

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Felipe Ferreira Oliveira

Rigidez, não estabilidade e estimativa inferior para o Índice de Morse de subvariedades mínimas e CMCs em variedades conformemente Euclidianas

Belo Horizonte  
2023

Felipe Ferreira Oliveira

**Rigidez, não estabilidade e estimativa inferior para o Índice de Morse de subvariedades mínimas e CMCs em variedades conformemente Euclidianas**

**Versão Final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte  
2023

Oliveira, Felipe Ferreira.

O48r Rigidez, não estabilidade e estimativa inferior para o Índice de Morse de subvariedades mínimas e CMCs em variedades conformemente Euclidianas [recurso eletrônico] / Felipe Ferreira Oliveira. – 2023.

1 recurso online (111 f. il, color.): pdf.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 102-105.

1. Matemática – Teses. 2. Variedades (Matemática) – Teses. 3. Subvariedades – Teses. 4. Morse, Teoria de) – Teses. 5. Geometria conforme – Teses. 6. Hipersuperfícies – Teses. I. Barbosa, Ezequiel Rodrigues. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Rigidez, não estabilidade e estimativa inferior para o Índice de Morse de subvariedades mínimas e CMCs em variedades conformemente Euclidianas*

**FELIPE FERREIRA OLIVEIRA**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa  
UFMG

Prof. Celso dos Santos Viana  
UFMG

Prof. Heleno da Silva Cunha  
UFMG

Profa. Maria de Andrade Costa e Silva  
UFS

Prof. Sérgio de Moura Almaraz  
UFF

Belo Horizonte, 04 de agosto de 2023.

*Dedico este trabalho à minha filha Agnes.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sempre cuidar de mim, especialmente nessa fase da minha vida na qual me dediquei em desbravar o universo da matemática. Agradeço pela oportunidade de poder contemplar um pouco deste universo belo e fascinante.

Agradeço também a minha mãe Biatriz, meu pai Valdeci, minha irmã Talita, por nunca deixarem faltar o incentivo, ajuda e o apoio necessário para materialização dos meus projetos, sempre acreditaram na educação como fator transformador.

A minha amada esposa Andrezza, por todo incentivo, apoio nos momentos difíceis, paciência nos momentos de ausência e pelo amor. Um obrigado não basta.

A todos os meus professores que contribuíram para minha formação desde as séries iniciais.

Ao departamento de matemática da UFMG por toda estrutura que tive durante o doutorado. Em especial, a todos os professores com os quais tive aulas durante minha formação.

As secretárias Andrea e Kelly pela disposição e prestatividade nos momentos que precisei.

Ao professor Marcos Azevedo pelo incentivo e apoio durante a minha graduação na UFMA. Agradeço também ao professor Ivaldo Nunes que muito me incentivou a continuar meus estudos em matemática após a conclusão do mestrado na UFMA, universidade que tenho muito carinho.

Ao professor Ezequiel pela amizade e confiança em mim depositada. Foi através da sua valiosa orientação que pude desenvolver esta tese e expandir meus conhecimentos em matemática. Entretanto, nossas conversas ensinou-me muito mais que isso através de sua integridade, ética e conduta profissional. Sua pessoa inspira o conceito de grandeza como ser humano.

Aos professores Celso Viana, Heleno Cunha, Maria Andrade e Sérgio Almaraz, por aceitarem compor a banca de defesa, agradeço também os professores Emerson Abreu e Abraão Mendes por aceitarem fazer parte da qualificação deste trabalho. Muito obrigado pelo tempo dedicado a estudar nossos resultados e pelas valiosas sugestões de mudanças nos textos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

*“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”*  
(Galileu Galilei)

# Resumo

Este trabalho possui três objetivos principais. O primeiro consiste de investigar alguns resultados de gap, índice e não estabilidade para subvariedades  $f$ -mínimas. O segundo deles é investigar a estabilidade, bem como critérios de não estabilidade, para hipersuperfícies de curvatura média constante (CMC) que intersectam em um ângulo constante uma bola Euclidiana munida de uma determinada métrica conforme. O terceiro objetivo consiste em estudar classificação e Índice de Morse de hipersuperfícies mínimas nas formas espaciais.

Na primeira parte desta tese estudaremos, no contexto de variedades Riemannianas com peso, alguns resultados de gap (ou lacuna), buscamos também limitante inferior para o índice de Morse e teoremas de não estabilidade para subvariedades  $f$ -mínimas fechadas e de bordo livre.

Na segunda parte, obtivemos dois critérios de não estabilidade. O primeiro critério, para hipersuperfícies capilares, utiliza da região envolvida pela hipersuperfície e a “parte molhada” da bola, denotada de região generalizada, obtemos que se tal região é simétrica em relação a origem, então a hipersuperfície não é estável. O segundo critério afirma que se o campo normal de uma hipersuperfície CMC de bordo livre possui média zero então tal hipersuperfície não é estável.

Na terceira parte, determinamos que o índice de Morse de superfícies mínimas de bordo livre no espaço hiperbólico e esférico é pelo menos 4. Além disso, ainda no espaço hiperbólico e esférico, concluímos que se uma superfície atinge Índice de Morse 4, então o primeiro autovalor de Steklov é igual a curvatura principal da bola hiperperbólica e esférica respectivamente. Para as formas espaciais, obtivemos ainda que, entre hipersuperfícies mínimas capilares, as totalmente geodésicas são caracterizadas por uma condição de pinçamento no comprimento de sua segunda forma fundamental.

**Palavras-chave:** subvariedades  $f$ -mínimas; índice de Morse, métrica conforme.

# Abstract

This work has three main goals. The first consists of investigating some gap, index and non-stability results for  $f$ -minimal submanifolds. The second one is to investigate stability, as well as non-stability criteria, for hypersurfaces of constant mean curvature (CMC) that intersect at a constant angle a Euclidean ball provided with a certain conformal metric. The second is to study classification and Morse Index of minimal hypersurfaces in space forms.

In the first part of this thesis we will study, in the context of weighted Riemannian manifolds, some gap results, we will also look for a lower bound for the Morse index and non-stability theorems for closed and free-bound  $f$ -minimal submanifolds .

In the second part, we obtained two non-stability criteria. The first criterion, for capillary hypersurfaces, uses the region surrounded by the hypersurface and the “wetting area” of the ball, denoted as a generalized region, we obtain that if such region is symmetrical with respect to the origin then the hypersurface is not stable. The second criterion states that if the normal field of a free boundary CMC hypersurface has zero mean then such hypersurface is not stable.

In the third part, we determine that the Morse index of minimal free boundary surfaces in hyperbolic and spherical space is at least 4. Furthermore, still in hyperbolic and spherical space, we conclude that if a surface reaches Morse Index 4, then the first Steklov’s eigenvalue is equal to the principal curvature of the hyperperbolic and spherical ball respectively. For the space forms, we also obtained that, among capillary minimal hypersurfaces, the totally geodesic ones are characterized by a condition of pinching in the length of their second fundamental form.

**Keywords:**  $f$ -minimal submanifolds, Morse index, conformal metric.

# Lista de Figuras

2.1 Ilustração típica do problema capilar. . . . .	37
--	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
1.1	Resultados de gap, não estabilidade e índice de Morse de para subvariedades $f$ -mínimas . . . . .	12
1.2	Não existência de subvariedades mínimas de bordo livre em uma bola conformemente Euclidiana . . . . .	20
1.3	Critério de não estabilidade para hipersuperfícies CMC em uma bola conformemente Euclidiana . . . . .	21
1.4	Classificação de hipersuperfícies CMC estáveis em uma bola conformemente Euclidiana . . . . .	25
1.5	Índice de Morse de hipersuperfícies mínimas de bordo livre em formas espaciais . . . . .	26
1.6	Classificação via condição de gap na segunda forma fundamental . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>30</b>
2.1	Conceitos iniciais . . . . .	30
2.2	Geometria das subvariedades . . . . .	31
2.3	Formulação do problema de bordo livre para subvariedades mínimas . . . . .	35
2.4	Formulação do problema capilar para hipersuperfícies . . . . .	37
2.5	Métrica conforme . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Resultados de <i>gap</i>, não estabilidade e índice de Morse de para subvariedades <math>f</math>-mínimas</b>	<b>44</b>
3.1	Subvariedades $f$ -mínimas no espaço Euclidiano com peso . . . . .	44
3.2	Limitação inferir para o Índice de Morse de subvariedades $f$ -mínimas e subvariedades de $f$ -curvatura média paralela e resultado do tipo <i>gap</i> . . . . .	52
3.3	Limitação inferir para o índice de Morse de hipersuperfícies $f$ -mínimas no espaço Euclidiano com peso . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Não existência de subvariedades mínimas de bordo livre em uma bola conforme</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>Critérios de não estabilidade para hipersuperfícies CMC em uma bola conforme</b>	<b>71</b>
5.1	Não estabilidade de hipersuperfícies capilares . . . . .	73

5.2	Não estabilidade de hipersuperfícies de bordo livre . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Estabilidade de hipersuperfícies CMC em uma bola conforme</b>	<b>86</b>
6.1	Estabilidade de hipersuperfícies mínimas de bordo livre . . . . .	86
6.2	Estabilidade de superfícies CMC capilar . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Índice de Morse de hipersuperfícies mínimas de bordo livre em formas espaciais</b>	<b>92</b>
<b>8</b>	<b>Classificação via condição de gap na segunda forma fundamental</b>	<b>96</b>
8.1	Classificação de hipersuperfícies mínimas capilares na bola Euclidiana unitária	96
8.2	Classificação de hipersuperfícies mínimas capilares em formas espaciais . .	100
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>102</b>
	<b>Apêndice A Prova do Lema 3</b>	<b>106</b>
	<b>Apêndice B Prova do Lema 6</b>	<b>108</b>
	<b>Apêndice C Demonstração de identidades</b>	<b>110</b>
	<b>Apêndice D Prova da Proposição 6.2.1</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho possui três objetivos principais. O primeiro consiste de investigar alguns resultados de gap, índice e não estabilidade para subvariedades  $f$ -mínimas. O segundo deles é investigar a estabilidade, bem como critérios de não estabilidade, para hipersuperfícies de curvatura média constante (CMC) que intersectam em um ângulo constante uma bola Euclidiana munida de uma determinada métrica conforme. O terceiro objetivo consiste em estudar classificação e Índice de Morse de hipersuperfícies mínimas nas formas espaciais.

### 1.1 Resultados de gap, não estabilidade e índice de Morse de para subvariedades $f$ -mínimas

Uma variedade Riemanniana com peso é uma tripla  $(M^n, g, e^f dv)$ , em que  $M^n$  é uma variedade Riemanniana que possui elemento de volume  $dv$  induzido pela métrica  $g$  substituído por  $dv_f := e^f dv$  e  $f$  é uma função suave em  $M^n$  chamada de função peso (ou função densidade). Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade em  $M^n$ , existe uma definição natural da curvatura média da subvariedade  $\Sigma^k$  que considera o peso  $f$  do ambiente  $M^n$ , chamada de  $f$ -curvatura média de  $\Sigma^k$ , definida por

$$H_f := H - (\nabla f)^\perp,$$

onde  $H$  é o campo vetorial curvatura média de  $\Sigma^k$  e  $\perp$  denota a projeção sobre o fibrado normal  $\Sigma^k$ . Tal definição foi utilizada nos trabalhos de Gromov (2002) (por exemplo [17]) ao estudar os espaços “mm” (espaços métricos munidos da medida de Borel, que têm como caso particular as variedades com peso). Para mais detalhes sobre variedades com peso recomendamos os trabalhos de Morgan (2005) [31], Morgan (2016) [30] e Rosales (2008) [40].

Uma subvariedade  $\Sigma^k$  de uma variedade  $M^n$  com peso  $f$  é chamada de  $f$ -mínima quando sua  $f$ -curvatura média é identicamente nula,  $H_f \equiv 0$  em  $\Sigma^k$ . A seguir, apresen-

taremos alguns exemplos de subvariedades  $f$ -mínimas.

**Exemplo 1.1.1.** *Subvariedades mínimas em uma variedade Riemanniana.* Considere uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  com peso  $f \equiv C$ , com  $C$  sendo uma constante real. Neste caso, as subvariedades  $f$ -mínimas são exatamente as subvariedades mínimas em  $(M^n, g)$ .

**Exemplo 1.1.2.** *Self-shrinkers em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv_{can})$ .* Considere o espaço Euclidiano  $(\mathbb{R}^n, g_{can})$  com peso  $f = -\frac{|x|^2}{4}$ , neste ambiente definimos as subvariedades self-shrinkers  $\Sigma^k$  como aquelas que satisfazem  $H = -\frac{1}{2}x^\perp$ , onde  $x$  é o vetor posição em  $\mathbb{R}^n$  e  $H$  é curvatura média de  $\Sigma^k$  no ponto  $x$ . Self-shrinkers desempenham um papel importante no estudo de singularidades do fluxo da curvatura média e têm sido objeto de estudos nas ultimas décadas, por exemplo Colding (2012) [9] e Colding e Minicozzi (2012) [10].

**Exemplo 1.1.3.** *Seja  $(M^n, g, e^f dv)$  um shrinking gradient Ricci solitons, ou seja, depois de uma normalização,  $(M^n, g, e^f dv)$  satisfaz a equação  $\text{Ric} + \nabla^2 f = \frac{1}{2}g$ , com  $\text{Ric}$  sendo o tensor de Ricci e  $\nabla^2$  sendo o operador Hessiano. Equivalentemente, para o tensor curvatura Bakry-Émery Ricci satisfaz  $\text{Ric}_f = \frac{1}{2}g$ , onde  $\text{Ric}_f := \text{Ric} + \nabla^2 f$ . Nesta configuração, podemos considerar hypersuperfícies  $f$ -mínimas em  $(M^n, g, e^f dv)$ . Em particular, uma subvariedade self-shrinker  $\Sigma^k$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma  $f$ -mínima no espaço Gauss shrinking soliton  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv_{can})$ .*

**Exemplo 1.1.4.** *Considere o espaço hiperbólico  $M^n = \mathbb{H}^n(-1)$ . Seja  $r$  função distância de um ponto fixo  $p \in M^n$  e  $f(x) = (n-1)ar^2(x)$ , onde  $a > 0$  é uma constante. Consideremos também  $\text{Ric}_f \geq (n-1)(2a-1)$ . As esfera geodésicas de raio  $r$  centradas em  $p$  são hypersuperfícies  $f$ -mínimas se o raio  $r$  satisfaz  $2ar = \coth r$ .*

Uma subvariedade  $f$ -mínima pode ser entendida de duas maneiras. Um primeira modo é notar que  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima se, e somente se,  $\Sigma^k$  é ponto crítico do funcional volume com peso  $e^f da$ , onde  $da$  é o elemento de volume de  $\Sigma^k$ . Alternativamente,  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima se, e somente se,  $\Sigma^k$  é mínima é uma métrica conforme  $\tilde{g} = e^{\frac{2f}{n}} g$ .

**Exemplo 1.1.5.** *Subvariedades mínimas em  $(M^n, \tilde{g} = e^{\frac{2f}{k}} g)$  são subvariedades  $f$ -mínimas em  $(M^n, g, e^f dv)$ . Citamos o trabalho Cheng et al. (2015) [8] que explora extensivamente essa relação.*

Do ponto de vista variacional,  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima se, e somente se,  $\Sigma^k$  é ponto crítico do funcional área com peso  $da_f := e^f da$ , onde  $da$  é o elemento de volume de  $\Sigma^k$  na métrica  $g$ . Tomando como exemplo o espaço Euclidiano com peso  $f$ , ou seja,  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , consideremos  $\psi_t$  uma variação normal de uma imersão  $\Sigma^k$ . Definimos o funcional área com peso  $f$  por

$$\Sigma_t \mapsto \text{vol}_f(\Sigma_t) = \int_{\psi_t(\Sigma)} e^f da.$$

Seja  $X = \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x)$  um campo variacional com suporte compacto em  $\Sigma^k$ . Então, a primeira variação do funcional área com peso é dada por

$$\frac{d}{dt} \text{vol}_f(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle X, H - (\nabla f)^\perp \rangle e^f da.$$

Tendo em vista a formulação anterior, é possível observar que  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima se, e somente se,  $\Sigma^k$  é ponto crítico do funcional área com peso, ou equivalentemente  $H - (\nabla f)^\perp = 0$ .

É natural investigar quando uma subvariedade  $f$ -mínima é um mínimo local do funcional área com peso. Para avançar nessa questão, é necessário introduzir a segunda variação do funcional área com peso, explicitamente dada por:

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{vol}_f(\Sigma_t) \Big|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle X, L_f X \rangle e^f da := Q_f(X, X),$$

onde o operador elíptico  $L_f$ , chamado de operador  $f$ -estabilidade é definido por

$$L_f X = \Delta^\perp X - (D^2 f)^\perp + \langle A, X \rangle A,$$

com  $A$  sendo a segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$ . O índice de Morse de uma subvariedade  $f$ -mínima, denotado por  $\text{Ind}_f(\Sigma)$ , é definido como sendo o número de autovalores negativos do operador  $L_f$ . Intuitivamente, o índice de Morse (ou simplesmente índice) pode ser interpretado também como o máximo das dimensões de subespaços vetoriais das deformações com suporte compacto que diminuem a área, portanto, uma subvariedade  $f$ -mínima  $\Sigma^k$  é estável se, e somente se,  $\text{Ind}_f(\Sigma) = 0$ .

Consideremos a bola Euclidiana unitária  $B_1^n(0) := B^n$  centrada na origem como subconjunto de  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ . Uma subvariedade  $\Sigma^k$  é dita ser  $f$ -mínima de bordo livre em  $B^n$  se  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima e intersecta  $\partial B^n$  ortogonalmente. Neste caso definimos índice de Morse e estabilidade considerando o seguinte problema de autovalor descrito a seguir.

Um número real  $\lambda$  é dito ser um autovalor de  $L_f$  se existe um campo de vetores admissível não-nulo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  tal que

$$\begin{cases} L_f X = \lambda X, & \text{em } \Sigma, \\ (\nabla_\nu X - \nabla_X \nu)^\top_{\partial B} = 0, & \text{em } \partial \Sigma, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $(\cdot)^\top_{\partial B}$  indica a projeção normal de uma campo sobre  $\partial B$ . Semelhantemente, o índice de Morse de  $\Sigma^k$  é definido como o número de autovalores negativos do problema (3.42) e  $\Sigma^k$  é dita ser estável se  $\text{Ind}_f(\Sigma) = 0$ .

Neste trabalho estamos interessados em estudar as subvariedades  $f$ -mínimas em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , mais especificamente alguns resultados do tipo lacuna (também chamado simplesmente de *gap*), não estabilidade e índice de Morse no contexto de subvariedades  $f$ -mínimas. No que se segue, apresentaremos alguns resultados anteriores que motivaram nossa pesquisa bem como nossos avanços.

Um dos objetivos deste trabalho compreende investigar o índice de Morse de subvariedades  $f$ -mínimas. Em 2012, Colding e Minicozzi [9] provaram que toda hipersuperfície self-shrinker completa propriamente imersa não é estável. Equivalentemente, este resultado diz que o índice de Morse de uma hipersuperfície self-shrinker completa propriamente imersa é maior ou igual a 1. Hussey (2013) [20], obteve o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.6** (Hussey (2013) [20]). *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície self-shrinker completa propriamente mergulhada sem bordo com crescimento de volume polinomial.*

1. *Se  $\Sigma^n = \mathbb{R}^n$  é um hiperplano que passa pela origem, então o índice de Morse de  $\Sigma^n$  é igual a 1;*
2. *Se  $\Sigma^k = \mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$  para algum  $1 \leq k \leq n$ , então o índice de Morse de  $\Sigma^n$  é igual a  $n + 2$ ;*
3. *Se  $\Sigma^k \neq \mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ , então o índice de Morse de  $\Sigma^n$  é pelo menos  $n + 3$ .*

A hipótese de mergulho em [20] foi posteriormente removida por Impera (2019) em [21].

**Teorema 1.1.7** (Impera (2019) [21]). *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície self-shrinker completa propriamente imersa em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então:*

1. *O índice de Morse de  $\Sigma^n$  satisfaz  $\text{Ind}_f(\Sigma) \geq 1$ , onde a igualdade é válida de e somente se  $\Sigma^n$  é um hiperplano passando na origem;*
2. *Se  $\Sigma^n$  é não totalmente geodésica, então  $\text{Ind}_f(\Sigma) \geq n + 2$ . Além disso,  $\text{Ind}_f(\Sigma) = n + 2$  se e somente se  $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$  para algum  $1 \leq k \leq n$ .*

Para o caso de codimensão alta Jiang-Sun-Zhao (2019) em [22] provaram o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.8** (Jiang-Sun-Zhao (2019) [22]). *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade self-shrinker completa propriamente imersa em  $\mathbb{R}^{n+p}$ . Então*

1. *O índice de Morse de  $\Sigma^n$  satisfaz  $\text{Ind}_f(\Sigma) \geq p$ , onde a igualdade é válida de e somente se  $\Sigma^n$  é um  $n$ -plano;*
2. *Se  $\Sigma^n$  é não totalmente geodésica em  $\mathbb{R}^{n+p}$ , então o índice de Morse de  $\Sigma^n$  satisfaz  $\text{Ind}_f(\Sigma) \geq n + p + 1$ ;*
3. *O cilindro  $\mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$  (para algum  $1 \leq k \leq n$ ), como self-shrinker em  $\mathbb{R}^{n+p}$ , satisfaz*

$$\text{Ind}_f \left( \mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k} \right) = n + p + 1.$$

Neste trabalho, nos propomos investigar generalizações dos resultados anteriores para o caso em que  $\Sigma^k$  é uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , neste contexto, assumiremos que a função peso  $f$  é radialmente simétrica, ou seja,  $f(x) = f(|x|^2)$ , com  $x$  denotando o campo posição de  $\Sigma^k$ . Para o caso de hipersuperfícies (onde a notação será alterada, o ambiente terá dimensão igual a  $n + 1$  e a hipersuperfície dimensão  $n$ ), ou seja,  $k = n$ , em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , obtivemos os seguintes resultados:

**Teorema 1.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 1$ .*

**Teorema 2.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f' \leq 0 \text{ e } f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 2$ .*

O Teorema 1 e o Teorema 2 possuem versões para o caso bordo livre:

**Teorema 3.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $B^n$  em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 1$ .*

**Teorema 4.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $B^n$  em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f' \leq 0 \text{ e } f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 2$ .*

Para o caso fechado de codimensão alta é possível garantir, com certa hipótese sobre  $f$ , que o índice de uma subvariedade  $f$ -mínima é pelo menos 1. Esse fato é consequência direta do seguinte resultado:

**Lema 1.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , onde a função peso  $f$  é radial ( $f(x) = f(|x|^2)$ ), então a componente normal  $x^\perp$  do campo posição de  $\Sigma^k$  e a componente normal  $y^\perp$  de um campo vetorial constante satisfazem*

$$L_f\{x^\perp\} = -4(f' + f''|x|^2)x^\perp, \quad (1.2)$$

$$L_f\{y^\perp\} = -4f''\langle x, y \rangle x^\perp - 2f'y^\perp, \quad (1.3)$$

onde  $L_f$  é o operador estabilidade.

Como consequência direta do Lema 1, mais especificamente a identidade (1.2), é o seguinte Teorema:

**Teorema 5.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f' + f''|x|^2 < 0. \quad (1.4)$$

Então,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) \geq 1$ . Em particular,  $\Sigma^k$  não é  $f$ -estável.

Além das subvariedades self-shrinkers,  $f = -\frac{|x|^2}{4}$ , do Exemplo 1.1.5, sabemos que uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$  é uma subvariedade mínima em  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{\frac{2f}{k}} g_{can})$ . Consideremos a seguinte variedade Riemanniana

$$\left( \mathbb{R}^n, \tilde{g} = \frac{1}{(|x|^2 + 1)^{2\alpha}} g_{can} \right). \quad (1.5)$$

Para  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ , tal variedade é completa, como demonstrado em Zhu (1994) [46]. Esse ambiente é um exemplo onde o Teorema 5 se aplica. Basta tomar

$$f(t) = \frac{k}{2} \ln \left( \frac{1}{(t+1)^{2\alpha}} \right), \quad (1.6)$$

com  $t = |x|^2$  e verificar que a função  $f(t) = f(|x|^2)$  em (1.6) satisfaz a condição (1.4).

**Observação 1.1.9.** *A desigualdade estrita em (1.4) é uma condição necessária. Consideremos o espaço completo*

$$\left( \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tilde{g} = \frac{1}{|x|^2} g_{can} \right), \quad (1.7)$$

tal espaço é isométrico a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto canônica, fato provado por Corro et al. (2020) [11].

Quando visto como variedade com peso  $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , onde

$$f(t) = \ln \left( \frac{1}{t} \right),$$

com  $t = |x|^2$ , é fácil ver que  $f' + f''|x|^2 = 0$ . É sabido que em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  a superfícies  $\mathbb{S}^2 \times \{p\}$ , para algum  $p \in \mathbb{R}$  é “estável” no sentido que a segunda variação do funcional área é nulo para toda variação com suporte compacto.

Para o próximo resultado precisamos estabelecer algumas terminologias. Quando a codimensão é 1, ou seja, hipersuperfícies, fica bem definido um campo normal unitário  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , portanto, dado um campo variacional  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , sempre existe uma função suave  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$  tal que  $X = \phi N$  em  $\Sigma$ . Desse modo podemos identificar  $X$  com uma

função suave  $\phi$  por intermédio do campo  $N$  normal a  $\Sigma$ . É sabido que uma hipersuperfície  $\Sigma$  que possui  $f$ -curvatura média constante,  $H_f = \text{const.}$ , é ponto crítico do funcional  $f$ -área restrito a variações que preservam volume. Nesta configuração, uma variação  $\phi$  que preserva volume equivale a tomar  $\phi$  tal que  $\int_{\Sigma} \phi da_f = 0$ . O próximo resultado é inspirado no teorema apresentado a seguir para hipersuperfícies.

**Teorema 1.1.10** (Li-Xiong (2016) [27]). *Seja  $B^{n+1}$  um bola Euclidiana unitária com peso radial  $f = e^{\psi}$ , onde  $\psi = \psi(r)$  satisfaz*

$$\psi'' \leq 0. \quad (1.8)$$

*Suponha que  $x : \Sigma^n \rightarrow B^{n+1}$  é uma hipersuperfície com  $H_f = \text{const.}$  com bordo livre. Se a aplicação de Gauss  $N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  satisfaz*

$$\int_{\Sigma} N da_f = 0,$$

*então  $\Sigma^n$  não é  $f$ -estável para variações que preservam volume.*

Consideremos  $\Sigma^k$  uma subvariedade em uma variedade Riemanniana com peso  $(M^n, g, e^f dv)$ . Dizemos que  $\Sigma^k$  é uma subvariedade com  $f$ -curvatura média paralela (ou curvatura média com peso paralela) se  $H_f := H - (\nabla f)^{\perp}$  é um campo vetorial paralelo no fibrado normal de  $\Sigma^k$ . Tendo em vista os resultados de Li-Xiong (2016) [27] para hipersuperfícies de  $f$ -curvatura média constante de bordo livre obtivemos o seguinte resultado para subvariedades (com codimensão alta) possuindo  $f$ -curvatura média paralela de bordo livre em uma bola no ambiente  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ .

**Teorema 6.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade com  $f$ -curvatura média paralela completa não compacta sem bordo com crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$2f''|x^{\perp}|^2 + f'(n - k) \leq 0. \quad (1.9)$$

*Então,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) \geq 1$ . Em particular,  $\Sigma^k$  não é  $f$ -estável.*

Além das subvariedades self-shrinkers,  $f = -\frac{|x|^2}{4}$  a variedade Riemanniana apresentada em (1.5) é um exemplo onde o Teorema 5 se aplica. O Teorema 6 possui uma versão para bordo livre:

**Teorema 7.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade com  $f$ -curvatura média paralela de bordo livre imersa em  $B_1^2(0) \subset (\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$2f''|x^{\perp}|^2 + f'(n - k) \leq 0 \quad (1.10)$$

Então,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) \geq 1$ . Em particular,  $\Sigma^k$  não é  $f$ -estável.

Em 2011, Le-Seum [24] provaram um teorema do tipo *gap* para self-shrinkers de codimensão 1. Em 2012 Cao-Li [5] generalizaram esse resultado para codimensão arbitrária, provando o teorema seguir.

**Teorema 1.1.11** (Cao-Li (2012) [5]). *Se  $\Sigma^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma subvariedade self-shrinker completa sem bordo, com crescimento de volume polinomial, satisfazendo*

$$|A|^2 \leq \frac{1}{2},$$

então  $\Sigma^k$  é uma das seguintes subvariedades

1. um hiperplano em  $\mathbb{R}^{k+1}$ ,
2. uma esfera redonda  $S^k(\sqrt{k})$  em  $\mathbb{R}^{k+1}$ ,
3. um cilindro  $S^p(\sqrt{p}) \times \mathbb{R}^{k-p}$ ,  $1 \leq p \leq k-1$ , em  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

Onde  $|A|^2$  denota o quadrado da segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$ .

**Corolário 1.1.12** (Cao-Li (2012) [5]). *Se  $\Sigma^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma subvariedade self-shrinker completa mergulhado sem bordo, com crescimento de volume polinomial, satisfazendo*

$$|A|^2 < \frac{1}{2},$$

então  $\Sigma^k$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

Considere  $\Sigma^k$  uma subvariedade em uma variedade Riemanniana com peso  $(M^n, g, e^f dv)$ . Se em todo ponto de  $\Sigma^k$  é válido que  $|H_f| = |H - \nabla^\perp f| = \lambda$ , onde  $\lambda \geq 0$  é constante, dizemos que  $\Sigma^k$  é uma  $\lambda$ -subvariedade. Para  $\lambda$ -hipersuperfícies em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv_{can})$  Guang (2018) [18] provou o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.13** (Guang (2018) [18]). *Se  $\Sigma^n$  em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv_{can})$  é uma  $\lambda$ -hipersuperfície completa mergulhada com crescimento polinomial de volume e satisfaz*

$$|A|^2 \leq \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2} - |\lambda|}{2},$$

então  $\Sigma^n$  é uma das seguintes hipersuperfícies:

1. um hiperplano  $\mathbb{R}^n$ ;
2. uma esfera  $S^n(r)$ ,
3. um cilindro  $S^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ .

Alguns resultados semelhantes podem ser encontrados em Ding-Xin (2014) [13] (Subvariedades elf-shrinkers), Wei-Peng (2019) [45] ( $\lambda$ -hipersuperfícies em espaço de Gauss) e Hieu (2023) [19] ( $\lambda$ -suveriedades em espaço de Gauss))

Na direção de generalizar os resultados anteriores para o caso em que  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$  obtivemos o seguinte resultado parcial:

**Teorema 8.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade fechada  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$  com peso radial com  $f(x) = f(|x|^2)$  satisfazendo*

$$|A|^2 \leq -2f' - 4f''|x^\top|^2,$$

então alguma das seguintes possibilidades ocorrem:

1.  $\Sigma^k$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{k+1}$ ;
2.  $x^\perp \equiv \text{const.} \neq \vec{0}$ .

**Observação 1.1.14.** *Na desigualdade estrita no Teorema 8, ou seja*

$$|A|^2 < -2f' - 4f''|x^\top|^2,$$

temos que  $\Sigma^k$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

Além das subvariedades self-shrinkers,  $f = -\frac{|x|^2}{4}$  a variedade Riemanniana apresentada em (1.5) é um exemplo onde o Teorema 8 se aplica.

## 1.2 Não existência de subvariedades mínimas de bordo livre em uma bola conformemente Euclidiana

Como observado anteriormente, uma subvariedade  $\Sigma^k$  é  $f$ -mínima se, e somente se,  $\Sigma^k$  é mínima na métrica conforme  $\tilde{g} = e^{\frac{2f}{k}}g$ . Portanto, podemos usar o contexto da métrica conforme para analisar subvariedades  $f$ -mínimas.

Consideremos a imersão isométrica  $\Sigma^k \rightarrow B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \subset (\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u}g_{can})$ , tal que  $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(B^n)$  e  $\partial\Sigma \subset \partial B^n$ , com  $\Sigma^k$  compacta e orientável,  $B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}^n$  sendo a bola Euclidiana centrada na origem possuindo raio Euclidiano  $r_{\mathbb{R}} > 0$ , munida da métrica conforme  $\tilde{g} := e^{2u}g_{can}$ , com  $g_{can}$  denotando a métrica canônica de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $u(x) = u(|x|^2)$ ,  $u : B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}$ , para alguma função suave  $u$  definida em  $I = [0, r_{\mathbb{R}}^2)$ .

Para observar a subvariedade mínima  $\Sigma^k$ , na métrica conforme  $\tilde{g} := e^{2u}g_{can}$ , como  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$  basta tomar  $f = ku$ . Essa convenção será conservada ao longo do trabalho, ou seja,  $f$  será reservado ao contexto de variedade com peso e  $u$  reservado para o contexto da métrica conforme. Para mais detalhes, consultar subseção (2.5).

Nessa configuração, obtivemos o seguinte resultado para subvariedades mínimas de bordo livre:

**Teorema 9.** *Seja  $B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \subset (\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u}g_{can})$  uma bola conforme de raio Euclidiano  $r_{\mathbb{R}}$ , centrada na origem, com  $u(x) = u(|x|^2)$ , em que  $u(|x|^2)$  satisfaz*

$$i) \quad u'' - [u']^2 \geq 0,$$

$$ii) \quad -u''|x|^2 - u' \geq 0.$$

*Então, para  $n - k \geq 2$ , não existe  $k$ -subvariedade mínima de bordo livre estável em  $B^n(0, r_{\mathbb{R}})$ .*

Este teorema possui paralelo com um resultado recente quando a variedade ambiente  $M^n$  é conforme a esfera unitária Euclidiana, ou seja,  $(\mathbb{S}^n, \tilde{g})$ , com  $\tilde{g} = e^{2u}g_{\mathbb{S}^n}$  em que  $u \in C^\infty(M)$  e  $g_{\mathbb{S}^n}$  é a métrica de  $\mathbb{S}^n$  herdada de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , Franz e Trinca (2022) [16] forneceram o seguinte teorema:

**Teorema 1.2.1** (Franz e Trinca (2023) [16]). *Seja  $(\mathbb{S}^n, \tilde{g})$  uma  $n$ -variedade Riemanniana conforme a esfera unitária Euclidiana sendo  $\delta$ -pinçada para algum  $\delta > 0$ . Então não existe subvariedade mínima fechada estável em  $(\mathbb{S}^n, \tilde{g})$  para todo  $k$  satisfazendo  $2 \leq k \leq n - \delta^{-1}$ .*

Uma variedade Riemanniana  $M^n$  é  $\delta$ -pinçada, para algum  $\delta > 0$ , se em cada ponto de  $M^n$  as curvaturas seccionais são positivas e a razão entre a menor e a maior curvatura seccional de  $M$ , em cada ponto, é estritamente menor do que  $\delta$ .

### 1.3 Critério de não estabilidade para hipersuperfícies CMC em uma bola conformemente Euclidiana

Consideremos a imersão isométrica  $x : \Sigma^n \rightarrow (M^{n+1}, \tilde{g}) := (B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , tal que  $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1})$  e  $\partial\Sigma \subset \partial B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}$ , com  $\Sigma^n$  compacta e orientável,  $B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  sendo a bola Euclidiana centrada na origem possuindo raio Euclidiano  $r_{\mathbb{R}} > 0$ , munida

da métrica conforme  $\tilde{g} := e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$ , com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotando a métrica canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $u(x) = u(|x|^2)$ ,  $u : B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , para alguma função suave  $u$  definida em  $I = [0, r_{\mathbb{R}}^2]$ . Eventualmente denotaremos  $B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}$  simplesmente por  $B^{n+1}$ , ou ainda por  $B$ . Para mais detalhes, consultar seção 2.5. Faremos sempre o abuso de notação  $\Sigma^n$  (respectivamente  $\partial\Sigma^n$ ) para indicar  $x(\Sigma^n)$  (respectivamente  $x(\partial\Sigma^n)$ ).

