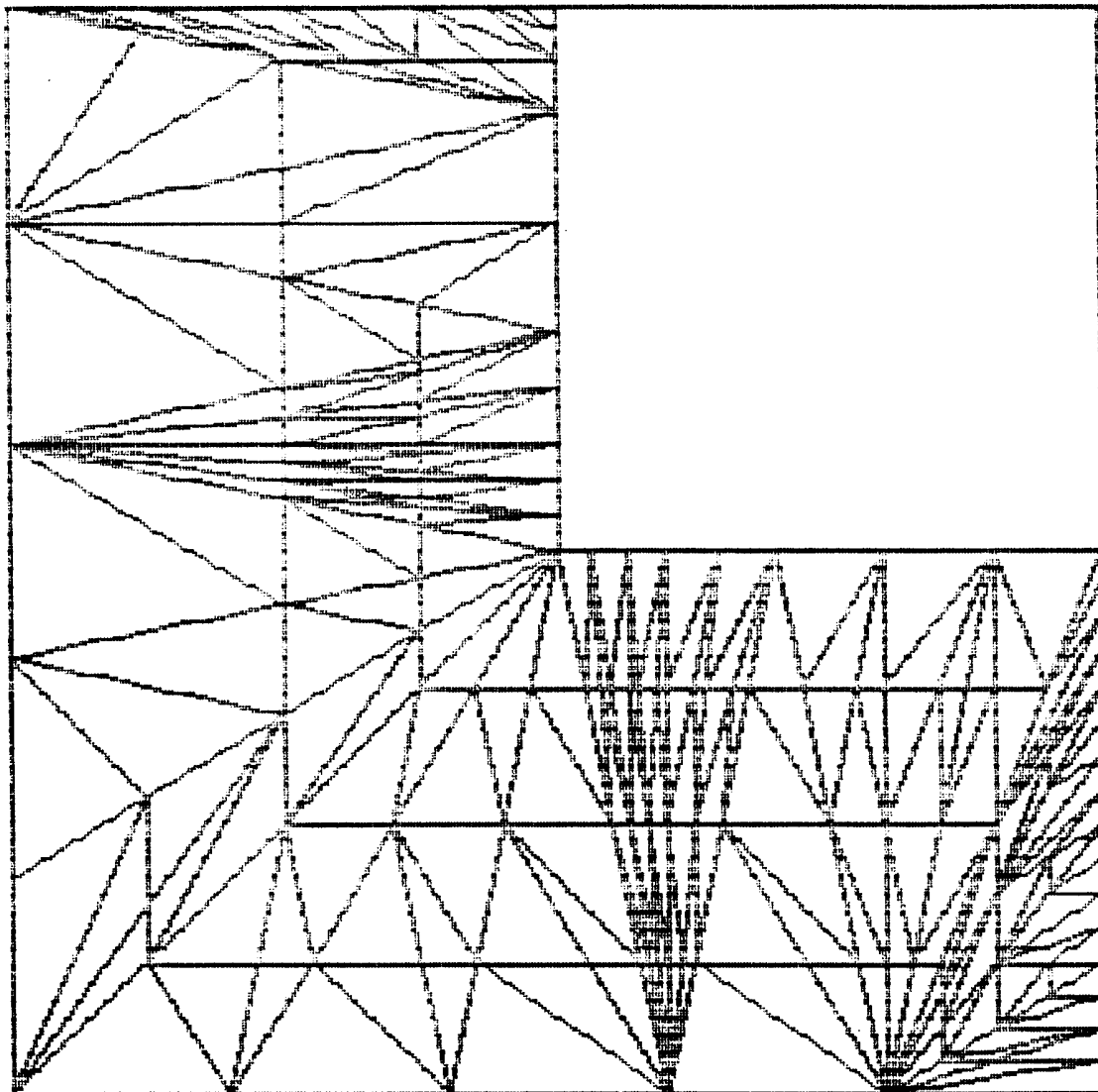
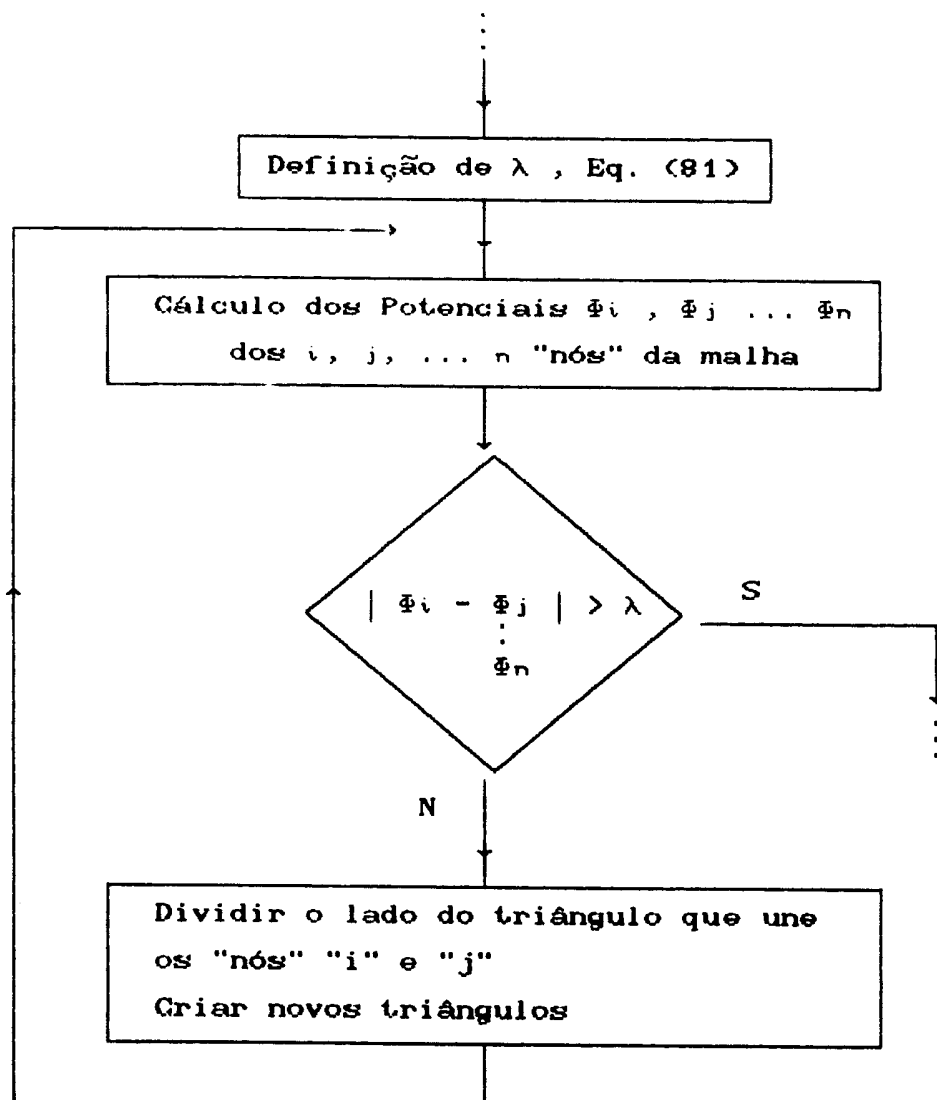


Figura 32 - Malha final, com 100 nós, referente à fig.(16)

## 4.2.2 - Fluxograma do Método da Diferença de Potencial



#### 4.3 - O Método de Bryant

O método de Bryant (BRYANT, 1985) é mais complexo que o método da Diferença de Potencial, porém um método muito potente.

O método utiliza um determinado domínio  $\Omega$  definido inicialmente, ao qual é aplicada a triangulação de Delaunay para gerar a malha inicial de elementos, sem "nós" interiores.

A técnica sugerida por Bryant se resume em analisar todas as arestas interiores da malha inicial e escolher qual delas é a mais "aceitável" para ser partida ponderadamente; na aresta "aceitável" cria-se um "nó" interior.

A escolha da "aresta aceitável" e a introdução do "nó" interior é feita com base na "função distância" associada a cada aresta interior da malha inicial.

Na escolha do "aresta aceitável" são considerados critérios para se construir novos triângulos com fator de qualidade próximo da unidade. Dessa forma, a técnica de Bryant provê uma boa malha final.

A seguir são mostrados os passos a serem seguidos pelo método de Bryant.

#### 4.3.1 - Introdução dos "NÓS" Interiores

O método de introdução de "nós" interiores sugerido por Bryant (BRYANT, 1985) resume-se em analisar todas as arestas da malha inicial e escolher qual delas é a mais "aceitável" para ser partida ponderadamente; na aresta "aceitável", cria-se um novo "nó".

Existem, essencialmente, 5 passos que envolvem a decisão do "nó" interior

1) Escolher um "nó ativo" na malha inicial, em princípio todos os nós são ativos.

2) Estabelecer uma lista de arestas ligadas ao nó ativo escolhido anteriormente.

3) Calcular a diferença angular entre duas arestas adjacentes, a soma de todos os ângulos deverá ser igual a  $360^\circ$ .

4) Determinar, para cada aresta da lista estabelecida no passo 2, qual é "aceitável".

5) Escolher, se possível, a aresta mais adequada para ser partida. Nessa aresta introduzir o "nó" interior.

Como pode ser observado, os passos 1, 2 e 3 são diretos. No passo 4, a lista de arestas construída no passo 2 é examinada e cada aresta é marcada com "aceitável" ou "inaceitável" dependendo da sua posição em relação ao contorno e do resultado do passo seguinte, 5.

#### 4.3.2 - A Escolha da "Aresta Aceitável"

Existem também 5 passos que envolvem a decisão da aresta ser "aceitável"

i) O comprimento da aresta deve ser maior que a distância dada pela interseção das funções distâncias, sobre a aresta (extendida se necessário), (incluindo as constantes multiplicativas) associadas aos dois pontos extremos da aresta.

A "função distância", associada a cada "nó" da malha, será estudada no próximo item. A Constante

Multiplicativa, CM, é simplesmente um número real que multiplica as coordenadas de interseção da "função distância" com a aresta em estudo.

ii) A aresta não deve ser uma aresta de contorno.

iii) Deve existir um ângulo de no mínimo  $\gamma_1^\circ$  tanto no sentido horário como no sentido anti-horário da aresta "aceitável" em direção à primeira aresta "inaceitável".

iv) O ângulo entre a aresta anterior e a posterior deve ser menor que  $180^\circ$ .

v) Se uma aresta é partida e se ambas as linhas vão para um ponto de contorno, o ângulo entre a aresta do contorno e a linha da biseção deve ser maior que  $\gamma_2^\circ$ .

#### 4.3.3 - A Definição da "Função Distância"

O primeiro critério (i) descrito anteriormente necessita da definição de uma "função distância" a ser associada a cada nó "ativo". Uma "função distância" diferente é usada dependendo se o nó considerado é do contorno ou um nó interior. Para nós do contorno a

"função distância" tem a seguinte forma

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) + c \cos^2(\theta) \\ y = b \sin(\theta) + d \sin^2(\theta) \end{cases} \quad (82)$$

onde um dos "c" e "d" é zero e o outro é simplesmente (a-b), com isso apenas "a" e "b" precisam ser calculados e guardados.

Para calcular "a" e "b" o procedimento seguinte é adotado, supondo-se que qualquer "nó" do contorno tem duas arestas ligadas a ele

A) Rotacionar cada aresta para a posição  $K * 90^\circ$  mais próxima,  $a_1$  e  $a_2$  por exemplo, onde  $K = 0, 1, 2$  ou  $3$ .

B) Calcular o comprimento de cada aresta,  $d_1$  e  $d_2$  por exemplo.

$$C) \text{ Fazer : } q_0 = \text{MIN} ( d_1, d_2 )$$

$$q_1 = \text{MAX} ( d_1, d_2 )$$

$$q_2 = 0,5 ( d_1 + d_2 )$$

D) Se as posições  $a_1$  e  $a_2$  forem idênticas, escolher

$$a = b = q_1$$

E) De outro modo, escolher "a" e "b" de acordo com a posição de  $q_0$ , isto é,  $K = 0, 1, 2$  ou  $3$ .

$$\left[ K = 0 \right] \Rightarrow a = q_2; b = q_1; c = (a - b); d = 0$$

$$\left[ K = 1 \right] \Rightarrow a = -q_1; b = -q_2; c = 0; d = (a - b)$$

$$\left[ K = 2 \right] \Rightarrow a = -q_2; b = -q_1; c = (a - b); d = 0$$

$$\left[ K = 3 \right] \Rightarrow a = q_1; b = q_2; c = 0; d = (a - b)$$

Para nós interiores da malha, a "função distância" é escolhida na forma

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = a \sin(\theta) \end{cases} \quad (83)$$

i.e., um círculo, onde o raio "a" é calculado quando o nó é criado. Essa escolha minimiza o espaço de memória e aumenta a eficiência computacional na geração de "nós" interiores.

Uma vez determinada a aceitabilidade de uma aresta, associada ao nó "ativo" escolhido, esta é feita

de forma definitiva de acordo com os três últimos passos

A) Se todas as arestas são "aceitáveis", a aresta com o menor ângulo anti-horário para a próxima aresta é escolhida.

B) Se uma aresta for "inaceitável", a aresta mais próxima da aresta diametralmente oposta é escolhida.

C) Se duas ou mais arestas forem "inaceitáveis", encontrar o maior ângulo entre duas arestas "inaceitáveis", contendo no mínimo uma aresta "aceitável", então escolher a aresta que for mais próxima da biseção das duas arestas "inaceitáveis".

#### 4.3.4 - A Localização do "NÓ" Interior

Depois de ter escolhido a aresta "aceitável", o "nó" interior é introduzido, o qual bissecta a aresta escolhida na relação das distâncias dadas pelas duas funções distâncias. Se os pontos finais da aresta forem  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e as respectivas distâncias associadas às interseções das funções distâncias com a aresta forem  $d_1$  e  $d_2$ , o "nó" interior terá coordenadas

$$\begin{cases} x_i = (d_3 x_2 + d_4 x_1) / (d_3 + d_4) \\ y_i = (d_3 y_2 + d_4 y_1) / (d_3 + d_4) \end{cases} \quad (84)$$

O "nó interior" criado dessa maneira terá um círculo como "função distância" associado a ele, onde o raio do círculo é calculado como a seguir

$$a = 2 d_3 d_4 / (d_3 + d_4) \quad (85)$$

O método de introdução de "nós interiores" descrito anteriormente funciona em "loop". O critério de Delaunay é aplicado novamente à malha resultante e os passos 2 a 5 são repetidos. O "loop" continua até que o passo 5 falhe, então é escolhido um outro nó "ativo" da malha. O algoritmo é completado quando todos os nós "ativos" forem testados, e quando não houver mais nenhuma aresta "aceitável" a ser analisada. Faz-se no Apêndice B um exemplo simples, passo a passo, da técnica de Bryant.

#### 4.3.5 - Malhas de Elementos Refinadas pelo Método de Bryant

A seguir, são mostradas as malhas finais de elementos referentes à malha inicial da figura (28), obtidas através do refinamento pelo método de Bryant, em simulação feita com o pacote computacional FEM-2D.

A partir da figura (28), malha inicial, são obtidas as quatro malhas finais, admitindo-se  $CM = 1.25$ ,  $CM = 1.0$ ,  $CM = 0.75$  e  $CM = 0.5$

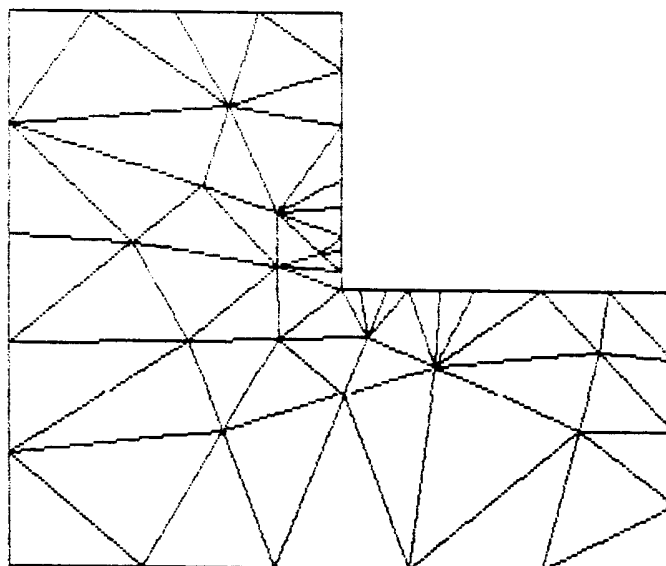


Figura 33 - Malha final de elementos referente à fig. (28)  
com  $CM = 1.25$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_2 = 15^\circ$

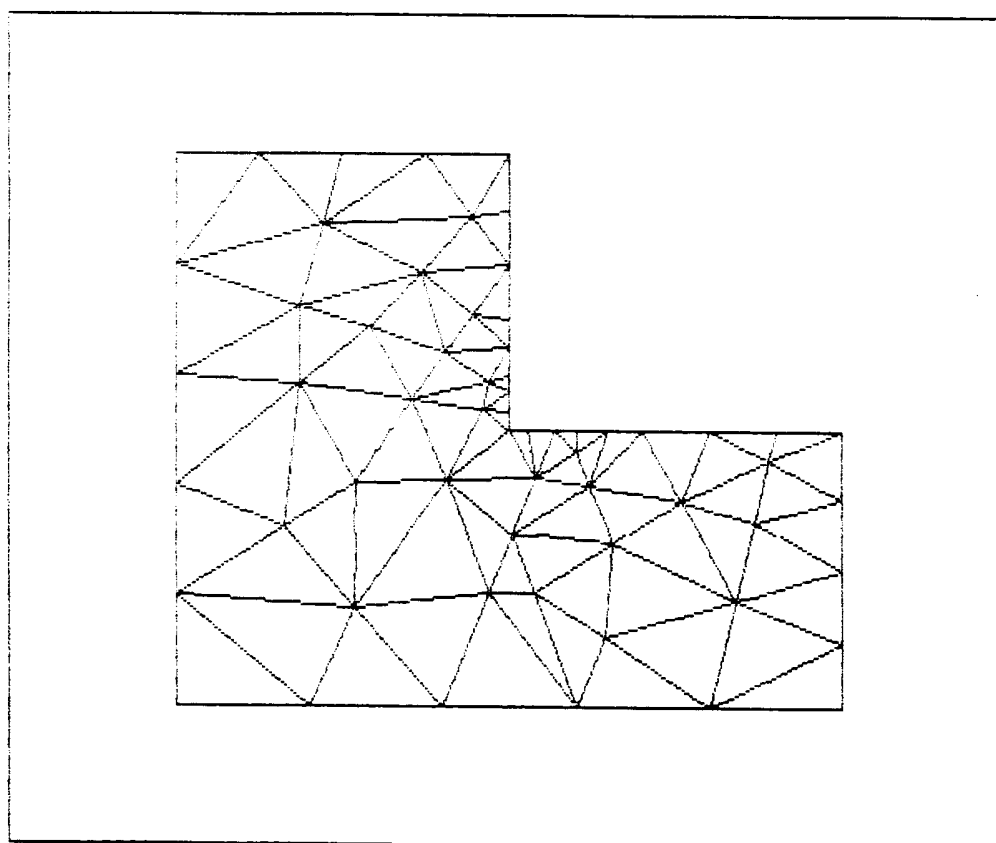


Figura 34 - Malha final de elementos referente à fig. (28)  
com  $CM = 1.00$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_2 = 15^\circ$

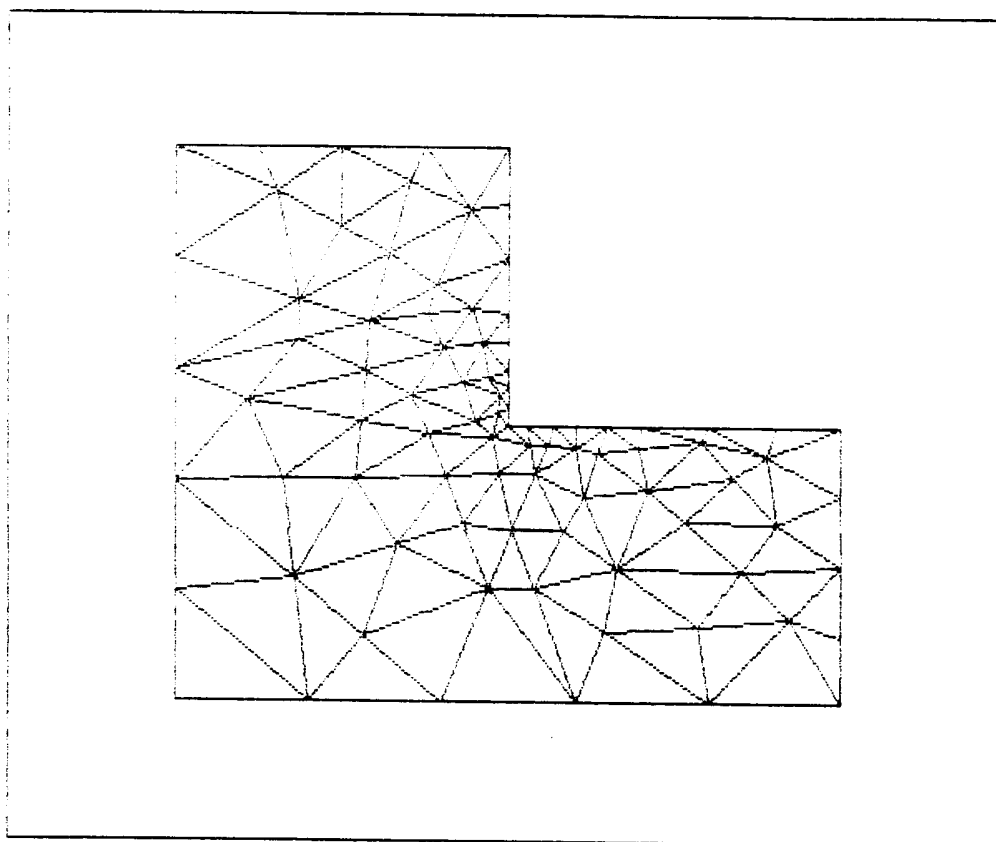


Figura 35 - Malha final de elementos referente à fig. (28)  
com  $CM = 0.75$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_2 = 15^\circ$

