

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Física

Marcos Paulo Moreira

MÉTODO DAS PROLONGAÇÕES E SUAS APLICAÇÕES À FÍSICA

Belo Horizonte  
2025

Marcos Paulo Moreira

## **MÉTODO DAS PROLONGAÇÕES E SUAS APLICAÇÕES À FÍSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega

Belo Horizonte

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M838m Moreira, Marcos Paulo.  
Método das prolongações e suas aplicações à Física / Marcos Paulo Moreira.  
– 2025.  
208 f. : il.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.  
Bibliografia: f. 189-200.

1. Simetria. 2 Grupos de Lie. I. Título. II. Sánchez Vega, Bruce Lehmann. III.  
Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.1 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

A presente dissertação, intitulada "**Método das prolongações e suas Aplicações à Física**" de autoria de **MARCOS PAULO MOREIRA** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA, área de concentração Física**, em 13 de agosto de 2025.

Belo Horizonte, 13 de agosto de 2025.

Prof. Bruce Lehmann Sánchez Vega  
Orientador do estudante  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Mário Sérgio Carvalho Mazzoni  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Alexis Roa Aguirre  
Instituto de Física e Química/UNIFEI



Documento assinado eletronicamente por **Mario Sergio de Carvalho Mazzoni, Membro**, em 13/08/2025, às 14:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruce Lehmann Sanchez Vega, Membro de comissão**, em 13/08/2025, às 14:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexis Roa Aguirre, Usuário Externo**, em 13/08/2025, às 14:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4449383** e o código CRC **B4ECBA7A**.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus avós, Maria da Conceição Moreira e Vicente Alípio Moreira, pelos ensinamentos transmitidos, sobretudo o valor da perseverança, do trabalho duro e da busca constante em fazer o melhor possível com as ferramentas disponíveis.

À minha mãe, Cleia Maria, ao meu padrasto, Vanderson Francisco, e aos meus irmãos, Matheus Gabriel, Marcelo Bleno e Julie Gabrielle, por, entre inúmeras outras coisas, todo o apoio e por sempre garantirem meu contato com o lado mais simples e descontraído da vida.

Aos meus tios, Ana Lúcia e Sérgio Martins, pelo apoio recebido durante a graduação e o mestrado, o que, sem eles, não teria sido possível. Estendo esse agradecimento às minhas demais tias por sempre estarem dispostas a me auxiliar quando necessário.

Agradeço ao meu orientador, o professor Bruce Lehmann, pela oportunidade, pela amizade, pelo conhecimento transmitido, pelas discussões instigantes e pela disposição em sempre me auxiliar em quaisquer problemas que se apresentem.

Ao meu amigo de longa data, Lailson de Oliveira Coelho, à sua mãe, Sônia de Lourdes, e ao seu irmão e meu padrinho, Lécio Plínio, por sempre me estender a mão nos momentos de maior necessidade e pela excelente hospitalidade.

À Universidade Federal de Minas Gerais, ao Departamento de Física e aos docentes, pelo acolhimento e pelo espaço disponibilizado para o desenvolvimento de meus estudos. Especialmente, agradeço aos professores Paulo Sérgio Soares Magalhães e Antônio Sérgio Teixeira Pires por toda a ajuda e por ministrarem brilhantemente algumas das disciplinas mais divertidas das quais participei.

À professora Graiciany de Paula Barros, do Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear (CDTN), por tudo o que tem feito por mim desde a graduação.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio dado à realização deste trabalho, permitindo que pessoas como eu possam realizar seus sonhos e contribuir para o progresso científico nacional.

"The measure of greatness in a scientific idea is the extent to which  
it stimulates thought and opens up new lines of research."

— Paul A. M. Dirac

# Resumo

O método das prolongações, desenvolvido a partir dos estudos pioneiros de Sophus Lie entre as décadas de 1870 e 1890, é uma técnica matemática que permite a determinação de geradores de transformações contínuas que atuam como simetrias, isto é, que mapeiam soluções em soluções de equações diferenciais. Nosso intuito no presente trabalho será estudar o método e investigar como ele pode ser aplicado à física.

Primeiramente, estudaremos o método das prolongações minuciosamente. Após uma necessária revisão geral, construiremos o método no contexto de equações diferenciais, visando transformações de ponto. Em seguida, faremos o mesmo no contexto dos problemas variacionais, dotados de lagrangianas, de onde surgirão as chamadas simetrias variacionais e resultados relevantes associados.

Em seguida, devotaremos nossa atenção à aplicabilidade do formalismo à física. Faremos isso de tal forma a explorar os resultados derivados nos primeiros capítulos. O método será aplicado a duas equações de interesse físico: as equações de Burgers e de Korteweg e De Vries. Além disso, enveredaremos pelos campos da relatividade geral e da cosmologia, e veremos como o método das prolongações pode nos ajudar na resolução de questões presentes nessas áreas. Teremos também a oportunidade de aprender como podemos aplicar nossos estudos ao problema da quantização da gravitação.

**Palavras-chave:** simetrias; prolongações; grupos de Lie; variedades.

# Abstract

The method of prolongations, developed from the pioneering studies of Sophus Lie between the 1870s and 1890s, is a mathematical technique that allows the determination of generators of continuous transformations that act as symmetries, i.e., that map solutions onto solutions, of differential equations. Our aim in the present work will be to study the method and investigate how it can be applied to physics.

Firstly, we will study the method of prolongations in detail. After a necessary general review, we will construct the method in the context of differential equations, aiming at point transformations. Then, we will do the same in the context of variational problems, equipped with lagrangians, from which the so-called variational symmetries and very important associated results will arise.

Next, we will turn our attention to the applicability of the formalism to physics. We will do this in order to explore the results derived in the first chapters. The method will be applied to two equations of physical interest: the Burgers and Korteweg-De Vries equations. In addition, we will venture into the fields of general relativity and cosmology and see how the method of prolongations can help us solve problems in these areas. We will also have the opportunity to learn how we can apply our studies to the problem of quantization of gravitation.

**Keywords:** symmetries; prolongations; Lie groups; manifolds.

# Lista de figuras

Figura 1 – Transformações de simetria do grupo diedral $D_3$ . . . . .	17
Figura 2 – Mapeamento de uma região da variedade. . . . .	23
Figura 3 – Mapeamento de duas regiões da variedade. . . . .	24
Figura 4 – Projeção estereográfica. . . . .	25
Figura 5 – Espaço tangente. . . . .	26
Figura 6 – Implementação do algoritmo providenciado pela biblioteca <b>ReLie</b> para a equação do calor $u_t - u_{xx} = 0$ . . . . .	92
Figura 7 – Geradores de simetrias da equação do calor. . . . .	93
Figura 8 – Curvas candidatas à de menor tempo. . . . .	101
Figura 9 – Emmy Noether por volta de 1900. . . . .	121
Figura 10 – Propagação de uma onda solitária da esquerda para a direita. Aqui, tomamos $c = 1$ . . . . .	149
Figura 11 – Figura original de Minkowski. . . . .	163

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de multiplicativa das transformações de simetria de um triângulo equilátero. . . . .	18
Tabela 2 – Comutadores dos geradores de simetria da equação do calor bidimensional. Aqui, $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$ , $\alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha$ e $\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha$ . . . . .	87
Tabela 3 – Tabela de comutação dos geradores de simetria de ponto de Lie da equação de Burgues. Aqui, $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$ , $\alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha$ e $\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha$ . . . . .	140
Tabela 4 – Tabela de comutação dos geradores de simetria de ponto da equação de Korteweg e De Vries. . . . .	152

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>O MÉTODO DAS PROLONGAÇÕES</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES MATEMÁTICOS</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Elementos Gerais de Teoria de Grupos</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Elementos Gerais de Topologia</b>	<b>21</b>
2.2.1	Variedades	22
2.2.2	Estruturas em uma Variedade	25
<b>2.3</b>	<b>Grupos e Algebras de Lie</b>	<b>27</b>
2.3.1	Grupos de Transformações Uniparamétricas	29
2.3.2	Algebras de Lie	30
2.3.2.1	Invertendo a Linearização: A Aplicação Exponencial	31
2.3.3	Propriedades das álgebras de Lie	33
2.3.4	Constantes de Estrutura	35
2.3.5	Subálgebras e Ideais	36
<b>2.4</b>	<b>Aspectos Elementares da Teoria de Espaços de Jatos</b>	<b>39</b>
<b>2.5</b>	<b>Método das Características</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>PROLONGAÇÕES I: SIMETRIAS DE PONTO DE LIE</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Aspectos Históricos</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Transformações Uniparamétricas Infinitesimais</b>	<b>46</b>
<b>3.3</b>	<b>O Gerador de Transformações</b>	<b>48</b>
<b>3.4</b>	<b>Funções Invariantes</b>	<b>52</b>
<b>3.5</b>	<b>Prolongações de uma Transformação</b>	<b>53</b>
3.5.1	Invariância e Integração de uma EDO de Primeira Ordem	55
<b>3.6</b>	<b>Generalização Para EDOs de Ordem Superior</b>	<b>58</b>
3.6.1	Coordenadas Canônicas	61
<b>3.7</b>	<b>Generalização Para Várias Variáveis</b>	<b>63</b>
3.7.1	Prolongação da Ação de Grupos	68
3.7.2	Expressões Gerais para Prolongações	70
3.7.2.1	Digressão: Sobre Derivadas Totais	72
3.7.2.2	A Fórmula Geral	73
<b>3.8</b>	<b>Aplicações das Expressões Generalizadas</b>	<b>77</b>
3.8.1	Aplicação a Equações Diferenciais Ordinárias	77

3.8.2	Aplicação a Equações Diferenciais Parciais . . . . .	82
<b>3.9</b>	<b>Resultados Adicionais . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>3.10</b>	<b>Aspectos Computacionais . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>3.11</b>	<b>Considerações Finais . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>4</b>	<b>PROLONGAÇÕES II: SIMETRIAS VARIACIONAIS . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>4.1</b>	<b>Elementos Gerais do Cálculo de Variações . . . . .</b>	<b>95</b>
4.1.1	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	99
4.1.1.1	Caso $p = q = 1$ . . . . .	99
4.1.1.2	Caso Geral . . . . .	101
4.1.2	Lagrangianas Nulas . . . . .	103
4.1.3	Invariância Por Mudança de Coordenadas . . . . .	105
<b>4.2</b>	<b>Simetrias Variacionais . . . . .</b>	<b>107</b>
4.2.1	Redução de Ordem . . . . .	116
<b>4.3</b>	<b>Leis de Conservação e o Teorema de Noether . . . . .</b>	<b>118</b>
4.3.1	Teorema de Noether . . . . .	121
4.3.2	Simetrias Divergenciais . . . . .	129
<b>4.4</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>II</b>	<b>APLICAÇÕES À FÍSICA . . . . .</b>	<b>132</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES I: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>5.1</b>	<b>Equação de Burgers . . . . .</b>	<b>133</b>
5.1.1	Aspectos Históricos . . . . .	133
5.1.2	Primeiro Problema de Stokes . . . . .	133
5.1.3	Geradores de Simetria e Soluções . . . . .	134
5.1.3.1	Resolvendo o Sistema de Equações Determinantes . . . . .	135
<b>5.2</b>	<b>Equação de Korteweg–De Vries . . . . .</b>	<b>141</b>
5.2.1	Aspectos Históricos . . . . .	141
5.2.2	Derivação . . . . .	143
5.2.2.1	Equação de Euler . . . . .	143
5.2.2.2	Potencial de Velocidade e Função de Fluxo . . . . .	144
5.2.2.3	Obtendo a Equação KdV . . . . .	144
5.2.3	Soluções Tipo Onda Solitária da Equação KdV . . . . .	147
5.2.4	Simetrias da Equação KdV . . . . .	149
5.2.4.1	Equação KdV em Notação Moderna . . . . .	149
5.2.4.2	Resolvendo o Sistema de Equações Determinantes da Equação KdV . . . . .	151
5.2.4.3	Soluções Extraídas dos Geradores . . . . .	152
<b>5.3</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>156</b>

<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES II: RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA</b>	<b>158</b>
<b>6.1</b>	<b>Killing Versus Noether</b>	<b>158</b>
6.1.1	Vetores de Killing	158
6.1.2	Espaço-Tempo de Minkowski	162
6.1.3	Universo de Taub	165
6.1.4	Universo de Anti-de Sitter	167
<b>6.2</b>	<b>Métrica de Schwarzschild e Teorema de Birkhoff</b>	<b>170</b>
6.2.1	A Solução de Schwarzschild Para as Equações de Campo de Einstein	170
6.2.2	Teorema de Birkhoff	170
6.2.3	Simetrias de Noether	173
<b>6.3</b>	<b>Noether Approach e Cosmologia Quântica</b>	<b>176</b>
6.3.1	Noether Approach	176
6.3.2	Equação de Wheeler-DeWitt e a Função de Onda do Universo	178
6.3.3	Aplicação da Noether Approach à Cosmologia $f(T)$	180
6.3.3.1	Extensões Teleparalelas da Relatividade Geral	180
6.3.3.2	Aplicação ao caso $f(T)$	181
<b>6.4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>185</b>
 <b>CONCLUSÃO</b>		 <b>187</b>
 <b>REFERÊNCIAS</b>		 <b>189</b>
 <b>APÊNDICES</b>		 <b>202</b>
	<b>APÊNDICE A – FÓRMULA DE JACOBI</b>	<b>202</b>
	<b>APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES</b>	<b>204</b>
	<b>APÊNDICE C – TRANSFORMAÇÃO DE COLE-HOPF</b>	<b>207</b>
<b>C.1</b>	<b>Aplicação à Equação de Burgers Viscosa</b>	<b>208</b>

# 1 Introdução

## A Jornada da Simetria: Do Formalismo de Lie às Fronteiras da Física

A busca por princípios unificadores é a força motriz da física teórica. Nesta jornada intelectual, o conceito de simetria emergiu não como uma mera curiosidade estética, mas como a linguagem fundamental para articular as leis da natureza. As simetrias, longe de serem passivas, ditam as regras do universo: por meio do teorema de Noether, elas se revelam como a origem das leis de conservação — conectando a invariância por translações espaciais à conservação do momento, por exemplo — e, de forma ainda mais profunda, servem como o princípio construtivo para as teorias mais fundamentais que possuímos. Na física moderna, postular uma simetria é o primeiro passo para derivar a própria dinâmica das interações, como visto na Relatividade Geral e no Modelo Padrão da física de partículas. Portanto, a tarefa de um físico teórico passa, invariavelmente, pela identificação e exploração das simetrias inerentes a um sistema, pois nelas reside a chave para desvendar sua estrutura íntima.

Contudo, a gramática na qual as leis da física são escritas — as equações diferenciais — apresenta um desafio formidável. A maioria dos fenômenos de fronteira, da dinâmica de fluidos à cosmologia, é descrita por equações não lineares de difícil solução. Historicamente, a resolução destes problemas dependia de métodos ad hoc, substituições engenhosas e uma intuição quase artística, carecendo de um princípio unificador. Foi como uma resposta sistemática e revolucionária a este desafio que o trabalho de Sophus Lie se consolidou. O Método das Prolongações, peça central de sua teoria, transformou a arte de resolver equações em uma ciência algorítmica. Ao desenvolver um procedimento para estender a ação de um grupo de transformações ao espaço que inclui as derivadas, Lie ofereceu uma ferramenta poderosa para encontrar sistematicamente todas as simetrias de ponto de uma equação e, a partir delas, simplificá-la ou resolvê-la. Esta dissertação apresenta um estudo aprofundado do método das prolongações, demonstrando como esta abordagem, fundamentada na teoria dos grupos de Lie, oferece um arcabouço unificador para a análise de equações diferenciais de relevância física.

Para atingir tal objetivo, o trabalho foi estruturado em duas partes que guiam o leitor da fundamentação teórica à aplicação prática. A **Parte I** é dedicada à construção rigorosa do formalismo matemático, iniciando com uma revisão dos preliminares de grupos, topologia e álgebras de Lie (Capítulo 2), que constituem os alicerces da teoria. Em seguida, o método das prolongações é desenvolvido em detalhe para a determinação de simetrias de ponto (Capítulo 3), o coração técnico da dissertação. Esta parte culmina na análise de sistemas variacionais (Capítulo 4), onde a profunda conexão entre simetrias e leis de

conservação é formalizada através do teorema de Noether. A **Parte II** transita da teoria à prática, aplicando o ferramental desenvolvido a sistemas físicos canônicos. Primeiramente, o método é empregado na análise de equações da dinâmica de fluidos, como as de Burgers e de Korteweg-De Vries (KdV), para obter suas simetrias e construir soluções exatas (Capítulo 5). Por fim, a investigação avança para o domínio da relatividade geral e da cosmologia (Capítulo 6), onde a distinção conceitual entre as isometrias geométricas (vetores de Killing) e as simetrias da ação (simetrias de Noether) se torna crucial, e o formalismo é aplicado até mesmo em questões relativas à quantização da gravitação, demonstrando a vasta aplicabilidade da teoria.

Este percurso, do abstrato ao aplicado, demonstra o poder e a universalidade do método de Lie. O estudo evidencia como um único princípio — a busca por invariância — unifica a análise de sistemas físicos aparentemente desconexos, revelando que os geradores de Lie se manifestam ora como translações espaciais, ora como transformações de escala ou de Galileu, com interpretações físicas distintas em cada contexto. Mais do que um exercício técnico, esta dissertação representa um rito de passagem: a consolidação de uma base sólida que habilita o autor a deixar de ser um consumidor de conhecimento para se tornar um especialista pronto para aplicar uma técnica poderosa a problemas de fronteira. O domínio aqui demonstrado capacita a abordagem de áreas de pesquisa avançada, como teorias modificadas da gravitação, modelos em matéria condensada e cosmologia quântica, servindo como uma etapa fundamental e bem-sucedida na jornada de formação de um físico teórico.

# Parte I

## O Método das Prolongações

## 2 Preliminares Matemáticos

O método das prolongações, tema da presente dissertação, exige conhecimento básico a respeito de tópicos elementares relacionados à teoria de grupos e topologia. É intuito do presente capítulo apresentar os elementos necessários de forma superficial, mas suficiente para um entendimento pormenorizado da construção que será feita em capítulos posteriores.

### 2.1 Elementos Gerais de Teoria de Grupos

#### Definição 2.1: Grupo

Seja  $G$  um conjunto não vazio, munido de uma operação binária denotada por  $\bullet$ . Diz-se que a estrutura  $(G, \bullet)$  forma um grupo se as seguintes propriedades forem verificadas [1]:

- i Existe uma operação  $(\bullet)$ , denominada **produto** do grupo, tal que  $g_i \bullet g_j = g_k \in G \forall g_i, g_j \in G$ . Em outros termos, o grupo é fechado sobre essa operação.
- ii Existe um elemento  $e \in G$ , tal que  $e \bullet g = g \bullet e = g, \forall g \in G$ . A esse elemento é dado o nome **identidade** do grupo;
- iii Para todo  $g \in G$ , existe um elemento  $g^{-1} \in G$  tal que  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ . Ao elemento  $g^{-1}$  damos o nome de **inverso** de  $g$ ;
- iv Todos os elementos de  $G$  satisfazem a propriedade de associatividade. Isto é,  $\forall g_i, g_j, e g_k \in G$ , vale que  $(g_i \bullet g_j) \bullet g_k = g_i \bullet (g_j \bullet g_k)$ .

#### Exemplo 2.1: Conjunto dos Números Inteiros

Usando a definição 2.1, mostremos que, sob a operação usual de soma, o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  forma um grupo. Primeiramente, sejam  $g$  e  $h \in \mathbb{Z}$ , sabemos da álgebra elementar que  $g + h \in \mathbb{Z}$ . Ainda, zero é o elemento identidade desse grupo, pois  $g + 0 = g, \forall g \in \mathbb{Z}$ . Por sua vez, a associatividade é verificada por ser uma propriedade da operação de soma. Por fim,  $\forall g \in \mathbb{Z}, \exists g^{-1} = -g$ , tal que  $g \bullet g^{-1} = g - g = 0 = \text{identidade}$ . Analogamente, os conjuntos dos reais  $\mathbb{R}$  e dos complexos  $\mathbb{C}$  formarão grupos sob a mesma operação.

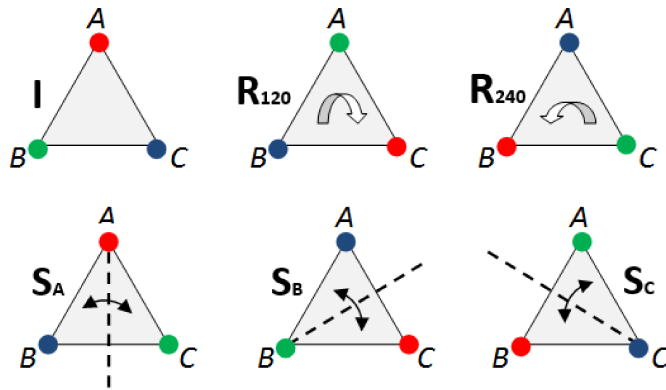


Figura 1 – Transformações de simetria do grupo diedral  $D_3$ .

### Exemplo 2.2: Simetrias do Triângulo Equilátero.

Seja o conjunto das transformações que mantêm o triângulo equilátero invariante. Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices desse triângulo, compõem esse conjunto as reflexões em relação aos eixos que passam por cada vértice e pelo ponto médio do lado oposto ( $S_A$ ,  $S_B$  e  $S_C$ ), as rotações de  $120^\circ$  ( $R_{120}$ ) e  $240^\circ$  ( $R_{240}$ ) em torno de seu centro, e a transformação identidade  $I$  (rotação de  $0^\circ$ ). Podemos associar a esse conjunto uma operação de composição, definida por aplicações sucessivas de quaisquer de seus elementos.

É facilmente notável que a transformação  $I$  pode ser tomada como elemento identidade, dado que a composição da aplicação de  $I$  com qualquer outro elemento do conjunto corresponde simplesmente à aplicação daquele elemento, pois  $I$  não altera em nada o triângulo ao qual foi aplicado.

No que tange às reflexões, nota-se que duas reflexões em relação a qualquer bissetriz equivalem a nenhuma reflexão, indicando que cada reflexão é a sua própria inversa. Por sua vez, uma rotação de  $120^\circ$  seguida por uma de  $240^\circ$  resulta em uma rotação de  $360^\circ$ , que equivale à identidade. Portanto,  $R_{120}$  e  $R_{240}$  são elementos inversos um do outro ( $R_{120}^{-1} = R_{240}$  e vice-versa). Assim, todos os elementos do conjunto possuem um elemento inverso.

A associatividade pode ser verificada notando-se que cada uma dessas transformações pode ser expressa através de uma matriz  $2 \times 2$ . Como o produto matricial é uma operação associativa, então todos os elementos do conjunto satisfazem a propriedade de associatividade.

Assim sendo, o conjunto de transformações de simetrias de um triângulo equilátero satisfaz todos os axiomas de um grupo. Esse grupo em específico recebe o nome de **grupo diedral  $D_3$** .

A um grupo finito, isto é, grupo com número finito de elementos, pode ser associada uma tabela multiplicativa. Nessa tabela, o elemento correspondente à linha  $g_i$  e à coluna  $g_j$  corresponde à operação  $g_i \bullet g_j$ . Na tabela 1 é apresentada a tabela multiplicativa do grupo diedral discutido no exemplo anterior.

$\bullet$	I	$R_{120}$	$R_{240}$	$S_A$	$S_B$	$S_C$
I	I	$R_{120}$	$R_{240}$	$S_A$	$S_B$	$S_C$
$R_{120}$	$R_{120}$	$R_{240}$	I	$S_C$	$S_A$	$S_B$
$R_{240}$	$R_{240}$	I	$R_{120}$	$S_B$	$S_C$	$S_A$
$S_A$	$S_A$	$S_B$	$S_C$	I	$R_{120}$	$R_{240}$
$S_B$	$S_B$	$S_C$	$S_A$	$R_{240}$	I	$R_{120}$
$S_C$	$S_C$	$S_A$	$S_B$	$R_{120}$	$R_{240}$	I

Tabela 1 – Tabela de multiplicativa das transformações de simetria de um triângulo equilátero.

Analisando cuidadosamente a tabela 1, é possível notar que não há uma repetição de um mesmo elemento em determinada linha ou coluna. Esse fato não é mera coincidência, mas sim uma propriedade presente na tabela multiplicativa de qualquer grupo finito, e é uma consequência do teorema abaixo.

**Teorema 2.1: Teorema do Rearranjo**

Para qualquer elemento  $g$  de um grupo  $G$ , o conjunto  $gG = \{g \bullet g' \mid g' \in G\}$  é idêntico ao próprio conjunto  $G$ .

**Prova 2.1**

Para provar a igualdade  $gG = G$ , demonstraremos as duas inclusões de conjuntos:  $gG \subseteq G$  e  $G \subseteq gG$ .

**1. Prova de que  $gG \subseteq G$  (Primeira Inclusão):**

Seja  $h$  um elemento qualquer do conjunto  $gG$ . Por definição,  $h$  pode ser escrito como  $h = g \bullet g'$  para algum  $g' \in G$ . Como  $g$  e  $g'$  são elementos de  $G$ , e  $G$  é fechado sob a operação de grupo  $\bullet$ , o resultado  $g \bullet g'$  deve, necessariamente, pertencer a  $G$ . Portanto,  $h \in G$ , o que prova que todo elemento de  $gG$  também é um elemento de  $G$ .

**2. Prova de que  $G \subseteq gG$  (Segunda Inclusão):**

Seja  $h$  um elemento qualquer do grupo  $G$ . Precisamos mostrar que  $h$  pode ser escrito na forma  $g \bullet g'$  para algum  $g' \in G$ . Consideremos o elemento  $g' = g^{-1} \bullet h$ .

Como  $g \in G$ , seu inverso  $g^{-1}$  também pertence a  $G$ . Visto que  $g^{-1} \in G$  e  $h \in G$ , o produto  $g^{-1} \bullet h$  também deve pertencer a  $G$  pela propriedade de fechamento. Agora, multiplicando  $g$  por este  $g'$ , obtemos:

$$g \bullet g' = g \bullet (g^{-1} \bullet h) = (g \bullet g^{-1}) \bullet h = e \bullet h = h$$

Onde  $e$  é o elemento identidade. Assim, para qualquer  $h \in G$ , encontramos um elemento  $g' \in G$  tal que  $h = g \bullet g'$ , o que prova que  $h \in gG$ .

Como demonstramos que  $gG \subseteq G$  e  $G \subseteq gG$ , concluímos que  $gG = G$ . (Um argumento análogo prova que  $Gg = G$ ).  $\square$

Do teorema do rearranjo, temos o seguinte corolário:

### Corolário 2.1

Em uma tabela de multiplicação de um grupo (tabela de Cayley), cada elemento do grupo aparece exatamente uma vez em cada linha e em cada coluna.

### Prova 2.2

Consideremos a linha correspondente ao elemento  $g$ . Pelo teorema do rearranjo, essa linha (o conjunto  $gG$ ) contém todos os elementos de  $G$ . Para provar que cada elemento aparece apenas uma vez, suponha que um elemento  $h$  apareça duas vezes. Isso implicaria que existem dois elementos distintos  $g_r, g_s \in G$  (com  $g_r \neq g_s$ ) tais que:

$$g \bullet g_r = h \quad \text{e} \quad g \bullet g_s = h.$$

Igualando as expressões, temos  $g \bullet g_r = g \bullet g_s$ . Multiplicando ambos os lados à esquerda pelo inverso  $g^{-1}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} g^{-1} \bullet (g \bullet g_r) &= g^{-1} \bullet (g \bullet g_s) \implies (g^{-1} \bullet g) \bullet g_r = \\ &= (g^{-1} \bullet g) \bullet g_s \implies e \bullet g_r = e \bullet g_s \implies g_r = g_s. \end{aligned}$$

Isso contradiz nossa hipótese inicial de que  $g_r \neq g_s$ . Portanto, cada elemento pode aparecer no máximo uma vez na linha. Como a linha contém todos os elementos de  $G$ , concluímos que cada elemento aparece exatamente uma vez.  $\square$

Os dois exemplos anteriores se distinguem de uma forma fundamental: o grupo dos inteiros sob a operação de adição é tal que a operação entre elementos quaisquer conduz ao mesmo resultado independentemente da ordem na qual esses elementos são somados.

Porém, o mesmo não ocorre entre os elementos do grupo diedral. Essa observação conduz a uma importante classificação fundamental em teoria de grupos.

### Definição 2.2: Grupos Abelianos e Não-Abelianos

Sejam  $g_i$  e  $g_j \in G$ .  $G$  é dito **abeliano** se  $g_i \bullet g_j = g_j \bullet g_i$ . Caso contrário, tal grupo é dito **não-abeliano**.

### Definição 2.3: Homomorfismo

Dados dois grupos  $(G, \bullet)$  e  $(H, \blacktriangle)$ , diz-se que  $f: G \rightarrow H$  é um **homomorfismo** se  $f(g_1 \bullet g_2) = f(g_1) \blacktriangle f(g_2)$ ,  $\forall g_1, g_2 \in G$ . Se o homomorfismo também for uma bijeção, diz-se que ele é um **isomorfismo**. Dois grupos são ditos isomorfos, denotado por  $G \simeq H$ , quando existir um isomorfismo  $f: G \rightarrow H$ .

Apliquemos agora a definição 2.3 a um exemplo muito simples:

### Exemplo 2.3: Homomorfismo entre $U(1)$ e $\mathbb{R}$

Consideremos o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo unitário, denotado por  $U(1)$ . Cada elemento de  $U(1)$  pode ser escrito na forma  $e^{ix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e tal que  $e^x e^y = e^{x+y}$  define a operação multiplicativa do mesmo.

A própria definição de  $U(1)$  provê um mapeamento entre qualquer elemento desse grupo com elementos do grupo dos reais (sob a operação de soma). De fato, é direto mostrar que  $f(x + y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = f(x)f(y)$ . Assim, em consonância com a definição 2.3, o mapeamento  $f: \mathbb{R} \rightarrow U(1)$  configura um homomorfismo.

Entretanto, esse mapeamento não é um isomorfismo, pois  $f(x + 2n\pi) = e^{i(x+2n\pi)} = e^{ix} e^{2n\pi} = e^{ix} = f(x) \forall n \in \mathbb{Z}$ . Ou seja, há um número infinito de elementos de  $\mathbb{R}$  que são levados por  $f$  na mesma imagem em  $U(1)$ .

Seguindo de maneira direta nossa construção até aqui, pode-se definir um subgrupo da forma como se segue:

### Definição 2.4: Subgrupo

Dado um conjunto  $H \subset G$ , com  $G$  sendo um grupo, diz-se que  $H$  é **subgrupo** de  $G$  se seus elementos formarem um grupo com a mesma operação de multiplicação definida para  $G$ .

Por consequência da definição acima, dois subgrupos triviais a um grupo  $G$  são o conjunto que contém apenas o elemento identidade  $I$  e o próprio  $G$ . Qualquer outro subgrupo de  $G$  é dito subgrupo **próprio** de  $G$ .

A título de exemplo, o subconjunto dos inteiros positivos,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , conhecido comumente como conjunto dos números naturais, forma um subgrupo do grupo dos inteiros discutido no exemplo 2.1.

## 2.2 Elementos Gerais de Topologia

Até aqui, exploramos a estrutura puramente algébrica dos grupos. Contudo, o trabalho de Sophus Lie reside precisamente na fusão desta álgebra com a geometria. Para que os grupos possam descrever transformações contínuas — como rotações ou translações no espaço — seus elementos precisam ser identificados com pontos em um espaço que possua noções de proximidade e continuidade. A linguagem matemática que formaliza estas noções é a topologia, que servirá como o alicerce para definirmos o conceito de variedade diferenciável, a arena geométrica onde os grupos de Lie atuam.

### Definição 2.5: Espaço Topológico

Um espaço topológico é um conjunto  $M$ , dotado de uma coleção de subconjuntos  $U$ , chamados de **conjuntos abertos**, tal que [2, 3]:

- i. O conjunto vazio  $\emptyset$  e o próprio  $M$  estão contidos em  $U$ ;
- ii. Dados dois conjuntos abertos  $U_1$  e  $U_2$ ,  $U_1 \cap U_2$  também é um conjunto aberto;
- iii. A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é aberta.

A  $U$  damos o nome de **topologia**.

### Exemplo 2.4

Seja o conjunto discreto  $U = \{M, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ , onde  $M = \{a, b, c\}$ . Esse conjunto forma um espaço topológico, pois as três propriedades apresentadas na definição 2.5 são satisfeitas. Por outro lado, o conjunto discreto  $V = \{M, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$  não é um espaço topológico, pois a união de  $\{a\}$  com  $\{b\}$ , isto é,  $\{a, b\}$ , não faz parte de  $V$ .

Além disso, é possível definir se os elementos de  $U$  são **fechados**. Para tal, diz-se que um subconjunto  $F \subseteq M$  é fechado se o seu complemento é aberto.

**Exemplo 2.5**

Consideremos novamente o conjunto discreto que analisamos no exemplo 2.4. Tomando como conjuntos abertos  $\emptyset$ ,  $M$ ,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{a, b\}$ , temos que os respectivos conjuntos fechados serão  $M$ ,  $\emptyset$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{a, c\}$  e  $\{c\}$ . Nota-se que  $M$  e  $\emptyset$  são tanto abertos quanto fechados. Por sua vez,  $\{a\}$  é apenas aberto e  $\{c\}$  é apenas fechado. Pode haver casos, o que não ocorre aqui, em que há conjuntos que não são abertos nem fechados.

**Definição 2.6: Vizinhança**

Seja  $\mathbf{x}$  um ponto de um espaço topológico  $M$ . Chama-se de **vizinhança** de  $\mathbf{x}$  qualquer conjunto aberto contido em  $M$  que contém  $\mathbf{x}$ .

**Definição 2.7: Hausdorff**

Diz-se que um espaço topológico  $M$  é **Hausdorff** se quaisquer dois pontos distintos possuem vizinhanças cuja intersecção é o conjunto vazio. Isto é, se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \in M$ , existem subconjuntos abertos  $U, V$  tais que  $U \cap V = \emptyset$ , com  $\mathbf{x} \in U$  e  $\mathbf{y} \in V$ .

**Definição 2.8: Homeomorfismo**

Sejam  $M$  e  $N$  dois espaços topológicos. Se existe um mapeamento  $f : M \rightarrow N$  que é injetor e tal que o mapa inverso  $f^{-1} : N \rightarrow M$  existe e, além disso,  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuos, então  $f$  é um **homeomorfismo** e os espaços topológicos  $M$  e  $N$  são ditos **equivalentes**.

## 2.2.1 Variedades

**Definição 2.9: Variedades**

Define-se uma **variedade** [2, 4] como um espaço topológico de Hausdorff que é localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja, à luz da definição 2.7, uma variedade é um espaço topológico que é localmente equivalente a  $\mathbb{R}^n$ . Em outros termos, uma variedade é definida pela introdução de um conjunto de vizinhanças  $U_i$  cobrindo o espaço topológico de forma que cada  $U_i$  é subespaço de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.6: Variedades**

Um exemplo de variedade é a esfera unitária  $S^n$  embebida no espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Outro exemplo, como é imediato perceber, é o próprio  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.10: Mapa**

Seja  $U$  um conjunto aberto a uma variedade  $M$ . Define-se um **mapa** (ou carta) através de um homeomorfismo  $\phi$  que mapeia  $U$  em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  (figura 2). As coordenadas da imagem de  $\phi$  em  $\mathbb{R}^n$  para um ponto  $x$  pertencente à variedade recebem o nome de **coordenadas locais de  $x$** .

O número de coordenadas necessárias para especificar o mapeamento de  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  determina a dimensão da variedade à qual esse ponto pertence.

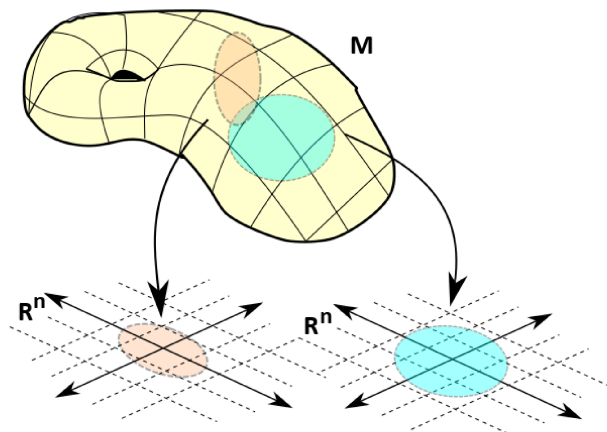


Figura 2 – Mapeamento de uma região da variedade.

**Definição 2.11**

Sejam dois mapas de uma variedade  $M$ ,  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  e  $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$ . Sejam ainda os conjuntos  $V_{ij} = \phi_i(V_i \cap V_j)$  e  $V_{ji} = \phi_j(V_i \cap V_j)$ , e também seja a aplicação  $\phi_{ij} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$ , tal que  $\phi_{ij}(y) = \phi_j(\phi_i^{-1}(y))$ , onde  $y \in V_{ij}$  (figura 3). Os mapas  $\phi_i$  e  $\phi_j$  são chamados de **compatíveis** se  $V_i \cap V_j = \emptyset$  ou se  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ , mas  $\phi_{ij}$  e  $\phi_{ji}$  são **difeomorfismos**, isto é, homeomorfismos diferenciáveis cujas inversas também são diferenciáveis, de classe  $C^r$ .

Assim, em vista das definições apresentadas acima, é possível introduzir a noção de atlas como se segue:

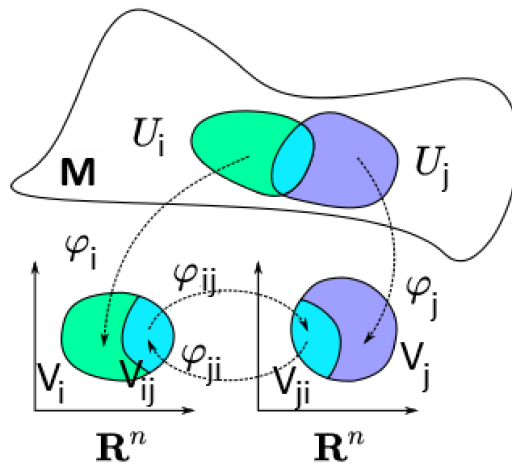


Figura 3 – Mapeamento de duas regiões da variedade.