Nesta seção estamos interessados em critérios de não estabilidade para hipersuperfícies CMC imersas em uma bola Euclidiana  $B^{n+1}$  munida de uma determinada métrica conforme, para tanto, é necessário apresentar previamente algumas definições.

Seja  $\Sigma^n \rightarrow B^{n+1}$  uma hipersuperfície imersa orientável, consideremos  $W^n \subset \partial B^{n+1}$  a parte do bordo da bola tal que  $\partial W = \partial\Sigma$ . Denotemos por  $T^{n+1}$  a parte da bola satisfazendo  $\partial T = \Sigma^n \cup W^n$ . Eventualmente  $\Sigma^n$  pode possuir auto-interseções, neste caso, tomaremos  $T^{n+1}$  como sendo a união finita de alguns domínios  $T_i^{n+1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ou seja,  $T^{n+1} = \cup_{i=1}^m T_i^{n+1}$ , observando que os domínios  $T_i^{n+1}$  podem se intersectar. Não é difícil observar que existe mais de uma escolha de  $W^n \subset \partial B^{n+1}$  tal que  $\partial W = \partial\Sigma$ , produzindo assim uma nova região  $T^{n+1}$ , no entanto, para os propósitos deste trabalho basta, apenas escolher algum  $T^{n+1}$ , com  $\Sigma^n$  e  $W^n$  possuindo orientação de modo que possamos aplicar o Teorema da Divergência em  $T^n$ , ou seja

$$\int_T \operatorname{div}_{\tilde{g}} X d\tilde{v} = \int_{\Sigma} \tilde{g}(X, N) d\tilde{a} + \int_{W \subset \partial B} \tilde{g}(X, \bar{N}) d\tilde{a}, \quad (1.11)$$

para algum campo suave  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $N$  e  $\bar{N}$  são os campos normais de  $\Sigma^n$  e  $\partial B^{n+1}$  respectivamente, ou seja apenas a condição  $\partial T^{n+1} = \Sigma^n \cup W^n$  é necessária. Com essa convenção e considerações  $W^n \subset \partial B^{n+1}$  é chamada de “**parte molhada**” do bordo da bola  $\partial B^{n+1}$  e a região  $T$  envolvida por  $x(\Sigma^n)$  e  $W^n$  tal que  $\partial T = \Sigma^n \cup W^n$  é chamada de “**região generalizada**”.

O trabalho que serviu de motivação aos nossos resultados é o teorema dado a seguir.

**Teorema 1.3.1** (H. LI e C. Xiong (2018) [26]). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície capilar na bola Euclidiana unitária  $\mathbb{B}^{n+1}$  e  $W^n$  a parte molhada do bordo da bola. Denote por  $T^{n+1}$  a região generalizada envolvida por  $x(\Sigma^n)$  e  $W^n$ . Se o centro de massa de  $T^{n+1}$  está na origem, então a hipersuperfície capilar  $\Sigma^n$  não é estável.*

O Teorema 1.3.1 usa a região generalizada  $T^{n+1}$  como critério de não estabilidade. O resultado de [26] é anterior a classificação das hipersuperfícies capilares estáveis de Wang-Xia [44], ou seja, ainda não era sabido quais eram as hipersuperfícies estáveis, exceto as totalmente umbílicas. Como corolário deste resultado temos que *as hipersuperfícies de Delaunay não são estáveis, exceto o hiperplano geodésico e a calota esférica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Em  $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , considere o campo de Killing conforme  $X_E$  definido por

$$X_E = \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + 1) E,$$

para algum vetor constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Um cálculo direto mostra que  $i)$   $\operatorname{div} X_E = (n+1)\langle x, E \rangle$  e  $ii)$  que  $X_E$  é tangente a bola unitária. Usando  $i)$  e  $ii)$  na equação (1.11) temos

$$(n+1) \int_T \langle x, E \rangle dv = \int_\Sigma \langle X_E, N \rangle da. \quad (1.12)$$

Se o centro de massa de  $T^{n+1}$  está na origem, então  $\int_T \langle x, E \rangle dv = 0$ , portanto  $\int_\Sigma \langle X_E, N \rangle da = 0$ , ou seja, a função  $\phi_E = \langle X_E, N \rangle$  possui média zero sobre  $\Sigma^n$ . A ideia da prova do Teorema 1.3.1 é usar a hipótese “ $T^{n+1}$  possuir centro de massa na origem” para permitir que  $\phi_E$  seja uma “função teste” e mostrar que a segunda variação da energia é negativa, concluindo, assim, que hipersuperfície capilar não é estável.

Para o caso de uma métrica conforme, definiremos o seguinte campo de Killing conforme

$$X_E = e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E \right],$$

para algum vetor constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Tal campo, é tangente a  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}$ , mais especificamente,  $\tilde{g}(X_E, \bar{N})|_{\partial\Sigma} = 0$  e  $\operatorname{div}_{\tilde{g}} X_E = e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \{1 + u'(|x|^2) (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)\} \langle E, x \rangle$ . Usando esses fatos na equação (1.11) temos

$$\int_T e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \{1 + u'(|x|^2) (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)\} \langle E, x \rangle d\tilde{v} = \int_\Sigma \tilde{g}(X_E, N) d\tilde{a}. \quad (1.13)$$

Precisamos agora de alguma hipótese sobre  $T^{n+1}$  para que o lado esquerdo de (1.13) se anule. Usando o fato de a métrica ser conforme podemos enxergar o lado esquerdo de (1.13) euclidianamente. Lembrando que sobre uma mudança conforme da métrica a forma de volume se transforma por  $d\tilde{v} = e^{(n+1)u} dv$  temos agora que

$$\int_T e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \{1 + u'(|x|^2) (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)\} \langle E, x \rangle e^{(n+1)u(|x|^2)} dv = \int_\Sigma \tilde{g}(X_E, N) d\tilde{a}. \quad (1.14)$$

Como  $u, u', e^u, |x|^2$  são funções radiais e  $f(x) = \langle E, x \rangle$  é tal que  $f(-x) = -f(x)$ , se  $T^{n+1}$  é simétrico em relação a origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$  então a integral sobre  $T^{n+1}$  em (1.14) é nula, implicando que  $\tilde{g}(X_E, N)$  possui média zero sobre  $\Sigma^n$ . Seguindo os mesmos passos, porém, explorando agora um ambiente conforme ao espaço Euclidiano, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 10.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma hipersuperfície capilar e  $W^n$  a parte molhada de  $\partial B^{n+1}$ , com  $u(x) = u(|x|^2)$  satisfazendo*

$$0 \leq u'' \leq [u']^2, \text{ com } u' < 0. \quad (1.15)$$

*Denote por  $T^{n+1}$  a região generalizada envolvida por  $\Sigma^n$  e  $W^n$ . Se  $T^{n+1}$  é simétrico em relação a origem então,  $\Sigma^n$  não é estável.*

Para a métrica conforme foi necessário acrescentar as hipóteses *i*) e *ii*) para obter que, quando a plicada na função  $\phi_E = \tilde{g}(X_E, N)$ , a segunda variação da energia é negativa.

Um exemplo de métrica onde o Teorema 10 é aplicável é o espaço Gaussiano. Seja  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = -\frac{t}{2n}$ , então,  $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{2n}} \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade denominada de espaço Gaussiano  $\mathbb{G}^{n+1}$ . Um cálculo direto mostra que a função  $u(t)$  satisfaz (1.15).

Também é importante notar que o exemplo do espaço esférico se aplica ao Teorema 8 (apesar de não produzir novos resultados). Seja  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$ . Então,  $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$  é isométrica à  $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{p\}$ , isto é, a esfera menos um polo. Um cálculo direto mostra que a função  $u(t)$  satisfaz (1.15).

O próximo resultado é inspirado no Teorema a seguir.

**Teorema 1.3.2** (Li-Xiong (2016) [27]). *Seja  $B^{n+1}$  um bola Euclidiana unitária com peso radial  $f = e^\psi$ , onde  $\psi = \psi(r)$  satisfaz*

$$\psi'' \leq 0. \quad (1.16)$$

*Suponha que  $x : \Sigma^n \rightarrow B^{n+1}$  é uma imersão com  $H_f = \text{const.}$  com bordo livre. Se a aplicação de Gauss  $N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  satisfaz*

$$\int_{\Sigma} N da_f = 0,$$

*então  $\Sigma^n$  não é estável para variações que preservam volume.*

Neste segundo critério de não estabilidade pedimos que a hipersuperfície CMC possua bordo livre.

**Teorema 11.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma hipersuperfície CMC de bordo livre com  $u(x) = u(|x|^2)$  satisfazendo*

$$i) \quad 0 \leq u'' \leq [u']^2;$$

$$ii) \quad 0 < A^{\partial B} < \frac{2}{r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}.$$

*Onde  $A^{\partial B}$  é a segunda forma fundamental de  $\partial B$ . Se a aplicação de Gauss  $N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  satisfaz*

$$\int_{\Sigma} N da = 0$$

*então  $\Sigma^n$  não é estável.*

## 1.4 Classificação de hipersuperfícies CMC estáveis em uma bola conformemente Euclidiana

Considerando o mesmo ambiente como descrito na subseção 1.3, estudaremos aqui a estabilidade de hipersuperfícies CMC em uma bola Euclidiana munida de uma métrica conforme  $x : \Sigma^n \rightarrow (M^{n+1}, \tilde{g}) := (B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , com a função  $u$  sendo radial  $u(x) = u(|x|)^2$ . Inicialmente estudamos as hipersuperfícies mínimas de bordo livre. Usando as mesmas técnicas de Wang-Xia (2019) [44], construindo adequadamente um certo campo de Killing conforme  $X_E$  com fator conforme  $V_E$  na métrica Euclidianamente conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$  ( $\mathcal{L}_{X_E}\tilde{g} = 2V_E\tilde{g}$ ) e acrescentando uma hipótese sobre a métrica obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 12.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma hipersuperfície mínima de bordo livre estável com a métrica  $\tilde{g}$  satisfazendo*

$$\tilde{\Delta}V_E\tilde{g} - \tilde{\nabla}^2V_E + V_E\tilde{\text{Ric}} = 0.$$

*Então,  $\Sigma^n$  deve ser totalmente geodésica.*

Ainda não temos exemplos de tais métricas.

Uma abordagem bastante utilizada na classificação superfícies estáveis, auxiliado de ferramentas exclusivas para dimensão 2, como o Teorema de Gauss-Bonnet, é usar uma hipótese na topologia. Nos Teoremas que seguem (1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3), a ideia é sempre definir uma função de rotação e provar que a mesma é identicamente nula.

**Teorema 1.4.1** (Ros e Vergasta (1995) [39] - Teorema 11, parte gênero 0). *Seja  $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície CMC de bordo livre estável. Então  $\Sigma^2$  é totalmente umbílica.*

A hipótese gênero 0 em [39], auxiliada de um teorema devido a Cheng (1976) [7] sobre conjuntos nodais implica que  $\Sigma^2$  é homeomorfa a um disco. Usando o Teorema de Nitsche (1985) [32], conclui-se que  $\Sigma^2$  é totalmente umbílica. Ros-Souam (1997) [37] forneceram uma extensão de [32] para superfícies capilares nas formas espaciais, e com a mesma técnica de [39] obtiveram o Teorema (1.4.2).

**Teorema 1.4.2** (Ros e Souam (1997) [38] - Corolário 2.3). *Seja  $\Sigma^2 \hookrightarrow B^3 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície capilar estável em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ . Então  $\Sigma^2$  é totalmente umbílica.*

**Teorema 1.4.3** (Souam (2019) [42] - Teorema 4.1). *Seja  $\Sigma^2 \hookrightarrow ([0, l] \times_f M, g)$  uma superfície capilar imersa de gênero zero conectando as duas componentes de bordo de  $[0, l] \times_f M$  onde  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ ,  $g = dt^2 + f(t)^2g_M$  e  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  sendo uma função*

positiva, possuindo ângulos de contato  $\theta_0$  e  $\theta_1$  com  $0 \times M$  e  $l \times M$ , respectivamente. Se  $\Sigma^2$  é estável, então  $\Sigma^2$  é uma superfície de revolução com eixo de rotação passando por  $\mathbb{R} \times \{x\}$ , com  $x \in M$ .

Para o caso de dimensão 2, superfície CMC de bordo livre, o Teorema 13 é um resultado inspirado nos Teoremas 1.4.1, 1.4.2 e 1.4.3 que usam da mesma técnica para garantir que se a superfície CMC estável possui gênero 0 então deve ser de rotação. Para esse contexto consideramos a função  $u$  sendo radial  $u(x) = u(|x|)^2$ .

**Teorema 13.** *Seja  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}} \subset (\mathbb{B}^3, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma superfície CMC de bordo livre estável possuindo gênero 0. Então  $\Sigma^2$  é uma superfície de rotação com eixo de rotação passando pela origem.*

Observamos que para completar a classificação, é necessário provar que se  $\Sigma^2 \subset B_{r_{\mathbb{R}}}^3$  é estável, então  $\Sigma^2$  possui gênero zero. Resultado provado para o caso Euclidiano ( $\Sigma^2$  de bordo livre) em Nunes (2017) [35] que junto com os trabalhos de Ros-Vergasta (1995) [39] classificou completamente as superfícies CMC de bordo livre estáveis na bola Euclidiana.

## 1.5 Índice de Morse de hipersuperfícies mínimas de bordo livre em formas espaciais

O índice de Morse de uma hipersuperfície  $\Sigma^n \subset \Omega^{n+1}$ , denotado por  $\text{Ind}(\Sigma)$ , com  $\Omega^{n+1} \subset M^{n+1}$ , é a dimensão máxima do subespaço de  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  na qual a segunda variação do funcional área é negativa definida. Intuitivamente, o índice de Morse mede o número de deformações independentes que diminuem a área.

Em seus trabalhos, Fraser-Schoen (2016) [15] obtiveram uma limitação inferior para o índice de Morse de uma hipersuperfície (mais genericamente subvariedade) mínima de bordo livre em  $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Teorema 1.5.1** (Fraser-Schoen [15]). *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície mínima de bordo livre em  $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que não é o totalmente geodésica. Então  $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 1$ .*

Esse limitante, no entanto, não é ótimo, como mostra o seguinte Teorema obtido independentemente por Tran (2020) [43], Smith-Zhou (2019) [41] e Devyver (2019) [12].

**Teorema 1.5.2** (Tran [43], Smith-Zhou, [41], Devyver [12]). *Toda superfície mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $\mathbb{B}^3$  ou é o disco equatorial passando pela origem (neste caso possui índice de Morse igual a 1) ou possui índice de Morse pelo menos 4. Além disso, o índice de Morse do Catenoide Crítico é 4, portanto, o limitante inferior é atingido.*

Devido ao Teorema anterior, uma pergunta fica em aberto: o catenoite crítico (a menos de congruência) é a única superfície mínima de bordo livre em  $\mathbb{B}^3$  que possui índice de Morse igual a 4?

Alguns resultados parciais foram obtidos por Tran [43] e por Devyver [12]. Obtiveram uma resposta afirmativa se assumirmos adicionalmente a hipótese de que  $\Sigma^2$  é topologicamente um anel. A ideia é usar o fato de que  $\text{Ind}(\Sigma) = 4$  implica que o primeiro autovalor de Steklov de  $\Sigma^2$  é 1. Assim, por um Teorema de unicidade devido a Fraser e Schoen [15], garantir que é o catenoite.

**Teorema 1.5.3** (Tran [43], Devyver [12]). *Seja  $\Sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima de bordo livre com índice de Morse igual a 4 possuindo duas componentes de bordo. Então  $\Sigma^2$  deve ser congruente ao catenoide crítico.*

Denotaremos livremente por  $M_c^3$  as formas espaciais  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$  neste trabalho. Observamos que os resultados que se seguem já foram demonstradas para  $\mathbb{R}^3$ , porém manteremos a notação incluindo o espaço Euclidiano. O seguinte resultado é inspirado no Teorema 1.5.1.

**Teorema 14.** *Seja  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^3 \subset M_c^3$ , onde  $M_c^3 = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ , uma superfície mínima de bordo livre não totalmente geodésica. Então  $\text{Ind}(\Sigma) \geq 4$ .*

A versão Euclidiana do Teorema 15 apresentado a seguir (provado por Tran (2020) [43]), é crucial na demonstração do Teorema 1.5.3 apresentado anteriormente, acreditamos que este resultado é interessante por si só.

**Teorema 15.** *Seja  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^3 \subset M_c^3$ , onde  $M_c^3 = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ , uma superfície mínima de bordo livre com índice de Morse igual a 4. Então o primeiro autovalor de Steklov de  $\Sigma^2$ , denotado por  $\delta_1(\Sigma^2)$  é igual a  $A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \in \{1, \coth r_{\mathbb{R}}, \cot r_{\mathbb{R}}\}$ .*

## 1.6 Classificação via condição de gap na segunda forma fundamental

A principal ferramenta usada neste trabalho na investigação de resultados de classificação de hipersuperfícies capilares em domínios Euclidianos são identidades integrais. Motivados pelo estudo de hipersuperfícies capilares em domínios Euclidianos diferentes da bola e inspirados na construção e utilidade da formula do tipo Minkowski, um procedimento paralelo desemboca na seguinte proposição (já provada por Melo (2021) para o caso bordo livre, aqui apresentada para o caso capilar):

**Proposição 1.6.1** (Melo (2021) [29]-Estendido para versão capilar). *Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\partial\Omega = F^{-1}(1)$ , onde  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação diferenciável e 1 é um valor regular de  $F$ . Se  $\Sigma^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão CMC intersectando  $\Omega$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , com  $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$  e  $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ , então*

$$\sin \theta \int_{\partial\Sigma} |DF| \varphi ds = \int_{\Sigma} \varphi \Delta F da + \int_{\Sigma} (1 - F) \Delta \varphi da.$$

Uma consequência da Proposição 1.6.1 é a recuperação da formula de Minkowski desenvolvida por Wang e Xia [44]. Para ver isso, basta substituir  $\varphi = \langle E, x \rangle$  e  $F = |x|^2$  na Proposição 1.6.1. Este fato motiva pesquisar as aplicações Proposição 1.6.1 no estudo de hipersuperfícies capilares no ambiente Euclidiano em domínios quádricos (incluindo a bola).

Uma aplicação muito interessante da Proposição 1.6.1 é uma nova caracterização das imersões totalmente geodésicas em termos do comprimento da sua segunda forma fundamental. Acontece que uma condição de pinçamento nesta quantidade, que leva em consideração a função de suporte da superfície, é suficiente. O resultado que obtivemos é o seguinte:

**Teorema 16.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}^{n+1}(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão mínima tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial\mathbb{B}^{n+1}$  em um ângulo constante  $\theta$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ . Suponha que para todo  $x \in \Sigma^n$  vale*

$$\left( \frac{n - |A|^2}{n} \right) \langle N, x \rangle^2 \geq \cos^2 \theta, \quad (1.17)$$

onde  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$ , então  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica.

Este resultado é facilmente observado tomando  $F = |x|^2$  e  $\varphi = \langle x, N \rangle^2 - \cos^2 \theta$  na Proposição 1.6.1.

O Teorema 16 possui uma versão para formas espaciais.

**Teorema 17.** *(Teorema 16 para formas espaciais). Seja  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset M_c^{n+1}$ , onde,  $M_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  ou  $\mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão mínima tal que  $\partial\Sigma$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  em um ângulo constante  $\theta$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ . Suponha que para todo  $x \in \Sigma^n$  vale*

$$(nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x) - c_0|A|^2) \tilde{g}(x, N)^2 \geq \cos^2 \theta (nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x)),$$

onde  $N(x)$  denota o vetor normal unitário em um ponto  $x \in \Sigma^n$ ,  $c$  é curvatura seccional de  $M_c^{n+1}$ ,  $c_0 = e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2$ ,  $V_0$  é o fator conforme do campo posição  $x$ ,  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$ . Então  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica.

Apesar de ter uma demonstração bem diferente, o Teorema 14 possui uma certa semelhança com um teorema de gap devido a Ambrozio e Nunes (2021) [2].

**Teorema 1.6.2** (Ambrozio-Nunes-2021 [2]). *Seja  $\Sigma^2$  uma superfície mínima compacta de bordo livre na bola Euclidiana  $\mathbb{B}_1^3$ . Assuma que em todos dos pontos  $x \in \Sigma^2$ ,*

$$|A|^2(x) \langle x, N(x) \rangle^2 \leq 2,$$

em que  $N(x)$  denota o vetor normal unitário em um ponto  $x \in \Sigma^2$  e  $A$  denota a segunda forma fundamental de  $\Sigma^2$ . Então, uma das seguintes situações deve ocorrer;

- i)  $|A|^2(x) \langle x, N(x) \rangle^2 \equiv 0$  e  $\Sigma^2$  é um disco equatorial plano,
- ii) ou  $|A|^2(x) \langle x, N(x) \rangle^2 = 2$  em algum ponto  $p \in \Sigma^2$  e  $\Sigma^2$  é o catenóide crítico.

Os autores Li-Xiong em [25] provaram que o teorema do Ambrozio-Nunes também permanece válido para o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  e semi esfera  $\mathbb{S}_+^3$ , considerando como variedade produto  $M^3 = [0, R_\infty) \times \mathbb{S}^2$  com uma métrica warped  $\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + \lambda(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ . Assim,  $M^3$  é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  ou o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  para  $\lambda(r) = r$  e  $\lambda(r) = \sinh(r)$  com  $R_\infty = \infty$ , respectivamente, ou  $M^3$  é a semi-esfera  $\mathbb{S}_+^3$  para  $\lambda(r) = \sin(r)$  e  $R_\infty = \frac{\pi}{2}$ . Considerando então o campo vetorial  $X = \lambda(r)\partial_r$ , o teorema é enunciado como:

**Teorema 1.6.3** (Li-Xiong'2017, [25]). *Seja  $\Sigma^2$  uma superfície mínima compacta de bordo livre em uma bola geodésica  $B_R \subset M^3$  com raio  $R < R_\infty$ . Suponha que para todo  $x \in \Sigma$  temos*

$$\frac{|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2}{(\lambda')^2} \leq 2,$$

em que  $N(x)$  denota o vetor normal unitário em um ponto  $x \in \Sigma$  e  $A$  denota a segunda forma fundamental de  $\Sigma$ . Então,

- 1)  $|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2 \equiv 0$  e  $\Sigma$  é um disco totalmente geodésico,
- 2) ou  $\frac{|A|^2 \langle X, N(x) \rangle^2}{(\lambda')^2} = 2$  em algum ponto  $p \in \Sigma$  e  $\Sigma$  é um anel rotacional.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo fixaremos a notação e descreveremos sucintamente os conceitos básicos necessários a leitura dos capítulos seguintes. Como referência padrão, citamos [6], e as demais necessárias serão inseridas no decorrer do texto.

### 2.1 Conceitos iniciais

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com uma métrica  $g$ . O Teorema de Levi-Civita garante a existência de uma única aplicação  $\nabla$  denominada **Conexão Riemanniana** de  $M$

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (Y, X) &\longmapsto \nabla_Y X \end{aligned}$$

cumprindo as condições:

- i)  $\nabla_{fY+hZ}X = f\nabla_Y X + h\nabla_Z X$
- ii)  $\nabla_Y(X+Z) = \nabla_Y X + \nabla_Y Z$
- iii)  $\nabla_Y fX = Y(f)X + f\nabla_Y X$
- iv)  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- v)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ,

para todo campo de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e para toda função  $f$  e  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , em que  $[X, Y] = XY - YX$  denota o colchete de Lie dos campos  $X$  e  $Y$ .

A partir da conexão  $\nabla$  podemos estudar várias propriedades geométricas e topológicas impostas pela métrica  $g$  sobre  $M$ . A principal ferramenta que permite esse estudo em suas várias vertentes é o conceito de curvatura o qual definiremos a seguir.

**Definição 2.1.1.** *Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , o **tensor curvatura** de  $M$  é definido por*

$$R_M(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todo campo de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

A partir do tensor curvatura definimos a curvatura seccional de  $M$  em  $p$  na direção de um plano  $\pi$  como

$$K_p(E_1, E_2) = g_p(R(E_1, E_2)E_2, E_1),$$

em que  $\{E_1, E_2\}$  é uma base ortonormal de  $\pi$ .

**Definição 2.1.2.** Dada uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , o tensor simétrico dado por

$$\text{Ric}_p(X, Y) = \sum_{i=1}^n g_p(R(E_i, X)Y, E_i)$$

é chamado de **tensor de Ricci**, em que  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e o conjunto  $\{E_1, \dots, E_n\}$  forma uma base ortonormal do espaço  $T_pM$ .

Fixado um vetor unitário  $N \in T_pM$ , escolha  $E_1, \dots, E_{n-1}$  de forma que o conjunto  $\{E_1, \dots, E_{n-1}, N\}$  seja um base ortonormal para  $T_pM$ . Definimos a curvatura de Ricci em  $p$  na direção de  $N$  por:

$$\text{Ric}_p(N, N) = \sum_{i=1}^{n-1} g_p(R(E_i, N)N, E_i),$$

e escrevemos  $\text{Ric}_p(N)$  para denotar  $\text{Ric}_p(N, N)$ .

**Definição 2.1.3.** Dada uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$ , a **curvatura escalar** de  $M$  em  $p$  é definida por

$$S(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(E_i),$$

em que o conjunto  $\{E_1, \dots, E_n\}$  forma uma base ortonormal de  $T_pM$ .

## 2.2 Geometria das subvariedades

Seja  $\psi : \Sigma^k \rightarrow M^n$  ( $k < n$ ) uma imersão isométrica de uma variedade  $\Sigma^k$  em uma variedade  $M$ . Isso significa que estamos considerando  $\Sigma^k$  como um subconjunto de  $M^n$  cuja geometria será dada pela restrição da métrica de  $M^n$  sobre  $\Sigma^k$  e assim chamamos  $\Sigma^k$  de subvariedade de  $M^n$ . Em cada ponto  $p$  de  $\Sigma^k$  o espaço tangente  $T_pM$  se decompõe como

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp.$$

A conexão Riemanniana de  $\Sigma^k$  com respeito à métrica induzida de  $M^n$  é dada por

$$\nabla_Y^\top X = (\nabla_Y X)^\top,$$

em que  $X, Y \in T_p\Sigma$ .

Um conceito importante associado à geometria de  $\Sigma^k$ , induzida pela geometria de  $(M^n, g)$ , é o da segunda forma fundamental dada a seguir.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $\Sigma^k \rightarrow M^n$  uma subvariedade de  $M^n$ . A **segunda forma fundamental** de  $\Sigma^k$  em  $M^n$  é uma aplicação bilinear simétrica definida por*

$$A(X, Y) := (\nabla_X Y)^\perp = \nabla_X Y - \nabla_X^\top Y.$$

Em um ponto  $p \in \Sigma^k$ , escolha um vetor normal unitário  $N \in (T_p\Sigma)^\perp$ . Podemos então definir uma forma bilinear simétrica por

$$A_N(X, Y) = g(A(X, Y), N),$$

à qual está associada a uma aplicação linear auto adjunta

$$S_N : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

que cumpre  $g(S_N(X), Y) = g(A(X, Y), N)$ . A Equação de Weingarten relaciona a forma bilinear  $A_N$  com a conexão Riemanniana através da expressão:

$$A_N(X, Y) = -g(\nabla_X N, Y).$$

Decorre então que a aplicação  $S$  é dada por

$$S_N(X) = -(\nabla_X N)^\top.$$

**Observação 2.2.2.** *Escolhendo um vetor normal unitário  $N \in (T_p\Sigma)^\perp$ , as aplicações  $S_N$  e  $A_N$  são chamadas de segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$  segundo o vetor normal  $N$ . Quando  $k = n - 1$ , existe apenas uma escolha (a menos de sinal) para  $N$ , e assim, escreveremos apenas  $S$  e  $A$  para denotar  $S_N$  e  $A_N$  respectivamente. Além disso, usaremos a expressão segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$  para se referir a qualquer uma das aplicações  $S$ ,  $A$  ou  $A_N$ .*

Seja  $\Sigma^k \rightarrow M^n$  e  $\{E_1, \dots, E_k\}$  uma base ortonormal de  $T_p\Sigma$ . Definimos o **vetor curvatura média** de  $\Sigma^k$  em  $p$  por,

$$H = \sum_{i=1}^k A(E_i, E_i)$$

e o quadrado da norma da segunda forma fundamental por,

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^k |A(E_i, E_j)|^2.$$

Consideremos agora uma imersão  $\Sigma^k \rightarrow M^n$  de codimensão um, isto é, ( $k = n - 1$ ). O traço do tensor  $A$ , que é equivalente ao traço da aplicação linear auto adjunta  $S$  associada, dado por

$$H := \text{traço}(S) = \sum_{i,j=1}^k g^{ij} A_{ji}$$

é chamado de **curvatura média** de  $\Sigma^n$  em  $p$ . Dizemos que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície CMC (ou de curvatura média constante) se  $H \equiv c$  para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ .

Seja  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  um campo suave. Definimos o **divergente** de  $X$  sobre  $\Sigma$  como uma função  $\text{div} X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\text{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i),$$

em que  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_p \Sigma$ .

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$ . Definimos o **gradiente** de  $f$  como sendo um vetor  $\nabla f \in T_p M$  que cumpre

$$g(\nabla f, v) = v(f) \quad \forall v \in T_p M.$$

Sejam  $\Sigma^k \rightarrow M^n$  uma imersão isométrica e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $M$ . O gradiente de  $f$  restrito a  $\Sigma$  denotado por  $\nabla^\top f$  é dado pela projeção de  $\nabla f$  sobre  $T_p \Sigma$ . Já o **laplaciano** de  $f$  restrito a  $\Sigma$ , denotado por  $\Delta^\top f$ , é definido por

$$\Delta_\Sigma f = \text{div}(\nabla^\top f).$$

Em termos de um referencial geodésico  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ , em que  $U$  é uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma$  temos

$$\Delta_\Sigma f = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f)).$$

O **hessiano** da função  $f$  restrita a  $\Sigma$  é definido como um tensor simétrico dado por,

$$(\text{Hess}^\top f(p))(X, Y) = XY(f) - (\nabla_X^\top Y)(f),$$

em que  $X, Y$  são campos tangentes a  $\Sigma$  e  $\nabla^\top$  é a conexão Riemanniana de  $\Sigma$  na métrica induzida pela imersão isométrica. De maneira equivalente podemos também definir  $\text{Hess}^\top f$  por

$$(\text{Hess}^\top f(p))(X, Y) = g(\nabla_X^\top \nabla^\top f, Y).$$

**Definição 2.2.3** (Campo de Killing Conforme). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana. Um campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é chamado Campo de Killing Conforme (CKC) se  $X$  é tal que*

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 2fg(Y, Z), \quad (2.1)$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita,  $\mathcal{L}$  é a derivada de Lie,  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável. Em particular temos que

$$i) \quad g(\nabla_Y X, Y) = f, \text{ se } g(Y, Y) = 1;$$

$$ii) \quad g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y) \text{ se } g(Y, Z) = 0;$$

$$iii) \quad \operatorname{div}_g(X) = nf$$

**Proposição 2.2.4.** *Seja  $X$  um Campo de Killing Conforme em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , ou seja, para todo  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  vale*

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = 2fg(Y, Z), \quad (2.2)$$

então sob uma mudança conforme na métrica  $g$  dada por  $\tilde{g} = e^{2u}g$  temos:

$$\mathcal{L}_X \tilde{g}(Y, Z) = 2\sigma\tilde{g}(Y, Z), \quad (2.3)$$

em que  $\sigma = f + X(u)$ .

**Proposição 2.2.5.** *Sejam  $\Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$  uma hipersuperfície,  $N$  o campo unitário normal a  $\Sigma$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de Killing conforme com fator conforme  $f$  ( $\mathcal{L}_X g = 2fg$ ). Então, vale a seguinte identidade*

$$\Delta_\Sigma g(X, N) = (\operatorname{Ric}(N) + |A|^2)g(X, N) - nHf - ng(X, \nabla H) - n\nabla_N f.$$

Em particular,

$$(\Delta_\Sigma + \operatorname{Ric}(N) + |A|^2)g(X, N) = -nHf - g(X, \nabla H) - n\nabla_N f.$$

*Demonstração.* Uma demonstração detalhada dessa identidade pode ser consultada em Almeida (2020) [1].  $\square$

**Proposição 2.2.6.** *Sejam  $\Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$  uma imersão isométrica,  $N$  o campo unitário normal a  $\Sigma$  e  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, o Laplaciano de  $F$  sobre  $\Sigma$  é dado por*

$$\Delta_\Sigma F = \Delta F - \nabla^2 F(N, N) + nH\nabla_N F.$$

*Demonstração.* Como  $\Sigma$  é uma hipersuperfície possuindo campo normal unitário  $N$ , podemos escrever  $\nabla^\Sigma F = \nabla F - g(\nabla F, N)N$ . Tomando o divergente sobre  $\Sigma$  temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma(\nabla^\Sigma F) &= \operatorname{div}_\Sigma(\nabla F - g(\nabla F, N)N) \\ &= \Delta F - \nabla^2 F(N, N) - g(\nabla F, N)\operatorname{div}_\Sigma(N) \\ &= \Delta F - \nabla^2 F(N, N) + H\nabla_N F. \end{aligned}$$

$\square$

## 2.3 Formulação do problema de bordo livre para subvariedades mínimas

Nesta seção introduziremos o funcional área de uma subvariedade através de deformações (ou variações). Em seguida, apresentaremos as conhecidas primeira e a segunda formulas de variação do funcional área, as quais são expressas em função da geometria da subvariedade  $\Sigma^k$  e do ambiente  $(M^n, g)$ .

Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana,  $\Omega^n \subset M^n$  um domínio com  $\partial\Omega$  suave e  $\Sigma^k \hookrightarrow \Omega^n$  uma imersão isométrica de uma subvariedade compacta com bordo tal que  $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$  e  $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ . Uma variação admissível de  $\Sigma^k$  é uma aplicação  $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$  suave tal que para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\psi_t := \psi(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \Omega$  é uma imersão satisfazendo  $\psi_t(\text{int} \Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$ ,  $\psi_t(\partial\Sigma) \subset \partial\Omega$  e  $\psi(0, x) = x$ . Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  defina  $\Sigma_t := \psi_t(\Sigma)$  e denote por  $\text{vol}(\Sigma_t)$  a área de  $\Sigma_t$  com respeito a métrica induzida da imersão  $\Sigma_t \hookrightarrow \Omega$ .

**Proposição 2.3.1** (Fórmula da Primeira Variação do Funcional Área). *Sob as condições imediatamente anteriores temos que*

$$\left. \frac{d}{dt} \text{vol}(\Sigma_t) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} -g(H, X) da + \int_{\partial\Sigma} g(\nu, X) ds, \quad (2.4)$$

onde  $\nu$  denota o campo de vetores conormal exterior à  $\partial\Sigma$ ,  $X = \frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x)$  é chamado de campo variacional e  $da$  e  $ds$  são os elementos de volume de  $\Sigma^k$  e  $\partial\Sigma^k$  respectivamente.

