



## **Desempenho da partição da unidade de elevada regularidade na modelagem do comportamento fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis**

**Débora Coelho Cordeiro Pinheiro**

**Felício Bruzzi Barros**

**Roque Luiz da Silva Pitangueira**

**Samuel Silva Penna**

deboracordeiro@ufmg.br

felicio@dees.ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

spenna@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Av. Antônio Carlos, 6627 - Escola de Engenharia - Bloco 1 - 4o andar, sala 4215, Pampulha, CEP 31270-901, MG, Belo Horizonte, Brazil

**Resumo.** No Método *hp*-Clouds as funções de forma são construídas a partir do produto da Partição de Unidade (PU) com funções de enriquecimento. Uma forma simples de se construir a PU é através das funções de Shepard, que possuem continuidade diretamente relacionada à continuidade das funções peso empregadas na sua construção. Na resolução de certas classes de problemas estruturais, como problemas com plasticidade, dano ou propagação de trincas, a obtenção de campos de tensão contínuos entre as células de integração pode ser vantajosa. A utilização de aproximações de alto grau de continuidade elimina as descontinuidades do campo de tensões entre células de integração. Tais aproximações podem ser construídas a partir do procedimento de Edwards, modificado para nuvens não convexas, onde a PU é obtida através de Funções de Shepard e funções de distância especiais. Este procedimento proporciona a obtenção de funções aproximadoras de continuidade do tipo  $C^k$ , com  $k$  arbitrário. O desempenho destas funções para a descrição da distribuição de dano em meios parcialmente frágeis é avaliada em exemplos numéricos, em que a qualidade da integração numérica é avaliada, resolvidos na plataforma computacional INSANE (Interactive Structural Analysis Environment).

**Keywords:** Partição da Unidade, *hp*-Clouds, Análise não linear, Integração numérica

## 1 INTRODUÇÃO

As funções de forma dos Métodos sem Malha (MM) podem ser construídas de tal maneira que se obtenha qualquer ordem de continuidade desejada (Fries and Matthias, 2004). No caso das Partições da Unidade definidas pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares - MLS*), ou pelas funções de Shepard, a PU herda das funções peso sua característica de suporte compacto. Além disso, a regularidade da PU depende da base de funções  $P$  utilizadas para se construir a aproximação e da regularidade das funções peso (Belytschko et al., 1994).

Segundo Silva (2012), nos Métodos sem Malha, o uso das funções peso permite que os nós dentro do domínio de suporte que estejam mais próximos do ponto de interesse contribuam mais do que os pontos mais distantes. Além disso, para funções peso suaves e contínuas, a função aproximadora resultante é compatível, uma vez que os nós entram e saem do domínio gradualmente. Vários tipos de função peso são comumente empregadas na construção da PU dos métodos que utilizam o MLS ou as funções de Shepard. Exemplos dessas funções são as *spline* de segunda, terceira e quarta ordens, diversos tipos de funções exponenciais, a função gaussiana, entre outras.

Com o objetivo de aproveitar características vantajosas dos Métodos sem Malha e ao mesmo tempo contornar alguns inconvenientes como a falta da propriedade do delta de Kronecker, surge em Duarte et al. (2006) uma abordagem para gerar funções aproximadoras de elevada regularidade para o GFEM. Conforme proposto em Duarte et al. (2006) as funções de PU do GFEM são construídas com base na mesma estratégia do Método *hp-Clouds*, porém sobre uma malha de elementos finitos, possibilitando a obtenção de funções aproximadoras de continuidade do tipo  $C^k$ , onde  $k$  pode ser arbitrariamente definido. O domínio de influência, ou nuvem  $\omega_j$ , fica associado a uma forma poligonal ou poliédrica, se em 2D ou 3D, correspondente ao conjunto de elementos que compartilham o nó  $x_j$ . Para se construir uma aproximação arbitrariamente regular, torna-se necessário empregar uma função peso diferente daquelas utilizadas no EFG e *hp-Clouds*. Utiliza-se, então, o procedimento de Edwards (Edwards, 1996), onde a PU é obtida através de Funções de Shepard (Shepard, 1968) e funções de distância especiais. Entretanto, o procedimento de Edwards demanda nuvens convexas. Para transpor essa limitação, Duarte et al. (2006) propõem a obtenção das funções peso de continuidade  $C^k$ , com  $k$  arbitrariamente grande, construídas a partir de funções booleanas do tipo R, sobre a nuvem  $\omega_j$ , convexa ou não.

A estratégia proposta por Duarte et al. (2006) é utilizada por Barros et al. (2007) na construção de um procedimento  $p$ -adaptativo para o GFEM com PU de alta regularidade, o denominado GFEM- $C^k$ . Em Barcellos et al. (2009) e Mendonça et al. (2013), o GFEM- $C^k$  é aplicado a modelos de placas laminadas de Kirchhoff e de Reddy, respectivamente.

O trabalho de Torres et al. (2015) avaliou os efeitos da alta regularidade da PU na qualidade da representação de enriquecimentos singulares nas aproximações do G/XFEM nas proximidades de fissuras em materiais frágeis. Em Torres et al. (2015), o emprego das aproximações de elevada regularidade eliminou as descontinuidades de tensão na vizinhança da singularidade, o que reduziu a propagação de erros. Além disso, a suavidade proporcionou uma melhora na captura do efeito oriundo do enriquecimento singular.

Em Freitas (2015), o GFEM- $C^k$  é empregado na escala local da abordagem global-local do GFEM ((Duarte and Kim, 2008)) para a análise de problemas bi-dimensionais de plasticidade confinada, em procedimento semelhante ao proposto em citetKimDuarteProenca2012 é

aplicado a problemas de plasticidade confinada bidimensional.