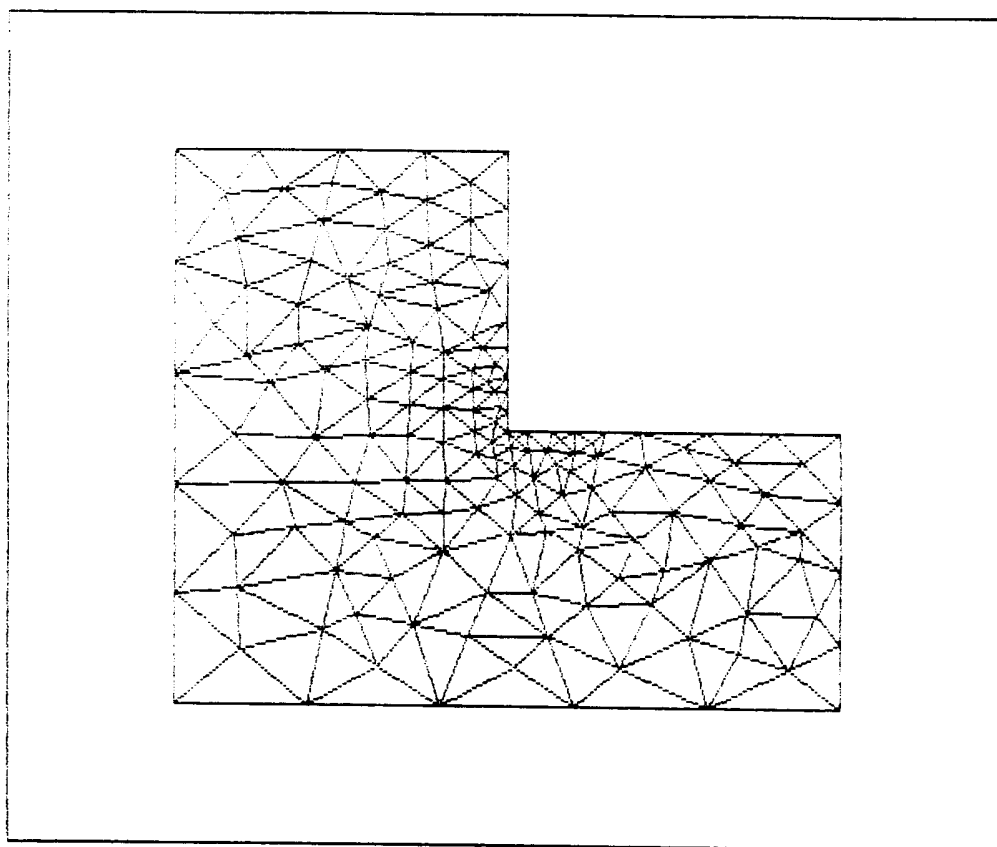
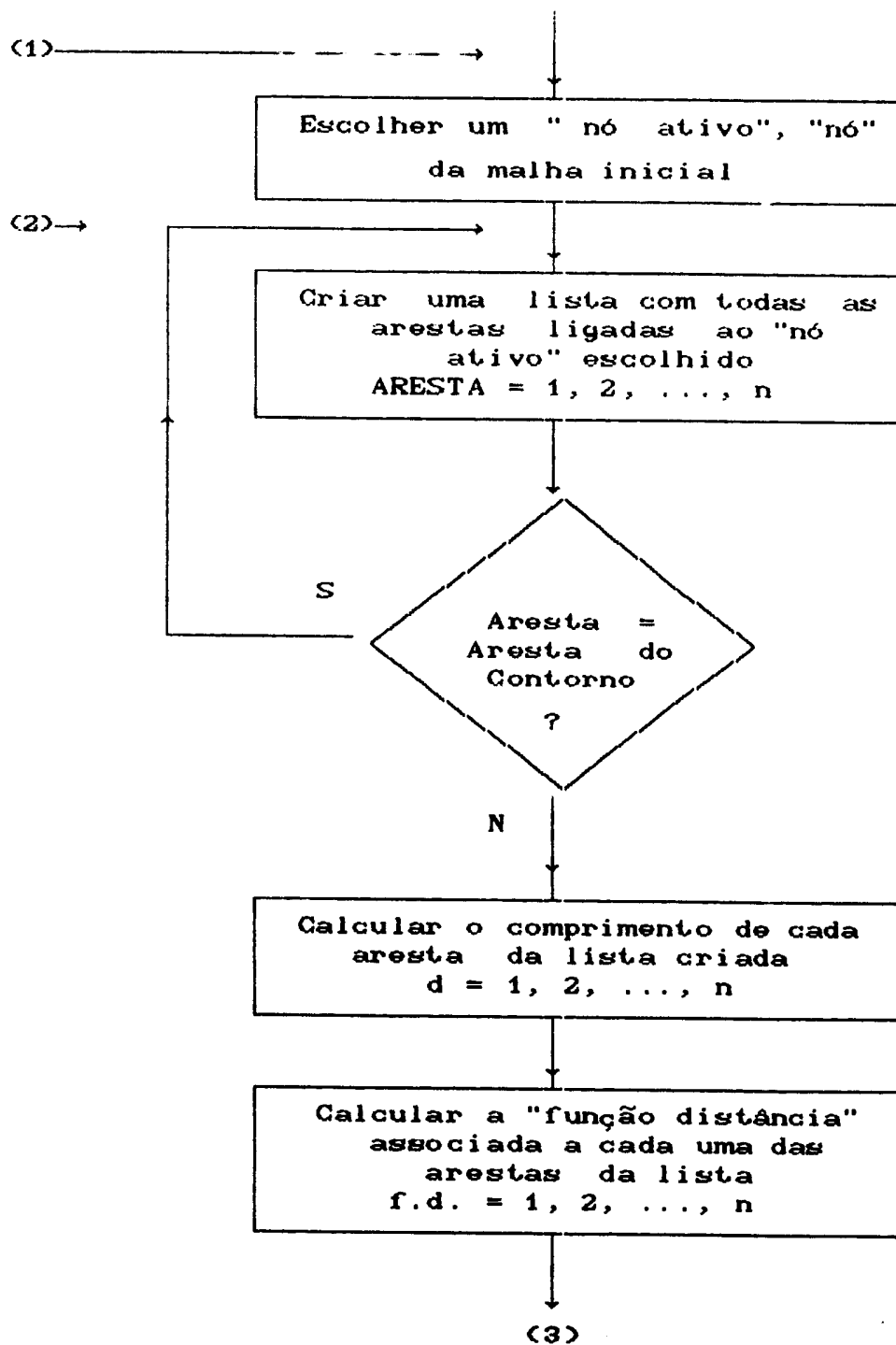
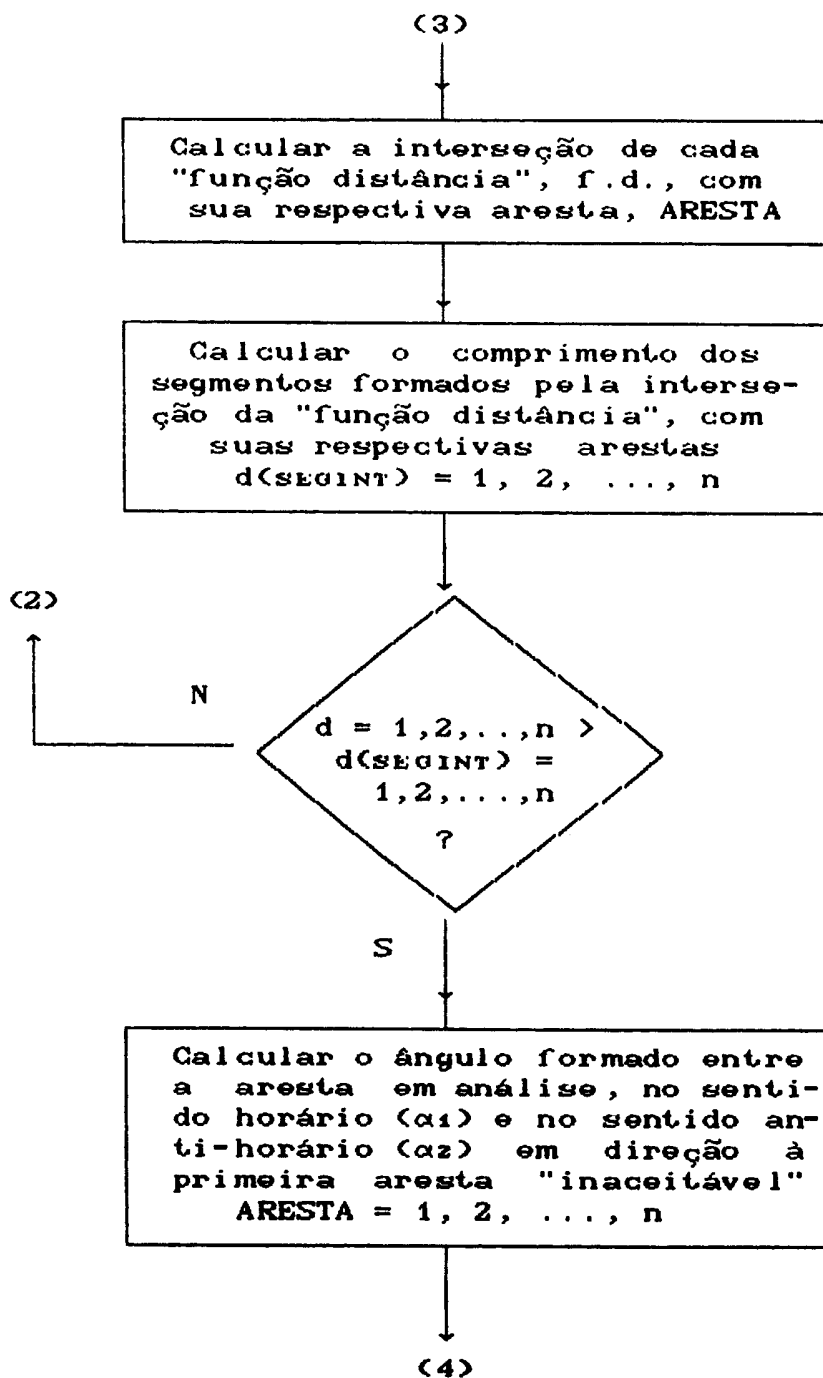
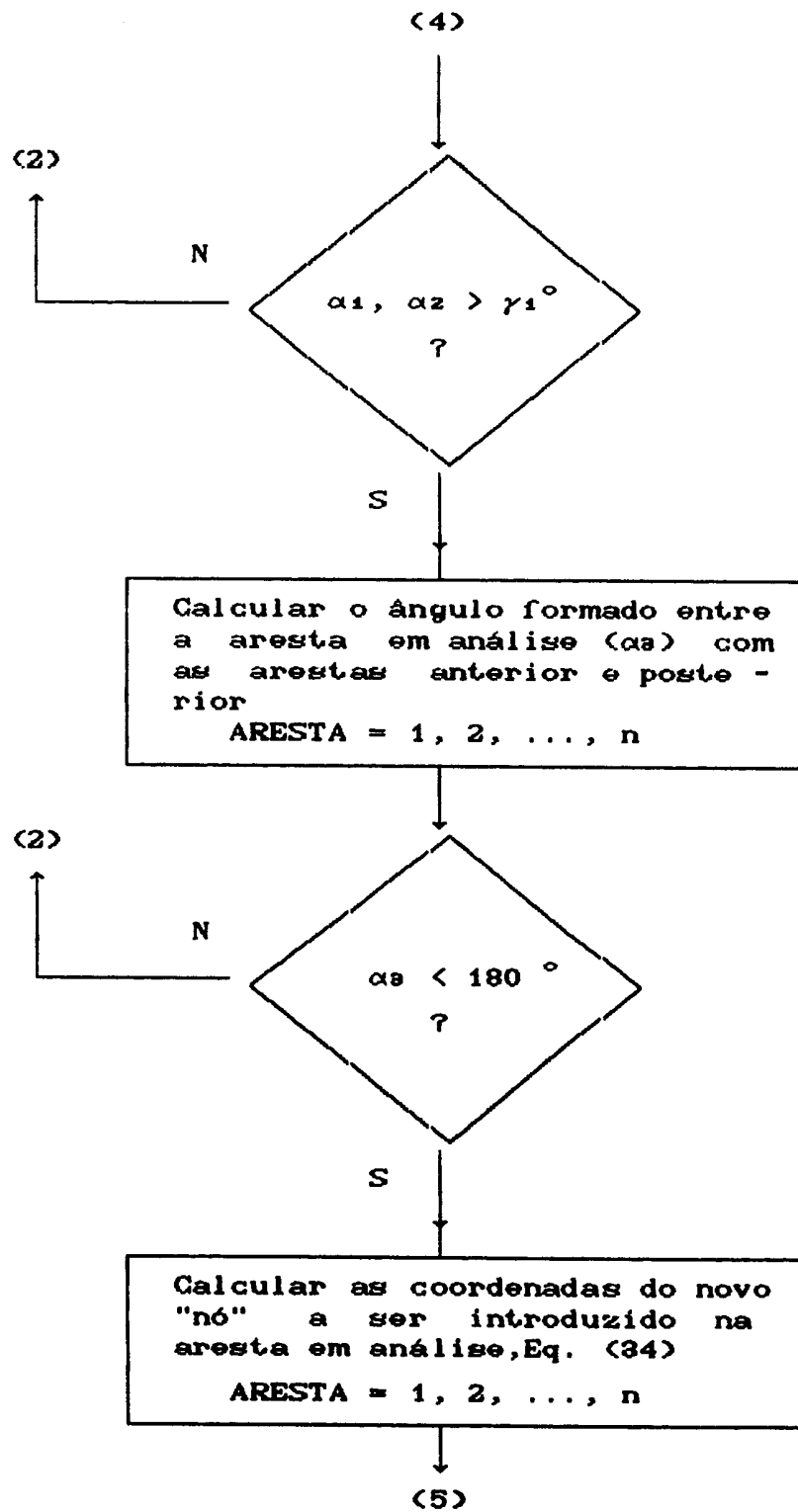


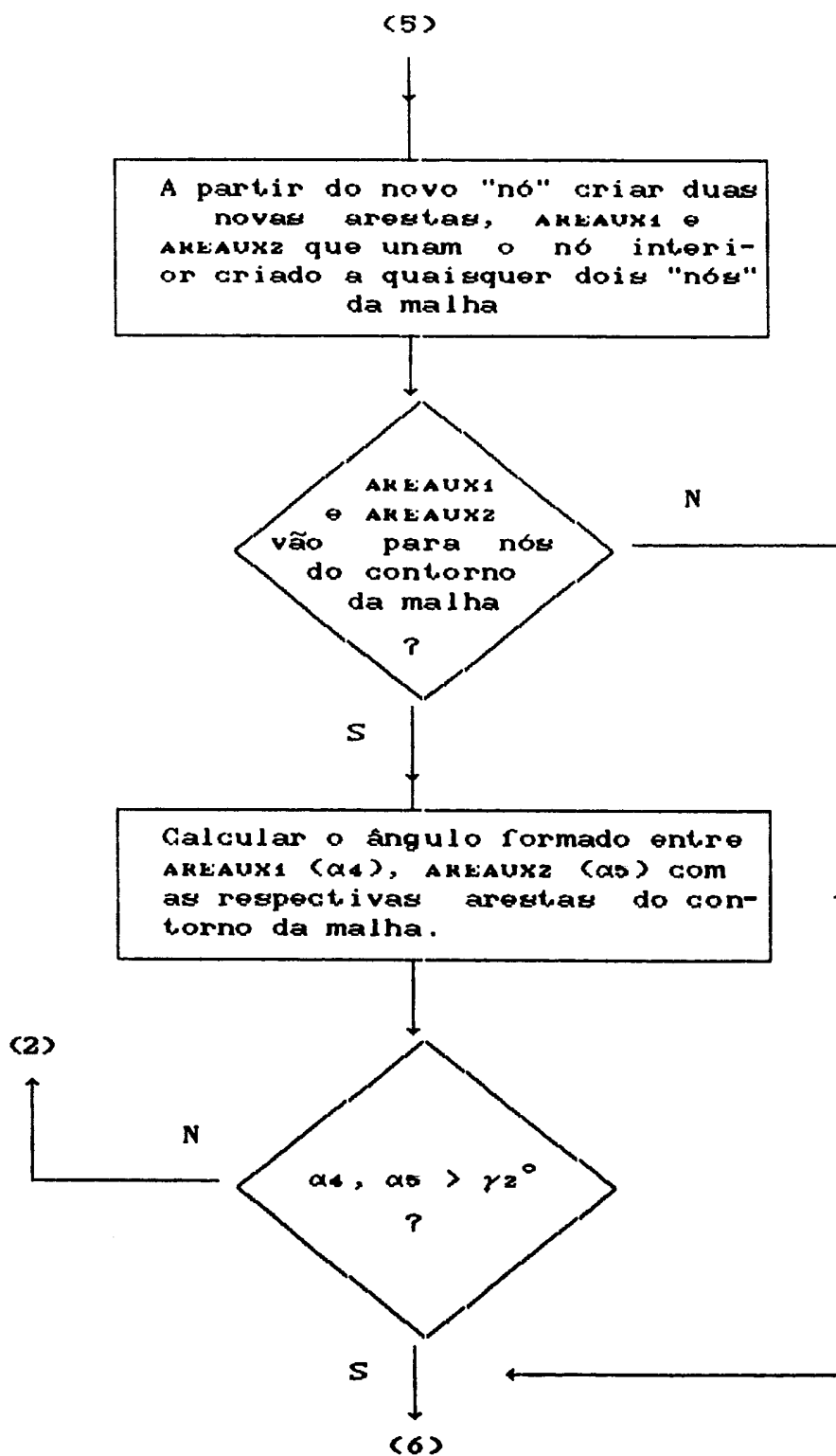
Figura 36 - Malha final de elementos referente à fig. (28)  
com  $CM = 0.50$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$ ,  $\gamma_2 = 15^\circ$

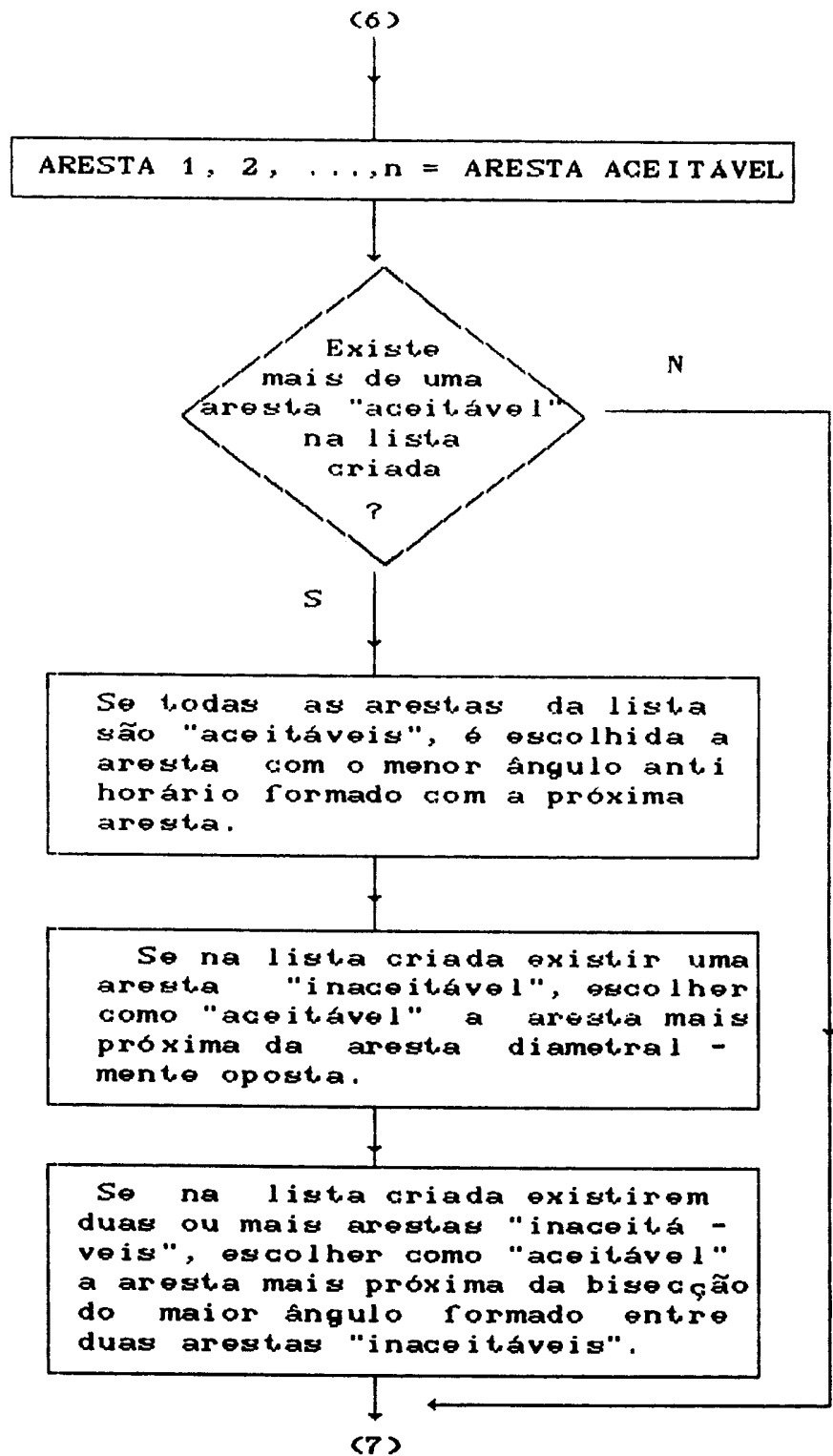
## 4.3.6 - Fluxograma do Método de Bryant

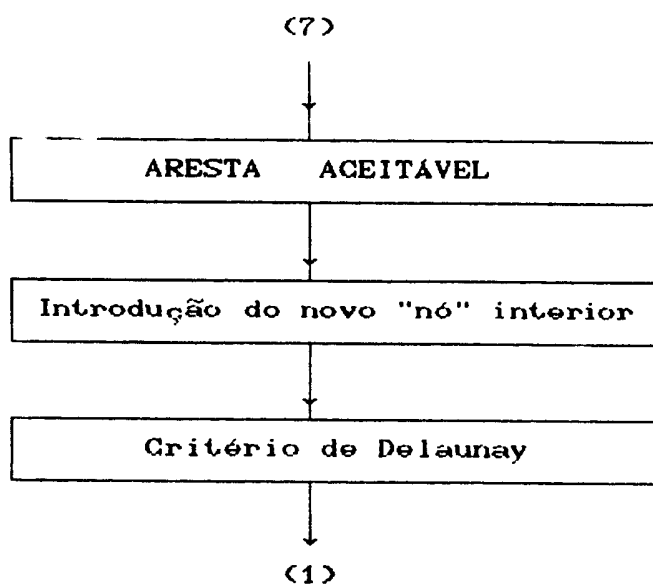












#### 4.4 - Conclusão

Apresentou-se neste Capítulo duas técnicas de Refino de Malha de Elementos, Diferença de Potencial e Bryant.

A técnica da Diferença de Potencial desenvolvida por (RIBEIRO, 1987), de implementação bastante simples não forneceu uma malha final de boa qualidade, observar figuras (31) e (32). Isso deve-se a limitação de não se ter aplicado o critério de Delaunay após a introdução de cada novo "nó".

A técnica de Bryant, de introdução de "nós"

interiores por critérios exclusivamente geométricos, é de implementação mais complexa. As malhas finais obtidas são de boa qualidade, observar figuras (33), (34), (35) e (36). A flexibilidade para variar a Constante Multiplicativa, CM, e os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  torna possível fazer um melhor ajuste no refino da malha. A aplicação do critério de Delaunay após a introdução de cada novo "nó" aliado aos critérios de Bryant garantem a boa qualidade final da malha.

No Capítulo seguinte serão apresentados cálculos de campos eletrostáticos e magnetostáticos, utilizando a teoria apresentada, feitos com o pacote computacional FEM-2D. Este pacote computacional é descrito no Apêndice C.

## CAPÍTULO - 5

## APLICAÇÃO

5.1 - Introdução

São apresentados neste capítulo aplicações da Geração Automática de Malha no Cálculo de Campos Eletrostáticos e Magnetostáticos Bidimensionais através do Método de Elementos Finitos.