A fórmula da primeira variação do funcional área fornece ao vetor curvatura média  $H$  o seu principal significado geométrico que é justificado na definição a seguir.

**Definição 2.3.2.** *Uma subvariedade  $\Sigma^k \hookrightarrow \Omega^n$  tal que  $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$  e  $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$  é dita ser mínima de bordo livre quando  $H \equiv 0$  e  $\Sigma^k$  intersecta  $\partial\Omega$  ortogonalmente. Em particular  $\nu$  coincide com o campo de vetores conormal de  $\partial\Omega$ .*

Assim, uma subvariedade mínima de bordo livre é um ponto crítico do funcional área para variações que não necessariamente mantêm o bordo fixo.

**Proposição 2.3.3** (Fórmula da Segunda Variação do Funcional Área). *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade mínima de bordo livre em  $\Omega^n$ , então para toda variação  $X$ , normal a  $\Sigma^k$ , temos*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} \text{vol}(\Sigma_t) \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma} \left( \sum_{i=1}^k |\nabla_{e_i}^\perp X|^2 - \sum_{i=1}^k R_M(X, e_i X, e_i) - \sum_{i,j=1}^k g(A(e_i, e_j), X)^2 \right) da + \\ &+ \int_{\partial\Sigma} g(\nabla_X X, \nu) ds, \end{aligned}$$

onde  $\{e_i\}_{i=1}^k$  é um referencial ortonormal local de  $\Sigma^k$ .

Por concisão, denotaremos

$$\begin{aligned} |\nabla^\perp X|^2 &:= \sum_{i=1}^k |\nabla_{e_i}^\perp X|^2, \\ \text{tr}_\Sigma R_M(X, \cdot X, \cdot) &:= \sum_{i=1}^k R_M(X, e_i X, e_i), \\ |g(A, X)|^2 &:= \sum_{i,j=1}^k g(A(e_i, e_j), X)^2. \end{aligned}$$

Se  $\Sigma^k$  é compacta e  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  possui suporte compacto, por integração por partes temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \text{vol}(\Sigma_t) \Big|_{t=0} &= \int_\Sigma -g(\Delta^\perp X, X) - \text{tr}_\Sigma R_M(X, \cdot X, \cdot) - |g(A, X)|^2 da + \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} g(\nabla\nu X - \nabla_X \nu, X) ds \end{aligned}$$

O lado direito da formulação da segunda variação do funcional área define uma forma quadrática em  $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , que passaremos a indicar por  $Q$ . Assim

$$Q(X, X) = - \int_\Sigma g(\Delta^\perp X + \text{tr}_\Sigma(R_M(\cdot, X)\cdot) + g(A, X)A, X) da + \int_{\partial\Sigma} g(\nabla\nu X - \nabla_X \nu, X) ds,$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ .  $Q$  é conhecida na literatura como forma de índice. Já o operador linear associado a  $Q$ ,

$$LX = \Delta^\perp X + \text{tr}_\Sigma(R_M(\cdot, X)\cdot) + g(A, X)A,$$

é chamado de operador estabilidade.

Um número real  $\lambda$  é dito ser um autovalor de  $L$ , se existe um campo de vetores admissível não-nulo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  tal que

$$\begin{cases} LX = \lambda X, & \text{em } \Sigma, \\ (\nabla\nu X - \nabla_X \nu)^\top_{\partial\Omega} = 0, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $(\cdot)^\top_{\partial\Omega}$  indica a projeção normal de uma campo sobre  $\partial\Omega$ . O espectro de  $L$  é formado por uma sequência monótona não-decrescente

$$\lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

O índice de Morse de  $\Sigma$ , denotado por  $\text{Ind}(\Sigma)$ , é definido como o número de autovalores negativos de  $L$ , contados com suas multiplicidades.  $\Sigma$ , é dita ser estável de  $\text{Ind}(\Sigma) = 0$  e instável, caso contrário. O índice de  $\Sigma$  mede o quanto  $\Sigma$  deixa de ser um mínimo local do funcional área.

## 2.4 Formulação do problema capilar para hipersuperfícies

Sejam  $(M^{n+1}, g)$  uma variedade Riemanniana orientável,  $\Omega \subset M^{n+1}$  um domínio com  $\partial\Omega$  suave e  $\Sigma^n \rightarrow \Omega$  uma imersão isométrica de uma subvariedade compacta com bordo tal que  $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$  e  $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ .

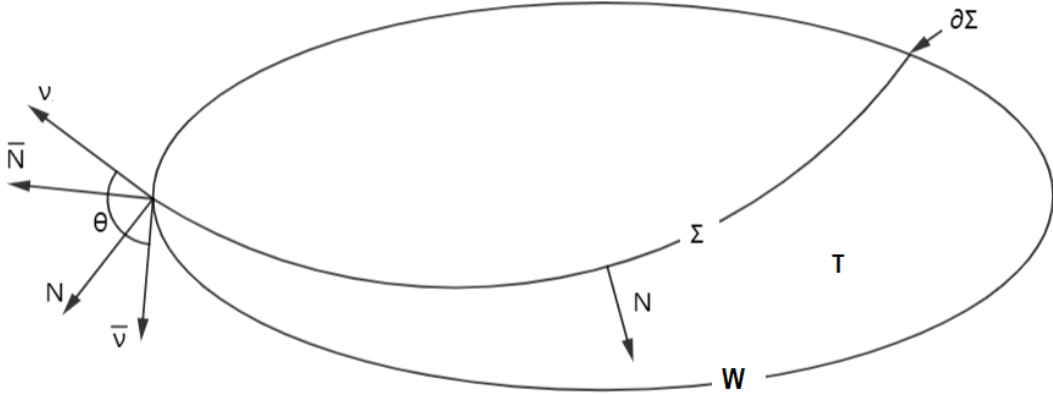


Figura 2.1: Ilustração típica do problema capilar.

Denotemos por  $N \in T\Sigma^\perp$  um campo de vetores normais e unitários ao longo de  $\Sigma^n$ ,  $\bar{N} \in T\Omega|_{\partial\Omega}$  o campo de vetores unitários normais a  $\partial\Omega$  apontando para fora,  $\nu \in T\Sigma|_{\partial\Sigma}$  o campo de vetores unitários normais a  $\partial\Sigma$  apontando para fora. Além disso, seja  $\bar{\nu} \in T\partial\Omega|_{\partial\Sigma}$  o campo de vetores unitários normais a  $\partial\Sigma$  tal que  $\{N, \nu\}$  e  $\{\bar{\nu}, \bar{N}\}$  possuem a mesma orientação no fibrado normal de  $\partial\Sigma$  em  $M^{n+1}$ .

Uma **variação admissível** de  $\Sigma^n$  é uma aplicação  $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \rightarrow \Omega$  suave tal que para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\psi_t := \psi(t, \cdot) : \Sigma^n \rightarrow \Omega$  é uma imersão isométrica satisfazendo  $\psi_t(\text{int} \Sigma) \subset \text{int}(\Omega)$ ,  $\psi_t(\partial\Sigma) \subset \partial\Omega$  e  $\psi(0, x) = x$ .

Dada uma variação admissível  $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \rightarrow \Omega$ , definimos o **funcional área**, o **funcional volume** (inspirado no caso fechado) e o **funcional wetting área** (ou “*área molhada*”, termo proveniente de motivações físicas no estudo da capilaridade), respectivamente, por

$$\mathcal{A}(t) = \int_{\Sigma} da_t, \quad \mathcal{V}(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \psi^* dv_M \quad \text{e} \quad \mathcal{W}(t) = \int_{[0,t] \times \partial\Sigma} \psi^* da_{\partial\Omega}, \quad (2.7)$$

onde  $da_t$  é o elemento de volume de  $\Sigma^n$  com respeito à métrica induzida por  $\psi(t, \cdot)$ ,  $dv_M$  é o elemento de volume de  $M$  e  $da_{\partial\Omega}$  é o elemento de volume de  $\partial\Omega$  induzido pela métrica de  $\Omega$ . Fixado  $\theta \in (0, \pi)$ , definimos o **funcional Energia**

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{A}(t) - \cos \theta \mathcal{W}(t). \quad (2.8)$$

A primeira variação dos funcionais  $\mathcal{A}(t)$ ,  $\mathcal{V}(t)$ ,  $\mathcal{W}(t)$  e  $\mathcal{E}(t)$  são bem conhecidos da literatura, para fins de consulta, sugerimos uma ótima exposição em Silva (2019) [28]. Segue a formula da primeira variação dos referidos funcionais.

$$\mathcal{A}'(0) = \int_{\Sigma} -Hg(X, N) da + \int_{\partial\Sigma} g(X, \nu) ds \quad (2.9)$$

$$\mathcal{V}'(0) = \int_{\Sigma} g(X, N) da \quad (2.10)$$

$$\mathcal{W}'(0) = \int_{\partial\Sigma} g(X, \bar{\nu}) ds \quad (2.11)$$

$$\mathcal{E}'(0) = \int_{\Sigma} -Hg(X, N) da + \int_{\partial\Sigma} g(X, \nu - \cos\theta\bar{\nu}) ds \quad (2.12)$$

onde  $X = \frac{\partial\psi}{\partial t}(0, x)$  é o **campo variacional** da variação admissível  $\psi$  e  $da$  e  $ds$  são os elementos de volume de  $\Sigma^n$  e  $\partial\Sigma^n$  respectivamente.

Evidentemente, hipersuperfícies de curvatura média nula que intersectam  $\partial\Omega$  ortogonalmente são pontos críticos do funcional área, uma vez que  $X|_{\partial\Sigma}$  é tangente a  $\partial\Omega$ . Tais hipersuperfícies são chamadas de **mínimas de bordo livre**. Da mesma maneira as hipersuperfícies mínimas que intersectam  $\partial\Omega$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$  são pontos críticos do funcional energia. Denominadas de hipersuperfícies **mínimas capilar**. Observamos que tais pontos críticos (mínimas de bordo livre ou capilar) não necessariamente minimizam o funcional área, ou seja, em geral, não são minimizantes.

Dizemos que a variação  $\psi$  **preserva volume** se  $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(t) = 0 \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Restrito as variações que preservam volume, é fácil ver que as hipersuperfícies de curvatura média constante (CMC) que intersectam  $\partial\Omega$  ortogonalmente, são pontos críticos do funcional área. Denominadas de hipersuperfícies **CMC de bordo livre**. Da mesma maneira, observamos que as hipersuperfícies CMC que intersectam  $\partial\Omega$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$  são pontos críticos do funcional energia restrito às variações que preservam volume. Denominadas de hipersuperfície **CMC capilar**. Neste trabalho, como na literatura em geral, o termo **hipersuperfície capilar** faz referência as hipersuperfícies mínimas ou CMC que intersectam  $\partial\Omega$  em um ângulo constante.

Usando um argumento padrão, pode-se demonstrar que se  $\Sigma^n$  é ponto crítico do funcional área  $\mathcal{A}'(0)$  (respectivamente do funcional energia  $\mathcal{E}'(0)$ ), então  $\Sigma^n$  é mínima de bordo livre (respectivamente mínima capilar). Da mesma maneira, quando restrito a variações que preservam volume, os pontos críticos são as CMC de bordo livre (respectivamente CMC capilar).

**Proposição 2.4.1.** *Uma imersão  $\Sigma^n \rightarrow \Omega^{n+1} \subset (M^{n+1}, g)$  é capilar (bordo livre) se e somente se, para toda variação preservando volume,  $\Sigma^n$  é ponto crítico do funcional energia  $\mathcal{E}$  (funcional área  $\mathcal{A}$ ).*

*Demonstração.* Uma demonstração pode ser consultada em Silva (2019) [28].  $\square$

Fazemos a convenção de  $N$  estando na direção oposta a do vetor curvatura média, assim  $H$  sempre será não negativa. Sob esta convenção, ao longo de  $\partial\Sigma$ , o ângulo entre  $-N$  e  $\bar{N}$  (respectivamente  $\nu$  e  $\bar{\nu}$ ) é sempre igual a  $\theta$ . Assim, no fibrado normal de  $\partial\Sigma$ , temos as seguintes relações:

$$\nu = -\operatorname{sen}\theta\bar{N} + \operatorname{cos}\theta\bar{\nu}, \quad (2.13)$$

$$N = \operatorname{cos}\theta\bar{N} + \operatorname{sen}\theta\bar{\nu}, \quad (2.14)$$

ou equivalentemente

$$\bar{N} = -\operatorname{sen}\theta\nu + \operatorname{cos}\theta N, \quad (2.15)$$

$$\bar{\nu} = \operatorname{cos}\theta\nu + \operatorname{sen}\theta N, \quad (2.16)$$

**Proposição 2.4.2.** *Para cada função  $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$  com  $\int_\Sigma \varphi da = 0$ , existe uma variação admissível preservando volume com campo variacional  $\varphi N$  como parte normal.*

*Demonstração.* Uma demonstração dessa proposição pode ser consultada em Barbosa-Manfredo (1984) [4].  $\square$

**Proposição 2.4.3** (Fórmula da segunda variação da energia). *Seja  $\Sigma^n \rightarrow \Omega^{n+1} \subset M^{n+1}$  uma imersão capilar. Então para toda variação  $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \rightarrow \Omega^{n+1}$  admissível normal de  $\Sigma^n$  a segunda variação da energia é dada por*

$$\mathcal{E}''(0) = \int_\Sigma -\varphi(\Delta_\Sigma\varphi + (\operatorname{Ric}(N) + |A|^2)\varphi)da + \int_{\partial\Sigma} \varphi(\varphi_\nu - q\varphi)ds. \quad (2.17)$$

onde

$$q = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} A^{\partial\Omega}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot\theta A(\nu, \nu),$$

$\operatorname{Ric}$  é o tensor curvatura de Ricci de  $M^{n+1}$ ,  $A := A_N^\Sigma$  é a segunda forma fundamental da imersão  $\Sigma^n$  dada por  $A(X, Y) = -g(\nabla_X N, Y)$  e  $A^{\partial\Omega} := A_{\bar{N}}^{\partial\Omega}$  é a segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  dada por  $A^{\partial\Omega}(X, Y) = -g(\nabla_X \bar{N}, Y)$ .

*Demonstração.* Uma demonstração dessa proposição pode ser consultada em Ros-Souam (1997) [38].  $\square$

**Definição 2.4.4** (Estabilidade). *Uma hipersuperfície capilar é dita estável se  $\mathcal{E}''(0) \geq 0$  para toda variação preservando volume, isto é,*

$$\mathcal{E}''(0) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{F} := \{\varphi \in C^\infty(\Sigma); \int_\Sigma \varphi da = 0\}$$

Quando  $\Sigma^n$  é de bordo livre, a segunda variação do funcional energia se reduz a segunda variação do funcional área, tendo a forma

$$\mathcal{A}''(0) = \int_\Sigma -\varphi(\Delta_\Sigma\varphi + (\operatorname{Ric}(N) + |A|^2)\varphi)da + \int_{\partial\Sigma} \varphi(\varphi_\nu - A^{\partial\Omega}\varphi)ds. \quad (2.18)$$

Sem qualquer restrição sobre o funcional área (exceto pedindo que as variações sejam normais), a forma bilinear  $Q : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  associada a segunda variação d funcional área é dada por

$$Q(u, v) = \int_{\Sigma} -u (\Delta_{\Sigma} v + \text{Ric}(N)v + |A|^2 v) da + \int_{\partial\Sigma} u (v_{\nu} - A^{\partial\Omega} v) ds, \quad (2.19)$$

ou ainda na forma divergente

$$Q(u, v) = \int_{\Sigma} g(\nabla^{\top} u, \nabla^{\top} v) - (\text{Ric}(N) + |A|^2) uv da - \int_{\partial\Sigma} A^{\partial\Omega} uv ds, \quad (2.20)$$

**Definição 2.4.5.** *O índice de Morse de  $\Sigma^n \subset \Omega^{n+1}$ , denotado por  $\text{Ind}(\Sigma)$  é a dimensão máxima do subespaço de  $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  na qual a segunda variação do funcional área é negativa definida. A nulidade é a dimensão do núcleo da forma de índice; isto é, o conjunto de todas as funções  $u$  tal que  $Q(u, v) = 0$  para toda  $v$ .*

Intuitivamente, o índice de Morse mede o número de deformações independentes que diminuem a área. Denotemos por  $L$  o operador

$$L = \Delta + \text{Ric}(N) + |A|^2. \quad (2.21)$$

É bem conhecido que o índice de Morse é igual a quantidade de autovalores contando a multiplicidade do problema:

$$\begin{cases} (\Delta + \text{Ric}(N) + |A|^2) u = Lu = -\lambda u, & \text{em } \Sigma, \\ \nabla_{\nu} u = A^{\partial\Omega} u, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (2.22)$$

## 2.5 Métrica conforme

Consideremos uma  $n$ -variedade Riemanniana  $M^n$  munida de uma métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}g$ . É bem conhecido os seguintes resultados que relacionam a geometria da métrica conforme  $\tilde{g}$  com a métrica original  $g$ .

**Lema 2.5.1.** *Seja  $\{E_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$  uma base local ortonormal de  $(M^n, g)$  definida em um aberto  $U \subset M$ . Então  $\{\tilde{E}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$  é uma base local ortonormal de  $(M^n, \tilde{g})$  definida em um aberto  $U \subset M$ , onde  $\tilde{E}_{\alpha} := e^{-u}E_{\alpha}$  para todo  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Proposição 2.5.2.** *Nas mesmas hipóteses do Lema (2.5.1) temos*

- i) A conexão de Levi-Civita de  $(M^n, g)$  está relacionada com a conexão de Levi-Civita de  $(M^n, \tilde{g})$  por*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(u)Y + Y(u)X - g(X, Y)\nabla u, \quad (2.23)$$

*para todos campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ;*

ii) A tensor curvatura de Riemann de  $(M^n, g)$  está relacionada com o tensor curvatura de Riemann de  $(M^n, \tilde{g})$  do seguinte modo

$$\begin{aligned}\tilde{R}_M(X, Y)Z &= R_M(X, Y)Z + X(u)Z(u)Y - Y(u)Z(u)X + \\ &- X(u)g(Y, Z)\nabla f + Y(u)g(X, Z)\nabla u - g(X, Z)\nabla_Y\nabla u + g(Y, Y)\nabla_X\nabla u + \\ &- g(X, Z)|\nabla u|_g^2 Y + g(Y, Z)|\nabla u|_g^2 X - \text{Hess } u(X, Z)Y + \text{Hess } u(Y, Z)X\end{aligned}$$

para todos campos vetoriais  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ;

iii) A curvatura de seccional de  $(M^n, g)$  está relacionada com a curvatura de seccional de  $(M^n, \tilde{g})$  por

$$e^{2u}\tilde{K}_M(X, Y) = K_M(X, Y) + X(u)^2 + Y(u)^2 - |\nabla u|_g^2 - \text{Hess } u(X, X) - \text{Hess } u(Y, Y) \quad (2.24)$$

para todos campos vetoriais  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  que são ortogonais com respeito a  $g$ ;

iv) O elemento de volume  $dv$  de  $(M^n, g)$  está relacionada com elemento de volume  $d\tilde{v}$  de  $(M^n, \tilde{g})$  por

$$d\tilde{v} = e^{nu} dv. \quad (2.25)$$

*Demonstração.* Uma demonstração detalhada dessas identidades podem ser consultadas em Pereira (2018) [36].  $\square$

**Proposição 2.5.3.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade de  $M^n$ . então, a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^k$  com respeito a métrica  $g$  está relacionada com a curvatura média  $\tilde{H}$  de  $\Sigma^k$  com respeito a métrica  $\tilde{g}$  por*

$$H = e^{2u}\tilde{H} + k(\nabla u)^\perp. \quad (2.26)$$

Para o contexto ao qual estamos interessados vamos considerar uma mudança conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle, \rangle$  em uma bola Euclidiana de raio  $r_{\mathbb{R}}$  centrada na origem de forma que o fator conforme  $e^{2u}$  seja radial, isto é, seu valor em um ponto  $x$  depende apenas da distância Euclidiana à origem. A descrição formal dessa situação é dada a seguir.

Seja  $\tilde{u} : [0, a^2) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave, em que  $a < \infty$ , ou  $a = \infty$ . Defina a função  $u : \mathbb{B}_a^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $u(x) = \tilde{u}(|x|^2)$ , onde  $\mathbb{B}_a^{n+1}$  é uma bola de raio  $a$  centrada na origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (se  $a = \infty$  então denotaremos  $\mathbb{B}_a^{n+1}$  por  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Ao longo deste trabalho usaremos o abuso de notação  $u(x) = (|x|^2)$  e  $\cdot$ . Considere  $\tilde{g}$  uma métrica em  $\mathbb{B}_a^{n+1}$  obtida por uma mudança conforme na métrica Euclidiana  $\langle, \rangle$  dada por

$$\tilde{g} = e^{2u}\langle, \rangle. \quad (2.27)$$

Com respeito à métrica canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$  os gradientes das funções  $u$  e  $e^{2u}$  são dados respectivamente por

$$Du = 2u'(|x|^2)x \quad \text{e} \quad De^{2u} = 4e^{2u}u'(|x|^2)x. \quad (2.28)$$

Escreveremos  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle, \rangle)$  ou simplesmente  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle, \rangle)$ , cumprindo  $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(B^{n+1})$  e  $\partial\Sigma \subset \partial B^{n+1}$ , para denotar uma imersão isométrica de uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  em uma bola Euclidiana centrada na origem de raio  $r_{\mathbb{R}} < a$  munida da métrica conforme  $\tilde{g}$ . Para enxugar a notação, quando necessário denotaremos  $(\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle, \rangle)$  por  $(M^{n+1}, \tilde{g})$  para indicar o espaço ambiente. Apresentaremos alguns exemplos de métricas conforme.

**Exemplo 2.5.4.** Considere  $u : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = \ln\left(\frac{2}{1-t}\right)$ . Assim,  $(\mathbb{B}_1^{n+1}, \tilde{g})$  é o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  modelado no disco de Poincaré.

**Exemplo 2.5.5.** Seja  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$ . Então,  $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$  é isométrica à  $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{p\}$ , isto é, a esfera menos um polo.

**Exemplo 2.5.6.** Seja  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = -\frac{t}{2n}$ . Então,  $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g}) = (\mathbb{R}^{n+1}, e^{-\frac{|x|^2}{2n}}\langle, \rangle)$  é uma variedade denominada Espaço Gaussiano.

**Exemplo 2.5.7.** Por fim, fazendo  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = 0$  teremos que  $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$  é o espaço Euclidiano com a métrica canônica.

É interessante também notar as propriedades do campo posição em uma métrica conforme, tais propriedades serão fundamentais e estão sintetizadas na proposição a seguir.

**Proposição 2.5.8.** *i)  $x$  é um campo de Killing Conforme em  $\mathfrak{X}(M)$ , ou seja, dado um referencial local  $\{E_i\}_i^{n+1}$  em  $T_pM$  para todo  $p \in T_pM$*

$$\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{E_i}x, E_j\right) + \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{E_j}x, E_i\right) = \frac{2}{n+1} \text{div}_{\tilde{g}}(x) \tilde{g}_{ij}, \quad (2.29)$$

onde denotaremos

$$V_0 := \frac{\text{div}_{\tilde{g}}(x)}{n+1} = 1 + \langle x, Dh \rangle. \quad (2.30)$$

*ii)  $x|_{\partial B^{n+1}}$  é um campo vetorial normal a  $\partial B^{n+1}$ .*

*iii) Para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  vale que*

$$\tilde{\nabla}_Z x = V_0 Z \quad (2.31)$$

**Lema 2.5.9.** *Seja  $(\mathbb{B}_a^{n+1}, \tilde{g})$  a bola Euclidiana com uma métrica  $\tilde{g} = e^{2u}\langle, \rangle$ , em que  $u(x) = u(|x|^2)$  para alguma função suave  $u$  definida em  $I = [0, a^2)$ . Considere a função  $V_0(x) = 1 + \langle x, Dh \rangle = 1 + 2u'|x|^2$ . Então temos*

*i)  $D_Y x = V_0 Y$  e*

*ii)  $DV_0 = 4e^{-2u}(u''|x|^2 + u')x$ .*

*Demonstração.* Uma demonstração detalhada dessas identidades podem ser consultadas em Pereira (2018) [36].  $\square$

**Lema 2.5.10.** *Considere  $\mathbb{B}_a^{n+1}$  com a métrica euclidiana e a conexão  $D$  associada. Então, o Hessiano da função  $u(x) = u(|x|^2)$  é dado por*

$$(Hess u)(x)(Y, Z) = 4u'' \langle x, Y \rangle \langle x, Z \rangle + 2u' \langle Y, Z \rangle.$$

*Demonstração.* Uma demonstração detalhada dessas identidades podem ser consultadas em Pereira (2018) [36]. □

## Capítulo 3

# Resultados de *gap*, não estabilidade e índice de Morse de para subvariedades $f$ -mínimas

Neste Capítulo estamos interessados em estudar as subvariedades  $f$ -mínimas em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , mais especificamente alguns resultados do tipo lacuna (também chamado simplesmente de *gap*), não estabilidade e índice de Morse no contexto de subvariedades  $f$ -mínimas.

### 3.1 Subvariedades $f$ -mínimas no espaço Euclidiano com peso

Uma variedade Riemanniana com peso é uma tripla  $(M^n, g, e^f dv)$ , em que  $M^n$  é uma variedade Riemanniana que possui elemento de volume  $dv$  induzido pela métrica  $g$  substituído por  $dv_f := e^f dv$  e  $f$  é uma função suave chamada de função peso ou função densidade. Nesta seção  $\nabla$  e  $\text{Ric}$  denotam a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de Ricci de  $(M, g)$  respectivamente. Objetos geométricos clássicos encontram equivalentes definidos para o contexto com peso, de forma que faça sentido a adaptação, bem como a aplicabilidade para a resolução de problemas das mais diversas teorias. Para  $(M^n, g, e^f dv)$ , um importante, e natural, tensor é o tensor curvatura  $\infty$ -Bakry-Émery Ricci, denotado por  $\text{Ric}_f$  (por simplicidade, tensor curvatura de Bakry-Émery Ricci), o qual é definido por

$$\text{Ric}_f := \text{Ric} - \nabla^2 f, \tag{3.1}$$

onde  $\nabla^2 f$  (ou  $\text{Hess } f$ ) denota o hessiano da função  $f$  em  $M$ . Se  $f$  é constante,  $\text{Ric}_f$  é o tensor curvatura de Ricci em  $M$ .

Considere uma imersão  $i : \Sigma^k \rightarrow M^n$ ,  $k < n$ , então,  $i : (\Sigma^k, i^*g) \rightarrow (M^n, g)$  é uma imersão isométrica com métrica induzida  $i^*g$ . Por simplicidade denotaremos  $i^*g$  por simplesmente por  $g$  quando não houver confusão. A função peso  $f$  induz um elemento de volume  $e^f da$  em  $\Sigma^k$ , onde  $da$  é o elemento de volume de  $\Sigma^k$  na métrica induzida  $g$ . Assim, temos o espaço com peso  $(\Sigma^k, g, e^f da)$ . Para todo campo vetorial  $X$  normal a  $(\Sigma^k, g)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , definimos em  $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  o operador  $f$ -Laplaciano por

$$\Delta_f^\perp X = \Delta^\perp X + \sum_{i=1}^k (e_i f)(\nabla_{e_i}^\perp X), \quad (3.2)$$

e

$$\Delta^\perp X = \sum_{i=1}^k \left( \nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp X - \nabla_{\nabla_{e_i}^\perp e_i}^\perp X \right), \quad (3.3)$$

onde  $\{e_i\}_{i=1}^k$  é um referencial local ortonormal de  $\Sigma$  e  $\nabla^\perp$  e  $\nabla^\top$  denotam a conexão de Levi-Civita em  $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  e  $\mathfrak{X}(\Sigma)$  respectivamente.

**Definição 3.1.1.** *O campo vetorial curvatura média com peso de uma subvariedade  $\Sigma^k$  com respeito a métrica  $g$  é definido por*

$$H_f = H - (\nabla f)^\perp.$$

Uma subvariedade  $(\Sigma^k, g)$  é chamada  $f$ -mínima se a curvatura média com peso  $H_f$  é identicamente nula, ou equivalentemente se o campo curvatura média satisfaz

$$H_f = (\nabla f)^\perp.$$

**Definição 3.1.2.** *A área com peso de  $(\Sigma^k, g)$  é definido por*

$$\text{vol}_f(\Sigma) := \int_\Sigma e^f da = \int_\Sigma da_f.$$

É bem conhecido o fato que  $\Sigma^k$  é uma subvariedade  $f$ -mínima se, e somente se,  $\Sigma^k$  é ponto crítico do funciona volume com peso.

**Proposição 3.1.3.** *Se  $X$  é um campo variacional com suporte compacto em  $\Sigma^k$ , então a primeira formula de variação do funcional área com peso  $f$  de  $\Sigma^k$  é dado por*

$$\left. \frac{d}{dt} \text{vol}_f(\Sigma_t) \right|_{t=0} = - \int_\Sigma g(X^\perp, H_f) e^f da.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser consultada em Cheng et al. (2015) [8].  $\square$

Por outro lado, uma subvariedade  $f$ -mínima pode ser vista como uma subvariedade mínima em uma certa métrica conforme. Precisamente, definimos a nova métrica  $\tilde{g} = e^{\frac{2f}{k}}$  em  $M^n$ , que é conforme a métrica  $g$ . Desse modo, a imersão  $i : \Sigma^k \rightarrow M^n$  induz a métrica

$i^*\tilde{g}$  em  $\Sigma^k$  de  $(\Sigma^k, \tilde{g})$ . Por simplicidade faremos o abuso de notação  $i^*\tilde{g} = \tilde{g}$  quando não houver confusão. Considerando essa formulação, o volume de  $(\Sigma^k, \tilde{g})$  é dado por

$$\tilde{vol}(\Sigma) := \int_{\Sigma} d\tilde{a} = \int_{\Sigma} e^f da = vol_f(\Sigma).$$

Portanto, desses últimos resultados temos que

$$\int_{\Sigma} \tilde{g}(X^\perp, \tilde{H}) d\tilde{a} = \int_{\Sigma} g(X^\perp, H_f) da_f,$$

onde  $d\tilde{a} = e^f da$  e  $\tilde{H}$  denotam o elemento de volume de e o campo curvatura média de  $\Sigma^k$  com respeito a métrica  $\tilde{g}$  respectivamente. Da última identidade obtemos que  $\tilde{H} = e^{-\frac{2f}{k}} H_f$  e  $(\Sigma^k, g)$  é  $f$ -mínima em  $(\Sigma^k, g)$  se, e somente se,  $(\Sigma^k, \tilde{g})$  é mínima em  $(\Sigma^k, \tilde{g})$ .

Para uma  $k$ -subvariedade  $f$ -mínima em  $(M^n, g, e^f dv)$  associamos o operador linear  $L_f$ , também conhecido na literatura como operador de estabilidade, ou  $f$ -estabilidade, definido por

$$L_f X = \Delta_f^\perp X + R(X) + F(X) + A(X),$$

onde,

$$R(X) = tr_{(\Sigma, g)} [R_M(\cdot, X) \cdot]^\perp = \sum_{i=1}^k [R_M(e_i, X) e_i]^\perp,$$

com  $R_M$  sendo o tensor curvatura de Riemann de  $(\Sigma, g)$  e  $\{e_i\}_{i=1}^k$  uma base local ortonormal de  $(\Sigma, g)$ ;

$$F(X) = - [\nabla^2 f(X)]^\perp = - \sum_{\alpha=k+1}^n \nabla^2 f(X, e_\alpha) e_\alpha, \quad (3.4)$$

com  $\{e_\alpha\}_{\alpha=k+1}^n$  sendo uma base ortonormal local normal a  $(\Sigma, g)$ ; e

$$A(X) = \sum_{i,j=1}^k g(A(e_i, e_j), X) A(e_i, e_j), \quad (3.5)$$

onde  $A$  denota a segunda forma fundamental de  $(\Sigma, g)$  e  $\{e_i\}_{i=1}^k$  uma base local ortonormal de  $(\Sigma, g)$ . Introduziremos agora o conceito de  $f$ -estabilidade (ou  $L_f$ -estabilidade)

**Proposição 3.1.4** (Fórmula da Segunda Variação do Funcional Área com peso  $f$ ). *Seja  $(\Sigma^k, g)$  uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(M^n, g, e^f dv)$ . Se  $X$  é um campo variacional com suporte compacto normal a  $\Sigma^k$  (ou seja,  $X = X^\perp$ ), então a segunda variação do funcional área com peso  $f$  de  $(\Sigma^k, g)$  é dada por*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} vol_f(\Sigma_t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} g(X, \Delta_f^\perp X + R(X) + F(X) + A(X)) da_f. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser consultada em Cheng et al. (2015) [8].  $\square$

Podemos associar uma forma quadrática à segunda variação do funcional área com peso, a qual denotaremos por  $Q_f$ , explicitamente

$$Q_f(X, X) = - \int_{\Sigma} g(X, L_f X) da_f, \quad (3.7)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  com suporte compacto.

**Definição 3.1.5.** *Uma  $k$ -subvariedade  $f$ -mínima em  $(M^n, g, e^f dv)$  é chamada  $f$ -estável se a segunda variação do funcional área com peso é não negativa para toda variação com suporte compacto. Equivalentemente*

$$Q_f(X, X) \geq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp \text{ com suporte compacto.}$$

Definimos o índice de Morse (ou  $L_f$ -índice), denotado por  $\text{Ind}_f(\Sigma^k)$ , de uma subvariedade  $f$ -mínima  $\Sigma^k$  como sendo o máximo das dimensões de subespaços vetoriais onde  $Q_f$  é negativa definida. Portanto,  $\Sigma^k$  é estável se, e somente se,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) = 0$ . Calcularemos a seguir o operador  $L_f$  para dois exemplos de grande utilidade nesta tese.

**Exemplo 3.1.6** (Subvariedades  $f$ -mínimas em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ ). *Consideremos o espaço Euclidiano  $M^n = \mathbb{R}^n$  munido da métrica canônica  $g_{can} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , com peso radial  $f(x) = f(|x|^2)$  e  $\nabla = D$  denotando a derivada usual. Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , ou seja,*

$$H = (\nabla f)^\perp = 2f'x^\perp, \quad (3.8)$$

nessa configuração, temos que o operador  $L_f$ , para um campo variacional  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , é dado por

$$L_f X = \Delta_f^\perp X - \sum_{\alpha=k+1}^n D^2 f(X, e_\alpha) e_\alpha + A(X), \quad (3.9)$$

de outra maneira

$$L_f X = \Delta_f^\perp X - 4f''\langle x, X \rangle x^\perp - 2f'X + A(X) \quad (3.10)$$

$$= \Delta^\perp X + 2f'\nabla_{x^\top}^\perp X - 4f''\langle x, X \rangle x^\perp - 2f'X + A(X). \quad (3.11)$$

Para ver isto, primeiramente notemos que o termo  $R(X)$  é ideticamente nulo, uma vez que  $M^n = \mathbb{R}^n$ . Para calcular o termo  $F(X) = -\sum_{\alpha=k+1}^n D^2 f(X, e_\alpha) e_\alpha$ , com  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  e  $\{e_\alpha\}_{\alpha=k+1}^n$  sendo uma base ortonormal local normal a  $(\Sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , precisamos determinar o hessiano de  $f$ . Como  $f$  é radial, podemos usar o Lema 2.5.10. Dessa maneira obtemos

$$\begin{aligned} F(X) &= - \sum_{\alpha=k+1}^n D^2 f(X, e_\alpha) e_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=k+1}^n (4f''\langle x, X \rangle \langle x, e_\alpha \rangle + 2f'\langle X, e_\alpha \rangle) e_\alpha \\ &= -4f''\langle x, X \rangle x^\perp - 2f'X. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^k (e_i f)(\nabla_{e_i}^\perp X) = \nabla_{\nabla^\top f}^\perp X = 2f' \nabla_{x^\top}^\perp X,$$

pois  $\nabla^\top f = 2f'x^\top$ , finalizamos a demonstração.

