UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA - PROMESTRE

PAOLA LA-CÔRTE E ALMEIDA RAMOS

DISSERTAÇÃO

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM UM EXPERIMENTO DE ENSINO SOBRE SEQUÊNCIAS

Orientadora: Profª Drª Samira Zaidan
Linha de Pesquisa: Educação Matemática

BELO HORIZONTE
2024

PAOLA LA-CÔRTE E ALMEIDA RAMOS

DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM UM EXPERIMENTO DE ENSINO SOBRE SEQUÊNCIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional Educação e Docência – Promestre, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Samira Zaidan

BELO HORIZONTE

2024

R175d
T

Ramos, Paola La-Côrte e Almeida, 1996-

Desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino sobre sequências [manuscrito] / Paola La-Côrte e Almeida Ramos. -- Belo Horizonte, 2024.

117 f. : enc, il., color.

Dissertação -- (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

Orientadora: Samira Zaidan.

Bibliografia: f. 101-102.

Apêndices: f. 103-117.

1. Educação -- Teses. 2. Álgebra -- Métodos de ensino -- Teses. 3. Matemática -- Estudo e ensino (Ensino fundamental) -- Teses. 4. Matemática -- Métodos de ensino -- Teses. 5. Matemática -- Estudo e ensino -- Meios auxiliares -- Teses. 6. Lógica simbólica e matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 7. Educação matemática -- Teses.

I. Título. II. Zaidan, Samira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 372.7

Catalogação da fonte: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)

Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROMESTRE - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP **ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

PAOLA LA CORTE E ALMEIDA RAMOS

Realizou-se, no dia 26 de junho de 2024, às 16:00 horas, por videoconferência, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 547ª defesa de dissertação, intitulada DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM UM EXPERIMENTO DE ENSINO SOBRE SEQUÊNCIAS, apresentada por PAOLA LA CORTE E ALMEIDA RAMOS, número de registro 2022658854, graduada no curso de MATEMATICA/NOTURNO, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Samira Zaidan - Orientador (UFMG), Prof(a). Ana Rafaela Correia Ferreira (UFMG), Prof(a). Airton Carrião Machado (UFMG), Prof. Jadilson Ramos de Almeida (Universidade Federal Rural de Pernambuco).

A Comissão considerou a dissertação:

(X) Aprovada.

( ) Reprovada.

( ) Aprovada com indicação de correções.

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.

Belo Horizonte, 26 de junho de 2024.

Prof(a). Samira Zaidan (Doutora)

Prof(a). Ana Rafaela Correia Ferreira (Doutora)

Prof(a). Airton Carrião Machado (Doutor),

Prof. Jadilson Ramos de Almeida (Doutor)

Documento assinado eletronicamente por **Samira Zaidan**, **Usuária Externa**, em 29/07/2024, às 14:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ana Rafaela Correia Ferreira**, **Professora Ensino**

Básico Técnico Tecnológico, em 05/08/2024, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Keli Cristina Conti**, **Subcoordenador(a)**, em 28/08/2024, às 07:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3413896** e o código CRC **53DF7FDD**.

Referência: Processo nº 23072.233827/2024-35 SEI nº 3413896 Ata de defesa de Dissertação/Tese PAOLA LA CORTE E ALMEIDA

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, manifesto meus agradecimentos à Samira, por ter aceitado embarcar comigo nesta temática tão desafiadora e por, durante esta caminhada, ter tido trocas repletas de carinho e compreensão em relação aos meus processos de aprendizagem, às vezes lentos.

Agradeço ao meu pai Vinicius, pelo incentivo e exemplo, e por ter proporcionado que a porta para a realização de um mestrado permanecesse aberta.

Leandro e Alícia, agradeço por terem me ajudado na construção do projeto, que me possibilitou embarcar neste sonho. Vocês foram a luz de que eu precisava.

Larissa e Isadora, agradeço pela inspiração, acolhimento e incentivo. Vocês, assim como eu, embarcaram nos desafios acadêmicos enquanto assumiam compromissos laborais, o que, decerto, é um ato de resistência. Juntas, resistimos!

Kyara, agradeço por todo apoio e companhia em longos períodos de estudos juntas, pelas diversas trocas em relação à nossa vida profissional, à confecção do projeto, à elaboração do produto… Torço pelo seu sucesso assim como eu sei que você torce e contribui para o meu.

Mametu Aline e irmãos de santo, peço a bênção de todos. Agradeço por compreenderem minhas ausências e distanciamento com as atividades de nossa casa. A abertura de caminhos que o desenvolvimento desta pesquisa me proporcionará será honrada e levada adiante aos estudantes para quem eu tiver a honra de lecionar como nos ensinam os fundamentos de nossa religião e de meu Pai Ogum.

Fernando e Anderson, agradeço pelas valiosas trocas na época em que vivemos as disciplinas em relação ao ser pesquisador(a) e ser professor(a). Vocês foram e são preciosos!

Ademir e Franciele, agradeço por terem contribuído com o desenvolvimento do produto educacional presente nesta pesquisa através da parceria do Design com o Promestre.

Agradeço à equipe gestora da Escola que nos acolheu para realizarmos esta pesquisa, em particular a diretora Claudia Aparecida Pinto, que, além de prover a utilização de um espaço adequado, também nos ofereceu almoços deliciosos em todos os encontros. Guardarei esses momentos com carinho.

Por fim, mas não menos importante, expresso meus agradecimentos aos professores e colegas do Promestre, pelos ensinamentos e trocas tão valiosas. Vocês proporcionaram uma transformação intensa de minhas concepções matemáticas, o que julgo extremamente necessário à minha prática profissional e construção pessoal.

RESUMO

A presente pesquisa, de caráter formativo, teve como objetivo observar o desenvolvimento do pensamento algébrico com estudantes de 8º ano de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais, quando em contato com situações que apresentem regularidades. Fizemos cinco intervenções por meio de um Experimento de Ensino, compreendendo Objetos de Conhecimento e Habilidades dentro da unidade temática de Álgebra, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que envolvem, em particular, a generalização de sequências e o uso da linguagem algébrica simbólica. Os dados utilizados foram obtidos através de: (i) transcrição das filmagens dos encontros; (ii) diário de campo da pesquisadora; (iii) diário de campo da observadora; (iv) registro dos estudantes. Concluímos que o formato de discussões em grupo estabelecido pelos educandos promoveu um ambiente de construção coletiva de significados, onde pudemos perceber as características do pensamento algébrico e a utilização da linguagem algébrica (retórica, sincopada ou simbólica). Pudemos observar que alguns estudantes se apoiaram, não raras vezes, na Aritmética, manifestando o aritmeticismo constatado por Lins. Secundariamente, buscamos observar quais eram as sensibilidades dos educandos durante o processo de ensino e aprendizagem de objetos algébricos; nesse caso, generalizações. Observamos que, à medida que os estudantes obtinham experiências com determinado objeto algébrico, maior era sua autonomia e autoestima para mobilizar os conhecimentos necessários. Por fim, realizamos a construção de uma Sequência Didática, fruto de adaptações que percebemos necessárias para as atividades utilizadas na realização do Experimento de Ensino, cujos objetivos são desenvolver o pensamento algébrico, promover um contato inicial discente com a formalização da linguagem algébrica simbólica de forma a provocar a construção de significados para esses objetos, e a proporcionar aprendizagem.

Palavras-chave: linguagem algébrica; pensamento algébrico; ensino de álgebra; experimento de ensino; educação matemática.

ABSTRACT

The present research, of a formative nature, aimed to observe the development of algebraic thinking with which 8th year students from a school in the Minas Gerais State Education Network can develop relationships between thinking and algebraic language, when in contact with situations that present regularities. We carried out five interventions through Teaching Experiments, comprising Objects of Knowledge and Skills within the thematic unit of Algebra, present in the National Common Curricular Base (BNCC), which involve, in particular, the generalization of sequences and the use of algebraic language. The data used was obtained through: (i) transcription of the meeting footage; (ii) researcher's field diary; (iii) observer's field diary; (iv) student registration. We concluded that the format of group discussions established by the students promoted an environment of collective construction of meanings, where we were able to perceive the characteristics of algebraic thinking and the use of algebraic language (rhetorical, syncopated or symbolic). We were able to observe that some students often relied on Arithmetic, demonstrating the arithmeticism found by Lins. Secondarily, we sought to observe what sensitivities of students during the process of teaching and learning algebraic objects; in this case, generalizations. We observed that as students experience a given algebraic object, the greater their autonomy and self-esteem will be to mobilize the necessary knowledge. Finally, we built a Didactic Sequence, the result of adaptations that we perceived necessary for the activities used in carrying out the Teaching

Experiment, whose objectives are to develop algebraic thinking, promote initial student contact with the formalization of symbolic algebraic language, in order to provoke the construction of meanings for these objects, and to provide learning.
.

Keywords: algebraic language; algebraic thinking; algebra teaching; teaching experiment; mathematics education.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa nasceu de minha experiência docente, que, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, cursos preparatórios e ensino superior, acusou as dificuldades dos estudantes em se apropriarem da linguagem algébrica simbólica em todos esses diversos níveis de ensino. Dada a percepção da minha própria dificuldade em lecionar esse conteúdo e buscando melhorar, eu me encontrei na formação continuada do Programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal de Minas Gerais (Promestre – UFMG). Para D'Ambrósio (1996, p. 83), "o elo entre teoria e prática é o que chamamos de pesquisa".

Como objetivo geral deste estudo, buscaremos observar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades.

Buscamos, como objetivos específicos:

1) Compreender, através da revisão de literatura e da realização de um Experimento de Ensino, como pode ser a relação inicial discente com a utilização da linguagem algébrica simbólica para comunicar um pensamento; e

2) Propor uma alternativa, através da construção de um recurso educativo, que possa contribuir para que o primeiro contato escolar discente com a formalização da linguagem algébrica simbólica seja atencioso, delicado e consistente, envolvendo o protagonismo discente.

No capítulo 1, iremos alinhar os entendimentos teóricos acerca dos temas que circundam esta pesquisa, buscando compreender melhor o tema estudado, a fim de que possamos analisar o que pôde ser observado no trabalho de campo. Desenvolvemos ponderações acerca das temáticas: Ensino de Álgebra, Pensamento Algébrico e Linguagem Algébrica como também em relação às Dificuldades Discentes e Dificuldades Docentes, procurando entender consequências que possam ser vistas e sentidas nos processos de ensino e de aprendizagem desse tema.

No capítulo 2, explicamos como foram realizadas as decisões metodológicas e como elas reverberaram no trabalho de campo por meio da realização de um Experimento de Ensino juntamente com a descrição cronológica e as análises do que pôde ser observado.

Em seguida, elucidamos como se deram a escolha e a construção do Recurso Educativo produzido como parte desta pesquisa a partir do que pôde ser percebido ao longo de todo o trabalho.

Esse Recurso Educativo será destinado a professores(as) com o objetivo de fomentar algumas reflexões acerca do ensino de Álgebra e incentivar um contato escolar inicial discente com a importância de proporcionar o desenvolvimento do pensamento algébrico e a formalização da linguagem algébrica simbólica, que seja utilizado com o intuito de amenizar esse cenário de dificuldades por meio da construção de significados (Lins; Gimenez, 1997) e que consiga atenuar as sensibilidades negativas, as quais podem ser associadas à Matemática durante esse momento curricular tão delicado. Lins e Gimenez (1997) apontam que o fracasso em Álgebra pode significar o fracasso absoluto na escola, onde a Álgebra é entendida como um “momento de seleção” na educação escolar.

MOTIVAÇÃO DA PESQUISA – MEMORIAL

Neste Memorial, apresentarei minha trajetória como aluna e como professora de Matemática em formação, e quais foram as escolhas que me trouxeram para essa profissão e me incentivaram a embarcar no Mestrado Profissional para a realização desta pesquisa.

Nos primeiros anos escolares, fui uma aluna curiosa e inquieta no sentido indisciplinar e questionador. Meus primeiros contatos com a Matemática no Ensino Fundamental foram recheados de memórias afetivas e de curiosidade. Fui aluna da Escola Municipal Cosette de Alencar, na cidade de Juiz de Fora – MG, e alguns eventos me marcaram. Aqui, vou compartilhar alguns com vocês, que me trouxeram três descobertas.

Quando estávamos aprendendo a tabuada, o último horário da sexta-feira era de Matemática, e as aulas aconteciam no pátio. A professora riscava com giz vários números no chão da quadra dentro de quadrados enormes. Preenchia a quadra inteira. Era uma brincadeira em que deveríamos acertar o resultado das multiplicações. A professora falava qual era a operação, e todos nós corríamos para o resultado. O último a chegar à região do número riscado no chão saía da brincadeira, até o momento em que sobrava apenas um aluno, que, às vezes, era premiado com balinhas por ter acertado todas as operações em tempo hábil. Eu não possuía a habilidade de correr rápido, mas utilizava a vantagem de já ter decorado a tabuada naquele momento. Era gostoso demais. Ali, descobri que a Matemática poderia ser divertida.

Quando estávamos aprendendo as dízimas periódicas, a professora nos mostrou que $\frac{9}{9} = 0,99\ldots$ Aquilo me desconcertou, porque deveria ser 0,99… mas também deveria ser 1. Ao encher a professora de perguntas, ela explicou para a turma o Paradoxo de Zenão: de um ponto a outro da sala, ela percorreu metade da distância; e, depois, um quarto; e, então, um oitavo; e, assim, sucessivamente. Dessa forma, ela nos mostrou que jamais chegaria exatamente ao destino final. Naquele momento, eu entendi o conceito de limite, mas só fui compreender esse aprendizado anos depois na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I durante a graduação. Ali, descobri que a Matemática pode ser bonita. Eu me apaixonei.

Quando estávamos aprendendo a linguagem algébrica simbólica, eu me senti desafiada com todas aquelas letras emaranhadas nos números. Era tudo muito novo, como se eu estivesse aprendendo uma nova língua. Essa dificuldade não me assustava. Ela instigava minha curiosidade – talvez por já ter construído, até ali, uma relação afetuosa com a Matemática. Eu queria aprender a dançar aquela dança, jogar aquele jogo, porque, às vezes, resolver os exercícios com a linguagem matemática era tão satisfatório quanto dançar ou jogar. E, com treino e repetição, consegui. Ali, descobri que a Matemática, às vezes, também pode ser técnica, e nem por isso ela se tornou menos interessante.

Na metade do primeiro ano do Ensino Médio, eu me mudei para Belo Horizonte. Estudei em uma escola da rede do Serviço Social da Indústria (SESI), que consiste em uma rede de instituições paraestatais brasileiras, de âmbito nacional, com algumas áreas de atuação, dentre elas: educação, assistência social, cultura, lazer e saúde. Eu tinha pouca familiaridade com a nova cidade, as novas pessoas, a nova família e a nova escola. A necessidade de me adaptar socialmente afetou meus pensamentos, atitudes e desejos em relação à prática estudantil. Essa mudança radical para uma adolescente de 15 anos culminou no afastamento da posição ativa, curiosa e inquieta que eu tinha até aquele momento. Passei a encarar as atividades escolares como coisas que eu "tinha que fazer", e fazia o mínimo. Continuava vendo beleza na Matemática, na Filosofia e na Literatura, mas fazia o que tinha que fazer sem grandes inquietações.

Naquele período, muitos colegas fizeram a movimentação para entrar no Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (SENAI), instituição privada sem fins lucrativos, que fornece diversos cursos técnicos e tinha parceria com o SESI. Passei a fazer esse movimento também, para que eu me sentisse parte do ambiente onde estava. Ao escolher qual curso faria dentre os disponíveis, não tive muita dúvida: escolhi o que entendi ser mais próximo da Matemática: Edificações. Fazer o curso técnico durante o Ensino Médio me trouxe pertencimento, amizades, afetos e oportunidades de trabalho.

Nessa correria de fazer o Ensino Médio no período matutino, curso técnico no vespertino e longos percursos no transporte público, eu me vi a poucos meses do vestibular. O que fazer? O que ser? "O que eu quero ser quando crescer?" Será que já cresci? Até aquele momento, quando pensava nessas questões, percebia que queria um pouco ser várias coisas, mas não queria muito ser nada em específico. Na infância, quis ser: astronauta, manicure, estilista, cientista, escritora, colunista de jornal, professora e maquiadora. Lembro-me de ter um quadro negro em casa e várias cores de giz, e de dar aulas para as minhas bonecas. Essa era uma das várias brincadeiras de brincar de ser. Já na adolescência, tive interesse em: *marketing*, relações públicas, jornalismo, relações internacionais, *design* de interiores, arquitetura, engenharia e farmácia. Naquele período, ouvi os mesmos comentários de familiares e professores: "*Mas você gosta de Matemática! Faz Engenharia!"* Mas, qual Engenharia? Mecânica, Elétrica, de Produção, de Sistemas, Civil… *"Você fez Edificações! Faz Engenharia Civil"*. Terminei o Ensino Médio em 2013, ano em que o Brasil se preparava para sediar a Copa do Mundo e a conjuntura nacional revelava um ótimo período para as construções. Parecia ser uma boa escolha. Nesse percurso, meu querido professor de Matemática advertiu: *"Seja tudo, menos professora!"*

Para ingressar na universidade, fiz o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e minha nota não era suficiente para passar em Engenharia Civil na UFMG. Eu não havia considerado outras instituições, uma vez que sempre fui incentivada pelo meu pai e professores a estudar na universidade federal da capital mineira. Não sabia o que eu queria ser, mas sabia onde eu queria realizar essa descoberta. No ano seguinte, fiz um curso preparatório para o vestibular, para tentar mais uma vez. Fazia o curso no turno da noite e trabalhava de nove a dez horas por dia numa empresa de eventos empresariais para arcar com os custos. A rotina exaustiva e as marcas que ainda me restavam da indomável adolescência me trouxeram um resultado: uma nota menor na prova do ENEM. Dentre os cursos que me possibilitavam ingressar na UFMG, lá estava a graduação em Matemática no período noturno. Então, assumi o desafio com grande felicidade.

No início do curso, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I me trouxe lembranças da professora que se descabelou com leveza para me explicar limite com o plano de fundo da dízima periódica. Vi que a loucura das matrizes também era Geometria e tinha significados e representações gráficas. As funções repetitivas do Ensino Médio se tornaram uma nova forma de entender como podemos ler o mundo pela linguagem da Matemática, mas, até aquele momento, não sentia vontade de ser professora. Essa vontade ficou nas brincadeiras da infância. Lembrava-me do meu querido professor de Matemática: *"Seja tudo, menos professora!"*

Com o passar do curso, comecei a fazer as matérias da Faculdade de Educação, onde fui estimulada a pensar o papel social da escola, as relações que eram estabelecidas a partir dela e todas as suas potencialidades. Na disciplina Psicologia da Educação, especialmente, experimentei sentir querer muito ser alguma coisa. Queria ser professora. Essa vontade me trouxe incertezas e inseguranças – como efeito do desprestígio financeiro e social da profissão –, sentimentos que diminuíram nas disciplinas Estágio I e Estágio II, realizados com a professora Samira Zaidan – minha atual orientadora. Retomei meu contato com o ambiente da escola básica, mas agora por outra perspectiva. Eu não era mais aluna, ainda não era professora, porém, a cada experiência em sala de aula, eu me descobria pertencente a essa profissão.

Durante meus anos de graduação (2015-2018), participei de dois projetos de extensão voltados à docência. A minha primeira experiência em sala de aula foi atuando como monitora no Pré-Cálculo, curso disponibilizado pelo Instituto de Ciências Exatas (ICEx) durante o período que antecede o início do semestre, destinado aos calouros e a alunos reprovados nas disciplinas Cálculo I e Geometria Analítica e Álgebra Linear. Esse curso tem como objetivo auxiliar os estudantes revisando o currículo do Ensino Médio através de resolução de exercícios, trabalhando conceitos importantes para o bom desempenho no início da graduação. Naquele momento, eu me atentei para o fato de que, na maioria dos casos, a dificuldade dos estudantes estava em conceitos básicos, em especial com a utilização da linguagem algébrica simbólica, e não em conteúdos mais complexos, como o conceito de funções, por exemplo, como eu esperava. O segundo curso de extensão do qual participei foi o Programa de Aperfeiçoamento para Professores do Ensino Médio (PAPMEM), curso indicado para professores do ensino básico fornecido pela UFMG em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Nesse curso, voltado para docentes, o objetivo é trazer de volta o contato com a formalidade matemática. Ali, percebi que essa formalidade através de demonstrações pode trazer elucidações acerca dos conceitos que trabalhamos na escola básica, mas não necessariamente interfere positivamente na prática docente.

Nesse mesmo período, trabalhei em estágio remunerado na empresa Chromos – Colégio e Pré, atuando como monitora em cursos preparatórios para o ENEM e escolas técnicas. A dinâmica dessa monitoria era individual, proporcionando um ambiente onde os alunos se sentiam à vontade para demonstrar suas maiores fragilidades. Novamente, percebi dificuldades significativas em relação à assimilação de conceitos básicos. Durante essa experiência, a partir do momento em que os alunos se apropriaram de habilidades aritméticas e algébricas, criavam também maior autonomia para estudar o restante do currículo com maior fluidez, segurança e autoestima, diminuindo a ansiedade associada à Matemática.

Ao verificar que essa defasagem no ensino de Álgebra era significativa para os estudantes, tive o ímpeto de me dedicar a esse tópico durante a minha futura prática docente, e agora, durante a realização desta pesquisa. Uma observação interessante é que os alunos do pré-ENEM – que já haviam concluído o Ensino Médio ou estavam no 3º ano – sentiam maiores dificuldades em realizar manipulações com a linguagem algébrica simbólica do que os alunos que se preparavam para escolas técnicas – que estavam finalizando o último ciclo do Ensino Fundamental. Acredito que, durante o percurso escolar, premidos por novos conteúdos a serem estudados, os professores do Ensino Médio passam por cima dessas dificuldades, depreciando a importância da consolidação dessas habilidades para um bom desempenho escolar na disciplina de Matemática. Outro aspecto que podemos pensar a partir dessa observação é que, como possivelmente não houve assimilação de significados à linguagem algébrica simbólica durante o Ensino Fundamental, ao chegarem ao Ensino Médio e agora distantes de um treinamento mecânico, os alunos apresentam maiores dificuldades.

No último ano da graduação (2018), realizei, durante o primeiro semestre, meu primeiro estágio obrigatório no Colégio Técnico da UFMG (COLTEC) em turmas de primeiro ano dos cursos de Química e Análises Clínicas. Nesse período, tive contato com turmas que apresentavam outras possibilidades de desenvolvimento do currículo, quando as aulas proporcionaram a construção de demonstrações, o que para mim foi uma surpresa. Tais eventos se devem propriamente pelo fato de os alunos ali presentes disporem de habilidades aritméticas e algébricas bem consolidadas, garantidas pelo processo seletivo da Instituição. No segundo semestre, realizei o segundo e último estágio no Centro Pedagógico da UFMG, acompanhando turmas de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, período em que é desenvolvida a introdução à linguagem algébrica simbólica. Vejo esse momento como significativo no percurso discente, quando é culturalmente entendido que, quando as letras começam a fazer parte da Matemática, ela perde o sentido. O que é, decerto, um equívoco. Fico feliz em ter experienciado esse momento no Centro Pedagógico com o professor André Deodato, que tanto me ensinou com sua própria prática.

Em 2019, logo após finalizar a graduação, dei início à minha carreira profissional como professora regente de aulas numa escola da Secretaria do Estado de Minas Gerais (SEE-MG) através do processo de designação – contratação temporária –, o que me levou a conhecer diferentes escolas. Naquele ano, lecionei pela primeira vez para turmas, alunos do 1º ano do Ensino Médio. Atenta às dificuldades relacionadas ao ensino de Álgebra, em particular à linguagem algébrica simbólica, observadas durante minhas breves experiências até ali, preparei, durante o ano, algumas revisões dos conteúdos de Aritmética e Álgebra. Hoje, não confio que eu tenha realizado essas "revisões" da melhor forma, especialmente pela intenção ingênua de cumprir com todo o currículo daquele ano, mas existiu o movimento de tentar.

No ano seguinte, novamente através do processo de designação, trabalhei com turmas de 6º e 8º anos do Ensino Fundamental. Tive meu primeiro contato com o 6º ano, momento do currículo em que são desenvolvidos os conhecimentos acerca dos números racionais e quando aparecem dificuldades substanciais em Aritmética. Foi um desafio. Logo no início do ano, no mês de março, fomos surpreendidos pela pandemia da Covid-19. Naquele momento tão sensível, tivemos, para além dos desafios pedagógicos, as dificuldades sociais, psicológicas, econômicas, com a própria vida, e tantas outras, incluindo a falta de acesso às estruturas tecnológicas por muitos estudantes.

Em 2021, ainda em pandemia e novamente pelo processo de designação, assumi dois cargos em duas escolas diferentes, trabalhando em uma delas com turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental e na outra com turmas de 2º e 3º anos do Ensino Médio. Ainda em isolamento social, permanecemos com a dinâmica das aulas *online*. Nesse ano, o Governo do Estado forneceu aos professores acesso ilimitado às ferramentas *Google*, incluindo o *Google Classroom*, o que facilitou a comunicação, a organização do planejamento e a realização das aulas e atividades. O retorno presencial para as escolas aconteceu de forma gradual, e percebi, naquele momento, uma defasagem de aprendizagem expressiva dos estudantes, decerto decorrente do isolamento social de 2020 e 2021. Reconsiderações em relação ao currículo dos anos referentes se fizeram necessárias para mim e outros professores à minha volta.

No ano de 2022, ingressei no Promestre (Mestrado Profissional em Educação e Docência). Novamente através do processo de designações, atuei como professora de turmas de 7º e 8º anos, vivenciando, paralelamente ao Mestrado, o momento escolar que impulsionou esta pesquisa: o primeiro contato dos estudantes com a linguagem algébrica simbólica.

Durante minhas experiências profissionais até então, atuando nos diversos momentos do percurso escolar citados neste Memorial (Ensino Fundamental, Ensino Médio, preparatório para vestibulares e início da graduação), senti a necessidade de incentivar os educandos a se apropriarem da linguagem algébrica simbólica de forma que vejo, através dela, uma potente possibilidade de organização do pensamento matemático abstrato, utilizando-a como ferramenta para tal. Reconheço que essa percepção tem fortes influências da minha formação, que tem como característica um maior contato com o campo da Matemática e um contato inicial com o campo da Educação Matemática. Como observado em uma das minhas descobertas empíricas da infância, a Matemática (e, principalmente, a forma como ela é cobrada nos currículos e em diversos processos seletivos) também é técnica. O que se vê na prática é que os alunos, ao chegarem ao último ciclo do Ensino Fundamental – e até mesmo em momentos posteriores do percurso escolar –, não possuem, em sua maioria, o pensamento algébrico bem consolidado, o que dificulta o apoderamento da linguagem algébrica simbólica e seus subsequentes usos durante a aprendizagem de generalizações, equações, funções e tantas outras partes do currículo. Esse fato pode gerar, para além das dificuldades pedagógicas, mal-estar, traumas e um afastamento afetivo da Matemática como um todo.

Venho, através desta pesquisa, procurar entender o porquê de esse fato ocorrer, se há realmente a necessidade de uma utilização exacerbada da linguagem algébrica simbólica como ferramenta para se apropriar dos demais conceitos matemáticos, e buscar compreender como posso atuar positivamente para a promoção do desenvolvimento do Pensamento Algébrico com os discentes.

Ao fim desta pesquisa, iremos propor, por meio do recurso educativo desenvolvido, uma sequência didática que possibilite o desenvolvimento do pensamento algébrico já durante o ensino da linguagem algébrica simbólica, atenta para que a utilização dessa ferramenta seja feita de forma que trate como prioridade as relações desses sujeitos com a álgebra escolar, tendo-os como protagonistas, e não somente o conteúdo curricular da Matemática visto de forma isolada.

CAPÍTULO 1 – ENTENDIMENTOS TEÓRICOS

Para analisarmos as relações que os estudantes podem desenvolver entre o pensamento e a linguagem algébrica simbólica, visando um ensino que proporcione o desenvolvimento do pensamento algébrico, vamos buscar identificar e nos apoiar em entendimentos de alguns autores (Almeida, Câmara, 2014; Almeida; Santos, 2017; Almeida; Bernardino, 2021; Borralho; Barbosa, 2011; Lins; Gimenez, 1997; Ponte; Branco, 2013; Silva, 2001; Vale; Pimentel 2013) em trabalhos que compartilham de uma motivação ressonante à nossa. Trataremos de reflexões referentes ao ensino de Álgebra, ao pensamento e linguagem algébrica, e às dificuldades docentes e discentes que podem se manifestar durante o processo de ensino-aprendizagem dessa temática.

1.1 Ensino de Álgebra

Iniciaremos a discussão teórica a partir de reflexões sobre uma temática substancial para esta pesquisa: o Ensino de Álgebra. A obra *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*, de Rômulo Campos Lins e Joaquim Gimenez (1997), será nossa principal fonte de apoio. Nesse trabalho, os autores concebem a Aritmética e a Álgebra como componentes de uma mesma moeda, que se articulam, assumindo que há a possibilidade de o estudante encarar uma atividade de Álgebra por uma perspectiva Aritmética, e vice-versa.

A nova perspectiva para a Aritmética proposta está em considerar, ao invés de "aprendizagem da Aritmética", o desenvolvimento de um "senso numérico". Os autores defendem a necessidade de englobar diversos assuntos e contextualizações à educação aritmética, visto que esta é um componente, cujas possibilidades são numerosas ao passo que necessitam de menos detalhes técnicos.

A nova perspectiva para a Álgebra está em considerar, ao invés de "aprendizagem de Álgebra", a produção de significados a ela de modo que possa ser melhor compreendida pelos alunos: "Em resumo, a atividade algébrica é descrita como *fazer ou usar a álgebra*. A versão mais banal dessa posição é a que descreve a atividade algébrica como *calcular com letras*" (Lins; Gimenez, 1997, p. 90). Dessa maneira, já em 1997, Lins e Gimenez nos alertavam que "a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades" (p. 161) e defendiam que qualquer aspecto técnico nos processos de ensino só poderia ser desenvolvido com compreensão a partir da produção desses significados.

Além disso, os autores defendiam que não há a necessidade de que a Aritmética deva necessariamente preceder a Álgebra na escola, porém essa afirmativa não implica que o caminho contrário deve ser seguido. Os autores defendiam, ainda, que os ensinos de Álgebra e de Aritmética devem coexistir de forma que uma auxilie o desenvolvimento da outra.

A obra apresenta diversas concepções da atividade algébrica, visto que "não há consenso a respeito do que seja pensar algebricamente" (Lins; Gimenez, 1997, p. 89). As concepções são apresentadas em uma organização temporal, desde Vieta (1950), que foi o primeiro a sistematizar o uso de letras para representar valores conhecidos em uma expressão algébrica; em seguida, Galois (1811-1832) e Abel (1802 e 1829), que trazem a noção da estrutura algébrica; até chegar em Bourbaki (a partir de 1940), onde então entramos no domínio próprio do "cálculo com letras". Bourbaki fez parte de um grupo de matemáticos franceses que trabalharam para produzir bases axiomáticas chamadas de "estruturas-mãe", que servem de ponto de partida para toda a Matemática moderna (de ordem, topológica e algébrica), considerando as estruturas básicas do pensamento de Jean Piaget.

É apresentada, ainda nessa obra, a perspectiva de Atividade Algébrica para Paolo Boero (Lins; Gimenez, 1997, p. 101): "processo de decidir que transformações são requeridas num determinado ponto da atividade algébrica (e efetivá-las) e o processo de antecipação, que consiste em 'antever' aonde quero chegar, de modo que as transformações aplicadas não são 'às cegas'".

É apresentada também a concepção de G. Vernaud, psicólogo francês, que elaborou o que chama de Modelo dos Campos Conceituais, no qual a noção de conceito (isolado) é substituída pela de Campo Conceitual, constituído por: a) conjunto de esquemas operacionais e invariantes, b) conjunto de formas notacionais, e c) conjunto de problemas que são resolvidos por esquemas e dão sentido a eles.

Para elaborar a perspectiva de Álgebra para o Século XXI, os autores nos provocam: "O que parece ser necessário, então, é uma perspectiva de atividade algébrica que nos permita tanto saber qual é o ideal a ser atingido quanto ler *positivamente* o que uma pessoa está fazendo quando se engaja em atividade algébrica de forma *não ideal*" (Lins; Gimenez, 1997, p. 105). A produção de conhecimento algébrico não deve tê-la como base de um objeto primário de estudo, mas ter o propósito de organizar uma situação, servir como ferramenta: "Utilizar a matemática como recurso para organizar o mundo" (Lins; Gimenez, 1997, p. 109).

Temos, então, a apresentação da abordagem de Davydov (1930-1998), psicólogo russo e um dos fundadores da Comissão para o Estudo da Psicologia do Pensamento e da Lógica. Para ele, há uma grande diferença entre resolver problemas particulares e falar sobre características genéricas de uma situação: "A palavra-chave é *falar*" (Lins; Gimenez, 1997, p. 122). Com posse desse entendimento, percebemos que um estudante pode resolver um problema de Álgebra aritmeticamente ou um problema de Aritmética algebricamente. É preciso ouvi-lo para compreendermos qual é a abordagem utilizada por ele naquele momento.