### Definição 2.12: Atlas

Dada uma variedade  $M$ , um **atlas** é o conjunto de todos os mapas que são compatíveis aos pares, e cujo domínio de definição constitui uma cobertura de  $M$ , isto é, especifica todo e qualquer ponto de  $M$ . Além disso, dois atlas serão compatíveis se a reunião dos mapas desses atlas formar um atlas de  $M$ .

Em outros termos, a definição 2.12 diz que um atlas de  $M$  é uma coleção de sistemas coordenados para a qual cada ponto da variedade está no domínio de um desses sistemas, e quaisquer dois sistemas de coordenadas se superpõem suavemente. Chama-se de **variedade diferenciável** todo espaço topológico munido de atlas que são mutuamente equivalentes.

### Exemplo 2.7: Projeção Estereográfica

A maneira mais convencional de descrever pontos em uma esfera  $\mathbb{S}^2$  é através das bem conhecidas coordenadas polares. Porém, não é a única forma. De fato, pode-se descrever a esfera através de um mapeamento do ponto de interesse no plano equatorial (figura 4) por uma reta que parte do polo norte e passa pelo próprio ponto. Esse método é conhecido como **projeção estereográfica**.

A reta em questão, passando pelo ponto  $P = (x, y, z)$  e pelo polo norte  $N = (0, 0, 1)$ , utilizando o sistema cartesiano  $(x, y, z)$ , é parametrizada por  $x' = \lambda x$ ,  $y' = \lambda y$  e  $z' = 1 + \lambda(z - 1)$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para um ponto  $P'$  no plano equatorial, tem-se que  $P = (x', y', z') = (\xi, \eta, 0)$ , e assim

$$\xi = \frac{x}{1 - z}, \quad \eta = \frac{y}{1 - z}.$$

Nota-se que o polo norte é um ponto singular, pois para ele  $z = 1$  e, portanto, deve ser excluído da aplicação construída acima. Portanto, temos o mapeamento  $\Pi_A : \mathbb{S}_A \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (\xi, \eta)$ , onde  $\mathbb{S}_A = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ .

Para que o polo norte seja mapeado, basta construir outra projeção esferográfica a partir do polo sul. O procedimento é análogo ao anterior, e as coordenadas no plano equatorial são dadas por

$$\xi' = \frac{x}{1+z}, \quad \eta' = \frac{y}{1+z}$$

Neste caso, o polo sul estará excluído do mapeamento, pois ele é o ponto que corresponde a  $z = -1$ . Portanto, temos o mapeamento  $\Pi_B : \mathbb{S}_B \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (\xi, \eta)$ , onde  $\mathbb{S}_B = \mathbb{S}^2 - \{S\}$ . Com os dois mapeamentos,  $x_A$  e  $x_B$ , a superfície da esfera é totalmente mapeada. Logo, em consonância com a definição 2.12, esses dois mapas formarão um atlas para a esfera  $\mathbb{S}^2$ .

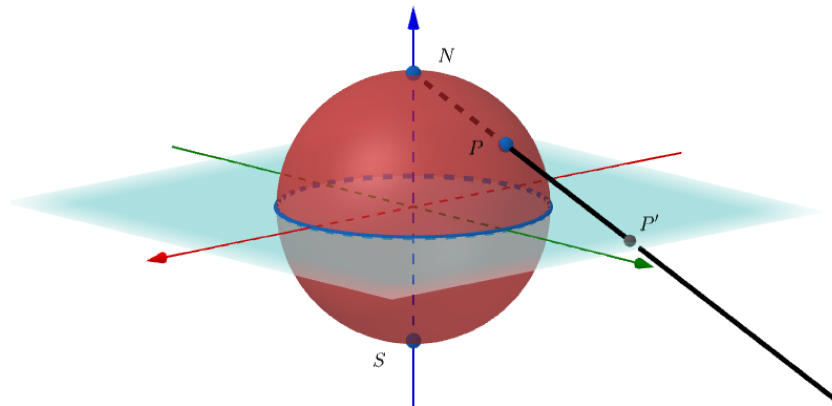


Figura 4 – Projeção estereográfica.

## 2.2.2 Estruturas em uma Variedade

### Definição 2.13: Função

Uma função  $f$  em uma variedade  $M$  é um mapeamento  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada ponto  $\mathbf{x} \in M$  um ponto  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ . A função  $f$  será diferenciável no ponto  $\mathbf{x}$  da variedade se, para um mapa  $\phi$  em  $\mathbf{x}$ ,  $f \circ \phi^{-1}$  for diferenciável em  $\phi(\mathbf{x})$  [2, 5].

### Definição 2.14: Curva

Seja  $M$  uma variedade e  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Uma **curva** em  $M$  é uma

transformação  $c : I \rightarrow M$ , tal que se  $t \in I$ , então  $c(t) \in M$ .

Por sua vez, se  $c$  é uma curva e  $f$  é uma função diferenciável em um ponto  $\mathbf{x}$  da variedade, a transformação composta  $f \cdot c$  é uma função diferenciável no ponto equivalente a  $\mathbf{x}$  em  $I$ .

### Definição 2.15: Soma e Multiplicação de Funções

Seja  $F(P)$  o conjunto de todas as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , isto é, infinitamente diferenciáveis, definidas no aberto  $U$ , contendo um determinado ponto  $P$  da variedade  $M$ . Dados  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U$  e  $V$  sendo abertos contendo  $P$ , define-se a soma  $f + g : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  como  $(f + g)(P) = f(P) + g(P)$ . Analogamente, define-se o produto  $(fg) : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(fg)(P) = f(P)g(P)$ .

### Definição 2.16: Vetor Tangente

Define-se como **vetor tangente** no ponto  $P \in M$  o operador  $X_P : F(P) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\forall f, g \in F(P), \forall a, b \in \mathbb{R}$ , vale

- i **Linearidade de  $X_p$** :  $X_p(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot X_p(f) + b \cdot X_p(g)$ ;
- ii **Regra de Leibniz**:  $X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g + f \cdot X_p(g)$ .

### Definição 2.17: Espaço Tangente

O conjunto de todos os vetores tangentes no ponto  $P$  forma um espaço vetorial, denominado **espaço tangente** e denotado por  $T_P(M)$ .

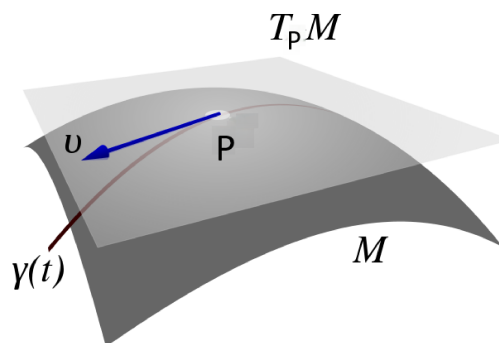


Figura 5 – Espaço tangente.

Obviamente, o espaço tangente possui a estrutura de um espaço vetorial, pois é fechado na soma, isto é  $(X_P + Y_P)(f) = X_P(f) + Y_P(f)$ , e na multiplicação por escalar  $a \cdot X_P(f) = a \cdot (X_P(f))$ . Além disso, há um vetor nulo tal que  $0_P(f) = 0 \forall f \in F(P)$ .

### Definição 2.18

Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva em  $M$ , segundo a definição 2.14. O vetor tangente a  $\gamma$  no ponto  $P = \gamma(t_0) \in M$  é a derivada  $\gamma'(t_0)$ , definida  $\forall f \in F(P)$  por

$$\gamma'(t_0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=t_0}.$$

### Definição 2.19: Campo Vetorial

Seja  $T_P(M)$  o espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $P$ , e  $T(M) = \cup_{P \in X} T_P(M)$ . Um **campo vetorial** é uma aplicação  $X : M \rightarrow T(M), P \rightarrow X_P$ . Posto de outra forma, um campo vetorial é uma aplicação que a cada ponto da variedade associa um vetor tangente a essa variedade.

Tomando como  $F(M)$  o espaço das funções de classe  $C^\infty$  sobre toda a variedade, um campo vetorial é um elemento do espaço das aplicações lineares de  $F(M)$  em  $F(M)$  satisfazendo a regra de Leibniz. Temos, portanto,  $\forall f, g \in F(M), \forall a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$X(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot X(f) + b \cdot X(g),$$

e

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g),$$

onde  $X : F(M) \rightarrow F(M)$ .

O vetor tangente  $X_P$  no ponto  $P \in M$ , que é um elemento do espaço das aplicações lineares de  $F(P)$  em  $\mathbb{R}$ , é dado por  $X_P(f) = (Xf)(P)$ . O lado esquerdo é visto como a restrição de  $f \in F(M)$  em  $F(P)$ .

## 2.3 Grupos e Algebras de Lie

Tendo estabelecido a estrutura da variedade diferenciável como um espaço que localmente se assemelha ao espaço euclidiano, estamos agora em posição de unir os conceitos algébricos e geométricos. Um Grupo de Lie é precisamente um objeto matemático que é, simultaneamente, um grupo e uma variedade diferenciável, com a exigência de que as

operações de grupo (multiplicação e inversão) sejam suaves. Esta dupla natureza é o que confere a eles o poder de descrever as simetrias contínuas da física.

Um grupo de Lie é um conjunto de elementos que satisfaz todos os axiomas esperados de um grupo (definição 2.1), bem como todos os requerimentos exigidos para ser uma variedade diferenciável (após a definição 2.12). Nesse sentido, a estrutura geométrica de um grupo de Lie surge da identificação de cada elemento do grupo com um ponto em um dado espaço topológico ( $g_i \rightarrow g(\mathbf{x})$ ) [6].

Devido à sua estrutura de variedade, podemos associar a elementos de tais grupos noções como espaços tangentes, campos vetoriais, derivação sobre curvas, etc. Além disso, devido à natureza de grupo, conceitos relacionados ainda permanecem disponíveis. Naturalmente, a riqueza de ferramentas disponíveis para um grupo de Lie deve ser consistente com sua estrutura de grupo e de variedade diferenciável [7].

### Definição 2.20: Grupos de Lie

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. Essa variedade será um **grupo de Lie** se as operações de grupo puderem ser parametrizadas ( $g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M^n$ ), com o produto definido por  $g(\mathbf{x}) \bullet g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z})$ , onde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  são coordenadas de  $M^n$ , cuja dependência é especificada por meio de uma função na forma  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Além disso, devem ser verificadas duas propriedades:

- i **Suavidade do mapa de composição do grupo:** O mapa  $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , resultante de  $g(\mathbf{x}) \circ g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z})$ , deve ser diferenciável;
- ii **Suavidade do mapa de inversão do grupo:** O mapa de inversão do grupo  $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ , definido por meio da operação  $g^{-1}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x})$ , deve ser diferenciável.

### Exemplo 2.8: O Grupo $SO(2)$

O grupo das matrizes ortogonais especiais  $SO(2)$ , associado a rotações no espaço bidimensional, é um grupo de Lie. Por definição,  $SO(2) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = \mathbb{I}, \det(A) = 1\}$ , que pode ser representado matricialmente por

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Por essa representação, se torna claro que todo e qualquer elemento de  $SO(2)$  pode ser parametrizado de maneira contínua e diferenciável pelo ângulo  $\theta$ , e isso

confere ao grupo uma estrutura de variedade diferenciável. Tal variedade corresponde à circunferência unitária  $S(1)$ .

### 2.3.1 Grupos de Transformações Uniparamétricas

#### Definição 2.21: Grupos de Transformações Uniparamétricas

Seja uma região  $D \subset \mathbb{R}^n$ , e seja  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  coordenadas nessa região. O conjunto de transformações

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \epsilon)$$

forma um **grupo de transformações uniparamétricas**, com  $\epsilon$  em  $S \subset \mathbb{R}$ , onde  $\phi(\epsilon, \delta)$  define uma lei de composição entre  $\epsilon$  e  $\delta$  em  $S$ , se forem satisfeitas as condições:

- i Para cada  $\epsilon \in S$ , as transformações são 1:1 (bijetivas) em  $D$ . Portanto,  $\tilde{\mathbf{x}} \in D$ ;
- ii  $S$  com a lei de composição  $\phi$  forma um grupo;
- iii Para cada  $\mathbf{x} \in D$ , há um elemento  $\epsilon = \epsilon_0$ , denominado identidade, tal que  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ ;
- iv Se  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \epsilon)$ , e  $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta)$ , então

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \phi(\epsilon, \delta)).$$

#### Definição 2.22: Grupos de Lie de Transformações Uniparamétricas

Um **grupo de Lie de transformações uniparamétricas** é um grupo de Lie que, além de satisfazer os requerimentos da definição anterior, satisfaz o que se segue:

- i  $S$  é um intervalo contínuo em  $\mathbb{R}$ . Em outros termos,  $\epsilon$  é um parâmetro contínuo, onde  $\epsilon = 0$  pode ser tomado, sem perda de generalidade, como o elemento identidade;
- ii A função  $\phi(\epsilon, \delta)$  é analítica em  $\epsilon$  e  $\delta \in S$ ;
- iii  $\mathbf{X}$  é uma função analítica em  $\epsilon \in S$  e, além disso, é infinitamente diferenciável com respeito a  $\mathbf{x} \in D$ .

No próximo exemplo, a ideia por trás da definição de grupos de transformações uniparamétricas será ilustrada pelo grupo de translações no plano  $(x, y)$ .

### Exemplo 2.9: Transformações Uniparamétricas no Plano

Consideremos o grupo de translações definidas por

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \epsilon, \\ \tilde{y} = y, \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para esse grupo, a lei de composição mais natural é  $\phi = \epsilon + \delta$ , que obviamente satisfaz os requerimentos da definição 2.22.

### 2.3.2 Algebras de Lie

Por razões quaisquer, poderia ser necessário estudar a equivalência entre dois grupos de Lie. Essa não é uma tarefa trivial, pois seria preciso estudar a equivalência topológica entre as duas variedades associadas e, além disso, a equivalência das leis de composição (operações) desses grupos, que geralmente são não lineares. Entretanto, este estudo poderia ser notavelmente simplificado se as operações de composição admitissem linearização de alguma natureza.

Um grupo de Lie pode ser linearizado em torno de qualquer um de seus pontos. Tal linearização pode ser feita por meio de uma série de Taylor em termos das coordenadas que definem esse ponto. Porém, apesar de todos os pontos em um grupo de Lie parecerem localmente exatamente como qualquer outro ponto [6], é particularmente útil estudar a linearização em torno de um ponto especial: a identidade do grupo.

O processo de linearização em torno do elemento identidade dará origem a um novo conjunto de operadores, e esses operadores formarão um espaço vetorial linear que recebe o nome de **álgebra de Lie**.

Para ilustrarmos o que estamos discutindo, busquemos linearizar o grupo  $SO(2)$  em torno de sua identidade. Como visto no exemplo 2.8, os elementos desse grupo podem ser representados por matrizes  $2 \times 2$  da forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

A identidade do grupo corresponde à matriz na qual  $\theta = 0$ . Portanto, façamos uma expansão em Taylor em torno desse ponto [8, 9]. Assim, temos que

$$A = \left. \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0} + \frac{d}{d\theta} \left. \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0} \theta + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Desta expressão, concluímos que

$$\left. \frac{dA}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde ao elemento de base da álgebra de Lie correspondente a  $SO(2)$ .

### 2.3.2.1 Invertendo a Linearização: A Aplicação Exponencial

Podemos pensar em sentido contrário: Será possível construir todo o grupo, ou parte dele, a partir dos elementos de sua álgebra?

Consideremos que  $X$  seja um elemento qualquer de uma álgebra de Lie. No espírito de linearização proposto, podemos dizer que um elemento pertencente a um grupo associado àquela álgebra pode ser expandido em torno da identidade 1 na forma  $A = 1 + \epsilon X$ , com  $\epsilon$  sendo um fator infinitesimal. Na tentativa de nos movermos para longe da identidade, podemos repetir esse procedimento tantas vezes quanto necessário, o que conduz ao processo limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} X \right)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \exp(X). \quad (2.1)$$

Isso define a **aplicação exponencial**, dado que o limite acima é o mesmo encontrado na caracterização da função exponencial. Aqui, porém, não estamos nos restringindo a números reais ou complexos, de modo que nossos resultados se aplicam também a matrizes  $n \times n$  e a outros objetos.

#### Exemplo 2.10: $SO(2)$ a Partir da sua Álgebra

Voltemos ao grupo  $SO(2)$ . Sabemos que sua álgebra tem como elemento de base

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$X^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \quad X^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Desses resultados em 2.1,

$$A(\theta) = \exp(\theta X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} X^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} X^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} X^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

O que nossa discussão nos mostra é que o mapeamento exponencial proporciona uma maneira natural de parametrizar um grupo de Lie em termos de quantidades lineares, isto é, os elementos da álgebra de Lie associada a esse grupo. Propriedades da aplicação exponencial, considerando matrizes como argumento, são apresentadas pelos próximos dois teoremas, cujas provas são apresentadas em [1].

### Teorema 2.2: Fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff

Seja  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Portanto,

$$(\exp A)(\exp B) = \exp \left( A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \dots \right).$$

Se essas matrizes comutarem <sup>a</sup>, a expressão acima se reduz a

$$\exp A \exp B = \exp(A + B).$$

<sup>a</sup> Definiremos isso abaixo, mas, essencialmente, significa que  $[A, B] = 0$ .

### Teorema 2.3: Propriedades da Aplicação Exponencial

A aplicação exponencial, aplicada a uma matriz  $n \times n$   $A$ , apresenta as seguintes propriedades:

- i  $(\exp A)^* = \exp(A^*)$ ;
- ii A transposição de  $\exp A$  é  $\exp(A^T)$ ;
- iii  $(\exp A)^\dagger = \exp(A^\dagger)$ ;
- iv Para cada matriz  $n \times n$  não singular  $S$ ,  $\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A)S^{-1}$ ;
- v Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $A$ . Portanto,  $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$  são os autovalores da matriz  $\exp A$ ;
- vi Vale a expressão,  $\det(\exp A) = \exp(\text{Tr } A)$ ;
- vii A aplicação exponencial de  $A$  sempre será não singular, além disso, vale a expressão  $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ ;
- viii O mapeamento exponencial  $\exp A$  provê um mapeamento contínuo de uma pequena região em torno da matriz  $\mathbb{O}$ , elemento nulo da álgebra, em uma

pequena região em torno da matriz identidade  $I$  do grupo linear geral de matrizes <sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Grupo de matrizes  $n \times n$  inversíveis, munido da operação de multiplicação matricial.

### 2.3.3 Propriedades das álgebras de Lie

A discussão dada acima serviu ao propósito de introduzir a noção de álgebra de Lie. Agora, será do nosso interesse usar o que sabemos para construir as propriedades que essas álgebras devem satisfazer.

Sabemos que, se  $X$  é um elemento de uma álgebra de Lie, então um elemento em uma vizinhança infinitesimal da identidade do grupo, continuemos chamando de  $A$ , pode ser expresso como  $A = I + \epsilon\alpha X$ , com  $\epsilon$  infinitesimal e  $\alpha$  real. Tomemos outro elemento  $B$ , expresso por  $B = I + \epsilon\beta Y$ , com  $\beta$  real e  $Y$  também na álgebra. Daí, considerando  $\bullet$  como a operação do grupo,  $A \bullet B$  será um elemento do grupo e pode ser expresso por

$$A \bullet B = (I + \epsilon\alpha X) \bullet (I + \epsilon\beta Y) = I + \epsilon(\alpha X + \beta Y) + \dots$$

Portanto, dado que  $X$  e  $Y$  são elementos da álgebra,  $\alpha X + \beta Y$  também o será. Assim sendo, está justificada a estrutura de espaço vetorial que uma álgebra de Lie apresenta [6, 10] <sup>1</sup>.

Antes de avançarmos, precisaremos definir uma nova operação entre elementos do grupo chamada de comutação.

#### Definição 2.23: Comutação Entre Elementos do Grupo

Sejam dois elementos  $g_1$  e  $g_2$  pertencentes a um grupo  $G$ . O **comutador** entre esses elementos é dado por

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}.$$

Expandindo  $g_1$  e  $g_2$  em termos de elementos  $X$  e  $Y$  da álgebra  $\mathfrak{g}$  em torno da identidade do grupo, o comutador entre esses elementos será

$$\begin{aligned} [g_1, g_2] &= \exp(\epsilon X) \exp(\delta Y) \exp(-\epsilon X) \exp(-\delta Y) + \dots = \\ &= I + \epsilon\delta(XY - YX) = I + \epsilon\delta[X, Y] + \dots \end{aligned}$$

Portanto, o comutador entre dois elementos do grupo implica na operação entre dois elementos da álgebra dada por  $[A, B] = AB - BA$ , que recebe o mesmo nome. Daqui, podemos notar que, se um grupo é abeliano, o que significa que os seus elementos comutam,

<sup>1</sup> Um espaço vetorial  $V$  é um conjunto de elementos (vetores) fechado sobre a adição vetorial e a multiplicação por escalar. Além disso, os elementos do conjunto devem satisfazer outras oito propriedades. Um exemplo de espaço vetorial é o espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  [10].

então  $[A, B]=0$ . Consequentemente,  $\exp([A, B]) = \exp 0 = I$ . Além disso, devem valer a **anticomutatividade**  $[A, B] = -[B, A]$ , e a **identidade de Jacobi**

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0.$$

Toda a discussão feita nesta subseção e na anterior pode ser sintetizada pela seguinte definição:

### Definição 2.24: Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial munido com uma aplicação bilinear  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , denominado produto da álgebra, que seja anticomutativo e satisfaça a identidade de Jacobi, isto é,

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}],$$

e

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] = 0.$$

### Exemplo 2.11: Grupo $SL(2, \mathbb{C})$

Consideremos o grupo das matrizes complexas  $2 \times 2$  lineares de determinante unitário, denominado  $SL(2, \mathbb{C})$ . Aplicando a parte (vi) do teorema 2.3, expandindo em torno da identidade e derivando em relação ao parâmetro  $t$ , teremos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det(A) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \exp(\text{Tr} \ln(A)) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \exp(\text{Tr} \ln(\mathbb{I} + t\dot{A}(0))) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(\text{Tr}(t\dot{A}(0))) \right|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

onde foi usada a expansão  $\ln(1+x) \approx x$ . Prosseguindo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \exp(\text{Tr}(t\dot{A}(0))) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \exp(t\text{Tr}(\dot{A}(0))) \right|_{t=0} = \\ &= \text{Tr}(\dot{A}(0)) \exp(t\text{Tr}(\dot{A}(0))) \Big|_{t=0} = \text{Tr}(\dot{A}(0)) = 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que a álgebra de Lie associada ao grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  consiste nas matrizes complexas de traço nulo. Resultado esse diretamente generalizável para  $SL(2, \mathbb{K})$ , com  $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

### 2.3.4 Constantes de Estrutura

Considerando que a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um espaço vetorial, conceitos naturais a esses espaços, como dimensão, bases e produtos internos, podem ser obtidos. É um fato garantido por teorema (ver [1]) que a dimensão da álgebra de Lie é a mesma dimensão da variedade que parametriza o grupo de Lie associado. Seguindo, dada a dimensão de  $\mathfrak{g}$ , podemos então selecionar  $n$  elementos linearmente independentes para construir uma base desse espaço, sob a qual qualquer elemento da álgebra pode ser escrito.

Além disso, sabemos que a álgebra é fechada sob a operação de comutação; isto é, a comutação entre quaisquer dois elementos da álgebra resulta em um terceiro elemento pertencente à mesma álgebra. Consequentemente, o comutador de dois elementos de base resulta em uma combinação linear de elementos de base  $\{\xi_1\}$

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k.$$

Às quantidades  $C_{ij}^k$  damos o nome de **constantes de estrutura**.

As constantes de estrutura de uma álgebra apresentam algumas propriedades. Primeiramente, da antissimetria do colchete, temos que

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k = -[\xi_j, \xi_i] = -C_{ji}^k \xi_k.$$

Então,

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k. \quad (2.2)$$

Por sua vez, da identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} [[\xi_i, \xi_j], \xi_l] + [[\xi_l, \xi_i], \xi_j] + [[\xi_j, \xi_l], \xi_i] &= C_{ij}^k [\xi_k, \xi_l] + C_{li}^k [\xi_k, \xi_j] + C_{jl}^k [\xi_k, \xi_i] = \\ &= C_{ij}^k C_{kl}^m \xi_m + C_{li}^k C_{kj}^m \xi_m + C_{jl}^k C_{ki}^m \xi_m = (C_{ij}^k C_{kl}^m + C_{li}^k C_{kj}^m + C_{jl}^k C_{ki}^m) \xi_m = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C_{ij}^k C_{kl}^m + C_{li}^k C_{kj}^m + C_{jl}^k C_{ki}^m = 0, \quad (2.3)$$

onde a soma está implícita pela notação de soma de Einstein.

#### Exemplo 2.12: Constantes de Estrutura de $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$

A álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  consiste de matrizes anti-hermitianas  $2 \times 2$  com traço nulo. É possível construir uma matriz anti-hermitiana  $A$  a partir de uma matriz hermitiana  $H$  por  $A = iH$ . Por sua vez, a matriz hermitiana  $2 \times 2$  mais geral que possui traço nulo é

$$H = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & -a \end{pmatrix},$$

com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b = b_0 + ib_1$ . Agora, podemos escrever  $H$  como

$$H = \begin{pmatrix} a & b_0 - ib_1 \\ b_0 + ib_1 & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a\sigma_z + b_0\sigma_x + b_1\sigma_y,$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as matrizes de Pauli.

Como as matrizes de Pauli são linearmente independentes, elas formarão uma base de  $\mathfrak{su}(2)$  que, por conveniência, pode ser redefinida como

$$\xi_x = -\frac{i}{2}\sigma_x, \quad \xi_y = -\frac{i}{2}\sigma_y, \quad \xi_z = -\frac{i}{2}\sigma_z.$$

Fazendo uso da propriedade  $[\sigma_a, \sigma_b] = i\epsilon_{abc}\sigma_c$ , verifica-se que

$$[\xi_x, \xi_y] = \xi_z, \quad [\xi_y, \xi_z] = \xi_x, \quad [\xi_z, \xi_x] = \xi_y.$$

Portanto, as constantes de estrutura de  $\mathfrak{su}(2)$  na base  $\xi_i$  são  $C_{12}^3 = -C_{21}^3 = C_{23}^1 = -C_{32}^1 = C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1$ .

### 2.3.5 Subálgebras e Ideais

#### Definição 2.25: Subálgebra

Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , um subespaço vetorial  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  é dito uma **subálgebra de Lie** de  $\mathfrak{g}$  se for fechado sob a operação de multiplicação definida pelo colchete de Lie, ou seja, se  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ .

Ainda no espírito da definição acima, essa subálgebra é dita **invariante**, ou  $\mathfrak{h}$  é um **ideal** de  $\mathfrak{g}$ , se o colchete de Lie de qualquer elemento de  $\mathfrak{h}$  com qualquer elemento de  $\mathfrak{g}$  estiver contido em  $\mathfrak{h}$ . Trivialmente,  $\{0\}$  e  $\mathfrak{g}$  são ideais. Caso, para uma álgebra de Lie não abeliana, os únicos ideais forem os triviais, diz-se que essa álgebra é **simples**. Além disso, uma álgebra de Lie é dita **semisimples** se puder ser construída como uma soma direta de álgebras simples.

Naturalmente, uma subálgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  está associada a um subgrupo de Lie  $H$  de um grupo  $G$ . Seja  $g = \exp(t\mathbf{X}) \in G$ ,  $h = \exp(s\mathbf{Y}) \in H$  e  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \subset \mathfrak{h} \forall \mathbf{X} \in \mathfrak{g}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{h}$ . Sabe-se que

$$ghg^{-1} = g \exp(s\mathbf{Y})g^{-1} = \exp(sg\mathbf{Y}g^{-1}),$$

e que

$$\begin{aligned} g\mathbf{Y}g^{-1} &= \left(1 + t\mathbf{X} + \frac{t^2}{2!}t\mathbf{X}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{X}^3 + \dots\right) \mathbf{Y} \left(1 - t\mathbf{X} + \frac{t^2}{2!}t\mathbf{X}^2 - \frac{t^3}{3!}\mathbf{X}^3 + \dots\right) = \\ &= \mathbf{Y} + t[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \frac{t^2}{2!}[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + \frac{t^3}{3!}[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]]] + \dots \end{aligned}$$

Dado que  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathfrak{h}$ , então  $[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \dots, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \dots, \mathbf{X}], \mathbf{X}] \in \mathfrak{h}$ . Logo,  $g\mathbf{Y}g^{-1} \in \mathfrak{h}$  e, conseqüentemente,  $ghg^{-1} \in H$ . Por outro lado, se  $ghg^{-1} \in H$ , podemos tomar a curva  $g(t)hg^{-1}(t)$  em  $H$ , e daí notamos que o termo de primeira ordem em  $t$  é  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ , o que nos leva a concluir que, se  $g(t)hg^{-1}(t) \in H$ , então  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathfrak{h}$ . Portanto, tendo em mente a definição de um subgrupo normal <sup>2</sup>, acabamos de mostrar que se  $\mathfrak{h}$  for um ideal de  $\mathfrak{g}$ , então  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ .

Existem dois procedimentos gerais para construção de ideais a partir de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ : o **método da série derivada** de  $\mathfrak{g}$  e o **método da série geral descendente** de  $\mathfrak{g}$  [7].

### Definição 2.26: Método da Série Derivada

Seja a série derivada de  $\mathfrak{g}$  definida por

$$\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k],$$

com  $k = 0, 1, 2, \dots$ , e  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ .

Supondo que  $\mathfrak{g}^k$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$ , então se  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2] \in \mathfrak{g}^{k+1}$ , segue, pela identidade de Jacobi, que

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathbf{X}, [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2]] = [\mathbf{Z}_1, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}_2]] + [[\mathbf{X}, \mathbf{Z}_1], \mathbf{Z}_2] \in \mathfrak{g}^{k+1},$$

$\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{g}$  e  $\mathbf{Z}_i \in \mathfrak{g}^k$ . Como  $\mathfrak{g}^0$  é um ideal, conclui-se por indução que  $\mathfrak{g}^{k+1}$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$ . Além disso, a seqüência é decrescente,  $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$ . Caso  $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$  para algum  $k_0 \geq 1$ , então a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é dita **solúvel**. Portanto, há uma seqüência de subgrupos de Lie dada por

$$I = G^{k_0} \subset G^{k_0-1} \subset \dots \subset G^1 = G,$$

onde, conforme mostramos anteriormente,  $G^{k+1}$  é normal a  $G^k$ .

### Definição 2.27: Método da Série Geral Decrescente

Seja a série central descendente de  $\mathfrak{g}$  definida por

$$\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k],$$

com  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

<sup>2</sup> Um subgrupo  $N$  de  $G$  é **normal** a  $G$  se,  $\forall n \in N$  e  $g \in G$ ,  $gng^{-1} \in G$  [11], [12].

Fazendo novamente uso da identidade de Jacobi,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]] = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^k] + [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]].$$

Mas, como  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^{k+1}$  é verdade para  $k = 1$ , segue, por indução, que  $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$  para qualquer  $k \geq 1$ . Portanto,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1}] \subset \mathfrak{g}^{k+1}$  e conclui-se que  $\mathfrak{g}^{k+1}$  é um ideal. Por sua vez, diz-se que  $\mathfrak{g}$  **nilpotente** se  $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$  para algum  $k \geq 1$ .

### Exemplo 2.13

Consideremos a álgebra de Lie bidimensional  $\text{span}\{X_1, X_2\}^a$ . A relação de comutação entre os elementos de base pode ser escrita por

$$[X_1, X_2] = C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2.$$

As outras constantes de estrutura, devido à antissimetria dos índices inferiores, são  $C_{21}^1 = -C_{12}^1$  e  $C_{21}^2 = -C_{12}^2$ .

Consideremos o caso  $C_{12}^1 = C_{12}^2 = 0$ . Aqui,  $[X_1, X_2] = 0$ , implicando que a álgebra é abeliana, bem como o grupo local associado. Obviamente, neste caso, a álgebra é solúvel.

Seja agora o caso em que  $C_{12}^1$  é necessariamente diferente de zero. Consideremos a base  $\{Y_1, Y_2\}$ , definida por

$$Y_1 = C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2, \quad Y_2 = \frac{1}{C_{12}^1} X_2.$$

A relação de comutação entre os elementos dessa base é

$$[Y_1, Y_2] = \frac{C_{12}^1}{C_{12}^1} [X_1, X_2] + \frac{C_{12}^2}{C_{12}^1} [X_2, X_2] = [X_1, X_2] = C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2 = Y_1.$$

Assim, em termos dos resultados que derivamos anteriormente, obtemos que o grupo de Lie gerado por  $Y_1$  é subgrupo normal daquele gerado por  $[Y_1, Y_2]$  (ou  $[X_1, X_2]$ ). Portanto, podemos concluir deste exemplo que, ao menos localmente, todo grupo de Lie com dois parâmetros é solúvel.

<sup>a</sup> Varrida por (=construída a partir da base contendo  $X_1$  e  $X_2$  como elementos).

### Exemplo 2.14: Álgebra de $SL(2, \mathbb{R})$

Os elementos de base da álgebra de  $SL(2, \mathbb{R})$  podem ser escritos na forma

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x, \quad X_3 = x^2\partial_x.$$

Os comutadores não nulos são

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3.$$

Das relações de comutação acima, fica claro que o espaço varrido por  $X_1$  e  $X_2$  forma uma subálgebra de Lie  $sl(2, \mathbb{R})$ . O mesmo acontece para o subespaço varrido por  $X_2$  e  $X_3$ . Porém, nenhuma dessas subálgebras é ideal. Dessa forma, mostramos que a álgebra de  $SL(2, \mathbb{R})$  só possui a si mesma e  $\{0\}$  como ideais. Em outros termos, o que acabamos de verificar é que a álgebra de  $SL(2, \mathbb{R})$  é simples.

### Exemplo 2.15

Tomemos a álgebra  $\mathfrak{L}$  varrida por

$$X_1 = \partial_y, \quad X_2 = x\partial_y, \quad X_3 = x^2\partial_y, \quad X_4 = \partial_x, \quad X_5 = x\partial_x.$$

Para este caso, os comutadores não nulos são

$$[X_2, X_4] = -X_1, \quad [X_2, X_5] = -X_2, \quad [X_3, X_4] = -2X_2,$$

$$[X_3, X_5] = -2X_3, \quad [X_4, X_5] = X_4.$$

Dos comutadores acima, podemos notar que  $\mathfrak{L}^{(1)} = \text{span}(X_1, X_2, X_3, X_4)$  é subálgebra de  $\mathfrak{L}$ . Por sua vez, dado que os comutadores não nulos entre os elementos de  $\mathfrak{L}^{(1)}$  são  $[X_2, X_4] = -X_1$  e  $[X_3, X_4] = -2X_2$ , temos que essa subálgebra tem como subálgebra  $\mathfrak{L}^{(2)} = \text{span}(X_1, X_2)$ . Entretanto, a subálgebra  $\mathfrak{L}^{(2)}$  é abeliana ( $[X_1, X_2] = 0$ ), portanto, admite como subálgebra apenas  $\mathfrak{L}^{(3)} = \{0\}$ . Assim, temos

$$\{0\} = \mathfrak{L}^{(0)} \subset \mathfrak{L}^{(2)} \subset \mathfrak{L}^{(1)} \subset \mathfrak{L}.$$

Logo, a partir do que estudamos, concluímos que a álgebra  $\mathfrak{L}$  é solúvel.

## 2.4 Aspectos Elementares da Teoria de Espaços de Jatos

No próximo capítulo, estabeleceremos como os grupos de Lie e seus geradores infinitesimais (campos vetoriais) descrevem transformações contínuas nas variáveis independentes e dependentes  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  de um sistema. Contudo, o objeto central de nosso estudo — uma equação diferencial — não depende apenas de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$ , mas fundamentalmente de suas derivadas ( $u_x, u_{xx}$ , etc.). Surge, então, a questão crucial: se transformamos as variáveis base, como as derivadas se transformam em consequência? A regra da cadeia mostra que

a transformação de uma derivada é uma função complexa e não linear das transformações originais e das próprias derivadas.

Para lidar com este desafio de forma sistemática, é necessário um novo arcabouço geométrico. A solução reside no conceito de **espaços de jatos**. A ideia fundamental é tratar as derivadas de uma função, até uma certa ordem  $n$ , não como operadores, mas como novas coordenadas independentes. Um ponto no  $n$ -ésimo espaço de jatos,  $J^n$ , é, portanto, uma tupla  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ , que contém informações sobre o valor da função e de todas as suas derivadas até a ordem  $n$  em um ponto  $\mathbf{x}$ .

Este formalismo é a chave para todo o método: a **prolongação** de um grupo de simetria nada mais é do que a extensão da ação do grupo de transformações do espaço original  $X \times U$  para o espaço de jatos  $J^n$ . É nesta arena matemática que podemos calcular rigorosamente como os geradores de simetria atuam sobre as derivadas e, assim, impor a condição de invariância a uma equação diferencial completa. O que se segue é a formalização desta poderosa ideia. Apontaremos apenas elementos fundamentais que servirão para os nossos propósitos ao longo da dissertação, mas, para o leitor interessado, tal teoria é discutida com mais rigor em [13], [14] e [15].

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, com  $X$  denotando o espaço das  $p$  variáveis independentes, com coordenadas  $x = (x^1, \dots, x^p)$ . Denotaremos uma derivada de  $f(x)$  por

$$D_J f(x) = \frac{\partial^{|J|} f(x^1, \dots, x^p)}{\partial (x^1)^{j_1} \dots \partial (x^p)^{j_p}},$$

onde  $J = (j_1, \dots, j_p)$  e  $|J| = j_1 + \dots + j_p$ .