**Exemplo 3.1.7** (Self-shrinkers no Espaço Gaussiano). No Exemplo 3.1.6, tomemos  $f = -\frac{|x|^2}{4}$ . Subvariedades  $f$ -mínimas em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv_{can})$  são precisamente subvariedades self-shrinkers (ou seja,  $H = -\frac{x^\perp}{2}$ ). Para uma subvariedade self-shrinker, o operador  $L_f$ , para um campo variacional  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , é dado por

$$L_f X = \Delta^\perp X - \frac{1}{2} \nabla_{x^\top}^\perp X + \frac{1}{2} X + A(X). \quad (3.12)$$

Para ver este fato, basta observar que  $f' = -\frac{1}{4}$ ,  $f'' = 0$  e  $\nabla^\top f = -\frac{x^\top}{2}$  e substituir em (3.10).

O crescimento de volume é uma propriedade muito importante no estudo de variedades completas não compactas. Se  $\Sigma^k$  é uma subvariedade completa de  $M^n$ , com  $k < n$ ,  $\Sigma^k$  é dita possuir crescimento de volume polinomial se, para um  $p \in M^n$  fixado, existe constantes reais  $C$  e  $d$  tais que para todo  $r \geq 1$ ,

$$\text{vol}(B_r^M(p) \cap \Sigma) \leq Cr^d, \quad (3.13)$$

onde  $B_r^M(p)$  é a bola extrínseca de raio  $r$  centrada em  $p$ ,  $\text{vol}(B_r^M(p))$  denota o volume de  $\text{vol}(B_r^M(p) \cap \Sigma)$ . Quando  $d = k$  em (3.13), dizemos que  $\Sigma^k$  possui crescimento de volume Euclidiano.

**Proposição 3.1.8.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima completa sem bordo imersa em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ . Se  $\phi \in C^\infty(\Sigma)$  e  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  então*

$$Q_f(\phi X, \phi X) = - \int_\Sigma \phi^2 \langle X, L_f X \rangle - |\nabla^\top \phi|^2 |X|^2 da_f$$

*Demonstração.* Primeiramente determinaremos o operador  $f$ -estabilidade aplicado ao campo  $\phi X$ . Notemos que o Laplaciano de  $\phi X$ , definido pela conexão normal sobre  $\Sigma$  é dado por:

$$\Delta^\perp(\phi X) = \Delta^\perp \phi X + \phi \Delta^\perp X + 2 \nabla_{\nabla^\top \phi}^\perp X. \quad (3.14)$$

Utilizando esse resultado em (3.2) obtemos o  $f$ -Laplaciano de  $\phi X$ , explicitamente

$$\Delta_f^\perp(\phi X) = \phi \Delta_f^\perp X + \Delta^\perp \phi X + 2 \nabla_{\nabla^\top \phi}^\perp X + (\nabla_{\nabla^\top f}^\perp \phi) X. \quad (3.15)$$

Da definição do operador  $f$ -estabilidade sabemos que

$$L_f X = \Delta_f^\perp X + R(X) + F(X) + A(X).$$

Portanto, substituindo (3.15) na definição de operador  $f$ -estabilidade, finalmente obtemos

$$L_f(\phi X) = \phi L_f X + \Delta^\perp \phi X + 2\nabla_{\nabla^\top}^\perp \phi X + (\nabla_{\nabla^\top}^\perp f \phi)X. \quad (3.16)$$

Da identidade (3.16), podemos derivar

$$\langle \phi X, L_f(\phi X) \rangle = \phi^2 \langle X, L_f X \rangle + \phi \Delta^\perp \phi |X|^2 + 2\phi \langle \nabla_{\nabla^\top}^\perp \phi X, X \rangle + \phi \langle \nabla_{\nabla^\top}^\perp f \phi |X|^2 \rangle. \quad (3.17)$$

Observando que

$$\begin{aligned} 2\phi \langle \nabla_{\nabla^\top}^\perp \phi X, X \rangle &= \phi \nabla_{\nabla^\top}^\perp |X|^2 \\ &= \langle \phi \nabla^\top \phi, \nabla^\top |X|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla^\top \phi^2, \nabla^\top |X|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.18)$$

e

$$\phi \langle \nabla_{\nabla^\top}^\perp f \phi |X|^2 \rangle = \phi \langle \nabla^\top f, \nabla^\top \phi \rangle |X|^2. \quad (3.19)$$

Portanto, podemos reescrever a identidade (3.17), obtendo

$$\langle \phi X, L_f(\phi X) \rangle = \phi^2 \langle X, L_f X \rangle + \phi \Delta^\perp \phi |X|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla^\top \phi^2, \nabla^\top |X|^2 \rangle + \phi \langle \nabla^\top f, \nabla^\top \phi \rangle |X|^2. \quad (3.20)$$

Derivaremos uma identidade para uso posterior. Consideremos o operador divergente sobre  $\Sigma$ , denotado por  $\text{div}^\top$ , aplicado ao campo tangente  $\frac{1}{2}|X|^2 e^f (\nabla^\top \phi^2)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{div}^\top (|X|^2 (\nabla^\top \phi^2) e^f) &= \langle \frac{1}{2} \nabla^\top (|X|^2 e^f), \nabla^\top \phi^2 \rangle + \frac{1}{2} \text{div}^\top (\nabla^\top \phi^2) |X|^2 e^f \\ &= \frac{1}{2} \langle \nabla^\top |X|^2, \nabla^\top \phi^2 \rangle e^f + \phi |X|^2 \langle \nabla^\top f, \nabla^\top \phi \rangle e^f \\ &\quad + \phi \Delta^\perp \phi |X|^2 e^f + |\nabla^\top \phi|^2 |X|^2 e^f. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Determinaremos agora a forma quadrática  $Q_f$  aplicada ao campo normal  $\phi X$ . Substituindo (3.20) na forma quadrática  $Q_f(\cdot, \cdot)$  associada a segunda variação da área resulta

$$\begin{aligned} Q_f(\phi X, \phi X) &= - \int_{\Sigma} \langle \phi X, L_f(\phi X) \rangle da_f \\ &= - \int_{\Sigma} \{ \langle \phi X, L_f(\phi X) \rangle \} e^f da \\ &= - \int_{\Sigma} \{ \phi^2 \langle X, L_f X \rangle + \phi \Delta^\perp \phi |X|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla^\top \phi^2, \nabla^\top |X|^2 \rangle + \phi \langle \nabla^\top f, \nabla^\top \phi \rangle |X|^2 \} e^f da. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a identidade (3.21) e o Teorema da divergência para o ambiente Euclidiano obtemos que

$$\begin{aligned} Q_f(\phi X, \phi X) &= - \int_{\Sigma} \{ \phi^2 \langle X, L_f X \rangle - |\nabla^\top \phi|^2 |X|^2 \} e^f da \\ &= - \int_{\Sigma} \phi^2 \langle X, L_f X \rangle - |\nabla^\top \phi|^2 |X|^2 da_f \end{aligned}$$

concluindo assim a Proposição.  $\square$

**Corolário 3.1.9.** *Seja  $\Sigma^n$  uma subvariedade  $f$ -mínima completa sem bordo imersa em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ . Se  $\phi, u \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  então*

$$Q_f(\phi u, \phi u) = - \int_{\Sigma} \phi^2 u L_f u - |\nabla^\top \phi|^2 u^2 da_f$$

**Lema 1.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f(x) = f(|x|^2)$ ), então a componente normal  $x^\perp$  do campo posição de  $\Sigma^k$  e a componente normal  $y^\perp$  de um campo vetorial constante satisfazem*

$$\Delta_f \{x^\perp\} = -2f'x^\perp - A(x^\perp) - 4f''|x^\top|^2 \{x^\perp\} \quad (3.22)$$

$$\Delta_f \{y^\perp\} = -A(y^\perp) - 4f''\langle x^\top, y^\top \rangle x^\perp \quad (3.23)$$

*Demonstração.* Prova de (3.22): Fixe  $p \in \Sigma^k$  e tomemos uma base ortonormal local  $\{e_i\}_{i=1}^k$  tal que  $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$ . Determinemos primeiramente  $\nabla_{e_i}^\perp \{x^\perp\}$ .

$$\nabla_{e_i}^\perp \{x^\perp\} = \nabla_{e_i}^\perp (x - \langle x, e_j \rangle e_j) = -\langle x, e_j \rangle A_{ij}. \quad (3.24)$$

Derivando a expressão anterior obtemos, dessa forma, que

$$\nabla_{e_k}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \{x^\perp\} = -A_{ik} - \langle x, A_{kj} \rangle A_{ij} - \langle x, e_j \rangle \nabla_{e_k}^\perp A_{ij}.$$

Usando o fato que  $\nabla_{e_k}^\perp A_{ij} = \nabla_{e_j}^\perp A_{ik}$ , podemos reescrever a equação anterior como

$$\nabla_{e_k}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \{x^\perp\} = -A_{ik} - \langle x, A_{kj} \rangle A_{ij} - \langle x, e_j \rangle \nabla_{e_j}^\perp A_{ik}. \quad (3.25)$$

Tomando o traço em (3.25) e usando a condição de  $f$ -mínima, ou seja,  $H = 2f'x^\perp$ , e que  $f' \neq 0$ , temos que (3.25) fica

$$\begin{aligned} \Delta^\perp \{x^\perp\} &= -H - A(x^\perp) - \nabla_{x^\top}^\perp H \\ &= -2f'x^\perp - A(x^\perp) - \nabla_{x^\top}^\perp \{2f'x^\perp\} \\ &= -2f'x^\perp - A(x^\perp) - 4f''|x^\top|^2 \{x^\perp\} - 2f' \nabla_{x^\top}^\perp \{x^\perp\}. \end{aligned}$$

Desse modo

$$\begin{aligned} \Delta_f^\perp \{x^\perp\} &= \Delta^\perp \{x^\perp\} + \sum_{i=1}^k (e_i f) (\nabla_{e_i}^\perp \{x^\perp\}) \\ &= \Delta^\perp \{x^\perp\} + 2f' \nabla_{x^\top}^\perp x^\perp \\ &= -2f'x^\perp - A(x^\perp) - 4f''|x^\top|^2 \{x^\perp\} - 2f' \nabla_{x^\top}^\perp \{x^\perp\} + 2f' \nabla_{x^\top}^\perp x^\perp \\ &= -2f'x^\perp - A(x^\perp) - 4f''|x^\top|^2 \{x^\perp\}. \end{aligned}$$

Agora vamos verificar (3.23). De fato, fixe  $p \in \Sigma^k$  e tomemos uma base ortonormal local  $\{e_i\}_{i=1}^k$  tal que  $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$ . Para um vetor constante  $y \in \mathbb{R}^n$ , vamos calcular  $\nabla_{e_i}^\perp \{y^\perp\}$

$$\nabla_{e_i}^\perp \{y^\perp\} = \nabla_{e_i}^\perp (y - \langle y, e_j \rangle e_j) = -\langle y, e_j \rangle A_{ij}. \quad (3.26)$$

Derivando a expressão anterior obtemos, dessa forma, que

$$\nabla_{e_k}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \{y^\perp\} = -\langle y, A_{kj} \rangle A_{ij} - \langle y, A_{kj} \rangle \nabla_{e_k}^\perp A_{ij}.$$

Usando o fato que  $\nabla_{e_k}^\perp A_{ij} = \nabla_{e_j}^\perp A_{ik}$ , obtemos agora que

$$\nabla_{e_k}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \{y^\perp\} = -\langle y, A_{kj} \rangle A_{ij} - \langle y, e_j \rangle \nabla_{e_j}^\perp A_{ki}. \quad (3.27)$$

O traço de (3.27), produz

$$\Delta^\perp y^\perp = -A(y^\perp) - \langle y, e_j \rangle \nabla_{e_j}^\perp H. \quad (3.28)$$

Como  $H = 2f'x^\perp$ , usando (3.24) obtemos

$$\nabla_{e_j}^\perp H = 4f''\langle e_j, x \rangle x^\perp - 2f'\langle x, e_i \rangle A_{ij}. \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29) em (3.28) e usando (3.26) temos

$$\begin{aligned} \Delta^\perp y^\perp &= -A(y^\perp) - 4f''\langle e_j, x \rangle \langle y, e_j \rangle x^\perp + 2f'\langle x, e_i \rangle \langle y, e_j \rangle A_{ij} \\ &= -A(y^\perp) - 4f''\langle e_j, x \rangle \langle y, e_j \rangle x^\perp - 2f'\langle x, e_i \rangle \nabla_{e_i}^\perp \{y^\perp\} \\ &= -A(y^\perp) - 4f''\langle e_j, x \rangle \langle y, e_j \rangle x^\perp - 2f'\nabla_{x^\top}^\perp \{y^\perp\} \\ &= -A(y^\perp) - 4f''\langle x^\top, y^\top \rangle x^\perp - 2f'\nabla_{x^\top}^\perp \{y^\perp\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta_f^\perp \{y^\perp\} &= \Delta^\perp \{y^\perp\} + \sum_{i=1}^k (e_i f) (\nabla_{e_i}^\perp \{y^\perp\}) \\ &= \Delta^\perp \{y^\perp\} + 2f'\nabla_{x^\top}^\perp y^\perp \\ &= -A(y^\perp) - 4f''\langle x^\top, y^\top \rangle x^\perp - 2f'\nabla_{x^\top}^\perp \{y^\perp\} + 2f'\nabla_{x^\top}^\perp y^\perp \\ &= -A(y^\perp) - 4f''\langle x^\top, y^\top \rangle x^\perp \end{aligned}$$

□

**Lema 1.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f(x) = f(|x|^2)$ ), então a componente normal  $x^\perp$  do campo posição de  $\Sigma^k$  e a componente normal  $y^\perp$  de um campo vetorial constante satisfazem*

$$L_f \{x^\perp\} = -4(f' + f''|x|^2) \{x^\perp\} \quad (3.30)$$

$$L_f \{y^\perp\} = -4f''\langle x, y \rangle x^\perp - 2f'y^\perp \quad (3.31)$$

*Demonstração.* Prova de (3.30): tomando  $x^\perp$  como campo variacional em (3.1.6), ou seja substituindo  $X = x^\perp$  e usando (3.23) obtemos

$$\begin{aligned} L_f \{x^\perp\} &= \Delta_f^\perp \{x^\perp\} - 4f''\langle x, x^\perp \rangle x^\perp - 2f'x^\perp + A(x^\perp) \\ &= -2f'x^\perp - A(x^\perp) - 4f''|x^\top|^2 x^\perp + \\ &\quad -4f''\langle x, x^\perp \rangle x^\perp - 2f'x^\perp + A(x^\perp) \\ &= -4(f' + f''|x|^2) x^\perp. \end{aligned}$$

Agora vamos verificar (3.31). De fato, tomando  $y^\perp$  como campo variacional em (3.1.6), ou seja substituindo  $X = y^\perp$  e usando (3.22) obtemos

$$\begin{aligned} L_f\{y^\perp\} &= \Delta_f^\perp y^\perp - 4f''\langle x, y^\perp \rangle x^\perp - 2f'y^\perp + A(y^\perp) \\ &= -A(y^\perp) - 4f''\langle x^\top, y^\top \rangle x^\perp - 4f''\langle x, y^\perp \rangle x^\perp - 2f'y^\perp + A(y^\perp) \\ &= -4f''\langle x, y \rangle x^\perp - 2f'y^\perp, \end{aligned}$$

finalizando a demonstração.  $\square$

O Teorema 3, Equação (3.30), possui uma aplicação imediata para subvariedades  $f$ -mínimas compactas sem bordo ( $f$ -mínima fechada).

**Observação 3.1.10.** *Para provar que*

$$L_f\{y^\perp\} = -4f''\langle x, y \rangle x^\perp - 2f'y^\perp,$$

*utilizamos que  $0 = H_f = H - (\nabla f)^\perp$  na passagem onde foi necessário derivar a curvatura média  $H$ , dessa forma, o resultado continua válido sobre a hipótese de  $\Sigma^k$  ter  $f$ -curvatura média paralela.*

## 3.2 Limitação inferir para o Índice de Morse de subvariedades $f$ -mínimas e subvariedades de $f$ -curvatura média paralela e resultado do tipo *gap*

Nesta seção apresentaremos resultados de limitação inferir para o Índice de Morse de subvariedades  $f$ -mínimas não compactas (Teorema 5) e subvariedades de  $f$ -curvatura média paralela (caso não compacto Teorema 6 e caso compacto de bordo livre Teorema 7) e um resultado do tipo *gap* (Teorema 8).

**Teorema 5.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade  $f$ -mínima completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f' + f''|x|^2 < 0. \tag{3.32}$$

*Então,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) \geq 1$ . Em particular,  $\Sigma^k$  não é  $f$ -estável.*

*Demonstração.* Primeiramente definiremos sobre  $\Sigma^k$  uma função de corte. Seja  $\eta$  uma função diferenciável não negativa em  $[0, \infty)$  satisfazendo

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } [0, 1), \\ 0, & \text{se } [2, \infty), \end{cases} \quad (3.33)$$

e  $|\eta'| \leq 2$ .

Fixe um ponto  $p \in \Sigma^k$  e seja  $r(x) = \text{dist}_\Sigma(p, x)$  a distancia função distância intrínseca sobre  $\Sigma^k$ . Definimos a sequência de funções  $\phi_j(x) = \eta(\frac{r(x)}{j})$ ,  $j \geq 1$ . Então  $|\nabla^\top \phi_j|^2 \leq 1$  para  $j \geq 2$ .

Agora aplicaremos a forma quadrática  $Q_f$  na sequência de campos variacionais  $\phi_j x^\perp \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , onde  $x^\perp$  denota a componente normal sobre  $\Sigma^k$  do vetor posição. Utilizando o campo  $\phi_j x^\perp$  na Proposição 3.1.8 temos

$$\begin{aligned} Q_f(\phi_j x^\perp, \phi_j x^\perp) &= - \int_\Sigma \phi_j^2 \langle x^\perp, L_f x^\perp \rangle - |\nabla^\top \phi_j|^2 |x^\perp|^2 da_f \\ &= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \phi_j^2 \langle x^\perp, L_f x^\perp \rangle da_f + \int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} |\nabla^\top \phi_j|^2 |x^\perp|^2 da_f \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\leq - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \langle x^\perp, L_f x^\perp \rangle da_f + \int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} |x^\perp|^2 da_f \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

onde  $B_j^\Sigma(p)$  denota a bola geodésica intrínseca de  $\Sigma$  de raio  $j$  centrada em  $p$ . Como  $\Sigma$  possui crescimento de volume polinomial, temos que, quando  $j \rightarrow \infty$

$$\int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} |x^\perp|^2 da_f \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

Tomando  $j$  suficientemente grande e utilizando o Lema 1, mais especificamente a identidade (3.31), decorre que

$$Q_f(\phi_j x^\perp, \phi_j x^\perp) \leq - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \langle x^\perp, L_f x^\perp \rangle da_f, \quad (3.38)$$

$$= \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} 4(f' + f''|x|^2) |x^\perp|^2 da_f. \quad (3.39)$$

como por hipótese  $f' + f''|x|^2 < 0$  isso prova que  $x^\perp$  é uma direção tal que  $Q_f$  é negativa, provando assim que  $\square$

A desigualdade estrita em  $f' + f''|x|^2 < 0$  é uma condição necessária tendo em consideração a Observação 1.1.9. Explorando o  $f$ -Laplaciano do campo  $x^\perp$  obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 8.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade fechada  $f$ -mínima em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$  com função peso  $f$  radial ( $f(x) = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$|A|^2 \leq -2f' - 4f''|x^\top|^2, \quad (3.40)$$

então alguma das seguintes possibilidades ocorrem:

1.  $\Sigma^k$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{k+1}$ ;
2.  $x^\perp \equiv \text{const.} \neq \vec{0}$ .

*Demonstração.* Como  $\Sigma^k$  é fechada, a Identidade de Green e (3.22) fornece

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla^\perp x^\perp|^2 da_f &= - \int_{\Sigma} \langle x^\perp, \Delta_f^\perp x^\perp \rangle da_f \\ &= \int_{\Sigma} \langle x^\perp, 2f'x^\perp + A(x^\perp) + 4f''|x^\top|^2 \{x^\perp\} \rangle da_f \\ &= \int_{\Sigma} 2f'|x^\perp|^2 + \langle x^\perp, A(x^\perp) \rangle + 4f''|x^\top|^2 |x^\perp|^2 da_f \end{aligned}$$

De (3.5) sabemos que  $A(x^\perp) = \sum_{i,j=1}^k \langle A(e_i, e_j), x^\perp \rangle A(e_i, e_j)$ . A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\begin{aligned} \langle x^\perp, A(x^\perp) \rangle &= \sum_{i,j=1}^k \langle x^\perp, A(e_i, e_j) \rangle^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^k |x^\perp|^2 |A(e_i, e_j)|^2 \\ &= |x^\perp|^2 |A|^2 \end{aligned}$$

Dessa maneira

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla^\perp x^\perp|^2 da_f &\leq \int_{\Sigma} 2f'|x^\perp|^2 + |x^\perp|^2 |A|^2 + 4f''|x^\top|^2 |x^\perp|^2 da_f \\ &\leq \int_{\Sigma} |x^\perp|^2 (2f' + 4f''|x^\top|^2 + |A|^2) da_f \leq 0, \end{aligned}$$

Pela condição de *gap* temos que  $\nabla^\perp x^\perp \equiv 0$  o que implica que  $x^\perp = \text{const.}$  sobre  $\Sigma$ . □

**Teorema 6.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade com  $f$ -curvatura média paralela completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$2f''|x^\perp|^2 + f'(n - k) \leq 0. \tag{3.41}$$

*Então,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) \geq 1$ . Em particular,  $\Sigma^k$  não é  $f$ -estável.*

*Demonstração.* Primeiramente definiremos sobre  $\Sigma^k$  uma função de corte. Seja  $\eta$  uma função diferenciável não negativa em  $[0, \infty)$  satisfazendo

$$\eta(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } [0, 1), \\ 0, & \text{se } [2, \infty), \end{cases} \tag{3.42}$$

e  $|\eta'| \leq 2$ .

Fixe um ponto  $p \in \Sigma^k$  e seja  $r(x) = \text{dist}_\Sigma(p, x)$  a função distância intrínseca sobre  $\Sigma^k$ . Definimos a sequência de funções  $\phi_j(x) = \eta(\frac{r(x)}{j})$ ,  $j \geq 1$ . Então  $|\nabla^\top \phi_j|^2 \leq 1$  para  $j \geq 2$ .

Consideremos agora  $y \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  um vetor constante. Aplicaremos a forma quadrática  $Q_f$  na sequência de campos variacionais  $\phi_j y^\perp \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ . Utilizando o campo  $\phi_j y^\perp$  na Proposição 3.1.8 temos

$$\begin{aligned} Q_f(\phi_j y^\perp, \phi_j y^\perp) &= - \int_\Sigma \phi_j^2 \langle y^\perp, L_f y^\perp \rangle - |\nabla^\top \phi_j|^2 |y^\perp|^2 da_f \\ &= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \phi_j^2 \langle y^\perp, L_f y^\perp \rangle da_f + \int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} |\nabla^\top \phi_j|^2 |y^\perp|^2 da_f \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\leq - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \langle y^\perp, L_f y^\perp \rangle da_f + \int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} da_f, \quad (3.44)$$

onde  $B_j^\Sigma(p)$  denota a bola geodésica intrínseca de  $\Sigma$  de raio  $j$  centrada em  $p$ . Como  $\Sigma$  possui crescimento de volume polinomial, temos que, quando  $j \rightarrow \infty$

$$\int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} da_f \rightarrow 0. \quad (3.45)$$

Tomando  $j$  suficientemente grande e utilizando o Teorema 3, mais especificamente a identidade (3.31), decorre que

$$Q_f(\phi_j y^\perp, \phi_j y^\perp) \leq - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \langle y^\perp, L_f y^\perp \rangle da_f, \quad (3.46)$$

$$= \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} 4f'' \langle x, y \rangle \langle x^\perp, y^\perp \rangle + 2f' |y^\perp|^2 da_f. \quad (3.47)$$

Fixando uma base ortonormal  $\{y_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ , e consideremos  $\{N_r\}_{r=k+1}^n$  uma base ortonormal no fibrado normal de  $\Sigma$ , podemos notar, passando a soma, que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |y_i^\perp|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=k+1}^n |\langle y_i^\perp, N_r \rangle N_r|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=k+1}^n \langle y_i^\perp, N_r \rangle^2 \\ &= \sum_{r=k+1}^n \sum_{i=1}^n \langle y_i^\perp, N_r \rangle^2 \\ &= \sum_{r=k+1}^n |N_r|^2 = n - k. \end{aligned}$$

Passando a soma em  $Q_f(y_i^\perp, y_i^\perp)$  em relação a  $\{y_i\}_{i=1}^n$  e usando a hipótese que  $f' + 2f''|x|^2 \leq 0$  obtemos

$$\sum_{i=1}^n Q_f(y_i^\perp, y_i^\perp) \leq \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} 4f'' |x^\perp|^2 + 2f'(n - k) da_f \leq 0.$$

Provando dessa forma que  $Q_f$  possui pelo menos um autovalor negativo, completando a prova do Teorema.  $\square$

O Teorema 5 admite uma versão para o caso bordo livre, a prova é semelhante e será apresentada. Consideremos a bola Euclidiana unitária  $B_1^n(0) := B^n$  centrada na origem como subconjunto de  $(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ . Uma subvariedade  $\Sigma^k$  é dita ser  $f$ -curvatura média paralela de bordo livre em  $B^n$  se  $\Sigma^k$  possui  $f$ -curvatura média paralela e intersecta  $\partial B^n$  ortogonalmente. Em particular, se  $\bar{N}$  denota o campo normal unitário de  $\partial B^n$  e  $\nu$  é o campo unitário conormal a  $\partial\Sigma$  então  $\bar{N} = \nu$  em  $\partial\Sigma$ . Para o caso de  $B^n$  temos que  $\bar{N} = x$ .

De forma semelhante ao caso não compacto, para o caso de subvariedades de  $f$ -curvatura média paralela de bordo livre em  $B^n$  definimos da mesma maneira o operador estabilidade  $L_f$  e a forma quadrática  $Q_f$  associada a segunda variação da área fica

$$Q_f(X, X) = - \int_{\Sigma} \langle X, L_f X \rangle da_f + \int_{\partial\Sigma} \langle \nabla \nu X - \nabla_X \nu, X \rangle ds_f \quad (3.48)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ .

Dizemos que uma subvariedade com  $f$ -curvatura média paralela de bordo livre em  $B^n \subset (\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$  é  $f$ -estável se  $Q_f(X, X) \geq 0 \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ .

**Teorema 9.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade com  $f$ -curvatura média paralela de bordo livre imersa em  $B_1^2(0) \subset (\mathbb{R}^n, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$2f''|x^\perp|^2 + f'(n - k) \leq 0 \quad (3.49)$$

Então,  $\text{Ind}_f(\Sigma^k) \geq 1$ . Em particular,  $\Sigma^k$  não é  $f$ -estável.

*Demonstração.* Substituindo  $y^\perp \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  na forma quadrática descrita em (3.48) e utilizando o Lema 1, mais especificamente a identidade (3.31), decorre que

$$\begin{aligned} Q_f(y^\perp, y^\perp) &= - \int_{\Sigma} \langle y^\perp, L_f y^\perp \rangle da_f + \int_{\partial\Sigma} \langle y^\perp, D_\nu y^\perp - D_{y^\perp} \nu \rangle ds_f \\ &= \int_{\Sigma} 4f'' \langle x, y \rangle \langle x^\perp, y^\perp \rangle + 2f' |y^\perp|^2 da_f + \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} D_\nu |y^\perp|^2 - A_\nu^{\partial B}(y^\perp, y^\perp) ds_f \end{aligned}$$

Tomemos uma base ortonormal  $\{y_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$ , e consideremos  $\{N_r\}_{r=k+1}^n$  uma base orto-

normal no fibrado normal de  $\Sigma$ , podemos notar, passando a soma, que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n |y_i^\perp|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=k+1}^n |\langle y_i^\perp, N_r \rangle N_r|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=k+1}^n \langle y_i^\perp, N_r \rangle^2 \\
 &= \sum_{r=k+1}^n \sum_{i=1}^n \langle y_i^\perp, N_r \rangle^2 \\
 &= \sum_{r=k+1}^n |N_r|^2 = n - k.
 \end{aligned}$$

Agora, passando a soma em  $Q_f(y_i^\perp, y_i^\perp)$  em relação a  $\{y_i\}_{i=1}^n$  obtemos

$$\sum_{i=1}^n Q_f(y_i^\perp, y_i^\perp) = \int_{\Sigma} 4f''|x^\perp|^2 + 2f'(n-k)da_f - \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^n A_\nu^{\partial B}(y^\perp, y^\perp)ds_f,$$

de onde segue o resultado. □

### 3.3 Limitação inferior para o índice de Morse de hipersuperfícies $f$ -mínimas no espaço Euclidiano com peso

Nesta seção lidaremos com o caso de codimensão 1, ou seja, hipersuperfícies  $f$ -mínimas. Neste contexto, como  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é orientável, fica bem definido um campo normal unitário  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , portanto, dado um campo variacional  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , sempre existe uma função suave  $u$  tal que  $X = uN$  em  $\Sigma$ . Desse modo podemos identificar  $X$  com uma função suave  $u$  por intermédio do campo  $N$  normal a  $\Sigma^n$ .

Especialmente nesta seção que trataremos do caso de codimensão 1, utilizaremos a notação  $\Delta_\Sigma$  denota o operador Laplaciano sobre  $\Sigma^n$ ,  $\Delta_{\Sigma,f}$  denota o operador  $f$ -Laplaciano sobre  $\Sigma^n$  e  $\nabla^\Sigma$  o gradiente sobre  $\Sigma^n$ .

Também será abordado o caso em que  $\Sigma^n$  é compacta, mais especificamente quando possui bordo livre em um domínio compacto. Consideremos  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $B^{n+1} \subset (\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , o operador estabilidade fica definido como sendo

$$L_f = \Delta_{\Sigma,f} + \text{Ric}_f(N, N) + |A|^2,$$

onde  $\Delta_{\Sigma, f} := \Delta_{\Sigma} + \langle \nabla^{\Sigma} f, \cdot \rangle$  e  $\text{Ric}_f$  é o tensor curvatura de Bakry-Émery Ricci como definido em (3.1). Semelhantemente às construções anteriores, definimos a forma quadrática  $Q_f$  associada a segunda variação do funcional área

$$Q_f(u, u) = - \int_{\Sigma} u L_f u da_f + \int_{\partial \Sigma} u (u_{\nu} - A^{\partial B} u) ds_f,$$

para toda função  $u \in C^{\infty}(\Sigma)$ .

Dizemos que uma hipersuperfície  $f$ -mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $B^{n+1} \subset (\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$  é  $f$ -estável se  $Q_f(u, u) \geq 0 \forall u \in C^{\infty}(\Sigma)$ . Definimos o índice de Morse (ou  $L_f$ -índice), denotado por  $\text{Ind}_f(\Sigma^n)$ , de  $\Sigma^n$  como sendo o máximo das dimensões de subespaços vetoriais onde  $Q_f$  é negativa definida.

Apresentaremos agora uma limitação inferir para o índice de Morse de hipersuperfícies  $f$ -mínimas no espaço Euclidiano com peso para o caso não compacto sem bordo Teorema 1 e Teorema 2 e para o caso compacto de bordo livre Teorema 3 e Teorema 4.