5.2 - Aplicação no Cálculo de Campos Eletrostáticos5.2.1 - Cálculo do Campo Eletrostático de uma Calha Retangular

Considerar a figura (37) abaixo que representa a calha retangular a ser estudada

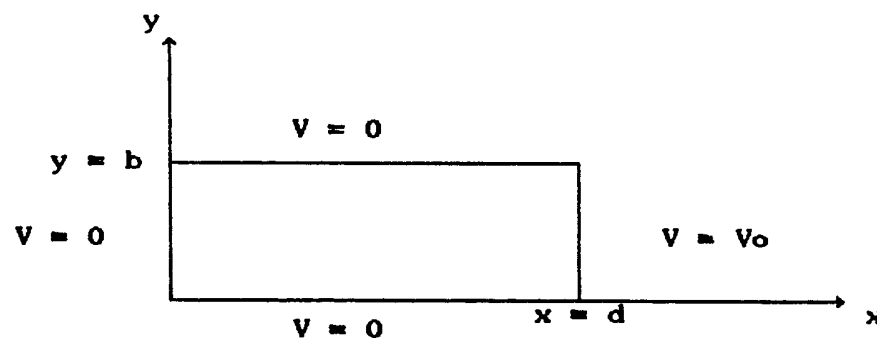


Figura 37 - Calha Retangular

A resolução analítica da equação de Laplace para a figura (37) resulta em (HAYT Jr., 1983)

$$V = \frac{4 V_0}{\pi} \sum_{m, \text{ ímpar}}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\text{Senh} \left( \frac{m \pi x}{b} \right)}{\text{Senh} \left( \frac{m \pi d}{b} \right)} \text{Sen} \frac{m \pi y}{b} \quad (86)$$

que fornece o potencial  $V$  em qualquer ponto interior da calha.

O mesmo problema pode ser resolvido através de simulação no pacote computacional FEM - 2D.

A figura (38) abaixo representa a delimitação do domínio a ser estudado, considerando  $d = 9\text{cm}$  e  $b = 7.5\text{cm}$

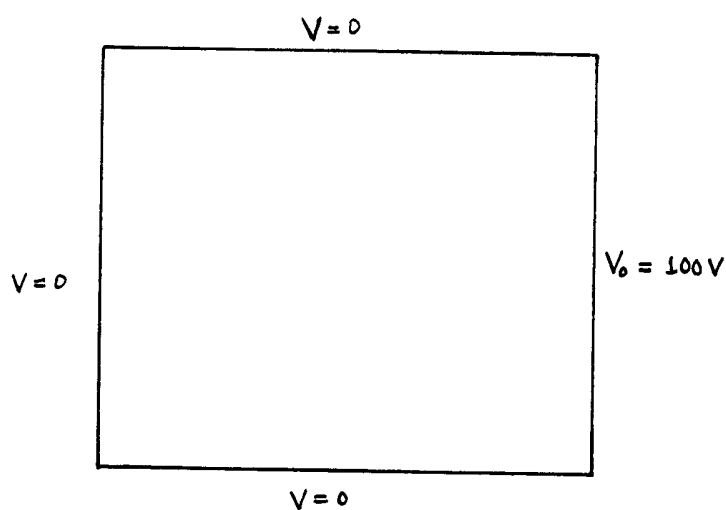


Figura 38 - Delimitação da região referente à calha retangular

A partir da figura (38), gera-se automaticamente a malha inicial de elementos para a calha retangular.

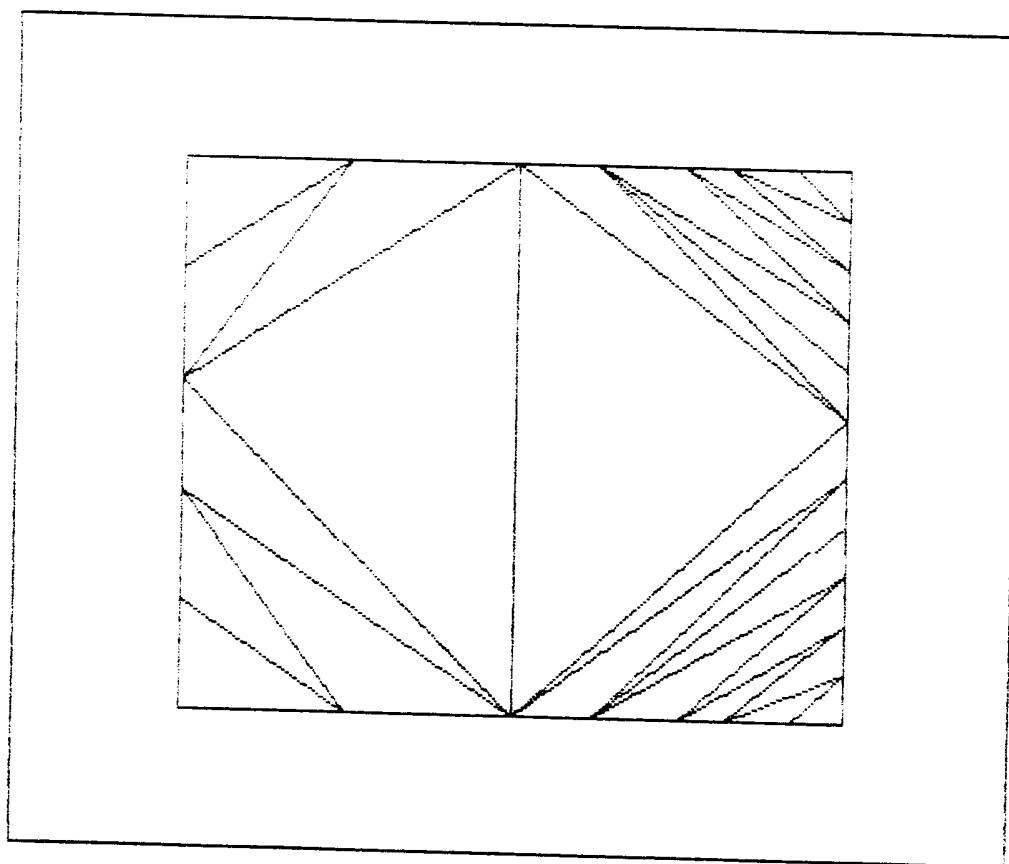


Figura 39 - Malha inicial referente à calha retangular

A partir da figura (39), refina-se a malha inicial e obtém-se a malha final de elementos referente à calha retangular. Considerando  $CM = 0.5$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$  e  $\gamma_2 = 15^\circ$ .

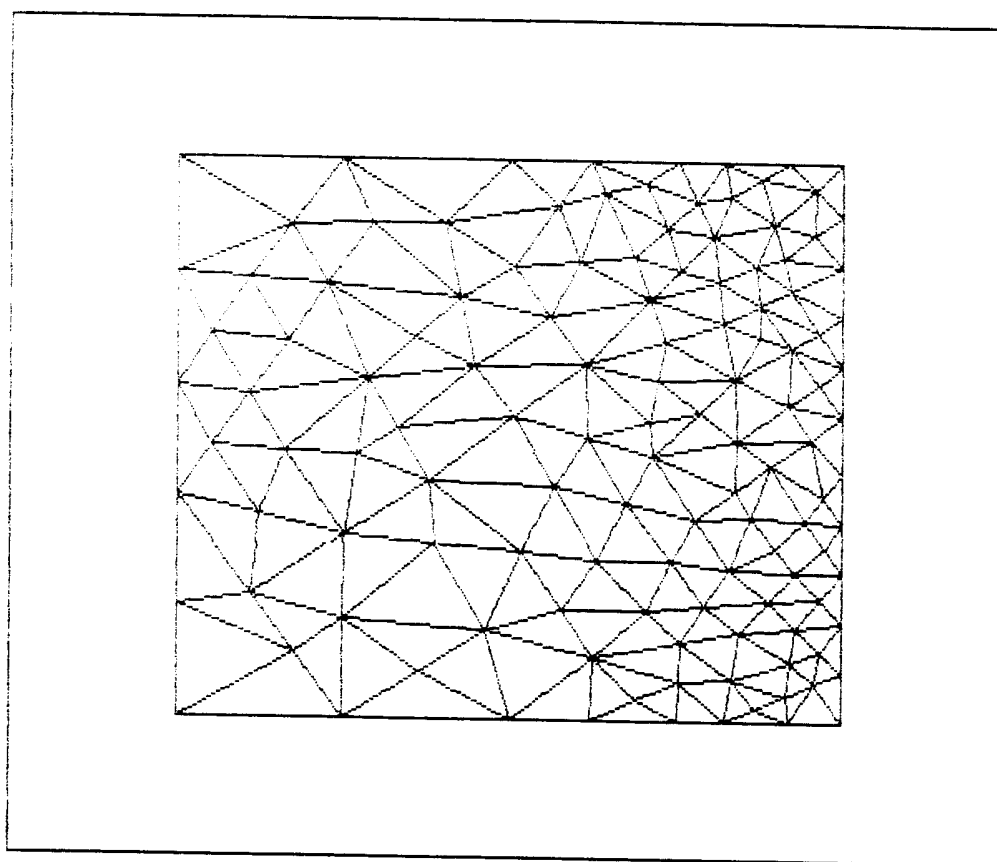


Figura 40 - Malha final referente à calha retangular

A partir da malha final de elementos obtém-se as equipotenciais referentes à calha retangular, considerando-se  $V_0 = 100$  V.

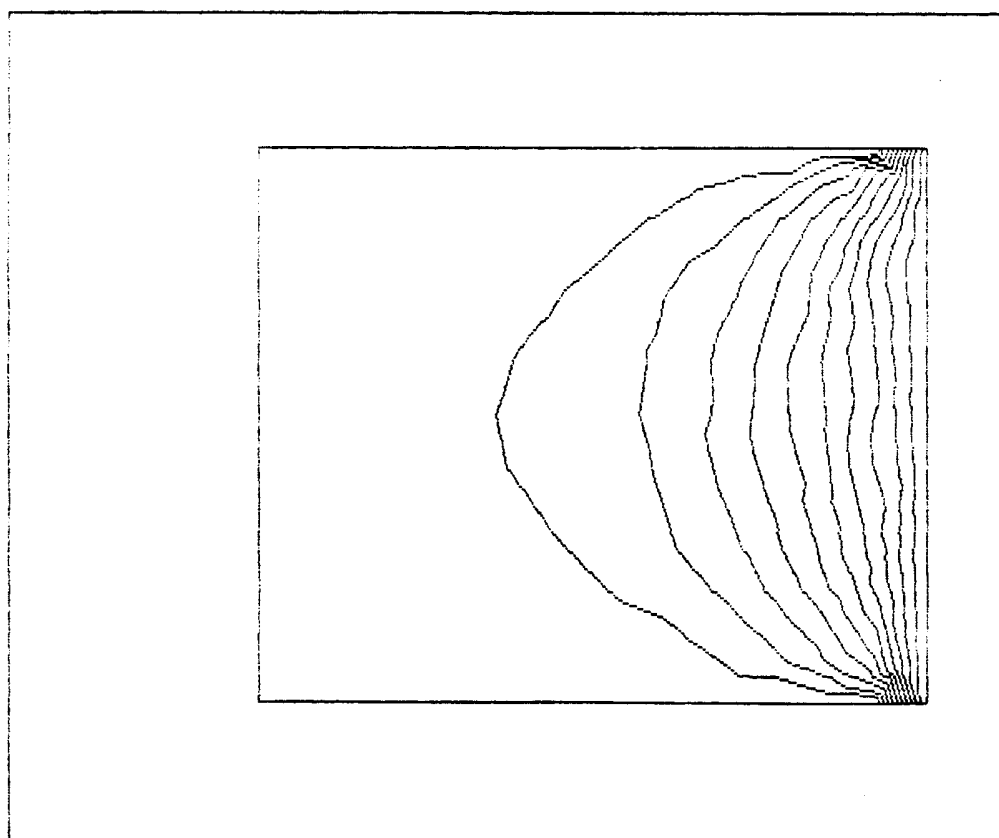


Figura 41 - Equipotenciais referentes à calha retangular

Dos resultados obtidos da equação (86) e através da figura (41) constrói-se a tabela seguinte

x	y	V equação (86)	V figura (41)	erro %
0	0	0	0	0
3,5	3,75	0,11	0,1	9
5,4	3,75	0,21	0,2	5
6,3	3,75	0,32	0,3	6
6,9	3,75	0,44	0,4	9
7,5	3,75	0,53	0,5	6
7,9	3,75	0,62	0,6	3
8,25	3,75	0,72	0,7	3
8,55	3,75	0,82	0,8	2
8,75	3,75	0,91	0,9	1

A coluna do erro % da tabela anterior representa a diferença entre os valores encontrados através da equação (86) e da figura (41), considerando os resultados obtidos através da equação (86) como corretos, onde utilizou-se os tres primeiros termos da série.

#### 5.2.2 - Cálculo do Campo Eletrostático da Região em L

Considere a figura (42) abaixo que representa a delimitação do domínio a ser estudado, considerando  $V = 100 \text{ V}$  na parte interna da região em L.

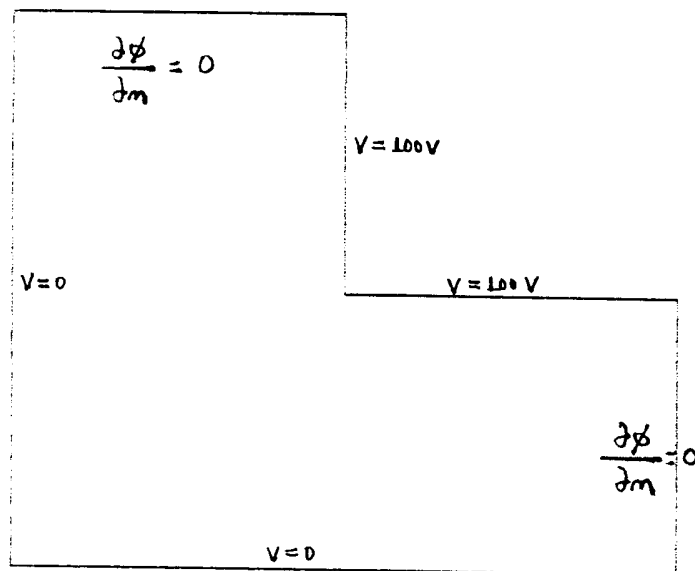


Figura 42 - Condições de contorno referentes à região em L

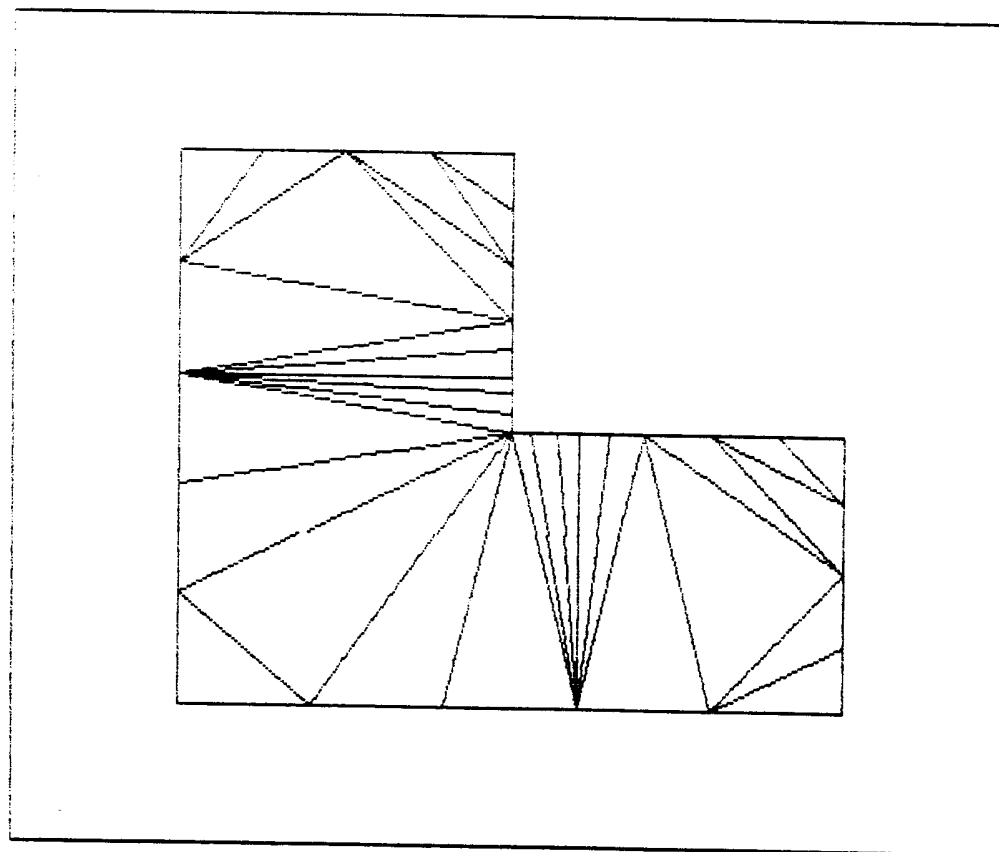


Figura 43 - Malha inicial referente à região em L

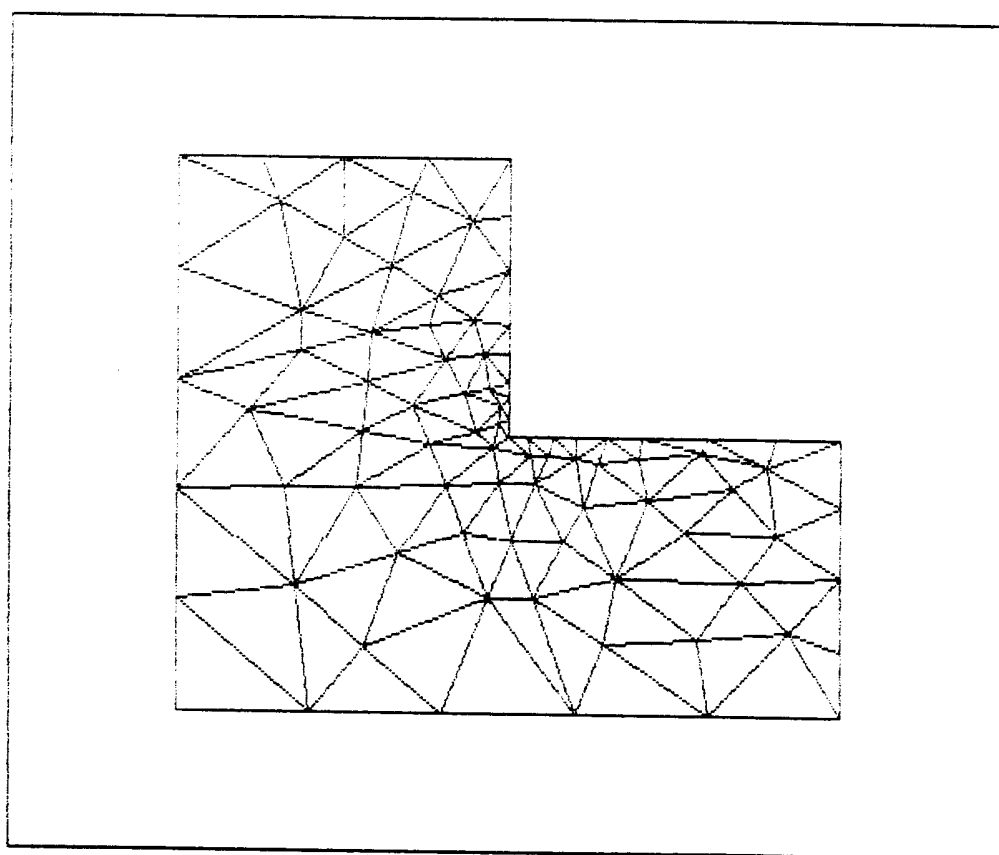


Figura 44 - Malha final referente à região em L

Considerando-se  $CM = 0.75$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$  e  $\gamma_2 = 15^\circ$ .

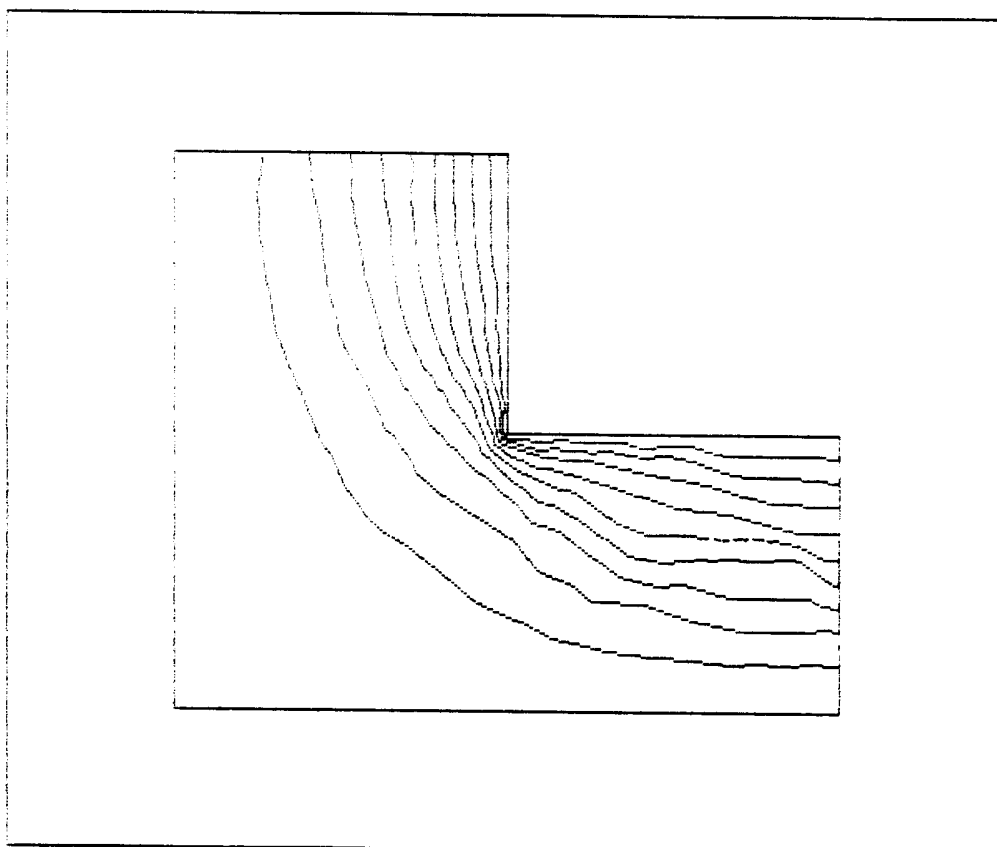


Figura 45 - Equipotenciais referentes à figura (44)

Para obter melhores resultados, utiliza-se uma constante multiplicativa menor que 0.75. Essa escolha proporciona um maior refinamento da malha. Utilizando-se  $CM = 0.5$ ,  $\gamma_1 = 30^\circ$  e  $\gamma_2 = 15^\circ$ , obtém-se