Devido ao fato de que a ordem de derivação é irrelevante, um raciocínio de análise combinatória nos permite concluir que há

$$p_k = \binom{p+k-1}{k}$$

derivadas parciais diferentes de ordem  $k$ . Para o caso  $f = (f^1, \dots, f^q)$ ,  $q$  variáveis dependentes, temos as derivadas parciais  $D_J f^\alpha(x)$ , e o número de derivadas parciais de ordem  $k$  é

$$qp_k = q \binom{p+k-1}{k}.$$

Denotaremos por  $U_k$  o espaço  $\mathbb{R}^{qp_k}$ , com coordenadas  $\{u_j^\alpha\}$  representando essas derivadas parciais. Além disso, seja  $U^{(n)}$  o espaço com coordenadas representando todas as derivadas parciais até ordem  $n$  da função  $f(x)$ , com a própria função sendo entendida como a derivada de ordem zero. Portanto,  $U^{(n)}$  será

$$U^{(n)} = U \times U_1 \times \dots \times U_n,$$

e tomamos  $\mathbf{u}^{(n)}$  como determinando coletivamente todas as coordenadas desse espaço.

A dimensão de  $U^{(n)}$  é dada por

$$\begin{aligned} \dim U^{(n)} &= \dim U + \dim U_1 + \cdots + \dim U_n = qp_0 + qp_1 + \cdots + qp_n = \\ &= \sum_{k=0}^n q \binom{p+k-1}{k} = q \binom{p+n}{n} = qp^{(n)}, \end{aligned}$$

onde foi usado o resultado <sup>3</sup>

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k-1}{k} = \binom{p+n}{n}.$$

Neste ponto, definiremos o **n-ésimo espaço de jatos**, também chamado de espaço de n-jatos, por

$$J^n(X \times U) = X \times U^{(n)} = X \times U \times U_1 \times \cdots \times U_n,$$

e denotaremos as coordenadas de um ponto nesse espaço por  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ .

Normalmente, o interesse não está em todo o espaço  $X \times U$ , mas em apenas um subconjunto  $M \subset X \times U$ . Neste caso, definimos o espaço de n-jatos  $M^{(n)}$  por

$$M^{(n)} = M \times U_1 \times \cdots \times U_n.$$

### Exemplo 2.16: Equação de Laplace

Consideremos a equação de Laplace tridimensional

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Para este caso,  $p = 3$ ,  $q = 1$  e  $n = 2$ , tal que o espaço de jatos relevante é o espaço  $J^2$ , com coordenadas  $(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, u_{yy}, u_{yz}, u_{zz})$ . Portanto, vemos que a equação de Laplace vive em um espaço de 13 dimensões. Se denotarmos as coordenadas coletivamente por  $v^s$ , com  $s = 1, \dots, 13$ , podemos reescrever a equação de Laplace por

$$v^8 + v^{11} + v^{13} = 0.$$

Dessa forma, temos que a equação de Laplace define um subespaço  $S_\Delta \subset X \times U^{(2)}$ , com 12 dimensões, tal que  $v^8 + v^{11} + v^{13} = 0$ .

<sup>3</sup> Extraído a partir da identidade de Hockey-Stick [16].

## 2.5 Método das Características

A análise de simetria, como veremos, frequentemente nos levará a equações diferenciais parciais para os geradores infinitesimais. Uma técnica clássica e poderosa para a resolução de tais equações é o **Método das Características**, que reduz uma EDP a um sistema de EDOs ao longo de curvas específicas. Revisaremos este método, pois ele será fundamental para resolver as 'equações determinantes' que surgem na busca pelas simetrias de Lie.

O método das características é uma técnica que permite a obtenção de soluções de equações diferenciais parciais (PDE) lineares, semilineares ou quasilineares <sup>4</sup>. O método envolve a determinação de curvas especiais, chamadas curvas características, ao longo das quais a PDE se torna um conjunto de equações diferenciais ordinárias (ODE) [18, 19]. Uma vez que essas ODEs são resolvidas ao longo das curvas características, suas soluções podem ser usadas na obtenção das soluções da PDE original.

Para fins ilustrativos, consideremos a PDE quasilinear de primeira ordem

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial t} = c(x, y, u). \quad (2.4)$$

Assumiremos aqui que  $a, b$  e  $c$  são funções pelo menos  $C^1$  (diferenciáveis ao menos uma vez, e sua derivada é contínua no domínio da função). Além disso, assumiremos que  $u = u(x, y)$  é solução da equação, cujo gráfico é uma curva solução  $\mathbf{S}$  embebida em  $\mathbb{R}^3$ . Obviamente, essa curva solução pode ser expressa implicitamente por uma função da forma  $f(x, y, u) = 0$ .

Dos nossos conhecimentos do cálculo vetorial, sabemos que o vetor normal a  $\mathbf{S}$  é dado por  $\nabla f = 0$ . Notando que podemos escrever  $f(x, y, u) = u(x, y) - u$ , temos que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial u} \hat{k} = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial u}{\partial u} \hat{k} = (u_x, u_y, -1).$$

Esse é o vetor normal a qualquer ponto da curva solução  $\mathbf{S}$ .

Introduzamos agora um campo vetorial por  $\vec{V} = a(x, y, u)\hat{i} + b(x, y, u)\hat{j} + c(x, y, u)\hat{k}$ . Tomando o produto escalar de um vetor pertencente a esse campo com o vetor normal  $\nabla f$ ,

$$\vec{V} \cdot \nabla f = (a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y - c(x, y, u) = 0,$$

que é justamente a equação 2.4. Da expressão anterior, notamos que  $\vec{V}$  e  $\nabla f$  são ortogonais. Além disso, dado que  $\nabla f$  é ortonormal à superfície  $\mathbf{S}$ , temos que  $\vec{V}$  é tangente a  $\mathbf{S}$  em cada ponto. Para superfícies tangentes a campos vetoriais, damos o nome de **superfícies integrais do campo vetorial**. A direção definida por  $\vec{V}$  recebe o nome de **direção característica**.

<sup>4</sup> Sobre a classificação de equações diferenciais, o leitor pode consultar [17].

Seja  $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$  o elemento de comprimento ao longo de  $\vec{A}$  na superfície solução. Assim, dado que  $\vec{V}$  é tangente a  $\mathbf{S}$ , temos que

$$\vec{A} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ dx & dy & du \end{vmatrix} = 0,$$

ou,

$$(bdu - cdy)\hat{i} - (adu - cdx)\hat{j} + (ady - bdx)\hat{k} = 0.$$

De modo que a igualdade seja satisfeita, cada termo na expressão anterior deve ser igual a zero. Como consequência,

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}, \quad (2.5)$$

que são conhecidas como **equações de Lagrange-Charpit**. Daí,

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{a} \quad e \quad \frac{du}{dy} = \frac{c}{b},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a(x, y, u)}{b(x, y, u)},$$

que define uma família de curvas (dependentes de  $u$ ) sobre a superfície  $\mathbf{S}$  no espaço  $(x, y, u)$ . O matemático A. L. Cauchy as nomeou **curvas características**, e o conjunto de equações acima são as **equações características da PDE quasilinear**.

A solução do sistema de ODEs acima leva a uma família de curvas de dois parâmetros dada por

$$F(x, y, u, A, B) = 0, \quad G(x, y, u, A, B) = 0,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de integração. Em cada ponto do espaço há uma única curva característica e um vetor tangente. Por sua vez, toda superfície composta por curvas características será solução da PDE original. Tal superfície pode ser obtida analiticamente expressando uma das constantes de integração em termos da outra, na forma  $B = f(A)$ . O próximo exemplo ilustra o que discutimos.

### Exemplo 2.17

Seja a PDE

$$2y \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 2uy^2,$$

onde

$$a = 2y, \quad b = u, \quad e \quad c = 2yu^2.$$

As equações de Lagrange-Charpit são

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{2yu^2}.$$

Da segunda igualdade,

$$\frac{du}{u} = 2ydy \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2ydy + A \Rightarrow \ln u = y^2 + \ln B,$$

com  $A = \ln B$  constante. Essa equação pode ser reescrita como,

$$u = Be^{y^2}.$$

Substituamos a função de  $u$  acima na primeira igualdade das equações de Lagrange-Charpit. Dessa forma, teremos

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{Be^{y^2}} \Rightarrow \int Bdx = \int ye^{-y^2} dy \Rightarrow Bx = -e^{-y^2} + C.$$

Assim,

$$Bx + e^{-y^2} = C, \quad u = Be^{y^2}$$

formam uma família de curvas com dois parâmetros. Ao expressarmos  $B$  em função de  $C$ , seremos capazes de definir uma família de curvas características uniparamétricas, que é uma curva solução. Portanto,

$$C = Bx + e^{-y^2} = (ue^{-y^2})x + e^{-y^2} = (ux + 1)e^{-y^2}.$$

Assim,

$$B = f(C) \Rightarrow u(x, y) = e^{-y^2} f((ux + 1)e^{-y^2}),$$

onde  $f$  é uma função arbitrária.

Em muitos problemas, é conveniente expressar as curvas em uma forma paramétrica. Se assim o fizermos em termos de um parâmetro  $s$ , isto é,  $x(s)$ ,  $y(s)$ , e  $u(s)$ , as equações de Lagrange-Charpit assumem a forma

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} = \frac{ds}{1}.$$

E,

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c.$$

Contudo, todo o resto da análise permanece o mesmo.

## 3 Prolongações I: Simetrias de Ponto de Lie

Tendo apresentado as ferramentas matemáticas que utilizaremos ao longo do nosso estudo, o presente capítulo será devotado à construção do método das prolongações para equações diferenciais. Começaremos apresentando noções fundamentais, a partir daí construiremos o método para o caso mais simples, o de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e então procederemos para a generalização para quaisquer equações diferenciais.

### 3.1 Aspectos Históricos

Embora tenham fascinado gerações de pensadores, dos antigos gregos a Kepler, um avanço substancial acerca de simetrias ocorreu apenas no século dezanove, quando o matemático norueguês Sophus Lie começou suas investigações a respeito dos grupos de transformações contínuas que mantêm equações diferenciais invariantes, naquilo que é conhecido atualmente como **análise de simetria de equações diferenciais**.

A teoria da análise de simetria de equações diferenciais foi desenvolvida entre os anos de 1872 e 1899. Essa construção permite a derivação de soluções de forma totalmente algorítmica, dispensando a necessidade de golpes de sorte. Sobre o principal problema que ele enfrentou com sua teoria, Lie escreveu:

*A forma antiga de examinação de equações diferenciais, como encontrado em livros-texto padrão, não é sistemática. Os escritores desenvolveram teorias de integração especiais para equações diferenciais homogêneas, para equações diferenciais lineares, e outras formas especiais integráveis de equações diferenciais. Entretanto, os matemáticos não perceberam que essas teorias especiais estão todas contidas no termo transformações infinitesimais, que é diretamente conectado com o termo de um grupo uniparamétrico.*

Apesar dessa característica, a abordagem de Lie para equações diferenciais não foi explorada por meio século, e apenas a teoria abstrata dos grupos cresceu. Foi nos anos de 1940, através das pesquisas de G. Birkhoff e I. Sedov no campo da análise dimensional, que a teoria forneceu resultados relevantes em problemas aplicados. Porém, desde os anos 1960, a escola russa tomou a primazia da aplicação do método, especialmente por meio de L. V. Ovsianikov, construindo explicitamente soluções para todo tipo de problema, mesmo os mais complicados, em física matemática. Ao longo das últimas décadas, o interesse pela teoria de Lie renasceu, e avanços significativos têm ocorrido, tanto do ponto de vista teórico quanto do aplicado [20].

## 3.2 Transformações Uniparamétricas Infinitesimais

Na subsecção 2.3.1 definimos grupos de transformações uniparamétricas. Tomemos como ponto de partida a transformação  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \epsilon)$ . Fazendo uma expansão em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$ , elemento identidade, temos que

$$\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; 0) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \epsilon^2 + \dots \quad (3.1)$$

Definamos

$$\xi(\mathbf{x}) \equiv \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}.$$

Dizemos que a transformação  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; 0) + \epsilon \xi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \epsilon \xi(\mathbf{x})$  é uma **transformação uniparamétrica infinitesimal** de  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \epsilon)$ . Aos elementos  $\xi(\mathbf{x})$  daremos o nome de **infinitesimais** dessa transformação.

Antes de seguirmos adiante, estabeleçamos alguns resultados adicionais, almejando uma base sólida para nossa construção.

### Lema 3.1

Seja o grupo de transformações uniparamétricas  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \epsilon)$ . Para tal grupo, vale a transformação

$$f(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = f(f(\mathbf{x}; \epsilon); \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)). \quad (3.2)$$

### Prova 3.1

A prova do lema consiste simplesmente em desenvolver a expressão acima. Fazendo isso, temos que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) &= f(\mathbf{x}; \phi(0, \epsilon + \Delta\epsilon)) = f(\mathbf{x}; \phi(\phi(\epsilon, \epsilon^{-1}), \epsilon + \Delta\epsilon)) = \\ &= f(\mathbf{x}; \phi(\epsilon, \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon))) = f(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = f(f(\mathbf{x}; \epsilon); \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)). \end{aligned}$$

□

### Teorema 3.1: Primeiro Teorema Fundamental de Lie

Para o grupo de Lie de transformações uniparamétricas  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \epsilon)$ , existe uma parametrização  $\tau(\epsilon)$  que torna esse grupo equivalente à solução do problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais ordinárias (ODEs) da forma

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tau} = \xi(\tilde{\mathbf{x}}),$$

onde  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  quando  $\tau = 0$ . Além disso,

$$\Gamma(\epsilon) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|_{(x_1, x_2) = (\epsilon^{-1}, \epsilon)},$$

com  $\Gamma(0) = 1$  e  $\epsilon^{-1}$  sendo a inversa de  $\epsilon$ .

### Prova 3.2

Primeiramente, expandamos o lado direito de 3.2 em torno de  $\Delta\epsilon = 0$ ,

$$f(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) = f(\mathbf{x}; \epsilon) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\Delta\epsilon=0} \Delta\epsilon + \mathcal{O}(\Delta\epsilon^2) = \tilde{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\Delta\epsilon=0} \Delta\epsilon + \mathcal{O}(\Delta\epsilon^2). \quad (3.3)$$

Além disso, expandamos também  $\phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)$  em torno do mesmo ponto,

$$\phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon) = \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon) + \left. \frac{\partial \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\Delta\epsilon=0} \Delta\epsilon + \mathcal{O}(\Delta\epsilon^2) = \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + \mathcal{O}(\Delta\epsilon^2).$$

Substituindo esse resultado em 3.2 e expandindo mais uma vez em torno de  $\Delta\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}; \epsilon + \Delta\epsilon) &= f(\tilde{\mathbf{x}}; \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)) = f(\tilde{\mathbf{x}}; \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon + \mathcal{O}(\Delta\epsilon^2)) = \\ &= f(\tilde{\mathbf{x}}, 0) + \left. \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}; \delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \delta + \mathcal{O}(\delta^2) = \tilde{\mathbf{x}} + \Gamma(\epsilon)\xi(\tilde{\mathbf{x}})\Delta\epsilon + \mathcal{O}(\delta^2), \end{aligned}$$

com  $\delta = \Gamma(\epsilon)\Delta\epsilon$ . Finalmente, comparando a expressão acima com 3.3,

$$\frac{df(\mathbf{x}; \epsilon)}{d\epsilon} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\epsilon} = \Gamma(\epsilon)\xi(\tilde{\mathbf{x}}),$$

com  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  para  $\epsilon = 0$ . Da expansão 3.2, podemos concluir que  $\Gamma(0) = 1$ .

Dado que  $\partial\xi(\tilde{\mathbf{x}})/\partial x_i$  é contínuo para  $i = 1, 2, \dots, n$ , o teorema de existência e unicidade garante que a solução da equação diferencial acima existe e é única [21]. Essa solução precisa ser  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \epsilon)$ .  $\square$

O que o teorema acima nos diz é que a transformação infinitesimal contém informação essencial a respeito do grupo de Lie de transformações uniparamétricas original. Além disso, o teorema fundamental de Lie mostra que um grupo de Lie de transformações uniparamétricas define um fluxo estacionário dado pela ODE, e que qualquer fluxo estacionário define um grupo de Lie de transformações uniparamétricas [22].

### Exemplo 3.1: Grupo de Translações no Plano

Para ilustrarmos o primeiro teorema de Lie, voltemos ao grupo de translações no

plano definido por

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \epsilon, \\ \tilde{y} = y. \end{cases}$$

Para esse grupo, a lei de composição é  $\phi = x_1 + x_2$  e  $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ . Portanto,  $\Gamma(\epsilon) = \partial\phi(x_1, x_2)/\partial x_2 = 1$ .

Tomemos  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Portanto,  $f(\mathbf{x}, \epsilon) = (x + \epsilon, y)$ . Daí,

$$\xi(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = (1, 0).$$

Consequentemente, temos

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\epsilon} = 1, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{d\epsilon} = 0,$$

com  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$  para  $\epsilon = 0$ . A solução desse problema forma justamente o conjunto de translações no plano com o qual começamos.

### Exemplo 3.2: Grupos de Rotações no Plano

Rotações no plano são caracterizadas por

$$\tilde{x} = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad \tilde{y} = x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Então,

$$\begin{aligned} \xi^1(x, y) &= \left. \frac{\partial(x \cos \theta - y \sin \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = -y; \\ \xi^2(x, y) &= \left. \frac{\partial(x \sin \theta + y \cos \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = x. \end{aligned}$$

## 3.3 O Gerador de Transformações

Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, e definamos  $d\phi(\mathbf{x}) = \phi(\tilde{\mathbf{x}}) - \phi(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  e  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + d\mathbf{x}$ . Fazendo uma expansão em séries de Taylor e retendo apenas termos até a primeira ordem, obtemos que

$$d\phi(\mathbf{x}) = \left( \phi(\mathbf{x}) + \frac{\partial\phi}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial\phi}{\partial x^n} dx^n \right) - \phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \xi^i(x) dt,$$

onde foi usado que  $dx^i = \xi^i(x) dt$ . Assim,

$$d\phi(x) = \mathbf{X}(\phi(x))|_x dt, \tag{3.4}$$

onde definimos a quantidade

$$\mathbf{X}(\phi) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \xi^i(x). \tag{3.5}$$

Analisando a equação 3.4, vemos que  $\mathbf{X}(\phi)$  define completamente como a função  $\phi(x)$  varia perante a aplicação de elementos do grupo de transformações uniparamétricas infinitesimais. Portanto, a ação do grupo será completamente definida pelo objeto

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla, \quad (3.6)$$

e o chamaremos, doravante, de **gerador** do grupo de transformações uniparamétricas infinitesimais, como ficará claro a seguir. Antes, contudo, resumizemos essa discussão por meio da seguinte definição:

### Definição 3.1: Gerador de Transformações Uniparamétricas

Seja a transformação uniparamétrica infinitesimal  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \epsilon)$ . O gerador associado a essa transformação é dado pela equação 3.6.

Assim, concluímos que o grupo de Lie de transformações uniparamétricas é determinado pelos seus geradores infinitesimais, além das transformações infinitesimais, como estabelecido pelo primeiro teorema fundamental de Lie.

### Exemplo 3.3: Translações, Rotações e Escala no Plano

Do exemplo 3.1,  $\xi^1 = 1$  e  $\xi^2 = 0$ . Portanto, a equação 3.6 nos diz que o gerador desse grupo de transformações é  $\mathbf{X} = \partial_x$ . Analogamente, para translações na direção  $y$ ,  $\mathbf{X} = \partial_y$ . Por conseguinte, para translações gerais no plano,  $\mathbf{X} = \alpha \partial_x + \beta \partial_y$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes.

Para o caso do grupo de rotações no plano, explorado no exemplo 3.2, a expressão 3.6 indica que o gerador é dado por  $\mathbf{X} = y \partial_x - x \partial_y$ . Por sua vez, para uma transformação de escala da forma  $f(x, y; \epsilon) = (\epsilon^{-1}x, \epsilon^2y)$ , o gerador é  $\mathbf{X} = -x \partial_x + 2y \partial_y$ .

Para darmos um importante passo adiante, seja  $\phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \phi(f(\mathbf{x}; a))$ . Façamos uma expansão em séries de Taylor em relação ao parâmetro  $a$ . Teremos que

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{\mathbf{x}}) &= \phi(f(\mathbf{x}; 0)) + \left. \frac{\partial \phi(f(\mathbf{x}; a))}{\partial a} \right|_{a=0} a + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi(f(\mathbf{x}; a))}{\partial a^2} \right|_{a=0} a^2 + \dots = \\ &= \phi(f(\mathbf{x}; 0)) + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial f^i(\mathbf{x}; a)}{\partial a} \right) \Big|_{a=0} a + \frac{1}{2!} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial f^i(\mathbf{x}; a)}{\partial a} \right) \frac{\partial f^j(\mathbf{x}; a)}{\partial a} \right) \Big|_{a=0} a^2 + \dots \\ &= \phi(\mathbf{x}) + a \sum_{i=1}^n \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{1}{2!} a^2 \sum_{i=1}^n \xi^j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) + \dots = \\ &= \phi(\mathbf{x}) + a \mathbf{X}(\phi) \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2!} a^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}(\phi)) \Big|_{\mathbf{x}} + \dots \end{aligned}$$

Lembrando da discussão a respeito da aplicação exponencial feita na subseção 2.3.2.1, sabemos que

$$e^{a\mathbf{X}} = \exp(a\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \mathbf{X}^n. \quad (3.7)$$

Agora, entendendo  $\mathbf{X}^k(\phi) = \mathbf{X}(\mathbf{X}(\cdots(\mathbf{X}(\phi))\cdots))$ , concluímos que

$$\phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \exp(a\mathbf{X})\phi(\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

ou, quando  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ,

$$\tilde{x} = \exp(a\mathbf{X})x.$$

Portanto, em vista dos resultados anteriores, constatamos que a exponencial do gerador infinitesimal  $\mathbf{X}$  define a forma finita da transformação uniparamétrica, e isso justifica a denominação dada a esse objeto. Contemplemos, então, esse resultado fundamental por meio do próximo teorema.

### Teorema 3.2

Seja o grupo de Lie de transformações uniparamétricas dado por  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ . Esse grupo de transformações é equivalente a

$$\tilde{\mathbf{x}} = \exp(a\mathbf{X})\mathbf{x} = \mathbf{x} + a\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!}a^2\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) + \cdots,$$

onde o operador  $\mathbf{X}$  é definido pela equação 3.6.

### Exemplo 3.4: Rotações no Plano

Retornemos ao grupo de transformações de rotação no plano. Aqui, partiremos do gerador do grupo de rotações para obter as expressões utilizando a aplicação exponencial.

Como sabemos, o gerador de transformações para rotações no plano é dado por  $\mathbf{X} = -y\partial_x + x\partial_y$ . Sabemos também que  $\tilde{x} = \exp(a\mathbf{X})x$  e  $\tilde{y} = \exp(a\mathbf{X})y$ .

Para calcularmos a aplicação exponencial, é conveniente fazermos uso da equação 3.7. No caso da transformação em  $x$ , temos que

$$\mathbf{X}(x) = -y, \quad \mathbf{X}^2(x) = -x, \quad \mathbf{X}^3(x) = y, \quad \mathbf{X}^4(x) = x, \quad \cdots, \quad \mathbf{X}^{i+4}(x) = \mathbf{X}^i(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \exp(a\mathbf{X})x = x - ay - \frac{a^2}{2!}x + \frac{a^3}{3!}y + \frac{a^4}{4!}x + \cdots = \\ &= x \left( 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \cdots \right) - y \left( a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \cdots \right) = \end{aligned}$$

$$= x \sum_{i=0}^n (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} - y \sum_{i=0}^n (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \cos a - y \sin a.$$

Por sua vez, para a transformação em  $y$ ,

$$\mathbf{X}(y) = x, \quad \mathbf{X}^2(y) = -y, \quad \mathbf{X}^3(y) = -x, \quad \mathbf{X}^4(y) = y, \quad \dots, \quad \mathbf{X}^{i+4}(y) = \mathbf{X}^i(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \exp(a\mathbf{X})y = y + ax - \frac{a^2}{2!}y - \frac{a^3}{3!}x + \frac{a^4}{4!}y + \dots = \\ &= y \left( 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \dots \right) + x \left( a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= y \sum_{i=0}^n (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} + x \sum_{i=0}^n (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} = y \cos a + x \sin a. \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos justamente as expressões para a rotação de um ponto no plano  $(x, y)$  por um ângulo  $a$ .

Consideremos agora um outro sistema de coordenadas  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ , onde  $y^i = y^i(x) = y^i(x^1, \dots, x^n)$  e  $\det \partial y^j / \partial x^i \neq 0$ . Então,

$$\mathbf{X}(y^j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}(x^i) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}. \quad (3.9)$$

Agora, para uma função  $\phi(y(x))$ ,

$$\mathbf{X}(\phi(y(x))) = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}(x^j) \frac{\partial \phi(y(x))}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{X}(x^j) \frac{\partial \phi(y(x))}{\partial y^i} \Big|_{y=y(x)} \frac{\partial y^i}{\partial x^j},$$

que, fazendo uso da expressão 3.9, pode ser reescrita como

$$\mathbf{X}(\phi(y(x))) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}(y^i) \Big|_{y=y(x)} \frac{\partial \phi}{\partial y^i} \Big|_{y=y(x)},$$

ou,

$$\mathbf{X}(\phi(y)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}(y^i) \frac{\partial \phi}{\partial y^i}.$$

Portanto,

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.10)$$

Se compararmos as expressões 3.6 e 3.10, vemos que elas são idênticas, a menos do sistema de coordenadas utilizado. Para que a questão fique mais clara, escrevamos  $\mathbf{X}(x^i) = \xi^i$  e  $\mathbf{X}(y^j) = \eta^j$  na equação 3.9. Teremos, então,

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Mas essa é apenas a expressão de transformação para as componentes de um vetor de um sistema de coordenadas para outro. Portanto, somos levados a interpretar o gerador  $\mathbf{X}$  como um **campo vetorial**. As equações 3.6 e 3.10 apenas expressam esse campo vetorial em termos das coordenadas  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente.

Como sabemos do capítulo anterior, um campo vetorial é um objeto que associa a um ponto qualquer em uma variedade um vetor no espaço tangente àquele mesmo ponto. Dessa forma, podemos definir o vetor tangente ao ponto  $\mathbf{x}$  da variedade como  $\mathbf{X}|_{\mathbf{x}}$ . Seguindo esse caminho, somos levados a concluir que uma base no espaço tangente ao ponto considerado é dada por  $\partial_{x^i}|_{\mathbf{x}}$ .

Em vista da interpretação delineada nos parágrafos anteriores, podemos definir um campo vetorial como uma derivação que age no espaço de funções de uma variedade, onde entendemos por derivação uma operação linear que satisfaça a regra de Leibniz, em conformidade com as definições 2.16 e 2.19. Enfim, o gerador de uma transformação infinitesimal é um campo vetorial.

### Exemplo 3.5: Gerador de Rotações em Coordenadas Polares

As coordenadas polares são dadas por  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Então,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Por sua vez, gerador de rotações em coordenadas polares será

$$\mathbf{X} = -(r \sin \theta) \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + -(r \cos \theta) \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

## 3.4 Funções Invariantes

Funções invariantes sob um grupo de Lie de transformações uniparamétricas são definidas da seguinte forma:

### Definição 3.2: Funções Invariantes

Seja a função  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que essa função é **invariante** pela transformação  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; a)$  se  $\phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \phi(\mathbf{x})$ .

Lembrando da relação entre  $\phi(\mathbf{x})$  e  $\phi(\tilde{\mathbf{x}})$  dada pela equação 3.8, vemos que  $\phi$  é

uma função invariante por essa transformação se

$$\mathbf{X}(\phi) = 0.$$

Esse fato ajuda a estabelecer o seguinte teorema:

### Teorema 3.3

A função  $\phi(\mathbf{x})$  é invariante por um grupo de Lie de transformações uniparamétricas  $\tilde{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ , se e somente se

$$\mathbf{X}(\phi) = 0.$$

### Prova 3.3

Parte da prova já foi dada no parágrafo anterior. Por outro lado, se  $\mathbf{X}(\phi(\mathbf{x})) = 0$  é satisfeita para  $\phi(\mathbf{x})$ , então também o será  $\mathbf{X}^n(\phi(\mathbf{x})) = 0, \forall n$ , e a aplicação exponencial resultará em  $\phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \phi(\mathbf{x})$ , o que completa a prova do teorema.  $\square$

## 3.5 Prolongações de uma Transformação

Com as discussões apresentadas nas seções anteriores, estamos em condições de iniciar o estudo da aplicação de transformações de simetria a equações diferenciais. Visando a esse fim, iniciemos tratando das transformações de ponto.

### Definição 3.3: Grupo de Transformações de Ponto

Um grupo de Lie uniparamétrico de transformações de ponto é um grupo de transformações da forma

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \epsilon); \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \epsilon),$$

atuando no espaço das  $p$  variáveis independentes,  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$ , e  $q$  variáveis dependentes,  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^q)$ , cuja dimensão é  $p + q$ .

Se quisermos estender a análise para equações diferenciais, devemos entender como uma dada transformação de ponto atua sobre as derivadas e, para tal, devemos considerar as derivadas como coordenadas, o que nos conecta com a teoria dos espaços de jets, discutida na seção 2.4. Restringiremos nossa discussão a EDOs de primeira ordem, isto é, equações da forma  $\phi(x, y, y')$ , com  $y' = dy/dx$ .

Seja  $\tilde{x} = f(x, y; a)$  e  $\tilde{y} = g(x, y; a)$ . Definindo  $\tilde{y}' = d\tilde{y}/d\tilde{x}$ , temos que

$$\tilde{y}' = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy}{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy} = \frac{g_x dx + g_y dy}{f_x dx + f_y dy} = \frac{g_x + g_y \frac{dy}{dx}}{f_x + f_y \frac{dy}{dx}} = \frac{g_x + g_y y'}{f_x + f_y y'},$$

que define a ação do grupo de transformações de ponto uniparamétricas sobre a derivada  $y' = dy/dx$ .

Para encontrar a forma da transformação infinitesimal da derivada  $\tilde{y}'$ , partimos de sua definição e das transformações infinitesimais para  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ :

$$\tilde{x} = x + a\xi(x, y) + \mathcal{O}(a^2) \quad , \quad \tilde{y} = y + a\eta(x, y) + \mathcal{O}(a^2).$$

Usando a regra da cadeia e mantendo os termos até a primeira ordem em  $a$ , temos as diferenciais

$$\begin{aligned} d\tilde{y} &= d(y + a\eta) = dy + a d\eta = dy + a(\eta_x dx + \eta_y dy) \\ d\tilde{x} &= d(x + a\xi) = dx + a d\xi = dx + a(\xi_x dx + \xi_y dy). \end{aligned}$$

Montando  $\tilde{y}' = d\tilde{y}/d\tilde{x}$  e fatorando  $dx$  no numerador e no denominador, de forma a obter  $y' = dy/dx$ :

$$\tilde{y}' = \frac{dy + a(\eta_x dx + \eta_y dy)}{dx + a(\xi_x dx + \xi_y dy)} = \frac{y' + a(\eta_x + \eta_y y')}{1 + a(\xi_x + \xi_y y')}.$$

Considerando  $a$  infinitesimal, podemos utilizar a aproximação  $(1 + z)^{-1} \approx 1 - z$ . Assim:

$$\tilde{y}' \approx [y' + a(\eta_x + \eta_y y')] \cdot [1 - a(\xi_x + \xi_y y')]$$

Efetuando a multiplicação e retendo os termos até a primeira ordem em  $a$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &\approx y' - ay'(\xi_x + \xi_y y') + a(\eta_x + \eta_y y') + \mathcal{O}(a^2) \\ &= y' + a[(\eta_x + \eta_y y') - y'(\xi_x + \xi_y y')] + \mathcal{O}(a^2) \\ &= y' + a[\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2] + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned}$$

Com isso, identificamos o coeficiente de  $a$  como o infinitesimal  $\zeta(x, y, y')$ . Portanto,

$$\tilde{y}' = y' + \zeta a + \mathcal{O}(a^2).$$

Considerando uma variação infinitesimal, com  $a = dt$ , podemos escrever

$$dy' = \tilde{y}' - y' = \zeta(x, y, y')dt.$$

Dada uma função  $\phi(x, y, y')$ ,

$$d\phi(x, y, y') = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial y'}dy' = \frac{\partial\phi}{\partial x}(\xi dt) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(\eta dt) + \frac{\partial\phi}{\partial y'}(\zeta dt) = \text{pr } \mathbf{X}(\phi)|_{(x,y,y')} dt,$$

onde definimos a **prolongação** do gerador  $\mathbf{X}$  por

$$\boxed{\text{pr } \mathbf{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'}} \quad (3.11)$$

Em termos simples, nossos resultados nos dizem que a extensão das transformações de ponto às derivadas das variáveis dependentes em relação às variáveis independentes conduz à prolongação do grupo de Lie uniparamétrico que age no espaço  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  para o grupo de Lie uniparamétrico que atua no espaço de jatos  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots)$ . Apesar do caso particular a partir do qual chegamos a essa conclusão, teremos a oportunidade de atestar que não há perda de generalidade.

### Exemplo 3.6: Rotações no plano

Vamos explorar novamente o caso das rotações no plano. Como sabemos,  $\xi = -y$  e  $\eta = x$ . Logo, pela definição de  $\zeta$ ,

$$\zeta = \frac{\partial x}{\partial x} + \left( \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} \right) y' + \frac{\partial y}{\partial y} y'^2 = 1 + y'^2,$$

e, portanto,

$$\text{pr } \mathbf{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + y'^2) \frac{\partial}{\partial y'}.$$

### 3.5.1 Invariância e Integração de uma EDO de Primeira Ordem

Em analogia à definição 3.2 a respeito de funções invariantes, podemos dizer que uma EDO  $\phi(x, y, y')$  será invariante por um grupo de Lie uniparamétrico de transformações de ponto se for mapeada em  $\phi(\tilde{x}, \mathbf{y}, \tilde{y}')$ . Em outros termos, o grupo de Lie em questão é chamado **grupo de simetria** da EDO se mapear soluções em soluções da mesma. Lembrando que um grupo de transformações uniparamétricas é caracterizado pelos seus geradores, e que sua aplicação a equações diferenciais prolonga sua ação para um espaço de jatos, somos levados à seguinte definição:

### Definição 3.4: Simetrias de uma Equação Diferencial Ordinária

Um grupo de Lie de transformações de ponto uniparamétricas é dito grupo de simetria da equação diferencial  $\phi(x, y, y')$  se mapeia soluções em soluções dessa equação. Em outros termos,  $\mathbf{X}$  é gerador de uma transformação de simetria da equação se

$$\text{pr } \mathbf{X}(\phi) = 0, \quad (3.12)$$

com  $\text{pr } \mathbf{X}$  sendo a prolongação de tal gerador ao espaço de jatos  $(x, y, y')$ .

### Exemplo 3.7

Consideremos a ODE  $\phi(x, y, y') = (2x - y) + (2y + x)y' = 0$ . Pelo resultado obtido

no exemplo 3.6,

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{X}(\phi) &= -y \frac{\partial \phi}{\partial x} + x \frac{\partial \phi}{\partial y} + (1 + y'^2) \frac{\partial \phi}{\partial y'} = \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x}((2x - y) + (2y + x)y') + x \frac{\partial}{\partial y}((2x - y) + (2y + x)y') + \\ &+ (1 + y'^2) \frac{\partial}{\partial y'}((2x - y) + (2y + x)y') = -2y - yy' - x + 2xy' + (1 + y'^2)(2y + x) = \\ &= -2y - yy' - x + 2xy' + 2y + x + (2y + x)y'^2 = ((2x - y) + (2y + x)y')y' = 0. \end{aligned}$$

Portanto, em conformidade com a definição 3.4, concluímos que a equação diferencial  $\phi(x, y, y') = (2x - y) + (2y + x)y' = 0$  é invariante perante a ação do grupo de rotações no plano.

Se quisermos encontrar as soluções da EDO, devemos resolver a EDP

$$\text{pr } \mathbf{X}(\phi) = \xi(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \zeta(x, y, y') \frac{\partial \phi}{\partial y'}. \quad (3.13)$$

Contudo, atentando para a discussão acerca do método das características feita na seção 2.5, sabemos que resolver tal EDP é equivalente a resolver o sistema de EDOs

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\zeta},$$

que doravante denominaremos **sistema característico** da EDP 3.13. Isso nos permite encontrar a forma mais geral possível de uma função que é invariante sob um grupo de transformação.

Investiguemos um pouco mais a fundo. Como a primeira igualdade não depende de  $y'$ , ela pode ser integrada, de modo que o resultado é

$$u(x, y) = c_1 = \text{constante},$$

que permite escrever  $y$  em termos de  $x$  como algo da forma  $y = y(x, c_1)$ . Usando isso na outra igualdade,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy'}{\zeta},$$

garantimos que ela só depende de  $x$ ,  $y'$  e  $c_1$ . A integração, então, fornecerá  $v_1(x, y', c_1)$ , ou, lembrando que  $c_1 = u(x, y)$ ,

$$v(x, y, y') = c_2 = \text{constante}.$$

Portanto, a solução mais geral da EDO é algo da forma  $v = F(u)$ , ou  $f(u, v) = 0$ . Essa é a forma mais geral de uma EDO que é invariante pelo grupo de simetria gerado por  $\mathbf{X}$ .