O INSANE é um projeto de *software* livre em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais que torna disponível um ambiente computacional de código aberto, com características tais que facilitem sua expansão e manutenção. A linguagem JAVA é utilizada no desenvolvimento das aplicações do INSANE. Por apresentar vantagens como a portabilidade, que possibilita a criação de um software cujo funcionamento independe do sistema operacional, e o suporte ao paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO), a utilização da linguagem JAVA favorece a expansão do software e o trabalho em equipe.

A Partição da Unidade de elevada regularidade (funções  $C^k$ ) foi implementada no INSANE no contexto dos Métodos sem Malha por Pinheiro et al. (2015), onde a implementação foi validada para problemas lineares. Em Pinheiro (2016) as classes necessárias para análise não linear por meio do Método *hp-Clouds* a partir da implementação do *hp-Clouds* de Pereira (2015) e da análise não linear via EFG de Silva (2012) foram incluídas no INSANE.

O trabalho Pinheiro et al. (2017) utilizou a Partição da Unidade de alta regularidade para a análise fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis com o emprego da biblioteca de modelos constitutivos de Penna (2011); Gori et al. (2017) existente no INSANE. Em Pinheiro et al. (2017) foi observado que a alta regularidade beneficia a análise não linear de estruturas compostas de materiais parcialmente frágeis, produzindo com a PU de alta regularidade trajetórias de equilíbrio que se aproximaram mais dos resultados experimentais do que os resultados de MEF com discretização e grau de aproximação equivalente. No presente trabalho, avalia-se novos aspectos numéricos do mesmo problema da placa em L de concreto de Winkler et al. (2004) apresentado em Pinheiro et al. (2017). São avaliados aspectos tais como a influência do número de pontos de integração sobre a trajetória de equilíbrio e sobre o número de iterações para cada passo da análise não linear.

## 2 OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES DE ALTA REGULARIDADE

### 2.1 Definição da Partição da Unidade

De acordo com Oden and Reddy (1976), uma classe de funções  $\phi_j(\mathbf{x})$  em um domínio  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^n$ , cuja envoltória é formada pela união dos conjuntos abertos  $\{G_j\}_{j=1}^N$ , forma uma partição da unidade se apresentar as seguintes propriedades:

1.  $\phi_j(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(G_j)$
2.  $\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) = 1$
3.  $\phi_j(\mathbf{x}) \geq 0$  em  $\Omega$ ;
4. Todo sub-conjunto compacto de  $\Omega$  intercepta um número finito de suportes de  $\phi_j(\mathbf{x})$ .

### 2.2 Funções de Shepard

Para uma base de funções  $\mathbf{P} = \{1\}$ , é possível obter-se uma classe de funções denominadas de funções de Shepard. Tais funções foram desenvolvidas por Shepard (1968) e são anteriores ao advento do MLS. A PU construída a partir dessas funções é definida por:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) / \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \quad (1)$$

onde  $W_j$  é a função peso. A função  $W_j$  possui suporte compacto, isto é, apresenta valores diferentes de zero somente para pontos da nuvem  $\omega_j$ .

É possível verificar que:

$$\sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \left\{ \frac{W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)} \right\} = 1 \quad (2)$$

o que garante que  $\phi_j$  constitui uma PU.

Os demais critérios que caracterizam uma PU também são atendidos pelas funções de Shepard, a depender da continuidade das funções  $W_j$ .

### 2.3 Funções de continuidade $C^\infty$ para nuvens convexas

Para o caso de uma malha em duas dimensões, com nuvens convexas e funções de aresta exponenciais, a continuidade  $C^\infty$  das funções  $W_j$  é garantida pelo uso do procedimento proposto por (Edwards, 1996) para a obtenção da PU, conforme resumido a seguir.

Inicialmente, são definidas as funções de aresta,  $\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x})$ , associadas com a nuvem  $\omega_j$ . Tais funções tendem a zero suavemente a medida que se aproximam da aresta  $i$  e são maiores que zero em pontos do interior da nuvem.

$$\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\xi_i(\mathbf{x})^{-\gamma}} & , \quad \xi_i > 0 \\ 0 & , \quad \xi_i(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva e  $\xi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)$  é a distância entre a posição  $\mathbf{x}$  e a aresta  $i$ , conforme Fig. 1.

Com o objetivo de garantir que todas as funções de aresta possuam o mesmo valor em um mesmo ponto  $\mathbf{x}_j$  da nuvem, ou seja,  $\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}_j) = \varepsilon_{j,k}(\mathbf{x}_j)$  para todas as arestas  $i$  e  $k$  de  $\omega_j$ , é definido o vetor  $\mathbf{n}_i$ :

$$\mathbf{n}_i = \left( \frac{1 - 2^\gamma}{\ln \beta} \right)^{1/\gamma} \cdot |\hat{\mathbf{n}}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)|^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad (4)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}_i$  é um vetor unitário na aresta  $i$  que aponta para o interior da nuvem e  $\beta$  é uma constante positiva. A função peso  $W_j(\mathbf{x})$  é definida pelo produto das funções de aresta da nuvem:

$$W_j(\mathbf{x}) = e^{c_j} \prod_{i=1}^{M_j} \varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

onde  $M_j$  é o número de arestas da nuvem  $\omega_j$  e  $c_j = M_j (1 - 2^\gamma / \ln \beta)^{-1}$  é um fator de escala (Duarte et al., 2006).