Jarome Bruner (1915-2016), psicólogo estadunidense, professor de Psicologia em Harvard e Oxford e um dos produtores da Revolução Cognitiva da década de 1960, em consonância com Davydov, toma emprestada uma ideia da Linguística de que a fala explicita novas descobertas enquanto silenciamos coisas que tomamos como certas, como dadas. Em um contexto de sala de aula, e também no contexto desta pesquisa, pudemos perceber que as falas direcionadas aos pares, por vezes, compreende também as explicitações de Campos Conceituais apropriados total ou parcialmente pelos estudantes.

Outra elucidação trazida pelo texto de Lins e Gimenez (1997) é referente à distinção entre "genérico" e "generalizado". Uma situação genérica diz respeito a tratar diretamente daquilo que é geral em uma atividade ao passo que uma situação generalizada diz respeito ao que é comum em um conjunto de casos particulares.

Referente à obra *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*, podemos então concluir que a ideia de que "a aritmética deve preceder necessariamente a álgebra na escola é infundada" (Lins; Gimenez, 1997, p. 159) e precisamos "repensar a educação aritmética e algébrica de forma única" (Lins; Gimenez, 1997, p. 113). Além disso, "a atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal" (Lins; Gimenez, 1997, p. 99), e "a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação como uma ferramenta, e não como objeto primário de estudo" (Lins; Gimenez, 1997, p. 109). Por último, "a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades" (Lins; Gimenez, 1997, p. 161).

A educação algébrica precisa considerar que qualquer aspecto técnico só poderá se desenvolver juntamente com a produção de significados que o sustenta. Essa é a perspectiva que acreditamos ser condizente com a atual realidade de ensino e que utilizaremos em nossa pesquisa, cujo foco está em perceber que relações os estudantes podem desenvolver entre o pensamento e a linguagem algébrica. Acreditamos que essa relação poderá ser percebida a partir dos significados atribuídos à linguagem algébrica conforme nos ensina a literatura.

1.2 Pensamento algébrico

Caracterizar o pensamento algébrico não é algo simples por ser uma forma de pensar inserida em um campo extenso (a Álgebra) e com uma volumosa quantidade de objetos de estudo (equações, inequações, sistemas de equações e inequações, funções, padrões e problemas de partilha, entre outros). Com o objetivo de “contribuir com os pesquisadores da área de Educação Matemática, que têm dificuldades em encontrar uma caracterização de pensamento algébrico na literatura em português” (p. 35), Almeida e Santos (2017) apresentam a perspectiva de pensamento algébrico de Rômulo Lins, James Kaput e Luis Radford, e concluem com uma caracterização de pensamento algébrico adotada por eles. Acompanhamos aqui a construção realizada pelos autores.

A perspectiva de pensamento algébrico para Rômulo Lins, apresentada em sua tese de doutorado em 1992[1], revela que o elemento caracterizador do pensamento algébrico, como já nos referimos, está na produção de significados para os objetos e símbolos algébricos, como também apresentado em Lins e Gimenez (1997). A reflexão acerca da construção de significados transpassa o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS).

> O MTCS é um modelo epistemológico que propõe que *conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação.* [...] *conhecimento* é do domínio da *fala*, e não do *texto*. Desde este ponto de vista, a matemática é um *texto*, e não um *conhecimento*; e tem-se *conhecimento* apenas na medida em que pessoas se dispõem a *enunciar* este *texto* (Lins, 1994b, p. 29 *apud* Almeida; Santos, 2017, p. 36, grifos do autor).

Lins e Gimenez (1997) elaboram três vertentes que definem o pensar algebricamente: i) aritmeticismo; ii) internalismo; e iii) analiticidade. Na primeira, temos os números, as operações aritméticas e a relação de igualdade como objetos exclusivos de estudo. Na segunda, os números deixam de servir somente como ferramentas e passam a ser tratados como o objeto de estudo. E na terceira, o trabalho com os elementos “desconhecidos” deve ser feito com base em propriedades gerais, e não como uma manipulação de um elemento específico e determinado. Não há uma divisória nítida estabelecida entre o aritmeticismo e o internalismo. Na verdade, o estudante estará pensando algebricamente quando mobilizar as três vertentes simultaneamente.

A perspectiva de pensamento algébrico para James Kaput (2008 *apud* Almeida; Santos, 2017) também defende que o conhecimento está no sujeito, e não no objeto, de forma

[1] “A framework for understanding what algebraic thinking is”; em português, “Um quadro para a compreensão do que é pensamento algébrico”.

que é uma atividade exclusivamente humana a partir do estabelecimento de generalizações por meio de um discurso argumentativo que se formalizam progressivamente com o decorrer da idade e das experiências. De acordo com ele, a generalização retratada em uma linguagem algébrica simbólica é um dos aspectos centrais do pensamento algébrico.

O autor também elabora três vertentes do pensar algebricamente: i) aritmética generalizada ou pensamento quantitativo; ii) pensamento funcional; e iii) modelação. A primeira é semelhante ao aritmeticismo de Lins (1992 *apud* Almeida; Santos, 2017) centrado no caráter algébrico da Aritmética. Mas, destaca alguns aspectos dessa primeira vertente que podem servir de grande auxílio para o docente que busca identificar, por meio das diversas linguagens possíveis, quais são os entendimentos de seus estudantes. São eles: explorar propriedades e relações de números inteiros (como, por exemplo, examinar estruturas de somas e produtos de números pares e ímpares); explorar propriedades das operações com números inteiros (como, por exemplo, compreender a comutatividade da adição e da multiplicação); explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades (perceber a equivalência entre expressões numéricas); tratar o número algebricamente (enfatizando a estrutura, e não o valor em si); e resolver expressões numéricas com o número desconhecido (resolver equações simples). Podemos, então, perceber que o pensamento algébrico se manifesta antes e para além da utilização da linguagem algébrica simbólica.

A segunda vertente que define o pensamento algébrico para James Kaput (2008 *apud* Almeida; Santos, 2017) é o pensamento funcional, momento em que o estudante conseguirá descrever relações funcionais e perceber relações entre variações. Novamente, o autor explicita alguns aspectos dessa vertente. São eles: simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas; representar dados graficamente; descobrir relações funcionais; prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos; e identificar e descrever padrões numéricos e geométricos.

A terceira vertente é a modelação, que consiste em expressar e formalizar generalizações utilizando o aspecto sintático da linguagem algébrica simbólica e seu significativo potencial de síntese.

A perspectiva de pensamento algébrico, para Luis Radford (2009 *apud* Almeida; Santos, 2017), se alicerça na teoria da objetificação do conhecimento elaborada por ele: “Essa teoria discute a unicidade entre linguagem e pensamento” (Almeida; Santos, 2017, p. 46).

Radford, também, elabora três vertentes que caracterizam o pensamento algébrico. São elas: i) pensamento algébrico factual; ii) pensamento algébrico contextual; e iii) pensamento algébrico padrão. A primeira lida com um senso de indeterminação relacionado a situações mais particulares em que a incógnita se apresenta de forma implícita: "gestos, palavras e ritmo constituem a essência semiótica dos estudantes" (Almeida; Santos 2017, p. 49). Radford (2009, p. 40 *apud* Almeida; Santos 2017, p. 49) destaca:

> Apesar de sua natureza aparentemente concreta, pensamento algébrico factual não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, ele repousa sobre mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos.

Novamente, pudemos perceber que as diferentes formas de comunicação do pensamento algébrico, para além da utilização da linguagem algébrica simbólica, precisará ter o reconhecimento docente de forma que ele(a) possa identificar e valorizar os processos do ensino-aprendizagem de Álgebra e agir positivamente nos diferentes momentos desse desenvolvimento.

Na segunda vertente elaborada por Radford (o pensamento algébrico contextual), os objetos conhecidos são tratados analiticamente. Ou seja, os estudantes se deslocam de números particulares para números gerais e já são capazes de elaborar fórmulas (construir mensagens) que possam descrever um termo geral.

Por fim, a terceira vertente elaborada por Radford (pensamento algébrico padrão), trata de um modo simbólico particular para designar objetos. É o momento em que o estudante passa a utilizar a linguagem algébrica simbólica para expressar o pensamento, culminando em um poder de síntese muito maior em relação às vertentes anteriores, podendo o estudante, durante esse processo, passar a simplificar fórmulas de modo que a construção das mensagens se percam. Almeida e Santos (2017, p. 52) salientam que "é essa natureza 'não perspectiva' da fórmula que constitui, segundo Radford, a força da álgebra, ou seja, o distanciamento do contexto".

Almeida e Santos (2017) desenvolvem, a partir de então, a sua própria caracterização de pensamento algébrico, com a qual nos identificamos e que será a utilizada em nossa pesquisa. Para esses autores, o pensamento algébrico é revelado por meio da mobilização de cinco características: estabelecer relações, generalizar, modelar, operar com o desconhecido e construir significado.

Na apresentação das perspectivas de pensamento algébrico de Lins (1992 *apud* Almeida; Santos, 2017), Lins e Gimenez (1997), Kaput (2008 *apud* Almeida; Santos, 2017) e Radford (2009 *apud* Almeida; Santos, 2017), enumeramos as vertentes que os caracterizavam pelo seu caráter de continuidade. Já para Almeida e Santos (2017), o pensar algebricamente pode ser revelado por meio de cinco características:

- capacidade de estabelecer relações
- capacidade de modelar
- capacidade de generalizar
- capacidade de construir significados
- capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido

Os autores defendem que a capacidade de estabelecer relações se encontra no centro das outras quatro características, por ser a primeira a ser desenvolvida e revelada. As capacidades de modelar, generalizar, operar com o desconhecido como se fosse conhecido e de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos se desenvolvem progressiva e concomitantemente a partir das relações que os estudantes conseguem estabelecer.

A capacidade de modelar é expressa, por exemplo, quando o estudante constrói um modelo matemático para representar um problema apresentado em linguagem natural. Este modelo matemático poderá ser comunicado de uma maneira mais ou menos formal, com a utilização da linguagem retórica, sincopada ou simbólica, a depender das experiências prévias do estudante. A capacidade de generalizar se manifesta quando o estudante compreende que um símbolo algébrico poderá representar um valor qualquer. Já a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido é revelada quando o estudante é capaz de operar de forma analítica, utilizando-se das leis da aritmética para operar qualquer símbolo. E, por fim, a capacidade de construir significados irá se desenvolvendo juntamente com as outras, ao passo que o estudante compreende os processos envolvidos em todas as outras características do pensar algebricamente.

Nesse sentido, os autores ressaltam que "a característica central do pensamento algébrico é imprescindível, isto é, um sujeito só está pensando algebricamente se conseguir estabelecer relações, enquanto que as demais vão surgindo com o tempo" (Almeida; Santos, 2017, p. 58).

1.3 Linguagem algébrica

A respeito da linguagem algébrica, Lins e Gimenez (1997) apresentam as ideias elaboradas pelo inglês Eon Harper em seu artigo "Fantasmas de Diofanto", publicado em 1987, que concebe a ideia de que poderíamos classificar a linguagem algébrica em:

a) retórica – apenas palavras;

b) sincopada – algumas notações especiais; e

c) simbólica – apenas símbolos e suas manipulações.

Essas serão as terminologias que usaremos para identificarmos e refletirmos acerca de quais são as formas de comunicação utilizadas pelos discentes. Sabemos ser impraticável observarmos o pensamento, portanto, o que poderá ser verificado e analisado serão as falas e registros dos estudantes.

De acordo com Harper (1987 *apud* Lins; Gimenez, 1997), há três estágios de desenvolvimento histórico relacionados às utilizações da linguagem algébrica: i) totalmente verbal (retórica); ii) atribuição de valores particulares (sincopada); e iii) resolução da atividade (simbólica). A crítica em relação a essa abordagem e outras semelhantes se dá pelo fato de ignorarem o fato de que a Álgebra “é assunto praticamente exclusivo do domínio da escola” (Lins; Gimenez, 1997, p. 95). Contudo, nossa pesquisa foi realizada em um ambiente escolar por meio de um Experimento de Ensino e pensada para esse contexto. Assim, julgamos pertinente a utilização dessas classificações.

Apesar de já termos definido quais serão as terminologias utilizadas para identificarmos as diferentes formas de comunicação e características da linguagem algébrica, trazemos as perspectivas acerca dessa temática para Rômulo Lins, James Kaput e Luis Radford apresentadas por Almeida e Santos (2017).

Rômulo Lins defende que a linguagem algébrica simbólica não só é possível, mas também adequada. Porém, defende que o pensamento algébrico poderá ser revelado por meio de diversas maneiras além dessa desde que haja a construção de significados para os objetos trabalhados: “O transformismo algébrico dentro de sua caracterização de pensamento algébrico não acontece de forma mecanizada” (Almeida; Santos, 2017, p. 39).

Para Radford, “o simbolismo alfanumérico é, de fato, considerado como o sistema semiótico da álgebra por excelência” (Almeida; Santos, 2017, p. 47). Apesar de destacar a importância de todo o percurso discente durante o desenvolvimento do pensamento algébrico, que com efeito é fundamental para a construção de significados para os objetos algébricos, Radford considera que “a linguagem algébrica é o ápice do pensamento algébrico” (Almeida; Santos, 2017, p. 52).

Já Kaput (2008 *apud* Almeida; Santos, 2017) nos traz esclarecimentos acerca da linguagem algébrica simbólica, que retratam também como se dão os seus processos de aprendizagem, necessários para a nossa pesquisa. O autor concebe os símbolos de forma central em sua perspectiva de pensamento algébrico, o que não significa reduzi-los ao transformismo, visto que, assim como Lins e Gimenez (1997), defende a necessidade da construção de significados de forma a promover uma compreensão: “Não é olhar os símbolos que caracteriza o pensamento algébrico, porém, olhar por meio dos símbolos, é entender o que cada símbolo significa” (Almeida; Santos, 2017, p. 41).

Ainda assim, em consonância com os outros autores, o autor defende que o pensamento algébrico poderá se manifestar por meio de diferentes linguagens como a gestual, numérica ou simbólica. O que determina a linguagem utilizada é o nível de experiência dos estudantes e o decorrer da idade.

Compreendemos, então, que a importância do domínio discente para com a utilização da linguagem algébrica simbólica está em seu grande potencial de síntese, como nos apresenta Radford (2009 *apud* Almeida; Santos, 2017), e a possibilidade de utilizá-la como ferramenta para alcançar novas possibilidades de estudo dos objetos algébricos desde que haja a construção de significados durante esse processo.

Além disso, entendemos, em consonância com as elucidações trazidas por Kaput (2008 *apud* Almeida; Santos, 2017), que o domínio discente referente à utilização da linguagem algébrica simbólica se dá por meio de uma construção gradual, propiciada através de experiências escolares e mediadas pelo(a) professor(a). Com o decorrer dessas experiências e com o passar da idade, o domínio discente, dessa particular maneira matemática de se comunicar, surgirá naturalmente.

1.4 Dificuldades discentes

Uma das dificuldades vividas pelos alunos, apontadas na obra de Lins e Gimenez (1997, p. 96), está relacionada à “não aceitação de falta de fechamento” referente aos momentos em que os estudantes não mais encontram soluções apenas numéricas.

> E, recusando-se a aceitar a expressão ‘8+g’ como resposta válida, [os estudantes] produzem respostas como ‘12’ (assumindo cada letra igual a 4). A expressão vem, então, de que ‘8+g’ não é ‘fechada’, pois não corresponde a um único resultado: ainda há ‘coisas a fazer’. Essa ‘não aceitação da falta de fechamento’ é uma noção elaborada pelo psicólogo e pesquisador australiano Kevin Collins, e tomada como característica de um estágio de desenvolvimento intelectual dentro de seu modelo” (Lins; Gimenez, 1997, p. 96).

Conforme Lins e Gimenez (1997, p. 97), a caracterização da Álgebra a partir de conteúdos e/ou notações deixam de fora o que gostariam de caracterizar como atividade algébrica: “A atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal”. Segundo Piaget, “Matemática *é* pensamento” (Lins; Gimenez, p. 95).

Outro aspecto que buscamos observar secundariamente nesta pesquisa se refere às sensibilidades que atravessam os estudantes durante o ensino-aprendizagem de Matemática, sobretudo da Álgebra. Quais podem ser as interferências dessas sensibilidades na aprendizagem?

Em Lins (2004), podemos analisar alguns pontos referentes às dificuldades discentes. Um dos aspectos que geram resistência em relação à Matemática é o internalismo, que diz respeito à Matemática ser suficiente nela mesma. Essa desconexão entre a utilização escolar das ferramentas matemáticas e a utilização social destas afasta a “matemática do matemático” da “matemática da rua”, o que pode causar estranheza nos estudantes e recusa à aproximação dela. O internalismo juntamente com a utilização dos objetos simbólicos são suficientes para que a Matemática seja reconhecida culturalmente como “um monstro”.

Lins (2004) se utiliza de dois argumentos principais para que a Matemática seja analisada como um monstro (monstro “monstruoso” para os alunos e monstro “de estimação” para os matemáticos). São eles: i) internalismo e ii) objetos simbólicos. “O internalismo coloca o matemático na posição de um deus” (Lins, 2004, p. 100), já que não pode ser contestada, e “justamente por não serem deste mundo, os monstros não seguem as regras deste mundo” (Lins, 2004, p. 101). A Matemática não depende de nada que exista no mundo físico. Ela se basta nela mesma, é feita para ela mesma e se justifica em si. Esse internalismo faz com que os estudantes possam não se sentir encorajados a tentar compreendê-la, pois a Matemática não segue as regras do mundo palpável. É abstrata.

Os objetos simbólicos da Matemática podem produzir uma espécie de animismo, que provoca no estudante uma culpabilização dos símbolos. Esse animismo pode fazer com que possamos sentir raiva, ressentimento e uma série de sentimentos relacionados aos objetos simbólicos na Matemática. É através dos símbolos (discurso da Matemática) que a relação de poder cultural e historicamente construída se faz presente, e é nos símbolos que o aluno deposita suas frustrações e estabelece, de forma eletiva, uma distância por não ver sentido no mundo real para que aqueles conhecimentos sejam adquiridos.

Essa culpabilização e monstrificação dos símbolos se dão, certamente, pela ausência de significados atribuídos a eles. Silva (2001, p, 190) aponta que “as dificuldades e a falta de significados reforçam para os alunos a ideia de que não são capazes de aprender matemática. A apatia pela disciplina aparece e, em muitos casos, é seguida do fracasso escolar” em consonância com Lins e Gimenez (1997) que ressaltam que o fracasso em Álgebra pode significar o fracasso absoluto na escola.

O "monstro" da Matemática é definido a partir da ausência de significado dado a ela. Podemos relacionar tal reflexão com a perspectiva de Álgebra adotada nesta pesquisa, também apoiada em Rômulo Lins e Joaquim Gimenez (1997): é necessário que haja a construção de significados para a linguagem algébrica simbólica de forma que possamos promover um ensino-aprendizagem de Álgebra que seja consistente e efetivo.

Em relação às trocas discentes em um contexto de explicitação de um Campo Conceitual, principalmente por meio da fala, característica bastante presente em nossa pesquisa, podemos recorrer a Silva (2001, p. 218), que explica:

> O trabalho em grupo e a produção coletiva de significados foram considerados muito importantes, pois, de alguma forma, os alunos se ajudavam, discutiam e chegavam a conclusões e trocavam ideias. Tudo isto facilitou o desenvolvimento das atividades. A importância de discutir com o colega era algo relevante também quando propunha atividades individuais.

Nessa produção, Silva (2001) focaliza seus esforços às práticas em sala de aula, em particular referentes ao ensino de Álgebra com alunos de 6ª série (atual 7º ano). Os estudantes pontuam que é imprescindível discutir, falar e opinar sobre as respostas dos colegas, o que, segundo a autora, favorece o processo de negociação de significados construídos coletivamente.

1.5 Dificuldades docentes

Além das dificuldades discentes, podemos observar também algumas atribulações que envolvem os docentes nas experiências de ensino-aprendizagem de Álgebra. Almeida e Câmara (2014), Ponte e Branco (2013), Vale e Pimentel (2013) e Almeida e Bernardino (2021) trazem algumas reflexões acerca desse tema.

O trabalho produzido por Almeida e Câmara (2014) nos traz reflexões de Lins e Gimenez (1997), que consideram que o fracasso em Álgebra pode significar o fracasso absoluto na escola, onde a Álgebra é entendida como um "momento de seleção" na educação escolar. Eles ainda destacam que, para esses autores, há uma grande dificuldade em perceber uma ruptura epistemológica na passagem do raciocínio aritmético para o pensamento algébrico e que há maior importância em promover um desenvolvimento da habilidade de resolução de problemas em detrimento da manipulação mecânica dos símbolos.

No trabalho de Almeida e Câmara (2014), é feito o questionamento se os(as) professores(as) de Matemática estão tendo em suas formações os subsídios necessários para trabalhar com os(as) alunos(as) o desenvolvimento do pensamento algébrico e se os cursos de licenciatura estão realizando esse preparo, visto que o papel dos(as) professores(as) pode favorecer ou atrapalhar a aprendizagem dos estudantes nesse campo de conhecimento matemático. Após uma pesquisa feita com licenciandos em Matemática, a conclusão é que "os licenciandos percebem muito mais claramente a álgebra quando o aluno se vale de uma linguagem algébrica" (Almeida; Câmara, 2014, p. 14). Os autores salientam que foram percebidas dificuldades na percepção dos licenciandos em relação ao reconhecimento das estratégias empregadas pelos estudantes da Educação Básica, nesse caso em problemas de partilha, quando eles não utilizavam a linguagem simbólica.

Já os trabalhos de Ponte e Branco (2013) e Vale e Pimentel (2013) voltam a atenção para a formação inicial de futuros professores dos primeiros anos.

Em Ponte e Branco (2013, p. 135), os sujeitos da pesquisa possuem uma "reduzida formação matemática anterior" e estão inseridos em um contexto de mudanças referentes ao ensino-aprendizagem de Álgebra, decorrentes de um comparativo entre a formação escolar que vivenciaram enquanto discentes e que irão proporcionar enquanto docentes. Uma das mudanças presentes nesse contexto transitório se refere ao que é designado muitas vezes como *early algebra*. Para promover o pensamento algébrico na sala de aula nos anos iniciais, é primordial que os(as) professores(as) desenvolvam uma compreensão pessoal do que significa pensar algebricamente. A pesquisa foi realizada utilizando uma metodologia de investigação e sequências pictóricas. Ponte e Branco (2013, p. 138) relatam:

> Este trabalho em torno de sequências pictóricas crescentes permite aos futuros professores percorrer um caminho de compreensão da utilização das variáveis, da procura da generalização e da construção e compreensão de expressões algébricas muito próximo do que deverão percorrer os seus alunos.

No trabalho realizado por Vale e Pimentel (2013, p. 120), cujo objetivo é "discutir as potencialidades da descoberta de padrões no pensamento algébrico e as suas interligações com a formação de professores", as autoras discutem a importância dos padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico em um contexto de formação continuada de professores dos anos iniciais e apresentam uma proposta didática, com o objetivo de servir de suporte, desenvolvida por elas.

Acentuam que a relevância desse tema nos primeiros anos de escolaridade está recebendo cada vez mais visibilidade por serem agora referidos em documentos curriculares nacionais e internacionais (Matemática do Ensino Básico, 2007; National Council of Teachers of Mathematics, 2007, *apud* Vale; Pimentel, 2013).

Esses documentos trazem, por exemplo, que "os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações" (NCTM, 2007, p. 39 *apud* Pereira, 2012, p. 28).

Vale e Pimentel (2013, p. 102) elucidam acerca da importância dessa temática na formação inicial e/ou continuada de professores, que refletirá na construção de oportunidades de pensamento algébrico na atuação docente, no entendimento necessário para a algebrização de problemas aritméticos, no "desenvolvimento nos professores de 'olhos e ouvidos algébricos' de modo que possam identificar oportunidades de generalização e sua expressão sistemática" e que possam realizar "práticas de encorajamento de processos de generalização e formalização no contexto de conjeturas e argumentação intencional", essas últimas inspiradas em um programa de formação de professores desenvolvido por Kaput e Blanton (2001, 2003, *apud* Vale; Pimentel, 2013) de modo que:

> Muitas dificuldades nas aprendizagens matemáticas dos alunos devem-se, por um lado, às concepções e atitudes dos professores que influenciam as suas ações na sala de aula e as suas interações com os alunos e entre alunos, e, por outro, às fragilidades no conhecimento matemático e didático desses professores e/ou à falta de compreensão desse conhecimento (Vale; Pimentel, 2013, p. 105).

Ainda acerca das possíveis atribulações docentes que envolvem o ensino-aprendizagem de Álgebra, Almeida e Bernardino (2021) buscam identificar as ideias de álgebra escolar de licenciandos em Matemática. Foram realizadas três perguntas aos licenciandos situados na segunda metade do curso e apresentados os seguintes resultados.

Para a primeira pergunta, "Para você o que é álgebra escolar?", a resposta majoritária foi de que a álgebra escolar se caracteriza como um campo da Matemática, seguida de que a Álgebra se refere à manipulação de expressões e resoluções de equações, aritmética generalizada, uso de variáveis e abstração.

Em relação à segunda pergunta, "Para você qual a importância de se ensinar Álgebra na Educação Básica? Justifique sua resposta.", os sujeitos da pesquisa expressaram majoritariamente que a importância se refere à resolução de problemas, com destaque aqueles em que estão associados ao cotidiano e ao desenvolvimento do raciocínio cognitivo matemático, manifestando uma forte presença de uma ideia referente aos procedimentos da manipulação algébrica. Os autores destacam que "a importância para resolução de problemas significa considerar relevante os elementos constitutivos de sua linguagem, manipulação e pensamento, como ferramentas de sucesso na aprendizagem matemática" (Almeida; Bernardino, 2021, p. 104).

No que se refere à terceira pergunta, "Para você, em qual ano e com qual noção/conceito/conteúdo se deve começar a ensinar Álgebra na Educação Básica? Justifique sua resposta.", a maioria dos sujeitos da pesquisa concorda com a abordagem algébrica apenas nos Anos Finais do Ensino Fundamental, alegando ser necessário que os estudantes já tenham se apropriado de boa parte das noções aritméticas para que sejam iniciados os trabalhos relacionados ao ensino de Álgebra, indo de encontro às perspectivas de Lins e Gimenez (1997).

Além disso, os licenciandos justificam que, para o início do ensino de Álgebra, é essencial a presença de letras e símbolos. Almeida e Bernardino (2021, p. 105) defendem que "é preciso romper essa barreira, e dar início à inserção à álgebra desde os anos iniciais da escolarização, sem o desenvolvimento de uma linguagem focada na manipulação simbólica, mas partindo da observação de padrões e regularidades", já que, a nosso ver, a perspectiva letrista do ensino de Álgebra não é condizente, inclusive, com as propostas curriculares da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

Os autores concluem que é fundamental se atentar ao que é proposto aos licenciandos em Matemática e pensar em ações formativas que possam romper com a exclusividade direcionada à Linguagem Simbólica e à iniciação da Álgebra somente com expressões e equações.

Nesse sentido, vamos refletir acerca das relações entre pensamento algébrico e comunicação matemática também a partir de um estudo realizado por Borralho e Barbosa (2011), cujo objetivo é compreender o significado da utilização de padrões num contexto de investigação, em sala de aula, como uma proposta para melhorar o desenvolvimento do pensamento algébrico. Os autores defendem que "a procura de padrões e regularidades permite formular generalizações em situações diversas, particularmente em contextos numéricos e geométricos, o que contribuirá para o desenvolvimento do raciocínio algébrico do aluno" (Borralho; Barbosa, 2011, p. 2).

Eles apontam que o pensamento algébrico, assim como ocorre no pensamento geométrico, se tornou uma orientação transversal do currículo de modo a ser desenvolvido de diversas maneiras e em diferentes contextos. No entanto, muitos alunos percebem a Álgebra como um conjunto de símbolos desgarrados uns dos outros, “uma matéria muito complicada” que só existe “para lhes dificultar a vida”. Isso se dá por, atualmente, a Álgebra ainda ser muito centrada na manipulação simbólica, abordada de forma descontextualizada e sem atribuições aos seus significados (Lins; Gimenez, 1997). Os autores defendem, em consonância com Kaput (2008, *apud* Almeida e Santos, 2017), que

> O autor (Kaput) defende ainda que o principal instrumento da Álgebra é o símbolo. Assim, por forma a melhorarmos o desenvolvimento do pensamento algébrico, tem que se desenvolver o sentido do símbolo, uma condição necessária para que tal aconteça é a utilização de práticas de ensino apropriadas onde todo o trabalho seja desenvolvido através de tarefas de natureza investigativa e exploratória, nas quais os alunos tenham a oportunidade de explorar padrões e relações numéricas e a possibilidade de explicitar as suas ideias, bem como a possibilidade de discutir e refletir sobre as mesmas. (p. 4)

A maneira como o(a) professor(a) seleciona as atividades que serão propostas em sala de aula e as formas de articulação dessas atividades é de suma importância de modo que Borralho e Barbosa (2011) defendem a exploração de padrões em um contexto de investigação como uma potente ferramenta para promover a capacidade de generalização a partir de situações concretas, fomentando o pensar algebricamente.

CAPÍTULO 2 – METODOLOGIA

Esta pesquisa terá uma abordagem qualitativa, tendo em vista que o objetivo é observar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades.

De acordo com Borba e Araújo (2019, p. 23), "pesquisas realizadas segundo uma abordagem qualitativa nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações". Utilizaremos duas definições feitas por Bogdan e Biklen (1994, p. 49-50) a respeito da abordagem qualitativa que expressam as intenções de nossa pesquisa: "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos [e] o significado é de importância vital na abordagem qualitativa", dado que nosso foco será observarmos que relação os estudantes podem desenvolver entre o pensamento algébrico e a linguagem algébrica em contato com situações que apresentem regularidades.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa, trabalhamos com estudantes do 8º ano de uma escola estadual de Belo Horizonte – MG. A escolha do ano curricular se deu por, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), a linguagem algébrica ser apresentada no contexto escolar aos estudantes no 7º ano. Porém, como o trabalho de campo foi realizado no início do ano letivo (maio de 2023) e com as possíveis defasagens curriculares decorrentes da pandemia da Covid-19, elegemos estudantes de 8º ano como sujeitos da pesquisa. Por essa razão, apesar de trabalharmos com estudantes de 8º ano, utilizaremos os "objetos de conhecimentos" e "habilidades" explicitadas nesse documento para o 7º ano, que vão ao encontro do nosso objetivo: observar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades.

É preciso realizar uma breve reflexão sobre a utilização da BNCC nesta pesquisa. A BNCC é um documento normativo, que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes da Educação Básica brasileira devem adquirir ao longo de suas trajetórias escolares. Por essa razão, ela serve de base para a confecção de diversos processos seletivos, em particular o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que promove acesso à maior parte das universidades públicas através do Sistema de Seleção Unificada (SISU), e financiamentos para universidades particulares através do Programa Universidade para Todos (ProUni). O acesso à educação pública de qualidade é um direito de todas e todos, inclusive quando se trata do Ensino Superior (Brasil, 2018). Portanto, o ingresso em uma universidade é uma potente ação para oportunidades de carreira, realizações pessoais, melhorias salariais e melhoria de vida.

Ubiratan D'Ambrósio, em 1996, em sua obra intitulada *Educação Matemática: da teoria à prática*, trabalha algumas reflexões acerca dessa temática: "Não pode haver dúvidas quanto ao prejuízo que acarretarão os testes nacionais, bem como um currículo obrigatório para todo o país" (p. 59). D'Ambrósio (1996) acredita que a utilização de testes nacionais e currículos unificados vão contra as conceituações de educação tanto do ponto de vista social quanto do ponto de vista cognitivo. Ressaltamos que a BNCC não é um currículo obrigatório, na verdade, se trata de um documento orientador. Mas, é o documento que embasa a utilização dos objetos de conhecimento e habilidades que serão cobrados no ENEM, transformando-o em um documento que não só orienta, mas também avalia e seleciona.

O autor elucida sobre a utilização governamental dessas dinâmicas (D'Ambrósio, 1996, p. 60): "Eu rejeito qualquer insinuação de que as autoridades educacionais no Brasil tenham uma tendência a essa linha de pensamento discriminatória e racista. Suas razões serão antes um equívoco, o que da mesma maneira causa muita apreensão". Contudo, em 2024, a realidade educacional brasileira conta com a presença de um teste nacional, baseado em um currículo unificado, como única forma de ingresso na maioria das universidades.

D'Ambrósio (1996, p. 60) compartilha conosco uma análise das consequências do uso de testes nacionais unificados:

> Igualmente causa apreensão saber que muitos jovens não passarão no teste nacional. E pode-se prever que entre estes estarão principalmente jovens brasileiros comuns, filhos de famílias sem sucesso, carentes e mesmo desfeitas. Provavelmente esses constituirão a maioria dos fracassados. A impressão que se tem é de que as autoridades têm uma visão desses jovens como descartáveis no conceito corrente de desenvolvimento. Onde está, com essa medida darwinista, o passo em direção à redenção desses jovens? Esse exame é equivalente a propor melhorar a saúde do povo brasileiro mediante uma compra maciça de termômetros e dando um deles a cada família!