Suponhamos que podemos expressar essa EDO na forma

$$y' = f(x, y).$$

Se  $\psi(x, y) = c$  é solução, então também é uma solução da EDP

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad (3.14)$$

uma vez que possui

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{f(x, y)}$$

como sistema característico. Por sua vez, o gerador  $\mathbf{X}$  leva  $\psi(x, y)$  a outra solução da EDO. Logo,  $\mathbf{X}(\psi) = h(\psi)$ , onde  $h$  é uma função apropriada. Por conveniência, definamos uma nova função  $\Pi$  que satisfaça

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = \frac{1}{h(\psi)}.$$

Notamos que  $\Pi$  satisfaz a equação 3.14 por simples substituição e que, pela propriedade que exhibe,  $\mathbf{X}(\Pi) = 1$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial\Pi}{\partial y} &= 0, \\ \text{pr } \mathbf{X}(\Pi) = \xi(x, y)\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial\Pi}{\partial y} &= 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

cuja solução é da forma

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} = -\frac{f}{\eta - f\xi}, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial y} = \frac{1}{\eta - f\xi}.$$

Essas equações são tais que admitem integração. Além disso, podemos notar que a quantidade definida pela segunda equação é justamente o **fator integrante** da EDO.

### Exemplo 3.8

Sabemos que o gerador de translação na direção  $x$  é  $\mathbf{X} = \partial_x$ , com  $\xi = 1$  e  $\eta = 0$ . Como  $\xi$  e  $\eta$  não dependem de  $x$  ou  $y$ , segue que  $\zeta = 0$  e que  $\text{pr } \mathbf{X} = \mathbf{X}$ . Considerando a EDP  $\text{pr } \mathbf{X} = 0$ , vemos que o sistema característico, com abuso de notação, é dado por

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{0},$$

que nos leva a  $y = c_1$  e  $y' = c_2$ , com  $c_1$  e  $c_2$  constantes. Assim, constatamos que a forma mais geral de uma EDO invariante pelo grupo de translações na direção  $x$  é

$$y' = f(y).$$

Aplicando o mesmo raciocínio para translações na direção  $y$ , temos que a forma mais geral da ODE invariante por essa transformação é

$$y' = f(y).$$

Por sua vez, o gerador para uma translação arbitrária  $(\alpha, \beta)$  é

$$\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Novamente, como  $\xi$  e  $\eta$  não dependem de  $x$  e  $y$ , pr  $\mathbf{X} = \mathbf{X}$ . Assim, o sistema característico da EDO é dado por

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dy'}{0},$$

cuja solução é  $y' = c_1$  e  $\beta x - \alpha y = c_2$ . Portanto, a forma mais geral de EDO que é invariante pelo grupo de translações na direção  $(\alpha, \beta)$  é

$$y' = f(\beta x - \alpha y).$$

### 3.6 Generalização Para EDOs de Ordem Superior

Nesta seção, buscaremos estender o raciocínio empregado na seção anterior para uma EDO de ordem superior, isto é  $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Notemos primeiramente que a equação para  $\zeta$  pode ser reescrita como

$$\zeta = \eta_x + \eta_y y' - y'(\xi_x + \xi_y y') = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}. \quad (3.16)$$

Se definirmos  $\eta^{(0)} = \eta$  e  $\eta^{(1)} = \zeta$ , podemos escrever

$$\tilde{y}^{(i)} = y^{(i)} + a\eta^{(i)} + \mathcal{O}(a^2), \quad (3.17)$$

onde  $y^{(0)} = y$  e  $y^{(1)} = y'$ . Além disso,

$$\eta^{(i)} = \left. \frac{\partial \tilde{y}^{(i)}}{\partial a} \right|_{a=0}, \quad (3.18)$$

o que nos permite escrever 3.16 como

$$\eta^{(1)} = \frac{d\eta^{(0)}}{dx} - y^{(1)} \frac{d\xi}{dx}. \quad (3.19)$$

Agora, a equação 3.18 é válida para  $i = 2, 3, 4, \dots, n$ , e, como sabemos,  $y^{(i+1)} = dy^{(i)}/dx$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} \eta^{(i+1)} &= \left. \frac{\partial \tilde{y}^{(i+1)}}{\partial a} \right|_{a=0} = \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{d\tilde{y}^{(i)}}{dx} \right) \right|_{a=0} = \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{d(y^{(i)} + a\eta^{(i)} + \mathcal{O}(a^2))}{d(x + a\xi + \mathcal{O}(a^2))} \right) \right|_{a=0} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{dy^{(i)} + a d\eta^{(i)} + \mathcal{O}(a^2)}{dx(1 + a(d\xi/dx) + \mathcal{O}(a^2))} \right) \right|_{a=0} = \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\frac{dy^{(i)}}{dx} + a \frac{d\eta^{(i)}}{dx} + \mathcal{O}(a^2)}{1 + a \frac{d\xi}{dx} + \mathcal{O}(a^2)} \right) \right|_{a=0} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial a} \left( \left( \frac{dy^{(i)}}{dx} + a \frac{d\eta^{(i)}}{dx} + \mathcal{O}(a^2) \right) \left( 1 - a \frac{d\xi}{dx} + \mathcal{O}(a^2) \right) \right) \right|_{a=0} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{dy^{(i)}}{dx} + \left( \frac{d\eta^{(i)}}{dx} - \frac{dy^{(i)}}{dx} \frac{d\xi}{dx} \right) a + \mathcal{O}(a^2) \right) \Big|_{a=0},$$

ou seja,

$$\eta^{(i+1)} = \frac{d\eta^{(i)}}{dx} - \frac{dy^{(i)}}{dx} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta^{(i)}}{dx} - y^{(i+1)} \frac{d\xi}{dx}. \quad (3.20)$$

Essa expressão define completamente  $\eta^{(i)}$ , uma vez que  $\eta^{(0)}$  e  $\eta^{(1)}$  são conhecidos. Notamos ainda, através da iteração 3.20, que

$$\eta^{(i)} = \eta^{(i)}(x, y, y', y'', \dots, y^{(i)}).$$

Em vista do abordado acima, temos a seguinte definição para a  $n$ -ésima prolongação do gerador  $\mathbf{X}$ :

### Definição 3.5: N-ésima Prologação do Gerador

Seja a equação diferencial ordinária  $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ . A  **$n$ -ésima prologação** do gerador de simetria do grupo de Lie de transformações de ponto uniparamétricas é

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta^{(0)} \frac{\partial}{\partial y^{(0)}} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}, \quad (3.21)$$

com  $\eta^{(i)}$  dado por 3.20.

Adicionalmente, generalizando a definição 3.4, temos que:

### Definição 3.6

A EDO  $\phi(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  é invariante pela simetria gerada por  $\mathbf{X}$  se

$$\text{pr}^n \mathbf{X}(\phi) = 0.$$

Para o caso  $n = 2$ , a equação 3.21 assume a forma

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial}{\partial y''}, \quad (3.22)$$

onde, pela equação 3.20,

$$\eta' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2, \quad (3.23)$$

e, de 3.20 na expressão anterior para  $\eta'$ ,

$$\eta'' = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y''. \quad (3.24)$$

**Exemplo 3.9**

Vejam qual a forma mais geral de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que é invariante pelo grupo de rotações no plano. Para este caso, sabemos que  $\xi = -y$  e  $\eta = x$ . Além disso, sabemos que  $\eta' = 1 + y'^2$ . Utilizando a expressão 3.24 constatamos que  $\eta'' = 3yy''$  e, por consequência, a expressão para a segunda prolongação dos geradores de simetria da EDO de ordem 2  $\phi$  é

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{X}(\phi) = -y\frac{\partial\phi}{\partial x} + x\frac{\partial\phi}{\partial y} + (1 + y'^2)\frac{\partial\phi}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial\phi}{\partial y''} = 0,$$

cujo sistema característico é

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''}.$$

Da primeira igualdade,

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow ydy + xdx = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \text{constante} = c_1^2 \Rightarrow x = \sqrt{c_1^2 - y^2}.$$

Usando esse resultado para eliminar  $x$  na igualdade entre o segundo e terceiro termo, temos

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} = \frac{dy'}{1 + y'^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} - \frac{dy'}{1 + y'^2} = 0.$$

Integrando, encontramos que

$$\arcsin \frac{y}{c_1} - \arctan y' = \text{constante} = c_2,$$

que, através de uma breve manipulação, pode ser reescrita como

$$\frac{xy' - y}{x + yy'} = \tan c_2.$$

Da igualdade formada pelo terceiro e quarto termo

$$\frac{3y'dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy''}{y''} \Rightarrow \frac{3y'dy'}{1 + y'^2} - \frac{dy''}{y''} = 0,$$

cujas integração resulta em

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{(3/2)}} = \text{constante} = c_3 \Rightarrow y'' = c_3(1 + y'^2)^{(3/2)}.$$

Como cada constante pode ser expressa em termos das outras constantes, concluímos que a forma mais geral possível de uma EDO de segunda ordem invariante pelo grupo de rotações é

$$y'' = (1 + y'^2)^{(3/2)} f\left(x^2 + y^2, \frac{y - y'x}{yy' + x}\right).$$

### 3.6.1 Coordenadas Canônicas

É um fato bem conhecido da teoria das equações diferenciais que uma EDO de ordem  $n$  é equivalente a um sistema composto por  $n$  EDOs de primeira ordem. Para vermos isso, escrevamos a equação  $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n)})$  na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y', \\ \frac{dy'}{dx} &= y'', \\ &\dots, \\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx} &= y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \end{aligned}$$

é o sistema de  $n$  EDOs associado. Por sua vez, esse sistema pode ser reescrito como

$$\frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''} = \dots = \frac{dy^{(n-1)}}{f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})} = \frac{dx}{1},$$

que é o sistema característico associado à EDP

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + y' \frac{\partial \psi}{\partial y} + y'' \frac{\partial \psi}{\partial y'} + \dots + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial \psi}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

Uma solução possível da EDP acima é da forma

$$\psi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \text{constante}.$$

Buscando fazer uma redução de ordem de maneira eficiente, introduzamos uma mudança de coordenadas apropriada. Para tal, sejam  $t$  e  $z$  coordenadas tais que

$$x = x(t, z), \quad y = y(t, z), \quad (3.26)$$

de forma que a expressão 3.25 assume a forma

$$z^{(n)} = F(t, z', z'', \dots, z^{(n-1)}),$$

onde as derivadas são em relação à coordenada  $t$  e a EDO é de ordem  $(n-1)$  na variável  $z'$ , que admite como simetria  $\partial/\partial z$ . Visto de outra forma, a mudança de variáveis promovida por 3.26 é tal que o gerador de simetria pode ser escrito como

$$\mathbf{X} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Segue imediatamente do gerador acima que

$$\mathbf{X}(t) = 0, \quad \mathbf{X}(z) = 1.$$

Chamaremos as coordenadas  $(z, t)$  de **coordenadas canônicas**. Dos resultados acima,

$$\mathbf{X}(t) = \xi(x, y) \frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

e

$$\mathbf{X}(z) = \xi(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Essas equações podem ser resolvidas usando os artifícios que já conhecemos. Os sistemas característicos associados a cada uma delas definem as mudanças de variável  $t = t(x, y)$  e  $z = z(x, y)$ .

De maneira alternativa, podemos usar a solução  $t = t(x, y)$  da primeira equação para escrever  $x = x(t, y)$ , com o intuito de trabalhar nas variáveis  $(t, y)$ , e assim reescrever  $\mathbf{X}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} = \xi \left( \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \eta \left( \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \\ &= \left( \xi \frac{\partial t}{\partial x} + \eta \frac{\partial t}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial y} = \eta \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Isso permite escrever

$$\mathbf{X}(z) = \eta \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

que fornece, via integração,  $z = z(y, t)$ , que podemos reescrever como  $z = z(x, y)$ , usando  $t = t(x, y)$ . Notemos que estamos considerando  $\eta \neq 0$ ; se  $\eta = 0$ , basta considerar o mesmo procedimento descrito acima, porém utilizando as variáveis  $(t, x)$ , com as quais a equação  $\mathbf{X}(z) = 1$  assume a forma  $\xi(\partial z / \partial x) = 1$ .

### Exemplo 3.10

Como ilustração para o procedimento que acabamos de descrever, consideremos a equação  $y'' = xy^2$ . É simetria dessa equação

$$\mathbf{X} = x \frac{\partial}{\partial x} - 3y \frac{\partial}{\partial y},$$

o que pode ser prontamente verificado. Considerando  $\xi = x$  e  $\eta = -3y$  na expressão para a segunda prolongação (3.22), temos que

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(2)} \mathbf{X}(y'' - xy^2) &= \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 3y \frac{\partial}{\partial y} - 4y' \frac{\partial}{\partial y'} - 5y'' \frac{\partial}{\partial y''} \right) (y'' - xy^2) = \\ &= -xy^2 + 6xy^2 - 5y'' = -5(y'' - xy^2) = 0. \end{aligned}$$

Para efetuarmos a redução da EDO, consideremos as variáveis  $(t, z)$ , tais que  $\mathbf{X}(z) = 1$  e  $\mathbf{X}(t) = 0$ . Para o presente problema,

$$x \frac{\partial t}{\partial x} - 3y \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

cujo sistema característico é

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{3y},$$

e cuja solução é  $yx^3 = \text{constante}$ . Definamos agora a variável  $t$  como  $t = yx^3$ . Essa definição, como discutimos para o caso geral, nos permite escrever  $\mathbf{X}(z) = 1$  como

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

cuja solução é  $z = \ln x + f(t)$ , sendo  $f(t)$  uma função arbitrária de  $t$ . Podemos tomar, a título de exemplo,  $z = \ln(x)$ .

Se utilizarmos  $x = e^z$  e  $y = te^{-3z}$ , teremos que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_t + y_z z'}{x_t + x_z z'} = \frac{e^{-4z}}{z'} - 3te^{-4z},$$

e

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{-5z} \left( -\frac{7}{z'} + 12t - \frac{z''}{z'^3} \right).$$

Substituindo na EDO, obtemos que

$$z'' = 12tz'^3 - t^2z'^3 - 7z'^2,$$

que é de primeira ordem em  $z'$ .

Uma discussão pormenorizada a respeito de como simetrias podem ser usadas para reduzir a ordem de uma equação diferencial e as diversas estratégias para tal pode ser encontrada em [23].

### 3.7 Generalização Para Várias Variáveis

Consideremos um subconjunto  $S$  de uma variedade  $M$ , dizemos que um grupo de Lie  $G$  é um grupo de simetria de  $S$ , ou que  $S$  é  $G$ -invariante, se a ação  $\phi(g, h) \in S$  sempre que estiver definida para  $g \in G$  e  $h \in S$ .

Por sua vez, consideremos um sistema de equações diferenciais que envolve  $p$  variáveis independentes  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$  e  $q$  variáveis dependentes  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^q)$ . Uma solução desse sistema é da forma  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ , ou, em termos de coordenadas,  $u^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^p)$ . Isto posto, uma solução do sistema definirá um ponto na variedade. Assim, o subconjunto  $S$  de todas as soluções é um subconjunto  $S \subset M$ . Portanto, um grupo de Lie  $G$  será um grupo de simetria do sistema de equações se o conjunto de soluções for  $G$ -invariante.

Tomemos  $X = \mathbb{R}^p$ , com coordenadas  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$ , o espaço das variáveis independentes, e  $U = \mathbb{R}^q$ , com coordenadas  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^q)$ , o espaço das variáveis

dependentes. Podemos estabelecer que um grupo de simetria do sistema será um grupo de transformações  $G$  agindo localmente em um aberto  $M \subset X \times U$ , de tal forma que a ação de  $G$  mapeia soluções em soluções. Naturalmente, esperamos, em princípio, que tal grupo de transformações atue sobre quaisquer variáveis, sejam elas dependentes ou independentes. Assim, no caso mais geral, teremos uma ação  $\phi : M \times G \rightarrow M$ , que caracterizaremos por

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \phi(g, (\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Para desenvolvermos o raciocínio rigorosamente, comecemos identificando a função  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  com

$$\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \Omega\} \subset X \times U,$$

onde  $\Omega$  é o domínio de  $f$ . Notemos que  $\Gamma_f$  é uma subvariedade  $p$ -dimensional de  $X \times U$ . Se  $\Gamma_f \subset M_g$ , o domínio da transformação de grupo  $g \in G$ , a transformação de  $\Gamma_f$  por  $g$  é dada por

$$g \cdot \Gamma_f = \{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = g \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \Gamma_f\}.$$

Entretanto, o conjunto  $g \cdot \Gamma_f$  não é necessariamente o gráfico de uma função bijetiva  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ . Porém, dado que  $G$  atua suavemente e que a atuação de seu elemento identidade mantém  $\Gamma_f$  invariante, a compressão adequada do domínio  $\Omega$  de  $f$  garante que, para elementos próximos à identidade, a transformação  $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$  é o gráfico de alguma função bijetiva suave  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  [24]. A função  $\tilde{f} = g \cdot f$  é denominada **transformação** de  $f$  por  $g$ .

### Exemplo 3.11

Seja o caso em que  $p = 1$  e  $q = 1$ , onde  $X = \mathbb{R}$ , com uma única variável independente  $x$ , e  $U = \mathbb{R}$ , denotando por  $y$  a variável dependente. Tomemos  $G = SO(2)$  como o grupo de rotação atuando em  $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ . Como sabemos, podemos definir  $(\tilde{x}, \tilde{u}) = (x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta)$ . Tomemos a função  $u = f(x) = kx^2$ . Para este caso,

$$\tilde{x} = x \cos \theta - u \sin \theta = x \cos \theta - kx^2 \sin \theta \Rightarrow kx^2 \sin \theta - x \cos \theta + \tilde{x} = 0,$$

que é uma equação de segundo grau em  $x$  e cuja solução é

$$x = \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 4k\tilde{x} \sin \theta}}{2k \sin \theta},$$

onde consideraremos apenas a solução com sinal negativo pelo fato de a outra solução não fornecer o limite correto quando  $\theta = 0$ . Substituindo em  $\tilde{u} = x \sin \theta + kx^2 \cos \theta$ , concluímos que

$$\tilde{u} = \frac{\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - 4k\tilde{x} \sin \theta}}{2k \sin^2 \theta} - \tilde{x} \cot \theta = \tilde{f}(\tilde{x}).$$

No caso geral, o procedimento de encontrar a função transformada  $\tilde{f} = g \cdot f$  segue o raciocínio do exemplo anterior. Suponhamos que a transformação  $g$  é dada por

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = g \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\Xi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \Phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u})),$$

onde  $\Xi_g$  e  $\Phi_g$  são funções suaves. Então,  $\Gamma_{\tilde{f}} = g \cdot \Gamma_f$  pode ser expresso parametricamente por

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \Xi_g(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}); \\ \tilde{\mathbf{u}} = \Phi_g(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \Phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}); \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Aqui,  $\mathbb{I}$  é a função identidade de  $X$ , tal que  $\mathbb{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , e  $\times$  é o produto cartesiano de funções.

Para determinar  $\tilde{f} = g \cdot f$  explicitamente, é necessário eliminar  $\mathbf{x}$  no sistema de equações acima. Dado que, para o elemento identidade do grupo  $g = e$ ,  $\Gamma_e \circ (\mathbb{I} \times f) = \mathbb{I}$ , sabemos que a matriz jacobiana de  $\Gamma_g \circ (\mathbb{I} \times f)$  é não singular para  $g$  muito próximo à identidade  $e$ , pelo teorema da função inversa [25, 26], podemos escrever localmente que

$$\mathbf{x} = [\Gamma_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

o que nos permite expressar

$$g \cdot f = [\Phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Gamma_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}, \quad (3.27)$$

que vale sempre que o segundo fator é inversível.

### Exemplo 3.12

Tomemos o caso especial em que o grupo age apenas sobre a variável independente. Aqui, temos transformações da forma

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = g \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\Xi_g(\mathbf{x}), \mathbf{u}),$$

nas quais  $\Xi_g$  é um difeomorfismo de  $X$ , com  $\Xi_g^{-1} = \Xi_{g^{-1}}$ . Se  $\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\}$  é o gráfico de uma função suave, então também será  $g \cdot \Gamma_f = \{g \cdot (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\}$ . De fato,

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = g \cdot (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = (\Xi_g(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})).$$

Aqui, podemos eliminar  $\mathbf{x}$  invertendo  $\Xi_g$ , o que nos dá

$$\tilde{\mathbf{u}} = f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\Xi_g^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})) = f(\Xi_{g^{-1}}(\tilde{\mathbf{x}})).$$

Para propósitos ilustrativos, tomemos  $G$  como o grupo das translações

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{a}, \mathbf{u}),$$

com  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{a} \in X$ . Então, a função  $f$  é transformada para

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\Xi_{g^{-1}}(\tilde{\mathbf{x}})) = f(\tilde{\mathbf{x}} - \epsilon \mathbf{a}).$$

O resultado acima vale no caso mais geral dos grupos de transformações **projetáveis**, nos quais a ação nas variáveis independentes não depende das variáveis dependentes, ou seja,

$$g \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\Xi_g(\mathbf{x}), \Phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Agora, estamos em condições de definir grupos de simetrias de equações diferenciais de forma mais rigorosa.

### Definição 3.7

Um **grupo de simetria** de um sistema de equações diferenciais é um grupo de transformações locais  $G$  atuando em um subconjunto aberto  $M$  do espaço das variáveis independentes e dependentes  $(X \times U)$  e tal que, sempre que  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  é solução do sistema e sempre que  $g \cdot f$  é definido para  $g \in G$ ,  $\mathbf{u} = g \cdot f(\mathbf{x})$  também será solução do mesmo sistema.

Conforme já nos é claro a esse ponto, nossos propósitos exigem que prolonguemos o espaço  $X \times U$  das variáveis independentes e dependentes em um espaço de jatos, onde as várias derivadas que podem ocorrer estejam devidamente representadas.

Seja  $S_\Delta$  um sistema de equações diferenciais de ordem  $n$  com  $p$  variáveis independentes e  $q$  variáveis dependentes, dado por

$$\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, l,$$

com  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$  e as derivadas de  $\mathbf{u}$  em relação a  $\mathbf{x}$  até ordem  $n$ . Entenderemos que as funções  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = (\Delta_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}), \dots, \Delta_l(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))$  são suaves em seus argumentos, de forma que  $\Delta$  pode ser visto como um mapeamento suave do espaço de jatos  $X \times U^{(n)}$  no espaço euclidiano de dimensão  $l$ .

Por sua própria definição, as equações diferenciais estabelecem onde esse mapeamento desaparece no espaço de jatos  $X \times U^{(n)}$  e, portanto, definem uma subvariedade dada por

$$S_\Delta = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) \in M^{(n)} \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}.$$

Por essa linha de raciocínio, podemos dizer que uma função suave  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  é solução do sistema de equações diferenciais se

$$\Delta(\mathbf{x}, \text{pr}^{(n)}(f(\mathbf{x}))) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

com  $\Omega \subset X$  denotando o domínio de  $f$ . Aqui, estamos apenas expressando o fato de que as derivadas de  $f$  precisam satisfazer as restrições impostas pelas equações diferenciais. Em outros termos, o gráfico da prolongação de  $f$  deve permanecer inteiramente dentro da subvariedade  $\Gamma_\Delta$  definida pelo sistema de equações diferenciais, ou seja,

$$\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, \text{pr}^{(n)}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \subset \Gamma_\Delta = \{\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0\}.$$

Com isso, podemos considerar um sistema de equações diferenciais de ordem  $n$  como uma subvariedade  $\Gamma_\Delta$  no espaço de jatos  $X \times U^{(n)}$ . Além disso, uma solução é uma função  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  tal que sua  $n$ -ésima prolongação está contida nessa subvariedade.

### Exemplo 3.13: Equação de Laplace Tridimensional

Voltemos à equação de Laplace tridimensional discutida no exemplo 2.16,

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Vimos naquele exemplo que essa equação vive em um espaço de jatos de 13 dimensões, e que ela define um subespaço  $S_\Delta$  tal que

$$v^8 + v^{11} + v^{13} = 0,$$

onde  $v^s$  são coordenadas do espaço de jatos.

Sabemos que uma função  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  será solução se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Isso é o mesmo que requerer que o gráfico da segunda prolongação esteja em  $\Gamma_\Delta$ .

Para vermos isso, consideremos a função  $f(x, y, z) = x^3yz - y^3xz + y^3 - 3yz^2$ . Essa é uma solução da equação de Laplace, pois

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(xyz) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (x^3yz - y^3xz + y^3 - 3yz^2) = \\ &= 6xyz - 6xyz + 6y - 6y = 0. \end{aligned}$$

Por sua vez, a segunda prolongação de  $f$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(2)} f &= (f(x, y, z), f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zz}) = \\ &= (x^3yz - y^3xz + y^3 - 3yz^2; 3x^2yz - y^3z, x^3z - 3y^2xz + 3y^2 - 3z^2, x^3y - y^3x - 6yz) = \\ &= (6xyz, 3x^2z - 3y^2z, 3x^2y - y^3, -6xyz + 6y, x^3 - 3xy^2 - 6z, -6y). \end{aligned}$$

Como  $v^8 = 6xyz$ ,  $v^{11} = -6xyz + 6y$  e  $v^{13} = -6y$ , temos que

$$v^8 + v^{11} + v^{13} = 6xyz - 6xyz + 6y - 6y = 0,$$

em conformidade com o que dissemos.

### 3.7.1 Prolongação da Ação de Grupos

Consideremos a ação do grupo em um ponto  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  da subvariedade  $X \times U$ , que será denotada por

$$\phi(g, (\mathbf{x}, \mathbf{u})) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}).$$

Podemos definir a  $n$ -ésima prolongação dessa ação, que denotaremos por  $\text{pr}^{(n)}g$ , por

$$\phi(\text{pr}^{(n)}g, (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}),$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}^{(n)} = (\text{pr}^{(n)}\tilde{f})(\tilde{\mathbf{x}})$ .

O que estamos dizendo é que, dada a ação definida acima no aberto  $M \subset X \times U$ , haverá uma ação local de  $G$  induzida no  $n$ -ésimo espaço de jatos  $M^{(n)}$ , que denominamos  $n$ -ésima prolongação de  $G$  em  $M$ . Essa prolongação é tal que transforma as derivadas das funções  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  nas derivadas correspondentes de  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ . Notemos que isso apenas coloca em bases mais gerais e rigorosas o que temos trabalhado até aqui ao longo do capítulo.

Em vista do que foi estudado no primeiro capítulo a respeito de grupos de Lie, álgebras de Lie e campos vetoriais, sabemos que um campo vetorial  $\mathbf{X}$  define um grupo de transformações uniparamétricas em  $M$  através da ação  $\phi(\exp(t\mathbf{X}), (\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ . Além disso, da nossa presente discussão, temos que a prolongação dessa ação para o espaço de  $n$ -jatos é  $\phi(\text{pr}^{(n)}\exp(t\mathbf{X}), (\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ . A ação prolongada nos fornece uma curva em  $M^{(n)}$ , de modo que podemos calcular seu vetor tangente, e esse vetor é a prolongação do gerador  $\mathbf{X}$ . Daí, definiremos a  $n$ -ésima prolongação  $\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}$  do gerador de transformações  $\mathbf{X}$  por

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X} \Big|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})} = \left. \frac{d}{dt} \phi(\text{pr}^{(n)}\exp(t\mathbf{X}), (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})) \right|_{t=0}. \quad (3.28)$$

Dado  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  é um sistema de coordenadas em  $M^{(n)}$ , uma base coordenada para o espaço tangente a um ponto dessa variedade é  $\{\partial_{x^i}, \partial_{u_j^\alpha}\}$ . Assim, podemos escrever um campo vetorial em  $M^{(n)}$  por

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_J^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (3.29)$$

onde, em geral,  $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  e  $\phi_J^\alpha = \phi_J^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ . Particularmente, no caso em que  $\mathbf{V} = \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}$ , temos que  $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\phi_0^\alpha = \phi_0^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  e, por consequência,  $\phi_J^\alpha =$

$\phi_J^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_\alpha^J)$ , com o gerador  $\mathbf{X}$  sendo dado por

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

### Exemplo 3.14

Consideremos mais uma vez o caso das rotações no plano, cujo gerador é

$$\mathbf{X} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}.$$

Neste caso, temos

$$\phi(\exp(\theta \mathbf{X}), (x, u)) = (x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta).$$

Agora,

$$\tilde{u}' = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{u}}{dx} \left( \frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^{-1} = \frac{\sin \theta + u' \cos \theta}{\cos \theta - u' \sin \theta}.$$

Portanto,

$$\phi(\text{pr}^{(1)} \exp(\theta \mathbf{X}), (x, u)) = \left( x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta, \frac{\sin \theta + u' \cos \theta}{\cos \theta - u' \sin \theta} \right).$$

Utilizando a equação 3.28,

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{X} = \frac{d}{d\theta} \left( x \cos \theta - u \sin \theta, x \sin \theta + u \cos \theta, \frac{\sin \theta + u' \cos \theta}{\cos \theta - u' \sin \theta} \right) \Big|_{\theta=0} = (-u, x, 1+u'^2),$$

ou,

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{X} = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u} + (1 + u'^2) \frac{\partial}{\partial u'},$$

que é o resultado que obtivemos no exemplo 3.6.

Sintetizaremos os resultados obtidos ao longo desta subseção através da seguinte definição:

### Definição 3.8

Seja  $\Delta_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ ,  $\mu = 1, \dots, l$ , um sistema de equações diferenciais definido em  $M \subset X \times U$ . Seja um grupo de Lie  $G$  agindo como um grupo de transformações locais em  $M$ . Dizemos que esse grupo é um grupo de simetria do sistema de equações diferenciais se

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{X} \Big|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})} \Delta_\mu = 0, \quad \mu = 1, \dots, l,$$

$\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{g}$ , com  $\mathfrak{g}$  sendo a álgebra de Lie associada a esse grupo, e sempre que

$$\Delta_\mu(x, u^{(n)}) = 0.$$

### 3.7.2 Expressões Gerais para Prolongações

Agora, será nosso objetivo concluir a discussão a respeito dos aspectos elementares do método das prolongações, obtendo expressões de validade geral. Para tal, começaremos com o estudo de casos particulares.

Primeiramente, consideremos a ação de um grupo de transformações uniparamétricas que atuam apenas nas variáveis independentes. Para este caso, o gerador assume a forma

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

atuando em  $M \subset X \times U$ . As transformações de grupo  $g_\epsilon = \exp(\epsilon \mathbf{X})$  são da forma

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = g_\epsilon \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\Xi_\epsilon(\mathbf{x}), \mathbf{u}),$$

onde os elementos  $\tilde{x}^i = \Xi(x^i)$  são tais que

$$\left. \frac{d\Xi_\epsilon^i(\mathbf{x})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \xi^i(\mathbf{x}).$$

Para simplificarmos nossa análise, consideraremos apenas uma variável dependente  $u \in \mathbb{R}$ , sem perda de generalidade.

Neste caso, sabemos que o primeiro espaço de jatos  $M^{(1)}$  admite as coordenadas  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = (x^i, u, u_j)$ , tal que  $u_j = \partial u / \partial x^j$ . Tomando um ponto qualquer em  $M^{(1)}$ , e considerando uma função qualquer  $u = f(x)$ , com  $u_j = \partial f / \partial x^j$ , a ação prolongada do grupo será  $\text{pr}^{(1)}g_\epsilon \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}^{(1)})$ . Obviamente,  $\tilde{\mathbf{x}} = \Xi(\tilde{\mathbf{x}})$ ,  $\tilde{u} = u$  e  $u_j$  são as derivadas da função transformada  $\tilde{f}_\epsilon = g_\epsilon \cdot f$ . Em termos da equação 3.27, temos que

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\Xi_\epsilon^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})) = f(\Xi_{-\epsilon}(\tilde{\mathbf{x}})).$$

Dessa forma, pela regra da cadeia,

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}^j} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f(\Xi_{-\epsilon}(\tilde{\mathbf{x}}))}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \Xi_{-\epsilon}^k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}^j}.$$

Porém, sabemos que  $\Xi_{-\epsilon}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$ . Assim, a expressão anterior torna-se

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Xi_{-\epsilon}^k(\Xi_\epsilon(\mathbf{x}))}{\partial \tilde{x}^j} u_k, \quad (3.30)$$

que nos fornece a prolongação da ação do grupo às derivadas de primeira ordem. Para encontrarmos o gerador infinitesimal dessa transformação prolongada, em conformidade com a expressão 3.28, devemos derivar 3.30 com respeito ao parâmetro  $\epsilon$  e avaliar essa derivada em  $\epsilon = 0$ . Como resultado, teremos

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^p \phi^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad (3.31)$$

onde  $\xi^i(\mathbf{x}) = \left. \frac{d\Xi_\epsilon^i(\mathbf{x})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$ , conforme já sabemos e, obviamente,

$$\phi^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Xi_{-\epsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Xi_\epsilon(\mathbf{x})) u_k.$$

Devido ao requerimento de que as funções em nosso problema sejam suaves, a ordem de derivação pode ser trocada, de acordo com o teorema de Clairaut-Schwarz [27, 28], e assim

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \left( \left. \frac{d \Xi_{-\epsilon}^k}{d\epsilon} \right) \Xi_\epsilon(\mathbf{x}) \right] \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ \left. \left( \frac{d \Xi_{-\epsilon}^k}{d\epsilon} \right) \right|_{\epsilon=0} \right] (\mathbf{x}),$$

pois  $\Xi_{\epsilon=0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . Agora, sabemos que o termo dentro de colchetes define  $-\xi^k$ . Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left[ \left. \left( \frac{d \Xi_{-\epsilon}^k}{d\epsilon} \right) \right|_{\epsilon=0} \right] (\mathbf{x}) = -\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(\mathbf{x}).$$

Além disso, temos

$$\sum_l \frac{\partial^2 \Xi_{-\epsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^l}(\Xi_{-\epsilon}(\mathbf{x})) \left. \frac{d \Xi_\epsilon^l}{d\epsilon}(\mathbf{x}) \right|_{\epsilon=0} = 0,$$

pois  $\Xi_0(\mathbf{x})$  é o elemento identidade, de forma que para  $\epsilon = 0$ , as derivadas de segunda ordem de  $\Xi_\epsilon$  são nulas. Portanto, podemos reescrever  $\phi^j$  como

$$\phi^j(x, u, u_x) = -\sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \cdot u_k. \quad (3.32)$$

### Exemplo 3.15

Seja o grupo de translações  $(x, u) \mapsto (x + \epsilon a, u)$ , com  $a \in X$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Então, a transformada da função  $u = f(x)$  será

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) = f(x - \epsilon a).$$

Analisemos um segundo caso particular. Continuaremos apenas com uma variável dependente  $u$ , mas agora consideraremos que o grupo de transformações atua somente sobre ela. Em termos matemáticos,

$$(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{u}) = g_\epsilon \cdot (\mathbf{x}, u) = (\mathbf{x}, \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, u)).$$

O gerador infinitesimal da transformação acima será  $\mathbf{X} = \phi(\mathbf{x}, u)\partial_u$ , com

$$\phi(\mathbf{x}, u) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, u)$$

Para  $u = f(\mathbf{x})$ , temos que  $\tilde{f}_\epsilon = g_\epsilon \cdot f$  é dada por

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})).$$

Mas,

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial \tilde{f}_\epsilon(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\Phi_\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))) = \frac{\partial \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\partial x^j} + \frac{\partial \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\partial u} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^j}.$$

Daí, somos levados a concluir que a ação prolongada  $\text{pr}^{(1)}g_\epsilon \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = (\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}^{(1)})$  é tal que

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x^j} + \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial u} u_j.$$

De forma análoga ao caso anterior, diferenciando com respeito ao parâmetro  $\epsilon$  e avaliando em  $\epsilon = 0$ , temos que o gerador prolongado será

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_{j=1}^p \phi^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j},$$

com

$$\phi^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \tilde{u}_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \frac{\partial \phi}{\partial u} u_j. \quad (3.33)$$

### Exemplo 3.16

Conforme veremos adiante, um dos grupos uniparamétricos de simetria da equação do calor é dado pela transformação

$$g_\epsilon : (x, t, u) \mapsto (x + 2\epsilon t, t, e^{-\epsilon x - \epsilon^2 t} u), \quad \epsilon \in \mathbf{R}.$$

Para a função  $u = f(x, t)$ , a aplicação de  $g_\epsilon$  é

$$\tilde{u} = e^{-\epsilon x - \epsilon^2 t} u = e^{-\epsilon x - \epsilon^2 t} f(x, t).$$

Mas, dado que  $(\tilde{x}, \tilde{t}) \mapsto (x + 2\epsilon t, t)$ , podemos escrever a expressão acima como

$$\tilde{u} = e^{-\epsilon(\tilde{x} - 2\epsilon \tilde{t}) - \epsilon^2 \tilde{t}} \cdot f(\tilde{x} - 2\epsilon \tilde{t}, \tilde{t}) = e^{-\epsilon \tilde{x} + \epsilon^2 \tilde{t}} \cdot f(\tilde{x} - 2\epsilon \tilde{t}, \tilde{t}).$$

#### 3.7.2.1 Digressão: Sobre Derivadas Totais

Antes de obtermos uma versão generalizada das expressões 3.32 e 3.33, faremos uma pequena digressão a respeito das derivadas totais. Essa mudança temporária de assunto é necessária para fixarmos e simplificarmos a notação em nossos desenvolvimentos futuros.

Voltemos ao caso discutido anteriormente, onde temos  $p$  variáveis independentes e apenas uma variável dependente. A expressão 3.33 pode ser reescrita como

$$\phi^j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial}{\partial u} \right) \phi(\mathbf{x}, u) = D_j \phi(\mathbf{x}, u),$$

pois  $u$  é uma função de  $\mathbf{x}$ . Ao termo dentro do parêntese damos o nome de **derivada total** de  $\phi$  em relação a  $x^j$ . Essa definição se estende a funções de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e derivadas  $u_j^\alpha$  de  $\mathbf{u}$ .