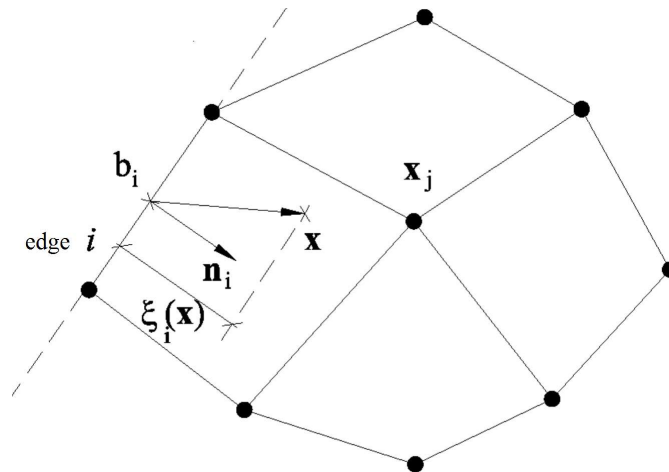


Figura 1: Nuvem convexa (Barros et al., 2007)

## 2.4 Funções de continuidade $C^k$ para nuvens não convexas

Para nuvens não convexas as funções de aresta definidas anteriormente apresentarão valores nulos no interior da nuvem, o que conduzirá a valores nulos das funções peso no interior da nuvem, Fig. 2. Para contornar esse problema, as funções R (Shapiro, 1991) foram empregadas em Duarte et al. (2006) na criação de funções peso adequadas para nuvens não convexas. As funções R são funções booleanas, reais e com propriedade de terem seu sinal definido completamente pelos sinais de seus argumentos. A função definida a seguir é a função conjunção R com dois argumentos:

$$(x \vee_{\alpha}^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \alpha} \left( x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right) (x^2 + y^2)^{k/2} \quad (6)$$

onde  $-1 < \alpha(x, y) < 1$  é uma função simétrica arbitrária,  $\vee$  é o operador lógico da conjunção “ou” e  $k$  é um inteiro positivo.

Em Duarte et al. (2006) é empregada a seguinte função R ( $R_0^k$ ):

$$(x \vee_0^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \left( x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^{k/2} \quad (7)$$

Esta função é analítica em todo domínio, com exceção da origem  $x = y = 0$ . Na origem, ela é  $k$  vezes diferenciável. Além disso, a propriedade

$$(x \vee_0^k y) \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ and } y = 0 \\ > 0 \forall x > 0 \text{ or } y > 0 \end{cases} \quad (8)$$

possibilita a utilização desta função na construção de uma nova função de aresta associada a duas arestas adjacentes da nuvem não convexa correspondente ao nó reentrante.

Por exemplo, para os lados  $m$  e  $n$  da nuvem da Fig. 2, a função de aresta será:

$$\varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x}) \vee_0^k \varepsilon_{j,n}(\mathbf{x}))}{(\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x}_j) \vee_0^k \varepsilon_{j,n}(\mathbf{x}_j))} \quad (9)$$

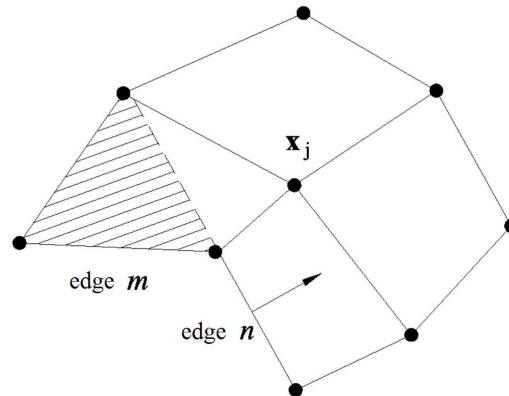


Figura 2: Nuvem não convexa (Barros et al., 2007)

O termo no denominador é o fator de escala e  $k$  é uma constante inteira escolhida de acordo com o grau de suavidade desejado para a função. Ao utilizar-se a função  $\varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x})$  no lugar de  $\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x})$  e  $\varepsilon_{j,n}(\mathbf{x})$ , uma nova expressão é obtida para a função peso  $W_j(\mathbf{x})$ :

$$W_j(\mathbf{x}) = \left( e^{c_j} \prod_{i=1}^{M_j} \varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \right) \varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

A função acima definida não apresenta valores nulos no interior da nuvem e será no mínimo diferenciável  $k$  vezes.

### 3 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS COMPOSTAS DE MATERIAIS PARCIALMENTE FRÁGEIS

O concreto é conhecido por sua alta resistência a compressão quando comparada com sua baixa resistência a tração. Esta é uma das razões pela qual o concreto fissa mesmo quando submetido a pequenas cargas estáticas. A nucleação e propagação de fissuras é uma das fontes do comportamento altamente não linear do concreto. Além disso, em materiais semi-frágeis a Zona de Processo de Fratura (ZPF), onde ocorre a iniciação, crescimento e coalescência de micro-fissuras, é grande quando comparada ao tamanho de estruturas de pequeno e médio porte. Esta característica impossibilita a aplicação da mecânica da fratura elástica linear.

A degradação do concreto pode ser modelada por meio de uma abordagem tanto contínua quanto discreta. Na abordagem discreta, a fissura é introduzida geometricamente no modelo. Por outro lado, nas abordagens contínuas, o comportamento não-linear do concreto é levado em consideração por meio do modelo constitutivo.