Apropriando-nos da metáfora utilizada por D'Ambrósio (1996), complementamos: o exame nacional unificado existe e termômetros estão sendo distribuídos pelos órgãos responsáveis. Sejamos, então, remédio. Utilizaremos a BNCC por ela fazer parte da realidade que nos cerca. Todavia, buscaremos desenvolver os objetos de conhecimento e as habilidades previstas por ela de forma humana, considerando, em particular, as sensibilidades que atravessam os educandos durante esse desenvolvimento.

Os *objetos de conhecimento* a serem tratados no 7º ano, conforme a BNCC (Brasil, 2018) na unidade temática de Álgebra, são: i) Linguagem algébrica: variável e incógnita; ii) Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica; iii) Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais; e iv) Equações polinomiais do 1º grau. Os objetos de conhecimento dialogam precisamente com os objetivos desta pesquisa.

Apresentaremos algumas *habilidades* a serem desenvolvidas no 7º ano, dentro da unidade temática de Álgebra, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p. 307):

> (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
> (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
> (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
> (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
> (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Em relação ao Plano de Curso do Estado de Minas Gerais (2023) para o 7º ano do Ensino Fundamental, os *Objetos de Conhecimento* a serem tratados na unidade temática de Álgebra são os mesmos presentes na BNCC (2018). As habilidades também se repetem, sendo acrescentadas as que seguem:

> (EF07MA46MG) Reconhecer a variação e dependência de grandezas para compreender a realidade.
> (EF07MA47MG) Identificar grandezas diretamente proporcionais.
> (EF07MA48MG) Identificar grandezas inversamente proporcionais.
> (EF07MA49MG) Reconhecer uma equação de primeiro grau e utilizá-la na modelagem de diferentes situações.
> (EF07MA50MG) Identificar a raiz de uma equação do primeiro grau.
> (EF07MA51MG) Resolver uma equação do primeiro grau.

O Plano de Curso do Estado de Minas Gerais (2023) ainda nos elucidam que as técnicas de resoluções dos objetos algébricos apresentados nos currículos “devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problemas e não como objetos de estudo em si mesmo”.

A pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual de Belo Horizonte, localizada em uma das principais ruas do bairro e situada entre uma ocupação e duas comunidades na região de Venda Nova, de onde provém a maior parte dos estudantes. A escola oferece os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio Regular diurno, Ensino Médio Regular noturno e Ensino Médio para a EJA. A escola atua desde 1979, com 17 salas de aula, uma sala de recursos, uma sala de informática, uma biblioteca, uma sala de multimeios e duas quadras. O acesso a todas as estruturas da escola se dá por escadas ou rampas, garantindo acessibilidade aos estudantes e funcionários. Além dos compromissos pedagógicos, a escola também atua na comunidade, promovendo, por exemplo, varais solidários, com doações de roupas e sapatos. Possui, em média, 120 funcionários e 1.300 alunos atendidos nos três turnos. A escolha da escola ocorreu por ser meu local de trabalho, agora como professora concursada e nomeada, cujo contato com a Direção, professores, estudantes e demais funcionários sucedeu em apoio ao desenvolvimento da pesquisa. Nessa escola, leciono para turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, 1º e 2º anos do Ensino Médio Regular e 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio EJA.

A metodologia escolhida para a realização dos encontros desta pesquisa é denominada por Borba, Almeida e Garcias (2018) como Experimento de Ensino. Segundo esses autores, o Experimento de Ensino é “uma metodologia de pesquisa que busca explorar e explicar as atividades matemáticas dos estudantes. Ela é primordialmente utilizada por pesquisadoras que buscam entender os conceitos matemáticos e as operações efetuadas” (Borba; Almeida; Garcias, 2018, p. 43). Através dos Experimentos de Ensino, as pesquisadoras buscam entender as concepções matemáticas dos estudantes e o modo como eles lidam com os conceitos matemáticos.

Já que é difícil ou impraticável atender a esse objetivo com todos os estudantes em uma determinada sala de aula, a ideia é trabalhar apenas com um ou poucos alunos. Cobb e Steffe (1983) definem, basicamente, Experimento de Ensino como uma série de encontros com um estudante, ou uma dupla de estudantes, ou alguns estudantes, por certo período de tempo, para a realização de atividades propostas com o objetivo de compreender a perspectiva discente. No Experimento de Ensino, o(a) pesquisador(a) deve estar constantemente procurando “ver” suas ações e as do estudante sob o ponto de vista do estudante, o que lhe permite compreender melhor as estratégias que ele utiliza.

Steffe e Thompson (2000, p. 273) afirmam que o Experimento de Ensino envolve

> [...] um agente que ensina (professor-pesquisador), um ou mais estudantes, um observador dos episódios de ensino e um método de registro que registra o que acontece em cada episódio. Esses registros podem ser usados na preparação dos episódios subsequentes, bem como na condução da análise conceitual retrospectiva daquele encontro.

A observadora que contribuiu para a elaboração desta pesquisa foi uma professora que leciona na mesma escola em que se desdobraram os encontros. O convite foi realizado quando, durante nossas trocas no dia a dia escolar, tive o conhecimento de que ela havia defendido recentemente sua dissertação no Mestrado Profissional, na área de Ensino de Ciências, na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Por se tratar de uma parceira no dia a dia profissional, possuir compreensão metodológica e dispor da experiência em um programa de mestrado semelhante, realizei o convite para estabelecermos essa parceria. Durante o período da pesquisa, a observadora estava gestando e, por motivos de consultas para o pré-natal, não pôde comparecer na totalidade dos encontros, mas compareceu em alguns e realizou os registros referentes.

O Experimento de Ensino envolve quatro aspectos principais de acordo com Borba; Almeida; Garcias (2018, p. 44-45):

(1) O primeiro aspecto diz sobre o ‘ensino exploratório’, onde o professor-pesquisador rastreia os diversos caminhos e decisões que os estudantes possam ter, deixando de lado sua forma de pensar para tentar entender a forma de pensar dos estudantes e como eles lidam com conceitos matemáticos, trazendo o protagonismo discente.

(2) O segundo aspecto diz respeito ao teste da hipótese de pesquisa. Os experimentos de ensino servem tanto para testar uma hipótese quanto para gerá-la. Durante a realização do experimento de ensino, a hipótese inicial servirá como guia para as intenções iniciais do professor-pesquisador, porém, essas hipóteses poderão ser reformuladas de acordo com as interações dos estudantes ao longo dos experimentos. Os processos de formulação das hipóteses formam um círculo recursivo, portanto, em que o professor-pesquisador em vez de acreditar que o estudante está errado ou que o seu conhecimento é imaturo ou não razoável, deve se concentrar em entender o que o estudante pode fazer, isto é, construir um quadro de referência no qual o que o estudante pode fazer que pareça razoável.

(3) O terceiro aspecto a ser considerado diz respeito à interação com os estudantes, pois Steffe e Thompson (2000) ressaltam que aprender como interagir com os estudantes é um dos pontos centrais de qualquer experimento de ensino.

(4) O quarto e último aspecto diz respeito à ‘interação responsiva e intuitiva’, algo que o professor pesquisador vai aprendendo e aperfeiçoando ao longo do transcorrer dos

experimentos de ensino. Nessa interação, o professor-pesquisador deixa de criar expectativas em relação ao que o estudante pode fazer e sua atenção se mantém em tentar compreender de que modo ele está pensando e lidando com os conteúdos matemáticos, propondo e criando situações que lhes permitam construir um cenário matemático independente.

O segundo aspecto prevê que as hipóteses de pesquisa devem ser reformuladas ao longo do Experimento de Ensino. Esse aspecto foi adaptado em nossa pesquisa, visto que realizamos previamente um esboço de quais atividades seriam desenvolvidas durante os encontros com os estudantes e não sentimos necessidade de realizar adaptações ao longo do processo. Inicialmente, tínhamos o desejo de observar a interação dos estudantes com diversos Objetos de Conhecimento (vide Quadro 1). Esse desejo perdurou durante a realização dos encontros, não havendo necessidade de realizar as adaptações previstas.

Realizamos encontros semanais com os estudantes nos meses de maio e junho de 2023, durante cinco semanas, totalizando cinco encontros, com uma hora de duração em média, após o horário da aula regular. O turno dos estudantes termina às 11h30, e os Experimentos de Ensino sucederam a partir das 11h40 na biblioteca da escola. A cada estudante, foi disponibilizado almoço após os encontros.

A escolha dos discentes que fizeram parte desta pesquisa foi feita através de um convite aberto ao 8º ano no dia dois de maio de 2023. Nesse dia, 12 estudantes da primeira turma em que o convite foi realizado demonstraram interesse em participar da pesquisa, e os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido de alunos e responsáveis foram entregues para serem assinados, para que os responsáveis estivessem cientes da permanência dos estudantes fora do período das aulas regulares. Como o Experimento de Ensino prevê uma quantidade reduzida de participantes, não estendemos o convite às demais turmas de 8º ano da escola.

Para a escolha das atividades desenvolvidas durante os encontros do Experimento de Ensino, usamos como parâmetros os “objetos de conhecimento” e as “habilidades” previstas para serem desenvolvidas durante o 7º ano de acordo com a BNCC (Brasil, 2018). As atividades foram distribuídas da seguinte maneira:

Quadro 1: Cronograma do Experimento de Ensino					
DATA	**TEMPO DE DURAÇÃO**	**TEMAS**	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADE**	**QUANTIDADE DE ESTUDANTES**
10/05	58min	Generalização de Sequências	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	9
17/05	01h06min	Generalização de Sequências	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.	8
24/05	49min	Generalização de Sequências	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.	8
31/05	01h09min	O uso da Linguagem Algébrica	Equação Polinomial de 1º grau	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.	7
07/06	52min	Mapa Mental	No último encontro, confeccionamos um Mapa Mental, cujo tema central é a Linguagem Algébrica.		5

Para eleger as atividades propostas durante os cinco encontros do Experimento de Ensino, recorremos a dois livros didáticos, atentas ao critério estabelecido de confeccionar as atividades de cada encontro de acordo com os *objetos de conhecimento* e *habilidades* previstas pela BNCC (Brasil, 2018). As atividades selecionadas foram retiradas dos livros: *Matemática hoje é feita assim*, 7º ano, de Antônio José Lopes Bigode (FTD, 2000); e *Projeto Teláris: Matemática*, 7º ano, de Luiz Roberto Dante (2015).

No último encontro do Experimento de Ensino, realizamos a confecção de um Mapa Mental para construir uma sistematização a respeito das percepções dos estudantes em relação à utilização da linguagem algébrica. Em um ensaio teórico, Silva (2015) compõe o que são Mapas Mentais e Mapas Conceituais, e sugere sete momentos em que o professor poderá realizar a avaliação ao utilizar essas metodologias de ensino. Em 1972, Joseph Donald Novak, em um programa de pesquisa na Cornell University, concebeu Mapas Conceituais com a intenção de acompanhar e entender as mudanças no conhecimento das crianças em relação à compreensão da ciência. Os Mapas Conceituais proporcionam, de maneira sistematizada, a organização da relação entre conceitos em um conjunto de representações simbólicas de forma a facilitar uma aprendizagem significativa, visto que, segundo o autor, essa metodologia de ensino “transpõe o ‘viciado’ modelo educacional amparado no ensino ao invés da aprendizagem” (Silva, 2015, p. 786).

O Mapa Mental é uma forma de estruturar o pensamento. Ele é elaborado em formato de “teia” (ou seja, de forma não linear), onde o conceito principal é posicionado ao centro e os demais conceitos relacionados são descritos apenas com a utilização de palavras-chave ou ilustrações: “Um Mapa Mental é estruturado com base em uma ‘árvore’ e seus ‘galhos’, onde do centro divergem troncos principais expandindo cada tópico do assunto principal, e de cada um deles, saem ‘galhos’ menores com os detalhes explicativos” (Silva, 2015, p. 795). Dessa maneira, permite uma rápida e profunda explicação das ideias sem perder o foco do tema central. O Mapa Mental se trata de uma representação gráfica, que “projeta o processo de pensar acerca de um determinado assunto ou tema, por meio de um processo de estímulo ao pensamento criativo" (Silva, 2015, p. 795), o que vai ao encontro do objetivo desta pesquisa: observar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades.

A principal vantagem da construção de um Mapa Mental se dá por essa construção ser feita de forma livre e sem restrições para a elaboração de sua estrutura de modo que o discente poderá expor com liberdade as sistematizações conceituais elaboradas por ele até aquele momento, visto que o processo de aprendizagem está em constante transformação e inacabamento (Freire, 1996). Entretanto, sua principal desvantagem é que as ligações conceituais estão limitadas às associações simples. Para casos em que a compreensão de um conceito é essencial para a compreensão de outro, há a possibilidade da elaboração de Mapas Conceituais.

O Mapa Conceitual é também uma representação gráfica do conhecimento, semelhante ao Mapa Mental. Contudo, é elaborado de forma que “os conceitos aparecem dentro de caixas, enquanto as relações entre os conceitos são especificadas por meio de frases de ligação nos arcos que unem os conceitos” (Silva, 2015, p. 797). As frases de ligação são chamadas de proposições e possuem funções estruturantes na representação de uma relação entre dois conceitos. “Enquanto o Mapa Conceitual trabalha várias ideias progressivas para se chegar a um conceito, o Mapa Mental percorre vários caminhos direcionados por uma ideia” (Silva, 2015, p. 810). Portanto, julgamos que a construção de um Mapa Mental satisfaz melhor os objetivos desta pesquisa.

Durante os encontros do Experimento de Ensino, contamos, em quase todos os dia, com a presença da observadora conforme previsto para a realização dessa metodologia. A observadora auxiliou na verificação do funcionamento da câmera durante a realização dos experimentos de forma a garantir que as gravações fossem realizadas com êxito. Além disso, produziu um diário de campo, cuja descrição dos relatos e registros passaram pelas suas próprias percepções, trazendo outra perspectiva para os acontecimentos realizados, para além do diário de campo da pesquisadora, dos registros em vídeo e áudio captados durante a realização dos encontros e dos registros escritos dos alunos. Dessa forma, foi possível realizar uma triangulação de dados.

Borba e Araújo (2019, p. 36) nos dizem que "a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados". Dessa maneira, segundo os autores, há um aumento de credibilidade para uma análise que se ancora em uma abordagem qualitativa. Assim, podemos utilizar a triangulação de fontes e a triangulação de métodos. Nesta pesquisa, a triangulação de fontes será feita de forma que as fontes utilizadas são: registros em diário de campo da pesquisadora, registros em diário de campo da observadora, gravação em vídeo e áudio e registro dos estudantes.

Após a realização do Experimento de Ensino, as análises foram feitas buscando observar se os alunos puderam resolver os problemas propostos, com ou sem a utilização da linguagem algébrica simbólica e se houve a compreensão desse sistema e construção de significados (Lins; Gimenez, 1997). Pretendemos observar, através da transcrição dos encontros do Experimento de Ensino, dos diários de campo da pesquisadora e da observadora e dos registros dos estudantes, contando com o apoio da literatura, que relação os estudantes podem desenvolver entre o pensamento algébrico e a linguagem algébrica em contato com situações que apresentem regularidades.

Nessa perspectiva, reitero a consonância da escolha do Experimento de Ensino como metodologia e objetivo da pesquisa. Segundo Borba, Almeida e Garcias (2018, p. 46):

> [...] nesse tipo de pesquisa, atividades pedagógicas são propostas a estudantes de forma que o professor-pesquisador possa 'ouvir' de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes e, a partir desse 'ouvir', elaborar modelos acerca do seu modo de pensar a respeito e lidar com certos conteúdos matemáticos.

Nesse caso, utilizamos a generalização de sequências. Acreditamos que essa metodologia venha ao encontro do objetivo da pesquisa, visto que buscamos observar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades.

CAPÍTULO 3 - EXPERIMENTO DE ENSINO

A seguir, faremos uma descrição cronológica de como sucederam os encontros do Experimento de Ensino, e as análises dos acontecimentos ancoradas nos entendimentos teóricos apresentados no capítulo 1.

3.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro do Experimento de Ensino ocorreu no dia 10 de maio de 2023, às 11h40, e teve duração de 58 minutos. Contamos com a presença de nove estudantes, quatro meninos e cinco meninas, cujos nomes verdadeiros serão omitidos para não expor os participantes e garantir a ética desta pesquisa[2]. Neste sentido, utilizaremos nomes fictícios para identificá-los.

Ao chegarem à biblioteca, local onde ocorreram os encontros do Experimento de Ensino, os estudantes encontraram sobre as mesas a folha da primeira atividade proposta para aquele encontro, uma caneta e uma balinha de chocolate para cada. A ideia de disponibilizar as canetas surgiu do desejo de que os registros fossem feitos integralmente sem a possibilidade de serem apagados. Os estudantes ficaram com as canetas e as utilizaram nesse e nos encontros posteriores. A atividade dois, prevista para o primeiro encontro, foi distribuída posteriormente, quando os estudantes finalizaram a primeira. A atividade três foi realizada no encontro seguinte.

A biblioteca da escola conta com três mesas redondas e duas mesas retangulares maiores. As mesas retangulares maiores estavam ocupadas com livros, pois a biblioteca está passando por um processo de catalogação junto ao projeto de extensão Biblioteca Escolar do curso Biblioteconomia da UFMG. Todas as três mesas redondas foram utilizadas.

A metodologia escolhida para o desenvolvimento desta pesquisa prevê a presença de um observador, porém, neste primeiro encontro, a observadora não pôde comparecer.

Para o primeiro encontro, preparamos três atividades[3] que envolvem generalização de sequências e contemplam, de acordo com a unidade temática de Álgebra do 7º ano da BNCC (Brasil, 2018), o Objeto de Conhecimento *Linguagem algébrica: variável e incógnita* e a Habilidade: *(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.* Apresentamos a seguir as atividades:

---

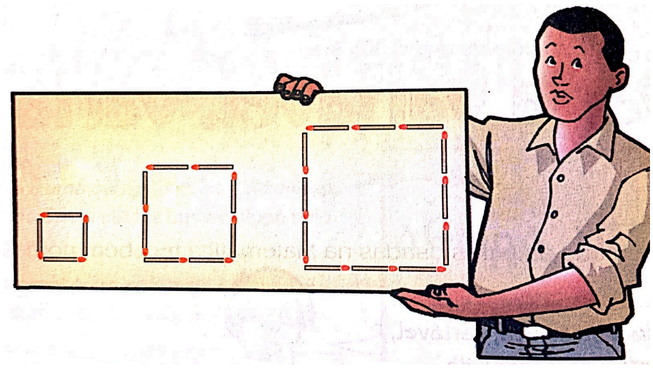
[2] A pesquisa foi submetida à análise da Comissão de Ética na Pesquisa da UFMG, autorizada sob o número 5.905.199.

[3] As atividades foram adaptadas do livro didático de Bigode (2000). Atividade 1: p. 110-112, Atividade 2: p. 113-117 e Atividade 3: p. 120-121.

ATIVIDADE 1

Contorno de quadrados

Observe a sequência de quadrados feitos com palitos de fósforo, como na figura abaixo.

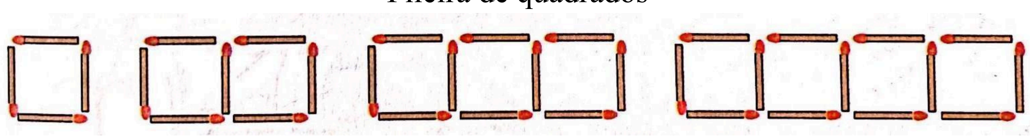


Agora, responda:

a) Quantos palitos são necessários para fazer um quadrado medindo 2 palitos de lado?
b) Quantos palitos são necessários para fazer um quadrado medindo 5 palitos de lado?
c) E o 10º quadrado da sequência, isto é, aquele com 10 palitos de lado?
d) Quantos palitos tem o 23º quadrado da sequência?
e) Qual é a posição do quadrado que precisa de 104 palitos para ser formado?
f) Qual é a relação entre a quantidade de palitos para formar um quadrado e o lugar que ele ocupa na sequência?

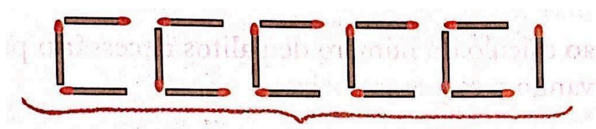
ATIVIDADE 2

Fileira de quadrados

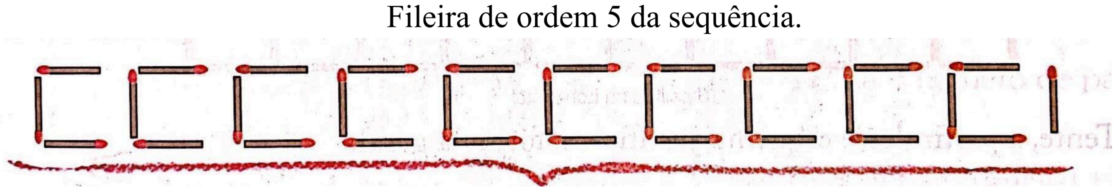


Faça uma sequência de retângulos formados por palitos como a que está desenhada acima. Havendo número suficiente de palitos e muita paciência, podemos construir uma fileira com qualquer número de quadrados.

Veja a mesma construção da fileira por este outro ponto de vista:



Fileira de ordem 5 da sequência.



Fileira de ordem 10 da sequência.

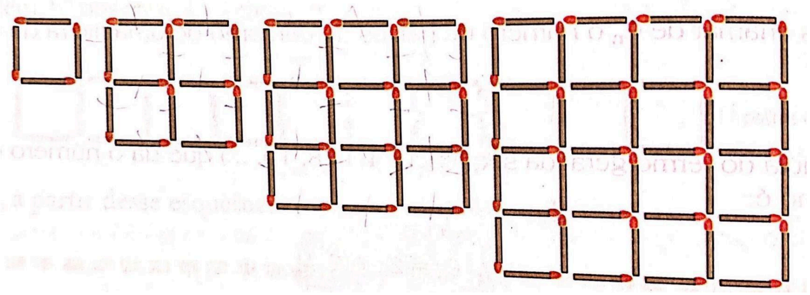
Agora, responda:

a) Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 5?
b) Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 10?
c) Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 100?
d) Qual é a ordem da fileira que para ser formada necessita de 28 palitos?
e) Qual é a ordem da fileira que para ser formada necessita de 136 palitos?
f) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de palitos utilizados para montar uma sequência de qualquer ordem? Se sim, como você expressaria essa situação?

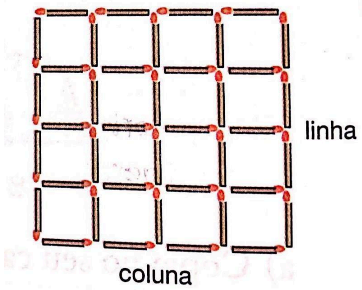
ATIVIDADE 3

Rede de quadrados

1) Observe a sequência de redes de quadrados:



2) Agora, observe mais atentamente o desenho da rede de ordem 4:



a) Quantas são as colunas? ___________
b) Quantos palitos horizontais há em cada coluna? ___________
c) Quantos são os palitos na horizontal? ___________
d) Há mais palitos horizontais ou verticais? ___________
e) Quantos palitos temos ao todo? ___________

3) Agora, responda às mesmas questões para uma rede de quadrados de ordem 5.

a) Quantas são as colunas? ___________
b) Quantos palitos horizontais há em cada coluna? ___________
c) Quantos são os palitos na horizontal? ___________
d) Há mais palitos horizontais ou verticais? ___________
e) Quantos palitos temos ao todo? ___________

4) Quantos palitos são necessários para formar uma rede de quadrados de ordem 11?

5) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de palitos utilizados para montar uma sequência de rede de quadrados de qualquer ordem? Se sim, como você expressaria essa situação?

Encaminhamentos

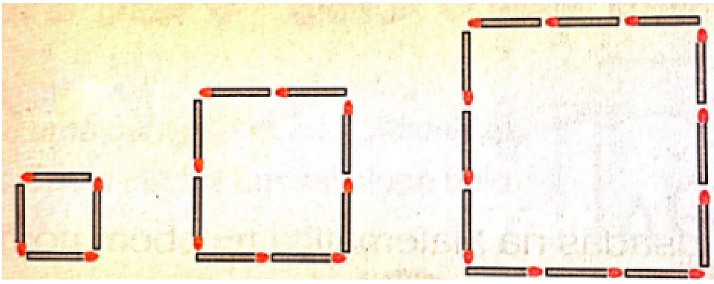
Após desejar as boas-vindas e fazer os devidos agradecimentos por aceitarem participar da pesquisa, expliquei como seria estabelecida a dinâmica dos encontros e o que estava proposto para aquele dia.

00:00:08	Paola	[...] Eu quero entender o que vocês pensam enquanto estão resolvendo, então eu não vou poder ajudar. Vocês vão ler as questões e ver o que vocês conseguem fazer... Então? Vamos lá!

Os estudantes, logo em seguida, começaram a fazer a atividade juntos. Eles foram distribuídos nas três mesas redondas disponíveis da biblioteca, e o desenvolvimento das atividades foi realizado coletivamente, quando os focos de discussão estavam entre os integrantes da mesma mesa e em alguns momentos se estendiam para as outras.

Para desvendar a letra *a) Quantos palitos são necessários para fazer um quadrado medindo 2 palitos de lado?* da primeira atividade, nenhum estudante apresentou dúvidas conceituais, porém eles apresentaram dúvidas interpretativas. Larissa mostrou dificuldades em perceber o que era considerado o lado do quadrado: o mesmo lado ou lados paralelos. Com o intuito de auxiliar a colega, os demais estudantes mostraram que o quadrado ao qual a questão se referia era o segundo que estava no desenho da atividade.

00:01:36	Davi	É o segundo!
00:01:36	Karla	Gente, é o segundo!
00:01:40	Lucas	Oito.
00:01:42	Isadora	Então...
00:01:44	Lucas	São necessários oito palitos para fazer um quadrado com dois palitos de cada lado.
00:02:20	Karla	É 2 vezes 4!
00:02:30	Lucas	Tipo assim, um quadrado tem quatro lados, e na questão está assim: “dois palitos de cada lado”, dois palitos de cada lado, então, são dois palitos de todos os lados, dois vezes quatro dá oito.



Pudemos perceber que Karla e Lucas reconhecem de imediato a regularidade proposta pela atividade e já esquematizam uma generalização inicial: o lado multiplicado por quatro. A fala de Lucas, realizada no minuto 2:30, aponta, através de sua explicação, que há compreensão de significados (Lins; Gimenez, 1997) e estabelecimento de relações, primeira característica do pensamento algébrico que é revelada segundo Almeida e Santos (2017).

No momento de realizar os primeiros registros, quando Davi percebeu que Lucas estava se estendendo na escrita, Lucas justificou que, para que "o povo" pudesse entender (pudemos entender que se referia a professores(as) e pesquisadores(as) matemáticos), o registro precisaria ser "técnico".

00:03:29	Larissa	Eu coloquei só "8 palitos".
00:03:35	Davi	Ô gente era só pôr o oito... O cara [Lucas] está escrevendo uma frase de todo tamanho.
00:03:41	Lucas	Uai, mas tem que ser uma frase técnica, para o povo entender
00:03:43	Davi	Oito palitos.
00:03:45	Paola	Pode ser do jeito que vocês quiserem.

Todos os estudantes registraram "*8 palitos*" assim como Davi, exceto Isadora, que registrou "*são necessários 8 palitos para fazer um quadrado medindo 2 palitos de lado*" e Lucas, que registrou "*um quadrado tem 4 lados, logo, 2 palitos de lado serão utilizados 8 palitos pois 2x4=8*". Apesar dos registros sucintos, pudemos perceber que houve, através das discussões coletivas, um processo de negociação de significados vivenciado por todos os participantes.

No desenvolvimento da letra *b) Quantos palitos são necessários para fazer um quadrado medindo 5 palitos de lado?*, não houve dúvidas nem conceituais, nem interpretativas, e os estudantes perceberam que, para solucionar a atividade, seria necessário multiplicar quantidade de palitos pela quantidade de lados do quadrado. A extensão do raciocínio do que foi proposto na letra a) para a letra b) foi imediata e geral, mostrando clara compreensão da sequência. Todos registraram "*20 palitos*", exceto Lucas, que registrou "*São necessários 20 palitos, pois 4x5=20*".

Julgamos que os registros foram, em sua maioria, iguais, pelo fato de a atividade ser desenvolvida coletivamente. Porém, não consideramos que esse fato atrapalhou as análises da pesquisa, visto que os estudantes apresentaram entendimento das questões solicitadas na atividade. Na sala de aula, também, eles se encontram juntos e um pode interferir na ação do outro. Na verdade, acreditamos, em consonância com Silva (2001), que as discussões entre os pares favoreceram o processo de negociação de significados matemáticos.

No desenvolvimento da letra *c) E o 10º quadrado da sequência, isto é, aquele com 10 palitos de lado?*, o enunciado trouxe uma nova informação: trata-se de uma sequência.

00:04:38	Larissa	É décimo grau?
00:04:44	Lucas	Décimo lugar.
00:04:45	Larissa	Ah, décimo lugar!
00:04:45	Lucas	Gente, é uma sequência! Uma sequência, no desenho aqui, olha, tem um quadrado com um palito de lado, tem um quadrado com dois palitos de lado, o terceiro quadrado tem três palitos de lado, então o décimo tem dez palitos de lado.
00:05:07	Larissa	Então a sequência... Isto é, a gente tem aquele com dez palitos de lado.
00:05:13	Lucas	Sim.
00:05:10	Davi	Agora para escrever...

Nesse momento, os estudantes não verbalizaram qual operação deveria ser feita, tão pouco qual seria o resultado registrado por todos. Contudo, todos registraram "*40 palitos*", quando pudemos novamente observar que houve a construção de significados (Lins; Gimenez, 1997) e o estabelecimento de relações (Almeida; Santos, 2017). Os registros foram iguais, exceto o de Lucas, que continuou explicitando a operação efetuada para a aquisição daquele resultado da seguinte maneira: "*Serão necessários 40 palitos, logo, 10x4=40*".

No desenvolvimento da letra *d) Quantos palitos tem o 23º quadrado da sequência?*, houve um certo descompasso, e alguns estudantes apresentaram dificuldade para acompanhar o ritmo dos demais. Todavia, as discussões coletivas seguiram, e logo os alunos ritmaram novamente.

Lucas reparou que a atividade abordava "Matemática com Geometria", assumindo/reconhecendo serem temas diferentes. No Ensino Fundamental, a disciplina Matemática dispõe de cinco aulas semanais. A professora dessa turma, certamente com a preocupação de garantir o contato e a aprendizagem, destaca uma aula semanal especificamente para Geometria e as outras quatro aulas para desenvolver os demais conteúdos, o que nem sempre contribui para a articulação da aprendizagem, visto que a Aritmética, a Álgebra e a Geometria podem ser tratadas concomitantemente (Lins; Gimenez, 1997) de forma que uma mesma atividade pode se utilizar dos conhecimentos dessas três áreas para ser solucionada.

00:06:32	Lucas	Mas sabe o que eu estou pensando?
00:06:47	Raquel	23 vezes quatro, ou 23 dividido por quatro?
00:06:49	Larissa	Dividido não é, ou você vai abaixar ela...
00:06:51	Lucas	Isso é matemática com geometria, porque se cada palitinho desse fosse um centímetro ia ser um quadrado com três centímetros de lado, cada. Legal, gostei.
00:07:23	Larissa	É, aí quanto der, é o número de palitos.
00:07:35	Raquel	Pode fazer a conta aqui atrás?
00:07:37	Paola	Pode.
00:07:40	Davi	Nossa, olha a próxima aí.

Nesse momento, alguns estudantes apresentaram dificuldade em realizar os cálculos, mas um ajudou o outro e todos elaboraram o registro "*92*" ou "*92 palitos*". Pudemos perceber, pelo apontamento de Larissa no minuto 6:49, que houve a compreensão de que se trata de uma sequência crescente de forma que a operação de divisão não seria adequada. A estudante apresentou uma capacidade de estabelecer relações (Almeida; Santos, 2017) que, contraditoriamente, não se fez presente no minuto 07:59 de modo que entendemos que a capacidade de estabelecer relações ainda estava em construção.

Durante o desenvolvimento da letra *e) Qual é a posição do quadrado que precisa de 104 palitos para ser formado?*, os estudantes apresentaram dificuldades com a operação de divisão. Matheus expôs para os colegas uma maneira diferente para solucionar a questão solicitada, pautada no aritmeticismo (Lins, 1992 *apud* Almeida e Santos, 2017), em que o objeto de trabalho é exclusivamente números, operações aritméticas e uma relação de igualdade.

00:07:51	Larissa	Qual é a posição do quadrado que precisa de 104 palitos?
00:07:56	Lucas	É só fazer 104 dividido por quatro.
00:07:59	Larissa	24 dividido por quatro... Vezes quatro.
00:08:07	Isadora	Está perguntando a posição.