Seguindo [24], definiremos formalmente uma derivada total por:

**Definição 3.9: Derivada Total**

Definamos uma função suave  $P(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  no subconjunto aberto  $M^{(n)} = X \times U^{(n)}$ . A derivada total de  $P$  com respeito a  $x^i$  é uma função suave  $D_i P(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ , definida em  $M^{(n)}$ , e tal que depende de derivadas de  $\mathbf{u}$  até ordem  $n + 1$ . É propriedade dessa função que, se  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  é qualquer função suave, então

$$D_i P(\mathbf{x}, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial x^i} (P(\mathbf{x}, \text{pr}^{(n)} f(\mathbf{x}))).$$

O que a definição acima nos diz é que a derivada total de  $P$  é obtida diferenciando  $P$  em relação a  $x^i$  e tratando todas as variáveis dependentes e suas derivadas como funções de  $\mathbf{x}$ .

Pela aplicação direta da regra da cadeia, temos a seguinte proposição:

**Proposição 3.1**

Seja a função  $P(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ . Sua  $i$ -ésima derivada total é dada por

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u_J^\alpha},$$

onde, para  $J = (j_1, \dots, j_k)$ , temos que

$$u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}.$$

A soma em  $J$  é sobre todos os  $J$  de ordem  $0 \leq J \leq n$ , com  $n$  sendo a ordem da maior derivada aparecendo em  $P$ .

Derivadas totais de ordem superior são definidas analogamente ao caso das derivadas parciais. Seja  $J = (j_1, \dots, j_k)$ , com  $0 \leq k \leq p$  para cada  $k$ , então a  $J$ -ésima derivada total é denotada por

$$D_J = D_{j_1} \dots D_{j_k}.$$

**3.7.2.2 A Fórmula Geral**

Os resultados construídos até este ponto são suficientes para derivarmos uma expressão geral para a prolongação da ação de um determinado grupo de Lie de transformações de ponto uniparamétricas. Apresentaremos essa expressão na forma de um teorema e, em seguida, procederemos à construção de uma prova.

**Teorema 3.4: Fórmula Geral de Prolongação**

Seja o gerador de uma transformação arbitrária

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

definido em um subconjunto aberto  $M \subset X \times U$ . A  $n$ -ésima prolongação de  $X$  é um campo vetorial definido no espaço de jatos correspondente  $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ , cuja expressão é dada por

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J' \phi_J^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (3.34)$$

onde  $\sum_J'$  denota a soma sobre derivadas de ordem igual ou superior à primeira, e

$$\phi_J^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = D_J \left( \phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}, \quad (3.35)$$

com  $u_i^\alpha = \partial u^\alpha / \partial x^i$ .

**Prova 3.4**

O resultado sintetizado pelas equações 3.34 e 3.35 pode ser demonstrado por indução matemática. Primeiramente, vamos nos preocupar em mostrar que a expressão 3.35 se reduz à expressão correta para a primeira prolongação (caso  $n = 1$ ).

Consideremos a transformação  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = (\Xi_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = g_\epsilon \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , onde

$$\mathbf{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

e

$$\xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \Xi_\epsilon^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right|_{\epsilon=0}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\phi^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \Phi_\epsilon^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right|_{\epsilon=0}, \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Tomando  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ ,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \Psi_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Psi_\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}),$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \Phi_\epsilon(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}).$$

Pelo menos para  $\epsilon$  pequeno, podemos inverter a equação para  $\tilde{\mathbf{x}}$ , isto é, escrever  $\mathbf{x} = \Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f)^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})$ . O que, ao substituir na expressão para  $\tilde{\mathbf{u}}$ , implica que

$$\tilde{\mathbf{u}} = \Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}) = (\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f)) \circ (\Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Sabemos que os elementos da matriz jacobiana  $J[\tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})]$  são dados por  $\tilde{u}_i^\alpha = \partial \tilde{f}^\alpha / \partial x^i$ . Utilizando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} J[\tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})] &= J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f)) \circ (\Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})] = \\ &= J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] J[(\Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))^{-1}(\tilde{\mathbf{x}})] = J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] (J[(\Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})])^{-1}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} J[\tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})] \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0} (J[(\Psi_0 \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})])^{-1} + \\ &+ J[(\Phi_0 \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \left. \frac{d}{d\epsilon} ((J[(\Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})])^{-1}) \right|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Agora, temos nessas expressões que

$$\Psi_0 \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}) = \Psi_0(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \quad J[\mathbf{x}] = I,$$

e

$$\Phi_0 \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}) = \Phi_0(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}).$$

Além disso, da propriedade  $M_\epsilon M_\epsilon^{-1} = I$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} (M_\epsilon M_\epsilon^{-1}) \right|_{\epsilon=0} &= M_\epsilon \left. \frac{d}{d\epsilon} (M_\epsilon^{-1}) \right|_{\epsilon=0} + \left. \frac{d}{d\epsilon} (M_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} M_\epsilon^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \frac{d}{d\epsilon} (M_\epsilon^{-1}) \right|_{\epsilon=0} = -M_0^{-1} \left. \frac{d}{d\epsilon} (M_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} M_0^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} ((J[(\Psi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})])^{-1}) \right|_{\epsilon=0} &= -J[(\Phi_0 \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0} \times \\ &\times J[(\Phi_0 \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] = - \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Assim, dos resultados acima,

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J[\tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})] \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0} - J[f(\mathbf{x})] \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(\Phi_\epsilon \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0}.$$

Se utilizarmos as definições de  $\xi^i$  e  $U^\alpha$ , segue que

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J[\tilde{f}_\epsilon(\tilde{\mathbf{x}})] \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(U \circ (\mathbb{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0} - J[f(\mathbf{x})] \left. \frac{d}{d\epsilon} J[(\xi \circ (\mathbf{I} \times f))(\mathbf{x})] \right|_{\epsilon=0}.$$

Explicitando as componentes das matrizes com  $U^\alpha \circ (\mathbb{I} \times f)(\mathbf{x}) = U^\alpha(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  e  $\xi^i \circ (\mathbf{I} \times f)(\mathbf{x}) = \xi^i(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ , e utilizando a definição de derivada total, temos que

$$\phi_k^\alpha = \left. \frac{\partial \tilde{f}_t^\alpha}{\partial x^k} \right|_{t=0} = D_k(U^\alpha) - \sum_{i=1}^p u_i^\alpha D_k(\xi^i),$$

que pode ser reescrita, utilizando a regra de Leibniz, como

$$\phi_k^\alpha = D_k \left( U^\alpha - \sum_{i=1}^p u_i^\alpha \xi^i \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x^k}, \quad (3.36)$$

que é justamente a equação 3.35 para o caso  $n = 1$ , onde devemos nos lembrar que há  $k$  derivadas de primeira ordem e que a soma em  $J$  na equação 3.34 será sobre todas elas.

Adotemos a hipótese de que a expressão 3.35 vale para todas as prolongações de ordem  $k \leq n - 1$ . Nosso objetivo será provar que ela vale para a ordem  $n$ . Para tal, notemos que o  $(n+1)$ -ésimo espaço de jatos  $M^{(n+1)}$  pode ser visto como um subespaço do primeiro espaço de jatos  $(M^{(n)})^{(1)}$  do  $n$ -ésimo espaço de jatos. De fato, para o caso  $p = 2$  e  $q = 1$ , as coordenadas do primeiro espaço de jatos  $M^{(1)}$  são  $(x, y, u, u_x, u_y)$ , enquanto as do segundo espaço de jatos são  $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ . Por sua vez, o primeiro espaço de jatos do primeiro espaço de jatos  $(M^{(1)})^{(1)}$  tem coordenadas  $(x, y, u, v, w, u_x, u_y, v_x, v_y, w_x, w_y)$ , onde  $v = u_x$  e  $w = u_y$ . Assim,  $M^{(2)} \subset (M^{(1)})^{(1)}$ .

Com esse ponto de vista, o procedimento de indução para determinar  $\text{pr}^{(n)} \mathbf{X}$  a partir de  $\text{pr}^{(n-1)} \mathbf{X}$  será: consideramos  $\text{pr}^{(n-1)} \mathbf{X}$  como um campo vetorial em  $M^{(n-1)}$  e, pela fórmula de prolongação para o caso  $n = 1$ , prolongamos esse campo para  $(M^{(n-1)})^{(1)}$ . Depois disso, restringimos o campo vetorial resultante ao subespaço  $M^{(n)}$ , e isso determinará a  $n$ -ésima prolongação  $\text{pr}^{(n)} \mathbf{X}$ .

Para vermos isso, as coordenadas de  $(M^{(n)})^{(1)}$  são dadas por  $u_{J,k}^\alpha$ , com  $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$ ,  $1 \leq k \leq p$ , e  $1 \leq \alpha \leq q$ . Pela equação 3.36, os coeficientes de  $\partial/\partial u_{J,k}^\alpha$  na primeira prolongação de  $\text{pr}^{(n-1)} \mathbf{X}$  são

$$\phi_{J,k}^\alpha = D_k(\phi_J^\alpha) - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha. \quad (3.37)$$

De 3.35 em 3.37,

$$\phi_{J,k}^\alpha = D_k \left[ D_J \left( \phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \right] - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= D_k D_J \left( \phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p (D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha + \xi^i u_{J,ik}^\alpha) - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i u_{J,ik}^\alpha = \\
&= D_k D_J \left( \phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,ik}^\alpha,
\end{aligned}$$

onde, na segunda linha, foi utilizada a regra de Leibniz e  $u_{J,ik}^\alpha = \partial^2 u_J^\alpha / \partial x^i \partial x^k$ . Portanto,  $\phi_{J,k}^\alpha$  é da forma 3.35 e o passo indutivo se completa.  $\square$

## 3.8 Aplicações das Expressões Generalizadas

Nesta seção, iremos aplicar as expressões construídas no teorema 3.4 a dois casos interessantes e ilustrativos. Primeiramente, consideraremos um sistema de equações diferenciais ordinárias e empregaremos o formalismo resultante ao famoso problema de Kepler. Em seguida, faremos o mesmo para equações diferenciais parciais e exemplificaremos por meio da equação do calor.

### 3.8.1 Aplicação a Equações Diferenciais Ordinárias

Como aplicação do método, consideremos um sistema de EDOs de segunda ordem, com  $p = 1$  e  $n = 2$ . Denotaremos aqui a variável independente por  $t$  e as variáveis dependentes por  $x^i$ . Dessa forma, o gerador pode ser escrito por

$$\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^q \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.38)$$

onde  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$  e  $\eta^i = \eta^i(\mathbf{x}, t)$ . De acordo com a equação 3.34, a segunda prolongação do gerador é dada por

$$\text{pr}^{(2)} \mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^q \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^q \dot{\eta}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^q \ddot{\eta}^i \frac{\partial}{\partial \ddot{x}^i}.$$

Mas, utilizando a equação 3.16, temos que

$$\dot{\eta}^i = \frac{d\eta^i}{dt} - \dot{x}^i \frac{d\xi}{dt} = \sum_{j=1}^q \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \dot{x}^j + \frac{\partial \eta^i}{\partial t} - \dot{x}^i \left( \sum_{j=1}^q \frac{\partial \xi}{\partial x^j} \dot{x}^j + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \sum_{j=1}^q \eta_{jt}^i \dot{x}^j + \eta_t^i - \dot{x}^i \left( \sum_{j=1}^q \xi_j \dot{x}^j + \xi_t \right),$$

com os índices inferiores denotando derivadas parciais. Por sua vez, pela equação 3.20,

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta}^i &= \frac{d\dot{\eta}^i}{dt} - \ddot{x}^i \frac{d\xi}{dt} = \sum_{j,k=1}^q \eta_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + \sum_{j=1}^q (2\eta_{jt} \dot{x}^j + n_j^i \ddot{x}^j) - \ddot{x}^i \left( \sum_{j=1}^q \xi_j \dot{x}^j + \xi_t \right) + \eta_{tt}^i - \\
&\quad - \dot{x}^i \left\{ \sum_{j,k=1}^q \xi_{j,k} \dot{x}^j \dot{x}^k + \left( \sum_{j=1}^q \xi_{jt} \dot{x}^j + \xi_j \ddot{x}^j + \xi_{jt} \dot{x}^j + \xi_{tt} \right) \right\} - \ddot{x}^i \left( \sum_{j=1}^q \xi_j \dot{x}^j + \xi_t \right) = \\
&= \sum_{j,k=1}^q \eta_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + \sum_{j=1}^q (2\eta_{jt} \dot{x}^j + n_j^i \ddot{x}^j - 2\xi_j \ddot{x}^i \dot{x}^j) + \eta_{tt}^i -
\end{aligned}$$

$$- \sum_{j,k=1}^q \xi_{j,k} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - \sum_{j=1}^q \left( \xi_j \dot{x}^i \ddot{x}^j + 2\xi_{jt} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) - 2\xi_t \ddot{x}^i - \xi_{tt} \dot{x}^i.$$

Sabemos que as equações do sistema podem ser colocadas na forma

$$\Delta^i(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = \ddot{x}^i - f^i(\dot{x}, x, t) = 0.$$

Além disso, sabemos que  $\mathbf{X}$  é simetria se  $\text{pr}^{(2)}\mathbf{X}(\Delta^i) = 0$ . Portanto,

$$0 = \text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(f^i) - \ddot{\eta}^i \implies \text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(f^i) = \ddot{\eta}^i.$$

Assim, a equação a ser resolvida é dada por

$$\begin{aligned} \xi f_t^i + \sum_{j=1}^q \eta^j f_j^i + \sum_{j=1}^q \left( \sum_{k=1}^q \left( \eta_k^i \dot{x}^k - \xi_k \dot{x}^j \dot{x}^k \right) + \eta_t^j - \dot{x}^j \xi_t \right) \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^j} = \\ = \sum_{j,k=1}^q \left( \eta_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - \xi_{jk} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \right) + 2 \sum_{j=1}^q \eta_{jt} \dot{x}^j - \xi_{tt} \dot{x}^i + \eta_{tt}^i + \\ + \sum_{j=1}^q \left( \eta_j^i f^j - \eta_j \dot{x}^i f^j - 2\eta_j \dot{x}^j \dot{x}^i - 2\xi_{jt} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) - 2\xi_t f^i, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde foi utilizado  $\ddot{x} = f^i$ .

### Exemplo 3.17: Problema de Kepler

O problema de Kepler é um caso particular do problema de interação entre dois corpos, no qual eles interagem em termos de uma força central que varia com o inverso do quadrado da distância, como a força gravitacional na teoria newtoniana e a força de atração coulombiana na eletrostática. Nesse cenário, a força atuante sobre uma partícula será dada por

$$f^i = -k \frac{x^i}{r^3},$$

com  $r^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} x^i x^j$ . De onde sabemos imediatamente que  $f_t^i = 0$  e  $\partial f^i / \partial \dot{x}^j = 0$ . Agora,

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{jk} \frac{x^j}{r}.$$

Logo,

$$f_j^i = -k \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{x^i}{r^3} \right) = -\frac{k}{r^3} \left( \delta_{ij} - 3\delta_{jk} \frac{x^i x^k}{r^2} \right).$$

Substituindo os resultados acima na expressão 3.39, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \left( \eta_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - \xi_{jk} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \right) + 2 \sum_{j=1}^3 \eta_{jt} \dot{x}^j - \xi_{tt} \dot{x}^i + \eta_{tt}^i + 2k\xi_t \frac{x^i}{r^3} + \\ + \sum_{j=1}^3 \left( -k\eta_j^i \frac{x^j}{r^3} + k\xi_j \frac{\dot{x}^i x^j}{r^3} - 2\xi_{jt} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) + 2k \sum_{j=1}^3 \xi_j \frac{x^i \dot{x}^j}{r^3} + k\eta^i \frac{1}{r^3} - 3k \sum_{j,k=1}^3 \eta^j \delta_{jk} \frac{x^i x^k}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

A condição de invariância (3.39) resultou em uma equação que deve ser satisfeita para qualquer trajetória. Matematicamente, isso significa que a equação é uma identidade polinomial nas componentes da velocidade  $\dot{x}^i$ . Para que isso seja verdade, os coeficientes de cada monômio em  $\dot{x}$  devem se anular de forma independente. Vamos, portanto, resolver o problema analisando os termos de cada ordem em  $\dot{x}$  separadamente.

### Termos de Ordem Cúbica ( $\dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k$ ):

O único termo de terceira ordem na equação é  $-\xi_{jk} \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k$ . Seu anulamento implica que  $\xi_{jk} = 0$ . A solução geral desta equação diferencial parcial é que  $\xi$  deve ser, no máximo, um polinômio de primeira ordem nas coordenadas espaciais  $x^j$ , com coeficientes que podem depender do tempo:

$$\xi(x, t) = \sum_{j=1}^3 C_j(t) x^j + D(t).$$

### Termos de Ordem Quadrática ( $\dot{x}^j \dot{x}^k$ ):

Analisando os coeficientes dos termos de segunda ordem, obtemos a seguinte equação:

$$\sum_{j,k=1}^3 (\eta_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - 2\xi_{jt} \dot{x}^i \dot{x}^j) = 0.$$

Utilizando a equação obtida para  $\xi$ , podemos reescrever essa equação como

$$\sum_{j,k=1}^3 (n_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - 2\dot{C}_j \delta_k^i \dot{x}^i \dot{x}^j) = \sum_{j,k=1}^3 (n_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k - \dot{C}_j \delta_k^i \dot{x}^i \dot{x}^j - \dot{C}_j \delta_k^i \dot{x}^i \dot{x}^j) = 0,$$

o que nos permite concluir que

$$\eta_{jk}^i = \delta_j^i \dot{C}_k + \delta_k^i \dot{C}_j.$$

### Termos de Ordem Linear ( $\dot{x}^k$ ):

Tomando os termos de primeira ordem, temos que

$$\left( 2 \sum_{j=1}^3 \eta_{jt}^i \dot{x}^j - \xi_{tt} \dot{x}^i \right) r^3 + \sum_{j=1}^3 (k \xi_j \dot{x}^i x^j + 2k \xi_j \dot{x}^j x^i) = 0.$$

Porém, fazendo uso dos resultados obtidos anteriormente, constatamos que os termos  $\eta_{jt}^i$  e  $\xi_{tt}$  no primeiro parêntese contêm apenas termos de ordem zero e um em  $x$ , respectivamente, mas que estão multiplicados por  $r^3$ , implicando que esse parêntese

contém termos de terceira e quarta ordem em  $x$ . No segundo parêntese, temos apenas termos de primeira ordem em  $x$ , o que nos mostra que  $\xi_j = 0$ , resultando em  $C_j(t) = 0$ . Por sua vez, esse resultado implica que  $\eta_{jk}^i = 0$ , ou seja,

$$\eta^i = \sum_{j=1}^3 E_j^i(t)x^j + F^i(t).$$

Considerando esses resultados na equação que envolve termos de terceira e quarta ordem em  $x$ ,

$$\left(2 \sum_{j=1}^3 \eta_{jt}^i \dot{x}^j - \xi_{tt} \dot{x}^i\right) r^3 = 0,$$

obtemos

$$2 \sum_{j=1}^3 \dot{E}_j^i \dot{x}^j - \ddot{D} \dot{x}^i = 0,$$

cujas soluções são

$$\dot{E}_j^i = \frac{1}{2} \delta_j^i \ddot{D},$$

que, integrando em relação ao parâmetro  $t$ , nos leva a

$$E_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i \dot{D} = \text{constante}.$$

### Termos de Ordem Zero em $\dot{x}^i$ :

Agora, para os termos de ordem zero em  $\dot{x}$ , temos:

$$\eta_{tt}^i r^5 + 2k \xi_t x^i r^2 - k \sum_{j=1}^3 \eta_j^i x^j r^2 + k \eta^i r^2 - 3k \sum_{j,k=1}^3 \eta^j \delta_{jk} x^i x^k = 0.$$

Fazendo novamente a análise de ordem dos termos, constatamos que o primeiro termo da equação acima envolve termos de quinta e sexta ordem em  $x$ , enquanto os demais envolvem termos de segunda e terceira ordem. Assim, temos que  $\eta_{tt}^i = 0$ , o que resulta em  $\ddot{E}_j^i = \ddot{F}^i = 0$ .

Utilizando as expressões para  $\eta^i$  e  $\xi_t$  no resto da equação, obtemos, após uma pequena reordenação, que

$$\left(2k \dot{D} x^i r^2 - 3k \sum_{j,k,l=1}^3 E_l^j x^l \delta_{jk} x^i x^k\right) + \left(k F^i r^2 - 3k \sum_{j,k=1}^3 F^j \delta_{jk} x^i x^k\right) = 0.$$

Aqui, os dois termos no primeiro parêntese são de terceira ordem em  $x$ , enquanto os termos do segundo parêntese são de segunda ordem. Portanto, devemos ter que

$$F^i = 0,$$

e

$$2\dot{D}r^2 - 3k \sum_{j,k,l=1}^3 E_l^j x^l \delta_{jk} x^k = 0.$$

Porém, essa equação é satisfeita se

$$E_1^1 = E_2^2 = E_3^3 = \frac{2}{3}\dot{D}, \quad E_2^1 + E_1^2 = E_3^1 + E_1^3 = E_3^2 + E_2^3 = 0.$$

Lembrando que  $\dot{E}_j^i = (1/2)\delta_j^i \dot{D}$ , o resultado anterior nos mostra que, para  $i = j$ ,  $\ddot{D} = 0$  e, por consequência,

$$D(t) = b_1 t + b_2,$$

implicando que  $E_1^1 = E_2^2 = E_3^3 = (2/3)b_1$ . Já para  $i \neq j$ ,  $E_j^i = \text{constante}$ , que, para satisfazer as condições para  $E^i$  acima, escrevemos como:

$$E_j^i = \sum_{k,l=1}^3 \delta_{jk} \epsilon^{kil} c_l \quad (i \neq j),$$

onde  $\epsilon^{ijk}$  são as componentes do tensor de Levi-Civita.

Finalmente, toda essa análise nos permite concluir que

$$E_j^i = \frac{2}{3}\delta_j^i b_1 + \sum_{k,l=1}^3 \delta_{jk} \epsilon^{kil} c_l,$$

$$\xi = b_1 t + b_2,$$

e

$$\eta^i = \frac{2}{3}b_1 x^i + \sum_{j,k,l=1}^3 \delta_{jk} \epsilon^{kil} c_l x^j.$$

Portanto, o gerador de simetria é

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (b_1 t + b_2) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{2}{3} b_1 x^i + \sum_{j,k,l=1}^3 \delta_{jk} \epsilon^{kil} c_l x^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= b_1 \left( t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + b_2 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j,k,l=1}^3 c_l \left( \delta_{jk} \epsilon^{kil} x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \end{aligned}$$

A partir da expressão do gerador, vemos que o grupo de simetrias de ponto do problema de Kepler possui cinco parâmetros. Como geradores linearmente independentes, tomamos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_K &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ \mathbf{X}_t &= \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_x &= x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{X}_y &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{X}_z &= x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}$$

Imediatamente reconhecemos  $\{\mathbf{X}_x, \mathbf{X}_y, \mathbf{X}_z\}$  como os geradores do grupo de rotações em  $\mathbb{R}^3$ , o que nos permite inferir a existência de soluções com simetria esférica. Já  $\mathbf{X}_t$  é o gerador de translações temporais, o que implica em soluções invariantes por translações temporais, ou seja, estacionárias. Por sua vez, mudando para coordenadas esféricas,  $X_K$  assume a forma

$$\mathbf{X}_K = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{3} r \frac{\partial}{\partial r},$$

que é o gerador da transformação de escala  $(t, r) \mapsto (\tilde{t}, \tilde{r}) = (\lambda t, \lambda^{2/3} r)$ . Sabendo que  $\tilde{t}^2 = \lambda^2 t^2$  e  $\tilde{r}^3 = \lambda^2 r^3$ , temos que

$$\frac{\tilde{t}^2}{\tilde{r}^3} = \frac{\lambda^2 t^2}{\lambda^2 r^3} = \frac{t^2}{r^3} = \text{constante}.$$

Portanto, o conjunto de soluções que são invariantes por essa transformação é aquele para o qual vale a terceira lei de Kepler.

### 3.8.2 Aplicação a Equações Diferenciais Parciais

Para tratarmos equações diferenciais parciais, mas sem inserir complicações desnecessárias, consideremos, ilustrativamente, o caso em que temos duas variáveis independentes, isto é, o caso em que  $p = 2$ . Denotaremos aqui tais variáveis independentes por  $x$  e  $t$ . Da equação 3.34,

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial u} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{X} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial t},$$

onde, utilizando a equação 3.35, temos que

$$\begin{aligned}\phi^x &= D_x(U - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = U_x + U_u u_x - \xi_x u_x - \xi u_{xx} - \xi_u (u_x)^2 - \tau_x u_t - \tau_u u_x u_t - \\ &\quad - \tau u_{xt} + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = U_x + (U_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^t &= D_t(U - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = U_t + U_u u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_t u_x - \xi u_{xt} - \tau_t u_t - \tau u_{tt} - \\ &\quad - \tau_u u_t^2 + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = U_t - \xi_t u_x + (U_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_t u_x - \tau_u u_t^2.\end{aligned}$$

Por sua vez, para a segunda prolongação, temos que

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{X} = \text{pr}^{(1)}\mathbf{X} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

onde, utilizando novamente a equação 3.35, obtemos

$$\begin{aligned}\phi^{xx} &= D^2x(U - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = D_x(U_x + U_u u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \tau_x u_t - \tau_u u_x u_t - \tau u_{xt}) + \\ &+ \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = U_{xx} + 2U_{ux} u_x + U_{uu} u_x^2 + U_u u_{xx} - \xi_{xx} u_x - \xi_{xu} u_x^2 - \xi_x u_{xx} - \xi_{xu} u_x^2 - \xi_{uu} u_x^3 - \\ &- 2\xi_u u_x u_{xx} - \tau_{xx} u_t - \tau_{ux} u_x u_t - \tau_x u_{xt} - \tau_{xu} u_x u_t - \tau_{uu} u_x^2 u_t - \tau_u u_{xx} u_t - \tau_u u_x u_{xt} - \tau_x u_{xt} - \tau_u u_x u_{xt} - \\ &- \tau u_{xxt} + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = U_{xx} + (2U_{xu} - \xi_{xx}) u_x - t_{xx} u_t + (U_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{ux} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \\ &- \tau_{uu} u_x^2 u_t + (U_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^{xt} &= D_x D_t(U - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xtx} + \tau u_{xtt} = D_x(U_t + U_u u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_t u_x - \xi u_{xt} - \tau_t u_t - \tau u_{tt} - \\ &- \tau_u u_t^2) + \xi u_{xtx} + \tau u_{xtt} = U_{xt} + U_{ut} u_x + U_{ux} u_t + U_{uu} u_x u_t + U_u u_{xt} - \xi_{xt} u_x - \xi_{ut} u_x^2 - \xi_t u_{xx} - \\ &- \xi_{xu} u_t u_x - \xi_{uu} u_t u_x - \xi_u u_{xt} u_x - \xi_u u_t u_{xx} - \xi_x u_{xt} - \xi_u u_{xt} u_x - \xi u_{xxt} - \tau_{tx} u_t - \tau_{tu} u_x u_t - \tau_t u_{xt} - \tau_x u_{tt} - \\ &- \tau_u u_x u_{tt} - \tau u_{xtt} - \tau_{ux} u_t^2 - \tau_{uu} u_x u_t^2 - 2\tau_u u_t u_{xt} + \xi u_{xtx} + \tau u_{xtt} = \\ &= U_{xt} + (U_{ut} - \xi_{xt}) u_x + (U_{ux} - \tau_{tx}) u_t + (U_{uu} - \tau_{ut} - \xi_{ut} - \xi_{ux}) u_x u_t + (U_u - \xi_x - \tau_t) u_{xt} - \\ &- 2\xi_u u_x u_{xt} - 2\tau_u u_t u_{xt} - \xi_t u_{xx} - \tau_u u_x u_{tt} - \xi_{uu} u_x^2 u_t - \xi_u u_{xx} u_t - \tau_{uu} u_x u_t^2 - \xi_{tu} u_x^2 - \tau_{ux} u_t^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^{tt} &= D_{tt}^2(U - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{ttt} + \tau u_{ttt} = D_t(U_t + U_u u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_t u_x - \xi u_{xt} - \tau_t u_t - \tau u_{tt} - \tau_u u_t^2) \\ &+ \xi u_{ttt} + \tau u_{ttt} = U_{tt} + U_{ut} u_t + U_{tu} u_t + U_{uu} u_t^2 + U_u u_{tt} - \xi_{tt} u_x - \xi_{ut} u_x u_t - \xi_t u_{xt} - \xi_{ut} u_t u_x - \xi_{uu} u_t^2 u_x - \\ &- \xi_u u_{tt} u_x - \xi_u u_t u_{xt} - \xi_t u_{xt} - \xi_u u_t u_{xt} - \xi u_{ttx} - \tau_{tt} u_t - \tau_{ut} u_t^2 - \tau_t u_{tt} - \tau_t u_{tt} - \tau_u u_{tt} u_t - \tau u_{ttt} - \tau_{ut} u_t^2 - \\ &- \tau_{uu} u_t^3 - 2\tau_u u_t u_{tt} + \xi u_{ttt} + \tau u_{ttt} = U_{tt} + (2U_{ut} - \tau_{tt}) u_t - \xi_{tt} u_x + (U_{uu} - 2\tau_{ut}) u_t^2 - 2\xi_{ut} u_x u_t - \\ &- \tau_{uu} u_t^3 - \xi_{uu} u_t^2 u_x + (U_u - 2\tau_t) u_{tt} - 2\xi_t u_{xt} - 3\tau_u u_t u_{tt} - \xi_u u_x u_{tt} - 2\xi_u u_t u_{xt}.\end{aligned}$$

Considerando uma EDP de segunda ordem

$$\Delta(x, t, \mathbf{u}^{(2)}) = \Delta(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0,$$

temos que resolver

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{X}(\Delta) = 0,$$

para encontramos os grupos de simetria associados.

### Exemplo 3.18: Equação do Calor Bidimensional

Em duas dimensões, a equação do calor pode ser escrita na forma

$$\Delta = u^t - u^{xx} = 0,$$

o que leva a expressão para a segunda prolongação a ser dada por

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{X}(\Delta) = \phi^t - \phi^{xx} = 0,$$

que, utilizando as expressões deduzidas acima, torna-se

$$U_t - \xi_t u_x + (U_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_t u_x - \tau_u u_t^2 - U_{xx} - (2U_{xu} - \xi_{xx}) u_x + t_{xx} u_t - (U_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + 2\tau_{ux} u_x u_t + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_t - (U_u - 2\xi_x) u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_t u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xt} = 0,$$

que será satisfeita se cada um dos termos zera separadamente, o que nos leva às equações

$$\begin{aligned} (i) \quad U_t - U_{xx} &= 0 & (ii) \quad \xi_t + 2U_{xu} - \xi_{xx} &= 0; \\ (iii) \quad U_u - \tau_t + \tau_{xx} &= 0 & (iv) \quad \xi_u - 2\tau_{xu} &= 0; \\ (v) \quad \tau_u &= 0 & (vi) \quad U_{uu} - 2\xi_{xu} &= 0; \\ (vii) \quad \xi_{uu} &= 0 & (viii) \quad \tau_{uu} &= 0; \\ (ix) \quad U_u - 2\xi_x &= 0 & (x) \quad \tau_x &= 0; \\ (xi) \quad \xi_u &= 0 & (xii) \quad \tau_u &= 0; \\ & & (iii) \quad \tau_u &= 0. \end{aligned}$$

De acordo com as equações (x) e (xii),  $\tau$  não deve depender de  $x$  e  $u$ , o que resulta em  $\tau = \tau(t)$ . Levando esse resultado na equação (iv), temos que  $\xi_u = 0$  e, em (iii),  $U_u - \tau_t = 0$ . Substituindo esse último resultado em (ix) chegamos a  $2\xi_x = \tau_t$ , que pode ser prontamente integrada em  $\xi$  de modo a resultar  $\xi = (1/2)\tau_t x + \sigma(t)$ .

Agora, a expressão (xi) implica que  $\xi_{xu} = 0$ , que, substituindo na equação (vi), leva a  $U_{uu} =$ , cuja solução é da forma  $U = \beta(x, t)u + \alpha(x, t)$ . Se usarmos as expressões para  $\xi$  e  $U$  na equação (ii), obteremos  $2\beta_x = -(1/2)\tau_{tt}x + \sigma_t$ , que nos permite concluir que  $\beta = -(1/8)\tau_{tt}x^2 + \sigma_t x + \rho(t)$ .

Substituindo  $U$  na equação (i), vemos que  $\beta_t = \beta_{xx}$  e  $\alpha_t = \alpha_{xx}$ . Se usarmos a expressão obtida para  $\beta$ , chegamos a  $\tau_{ttt} = 0$ ,  $\sigma_{tt} = 0$  e  $\rho_t = -(1/4)\tau_{tt}$ . Portanto,  $\tau = b_1 t^2 + b_2 t + b_3$ ,  $\sigma = b_4 t + b_5$ ,  $\rho = -(1/2)b_1 t + b_6$ . Finalmente, basta substituímos esses resultados nas expressões de  $\xi$  e  $U$  para obtermos

$$\tau = b_1 t^2 + b_2 t + b_3;$$

$$\xi = b_1 t x + \frac{1}{2} b_2 x + b_4 t + b_5;$$

$$U = \left( -\frac{1}{4} b_1 x^2 - \frac{1}{2} b_4 x - \frac{1}{2} b_1 t + b_6 \right) u + \alpha(x, t),$$

com  $\alpha$  satisfazendo  $\alpha_t = \alpha_{xx}$ , que é a própria equação do calor. Assim, temos o gerador

$$\mathbf{X} = \left( t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4} u x^2 \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2} u t \frac{\partial}{\partial u} \right) b_1 + \left( t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial x} \right) b_2 + b_3 \frac{\partial}{\partial t} +$$

$$+ \left( t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} x u \frac{\partial}{\partial u} \right) b_4 + b_5 \frac{\partial}{\partial x} + b_6 u \frac{\partial}{\partial u} + \alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Logo,

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t};$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x};$$

$$\mathbf{X}_3 = u \frac{\partial}{\partial u};$$

$$\mathbf{X}_4 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x};$$

$$\mathbf{X}_5 = 2t \frac{\partial}{\partial x} - x u \frac{\partial}{\partial u};$$

$$\mathbf{X}_6 = 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4tx \frac{\partial}{\partial x} - (2t + x^2)u \frac{\partial}{\partial u};$$

$$\mathbf{X}_\alpha = \alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Os geradores  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  e  $\mathbf{X}_3$  são os geradores de translação temporal, espacial e de escala, respectivamente. Os dois primeiros implicam que a equação do calor é invariante por translações temporais e espaciais. O terceiro, que está associado à transformação  $u \mapsto \tilde{u} = \lambda u (\lambda > 0)$ , nos deixa cientes da linearidade da equação do calor. O mesmo ocorre para  $\mathbf{X}_\alpha$ . O gerador  $\mathbf{X}_4$  também corresponde a uma transformação da escala, que é da forma  $(x, t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t) (\lambda > 0)$ .

Para  $\mathbf{X}_5$ , o método das características nos diz que

$$\frac{dx}{ds} = 2t, \quad \frac{dt}{ds} = 0, \quad \frac{du}{ds} = -xu.$$

A segunda dessas equações tem como solução  $t = \text{constante} = t_0$ . Substituindo esse resultado na primeira equação,

$$\frac{dx}{ds} = 2t_0 \implies x = 2t_0 s + x_0,$$

que, quando substituído na terceira equação, fornece

$$\frac{du}{ds} = -(2t_0 s + x_0)u \implies \frac{du}{u} = -(2t_0 s + x_0)ds \implies u = u_0 \exp(-t_0 s^2 - x_0 s).$$

Dessa forma, obtemos a curva integral passando pelo ponto  $(x, t, u)$ , parametrizada por  $(2ts + x, t, ue^{-(ts^2 + xs)})$ . Logo, a transformação gerada por  $\mathbf{X}_5$  é aquela na qual  $(x, t, u) \mapsto (2ts + x, t, ue^{-(ts^2 + xs)})$ . Particularmente, a transformação  $x \mapsto x + 2ts$  consiste em uma transformação de Galileu que envolve dois referenciais cuja velocidade relativa entre eles é  $v = 2s$ .

Para o gerador  $\mathbf{X}_6$ , temos

$$\frac{dt}{ds} = 4t^2, \quad \frac{dx}{ds} = 4tx, \quad \frac{du}{ds} = -(2t + x^2)u.$$

A integração da primeira equação é imediata:

$$\frac{dt}{ds} = 4t^2 \Rightarrow \frac{dt}{4t^2} = ds \Rightarrow t = \frac{t_0}{1 - 4st_0}.$$

Substituindo esse resultado na segunda equação,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{4t_0}{1 + 4st_0}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{t_0}{1 + 4st_0}ds \Rightarrow x = \frac{x_0}{1 - 4st_0}.$$

Finalmente, substituindo os resultados das duas primeiras equações na terceira e efetuando algumas manipulações, constatamos que sua solução é

$$u = u_0 \sqrt{1 - 4st_0} \exp\left(\frac{-sx_0^2}{1 - 4st_0}\right).$$

Portanto, a transformação gerada por  $\mathbf{X}_6$  é

$$(x, t, u) \mapsto \left( \frac{x}{1 - 4st}, \frac{t}{1 - 4st}, u \sqrt{1 - 4st} \exp\left(\frac{-sx^2}{1 - 4st}\right) \right).$$

Embora tal transformação não tenha nenhum significado físico, sua importância reside no fato de que ela pode ser utilizada para gerar outras soluções da equação do calor a partir de uma solução conhecida. Logo, se  $u = f(x, t)$  é solução, então  $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t})$  também é solução. De fato, se as duas primeiras transformações forem invertidas e substituídas na terceira, temos que

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f\left(\frac{\tilde{x}}{1 + 4s\tilde{t}}, \frac{\tilde{t}}{1 + 4s\tilde{t}}\right) \sqrt{\frac{1}{1 + 4s\tilde{t}}} \exp\left(\frac{-s\tilde{x}^2}{1 + 4s\tilde{t}}\right).$$

No caso particular em que  $f(x, t) = \text{constante} = c_0$ , chegamos a

$$f(x, t) = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 4st}} \exp\left(\frac{-sx^2}{1 + 4st}\right),$$

que é a solução fundamental da equação do calor [29, 30].