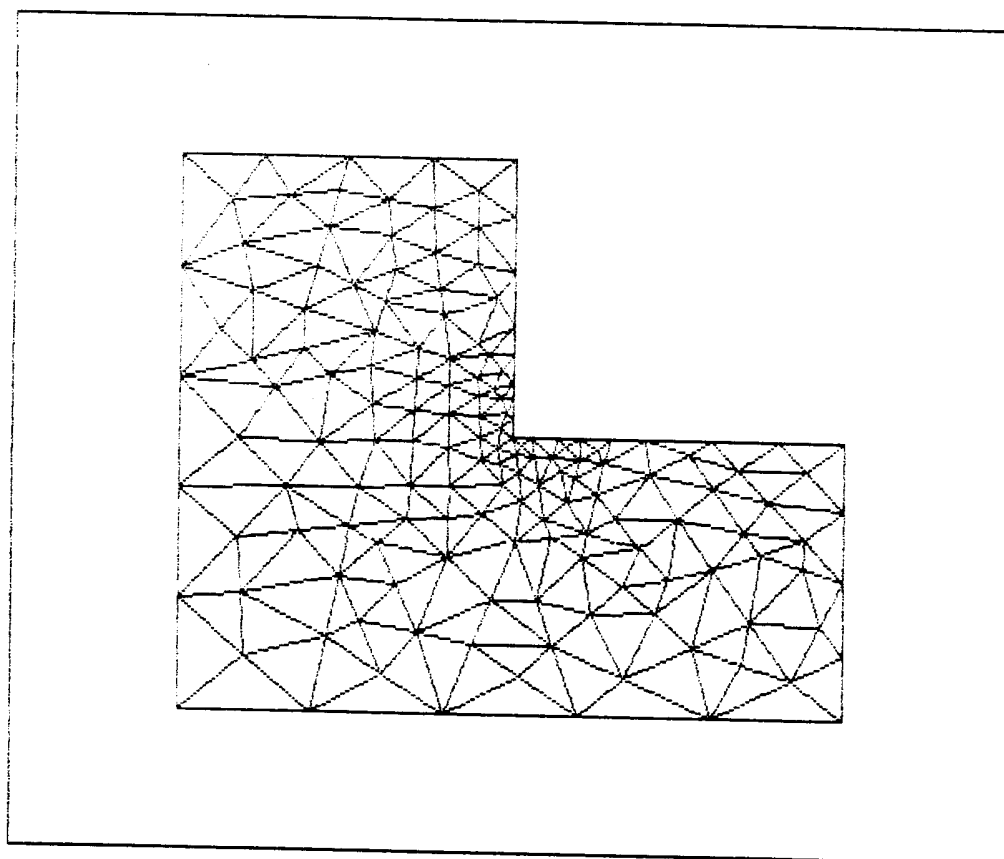


Figura 46 - Malha final referente à figura(43) admitindo-se

$$CM = 0.5, \gamma_1 = 30^\circ \text{ e } \gamma_2 = 15^\circ$$

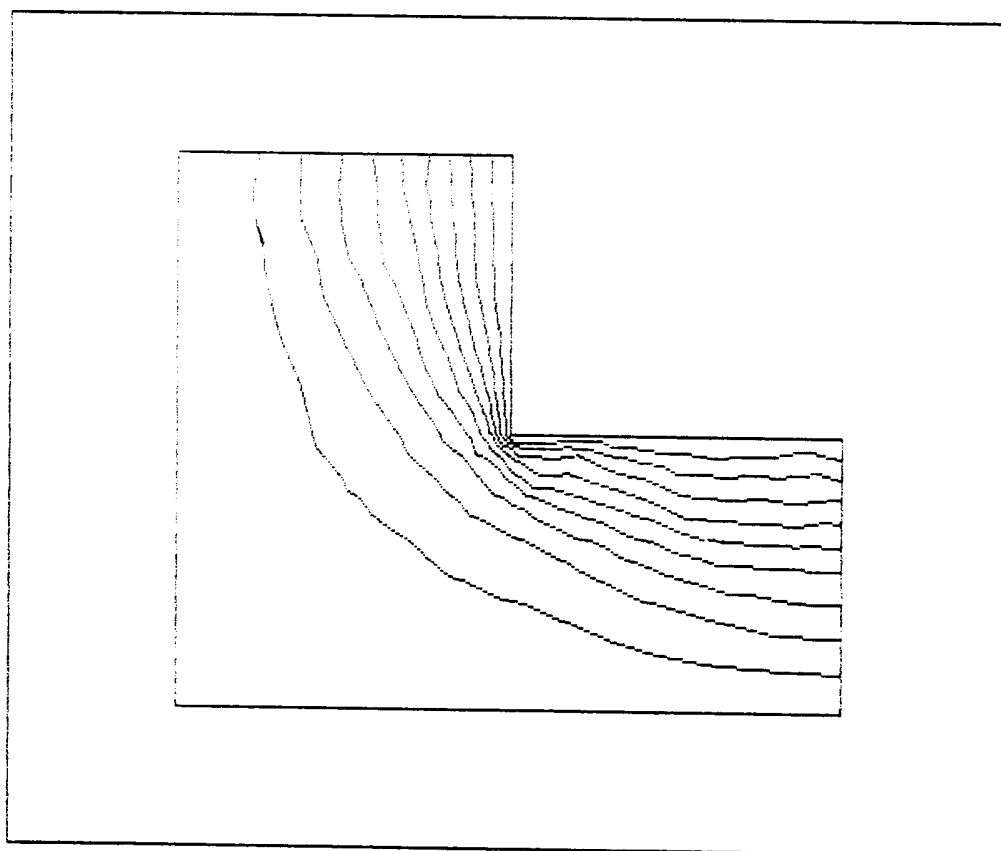


Figura 47 - Equipotenciais referentes à figura (46)

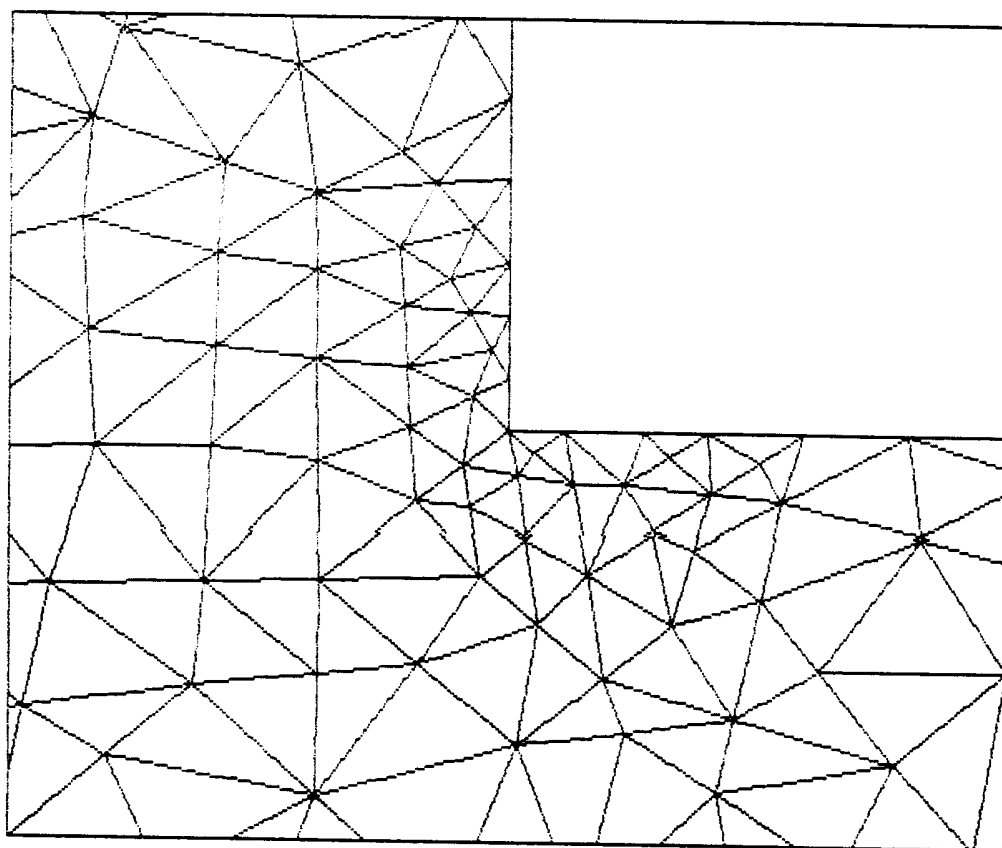


Figura 48- Zoom referente à região de concentração dos menores triângulos da figura (46)

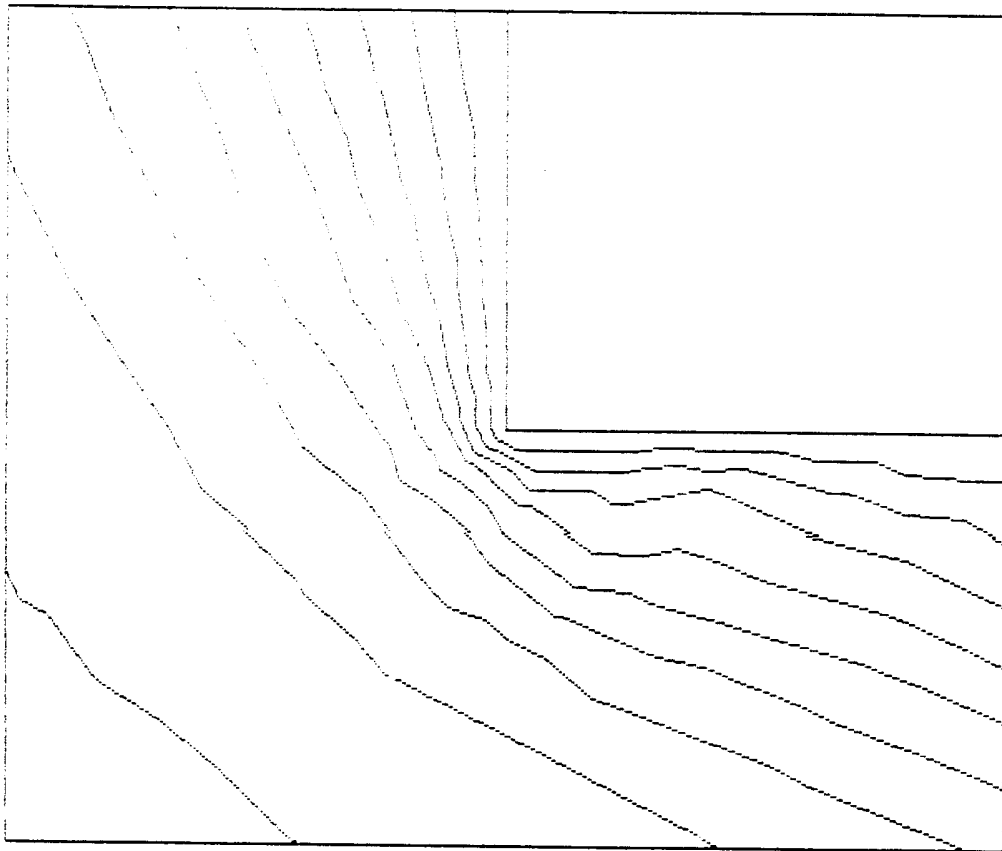


Figura 49 - Equipotenciais referentes à figura (48)

### 5.3 - Aplicação no Cálculo de Campos Magnetostáticos

Para verificar o funcionamento do FEM - 2D na solução de problemas magnetostáticos, considera-se uma máquina elétrica simplificada, de pólos salientes.

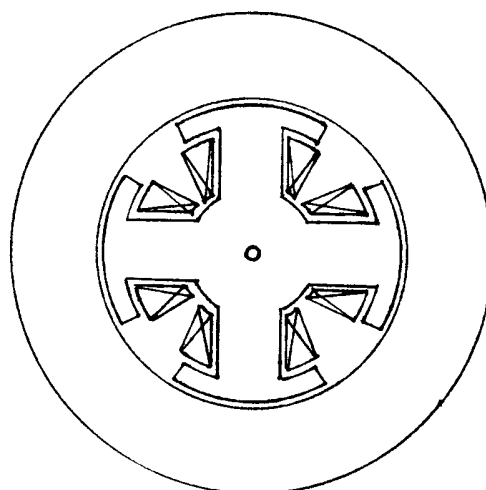


Figura 50 - Máquina elétrica de pólos salientes

A figura (50) representa uma máquina de quatro pólos. Para uma máquina com um número maior de pólos, pode-se fazer a seguinte representação

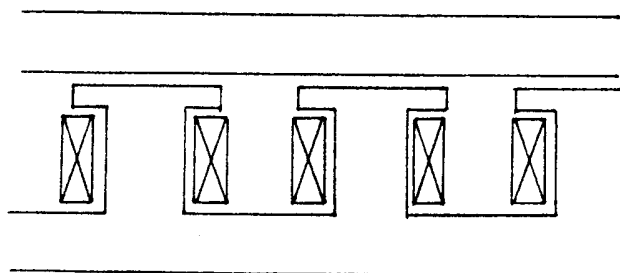


Figura 51 - Representação de um máquina elétrica

A representação feita na figura (51) é aproximadamente real, porque a curvatura nesta região é pequena. Aproveitando a simetria existente, pode-se obter uma representação ainda mais simplificada.

A representação mais simplificada é feita na figura (52). Nessa situação a maior parte das condições de contorno são nulas. Na lateral direita, tem-se uma condição de Neumann. Na lateral esquerda porque a corrente é de sentido contrário no outro pólo tem-se  $A = 0$ . Em cima, devido à mudança de meio, pois o fluxo passa pelo ferro tem-se  $A = 0$ . Em baixo, devido à simetria com o lado diametralmente oposto da máquina, tem-se  $A = 0$ . Além disso há uma

distribuição de corrente.

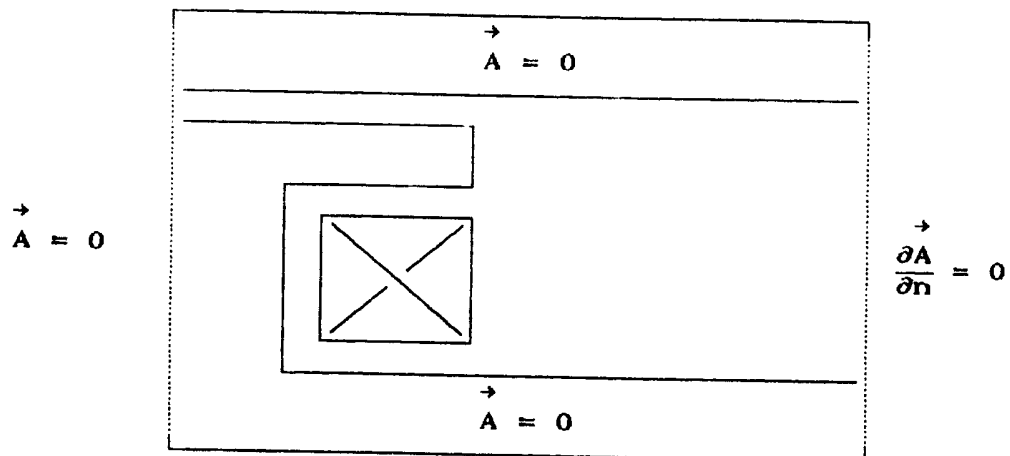


Figura 52 - Representação simplificada de uma máquina elétrica

Feitas estas considerações, utiliza-se o pacote computacional FEM - 2D.

Considerar a figura (53) que representa a delimitação do domínio a ser estudado.

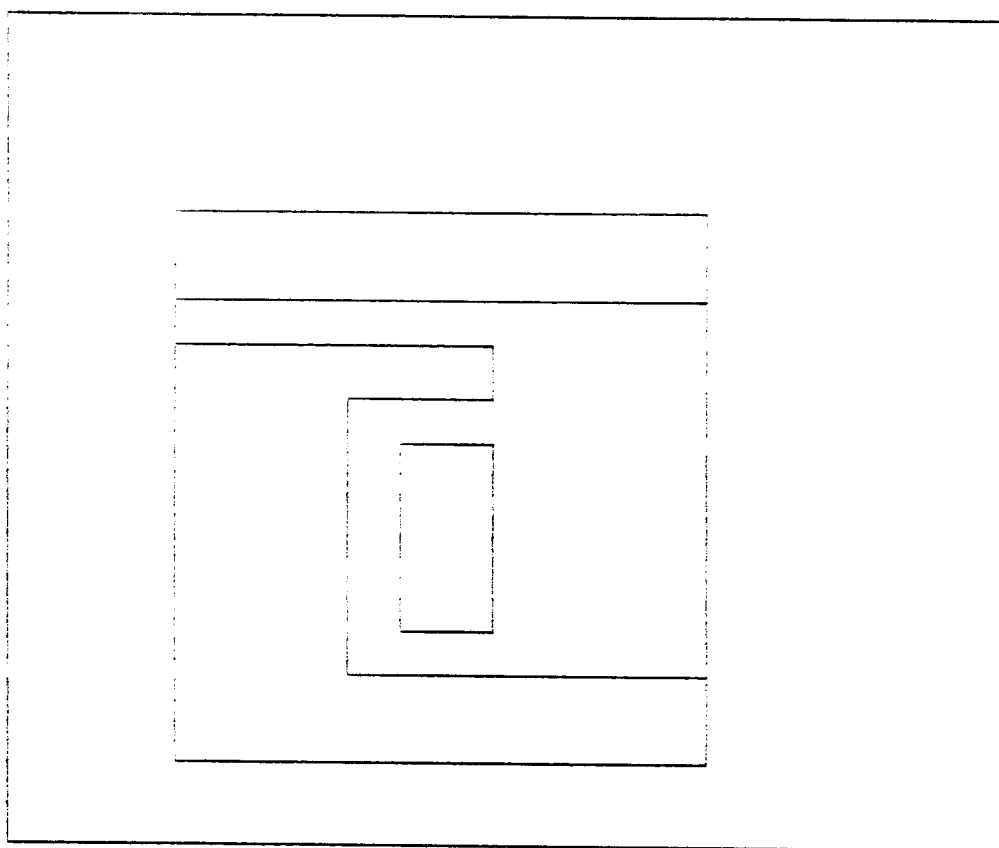


Figura 53 - Definição do domínio da máquina elétrica simplificada

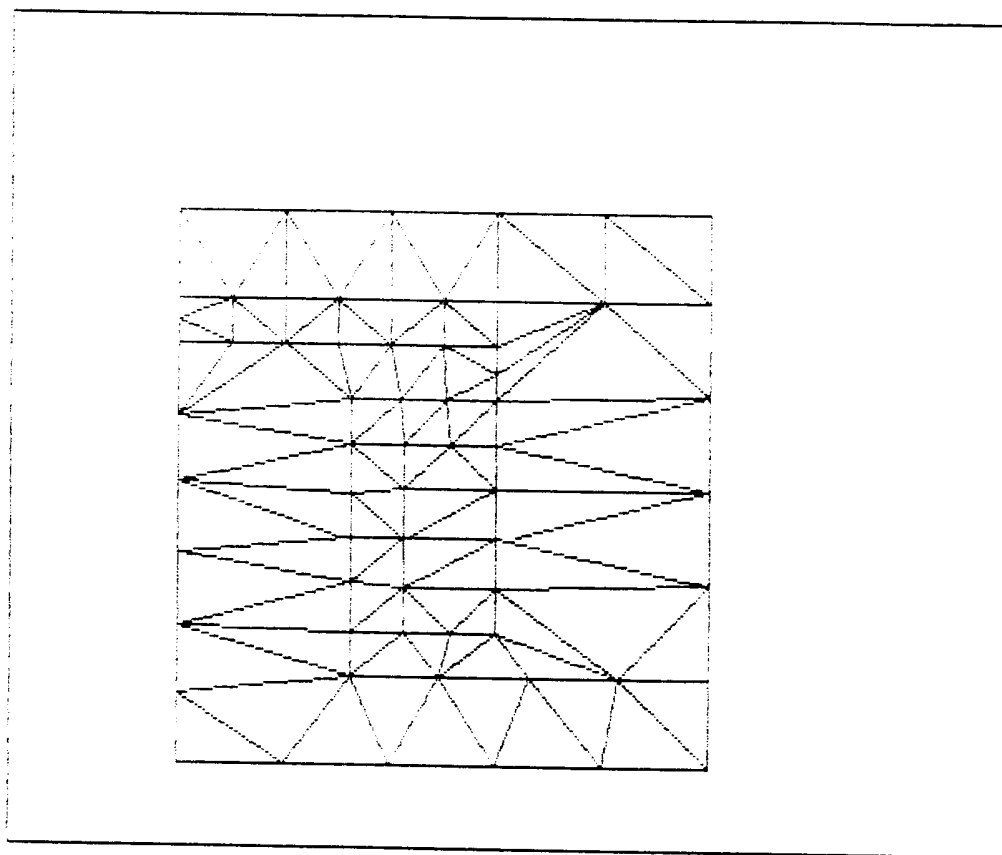


Figura 54 - Malha inicial de elementos referente à figura 53

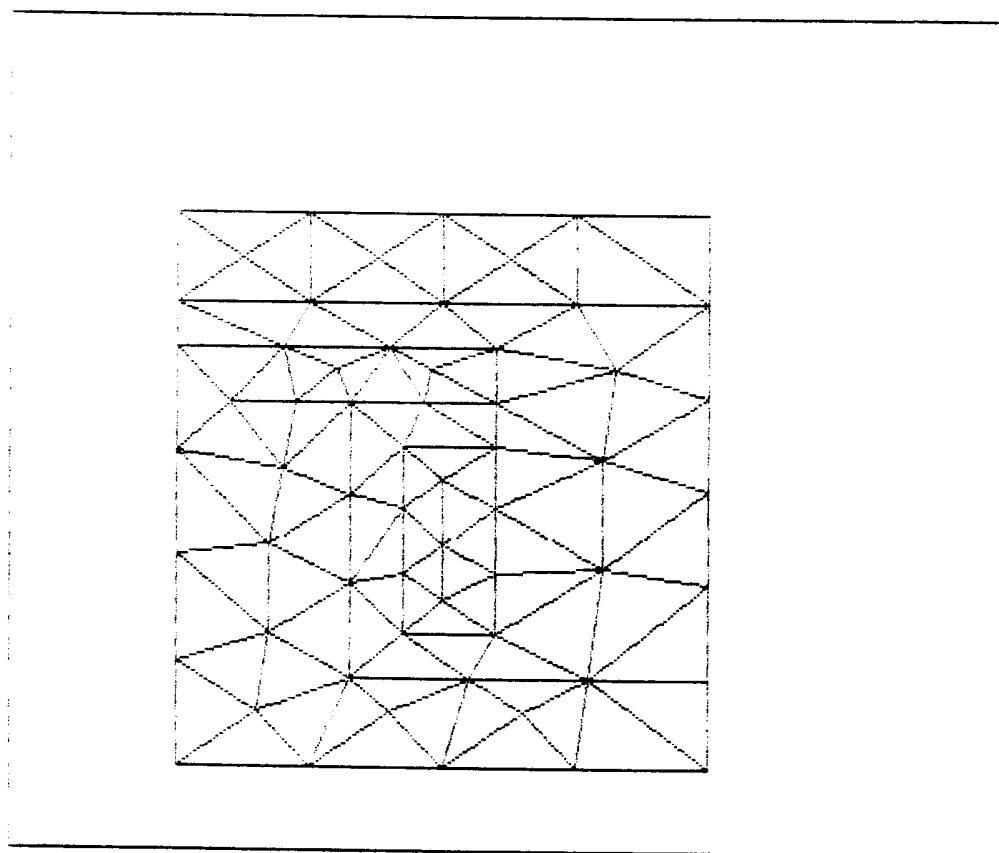


Figura 55 - Malha final referente à figura (53)

$$CM = 0.5, \gamma_1 = 30^\circ \text{ e } \gamma_2 = 15^\circ$$

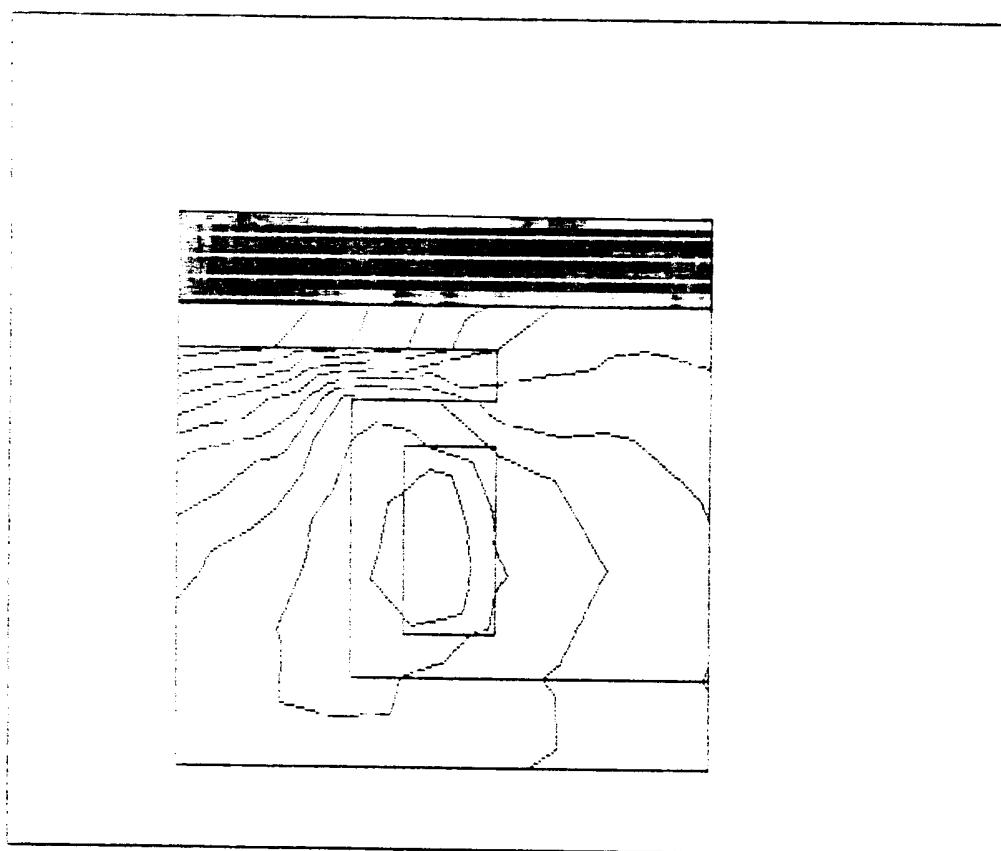


Figura 56 - Mapeamento do fluxo da máquina elétrica

#### 5.4 - Conclusão

Procurou-se neste Capítulo fazer uma aplicação da teoria apresentada no trabalho para o cálculo de campos eletrostáticos e magnetostáticos bidimensionais.