00:08:10	Larissa	Mas é 24, porque se 23 dá 92, 24 vai dar 104.
00:08:20	Lucas	Não gente, cento e quatro dividido por quatro dá vinte e seis, que é o vigésimo sexto lugar da sequência, vigésimo sexto quadrado da sequência.
00:08:36	Davi	Mas como, então, o 23 deu 92?
00:08:49	Larissa	23 vai dar 92 e aí 26... Não tem lógica… 24 vezes quatro é quanto?
00:09:16	Lucas	Dá 96. 25 vezes quatro dá 100.
00:09:23	Mateus	Fica em vigésimo sexto lugar.
00:09:32	Paola	Mateus, como você chegou à conclusão de que é vigésimo sexto?
00:09:35	Mateus	Eu usei a b) como referência para ver que fica no vigésimo sexto lugar, se a... O vigésimo terceiro quadrado tem 92 palitos e a sequência de quadrados aumenta quatro palitos por vez, eu calculei que no próximo quadrado ia ter mais quatro, então eu fiz 92 mais quatro 96, mais quatro 100 e mais quatro 104, que é três e fica em vigésimo sexto lugar.
00:10:13	Lucas	Só que eu achei mais fácil fazer 104 dividido por quatro, dá 26.

No registro dos estudantes, apareceram: "*26*", "*26ª*", "*26º lugar*", "*está no 26 lugar*" e "*a posição do quadrado é 26º* ".

A próxima questão solicitava a generalização da sequência: *f) Qual é a relação entre a quantidade de palitos para formar um quadrado e o lugar que ele ocupa na sequência?* Nesse momento, os estudantes discutiram sobre a relação entre a posição da sequência e a quantidade de palitos em cada lado do quadrado, buscando estabelecer uma relação (palavra utilizada no enunciado). Nesse momento, a atividade proposta impulsionou a verbalização da característica central do pensamento algébrico (Almeida; Santos, 2017): a capacidade de estabelecer relações.

00:10:48	Davi	Esse daí eu não entendi não.
00:11:09	Karla	Lugar?
00:11:10	Lucas	A cada quadrado aumenta quatro palitos.
00;11:13	Isadora	É a relação...
00:11:16	Lucas	Então, é a relação...
00:11:26	Larissa	Que lugar ele ocupa na sequência, de quatro em quatro, né?
00:11:31	Lucas	De quatro em quatro, a sequência é de quatro em quatro, só vai aumentando.
00:11:37	Larissa	Mas qual é a relação?
00:11:40	Karla	Qual é a relação...
00;11:43	Karla	Eu acho que é porque, tipo assim, no quadrado os lados são iguais...
00:11:50	Isadora	Eu ia falar isso agora, que a quantidade de palitos que tem de cada lado, é a posição dele… Se tem dois palitos de um lado, a posição dele é segunda posição.

00:11:59	Isadora	Se tem três, é a terceira posição.

Nesse momento da atividade, seguindo pela busca do estabelecimento de relações (Almeida; Santos, 2017), Lucas procurou explicar uma generalização para os colegas, utilizando quantidades maiores.

A metodologia escolhida para esta pesquisa (Experimento de Ensino) prevê a ausência de intervenções da pesquisadora. Porém, envolvida na discussão dos estudantes, realizada de modo compartilhado, senti grandes dificuldades em não realizar interferências.

00:12:13	Lucas	Se o palito tem um milhão... Se um lado de um quadrado tem um milhão de palitos, a posição dele vai ser um milhão.
00:12:18	Isadora	Isso
00:12:21	Karla	An? Espera aí
00:12:23	Lucas	Acho que usei um negócio muito grande
00:12:25	Davi	Fala mil. Mil está bom.
00:12:27	Larissa	Tipo assim, cem.
00:12:28	Karla	É que eu me perdi.
00:12:29	Lucas	Olha, vou te explicar. Um quadrado tem quatro lados, não é?
00:12:35	Karla	É....
00:12:36	Lucas	Essa sequência aqui o quadrado vai aumentando um palito, entendeu?
00:12:40	Larissa	Aí cada palito aumenta...
00:12:42	Davi	Está vendo aqui? Olha… [aponta para o desenho]
00:12:43	Lucas	Quando cada quadrado aumenta o número de palitos que ele tem em um lado, será a posição dele.
00:12:51	Davi	Igual aqui, olha, aqui tem um, aqui tem dois e aqui tem três. [aponta para o desenho]
00:12:54	Lucas	Tipo assim, olha, esse quadrado aqui tem um palito em um lado… Então ele não está em primeiro lugar?
00:13:00	Karla	Sim.
00:13:02	Lucas	Aumentou um palito de lado nesse aqui, ele ficou em segundo lugar, não ficou?
00:13:07	Karla	Ficou.
00:13:08	Lucas	Esse aqui aumentou um palito em um lado de novo, um lado tinha dois palitos, agora esse daqui tem três palitos e ficou em terceiro lugar, aí olha, primeiro, segundo e terceiro.
00:13:19	Paola	E o quarto lugar, teria quantos palitos?
00:13:20	Todos	Quatro.
00:13:21	Paola	Quatro em cada lado, né? Quantos no total?

00:13:24	Larissa	Oito.
00:13:27	Lucas, Isadora, Davi, Mateus	Dezesseis.
00:13:28	Paola	Isso, dezesseis, porque são quatro lados.
00:13:30	Lucas	Quatro vezes quatro.
00:13:31	Paola	Isso.
00:13:33	Paola	E aí o quinto lugar da sequência o lado tem cinco, aí quantos palitos no total?
00:13:37	Davi	Seria 20.
00:13:39	Todos	20.
00:13:40	Paola	Pegaram a ideia, né? Aí, nessa última questão, está perguntando como escreveriam essa relação… Como vocês escreveriam?
00:13:45	Lucas	De quatro em quatro.
00:13:47	Paola	Pode ser. Não, mas aí cada um escreve da forma que quiser, não é porque ele falou de quatro em quatro que todo mundo tem que escrever não.
00:13:53	Larissa	Como eu vou escrever, então?
00:13:55	Karla	"A sequência pode ser de quatro em quatro"? "A sequência é de quatro em quatro"?
00:13:59	Paola	Da forma que você quiser, princesa, fica à vontade. Escreve da forma que achar melhor.

Acreditamos que, pelo caráter coletivo do desenvolvimento das atividades, as respostas foram parecidas. Os registros realizados pelos estudantes foram "*a relação entre eles são a sequência de 4 em 4*", "*a posição sobre de 4 em 4 palitos*", "*a sequência vai ser de 4 em 4*" e "*será de 4 em 4*" entre outras respostas semelhantes. Apesar de nenhum estudante ter utilizado a linguagem algébrica sincopada ou simbólica, pudemos perceber que eles apresentam características do pensamento algébrico (Almeida; Santos, 2017), como a capacidade de estabelecer relações e a capacidade de modelar. Ou seja, os estudantes construíram um modelo matemático para representar o problema que lhes foi proposto.

Para perceber qual nível de dificuldade os estudantes tiveram para o desenvolvimento dessa atividade, antes de passar para a ATIVIDADE 2, perguntei se eles julgaram a ATIVIDADE 1 como fácil, médio ou difícil. A resposta recebida foi "médio".

00:14:34	Paola	Essas aí vocês acharam fácil, médio ou difícil?
00:14:36	Todos	Médio.
00:14:38	Paola	Médio. Aí eu vou entregar, então, a atividade dois, tá?

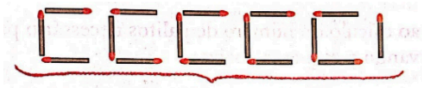
Em seguida, recolhi a ATIVIDADE 1 e distribuí a ATIVIDADE 2. Houve um breve diálogo sobre a dinâmica estabelecida por eles em desenvolverem as atividades coletivamente. Encorajei a continuidade da discussão coletiva, pois, dessa forma, além de ocorrer o processo de negociação de significados, haveria maior verbalização de qual foi o raciocínio utilizado por eles apesar de dificultar os registros. Essa situação não havia sido, até então, percebida por mim, podendo ser vista como uma prejudicialidade, mas, na prática, percebi como positivo, uma adaptação do Experimento de Ensino à realidade criada.

Os estudantes apontaram que o Mateus é considerado inteligente pelos pares, porém ele permanecia em silêncio durante o desenvolvimento das atividades. Seguindo:

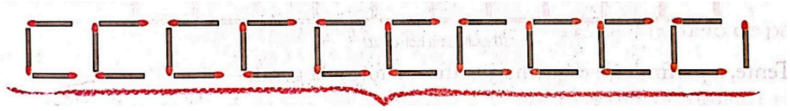
00:15:48	Larissa	Mas vocês vão ler tudo junto ou separado?
00:15:50	Isadora	Cada um lê o seu...
00:15:53	Mateus	Aí debate.
00:15:53	Paola	Vocês gostaram assim? Cada um lê o seu depois debate? Eu estou gostando do debate, estou achando vocês muito inteligentes.
00:15:58	Davi	Mas o Mateus é inteligente e não fala nada.
00:16:02	Larissa	Eu também sou inteligente...
00:16:03	Paola	Todo mundo aqui é.
00:16:05	Davi	Mas ele é mais.

Lins (2004), quando analisa a Matemática como um monstro, faz a distinção entre “monstro monstruoso” e “monstro de estimação”, apontando que a relação de poder cultural e historicamente construída se faz presente nessas diferentes relações. Essa relação de poder cultural pôde ser percebida nesse diálogo, no qual, mesmo sem nenhum tipo de manifestação verbal de Mateus, o grupo permaneceu com suas atenções voltadas para ele. Ou seja, percebemos que há um reconhecimento entre os pares de que, para Mateus, a Matemática é um “monstro de estimação” mesmo quando não há verbalização alguma por parte dele.

Conforme combinado entre eles, ninguém leu em voz alta. A ATIVIDADE 2 trata de uma fileira de quadrados, e os desenhos foram colocados para auxiliar a organização da contagem e possibilitar a construção da generalização.



Fileira de ordem 5 da sequência.



Fileira de ordem 10 da sequência.

O primeiro a se manifestar foi o Davi, que realizou a contagem de acordo com a organização proposta pelo desenho, respondendo prontamente à atividade *a) Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 5?*

00:17:05	Davi	Um, dois, três, quatro, cinco. [contou a quantidade de quadrados] Três, seis, nove, doze, quinze, dezesseis. Dezesseis. [contou a quantidade de palitos]

Os registros foram "*16 palitos*" e "*são necessários 16 palitos*". A partir da expressão de Davi, todos perceberam e consideraram.

Quando os estudantes seguiram para a próxima questão, *b) Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 10?*, Davi percebeu que também daria para contar, porém Lucas apontou que não precisava.

00:17:49	Davi	A D também dá para contar… 31.
00:18:01	Lucas	Dez vezes três?
00:18:02	Davi	Não, não é dez vezes três não, tem um a mais.
00:18:04	Lucas	Aqui não tem dez quadrados?
00:18:05	Davi	Então, e um a mais.
00:18:10	Lucas	Gente, mas não precisa contar. É muito fácil…

Pudemos perceber que não seria necessário realizar a contagem em que Lucas mobilizou a capacidade de modelar (Almeida; Santos, 2017).

Todos responderam "*31 palitos*" e "*são necessários 31 palitos*", exceto Lucas, que realizou o registro explicitando novamente os cálculos: "*31, pois 10x3=30, 30+1=31*"

Karla perdeu o ritmo do grupo e, para auxiliá-la, Davi relembrou a resposta da questão *a*, mas ela explicita que deve haver a compreensão dos significados (Lins; Gimenez, 1997). Lucas e eu tentamos explicá-la.

00:18:23	Davi	Põe aqui dezesseis...
00:18:26	Karla	Tá, mas o que adianta eu colocar e não entender?
00:18:27	Lucas	Escuta, escuta, aqui não tem dez formas dessa aqui [quadrados]?
00:18:28	Larissa	Dez vezes três 30, mais um 31.
00:18:35	Karla	Para, gente! Espera aí!
00:18:37	Lucas	Olha, escuta. Cada quadrado desse tem três palitos, não tem dez quadrados desse? Então eu vou fazer dez vezes três aí eu descubro o valor.
00:18:50	Larissa	Trinta, aí mais um... 31.
00:18:56	Karla	Eu estou na A, seu lerdo!
00:18:57	Paola	Isso que o Lucas falou serve para a de cinco também? [perguntei para Karla]
00:19:01	Todos	Dá.
00:19:03	Lucas	Um, dois, três, quatro, cinco [contou a quantidade de quadrados]; cinco vezes três, quinze, mais um, dezesseis... Dá.
00:19:09	Todos	Dá.

Com a questão b), os estudantes puderam compreender melhor a contagem realizada na questão a). Como Lucas havia percebido o padrão para realizar a generalização daquela sequência, ele tentou passar para os colegas essa percepção. Em apenas um segundo, solucionaram a próxima questão: *c) Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 100?*. Larissa, Raquel e Davi demonstraram insatisfação com o ritmo adotado.

00:19:11	Larissa	Quantos palitos são necessários para montar uma fileira de ordem 100?
00:19:16	Mateus	301.
00:19:17	Larissa	Shiu, calma!
00:19:18	Isadora	Nossa, verdade.
00:19:23	Lucas	Cem vezes três, 300, 300 mais um 301.
00:19:27	Raquel	Não deixa nem a gente pensar, quando a gente começa a pensar...
00:19:29	Davi	Não deixa nem a gente pensar!
00:19:30	Paola	É muito rápido, né? Muito rápido!
00:19:33	Lucas	É porque a gente raciocina muito rápido!
00:19:35	Davi	Você.
00:19:37	Raquel	É, você e o Mateus, pensa... Tem a cabeça de calculadora.
00:19:40	Lucas	O Mateus está até calado, ele já deve estar na D.
00:19:42	Mateus	Estou.

00:19:42	Isadora	Realmente.
00:19:44	Paola	Fala com a gente o que você está pensando!
00:19:47	Mateus	Estou tentando calcular a D.
00:19:48	Larissa	É meu filho, se abre.

Os registros realizados pelos estudantes foram "*301*", "*301 palitos*" e "*são necessários 301 palitos*". Novamente, Lucas seguiu o mesmo formato de registro dos registros anteriores, explicitando os cálculos: "*serão necessários 301 palitos, pois 100x3=300+1=301*".

Logo em seguida, seguiram para a próxima questão: *d) Qual é a ordem da fileira que para ser formada necessita de 28 palitos?* Lucas, no minuto 19:54, demonstrou a capacidade de generalizar (Almeida; Santos, 2017), observando, de maneira geral, a forma de contagem proposta pela atividade. Pela primeira vez, Mateus se manifestou e, ancorado pelo aritmeticismo (Lins, 1992 *apud* Almeida; Santos, 2017), concluiu que seria a ordem nove.

00:19:54	Lucas	Gente, é tudo, tipo assim, é uma lógica, não é, tipo assim, cada um tem uma resposta, é uma lógica, se você pegar a lógica da ordem cinco é a mesma lógica da ordem dez, entendeu?
00:20:05	Larissa	Sim, mas a D está meio complicada. Qual é a ordem da fileira...
00:20:10	Lucas	Vinte e oito dividido por três...
00:20:14	Larissa	Dividido por três?
00:20:15	Davi	Não, não dá número exato não.
00:20:16	Lucas	Não dá.
00:20:18	Mateus	Você vai calcular de três por três, porque o três vale um quadradinho desse e se você for indo, vai perceber que na **ordem número nove** se você adicionar mais um, vai dar 28.
00:20:40	Larissa	Como assim?
00:20:41	Lucas	É, 27. Aqui, olha, é a ordem nove, nove vezes três, 27, mais um, 28, então é a ordem nove.
00:20:48	Larissa	Explica devagar, explica devagar...
00:20:52	Davi	Ninguém tem a mente de calculadora igual você não.
00:20:55	Raquel	Na tabuada, três vezes nove dá 27, mais um, que sempre tem um, um aqui atrás...
00:21:00	Lucas	Vinte e oito.
00:21:00	Raquel	Dá 28.

Na sequência, uns explicavam para os outros, a fim de reduzir o descompasso coletivo para solucionarem a atividade juntos. Os registros realizados foram "*ordem 9*" para todos.

Logo, os estudantes seguiram para a próxima questão: *e) Qual é a ordem da fileira que para ser formada necessita de 136 palitos?* e seguiram a mesma argumentação da questão anterior até que Lucas expressou o raciocínio guiado pelo caminho reverso, demonstrando a capacidade de generalizar (Almeida; Santos, 2017) e realizando uma síntese entre as relações existentes. Larissa o expressou corretamente por meio da negociação coletiva de significados (Silva, 2001). Já Mateus solucionou o exercício por um caminho diferente baseado, novamente, no aritmeticismo (Lins, 1992 *apud* Almeida; Santos, 2017).

00:23:20	Lucas	Vou dar exemplo dessa daqui de 136. Quando você chega em um resultado multiplicando os quadrados, não dá um resultado menos um? tipo, sempre depois você tem que colocar mais um? Então você vai fazer 136 menos um, aí você vai fazer 135 né, que 136 menos um dá 135 e 135 dividido por três.
00:23:44	Isadora	Não entendi.
00:23:45	Larissa	Verdade!
00:23:46	Mateus	Que é a ordem número 45. Mas eu fiz de outro jeito.
00:24:11	Larissa	Sério? Então fala, uai!
00:24:13	Mateus	O jeito que eu fiz... Vi que se cinco pedaços de palito é igual a 15, eu fiz que esses cinco quadradinhos são igual a 15, por um, aí eu fiz de 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120 e 135...
00:24:35	Lucas	Mais um.
00:24:36	Mateus	Mais um, 136. Aí eu só peguei esse nove, multipliquei por cinco que é igual a 45.
00:24:44	Larissa	O do Lucas parece que foi assim, olha: 136, aí menos um, porque aqui a gente está contando um, não está? Aí menos um vai dar 135, 135 é divisível por três, que vai dar 45, entendeu?
00:25:05	Isadora	Por exemplo, se for o número quatro… A gente tem que diminuir um número e dividir por três?
00:25:19	Larissa	É.
00:25:20	Isadora	Ah, entendi.
00:25:21	Larissa	Aí põe menos um.

Os registros foram: “*45*” e “*a ordem seria 45*”. Novamente, apenas o Lucas registrou as operações efetuadas: “*136-1=135, 135:3=45*”.

A última questão, *f) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de palitos utilizados para montar uma sequência de qualquer ordem? Se sim, como você expressaria essa situação?*, solicitava a generalização da situação apresentada.

00:26:32	Lucas	São essas perguntas aqui do final que eu não entendo, tipo assim, bagunça a cabeça da gente.

00:26:38	Isadora	É...
00:26:40	Lucas	Você tem que elaborar uma resposta, tipo assim, o que acontece? Você entende a técnica, mas você não consegue explicar.
00:26:44	Larissa e Isadora	É...
00:26:57	Isadora	Existe uma maneira?
00:26:58	Larissa	Existe!
00:27:10	Davi	Mas aí você vai ter que explicar como.

Os estudantes conseguiram resolver todas as questões anteriores, por meio de uma construção coletiva, sem demonstrarem grandes dificuldades. No momento de expressar um caso geral para generalizar a sequência proposta, houve uma mudança de postura de todos. Por esse motivo, realizei uma intervenção. Considerei, ainda, que o Experimento de Ensino tinha as especificidades da situação que pudemos criar naquela Escola. Então, eu me senti com liberdade de intervir.

Pudemos perceber, durante o diálogo a seguir, a "não aceitação de falta de fechamento", apontada por Lins e Gimenez (1997, p. 96), explicitada na fala "*precisa do igual*" (minuto 32:02) da estudante Larissa, que não concebe a expressão "3x+1" como solução válida para essa atividade. Ressaltamos que essa dificuldade da não aceitação de falta de fechamento não foi exclusividade de Larissa, mas foi sentida por todos.

O diálogo anterior, também, apresenta uma grande dificuldade em realizar registros que expressam ideias mais gerais, indicando que a capacidade de generalizar (Almeida; Santos, 2017) ainda se encontra em construção. Kaput (2008 apud Almeida e Santos, 2017) assim como Radford (2009 apud Almeida e Santos, 2017) elucidam que o enorme poder de síntese da linguagem algébrica simbólica justifica a importância do domínio discente para com a sua utilização, tendo em vista a possibilidade de utilizá-la como ferramenta para alcançar novas possibilidades de estudo e comunicação.

Há, também, através da fala de Lucas (minuto 29:33) "*é gostoso, e quando a gente acerta e dá o resultado que a gente viu, dá uma satisfação muito grande*", a percepção de que as sensibilidades presentes entre os estudantes em relação à Matemática nem sempre são negativas. Em situações de compreensão dos significados e de seus objetos de estudo, a interação com a Matemática pode ser prazerosa, "uma satisfação muito grande", e afetar positivamente a autoestima e a autonomia nas práticas estudantis. Ou seja, quando se compreende e se aprende, constrói-se satisfação. Talvez, isso nos dê alguns indicativos de como a Matemática é insatisfatória, em geral, para os estudantes.

00:27:13	Larissa	Tipo, é para eu colocar... Lucas, é para eu colocar o jeito de fazer a conta?
00:27:23	Lucas	Acho que é.
00:27:28	Paola	Deixa eu trocar uma ideia sobre essa última questão com vocês, vocês criaram tipo uma receitinha, não foi, na cabeça de vocês?
00:27:34	Lucas	Aí é só colocar essa receita aqui.
00:27:36	Paola	Isso, aí essa receitinha de como fazer para encontrar a quantidade de palitos da fileira, vocês podem descrever isso para alguma pessoa, uma pessoa que não tem acesso às imagens, por exemplo, aí como você faria isso?
00:27:51	Isadora	É só usar essa lógica aqui.
00:27:53	Larissa	É, a lógica que a gente usou nessa… [aponta para as questões anteriores]
00:27:55	Paola	Ficou complicado?
00:27:56	Karla	Ficou.
00:28:20	Larissa	Mas como eu vou expressar isso, gente?
00:28:31	Raquel	Tipo, eu acho que é para colocar… como eu vou explicar...
00:28:41	Lucas	Nossa, é tipo assim, eu entendi como faz, mas não sei explicar.
00:28:44	Larissa	É, tipo explicar como faz uma coisa...
00:28:47	Raquel	Aí tem a ordem...
00:28:53	Raquel	Sim, a posição, aí só fazer três... Tipo assim, três vezes dez.
00:28:59	Paola	Três vezes a posição.
00:29:04	Davi	Eu entendi, só não sei como explicar.
00:29:13	Lucas	Gente, por isso que esses matemáticos aí de hoje em dia são “tudo” doido, porque isso deixa a gente maluco!
00:29:32	Paola	Mas é tão gostoso, vocês não acham não?
00:29:33	Lucas	É gostoso, e quando a gente acerta e dá o resultado que a gente viu, dá uma satisfação muito grande.
00:29:58	Lucas	**Mas assim, a única coisa que eu não entendo nada, é a parte de colocar letra com número, isso é coisa de doido.**
00:30:06	Davi	Isso é verdade.
00:30:06	Paola	Por que você não entende?
00:30:10	Lucas	Não, eu entendo, tipo assim, eu seu fazer, mas é estranho. Como conseguiram colocar letra com número?
00:30:19	Larissa	Pois é!
00:30:20	Davi	Que letra e número... Não dá...
00:30:26	Larissa	A minha conta preferida é a de “x”. Nossa, é muito boa!
00:30:43	Lucas	“x” com fração, nossa, muito bom.
00:30:51	Paola	Mas aqui, deixa eu perguntar para vocês, para que serve a letra no meio dos números?

00:30:56	Karla	É o número que a gente não sabe...
00:31:00	Mateus	Incógnita.
00:31:02	Karla	É, uma incógnita.
00:31:02	Paola	Uma incógnita, isso, pode ser um número que você não sabe ou você pode usar a letra para representar qualquer número.
00:31:08	Karla	É, verdade... É o que a gente está fazendo agora [nas aulas de matemática], tipo, a letra lá, a gente usa ela…
00:31:15	Paola	É o que vocês estão fazendo na aula da [nome da professora de matemática]. Mas e aqui nessa atividade?
00:31:19	Larissa	Tem “x”?
00:31:25	Larissa	Tem, claro que tem!
00:31:25	Isadora	A gente não sabe...
00:31:26	Paola	Vamos ler de novo: “existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir alguma quantidade de palitos para montar uma sequência de qualquer ordem”?
00:31:33	Davi	Sim.
00:31:34	Paola	Se é uma sequência de qualquer ordem, eu posso colocar lá ordem dois, três? Posso...
00:31:36	Lucas	“x”… Então é representado por “x”.
00:31:40	Paola	Pode ser, pode ser “x”, “a, b, c, d, e, f, g”, qualquer uma que você quiser. E o que você faz com essa ordem para poder saber a quantidade de palitos?
00:31:49	Lucas	Eu multiplico ela por três.
00:31:51	Paola	E depois?
00:31:52	Raquel	Adiciona um.
00:31:52	Lucas	Adiciona mais um. “X” vezes três é igual... Espera...
00:31:55	Davi	“X” vezes três é igual a 3x.
00:31:58	Lucas	“X” vezes três mais um, é igual a “x”, que é o resultado...
00:32:02	Larissa	Precisa do “igual”.
00:32:03	Lucas	Só que a gente não sabe o resultado. Olha, eu entendi...
00:32:06	Karla	Agora vou descobrir...
00:32:08	Paola	Mas não precisa ter o “igual” não...
00:32:09	Lucas	É... Não precisa?
00:32:10	Paola	Só tem igual quando é equação.
00:32:13	Lucas	“X” vezes três mais um é igual à ordem, é igual a uma ordem, que isso aqui que a gente elaborou. Entendi!
00:32:16	Isadora	É, pode ser qualquer número, pode ser a ordem cinco, a ordem nove...
00:32:21	Lucas	Eu entendi, olha! Que legal! Eu entendi já.

00:33:54	Raquel	Tipo, eu tenho interesse na matemática, eu acho a matemática muito legal, mas só que, tipo, não entra na minha cabeça, eu tento o dia inteiro e não aprendo!

Os estudantes puderam verbalizar como eles se sentiam em relação à figura do(a) matemático(a) (Lucas, minuto 29:13) e em relação à "letra com número". Expressaram que o uso da linguagem algébrica simbólica exige mais entendimentos em relação à Matemática, em particular, à Álgebra, o que ocorreu em uma situação quando foi possível construir relações, indicando ser imprescindível que atividades propostas proporcionem a construção de significados (Lins; Gimenez, 1997). Mateus e Karla utilizam o termo "incógnita", lembrando-se dos conteúdos trabalhados nas aulas quando houve a formalização desse tema. Lucas, ao dizer (minuto 30:43) *"x" com fração, nossa, muito bom*, se utiliza de conteúdos matemáticos para permanecer em um lugar de destaque em relação aos demais. "Há, efetivamente, moralidade associada ao conhecimento e em particular ao conhecimento matemático" (D'Ambrósio, 1996, p. 12).

Nesse riquíssimo diálogo realizado com e entre os estudantes, pudemos perceber como a fala de Raquel (minuto 33:54) "*eu não entendo nada de matemática*" expressa uma insatisfação que constantemente observamos na escola. A fala carrega não só uma perspectiva individual referente à relação da estudante com a Matemática, mas uma perspectiva cultural. Em Lins (2004, p. 5), verificamos que

> Matemática é o que o matemático faz quando ele diz que está fazendo Matemática. Mas esta autoridade não está constituída pela vontade particular, individual, deste ou daquele matemático, e sim na existência de uma instituição cultural (e, portanto, histórica e material).

Alguns estudantes apresentaram, pela primeira vez, a utilização da linguagem algébrica sincopada nos registros, de certo em decorrência de minhas intervenções, talvez precipitadas. Quando o grupo paralisou sem encontrar caminhos para prosseguir no sentido da pergunta da atividade, tive o impulso de fazer perguntas que pudessem fomentar as descobertas entre as relações estabelecidas ali. Outros estudantes se utilizaram da linguagem algébrica retórica.

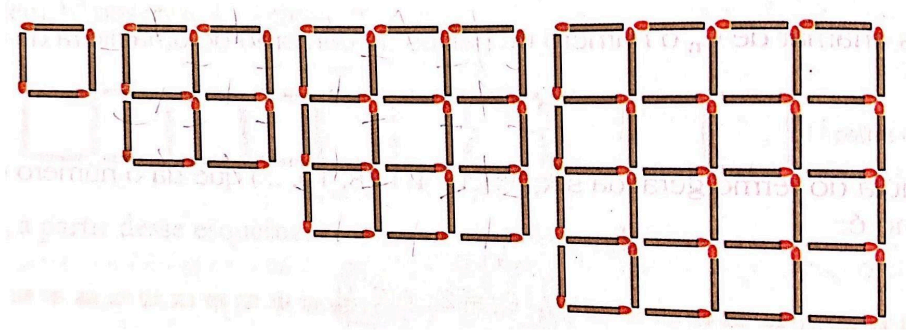
Alguns dos registros foram "*3x+1*", "*3x*" e também: "*Sim, por exemplo pego o número 136 tiro 1 pra dividir, e faço 135:3 que dá 45 e chega no número exato*".

Recolhi as folhas da ATIVIDADE 2 e entreguei a ATIVIDADE 3, a última prevista para o primeiro encontro.

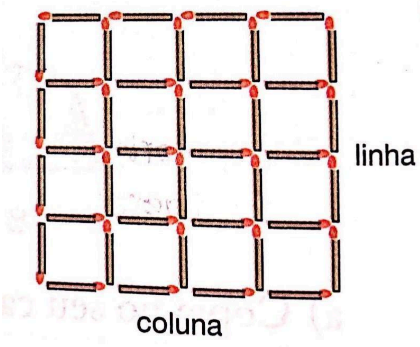
ATIVIDADE 3

Rede de quadrados

Observe a sequência de redes de quadrados:



Agora, observe mais atentamente o desenho da rede de ordem 4:



a) Quantas são as colunas? ___________
b) Quantos palitos horizontais há em cada coluna? ___________
c) Quantos são os palitos na horizontal? ___________
d) Há mais palitos horizontais ou verticais? ___________
e) Quantos palitos temos ao todo? ___________

Agora, responda às mesmas questões para uma rede de quadrados de ordem 5.

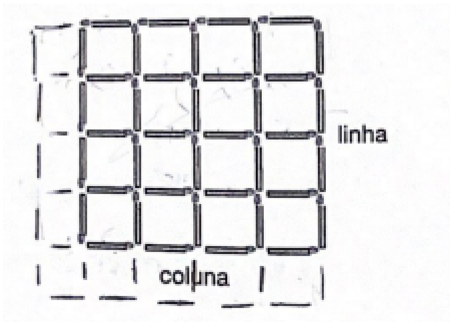
a) Quantas são as colunas? ___________
b) Quantos palitos horizontais há em cada coluna? ___________
c) Quantos são os palitos na horizontal? ___________
d) Há mais palitos horizontais ou verticais? ___________
e) Quantos palitos temos ao todo? ___________

Quantos palitos são necessários para formar uma rede de quadrados de ordem 11?

Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de palitos utilizados para montar uma sequência de rede de quadrados de qualquer ordem? Se sim, como você expressaria essa situação?

Inicialmente, discutimos coletivamente os conceitos de linha e coluna, horizontal e vertical. O primeiro grupo de questões para a rede de ordem 4 foi solucionado rapidamente por todos. Alguns estudantes foram guiados pelas perguntas e outros contaram palito por palito no desenho, mas sem muitas trocas verbais. As perguntas dessa atividade possuem o intuito de guiar um método de contagem organizado, para que haja, posteriormente, a construção de uma generalização.

No segundo grupo de perguntas, para a rede de ordem 5, os estudantes fomentaram a discussão. Enquanto os demais procuravam entender o comportamento dos palitos ao aumentar a ordem na sequência, Karla começou a desenhar uma rede de quadrados de ordem 5 a partir do desenho da rede de quadrados de ordem 4, para contá-los. Em seguida, Lucas, Isadora e Larissa completaram o desenho também. Todos responderam corretamente.



Para exemplificar, trouxemos o desenho de Karla.

A próxima pergunta da atividade foi: *Quantos palitos são necessários para formar uma rede de quadrados de ordem 11?* Iniciamos a discussão, mas tivemos que interromper o encontro por causa do horário. O almoço disponibilizado pela escola estava pronto e precisávamos almoçar antes do início do turno da tarde da escola. Fizemos uma pausa na realização da atividade para continuarmos no próximo encontro.

3.2 Segundo encontro

O segundo encontro do Experimento de Ensino ocorreu na biblioteca da escola no dia 17 de maio de 2023, às 11h40, e teve duração de uma hora e seis minutos. Contamos com a presença de oito estudantes, quatro meninos e quatro meninas. Maria não esteve presente. Nesse encontro, a observadora pôde comparecer, e disponibilizei para ela um caderno, para que fossem feitas as suas anotações.

No primeiro encontro, os estudantes puderam concluir a ATIVIDADE 1 (Contorno de Quadrados), a ATIVIDADE 2 (Fileira de Quadrados) e parte da ATIVIDADE 3 (Rede de Quadrados), restando para hoje apenas duas perguntas para concluirmos:

> *Quantos palitos são necessários para formar uma rede de quadrados de ordem 11?*
> *Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de palitos utilizados para montar uma sequência de rede de quadrados de qualquer ordem? Se sim, como você expressaria essa situação?*

Ao chegarem à biblioteca, os estudantes encontraram em cima das mesas redondas a folha da ATIVIDADE 3, iniciada no encontro anterior, para que pudessem concluí-la. Encontraram, também, um pirulito para cada um deles. Organizaram-se em duas das três mesas redondas disponíveis, sendo três estudantes na MESA 1 (Lucas, Karla e Raquel) e cinco na MESA 2 (Mateus, Larissa, Isadora, Ruan e Davi). A distribuição das mesas foi importante para as análises desse encontro.