As relações de comutação entre os geradores de simetria da equação do calor são apresentadas na tabela 2. Dado que o corolário 3.1, apresentado na próxima seção, assegura que todas as simetrias infinitesimais estão na álgebra de Lie, temos que se  $\alpha(x, t)$  é solução da equação do calor, também o será  $\alpha_x$ ,  $\alpha_t$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  e  $\alpha'''$ . Além disso, toda expressão obtida a partir dessas pela aplicação dos geradores acima também será solução.

	$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_2$	$\mathbf{X}_3$	$\mathbf{X}_4$	$\mathbf{X}_5$	$\mathbf{X}_6$	$\mathbf{X}_\alpha$
$\mathbf{X}_1$	0	0	0	$2\mathbf{X}_1$	$2\mathbf{X}_2$	$4\mathbf{X}_4 - 2\mathbf{X}_3$	$\mathbf{X}_{\alpha_t}$
$\mathbf{X}_2$	0	0	0	$\mathbf{X}_1$	$-\mathbf{X}_3$	$2\mathbf{X}_5$	$\mathbf{X}_{\alpha_t}$
$\mathbf{X}_3$	0	0	0	0	0	0	$-\mathbf{X}_\alpha$
$\mathbf{X}_4$	$-\mathbf{X}_2$	$-2\mathbf{X}_1$	0	0	$\mathbf{X}_5$	$2\mathbf{X}_6$	$\mathbf{X}_{\alpha'}$
$\mathbf{X}_5$	$\mathbf{X}_3$	$-2\mathbf{X}_2$	0	$-\mathbf{X}_5$	0	0	$\mathbf{X}_{\alpha''}$
$\mathbf{X}_6$	$-2\mathbf{X}_5$	$-2\mathbf{X}_3 - 4\mathbf{X}_4$	0	$-2\mathbf{X}_6$	0	0	$\mathbf{X}_{\alpha'''}$
$\mathbf{X}_\alpha$	$-\mathbf{X}_{\alpha_x}$	$-\mathbf{X}_{\alpha_t}$	$\mathbf{X}_\alpha$	$\mathbf{X}_{\alpha'}$	$-\mathbf{X}_{\alpha''}$	$\mathbf{X}_{\alpha'''}$	0

Tabela 2 – Comutadores dos geradores de simetria da equação do calor bidimensional.

Aqui,  $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$ ,  $\alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha$  e  $\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha$ .

### 3.9 Resultados Adicionais

Por questões de completude, alguns resultados adicionais a respeito dos geradores de transformações e suas prolongações a espaço de jatos serão apresentados.

Primeiramente, busquemos entender como o comutador entre dois geradores  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  é afetado por uma transformação de variáveis  $(x, y) \mapsto (u, v)$ . Perante tal transformação, e tendo em mente a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= \xi_i \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial}{\partial y} = \xi_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \eta_i \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v} \right) = \\ &= \left( \xi_i \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left( \xi_i \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial v} = \mathbf{X}(u) \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{X}(v) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(u) \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{X}(v) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (3.40)$$

onde  $\hat{\mathbf{X}}$  denota o gerador nas coordenadas  $(u, v)$ .

Consideremos o comutador entre dois geradores  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ ,

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3.$$

Seja  $F$  uma função qualquer. Então, com o auxílio de 3.40,

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\mathbf{X}}_2]F &= \hat{\mathbf{X}}_1(\hat{\mathbf{X}}_2(F)) - \hat{\mathbf{X}}_2(\hat{\mathbf{X}}_1(F)) = \hat{\mathbf{X}}_1 \left( \mathbf{X}_2(u) \frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_2(v) \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \\ &\quad - \hat{\mathbf{X}}_2 \left( \mathbf{X}_1(u) \frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_1(v) \frac{\partial F}{\partial v} \right) = \mathbf{X}_1(u) \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathbf{X}_2(u) \frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_1(v) \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \\ &\quad + \mathbf{X}_1(v) \frac{\partial}{\partial v} \left( \mathbf{X}_2(u) \frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_2(v) \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \mathbf{X}_2(u) \frac{\partial}{\partial u} \left( \mathbf{X}_1(u) \frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_1(v) \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \\ &\quad - \mathbf{X}_2(v) \frac{\partial}{\partial v} \left( \mathbf{X}_1(u) \frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_1(v) \frac{\partial F}{\partial v} \right) = (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2(u)) \frac{\partial F}{\partial u} + (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2(v)) \frac{\partial F}{\partial v} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1(u))\frac{\partial F}{\partial u} - (\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1(v))\frac{\partial F}{\partial v} &= ([\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]u)\frac{\partial F}{\partial u} + ([\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]v)\frac{\partial F}{\partial v} = \\ &= \mathbf{X}_3(u)\frac{\partial F}{\partial u} + \mathbf{X}_3(v)\frac{\partial F}{\partial v} = \hat{\mathbf{X}}_3 F. \end{aligned}$$

Dado que  $F$  é arbitrária, obtemos que

$$[\hat{\mathbf{X}}_1, \hat{\mathbf{X}}_2] = \mathbf{X}_3(u)\frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{X}_3(v)\frac{\partial}{\partial v} = \hat{\mathbf{X}}_3.$$

De onde extraímos que o comutador entre  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  independe do sistema de coordenadas utilizado. Consequentemente, a necessidade de diferenciar  $\hat{\mathbf{X}}_i$  e  $\mathbf{X}_i$  não existe mais.

Para o nosso desenvolvimento subsequente, trabalhemos com transformações aplicadas a equações diferenciais ordinárias. Além disso, consideremos como variável independente  $x$  e como variável dependente  $y$ . Como já sabemos, a prolongação do gerador de simetria até ordem  $n$  é

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(n)}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}.$$

Definamos o comutador dos geradores prolongados como

$$[\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_1, \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_2] = \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_1 \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_2 - \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_2 \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_1.$$

Assim, temos a seguinte proposição:

### Proposição 3.2

Se  $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3$ , então

$$[\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_1, \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_2] = \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_3.$$

Ou,

$$\text{pr}^{(n)}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = [\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_1, \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_2].$$

### Prova 3.5

Suponhamos que

$$\mathbf{X}_1 = \partial_y, \quad \mathbf{X}_2 = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y.$$

Dado que o comutador é invariante por mudança de coordenadas, trabalhar com essa escolha específica, que corresponde a coordenadas canônicas em  $\mathbf{X}_1$ , não incorre em perda de generalidade.

O comutador entre  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  é

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \partial_y(\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y) - (\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y)\partial_y = \xi_y\partial_x + \eta_y\partial_y.$$

A expressão para a primeira prolongação diz que

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_3 = \xi_y \partial_x + \eta_y \partial_y + (D_x \eta_y - y' D_x \xi_y) \partial_{y'}.$$

Mas,  $D_x$  e  $\partial_y$  comutam. Pois,

$$D_x \partial_y = (\partial_x + y' \partial_y + \dots) \partial_y = \partial_x \partial_y + y' \partial_y \partial_y + \dots = \partial_y (\partial_x + y' \partial_y + \dots) = \partial_y D_x.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (D_x \eta_y - y' D_x \xi_y) \partial_{y'} &= (D_x \partial_y (\eta) - y' D_x \partial_y (\xi)) \partial_{y'} = \\ &= \{ \partial_y (D_x \eta - y' D_x \xi) \} \partial_{y'} = \partial_y \eta^{(1)} \partial_{y'} = \eta_y^{(1)} \partial_{y'}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_3 = \xi_y \partial_x + \eta_y \partial_y + \eta_y^{(1)} \partial_{y'} = [\partial_y, \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta^{(1)} \partial_{y'}] = [\mathbf{Pr}^{(1)}\mathbf{X}_1, \mathbf{Pr}^{(1)}\mathbf{X}_2].$$

Para  $k > 1$ , com  $k \leq n$  sendo a ordem de prolongação, seguimos uma linha de raciocínio análoga. Afinal,

$$D_x \eta_y^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi_y = \partial_y (D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi) = \eta_y^{(k)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(k)}\mathbf{X}_3 &= \xi_y \partial_x + \eta_y \partial_y + \eta_y^{(1)} \partial_{y'} + \dots + \eta_y^{(k)} \partial_{y^k} = \\ &= [\partial_y, \xi \partial_x + \eta \partial_y + y' \eta^{(1)} \partial_{y'} + \dots + \eta^{(k)} \partial_{y^k}] = [\text{pr}^{(k)}\mathbf{X}_1, \text{pr}^{(k)}\mathbf{X}_2] \end{aligned}$$

Embora tenhamos provado a proposição apenas para esse caso particular, o resultado é de validade geral.  $\square$

Outra propriedade da prolongação de um gerador, que é a de sua linearidade, refletindo a estrutura de espaço vetorial associada à álgebra, e que não se perde na prolongação desses objetos a espaços de jatos, é apresentada na próxima proposição:

### Proposição 3.3

Sejam  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  geradores de simetrias de ponto de Lie, e sejam  $a, b$  dois números reais quaisquer. É propriedade de um gerador prolongado que

$$\text{pr}^{(n)}(a \cdot \mathbf{X}_1 + b \cdot \mathbf{X}_2) = a \cdot \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_1 + b \cdot \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_2.$$

### Prova 3.6

Por simplicidade, demonstraremos a proposição para o caso de ODEs com  $p = q = 1$ .

De acordo com o enunciado, temos que

$$\begin{aligned} a \cdot \text{pr}^{(n)} \mathbf{X}_1 + b \cdot \text{pr}^{(n)} \mathbf{X}_2 &= a \cdot \left( \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial y'} + \dots \right) + \\ & b \cdot \left( \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_2^{(1)} \frac{\partial}{\partial y'} + \dots \right) = (a \cdot \xi_1 + b \cdot \xi_2) \frac{\partial}{\partial x} + \\ & (a \cdot \eta_1 + b \cdot \eta_2) \frac{\partial}{\partial y} + (a \cdot \eta_1^{(1)} + b \cdot \eta_2^{(1)}) \frac{\partial}{\partial y'} + \dots = \text{pr}^{(n)}(a \cdot \mathbf{X}_1 + b \cdot \mathbf{X}_2). \end{aligned}$$

A demonstração para o caso geral segue diretamente da aplicação do mesmo raciocínio.  $\square$

Destes resultados, bem como das discussões anteriores, podemos extrair o seguinte corolário [24]:

### Corolário 3.1

Seja  $\Delta$  um sistema de equações diferenciais definido sobre  $M \subset X \times U$ . O conjunto de todas as simetrias infinitesimais desse sistema forma uma álgebra de Lie de campos vetoriais em  $M$ . Além disso, se a álgebra de Lie é de dimensão finita, a parte conectada do grupo de simetria é um grupo de Lie local de transformações agindo em  $M$ .

## 3.10 Aspectos Computacionais

Embora o procedimento de determinação de simetrias de ponto de Lie seja essencialmente simples, o cálculo pode se tornar facilmente enfadonho. À medida que a ordem da EDO ou EDP aumenta, ou quanto mais complicada a expressão for, os coeficientes do gerador prolongado se tornam mais complicados. Como consequência, a manipulação algébrica para encontrar o sistema de EDPs associado e suas soluções se torna mais difícil de ser feita.

Por outro lado, notemos que o procedimento a ser seguido é particularmente direto, favorecendo a implementação de uma rotina computacional responsável por efetuar todo o algebrismo necessário. Trabalhos nesse sentido podem ser encontrados na literatura [31–33]. Aqui, focaremos na biblioteca `ReLie` [34] para o pacote de sistemas algébricos `REDUCE` [35].

O `REDUCE` é um sistema computacional algébrico de propósito geral de código aberto, começado por Anthony Hearn e escrito em dialeto Lisp (Portable Standard Lisp). Sua documentação está disponível em [35]. Por sua vez, a biblioteca `ReLie` vem sendo desenvolvida por Francesco Oliveri desde a década de 1980 para lidar com o problema de determinar as simetrias de Lie para equações diferenciais e lagrangianas.

A sintaxe da `ReLie` é particularmente simples: primeiramente, após iniciar a biblioteca, o usuário deve providenciar os dados para a variável global `jetorder`, que determina a ordem máxima da prolongação do gerador de simetrias, e as listas `xvar`, cujas entradas são as variáveis independentes, e `uvar`, recebendo as variáveis dependentes.

Após isso, deve ser informada a lista `diffeqs`, contendo os lados esquerdos das equações a serem estudadas, onde o lado direito é tomado igual a zero. Adicionalmente, a lista `leadders`, onde cada entrada corresponde a uma derivada presente em uma das equações diferenciais do sistema, que será eliminada conforme a forma da expressão correspondente durante o desenvolvimento da condição de simetria. Ambas as listas devem ter o mesmo tamanho; do contrário, um alerta é emitido.

Em seguida, há uma série de funções a serem introduzidas para implementar o algoritmo. A função `relieinit()` inicializa os objetos necessários. A função `relieinv()` determina a condição de invariância (expressa na definição 2.8) para a equação. Por sua vez, a lista `invcond` providencia acesso a essa condição.

Invocando a função `reliesolve()`, o pacote `CRACK` [36] é utilizado para resolver o sistema sobredeterminado de equações diferenciais parciais lineares resultantes de uma dada condição de invariância. Após isso, chamando `generators`, o usuário terá acesso a uma lista onde cada elemento é a lista de geradores de uma determinada simetria. Por sua vez, a lista `splitsymmetries` tem como elementos as expressões dos infinitesimais.

Embora tenhamos implementado uma série de funções em sequência para fazer o trabalho padrão, há uma função geral denominada `relie()` que recebe um argumento (1, 2, 3 ou 4), sendo equivalente a implementar uma sequência das funções básicas. Por exemplo, `relie(4)` é equivalente à sequência `relieinit()`, `relieinv()`, `reliedet()` e `reliesolve()`.

Outras funcionalidades dignas de nota são a lista `prolongation` (lista de duas listas, onde a primeira é a lista de coordenadas no espaço de jatos e a segunda contém os infinitesimais correspondentes), e a função `comutatortable(generators)`, que fornece a tabela de comutação de um conjunto de geradores infinitesimais varrendo uma álgebra de Lie. Para mais detalhes e outras funcionalidades, o leitor é convidado a consultar a referência citada acima.

Doravante, ficará subtendido que a análise de simetrias de ponto de uma equação diferencial (e de simetrias variacionais de uma lagrangiana, que discutiremos no próximo capítulo) será feita com o auxílio da biblioteca `ReLie`. Para ilustrarmos a discussão desta seção, é instrutivo que retornemos à equação do calor, discutida no exemplo 3.18.

```

2: jetorder:=2 $
3: xvar:={t,x} $
4: uvar:={u} $
5: diffeqs:={u_t-u_xx} $
6: leadders:={u_t} $
7: relie(4) $

Calling relieinit()...

You may compute exact point symmetries.

Calling relieinv()...

'invcond' has been computed (invariance conditions).

Calling reliedet()...

'deteqs' have been computed (determining equations).

Calling reliesolve()...

'symmetries' have been computed (infinitesimals).

```

Figura 6 – Implementação do algoritmo providenciado pela biblioteca ReLie para a equação do calor  $u_t - u_{xx} = 0$ .

### Exemplo 3.19: Equação do Calor Bidimensional

A figura 6 apresenta as definições básicas para a equação do calor  $u_t - u_{xx}$  que analisamos anteriormente. Naquele exemplo, não eliminamos nenhuma derivada, pois a condição de simetria era particularmente simples para haver essa necessidade. Obviamente, isso não será verdade para outros casos. Mas, para propósitos ilustrativos, definimos a função `ladder()` com a derivada temporal como argumento, nos termos que explicamos acima.

Na figura 7, os geradores de simetria de ponto de Lie são calculados e apresentados convenientemente. O argumento na função `reliegen` serve ao propósito de multiplicar cada gerador por um fator numérico apropriado à apresentação que se queira dar. Por sua vez, a função `newordering` apenas ordena os geradores de acordo com alguma ordem particular especificada pelo usuário. No nosso exemplo, os geradores são apresentados na mesma ordem e forma com a qual aparecem no exemplo 3.18.

É válido notar que, além dos geradores apresentados na figura 7, se o usuário implementar a função *symmetries*, obterá, além dos infinitesimais associados a esses geradores, uma função  $f_1$ . Essa função corresponde justamente à função  $\alpha$  encontrada no exemplo 3.18, e o código fornece prontamente como ela se apresenta no gerador de simetria  $X_\alpha$ .

```

10: reliegen(1,{-4,-2,-2,-8,-1,4}) $
'generators' have been computed (vector fields of
symmetries).
11: generators;
{{0, 2*t, - u*x},
{0,1,0},
{2*t,x,0},
      2      2
{4*t ,4*t*x,u*(- 2*t - x )},
{1,0,0},
{0,0,u}}

12: generators:=newordering(generators, {5,2,6,3,1,4}) $
13: generators;
{{1,0,0},
{0,1,0},
{0,0,u},
{2*t,x,0},
{0, 2*t, - u*x},
      2      2
{4*t ,4*t*x,u*(- 2*t - x )}}

```

Figura 7 – Geradores de simetrias da equação do calor.

### 3.11 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo, buscamos apresentar o método das prolongações no contexto de equações diferenciais de uma forma geral, mas que, ao mesmo tempo, justifique os resultados obtidos de maneira rigorosa o suficiente. Naturalmente, há muito mais a ser coberto sobre o assunto do que esta dissertação sugere, pois o tópico é bastante extenso. Além disso, toda a construção teórica pode ser feita por vias diferentes da qual fizemos, corroborando a riqueza do assunto. Dado que tudo isso foge aos nossos propósitos aqui, deixaremos ao leitor interessado referências para se aprofundar.

Lembremos que, ao longo deste capítulo, trabalhamos inteiramente com transformações de ponto. Isso não é acidental, mas baseado na importância que tais transformações desempenham na física. Portanto, dado que, na segunda parte deste trabalho, gostaríamos de apresentar exemplos de aplicação do método a equações de interesse físico, nosso foco se justifica.

Porém, devemos notar que o método das prolongações não se restringe apenas a transformações de ponto. De fato, o método pode ser construído também para simetrias

de contato, dinâmicas, aproximadas, semi-clássicas e assim por diante [22–24, 37–39]. Novamente, para o leitor interessado, as referências apresentadas constituem um ótimo material.

No próximo capítulo, exploraremos uma dessas outras formas de simetrias. Nosso intuito será a construção de um raciocínio análogo ao que fizemos aqui no contexto de equações diferenciais oriundas de um princípio variacional e, para tal, devemos nos preocupar em como podemos explorar a aplicação de transformações de ponto a funções lagrangianas.

## 4 Prolongações II: Simetrias Variacionais

Após construirmos um método geral, visando a extração de simetrias de ponto de Lie de equações diferenciais, avançaremos para o estudo das chamadas simetrias variacionais. Veremos que tais simetrias podem ser extraídas da lagrangiana associada a determinado problema variacional e que constituem simetrias das equações de Euler-Lagrange correspondentes. Além disso, mostraremos que toda essa discussão leva ao teorema de Noether, que relaciona simetrias provenientes de lagrangianas com grandezas conservadas.

### 4.1 Elementos Gerais do Cálculo de Variações

Voltemos ao espaço euclidiano  $X \times U$ , com  $X = \mathbb{R}^p$  sendo o subespaço das variáveis independentes e  $U = \mathbb{R}^q$  das variáveis dependentes. Consideremos  $\Omega \subset X$  um subconjunto conectado e aberto com fronteira suave  $\partial\Omega$ . Um **problema variacional** consiste na determinação dos extremos (máximo ou mínimo) do funcional

$$S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  são funções definidas em  $\Omega$ . A função  $L$  é suave nas variáveis  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e nas várias derivadas, e recebe o nome de **lagrangiana** do problema variacional. Por sua vez, a classe de funções sobre as quais  $L$  é extremizada depende tanto das condições de fronteira quanto das condições de diferenciabilidade requeridas dos extremos  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ .

O caso geral, sobretudo em questões referentes ao grau de suavidade requerido pelos extremos de um dado problema variacional e ao espaço de funções sobre o qual o processo de extremização ocorre, requer discussões aprofundadas a respeito de análise funcional não linear. Porém, para nossos propósitos, tal análise não é diretamente relevante, e aqui poderemos trabalhar sob o postulado geral de que todos os extremos com os quais teremos contato serão de classe  $C^\infty$ . Algo também pode ser dito sobre a localidade de um funcional: dizemos que um funcional é **local** se puder ser escrito na forma 4.1.

#### Exemplo 4.1

Seja o elemento de comprimento  $dl^2 = dx^2 + dy^2$ , que pode ser reescrito como  $dl = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ . A partir dele, podemos definir o comprimento de uma curva  $\{y(x) | x \in [a, b]\}$  por

$$C[x] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

que é um exemplo de funcional local. Por outro lado, o funcional

$$J[x] = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

é não local.

De acordo com [24], consideremos o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^q f^{\alpha}(\mathbf{x}) g^{\alpha}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

tal que  $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Isso nos permite definir derivadas funcionais como se segue:

#### Definição 4.1: Derivada Funcional

Seja  $S[\mathbf{u}]$  um problema variacional, com  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  uma função definida no aberto  $\Omega$ . A **derivada variacional** de  $S$  é a  $q$ -tupla

$$\delta S[\mathbf{u}] = (\delta_1 S[\mathbf{u}], \dots, \delta_q S[\mathbf{u}]),$$

cujas componentes são  $\delta_{\alpha} S = \delta S / \delta u^{\alpha}$ . Para esta operação, vale a propriedade

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} S[f + \epsilon\eta] = \int_{\Omega} \delta S[f(\mathbf{x})] \cdot \eta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left\langle \frac{\partial S}{\partial u^{\alpha}}, \eta \right\rangle, \quad (4.2)$$

onde  $\eta(\mathbf{x}) = (\eta^1(\mathbf{x}), \dots, \eta^q(\mathbf{x}))$  é uma função suave com suporte compacto em  $\Omega$ <sup>a</sup>, tal que  $f + \epsilon\eta$  satisfaça qualquer condição de fronteira que possa ser imposta sobre o espaço de funções no qual  $S$  está sendo extremizada.

<sup>a</sup> Uma função tem suporte compacto se é zero fora de um conjunto compacto, onde, por conjunto compacto, nos referenciamos a qualquer subconjunto  $S$  de um espaço topológico  $X$  tal que para qualquer cobertura aberta de  $S$  existe uma subcobertura de  $S$ . Por exemplo, a função  $f : x \rightarrow x^2$  não possui suporte compacto em todo o seu domínio ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ). Por outro lado, a função  $f(x)$ , tal que  $f(x) = 1 - x^2$  para  $|x| < 1$  e  $f(x) = 0$  para  $|x| \geq 1$ , tem suporte compacto em  $[-1, 1]$  [40].

#### Exemplo 4.2

Para ilustrar a definição que acabamos de dar, tomemos  $S[u] = \int_0^1 u^2(x) dx$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} \delta S[u] &= \left. \frac{dS[f + \epsilon\eta]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} [f^2(x) + 2\epsilon f(x)\eta(x) + \epsilon^2 \eta^2(x)] dx \Big|_{\epsilon=0} = \\ &= \int_0^1 2f(x)\eta(x) dx = (2f, \eta). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\delta S[u]}{\delta u} = 2f(x) = 2u.$$

Nos encontramos em posição para avançar para a seguinte proposição:

### Proposição 4.1: Extremos de $S$

Se  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  é extremo do problema variacional  $S[\mathbf{u}]$ , então vale

$$\delta S[f(\mathbf{x})] = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.3)$$

### Prova 4.1

Da definição 4.1, sabemos que, se  $\eta$  é uma função com suporte compacto em  $\Omega$ , a função  $f + \epsilon\eta$  satisfará qualquer condição de fronteira imposta ao espaço de funções no qual a função suave  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  está definida. Nesse sentido,  $f + \epsilon\eta$  pertence ao mesmo espaço de funções e, em termos de  $\epsilon$ ,  $S[\mathbf{x} + \epsilon\eta]$  deve ter um extremo em  $\epsilon = 0$ . Portanto, a equação 4.2 deve ser zero para todo  $\eta$  em  $\Omega$ , o que mostra que a expressão 4.3 precisa valer em todo lugar. Pelo mesmo argumento,  $\delta S$  é única.  $\square$

Antes de seguirmos, façamos uma breve padronização de notação. Para a função delta de Dirac, utilizaremos

$$\delta_y(x) = \delta(x - y).$$

Dado que a função delta de Dirac é tal que

$$\delta(x)f(x) = f(0) = (\delta, f),$$

temos que

$$\delta(x - a)f(x) = f(a) = (\delta_a, f).$$

Assim,

$$(\delta_y, f) = f(y).$$

Agora, se escrevermos  $\eta(\mathbf{x}) = (\delta_{\mathbf{x}}, \eta) = \int_a^b \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\eta(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$ , temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha} \middle| \eta \right\rangle &= \int_a^b \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}')\eta(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \int_a^b \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}') \int_a^b \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x}d\mathbf{x}' = \\ &= \int_a^b \int_a^b \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})d\mathbf{x}'\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \left\langle \int_a^b \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})d\mathbf{x}' \middle| \eta \right\rangle. \end{aligned}$$

Mas, por propriedade da função delta,

$$\int_a^b \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})d\mathbf{x}' = \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\delta L[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha} \middle| \delta_{\mathbf{x}} \right\rangle.$$

Logo, no sentido da definição 4.1, temos

$$\frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta \mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left. \frac{dS[f + \epsilon \delta_{\mathbf{x}}]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}.$$

Neste ponto, estamos prontos para construir a regra da cadeia. Para tal, tomemos uma função  $\mathfrak{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sejam, por sua vez, os funcionais  $F_i (i = 1, \dots, n)$ ,  $F_i : \mathfrak{C}^k[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotemos  $F = (F_1, \dots, F_n)$ . Então,  $S = \mathfrak{L} \circ F$  será um funcional. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}) &= \frac{\delta(\mathfrak{L} \circ F)[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d(\mathfrak{L} \circ F)[f + \epsilon \delta_x]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathfrak{L}(F_1[f + \epsilon \delta_x], \dots, F_n[f + \epsilon \delta_x]) \right|_{\epsilon=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i \mathfrak{L} \Big|_{F[\mathbf{u}(\mathbf{x})]} \left. \frac{dF_i[f + \epsilon \delta_x]}{d\epsilon}(\mathbf{x}) \right|_{\epsilon=0} = \sum_{i=1}^n \partial_i \mathfrak{L} \Big|_{F[\mathbf{u}(\mathbf{x})]} \frac{\delta F_i[\mathbf{u}(\mathbf{x})]}{\delta u^\alpha}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\frac{\delta(\mathfrak{L} \circ F)[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha} = \sum_{i=1}^n \partial_i \mathfrak{L} \frac{\delta F_i[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha},$$

que é a regra da cadeia envolvendo derivadas funcionais.

Como último resultado preliminar, definamos um funcional que nos será útil em alguns desenvolvimentos subsequentes, denominado **funcional de avaliação**, que é dado por

$$E_x[y] = y(x).$$

Neste caso, temos

$$\frac{\delta E_x[y]}{\delta y}(z) = \left. \frac{dE_x[y + \epsilon \delta_z]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d(y(x) + \epsilon \delta(x-z))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \delta(x-z).$$

Mas, como  $\delta(x-z) = \delta(z-x)$ , segue que

$$\frac{\delta E_x[y]}{\delta y} = \frac{\delta y(x)}{\delta y(z)} = \delta_x = \delta(x-z). \quad (4.4)$$

Podemos generalizar de forma a construir o funcional

$$E_{\mathbf{x},i}[y] = \partial_i y(\mathbf{x}).$$

Sua derivada funcional é dada por

$$\frac{\delta E_{\mathbf{x},i}[y]}{\delta y(\mathbf{z})} = \left. \frac{dE_{\mathbf{x},i}[y + \epsilon \delta_{\mathbf{z}}]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d(\partial_i y(\mathbf{x}) + \epsilon \partial_i \delta_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \partial_i \delta_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \partial_{x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}),$$

onde  $\partial_{x^i}$  apenas evidencia a derivação em termos das coordenadas e  $\delta_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})$  segue apenas a adequação da notação que fizemos anteriormente. Assim, concluimos que

$$\frac{\delta \partial_i y(\mathbf{x})}{\delta y(\mathbf{z})} = \partial_{x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Equações de Euler-Lagrange

No cálculo variacional, é sabido que a trajetória seguida por um sistema físico é aquela na qual a ação é extremizada, conforme estabelecido pelo princípio de Hamilton [41, 42]. Nesse sentido, a proposição 4.1, bem como os resultados acima, ditam que tal trajetória será aquela na qual

$$\delta S[\mathbf{u}] = \frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta \mathbf{u}} = 0.$$

Na presente subseção, utilizaremos o princípio de Hamilton para construir as famosas equações de **Euler-Lagrange** para um sistema qualquer descrito por uma dada lagrangiana. Primeiramente, faremos isso em um caso particular e, depois, generalizaremos esse resultado.

#### 4.1.1.1 Caso $p = q = 1$

Consideremos uma forma geral do funcional de ação com apenas uma variável independente  $x$  e uma dependente  $y(x)$ , dada por

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Agora,

$$\frac{\delta S}{\delta y(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta L(x', y(x'), y'(x'))}{\delta y(x)} dx',$$

que, utilizando a regra da cadeia como a definimos anteriormente, podemos reescrever

$$\frac{\delta L(x', y(x'), y'(x'))}{\delta y(x)} = \frac{\partial L}{\partial y(x')} \frac{\delta y(x')}{\delta y(x)} + \frac{\partial L}{\partial y'(x')} \frac{\delta y'(x')}{\delta y(x)}.$$

Se nos lembrarmos das equações 4.4 e 4.5, podemos escrever a expressão acima como

$$\frac{\delta L(x', y(x'), y'(x'))}{\delta y(x)} = \frac{\partial L}{\partial y(x')} \delta(x' - x) + \frac{\partial L}{\partial y'(x')} \delta'(x' - x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta y(x)} &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial y(x')} \delta(x' - x) + \frac{\partial L}{\partial y'(x')} \delta'(x' - x) \right) dx' = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y(x')} \delta(x' - x) dx' + \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx'} \left( \frac{\partial L}{\partial y'(x')} \delta(x' - x) \right) - \frac{d}{dx'} \frac{\partial L}{\partial y'(x')} \delta(x' - x) \right) dx' = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial y(x')} - \frac{d}{dx'} \frac{\partial L}{\partial y'(x')} \right) \delta(x' - x) dx'. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\delta S}{\delta y(x)} = \frac{\partial L}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'(x)}, \quad (4.6)$$

que, utilizando a condição para a extremização de um funcional, nos leva a

$$\frac{\partial L}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'(x)} = 0,$$

que são as **equações de Euler-Lagrange**.

**Exemplo 4.3: O Problema da Braquistócrona**

O problema da braquistócrona [41] é um célebre problema proposto no fim do século XVII pelo matemático suíço Johann Bernoulli como um desafio aos seus colegas europeus. O problema pode ser enunciado como se segue:

Sejam dois pontos A e B a alturas diferentes, e que não estejam necessariamente sob a mesma linha vertical, qual é a trajetória que uma partícula de massa  $m$  partindo do repouso em A chega a B no menor tempo possível, tendo a gravidade como a única força atuante?

Para resolvermos a questão, fixemos a origem do sistema de coordenadas no ponto A e com tal orientação que o eixo  $y$  coincida com a direção vertical. Pelo princípio da conservação da energia, sabemos que  $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ , o que leva a  $v = \sqrt{2gy}$ . Sabemos ainda que o elemento de comprimento é dado por  $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ . Assim, o tempo gasto para a partícula partindo de A (com  $x = 0$ ) alcançar B ( $x = a$ ) será dado por

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx.$$

A braquistócrona é justamente a curva que minimiza esse funcional.

Substituindo

$$L = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

nas equações de Euler-Lagrange, obtemos que

$$2yy'' + 1 + y'^2 = 0.$$

Se fizermos a mudança de variável  $y' = p$ , o que implica que  $y'' = (dp/dy)p$ , a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{2pdp}{1 + p^2} = -\frac{dy}{y}.$$

Essa equação é simples de resolver, com solução  $y(1 + p^2) = \text{constante} = c$ . Assim,

$$y(1 + y'^2) = c,$$

que pode ser reescrita como

$$dx = \sqrt{\frac{y}{c - y}} dy.$$

Fazendo a mudança de variável

$$y = c \sin^2 \theta / 2 = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta),$$

chegamos a

$$dx = c \sin^2 \theta / 2 \implies x = \frac{c}{2} (\theta - \sin \theta) + k.$$

Mas, pela condição inicial  $x(\theta = 0) = 0$ , concluímos que  $k = 0$ . Assim, a curva pela qual a partícula vai do ponto  $A$  ao ponto  $B$  no menor tempo possível tem equações paramétricas

$$x = \frac{c}{2} (\theta - \sin \theta), \quad y = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta),$$

que descrevem uma cicloide.

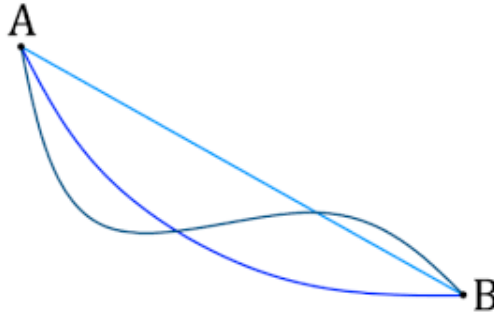


Figura 8 – Curvas candidatas à de menor tempo.

#### 4.1.1.2 Caso Geral

Antes de estabelecermos as equações de Euler-Lagrange em sua forma mais geral, comecemos com uma pequena digressão. Sabemos que

$$\int \partial_{x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \left. \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}.$$

Se supormos que  $f(\mathbf{x})$  é da forma

$$f(\mathbf{x}) = F[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})],$$

segue que

$$\frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} = \frac{\partial F[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}]}{\partial x^i} + \sum_J \frac{\partial F[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}]}{D_J \mathbf{u}(\mathbf{x})} \frac{D_J \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x^i} = \frac{DF[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}]}{Dx^i} = D_{x^i} F[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}],$$

onde estamos associando  $D$  à notação de derivada total que introduzimos no capítulo anterior. Daí,

$$\int \partial_{x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) F[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}] d\mathbf{x} = - D_{x^i} F[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}. \quad (4.7)$$

Digressão feita, tomemos a ação definida por

$$S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

onde  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$ ,  $dx^1, \dots, dx^p$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ . A condição para o extremo desse funcional é dada por

$$\frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q. \quad (4.8)$$

De maneira completamente análoga ao que fizemos anteriormente,

$$\frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha(\mathbf{x})} = \int_{\Omega} \sum_{J, \beta} \frac{\partial L(\mathbf{x}', \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}'))}{\partial u_J^\beta(\mathbf{x}')} \frac{\delta u_J^\beta(\mathbf{x}')}{\delta u^\alpha(\mathbf{x})} d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} \sum_{J, \beta} \frac{\partial L(\mathbf{x}', \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}'))}{\partial u_J^\beta(\mathbf{x}')} \delta_\alpha^\beta D_J \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'.$$

Utilizando a equação 4.7,

$$\frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha(\mathbf{x})} = \sum_J (-1)^{|J|} D_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha},$$

que generaliza a equação 4.6. Aqui, estamos prontos para definir o operador de Euler.

#### Definição 4.2: Operador de Euler

Para  $1 \leq \alpha \leq q$ , o  $\alpha$ -ésimo **operador de Euler**  $\mathfrak{E}_\alpha$  é definido por

$$\mathfrak{E}_\alpha = \sum_J (-1)^{|J|} D_J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}.$$

Porém, lembrando da condição de extremização do funcional sintetizada pela equação 4.8, concluímos que

$$\mathfrak{E}_\alpha(L) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Essas são as equações de Euler-Lagrange na sua forma mais geral.

A construção teórica dessa subseção pode ser sintetizada pelo seguinte teorema:

#### Teorema 4.1: Equações de Euler-Lagrange

Seja  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  o extremo suave do problema variacional  $S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}$ .

Portanto, deve ser solução das equações de Euler-Lagrange

$$\mathfrak{E}_\alpha(L) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Algo que deve ser dito é que nem toda solução das equações de Euler-Lagrange é um extremo. As outras soluções fornecem outros tipos de pontos críticos para o funcional [24].

**Exemplo 4.4**

Tomemos o caso em que  $p = q = 1$ . Das equações de Euler-Lagrange, e da definição do operador de Euler, temos que

$$\mathfrak{E}(L) = \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - \dots + (-1)^n D_x^n \frac{\partial L}{\partial u_n} = 0.$$

Para o caso particular  $L = L(x, u, u_x)$ , as equações de Euler-Lagrange usuais são recuperadas:

$$\mathfrak{E}(L) = \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} = \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_{xx} \frac{\partial^2 L}{\partial u_x^2} = 0.$$

**Exemplo 4.5: Problema Variacional de Dirichlet**

O problema variacional de Dirichlet pode ser estabelecido como o problema de encontrar o mínimo da integral de Dirichlet [43]

$$\mathfrak{D}[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p u_i^2 d\mathbf{x},$$

sobre a condição  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \phi$ , com  $\phi$  sendo uma função definida na fronteira  $\partial\Omega$  da região n-dimensional  $\Omega \subset X \approx \mathbb{R}^p$ .