No item 5.2.1 apresentou-se o cálculo do campo eletrostático de uma calha retangular, figura (41), onde a solução analítica é conhecida, equação (86). Obteve-se resultados satisfatórios em simulação feita com o pacote FEM-2D para a região central da calha, ver tabela pag. 105. Observa-se entretanto os erros cometidos nos pontos de descontinuidade de potencial, canto superior e inferior direito. No item 5.2.2 apresentou-se o cálculo do campo eletrostático da região em L.

No item 5.3 apresentou-se o mapeamento do fluxo do pólo de uma máquina elétrica, sem a preocupação com a dimensão da máquina, preocupação esta fora do escopo deste trabalho.

## CAPÍTULO - 6

### CONCLUSÃO

#### 6.1 - Introdução

São descritas, neste Capítulo, as conclusões obtidas no desenvolvimento do trabalho e são apresentadas algumas sugestões de temas para trabalhos correlatos.

#### 6.2 - Conclusões Finais

A Geração Automática e o Refino da Malha de Elementos são fundamentais para a obtenção de resultados satisfatórios na utilização do Método de Elementos Finitos para o cálculo de campos eletrostáticos ou magnetostáticos.

As maiores dificuldades de quem tenta discretizar um determinado domínio  $\Omega$ , em elementos finitos triangulares, estão relacionadas com a qualidade final e distribuição desses triângulos em todo o domínio  $\Omega$ .

O atual trabalho apresenta técnicas puramente geométricas de Geração Automática e Refino da Malha,

Delaunay e Bryant, que possibilitam obter uma malha final com boa qualidade e distribuição de triângulos, para diferentes regiões bidimensionais, observar as figuras (40), (46) e (55). Ressalta-se que a malha final é obtida a partir da malha inicial definida com nós apenas no contorno da geometria.

O "programa" FEM - 2D, permite variar a Constante Multiplicativa, CM, e os ângulos de convergência  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Essa variação possibilita obter diferentes malhas para um mesmo domínio, até que se opte pela melhor malha final. Observa-se que os menores triângulos se concentram próximos as menores arestas definidas no domínio.

É importante ressaltar que a restrição de não se poder introduzir "nós" nas arestas do contorno pode ser compensada pela experiência do pesquisador. Procura-se então alocar um maior número de "nós", durante a definição do domínio, na região de maior variação do campo.

### 6.3 - Propostas para Trabalhos Correlatos

Com o objetivo de dar continuidade ao trabalho, são propostos os seguintes temas

- desenvolvimento e implementação da técnica de introdução de novos "nós" nas arestas do contorno, observando-se o critério de Delaunay;
- desenvolvimento e implementação de técnicas de controle adaptativo da malha final de elementos;
- união da teoria do Método dos Elementos Finitos com a teoria do Método dos Elementos Integrais de Fronteira, em um único trabalho para resolver problemas com contornos fechados e abertos;
- implementação de um "programa" tridimensional (3D) utilizando o Método de Elementos Finitos;

Estes trabalhos deverão utilizar o material já disponível tanto na UFMG/LEAT, como também nos outros centros de estudo de cálculo de campo, UFSC, USP e CEPEL/RIO. Com isto, espera-se aprimorar as técnicas atuais e desenvolver um "programa" que auxilie na análise e projeto de dispositivos e equipamentos elétricos com qualquer geometria.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGYRIS, J.H. (1963). Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis . Pergamon, Elmsford, New York.
- AUBIN, J.P. (1972). Approximation of Elliptic Boundary Value Problems . Willey , Interscience, New York.
- BABUSKA, I. & AZIZ, A.K. (1972). Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method, in A.K. Aziz (ed.), Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to Partial Differential Equations, Academic, New York, pp. 1 - 345.
- BASTOS, J.P.A. (1984). Calcul de Champs Magnétiques par une Méthode D'Éléments Finis 2D et 3D - Contribution à La Détermination des Caractéristiques des Machines à Reluctance Variable Polidiscoïde . Tese de "Doctorat d'Etat", Université Paris VI.

BASTOS, J.P.A. (1989). Eletrromagnetismo e Cálculo de Campos. Ed. da UFSC, Florianópolis, 452p. (Série Didática).

BINNS, K.J. & LAWRENSON, P.J. (1973). Electric and Magnetic Field Problems. 2nd Ed. Pergamon Press. London.

BRYANT, C.F. (1985). Two Dimensional Automatic Triangular Mesh Generation. IEEE Trans on Magnetics, vol Mag 21, n°6, pp.2547-2550.

BYKAT, A. (1976). Automatic Generation of Triangular Grid: I - Subdivision of a General Polygon into Convex Subregions. II - Triangulation of Convex Polygons. IJNME, 10, pp 1329 - 1342.

CARDOSO, J.R. (1985). Problemas de Campos Eletromagnéticos Estáticos e Dinâmicos : Uma Abordagem pelo Método dos Elementos Finitos. Tese de Doutorado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 159p.

CARDOSO, J.R.; ANTONIO, J.M.; LEBENSZTAJN, L.(1989). Geração Automática de Elementos: Uma Experiência

com a Triangulação de Delaunay. II Simposio Franco Brasileiro Sobre Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos. USP . São Paulo.

CAVENDISH, J.C.; FIELD, D.A.C.; FREY, W.H. (1985). An Approach to Automatic Three Dimensional Finite Element Mesh Generation. IJNME , 21 , pp 329 - 347 .

CENDES, Z.J.; SHENTON, D.; SHAHNASSER, H. (1983). Magnetic Field Using Delaunay Triangulation and Complementary Finite Element Methods. IEEE Trans on Magnetics , vol Mag 6 .

CHUNG, T.J. (1977). Finite Element Analysis in Fluid Dynamics . McGraw - Hill , International Book Company, pp. 1 - 152.

CIARLET, P.G. & RAVIART, P.A. (1972). General Lagrange and Hermite Interpolation in  $R^n$  with Application to the Finite Element Method. Arch. Mech. Anal. (46) - 177.

CLOUGH, R.W. (1960). The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proc. 2nd. A.S.C.E. Conf.

Electronic Computation , American Society of Civil Engineers, Pittsburg, Pennsylvania, pp. 345 - 378.

COULOMB, J.L. & SABONNADIÈRE, J.C. (1985). CAO en Électrotechnique. Hermes Publishing. Paris.

COURANT (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. Bull. of Amer. Math. Soc., vol 49, pages 1-23.

HAHN, S.Y.; CAMELS, C.; MEUNIER, G.; COULOMB, J.L.(1988). A Posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation. IEEE Trans on Magnetics, vol 24, n°1, pp.315-317.

HAYT Jr., W.H. (1983). Eletromagnetismo. 3ª Edição, Rio de Janeiro: LTC.(Tradução de Paulo César Pfaltzgraff Ferreira).

HEIGHWAY, E.A. & BIDDLECOMBE, C.S.(1982). Two Dimensional Automatic Triangular Mesh Generation for the Finite Element Electromagnetics Package PE2D. IEEE Trans on Magnetics, vol Mag 18, n°2, pp.594-598.

HUEBNER, K.H. (1975). The Finite Element Method for Engineers. John Willey and Sons, New York.

FUJITA, M. & YAMANA, M. (1988). Two-Dimensional Automatically Adaptive Finite Element Mesh Generation. IEEE Trans on Magnetics, vol 24, n<sup>o</sup>1, pp.303-306.

KRASNOV, M.L.; MAKARENKO, G.I.; KISELIOV, A.I. (1984). Cálculo Variacional, Editora Mir.

KRAUS, J.D. & CARVER, K.R. (1978). Eletrromagnetismo. 2<sup>a</sup> Edição, Rio de Janeiro: Guanabara Dois. (Tradução de Weber Figueiredo da Silva).

KUFFEL, E. & ZAENGL, W.S. (1984). High Voltage Engineering. Pergamon Press, pp. 209 - 294.

LINDHOLM, A.D. (1983). Automatic Triangular Mesh Generator on Surface of Polyedra. IEEE Trans on Magnetics 19(6) pp. 2539 - 2542 .

MAFRA JR., J.J. & VASCONCELOS, J.A. (1989). Cálculo de Potenciais Flutuantes pelo Método dos Elementos Finitos. II Simposio Franco Brasileiro Sobre

Cálculo de Campos Elétricos e Magnéticos. USP - S.P.

MOTA, A.L.(1989).Relatorio de Atividades - Bolsa de Iniciação Científica.Departamento de Engenharia Elétrica. EEUFMG.

ODEN, J.T. (1972). Finites Elements of Nonlinear Continua. McGraw - Hill, New York.

ODEN, J.T. & REDDY, J.N. (1976). Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements. John Willey and Sons, New York.

PINCHUK, A.R. & SILVESTER, P.P.(1985). Error Estimation for Automatic Adaptive Finite Element Mesh Generation. IEEE Trans on Magnetics, vol Mag 21, n<sup>o</sup> 6, pp.2551-2554.

RAYLEYGH, J.W.S. (1977). Theory of Sound. 1st. Ed., Revised, Dover, New York.

RIBEIRO, E.E. (1987). Cálculo de Campos Eletrostáticos Laplacianos Através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado apresentada ao

CPGEE da Escola de Engenharia da UFMG, 145p.

RITZ, W. (1909). Über Eine Neue Method zur Lösung Gewisser Variations - Probleme der Mathematischen Physic. J. Reine Angew. Math. 135 (1) :1:61.

SABONNADIÈRE, J.C. & COULOMB, J.L. (1986). La Methode des Elements Finis. Hermes Publishing. Paris.

SALDANHA, R.R. & RIBEIRO, E.E.(1986). Métodos dos Elementos Finitos com Geração e Otimização Automática da Malha. Anais do VI Congresso Brasileiro de Automática. Vol. 2:881-886.

SALDANHA, R.R. (1988). Notas de Aula - Disciplina Cálculo de Campo. CPGEE - EEUFMG.

SHEPHARD, M.S. & YERRY, M.A. (1983). Approaching the Automatic Generation of Finite Element Meshes. Computers in Mech. Eng. vol 1 , no4 , pp. 49 - 56.

SHEPHARD, M.S. (1985). Automatic and Adaptive Mesh Generation. IEEE Trans on Magnetics, vol Mag 21, n° 6, pp.2484-2489.

SILVESTER, P.P.; LOWTHER, D.A.; FREEMAN, E.M. (1980).  
Finite Element Mesh Generation Using a Small  
Computer with Interactive Raster Graphics. ICEM.

SILVESTER, P.P. & FERRARI, R.L. (1983). Finite Elements  
for Electrical Engineers. Cambridge University  
Press.

STRANG, G. & FIX, G.J. (1973). An Analysis of Finite  
Element Method. Prentice Hall, Englewood Cliffs,  
New Jersey.

TURNER, M.; CLOUGH, R.; MARTIN, H.; TOPP, L. (1956).  
Stiffness and Deflection Analysis of Complex  
Structures. J. Aero - Sci 23(9) pp. 805 - 823.

YIXIN, M.; MINGWU, F.; WEILI, Y.(1988). Advanced Two  
Dimensional Automatic Triangular Mesh Generation  
for DE2D Interactive Software Package. IEEE Trans  
on Magnetics, vol 24, n°1, pp.318-321.

ZHOU, J.M.; SHAO, K.R.; LAVERS, J.D. (1989). Automatic  
Mesh Generation Allowing for Efficient a Priori  
and a Posteriori Control of the Number and  
Distribution of Elements. IEEE Trans on Magnetics,

vol 25, n°4, pp.2983-2985.

ZIENKIEWICZ, O.C. (1977). The Finite Element Method.  
3rd. ed. Swansea, U.K., McGraw - Hill, 787p.

ZIENKIEWICZ, O.C. & CHEUNG, Y.K. (1965). Finite  
Elements in the Solution of Field Problems. The  
Engineer, pp. 507 - 510.

ZIENKIEWICZ, O.C. & PHILLIPS, D.V. (1971). An Automatic  
Mesh Generation Scheme for Plane and Curved  
Surfaces by Isoparametric Coordinates. IJNME , 3 ,  
p519.

## APÊNDICE A

## UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO "MEF" UNIDIMENSIONAL

O objetivo deste apêndice é ilustrar uma aplicação do método de elementos finitos em problemas unidimensionais.

O elemento linear unidimensional é um segmento de comprimento  $L$  e dois nós, um em cada extremo, fig. (57) abaixo. Os nós são denominados "i" e "j" e os valores nodais por  $\Phi_i$  e  $\Phi_j$ . A origem do sistema de coordenadas está à esquerda do nó "i".

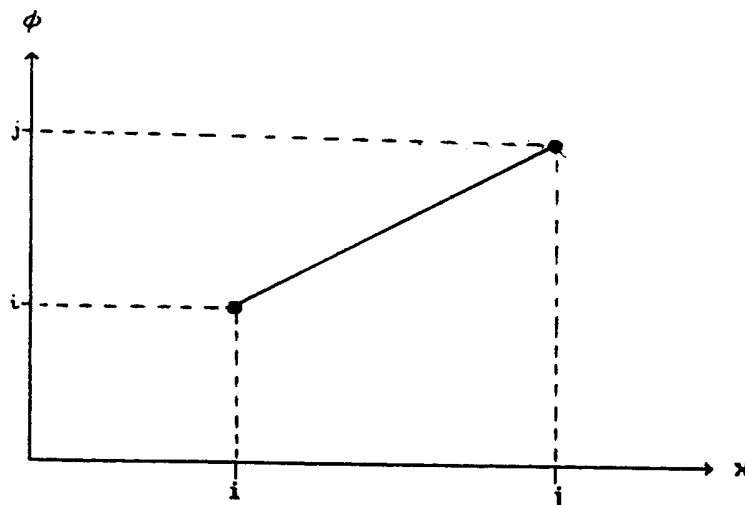


Figura 57 - Elemento linear unidimensional

O parâmetro  $\phi$  varia linearmente entre os nós, e a equação para  $\phi$  é

$$\phi = a_1 + a_2 x \quad (A1)$$

Os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  podem ser determinados usando as condições nodais

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi}_i \quad \text{em } x = X_i \\ \phi &= \bar{\phi}_j \quad \text{em } x = X_j \end{aligned} \quad (A2)$$

para desenvolver o par de equações

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i &= a_1 + a_2 X_i \\ \bar{\phi}_j &= a_1 + a_2 X_j \end{aligned} \quad (A3)$$

que dá  $a_1$  e  $a_2$  como

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\bar{\phi}_i X_j - \bar{\phi}_j X_i}{X_j - X_i} \\ a_2 &= \frac{\bar{\phi}_j - \bar{\phi}_i}{X_j - X_i} \end{aligned} \quad (A4)$$

Substituindo-se (A4) em (A1) e rearranjando, obtém-se

$$\phi(x) = \left[ \frac{X_j - x}{L} \right] \Phi_i + \left[ \frac{x - X_i}{L} \right] \Phi_j \quad (A5)$$

onde  $X_j - X_i$  foi substituído pelo comprimento do elemento,  $L$ .

A equação (A5) é uma forma padrão de elemento finito. Os valores nodais são multiplicados por funções lineares de  $x$ , as quais são chamadas de funções de forma ou funções de interpolação. Essas funções são denominadas por  $N$  com um subíndice para indicar a qual nó cada função de forma está associada.

As funções de forma em (A5) são denominadas por  $N_i$  e  $N_j$  com

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \quad \text{e} \quad N_j = \frac{x - X_i}{L} \quad (A6)$$

A equação (A5) pode ser reescrita como

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j \quad (A7)$$

e também como

$$\phi = [N] \{ \Phi \} \quad (A8)$$

$$\text{onde } [N] = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \text{ e } \{ \Phi \} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$$

Exemplo : Um elemento linear unidimensional foi usado para aproximar a distribuição de temperatura em uma barra. A solução indica que as temperaturas nos nós "i" e "j" são  $120^\circ$  e  $90^\circ$  C, respectivamente. Determinar a temperatura no ponto 4 cm da origem e o gradiente de temperatura do elemento. Os nós "i" e "j" estão localizados em 1,5 e 6,0 cm da origem.

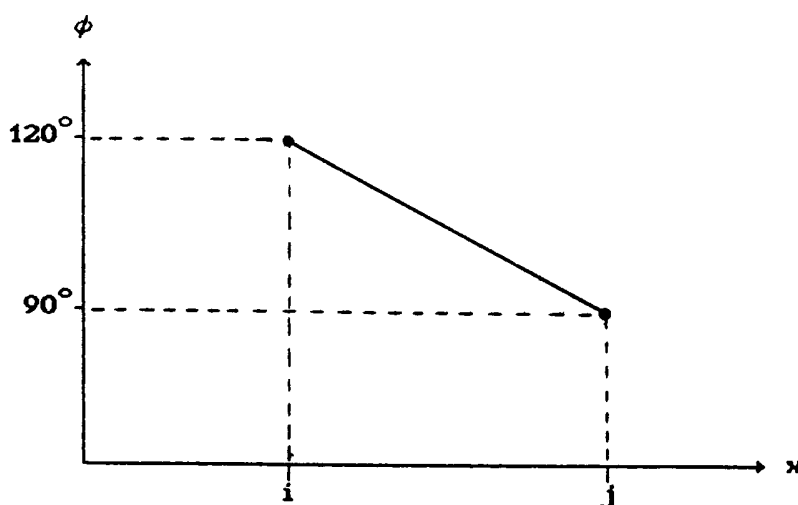


Figura 58 - Exemplo de aplicação do MEF em elemento linear unidimensional

Para calcular a temperatura em  $x = 4$  aplica-se diretamente a equação (A5)

$$\phi(x = 4) = \left[ \frac{6 - 4}{4,5} \right] 120 + \left[ \frac{4 - 1,5}{4,5} \right] 90$$

$$\phi(x = 4) = 103,3^{\circ}\text{C}$$

O gradiente de temperatura do elemento é encontrado derivando-se  $\phi(x)$  em relação a  $x$ , assim

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \left[ \frac{90 - 120}{4,5} \right] = -6,67^{\circ}\text{C/cm}$$

## APÊNDICE B

## A INTRODUÇÃO DO PRIMEIRO "NÓ" NO REFINO DA MALHA DE ELEMENTOS

O objetivo deste apêndice é seguir passo a passo os critérios sugeridos por Bryant (BRYANT, 1985) para a introdução de "nós" interiores a uma determinada geometria, para melhor ilustrar o método.

Considera-se a figura (59) abaixo, em forma de L, à qual foi aplicado o critério de Delaunay para gerar a malha inicial.

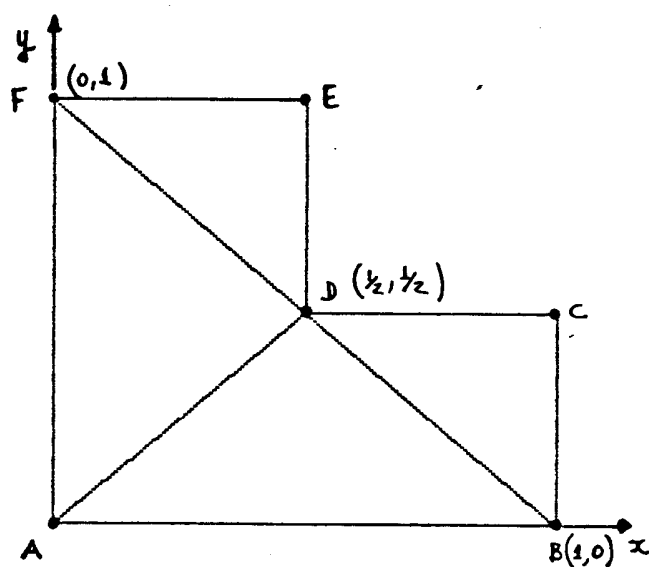


Figura 59 - Geometria em forma de L

Observar que não se tem nenhum "nó" interior à malha inicial.

PASSO 1) Escolha do "nó ativo".

"A priori" todos os nós são ativos.  
Escolheu-se o ponto "A" como nó "ativo" a ser analisado.

PASSO 2) Determinação da lista de arestas.

Baseado no nó "A" tem-se a seguinte lista de arestas

" nó ativo "	Lista de Arestas
"A"	$\overline{AB}$ $\overline{AD}$ $\overline{AF}$

PASSO 3) Calcular a diferença angular entre as arestas adjacentes, a soma de todos os ângulos deverá ser igual a  $360^\circ$ .

Considerando-se adjacentes as arestas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AF}$  tem-se que a soma dos ângulos internos e externos a esses pares de arestas é igual a  $360^\circ$ .

PASSO 4) Determinação da aresta "aceitável" :

Critério ii) O aresta não deve ser um aresta do contorno. Este critério elimina da lista do passo 2 as arestas  $\overline{AB}$  e  $\overline{AG}$ , que pertencem ao contorno da geometria. Com isso, apenas a aresta  $\overline{AD}$  passa a ser analisada.

Critério i) O comprimento da aresta deve ser maior que a distância dada pela interseção dele mesmo (extendido se necessário) com a função distância (incluindo as constantes multiplicativas) associada aos dois pontos extremos da aresta.