As duas perguntas restantes requerem maior abstração, pois as anteriores contavam com desenho na folha, sendo possível realizar a contagem ou, no caso da rede de quadrados de ordem cinco, era possível que os estudantes fizessem seus próprios desenhos, que foi o caso de Karla, Lucas, Isadora e Larissa. Acredito que o desenvolvimento dessas duas últimas questões em um momento diferente da realização das anteriores, com uma semana de distância, pode ter prejudicado a construção do raciocínio dos estudantes. Todavia, o último encontro precisou ser interrompido pelo tempo que tínhamos disponível, para não atrapalharmos as dinâmicas estabelecidas pela escola.

Após cumprimentá-los, informei que hoje uma pessoa nos acompanharia no experimento, referindo-me à observadora, e realizei as devidas apresentações. A observadora se posicionou no canto de uma das mesas retangulares da biblioteca, que não estava sendo utilizada pelos estudantes. Informei que ela não faria intervenções assim como eu.

Mateus recordou, em voz alta, em qual parte da atividade eles estavam e constatou que a progressão da quantidade de palitos na rede de quadrados não seria constante, realizando parcialmente o desenvolvimento da questão. Pude perceber que, do primeiro para o segundo encontro, Mateus pensou sobre a atividade.

00:01:28	Mateus	A última pergunta [referindo-se à penúltima] é que a cada rede de quadrado aumenta uma coluna na vertical e uma linha na horizontal, aí a coluna vai aumentando de quatro em quatro palitos, tipo aqui, aqui é oito, [da primeira para a segunda ordem] aí foi para 12 [da segunda para a terceira ordem] e aqui foi para 16 [da terceira para a quarta ordem], então não tem uma ordem certa para subir, vai ser sempre quatro palitos a mais do que na ordem anterior.

Ao perceber que eles haviam estabelecido novamente a dinâmica de discussões coletivas, preocupei-me com a integridade dos registros e comentei sobre isso. Li a pergunta em voz alta, para que todos pudessem relembrar o que foi desenvolvido no último encontro e pudéssemos partir do mesmo ponto, uma vez que percebi que nem todos os estudantes acompanharam a fala de Mateus.

00:02:36	Paola	Eu vi que as respostas de vocês ficaram praticamente todas iguais né, de todas as atividades, porque a gente fez as atividades juntos… Mas eu queria que vocês registrassem mais “separadinho”. Olha, a última atividade a gente viu quantos palitos teria em um desenho de ordem quatro, uma rede né, uma rede de ordem quatro… uma rede de ordem cinco… e aí a última pergunta que a gente ficou para responder é: “quantos palitos são necessários para formar uma rede de ordem 11?”, como a gente faz para descobrir isso?
00:03:06	Lucas	Aumenta de 20 em 20, porque o que eu percebi aqui é que a cada... Como é que fala? A cada ordem, aumenta 20 palitos...
00;03:16	Mateus	Não, não aumenta

Percebendo a prejudicialidade de termos interrompido a atividade no encontro passado justamente no momento de realizarmos um salto em relação à contagem de palitos de redes maiores, tentei reconstruir o pensamento que tínhamos realizado coletivamente, recorrendo às atividades anteriores.

00:04:05	Paola	Tem o quadrado de ordem um desenhado, de ordem dois, de ordem três, o de ordem quatro... Vejam quantos palitos tem nesses quadrados pra tentar perceber o que acontece.

Mateus continuou investigando o padrão, percebendo que da primeira para a quarta ordem aumentam 36 palitos, tentando novamente recorrer à Aritmética para estabelecer algum tipo de relação. Os estudantes apresentaram dificuldades para a realização dessa atividade.

Raquel e Karla sentiram suas autoestimas afetadas, explicitadas nos minutos 08:05 e 08:07. Decerto, os processos de aprendizagem afetam as sensibilidades e estas afetam aquelas positiva (em situações de compreensão e construção de significados) e negativamente (em situações de dificuldades e ausências de significados). É importante que o docente se mantenha atento a essas manifestações, para que possa agir positivamente na construção de autoestima e autonomia (Freire, 1996) de seus educandos.

Devido às dificuldades de manifestar suas capacidades de modelar e generalizar (Almeida; Santos, 2017), Karla teve a ideia de desenhar uma rede de quadrados de ordem 11. Lucas permaneceu tentando encontrar a generalização: "*resolver de uma forma lógica*".

00:08:02	Lucas	Não, mas... Não, a gente tem que resolver de uma forma lógica.
00:08:05	Raquel	Eu sou burra, eu não sei resolver de forma lógica não...
00:08:07	Karla	Eu também não sei não...
00:08:08	Lucas	Mas se você ficar pensando que você é burra você não vai conseguir resolver não...
00:08:30	Larissa	Quantos quadrados aumenta em cada subida? Aí faz 11 vezes alguma coisa, não?
00:08:39	Mateus	É tipo aumentar quatro na quantidade que você quer aumentar.
00:08:46	Isadora	Vai aumentar quatro na quantidade que vai aumentar.
00:09:17	Raquel	Eu acho que eu vou fazer o quadrado...
00:09:19	Karla	Eu estou fazendo...

Karla e Raquel começaram a desenhar uma rede de quadrados de ordem 11 no verso da folha. Nesse momento, a folha de Raquel rasga sem que fosse a intenção da estudante, e pudemos perceber que, talvez, nesse momento, ela enfrentava um "monstro monstruoso" (Lins, 2004).

00:11:42	Lucas	Nossa, rasgou a folha!
00:11:43	Karla	Que agonia!
00:11:45	Raquel	Foi sem querer...
00:11:46	Paola	O que aconteceu?
00:11:47	Lucas	Ela fez um risco tão forte, que pareceu que rasgou a folha.
00:11:47	Raquel	Foi sem querer.

Lucas acompanhou o desenvolvimento do desenho de Karla, que estava ao seu lado, percebendo que daria muito trabalho concluiu não ter paciência e compreendendo a importância de pensar em uma solução geral que não dependa de representações. Ele procurou quantos quadrados pequenos iriam compor uma rede de quadrados de ordem 11, inicialmente não percebendo as duplicidades de palitos envolvidas nessa organização de contagem, mas depois se autocorrigiu. Raquel construiu um pensamento parecido. Compararam a estratégia de contagem da ATIVIDADE 3 (Rede de Quadrados) com a estratégia de contagem da ATIVIDADE 2 (Fileira de Quadrados), ignorando, nesse momento, a estratégia de contagem guiada pela própria ATIVIDADE 3.

00:13:58	Lucas	Tá, então dá 121 quadrados no meio... 121 quadrados...
00:14:33	Isadora	Essa é a mesma lógica do outro… da atividade dois.
00:14:36	Davi	É, aquele que a gente fez.
00:14:51	Paola	Aquela da fileira dos quadrados?
00:14:53	Isadora	Isso, aí a gente fez essa mesma lógica aqui.
00:14:57	Raquel	Vai dar muito mais, porque é só a lateral, ainda tem todos do meio...
00:15:04	Lucas	Mas sabe o que acontece? Que para fazer os do meio também usa o palito da lateral, então acaba que não é o total.

A discussão coletiva prosseguiu. Todos estavam envolvidos, exceto Ruan, Larissa e Isadora, que permaneceram em silêncio, observando. Raquel desistiu de desenhar a rede de quadrados de ordem 11, mas Karla persistiu. Havia nela uma negação em realizar a tarefa pelo raciocínio, buscando entender a relação que poderia chegar ao resultado e preferindo fazer o desenho que era obviamente muito trabalhoso.

00:22:25	Raquel	Karla com toda a paciência do mundo fazendo todos os cubinhos. Eu já perdi a paciência e apaguei já.
00:22:34	Karla	Depois vai valer a pena.

Lucas tentou conduzir a discussão com os colegas, contando os palitos duplicados (121 quadrados vezes quatro), para depois retirar as duplicidades… Mas não conseguiram concluir esse raciocínio e logo desistiram. Karla continuou desenhando sua rede de quadrados de ordem 11.

Após mais um tempo de discussão, Lucas informou ao grupo que ele “descobriu a lógica”. Nesse momento, ele realmente entendeu a estratégia de contagem sugerida pela atividade.

00:28:42	Lucas	Então vai ter doze...
00:28:44	Raquel	O que que vai ter doze?
00:28:45	Lucas	Onze...
00:28:46	Raquel	O que que vai ter onze?
00:28:48	Lucas	Vezes 12...
00:29:19	Lucas	Nossa... Eu descobri quantos palitos tem no quadrado de 11 negócios… [ordem 11]

00:29:28	Lucas	Tem 132...
00:29:30	Karla	Espera aí!
00:29:31	Lucas	Tem 132, deu 132 na minha lógica aqui.
00:29:38	Lucas	Ah gente, descobri, descobri, descobri, descobri! Descobri a lógica! Descobri! Olha... Nossa, descobri! [sacode as mãos no ar]

Neste momento (29:38), Lucas passou a lidar com um "monstro de estimação" (Lins, 2004) por meio da construção de significados (Lins; Gimenez, 1997) e da manifestação da capacidade de modelar (Almeida; Santos, 2017), desenvolvendo sensibilidades positivas em relação à Matemática.

Ele foi interrompido pelos integrantes da MESA 2, que queriam ouvir o desenvolvimento do raciocínio de Mateus. Nesse momento, a biblioteca estava separada em dois grupos de discussão: MESA 1 e MESA 2, em que os integrantes da MESA 1 estavam sendo guiados pelo raciocínio de Lucas e os integrantes da MESA 2 estavam sendo guiados pelo raciocínio de Mateus. Assim, uma espécie de disputa se estabeleceu, posteriormente manifestando-se em animosidades. Interessante como a colaboração surgiu espontaneamente desde que assumimos as mesas da biblioteca e, em momentos como esse, a disputa se estabeleceu e criou uma tensão no grupo. Seria próprio de um estilo de ser daquele grupo?

Mateus se utilizou de uma estratégia de contagem guiada pela construção do desenho semelhante à utilizada na ATIVIDADE 2 (Fileira de Quadrados). Partiu do primeiro quadrado, constituído de quatro palitos, depois, "completou" os quadrados com três palitos cada, até formar 11 quadrados na primeira coluna, totalizando 34 palitos para desenhá-la. Porém, Mateus foi interrompido pelos integrantes da MESA 1, não concluindo sua explicação nesse momento.

Depois de algumas tentativas, Lucas conseguiu exibir para os colegas a solução encontrada por ele, guiado pela estratégia de contagem proposta por essa atividade, porém com um pouco de dificuldade para se expressar. Nesse momento, ninguém pareceu entender o que o colega falou.

00:33:35	Lucas	Bingo! Presta atenção... Nossa, descobri! Não tem as colunas?
00:33:49	Raquel	Sim.
00:33:51	Lucas	Não tem quatro palitos em... Não tem quatro colunas? [aponta para o desenho da rede de quadrados de ordem quatro]
00:33:55	Lucas	Não tem cinco palitos em cada coluna horizontal?

00:34:02	Raquel	Aham...
00:34:03	Lucas	Agora olha na vertical, não tem quatro linhas?
00:34:08	Raquel e Karla	Sim...
00:34:08	Lucas	Não tem... Aí tem um, dois, três, quatro, cinco palitos na vertical também, então, tipo assim, é tudo igual, tudo que tem na horizontal tem na vertical.
00:34:18	Karla	Isso já é óbvio, porque é um quadrado.
00:34:21	Lucas	É só, tipo assim, um quadrado de 11, a cada coluna aumenta um palito, tipo assim, se tem 11 colunas vai ter 12 palitos, ao todo, em cada coluna, vão ter 12 palitos na horizontal e na vertical.
00:35:00	Lucas	Aí não vai... Se... É difícil de explicar, porque eu entendi, só que para eu explicar, é difícil. Aí, o que acontece? Vou dar exemplo aqui da folha, nesse daqui tem quatro colunas, não tem cinco palitos na horizontal? Não é de 11? Vão ser 11 colunas e vão ser 12 palitos em cada na horizontal, eu vou fazer 11 vezes 12, que dá 132, 132 mais 132, também tem na vertical, dá 264 palitos! É de onze.
00:35:36	Karla	Não é isso aí não Lucas...
00:35:39	Lucas	É sim. É sim, continua fazendo seu quadrado que eu vou fazer questão de contar todos os 264 palitos para ver... Para provar que eu estou certo.

Houve agitação na postura de Lucas por perceber que os colegas não haviam compreendido sua explicação e, por isso, não lhe deram credibilidade. Logo após, Karla terminou de desenhar a rede de quadrados de ordem 11.

00:37:08	Karla	O meu quadrado está pronto! Ô professora! Vem cá! Meu quadrado está pronto.
00:37:18	Paola	Você desenhou tudo?
00:37:19	Karla	Tudo...
00:37:22	Larissa	Deixa eu ver. Deixa eu ver o tamanho!

Enquanto eu e Karla fazíamos a conferência do desenho, Lucas continuou na tentativa de explicar seu raciocínio para o grupo. Nesse momento, ele se levantou e foi até a MESA 2. Raquel e Davi pareceram ser os primeiros a compreender a explicação do colega.

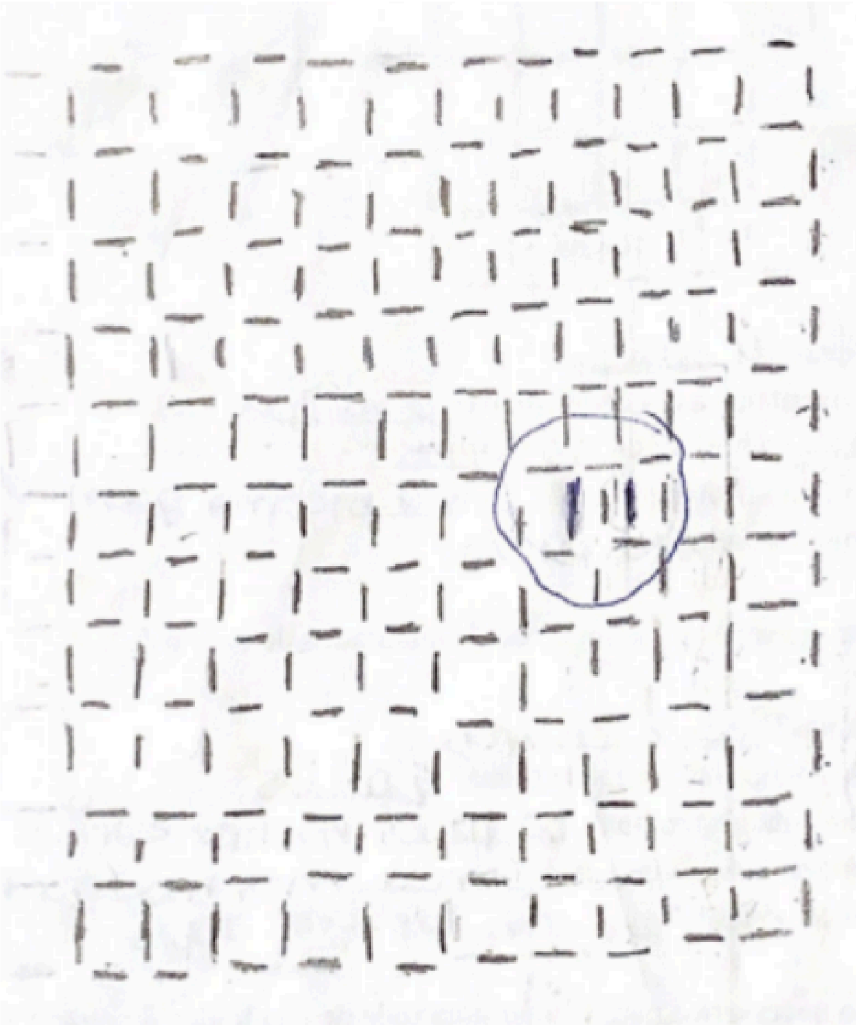
Precisei interromper a conferência da rede de quadrados de ordem 11 com Karla, percebendo uma certa animosidade entre os estudantes. Lucas estava tentando explicar sua conclusão para Mateus. Agora, Isadora e Larissa pareceram entender também o raciocínio explicitado por Lucas. Decerto, essas trocas fomentam uma construção coletiva de significados (Silva, 2001).

00:46:55	Lucas	Você entendeu?

00:46:56	Mateus	Sim.
00:46:57	Lucas	Mentira, mentira! Você não entendeu...
00:47:03	Mateus	Explica...
00:47:06	Lucas	Eu vou explicar de novo… É, ele quer entender, mas está olhando para a folha.
00:47:12	Mateus	Não precisa olhar para entender.
00:47:18	Paola	Ô gente, não briga não...
00:47:21	Larissa	É estressado, nossa...
00:47:22	Raquel	Você entendeu, professora?
00:47:22	Paola	Eu entendi, você entendeu?
00:47:24	Isadora	Se fosse um quadrado de ordem 12, faria 12 vezes 13.
00:47:41	Larissa	Na ordem 11, vai fazer 11 vezes 12...
00:47:43	Isadora	Então em qualquer ordem eu posso fazer essa lógica.
00:47:44	Lucas	Sim.

Mateus (no minuto 47:03) pediu a explicação de Lucas enquanto olhava para baixo, encarando a folha de sua própria atividade. Isso fez com que Lucas se sentisse nervoso. A construção de significados coletivamente nem sempre é pacífica, visto que há uma disputa associada ao domínio dos conhecimentos e discursos matemáticos. Houve mobilização de todos, alguns em favor de Mateus e outros em favor de Lucas.

Enquanto tudo isso acontecia, Karla continuou a conferir sua rede de quadrados de ordem 11. Ao perceber que algo estava errado, ela me chamou. Percebemos que ela havia se confundido no desenho dos traços, que representavam os palitos, conforme explicitado no círculo da imagem a seguir. Os dois palitos verticais à caneta foram adicionados por mim durante a explicação de o porquê de o desenho não ter dado certo.



Desenho da rede de quadrados de ordem 11 confeccionada por Karla.

Em situações de atividades que abordem maiores quantidades, comumente com o intuito de fomentar a capacidade de generalizar (Almeida; Santos, 2017), a estratégia de confeccionar um desenho à mão nem sempre é adequada. É nesses contextos que o desenvolvimento do pensar algebricamente se mostra necessário.

Karla pegou um caderno em sua mochila e começou a rabiscar uma folha inteira com a caneta, fazendo rápidos movimentos circulares e de “vai e vem”, despadronizados, para que pudesse lidar com sua frustração. Ao expressar como estava se sentindo, ela foi confortada pelos colegas.

Precisei avisar que nosso encontro estava terminando por causa dos horários estabelecidos pela escola. Nesse momento, os estudantes se preocuparam com os registros. Mateus percebeu que até esse momento ele havia contado os palitos de todas as 11 linhas, porém somente de quatro colunas, e conseguiu se corrigir.

Mateus seguiu uma estratégia de contagem própria por meio da construção do desenho, enquanto Lucas seguiu a estratégia de contagem guiada pela atividade. Ambos chegaram, por fim, ao mesmo resultado apesar do percurso conturbado de animosidades.

00:52:05	Mateus	Aqui, olha… Só fiz com quatro… [colunas]
00:52:23	Larissa	Então o do Lucas está certo.
00:52:25	Isadora	Ele só fez 11 para cima, ele não fez 11 para o lado, na horizontal.
00:53:21	Mateus	O primeiro quadrado tem quatro [palitos], e aí o resto dessa ordem vai ser de três em três. [para completar os quadrados da coluna até o décimo primeiro].
00:53:26	Lucas	Mas esse aqui não vai fechar o quadrado daqui, não completa o quadrado daqui?
00:53:28	Mateus	Eu tirei, por isso aqui vai ficar dois em dois. [dois em dois palitos para completar os quadrados do interior da rede]
00:53:32	Lucas	Humm, entendi.
00:53:34	Mateus	Só que aí eu só fiz quatro, [colunas] eu não fiz o resto. Aí agora eu contei o resto, vai dar 264.
00:54:15	Raquel	Eu posso usar o desenho para explicar, na última?
00:54:19	Paola	Pode, claro!
00:54:39	Karla	Eu desisto da minha vida! Eu estou com medo de fazer errado de novo. Eu fiquei com muita raiva, olha aí "véi"!
00:55:13	Lucas	Ô meu Deus... Um abraço para confortar. [abraça a Karla]

Durante a conclusão dos registros, Karla, Lucas e Larissa expressaram curiosidade para saberem como deve ser feito o desenvolvimento da atividade proposta e recorreram a mim. Durante todos os encontros do Experimento de Ensino, a escola nos disponibilizou almoço, e eu e os estudantes almoçamos juntos na cantina da escola, o que possibilitou trocas não somente sobre Matemática, mas também sobre a vida, sonhos e outras questões pessoais.

Karla ainda expressou sua frustração em relação à tentativa de desenhar uma rede de quadrados de ordem 11. Lucas, ainda em pé, continuou tentando explicar seu raciocínio para Mateus. Houve mais um momento de *stress*. Davi demonstrou que compreendeu a estratégia de contagem proposta pela atividade.

Os estudantes apresentaram dificuldades para realizar os registros, porque, de acordo com Raquel, "*a gente sabe falar, mas a gente não sabe como escrever*". Assim como Kaput (2008 apud Almeida e Santos, 2017), acreditamos que o que determina a linguagem utilizada será o nível de experiência dos estudantes e consideramos que as dificuldades sentidas e apresentadas pelos estudantes serão amenizadas com o decorrer das experiências escolares e estímulos promovidos pelo(a) professor(a).

00:55:50	Karla	Pergunta ela, se ela sabe a resposta, não para ela falar, mas se ela sabe...
00:55:56	Lucas	Paola!
00:55:56	Karla	Professora! Você sabe a resposta?
00:56:00	Karla e Lucas	Não precisa falar, mas você sabe?
00:56:01	Paola	Sei.
00:56:03	Larissa	No recreio você fala? No recreio não, no almoço você fala? Por favor!
00:56:06	Paola	Falo.
00:56:46	Larissa	Ai, vamos descer para o almoço logo? Eu quero saber a resposta.
00:57:01	Raquel	Ô "véi" eu não sei como que eu explico, cara...
00:57:22	Lucas	Mateus a gente também usa [palito] na vertical, meu filho!!!
00:57:28	Lucas	Vinte. Vinte palitos na horizontal, mais vinte palitos na vertical, 40 palitos no "negócio", na mesma lógica! [fala batendo na mesa]
00:57:37	Raquel	Lucas… Você está se estressando.
00:57:40	Lucas	Estou. [nesse momento, Lucas retorna para a MESA 1 e senta]
00:57:43	Karla	Senta um pouquinho, respira.
00:57:46	Raquel	Quando você fica com raiva, você começa a bater na mesa, então você se acalma um pouquinho aí, porque senão... Eu acho que eles vão botar esse vídeo em algum lugar na internet… [fala apontando para a câmera]
00:57:55	Lucas	Ai, calma, me dá água.
00:57:56	Raquel	Má imagem sua não... Uma má imagem sua não.
00:57:59	Karla	Estou com medo de fazer com raiva de novo [desenhar uma rede de quadrados de ordem onze] e eu ficar mais nervosa.
00:58:03	Raquel	Você pode deixar pra lá, quer que eu faça?
00:58:05	Karla	É questão de honra.
00:58:07	Raquel	De honra... De honra! Ai meu Deus, só você mesmo Karla.
00:58:10	Davi	Gente, não precisa disso.
00:58:29	Raquel	O pior é que a gente sabe falar, mas a gente não sabe como escreve… Eu não sei como que eu escrevo. Ai, será que é obrigatório? Eu vou escrever assim: "sim, mas não sei explicar".
00:58:45	Isadora	Você fez errado, né? [pergunta para Mateus]
00:58:46	Mateus	Fiz.
00:58:46	Karla	É, uai. Eu estou com medo de fazer errado de novo… [a rede de quadrados de ordem onze]
00:58:50	Lucas	Não vai.

00:59:00	Karla	Olha, deu errado só nesse quadradinho. [aponta para o lugar que eu circulei]
00:59:03	Lucas	Aí mudou tudo.
00:59:04	Karla	Mudou tudo...
00:59:14	Davi	Pra mim deu 264...
00:59:19	Paola	Fez sentido o 264 para você? Por quê?
00:59:24	Davi	Porque se aqui… [faz movimento de vertical] ia ter 132, aqui [faz movimento de horizontal] também ia ser 132...
00:59:34	Lucas	Isso! Alguém me entendeu! [movimenta os braços no ar]
00:59:49	Larissa	Faz assim, olha, porque aqui [gesticula movimento de linha] vai ter 11 e assim [palitos verticais na linha] vai ter 12, vai fazer 11 vezes 12...
00:59:53	Lucas	Multiplica 11 vezes 12 e dá 132.
00:59:56	Larissa	É.
00:59:57	Isadora	Porque tem um a mais para fechar o quadrado de cima.
00:59:59	Lucas	Isso! Ah! Alguém me entendeu.
01:00:08	Mateus	Minha lógica fez sentido sim. Eu acho que fez sentido sim… Eu também achei 264.

Por fim, Mateus conseguiu concluir seu raciocínio utilizando a construção do desenho, dessa vez completo com todas as 11 colunas, e encontrou o mesmo resultado de Lucas. Todos os estudantes disseram ter chegado a um consenso em relação ao resultado da atividade proposta: são necessários 264 palitos para montar uma rede de quadrados de ordem 11. Com o fim do horário disponível, combinamos realizar a atividade prevista para esse encontro no próximo.

Enquanto nos organizávamos para nos retirarmos da biblioteca, Raquel questionou se precisaríamos aumentar a quantidade de encontros. Até então, eram quatro encontros previstos, assinados nos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) dos estudantes e responsáveis. Nesse momento, Karla sugeriu aos colegas que eles "enrolem mais" para realizar as atividades, para ficarem "matutando".

Percebemos que o processo de aprendizagem demanda diferentes tempos para diferentes estudantes, e as exigências curriculares não respeitam esse processo de descoberta, exigindo, muitas vezes, uma agenda corrida durante as aulas de Matemática que não possibilitam discussões e experimentações como as que ocorreram durante esse encontro do Experimento de Ensino. Os alunos se sentiram desafiados e propuseram a realização de mais encontros, demonstrando a satisfação de estarem aprendendo.

Algumas anotações realizadas pela observadora nesse dia foram: "*Os alunos possuem dificuldade em expressar o raciocínio*" e "*Os alunos estavam com dificuldade em raciocinar,* *pois demandava muita imaginação, era abstrato, talvez se fosse um material concreto iria auxiliar*”. No entanto, como o objetivo da pesquisa é observar como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades., não julgamos necessária a utilização de qualquer tipo de material concreto.

Nenhum estudante realizou registros para a pergunta “*Quantos palitos são necessários para construir uma rede de quadrados de ordem 11*?”

Em relação à pergunta “*Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de palitos utilizados para montar uma sequência de rede de quadrados de qualquer ordem? Se sim, como você expressaria essa situação?*”, os registros foram diversos, desde “*a cada coluna aumenta 1 palito*”, “*sim, na primeira fileira conta todos os quadradinhos*”, até registros que explicitam por meio de exemplos numéricos (aritimeticismo - Lins, 1992 apud Almeida e Santos, 2017), como as estratégias de contagem explicitadas por Lucas e Mateus.

Para exemplificar, trazemos o registro de Larissa, que explica a estratégia de contagem elaborada por Lucas: “*Sim, vou pegar a ordem de 11 como exemplo, na vertical vai ter 11 palitos e encima 12 e vai fazer 11x12 que vai dar 132 e depois vai fazer 132+132 que vai dar 264, a quantidade de palitos*”, e o registro de Isadora, que explicita a estratégia de contagem de Mateus: “*Sim, a gente conta a primeira coluna de 4+3+3+3… até a ordem x, na segunda coluna a gente conta 3+2+2… até a ordem e depois de fazer tudo isso até a ordem x somamos tudo isso dará o resultado de palitos necessários*”.

Isso significa que Larissa e Isadora compreenderam as elaborações dos colegas, manifestando que houve uma construção coletiva de significados (Silva, 2001).

Concluímos que, apesar da valiosa discussão realizada nesse encontro do Experimento de Ensino, os registros ficaram incompletos. Observamos que os estudantes puderam compreender a generalização proposta pela atividade.

A observadora registrou, e com ela concordamos: “*Por fim, todos chegaram no mesmo resultado, de maneiras diferentes. Estão curiosos para as próximas atividades. Gostaram de raciocinar*”.

3.3 Terceiro encontro

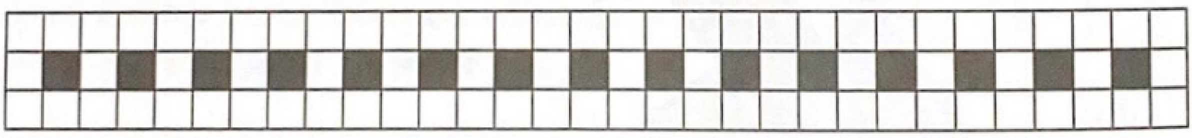
O terceiro encontro do Experimento de Ensino ocorreu na biblioteca da escola no dia 24 de maio de 2023 e teve início às 11h42, com duração de 49 minutos. Contamos com a presença de oito estudantes, quatro meninos e quatro meninas. Maria novamente não compareceu. Nesse encontro, a observadora nos acompanhou.

Distribuí as folhas da atividade a ser desenvolvida, denominada Faixa de Ladrilhos[4], junto com um pirulito para cada. Os estudantes se organizaram em duas das três mesas redondas disponíveis, sendo: Mateus, Larissa, Isadora e Ruan em uma, e Lucas, Raquel, Karla e Davi em outra.

Essa atividade é utilizada no livro *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*, de Rômulo Lins e Joaquim Gimenez (1997), para exemplificar o que é uma situação generalizada, em que os autores definem ser um conjunto de casos particulares, diferentemente de uma situação genérica, que diz respeito a tratar diretamente daquilo que é geral em uma atividade. Portanto, buscamos desenvolver com os educandos, por meio da proposta dessa atividade, uma experiência com uma situação generalizada, a fim de fornecer mais um repertório que possa contribuir com o surgimento significativo da linguagem algébrica simbólica.

Faixa de Ladrilhos

Veja uma faixa formada por ladrilhos pretos e brancos, como indicado na ilustração a seguir.

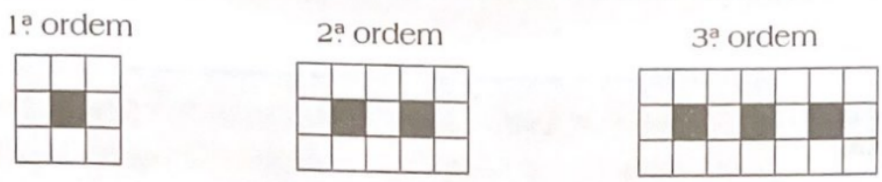


Essa faixa é formada por três camadas horizontais.

- a 1ª e a 3ª camadas têm apenas ladrilhos brancos;
- a 2ª camada alterna ladrilhos pretos e brancos a partir de um ladrilho branco.

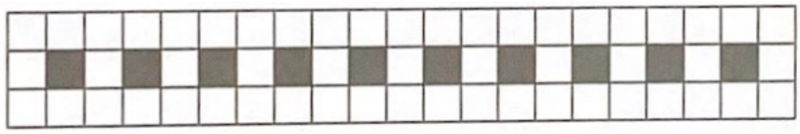
Uma faixa completa como esta começa e termina com ladrilhos brancos na camada do meio.

A ordem de cada faixa é determinada pelo número de ladrilhos pretos. Uma faixa de ordem **n** tem exatamente **n** ladrilhos pretos na camada do meio.



[4] A atividade foi adaptada do livro didático de Bigode (2000, p. 122-127).

a) Qual é a ordem da faixa abaixo? __________



b) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem 17? __________

c) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem 247? __________

d) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem 1995? __________

e) Preencha a quadro abaixo para as faixas de ordem 1 a 7.

Ordem da faixa	Ladrilhos pretos	Ladrilhos Brancos	Número de colunas	Número total de ladrilhos
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

g) Qual a relação entre o número de colunas e o total de ladrilhos?

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

Inicialmente, discutimos o que é faixa, o que é ladrilho e qual é a relação destes com a ordem da sequência. A primeira folha foi solucionada rápida e corretamente pelos estudantes. A discussão maior foi referente à questão e) preenchimento da quadro, e as relações que a atividade solicitou que fossem estabelecidas.

Mateus realizou os registros rapidamente e os colegas solicitaram que houvesse uma discussão coletiva como nos encontros anteriores.

00:03:48	Mateus	Na atividade... Na letra "e'...
00:03:51	Paola	Letra "e", já?
00:03:54	Davi	O Mateus já está na "e"?
00:04:02	Raquel	É dez. [respondendo a letra *a* para Isadora]
00:04:02	Isadora	Não conta os brancos não, só os pretos...
00:04:35	Davi	Está vendo um aqui [imagem da ordem 1], olha, tem um [ladrilho preto], a ordem dois tem dois...
00:04:39	Lucas	Ah, entendi.