O trabalho de Ngo and Scordelis (1967) é uma das primeiras aplicações da modelagem discreta de fissuras no concreto. A fissura descrita geometricamente propaga quando um dado nível de tensão de tração é atingido. O trabalho de Nilson (1968) é semelhante ao de Ngo and Scordelis (1967), entretanto, em sua abordagem, o material é considerado não-linear. Desenvolvimentos recentes foram feitos no campo da fratura discreta para superar sua alta dependência da malha.

A abordagem da fissuração distribuída foi inicialmente proposta por Rashid (1968) e desenvolvida posteriormente por Suidan and Schnobrich (1973); Bažant and Oh (1983); Rots et al. (1985), entre outros. Nos modelos de fissuração distribuída as fissuras não são fisicamente representadas. As fissuras são levadas em consideração através de uma perda de rigidez da zona danificada, ou seja, a deterioração do meio é representada por meio de uma relação constitutiva. Estes modelos são formulados em um sistema de coordenadas locais definido pelos eixos de coordenadas locais. Os modelos de fissuração distribuída podem ser de direção fixa, onde a direção da fissura é definida na nucleação e permanece fixa durante toda a análise, ou de direção variável, onde a orientação da fissura varia de acordo com a rotação dos eixos principais.

Juntamente com os modelos de fissuração distribuída, a teoria do dano contínuo surgiu como uma alternativa para modelar o comportamento estrutural de materiais semi-frágeis. Um dos primeiros modelos de dano aplicados a esses materiais foram os modelos de dano escalar de Mazars (1984) e Mazars and Pijaudier-Cabot (1989). A degradação das propriedades do material é representada por um conjunto de variáveis de dano.

São várias as vantagens dos Métodos Sem Malha para problemas de mecânica do dano contínuo e mecânica da fratura de materiais parcialmente frágeis como o concreto. Estes métodos são mais flexíveis devido a ausência de malha e sua interpolação possui caráter não local (Rabczuk and Belytschko, 2006). Além disso, os Métodos Sem Malha possuem uma maior ordem de continuidade, o que naturalmente suaviza o campo de tensões na ponta da trinca (Bordas et al., 2008).

Nas últimas décadas, uma série de trabalhos sobre o estudo de fissuras e dano no concreto foi desenvolvida. Alguns deles empregaram Métodos Sem Malha. O trabalho de Barros (2002) estudou o uso de Métodos Sem Malha como o EFG e o *hp-Clouds* para análise não-linear física de estruturas reticuladas. Na tese de Silva (2012), o EFG é empregado na análise fisicamente não-linear de estruturas de concreto. Tanto Barros (2002) quanto Silva (2012) constituem estudos focados na aplicação da Mecânica do Dano Contínuo (MDC).

Alguns trabalhos buscam tirar proveito do caráter matemático não-local dos Métodos Sem Malha, além da sua alta regularidade, para aplicá-los em problemas com formulação não-local do dano. Em Askes et al. (2007), por exemplo, o EFG é empregado em simulações com formulações não-locais para o dano.

O *Extended Element Free Galerkin* (XEFG) foi utilizado em Rabczuk and Zi (2007) e Zi et al. (2007) na análise de trincas coesivas. O XEFG também foi empregado em Rabczuk et al. (2008) na análise geometricamente não-linear de estruturas de concreto armado com trincas coesivas em três dimensões. Em Rabczuk et al. (2010), o XEFG foi empregado na modelagem 3D de propagação de fissuras. O XEFG pode ser visto como um caso particular do *hp-Clouds*.

Em Ghosh and Chaudhuri (2013) e Chaudhuri (2013), a fratura no concreto é modelada através de uma estratégia multi-escala. O concreto é considerado homogêneo na escala macroscópica. Já na escala mesoscópica, a matriz cimentícia é modelada com um Método sem Malha. O método empregado em ambas as escalas é o XEFG.

Em Dong et al. (2010), um método para estudo da fissuração do concreto é proposto. O método proposto tem suas bases em Rabczuk and Belytschko (2004), trabalho que define uma versão do EFG associada a métodos de partículas, chamada de EFG-P.

Em Teixeira (2012) e Spada et al. (2015), são tratados problemas de homogeneização com-

putacional onde aplica-se o método sem malha escolhido somente na meso-escala, onde a estrutura é considerada heterogênea. Em Teixeira (2012), o EFG é empregado na modelagem numérica do concreto com heterogeneidade. O Elemento de Volume Representativo (EVR), considerando o concreto heterogêneo, é modelado com o EFG. A partir da solução do PVC no EVR, são estimadas as propriedades mecânicas macroscópicas do material. Em Spada et al. (2015), uma abordagem multi-escala une o MEF, na escala macroscópica, aos Métodos Sem Malha, na escala mesoscópica, na modelagem de estruturas de alvenaria.

## 4 EXEMPLO NUMÉRICO

Simulações numéricas de um painel em L composto de concreto analisado numericamente e experimentalmente por Winkler et al. (2004) são apresentados para avaliar a performance de métodos da Partição da Unidade na análise fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis. Avalia-se novos aspectos numéricos do mesmo problema da placa em L de concreto de Winkler et al. (2004) apresentado em Pinheiro et al. (2017). Avaliam-se neste exemplo a influência do número de pontos de integração sobre a trajetória de equilíbrio; a influência do número de pontos de integração sobre o número de iterações para cada passo da análise não linear; e a sensibilidade da energia de deformação em relação a variação do número de pontos de gauss empregados na análise linear do mesmo painel em L.