**Teorema 1.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 1$ .*

*Demonstração.* Considere uma base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formada pelos campos coordenados  $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$  e definamos as funções  $u_1 = \langle x, e_1 \rangle, \dots, u_n = \langle x, e_n \rangle, u_{n+1} = \langle x, e_{n+1} \rangle$ , onde  $x$  denota o campo posição da hipersuperfície  $\Sigma^n$ . As funções  $u_i$  são as funções coordenadas de  $\Sigma^n$  e formam um subespaço  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$  de  $C^{\infty}(\Sigma)$  de  $\dim(\mathcal{U}) = n + 1$ , vamos provar que  $Q_f$  é estritamente negativa sobre  $\mathcal{U}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ , o operador  $f$ -estabilidade das funções aplicado a  $u_i$  é: (veja [27])

$$L_f u_i = (-4f'' \langle x, N \rangle^2 + |A|^2) u_i,$$

portanto

$$Q_f(u_i, u_i) = - \int_{\Sigma} (-4f'' \langle x, N \rangle^2 + |A|^2) u_i^2 da_f.$$

Consideremos agora a sequência de funções de corte  $\phi_j(x) = \eta(\frac{r(x)}{j})$ ,  $j \geq 1$  como definidas no prova do Teorema 5. Aplicando o Corolário 3.1.9 para a função  $\phi_j u_i$  temos

$$\begin{aligned} Q_f(\phi_j u_i, \phi_j u_i) &= - \int_{\Sigma} \phi_j^2 u_i L_f u_i - |\nabla^{\top} \phi_j|^2 u_i^2 da_f \\ &= - \int_{B_{2j}^{\Sigma}(p)} \phi_j^2 u_i L_f u_i da_f + \int_{B_{2j}^{\Sigma}(p) \setminus B_j^{\Sigma}(p)} |\nabla^{\top} \phi_j|^2 u_i^2 da_f \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\leq - \int_{B_{2j}^{\Sigma}(p)} u_i L_f u_i da_f + \int_{B_{2j}^{\Sigma}(p) \setminus B_j^{\Sigma}(p)} u_i^2 da_f, \quad (3.51)$$

onde  $B_j^\Sigma(p)$  denota a bola geodésica intrínseca de  $\Sigma$  de raio  $j$  centrada em  $p$ . Como  $\Sigma$  possui crescimento de volume polinomial, temos que, quando  $j \rightarrow \infty$

$$\int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} \langle x, e_i \rangle^2 da_f \rightarrow 0. \quad (3.52)$$

Tomando  $j$  suficientemente grande e utilizando o Lema 1, mais especificamente a identidade (3.31), decorre que

$$Q_f(\phi_j u_i, \phi_j u_i) \leq - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} u_i L_f u_i da_f \quad (3.53)$$

$$= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} (-4f'' \langle x, N \rangle^2 + |A|^2) u_i^2 da_f. \quad (3.54)$$

Desse modo, se  $\Sigma^n$  é não totalmente geodésica e  $f'' \leq 0$  temos  $Q_f < 0$  para cada  $\phi_i$ , de onde concluímos que  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 1$ . □

**Teorema 2.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima completa não compacta sem bordo possuindo crescimento de volume polinomial imersa em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f' \leq 0 \text{ e } f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 2$ .*

*Demonstração.* Do Teorema 1 já sabemos que se  $f'' \leq 0$   $\text{Ind}_f(\Sigma) \geq n + 1$ . Consideremos agora o subespaço vetorial  $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  gerado pelas funções  $\{u_1, \dots, u_{n+1}, 1\}$  de  $\dim(\mathcal{V}) = n + 2$ , vamos provar que  $Q_f$  é negativa sobre  $\mathcal{V}$ . Uma função  $\Phi \in \mathcal{V}$  pode ser escrita como

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i + c = \langle x, \sum_{i=1}^{n+1} c_i e_i \rangle + c.$$

É possível escolher  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $c \in \mathbb{R}$  de modo que  $\Phi = \langle x, b \rangle + c$ . Observemos que  $L_f(c) = (-2f' - 4f'' \langle x, N \rangle^2)c + |A|^2 c$ . Substituindo  $\Phi$  na forma quadrática  $Q_f$  e usando a mesma construção da passagem anterior onde foi utilizado a função de corte, pelo fato de  $\Sigma$  possuir crescimento de volume polinomial, temos que, quando  $j \rightarrow \infty$

$$\int_{B_{2j}^\Sigma(p) \setminus B_j^\Sigma(p)} (\langle x, b \rangle + c)^2 da_f \rightarrow 0, \quad (3.55)$$

tomando  $j$  suficientemente grande temos, portanto, que

$$\begin{aligned}
 Q_f(\Phi, \Phi) &= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \Phi L_f \Phi da_f \\
 &= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} \Phi \left( (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)\langle x, b \rangle + (-2f' - 4f''\langle x, N \rangle^2)c + |A|^2c \right) da_f \\
 &= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)\Phi^2 - 2cf'\langle x, b \rangle - 2c^2f' da_f \\
 &= - \int_{B_{2j}^\Sigma(p)} (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)\Phi^2 - 2c^2f' da_f.
 \end{aligned}$$

Onde usamos o fato de que  $\Delta_{f,\Sigma}\langle x, b \rangle = 2f'\langle x, b \rangle$  e  $\Sigma^n$  não possui bordo, assim, pelo Teorema da divergência temos que  $\int_\Sigma \Delta_{f,\Sigma}\langle x, b \rangle da_f = 0$ . Assim, podemos concluir, portanto que, se  $\Sigma^n$  é não totalmente geodésica, e se  $f' \leq 0$  e  $f'' \leq 0$ , então  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 2$ , encerrando a prova do Teorema.  $\square$

**Teorema 3.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $B^n$  em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 1$ .*

*Demonstração.* Como na prova do Teorema 1, considere  $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$  uma base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e definimos o subespaço vetorial  $\mathcal{U} \subset C^\infty(\Sigma)$  gerado pelas funções  $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ , com  $u_i = \langle x, e_i \rangle$  para cada  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $\dim(\mathcal{U}) = n + 1$ . Vamos provar que  $Q_f$  é estritamente negativa sobre  $\mathcal{U}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ , o operador  $f$ -estabilidade das funções aplicado a  $u_i$  é: (veja [27])

$$L_f u_i = (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)u_i,$$

e (em  $\partial\Sigma$ )

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \langle e_i, \nu \rangle = \langle e_i, x \rangle = u_i,$$

portanto

$$Q_f(u_i, u_i) = - \int_\Sigma (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)u_i^2 da_f.$$

Desse modo, se  $\Sigma^n$  é não totalmente geodésica e  $f'' \leq 0$  temos  $Q_f < 0$  para cada  $u_i$ , de onde concluimos que  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 1$ .  $\square$

**Teorema 4.** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície  $f$ -mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $B^n$  em  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^f dv_{can})$ , com função peso  $f$  radial ( $f = f(|x|^2)$ ) satisfazendo*

$$f' \leq 0 \text{ e } f'' \leq 0.$$

*Então, se  $\Sigma^n$  não é totalmente geodésica,  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 2$ .*

*Demonstração.* Como na prova do Teorema 2 consideremos o subespaço vetorial  $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^\infty(\Sigma)$  gerado pelas funções  $\{u_1, \dots, u_{n+1}, 1\}$ , vamos provar que  $Q_f$  é negativa definida sobre  $\mathcal{V}$ . Uma função  $\Phi \in \mathcal{V}$  pode ser escrita como

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i + c = \langle x, \sum_{i=1}^{n+1} c_i e_i \rangle + c.$$

É possível escolher  $b \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $c \in \mathbb{R}$  de modo que  $\Phi = \langle x, b \rangle + c$ . Observemos que  $L_f(c) = (-2f' - 4f''\langle x, N \rangle^2)c + |A|^2c$  e  $\frac{\partial c}{\partial \nu} = 0$ . Substituindo  $\Phi$  na forma quadrática  $Q_f$  resulta

$$\begin{aligned} Q_f(\Phi, \Phi) &= - \int_{\Sigma} \Phi L_f \Phi da_f + \int_{\partial \Sigma} \Phi (\Phi_\nu - A^{\partial B} \Phi) ds_f \\ &= - \int_{\Sigma} \Phi ((-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)\langle x, b \rangle + (-2f' - 4f''\langle x, N \rangle^2)c + |A|^2c) da_f \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma} -c\Phi ds_f \\ &= - \int_{\Sigma} (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)\Phi^2 - 2cf'\langle x, b \rangle - 2c^2f' da_f + \int_{\partial \Sigma} -c\langle x, b \rangle - c^2 ds_f \\ &= - \int_{\Sigma} (-4f''\langle x, N \rangle^2 + |A|^2)\Phi^2 - 2c^2f' da_f - \int_{\partial \Sigma} c^2 ds_f, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $\Delta_{f,\Sigma}\langle x, b \rangle = 2f'\langle x, b \rangle$  e pelo Teorema da divergência, como  $\partial \Sigma \neq \emptyset$  e  $\Sigma$  é de bordo livre (ou seja  $x = \nu$  em  $\partial \Sigma$ ), temos que  $\int_{\Sigma} \Delta_{f,\Sigma}\langle x, b \rangle da_f = \int_{\partial \Sigma} \langle x, b \rangle ds_f$ . Assim, podemos concluir que, se  $\Sigma^n$  é não totalmente geodésica, e se  $f' \leq 0$  e  $f'' \leq 0$ , então  $\text{Ind}_f(\Sigma^n) \geq n + 2$ , encerrando a prova do Teorema 4. □

## Capítulo 4

# Não existência de subvariedades mínimas de bordo livre em uma bola conforme

Denotaremos nesta seção por  $\nabla$  a derivada covariante no espaço ambiente  $(M^n, g)$ , enquanto que  $\tilde{\nabla}$  denotará a derivada covariante no espaço ambiente  $(M^n, \tilde{g})$ , com  $\tilde{g} = e^{2f}g$ . Além disso, quando se tratar do espaço Euclidiano,  $M^n = \mathbb{R}^n$ , usaremos  $\nabla := D$  e  $g := \langle \cdot, \cdot \rangle$  a derivada covariante usual e a métrica canônica de  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente.

Seja  $\Sigma^k \rightarrow \Omega^n \subset (M^n, \tilde{g})$  uma subvariedade mínima de bordo livre. Consideremos a forma quadrática  $\tilde{Q}$  definida no fibrado normal de  $\Sigma^k$ , como segue (conferir Proposição (2.3.3))

$$\tilde{Q}(X, X) = \int_{\Sigma} |\tilde{\nabla}^{\perp} X|_{\tilde{g}}^2 - \tilde{tr}_{\Sigma, \tilde{g}} \tilde{R}_M(X, \cdot, X, \cdot) - |\tilde{g}(\tilde{A}, X)|_{\tilde{g}}^2 d\tilde{a} - \int_{\partial\Sigma} \tilde{A}^{\partial\Omega}(X, X) d\tilde{s}, \quad (4.1)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$ , onde  $\tilde{R}_M$  é o tensor curvatura de Riemann em relação a métrica  $\tilde{g}$ , e  $\tilde{tr}_{\Sigma, \tilde{g}}$  denota o traço em  $\Sigma^k$  com respeito a métrica  $\tilde{g}$ , explicitamente

$$\tilde{tr}_{\Sigma, \tilde{g}} \tilde{R}_M(X, \cdot, X, \cdot) = \sum_{i=1}^k \tilde{g}(\tilde{R}_M(X, \tilde{E}_i)X, \tilde{E}_i),$$

onde  $\{\tilde{E}_i\}_{i=1}^k$  é uma base local ortonormal de  $\Sigma^k$  com respeito a métrica  $\tilde{g}$ ,  $\tilde{A}$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$ , com respeito a métrica  $\tilde{g}$ , dada por  $\tilde{A}(Z, Y) = (\tilde{\nabla}_Z Y)^{\perp}$ , para todo  $Z, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  e  $\tilde{A}^{\partial\Omega}$  é a segunda forma fundamental de  $\Omega^n$ , com respeito a métrica  $\tilde{g}$ , dada por  $\tilde{A}^{\partial\Omega}(Z, Y) = (\tilde{\nabla}_Z Y)^{\perp}$ , para todo  $Z, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)$ . Como  $\partial\Omega$  é uma hipersuperfície em  $M^n$ , fica bem definido, na métrica  $\tilde{g}$ , um campo normal unitário  $\tilde{N}$ , o qual orientaremos para fora de  $\partial\Omega$ . A condição de bordo livre implica que, em  $\partial\Sigma$ , temos que  $\tilde{N} = \tilde{\nu}$ , onde  $\tilde{\nu}$  é o campo conormal de  $\Sigma^k$ , nessas condições, são equivalentes:

$$\tilde{A}_{\tilde{N}}^{\partial\Omega}(Z, Y) = \tilde{A}^{\partial\Omega}(Z, Y) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z Y, \tilde{N}) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z \tilde{N}, Y) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z \tilde{\nu}, Y) \quad (4.2)$$

Voltando a forma quadrática  $\tilde{Q}$ , em (4.1), definindo os integrandos em  $\Sigma$  e  $\partial\Sigma$  respectivamente por  $\tilde{q}^{\Sigma}(X, X)$  e  $\tilde{q}^{\partial\Sigma}(X, X)$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{\Sigma}(X, X) &:= |\tilde{\nabla}^{\perp} X|_{\tilde{g}}^2 - \tilde{tr}_{\Sigma, \tilde{g}} \tilde{R}_M(X, \cdot, X, \cdot) - |\tilde{g}(\tilde{A}, X)|_{\tilde{g}}^2, \\ \tilde{q}^{\partial\Sigma}(X, X) &:= -\tilde{A}^{\partial\Omega}(X, X). \end{aligned}$$

Com essa terminologia, podemos escrever  $\tilde{Q}(X, X)$  como

$$\tilde{Q}(X, X) := \int_{\Sigma} \tilde{q}^{\Sigma}(X, X) d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \tilde{q}^{\partial\Sigma}(X, X) d\tilde{s}.$$

Considerando que  $\tilde{g}$  é conforme a uma métrica  $g$  em  $M^n$ , ou seja,  $\tilde{g} = e^{2u}g$ , nosso objetivo é expressar  $\tilde{Q}(X, X)$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$ , em termos do correspondente operador  $Q(X, X)$  com respeito a métrica  $g$ , definido por

$$\begin{aligned} Q(X, X) &= \int_{\Sigma} |\nabla^{\perp} X|_g^2 - \text{tr}_{\Sigma, g}(R_M(X, \cdot, X, \cdot) - |g(A, X)|_g^2) da - \int_{\partial\Sigma} A^{\partial\Omega}(X, X) ds, \\ &= \int_{\Sigma} q^{\Sigma}(X, X) da + \int_{\partial\Sigma} q^{\partial\Sigma}(X, X) ds. \end{aligned}$$

A proposição a ser apresentada encontrasse demonstrada em Franz-Trinca (2023), [16] apenas acrescentaremos o termo do bordo de  $\Sigma^k$ , uma vez que estamos interessados em subvariedades mínimas de bordo livre. Tal resultado, permite relacionar explicitamente  $\tilde{q}^{\Sigma}$  e  $q^{\Sigma}$  em termos da métrica conforme. Fazemos a ressalva que neste contexto  $\Sigma^k$  é mínima com respeito a métrica  $\tilde{g}$ .

**Proposição 4.0.1** (Franz-Trinca (2023), [16] - Corolário 4.5). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana munida da métrica  $g$  e consideremos a mudança conforme  $\tilde{g} = e^{2u}g$ . Considerando que  $\Sigma^k$  é uma subvariedade mínima de bordo livre em  $\Omega^n \subset (M^n, \tilde{g})$ , então, para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$  é válido que*

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{\Sigma}(\tilde{X}, \tilde{X}) &= q^{\Sigma}(X, X)e^{-2u} - |\nabla^{\top} u|_g^2 |X|_g^2 e^{-2u} + k \text{Hess } u(X, X)e^{-2u} + \\ &\quad + k |\nabla u|_g^2 |X|_g^2 e^{-2u} + \text{div}_{\Sigma}(\nabla u) |X|_g^2 e^{-2u}, \end{aligned}$$

$$\tilde{q}^{\partial\Sigma}(\tilde{X}, \tilde{X}) = -\tilde{A}^{\partial\Omega}(\tilde{X}, \tilde{X})$$

onde  $\tilde{X} = e^{-u}X$ .

*Demonstração.* Demonstrado em [16], Corolário 4.5. □

A proposição a seguir já é um resultado sabido e encontrasse em Schoen (2006), [34]. A utilidade deste resultado é tratar do termo  $q^{\Sigma}$  que aparece na Proposição 4.0.1, ou seja, da forma quadrática na métrica original. É importante notarmos que  $\Sigma^k$  é mínima com respeito apenas a métrica  $\tilde{g}$ , assim, para  $q^{\Sigma}$ , temos que  $\Sigma^k$  é apenas uma subvariedade. Recordemos, inclusive, que da Proposição 2.5.3 que as curvaturas média  $H$  e  $\tilde{H}$  se relacionam da seguinte forma

$$H = e^{2u}\tilde{H} + k(\nabla u)^{\perp}.$$

Como estamos interessados em uma ambiente conforme ao ambiente Euclidiano, ou seja,  $\mathbb{R}^n$  munido da métrica  $\tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$ , vamos calcular o traço  $q^{\Sigma}$  em  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

em relação a uma base sem assumir minimalidade de  $\Sigma^k$ . Este resultado encontra-se em uma passagem do Teorema 2.2 em [34], assumindo a minimalidade. Desta maneira, apresentaremos a demonstração para enfatizar a independência da minimalidade de  $\Sigma^k$ .

**Proposição 4.0.2.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade de  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Então, o traço de  $q^\Sigma$  em relação a uma base ortonormal  $\{E_i\}_{i=1}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  é dado por*

$$\text{tr}q^\Sigma := \sum_{i=1}^n q^\Sigma(E_i^\perp, E_i^\perp) = 0.$$

*Demonstração.* Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $X_i = E_i^\perp$  a projeção normal em relação a  $\Sigma^k$ . Dessa forma, cada  $X_i$  pode ser tomado como campo variacional. Para o caso Euclidiano  $q^\Sigma$  é dado por

$$q^\Sigma(X, X) = |D^\perp X|^2 - |D^\top X|^2,$$

para  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ , pois  $R_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$  e  $\sum_{i,j=1}^k \langle D_{e_i} e_j, X \rangle^2 = \sum_{i=1}^k \langle D_{e_i}^\top X, D_{e_i}^\top X \rangle^2 = |D^\top X|^2$ . Observemos inicialmente que  $\sum_{i=1}^n |D^\perp X_i|^2$  e  $\sum_{i=1}^n |D^\top X_i|^2$  independem da base ortonormal escolhida.

Vamos assumir uma base  $\{E_1, \dots, E_n\}$  em  $\mathbb{R}^n$  de modo que  $\{E_1, \dots, E_k\}$  são tangentes a  $\Sigma^k$  em algum ponto, digamos  $p \in \Sigma^k$ . Se  $\{v_1, \dots, v_k\}$  formam uma base ortonormal local tangente a  $\Sigma^k$  próximo de  $p$  com  $v_i = E_i$  neste ponto, para  $i \in \{1, \dots, k\}$ , definimos então, próximo de  $p$ , os campos  $X_i \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$  por

$$X_i = E_i - \sum_{\alpha=1}^k \langle E_i, v_\alpha \rangle v_\alpha.$$

Tomando outra base local ortonormal  $\{v_\beta\}_{\beta=1}^k$  em  $p \in \Sigma^k$ , de modo que  $(D_{v_\beta} v_\alpha)^\top = 0$ , e derivando derivando  $X_i$  em relação a  $v_\beta$  temos

$$\begin{aligned} D_{v_\beta} X_i &= - \sum_{\alpha=1}^k [\langle E_i, D_{v_\beta} v_\alpha \rangle v_\alpha + \langle E_i, v_\alpha \rangle D_{v_\beta} v_\alpha] \\ &= - \sum_{\alpha=1}^k [\langle E_i, D_{v_\beta}^\perp v_\alpha \rangle v_\alpha + \langle E_i, v_\alpha \rangle D_{v_\beta}^\perp v_\alpha], \end{aligned}$$

notemos, portanto, que

$$\begin{aligned} D_{v_\beta}^\top X_i &= - \sum_{\alpha=1}^k \langle E_i, D_{v_\beta}^\perp v_\alpha \rangle v_\alpha \\ D_{v_\beta}^\perp X_i &= - \sum_{\alpha=1}^k \langle E_i, v_\alpha \rangle D_{v_\beta}^\perp v_\alpha, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |D^\perp X_i|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^k |D_{v_\beta}^\perp X_i|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \langle \langle E_i, v_\alpha \rangle D_{v_\beta}^\perp v_\alpha, \langle E_i, v_\alpha \rangle D_{v_\beta}^\perp v_\alpha \rangle \\ &= \sum_{\beta=1}^k \sum_{\alpha=1}^k |D_{v_\beta}^\perp v_\alpha|^2 = |A|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |D^\top X_i|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^k |D_{v_\beta}^\top X_i|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^k \sum_{\alpha=1}^k \langle \langle E_i, D_{v_\beta}^\perp v_\alpha \rangle v_\alpha, \langle E_i, D_{v_\beta}^\perp v_\alpha \rangle v_\alpha \rangle \\
&= \sum_{\beta=1}^k \sum_{\alpha=1}^k |D_{v_\beta}^\top v_\alpha|^2 = |A|^2,
\end{aligned}$$

provando assim a proposição.  $\square$

Considerando agora  $\Sigma^k$  sendo uma subvariade mínima de  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , queremos determinar o traço de  $\tilde{q}^\Sigma$ . O resultado é similar a Franz-Trinca (2023) [16].

**Teorema 4.0.3.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade mínima de  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , então*

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^n \tilde{q}^\Sigma(\tilde{E}_\alpha^\perp, \tilde{E}_\alpha^\perp) &= -\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma) + k|\nabla^\perp u|^2 e^{-2u}, \\
&= -\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma) + \frac{1}{k}|H|^2 e^{-2u},
\end{aligned}$$

onde  $\{\tilde{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  é qualquer base ortonormal de  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  e  $\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma)$  é a notação para

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma) := \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{E}_i, \tilde{E}_r),$$

onde  $\{\tilde{E}_\beta\}_{\alpha=1}^n$  é uma base ortonormal local de  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  tal que os primeiros  $k$  termos formam uma base ortonormal local de  $\Sigma^k$ .

**Observação 4.0.4.** *Observemos que*

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma) = \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{E}_i, \tilde{E}_r) = \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{g}(\tilde{R}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{E}_i, \tilde{E}_r)\tilde{E}_i, \tilde{E}_r).$$

Como  $\tilde{R}_{\mathbb{R}^n}$  é um tensor, isso prova que  $\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma)$  não depende da escolha da base  $\{\tilde{E}_\beta\}_{\beta=1}^n$ .

*Demonstração.* Considere em  $(\mathbb{R}^n, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  um referencial ortonormal  $\{\tilde{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  de modo que  $\tilde{E}_\alpha$  é tangente a  $\Sigma^k$  em um ponto  $p$  para todo  $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ . Consideremos agora um referencial ortonormal local adaptado  $\{\tilde{e}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  em  $p \in \Sigma^k$  tal que, em  $p$ , temos que  $\tilde{e}_\alpha$  é tangente a  $\Sigma^k$  para todo  $\alpha \in \{1, \dots, k\}$  e  $\tilde{e}_\alpha$  é normal a  $\Sigma^k$  para todo  $\alpha \in \{k+1, \dots, n\}$ , além disso, em  $p$ , temos que  $\tilde{E}_\alpha(p) = \tilde{e}_\alpha(p)$  para todo  $\alpha$ . Desse modo, temos que  $\tilde{E}_i^\top(p) = \tilde{e}_i(p)$  e  $\tilde{E}_i^\perp(p) = 0$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$  e  $\tilde{E}_r^\top(p) = 0$  e  $\tilde{E}_r^\perp(p) = \tilde{e}_r$  para  $r \in \{k+1, \dots, n\}$ . Consideremos ainda os respectivos campos correspondentes na métrica  $g$ :  $E_\alpha = e^u \tilde{E}_\alpha$  e

$e_\alpha = e^u \tilde{e}_\alpha$ . Portanto no ponto  $p$  vale que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \tilde{q}^\Sigma(\tilde{E}_\alpha^\perp, \tilde{E}_\alpha^\perp) e^{2u} &= \sum_{i=1}^n q^\Sigma(E_\alpha^\perp, E_\alpha^\perp) - (n-k)|\nabla^\top u|^2 + k(n-k)|\nabla u|^2 \\ &+ (n-k) \operatorname{div}_\Sigma(\nabla u) + k \sum_{r=k+1}^n \operatorname{Hess} u(E_r, E_r) \\ \sum_{\alpha=1}^n \tilde{q}^\Sigma(\tilde{E}_\alpha^\perp, \tilde{E}_\alpha^\perp) e^{2u} &= -(n-k)|\nabla^\top u|^2 + k(n-k)|\nabla u|^2 \\ &+ (n-k) \operatorname{div}_\Sigma(\nabla u) + k \sum_{r=k+1}^n \operatorname{Hess} u(E_r, E_r), \end{aligned}$$

onde foi usado a Proposição (4.0.1) e a Proposição (4.0.2).

Por outro lado, pela Proposição (2.5.2) item *iii*), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{E}_i, \tilde{E}_r) e^{2u} &= \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_r) e^{2u} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n K_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_r) + (n-k)|\nabla^\top u|^2 + k|\nabla^\perp u|^2 - k(n-k)|\nabla u|^2 \\ &\quad - (n-k) \operatorname{div}_\Sigma(\nabla u) - k \sum_{r=k+1}^n \operatorname{Hess} u(E_r, E_r) \\ &= (n-k)|\nabla^\top u|^2 + k|\nabla^\perp u|^2 - k(n-k)|\nabla u|^2 \\ &\quad - (n-k) \operatorname{div}_\Sigma(\nabla u) - k \sum_{r=k+1}^n \operatorname{Hess} u(E_r, E_r) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\sum_{\alpha=1}^n \tilde{q}^\Sigma(\tilde{E}_\alpha^\perp, \tilde{E}_\alpha^\perp) = -\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma) + k|\nabla^\perp u|^2 e^{-2u}.$$

A última igualdade segue do fato de que  $k\nabla^\perp u = H$ , Proposição (2.5.3), pois  $\Sigma^k$  é mínima com respeito a métrica  $\tilde{g}$ , e portanto,  $\tilde{H} = 0$ .  $\square$

Com as mesmas notações da seção (2.5), consideremos em  $\mathbb{R}^n$  uma bola  $B^n(0, r_{\mathbb{R}})$  centrada na origem, com raio Euclidiano  $r_{\mathbb{R}} > 0$  e bordo  $\partial B^n$  suave munida da métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$  e uma imersão isométrica  $\Sigma^k \rightarrow (B^n, \tilde{g})$ , com  $\operatorname{int}(\Sigma^k) \subset \operatorname{int}(B^n)$  e  $\partial\Sigma \subset \partial B^n$ . Além disso, vamos supor que  $u(x) = u(|x|^2)$ ,  $u : B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}$ , para alguma função suave  $u$  definida em  $I = [0, r_{\mathbb{R}}^2)$ . Nesse contexto, estamos interessados em subvariedades *mínima de bordo livre*, ou seja, quando o vetor curvatura média de  $\Sigma^k$  é identicamente nulo,  $H \equiv 0$ , e  $\Sigma^k$  intersecta  $\partial B$  ortogonalmente. A condição de bordo livre implica que, em  $\partial\Sigma$ , temos que  $\tilde{N} = \tilde{\nu}$ , onde  $\tilde{N}$  é o campo normal unitário de  $\partial B^n$  apontando para fora e  $\tilde{\nu}$  é o conormal de  $\Sigma^k$  sendo  $\tilde{N} = e^{-u}x/r_{\mathbb{R}}$ .

**Proposição 4.0.5.** *Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade mínima de bordo livre em  $B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \subset (\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , então*

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^n \tilde{q}^{\partial\Sigma}(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}) &= - \sum_{r=k+1}^n \tilde{A}^{\partial B^n}(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}), \\ &= -(n-k) \frac{1 + 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}^2}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}, \end{aligned}$$

onde  $\{\tilde{E}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$  é qualquer base ortonormal de  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$ .

*Demonstração.* Como na demonstração do Teorema 4.0.3, considere em  $(\mathbb{R}^n, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  um referencial ortonormal  $\{\tilde{E}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$  e, em um ponto  $p \in \Sigma^k$ , um referencial ortonormal local adaptado  $\{\tilde{e}_{\alpha}\}_{\alpha=1}^n$  com  $\alpha \in \{1, \dots, i, \dots, k, k+1, \dots, r, \dots, n\}$  de modo que  $\tilde{E}_i^{\top}(p) = \tilde{e}_i(p)$  e  $\tilde{E}_i^{\perp}(p) = 0$  e  $\tilde{E}_r^{\perp}(p) = \tilde{e}_r$  e  $\tilde{E}_r^{\top}(p) = 0$ , bem como os respectivos campos correspondes na métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :  $E_{\alpha} = e^f \tilde{E}_{\alpha}$  e  $e_{\alpha} = e^f \tilde{e}_{\alpha}$ .

Observemos que em  $\partial\Sigma$ , da Proposição (2.5.2), temos

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}} \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{\nu}) = \tilde{g}(\nabla_{\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}} \tilde{E}_{\alpha}^{\perp} + \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}(u)\tilde{E}_{\alpha}^{\perp} + \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}(u)\tilde{E}_{\alpha}^{\perp} - g(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp})\nabla u, \tilde{\nu}),$$

Lembrando que  $\tilde{\nu} = \frac{1}{e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}\nu = \frac{1}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}x$  e que  $\nabla u = 2u'(|x|^2)x$  e que  $\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}$  é tangente a  $\partial B^n(0, r_{\mathbb{R}})$  temos que

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}} \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{\nu}) &= \tilde{g}(\nabla_{\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}} \tilde{E}_{\alpha}^{\perp} - g(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp})\nabla u, \tilde{\nu}) \\ &= \tilde{g}(e^{-u}\nabla_{E_{\alpha}^{\perp}} \{e^{-u}E_{\alpha}^{\perp}\}, \tilde{\nu}) - 2e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}} \\ &= g(\nabla_{E_{\alpha}^{\perp}} E_{\alpha}^{\perp}, \tilde{\nu}) - 2e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}} \\ &= e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ g(\nabla_{E_{\alpha}^{\perp}} E_{\alpha}^{\perp}, \nu) - 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}} \right\} \\ &= e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ -A^{\partial B^n}(E_{\alpha}^{\perp}, E_{\alpha}^{\perp}) - 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}} \right\}, \end{aligned}$$

é fácil observar que

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}} \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{\nu}) = -\frac{1 + 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}^2}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}, \quad (4.3)$$

portanto, passando a soma no ponto  $p$  encerra-se a demonstração.  $\square$

**Observação 4.0.6.** *Definindo  $l$  a função  $l(|x|^2) = 1 + 2u'(|x|^2)|x|^2$ , observemos que  $l(0) = 1 > 0$ . Portanto, por continuidade, existe  $r_{\mathbb{R}} > 0$  de modo que  $l(|x|^2) > 0$  para todo  $|x|^2 < r_{\mathbb{R}}^2$ . Assim, desta observação e da equação (4.3) este mesmo  $r_{\mathbb{R}}$  é tal que*

$$\sum_{\alpha=1}^n \tilde{q}^{\partial\Sigma}(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}) < 0.$$

*Daqui em diante assumiremos sempre este raio.*

**Teorema 9.** *Seja  $B^n(0, r_{\mathbb{R}}) \subset (\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u} g_{can})$  uma bola conforme de raio Euclidiano  $r_{\mathbb{R}}$ , centrada na origem, com  $u(x) = u(|x|^2)$ , em que  $u(|x|^2)$  satisfaz*

$$i) \quad u'' - [u']^2 \geq 0,$$

$$ii) \quad -u''|x|^2 - u' \geq 0.$$

*Então, para  $n - k \geq 2$ , não existe  $k$ -subvariedade mínima de bordo livre estável em  $B^n(0, r_{\mathbb{R}})$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Sigma^k$  uma subvariedade mínima de bordo livre em  $B^n_{r_{\mathbb{R}}} \subset (\mathbb{R}^n, \tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  e seja  $\{E_i\}_{i=1}^k$  um referencial local ortonormal de  $\Sigma^k$  com respeito a métrica Euclidiana. Para todo  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ , usando a Proposição 2.5.2 (iii), podemos escrever

$$e^{2u} \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) = K_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) + E_i(u)^2 + E_j(u)^2 - |\nabla u|^2 - \text{Hess } u(E_i, E_i) - \text{Hess } u(E_j, E_j) \quad (4.4)$$

Somando sobre os índices  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ , a expressão anterior fica

$$\begin{aligned} e^{2u} \sum_{i,j=1}^k \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) &= \sum_{i,j=1}^k K_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) + 2(k-1)|\nabla^\top u|^2 - k(k-1)|\nabla u|^2 - 2(k-1) \text{div}_\Sigma(\nabla u) \\ &= 2(k-1)|\nabla^\top u|^2 - k(k-1)|\nabla u|^2 - 2(k-1) \text{div}_\Sigma(\nabla u). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $e^{(k-2)u}$  e integrando sobre  $\Sigma$  com respeito a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \sum_{i,j=1}^k \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) d\tilde{a} &= \int_\Sigma \sum_{i,j=1}^k \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) e^{ku} da \\ &= \int_\Sigma [2(k-1)|\nabla^\top u|^2 - k(k-1)|\nabla u|^2] e^{(k-2)u} da + \\ &\quad - 2(k-1) \int_\Sigma \text{div}_\Sigma(\nabla u) e^{(k-2)u} da. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da divergência e pela definição de curvatura média, para um campo qualquer  $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  podemos escrever

$$\int_\Sigma \text{div}_\Sigma(Z) da = \int_{\partial\Sigma} \langle Z^\top, \nu \rangle ds - \int_\Sigma \langle H, Z \rangle da,$$

portanto, tomando  $Z = e^{(k-2)u} \nabla u$  e usando a minimalidade de  $\Sigma^k$  na métrica  $\tilde{g}$  (Proposição 2.5.3)) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \text{div}_\Sigma(\nabla u) e^{(k-2)u} da &= \int_{\partial\Sigma} \langle e^{(k-2)u} \nabla u^\top, \nu \rangle ds - k \int_\Sigma |\nabla^\perp u| e^{(k-2)u} da \\ &\quad - (k-2) \int_\Sigma |\nabla^\top u|^2 e^{(k-2)u} da. \end{aligned}$$

Usando o resultado anterior obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \sum_{i \neq j=1}^k \tilde{K}(E_i, E_j) d\tilde{a} &= (k-1)(k-2) \int_{\Sigma} |\nabla^{\top} u|^2 e^{(k-2)u} da \\ &+ k(k-1) \int_{\Sigma} |\nabla^{\perp} u|^2 e^{(k-2)u} da - 2(k-1) \int_{\partial\Sigma} \langle e^{(k-2)u} \nabla u^{\top}, \nu \rangle ds. \end{aligned}$$

Observemos que no bordo de  $\Sigma^k$  é válido

$$\begin{aligned} \langle e^{(k-2)u} \nabla u^{\top}, \nu \rangle &= e^{(k-2)u(|x|^2)} \left\langle 2u'(|x|^2)x^{\top}, \frac{x}{r_{\mathbb{R}}} \right\rangle \\ &= 2u'(r_{\mathbb{R}}^2) r_{\mathbb{R}} e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} e^{(k-2)u} \end{aligned}$$

As hipóteses *i)* e *ii)* do Teorema 7 implicam que  $u' < 0$ , o que produz

$$\int_{\Sigma} \sum_{i \neq j=1}^k \tilde{K}(E_i, E_j) d\tilde{a} > k(k-1) \int_{\Sigma} |\nabla^{\perp} u|^2 e^{(k-2)u} da \quad (4.5)$$

Combinando a Proposição (4.0.1), o Teorema (4.0.3) e a desigualdade (4.5) obtemos finalmente que

$$\begin{aligned} tr \tilde{Q}^{\Sigma} &= \int_{\Sigma} tr \tilde{q}^{\Sigma} d\tilde{a} - \int_{\partial\Sigma} tr \tilde{q}^{\partial\Sigma} d\tilde{s} \\ &= \int_{\Sigma} -\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(\Sigma, N\Sigma) + k|\nabla^{\perp} u|^2 e^{-2u} d\tilde{a} - \int_{\partial\Sigma} \sum_{r=k+1}^n \tilde{A}^{\partial B^n}(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}) d\tilde{s} \\ &< \int_{\Sigma} -\sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_r) + \frac{1}{k-1} \sum_{i \neq j=1}^k \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) d\tilde{a} - \int_{\partial\Sigma} \sum_{r=k+1}^n \tilde{A}^{\partial B^n}(\tilde{E}_{\alpha}^{\perp}, \tilde{E}_{\alpha}^{\perp}) d\tilde{s} \end{aligned}$$

Pela Observação (4.0.6) sabemos que o integrando no bordo é negativo, portanto, nos concentraremos nas curvaturas seccionais. Vamos escrever a curvatura seccional  $\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}$  em função da métrica conforme. Considere  $\tilde{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ , vetores que geram um plano  $\pi \subset T_x \mathbb{R}^n$  na métrica  $\tilde{g}$  com  $\tilde{g}(\tilde{E}_i, \tilde{E}_j) = \delta_{ij}$ . Assim, para  $E_i = e^u \tilde{E}_i$  temos  $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$ . Usando a Proposição (2.5.2) (*iii*) para a mudança conforme na curvatura obtemos

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j)(x) = 4e^{-2u} \left\{ ([u']^2 - u'') (\langle x, E_i \rangle^2 + \langle x, E_j \rangle^2) - u' - [u']^2 |x|^2 \right\}$$

Passando a soma temos

$$\sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n (\langle x, E_i \rangle^2 + \langle x, E_r \rangle^2) = (n-k)|x^{\top}|^2 + k|x^{\perp}|^2,$$

portanto

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}(E_i, E_r) \\ &= 4e^{-2u} \left\{ ([u']^2 - u'') ((n-k)|x^{\top}|^2 + k|x^{\perp}|^2) - k(n-k)(u' + [u']^2|x|^2) \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{i \neq j=1}^k (\langle x, E_i \rangle^2 + \langle x, E_j \rangle^2) = 2(k-1)|x^\top|^2 \quad (4.6)$$

produzindo

$$\sum_{i \neq j=1}^k \tilde{K}(E_i, E_j) = 4e^{-2u} \left\{ ([u']^2 - u'') 2(k-1)|x^\top|^2 - k(k-1)(u' + [u']^2|x^2) \right\}.$$

O que implica

$$\frac{1}{k-1} \sum_{i \neq j=1}^k \tilde{K}(E_i, E_j) = 4e^{-2u} \left\{ ([u']^2 - u'') 2|x^\top|^2 - k(u' + [u']^2|x^2) \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^k \sum_{r=k+1}^n \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_r) + \frac{1}{k-1} \sum_{i \neq j=1}^k \tilde{K}_{\mathbb{R}^n}(E_i, E_j) = \\ & = -4e^{-2u} \left\{ ([u']^2 - u'') ((n-k)|x^\top|^2 + k|x^\perp|^2) - k(n-k)(u' + [u']^2|x^2) \right\} \\ & \quad + 4e^{-2u} \left\{ ([u']^2 - u'') 2|x^\top|^2 - k(u' + [u']^2|x^2) \right\} \\ & = -4e^{-2u} ([u']^2 - u'') \left\{ (n-k)|x^\top|^2 + k|x^\perp|^2 - 2|x^\top|^2 \right\} \\ & \quad - 4e^{-2u} [u' + [u']^2|x^2] \left\{ -k(n-k-1) \right\} \\ & = -4e^{-2u} ([u']^2 - u'') \left\{ k(n-k-1)|x^2 - k(n-k-1)|x^2 \right\} \\ & \quad - 4e^{-2u} ([u']^2 - u'') \left\{ + (n-k)|x^\top|^2 + k|x^\perp|^2 - 2|x^\top|^2 \right\} \\ & \quad - 4e^{-2u} [u' + [u']^2|x^2] \left\{ -k(n-k-1) \right\} \\ & = -4e^{-2u} ([u']^2 - u'') \left\{ -k(n-k-1)|x^2 + (n-k)|x^\top|^2 + k|x^\perp|^2 - 2|x^\top|^2 \right\} \\ & \quad - 4e^{-2u} ([u']^2 - u'') \left\{ k(n-k-1)|x^2 \right\} \\ & \quad - 4e^{-2u} [u' + [u']^2|x^2] \left\{ -k(n-k-1) \right\} \\ & = -4e^{-2u} ([u']^2 - u'') [(-k(n-k-1) + (n-k-2))|x^\top|^2 - k(n-k-2)|x^\perp|^2] \\ & \quad - 4e^{-2u} (-u''|x^2 - u') [k(n-k-1)|x^2] \\ & = -4e^{-2u} \left[ \overbrace{[u']^2 - u''}^{i)} \right] \left[ \overbrace{((-k+1)(n-k-2) - k)}^* |x^\top|^2 - \overbrace{k(n-k-2)}^{**} |x^\perp|^2 \right] \\ & \quad - 4e^{-2u} \left[ \overbrace{-u''|x^2 - u'}^{ii)} \right] \left[ \overbrace{k(n-k-1)}^{***} |x^2 \right] \end{aligned}$$

Para  $n-k \geq 2$  temos que (\*) é negativo, (\*\*) é não positivo e (\*\*\*) é positivo, combinando com as hipóteses i) e ii) do Teorema 7 temos que a última igualdade é não positiva, encerrando a demonstração do Teorema 7.  $\square$

## Capítulo 5

# Critérios de não estabilidade para hipersuperfícies CMC em uma bola conforme

Nesta seção estudaremos dois critérios de não estabilidade para hipersuperfícies de curvatura média constante, hipersuperfícies CMC, imersas em um ambiente conforme ao espaço Euclidiano. O primeiro critério é relativo a hipersuperfícies capilares, hipersuperfícies CMC que intersectam o domínio em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , é uma generalização do seguinte resultado de Li-Xiong (2014) [26] para o ambiente Euclidiano:

*Se o centro de massa do corpo generalizado envolvido pela hipersuperfície capilar imersa e a parte molhada da esfera está localizado na origem, então a hipersuperfície não é estável.*

O resultado de Li-Xiong (2014) [26] foi provado para o caso Euclidiano, a principal ferramenta utilizada foi um certo campo de Killing conforme. Nesta tese, usaremos as mesmas ferramentas e seguiremos os mesmos passos da prova adaptando para uma certa métrica conforme.