Os alunos estavam verbalizando pouco e, por isso, estavam em ritmos diferentes. Após seis minutos do início da atividade, por exemplo, Lucas estava preenchendo o quadro (*letra e*) e Isadora e Raquel estavam respondendo às perguntas iniciais. Percebi que não havia grandes dificuldades.

Mateus iniciou a discussão em relação ao preenchimento do quadro e percebeu as progressões estabelecidas pela sequência. Lucas, Raquel e Larissa perceberam também a regularidade na quantidade de ladrilhos brancos. Os alunos demonstraram suas capacidades de estabelecer relações (Almeida; Santos, 2017).

00:07:48	Mateus	A cada ordem, os ladrilhos brancos aumentam cinco e o número total de ladrilhos aumentam seis, a ordem de colunas, dois. Tem uma sequência.
00:08:11	Mateus	Aqui vai de um em um [ladrilhos pretos]
00:08:13	Larissa	Porque ladrilhos pretos é a ordem, né?!
00:08:29	Isadora	Tudo são ladrilhos.
00:10:17	Lucas	O número total de ladrilhos [brancos] é 38, na de [ordem] sete. É isso mesmo, está certo.
00:10:24	Larissa	Nossa, está certo mesmo!

Larissa e Lucas ajudaram Davi a compreender as regularidades das sequências que compunham a atividade. Isadora buscou generalizar as regularidades e citou a "*ordem mil*".

00:11:50	Larissa	Quer que eu te explique?
00:11:51	Davi	Explica.
00:11:52	Larissa	Aqui você não vai aumentar nada [em relação à ordem e quantidade de ladrilhos pretos], aqui você vai aumentar de... Quanto que é aqui [ladrilhos brancos]?
00:11:53	Lucas	A primeira ordem tem um ladrilho preto, a segunda não tem dois? E assim vai, entendeu?
00:12:00	Lucas	Aí, olha, para você achar a quantidade de ladrilhos brancos, aumenta a cada cinco...
00:12:47	Davi	E o segundo [segunda coluna do quadro] é de cinco em cinco né? Aqui é de cinco em cinco, não é?
00;12:50	Larissa	Isso. Aí, aqui de dois em dois [número de colunas], o quarto [número total de ladrilhos] é de seis em seis.
00:13:02	Isadora	Então, por exemplo, fazer a ordem mil vai ser essa mesma sequência?

No percurso de encontrar as regularidades, Larissa apresentou dificuldades em encontrar as relações solicitadas. Mateus percebeu a progressão aritmética dos ladrilhos brancos, apoiado no aritmeticismo (Lins, 1992 apud Almeida; Santos, 2017). Lucas percebeu que o número total de ladrilhos será sempre o triplo da quantidade de colunas, mobilizando sua capacidade de estabelecer relações (Almeida; Santos, 2017). Larissa e Lucas alegaram que pularam a questão *f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?* por sentirem dificuldade, e Larissa estendeu essa dificuldade para as demais perguntas.

00:14:27	Larissa	Essa aqui eu não entendi...
00:14:28	Paola	A letra "f" você não entendeu?
00:14:30	Larissa	É... A "g", a "h", a "i"...
00:14:32	Paola	A "f" está perguntando qual é a relação entre o número de ladrilhos pretos e brancos, aí olha na tabela como estão os ladrilhos.
00;14:38	Larissa	Não tem, não tem... Não tem relação.
00:15:04	Isadora	Tem. Temos que descobrir.
00:15:21	Lucas	Aah, eu entendi, olha, para cada ladrilho branco, tipo assim, se é de ordem um, aumenta mais um, então o número total de ladrilhos vai ser nove, e assim vai...
00:16:45	Mateus	É 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43… [observa a quantidade de ladrilhos brancos]
00:16:50	Larissa e Isadora	Ah, entendi!

00:17:42	Lucas	Olha, olha, olha. O número de colunas e o número de ladrilhos, olha aqui, olha, três vezes três dá nove… Sete vezes três... Nove vezes três… Dá o total de ladrilhos! O número de colunas vezes três, dá o número total de ladrilhos.

Todos os estudantes realizaram os registros corretos do quadro; ou seja, perceberam as regularidades envolvidas na atividade. Nesses registros, destacarei dois que destoam do restante: Davi realizou muitas rasuras e Mateus registrou as regularidades “*1 em 1*”, “*5 em 5*”, “*2 em 2*” e “*6 em 6*”. Esses registros, na íntegra, se encontram nos Apêndices.

Os estudantes prosseguiram com a discussão coletiva das questões seguintes, dessa vez de forma não linear, tentando estabelecer as relações entre as grandezas sem que as discussões seguissem a ordem das perguntas da folha. Apresentaram dificuldades para a realização dos registros, apesar de terem compreendido as regularidades da atividade, manifestando suas capacidades de estabelecer relações, mas sem conseguirem ainda modelar ou generalizar (Almeida; Santos 2017).

Lucas percebeu que a quantidade de ladrilhos totais seria o triplo da quantidade de colunas da faixa, e Karla e Lucas perceberam juntos, através de uma construção coletiva de significados, que a soma de ladrilhos brancos e de ladrilhos pretos seria o total de ladrilhos, estabelecendo as relações corretamente (Almeida; Santos, 2017).

Larissa (minuto 21:15) manifestou que ainda não desenvolveu a capacidade de modelar (Almeida; Santos, 2017).

00:20:47	Isadora	Calma, como que fala? Ai, não é ordem…
00:20:54	Larissa	Ordem “N”?
00:20:59	Isadora	Ordem “N” é uma incógnita.
00:21:03	Larissa	Ordem “N” é uma incógnita?
00:21:14	Isadora	Aí como eu faço a conta?
00:21:15	Larissa	Isso, eu também não sei fazer, tipo, criar... Tipo dar uma base da conta e criar a conta...
00:21:34	Lucas	A não, aqui aumenta... Treze para quinze é dois, 18 para 21 dá três, 23 para 27 dá quatro, 28 para 33 dá cinco... *soa surpreendido* Olha só... Mais uma lógica!
00:21:48	Karla	Eu peguei mais uma lógica! Eu acabei de perceber isso aqui, agora.
00:21:56	Larissa	Sim, verdade!
00:22:25	Lucas	Que isso hein Karla!
00:23:03	Lucas	Foi uma descoberta muito grande!
00:24:06	Raquel	A ordem da faixa vai aumentando, tipo, a ordem três, aí aumenta três...

00:24:20	Karla	Não, aumenta, tipo, na sequência três, aumenta três, na sequência dois, vai aumentar dois, é acumulativo até a sete, então somando o número de colunas, mais aqui [ordem], vai dar o resultado daqui… Não, não é isso não, gente, vocês estão doidos? Vocês não tinham falado que somando esse [ladrilhos pretos] mais esse [ladrilhos brancos] vai dar o resultado [total de ladrilhos]?
00:25:03	Lucas	Não, esse [ladrilhos pretos] mais esse [ladrilhos brancos], dá esse resultado [total de ladrilhos].

Lucas percebeu que, na questão *h*) *Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?*, a quantidade de ladrilhos pretos será *n*, observando uma informação presente no enunciado (minuto 30:58).

Isadora elaborou junto com Mateus a questão *g*) *Qual a relação entre o número de Colunas e o total de ladrilhos?* e apontou que, como o exercício não forneceu a quantidade de colunas, não há como fazer a conta, mostrando dificuldades em manifestar a capacidade de generalizar.

00:30:58	Lucas	A resposta está na folha... O número da ordem é a mesma quantidade de ladrilhos pretos, gente. Está na folha.
00:31:06	Isadora	É que ele não especifica...
00:31:09	Lucas	A faixa de ordem “n” é a mesma quantidade de “n” ladrilhos, então é “n” ladrilhos pretos.
00:31:18	Isadora	Ele não está dando o número de colunas, Mateus… Se ele estivesse dando o número de colunas você poderia fazer a conta.
00:31:24	Lucas	Uma faixa de ordem “n”, tem exatamente “n” ladrilhos [pretos], olha a pergunta: “quantos ladrilhos pretos têm na faixa de ordem “n”?”, ‘n” ladrilhos pretos! Simples!

Isadora tentou responder à questão *g*) “*Qual a relação entre o número de Colunas e o total de ladrilhos?*”, mas confundiu a utilização dos símbolos (minuto 33:07), dizendo que a resposta também seria *n* assim como na questão *h*) “*Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?*”. Podemos perceber que ainda não houve a atribuição de significados (Lins; Gimenez, 1997) para a linguagem algébrica simbólica, visto que, se houve a atribuição da letra *n* para determinar a ordem, não poderíamos utilizar o mesmo símbolo para determinar o total de ladrilhos. Em contrapartida, Raquel (minuto 34:36) estabeleceu corretamente a relação entre ordem e coluna, proporcionando uma construção coletiva de significados.

00:32:56	Isadora	Está perguntando qual o número de colunas em uma faixa de ordem “n”, a gente não sabe... Como fala? A ordem!
00:33:03	Lucas	Não, a gente, tipo assim, uma ordem “n” é qualquer ordem.

00:33:07	Isadora	Então vai ser a mesma coisa da "h". É isso, o número de uma faixa de ordem "n", é "n" coluna. Porque está perguntando qual é o número de colunas de uma faixa de ordem "n"... Porque "n" é uma incógnita, a gente não sabe quantos ladrilhos tem para a gente saber o total de colunas, então é "n".
00:34:36	Raquel	Eu coloquei número de colunas vezes três é igual ao total de número de ladrilhos.
00:34:48	Lucas	Três vezes três, nove. Qual é a relação das colunas? Número de colunas vezes três é igual ao número de ladrilhos.

Mateus percebeu qual é a relação estabelecida entre a quantidade de colunas de uma faixa de ordem *n*, que é a mesma relação entre a quantidade de colunas e de ladrilhos pretos, para responder à questão: *i*) "*Qual o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?*" A relação é que o número de colunas é $2n+1$.

Nos registros, Mateus utilizou a linguagem algébrica retórica para responder à questão, mas depois sintetizou as relações por meio da linguagem algébrica simbólica, com a expressão $C = n \times 2 + 1$, apresentando a capacidade de modelar, generalizar e construir significado para a linguagem e os objetos algébricos (Almeida; Santos, 2017).

Raquel e Larissa demonstraram dificuldades. Entretanto, após a ajuda dos colegas, Raquel exprimiu sensibilidades positivas relacionadas à compreensão da atividade.

00:39:59	Larissa	Ai, matemática não dá mais.
00:40:03	Mateus	O número de ladrilhos pretos, usando a quantidade de colunas, você vai tirar uma coluna e vai dividir por dois. Se for descobrir o número de colunas, você vai dobrar o número de ladrilhos pretos e vai adicionar mais um.
00:40:18	Larissa	Aqui Lucas! Tipo assim, olha... Aí vai ficar 14 dividido por dois e vai dar sete [faixa de ladrilhos de ordem dois].
00:40:24	Lucas	Se eu quiser descobrir a ordem, né?!
00:40:26	Mateus	Se quiser descobrir o número de ladrilhos pretos com a coluna, você faz isso.
00:40:39	Raquel	Eu não entendi, do que vocês estão falando?
00:40:39	Larissa	Explica, porque eu não entendi.
00:40:54	Lucas	Se eu quiser descobrir o número da ordem, eu vou pegar o número de colunas, se eu souber o número de colunas, vou subtrair um e vou dividir por dois, aqui, olha, 21 menos um, fica 20...
00:41:19	Lucas	Quatorze dividido por dois é igual a sete, é o número da ordem de faixa.
00:41;24	Raquel	Ah que legal! Passada!

Os estudantes estavam discutindo a solução de várias perguntas simultaneamente, incluindo a questão *k*) *Determine a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18*. Apesar de Mateus utilizar o termo “incógnita” (minuto 43:39), percebemos que ele estava construindo a noção de variável.

00:41:26	Karla	Ordem “n”? que ordem é essa?
00:41:31	Lucas	Vai servir para todos, olha, 13 menos um 12, 12 dividido por dois, seis.
00:41:36	Larissa	Ah, entendi, então pode pegar o número que está correto ainda?
00:41:42	Lucas	Funciona para todos… Ordem 18? Eu vou multiplicar por dois mais um, entendi...
00:41:57	Larissa	É menos um, não é não?
00:41:59	Mateus	Não, ele está fazendo o contrário, ele está descobrindo o número de colunas, se for descobrir o número de colunas você vai multiplicar por dois e adicionar mais um.
00:42:59	Larissa	Então, tipo, eu não preciso saber exato? Então a ordem “n” não precisa ter um número exato? Então, tipo, se eu quiser fazer outra conta aqui, eu posso? Tipo, se eu quiser usar o 21 aqui, eu posso? E aqui o sete?
00:43:14	Mateus	Pode.
00:43:17	Larissa	Mas assim, ordem “n” não é especificamente um número não?
00:43:39	Mateus	Só vai mudar o número da ordem. Por isso eu falei para você colocar uma incógnita no lugar.
00:43:52	Larissa	Por que?
00:43:53	Isadora	Porque não sabe...
00:43:55	Mateus	Porque você não sabe o número de coluna.
00:43:56	Isadora	Isso...

Na tentativa de mapear as dificuldades dos estudantes e buscando compreender o objetivo da pesquisa: como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico em um experimento de ensino onde são propostas sequências que apresentam regularidades, questionei sobre a utilização das simbologias algébricas na realização dessa atividade.

00:45:15	Paola	Vocês acham que fica mais difícil quando coloca o “n” aí na atividade?
00:45:19	Todos	Sim.
00:45:23	Larissa	Sim, com certeza.
00:45;26	Paola	Por que?
00:45:27	Davi	Porque não sabe...
00:45:29	Karla	Não, porque aí, você mesmo pode colocar... Você mesmo pode substituir, vamos supor, “n” por um, por um número, aí você vai poder criar sua ordem, não ela vai ter uma ordem já, cada resposta vai ficar diferente, porque cada pessoa tem uma ordem, tipo... Entendeu?
00:45:50	Paola	Mas a letra serve para representar qualquer um, não é?
00:45:52	Karla	Então!

O diálogo mostra que está sendo construída a ideia de variável. Ao findar o tempo disponível para a realização desse encontro, propus retomarmos a atividade na semana seguinte.

00:47:49	Paola	Galera, o que vocês acham de a gente ir almoçar, vamos?
00:47:52	Lucas	Eu, quero muito!
00:47:54	Raquel	Deixa eu fazer essa conta aqui, rapidinho.
00:47:55	Paola	Então tá.
00:47:57	Lucas	Espera aí, a gente vai almoçar e depois a gente volta?
00:48:00	Paola	Volta semana que vem.
00:48:45	Paola	Olha, vamos combinar o seguinte: semana que vem, quando a gente terminar essa atividade, eu explico tudinho para vocês, eu prometo.
00:48:50	Larissa	Ok.
00:48:51	Paola	Mas por enquanto não, porque não quero afetar o raciocínio de vocês.

Após a finalização dessa atividade, no próximo encontro, iremos expor alguns registros realizados pelos estudantes. Observamos que houve muitas discussões durante a realização dessa atividade e um desenvolvimento coletivo de significados novamente.

3.4 Quarto encontro

O quarto encontro do Experimento de Ensino ocorreu na biblioteca da escola no dia 31 de maio de 2023 e teve início às 11h54, com duração de uma hora e nove minutos. No dia anterior, 30 de maio de 2023, aconteceu a prova da primeira fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), e esse tópico foi comentado durante o encontro. Para esse encontro, estava prevista a finalização da atividade *Faixa de Ladrilhos*.

Contamos com a presença de sete estudantes, três meninos e quatro meninas. Maria e Ruan não puderam comparecer. Nesse encontro, a observadora não pôde nos acompanhar, pois estava fazendo pré-natal. Devido à organização da cantina da escola, almoçamos antes da realização das atividades, o que interferiu no desempenho dos estudantes, sobretudo de Davi, que manifestou sentir sono. Cada um ganhou uma bala de chocolate para a sobremesa.

No encontro anterior, os estudantes realizaram a atividade *Faixa de Ladrilhos* em diferentes ritmos. Lembrando-me da dificuldade do segundo encontro em retomar a atividade *Rede de Quadrados*, iniciei esse procurando retomar as construções que já haviam sido feitas e instigar a discussão coletiva, para que houvesse maior verbalização dos procedimentos utilizados pelos estudantes. Fiz uma sistematização oral do que havia sido concluído no encontro anterior, para que pudéssemos prosseguir.

00:00:03	Paola	Vamos voltar para o começo da atividade antes de tentar responder? Só para a gente entrar na "*vibe*". Olha, "veja uma faixa formada por ladrilhos brancos e pretos, como indicado na ilustração a seguir." Aí a gente viu que a faixa é formada tanto por ladrilhos pretos quanto por ladrilhos brancos, a faixa começa e termina em ladrilho branco no meio, e a ordem da faixa é dada pela quantidade de ladrilhos pretos, então se tem um ladrilho preto, é a primeira ordem...
00:00:33	Lucas	É a primeira ordem... Se tem dois ladrilhos… e a ordem da faixa é dada pela quantidade de ladrilhos pretos, então se tem um ladrilho preto, é a primeira ordem...
00:00:34	Paola	Se tem dois é segunda ordem, se tem três é terceira ordem... Aí esse aqui debaixo tem quantos? Uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez... Décima ordem. Aí é isso que a gente fez, a gente já respondeu aqui, da primeira folha. Todo mundo já preencheu a tabela?
00:00:52	Todos	Sim.
00:00:53	Paola	Vocês lembram quais são as relações que tem entre as coisas?
00:00:56	Raquel e Lucas	Eu lembro.
00:01:00	Raquel	Ladrilhos pretos mais ladrilhos brancos é o...
00:01:02	Lucas	Total de ladrilhos.
00:01:03	Raquel	É o total de todos os ladrilhos.
00:01:05	Paola	E qual é a relação entre o número de colunas e o total de ladrilhos?
00:01:16	Lucas	Se multiplicar todas as colunas por três, a gente vai ter o número total de ladrilhos.
00:01:19	Paola	Todo mundo chegou nessa conclusão?
00:01:20	Todos	*movem a cabeça afirmativamente*
00:01:20	Paola	Então vamos continuar...

Os estudantes já haviam realizado os registros das seguintes questões:

> *f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?*
> *g) Qual a relação entre o número de Colunas e o total de ladrilhos?*
> *h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?*

Portanto, prosseguimos a partir da questão *i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?*

00:02:09	Paola	Olha só, vamos olhar para a imagem de três ladrilhos pretos, por exemplo, é de qual ordem desse daqui?
00:02:18	Raquel	Ordem três.
00:02:19	Paola	Três, porque tem três ladrilhos pretos. E quantas colunas tem aqui?
00:02:24	Todos	Sete.
00:02:37	Paola	Isso! A "i" está perguntando o seguinte: *Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem n?* A ordem não é a quantidade de ladrilho preto? Qual é a relação entre a quantidade de coluna e a quantidade de ladrilho preto? É isso que a letra "i" está perguntando. Aí a partir de agora todo mundo já entrou na *"vibe"* do exercício?
00:02:57	Lucas	Sim.
00:02:59	Paola	Vou deixar com vocês então, hein.

No decorrer da discussão, os estudantes expressaram suas dificuldades com a atividade proposta, alegando "*porque tem n*". Nossa intenção era mesmo essa de modo que os estudantes pudessem apresentar o raciocínio e tivessem a possibilidade de expressá-lo no formato da linguagem algébrica simbólica. Iniciamos a discussão da atividade com conversas que afirmaram dificuldades.

00:04:01	Paola	Vocês estão achando essa atividade de ladrilho mais difícil do que aquela dos quadrados?
00:04:04	Raquel, Isadora, Larissa.	Sim.
00:04:04	Lucas	Sim, porque tem "n".
00:04:05	Larissa	Com certeza.
00:04:12	Isadora	Mais ou menos, não é por causa do "n".
00:04:14	Lucas	É, não é por causa do "n", a atividade, em si, é fácil...
00:04:15	Karla	Eu não achei fácil…
00:04:17	Lucas	Mas quando chega na parte, tipo assim, "qual o número de colunas na faixa de ordem 'n'?" Essa é meio complicadinha.
00:04:44	Karla	Eu gosto, eu acho legal, porque aí a gente pode criar...

Ao perceber que o registro que os estudantes haviam realizado na questão *i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem n?* havia sido "*n colunas"* ao passo que na questão *h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem n?* havia sido "*n ladrilhos pretos*", realizei uma intervenção com o objetivo de gerar uma reflexão.

00:08:26	Paola	Mas o “n” representa a mesma coisa em todas as questões. A partir do momento em que o “n” representa a quantidade de ladrilho preto, portanto, a ordem, ele representa isso, se você quiser representar outra coisa, você tem que usar outra letra. Então “n” é a quantidade de ladrilhos pretos.
00:08:49	Lucas	“Qual o número de colunas de uma faixa de ordem “n”?”, então eu posso colocar ‘x’ colunas? Não, tem que ser em relação ao número de ladrilhos pretos...
00:09:10	Larissa	Então não faz sentido essa resposta…

Mateus sintetizou qual é a relação entre o número de colunas de uma faixa de ordem *n* e compartilhou com os colegas. Ao perceber a relação solicitada pela atividade, mobilizando o pensamento algébrico (Almeida e Santos, 2017), o estudante comunica por meio da linguagem algébrica retórica o que foi solicitado pelo enunciado. Com a frase “Pega o número de ladrilhos pretos, multiplica por dois e adiciona um, para descobrir o número de colunas”, o estudante descreve a expressão “2n+1=C”, e ainda estabelece o caminho contrário, também com a utilização da linguagem algébrica retórica, da seguinte maneira: “Para descobrir o número de ladrilhos pretos usando o número de colunas, você vai tirar uma coluna e vai dividir por dois”, descrevendo então a expressão “n = (C-1)/2”. Podemos perceber com esta fala do estudante que a mobilização do pensamento algébrico pode ser manifestada em diferentes linguagens.

00:10:09	Karla	Eu pensei assim, olha, aqui é de ordem três, tem três ladrilhos pretos [aponta para o desenho]... Quando tem três, aqui tem sete [colunas]...
00:10:25	Karla	Quando tem três, aqui tem sete [colunas]...
00:10:26	Paola	Sete colunas, isso, e quando é de ordem dois?
00:10:34	Karla	Cinco, pra ordem dois.
00:10:38	Paola	Isso. Então olha só, quando a ordem é um, tem três, quando a ordem é dois, tem cinco, quando a ordem é três, tem sete...
00:10:46	Lucas	Entendi.
00:10:47	Raquel	Aumenta de duas em duas colunas.
00:10:52	Mateus	Pega o número de ladrilhos pretos, multiplica por dois e adiciona um, para descobrir o número de colunas. Para descobrir o número de ladrilhos pretos usando o número de colunas, você vai tirar uma coluna e vai dividir por dois, e para descobrir o número de colunas usando os ladrilhos pretos, você vai multiplicar por dois e adicionar um.

Lucas procurou solucionar a atividade proposta por outro caminho, que, na verdade, não difere do que foi apresentado por Mateus. Posteriormente, os dois perceberam isso (minutos 13:39 e 13:47). A diferença é que Mateus utilizou a operação de multiplicação (2n+1), enquanto Lucas utilizou a operação de adição (n+n+1), mas o raciocínio foi o mesmo. Ainda assim, Isadora expressou que, da forma apresentada por Lucas, ela conseguiu entender.

Podemos perceber que alguns estudantes ainda não desenvolveram completamente a capacidade de modelar (Almeida; Santos, 2017) e se baseiam no aritmeticismo (Lins, 1992 apud Almeida; Santos, 2017) para conseguir estabelecer as relações propostas pela atividade.

00:11:41	Lucas	Tem mais um jeito também, acho que é usando, mais ou menos, a lógica do Mateus, é mais complicada, mas também tem mais um jeito.
00:11:48	Paola	Qual é o outro jeito?
00:11:49	Lucas	Olha, eu tenho três ladrilhos pretos, para cada ladrilho preto eu vou adicionar mais um. Eu tenho um ladrilho preto, se eu adicionar mais dois, um mais dois dá três, aí aqui eu tenho dois, então eu vou aumentar mais um também no número de colunas, então dois mais três dá cinco, aí aqui a mesma coisa, vai aumentando.
00:12:17	Paola	Três mais... Aí seria três mais quatro?
00:12:21	Lucas	É.
00:12:22	Paola	Ah, entendi... E como você escreveria isso?
00:12:25	Lucas	É... Um número, tipo assim, eu vou pegar o número de ladrilhos pretos, que é “n”, e vou adicionar mais um. O número de ladrilhos pretos, mais o número de ladrilhos pretos mais um, é igual ao número de colunas.
00:13:36	Isadora	O número de ladrilhos pretos mais um... Aah!
00:13:39	Mateus	O dobro de ladrilhos pretos mais um.
00:13:47	Lucas	É, usa a lógica do Mateus, só que com mais.
00:13:49	Isadora	Então, na ordem dez… Eu pegaria o número de ladrilhos pretos, que no caso é dez...
00:14:11	Lucas	Aí você guarda eles… Aí você pega ele de novo e adiciona mais um...
00:14:35	Isadora e Larissa	Ah, entendi!
00:14:36	Lucas	Só que, tipo assim, é a mesma lógica do Mateus, só que a do Mateus é mais fácil, mas também é uma lógica.
00:14:56	Isadora	A do Mateus eu não consegui entender, mas a dele eu consegui...

Após a exposição de Lucas, o grupo se posicionou em relação às suas preferências entre os raciocínios utilizados por ele e por Mateus. Nesse momento, o estudante, que se encontra no 8º ano do Ensino Fundamental, expressou sua preocupação em relação ao ENEM, e Raquel demonstrou algumas sensibilidades relacionadas à Matemática, como a seguir:

00:16:09	Lucas	Mas, tipo assim, o jeito que o Mateus explicou, da multiplicação, é mais fácil, tipo assim...
00:16:13	Karla	Não é!
00:16:28	Raquel	Mas aqui, esse aqui é muito mais fácil, é só a gente contar os ladrilhos pretos, contar eles de novo e adicionar mais um, pronto, não precisa ficar fazendo essas contas assim não!

00:16:41	Lucas	Só que vamos supor, você está em uma prova do ENEM, você não tem tempo, cada questão do ENEM é de um a três minutos, você vai ter tempo de ficar contando? Você tem que fazer na lógica.
00:16:50	Raquel	Vou! "Oxe" eu tenho tempo para tudo, meu querido, desde pequena eu só conto nos dedos, não conto de cabeça não, então vou me ferrar no ENEM, não consigo contar de cabeça não!
00:17:04	Karla	Você vai escolher uma lógica e vai escrever.
00:17:08	Isadora	O problema é na hora de escrever...
00:17:09	Raquel	Eu não sei explicar cara! Me ferrei amigos e amigas...

Prosseguimos para a questão *k) Determine a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18*, e Larissa se ancorou no raciocínio explicitado por Lucas, experienciando uma construção coletiva de significados.

00:22:55	Larissa	Quanto é 19 mais 18?
00:24:00	Mateus	Quê?
00:24:01	Larissa	É que foi a lógica que o Lucas me falou...
00:24:03	Mateus	Que lógica que é?
00:24:05	Larissa	Que pega dezoito, guarda, aí pega dezoito mais um, fica dezenove...
00:24:12	Mateus	Vai descobrir o quê? O número de quê? De colunas, né?
00:24:19	Larissa	Quantidade de colunas...

Os estudantes, assim como no encontro anterior, não estavam realizando a atividade na ordem sugerida de modo que, mesmo sem concluir as anteriores, começaram a discutir sobre a questão: *m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?*

00:33:25	Mateus	Não, você não vai conseguir ter mil, sim, vai sobrar e vai sobrar dois.
00:33:32	Lucas	Mas como que descobre?
00:33:33	Mateus	É só você ver que nos ladrilhos brancos é sempre o oito e com três… Nunca cai...
00:34:05	Lucas	Em número par.
00:34:06	Mateus	Não, par cai...
00:34:08	Lucas	Com zero...
00:34:08	Mateus	Com zero. Sempre cai com oito ou com três...

00:34:24	Larissa	Isso...

A discussão coletiva prosseguiu para a realização da última questão: *n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?*. A essa altura, os estudantes manifestaram significativamente um menor engajamento para a realização dessa atividade. Acreditamos que pelo fato de nesse dia termos almoçado antes. Por isso, realizei algumas interferências para que pudéssemos manter o ritmo das reflexões.

00:34:45	Larissa	A "n" é qual? Me explica a "n" [solicitou olhando pra mim].
00:34:48	Paola	A "n"? "Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para poder montar uma faixa de qualquer ordem?". Você sabe qual é a quantidade de ladrilho, total, em função de "n"?
00:35:14	Todos	Não.
00:35:15	Paola	Não?
00:35:17	Karla	Sim...
00:35:17	Paola	Cada coluna tem quantos ladrilhos? Cada coluna?
00:35:38	Mateus	Três...
00:35:39	Paola	Cada coluna tem três... No total, independente de ser branco ou preto. Cada coluna tem três ladrilhos, não é isso?
00:35:44	Lucas	Sim.
00:35:45	Paola	Então, se eu consigo encontrar a quantidade de coluna, que a gente já fez isso na "i"...
00:35:50	Lucas	A gente descobre o número total de ladrilhos… Gente!! Aqui, olha! Três vezes três, nove, a gente descobriu isso! A gente está dando mole!

Durante a finalização dessa atividade, os alunos expressaram que sentem menos dificuldade em situações de resolução de equações. Acreditamos, em consonância com Kaput (2008 apud Almeida; Santos, 2017), que as habilidades com objetos algébricos se formalizam progressivamente com o decorrer da idade e das experiências. Ou seja, a indicação dos estudantes em terem menos dificuldade em realizar atividades que desenvolvam equações em detrimento das atividades que trabalhem com generalizações se dá pelo fato de terem mais experiências em resolução de equações do que na modelação de sequências que expressem situações gerais. Por esse motivo, julgamos que a realização dessa atividade foi bastante relevante por se tratar de uma oportunidade para explorar objetos matemáticos que eles apresentaram ter, até então, um contato limitado.

00:37:56	Paola	O que é resolver questão e o que é resolver lógica? [expressões utilizadas anteriormente por eles]
00:37:59	Larissa	Lógica é tipo quando dá uma historinha para você criar a conta. A gente não consegue.
00:38:06	Paola	Ah tá, que é tipo isso [a atividade do experimento de ensino], né?
00:38:07	Larissa	Isso...
00:38:07	Lucas	Agora, quando a professora passa “x” mais… Aí é de boa.
00:38:19	Karla	Eu não consigo tirar, tipo, de uma frase...
00:38:21	Larissa	É isso! Eu não consigo!

Durante a discussão, Davi puxou mais uma cadeira para perto de si e se deitou. Nesse momento, percebi que o cansaço era expressivo e havia uma dificuldade para finalizar a atividade, sobretudo para a realização dos registros, visto que todas as soluções já haviam sido verbalizadas.

Durante o recolhimento da atividade *Faixa de Ladrilhos*, os estudantes me questionaram sobre a pesquisa. Expliquei brevemente o que é mestrado e qual foi o tema que eu escolhi estudar. Julgo essa interação como importante para que haja um engajamento consciente dos estudantes durante nossos encontros e um contato real com uma pesquisa acadêmica, trazendo possibilidades e compreensões acerca do que é o fazer científico. Após esse diálogo, conversamos brevemente sobre as aspirações profissionais dos estudantes e suas expectativas para o futuro. Essa interação possibilitou, ainda, um breve momento de descontração e descanso. Davi se levantou das cadeiras em que estava deitado.

Os registros apresentados pelos estudantes ficaram novamente muito parecidos em decorrência das discussões coletivas. Eles se encontram, na íntegra, em apêndice. De modo geral, os estudantes utilizaram majoritariamente a linguagem algébrica retórica.

Na questão *f) Que relação existe entre o número total de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?*, um exemplo de registro apresentado foi “*A relação é que contando os ladrilhos brancos e pretos vai dar o resultado do número total de ladrilhos*”, e os demais registros foram parecidos.

Na questão *g) Qual a relação entre o número de Colunas e o total de ladrilhos?*”, um exemplo de registro apresentado foi “*O número de colunas x3 é igual o número total de ladrilhos*”, aparecendo também, nesses registros, a utilização de uma linguagem algébrica sincopada, como, por exemplo, “*x•3=total de ladrilhos*”.

Os registros para a questão *h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?*" foram unânimes: "*n ladrilhos pretos*", aparecendo também registros mais descritivos como "*tem exatamente n ladrilhos pretos na faixa do meio*".

Já na questão *i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?*", os registros realizados contemplaram a descrição da relação explicitada por Lucas, como, por exemplo, "*número de ordem + número de ordem + 1 = número de colunas*". A relação explicitada por Mateus foi realizada somente por ele da seguinte maneira: "*você pega o número de ladrilhos pretos multiplica por 2 e adiciona 1 ao resultado*".

Na questão *j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n***, nenhum estudante conseguiu se expressar corretamente. Lembramos que, nesse momento, eles já apresentavam um enorme cansaço. Apresentamos um exemplo de registro realizado,semelhante aos demais: "*n ladrilhos pretos - total de ladrilhos = n total de ladrilhos brancos*".