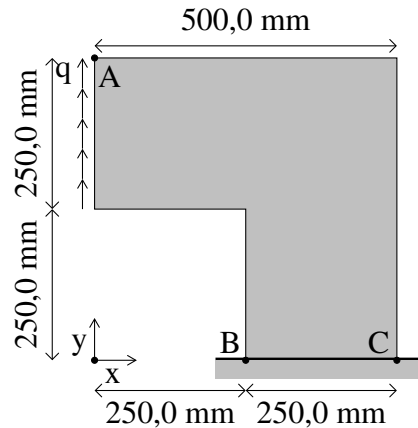
A Fig. 3 apresenta a geometria, o carregamento e as condições de contorno do problema analisado. Considera-se  $l = 250mm$ ,  $q = 28N/mm$  e espessura do painel de  $100mm$ . O ponto  $A$  na Fig. 3 é o ponto cujo deslocamento vertical é considerado na composição das trajetórias de equilíbrio. As funções de forma dos modelos apresentados possuem propriedade do delta de Kronecker, sendo assim, as condições de contorno essenciais são impostas diretamente ao longo dos nós do seguimento BC da Fig. 3. Todos os graus de liberdade, inclusive os oriundos do enriquecimento extrínseco, são bloqueados ao longo deste seguimento.

Ainda, nas simulações numéricas será considerado modelo de fissuração distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira and Chu (1985, 1986) e estado plano de tensão. As propriedades do material são  $E_0 = 25850 N/mm^2$ ,  $\nu = 0.18$ ,  $f_t = 2.70 N/mm^2$ ,  $f_c = 31.0 N/mm^2$ ,  $\epsilon_t = 0.0001925$  and  $\epsilon_c = 0.0022$ . Os parâmetros dos modelos com funções  $C^k$  são  $k = \infty$ ,  $\beta = 0.6$  e  $\gamma = 0.3$ . A análise não-linear foi realizada com controle de deslocamentos generalizados (Yang and Shieh, 1990), aproximação secante do tensor constitutivo, 0.020 de incremento do fator de carga a cada passo e uma tolerância relativa para a convergência em termos de deslocamento generalizado de 0.0001.

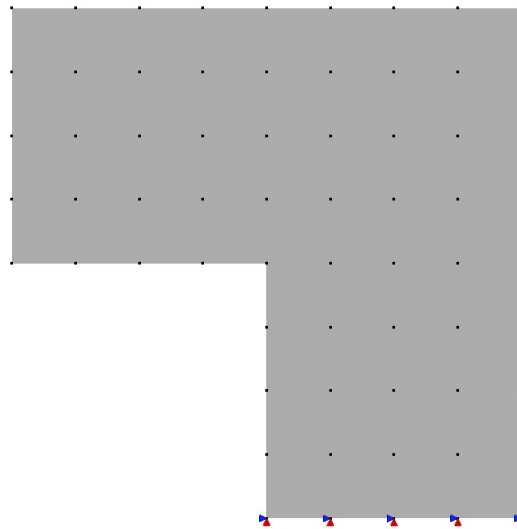
Uma série de simulações é feita com o método *hp-Clouds* com funções  $C^k$ . São analisados vários modelos com todos os nós com enriquecimento polinomial de primeiro grau, sendo que o número de pontos de integração varia entre os modelos. Os modelos possuem 48 células de integração, com vértices coincidentes com os nós da Fig. 4.

A Eq. (11) mostra as funções de forma enriquecidas para um dado nó  $j$  para o enriquecimento do primeiro grau. O nó enriquecido com monômios do primeiro grau possui 6 graus de liberdade por nó enriquecido.

$$\Phi_j^T = \left[ \phi_j \quad \frac{x-x_j}{h_j^x} \phi_j \quad \frac{y-y_j}{h_j^y} \phi_j \quad \left( \frac{x-x_j}{h_j^x} \right) \left( \frac{y-y_j}{h_j^y} \right) \phi_j \right], \quad (11)$$