Um critério de não estabilidade (para hipersuperfícies de curvatura média constante que preservam volume) é inspirado em outro resultado de de H. Li e C. Xiong (2016) [27], cujo o espaço ambiente são certas classes de variedades com peso. O resultado diz que

*Se as componentes do campo normal de uma hipersuperfície capilar possui média zero, então a hipersuperfície não é estável.*

Com as mesmas notações e definições da seção 2.5, consideremos uma bola Euclidiana  $B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}$ , com raio  $r_{\mathbb{R}} > 0$  e bordo  $\partial B^{n+1}$  suave munida da métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle, \rangle$  e uma imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, \tilde{g})$ , com  $\text{int}(\Sigma^n) \subset \text{int}(B^{n+1})$  e  $\partial\Sigma \subset \partial B^{n+1}$ . Nesse contexto, estamos interessados quando  $\Sigma^n$  é uma *hipersuperfície capilar* (ou *imersão capilar*) ou seja, quando possui curvatura média, denotada por  $H$ , constante (CMC) e  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Quando o ângulo de contato é  $\pi/2$ , ou seja,  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  ortogonalmente, dizemos que  $\Sigma^n$  é CMC de bordo livre.

Denotaremos respectivamente por  $\tilde{\nabla}$ ,  $\tilde{\Delta}$  e  $\tilde{\nabla}^2$  a derivada covariante, o laplaciano e o hessiano no espaço ambiente  $(M^{n+1}, \tilde{g})$ , enquanto que  $\nabla^\Sigma$ ,  $\Delta_\Sigma$  e  $\nabla_\Sigma^2$  denotará a

derivada covariante, o laplaciano e o hessiano da imersão  $\Sigma^n$ , respectivamente. Além disso, denotaremos por  $D$ ,  $\Delta_{\mathbb{R}}$  e  $D^2$  a derivada covariante, o laplaciano e o hessiano, todas no sentido usual, do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ , respectivamente.

Antes de iniciar a construção das ferramentas a serem usadas neste trabalho, apresentaremos sucintamente a exploração de um campo de Killing conforme (o qual será adaptado neste trabalho) o qual já foi largamente utilizado nos trabalhos de Li-Xiong (2014) [26], Li-Xiong (2016) [27], Wang-Xia (2019) [44] para produzir funções teste.

Considere um campo vetorial constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  e o campo  $X_E$  definido por  $X_E := \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2}(1 + |x|^2)E$ . Não é difícil observar que  $X_E$  é um campo de Killing conforme (com fator conforme  $\langle x, E \rangle$ ) e  $X_E|_{\partial B_1^{n+1}(0)}$  é tangente a  $\partial B_1^{n+1}(0)$ . Considerando uma imersão capilar na bola Euclidiana unitária  $\Sigma^n \rightarrow B_1^{n+1}(0)$ , podemos obter a seguinte fórmula do tipo Minkowski

$$\int_{\Sigma} \langle x + \cos \theta N, E \rangle da = - \int_{\Sigma} H \langle X_E, N \rangle da.$$

Basta fazer observar que

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(X_E^{\top}) = n \langle x, E \rangle + nH \langle X_E, N \rangle,$$

e integrar ambos os membros, usar em seguida o teorema da divergência.

Esta fórmula do tipo Minkowski é muito importante pois fornece para cada campo vetorial constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  uma “função teste” que possui média zero sobre  $\Sigma^n$ , explicitamente:

$$\phi_E = \langle x + \cos \theta N, E \rangle + H \langle X_E, N \rangle,$$

satisfazendo a condição de média zero:

$$\int_{\Sigma} \phi_E da = 0,$$

Além disso, se  $\Sigma^n$  possui curvatura média constante temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu} \phi_E &= q \phi_E, \text{ em } \partial \Sigma \\ \Delta_{\Sigma} \phi_E + |A|^2 \phi_E &= (|A|^2 - nH^2) \langle x, E \rangle, \text{ em } \Sigma \end{aligned}$$

A função  $\phi_E$  é importante, pois quando substituímos  $\phi_E$  na fórmula da segunda variação do funcional energia (Equação (2.17)) o termo de bordo se anula e o termo  $(|A|^2 - nH^2)$  fica em evidência. Observamos que essas boas propriedades provem das propriedades do campo  $X_E$ . Para mais aplicações deste campo sugerimos consultar a Observação 3.1 em Wang-Xia (2019) [44], onde é feita referência sobre um sério de trabalhos os quais fizeram uso explicitamente deste campo.

Neste tese faremos uma adaptação do campo  $X_E$  para o ambiente conformemente Euclidiano. Para cada vetor constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  defina o campo vetorial  $X_E$  em  $\mathfrak{X}(M)$  fazendo

$$X_E = e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E \right]. \quad (5.1)$$

O campo  $X_E$  possui as seguintes propriedades:

**Lema 2.** *i)  $X_E$  é um Campo de Killing conforme em  $\mathfrak{X}(M)$  com função potencial  $V_E$  ( $\mathcal{L}_{X_E}\tilde{g} = 2V_E\tilde{g}$ ) ou seja, dado um referencial local  $\{E_i\}_i^{n+1}$  em  $T_pM$  para todo  $p \in T_pM$*

$$\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{E_i}X_E, E_j\right) + \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{E_j}X_E, E_i\right) = \frac{2}{n+1}\operatorname{div}_{\tilde{g}}(X_E)\tilde{g}_{ij},$$

onde denotamos

$$V_E := \frac{\operatorname{div}_{\tilde{g}}(X_E)}{n+1} = e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}\langle x, E \rangle + \langle X_E, Dh \rangle. \quad (5.2)$$

*ii)  $X_E|_{\partial B^{n+1}}$  é um campo vetorial tangente a  $\partial B^{n+1}$ . Em particular*

$$\tilde{g}(X_E, \bar{N})|_{\partial\Sigma} = 0.$$

*Demonstração.* Proposição 3.1 de [44] (caso Euclidiano) combinada com Proposição 2.2.4 (mudança da função potencial de um campo de Killing conforme sobre uma mudança conforme da métrica).  $\square$

**Proposição 5.0.1.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow B^{n+1} \subset (M^{n+1}, \tilde{g})$  tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$  possuindo bordo  $\partial B^{n+1}$  umbílico em  $M$ . Então,  $\nu$  é uma direção principal  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma^n$ . Em particular*

$$\tilde{\nabla}_{\nu}N = -A(\nu, \nu)\nu.$$

*Demonstração.* É suficiente provar que  $\forall Y \in T_p(\partial\Sigma)$ , com  $p \in \partial\Sigma$ ,  $A(Y, \nu) = 0$ . De fato

$$\begin{aligned} A(Y, \nu) &= \tilde{g}\left(-\tilde{\nabla}_Y N, \nu\right) \\ &= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y \nu, N\right) \\ &\stackrel{(2.13) \text{ e } (2.14)}{=} \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y(-\sin\theta\bar{N} + \cos\theta\bar{\nu}), \cos\theta\bar{N} + \sin\theta\bar{\nu}\right) \\ &= -\sin^2\theta\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y\bar{N}, \bar{\nu}\right) + \cos^2\theta\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y\bar{\nu}, \bar{N}\right) \\ &= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y\bar{N}, \bar{\nu}\right) \\ &= -A^{\partial B^{\mathbb{R}}} (Y, \bar{\nu}) = 0, \end{aligned}$$

onde usamos que  $\theta$  é constante,  $\bar{\nu}$  e  $\bar{N}$  são vetores unitários e  $\partial B^{n+1}$  é umbílico.  $\square$

## 5.1 Não estabilidade de hipersuperfícies capilares

Considere um vetor constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos a função  $\phi_E$  como sendo a componente normal campo de Killig conforme  $X_E$  sobre a hipersuperfície  $\Sigma^n \rightarrow B^{n+1}$ , ou

seja

$$\phi_E = \tilde{g}(X_E, N).$$

Observe que a função  $\phi_E$  não é necessariamente uma função teste, pois, em geral, não possui média zero sobre  $\Sigma^n$ . Substituindo  $\phi_E$  na formula da segunda variação do funcional energia temos

$$\mathcal{E}''(\phi_E) = - \int_{\Sigma} \phi_E L \phi_E d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \phi_E (\phi_{E\nu} - q\phi_E) d\tilde{s},$$

onde

$$L = \Delta_{\Sigma} + |A|^2 + \tilde{\text{Ric}}(N)$$

e

$$q = \frac{1}{\text{sen } \theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta A(\nu, \nu).$$

**Lema 3.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$ . Seja  $X_E$  o campo de Killing conforme como definido em (5.1) então, ao longo de  $\partial\Sigma$  vale*

$$\tilde{\nabla}_{\nu} \tilde{g}(X_E, N) = q \tilde{g}(X_E, N),$$

onde

$$q = \frac{1}{\text{sen } \theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta A(\nu, \nu).$$

*Demonstração.* Demonstração encontra-se no Apêndice A. □

Será fundamental neste trabalho determinar o laplaciano da função  $\phi_E$ , que consiste da componente normal (em relação a imersão  $\Sigma^n$ ) do campo de Killing conforme (5.1). Tal laplaciano é conhecido da literatura. Apresentaremos esse resultado via Proposição 2.2.5.

**Proposição 5.1.1.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow (M^{n+1}, \tilde{g})$ . Seja  $X$  um campo de Killing conforme com fator conforme  $V$ . Então ao longo de  $\Sigma^n$  vale*

$$\Delta_{\Sigma} \tilde{g}(X, N) = -(\tilde{\text{Ric}}(N) + |A|^2) \tilde{g}(X, N) - nHV - n\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}H) - n\tilde{\nabla}_N V.$$

*Em particular, se  $\Sigma^n$  é CMC temos*

$$L\tilde{g}(X, N) = -n\tilde{\nabla}_N V - nHV.$$

*Demonstração.* Proposição 2.2.5 reescrita. □

Considerando o Lema 3 e a proposição 5.1.1, podemos substituir  $\phi_E$  na formula da segunda variação do funcional energia, produzindo

$$\mathcal{E}''(\phi_E) = n \int_{\Sigma} \tilde{g}(X_E, N) \left( \tilde{\nabla}_N V_E + H V_E \right) d\tilde{a}.$$

Para estudar  $\mathcal{E}''(\phi_E)$ , definimos a seguinte forma quadrática

$$Q(E_1, E_2) = n \int_{\Sigma} \tilde{g}(X_{E_1}, N) \left( \tilde{\nabla}_N V_{E_2} + H V_{E_2} \right) d\tilde{a}, \quad (5.3)$$

para todo  $E_1, E_2 \in \mathbb{S}^n$ . Denote por  $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$  a base canônica de vetores de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Assim, temos o seguinte lema apresentado a seguir.

**Lema 4.** *Considere uma hipersuperfície de curvatura média constante  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$  com  $u(x) = u(|x|^2)$  satisfazendo*

$$0 \leq u'' \leq [u']^2, \text{ com } u' < 0.$$

Então a forma quadrática  $Q$ , como definida em (5.3), possui as seguintes propriedades

- a)  $Q$  é simétrica.
- b)  $\text{tr}Q = \sum_{i=1}^{n+1} Q(E_i, E_i) \leq 0$  com a igualdade se e somente se  $|x| = \text{const.}$  em  $\Sigma^n$ , ou seja, a norma de  $x$  é constante na métrica Euclidiana sobre  $\Sigma^n$ .

*Demonstração.* (a) Primeiramente provemos que  $Q$  é simétrica. Note que o fato de  $Q$  ser definida como

$$Q(E_1, E_2) = - \int_{\Sigma} \phi_{E_1} L \phi_{E_2} d\tilde{a},$$

temos pela Identidade de Green que

$$Q(E_1, E_2) = - \int_{\Sigma} \phi_{E_2} L \phi_{E_1} d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} (\phi_{E_2} [\phi_{E_1}]_v - [\phi_{E_2}]_v \phi_{E_1}) d\tilde{s}.$$

Pelo Lema 3 temos que  $(\phi_{E_i})_v = q\phi_{E_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Anulando assim o termos do bordo e portanto

$$Q(E_1, E_2) = Q(E_2, E_1).$$

(b) Calculemos agora o traço de  $Q$ . Primeiramente, observemos que se  $X$  é um Campo de Killing Conforme com função potencial  $V$  e  $Z$  é um campo unitário  $\tilde{g}(Z, Z) = 1$ , então

$$Z(V)\tilde{g}(X, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z \{V X\}, Z) - V^2. \quad (5.4)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
Z(V)\tilde{g}(X, Z) &= \tilde{\nabla}_Z\{V\tilde{g}(X, Z)\} - V\tilde{\nabla}_Z\tilde{g}(X, Z) \\
&= \tilde{\nabla}_Z\{\tilde{g}(VX, Z)\} - V\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z X, Z) - V\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Z Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z\{VX\}, Z) + \tilde{g}(VX, \tilde{\nabla}_Z Z) - V^2 - \tilde{g}(VX, \tilde{\nabla}_Z Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z\{VX\}, Z) - V^2.
\end{aligned}$$

Usando a Equação (5.4), calculemos agora o traço de  $Q$ .

$$\begin{aligned}
tr(Q) &= \sum_{i=1}^{n+1} Q(E_i, E_i) \\
&= - \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(X_{E_i}, N) L\tilde{g}(X_{E_i}, N) d\tilde{a} \\
&= - \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(X_{E_i}, N) \left( -n\tilde{\nabla}_N V_{E_i} - nH V_{E_i} \right) d\tilde{a} \\
&= n \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\nabla}_N V_{E_i} \tilde{g}(X_{E_i}, N) + \sum_{i=1}^{n+1} H V_{E_i} \tilde{g}(X_{E_i}, N) d\tilde{a} \\
&= n \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_N V_{E_i} X_{E_i}, N) - \sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} H \tilde{g}(V_{E_i} X_{E_i}, N) d\tilde{a} \\
&= n \int_{\Sigma} \tilde{g}\left(\underbrace{\tilde{\nabla}_N \sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i} X_{E_i}}_I, N\right) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i}^2}_{II} + H \tilde{g}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i} X_{E_i}}_{III}, N\right) d\tilde{a}. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
V_{E_i} &= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, E_i \rangle + \langle X_{E_i}, Du \rangle \\
&= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, E_i \rangle + \left\langle e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \langle x, E_i \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E_i \right], 2u'x \right\rangle \\
&= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, E_i \rangle + e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) \langle E_i, x \rangle \\
&= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} [1 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)] \langle E_i, x \rangle. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Cálculo de  $II$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i}^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} [1 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)]^2 \langle E_i, x \rangle^2 \\
\sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i}^2 &= e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( 1 + 2u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + [u']^2 (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) |x|^2.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da passagem (5.6) temos , cálculo de *III*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} V_{E_i} X_{E_i} &= \sum_{i=1}^{n+1} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} [1 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)] \langle E_i, x \rangle \left( e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \langle x, E_i \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E_i \right] \right) \\
&= e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} [1 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)] \left( |x|^2 x - \frac{1}{2} (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) x \right) \\
&= e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} [1 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)] \left( \frac{1}{2} (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) x \right) \\
&= \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) x.
\end{aligned}$$

Cálculo de *I*

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_N V_{E_i} X_{E_i} &= \tilde{\nabla}_N \left\{ \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) x \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ 2 \langle x, N \rangle + \langle N, Du' \rangle (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 + 4u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) \langle x, N \rangle \right\} x \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) \right\} V_0 N \\
&= \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ 2 + 2u'' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 + 4u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) \right\} \langle x, N \rangle x \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) \right\} V_0 N.
\end{aligned}$$

Substituindo *I*, *II* e *III* em (5.5), temos

$$\begin{aligned}
tr(Q) &= n \int_{\Sigma} H \tilde{g} \left( \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) x, N \right) d\tilde{a} \\
&+ n \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ 2 + 2u'' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 + 4u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) \right\} \langle x, N \rangle x, N \right) d\tilde{a} \\
&+ n \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \left\{ \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) \right\} V_0 N, N \right) d\tilde{a} \\
&- n \int_{\Sigma} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( 1 + 2u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + [u']^2 (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) |x|^2 d\tilde{a}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
tr(Q) &= n \int_{\Sigma} (H \tilde{g}(x, N) + V_0) \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right) d\tilde{a} \quad (5.7) \\
&+ n \int_{\Sigma} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ 1 + 2u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u'' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right\} e^{-2u} \tilde{g}(x, N)^2 d\tilde{a} \\
&- n \int_{\Sigma} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left\{ 1 + 2u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + [u']^2 (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right\} e^{-2u} \tilde{g}(x, x) d\tilde{a}.
\end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente o integrando de (5.7). Primeiramente, definiremos a função  $\Psi_2 = \frac{1}{2} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( |x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u' (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 \right)$ , além disso, notemos que  $\Psi_2$  se anula em  $\partial\Sigma$ , ou seja,  $\Psi_2|_{\partial\Sigma} = 0$ . Assim, o integrando de (5.7) fica escrito simplesmente por  $(nH\tilde{g}(x, N) + nV_0) \Psi_2$ .

Na métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$  o laplaciano de  $\frac{1}{2}\tilde{g}(x, x)$  em  $\Sigma^n$  é dado por

$$\Delta_{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) = nV_0^2 + nV_0H\tilde{g}(x, N) + \tilde{g}(\nabla^{\Sigma}V_0, x).$$

Para ver isto, determinemos  $\nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x)$  e façamos  $\operatorname{div}_{\tilde{g}}^{\Sigma}(\nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x))$ . Primeiramente, observemos que  $\forall Y \in T_pM$ , com  $p \in M$ , temos

$$\tilde{\nabla}_Y \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y x, x) = \tilde{g}(V_0Y, x) = \tilde{g}(Y, V_0x), \quad (5.8)$$

onde usamos o fato de que  $\tilde{\nabla}_Y x = V_0Y$  [Lema 2.5.9 parte *i*], portanto,  $\tilde{\nabla} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) = V_0x$ . Assim temos

$$\begin{aligned} \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) &= \left( \tilde{\nabla} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) \right)^{\top} \\ \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) &= V_0x - \tilde{g}(V_0x, N)N \\ \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) &= V_0(x - \tilde{g}(x, N)N). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Agora, determinaremos o divergente de  $\nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x)$  em  $\Sigma^n$  com relação a métrica  $\tilde{g}$ . Para tanto, tomemos um referencial local ortonormal  $\{E_i\}_{i=1}^n$  em  $T_p\Sigma$ , com  $p \in \Sigma$  e façamos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\tilde{g}}^{\Sigma} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) \right) &= \sum_{i=1}^n \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i} V_0(x - \tilde{g}(x, N)N), E_i) \\ &= \tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) + nV_0^2 + nV_0H\tilde{g}(x, N), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Lembremos que  $V_0(x) = 1 + \langle x, Dh \rangle$ , portanto,  $V_0(0) = 1 > 0$ , assim, por continuidade, existe  $r_{\mathbb{R}}^*$  tal que  $V_0 > 0 \forall x \in B_{r_{\mathbb{R}}^*}$ . Vamos supor que  $r_{\mathbb{R}} \leq r_{\mathbb{R}}^*$  para garantir que sempre vale  $V_0 > 0$ . Agora observemos que

$$\begin{aligned} nV_0 + nH\tilde{g}(x, N) &= -\frac{\tilde{g}(\nabla^{\Sigma}V_0, x)}{V_0} + \frac{\tilde{g}(\nabla^{\Sigma}V_0, x)}{V_0} + nV_0 + nH\tilde{g}(x, N) \\ &= \frac{1}{V_0} [-\tilde{g}(\nabla^{\Sigma}V_0, x) + \tilde{g}(\nabla^{\Sigma}V_0, x) + nV_0^2 + nV_0H\tilde{g}(x, N)] \\ &= \frac{1}{V_0} \left[ -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma}V_0, x) + \Delta_{\Sigma} \frac{1}{2}\tilde{g}(x, x) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Usando (5.10) em (5.7), temos

$$\begin{aligned}
(5.7) &= \int_{\Sigma} \left( -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) + \Delta_{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right) \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) \frac{\Psi_2}{V_0} + \Delta_{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]_{\nu} \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{s} - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \nabla^{\Sigma} \frac{\Psi_2}{V_0} \right) d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{a} - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \frac{V_0 \nabla^{\Sigma} \Psi_2 - \Psi_2 \nabla^{\Sigma} V_0}{V_0^2} \right) d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{a} - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \frac{\nabla^{\Sigma} \Psi_2}{V_0} \right) d\tilde{a} + \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \frac{\Psi_2 \nabla^{\Sigma} V_0}{V_0^2} \right) d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla^{\Sigma} V_0, x) \frac{\Psi_2}{V_0} d\tilde{a} - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \frac{\nabla^{\Sigma} \Psi_2}{V_0} \right) d\tilde{a} + \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( x, \frac{\Psi_2 \nabla^{\Sigma} V_0}{V_0} \right) d\tilde{a} \quad (5.11) \\
&= - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \frac{\nabla^{\Sigma} \Psi_2}{V_0} \right) d\tilde{a}, \quad (5.12)
\end{aligned}$$

onde usamos que  $\nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) = V_0(x - \tilde{g}(x, N)N)$  na passagem (5.11).

Denotaremos por  $D^{\Sigma}$  o gradiente de um campo tangente a  $\Sigma^n$  em relação a métrica Euclidiana  $\langle, \rangle$ . Relativamente a métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle, \rangle$ , como já estabelecido,  $N$  é o campo normal unitário a  $\Sigma^n$ . Não é difícil observar que  $N$  continua sendo normal a  $\Sigma^n$  em relação a métrica Euclidiana  $\langle, \rangle$ , porém deixa de ser unitário da métrica  $\langle, \rangle$ . Definindo  $\tilde{N} = e^u N$ , temos que, na métrica Euclidiana,  $\tilde{N}$  é normal a  $\Sigma^n$  (por construção) e  $\tilde{N}$  é unitário, pois

$$\langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle = \langle e^u N, e^u N \rangle = e^{2u} \langle N, N \rangle = \tilde{g}(N, N) = 1.$$

Calculemos agora  $D^{\Sigma} \frac{1}{2} |x|^2$ . Observe que  $\forall Y \in \mathbb{R}^{n+1}$  é válido que

$$D_Y \frac{1}{2} |x|^2 = \langle D_Y x, x \rangle = \langle Y, x \rangle,$$

portanto  $D^{\Sigma} \frac{1}{2} |x|^2 = x$ . Desse modo

$$\begin{aligned}
D^{\Sigma} \frac{1}{2} |x|^2 &= \left( D^{\Sigma} \frac{1}{2} |x|^2 \right)^{\top} \\
&= x - \langle x, \tilde{N} \rangle \tilde{N} \\
&= x - \langle x, e^u N \rangle e^u N \\
&= x - \tilde{g}(x, N) N, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

e por (5.9) conseguimos escrever

$$\nabla^{\Sigma} \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) = V_0 D^{\Sigma} \frac{1}{2} |x|^2. \quad (5.14)$$

Lembrando que  $\tilde{\nabla}|x|^2 = e^{-2u}D|x|^2 = 2e^{-2u}x$  (pois, sob uma mudança conforme é válido que  $\tilde{\nabla}f = e^{-2u}Df$  para uma função  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ), temos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}\Psi_2 &= \tilde{\nabla}\frac{1}{2}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2 + u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left\{2e^{-2u}x + (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2 e^{-2u}2u''x + u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)4e^{-2u}x\right\} \\ &= e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)e^{-2u}x,\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}\nabla^\Sigma\Psi_2 &= \left(\tilde{\nabla}\Psi_2\right)^\top \\ &= \tilde{\nabla}\Psi_2 - \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}\Psi_2, N\right)N \\ &= \left\{e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)e^{-2u}\right\}\{x - \tilde{g}(x, N)N\},\end{aligned}$$

portanto, por (5.13)

$$\nabla^\Sigma\Psi_2 = \left\{e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)e^{-2u}\right\}D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2. \quad (5.15)$$

Portanto, usando (5.14), (5.15) e (5.12), temos que (5.7) fica

$$\begin{aligned}(5.7) &= \int_\Sigma e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)e^{-2u}\tilde{g}\left(D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2, D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2\right)d\tilde{a} \\ &= \int_\Sigma e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)\left|D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2\right|^2 d\tilde{a}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}tr(Q) &= - \int_\Sigma e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\underbrace{\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)}_A \left|D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2\right|^2 d\tilde{a} \\ &\quad + n \int_\Sigma e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\underbrace{\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)}_A e^{-2u}\tilde{g}(x, N)^2 d\tilde{a} \\ &\quad - n \int_\Sigma e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\underbrace{\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + [u']^2(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)}_B e^{-2u}\tilde{g}(x, x) d\tilde{a}.\end{aligned}$$

Como por hipótese temos que  $u'' \leq [u']^2$ , com  $u' < 0$  e na bola  $B^{n+1}$  vale que  $|x|^2 \leq r_{\mathbb{R}}^2$ , então  $0 < A \leq B$ . Portanto

$$\begin{aligned}tr(Q) &\leq - \int_\Sigma e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\underbrace{\left(1 + 2u'(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) + u''(|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2)^2\right)}_A \left|D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2\right|^2 d\tilde{a} \\ tr(Q) &\leq -e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \int_\Sigma A \left|D^\Sigma\frac{1}{2}|x|^2\right|^2 d\tilde{a}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{tr}(Q) \leq -e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \int_{\Sigma} A \left| D^{\Sigma} \frac{1}{2} |x|^2 \right|^2 d\tilde{a} \leq 0,$$

portanto  $\operatorname{tr}(Q) = 0$  se e somente se  $|x| = \text{const.}$  em  $\Sigma^n$ .  $\square$

**Teorema 10.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma hipersuperfície capilar e  $W^n$  a parte molhada de  $\partial B^{n+1}$ , com  $u(x) = u(|x|^2)$  satisfazendo*

$$0 \leq u'' \leq [u']^2, \text{ com } u' < 0.$$

Denote por  $T^{n+1}$  a região generalizada envolvida por  $\Sigma^n$  e  $W^n$ . Se  $T^{n+1}$  é simétrico em relação a origem então,  $\Sigma^n$  não é estável.

*Demonstração.* Pelo Lema 4  $Q$  possui pelo menos um autovalor negativo. Por outro lado,

$$\operatorname{div}_{\tilde{g}}(X_E) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i} X_E, E_i) = (n+1)V_E,$$

o que por integração implica

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \phi_E d\tilde{a} &= \int_{\Sigma} \tilde{g}(X_E, N) d\tilde{a} \\ &= \int_T \operatorname{div}_{\tilde{g}}(X_E) d\tilde{v} - \int_{\Omega} \tilde{g}(X_E, \bar{N}) d\tilde{a} \\ &= (n+1) \int_T V_E d\tilde{v}. \end{aligned}$$

Em geral  $\int_{\Sigma} \phi_E d\tilde{a} \neq 0$  (basta tomar hiperplano passando pela origem com campo normal  $N = E$ ), o que significa que  $\phi_E$  não é uma função teste. No entanto, sob a hipótese de  $T$  ser simétrico em relação a origem temos que  $\int_T V_E d\tilde{v} = 0$  para todo  $E \in \mathbb{S}^n$  (justificativa análoga à passagem (1.14)), e assim

$$\int_{\Sigma} \phi_E d\tilde{a} = (n+1) \int_T V_E d\tilde{v} = 0 \quad \forall E \in \mathbb{S}^n.$$

Escolhendo  $E$  como o autovetor correspondente ao autovalor negativo de  $Q$ , temos que  $\mathcal{E}''(\phi_E) = Q(E, E) < 0$ , o que implica que  $\Sigma^n$  não é estável. Completando a prova do Teorema 8.  $\square$

## 5.2 Não estabilidade de hipersuperfícies de bordo livre

Nesta seção, investigaremos outro critério de não estabilidade para hipersuperfícies de curvatura média constante que possuem bordo livre em uma bola conforme a bola Euclidiana. Mais especificamente, provaremos o Teorema 9 que usa uma hipótese sobre o campo normal  $N$  da hipersuperfície  $\Sigma^n \rightarrow (B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  como critério de não estabilidade para uma determinada métrica conforme.

Considere um campo vetorial constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Na métrica Euclidiana,  $E$  é um campo de Killing, ou seja,

$$\langle D_X E, Y \rangle + \langle D_Y E, X \rangle = 0,$$

por outro lado, na métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $E$  é um campo de Killing conforme com fator conforme  $V_E$ ,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X E, Y) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y E, X) = 2V_E \tilde{g}(X, Y),$$

onde  $V_E = E(h) = 2u'\langle x, E \rangle$  (Basta utilizar a Proposição 2.2.4).