Os estudantes que realizaram registros para a questão *k) Determine a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.*" o fizeram corretamente: "*18 ladrilhos pretos, 93 ladrilhos brancos e 37 colunas.*"

Na questão *l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?*", todos os estudantes que responderam o fizeram corretamente, registrando, por exemplo, "*8 ladrilhos pretos*".

O mesmo aconteceu na questão *m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?*", em que os alunos que responderam o fizeram corretamente, apresentando registros semelhantes a "*Não é possível, pois a sequência de colunas aumentam de 5 em 5 então não dará e sobrará 2 ladrilhos brancos.*"

Por fim, na última questão: *n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?*", apenas quatro estudantes realizaram registros, todos corretamente. Eles fizeram integralmente o uso da linguagem algébrica retórica, vide exemplo: "*Sim, o número de colunas x3 = número total de ladrilhos - ladrilhos pretos = ladrilhos brancos*".

Pudemos perceber, como nos elucida Almeida e Santos (2017) que, apesar da importância da linguagem algébrica simbólica, principalmente pelo seu significativo poder de síntese, o pensamento algébrico pode se manifestar por meio de diferentes linguagens. O que determina a linguagem utilizada é o nível de experiência dos estudantes (Kaput, 2008 apud Almeida; Santos, 2017).

3.5 Quinto encontro

O quinto encontro do Experimento de Ensino ocorreu em uma das salas de aula da escola no dia 14 de junho de 2023 e teve início às 11h30, com duração de 52 minutos. Nesse dia, o almoço foi disponibilizado depois do encontro. Na quarta-feira da semana anterior, 7 de junho de 2023, não pudemos nos encontrar por ter ocorrido uma paralização nas escolas estaduais. No dia 14, os estudantes realizaram uma avaliação da escola e foram liberados às 10h40. Por esse motivo, alguns estudantes precisaram ir embora para casa e não puderam participar desse último encontro.

Contamos com a presença de cinco estudantes, quatro meninos e uma menina. Maria, Larissa, Karla e Isadora não puderam comparecer. Nesse encontro, a observadora novamente não pôde nos acompanhar. A realização da atividade ocorreu em uma sala de aula em detrimento da ocupação da biblioteca da escola.

No momento em que chegamos à sala, forneci uma folha de papel em branco para cada estudante juntamente com um chocolate para cada aluno(a), e expliquei qual seria a proposta desse encontro: a confecção de um Mapa Mental. Eles informaram que já haviam tido contato com esse tipo de avaliação nas aulas de Ciências, mas, mesmo assim, realizei uma explicação breve com o intuito de minimizar as dúvidas que pudessem surgir. Disponibilizei canetinhas coloridas para que eles pudessem enfeitar os Mapas.

Enquanto escreviam "*Linguagem Algébrica*", os estudantes conversavam sobre diversos assuntos, sobretudo do cotidiano escolar e sobre as provas que aconteceram naquela semana. Começaram a verbalizar algumas percepções sobre a utilização da linguagem algébrica simbólica, e eu os encorajei para que incluíssem no Mapa Mental uma espécie de Mapa Sentimental, no qual eles poderiam registrar historicidades, subjetividades e sensibilidades relacionadas à Matemática, em particular, a utilização da linguagem algébrica simbólica de acordo com os objetivos desta pesquisa.

00:29:14	Paola	Pode colocar tudo que está na sua mente sobre a linguagem algébrica, o que você sente, o que você pensa, o que você acha, para que você acha que ela serve, se ela te ajuda, se ela faz a matemática ficar mais fácil, mais difícil... Pode colocar suas percepções também, tudo, não esconda nada! Pega tudo que tem na sua mente e coloca no papel.

Como estávamos tendo poucas trocas nesse encontro, decerto por se tratar de uma atividade mais subjetiva, tentei iniciar algumas reflexões enquanto os estudantes terminavam a confecção de seus Mapas Mentais.

Perguntei para cada estudante: "*Pra você, a letra ajuda ou atrapalha a matemática?*". Meu intuito era falar sobre a utilização da linguagem algébrica simbólica, mas, para facilitar os entendimentos, eu me referi a esse modo de comunicar, resumindo-o ao uso de letras talvez de maneira equivocada.

Para essa pergunta, Ruan respondeu que "*atrapalha*", mas não justificou o motivo. Davi respondeu que "*atrapalha, porque fica muito mais difícil*". Acreditamos que essas respostas apareceram pela ausência da construção de significados (Lins; Gimenez, 1997) para a utilização da linguagem algébrica simbólica, que pode estar ainda em construção. Acreditamos que a experiência deles com a Álgebra está mais relacionada a reconhecer e resolver equações com poucas situações que exijam o raciocínio e a descoberta de relações. Ou seja, é a prática de ensino-aprendizagem que mostra uma valorização do registro algébrico em detrimento do raciocínio que conduza ao pensamento algébrico. Além disso, um dos argumentos que Lins (2004) desenvolve para caracterizar a Matemática como um monstro "monstruoso" é a utilização de objetos simbólicos, visto que os símbolos representam o discurso da Matemática, que, por sua vez, representa uma relação de poder cultural e historicamente construída de forma que os símbolos, a partir da ausência de significados atribuídos a eles, podem promover um distanciamento discente eletivo.

Em contrapartida, Mateus respondeu que "*ajuda, porque me ajuda com um valor que eu não sei*" e Lucas respondeu que "*ajuda, porque se a gente não sabe o número a gente tem que descobrir*", manifestando um maior entendimento em relação aos significados atribuídos à utilização da linguagem algébrica simbólica.

Por fim, Raquel respondeu: "*acho que ajuda, porque eu acho muito legal fazer as contas para achar o valor de x e do y*". Ainda que a estudante não tenha manifestado um real entendimento em relação à função e à utilização da linguagem algébrica simbólica, pudemos perceber que, diferentemente de Ruan e Davi, a sua utilização não promove sensibilidades negativas e, portanto, existe uma menor possibilidade de impulsionar um distanciamento.

Depois, perguntei para cada estudante: "*qual foi a primeira vez que você viu letra no meio do número, na sua vida, você lembra?*", novamente com o desejo de me referir à linguagem algébrica simbólica, mas infelizmente de forma reducionista. Ruan disse que seu primeiro contato foi no *TikTok*; Lucas, que foi no celular, vendo vídeos sobre Ciências; Davi, que foi na escola; e Raquel e Mateus já haviam tido contato com a linguagem algébrica simbólica em casa, por intermédio de irmãos mais velhos, e também pelo celular.

Por fim, perguntei: "*o que vocês acharam de participar da pesquisa?*", e essas respostas iremos apresentar na íntegra.

Raquel respondeu: "*Ah, eu adorei. Porque, tipo, faz a gente ter um diálogo, conversar, todo mundo resolver junto, eu achei legal*", manifestando interesse pela construção coletiva de significados vivenciadas nesse Experimento de Ensino.

Mateus respondeu: "*Eu achei legal, porque me ajudou com mais questões de matemática*".

Ruan respondeu: "*Gostei, uai.*"

E, por fim, a resposta de Lucas foi: "*Gostei muito, porque eu amo matemática*".

Davi não se manifestou.

O conteúdo dos Mapas Mentais confeccionados pelos estudantes durante esse encontro teve registros muito semelhantes aos verbalizados. Assim sendo, destacarei alguns que fugiram do que já foi apresentado:

> *Quando eu começo a fazer contas* [com a linguagem algébrica simbólica], *eu fico nervosa, mas, quando eu termino, fico feliz.*
> *Contas do tipo $3x+10=7+8$ são legais de resolver, pois a dinâmica de resolver a equação é legal, mas é difícil ao mesmo tempo.*
> *Eu acho que não faz sentido misturar letra com número.*
> *Generalização: foi a primeira vez que eu vi uma letra que representa todos os números.*
> *A linguagem algébrica tem várias formas de fazer.*
> *A linguagem algébrica está presente na robótica, que é uma das profissões/matérias que eu gosto.*

Os Mapas Mentais, na íntegra, se encontram nos Apêndices.

Após esse diálogo, os assuntos se espalharam até o findar da atividade. Senti-me satisfeita com as trocas construídas durante a pesquisa, pela participação engajada dos estudantes e pela entrega de todos nós.

CONCLUSÕES

O engajamento dos estudantes nos grupos, nos quais se sentiram desafiados, foi crucial para que pudéssemos atingir os objetivos desta pesquisa: observar a construção do pensamento algébrico de estudantes quando estão em contato com situações que apresentem regularidades.

Após a realização deste trabalho, julgamos que a dinâmica estabelecida pelos estudantes em realizarem discussões em grupos para a resolução das questões propostas facilitou uma construção coletiva de significados (Silva, 2001) e possibilitou que pudéssemos observar aspectos dos campos coletivo e individuais no que diz respeito a aprendizagens e sensibilidades. Talvez, a organização da sala em mesas redondas tenha favorecido esse formato. Nós não prevíamos que os encontros do Experimento de Ensino acontecessem dessa maneira, o que se sucedeu por meio do protagonismo discente.

Esse Experimento foi uma possibilidade para explorarem o objeto algébrico referente às generalizações por meio de atividades que incentivavam o desenvolvimento das capacidades de estabelecer relações, modelar, generalizar e operar com o desconhecido e atribuir significado aos símbolos (Almeida; Santos, 2017). Houve raciocínio ou tentativas de raciocínio de todos eles. Mesmo quem não se dispôs inicialmente a pensar de maneira abstrata, partindo para ações de verificação com desenhos, por exemplo, aos poucos foi se engajando nas discussões e na elaboração dos pensamentos que se mostravam. Os estudantes manifestaram já terem desenvolvido alguns desses aspectos do pensamento algébrico, enquanto os outros ainda se encontram em construção. Os tempos deles são diferenciados, e a aula deve favorecer tempos para que todos alcancem um entendimento.

Em relação à comunicação dos resultados, fica evidente que as atividades proporcionaram muitas explicações orais entre os pares (conversas, trocas, explicações e justificações). Porém, a maior dificuldade percebida foi em relação à realização dos registros, sobretudo nas últimas questões das atividades propostas no Experimento de Ensino relacionadas à sintetização das situações propostas.

Reconhecemos que, ao final das atividades que propusemos, houve um salto de compreensão exigido em relação às questões anteriores. Isso mostra, para nós, que as atividades poderiam ter maiores mediações (fases intermediárias), em que pudessem ser proporcionadas reflexões acerca das simbologias e objetos algébricos trabalhados, possibilitando que houvesse mais facilidade para a construção e assimilação de significados (Lins; Gimenez, 1997). Além disso, a passagem do estabelecimento de relações, primeira característica do pensamento algébrico que é desenvolvida e revelada (Almeida; Santos, 2017) para as demais características do pensamento algébrico (modelar, generalizar, construir significado e operar com o desconhecido), pode ser desenvolvida ao longo do tempo por meio de maiores exposições a esse tipo de atividade.

Foram percebidas dificuldades dos estudantes relacionadas à comunicação das ideias, independentemente do tipo de linguagem utilizada, e julgamos que essas dificuldades estão e estarão presentes durante o processo de construção para os significados matemáticos. Apesar disso, pudemos observar que houve uma compreensão dos conceitos de incógnita e de igualdade, verbalizados por eles, além de percebermos um avanço nas compreensões referentes a variáveis e sequências por meio do estabelecimento de relações (Almeida; Santos, 2017).

Pudemos observar também que alguns estudantes se apoiaram, não raras vezes, na Aritmética para a realização das atividades, manifestando o aritmeticismo (Lins, 1992 apud Almeida; Santos, 2017). Constatamos, então, que mesmo desenvolvendo uma atividade de cunho algébrico, em algumas situações, é possível que os estudantes consigam solucioná-la por uma perspectiva aritmética.

Outro aspecto que buscamos observar está relacionado às sensibilidades que atravessam os estudantes durante o ensino-aprendizagem de Matemática, em particular durante a realização de atividades de cunho algébrico. As manifestações de satisfação ou insatisfação estiveram presentes todo o tempo na verbalização dos estudantes, também de ânimo ou desânimo, de gosto ou desgosto. Concluímos que houve momentos de frustração relacionados às dificuldades, mas também houve momentos de satisfação relacionados às aprendizagens. Mostraram, ainda assim, todo o tempo, uma disposição aos desafios propostos.

Durante a experiência descrita neste trabalho, fica evidente que o desenvolvimento da linguagem algébrica e do pensamento algébrico são práticas que requerem tempo e promoção de experiências. Proposição de atividades que desafiem e que provoquem o desejo de compreensão e realização. Durante esse percurso, é natural que a linguagem retórica esteja presente em diversos momentos, característica também presente em nossa pesquisa.

A participação da professora pesquisadora se deu de modo também inesperado. Percebemos que, dado o ambiente participativo durante as atividades, um envolvimento grande entre todos, inclusive da professora, foi se colocando. Acreditamos que tal atitude não tenha mostrado consequências que prejudiquem os resultados alcançados, ao contrário, nas interações os estudantes foram descobrindo as relações e socializando entendimentos.

A linguagem algébrica foi expressa de diversas maneiras durante a realização dos registros pelos estudantes. Majoritariamente, foi utilizada a linguagem algébrica retórica e, em alguns momentos, a linguagem algébrica sincopada. A maioria dos participantes esteve em processo de desenvolvimento desses significados (Lins; Gimenez, 1997) por meio de uma construção coletiva (Silva, 2001). Assim, a cooperação do grupo foi um fator decisivo para o avanço verificado.

A linguagem algébrica simbólica se trata de uma forma de comunicação que, pelo seu potente poder de síntese, fornece vocabulário para que ideias, modelos e padrões sejam comunicados de maneira sucinta. Entretanto, destacamos, em consonância com Lins (1992 apud Almeida; Santos, 2017), Kaput (2008 apud Almeida; Santos, 2017) e Radford (2009 apud Almeida; Santos, 2017), que o pensamento algébrico pode ser comunicado por meio de diversas linguagens (retórica, sincopada ou simbólica).

Ressaltamos que a utilização da linguagem algébrica simbólica não é a única forma de o docente realizar avaliações acerca do desenvolvimento algébrico do estudante. É preciso que saibamos, enquanto professores e professoras, reconhecer as diversas maneiras de comunicar o pensamento algébrico.

Finalmente, pudemos perceber que a proposição de atividades desafiadoras provoca o raciocínio e, em processos que podem ser diferenciados em ritmos e tempos, o pensamento algébrico vai se construindo.

CONSTRUÇÃO DO RECURSO EDUCATIVO

O recurso educativo que iremos propor neste trabalho será uma Sequência Didática. A Sequência Didática é um conjunto articulado de planos de aulas, cuja finalidade é desenvolver um objetivo de ensino. De acordo com Carrião, Faria e Zaidan (2024, p. 55):

> Os planos de aulas estruturam o trabalho do(a) professor(a), compreendendo a seleção do conhecimento a ser tratado, a metodologia de ensino, o tratamento das dificuldades que possam aparecer e a avaliação da aprendizagem. O plano pode proporcionar melhores condições para que o(a) próprio(a) professor(a) perceba o alcance de suas ações, tomando consciência do que avançou e do que ainda é desafio.

Conforme esses autores, uma Sequência Didática pode seguir o seguinte roteiro: i) introdução do assunto; ii) escolha de metodologias e recursos; iii) definição dos objetivos a serem alcançados, com indicação de turma e nível de ensino; iv) proposta de atividades para o desenvolvimento do tema; v) antecipação das possíveis dúvidas dos estudantes; e vi) uma forma de avaliação e finalização da temática.

Ao longo deste trabalho, percebemos uma notória dificuldade dos estudantes na compreensão das atividades[5] propostas no Experimento de Ensino e a realização dos registros sintetizados com ou sem a utilização da linguagem algébrica simbólica. Concebemos, então, a necessidade de propor transições entre esses momentos, questões orientadoras intermediárias, a fim de que não haja um salto, e sim um processo de construção do pensamento algébrico.

A Sequência Didática que apresentamos foi pensada para professores(as) que lecionam para turmas de 7º ano, podendo ser trabalhada e adaptada para outros momentos do ensino, de acordo com a necessidade observada pelo(a) professor(a). Desenvolvemos um conjunto de atividades propostas para o momento do contato escolar inicial discente com a formalização da linguagem algébrica simbólica de modo que incentivem a compreensão que favoreça generalizações, que possam proporcionar a atribuição de significados aos símbolos (Lins; Gimenez, 1997) por meio também da mediação docente e que possibilitem uma construção do domínio sistemático da utilização da linguagem algébrica simbólica.

Utilizamos questões investigativas pelo uso de sequências pictóricas por se tratar de uma potente ferramenta para trabalhar visão espacial, articulando as possibilidades da

[5] As atividades propostas no Experimento de Ensino e que serão adaptadas nessa Sequência Didática foram retiradas do livro de Bigode (2000, p. 110-117, p. 120-127).

visualização e as propriedades geométricas, além de mobilizar a capacidade de estabelecer relações, modelar e generalizar (Almeida; Santos, 2017).

Outra característica observada nesta pesquisa foi a potência da contribuição entre os pares durante a realização de atividades em um formato coletivo (Silva, 2001). Por esse motivo, sugerimos que as atividades dessa Sequência Didática sejam trabalhadas em grupos de dois a quatro estudantes, podendo essa quantidade também ser adaptada de acordo com o que o(a) professor(a) julgar adequado para a sua turma.

Vale e Pimentel (2013, p. 108) discorrem sobre "a importância do visual na aprendizagem da Matemática" por estarem presentes sequências pictóricas na proposta didática desenvolvida por elas assim como na sequência didática desenvolvida em nosso trabalho. Defendem que o termo "visualização" significa "o procedimento mental que permite a alguém mover-se de um objeto físico visível, ou de uma sua representação visual, para a sua representação mental" e defendem que "os estudantes sem esta capacidade visual terão grande dificuldade em ter sucesso na aprendizagem da matemática".

> Rivera e Becker (2005) subscrevem que é necessário contrariar a tendência de uma abordagem numérica dos padrões, realçando a compreensão figurativa da generalização, por terem detetado, através de vários estudos conduzidos, que os alunos que generalizam apoiados na visualização têm uma compreensão com mais significado das estratégias numéricas que constroem (Vale; Pimentel, 2013, p. 109).

Reconhecemos a potencialidade da abordagem pictórica em exercícios que objetivam o desenvolvimento da construção de significados (Lins; Gimenez, 1997) para as generalizações. Em consonância com as autoras, acreditamos ser fundamental uma abordagem apoiada na visualização para níveis elementares, isto é, em um contexto em que os(as) alunos(as) ainda não dispõem do domínio de algumas ferramentas matemáticas.

Apesar de a Sequência Didática desenvolvida em nosso trabalho ter como intenção o desenvolvimento de estudantes de 7º ano, momento curricular da formalização da linguagem simbólica, almejamos incentivar também estudantes que possam ter tido, por diversos motivos, algum desencontro curricular até este momento de modo que acreditamos na utilização de sequências pictóricas para nos auxiliar a atingir esse objetivo.

As autoras destacam ainda algumas vantagens na utilização dessa abordagem pautada na exploração de sequências pictóricas, dentre elas: i) facilita o contato e exploração iniciais, talvez impossível em um contexto puramente numérico em detrimento da insuficiência de conhecimentos ou flexibilidade numérica incipiente; ii) permite o desenvolvimento de conexões entre temas matemáticos e aprofundamento de conceitos; e iii) promove a possibilidade de relacionar diversas representações que ampliam a compreensão.

Acerca dessas vantagens, é necessário elucidar:

> A primeira vantagem enunciada pode levar a inferir que a abordagem é empobrecedora, pois procura apenas contornar as limitações de base dos alunos. No entanto, não é assim. O passo seguinte vai permitir ao aluno descobrir inesperadas relações e propriedades numéricas, que não eram detetadas à partida, mas que adquirem um sentido com o apoio visual (Vale; Pimentel, 2013, p. 109)

Não há, entretanto, a defesa de que a abordagem pictórica deva ser única na promoção do entendimento de generalizações. Devemos proporcionar experiências em abordagens figurativas e numéricas que sejam dinâmicas e oscilem entre as duas abordagens. Destacamos, em acordo com as autoras, que uma formação continuada adequada e contextualizada é indispensável para que possamos desenvolver essas capacidades em nós e, como extensão, em nossos(as) alunos(as).

Essa Sequência Didática, que se encontra em apêndice, inclui quatro atividades que contêm sequências pictóricas com o objetivo de observar suas regularidades, compreender suas generalizações e realizar os registros sintetizados, podendo ser realizados com a utilização da linguagem simbólica ou com algum outro recurso de comunicação (desenhos, linguagem natural) de forma que o(a) professor(a) tenha condições de perceber em qual momento da aprendizagem o estudante se encontra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ciente do inacabamento humano e sabendo que “preciso ter e renovar saberes específicos em cujo campo minha curiosidade se inquieta e minha prática se baseia” (Freire, 1996, p. 78), juntos pela busca do “Ser Mais”, acreditamos que esta pesquisa deixe alguns ensinamentos.

Percebemos uma carência em relação às abordagens de conteúdos referentes ao ensino de Álgebra nos cursos de formação de professores, vividos e sentidos, em particular, pela pesquisadora. Algumas pesquisas apresentadas na quinta seção do primeiro capítulo, intitulada como *Dificuldades Docentes*, apontam que essa carência de formação não é pessoal, mas coletiva. O livro *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*, de Rômulo Lins e Joaquim Gimenez, publicado em 1997, ainda se faz tão necessário em 2024.

Cientes da não inclusão na maioria dos cursos de licenciatura dessas reflexões referentes ao pensar algebricamente (Lins; Gimenez, 1997), o que é o pensamento algébrico (Almeida; Santos, 2017) e como ele se constrói e se manifesta, percebemos essencial o incentivo à formação continuada, enquanto não pudermos construir uma reforma curricular para os cursos de licenciatura em Matemática que abarque essa temática substancialmente.

Fomentar tais reflexões possibilita que haja, para além da promoção de um ensino-aprendizagem em Álgebra mais atento e significativo, cientes da necessidade de construção de significados (Lins; Gimenez, 1997), a possibilidade de avaliações mais justas, em que o docente, ao realizar essas reflexões, possa reconhecer e validar os saberes dos educandos, que, como vimos, poderá ser expresso em diversos formatos e linguagens, a fim de promover uma maior autonomia e sensibilidades positivas referentes a uma Matemática apropriada de significados.

O que impulsionou minha busca pela formação continuada, culminando na realização desta pesquisa e, em particular, na escolha deste tema, foram as significativas dificuldades discentes observadas em meus primeiros anos de prática, nos diversos momentos do ensino que vivenciei. Após este período de estudos, aprendizagens, questionamentos e reflexões, pude perceber que a maior dificuldade não era dos estudantes - era minha.

Nos meus primeiros anos de carreira eu não era capaz de reconhecer a manifestação de qualquer característica do pensamento algébrico por um estudante. Eu não sabia caracterizar o que é o pensamento algébrico. Não saberia elaborar questões acerca da utilização da(s) linguagens(s), até então somente a simbólica era reconhecida por mim.

Tive, durante o mestrado, a oportunidade de conhecer a literatura de Freire; as diferentes matemáticas de D'Ambrósio; a delicadeza atenta do Numeramento; entre tantas outras. Pude aprender o que é metodologia (de pesquisa e de ensino) e suas diversas possibilidades. Aprendi o que é, de fato, a pesquisa: essa busca constante pela construção de saberes. Aprendi, principalmente, a importância da Vocação do Ser Mais (Freire, 1996). Pude reconstruir, em mim, uma nova noção de matemática, de álgebra, de ensino. Parece muito - mas é muito mesmo. Esses tantos aprendizados levarei comigo, em minha prática profissional e em minha vida.

Lamento ter sido a professora que fui com meus primeiros alunos. Sei também que essa característica de minha trajetória não é única, e juntamente com este fato, reconheço a enorme importância da formação continuada. Fui o que pude ser. Sou o que agora posso ser, decerto melhor que ontem. E serei melhor melhor que hoje.

Reconheço que ainda estamos em um período de transição em relação às mudanças de perspectivas em Aritmética e Álgebra no sentido de que coletivamente tais mudanças não se expressam de maneira significativa. Apesar disso, me aproprio da poetisa Rupi Kahur, que nos diz: "*O rumo que muda o mundo é eterno. Muita calma*"[6].

[6] O que o sol faz com as flores, página 132.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R.; BERNARDINO, J. C. S. Ideias de Licenciandos em Matemática sobre Álgebra Escolar. **Educação Matemática em revista**, Brasília, v. 6, n. 73, p. 95-108, out./dez. 2021.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento Algébrico e Formação Inicial de Professores de Matemática. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 5, n. 2, p. 1-17, 2014.

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento Algébrico: Em busca de uma definição. **RPEM (Revista Paranaense de Educação Matemática)**, Campo Mourão, PR, v. 6, n. 10, p. 34-60, jan./jun. 2017.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In* BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim, 7º ano**. São Paulo: FTD, 2000.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994. cap. 1-2, p. 48-52.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: diferentes vozes em uma investigação. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Recife: **XIII CIAEM-IACME**, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARRIÃO, A.; FARIA, D.; ZAIDAN, S. **Estágio na Licenciatura em Matemática.** Editora Appris, 2024.

COBB, P.; STEFFE, L. P. The constructivist researcher as teacher and model builder. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 14, n. 2, p. 83-94, 1983.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris**: Matemática, 7º ano – Ensino Fundamental. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

PEREIRA, M. S. Desenvolvimento da Linguagem Algébrica. **Revista da Associação de Professores de Matemática**, Portugal, n. 18, p. 28-31, maio/jun. 2012.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N. Pensamento Algébrico na Formação Inicial de Professores. **Educar em Revista**, Curitiba: Ed. da UFPR, n. 50, p. 135-155, out./dez. 2013.

Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. 2023. **Plano de Curso do Estado de Minas Gerais**. Belo Horizonte: SEE-MG.

SILVA, E. A. R. Pensando e escrevendo algebricamente com alunos de sexta série. *In* FIORENTINI, D.; MIORIM, A. (Org.). **Por trás da porta, que matemática acontece?** Campinas: FE/UNICAMP – Cempem. 2001. p. 185-221.

SILVA, E. C. da. Mapas Conceituais: Propostas de Aprendizagem e Avaliação. **Administração: Ensino e Pesquisa**, v. 16, n. 4, p. 785-815, 2015.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *In* KELLY, A. E.; LESH R. A. (Ed.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 267-306.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O Pensamento Algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. **Da Investigação às Práticas**, v. 3, n. 2, p. 98-124, 2013.

APÊNDICES

RECURSO EDUCATIVO

REGISTROS DOS ESTUDANTES

Atividade 2 (Faixa de Ladrilhos)

Registro de Davi:

Ordem da faixa	Ladrilhos pretos	Ladrilhos Brancos	Número de colunas	Número total de ladrilhos
1	1 ~~1~~ ~~0~~	~~5~~ 8	3 ~~2~~ ~~2~~	9 ~~8~~ ~~2~~
2	2	~~2~~ 13	5 ~~7~~	15 ~~15~~ ~~15~~
3	3	~~3~~ 18	7 ~~8~~	21 ~~21~~ ~~21~~
4	4	~~4~~ 23	9 ~~11~~	29 ~~30~~ 32
5	5	~~5~~ 28	11 ~~13~~	33 ~~39~~ [illegible]
6	6	~~6~~ 33	13 ~~15~~	39 ~~45~~
7	7	~~7~~ 38	15 ~~17~~	45 ~~45~~

Registro de Mateus:

1 em 1 — 5 em 5 — 2 em 2 — 6 em 6

Ordem da faixa	Ladrilhos pretos	Ladrilhos Brancos	Número de colunas	Número total de ladrilhos
1	1 +7	~~1~~ 8	3	9
2	2 +11	~~1~~ 13	5	15
3	3 +15	18	7	21
4	4 +19	23	9	27
5	5 +23	28	11	33
6	6 +27	33	13	39
7	7 +31	38	15	45

Na atividade Faixa de Ladrilhos, Davi realizou os seguintes registros:

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

e o relação e que numero total de ladrilhos que e o resposta

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?

o relação entre os colunas e o total de ladrilhos e o total de 6

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?

N ladrilhos pretos

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?

N colunas 2

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

N ladrilhos preto menos N ladrilhos branca e o mesmo que

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

ladrilhos preto e = 15

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

N, 8 ladrilhos preto

m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

Não em I ladrilhos branco

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

sim

Isadora se utilizou, principalmente, da linguagem algébrica retórica:

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

A relação é que o número total de ladrilhos brancos e pretos dará o número total de ladrilhos.

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?

A relação entre as colunas e o total de ladrilhos é ~~se~~ ~~mulher~~ multiplicarmos por 3 ~~dará~~ dará o resultado do total de ladrilhos

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?

tem exatamente n ladrilhos pretos na faixa do meio

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?

~~O número de colunas de uma faixa de ordem n = n~~. ~~n+3~~ =

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

N ~~ladrilhos~~ pretos = N total do ~~ladrilhos~~ ↑ = N ~~total~~ de ~~tot~~ ~~ladrilhos~~ brancos

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

ladrilhos pretos: 18 ladrilhos ~~93~~ → brancos = 93 colunas = ~~93~~ → 37

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

8 ladrilhos pretos

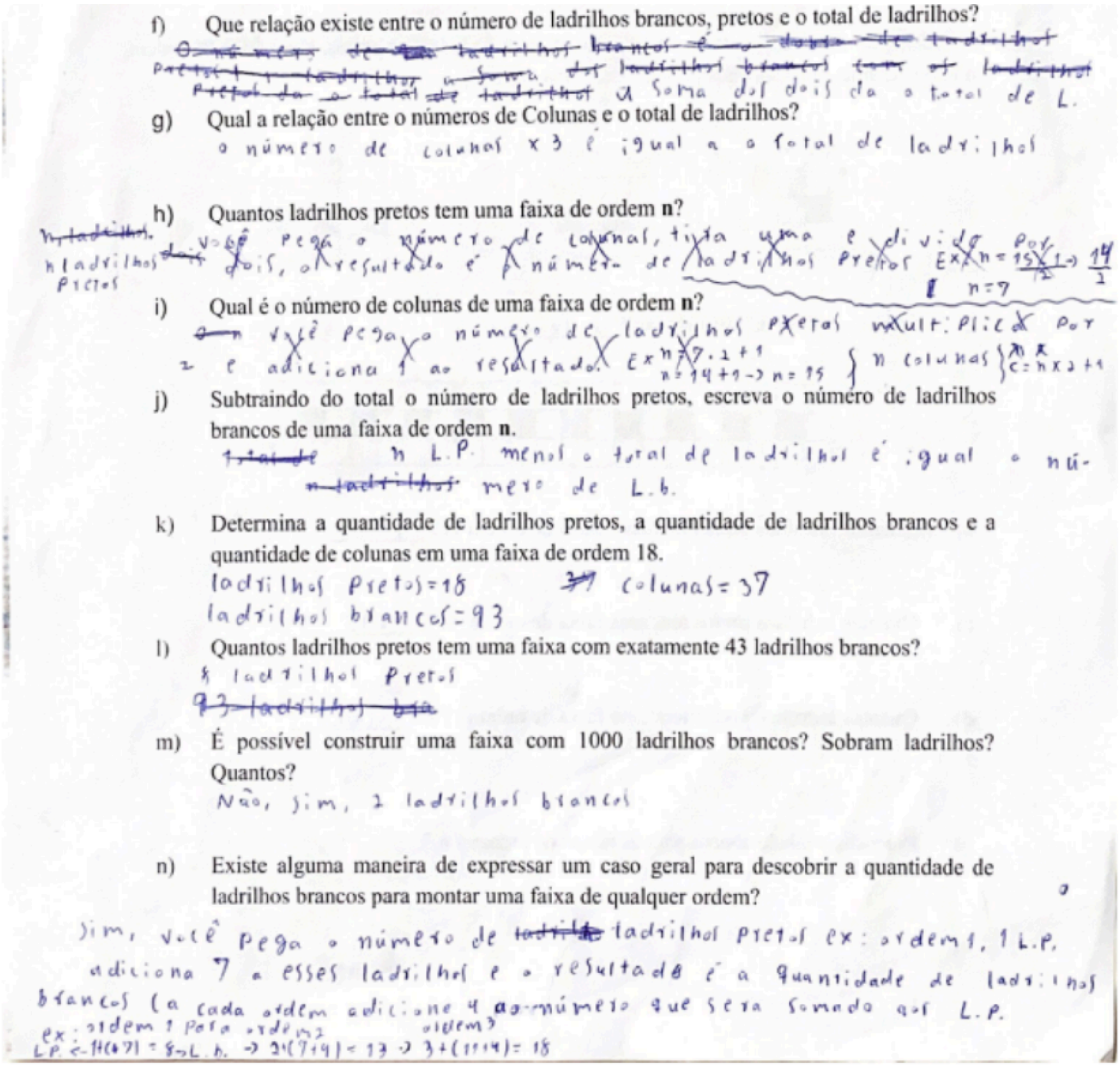
m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

Não é possível, pois, a sequência de colunas aumentam de ~~3~~ 5 em 5 então não dará e ~~sobra~~ sobrará 2 ladrilhos brancos

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

Sim, o número de coluna · 3 = o número total de ladrilhos − ladrilhos pretos dará o total de ladrilhos brancos. para descobrir o número de coluna = ~~t~~tal. p. − 3 dividido por 2.