Aplicando o operador de Euler à lagrangiana do problema, obtemos que a equação de Euler-Lagrange associada é

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(L) &= \sum_{j=0}^n (-1)^{|J|} D_j \frac{\partial L}{\partial u_J} = \frac{\partial L}{\partial u} - \sum_{i=1}^p D_{x^i} \frac{\partial L}{\partial u_i} = - \sum_{i=1}^p D_{x^i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{1}{2} u_i^2 \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^p D_{x^i} (u_i) = - \sum_{i=1}^p u_{ii} = - \nabla^2 \mathbf{u} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange para o problema variacional de Dirichlet é justamente a equação de Laplace. Esse é um resultado esperado, se tivermos em mente que uma solução para esse problema também é solução da equação de Laplace com a mesma condição de contorno, ou seja [44],

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \phi.$$

**4.1.2 Lagrangianas Nulas**

Seja  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$  variáveis independentes,  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^p)$  variáveis dependentes e  $P(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = (P_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}), \dots, P_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))$  uma p-tupla cujas entradas são funções suaves

de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e suas derivadas. Definiremos a divergência de  $P$  por

$$\text{Div } P = D \cdot P = D_1 P_1 + \cdots + D_p P_p,$$

onde  $D_i$  é a derivada total em relação à variável  $x^i$ . Se pudermos escrever uma lagrangiana  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  por meio de uma divergência da forma acima, o teorema da divergência<sup>1</sup> ditará que, para qualquer  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ ,

$$S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{Div } P d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} P \cdot dS,$$

com  $\partial\Omega$  sendo a fronteira suave de qualquer domínio  $\Omega$ . Dessa forma, somos levados a concluir que o comportamento de  $S[\mathbf{u}]$  depende apenas do comportamento de  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  na fronteira e permanece incólume a qualquer variação  $\eta$  utilizada na definição de derivada variacional. Por consequência, as equações de Euler-Lagrange, nesse caso, serão identicamente zero. Lagrangianas com essa natureza são denominadas **lagrangianas nulas**.

### Teorema 4.2: Lagrangianas Nulas

Seja a função lagrangiana  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ , definida em todo ponto no aberto  $X \times U^{(n)}$ . Chamamos essa função de lagrangiana nula, isto é, as equações de Euler-Lagrange desaparecem identicamente para todo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  se e somente se puder ser escrita na forma de uma divergência total  $\mathbf{L} = \text{Div } P$ , onde  $P$  é uma tupla cujas entradas são funções de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e suas derivadas.

### Prova 4.2

O argumento apresentado no parágrafo anterior ao teorema prova que  $\mathfrak{E}(L) = \mathfrak{E}(\text{Div } P) = 0$ . Por outro lado, partamos da suposição de que  $L$  é uma lagrangiana nula. Agora, olhemos para a derivada

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{u}^{(n)}) = \sum_{\alpha, J} \frac{\partial L(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{u}^{(n)})}{\partial u_J^\alpha}.$$

Mas, dado que cada termo pode ser integrado por partes,

$$u_i^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} = D_i(u^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} = D_i \left( u^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) - u^\alpha D_i \left( \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right).$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{u}^{(n)}) = \sum_{\alpha, J} \left[ D_J \left( u^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) - u^\alpha D_J \left( \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) \right] =$$

<sup>1</sup> O teorema da divergência diz que, para um campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbb{R}^3$ , sem perda de generalidade,  $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ . Aqui,  $V$  é uma região ligada cuja fronteira  $S = \partial V$  é uma superfície fechada suave [45].

$$= \sum_{\alpha=1}^q u^\alpha \sum_J (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{\alpha,J} D_J \left( u^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) = \mathbf{u} \cdot \mathfrak{E}(L)(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{u}^{(2n)}) + \text{Div } \hat{P}(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{u}^{(2n)}),$$

onde a forma precisa da  $p$ -tupla  $\hat{P}$  não é importante. Lembrando que  $\mathfrak{E}(L) = 0$ , a integral de ambos os lados da expressão acima com respeito a  $\epsilon$  avaliada de 0 a 1 resulta em

$$\int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} L(\mathbf{x}, \epsilon \mathbf{u}^{(n)}) d\epsilon = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) - L(\mathbf{x}, 0) = \text{Div} \left( \int_0^1 \hat{P}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n-1)}) d\epsilon \right) = \text{Div } \tilde{P}$$

Contudo, notemos que  $L(\mathbf{x}, 0)$  está definido em todo o  $\mathbb{R}^p$ , isto é, é função de  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$  apenas. Encontrando uma tupla  $p(\mathbf{x})$  tal que  $\text{Div } p(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, 0)$ , temos que

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) - L(\mathbf{x}, 0) &= L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) - \text{Div } p(\mathbf{x}) = \text{Div } \tilde{P} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) &= \text{Div } \tilde{P} + \text{Div } p(\mathbf{x}) = \text{Div } P. \end{aligned}$$

□

### 4.1.3 Invariância Por Mudança de Coordenadas

Se nos atentarmos ao fato de que as equações de Euler-Lagrange determinam os extremos de um problema variacional, poderíamos esperar que o conjunto de soluções permanecesse invariante por uma mudança de coordenadas. Por extensão, esperaríamos que o operador de Euler apresentasse o mesmo comportamento. Será que esse é o caso aqui?

Para investigarmos isso atentamente, consideremos a transformação  $\tilde{\mathbf{x}} = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Essa transformação deve ser de tal natureza que o valor do funcional não mude, isto é,

$$\tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}] = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}) d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) dx = S[\mathbf{u}],$$

onde o novo domínio

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{\mathbf{x}} = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{x} \in \Omega\}$$

depende tanto do domínio original  $\Omega$ , como da exata função  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  sobre a qual a ação está sendo calculada.

Em vista da nossa análise, queremos que as derivadas funcionais satisfaçam

$$\left\langle \frac{\delta \tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]}{\delta \tilde{\mathbf{u}}}, \tilde{\eta} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta \mathbf{u}}, \eta \right\rangle,$$

ou, de forma mais explícita,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta \tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]}{\delta \tilde{u}^\alpha(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{\eta}^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\alpha(\mathbf{x})} \eta^\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.9)$$

Dado que  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ , temos que  $\tilde{\mathbf{x}} = \Psi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  e dessa forma  $d\tilde{\mathbf{x}} = \det J d\mathbf{x}$ , onde  $J$  é a matriz de mudança de coordenadas, isto é, a matriz jacobiana, que é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{D\Psi^1}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Psi^1}{Dx^p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{D\Psi^p}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Psi^p}{Dx^p} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

com  $D_i$  representando a derivada total em relação a  $x^i$ . Por sua vez,  $\tilde{\mathbf{u}} = \Phi(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ . Logo,

$$\delta\tilde{u}^\alpha = \sum_{i=1}^p \frac{D\Phi^\alpha}{Dx^i} \delta x^i + \sum_{\beta=1}^q \frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial u^\beta} \delta u^\beta, \quad (4.11)$$

onde denotamos por  $\delta u^\beta$  a variação do funcional  $\delta u^\beta = \epsilon \eta^\beta$  em  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{x}) + \epsilon \eta(\mathbf{x})$ . Mas, como consideramos apenas variações nas variáveis dependentes e não nas independentes, devemos ter  $\delta\tilde{\mathbf{x}} = 0$ , ou seja,

$$\delta\tilde{x}^i = \sum_{j=1}^p \frac{D\Psi^i}{Dx^j} \delta x^j + \sum_{\alpha=1}^q \frac{\partial\Psi^i}{\partial u^\alpha} \delta u^\alpha = 0.$$

Se tomarmos  $\delta u^\alpha = \epsilon \eta^\alpha$ , as equações acima permitem escrever o seguinte sistema de equações para os  $\delta x^i$

$$\begin{pmatrix} \frac{D\Psi^1}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Psi^1}{Dx^p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{D\Psi^p}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Psi^p}{Dx^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \cdots \\ \delta x^p \end{pmatrix} = -\epsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi^1}{\partial u^\alpha} \eta^\alpha \\ \cdots \\ \frac{\partial\Psi^p}{\partial u^\alpha} \eta^\alpha \end{pmatrix}.$$

A regra de Cramer <sup>2</sup> nos diz que a solução do sistema de equações diferenciais acima é

$$\delta x^i = -\frac{\epsilon}{\det J} \sum_{j,\alpha} (\text{Cof } J)_j^i \frac{\partial\Psi^j}{\partial u^\alpha} \eta^\alpha,$$

com  $(\text{Cof } J)_j^i$  denotando o cofator  $(i, j)$  da matriz jacobiana  $J$ . Utilizando esse resultado na equação 4.11, temos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{u}^\alpha &= -\sum_{i,j,\beta} \frac{D\Phi^\alpha}{Dx^i} \frac{\epsilon}{\det J} (\text{Cof } J)_j^i \frac{\partial\Psi^j}{\partial u^\beta} \eta^\beta + \sum_{\beta=1}^q \frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial u^\beta} \delta u^\beta = \\ &= \frac{\epsilon}{\det J} \sum_{\beta} \left( \frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial u^\beta} \det J - \sum_{i,j} \frac{D\Phi^\alpha}{Dx^i} (\text{Cof } J)_j^i \frac{\partial\Psi^j}{\partial u^\beta} \right) \eta^\beta, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $\delta u^\beta = \epsilon \eta^\beta$ . Com isso, podemos concluir que  $\delta\tilde{u}^\alpha = \epsilon \tilde{\eta}^\alpha$ , onde

$$\tilde{\eta}^\alpha = \frac{1}{\det J} \sum_{\beta} F_{\beta}^{\alpha} \eta^\beta,$$

<sup>2</sup> Seja  $A\vec{x} = \vec{b}$  um sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas, onde  $A$  é uma matriz não singular  $n \times n$ ,  $\vec{x}$  é a matriz coluna das incógnitas e  $\vec{b}$  é a matriz coluna dos termos independentes. A regra de Cramer diz que, para  $1 \leq j \leq n$ ,  $x_j = \det A_j / \det A$ , com  $A_j$  sendo a matriz obtida a partir de  $A$  pela substituição da  $j$ -ésima coluna de  $A$  por  $\vec{b}$  [46].

e

$$F_\alpha^\beta = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial u^\beta} \det J - \sum_{i,j} \frac{D\Phi^\alpha}{Dx^i} (\text{Cof } J)_j^i \frac{\partial \Psi^j}{\partial u^\beta},$$

que explicitamente pode ser escrito como

$$F_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial u^\beta} & \frac{D\Phi^\alpha}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Phi^\alpha}{Dx^p} \\ \frac{\partial \Psi^1}{\partial u^\beta} & \frac{D\Psi^1}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Psi^1}{Dx^p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Psi^p}{\partial u^\beta} & \frac{D\Psi^p}{Dx^1} & \cdots & \frac{D\Psi^p}{Dx^p} \end{pmatrix}.$$

Os resultados que acabamos de deduzir, quando substituídos na equação 4.9, nos dizem que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta \tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]}{\delta \tilde{u}^\alpha(\tilde{\mathbf{x}})} \tilde{\eta}^\alpha(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega} \sum_{\alpha,\beta=1}^q \frac{\delta \tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]}{\delta \tilde{u}^\alpha(\tilde{\mathbf{x}})} \left( \frac{1}{\det J} F_\beta^\alpha \eta^\beta \right) (\det J) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{\beta=1}^q \frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\beta(\mathbf{x})} \eta^\beta(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta \tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]}{\delta \tilde{u}^\alpha(\tilde{\mathbf{x}})} F_\beta^\alpha = \frac{\delta S[\mathbf{u}]}{\delta u^\beta(\mathbf{x})}. \quad (4.12)$$

A expressão acima nos diz que, se  $\mathfrak{E}_\alpha(L) = 0$ , tendo em mente a definição do operador de Euler-Lagrange, então  $\tilde{\mathfrak{E}}_\alpha(\tilde{L}) = 0$ . Isso mostra que as equações de Euler-Lagrange são invariantes por uma mudança de variáveis.

## 4.2 Simetrias Variacionais

Se estamos interessados em determinar as transformações de simetria de equações diferenciais que admitem uma formulação variacional, isto é, que podem ser vistas como equações de Euler-Lagrange  $\mathfrak{E}(L)$  dada uma lagrangiana  $L$ , podemos investigar tais simetrias a partir da própria função lagrangiana.

Seja o funcional  $S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}$ . Consideremos grupos de transformações atuando no subconjunto aberto  $M \subset \Omega \times U \subset X \times U$ . Como já é sabido, dada uma função  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} \in \Omega$ , devemos considerar apenas transformações em torno da identidade, a depender da ação. Para  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$ , onde  $x \in \Omega' \subset \Omega$ , conseguimos, nesse cenário, definir uma função  $\tilde{f}$  tal que  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ , com  $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}' \subset \Omega$ .

Definiremos um grupo de simetrias variacionais, em analogia direta com os resultados do capítulo anterior, como se segue:

**Definição 4.3: Grupo de Simetrias Variacionais**

Seja o grupo  $G$  de transformações locais agindo no aberto  $M \subset \Omega_0 \times X$ . Esse grupo será de **simetrias variacionais** se a sua ação sobre o funcional  $S[\mathbf{u}]$  o mantém inalterado, isto é

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}) d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x},$$

sempre que  $\Omega$  é um subdomínio com fechamento <sup>a</sup>  $\bar{\Omega} \subset \Omega_0$ .

<sup>a</sup> Seja um conjunto  $S$  dotado de operações que gerem elementos de  $S$  a partir de outros elementos de  $S$ . Um subconjunto  $X \in S$  será dito fechado por essas operações se a aplicação delas a quaisquer elementos de  $X$  resultar em outros elementos de  $X$ .

Estabeleçamos agora o seguinte importante teorema:

**Teorema 4.3**

O grupo de transformações  $G$  atuando em  $M \subset \Omega_0 \times X$  será grupo de simetrias variacionais de

$$S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x},$$

se

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(L) + L\text{Div } \xi = 0, \quad (4.13)$$

para todo  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) \in M^{(n)}$  e qualquer gerador infinitesimal

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

**Prova 4.3**

Seja a ação de  $g \in G$  dada por  $\phi(g, (\mathbf{x}, \mathbf{u})) = (\Xi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \Phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$ . Sabemos, dos resultados obtidos na seção 3.7, que  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}^{(n)}) = (\text{pr}^{(n)}g, (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))$ . Se, para cada  $g$  fixado, pudermos pensar nessa transformação como uma mudança de variáveis, a discussão sobre transformações de coordenadas feita na seção anterior, bem como a definição 4.3 acima, nos leva a concluir que

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = L(\phi(\text{pr}^{(n)}g, (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))) \det J_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}),$$

com  $J_g$  sendo a matriz jacobiana dada pela expressão 4.10.

Escrevamos  $g \in G$ , através da aplicação exponencial, como  $g = \exp(\epsilon \mathbf{X})$ , e tomemos  $\mathbf{X} = \xi^i \partial_{x^i} + U^\alpha \partial_{u^\alpha}$ . Se calcularmos a derivada de  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  em relação a  $\epsilon$ ,

avaliando em  $\epsilon = 0$ , a regra de Leibniz nos diz que

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} L(\phi(\text{pr}^{(n)}g, (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))) \Big|_{\epsilon=0} \det J_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \Big|_{g=e} \\ + L(\phi(\text{pr}^{(n)}g, (\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))) \Big|_{g=e} \frac{d}{d\epsilon} \det J_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \Big|_{\epsilon=0}.$$

Utilizando a expressão 3.28, e que a transformação para  $g = e$  (ou seja,  $\epsilon = 0$ ) corresponde à identidade, podemos reescrever a expressão acima como

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(L) + L \frac{d}{d\epsilon} \det J_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) \Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Nosso desafio agora é calcular a derivada do determinante do Jacobiano da transformação das coordenadas independentes,  $J_g$ . Para isso, utilizaremos a **Fórmula de Jacobi** (ver apêndice A):

$$\frac{d}{d\epsilon} (\det J) = (\det J) \cdot \text{Tr} \left( J^{-1} \frac{dJ}{d\epsilon} \right).$$

Vamos avaliar cada termo desta fórmula em  $\epsilon = 0$ .

A transformação das coordenadas independentes é  $\tilde{x}^i = \Xi^i(x, u)$ . Para uma transformação infinitesimal  $g = \exp(\epsilon X)$ , temos  $\tilde{x}^i \approx x^i + \epsilon \xi^i(x, u)$ . Os elementos da matriz Jacobiana  $J$  são  $J_{ij} = D_j(\tilde{x}^i)$ , onde  $D_j$  é a derivada total em relação a  $x^j$ . Assim,

$$J_{ij} = D_j(x^i + \epsilon \xi^i) = \delta_{ij} + \epsilon D_j(\xi^i) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Na forma matricial, podemos escrever  $J \approx I + \epsilon J_\xi$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $(J_\xi)_{ij} = D_j(\xi^i)$ .

Quando  $\epsilon = 0$ , a transformação é a identidade, portanto  $J(0) = I$ , e seu determinante é  $\det J(0) = 1$ . Além disso, a matriz inversa em  $\epsilon = 0$  é  $J(0)^{-1} = I^{-1} = I$ . Por sua vez, a derivada da matriz Jacobiana, a partir da expressão de  $J$  acima, é  $\frac{dJ}{d\epsilon} = J_\xi + \mathcal{O}(\epsilon)$ . Em  $\epsilon = 0$ , temos  $\frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = J_\xi$ .

Avaliando a fórmula de Jacobi em  $\epsilon = 0$ , obtemos:

$$\frac{d}{d\epsilon} (\det J) \Big|_{\epsilon=0} = (\det J(0)) \cdot \text{Tr} \left( J(0)^{-1} \frac{dJ}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) \\ = (1) \cdot \text{Tr}(I \cdot J_\xi) \\ = \text{Tr}(J_\xi).$$

O traço da matriz  $J_\xi$  é a soma de seus elementos diagonais:

$$\text{Tr}(J_\xi) = \sum_{i=1}^p (J_\xi)_{ii} = \sum_{i=1}^p D_i(\xi^i) \equiv \text{Div}(\xi).$$

Com isso, demonstramos de forma clara que  $\frac{d}{d\epsilon} \det J_g \Big|_{\epsilon=0} = \text{Div}(\xi)$ . Substituindo este resultado fundamental na condição de invariância, chegamos ao critério para uma simetria variacional:

$$\text{pr}^{(n)} X(L) + L \text{Div}(\xi) = 0$$

o que prova o teorema. A necessidade de  $\mathbf{X}$  ter a forma dada está subentendida nos resultados do capítulo anterior que utilizamos aqui.  $\square$

#### Exemplo 4.6

Vejam qual é a forma mais geral de uma lagrangiana de primeira ordem que é invariante pelo grupo de rotações agindo em  $(x, u)$ , isto é, cujo gerador é  $\mathbf{X} = -u\partial_x + x\partial_u$ . Tomando  $n=1$ , temos  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{X} + (1 + u_x^2)\partial_{u_x}$  e  $\text{Div} \xi = -u_x$ , pois  $\xi = -u$ . Logo, pelo uso da equação 4.13,

$$-u \frac{\partial L}{\partial x} + x \frac{\partial L}{\partial u} + (1 + u_x^2) \frac{\partial L}{\partial u_x} - u_x L = 0,$$

cujo sistema característico é

$$-\frac{dx}{u} = \frac{du}{x} = \frac{du_x}{1 + u_x^2} = \frac{dL}{u_x L},$$

e cuja solução é

$$x^2 + u^2 = c_1^2, \quad \frac{u - xu_x}{x + uu_x} = \tan c_2, \quad \frac{L}{\sqrt{1 + u_x^2}} = c_3.$$

Portanto, a solução mais geral da EDP acima é

$$F \left( \frac{L}{\sqrt{1 + u_x^2}}, \frac{u - xu_x}{x + uu_x}, x^2 + u^2 \right) = 0,$$

que nos diz que a lagrangiana de primeira ordem mais geral perante o grupo de rotações em  $(x, u)$  é

$$L = \sqrt{1 + u_x^2} f \left( \frac{u - xu_x}{x + uu_x}, x^2 + u^2 \right).$$

Aproveitando a oportunidade, apliquemos esse mesmo grupo de transformações ao caso da integral de comprimento de arco

$$C[u] = \int_a^b \sqrt{1 + u_x^2} dx,$$

definida no plano  $(x, y)$ . Para este caso, a equação 4.13 resulta em

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(L) + L\text{Div } \xi &= (1 + u_x^2) \frac{\partial}{\partial u_x} \sqrt{1 + u_x^2} - u_x \sqrt{1 + u_x^2} = \\ &= (1 + u_x^2) \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} - u_x \sqrt{1 + u_x^2} = 0, \end{aligned}$$

implicando no fato geometricamente óbvio de que o comprimento de arco é uma grandeza invariante por rotações.

Uma pergunta natural que deve ser feita é se as simetrias oriundas da equação 4.13 também são simetrias das equações de Euler-Lagrange resultantes do problema variacional associado. A resposta a essa pergunta será dada pelo próximo teorema.

#### Teorema 4.4

Se  $G$  é um grupo de simetrias variacionais do funcional  $S[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}$ , esse mesmo grupo gerará também simetrias das equações de Euler-Lagrange  $\mathfrak{E}(L) = 0$  associadas.

Uma prova para o teorema acima é dada por Olver [24]. Porém, podemos entender o que ele diz de maneira intuitiva. Se  $g \in G$ , e  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  é um extremo do funcional  $S[\mathbf{u}]$  e, portanto, uma solução das equações de Euler-Lagrange, então  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  é um extremo do funcional  $\tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]$  resultante da ação do grupo de transformações. Entretanto, se  $G$  é um grupo de simetrias variacionais, segue que  $S[\mathbf{u}] = \tilde{S}[\tilde{\mathbf{u}}]$  e, por consequência,  $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}})$  é solução das mesmas equações de Euler-Lagrange. Assim, o grupo de transformações  $G$  leva soluções em soluções, sendo, portanto, um grupo de simetria das equações de Euler-Lagrange.

O contrário, entretanto, não é necessariamente verdade. Um grupo de simetrias das equações de Euler-Lagrange não é necessariamente um grupo de simetria variacional. Isso se dá porque as equações de Euler-Lagrange são condições necessárias a serem satisfeitas pelo extremo  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  do funcional  $S[\mathbf{u}]$ . Logo, podem existir soluções dessas equações que não são extremos do funcional associado. Em outros termos, podem existir simetrias que levem soluções em outras soluções que não são necessariamente soluções do problema variacional e, portanto, tais simetrias não podem ser simetrias variacionais. Transformações de escala são os contraexemplos mais comuns.

### Exemplo 4.7: Equação de Onda Bidimensional

Consideremos a equação de onda bidimensional

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Seguindo procedimento análogo ao da equação do calor, que discutimos no exemplo 3.18, podemos obter que os geradores de simetria de ponto de Lie são

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{X}_4 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{X}_5 &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{X}_6 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{X}_7 &= t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_8 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{X}_9 &= (x^2 - y^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y} + 2xt \frac{\partial}{\partial t} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{X}_{10} &= 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial y} + 2yt \frac{\partial}{\partial t} - yu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{X}_{11} &= 2xt \frac{\partial}{\partial x} + 2yt \frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + y^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial t} - tu \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{X}_\alpha &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é arbitrário e satisfaz a equação de onda.

Os geradores  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  e  $\mathbf{X}_3$  são, respectivamente, geradores de translação no tempo e nas coordenadas  $x$  e  $y$ . Por sua vez, o gerador  $\mathbf{X}_4$  está relacionado à transformação de escala em  $u$ , enquanto  $\mathbf{X}_5$  é o bem conhecido gerador de rotações no plano  $(x, y)$ . Os geradores  $\mathbf{X}_6$  e  $\mathbf{X}_7$  estão relacionados a rotações hiperbólicas (transformações de Lorentz), dada a métrica  $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2$ . De fato, para  $\mathbf{X}_6$ , temos a transformação  $(x, y, t) \mapsto (x \cosh \epsilon + t \sinh \epsilon, y, x \sinh \epsilon + t \cosh \epsilon)$ .  $\mathbf{X}_8$  é gerador de dilatação, e  $\mathbf{X}_9$ ,  $\mathbf{X}_{10}$  e  $\mathbf{X}_{11}$  são geradores inversionais onde, por exemplo, o grupo gerado por  $\mathbf{X}_9$  é  $I = (x/(t^2 - x^2 - y^2), y/(t^2 - x^2 - y^2), t/(t^2 - x^2 - y^2))$ , definido tal que  $(x, y, t)$  não está no cone de luz  $t^2 = x^2 + y^2$ .

Sabemos que a equação do calor bidimensional pode ser obtida a partir de

$$S = \int \int \int \left[ \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2 \right] dx dy dt,$$

de onde tiramos a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{2} u_y^2. \quad (4.14)$$

Teremos como objetivo analisar se cada um dos geradores mencionados acima produz ou não uma simetria variacional. Primeiramente, tomemos o gerador  $\mathbf{X}_1$ . Neste caso,  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1$  e  $\text{Div } \xi = 0$ . Daí,  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_1(L) = 0$  e, portanto, a relação 4.13 é satisfeita,

mostrando que  $\mathbf{X}_1$  é gerador de simetria variacional. Pelas mesmas razões,  $\mathbf{X}_2$  e  $\mathbf{X}_3$  também o serão.

No caso do gerador  $\mathbf{X}_4$ ,  $\text{Div } \xi = 0$ . A primeira prolongação para esse gerador, utilizando os resultados do teorema 3.4, é dada por

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial}{\partial u_y}.$$

Se aplicarmos essa expressão à lagrangiana 4.14, obtemos

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_4(L) = u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 = 0.$$

Dessa forma, a equação 4.13 é satisfeita e, portanto,  $\mathbf{X}_4$  gera simetria variacional para o problema.

Analisemos agora o gerador de rotação  $\mathbf{X}_5$ . A primeira prolongação para esse caso é

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_5 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - u_y \frac{\partial}{\partial u_x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_y},$$

que, quando aplicada à lagrangiana 4.14, resulta em

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_5(L) = -u_y u_x + u_x u_y = 0.$$

Por sua vez,  $\text{Div } \xi = D_i \xi^i = D_x(-y) + D_y(x) = 0$ . Assim, a equação 4.13 é satisfeita e  $\mathbf{X}_5$  gera simetria variacional.

Para o gerador de simetria hiperbólica  $\mathbf{X}_6$ , o teorema 3.4 nos diz que sua primeira prolongação será

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_6 = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x},$$

cujas aplicações a 4.14 resulta em

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_6(L) = u_x u_t - u_t u_x = 0.$$

Além disso, o termo  $\text{Div } \xi = D_x(t) + D_t(x) = 0$  e, conseqüentemente, esse gerador também gera simetria variacional. O mesmo raciocínio se aplica ao gerador  $\mathbf{X}_7$ .

Voltemos nossa atenção para o gerador de dilatação  $\mathbf{X}_8$ . Sua primeira prolongação será

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_8 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial y} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - u_y \frac{\partial}{\partial u_y},$$

conduzindo a

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_8(L) = -u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 = -2L.$$

Porém,  $\text{Div } \xi = 3L$ , o que implica que a equação 4.13 não é satisfeita e  $\mathbf{X}_8$  não gera simetria variacional. Contudo, se somarmos a esse gerador o termo  $-\frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}$ , temos

$$\mathbf{X}_8^m = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u},$$

cuja primeira prolongação é

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_8 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{3}{2}u_t\frac{\partial}{\partial u_t} - \frac{3}{2}u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - \frac{3}{2}u_y\frac{\partial}{\partial u_y},$$

que, da sua aplicação a 4.14, implica em

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_8(L) = \frac{3}{2}(-u_t^2 + u_x^2 + u_y^2) = \frac{3}{2}(-2L) = -3L.$$

Assim, com  $\text{Div } \xi = 3L$ , a equação 4.13 é satisfeita, e, portanto,  $\mathbf{X}_8^m$  é um gerador de simetria variacional.

Para o gerador  $\mathbf{X}_9$ , o teorema 3.4 dita que a primeira prolongação será

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_9 &= (x^2 - y^2 + t^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xt\frac{\partial}{\partial t} - xu\frac{\partial}{\partial u} - \\ &- (u + 3xu_x + 2yu_y + 2tu_t)\frac{\partial}{\partial u_x} + (2yu_x - 3xu_y)\frac{\partial}{\partial u_y} - (2tu_x - 3xu_t)\frac{\partial}{\partial u_t}. \end{aligned}$$

A aplicação dessa equação a 4.14 resulta em

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_9(L) = uu_x - 3x(u_t^2 - u_x^2 - u_y^2) = uu_x - 6xL.$$

Porém, dado que

$$\text{Div } \xi = D_x(x^2 - y^2 + t^2) + D_y(2xy) + D_t(2xt) = 6x,$$

temos que a expressão 4.13 resulta em

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_9(L) + L\text{Div } \xi = uu_x \neq 0.$$

Logo,  $\mathbf{X}_9$  não gera simetria variacional. O mesmo ocorre para  $\mathbf{X}_{10}$  e  $\mathbf{X}_{11}$ .

Por fim, para o gerador  $\mathbf{X}_\alpha = \alpha\partial u$ , a primeira prolongação será

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_\alpha = \alpha\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \alpha_y\frac{\partial}{\partial u_y}.$$

Além disso,  $\text{Div } \xi = 0$ . Portanto, a equação 4.13 pode ser reescrita como

$$\alpha_t u_t - \alpha_x u_x - \alpha_y u_y = 0.$$

Assim, vemos dessa igualdade que  $\mathbf{X}_\alpha$  gerará simetria variacional se, e apenas se,  $\alpha$  for constante.

Resumindo os resultados obtidos neste exemplo, dos 11 geradores de simetria de ponto de Lie da equação de onda bidimensional,  $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_7$  também são geradores de simetrias variacionais. Por sua vez,  $\mathbf{X}_8$  não gera, mas a versão modificada que construímos gera um grupo de simetria variacional. Já os geradores inversionais  $\mathbf{X}_9 - \mathbf{X}_{11}$  não geram simetrias variacionais, enquanto  $\mathbf{X}_\alpha$  gera se  $\alpha$  for constante.

Antes de seguirmos adiante, provemos um último resultado através da próxima proposição.

#### Proposição 4.2

Se  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são geradores de simetria variacionais de  $S[\mathbf{u}]$ , então também será o seu comutador  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ .

#### Prova 4.4

Sejam  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dados respectivamente por

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q U^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^p \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q V^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha}.$$

Se esses são geradores de simetrias variacionais, vale que

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(L) + L\text{Div } \xi = 0, \quad \text{pr}^{(n)}\mathbf{Y}(L) + L\text{Div } \eta = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(n)}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](L) &= [\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}, \text{pr}^{(n)}\mathbf{Y}](L) = -\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}((\text{Div } \eta)L) + \text{pr}^{(n)}\mathbf{Y}((\text{Div } \xi)L) = \\ &= -\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(\text{Div } \eta)L - (\text{Div } \eta)\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(L) + \text{pr}^{(1)}\mathbf{Y}(\text{Div } \xi)L + (\text{Div } \xi)\text{pr}^{(n)}\mathbf{Y}(L) = \\ &= -\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(\text{Div } \eta)L + (\text{Div } \eta)(\text{Div } \xi)L + \text{pr}^{(1)}\mathbf{Y}(\text{Div } \xi)L - (\text{Div } \xi)(\text{Div } \eta)L, \end{aligned}$$

onde foi usado  $-\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(\text{Div } \eta) = -\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(\text{Div } \eta)$ , pois  $\text{Div } \eta = \text{Div } \eta(x, u^{(1)})$  (de forma analoga para  $\mathbf{Y}$ ), e a proposição 3.2. Portanto,

$$\text{pr}^{(n)}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](L) = -\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(\text{Div } \eta)L + \text{pr}^{(1)}\mathbf{Y}(\text{Div } \xi)L. \quad (4.15)$$

Para  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(\text{Div } \eta)$ ,

$$\text{Div } \eta = \sum_{i=1}^p \left( \eta_i^i + \sum_{\alpha=1}^q \eta_\alpha^i u_i^\alpha \right),$$

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_{i,\alpha} \left( U_i^\alpha + \sum_{\beta} U_\beta^\alpha u_i^\beta - \sum_j \xi_i^j u_j^\alpha - \sum_{j,\beta} \xi_\beta^j u_i^\beta u_j^\alpha \right) \partial_{u_i^\alpha},$$

onde  $\eta_i^i = \partial_{x^i} \eta^i$ ,  $\eta_\alpha^i = \partial_{u^\alpha} \eta^i$ , etc. Fazendo o mesmo para  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{Y}(\text{Div } \xi)$ , e substituindo na expressão 4.15, temos que

$$\text{pr}^{(n)}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](L) = - \sum_{i=1}^p (D_i[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i)L,$$

onde  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i = \mathbf{X}(\eta^i) - \mathbf{Y}(\xi^i)$ . Portanto, concluímos que, se  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são geradores de simetrias variacionais, o colchete  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  também gerará uma simetria variacional.  $\square$

### 4.2.1 Redução de Ordem

No capítulo anterior, demonstramos como o conhecimento de uma simetria de ponto pode ser usado para reduzir a ordem de uma equação diferencial. O teorema 4.4 estabelece a ponte crucial para aplicarmos uma ideia análoga aqui: ele garante que uma simetria variacional da lagrangiana é também uma simetria das equações de Euler-Lagrange.

Uma consequência direta e poderosa deste fato é, portanto, a possibilidade de utilizar estas simetrias para efetuar a redução de ordem do sistema variacional. Este procedimento representa uma das aplicações práticas mais importantes da teoria e será detalhado a seguir, mostrando como a existência de uma simetria permite diminuir em duas ordens as equações de Euler-Lagrange associadas.

Seja  $x$  e  $u \in \mathbb{R}$ , isto é,  $p = q = 1$ . Seja  $S[u]$  o problema variacional de ordem  $n$  com equações de Euler-Lagrange de ordem  $2n$ . Consideremos  $\mathbf{X} = \xi(x, u)\partial_x + \eta(x, u)\partial_u$  o gerador de um grupo uniparamétrico de simetrias variacionais de  $S$ . Lembremos que, perante uma mudança de coordenadas em ambas as variáveis independentes e dependentes,  $\mathbf{X}$  ainda se manterá como gerador de simetrias variacionais. Sob essa mesma mudança de coordenadas, também sabemos que o problema variacional se mantém invariante, ou seja,

$$S[u] = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)})dx = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{L}(y, w^{(n)})dy = \tilde{S}[w].$$

Façamos a mudança de coordenadas  $(x, u) \mapsto (y, w)$ , com  $y = \zeta(x, u)$  e  $w = \rho(x, u)$ , e tal que  $\mathbf{X}$  assuma a forma  $\tilde{\mathbf{X}} = \partial_w$  nessas novas coordenadas. Como  $\tilde{\mathbf{X}} = \partial_w$  continua sendo simetria variacional, deve satisfazer a condição

$$\text{pr}^{(n)}\tilde{\mathbf{X}}(\tilde{L}) + \tilde{L}\text{Div } \xi = 0,$$

com  $\tilde{L}$  sendo a lagrangiana escrita em termos das coordenadas  $(y, w)$ . Mas, para o gerador  $\tilde{\mathbf{X}}$ , vale que  $\text{pr}^{(n)}\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}$ . Além disso,  $\text{Div } \xi = 0$ . Portanto, a condição acima se reduz a

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial w} = 0.$$

Desse resultado, concluímos que a lagrangiana transformada independe da variável  $w$ , isto é,

$$\tilde{L} = \tilde{L}(y, w', w'', \dots).$$

Por aplicação do operador de Euler a essa lagrangiana, as equações de Euler-Lagrange serão

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_w(\tilde{L}) &= \sum_{j=1}^n (-D_y)^j \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w^j} = -D_y \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w'} \right) + D_y^2 \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w''} \right) + \dots + (-1)^n D_y^n \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w^n} \right) = \\ &= -D_y \left[ \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w'} \right) - D_y \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w''} \right) + \dots + (-1)^{n-1} D_y^{n-1} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w^n} \right) \right] = \\ &= -D_y \sum_{j=0}^{n-1} \left[ (-D_y)^j \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w^{(j+1)}} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

com  $w' = dw/dy$ . Desse cálculo, temos que o termo dentro de colchetes é uma quantidade independente de  $y$ . Portanto,

$$\left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w'} \right) - D_y \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w''} \right) + \dots + (-1)^{n-1} D_y^{n-1} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w^n} \right) = \lambda = \text{cte.}$$

Introduzindo a variável  $v = w'$ , obtemos

$$\left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v} \right) + D_y \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v'} \right) - \dots + (-1)^{n-1} D_y^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^{(n-1)}} \right) = \lambda = \sum_{J=0}^{n-1} (-D_y)^J \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^J},$$

e

$$\tilde{S}[v] = \int \tilde{L}(y, v, \dots, v^{(n-1)}) dy,$$

pois  $\tilde{L}(y, v, \dots, v^{(n-1)}) = \tilde{L}(y, w', \dots, w^n)$ , e  $v^j = dv^{j-1}/dy = w^{j+1}$ . Assim, concluímos que as equações de Euler-Lagrange no novo sistema de coordenadas são de ordem  $2(n-2)$ , enquanto a original era de ordem  $2n$ .

Toda solução  $w = f(y)$  das equações de Euler-Lagrange originais é solução das equações de Euler-Lagrange após a redução de ordem com  $v = h(y)$ , onde  $\lambda$  é uma constante que depende das condições iniciais e  $w$  pode ser obtido pela quadratura

$$w = \int h(y) dy + c.$$

É prontamente visto que as equações de Euler-Lagrange reduzidas podem ser obtidas de

$$\tilde{S}_\lambda = \int [\tilde{L}(y, v^{(n-1)}) - \lambda v] dy,$$

permitindo a interpretação de  $\lambda$  como um multiplicador de Lagrange [43]<sup>3</sup>. A constante  $\lambda$  e a constante de multiplicação da solução da equação  $v = w'$  são o que restam para que, junto das  $(2n-2)$  constantes oriundas da solução da equação de Euler-Lagrange, forneçam as  $2n$  constantes da equação de Euler-Lagrange original.

<sup>3</sup> Para entender o que são multiplicadores de Lagrange e como eles são usados em mecânica clássica, o leitor é referenciado a Goldstein [41], Nivaldo [42] e Ghosh [47].