- Cálculo do comprimento da aresta  $\overline{AD}$ :

$$d_{\overline{AD}} = \sqrt{\left[ x_A - x_D \right]^2 + \left[ y_A - y_D \right]^2}$$

$$d_{\overline{AD}} = \sqrt{\left[ 0 - 1/2 \right]^2 + \left[ 0 - 1/2 \right]^2} = 0,71$$

$$d_{\overline{AD}} = 0,71$$

- Determinação da "função distância" associada aos pontos "A" e "D" que limitam a aresta  $\overline{AD}$  :

Para nós do contorno a "função distância" assume a seguinte forma

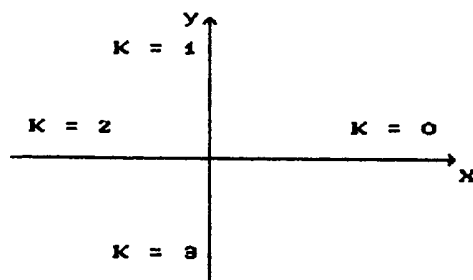
$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) + c \cos^2(\theta) \\ y = b \sin(\theta) + d \sin^2(\theta) \end{cases}$$

- Determinação de "a" e "b" para o nó "A"

Considerando-se as arestas  $\overline{AB}$  e  $\overline{AF}$  como sendo as arestas do contorno ligados ao nó "A".

A) Rotacionar cada aresta para a posição  $K90^\circ$  mais próxima,  $a_1$  e  $a_2$  por exemplo, onde  $K = 0, 1, 2$  ou  $3$ .

Tomando-se como referência o sistema abaixo e comparando-o com a figura (59) tem-se



$\overline{AB} \rightarrow K = 0 \rightarrow$  posição  $a_1$

$\overline{AF} \rightarrow K = 1 \rightarrow$  posição  $a_2$

B) Calcular o comprimento das arestas  $\overline{AB}$  e  $\overline{AF}$ ,  $d_1$  e  $d_2$  por exemplo.

$$\overline{AB} = d_1 = 1$$

$$\overline{AG} = d_2 = 1$$

C) Agora faça

$$q_0 = \text{MIN} ( d_1 , d_2 ) \rightarrow q_0 = d_1 = d_2 = 1$$

$$q_1 = \text{MAX} ( d_1 , d_2 ) \rightarrow q_1 = d_1 = d_2 = 1$$

$$q_2 = 0,5 ( d_1 + d_2 ) \rightarrow q_2 = d_1 = d_2 = 1$$

D) Se as posições  $a_1$  e  $a_2$  forem idênticas, fazer

$$a = b = q_1$$

Como as posições de  $a_1$  e  $a_2$  não são idênticas, ver critério A, tem-se

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow a \neq b \neq q_1$$

E) Escolher "a" e "b" de acordo com a posição de  $q_0$ , isto é,  $K = 0, 1, 2$  ou  $3$

$$q_0 = d_1 = d_2 = 1$$

$$d_1 \rightarrow \text{posição } a_1 \rightarrow K = 0$$

$$K = 0 \rightarrow a = q_2; b = q_1; c = (a-b); d = 0$$

$$a = 1; b = 1; c = 0; d = 0$$

Escolhendo-se  $d_2$  tem-se

$$d_2 \rightarrow \text{posição } a_2 \rightarrow K = 1$$

$$K = 1 \rightarrow a = -q_1; b = -q_2; c = 0; d = (a - b)$$

$$a = -1; b = -1; c = 0; d = 0$$

Ou seja  $d_1 = d_2$  resulta na mesma "função distância" associada ao nó "A"

$$\begin{cases} x = 1 \cos(\theta) \\ y = 1 \text{ SEN}(\theta) \end{cases}$$

- Determinação do ponto de interseção da aresta  $\overline{AD}$  ( $y = x$ ) com a "função distância" associada ao nó "A":

Resolvendo-se o sistema de equações formado pela equação que define a aresta  $\overline{AD}$  e a equação da "função distância" associada ao nó "A", tem-se

$$\cos(\theta) = \text{SEN}(\theta) \text{ para } \theta = 45^\circ \text{ e } \theta = 225^\circ$$

Assim

$$x = y = 0,71 \text{ e } x = y = -0,71$$

Admitindo-se uma Constante Multiplicativa,

CM = 0.5 tem-se

$$x = y = 0,355 \text{ e } x = y = -0,355$$

Procedendo-se da mesma maneira pode-se determinar "a" e "b" para o nó "D"

$$A) DC \rightarrow K = 0 \rightarrow \text{posição } a_1$$

$$DE \rightarrow K = 1 \rightarrow \text{posição } a_2$$

$$B) DC = d_1 = 1/2$$

$$DE = d_2 = 1/2$$

$$C) q_0 = \text{MIN} ( d_1 , d_2 ) \rightarrow q_0 = d_1 = d_2 = 1/2$$

$$q_1 = \text{MAX} ( d_1 , d_2 ) \rightarrow q_1 = d_1 = d_2 = 1/2$$

$$q_2 = 0,5 ( d_1 + d_2 ) \rightarrow q_2 = d_1 = d_2 = 1/2$$

$$D) a_1 = a_2 \rightarrow a = b = q_1$$

$$E) q_0 = d_1 = d_2 = 1/2$$

$$d_1 \rightarrow \text{posição } a_1 \rightarrow K = 0$$

$$K = 0 \rightarrow a = 1/2; b = 1/2; c = 0; d = 0$$

Escolhendo-se  $d_z$  tem-se

$$d_z \rightarrow \text{posição } a_z \rightarrow K = 1$$

$$K = 1 \rightarrow a = -1/2; b = -1/2; c = 0; d = 0$$

Ou seja,  $d_1 = d_z$  resulta na mesma "função distância" para o nó "D"

$$\begin{cases} x = 1/2 \cos(\theta) \\ y = 1/2 \sin(\theta) \end{cases}$$

- Determinação do ponto de interseção da aresta  $\overline{AD}$  ( $y = x$ ) com a "função distância" associada ao nó "D":

Resolvendo-se o sistema de equações formado pela equação que define a aresta  $\overline{AD}$  e a equação da "função distância" associada ao nó "D", tem-se

$$\cos(\theta) = \sin(\theta) \text{ para } \theta = 45^\circ \text{ e } \theta = 225^\circ$$

$$x = y = 0,71 \text{ e } x = y = -0,71$$

Admitindo-se uma Constante Multiplicativa,

CM = 0.5 tem-se

$$x = y = 0,355 \text{ e } x = y = -0,355$$

Agora, calcula-se e compara-se o comprimento

do segmento  $\overline{A'D'}$  formado pela interseção das "funções distâncias" associadas aos nós "A" e "D" com a aresta  $\overline{AD}$ , ver figura (56) abaixo

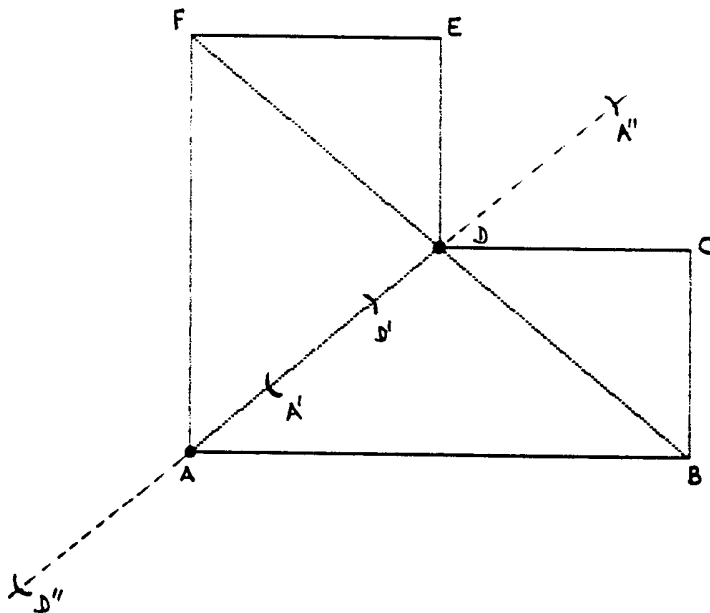


Figura 60 - Interseção das funções distância

Ou seja, a função distância associada ao nó "A" intercepta a aresta  $\overline{AD}$  nos pontos  $D'$  e  $D''$  e a função distância associada ao nó "D" intercepta a aresta  $\overline{AD}$  nos pontos  $A'$  e  $A''$ , formando-se o segmento  $\overline{A'D'}$  de interseção entre as duas funções distância.

$$d_{\overline{A'D'}} = \sqrt{(x_{A'} - x_{D'})^2 + (y_{A'} - y_{D'})^2}$$

$$d_{\overline{A'D'}} = \sqrt{\left[0.145 - 0.355\right]^2 + \left[0.145 - 0.355\right]^2}$$

$$d_{\overline{A'D'}} = 0.297$$

Comparando-se  $d_{\overline{AD}}$  com  $d_{\overline{A'D'}}$  obtém-se

$$d_{\overline{AD}} > d_{\overline{A'D'}}$$

Continuando a análise dos critérios, tem-se

Critério iii) Deverá existir um ângulo de no mínimo ( $\gamma_1$ ) tanto no sentido horário como no sentido anti-horário da aresta em análise em direção à primeira aresta "inaceitável". ( $\gamma_1 = 30^\circ$ )

Considerando a aresta  $\overline{AD}$  em análise, tem-se

$$\overline{AD} \angle \overline{AB} = 45^\circ > 30^\circ$$

$\overline{AB}$  primeira aresta "inaceitável" no sentido horário

$$\overline{AD} \angle \overline{AF} = 45^\circ > 30^\circ$$

$\overline{AF}$  primeira aresta "inaceitável" no sentido anti-horário

Critério iv) O ângulo entre a aresta anterior e a aresta posterior deve ser menor que  $180^\circ$ .

Considerando  $\overline{AF}$ , aresta posterior, e  $\overline{AB}$ , aresta anterior, tem-se

$$\overline{AF} \angle \overline{AB} = 90^\circ < 180^\circ$$

- Determinação das coordenadas do possível nó interior

Considerando o nó  $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ ,  $d_1 = \overline{AB}$ ,  $d_2 = \overline{AF}$  e utilizando a equação (74) tem-se

$$x_i = (1 \times 0.5 + 1 \times 0) / (1 + 1) = 0.25$$

$$y_i = (1 \times 0.5 + 1 \times 0) / (1 + 1) = 0.25$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = 0.25 \\ y_i = 0.25 \end{array} \right. \quad \text{ponto I}$$

Ver figura (61) a seguir

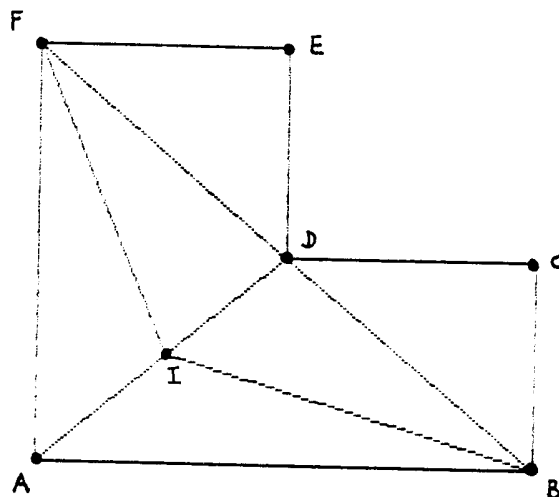


Figura 61 - Localização do nó interior

Critério v) Se uma aresta é partida (biseccionado) e se ambas as linhas vão para um nó do contorno, o ângulo entre a aresta do contorno e a linha da biseção deve ser maior que  $(\gamma/2)$ . ( $\gamma/2 = 15^\circ$ )

Considerando o provável nó interior, I, e as arestas  $\overline{IF}$  e  $\overline{IB}$  da figura anterior, tem-se

$$\overline{FA} \angle \overline{FI} > 15^\circ$$

$$\overline{BA} \angle \overline{BI} > 15^\circ$$

Com isso, pode se concluir que a aresta  $\overline{AD}$ ,

até este passo, é uma aresta "aceitável". A análise final é feita baseando-se no último dos três critérios de aceitabilidade, item 4.3.3, de onde conclui-se definitivamente que a aresta  $\overline{AD}$  é uma aresta "aceitável". O ponto I é então confirmado como um novo "nó" interior da malha.

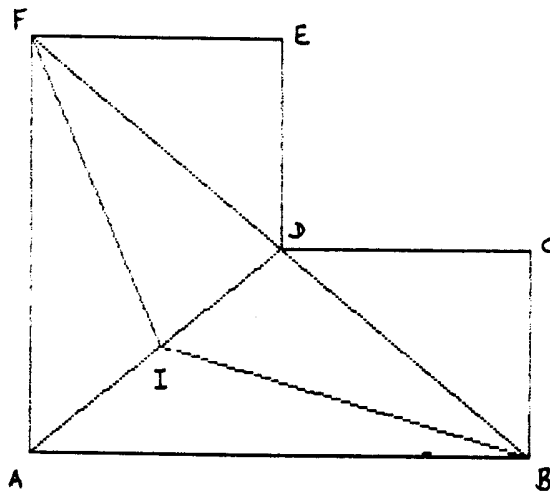


Figura 62 - Malha com 1º "nó" interior

O critério de Delaunay é aplicado após a introdução do nó interior e o algoritmo continua até que se esgotem todas as possibilidades em relação ao ponto "A", quando então é escolhido um outro nó "ativo" da malha, o nó "B" por exemplo. O algoritmo termina quando todos os nós da malha forem testados, inclusive os novos nós criados, e quando não houver mais nenhuma aresta "aceitável" a ser analisada.

## APÊNDICE C

## O PACOTE COMPUTACIONAL FEM - 2D

O pacote computacional FEM - 2D foi desenvolvido para calcular campos eletrostáticos e magnetostáticos em arranjos bidimensionais. Contribuíram significativamente para o FEM - 2D chegar ao estágio atual (MAFRA JR.,1989) e (MOTA, 1989).

Este pacote está implementado em microcomputadores de 16 bits. O tempo de processamento necessário desde a geração da malha inicial de elementos até o cálculo final dos potenciais depende diretamente do número de "nós" alocados na delimitação do domínio  $\Omega$  e do erro admitido na resolução do sistema linear (08), (54) e (74) (resolução pelo método de Gauss - Seidel). Todo o processamento é feito na memória de acesso direto do microcomputador.

A seguir são discutidos cada um dos programas que compõem o pacote computacional FEM - 2D, cujo fluxograma é mostrado na figura (63).

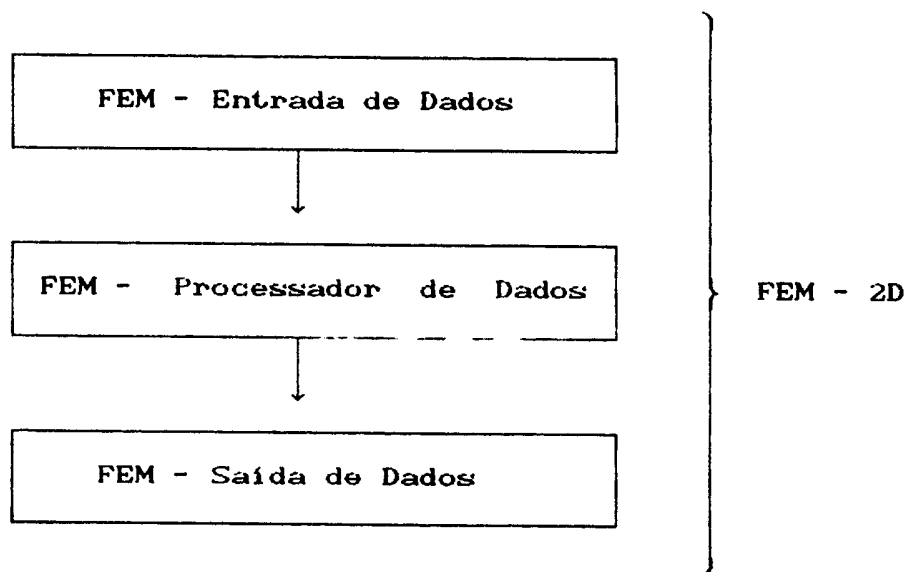


Figura 63 - Programas que compõem o FEM - 2D

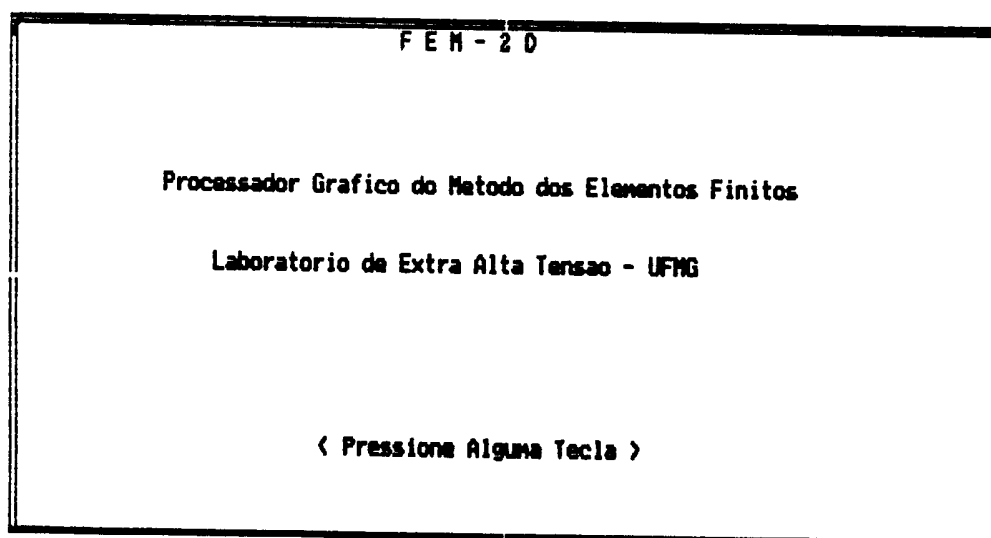


Figura 64 - Início do Pacote Computacional FEM - 2D

O programa FEM - Entrada de Dados representa a parte do pré-processamento do FEM - 2D. Nesta etapa é definido o domínio  $\Omega$  a ser estudado. Faz-se a geração e o refino da malha inicial, além de se introduzir as condições de contorno referentes ao problema. Todos os dados são gravados em arquivo.

A seguir são mostradas os principais passos do programa FEM - Entrada de Dados.

```

FEM - ENTRADA DE DADOS
Existe potencial flutuante ? (S/N)
N
Simetria Axial ou Longitudinal?
A
  
```

Figura 65 - Início FEM - Entrada de Dados

coord. : 100.00, 100.00	
P - Marca o ponto R - Cria reta C - Cria círculo A - Cria arco M - Cria no N - Cria nos num retangulo E - Escala S - Criar subregiao I - Alterar Subregiao X - Sair do CAD O - Outro menu	

Figura 66 - Menu Principal - FEM - Entrada de Dados

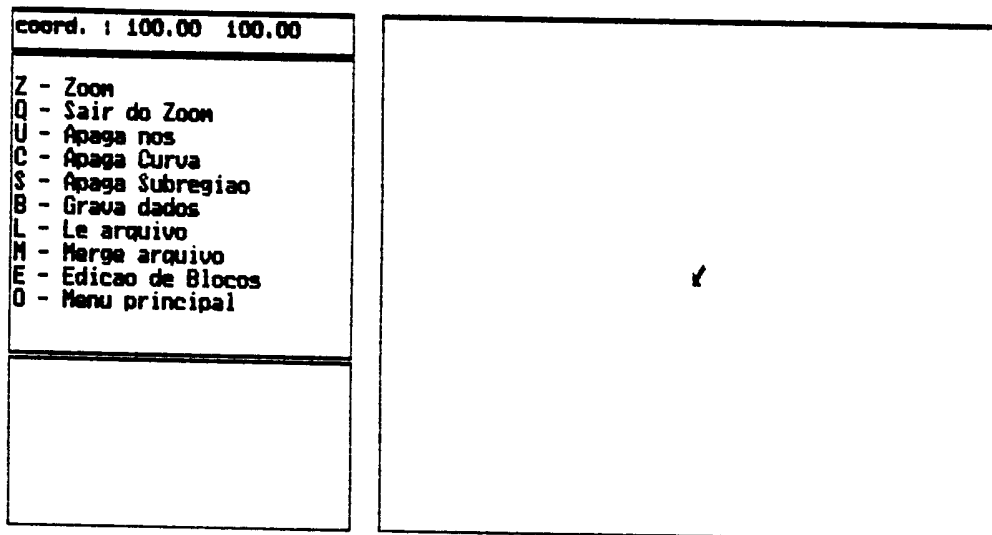


Figura 67 - Outro Menu - FEM - Entrada de Dados

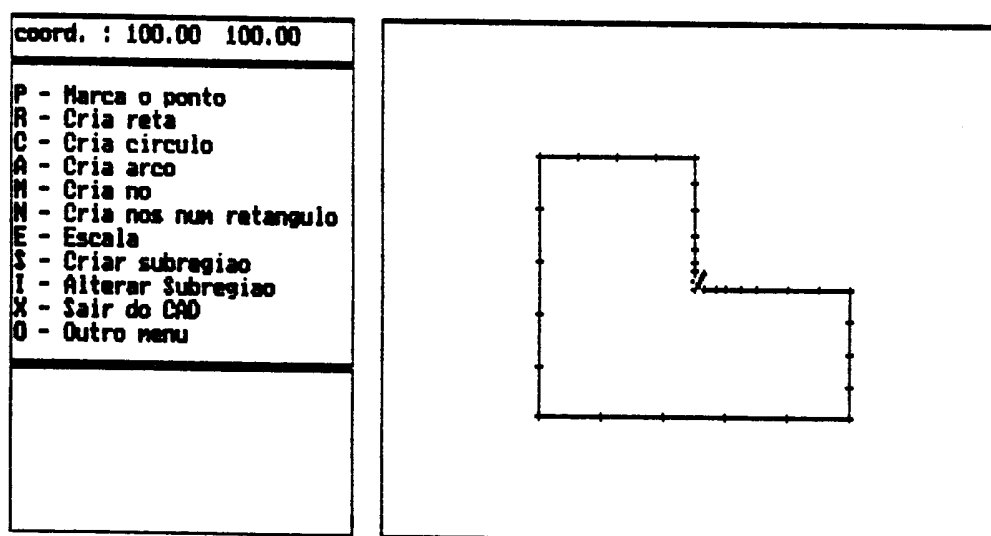


Figura 68 - Construcao da Regiao em L

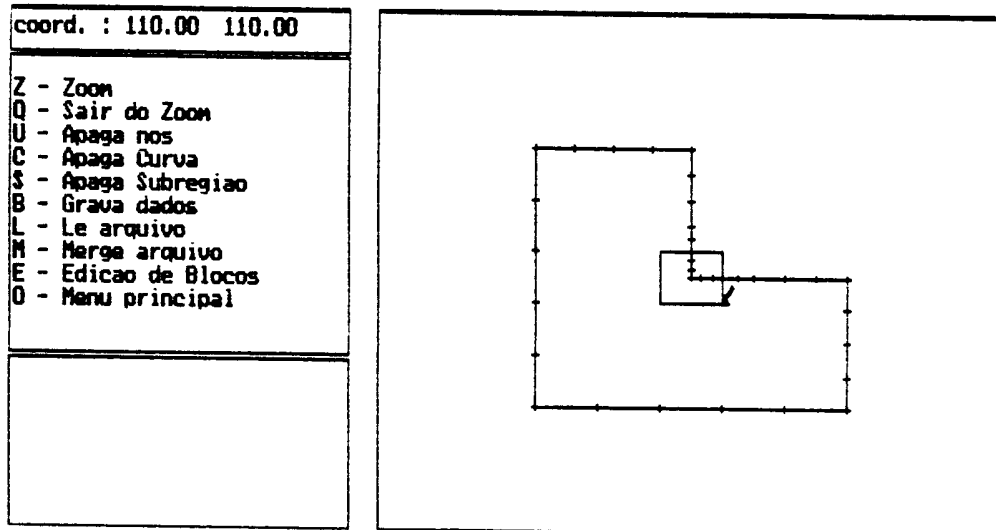


Figura 69 - Opção Zoom - FEM - Entrada de Dados

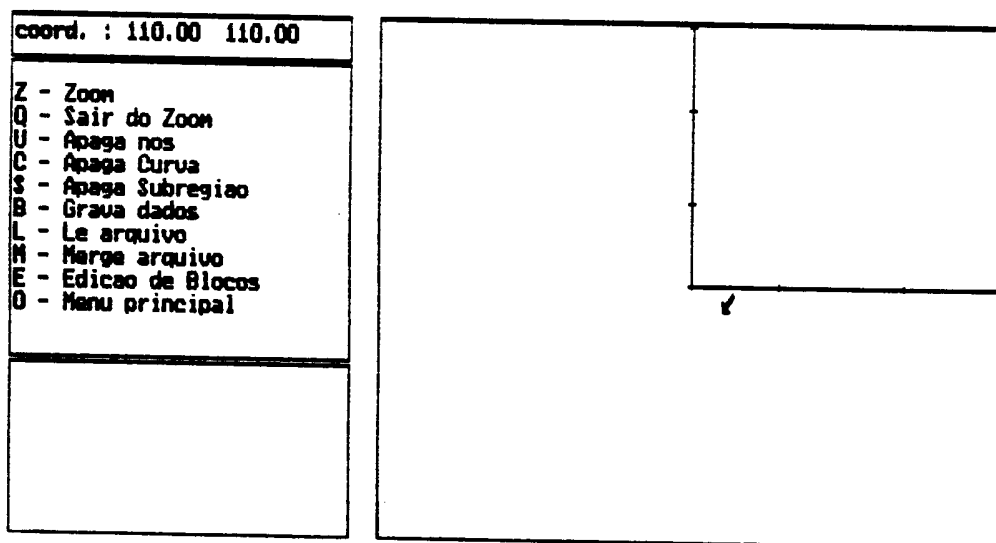


Figura 70 - Zoom da figura (69)