Mateus também se utilizou majoritariamente a linguagem algébrica retórica.


f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

~~O número de ladrilhos brancos é o dobro de ladrilhos pretos + 1 ladrilhos a soma dos ladrilhos brancos com os ladrilhos pretos da o total de ladrilhos~~ a soma dos dois da o total de L.

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?

o número de colunas x 3 é igual a o total de ladrilhos

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?

n ladrilhos pretos — você pega o número de colunas, tira uma e divide por dois, o resultado é o número de ladrilhos pretos Ex: n = 15 − 1 → 14/2 n = 7

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?

você pega o número de ladrilhos pretos multiplica por 2 e adiciona 1 ao resultado. Ex: n = 7 . 2 + 1 n = 14 + 1 → n = 15 } n colunas } c = n x 2 + 1

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

n L.P. menos o total de ladrilhos é igual o número de L.b.

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

ladrilhos pretos = 18 colunas = 37

ladrilhos brancos = 93

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

8 ladrilhos pretos

~~93 ladrilhos bra~~

m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

Não, sim, 2 ladrilhos brancos

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

Sim, você pega o número de ~~ladrilho~~ ladrilhos pretos ex: ordem 1, 1 L.P. adiciona 7 a esses ladrilhos e o resultado é a quantidade de ladrilhos brancos (a cada ordem adicione 4 ao número que será somado aos L.P.

ex: ordem 1 para ordem 2 ordem 3

L.P. é 1+(0+7) = 8 L.b. → 2+(7+4) = 13 → 3+(11+4) = 18

Larissa também não utiliza a linguagem algébrica retórica.

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

A relação é que contando os ladrinhos brancos e pretos vai dar o resultado dos números total de ladrinhos.

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?

A relação é que o número de colunas vezes (x) 3 vai dar o resultado de total de ladrinhos.

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?

N Ladrinhos pretos.

$n = 15 - 1$

$n = 14 \div 2$

$n = 7$

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?

N ladrinhos + x ladrinhos pretos + 1 é o resultado das colunas.

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

N ladrinhos pretos menos o total de ladrinhos total é o resultado de ladrinhos brancos.

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

Ladrinhos pretos é 18, ladrinhos brancos é 95 e ~~ladri~~ a quantidade de coluna é 37.

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

8 Ladrinhos pretos.

m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

Não, não é possível. Sim sobram 3 ladrinhos.

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

Sim,

Raquel também utiliza somente a linguagem algébrica retórica.

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?
ladrilhos pretos + ladrilhos brancos = número total de ladrilhos

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?
numero de colunas x 3 = número total de ladrilhos

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?
N ladrilhos pretos

15-1 = 14

14 ladrilhos ~~2~~

7

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?
~~N colunas~~
numero da ordem + numero da ordem + 1 = N

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.
n ladrilhos pretos - N total de ladrilhos brancos = N total de ladrilhos brancos

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.
18 ladrilhos pretos 93 ladrilhos brancos, 37 colunas

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?
ordem 8

m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos? não é possível, pois, a sequencia de colunas aumentam de 5 em 5 então não dava e sobravam 2 ladrilhos brancos

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?
sim, numero de coluna x 3 = numero total de ladrilhos - ladrilhos pretos = ladrilhos brancos

Lucas utiliza majoritariamente a linguagem algébrica retórica, somente na questão *g)* ele utiliza a linguagem algébrica sincopada com a expressão “*x•3”*.

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

~~A cada ordem aumenta 1 ladrilho preto, a cada ordem,~~
a soma de ladrilhos brancos + ladrilhos pretos = número total de ladrilhos

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?

O número de colunas x 3 é igual o numero total de ladrilhos
x•3 = total de ladrilhos

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem **n**?

n ladrilhos pretos

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem **n**?

n ladrilhos pretos + n ladrilhos pretos +1 = numero de colunas

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

n ladrilhos pretos - total de ladrilhos = n total de ladrilhos brancos

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

há 18 ladrilhos pretos 18, 111 − 18 = 93 37 x 3 = 111 93 total de ladrilhos 18 x 2 = 36 36 + 1 37

l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

8 ladrilhos pretos

m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

Não, ou vai sobrar 3

n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

18+18+1 = 37
37 x 3 =
Sim
nº de colunas x 3
213
nº de colunas x3 = nº total de ladrilhos
nº total de ladrilhos − nº ladrilhos pretos = nº total de ladrilhos brancos

f) Que relação existe entre o número de ladrilhos brancos, pretos e o total de ladrilhos?

A relação que existe entre ~~o~~ número de ladrilhos brancos e ladrilhos pretos e que somando P+B da o total de ladrilhos

g) Qual a relação entre o números de Colunas e o total de ladrilhos?

A relação que existe entre a número de colunas e que multiplicando o número de colunas x 3 e o numero total de ladrilhos.

h) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa de ordem n?

A resposta e que a ordem e numero de ladrilhos pretos

i) Qual é o número de colunas de uma faixa de ordem n?

n ladrilhos pretos + n ladrilhos pretos mais 1 e o resultado

j) Subtraindo do total o número de ladrilhos pretos, escreva o número de ladrilhos brancos de uma faixa de ordem **n**.

k) Determina a quantidade de ladrilhos pretos, a quantidade de ladrilhos brancos e a quantidade de colunas em uma faixa de ordem 18.

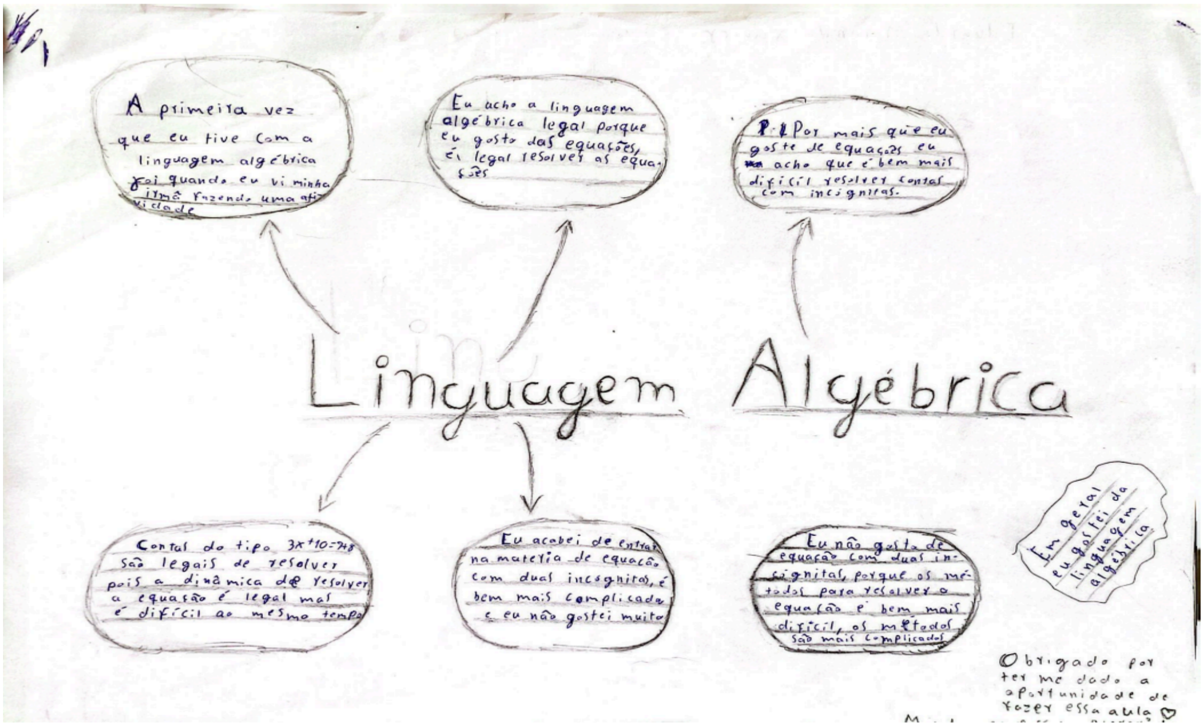
l) Quantos ladrilhos pretos tem uma faixa com exatamente 43 ladrilhos brancos?

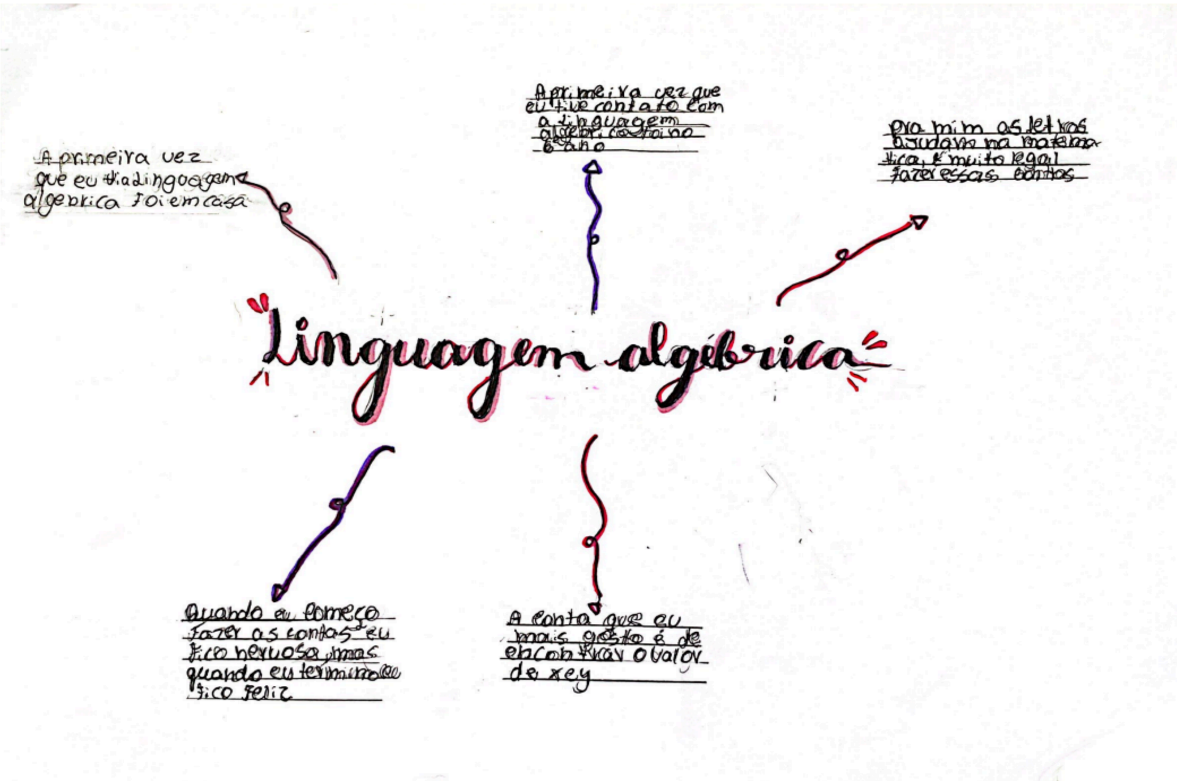
m) É possível construir uma faixa com 1000 ladrilhos brancos? Sobram ladrilhos? Quantos?

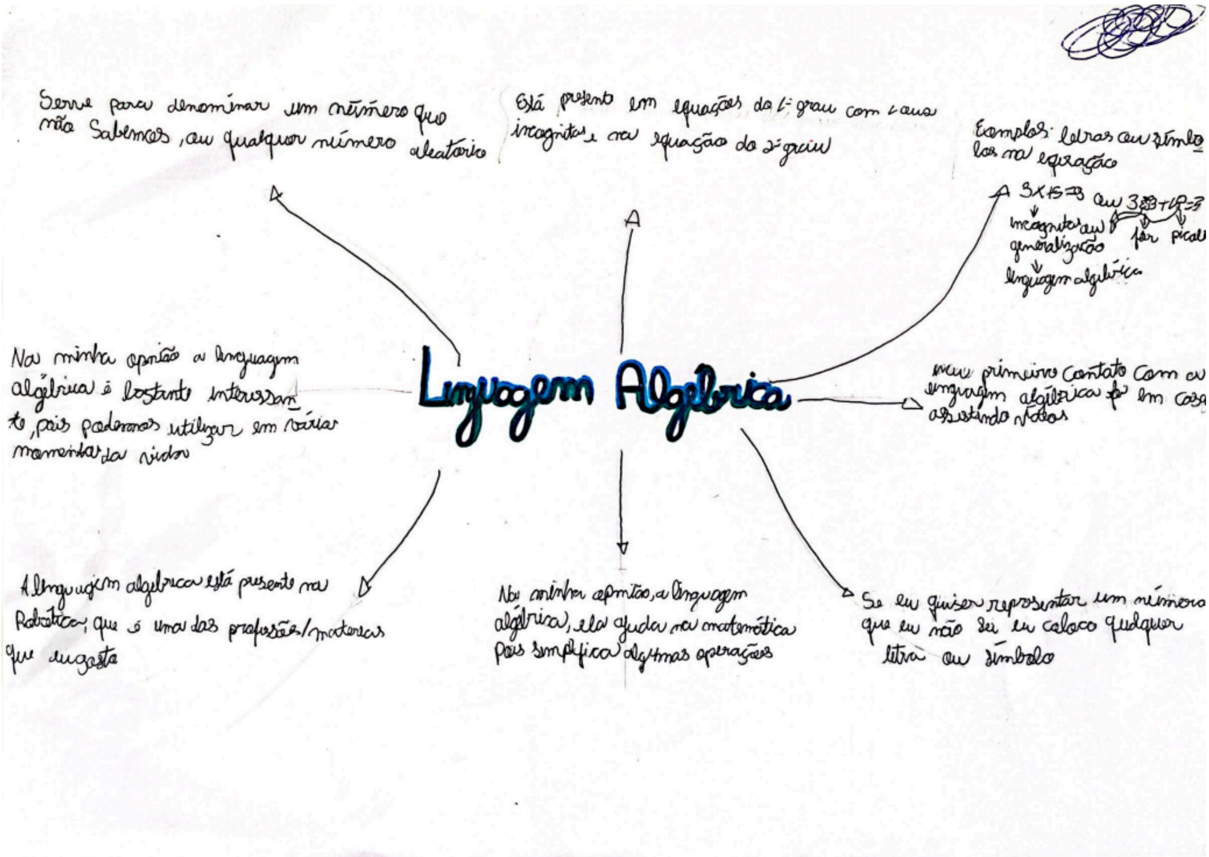
não porque nunca cai no numero 0 sempre cai no numero 3 e 8. E sim sobra 3.

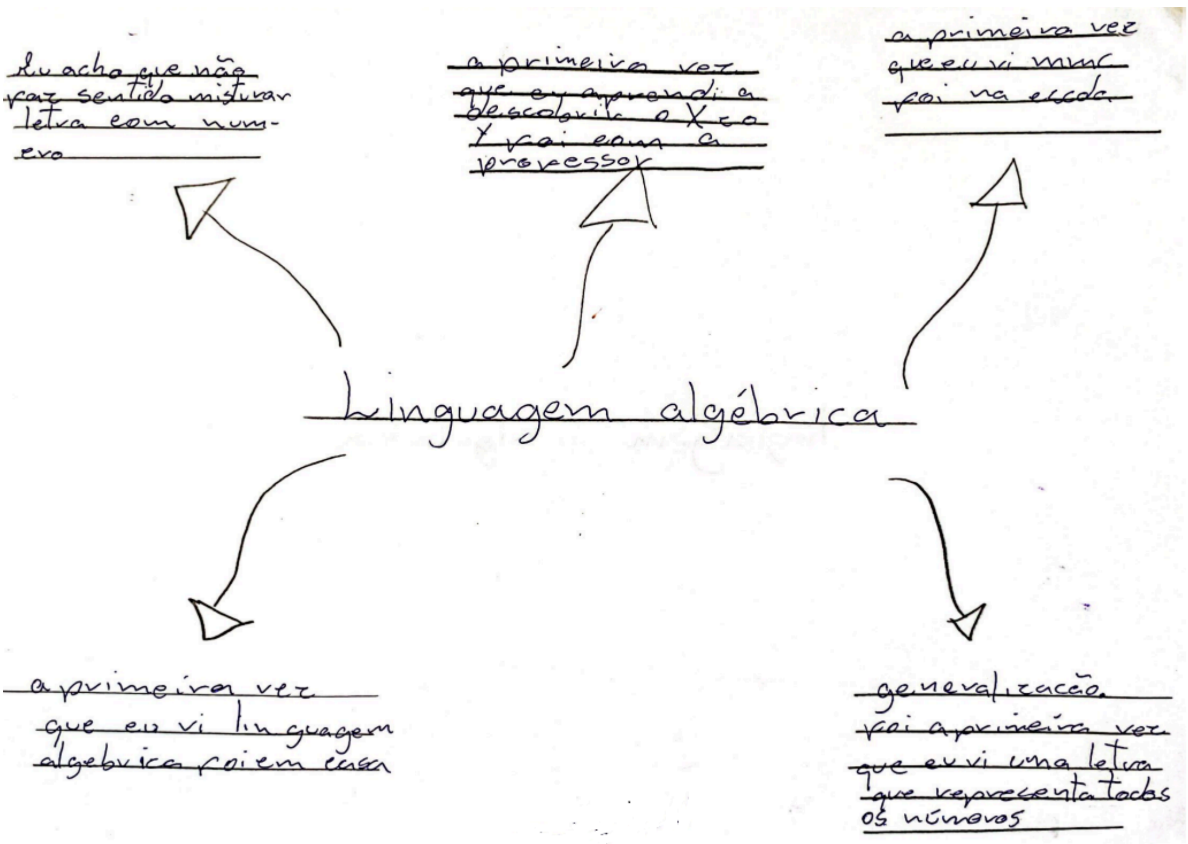
n) Existe alguma maneira de expressar um caso geral para descobrir a quantidade de ladrilhos brancos para montar uma faixa de qualquer ordem?

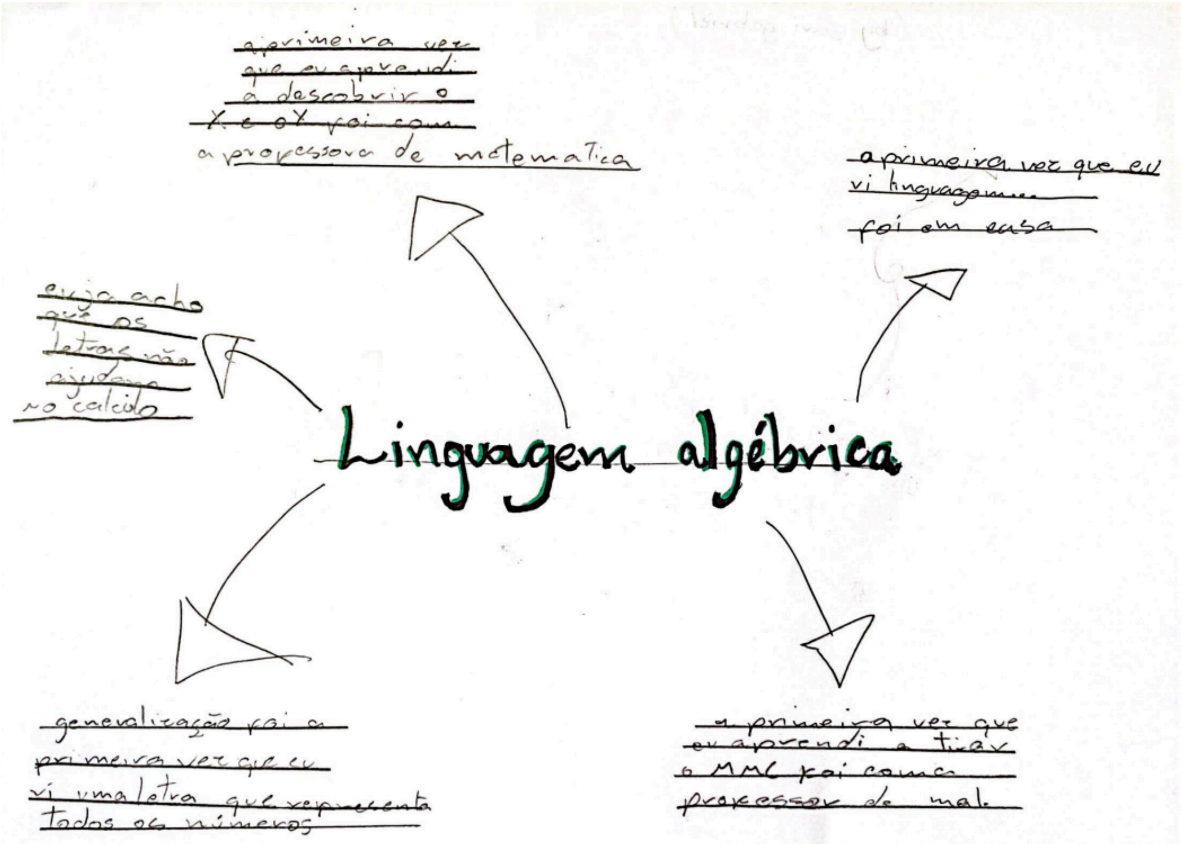
Atividade 4 (Confecção do Mapa Mental)






Serve para denominar um número que não sabemos, ou qualquer número aleatório
Está presente em equações do 1º grau com duas incógnitas e na equação do 2º grau
Exemplos: letras ou símbolos na equação
3x+5=3 ou 3☐+☐=3
incógnita ou generalização
linguagem algébrica
Na minha opinião a linguagem algébrica é bastante interessante, pois podemos utilizar em vários momentos da vida
Linguagem Algébrica
meu primeiro contato com a linguagem algébrica foi em casa assistindo vídeos
A linguagem algébrica está presente na Robótica, que é uma das profissões/matérias que eu gosto
Na minha opinião, a linguagem algébrica, ela ajuda na matemática pois simplifica algumas operações
Se eu quiser representar um número que eu não sei eu coloco qualquer letra ou símbolo


Eu acho que não faz sentido misturar letra com número
a primeira vez que eu aprendi a descobrir o X e o Y foi com a professora
a primeira vez que eu vi numa foi na escola
Linguagem algébrica
a primeira vez que eu vi linguagem algebrica foi em casa
generalização foi a primeira vez que eu vi uma letra que representa todos os números


a primeira vez
que eu aprendi
a descobrir o
X e o Y foi com
a professora de matematica
eu já acho
que os
letras não
ajudam
no calculo
Linguagem algébrica
a primeira vez que eu
vi linguagem...
foi em casa
generalização foi a
primeira vez que eu
vi uma letra que representa
todos os números
a primeira vez que
eu aprendi a tirar
o MMC foi com o
professor de mat.

Termos de Consentimento Livre/Esclarecido

TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO / DIRETORA

Diretora ______________________________da Escola ___________________________

___________________________________.

Eu, Samira Zaidan, professora do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional Educação e Docência, a Faculdade de Educação da UFMG-Promestre, como orientadora, juntamente com Paola La Corte e Almeida Ramos, professora da Educação Básica, como orientanda, estamos realizando uma pesquisa intitulada “Organização do Pensamento Algébrico: influências da apropriação do Sistema de Linguagem Algébrico” e viemos solicitar sua autorização para realizá-la no âmbito da sua Escola.

O objetivo da pesquisa é perceber quais são as influências que a apropriação da Linguagem Algébrica podem ter na organização do Pensamento Algébrico, sobretudo quando há maior nível de abstração.

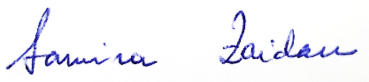
Os procedimentos que estamos propondo são Experimentos de Ensino, realizados no contraturno dos estudantes (período da tarde) nas dependências da escola. Serão quatro encontros no total, com duração de uma hora cada, divididos em um encontro por semana durante quatro semanas. Os encontros serão realizados com um grupo de seis a dez alunos (a definir), cuja seleção será feita através de um convite aberto às turmas de oitavo ano. Esses estudantes irão realizar algumas atividades, cujo foco principal é perceber como se dá a interação inicial dos alunos com a utilização da Linguagem Algébrica como ferramenta matemática para organização do Raciocínio Algébrico, e se essa apropriação da linguagem será ou não necessária. A partir da observação dessas interações, faremos as análises da nossa pesquisa.

Sabemos que as ações que pretendemos desenvolver poderão criar algum incômodo, como por exemplo, a ocupação do espaço escolar, mas estaremos atentas e dispostas a utilizar horários combinados para não dificultar o funcionamento da escola e tudo faremos para que todos possam se expressar em caso de desconforto. Também nos comprometemos a te apresentar todos os resultados do estudo. Acreditamos que nosso estudo poderá contribuir para melhorar as aprendizagens e o ensino de Matemática.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins desta pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações dos pós-graduandos. As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores pelo prazo de cinco (5) anos, sob responsabilidade da pesquisadora principal, que os destruirá ao findar do tempo. A identidade da escola e dos participantes ficará preservada por meio do uso de um nome fictício e você e nenhum participante terá nenhuma despesa ou remuneração com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você poderá pedir esclarecimentos sobre ela e até mesmo se recusar a continuar cedendo o espaço para tal.

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Pedimos que preencha o termo abaixo e assine esse documento que irá em duas vias, uma para você e outra com a pesquisadora responsável, aceitando nossa proposição.



Samira Zaidan - Pesquisadora responsável

____

Professor(a) Paola La Corte e Almeida Ramos - Pesquisador(a) Corresponsável

Eu,____, RG _________________, declaro que fui consultada pelas responsáveis pelo projeto de pesquisa, Samira Zaidan, telefone (31) 99291-0830, CPF 039.408.828-01 e Paola La Corte e Almeida Ramos, telefone (31) 99129-8619, CPF 108.346.686-02 e respondi positivamente à sua demanda para realizar sua pesquisa. Terei liberdade para manifestar minha adesão ou não ao projeto, sem qualquer prejuízo. Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras e sinto-me esclarecida para participar, autorizando sua realização no âmbito de nossa Escola.

_______________________, _______ de ___________________de 2023.

____

Assinatura da Diretora

A pesquisadora me informou que o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – COEP da UFMG, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq e que, em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, poderei consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte - MG - CEP 31270-901Unidade Administrativa II - 2º Andar - Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 - E-mail: coep@prpq.ufmg.br

TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO/RESPONSÁVEIS

Prezado(a)s.

Viemos, por meio desta, solicitar sua autorização para a participação de ____, aluno(a) da Escola ______________________________________ em um estudo que estamos realizando.

Eu, SAMIRA ZAIDAN, professora da Faculdade de Educação da UFMG, do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional Educação e Docência-Promestre, juntamente com PAOLA LA CORTE E ALMEIDA RAMOS, professora da Educação Básica, estamos realizando uma pesquisa intitulada "Organização do Pensamento Algébrico: influências da apropriação do Sistema de Linguagem Algébrico" e temos o prazer de convidar o estudante acima citado para participar.

Nós iremos propor um Experimento de Ensino no contraturno dos estudantes (no período da tarde), nas dependências da escola. Serão quatro encontros no total, com duração de uma hora cada, divididos em um encontro por semana durante quatro semanas.

Os encontros serão realizados com um grupo de seis a dez alunos em convite aberto às turmas de oitavo ano. Esses estudantes irão receber e realizar algumas atividades propostas, cujo foco principal é compreender como e se eles utilizam a Linguagem Algébrica como ferramenta para organização do Raciocínio Algébrico.

O objetivo da pesquisa que realizamos é perceber quais são as influências que a aprendizagem da Linguagem Algébrica pode ter na organização do Pensamento Algébrico, sobretudo quando há maior nível de abstração, e com ela pensamos em contribuir para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Esperamos que esta proposta possa beneficiar a aprendizagem dos estudantes, quando estaremos atentas às suas dificuldades.

Sabemos que as ações que pretendemos desenvolver poderão criar algum incômodo aos estudantes, como por exemplo, a ocupação de seu tempo, a permanência na escola no período da tarde, mas estaremos atentas para que eles se sintam bem e possam aprender com a experiência.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins desta pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e na dissertação de pós-graduação. As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores pelo prazo de cinco (5) anos, sob responsabilidade da pesquisadora principal, que os destruirá ao findar do tempo. A identidade dos estudantes e de seus responsáveis ficarão preservadas por meio do uso de um nome fictício e ninguém terá nenhuma despesa ou remuneração com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você ou qualquer estudante poderá pedir esclarecimentos sobre ela e até mesmo se recusar a continuar participando.

Caso você concorde em autorizar a participação do estudante acima mencionado em nosso estudo, pedimos que preencha o termo abaixo e assine esse documento que irá em duas vias, uma para você e outra com a pesquisadora responsável.

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Samira Zaidan

Samira Zaidan - Pesquisadora responsável

____

Professor(a) Paola La Corte e Almeida Ramos - Pesquisador(a) Corresponsável

Eu,____, RG ________________, declaro que fui consultada pelas responsáveis pelo projeto de pesquisa, Samira Zaidan, telefone (31) 99291-0830, CPF 039.408.828-01 e Paola La Corte e Almeida Ramos, telefone (31) 99129-8619, CPF 108.346.686-02 e respondi positivamente à sua demanda para realizar sua pesquisa. Terei liberdade para manifestar minha adesão ou não ao projeto, sem qualquer prejuízo. Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras e sinto-me esclarecida para participar, autorizando sua realização no âmbito de nossa Escola.

________________________, _______ de ___________________de 2023.

____

Assinatura do(a) responsável

A pesquisadora me informou que o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – COEP da UFMG, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq e que, em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, poderei consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte - MG - CEP 31270-901Unidade Administrativa II - 2º Andar - Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 - E-mail: coep@prpq.ufmg.br

---

TCLE

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO / ALUNO(A) MENOR

Prezado(a) aluno(a) ____, da

Escola _______________________________________..

Viemos te convidar para participar de uma pesquisa.

Eu, Samira Zaidan, professora do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional Educação e Docência, a Faculdade de Educação da UFMG, juntamente com Paola La Corte e Almeida Ramos, professora da Educação Básica, estamos realizando uma pesquisa intitulada “Organização do Pensamento Algébrico: influências da apropriação do Sistema de Linguagem Algébrica” e temos o prazer de convidá-lo(a) para participar.

O objetivo da pesquisa é perceber quais são as influências que aprender a Linguagem Algébrica podem ter na organização do pensamento, principalmente quando os exercícios são mais abstratos. Com essa pesquisa pensamos em contribuir para melhorar a aprendizagem da Matemática, podendo ser este um benefício deste estudo para a escola e os estudantes.

Iremos propor um Experimento de Ensino, a ser realizado no período da tarde nas dependências da escola. Serão quatro encontros no total, com duração de uma hora cada, divididos em um encontro por semana durante quatro semanas. Os encontros serão realizados com um grupo de seis a dez alunos (a definir), cuja seleção será feita através de um convite aberto às turmas de oitavo ano. Vocês irão receber algumas atividades para serem resolvidas, onde pretendemos perceber como se dá a interação inicial dos alunos com a utilização da Linguagem Algébrica como ferramenta matemática para organização do Raciocínio Algébrico, e se ela será ou não utilizada.

Sabemos que as ações que pretendemos desenvolver poderão criar algum incômodo, como por exemplo, a ocupação de seu tempo e a estadia na escola no período da tarde, mas estaremos atentas para que sejam atividades prazerosas e para que todos se sintam à vontade para se expressarem. Acreditamos ainda que nossa proposta de pesquisa poderá colaborar com a melhora de sua aprendizagem com a álgebra.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins desta pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e na dissertação de pós-graduação. As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelas pesquisadoras pelo prazo de cinco (5) anos, sob responsabilidade da pesquisadora principal, que os destruirá ao findar do tempo. Sua identidade ficará preservada por meio do uso de um nome fictício e você não terá nenhuma despesa ou remuneração com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você poderá pedir esclarecimentos sobre ela e até mesmo se recusar a continuar participando.

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Caso você concorde em participar da pesquisa, pedimos que preencha o termo abaixo e assine esse documento que irá em duas vias, uma para você e outra com a pesquisadora responsável.

Samira Zaidan

Samira Zaidan - Pesquisadora responsável

____

Professora Paola La Corte e Almeida Ramos - Pesquisadora Corresponsável

Eu, ____, ALUNO(A) da Escola Estadual Deputado Manoel Costa, da Turma _______, declaro que fui consultado(a) pelas responsáveis pelo projeto de pesquisa, Samira Zaidan, telefone (31) 99291-0830, CPF 039.408.828-01 e Paola La Corte e Almeida Ramos telefone, (31) 99129-8619, CPF 108.346.686-02 e respondi que aceito participar da sua pesquisa. Terei liberdade para manifestar minha adesão ou não ao projeto, sem qualquer prejuízo. Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras e sinto-me esclarecido(a) para participar. Assim sendo, concordo em participar da pesquisa, com meu consentimento livre e esclarecido.

________________________, _______ de ____________________de 2023.

____

Assinatura do(a) Estudante

A pesquisadora me informou que o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – COEP da UFMG, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq e que, em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, poderei consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte - MG - CEP 31270-901Unidade Administrativa II - 2º Andar - Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 - E-mail: coep@prpq.ufmg.br