Definamos agora a função  $\phi_E$  como sendo  $\phi_E = \tilde{g}(E, N)$ , da Proposição 5.1.1 temos

$$L\phi_E = -n\tilde{\nabla}_N V_E - nHV_E.$$

Aplicando a função  $\phi_E$  na segunda variação do funcional área  $\mathcal{A}''$  e usando a mesma ideia da passagem (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(\phi_E) &= \int_{\Sigma} -\phi_E(\Delta\phi_E + (n\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)\phi_E)d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \phi_E \left( \frac{\partial\phi_E}{\partial\nu} - A^{\partial\Omega}\phi_E \right) d\tilde{s} \\ &= n \int_{\Sigma} \tilde{g}(E, N) \left( \tilde{\nabla}_N V_E + HV_E \right) d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \tilde{g}(E, N) \left( \frac{\partial\tilde{g}(E, N)}{\partial\nu} - A^{\partial B}\tilde{g}(E, N) \right) d\tilde{s} \\ &= n \int_{\Sigma} \tilde{g}(E, N) \tilde{\nabla}_N V_E + \tilde{g}(E, N) HV_E d\tilde{a} + \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} \tilde{g}(E, N) \left( \frac{\partial\tilde{g}(E, N)}{\partial\nu} - A^{\partial B}\tilde{g}(E, N) \right) d\tilde{s} \end{aligned}$$

Usando a identidade (5.4), ou seja

$$\tilde{g}(E, N) \tilde{\nabla}_N V_E = N(V_E) \tilde{g}(E, N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_N \{V_E X_E\}, N) - V_E^2,$$

temos, portanto que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(\phi_E) &= n \int_{\Sigma} H\tilde{g}(V_E E, N) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_N \{V_E E\}, N) - V_E^2 d\tilde{a} + \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\nu} (\tilde{g}(E, N)^2) - A^{\partial B}\tilde{g}(E, N)^2 d\tilde{s} \end{aligned}$$

Tomando um referencial ortonormal  $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  os campos  $E_i$  possuem fator conforme  $V_{E_i} = V_i$ . Fazendo agora  $\phi_i = \phi_{E_i}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  e passando a soma temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}''(\phi_i) &= n \int_{\Sigma} H \tilde{g} \left( \sum_{i=1}^{n+1} V_i E_i, N \right) + \tilde{g} \left( \tilde{\nabla}_N \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} V_i E_i \right\}, N \right) - \sum_{i=1}^{n+1} V_i^2 d\tilde{a} \\ &+ \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(E_i, N)^2 \right) - A^{\partial B} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(E_i, N)^2 d\tilde{s}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} V_i E_i &= \sum_{i=1}^{n+1} 2u' \langle x, E_i \rangle E_i = 2u' x \\ \tilde{\nabla}_N \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} V_i E_i \right\} &= 4u'' \langle x, N \rangle x + 2u' V_0 N \\ \sum_{i=1}^{n+1} V_i^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} (2u' \langle x, E_i \rangle)^2 = 4[u']^2 |x|^2 \\ \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}(E_i, N)^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} e^{2u} \langle E_i, N \rangle e^{2h} \langle E_i, N \rangle = e^{2u}. \end{aligned}$$

Usando a condição de bordo livre, no bordo da bola temos que  $\nu = x/r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}$ , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{2u} = \nu(u) e^{2u} = 2u' \langle \nu, x \rangle e^{2u} = \frac{2u' |x|^2 e^{2u}}{r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} = 2u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}''(\phi_i) &= n \int_{\Sigma} 2u' H \tilde{g}(x, N) + \tilde{g}(4u'' \langle x, N \rangle x + 2u' V_0 N, N) - 4[u']^2 |x|^2 d\tilde{a} \\ &+ \int_{\partial\Sigma} 2u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} d\tilde{s} \\ &= \underbrace{\int_{\Sigma} \left\{ nH \tilde{g}(x, N) + nV_0 \right\} 2u' d\tilde{a} + 4n \int_{\Sigma} e^{-2h} \left\{ u'' \tilde{g}(x, N)^2 - [u']^2 \tilde{g}(x, x) \right\} d\tilde{a}}_I \\ &+ \int_{\partial\Sigma} 2u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} d\tilde{s}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Vamos analisar separadamente  $I$ . Definamos  $\Psi_3 = 2u'$  e observemos que (passagem (5.10))

$$nV_0 + nH \tilde{g}(x, N) = \frac{1}{V_0} \left[ -\tilde{g}(\nabla V_0, x) + \Delta \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]$$

Portanto,  $I$  fica

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Sigma} \left( -\tilde{g}(\nabla V_0, x) + \Delta \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla V_0, x) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} + \int_{\Sigma} \Delta \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla V_0, x) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]_{\nu} \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{s} - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \nabla \frac{\Psi_3}{V_0} \right) d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla V_0, x) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]_{\nu} \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{s} - \int_{\Sigma} \tilde{g} \left( \nabla \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x), \frac{V_0 \nabla \Psi_3 - \Psi_3 \nabla V_0}{V_0^2} \right) d\tilde{a} \\
&= \int_{\Sigma} -\tilde{g}(\nabla V_0, x) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]_{\nu} \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{s} - \int_{\Sigma} \tilde{g}(x, \nabla \Psi_3) - \tilde{g}(x, \nabla V_0) \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{a} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\partial\Sigma} \left[ \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]_{\nu} \frac{\Psi_3}{V_0} d\tilde{s} - \int_{\Sigma} \tilde{g}(x, \nabla \Psi_3) d\tilde{a}, \quad (5.18)$$

onde usamos que  $\nabla \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) = V_0(x - \tilde{g}(x, N)N)$  na passagem (5.17). Lembrando que  $\tilde{\nabla} \Psi_3 = e^{-2h} D \Psi_3 = e^{-2h} D 2u' = e^{-2h} 4u''x$ , temos

$$\begin{aligned}
\nabla \Psi_3^{\Sigma} &= \left( \tilde{\nabla} \Psi_3 \right)^{\top} \\
&= \tilde{\nabla} \Psi_3 - \tilde{g} \left( \tilde{\nabla} \Psi_3, N \right) N \\
&= e^{-2h} 4u''(x - \tilde{g}(x, N)N).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x, \nabla \Psi_3) &= \tilde{g}(x, e^{-2h} 4u''(x - \tilde{g}(x, N)N)) \\
&= e^{-2h} 4u''(\tilde{g}(x, x) - \tilde{g}(x, N)^2). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Além disso, o integrando sobre o bordo em (5.18) fica

$$\left[ \frac{1}{2} \tilde{g}(x, x) \right]_{\nu} \frac{\Psi_3}{V_0} = V_0 \tilde{g}(\nu, x) \frac{2u'}{V_0} = \frac{2u' \tilde{g}(x, x)}{r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} = 2u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}. \quad (5.20)$$

Substituindo (5.19) e (5.20) em (5.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}''(\phi_i) &= \int_{\Sigma} -e^{-2h} 4u''(\tilde{g}(x, x) - \tilde{g}(x, N)^2) da + 4n \int_{\Sigma} e^{-2h} \left\{ u'' \tilde{g}(x, N)^2 - [u']^2 \tilde{g}(x, x) \right\} d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} 2u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} d\tilde{s} + \int_{\partial\Sigma} 2u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} d\tilde{s} \\
&= -4 \int_{\Sigma} e^{-2h} u'' \left\{ \tilde{g}(x, x) - \tilde{g}(x, N)^2 \right\} d\tilde{a} + 4n \int_{\Sigma} e^{-2h} \left\{ u'' \tilde{g}(x, N)^2 - [u']^2 \tilde{g}(x, x) \right\} d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} 4u' r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} d\tilde{s}.
\end{aligned}$$

Recordando que na bola  $B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}$  temos que  $A^{\partial B} = \frac{1+2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}^2}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}$  (conferir Apêndice A Equação (A.1)), então

$$\begin{aligned}
4u'r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} &= \frac{4u'r_{\mathbb{R}}^2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} - A^{\partial B}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \\
&= -\frac{2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} + \frac{2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} + \frac{4u'r_{\mathbb{R}}^2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} - A^{\partial B}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \\
&= -\frac{2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} + 2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \frac{1+2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}^2}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} \right] - A^{\partial B}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \\
&= -\frac{2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} + A^{\partial B}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \\
&\stackrel{i)}{=} < 0.
\end{aligned}$$

Usando as hipóteses *i*) e *ii*) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}''(\phi_i) &= -4 \int_{\Sigma} e^{-2u} u'' \left\{ \tilde{g}(x, x) - \tilde{g}(x, N)^2 \right\} d\tilde{a} \\
&\quad + 4n \int_{\Sigma} e^{-2h} \left\{ u'' \tilde{g}(x, N)^2 - [u']^2 \tilde{g}(x, x) \right\} d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} -\frac{2e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} + A^{\partial B}e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} d\tilde{s} \\
&< 0,
\end{aligned}$$

completando assim a prova do Teorema 11.

## Capítulo 6

# Estabilidade de hipersuperfícies CMC em uma bola conforme

O objetivo deste Capítulo é investigar a estabilidade de hipersuperfícies de curvatura média constante em uma bola  $B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1}$  de um ambiente  $M$  diferente de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Assumiremos que o ambiente é conforme ao espaço Euclidiano, ou seja,  $M := (\mathbb{B}_a^{n+1}, \tilde{g})$ , onde  $\tilde{g} = e^{2u} \langle \cdot, \cdot \rangle$  com  $u(x) = u(|x|^2)$  e  $\mathbb{B}_a^{n+1}$  denotando a bola Euclidiana de raio  $a > 0$  centrada na origem. Dessa forma,  $\tilde{g}$  é uma métrica conforme com fator conforme radialmente simétrico. Será seguido as mesmas ideias utilizadas no trabalho de Wang-Xia (2019) [44] que classificaram as hipersuperfícies CMC capilares estáveis em uma bola nas formas espaciais. Algumas adaptações já tiveram êxito como a exibição de um Campo de Killing conforme tangente  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$ , construção da Formula de Minkowski, necessária para a obtenção de uma função teste, a derivada da função teste na direção do campo conormal restrita ao bordo. Para completar todas as ideias resta explicitar o Jacobi da função de uma certa função.

### 6.1 Estabilidade de hipersuperfícies mínimas de bordo livre

**Lema 5.** *(Formula de Minkowski). Considere a imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u} \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  ortogonalmente (ou seja, no bordo vale  $N \perp \bar{N} = -\frac{x}{r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} = -\nu$ ). Seja  $X_E$  o campo de Killing conforme como definido em (5.1) então,*

$$\int_{\Sigma} nV_E + nH\tilde{g}(X_E, N)d\tilde{a} = 0$$

*Demonstração.* Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial local ortonormal em  $\Sigma^n$ . Observe que

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i} X_E^\top, E_j) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i} (X_E - \tilde{g}(X_E, N)N), E_j) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i} X_E, E_j) - \tilde{g}(X_E, N)\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{E_i} N, E_j) \\ &= V_E \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}(X_E, N)A_{ij}\end{aligned}$$

Tomando o traço e integrando sobre  $\Sigma^n$ , temos

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} nV_E + nH\tilde{g}(X_E, N)da &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(X_E^\top) d\tilde{a} \\ &= \int_{\partial\Sigma} \tilde{g}(X_E^\top, \nu) d\tilde{s} \\ &= \int_{\partial\Sigma} \tilde{g}(X_E - \tilde{g}(X_E, N)N, \bar{N}) d\tilde{s} \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois  $\Sigma^n$  é de bordo livre e  $X_E|_{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}$  é tangente em  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$ .  $\square$

**Lema 6.** (*Derivadas na direção do vetor normal ao bordo*). Considere a imersão  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  ortogonalmente (ou seja, no bordo vale  $N \perp \bar{N} = -\frac{x}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} = -\nu$ ). Seja  $X_E$  o campo de Killing conforme como definido em (5.1) então, ao longo de  $\partial\Sigma$  vale que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\nu} V_E &= A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E, \\ \tilde{\nabla}_{\nu} \tilde{g}(X_E, N) &= A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \tilde{g}(X_E, N),\end{aligned}$$

onde  $A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}$  é a curvatura principal de  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$ .

*Demonstração.* Demonstração encontra-se no Apêndice B.  $\square$

**Observação 6.1.1.** Observamos que os Lemas 2, 5 e 6 dependem apenas da métrica conforme  $\tilde{g}$  possuir fator radial ( $u(x) = u(|x|^2)$ ), não sendo necessário, portanto, que as curvaturas seccionais sejam constantes. Acreditamos que essas proposições sejam úteis no estudo de hipersuperfícies CMC de bordo livre em domínios conformes a bola Euclidiana

Para continuar as adaptações de Wang-Xia (2019) [44] para o caso conforme seria necessário que a função  $V_E$  satisfizesse

$$LV_E = |A|^2 V_E + nH\tilde{\nabla}_N V_E \quad (6.1)$$

Para garantir a validade da Identidade (6.1), uma primeira tentativa, por exemplo, seria pedir a hipótese que a métrica  $\tilde{g}$  fosse Einstein (além das formas espaciais, não

temos exemplos de métricas conformes a métrica Euclidiana possuindo fator conforme radialmente simétrico e que seja Einstein). Nesse caso teríamos que  $\forall p \in M$  e  $X, Y \in T_p M$

$$\tilde{\text{Ric}}(X, Y)(p) = \frac{\tilde{S}}{n+1} \tilde{g}(X, Y)(p).$$

Como  $n+1 \geq 3$  temos que a curvatura escalar  $\tilde{S}$  é constante. Além disso, para um campo de Killing conforme  $X$  com função potencial  $V$  ( $\mathcal{L}_X \tilde{g} = 2V\tilde{g}$ ) em uma métrica Einstein temos que  $V$  satisfaz  $\forall p \in M$  e  $U, W \in T_p M$

$$\tilde{\nabla}^2 V(U, W)(p) = -\frac{1}{n} V \tilde{\text{Ric}}(U, W)(p). \quad (6.2)$$

Portanto, usando a definição de operador estabilidade  $L$  (ver (2.21)) e a Equação (6.2), obtemos

$$\begin{aligned} LV_E &= \tilde{\Delta} V_E - \tilde{\nabla}^2 V_E(N, N) + nH\tilde{\nabla}_N V_E + |A|^2 V_E + \tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E \\ &= -\frac{1}{n} \tilde{S} V_E + \frac{1}{n} V_E \tilde{\text{Ric}}(N, N) + nH\tilde{\nabla}_N V_E + |A|^2 V_E + \tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E \\ &= -\frac{1}{n} (n+1) \tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E + \frac{1}{n} V_E \tilde{\text{Ric}}(N, N) + nH\tilde{\nabla}_N V_E + |A|^2 V_E + \tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E \\ &= |A|^2 V_E + nH\tilde{\nabla}_N V_E \end{aligned}$$

Porém, um Teorema devido a Escobar (1990) [14] (Teorema 2.1) classifica as métricas conformes a bola Euclidiana que possuem curvatura escalar  $\tilde{S}$  constante, sendo essencialmente as formas espaciais, voltando assim ao caso já demonstrado por Wang-Xia (2019) [44]. Disso, concluímos que a métrica  $\tilde{g}$  conforme a métrica Euclidiana não poder possuir curvatura escalar  $\tilde{S}$  constante.

Uma outra possibilidade é buscar por métricas que satisfaçam a identidade,  $\forall p \in M$  e  $X, Y \in T_p M$

$$\tilde{\Delta} V_E \tilde{g}(X, Y)(p) - \tilde{\nabla}^2 V_E(X, Y)(p) + V_E \tilde{\text{Ric}}(X, Y)(p) = 0,$$

pois, aplicando em  $N$  temos

$$\tilde{\Delta} V_E - \tilde{\nabla}^2 V_E(N, N) + V_E \tilde{\text{Ric}}(N, N) = 0, \quad (6.3)$$

o que implica que, usando a definição de operador estabilidade  $L$  (ver (2.21)) e a Equação (6.3)

$$\begin{aligned} LV_E &= \tilde{\Delta} V_E - \tilde{\nabla}^2 V_E(N, N) + nH\tilde{\nabla}_N V_E + |A|^2 V_E + \tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E \\ &= -\tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E + nH\tilde{\nabla}_N V_E + |A|^2 V_E + \tilde{\text{Ric}}(N, N)V_E \\ &= |A|^2 V_E + nH\tilde{\nabla}_N V_E \end{aligned}$$

Assumindo que a métrica satisfaça (6.3) sintetizamos os principais resultados para a função teste  $\varphi_E$  na seguinte proposição

**Lema 7.** (Assumindo (6.3) apenas para determinar  $LV_E$ ). Considere a imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  ortogonalmente. Para cada  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  considere a função  $\varphi_E : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi_E(x) = nV_E + nH\tilde{g}(X_E, N). \quad (6.4)$$

Então  $\varphi_E$  satisfaz

$$\int_{\Sigma} \varphi_E d\tilde{a} = 0, \quad (6.5)$$

$$\tilde{\nabla}_{\nu} \varphi_E - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \varphi_E = 0. \quad (6.6)$$

Se, além disso,  $\Sigma^n$  possui curvatura média  $H$  constante, então  $\varphi_E$  satisfaz

$$L\varphi_E = (|A|^2 - nH^2) V_E \quad (6.7)$$

*Demonstração.* As identidades (6.5) e (6.6) seguem diretamente do Lema 5 e Lema 6, respectivamente. Se a curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é constante, então (6.7) segue de (6.3) e da Proposição 5.1.1 pois ,

$$\begin{aligned} L\varphi_E &= nLV_E + nHL\tilde{g}(X_E, N) \\ L\varphi_E &= n \left( |A|^2 V_E + nH\tilde{\nabla}_N V_E \right) + nH \left( -nHV_E - n\tilde{\nabla}_N V_E \right) \\ L\varphi_E &= n \left( |A|^2 - nH^2 \right) V_E. \end{aligned}$$

□

**Teorema 12.** Seja  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma hipersuperfície mínima de bordo livre estável com a métrica  $\tilde{g}$  satisfazendo

$$\tilde{\Delta} V_E \tilde{g} - \tilde{\nabla}^2 V_E + V_E \tilde{\text{Ric}} = 0. \quad (6.8)$$

Então,  $\Sigma^n$  deve ser totalmente geodésica.

*Demonstração.* Da segunda variação do funcional área (Equação (2.17)) para uma hipersuperfície mínima de bordo livre, tomando uma função teste  $\varphi_E = V_E$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(\varphi_E, \varphi_E) &= \int_{\Sigma} -\varphi_E (\Delta_{\Sigma} \varphi_E + (\text{Ric}(N) + |A|^2) \varphi_E) d\tilde{a} + \int_{\partial \Sigma} \varphi_E ((\varphi_E)_{\nu} - q\varphi_E) d\tilde{s} \geq 0 \\ &= - \int_{\Sigma} n^2 V_E^2 |A|^2 d\tilde{a} \geq 0 \\ &= - \int_{\Sigma} n^2 \left( e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, E \rangle + \langle X_E, Dh \rangle \right)^2 |A|^2 d\tilde{a} \geq 0 \\ &= - \int_{\Sigma} n^2 e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, E \rangle^2 \left( 1 + u'(|x|^2) (|x|^2 - r_{\mathbb{R}}^2) \right)^2 |A|^2 d\tilde{a} \geq 0, \end{aligned}$$

de onde concluímos que  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica. □

**Observação 6.1.2.** Ainda não temos exemplos de tais métricas.

## 6.2 Estabilidade de superfícies CMC capilar

Seja  $E$  um vetor constante em  $\mathbb{R}^3$ . Considere o campo de Killing  $V$  em  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$V = x \wedge E,$$

que é induzido por rotações de  $\mathbb{R}^3$  em torno de  $E$ . Considerando a métrica conforme  $\tilde{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$ , como  $V$  é Killing em  $\mathbb{R}^3$  (demonstração pode ser consultada em Pereira (2018) [36]) segue que  $\mathcal{L}_V \tilde{g} = 2\sigma \tilde{g}$  para  $\sigma = f + V(h)$ . Mais precisamente

$$\sigma = f + V(u(x)) = \langle \nabla h, V \rangle = 2u'(|x|^2) \langle x, V \rangle = 2u'(|x|^2) \langle x, x \wedge E \rangle = 0,$$

isto é,  $V$  também é um campo de Killing na métrica  $\tilde{g}$ . Definimos agora a função  $v : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v(x) = \tilde{g}(V, N), \quad (6.9)$$

onde  $N$  é o campo normal unitário de  $\Sigma^2$ .

**Proposição 6.2.1.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^2 \rightarrow B_{R\mathbb{R}}^3 \subset (\mathbb{B}_a^3, \tilde{g})$  tal que  $\Sigma^2$  intersecta  $\partial B_{r\mathbb{R}}$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$ . Seja a função  $v(x) = \tilde{g}(x \wedge E, N)$  como definida em (6.9). Então:*

$$Lv = 0, \text{ em } \Sigma, \quad (6.10)$$

e

$$\tilde{\nabla} v = qv, \text{ em } \partial\Sigma, \quad (6.11)$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} A^{\partial B_{r\mathbb{R}}}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta A(\nu, \nu).$$

*Demonstração.* Pela Proposição 2.4 a função  $v$  satisfaz

$$\Delta_{\Sigma} v + \left( \tilde{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2 \right) v = 0,$$

provando assim (6.10). Para a identidade (6.11) consultar Apêndice D.  $\square$

Em vista disso, é possível adaptar as ideias de Ros-Vergasta (1995) [39] e provar que se uma superfície  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r\mathbb{R}}^3 \subset (\mathbb{B}^3, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  capilar é estável e possui gênero zero, então é rotacionalmente simétrica.

**Teorema 13.** *Seja  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r\mathbb{R}} \subset (\mathbb{B}^3, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma superfície CMC de bordo livre estável possuindo gênero 0. Então  $\Sigma^2$  é uma superfície de rotação com eixo de rotação passando pela origem.*

*Demonstração.* Basicamente, a ideia é tomar um ponto  $p_0 \in \Sigma^2$  de modo que  $\tilde{g}(x, x)^2$  atinge um mínimo, definir a função  $\beta(p) = \tilde{g}(x \wedge N(p), N_0)$ , onde  $N_0 = N(p_0)$  e  $\wedge$  denota o produto vetorial. Notar que  $\beta(p_0) = 0$  e  $\tilde{\nabla}\beta(p_0) = 0$  e que  $\beta$  é Steklov-Jacobi

$$\begin{cases} \Delta\beta + (n\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)\beta = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \tilde{\nabla}_\nu\beta = q\beta & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (6.12)$$

Dai, vemos que  $\beta^{-1}(0)$  é um conjunto nodal. A continuação da prova é verificar que  $\beta \equiv 0$ . Usando o Teorema de Gauss-Bonnet e o fato que o gênero de  $\Sigma^2$  é igual a zero conclui-se que  $\Sigma^2 \setminus \beta^{-1}(0)$  possui pelo menos três componentes conexas. Assim definimos a função  $\tilde{\beta} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \beta & \text{em } \Sigma_1, \\ a\beta & \text{em } \Sigma_2, \\ 0 & \text{em } \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2). \end{cases} \quad (6.13)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  é tal que  $\int_\Sigma \tilde{\beta} dA = 0$ . Portanto vemos que  $S(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}) = 0$ , como  $\Sigma^2$  é estável, segue analogamente ao Lema 1 de Ros-Vergasta (1995) [39] que que  $\tilde{\beta}N$  é um campo de Jacobi e portanto

$$\Delta\tilde{\beta} + (n\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)\tilde{\beta} = \text{const.} \quad (6.14)$$

como  $\tilde{\beta}$  se anula fora de  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , segue do Teorema da Continuação Única para equações elípticas que  $\tilde{\beta} \equiv 0$ . Consequentemente  $\beta \equiv 0$ .  $\square$

## Capítulo 7

# Índice de Morse de hipersuperfícies mínimas de bordo livre em formas espaciais

Neste Capítulo investigaremos o índice de Morse de superfícies mínimas de bordo livre nas formas espaciais  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ . Em seus trabalhos Fraser-Schoen (2016) [15] obtiveram uma limitação inferior para o índice de Morse de uma hipersuperfície (mais genericamente subvariedade) mínima de bordo livre em  $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Teorema 7.0.1** (Fraser-Schoen [15]). *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície mínima de bordo livre em  $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  que não é o totalmente geodésica. Então  $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 1$ .*

Esse limitante, no entanto, não é ótimo, como mostra o seguinte Teorema obtido independentemente por Tran (2020) [43], Smith-Zhou (2019) [41] e Devyver (2019) [12].

**Teorema 7.0.2** (Tran [43], Smith-Zhou, [41], Devyver [12]). *Toda superfície mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária  $\mathbb{B}^3$  ou é o disco equatorial passando pela origem (neste caso possui índice de Morse igual a 1) ou possui índice de Morse pelo menos 4. Além disso, o índice de Morse do Catenóide Crítico é 4, portanto, o limitante inferior é atingido.*

A seguinte Proposição generaliza a Proposição 3.1 de Fraser-Schoen (2016) [15] e o Lema 2.7 de Tran (2020) [43].

**Lema 8.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$  uma imersão mínima de bordo livre na bola Euclidiana unitária. Fixe um vetor constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  e defina  $N_E := \langle E, N \rangle$ . Então para toda função  $u \in \mathcal{C}(\Sigma)^\infty$  tal que  $Lu = 0$  vale*

$$Q(u, N_E) = -n \int_{\Sigma} u N_E da,$$

em particular

$$Q(N_E, N_E) = -n \int_{\Sigma} N_E^2 da. \tag{7.1}$$

*Demonstração.* Considere o campo  $X_E = \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2}(1 + |x|^2) E$  e faça  $\varphi_E = \langle X_E, N \rangle$ . O campo  $X_E$  é Killing conforme com fator conforme  $f = \langle E, x \rangle$ , além disso

1.  $L\varphi_E = -n\langle E, N \rangle$ ;
2.  $\varphi_E|_{\partial\Sigma} = -\langle E, N \rangle$ ;
3.  $\frac{\partial\varphi_E}{\partial\nu} = \varphi_E$ .

Usando  $u$  e  $\varphi_E$  na forma quadrática  $Q$  temos

$$\begin{aligned} Q(u, \varphi_E) &= - \int_{\partial\Sigma} N_E \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \right) ds \\ &= \int_{\Sigma} N_E L u da - \int_{\partial\Sigma} N_E \left( \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \right) ds \\ &= -Q(u, N_E). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Q(u, \varphi_E) &= S(\varphi_E, u) \\ &= \int_{\Sigma} n N_E u da + \int_{\partial\Sigma} u \left( \frac{\partial\varphi_E}{\partial\nu} - \varphi_E \right) ds \\ &= \int_{\Sigma} n N_E u da. \end{aligned}$$

Portanto

$$S(u, N_E) = -n \int_{\Sigma} u N_E da.$$

□

O Lema 8 possui duas implicações importantes [que já são sabidas da literatura]. A primeira é que para cada vetor constante  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $N_E$  é uma direção negativa para a forma quadrática  $Q$  (Identidade (7.1)), onde  $N$  é o campo normal unitário de  $\Sigma^n$ . Em geral  $N_E$  não é uma autofunção. Considere uma base ortonormal  $\{E_i\}_{i=1}^3$  em  $\mathbb{R}^3$ , para cada  $i = 1, 2, 3$ ,  $N_{E_i}$  é Steklov-Jacobi com autovalores  $\delta_i(L_J)$  menores do que 1 para o Catenóide Crítico, formando uma base de direções negativas. Já no caso do disco equatorial  $N_E$  é constante e está associada ao autovalor 0.

Para as formas espaciais obtivemos o seguinte resultado.

**Teorema 14.** *Seja  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r\mathbb{R}}^3 \subset M_c^3$ , onde  $M_c^3 = \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ , uma superfície mínima de bordo livre não totalmente geodésica. Então  $\text{Ind}(\Sigma) \geq 4$ .*

*Demonstração.* Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , considere o campo de Killing conforme  $X_{E_i} = \langle x, E_i \rangle x - \frac{1}{2}(1 + |x|^2) E_i$ , onde  $\{E_i\}_{i=1}^3$  uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$ . Definimos, assim,  $V_i := V_{E_i} \forall i = 1, 2, 3$  como sendo  $\mathcal{L}_{X_{E_i}} \tilde{g} = 2V_{E_i} \tilde{g}$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Definimos também  $V = \text{span}(V_1, V_2, V_3, V_0)$ , onde  $V_0$  é o fator conforme do campo posição. Observe

que cada  $V_i$  é uma autofunção de Steklov (Proposição 2.2.4 para o caso mínimo combinado com o Lema 6) associada ao autovalor  $A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \in \{1, \coth r_{\mathbb{R}}, \cot r_{\mathbb{R}}\}$  e  $V_0$  é uma autofunção associada ao autovalor  $-cr_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \in \{0, \tanh r_{\mathbb{R}}, -\tan r_{\mathbb{R}}\}$ , (consultar Apêndice C). Além disso, como  $\Sigma^2$  não é totalmente geodésica,  $\dim V = 4$ .

Para toda  $u \in V$  não identicamente nula, existe um vetor constante  $E \in \mathbb{R}^3$  e um escalar  $d$ , com  $(|E|^2 + d > 0)$ , tal que

$$u = V_E + dV_0.$$

Tomando uma função  $u \in V$  e usando a desigualdade da estabilidade temos

$$\begin{aligned} Q(u, u) &= \int_{\Sigma} -uLud\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} u \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} u \right) d\tilde{s} \\ &= - \int_{\Sigma} V_i^2 |A|^2 d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} dV_0 \left( -cr_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} dV_0 - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} dV_0 \right) d\tilde{s} \\ &= - \int_{\Sigma} V_i^2 |A|^2 d\tilde{a} - \int_{\partial\Sigma} \left( cr_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} + A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \right) d^2V_0^2 d\tilde{s} < 0, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado.  $\square$

**Teorema 15.** *Seja  $\Sigma^2 \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^3 \subset M_c^3$ , onde  $M_c^3 = \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$  ou  $\mathbb{S}^3$ , uma superfície mínima de bordo livre com índice de Morse igual a 4. Então o primeiro autovalor de Steklov de  $\Sigma^2$ , denotado por  $\delta_1(\Sigma^2)$  é igual a  $A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \in \{1, \coth r_{\mathbb{R}}, \cot r_{\mathbb{R}}\}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente observamos que  $\Sigma^2$  não é totalmente geodésica, uma vez que  $\text{Ind}(\Sigma) = 4$  pelo Teorema 14.

Suponha, por contradição, que o primeiro autovalor de Steklov, denotado por  $\xi$ , satisfaça, por exemplo,  $\xi < A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}$  e que  $u$  seja a autofunção associada a  $\xi$ , ou seja

$$\begin{aligned} \Delta u + ncu &= 0, \quad \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \xi u, \quad \text{em } \partial\Sigma. \end{aligned}$$

Seja  $\{E_i\}_{i=1}^3$  uma base ortogonal de  $M_c$  e  $V = \text{span}(u, V_1, V_2, V_3, V_0)$ , onde  $V_0$  é o fator conforme do campo posição. Observe que cada  $V_i$  é uma autofunção de Steklov associada ao autovalor  $A^{\partial B} \in \{1, \coth r_{\mathbb{R}}, \cot r_{\mathbb{R}}\}$  e  $V_0$  é uma autofunção associada ao autovalor  $-cr_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \in \{0, \tanh r_{\mathbb{R}}, -\tan r_{\mathbb{R}}\}$ . Além disso, como  $\Sigma^2$  não é totalmente geodésica,  $\dim V = 5$

Em seguida, mostraremos que  $Q(\cdot, \cdot)$  é negativa definida em  $V$ . Para todo  $v \in V$  não identicamente nulo, existe um vetor constante  $E \in \mathbb{R}^3$  e escalares  $c, d$  ( $|E|^2 + c + d > 0$ ) tal que

$$v = V_E + cu + dV_0.$$

Calculamos,

$$\begin{aligned}
Q(v, v) &= \int_{\Sigma} -vLvd\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial v}{\partial \nu} + A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} v \right) v d\tilde{s} \\
&= \int_{\Sigma} -v^2 |A|^2 d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} \left( A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E + c\xi u - dcr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} V_0 - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} (V_E + cu + dV_0) \right) v d\tilde{s} \\
&= \int_{\Sigma} -v^2 |A|^2 d\tilde{a} + \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} \left( A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E + c\xi u - dcr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} V_0 - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} cu - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} dV_0 \right) v d\tilde{s} \\
&= \int_{\Sigma} -v^2 |A|^2 d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left( c\xi u - dcr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} V_0 - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} cu - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} dV_0 \right) v d\tilde{s} \\
&= \int_{\Sigma} -v^2 |A|^2 d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} \left( (\xi - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) cu + (-cr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) dV_0 \right) v d\tilde{s} \\
&= \int_{\Sigma} -v^2 |A|^2 d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} (\xi - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) cu V_E + (-cr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) dV_0 V_E d\tilde{s} \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} (\xi - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) c^2 u^2 + (-cr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) cdV_0 u d\tilde{s} \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} (\xi - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) cd u V_0 + (-cr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) d^2 V_0^2 d\tilde{s} \\
&= \int_{\Sigma} -v^2 |A|^2 d\tilde{a} + \int_{\partial\Sigma} (\xi - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) c^2 u^2 + (-cr_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} - A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}) d^2 V_0^2 d\tilde{s} \\
&< 0,
\end{aligned}$$

completando a demonstração. □

## Capítulo 8

# Classificação via condição de gap na segunda forma fundamental

No presente Capítulo desta tese, classificaremos as hipersuperfícies totalmente geodésicas como as únicas hipersuperfícies mínimas que satisfazem uma certa condição sobre o quadrado da segunda forma fundamental quando intersectam a bola Euclidiana unitária  $B^{n+1}(0, 1) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , Teorema 16, bem como quando intersecam, também em um ângulo constante, a bola Euclidiana de raio  $r_{\mathbb{R}}$ , munida de uma métrica conforme a métrica Euclidiana, a saber,  $B^{n+1}(0, r_{\mathbb{R}}) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g} = e^{2u} \langle \cdot, \cdot \rangle)$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , onde  $u$  é uma função radialmente simétrica,  $u(x) = u(|x|^2)$ , Teorema 17.

### 8.1 Classificação de hipersuperfícies mínimas capilares na bola Euclidiana unitária

Para o ambiente Euclidiano  $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  denotaremos por  $\nabla$  e  $\Delta$  a derivada covariante e o operador Laplaciano, respectivamente, com  $\nabla = D$  sendo a derivada covariante usual em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotaremos por  $\nabla^{\Sigma}$  e  $\Delta_{\Sigma}$  a derivada covariante e o operador Laplaciano, respectivamente sobre a hipersuperfície  $\Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\nabla^{\Sigma} = \nabla^{\top}$  e  $\Delta_{\Sigma} f = \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla^{\Sigma} f)$  para  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma)$ .

Apresentaremos na Proposição a seguir algumas resultados que serão usados recorrentemente.

**Proposição 8.1.1.** *Sejam  $\Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  um vetor constante,  $x$  e  $N$  o campo posição e o campo normal unitário da imersão  $\Sigma^n$ , respectivamente. As seguintes identidades são válidas*

$$i) \quad \nabla^{\Sigma} \frac{|x|^2}{2} = x^{\top};$$

- ii)  $\nabla^\Sigma \langle E, x \rangle = E^\top$ ;
- iii)  $\Delta_\Sigma \frac{|x|^2}{2} = n + nH \langle x, N \rangle$ ;
- iv)  $\Delta_\Sigma \langle E, x \rangle = nH \langle E, N \rangle$ ;
- v)  $\Delta_\Sigma \langle E, N \rangle = \langle E, \nabla H \rangle - |A|^2 \langle E, N \rangle$ ;
- vi)  $\Delta_\Sigma \langle x, N \rangle = \langle x, \nabla H \rangle - nH - |A|^2 \langle x, N \rangle$ .

*Demonstração.* Consultar Wang-Xia (2019) [44] Proposição 3.4.  $\square$

A Proposição que apresentaremos adiante é conhecida para hipersuperfícies de curvatura média constante possuindo bordo livre, ou seja,  $\Sigma^n$  intersecta o bordo de um domínio  $\Omega^{n+1}$  ortogonalmente ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), a qual foi demonstrada por Melo (2021) [29]. Nesta tese, daremos a versão capilar deste resultado, ou seja quando  $\Sigma^n$  intersecta o bordo de um domínio  $\Omega^{n+1}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Este resultado será utilizada para demonstrar o Teorema 14.

**Proposição 1.6.1.** (Melo (2021) [29]-Estendido para versão capilar). *Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\partial\Omega = F^{-1}(1)$ , onde  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação diferenciável e 1 é um valor regular de  $F$ . Se  $\Sigma^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão CMC intersectando  $\Omega$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , com  $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$  e  $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ , então*

$$\text{sen } \theta \int_{\partial\Sigma} |\nabla F| \varphi ds = \int_\Sigma \varphi \Delta_\Sigma F da + \int_\Sigma (1 - F) \Delta_\Sigma \varphi da. \quad (8.1)$$

*Demonstração.* Considerando  $\varphi$  e  $F$  como nas hipóteses do Teorema, então

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \varphi \langle \nabla^\Sigma F, \nu \rangle ds &= \int_\Sigma \text{div}_\Sigma(\varphi \nabla^\Sigma F) da \\ &= \int_\Sigma \varphi \Delta_\Sigma F + \langle \nabla^\Sigma \varphi, \nabla^\Sigma F \rangle da, \end{aligned} \quad (8.2)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \langle \nabla^\Sigma \varphi, \nu \rangle ds &= \int_\Sigma \text{div}_\Sigma(F \nabla^\Sigma \varphi) da \\ \int_\Sigma \Delta_\Sigma \varphi ds &= \int_\Sigma F \Delta_\Sigma \varphi + \langle \nabla^\Sigma F, \nabla^\Sigma \varphi \rangle da. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Subtraindo (8.2) de (8.3) resulta

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \langle \nabla^\Sigma F, \nu \rangle ds = \int_\Sigma \varphi \Delta_\Sigma F da + \int_\Sigma (1 - F) \Delta_\Sigma \varphi da.$$

No bordo de  $\Sigma^n$ , o integrando  $\varphi \langle \nabla F, \nu \rangle$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \varphi \langle \nabla^\Sigma F, \nu \rangle &= \varphi \langle \nabla F - \langle \nabla F, N \rangle N, \nu \rangle \\ &= \varphi \langle \nabla F, \nu \rangle \\ &= \varphi \langle -|\nabla F| \bar{N}, \nu \rangle \\ &= \text{sen } \theta \varphi |\nabla F|, \quad \text{onde foi usado (2.13),} \end{aligned}$$

finalizando, assim, a demonstração da Proposição 1.6.1.  $\square$

Uma consequência interessante da Proposição 1.6.1 é uma recuperação da formula de Minkowski apresentada em Wang-Xia (2019) [44], para hipersuperfícies de curvatura média constante que intersectam a bola unitária Euclidiana em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , a qual é dada por

$$\int_{\Sigma} \langle x + \cos \theta N, E \rangle da = - \int_{\Sigma} H \langle X_E, N \rangle da. \quad (8.4)$$

onde  $X_E = \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)E$ , e  $E \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um vetor fixado. Recomendamos rever a construção de (8.4) na introdução do Capítulo 5.