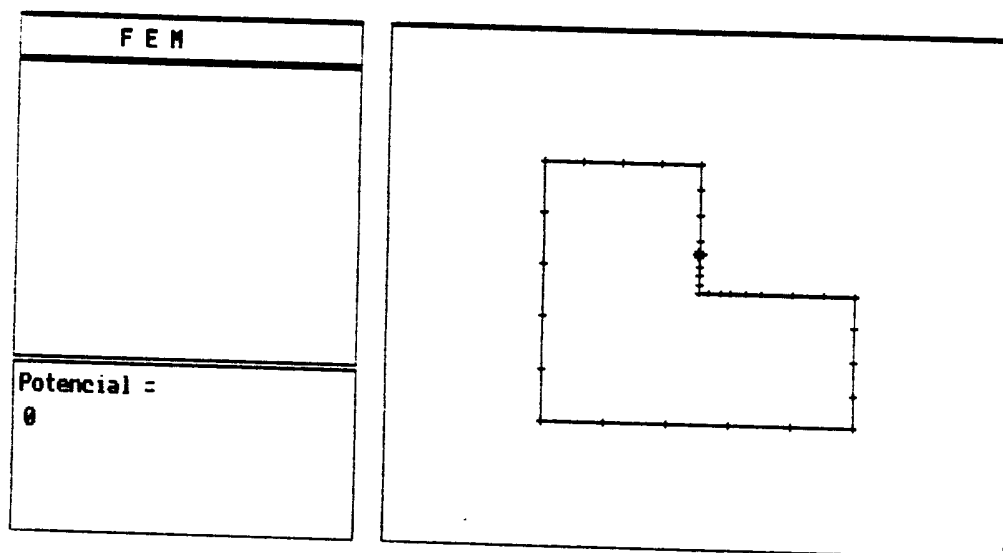


Figura 71 - Definição dos potenciais do contorno

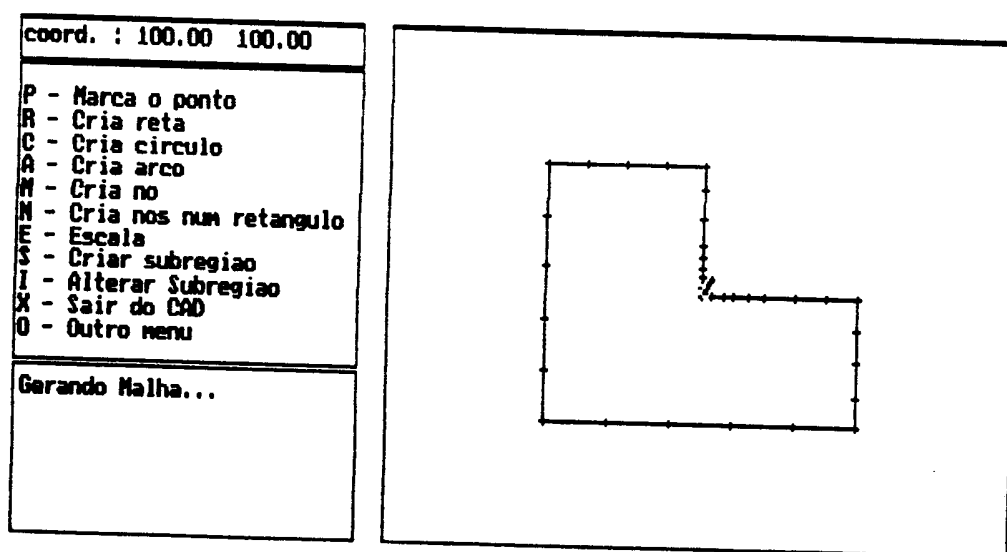


Figura 72 - Gerando Malha

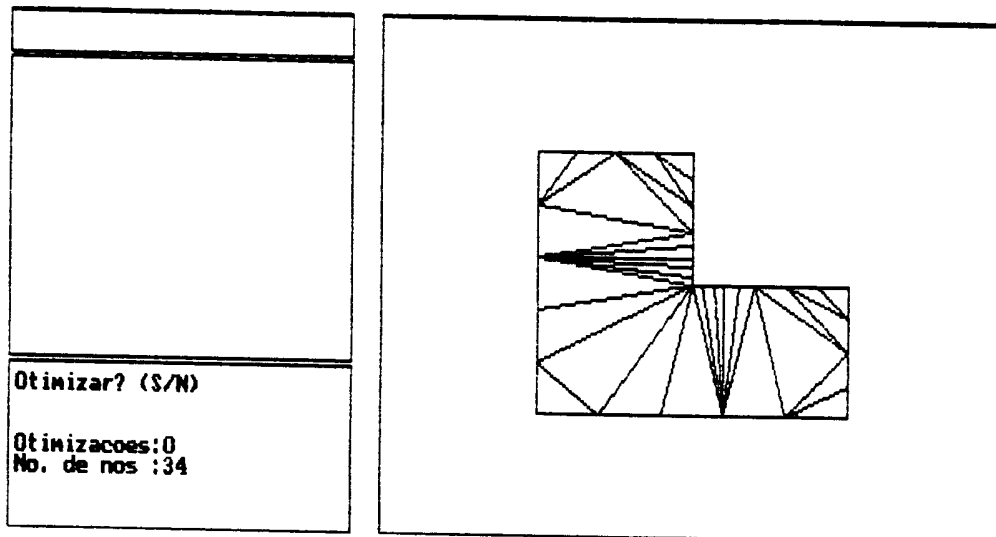


Figura 73 - Malha inicial gerada / Opção para otimizar

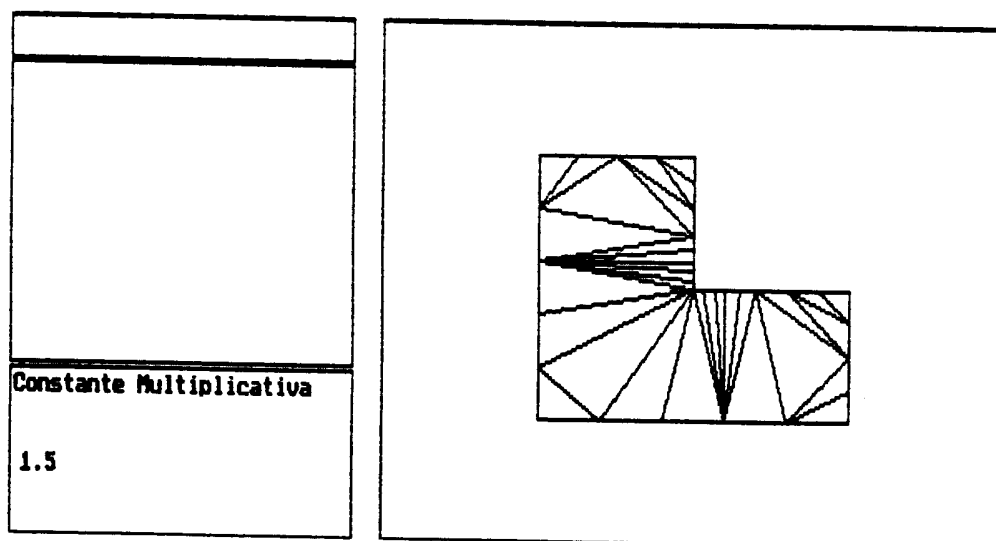
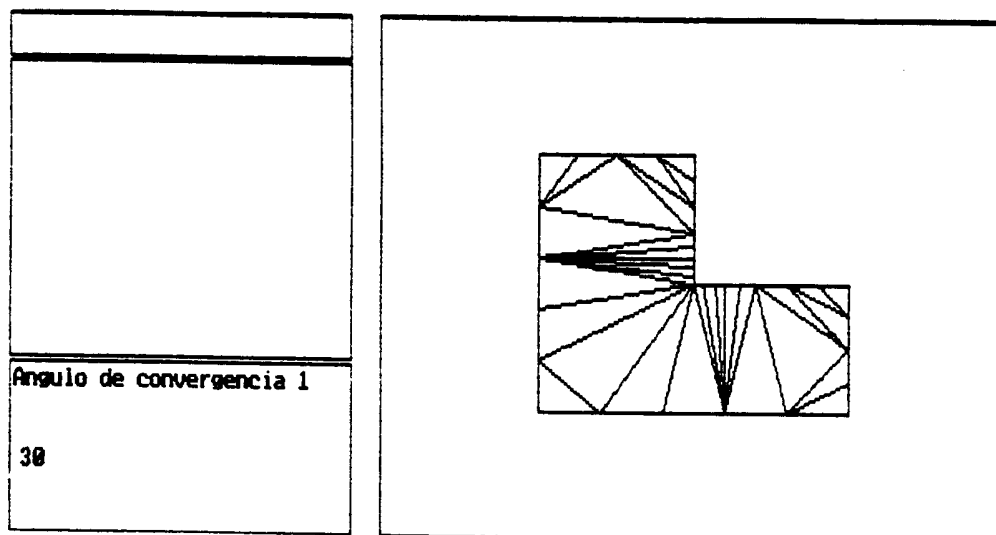
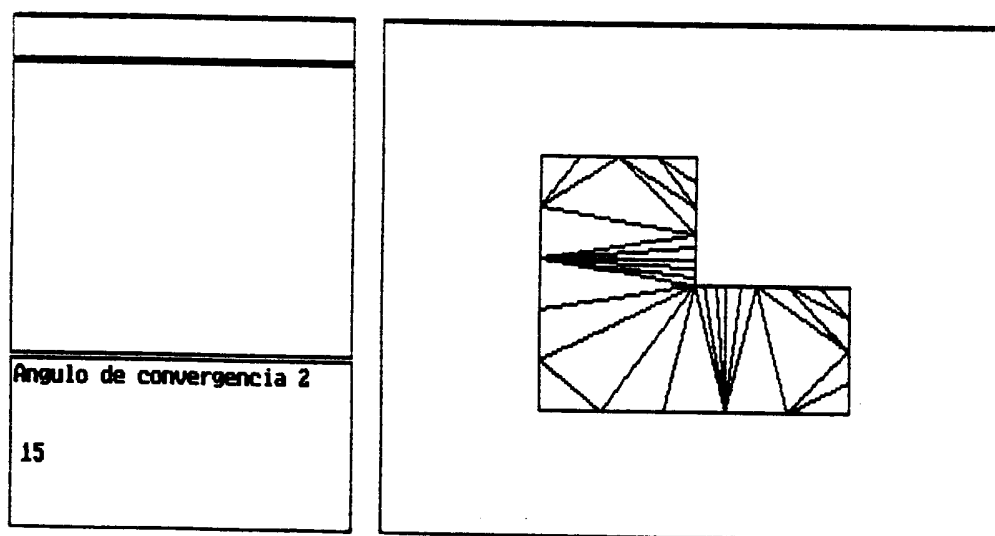


Figura 74 - Constante Multiplicativa (CM)

Figura 75 - Ângulo de convergência 1 -  $\gamma_1$ Figura 76 - Ângulo de convergência 2 -  $\gamma_2$

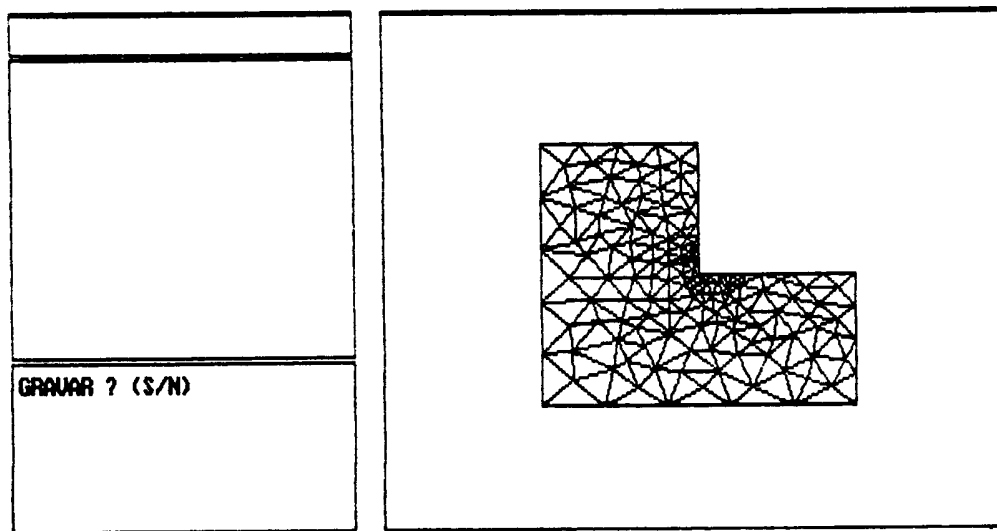


Figura 77 - Malha final obtida

O Programa FEM - Processador consiste na parte do processamento do FEM - 2D. Nesta etapa monta-se e resolve-se o sistema linear (08) para gravar o arquivo resultante a ser analisado no FEM - Saída de Dados.

A seguir são mostrados os principais passos do FEM - Processador de Dados.

FEM - PROCESSADOR DE DADOS  
Existe potencial flutuante ? (S/N)  
N  
Simetria Axial ou Longitudinal?  
A

Figura 78 - Início - FEM - Processador de Dados

F E M
Qual o arquivo? REGIAO_L.DAT

Figura 79 - Leitura do arquivo gerado no FEM - Entrada de Dados

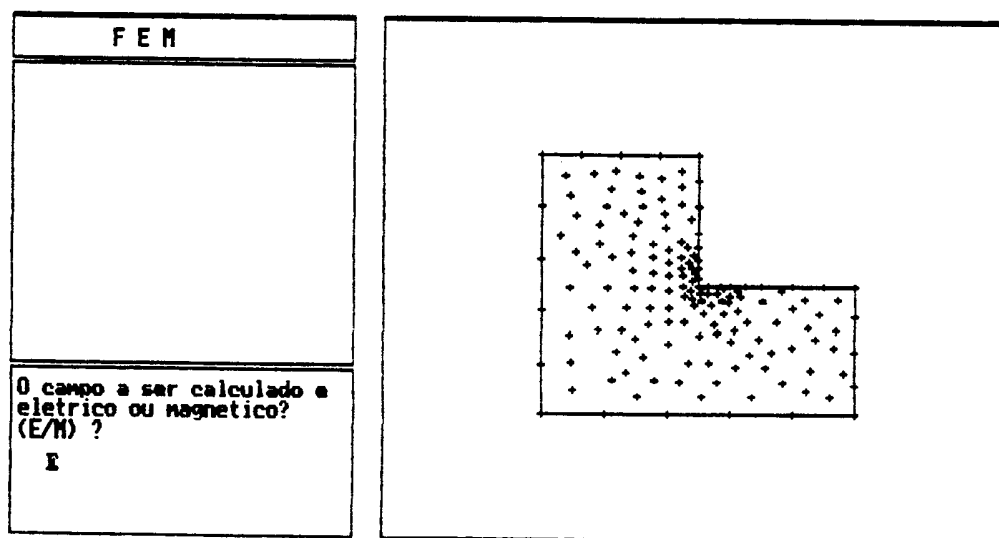


Figura 80 - Definição do campo a ser calculado

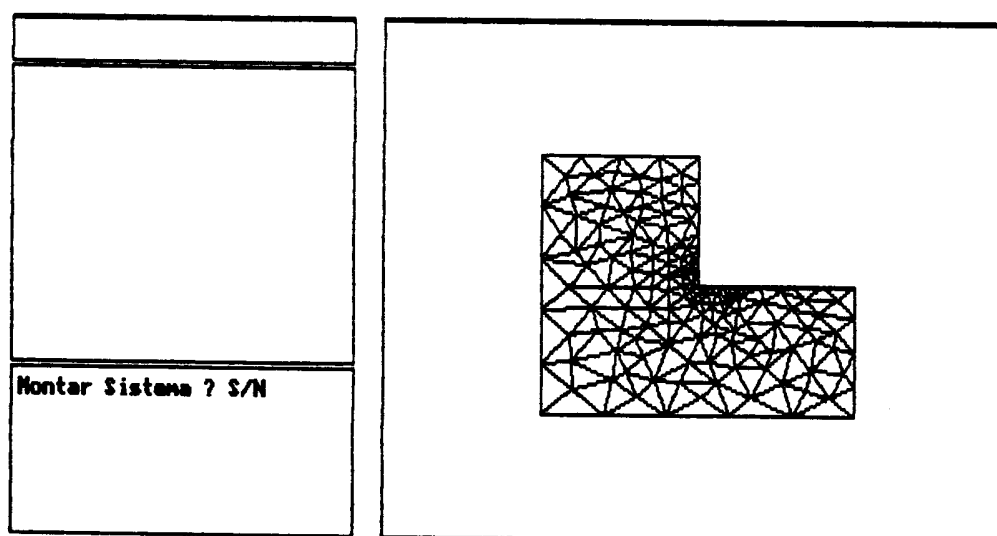


Figura 81 - Malha inicial gerada / Opção para montar o sistema linear (08)

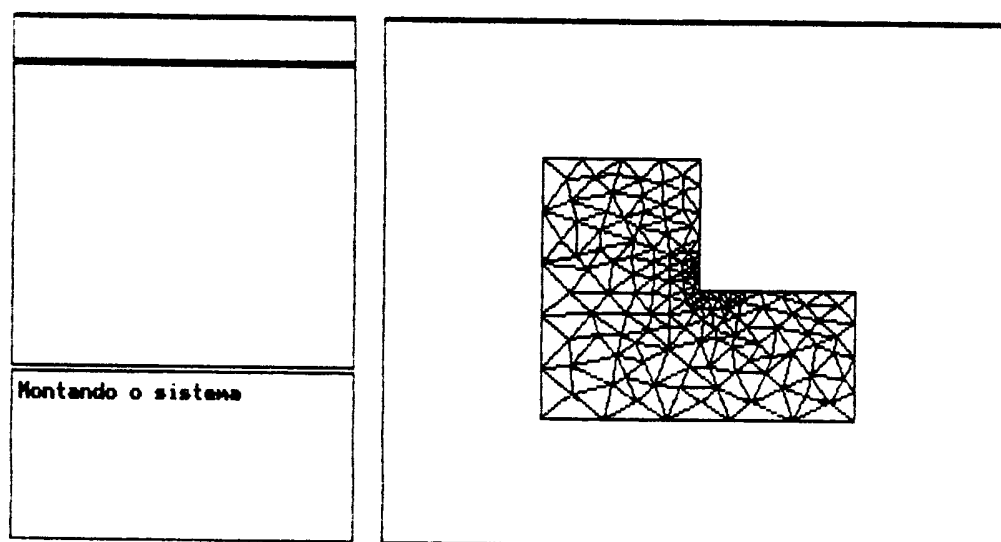


Figura 82 - Montando o sistema linear (08)

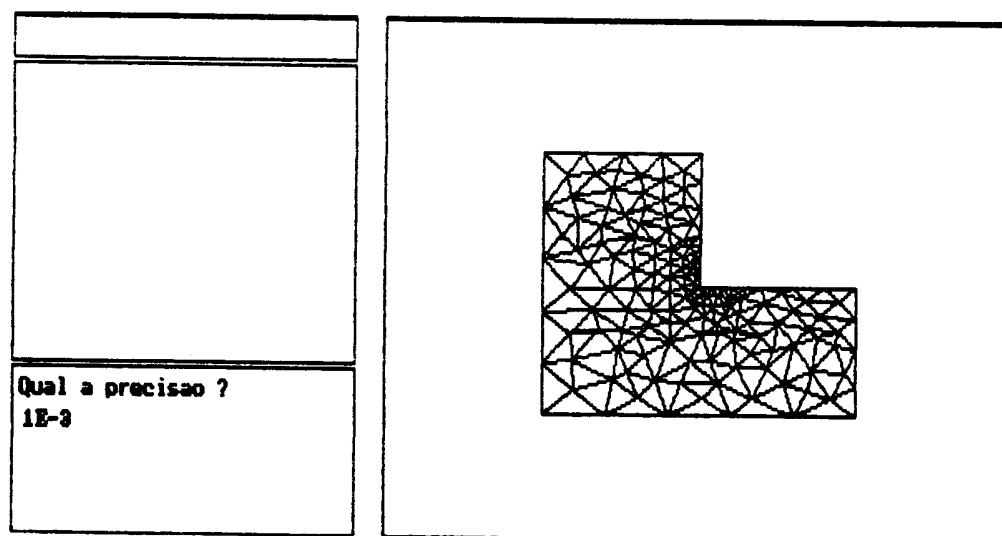


Figura 83 - Precisão para se resolver o sistema linear (08)

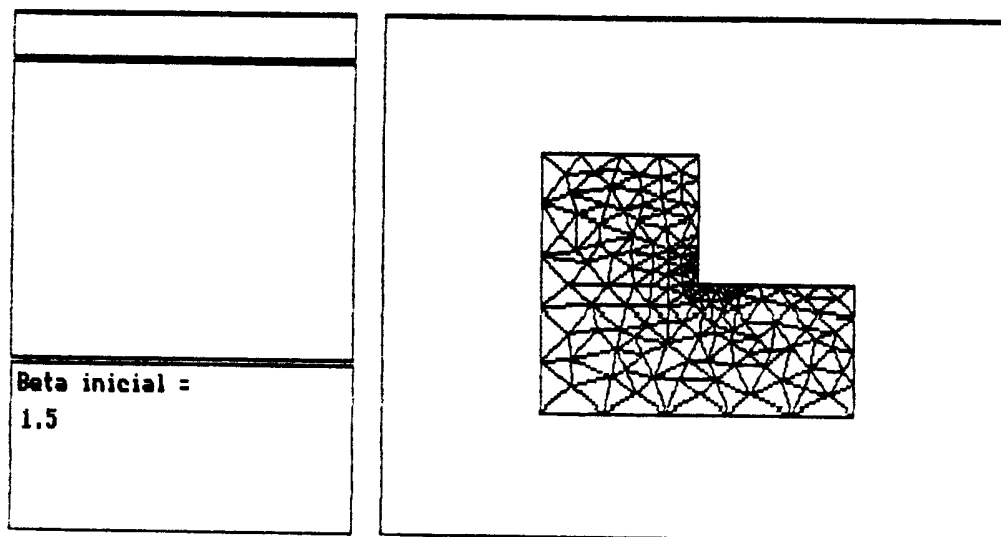


Figura 84 - Beta inicial para se resolver o sistema linear  
(08)