**Figura 3: Geometria do painel em L de concreto**

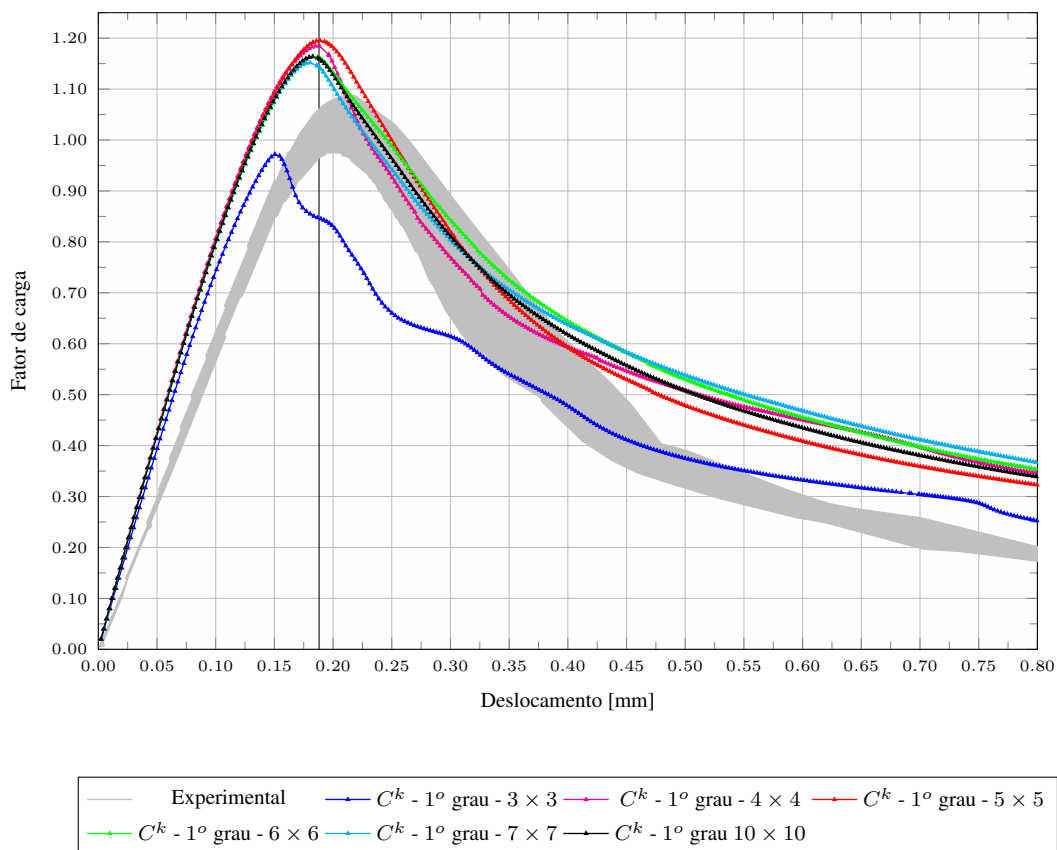


**Figura 4: Geometria do modelo - 48 células de integração**

Além de serem funções racionais e não polinomiais, as funções de elevada regularidade empregadas são altamente oscilatórias, o que requer um grande número de pontos de integração para a obtenção dos elementos da matriz de rigidez (Mendonça et al., 2013). No presente trabalho avalia-se a influência no número de pontos de integração na performance da Partição da Unidade de elevada regularidade aplicada a problemas fisicamente não lineares de meios parcialmente frágeis. Testes foram feitos com os seguintes números de pontos de integração por célula:  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $6 \times 6$ ,  $7 \times 7$ ,  $8 \times 8$ ,  $9 \times 9$  e  $10 \times 10$ .

As trajetórias de equilíbrio dos modelos analisados encontram-se apresentadas na Fig. 5. A Fig. 6, por sua vez, mostra a energia de deformação versus a raiz quadrada do número de pontos de integração usados na análise linear de um modelo com PU de alta regularidade enriquecido com funções de primeiro grau. A partir de  $6 \times 6$  pontos de integração por célula os resultados para o modelo enriquecido com o primeiro grau mostraram resultados satisfatórios em termos de estabilidade da trajetória de equilíbrio e de convergência da energia de deformação, o que condiz com os resultados da análise não linear. A Tab. 1 mostra o fator de carga máximo e

deslocamento correspondente para cada modelo analisado. É informado também o passo da análise em que o máximo fator de carga ocorreu. Os dados da Tab. 1 também indicam que o modelo com  $6 \times 6$  pontos de integração apresenta resultados satisfatórios em termos de carga máxima alcançada na trajetória de equilíbrio. Vale lembrar que o valor de  $6 \times 6$  pontos de integração foi encontrado para este modelo específico enriquecido somente com funções do primeiro grau. Em Pinheiro et al. (2017), por exemplo, o valor considerado satisfatório para o modelo enriquecido até o segundo grau foi de  $7 \times 7$  pontos de integração por célula.



**Figura 5: Trajetórias de equilíbrio obtidas com modelo de fissuração distribuída**

**Tabela 1: Fator de carga (FC) máximo e deslocamento correspondente em função do número de pontos de integração empregado  $C_k$**

número de pontos de integração	FC máximo	$u_y$	passo
$3 \times 3$	0.97193	0.15038	60
$4 \times 4$	1.18486	0.18826	80
$5 \times 5$	1.19519	0.18884	80
$6 \times 6$	1.16385	0.18284	77
$7 \times 7$	1.15167	0.18046	76
$10 \times 10$	1.16354	0.18262	77

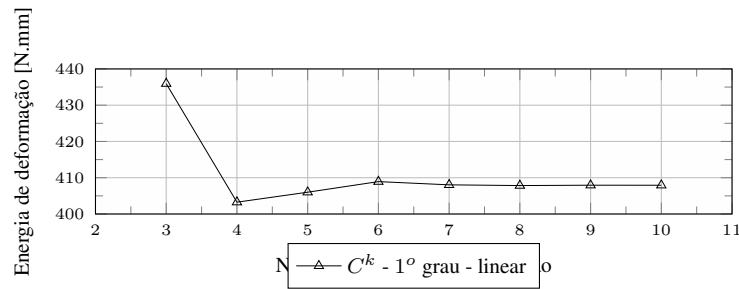


Figura 6: Energia de deformação x Número de pontos de integração

A Fig. 7 mostra o número de iterações para alcançar o equilíbrio para cada passo de carga dos modelos analisados. Para todos os modelos foram necessários somente duas iterações na maior parte da análise. Como esperado, mais iterações são necessárias quando a trajetória de equilíbrio muda de direção. Os modelos com  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$ , menos estáveis, apresentaram um número total de iterações ligeiramente superior ao dos demais modelos.