*Demonstração de (8.4).* Substituindo  $\varphi = \langle E, x \rangle$  e  $F = |x|^2$  (dessa forma, observe que  $F^{-1} = \partial B^{n+1}(0, 1)$ ) na Proposição 8.1, resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta \int_{\partial \Sigma} |\nabla |x|^2| \langle E, x \rangle ds &= \int_{\Sigma} \langle E, x \rangle \Delta_{\Sigma} |x|^2 da + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \Delta_{\Sigma} \langle E, x \rangle da \\ \operatorname{sen} \theta \int_{\partial \Sigma} 2 \langle E, x \rangle ds &= \int_{\Sigma} \langle E, x \rangle (2(n + nH \langle x, N \rangle)) da \\ &\quad + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) (nH \langle E, N \rangle) da \\ \operatorname{sen} \theta \int_{\partial \Sigma} \langle E, x \rangle ds &= \int_{\Sigma} n \langle E, x \rangle + nH \langle X_E, N \rangle + \langle E, N \rangle nH da \\ \operatorname{sen} \theta \int_{\partial \Sigma} \langle E, x \rangle ds - \langle E^{\top}, \nu \rangle ds &= \int_{\Sigma} n \langle E, x \rangle + nH \langle X_E, N \rangle da, \end{aligned}$$

onde utilizamos a Proposição 8.1.1 itens *iii*) e *iv*). Das Equações 2.13 e 2.14 podemos escrever

$$\operatorname{sen} \theta (\langle E, x \rangle ds - \langle E^{\top}, \nu \rangle) = - \cos \theta \langle E, \bar{\nu} \rangle,$$

portanto, podemos escrever

$$- \cos \theta \int_{\partial \Sigma} \langle E, \bar{\nu} \rangle ds = \int_{\Sigma} n \langle E, x \rangle + nH \langle X_E, N \rangle da.$$

A Identidade 3.8 de Wang-Xia (2019) [44] implica que

$$n \int_{\Sigma} \langle E, N \rangle da = \int_{\partial \Sigma} \langle \bar{\nu}, E \rangle ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} - \cos \theta \int_{\partial \Sigma} \langle E, \bar{\nu} \rangle ds &= \int_{\Sigma} n \langle E, x \rangle + nH \langle X_E, N \rangle da \\ - \cos \theta n \int_{\Sigma} \langle E, N \rangle da &= \int_{\Sigma} n \langle E, x \rangle + nH \langle X_E, N \rangle da, \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\Sigma} \langle E, x + \cos \theta N \rangle da = - \int_{\Sigma} H \langle X_E, N \rangle da,$$

finalizando a demonstração de (8.4).  $\square$

No Teorema a seguir exploraremos as hipersuperfícies mínimas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que intersectam a bola Euclidiana unitária  $B^{n+1}(0, 1) \subset (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , as quais também chamaremos simplesmente de hipersuperfícies mínimas capilares. Mais precisamente classificaremos as hipersuperfícies totalmente geodésicas como sendo as únicas hipersuperfícies mínimas capilares que satisfazem uma certa condição sobre o quadrado da segunda forma fundamental.

**Teorema 16.** *Seja  $\Sigma^n \rightarrow B^{n+1}(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão mínima tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  em um ângulo constante  $\theta$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ . Suponha que para todo  $x \in \Sigma^n$  vale*

$$\left( \frac{n - |A|^2}{n} \right) \langle N, x \rangle^2 \geq \cos^2 \theta,$$

onde  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$ , então  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica.

*Demonstração.* Tomando  $F = |x|^2$  e  $\varphi = \langle N, x \rangle^2 - \cos^2 \theta$  na Proposição 8.1, observando que  $\bar{N} = -x$  em  $\partial B^{n+1}(0, 1)$  e  $\langle N, x \rangle = \cos \theta$  em  $\partial \Sigma$  (por (2.13)), assim,  $\varphi|_{\partial \Sigma} \equiv 0$ , decorre que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} (\langle N, x \rangle^2 - \cos^2 \theta) \Delta_{\Sigma} |x|^2 da + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \Delta_{\Sigma} (\langle N, x \rangle^2 - \cos^2 \theta) da \\ &= \int_{\Sigma} (\langle N, x \rangle^2 - \cos^2 \theta) 2n da + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) (-2\langle N, x \rangle^2 |A|^2 + 2|\nabla^{\Sigma} \langle N, x \rangle|) da \\ &= \int_{\Sigma} n\langle N, x \rangle^2 - n\cos^2 \theta - |A|^2 \langle N, x \rangle^2 + |x|^2 |A|^2 \langle N, x \rangle^2 + (1 - |x|^2) |\nabla^{\Sigma} \varphi|^2 da, \end{aligned}$$

onde usamos a Proposição 8.1.1 itens *iii*) e *vi*). Resulta da última equação que

$$0 \geq \int_{\Sigma} n\langle N, x \rangle^2 - n\cos^2 \theta - |A|^2 \langle N, x \rangle^2 + (1 - |x|^2) |\nabla^{\Sigma} \varphi|^2 da.$$

Como por hipótese  $\left( \frac{n - |A|^2}{n} \right) \langle N, x \rangle^2 \geq \cos^2 \theta$  para todo  $x \in \Sigma^n$ , isso implica, por tanto, que  $n\langle N, x \rangle^2 - n\cos^2 \theta - |A|^2 \langle N, x \rangle^2 \geq 0$ , dessa maneira podemos obter

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) |\nabla^{\Sigma} \varphi|^2 da \\ 0 &\geq \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) |\nabla^{\Sigma} \varphi|^2 da \geq 0, \end{aligned}$$

o que implica que  $\nabla^{\Sigma} \varphi \equiv 0$ , ou seja  $\varphi$  é constante sobre  $\Sigma^n$ . Como  $\varphi = 0$  em  $\partial \Sigma$  então  $\langle N, x \rangle^2 - \cos^2 \theta = 0$  em  $\Sigma^n$ , mas como sabemos também que  $\langle N, x \rangle = \cos \theta$  em  $\partial \Sigma$  e  $\Sigma^n$  é conexa então  $\langle N, x \rangle = \cos \theta$  em  $\Sigma^n$ .

Agora, se  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  a prova segue diretamente do item *vi*) da Proposição 8.1.1, pois

$$\begin{aligned} \Delta \langle N, x \rangle &= -|A|^2 \langle N, x \rangle \\ 0 &= |A|^2 \cos \theta, \end{aligned}$$

o que implica que  $A \equiv 0$ .

Quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  temos que a  $\langle N, x \rangle$  é identicamente nula, o que implica  $\Sigma^n$  ser um cone, por regularidade,  $\Sigma^n$  deve ser totalmente geodésica.  $\square$

## 8.2 Classificação de hipersuperfícies mínimas capilares em formas espaciais

Nesta seção apresentaremos uma versão do Teorema 14 para o espaço Hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  (para o ambiente Esférico  $\mathbb{S}^{n+1}$  a demonstração é semelhante). A técnica utilizada na demonstração será de diferente do caso Euclidiano, não fazendo uso da Proposição 1.6.1, usaremos apenas uma identidade de Green.

Para o espaço Hiperbólico utilizaremos o modelo de disco de Poincaré. Consideremos  $u : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(t) = \ln\left(\frac{2}{1-t}\right)$ . Assim,  $(\mathbb{B}_1^{n+1}, \tilde{g})$  é o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  modelado no disco de Poincaré.

Para o ambiente Euclidiano  $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  denotaremos por  $\nabla$  e  $\Delta$  a derivada covariante e o operador Laplaciano, respectivamente, com  $\nabla = D$  sendo a derivada covariante usual em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotaremos por  $\nabla^\Sigma$  e  $\Delta_\Sigma$  a derivada covariante e o operador Laplaciano, respectivamente sobre a hipersuperfície  $\Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\nabla^\Sigma = \nabla^\top$  e  $\Delta_\Sigma f = \operatorname{div}_\Sigma(\nabla^\Sigma f)$  para  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ . Apresentaremos na Proposição a seguir algumas resultados que serão usados recorrentemente.

**Teorema 17.** (Teorema 16 para formas espaciais). *Seja  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset M_c^{n+1}$ , onde,  $M_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  ou  $\mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão mínima tal que  $\partial\Sigma$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  em um ângulo constante  $\theta$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ . Suponha que para todo  $x \in \Sigma^n$  vale*

$$(nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x) - c_0|A|^2) \tilde{g}(x, N)^2 \geq \cos^2 \theta (nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x)), \quad (8.5)$$

onde  $N(x)$  denota o vetor normal unitário em um ponto  $x \in \Sigma^n$ ,  $c$  é curvatura seccional de  $M_c^{n+1}$ ,  $c_0 = e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2$ ,  $V_0$  é o fator conforme do campo posição  $x$ ,  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$ . Então  $\Sigma^n$  é totalmente geodésica.

*Demonstração.* Pela Identidade de Green temos que

$$\int_\Sigma f \Delta g - g \Delta f d\tilde{a} = \int_{\partial\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial g}{\partial \nu} d\tilde{s}, \quad (8.6)$$

para toda  $f, g \in \mathcal{C}(\Sigma)^\infty$ . Considere  $f = \tilde{g}(x, N)^2 - \cos^2 \theta$  e  $g = e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 - \tilde{g}(x, x)$ . Observe que (Ver Apêndice C)

$$\begin{aligned} f|_\Sigma &= 0 \\ g|_\Sigma &= 0 \\ \Delta f &= -2|A|^2 \tilde{g}(x, N)^2 + 2|\nabla \tilde{g}(x, N)|^2 \\ \Delta g &= -2(nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x)) \end{aligned}$$

Substituindo na Identidade de Green (8.6) temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Sigma} (\tilde{g}(x, N)^2 - \cos^2 \theta) [-2(nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x))] d\tilde{a} \\
&\quad - \int_{\Sigma} (e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 - \tilde{g}(x, x)) [-2|A|^2 \tilde{g}(x, N)^2 + 2|\nabla \tilde{g}(x, N)|^2] d\tilde{a} \\
0 &= \int_{\Sigma} (\tilde{g}(x, N)^2 - \cos^2 \theta) [nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x)] d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\Sigma} -e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 |A|^2 \tilde{g}(x, N)^2 + \tilde{g}(x, x) |A|^2 \tilde{g}(x, N)^2 + (e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 - \tilde{g}(x, x)) |\nabla \tilde{g}(x, N)|^2 d\tilde{a} \\
0 &\geq \int_{\Sigma} (\tilde{g}(x, N)^2 - \cos^2 \theta) [nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x)] d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\Sigma} -e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 |A|^2 \tilde{g}(x, N)^2 + (e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 - \tilde{g}(x, x)) |\nabla \tilde{g}(x, N)|^2 d\tilde{a} \\
0 &\geq \int_{\Sigma} (nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x) - e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 |A|^2) \tilde{g}(x, N)^2 - \cos^2 \theta [nV_0^2 - c\tilde{g}(x, x)] d\tilde{a} \\
&\quad + \int_{\Sigma} (e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} r_{\mathbb{R}}^2 - \tilde{g}(x, x)) |\nabla \tilde{g}(x, N)|^2 d\tilde{a},
\end{aligned}$$

e o resultado segue como no Teorema 14. □

# Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, Deivid Santos de. *Unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola*. 2020. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió, 2020.
- [2] AMBROZIO, Lucas; NUNES, Ivaldo. *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*. *Communications in Analysis and Geometry*, v. 29, n. 2, p. 283-292, 2021.
- [3] BARBOSA, Ezequiel; SANTANA, Farley; UPADHYAY, Abhitosh. *On stable CMC free-boundary surfaces in a strictly convex domain of a bi-invariant Lie group*. *International Journal of Mathematics*, v. 31, n. 11, p. 2050086, 2020.
- [4] BARBOSA, Joao Lucas; DO CARMO, Manfredo. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. In: Manfredo P. do Carmo. *Selected Papers*. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 221-235, 1984.
- [5] CAO, Huai-Dong; LI, Haizhong. *A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension*. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 46, p. 879-889, 2013.
- [6] CARMO, Manfredo P. do. *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro, 2015.
- [7] CHENG, Shiu-Yuen. *Eigenfunctions and nodal sets*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 51, n. 1, p. 43-55, 1976.
- [8] CHENG, Xu; MEJIA, Tito; ZHOU, Detang. *Stability and compactness for complete  $f$ -minimal surfaces*. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 367, n. 6, p. 4041-4059, 2015.
- [9] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI II, William P. *Smooth compactness of self-shrinkers*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 87, n. 2, p. 463-475, 2012.
- [10] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. *Generic mean curvature flow I; generic singularities*. *Annals of mathematics*, p. 755-833, 2012.
- [11] CORRO, Armando V.; SOUZA, Marcelo A.; PINA, Romildo. *Classes of Weingarten Surfaces in  $S^2 \times R$* . *Houston Journal of Mathematics*, v. 46, n. 3, p. 651-664, 2020.

- [12] DEVYVER, Baptiste. *Index of the critical catenoid*. Geometriae Dedicata, v. 199, n. 1, p. 355-371, 2019.
- [13] DING, Qi; XIN, Y. L. *The rigidity theorems of self-shrinkers*. Transactions of the American Mathematical Society, v. 366, n. 10, p. 5067-5085, 2014.
- [14] ESCOBAR, José F. *Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 43, n. 7, p. 857-883, 1990.
- [15] FRASER, Ailana; SCHOEN, Richard. *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*. Inventiones mathematicae, v. 203, n. 3, p. 823-890, 2016.
- [16] FRANZ, Giada; TRINCA, Federico. *On the stability of minimal submanifolds in conformal spheres*. The Journal of Geometric Analysis, v. 33, n. 10, p. 335, 2023.
- [17] GROMOV, Mikhail. *Isoperimetry of waists and concentration of maps*. SIS-2003-246, 2002.
- [18] GUANG, Qiang. *Gap and rigidity theorems of  $\lambda$ -hypersurfaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 146, n. 10, p. 4459-4471, 2018.
- [19] HIEU, Doan O. Complete  $\lambda$ -subvariedades em espaços Gauss. arXiv preprint arXiv:2304.09710, 2023.
- [20] HUSSEY, Caleb. *Classification and analysis of mean curvature flow self-shrinkers*. arXiv preprint arXiv:1303.0354, 2013.
- [21] IMPERA, Debora. *Rigidity and gap results for low index properly immersed self-shrinkers in  $\mathbb{R}^{m+1}$* . Differential Geometry and its Applications, v. 64, p. 1-12, 2019.
- [22] JIANG, Xu-Yong; SUN, He-Jun; ZHAO, Peibiao. *Rigidity and gap results for the morse index of self-Shrinkers with any codimension*. Results in Mathematics, v. 74, p. 1-13, 2019.
- [23] LAWSON JR, H. Blaine; SIMONS, James. *On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry*. Annals of Mathematics, p. 427-450, 1973.
- [24] LE, Nam Q.; SESUM, Natasa. *Blow-up rate of the mean curvature during the mean curvature flow and a gap theorem for self-shrinkers*. arXiv preprint arXiv:1011.5245, 2010.
- [25] LI, Haizhong; XIONG, Changwei. *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in geodesic balls of hyperbolic space and hemisphere*. The Journal of Geometric Analysis, v. 28, n. 4, p. 3171-3182, 2018.

- [26] LI, Haizhong; XIONG, Changwei. *Stability of capillary hypersurfaces in a Euclidean ball*. Pacific Journal of Mathematics, v. 297, n. 1, p. 131-146, 2018.
- [27] LI, Haizhong; XIONG, Changwei. *Stability of capillary hypersurfaces in a manifold with density*. International Journal of Mathematics, v. 27, n. 08, p. 1650062, 2016.
- [28] SILVA, Lucas. *Capillary Immersions*. 2019. 69 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.
- [29] MELO, Rodrigo Fernandes de Moura. *Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns domínios euclidianos e outros tópicos*. 2019. 65 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió. UFAL. Salvador. Universidade Federal da Bahia, 2021.
- [30] MORGAN, Frank. *Geometric measure theory: a beginner's guide*. Academic press, 2016.
- [31] MORGAN, Frank. *Manifolds with density*. Notices of the AMS, v. 52, n. 8, p. 853-858, 2005.
- [32] J. Nitsche, *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rat. Mech. Anal., 89: 1-19, 1985.
- [33] SIMONS, James. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. Annals of Mathematics, p. 62-105, 1968.
- [34] SCHOEN, Richard. *Minimal submanifolds in higher codimension*. Mat. Contemp, v. 30, n. 169-199, p. 16, 2006.
- [35] NUNES, Ivaldo. *On stable constant mean curvature surfaces with free boundary*. Mathematische Zeitschrift, v. 287, n. 1, p. 473-479, 2017.
- [36] PEREIRA, Edno Alan. *Classificação de hipersuperfícies de fronteira livre em uma classe de domínios conformes à domínios euclidianos*. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2018.
- [37] R. Souam, *On stability of stationary hypersurfaces for the partitioning problem for balls in space forms*, Math. Z., 224(2): 195-208, 1997.
- [38] ROS, Antonio; SOUAM, Rabah. *On stability of capillary surfaces in a ball*. Pacific journal of mathematics, v. 178, n. 2, p. 345-361, 1997.
- [39] ROS, Antonio; VERGASTA, Enaldo. *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*. Geometriae Dedicata, v. 56, n. 1, p. 19-33, 1995.

- [40] ROSALES, César et al. *On the isoperimetric problem in Euclidean space with density*. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 31, n. 1, p. 27-46, 2008.
- [41] SMITH, Graham; ZHOU, Detang. *The Morse index of the critical catenoid*. *Geometriae Dedicata*, v. 201, n. 1, p. 13-19, 2019.
- [42] SOUAM, Rabah. *Stable constant mean curvature surfaces with free boundary in slabs*. *The Journal of Geometric Analysis*, p. 1-16, 2019.
- [43] TRAN, Hung. *Index characterization for free boundary minimal surfaces*. *Communications in Analysis and Geometry*, v. 28, n. 1, p. 189-222, 2020.
- [44] WANG, Guofang; XIA, Chao. *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*. *Mathematische Annalen*, v. 374, n. 3, p. 1845-1882, 2019.
- [45] WEI, Guoxin; PENG, Yejuan. *A note on rigidity theorem of  $\lambda$ -hypersurfaces*. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, v. 149, n. 6, p. 1595-1601, 2019.
- [46] ZHU, Shun-Hui. *The classification of complete locally conformally flat manifolds of nonnegative Ricci curvature*. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 163, n. 1, p. 189-199, 1994.

# Apêndice A

## Prova do Lema 3

**Lema 3.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow (B^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$  tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B^{n+1}$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$ . Seja  $X_E$  o campo de Killing conforme como definido em (5.1) então, ao longo de  $\partial\Sigma$  vale*

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, N) = q \tilde{g}(X_E, N),$$

onde

$$q = \frac{1}{\text{sen } \theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta A(\nu, \nu).$$

*Demonstração.* Primeiramente observemos que

$$A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}(Y, Z) = \frac{1 + 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}^2}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} \tilde{g}(Y, Z) = \frac{V_0}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} \tilde{g}(Y, Z), \quad (\text{A.1})$$

onde  $Y, Z \in \mathfrak{X}(\partial B_{r_{\mathbb{R}}})$ ,  $B_{r_{\mathbb{R}}}$  é bola conforme de raio Euclidiano  $r_{\mathbb{R}}$  e  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  está orientada na direção de  $\bar{N}$ . Justificando assim o abuso de notação  $A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} = \frac{V_0}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}$ . Lembrando que em  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  vale que  $\bar{N} = -\frac{1}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}x$  e usando a definição de segunda forma fundamental temos

$$\begin{aligned} A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}(Y, Z) &= -\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y \bar{N}, Z\right) \\ &= -\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y \left(-\frac{1}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}x\right), Z\right) \\ &= \frac{1}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_Y x, Z\right) \\ &= \frac{V_0}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} \tilde{g}(Y, Z). \end{aligned}$$

Agora determinemos  $\tilde{g}(X_E, N)$  restrita ao bordo de  $\Sigma^n$ .

$$\begin{aligned} \tilde{g}(X_E, N)|_{\partial\Sigma} &= \tilde{g}\left(e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E \right], N\right) \\ &= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}\left(r_{\mathbb{R}}^2 e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle \bar{N}, E \rangle \bar{N} - r_{\mathbb{R}}^2 E, N\right) \\ &= r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} [\tilde{g}(\bar{N}, E) \tilde{g}(\bar{N}, N) - \tilde{g}(E, N)] \\ &= r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} [\tilde{g}(\bar{N}, E) \cos \theta - \tilde{g}(E, N)] \\ &= r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(E, \cos \theta \bar{N} - N) \\ &= -\text{sen } \theta r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(E, \bar{\nu}). \end{aligned}$$

Devemos provar então que

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, N) = -q \operatorname{sen} \theta r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(E, \bar{\nu}).$$

Antes de seguir com os cálculos, recordemos de alguns resultados que serão necessários

1.  $\tilde{\nabla}_Y x = V_0 Y, \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$
2.  $Duh) = 2u'(|x|^2)x$
3.  $\tilde{\nabla}_Y Z = D_Y Z + Y(u)Z + Z(u)Y - \langle Y, Z \rangle Du, \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$
4.  $\tilde{\nabla} f = e^{-2u} Df \forall f \in C^\infty(M)$

Calculando a derivada de  $\tilde{g}(X_E, N)$  na direção de  $\nu$  temos

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, N) + \tilde{g}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu N)$$

Primeiramente calculemos  $\tilde{\nabla}_\nu X_E$

$$\begin{aligned} &= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left( \tilde{\nabla}_\nu \langle x, E \rangle x + \langle x, E \rangle \tilde{\nabla}_\nu x - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\nu (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E - r_{\mathbb{R}}^2 \tilde{\nabla}_\nu E \right) \\ &= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} (\langle \nu, E \rangle x + \langle x, E \rangle V_0 \nu - \langle x, \nu \rangle E - D_\nu E + \nu(u)E + E(u)\nu - \langle \nu, E \rangle Du) \\ &= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} (\langle \nu, E \rangle x + \langle x, E \rangle V_0 \nu - \langle x, \nu \rangle E - r_{\mathbb{R}}^2 2u'(|x|^2) (\langle \nu, x \rangle E + \langle E, x \rangle \nu - \langle \nu, E \rangle x)) \\ &= -r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} (\langle \nu, E \rangle \bar{N} + \langle \bar{N}, E \rangle V_0 \nu - \langle \bar{N}, \nu \rangle E - r_{\mathbb{R}}^2 2u'(|x|^2) (\langle \nu, \bar{N} \rangle E + \langle E, \bar{N} \rangle \nu - \langle \nu, E \rangle \bar{N})) \\ &= -r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} ([\langle \nu, E \rangle \bar{N} - \langle \bar{N}, \nu \rangle E] (1 + r_{\mathbb{R}}^2 2u'(|x|^2)) + \langle \bar{N}, E \rangle \nu) \\ &= -r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} ([\langle \nu, E \rangle \bar{N} - \langle \bar{N}, \nu \rangle E] V_0 + \langle \bar{N}, E \rangle \nu) \end{aligned}$$

Fazendo agora  $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, N)|_{\partial\Sigma}$  temos

$$\begin{aligned} &= \tilde{g} \left( -r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} ([\langle \nu, E \rangle \bar{N} - \langle \bar{N}, \nu \rangle E] V_0 + \langle \bar{N}, E \rangle \nu), N \right) \\ &= -r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} V_0 (\langle \nu, E \rangle \tilde{g}(\bar{N}, N) - \langle \bar{N}, \nu \rangle \tilde{g}(E, N)) \\ &= -r_{\mathbb{R}} V_0 \langle E, \tilde{g}(\bar{N}, N) \nu - \tilde{g}(\bar{N}, \nu) N \rangle \\ &= -r_{\mathbb{R}} V_0 \tilde{g}(E, \bar{\nu}) \\ &= -A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(E, \bar{\nu}) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \tilde{g}(X_E, N)|_{\partial\Sigma} \end{aligned}$$

Sabendo que  $\tilde{\nabla}_\nu N = -A^\Sigma(\nu, \nu)\nu$  temos  $\tilde{g}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu N)$  é igual a

$$\begin{aligned} &= \tilde{g} \left( e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \left[ \langle x, E \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + r_{\mathbb{R}}^2) E \right], -A^\Sigma(\nu, \nu)\nu \right) \\ &= -A^\Sigma(\nu, \nu) e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} (\langle x, E \rangle \tilde{g}(x, \nu) - r_{\mathbb{R}}^2 \tilde{g}(E, \nu)) \\ &= -A^\Sigma(\nu, \nu) r_{\mathbb{R}}^2 e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(E, \tilde{g}(\bar{N}, \nu) \bar{N} - \nu) \\ &= \cot \theta A^\Sigma(\nu, \nu) \tilde{g}(X_E, N)|_{\partial\Sigma} \end{aligned}$$

Provando assim a proposição. □

# Apêndice B

## Prova do Lema 6

**Lema 6.** (Derivadas na direção do vetor normal ao bordo). Considere a imersão  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset (\mathbb{B}_a^{n+1}, e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ , tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  ortogonalmente (ou seja, no bordo vale  $N \perp \bar{N} = -\frac{x}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}} = -\nu$ ). Seja  $X_E$  o campo de Killing conforme como definido em (5.1) então, ao longo de  $\partial\Sigma$  vale que

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_\nu V_E &= A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E, \\ \tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, N) &= A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \tilde{g}(X_E, N),\end{aligned}$$

onde  $A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}$  é a curvatura principal de  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$ .

*Demonstração.* Mostraremos primeiramente que  $\tilde{\nabla}_\nu V_E = A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E$  em  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$ . Lembremos que

$$\begin{aligned}V_E &= e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, a \rangle + \langle X_E, Dh u \rangle \\ &= e^{-2u} \left( e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(x, E) + \tilde{g}(X_E, Du) \right),\end{aligned}$$

além disso

$$V_E|_{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} = e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle x, E \rangle = e^{-2u} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(x, E) = e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(x, E),$$

portanto

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_\nu V_E &= -2\tilde{\nabla}_\nu h V_E + e^{-2u} \left( e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(x, E) + \tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, Du) \right) \\ &= -2\tilde{\nabla}_\nu u V_E + e^{-2u} \left( e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu x, E) + e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(x, \tilde{\nabla}_\nu E) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, Du) + \tilde{g}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu Du) \right) \\ &= \underbrace{-2\tilde{\nabla}_\nu u V_E}_i + \underbrace{e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu x, E)}_{ii} + \underbrace{e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(x, \tilde{\nabla}_\nu E)}_{iii} + \underbrace{e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, Du)}_{iv} \\ &\quad + \underbrace{e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu u)}_v.\end{aligned}$$

Cálculo de  $i$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_\nu u &= \nu(u) \\ &= 2u'(|x|^2) \langle \nu, x \rangle \\ &= 2u'(|x|^2) r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \langle \nu, \nu \rangle \\ &= 2u'(|x|^2) r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} e^{-2h} \tilde{g}(\nu, \nu) \\ &= 2u'(r_{\mathbb{R}}^2) r_{\mathbb{R}} e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)},\end{aligned}$$

portanto

$$-2\tilde{\nabla}_\nu u V_E = -4u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}V_E.$$

Cálculo de *ii*

$$\begin{aligned} e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu x, E) &= e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}(1 + u'(|x|^2)|x|^2)\tilde{g}(\nu, E) \\ &= e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}(1 + u'(|x|^2)|x|^2)\frac{e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}}{r_{\mathbb{R}}}\tilde{g}(x, E) \\ &= \frac{(1 + u'(r_{\mathbb{R}}^2)r_{\mathbb{R}}^2)}{r_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}}V_E \\ &= A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}V_E. \end{aligned}$$

Cálculo de *iii*

$$\begin{aligned} e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(x, \tilde{\nabla}_\nu E) &= e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(x, D_\nu E + \nu(u)E + E(u)\nu - \langle \nu, E \rangle Du) \\ &= e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(x, E)\langle \nu, Du \rangle \\ &= \langle \nu, Dh \rangle V_E \\ &= 2u'(|x|^2)e^{-2h}\tilde{g}(\nu, x)V_E \\ &= 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}r_{\mathbb{R}}V_E. \end{aligned}$$

Cálculo de *iv*

$$\begin{aligned} e^{-2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, Du) &= e^{-2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, 2u'(|x|^2)x) \\ &= 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}r_{\mathbb{R}}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_\nu X_E, \nu) \\ &= 2u'(r_{\mathbb{R}}^2)e^{-u(r_{\mathbb{R}}^2)}r_{\mathbb{R}}V_E. \end{aligned}$$

Cálculo de *v*

$$\begin{aligned} e^{-2u(r_{\mathbb{R}}^2)}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu Du) &= e^{-2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu (2u'(|x|^2))x + 2u'(|x|^2)\tilde{\nabla}_\nu x) \\ &= e^{-2u(r_{\mathbb{R}}^2)}\tilde{g}(X_E, \tilde{\nabla}_\nu (2u'(|x|^2))\bar{N} + 2u'(|x|^2)(1 + u'(|x|^2)|x|^2)\nu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Observemos agora que  $v = 0$ ,  $iii + iv = -i$ , portanto  $i + ii + iii + iv + v = ii = A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}V_E$ , de onde segue a primeira parte.

A prova de  $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, N) = A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}\tilde{g}(X_E, N)$  segue do Lema 3 para o caso bordo livre, demonstrada no Apêndice A.  $\square$

# Apêndice C

## Demonstração de identidades

**Proposição C.0.1.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow M^{n+1} := (\mathbb{B}_a^{n+1}, \tilde{g})$ . Seja  $X_E$  o campo de Killing conforme como definido em (5.1),  $N$  o campo normal de  $\Sigma^n$  e  $x$  o campo posição em  $M^{n+1}$ , então*

$$i) \quad \Delta \tilde{g}(x, N) = -(n\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)\tilde{g}(x, N) - nHV_0 - n\tilde{g}(x, \nabla H) - n\tilde{\nabla}_N V_0$$

$$ii) \quad \Delta \tilde{g}(X_E, N) = -(n\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)\tilde{g}(X_E, N) - nHV_a - n\tilde{g}(X_E, \nabla H) - n\tilde{\nabla}_N V_E$$

$$iii) \quad \Delta \tilde{g}(x, x) = nV_0^2 + nV_0H\tilde{g}(x, N) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}V_0, x)$$

**Proposição C.0.2.** *Considere a imersão isométrica  $\Sigma^n \rightarrow M_c^{n+1}$ , onde,  $M_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  ou  $\mathbb{S}^{n+1}$  de curvatura média constante. Para as funções  $V_E$ ,  $V_0$  e o campo  $X_E$  como definidos na Seção 3 vale*

$$i) \quad \Delta V_0 = -ncV_0 + nH\tilde{\nabla}_N V_0$$

$$ii) \quad \Delta V_E = -ncV_E + nH\tilde{\nabla}_N V_E$$

$$iii) \quad \Delta \tilde{g}(x, N) = -|A|^2\tilde{g}(x, N) - HV_0$$

$$iv) \quad \Delta \tilde{g}(X_E, N) = -(nc + |A|^2)\tilde{g}(X_E, N) - HV_E - n\tilde{\nabla}_N V_E$$

**Proposição C.0.3.** *Considere a imersão CMC de bordo livre  $\Sigma^n \rightarrow B_{r_{\mathbb{R}}}^{n+1} \subset M_c^{n+1}$ , onde,  $M_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbb{H}^{n+1}$  ou  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Para as funções  $V_E$ ,  $V_0$  e o campo  $X_E$  como definidos na Seção 3 vale*

$$i) \quad \tilde{\nabla}_\nu V_0 = \tilde{g}(x, \nu) = \tilde{g}(x, \bar{N}) = -cr_{\mathbb{R}}e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)}$$

$$ii) \quad \tilde{\nabla}_\nu V_E = A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} V_E$$

$$iii) \quad \tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(x, N) = -A_N^\Sigma(\nu, \nu)\tilde{g}(x, \nu)$$

$$iv) \quad \tilde{\nabla}_\nu \tilde{g}(X_E, N) = A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} \tilde{g}(X_E, N)$$

# Apêndice D

## Prova da Proposição 6.2.1

**Proposição D.0.1.** *Considere uma imersão isométrica  $\Sigma^2 \rightarrow B_{R_{\mathbb{R}}}^3 \subset (\mathbb{B}_a^3, \tilde{g})$  tal que  $\Sigma^2$  intersecta  $\partial B_{r_{\mathbb{R}}}$  em um ângulo constante igual a  $\theta \in (0, \pi)$ . Seja a função  $v(x) = \tilde{g}(x \wedge E, N)$  como definida em (6.9). Então, no bordo  $\partial \Sigma^2$  vale*

$$\tilde{\nabla} v = qv,$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta A(\nu, \nu).$$

*Demonstração.* Considere a função  $v(x) = \tilde{g}(x \wedge E, N)$ , onde  $x$  é o vetor posição,  $E \in \mathbb{R}^3$  é um vetor constante e  $N$  é o campo normal de  $\Sigma^2$  e  $\wedge$  denota o produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ . Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned} v(x)|_{\partial \Sigma} &= \tilde{g}\left(-r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \bar{N} \wedge E, N\right) \\ &= -r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(-\sin \theta \nu + \cos \theta N \wedge E, N) \\ &= \sin \theta r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(\nu \wedge E, N). \end{aligned}$$

Calculemos agora  $\tilde{\nabla}_{\nu} x \wedge E$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\nu} x \wedge E &= D_{\nu} x \wedge E + \nu(u) x \wedge E + (x \wedge E)(u) \nu - \langle \nu, x \wedge E \rangle Du \\ &= \nu \wedge E + 2u' \langle x, \nu \rangle x \wedge E + 2u' \langle x, x \wedge E \rangle \nu - 2u' \langle \nu, x \wedge E \rangle x \\ &= \nu \wedge E + 2u' \langle x, \nu \rangle x \wedge E - 2u' \langle \nu, x \wedge E \rangle x. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\nu} \tilde{g}(x \wedge E, N) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\nu} x \wedge E, N) + \tilde{g}(x \wedge E, \tilde{\nabla}_{\nu} N) \\ &= \tilde{g}(\nu \wedge E + 2u' \langle x, \nu \rangle x \wedge E - 2u' \langle \nu, x \wedge E \rangle x, N) - A(\nu, \nu) \tilde{g}(x \wedge E, \nu) \\ &= \tilde{g}(\nu \wedge E, N) + r_{\mathbb{R}}^2 e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} 2u' \langle \bar{N}, \nu \rangle \tilde{g}(\bar{N} \wedge E, N) \\ &\quad - r_{\mathbb{R}}^2 e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} 2u' \langle \nu, \bar{N} \wedge E \rangle \tilde{g}(\bar{N}, N) - A(\nu, \nu) r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(\bar{N} \wedge E, \nu) \\ &= \tilde{g}(\nu \wedge E, N) + \sin^2 \theta r_{\mathbb{R}}^2 2u' \tilde{g}(\nu \wedge E, N) - \cos^2 \theta r_{\mathbb{R}}^2 2u' \tilde{g}(\nu, N \wedge E) \\ &\quad - \cos \theta A(\nu, \nu) r_{\mathbb{R}} e^{2u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(N \wedge E, \nu) \\ &= \left( \frac{1}{\sin \theta} A^{\partial B_{r_{\mathbb{R}}}} + \cot \theta A(\nu, \nu) \right) \sin \theta r_{\mathbb{R}} e^{u(r_{\mathbb{R}}^2)} \tilde{g}(\nu \wedge E, N). \end{aligned}$$

□