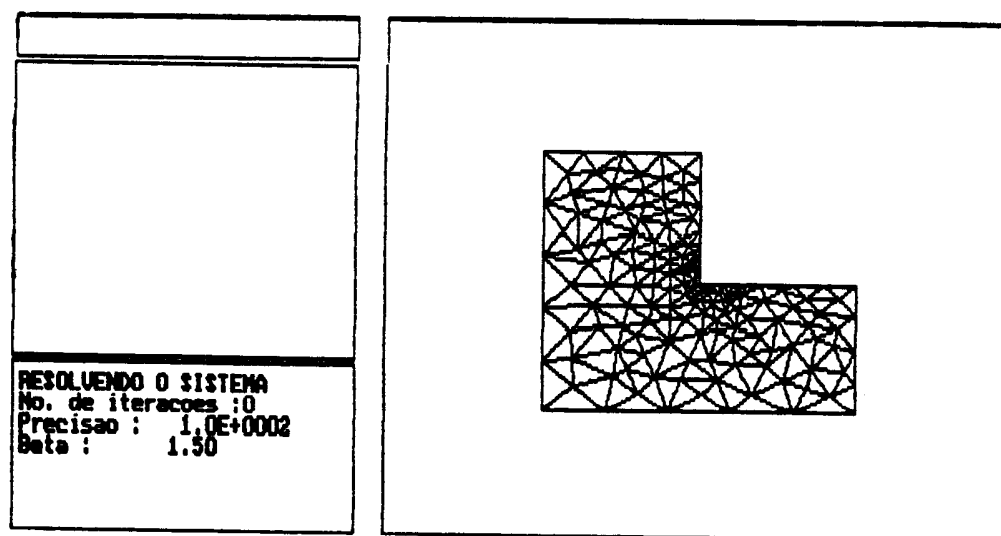


Figura 85 - Resolvendo o sistema linear (08)

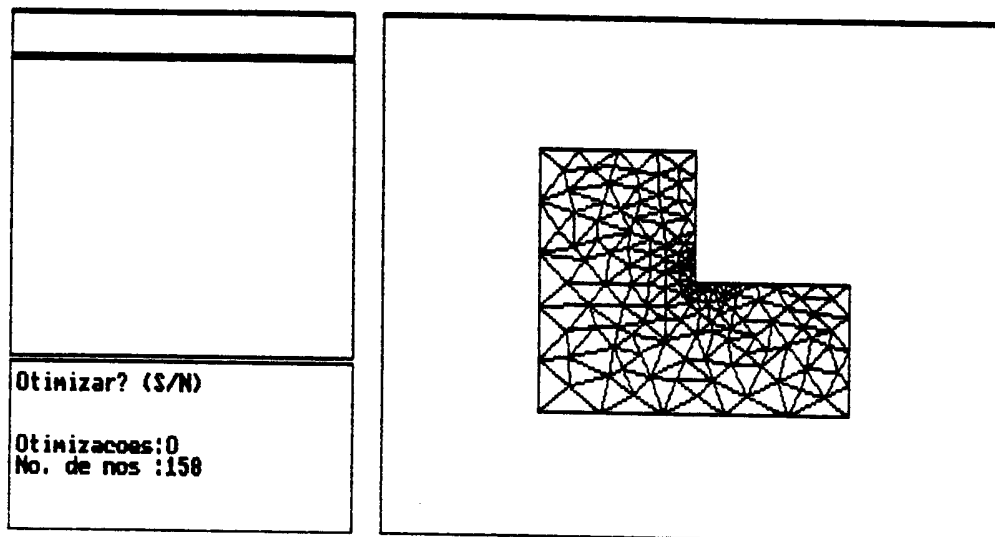


Figura 86 - Opção para mudar a precisão

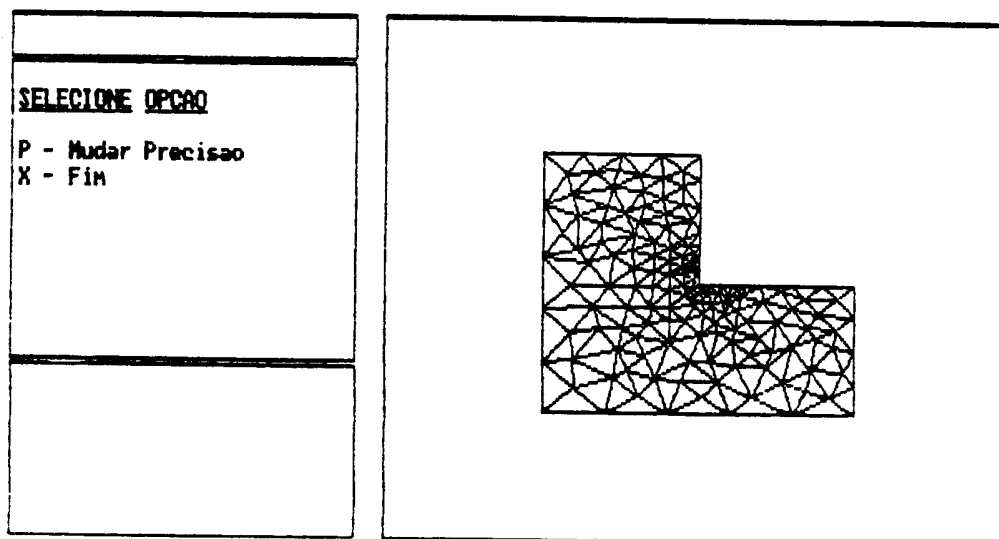


Figura 87 - Opção para gravar o arquivo

O Programa FEM - Saída de Dados consiste na parte de pós-processamento do FEM - 2D. Nesta etapa são analisados e impressos os resultados obtidos tanto na entrada como no processamento de dados.

A seguir são mostrados os principais passos do FEM - Saída de Dados.

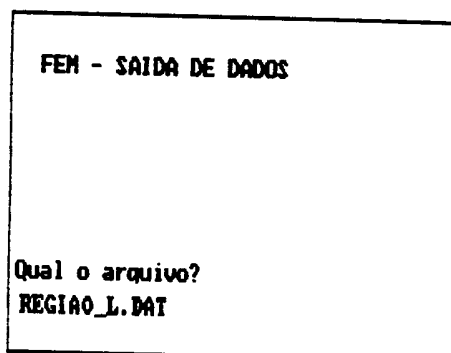


Figura 88 - Início - FEM - Saída de Dados

FEM - SAIDA DE DADOS

MODE = 1  
JANELA ATIVA = 1  
QUALIDADE DE IMPRESSAO = 2  
TIPO DE SAIDA = 1  
DADOS CORRETOS ? (S/N)

Figura 89 - Modo de saída 1

Qual o titulo do grafico ?  
(maximo 20 caracteres)  
{  
REGIAO EM L  
}  
Tecle <ENTER>

Figura 90 - Leitura do arquivo gerado no FEM - Processador  
de Dados

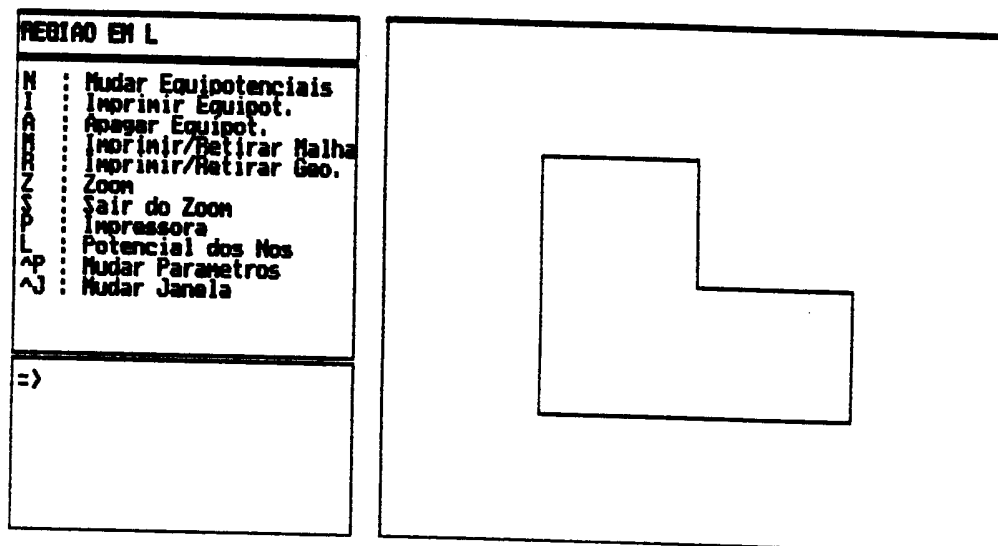


Figura 91 - Menu principal FEM - Saída de Dados

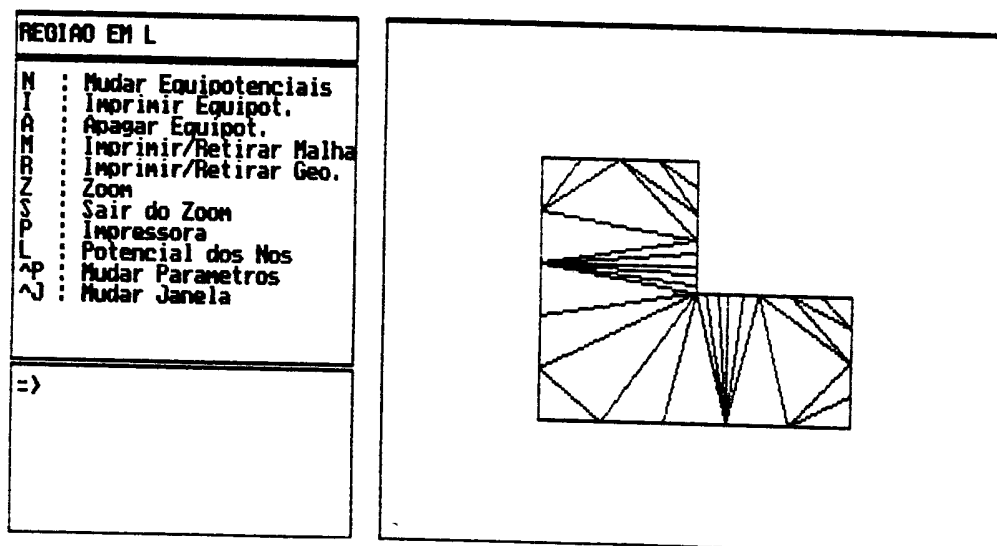


Figura 92 - Malha Inicial

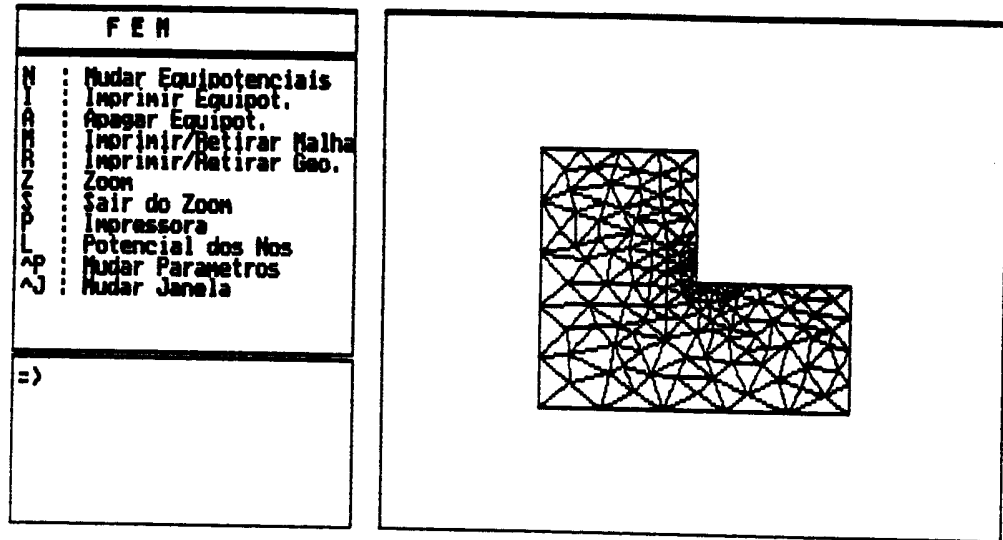


Figura 93 - Malha final

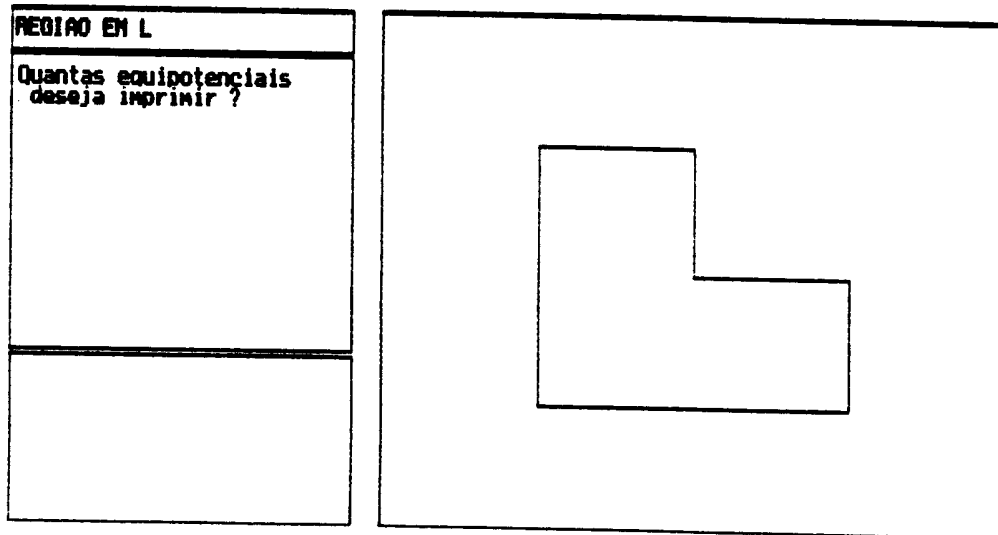


Figura 94 - Opção para imprimir equipotenciais

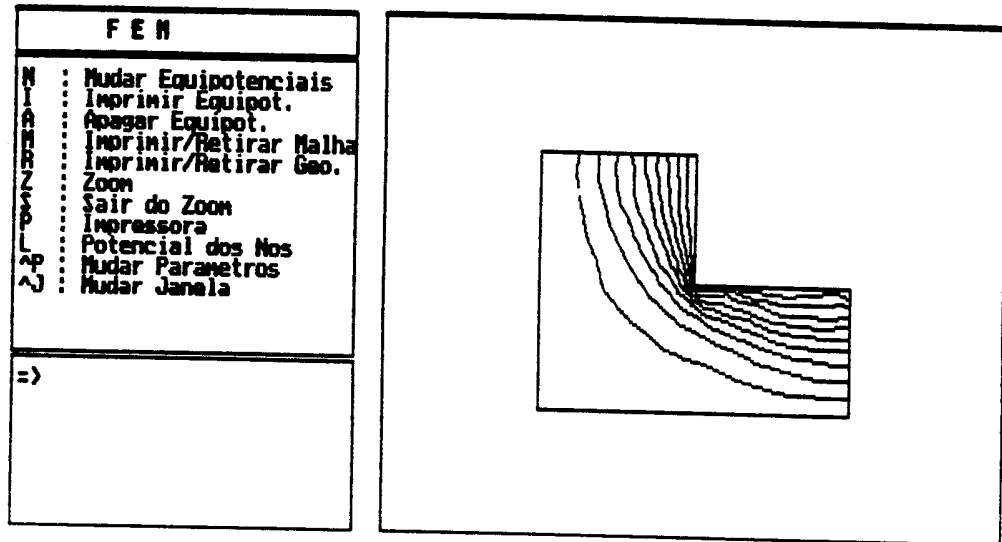


Figura 95 - Equipotenciais região em L

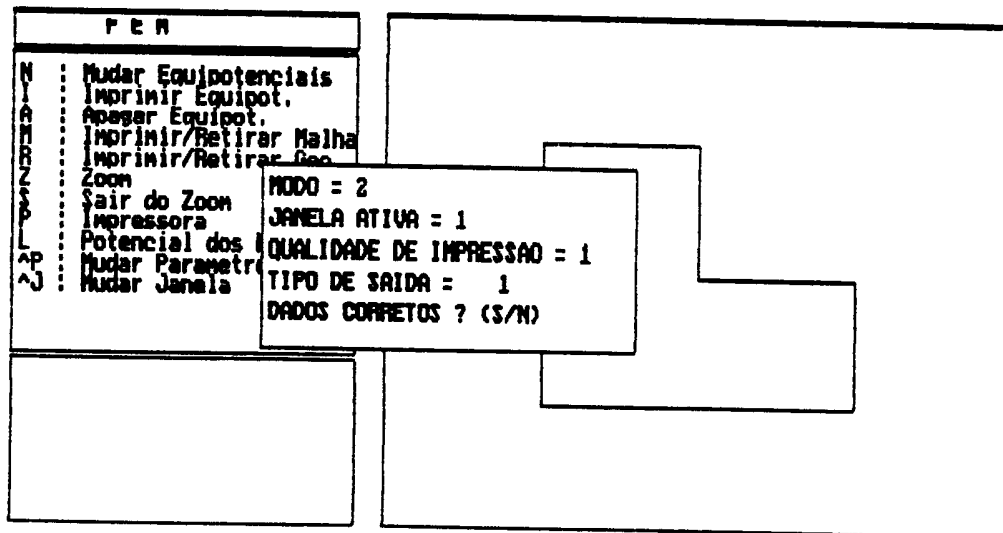


Figura 96 - Opção modo de saída 2

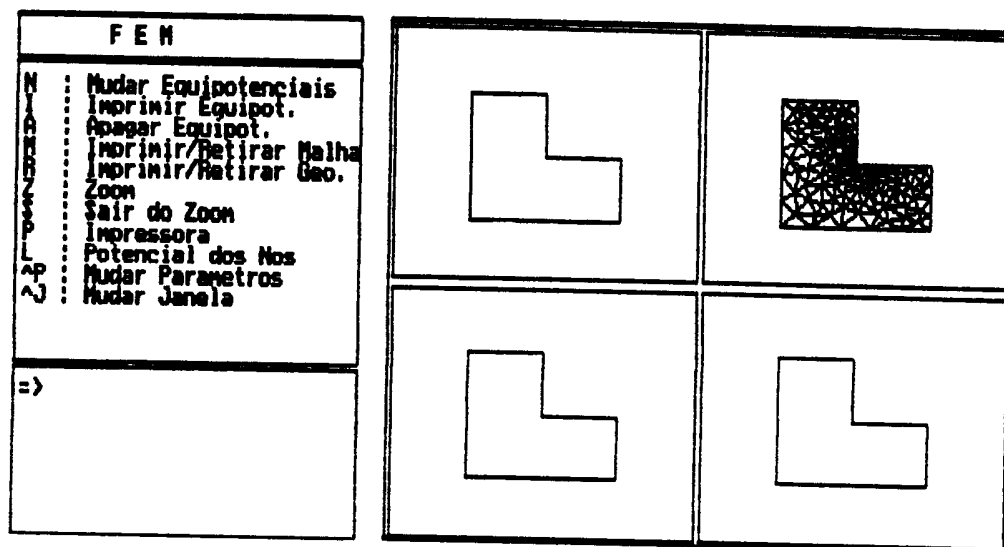


Figura 97 - Janela ativa 3 / Malha final

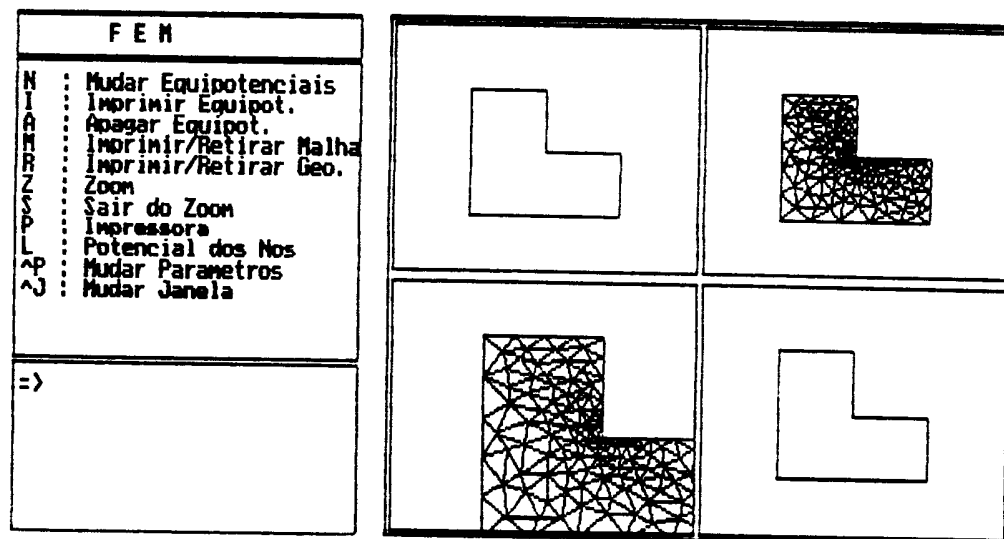


Figura 98 - Janela ativa 2 / Zoom malha final

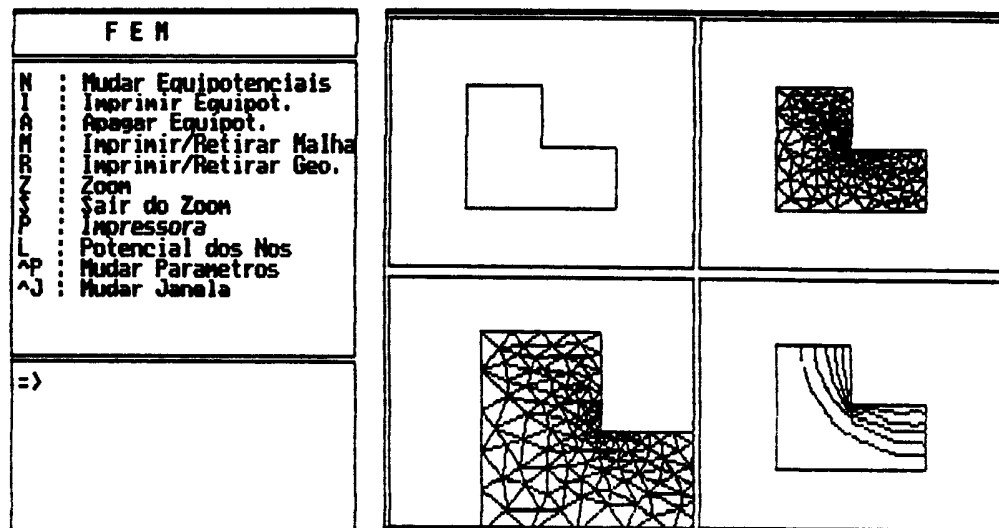


Figura 99 - Janela ativa 4 / Equipotenciais região em L