## 5 CONCLUSÕES

Foram abordados conceitos importantes referentes à Partição da Unidade, às Funções de Shepard e às funções peso de elevada regularidade. Verificou-se que, como esperado, uma quantidade de pontos de interação significativamente maior do que a empregada no MEF ( $2 \times 2$ ) é necessária. Ainda, foi possível observar que um teste simples, com comportamento linear do material, de convergência de energia de deformação é capaz de conduzir a valores adequados de pontos de integração para serem utilizados na análise fisicamente não linear. Apesar de aumentar o custo computacional em relação ao uso de uma PU polinomial, o uso da PU de alta regularidade propiciou, conforme observado em trabalhos anteriores (Pinheiro et al., 2017), melhora nas trajetórias de equilíbrio analisadas, tornando o pico e o comportamento pós crítico mais próximo dos resultados experimentais. Desta forma, avalia-se que o ideal em termos de otimização do custo computacional é empregar a PU de alta regularidade somente nas zonas específicas dos modelos analisados.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante apoio das agências brasileiras de apoio à pesquisa CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Financiamentos 308932/2016-1 e 308785/2014-2) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - Financiamento).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Askes, H., Bennett, T., & Kulasegaram, S., 2007. Meshless discretisation of nonlocal damage theories. *Solid Mechanics and its Applications*, vol. 5, pp. 3–20.
- Barcellos, C. S., T. R. Mendonça, P., & Duarte, C. A., 2009. A  $C^k$  continuous generalized finite element formulation applied to laminated Kirchhoff plate model. *Computational Mechanics*, vol. 44, pp. 377–393.

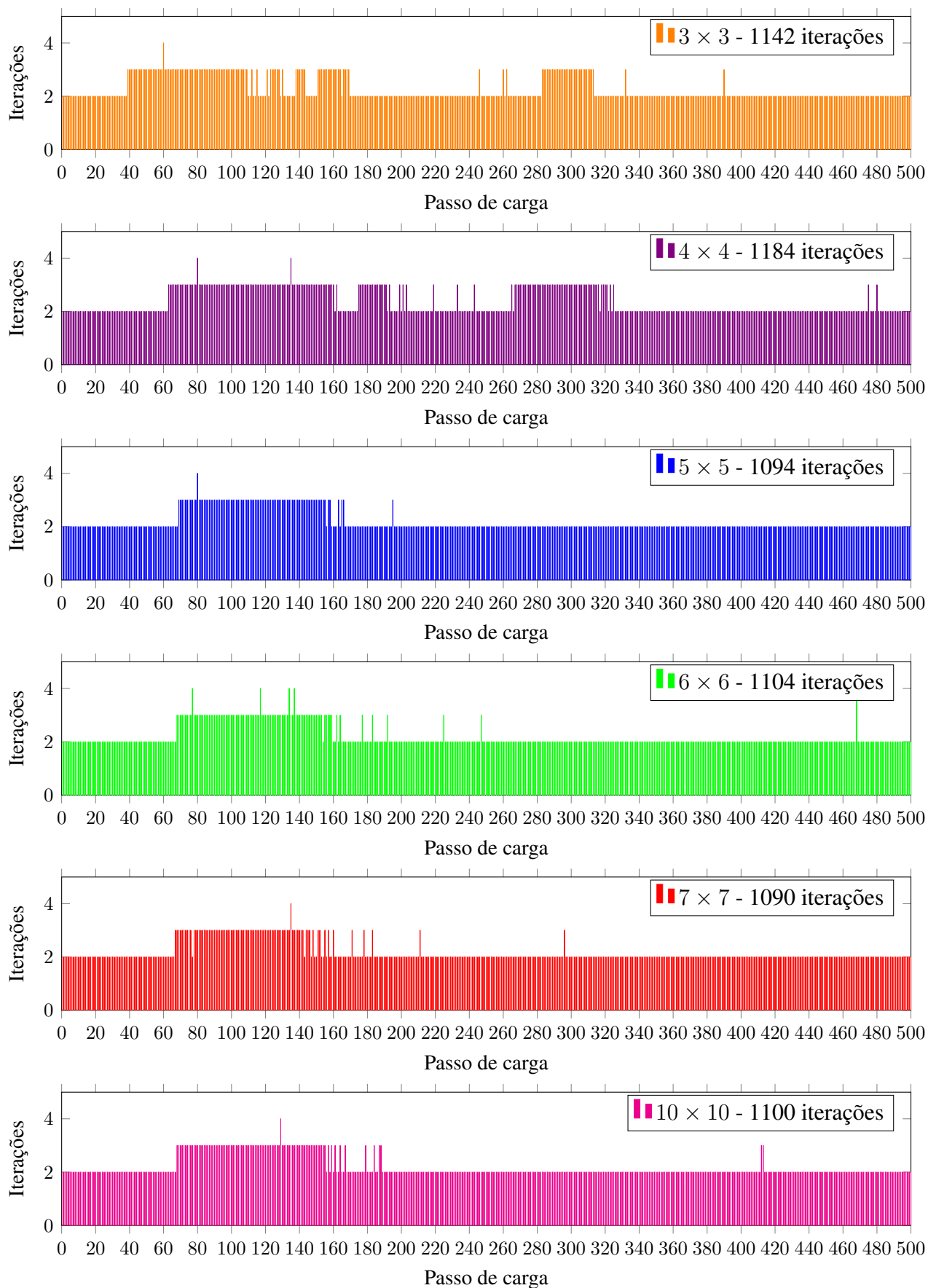


Figura 7: Número de iterações por passo de carga

- Barros, F. B., 2002. *Métodos sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brazil.
- Barros, F. B., Barcellos, C. S., & Duarte, C. A., 2007. p-Adaptive  $C^k$  generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. *Computational Mechanics*, vol. 41, n. 1, pp. 175–187.
- Bažant, Z. P. & Oh, B., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, vol. 16, n. 3, pp. 155–177.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L., 1994. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n. 2, pp. 229–256.
- Bordas, S., Rabczuk, T., & Zi, G., 2008. Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n. 5, pp. 943–960.
- Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82, pp. 797–804.
- Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1986. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *American Concrete Institute Journal*, vol. 83, pp. 21–28.
- Chaudhuri, P., 2013. Multi-scale modeling of fracture in concrete composites. *Composites: Part B*, vol. 47, pp. 162–172.
- Dong, Y., Wu, S., Xu, S. S., Zhang, Y., & Fang, S., 2010. Analysis of concrete fracture using a novel cohesive crack method. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, n. 12, pp. 4219–4231.
- Duarte, C. A. & Kim, D.-J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, n. 6-8, pp. 487–504.
- Duarte, C. A., Kim, D. J., & Quaresma, D. M., 2006. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 33 – 56.
- Duflot, M., 2004. *Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture*. PhD thesis.
- Edwards, H. C., 1996.  $C^\infty$  finite element basis functions. Technical Report 96-45, TICAM, The University of Texas at Austin.
- Freitas, A., 2015. *Modelos numéricos baseados em MEFG-Ck e MEFG-gl aplicados a problemas de elasticidade e plasticidade bidimensional*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Fries, T. P. & Matthias, H. G., 2004. Classification and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical Univ. of Braunschweig*, pp. 64.
- Ghosh, A. & Chaudhuri, P., 2013. Computational modeling of fracture in concrete using a

- meshfree meso-macro-multiscale method. *Computational Materials Science*, vol. 69, pp. 204–215.
- Gori, L., Penna, S. S., & Pitangueira, R. L. S., 2017. A computational framework for constitutive modelling. *Computers & Structures*, vol. 187, pp. 1–23.
- Mazars, J., 1984. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à rupture du béton de structure*. PhD thesis, Université Paris 6, Paris, France. (in French).
- Mazars, J. & Pijaudier-Cabot, G., 1989. Continuum damage theory - Application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, pp. 345–365.
- Mendonça, P. T. R., Barcellos, C. S., & Torres, D. A. F., 2013. Robust  $C^k/C^0$  generalized FEM approximations for higher-order conformity requirements: Application to Reddy's HSDT model for anisotropic laminated plates. *Composite Structures*, vol. 96, pp. 332–345.
- Ngo, D. & Scordelis, A., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal of American Concrete Institute*, vol. 67, pp. 152–163.
- Nilson, A., 1968. Nonlinear analysis of concrete by the finite element method. *Journal of American Concrete Institute*, vol. 65, pp. 757–766.
- Oden, J. T. & Reddy, J. N., 1976. *An introduction to the mathematical theory of finite Elements*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc.
- Penna, S. S., 2011. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil. (in Portuguese).
- Pereira, H. C. R., 2015. Estratégia de enriquecimento para métodos baseados na partição da unidade. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.
- Pinheiro, D., Barros, F., Pitangueira, R., & Penna, S., 2017. High regularity partition of unity for structural physically non-linear analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 83, pp. 43 – 54.
- Pinheiro, D. C. C., 2016. *Análise global-local de meios parcialmente frágeis via  $m\tilde{A}(\otimes)$  todos da Partição da Unidade*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil. (Projeto de Tese).
- Pinheiro, D. C. C., Barros, F. B., & Pitangueira, R. L. S., 2015. Partição da unidade com elevada regularidade para a análise de estruturas. In *XXXV CILAMCE - Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, pp. 1–14, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Rabczuk, T. & Belytschko, T., 2004. Cracking particles: A simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n. 13, pp. 2316–2343.

- Rabczuk, T. & Belytschko, T., 2006. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, vol. 137, n. 1-4, pp. 19–49.
- Rabczuk, T., Bordas, S., & Zi, G., 2010. On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods. *Computers and Structures*, vol. 88, n. 23-24, pp. 1391–1411.
- Rabczuk, T. & Zi, G., 2007. A meshfree method based on the local partition of unity for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, vol. 39, n. 6, pp. 743–760.
- Rabczuk, T., Zi, G., Bordas, S., & Nguyen-Xuan, H., 2008. A geometrically non-linear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n. 16, pp. 4740–4758.
- Rashid, Y. R., 1968. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334–344.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M., & Blaauwendra, J., 1985. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON*, vol. 30, pp. 1–48.
- Shapiro, V., 1991. Theory of R-functions and applications: a primer. Technical Report TR91-1219, Computer Science Department, Cornell University.
- Shepard, D., 1968. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*, pp. 517–524. ACM.
- Silva, R. P., 2012. *Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil. (in Portuguese).
- Spada, A., Giambanco, G., & Ribolla, E. L. M., 2015. A FE-Meshless Multiscale Approach for Masonry Materials. *Procedia Engineering*, vol. 109, n. January 2016, pp. 364–371.
- Suidan, M. & Schnobrich, W. C., 1973. Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the Structural Division*, pp. 2109–2121.
- Teixeira, M. R., 2012. *Uma Contribuição para a Modelagem Numérica da Heterogeneidade do Concreto com o Método de Galerkin Livre de Elementos*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brazil.
- Torres, D. A. F., Barcellos, C. S., & Mendonça, P. T. R., 2015. Effects of the smoothness of partitions of unity on the quality of representation of singular enrichments for GFEM/XFEM stress approximations around brittle cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 283, pp. 243 – 279.
- Winkler, B., Hofstetter, G., & Lehar, H., 2004. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, n. 7-8, pp. 797–819.
- Yang, Y. & Shieh, M., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, vol. 28, pp. 2110–2116.
- Zi, G., Rabczuk, T., & Wall, W., 2007. Extended meshfree methods without branch enrichment for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, vol. 40, n. 2, pp. 367–382.