### 4.3 Leis de Conservação e o Teorema de Noether

Seja um sistema de equações diferenciais  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0$ . Uma **lei de conservação** é expressa por uma divergência total da forma

$$\text{Div } P = 0,$$

que desaparece para todas as soluções  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  do sistema em questão. Novamente,  $P = (P_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}), \dots, P_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}))$  é uma  $p$ -tupla cujos elementos são funções suaves de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e suas derivadas. A quantidade  $P$  é dita **conservada** se a expressão acima for satisfeita.

#### Exemplo 4.8: Equação de Laplace

Consideremos a equação de Laplace

$$\nabla^2 u = 0.$$

Primeiramente, notemos que a própria equação é uma lei de conservação, pois

$$\nabla^2 u = \nabla(\nabla u) = \text{Div}(\nabla u) = 0.$$

Outras leis de conservação podem ser obtidas se multiplicarmos a equação por  $u_i = \partial u / \partial x^i$ , pois

$$u_i \nabla^2 u = \sum_{j=1}^p D_j \left( u_i u_j - \frac{1}{2} \delta_i^j \sum_{k=1}^p u_k^2 \right).$$

Se considerarmos um sistema de equações diferenciais ordinárias com apenas uma variável independente, uma lei de conservação assume a forma  $D_x P = 0$  para todas as soluções  $\mathbf{u} = f(x)$  do sistema. Daí,  $P(x, \mathbf{u}^{(n)})$  deve ser constante para todas as soluções do sistema. Dessa forma, uma lei de conservação é equivalente à noção clássica de **constante de movimento** do sistema [41, 42].

Supondo que a única variável independente é o parâmetro temporal  $t$ , a lei de conservação que a quantidade conservada  $P(t, x(t), y(t), \dots, dx/dt, dy/dt, \dots)$  deve satisfazer é da forma

$$\frac{d}{dt} P(t, x, y, \dots, x', y', \dots) = 0, \quad (4.16)$$

explicitando sua invariância por evolução temporal.

De forma mais geral, seja, além do parâmetro temporal, variáveis independentes espaciais  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^p)$ . Neste caso, uma lei de conservação deve assumir a forma

$$D_t T + \text{Div } X = 0,$$

onde o divergente é tomado sobre essas variáveis espaciais. Aqui, as leis de conservação podem ser entendidas em termos do fluxo de uma quantidade através de uma superfície

fechada e da taxa de redução dessa mesma quantidade no volume envolvido por tal superfície. Às funções  $T$  e  $X$ , de  $t$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e derivadas de  $\mathbf{u}$  com respeito a ambos  $t$  e  $\mathbf{x}$ , damos os nomes **densidade de corrente** e **fluxo**, respectivamente.

#### Exemplo 4.9: Conservação da Carga Elétrica

Na física, leis de conservação são de extrema importância, pois permitem um entendimento mais profundo do que está acontecendo exatamente e do que devemos esperar. Para fins ilustrativos, consideremos o caso da carga elétrica. Sabemos, pela teoria eletromagnética [48], que a carga elétrica de um sistema isolado é uma quantidade que se conserva com o tempo. Para vermos isso, seja um volume fechado cuja densidade de carga é dada por  $\rho(\vec{r}, t)$ . A taxa de variação da carga por unidade de tempo é

$$\frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV.$$

Por outro lado, por definição, a taxa de variação da carga é igual à corrente, que, por sua vez, está associada à densidade de corrente por

$$\frac{d}{dt}q = I = - \int_{\partial S} \vec{J} \cdot \hat{n} dS,$$

onde o sinal indica o sentido do fluxo de cargas. Assim,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \int_{\partial S} \vec{J} \cdot \hat{n} dS,$$

que, em notação diferencial, utilizando o teorema da divergência do lado direito da equação acima, leva a

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Mais ainda, se considerarmos  $\mathfrak{J} = (\rho, \vec{J})$  e considerarmos o divergente em relação às variáveis  $(t, \vec{r})$ , que denotaremos por  $\text{Div}$ , temos

$$\text{Div } \mathfrak{J} = 0,$$

que é a equação de continuidade para a carga elétrica nessa teoria. A verdade por trás da equação está em consonância com o que apontamos na discussão acima: A quantidade de portadores de carga que atravessam a fronteira de uma região é igual à diminuição ou aumento dos mesmos nessa região. O mesmo argumento, com as mudanças apropriadas em relação aos entes sobre análise, leva a outras leis de conservação extremamente relevantes, como a conservação da massa na mecânica clássica [49] e da probabilidade em mecânica quântica [50].

De forma a estabelecermos os conceitos formalmente, suponhamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  é

um domínio espacial, e  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t)$  uma solução definida para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ , com  $a \leq t \leq b$ . Definamos o funcional

$$\mathfrak{T}_\Omega[f](t) = \int_\Omega T(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}.$$

A partir desse funcional, podemos propor a seguinte proposição:

### Proposição 4.3

Seja um sistema de equações diferenciais, e sejam  $T$  e  $X$ , respectivamente, a densidade de corrente e fluxo para a lei de conservação  $D_t T + \text{Div } X = 0$  associada a esse sistema. Para qualquer domínio ligado  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , com fronteira suave  $\partial\Omega$ , e qualquer solução do sistema  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x}, t)$  definida para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ , com  $a \leq t \leq b$ , o funcional  $\mathfrak{T}$  deve satisfazer

$$\mathfrak{T}[f](t) - \mathfrak{T}[f](a) = - \int_a^t \int_{\partial\Omega} X(\mathbf{x}, \tau, \text{pr}^{(n)} f(\mathbf{x}, \tau)) dS d\tau. \quad (4.17)$$

Por outro lado, se 4.17 é satisfeita, então  $T$  e  $X$  devem respeitar uma lei de conservação.

### Prova 4.5

Diferenciando  $\mathfrak{T}$  com respeito a  $t$  e usando o teorema da divergência, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathfrak{T}_\Omega[f] &= \frac{d}{dt} \int_\Omega T(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \int_\Omega D_t T(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \\ &= - \int_\Omega \text{Div } X(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} X(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) dS. \end{aligned}$$

A integração de ambos os lados na variável temporal entre  $a$  e  $t$  resulta em

$$\mathfrak{T}_\Omega[f](t) - \mathfrak{T}_\Omega[f](a) = - \int_a^t \int_{\partial\Omega} X(\mathbf{x}, \tau, \text{pr}^{(n)} f(\mathbf{x}, \tau)) dS d\tau,$$

que é a expressão 4.17. O oposto pode ser mostrado diferenciando 4.17 com respeito a  $t$ . Fazendo isso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathfrak{T}_\Omega[f](t) - \mathfrak{T}_\Omega[f](a)) &= \frac{d}{dt} \int_\Omega T(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \\ &= \int_\Omega D_t T(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\partial\Omega} X(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n)} f(\mathbf{x}, t)) dS = - \int_\Omega \text{Div } X(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_\Omega (D_t T(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t)) + \text{Div } X(\mathbf{x}, t, \text{pr}^{(n+1)} f(\mathbf{x}, t))) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Dado que vale para subdomínios arbitrários, a igualdade valerá se o integrando for igual a zero.  $\square$

Podemos fazer uma readequação na notação de forma a expressar as variáveis independentes em termos da  $p + 1$  tupla  $\mathbf{x} = (t, x^1, \dots, x^p) = (t, \vec{x})$ . Além disso, escrevamos  $\mathfrak{J} = (T, X)$ . Assim, podemos expressar a lei de conservação por

$$\text{Div } \mathfrak{J} = D_t T + \text{Div}(X) = 0,$$

onde está claro que o divergente que atua em  $\mathfrak{J}$  não é puramente espacial, pois contém um termo de derivada total em relação a  $t$  e, portanto, não é o mesmo que o divergente que atua em  $X$ , como nossa escolha de notação poderia sugerir.

### 4.3.1 Teorema de Noether

Em 1918, Emmy Noether foi capaz de determinar uma relação fundamental entre leis de conservação e grupos de simetria através de um famoso teorema que leva o seu nome [41, 42, 51]<sup>4</sup>. Primeiramente, busquemos estabelecer essa ponte entre os conceitos para o caso em que há apenas uma variável independente  $t$  e  $q$  variáveis dependentes  $x^i(t)$ .



Figura 9 – Emmy Noether por volta de 1900.

Seja  $\mathbf{X}$  um gerador de simetria da forma  $\mathbf{X} = \xi \partial_t + \sum_{i=1}^q \eta^i \partial_{x^i}$ . A primeira prolongação desse gerador é dada por

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_{i=1}^q \dot{\eta}^i \partial_{\dot{x}^i}, \quad \dot{\eta}^i = \frac{d\eta^i}{dt} - \dot{x}^i \frac{d\xi}{dt}.$$

Mas, se escrevermos

$$\dot{x}^i \frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}^i \xi) - \ddot{x}^i \xi,$$

<sup>4</sup> Para uma derivação geométrica do teorema de Noether, consultar [52].

teremos

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^q \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^q \frac{d\eta^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \sum_{i=1}^q \ddot{x}^i \xi \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} - \sum_{i=1}^q \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \xi) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}.$$

Agora, somando e subtraindo um termo  $\sum_{i=1}^q \xi \dot{x}^i \partial_{x^i}$  e reorganizando o resultado, podemos expressar a expressão acima como

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \xi \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^q \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^q \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right) + \sum_{i=1}^q (\eta^i - \xi \dot{x}^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^q \frac{d}{dt} (\eta^i - \xi \dot{x}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}.$$

Neste ponto, convém definirmos

$$Q^i = \eta^i - \xi \dot{x}^i, \quad (4.18)$$

e notarmos que

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^q \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^q \ddot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i},$$

para concluirmos que

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \xi \frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^q \left( Q^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dQ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right). \quad (4.19)$$

Definamos ainda o campo vetorial  $\mathbf{X}_Q$  por

$$\mathbf{X}_Q = \sum_{i=1}^q Q^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Assim,

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_Q + \sum_{i=1}^q \frac{dQ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}. \quad (4.20)$$

Com isso, podemos reescrever a equação 4.19 como

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_Q + \xi \frac{d}{dt}. \quad (4.21)$$

Por outro lado, se  $\mathbf{X}$  é o gerador de uma simetria variacional, deve satisfazer a expressão 4.13. Portanto, pelo uso de 4.21 na 4.13, temos

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_Q(L) + \xi \frac{dL}{dt} + L \frac{d\xi}{dt} = \text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_Q(L) + \frac{d(\xi L)}{dt} = 0.$$

Mas, de 4.20,

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_Q(L) = \sum_{i=1}^q \left( Q^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{dQ^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \sum_{i=1}^q \left( Q^i \frac{\partial L}{\partial x^i} - Q^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \frac{d}{dt} \left( Q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right),$$

onde nos dois primeiros termos é possível identificar as equações de Euler-Lagrange em sua forma básica e, portanto, o operador de Euler. Isso nos permite escrever

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}_Q(L) = \sum_{i=1}^q Q^i \mathfrak{E}_i(L) + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^q Q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \quad (4.22)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \xi L - \sum_{i=1}^q Q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \sum_{i=1}^q Q^i \mathfrak{E}_i(L),$$

ou

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^q Q^i \mathfrak{E}_i(L),$$

com

$$P = \xi L - \sum_{i=1}^q Q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \quad (4.23)$$

Assim, podemos concluir que, se  $x^i = x^i(t)$  são soluções das equações de Euler-Lagrange  $\mathfrak{E}_i(L) = 0$  ( $i = 1, \dots, q$ ), a quantidade  $P = P(t, x^i, \dot{x}^i, \dots)$ , que é a **constante de movimento** com a qual tivemos contato anteriormente, é constante.

#### Exemplo 4.10: Partículas Interagindo Gravitacionalmente

Seja um sistema de  $N$  partículas interagindo entre si gravitacionalmente. A lagrangiana para esse sistema é

$$L = T - V = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} |\dot{\vec{x}}^{\alpha}|^2 - \sum_{\alpha, \beta; \alpha \neq \beta} \frac{K_{\alpha, \beta}}{|\vec{x}^{\alpha} - \vec{x}^{\beta}|}, \quad (4.24)$$

onde  $m_{\alpha}$  é a massa, e  $\vec{x}^{\alpha} = (x^{\alpha}, y^{\alpha}, z^{\alpha})$  é a posição da  $\alpha$ -ésima partícula, com  $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ . Além disso, naturalmente,  $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/dt$ . Aqui, temos  $p = 1$ ,  $n = 1$  e  $q = 3N$ . A forma geral do gerador é

$$\mathbf{X} = \tau(t, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_a \vec{\xi}^a \frac{\partial}{\partial \vec{x}^a},$$

com  $\vec{\xi}^a = (\xi^a, \eta^a, \zeta^a)$ . Agora, dado que

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}^a} = m_a \dot{\vec{x}}^a,$$

temos que a forma geral da integral de movimento é

$$P = -\tau L - \sum_a (\vec{\xi}^a - \tau \dot{\vec{x}}^a) \cdot (m_a \dot{\vec{x}}^a) = -\tau(T - V) - \sum_a \vec{\xi}^a \cdot \dot{\vec{x}}^a + 2\tau T = \tau(T + V) - \sum_a \vec{\xi}^a \cdot \dot{\vec{x}}^a.$$

Da condição 4.13,  $\mathbf{X}$  é uma simetria variacional se

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{X}(L) + L \text{Div } \tau = \text{pr}^{(n)} \mathbf{X}(T - V) + (T - V) \frac{d\tau}{dt} = 0, \quad (4.25)$$

onde devemos nos lembrar de que a única variável independente é o tempo  $t$ . Para  $\mathbf{X} = \partial_t$ , onde  $\tau = 1$  e  $\vec{\xi}^a = 0$ , a equação anterior se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial t} (T - V) + (T - V) \frac{d1}{dt} = 0 + 0 = 0,$$

uma vez que ambos  $T$  e  $V$  não dependem explicitamente de  $t$ . Assim,  $\mathbf{X} = \partial_t$  é uma solução da equação 4.25 e, portanto, um gerador de simetria variacional. A quantidade conservada correspondente  $P$  é

$$P = 1 \cdot (T + V) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \cdot 0 \cdot \dot{\vec{x}}^{\alpha} = T + V \Rightarrow P = T + V = \text{Energia} = E.$$

Assim, a partir da versão particular do teorema de Noether desenvolvida acima, vemos que a quantidade conservada associada à simetria de translação temporal é a energia total  $E = T + V$  do sistema.

Consideremos o gerador de translação espacial, dado por

$$\mathbf{X} = \sum_a \vec{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}^a},$$

indicando que todo o sistema está sendo transladado na direção do vetor  $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ . Neste caso,  $\tau = 0$ ,  $\vec{\xi}^a = \vec{l}$ ,  $\text{pr}^{(n)}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ . Como  $T$  não depende de  $\vec{x}$ , devemos nos preocupar apenas com a atuação do gerador em  $V$ . Mas,

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{x}^a} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}^a} \left( \sum_{a,b;a \neq b} \frac{K_{a,b}}{|\vec{x}^a - \vec{x}^b|} \right) = - \sum_{b;a \neq b} K_{a,b} \frac{\vec{x}^a - \vec{x}^b}{|\vec{x}^a - \vec{x}^b|^3},$$

de onde tiramos que

$$\sum_a \vec{l}^a \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{x}^a} = -\frac{1}{2} \sum_{b;a \neq b} K_{a,b} \frac{(\vec{x}^a - \vec{x}^b)}{|\vec{x}^a - \vec{x}^b|^3} \cdot (\vec{l}^a - \vec{l}^b) = 0,$$

o que nos diz que  $\mathbf{X}(T - V) = 0$  e, assim, a equação 4.25 é satisfeita. A quantidade conservada associada a esse gerador de simetria é

$$P = - \sum_a m_a \vec{l} \cdot \dot{\vec{x}}^a = -\vec{l} \cdot \left( \sum_a m_a \dot{\vec{x}}^a \right).$$

Como  $\vec{l}$  é arbitrário, concluímos que a quantidade conservada associada ao gerador de translações espaciais é o momento linear total do sistema.

Uma terceira solução da equação 4.25, que podemos inferir dado que esse é um problema de Kepler, mas que pode ser verificado diretamente, dado que  $\tau = 0$ , é

$$\mathbf{X} = \sum_a \left( x^a \cdot \frac{\partial}{\partial y^a} - y^a \cdot \frac{\partial}{\partial x^a} \right),$$

que é o gerador de rotações no plano  $(x, y)$ . Sua primeira prolongação é

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_a \left( \dot{x}^a \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{y}^a} - \dot{y}^a \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}^a} \right).$$

A quantidade conservada associada é

$$P = \sum_a m_a (\xi^a \dot{x}^a + \eta^a \dot{y}^a) = \sum_a m_a (-y^a \dot{x}^a + x^a \dot{y}^a),$$

que é o momento angular total na direção  $z$ . Naturalmente, os geradores de rotação nos planos  $(x, z)$  e  $(y, z)$  também são geradores de simetrias variacionais, que levam à conservação do momento angular total nas direções  $y$  e  $z$  respectivamente.

Generalizemos nossa análise para o caso em que hajam  $p > 1$  variáveis independentes. Para tal, seja o gerador de simetria escrito como

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q U^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Como sabemos, sua  $n$ -ésima prolongação é dada por

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J ' \phi_J^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

onde, como também sabemos,  $\sum_J$  indica a soma das derivadas de primeira ordem em diante, e

$$\phi_J^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = D_J \left( U^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}.$$

Analogamente ao que fizemos na equação 4.18, definamos a quantidade

$$Q^\alpha = U^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, q). \quad (4.26)$$

Dessa forma, podemos reescrever a expressão para a  $n$ -ésima prolongação do gerador  $\mathbf{X}$  como

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(n)}\mathbf{X} &= \mathbf{X} + \sum_J '[D_J Q^\alpha + \xi^i u_{J,i}^\alpha] \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} = \\ &= \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + (Q^\alpha + \xi^i u_i^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_J '[D_J Q^\alpha + \xi^i u_{J,i}^\alpha] \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} = \\ &= \left[ Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_J '(D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right] + \left[ \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_J '\xi^i u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right] = \\ &= \sum_J (D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \xi^i \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right] = \\ &= \sum_J (D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \xi^i \frac{D}{dx^i}, \end{aligned}$$

onde, para não carregar demais a notação, as somas em  $p$  e  $\alpha$  foram omitidas conforme a notação de soma de Einstein e  $\sum_J$  inclui a soma de derivadas de ordem zero, isto é, das próprias funções. Colocando a equação acima em outros termos,

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X} = \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_Q + \xi^i D_i, \quad (4.27)$$

onde definimos

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_Q = \sum_J (D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \quad (4.28)$$

A quantidade  $Q^\alpha$ , como definida pela equação 4.26, é chamada de **característica** do campo vetorial  $\mathbf{X}$ .

Consideremos agora que  $\mathbf{X}$  seja o gerador de uma simetria variacional, que, portanto, deve satisfazer 4.13. Utilizando a equação 4.27 na equação 4.13, temos:

$$0 = \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_Q + \xi^i D_i + L \text{Div } \xi = \text{pr}^{(n)}\mathbf{X}_Q + \text{Div } (L\xi). \quad (4.29)$$

Antes de continuarmos, provemos o seguinte lema:

#### Lema 4.1

Para qualquer  $q$ -tupla de características  $Q^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$  e qualquer Lagrangiana  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})$ , a ação do gerador característico prolongado sobre  $L$  pode ser decomposta como:

$$\text{pr}^{(n)}X_Q(L) = Q \cdot \mathfrak{E}(L) + \text{Div } \mathfrak{A}, \quad (4.30)$$

onde  $X_Q = Q^\alpha(\partial/\partial u^\alpha)$ ,  $\mathfrak{E}$  é o operador de Euler-Lagrange, e  $\mathfrak{A}$  é uma  $p$ -tupla (uma corrente) cuja forma exata depende de  $Q$ ,  $L$  e suas derivadas.

#### Prova 4.6

Demonstraremos a identidade para o caso  $n = 1$ , que contém toda a lógica essencial. O caso geral segue por uma aplicação análoga e repetida da regra do produto para derivadas totais. Para  $n = 1$ , temos:

$$\text{pr}^{(1)}X_Q(L) = Q^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + (D_i Q^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}.$$

Usando a regra do produto para a derivada total no segundo termo,  $(D_i A)B = D_i(AB) - A(D_i B)$ , obtemos:

$$\text{pr}^{(1)}X_Q(L) = Q^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \left[ D_i \left( Q^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) - Q^\alpha D_i \left( \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) \right].$$

Agora, reagrupamos os termos que multiplicam  $Q^\alpha$ :

$$\text{pr}^{(1)}X_Q(L) = Q^\alpha \left[ \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left( \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) \right] + D_i \left( Q^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right).$$

Reconhecemos imediatamente o termo entre colchetes como a  $\alpha$ -ésima componente do operador de Euler-Lagrange,  $\mathfrak{E}_\alpha(L)$ . O segundo termo é uma divergência total,  $\text{Div } \mathfrak{A}$ , onde as componentes da corrente  $\mathfrak{A}$  são  $\mathfrak{A}^i = Q^\alpha(\partial L/\partial u_i^\alpha)$ . Portanto, demonstramos

que:

$$\text{pr}^{(1)}X_Q(L) = Q \cdot \mathfrak{E}(L) + \text{Div } \mathfrak{A},$$

o que completa a prova para o caso de primeira ordem.  $\square$

Substituindo 4.30 em 4.29, temos

$$\text{Div } \mathfrak{J} = \text{Div} (-\mathfrak{A} - L\xi) = Q^\alpha \mathfrak{E}_\alpha(L) = Q \cdot \mathfrak{E}(L), \quad (4.31)$$

onde

$$\mathfrak{J} = -\mathfrak{A} - L\xi, \quad (4.32)$$

é denominada **densidade corrente de Noether**. Na equação 4.31 está sintetizado o teorema de Noether: Dada a equação de Euler-Lagrange  $\mathfrak{E}(L) = 0$ , o termo  $\text{Div } \mathfrak{J} = 0$  é uma lei de conservação associada e a equação 4.32 nos diz como encontrar explicitamente a respectiva densidade de corrente.

Para o caso  $n = 1$ , substituindo a expressão para  $\mathfrak{A}$  em 4.32, e lembrando da equação 4.26, temos

$$\mathfrak{J}^i = -U^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - \xi^i L + \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}. \quad (4.33)$$

Os resultados que acabamos de derivar constituem o teorema de Noether, que podemos enunciar como:

#### Teorema 4.5: Teorema de Noether

Seja  $G$  um grupo uniparamétrico de simetrias do problema variacional

$$S[\mathbf{u}] = \int L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}.$$

Seja o gerador infinitesimal de  $G$  dado por

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \xi^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q U^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Além disso, seja

$$Q^\alpha = U^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha, \quad u_i^\alpha = \partial u^\alpha / \partial x^i,$$

a característica correspondente a  $\mathbf{X}$ . Portanto,  $Q = (Q^1, \dots, Q^q)$  é também a característica de uma lei de conservação para as equações de Euler-Lagrange  $\mathfrak{E}(L) = 0$ . Em outros termos, vale

$$\text{Div } P = Q \cdot \mathfrak{E}(L) = Q^\alpha \mathfrak{E}_\alpha(L),$$

onde  $P = P(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = (P_1, \dots, P_p)$  é uma  $p$ -tupla. Essa expressão é uma lei de conservação para as equações de Euler-Lagrange do problema variacional.

Para problemas variacionais de primeira ordem, o teorema de Noether assume a seguinte forma [24]:

### Corolário 4.1

Seja o problema variacional de primeira ordem

$$S[\mathbf{u}] = \int L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(1)}) d\mathbf{x},$$

e  $X$  o gerador de uma simetria variacional. Portanto, as componentes de  $P$ , satisfazendo a lei de conservação  $\text{Div } P = 0$  para as equações de Euler-Lagrange  $\mathfrak{E}(L) = 0$ , são da forma

$$P_i = \sum_{\alpha=1}^q U^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \xi^i L - \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j=1}^p \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_j^\alpha}.$$

Almejando a ilustração do teorema de Noether, iremos aplicá-lo ao campo de Klein-Gordon, associado à descrição de partículas escalares (spin zero) massivas, como o bóson de Higgs e os pions.

### Exemplo 4.11: Campo de Klein-Gordon

Consideremos o campo escalar massivo relativístico  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(t, \vec{r})$ , que satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi + m^2 \phi = 0,$$

onde denotamos por  $\nabla^2$  o laplaciano espacial. A equação acima pode ser obtida como a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$S[\phi] = \int \frac{1}{2} \left[ \sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 \right] dx^4,$$

onde  $\eta^{\mu\nu}$  é a métrica inversa de Minkowski,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e  $\partial_0 = \partial_t$ ,  $\partial_1 = \partial_x$ , etc. Como o funcional não depende explicitamente de nenhuma das coordenadas  $(t, \vec{r})$ , ele é invariante pelo gerador de translações,

$$\mathbf{X} = \sum_{\mu} a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Aqui, a expressão 4.33 se torna

$$\mathfrak{J}^i = a^\mu L - \sum_{\nu} a^\nu \phi_\nu \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu}.$$

Utilizando a lagrangiana acima,

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_\mu} = \sum_\nu \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = \partial^\mu \phi.$$

Assim,

$$\mathfrak{J}^\mu = \sum_\nu a^\nu (\delta^\mu \nu L + \partial_\nu \phi \partial^\mu \phi) = \sum_\nu T_\nu^\mu.$$

Da arbitrariedade dos  $a^\nu$ , concluímos que as componentes do tensor energia-momento  $T^{\mu\nu} = \sum_\rho \eta^{\mu\rho} T_\rho^\nu$  se conservam.

Não esgotamos a discussão a respeito de simetrias derivadas de problemas variacionais. De fato, como veremos na próxima subseção, adotamos uma hipótese desnecessariamente restritiva, mas seu relaxamento nos possibilita definir uma nova categoria de simetrias.

### 4.3.2 Simetrias Divergenciais

Na discussão a respeito do teorema de Noether, a hipótese de que  $X$  é gerador de simetria variacional e, portanto, satisfaz 4.13, é excessivamente restritiva. Isso se dá porque é possível a adição de um termo divergencial no lado direito da equação 4.13, resultando apenas em uma redefinição da corrente de Noether. Com esse relaxamento, podemos definir geradores de simetrias divergenciais como se segue.

#### Definição 4.4: Gerador de Simetria Divergencial

Consideremos o funcional

$$S[\mathbf{u}] = \int L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) d\mathbf{x}.$$

Um campo vetorial  $\mathbf{X}$  em  $M \subset X \times U$  é dito **gerador infinitesimal de simetria divergencial** de  $S$  se existe um vetor ( $p$ -tupla)  $B(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = (B^1, \dots, B^p)$  cujas componentes são funções de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e derivadas de  $\mathbf{u}$ , tal que

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(L) + L \text{Div } \xi = \text{Div } B, \quad (4.34)$$

para todo  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  em  $M$ .

Naturalmente, para  $B = 0$  recuperamos as simetrias variacionais e os resultados associados. Aqui, cada simetria divergencial infinitesimal de um problema variacional gera um grupo uniparamétrico de transformações  $g_\epsilon = \exp(\epsilon \mathbf{X})$  atuando em  $M$ . Porém, as propriedades dos grupos de simetrias divergenciais não são tão claras quanto aquelas dos grupos com os quais estávamos lidando até agora. Entretanto, Olver [24] prova que, para essas simetrias, vale uma versão generalizada do teorema 4.4.

**Teorema 4.6**

Se  $\mathbf{X}$  é um gerador de simetrias divergenciais de certo problema variacional, então  $\mathbf{X}$  é gerador de um grupo de simetrias das equações de Euler-Lagrange associadas.

A afirmação do teorema de Noether permanece a mesma se trocarmos simetrias variacionais por simetrias divergenciais na hipótese: a característica  $Q$  da simetria divergencial permanece como a característica de uma lei de conservação para as equações de Euler-Lagrange do problema variacional em questão. A única mudança na prova do teorema é o aparecimento de um termo extra  $\text{Div } B$ , oriundo de 4.34, tal que 4.31 é substituído por

$$Q \cdot \mathfrak{E}(L) + \text{Div} (\mathfrak{A} + \xi L) = \text{Div } B,$$

e  $\text{Div } P = Q \cdot \mathfrak{E}(L)$  vale com  $P = B - \mathfrak{A} - L\xi$ .

**Exemplo 4.12: Partículas Interagindo Gravitacionalmente**

Voltemos ao sistema de  $N$  partículas interagindo entre si gravitacionalmente, que já discutimos no exemplo 4.10. Façamos uma transformação de Galileu entre referenciais com velocidade relativa  $\vec{u}$  entre eles, caracterizada por  $t' = t$  e  $\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{u}$ . O gerador dessa transformação pode ser escrito como

$$\vec{X} = \sum_{\alpha} t\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}^{\alpha}}.$$

A primeira prolongação do gerador acima é

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \sum_{\alpha} \left( t\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}^{\alpha}} + \vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{x}}^{\alpha}} \right),$$

que, quando aplicado à lagrangiana 4.24, fornece

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(L) = \sum_{\alpha} \left( m_{\alpha} \vec{u} \cdot \dot{\vec{x}}^{\alpha} - t\vec{u} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{x}^{\alpha}} \right).$$

Mas, da mesma forma que naquele exemplo, temos que

$$\sum_{\alpha} \vec{u} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{x}^{\alpha}} = 0.$$

Além disso, temos

$$\text{Div } \xi = \text{Div}(t\vec{u}) = 0.$$

Dessa forma,

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(L) + L\text{Div } \xi = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u} \cdot \dot{\vec{x}}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left( m_{\alpha} \vec{u} \cdot \frac{d}{dt} \vec{x}^{\alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u} \cdot \vec{x}^{\alpha} \right).$$

Vemos que a equação 4.13 não é satisfeita, o que implica que  $\mathbf{X}$  não é um gerador de simetria variacional. Contudo, pela equação 4.34,  $\mathbf{X}$  é um gerador de simetria divergencial, com

$$B = \sum_a m_a \vec{u} \cdot \vec{x}^a.$$

Neste caso,

$$P' = \sum_a \left( m_a \vec{u} \cdot \vec{x}^a - t \vec{u} \cdot m_a \dot{\vec{x}}^a \right) = \vec{u} \cdot (M \vec{C} - t M \dot{\vec{x}}),$$

onde

$$\vec{C} = \frac{1}{M} \sum_a m_a \vec{x}^a, \quad M = \sum_a m_a,$$

sendo o centro de massa desse sistema de partículas. Em outros termos, temos que

$$\text{Centro de massa} = t(\text{ momento linear})/\text{massa} + c.$$

Com isso, podemos concluir que se a parte potencial da lagrangiana é translacionalmente invariante em uma dada direção, não apenas o momento linear naquela direção é constante, mas o centro de massa é uma função linear de  $t$ . Particularmente, se a parte potencial da lagrangiana for invariante pelo grupo de translações em  $\mathbb{R}^3$ , o centro de massa do sistema se move linearmente em dada direção.

## 4.4 Conclusão

Ao longo deste capítulo, estendemos nossa análise às chamadas simetrias variacionais, isto é, simetrias oriundas de um problema variacional. Vimos como a teoria pode ser construída nesse contexto, e como ela pode ser utilizada no estudo de sistemas de grande importância em física, bem como na construção de resultados fundamentais, como o teorema de Noether.

Assim, concluímos a primeira parte do nosso trabalho. Na segunda parte, aplicaremos o formalismo desenvolvido até aqui a alguns problemas de interesse físico, com o intuito de evidenciar o poder do método das prolongações.

Parte II

Aplicações à Física

## 5 Aplicações I: Equações Diferenciais

Neste capítulo, iremos aplicar o método das prolongações a duas equações de interesse físico: as equações de Burgers e de Korteweg–De Vries. O objetivo aqui será mostrar ao leitor como o método das prolongações permite um estudo detalhado de tais equações, bem como dos sistemas físicos descritos por elas.

### 5.1 Equação de Burgers

A equação de Burgers é o caso mais simples de uma equação que combina efeitos de propagação não linear e de difusão. É utilizada para descrever fenômenos de choques fracos em gases, e tem sido de interesse central para o estudo de vários fenômenos físicos, como a teoria de ondas de choque, dinâmica de fluidos, fluxo turbulento e dinâmica de gases [53]. Devido à sua natureza, não é uma tarefa trivial obter soluções para essa equação. Porém, conforme tentaremos mostrar ao longo desta seção, o método das prolongações nos permitirá fazê-lo a partir dos geradores de simetria de ponto de Lie para essa equação.

#### 5.1.1 Aspectos Históricos

A equação de Burgers foi primeiramente proposta pelo matemático inglês Harry Bateman em 1915, no contexto de seus estudos a respeito do movimento de fluidos e ondas lineares e não lineares [54–56]. Mais tarde, em 1948, Johannes M. Burgers estudou a equação como parte do seu modelo para o movimento de fluidos turbulentos [57], sendo, por isso, às vezes chamada de equação de Burgers-Bateman. A partir daí, a literatura a respeito da equação tem aumentado sensivelmente, por meio de inúmeros trabalhos de físicos e matemáticos sobre o assunto [58].

#### 5.1.2 Primeiro Problema de Stokes

Podemos introduzir a equação de Burgers a partir do que é conhecido em dinâmica de fluidos como **primeiro problema de Stokes**. O enunciado deste problema pode ser dado como se segue:

Seja um fluido no topo de um prato infinito, e consideremos que esse prato é impulsivamente colocado em movimento com velocidade constante  $v$ . Fazemos certas suposições: A densidade  $p$ , a viscosidade  $\mu$  do fluido, e a pressão  $P$ , são constantes. O problema é tal que as camadas do fluido são colocadas em movimento apenas pela fricção viscosa [59].

As equações de Navier-Stokes são de importância central para o campo da dinâmica de fluidos, pois descrevem o escoamento de fluidos, considerando a pressão e as diversas forças, dissipativas ou não, que estão atuando. Para os nossos propósitos, necessitamos de sua versão para fluidos incompressíveis, cuja derivação adiamos até o apêndice B, que é dada por

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + F.$$

No caso do primeiro problema de Stokes, supondo que a dinâmica se dê na direção  $x$ , e que não há forças externas atuantes, a equação de Navier-Stokes pode ser reescrita, escrevendo  $v = u$ , como

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx},$$

onde  $\mu = \nu/\rho$  é a viscosidade cinemática. Essa é a forma viscosa da equação de Burgers. Sua versão não viscosa corresponde ao lado direito da expressão acima igual a zero.

### 5.1.3 Geradores de Simetria e Soluções

Para nossos propósitos preliminares, de modo a tornar a análise simples, sem perda de generalidade, consideremos a equação de Burgers na forma [24]

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x.$$

Utilizando a transformação  $v = u_x$ , a equação acima pode ser escrita como

$$u_{xt} = u_{xxx} + 2u_x u_{xx} \Rightarrow (u_t)_x = (u_{xx} + u_x^2)_x.$$

Daí,

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{5.1}$$

que é a **forma potencial** da equação de Burgers.

Podemos escrever 5.1 como

$$\Delta = u_t - u_{xx} - u_x^2 = 0.$$

Para este caso, devemos prolongar a ação dos geradores de simetria até segunda ordem que, utilizando os resultados obtidos na subseção 3.8.2, assume a forma

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{(2)} \mathbf{X}(\Delta) &= \left( \mathbf{X} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \right) \Delta = \\ &= \phi^t - \phi^{xx} - 2u_x \phi^x = 0, \end{aligned}$$

que é a condição de simetria associada. Se utilizarmos as expressões para  $\phi^t$ ,  $\phi^x$  e  $\phi^{xx}$  nessa condição, obtemos que

$$U_t + (U_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 - \xi_t u_x - U_{xx} - (2U_{xu} - \xi_{xx})u_x + \tau_{xx}u_t -$$

$$\begin{aligned}
& -(U_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_xu_t + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2u_t - (U_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_xu_{xt} + \\
& + 3\xi_uu_xu_{xx} + \tau_uu_{xx}u_t + 2\tau_uu_xu_{xt} - 2U_xu_x + (U_u - \xi_x)u_x - \xi_uu_x^2 - \tau_xu_t - \tau_uu_xu_t = 0.
\end{aligned}$$

Podemos fazer uso de  $\Delta$  para eliminarmos a derivada temporal na expressão acima. Fazendo isso, temos

$$\begin{aligned}
& U_t - U_{xx} + (-\xi_t - 2U_{xu} + \xi_{xx} - 2U_x)u_x + (-\tau_t + \tau_{xx} - U_{uu} + 2\xi_{xu} - U_u + 2\xi_x)u_x^2 + \\
& + (-\tau_t + \tau_{xx} + 2\xi_x)u_{xx} + (2\tau_{xu} + 4\tau_x + 2\xi_u)u_xu_{xx} + (\xi_u + 2\tau_{ux} + \xi_{uu} + 2\tau_x)u_x^3 + \\
& + (\tau_{uu} + 5\tau_u)u_x^2u_{xx} + (\tau_{uu} + \tau_u)u_x^2 + 2\tau_xu_{xxx} + 2\tau_u = 0.
\end{aligned}$$

Para que a equação anterior seja satisfeita, lembrando que sempre prolongamos a ação dos geradores de simetria para um espaço de jatos, onde funções e suas derivadas também assumem o papel de coordenadas, devemos ter que cada termo deve ser igual a zero. Isso resultará no seguinte sistema de equações,

$$\left\{ \begin{array}{l}
U_t - U_{xx} = 0, \\
\xi_{xx} - \xi_t - 2U_{xu} - 2U_x = 0, \\
\tau_{xx} - \tau_t - U_{uu} + 2\xi_{uu} - U_u + 2\xi_x = 0, \\
\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0, \\
\tau_{xu} + 2\tau_x + \xi_u = 0, \\
\xi_u + 2\tau_{ux} + \xi_{uu} + 2\tau_x = 0, \\
\tau_{uu} + 5\tau_u = 0, \\
\tau_x = 0, \\
\tau_u = 0.
\end{array} \right.$$

### 5.1.3.1 Resolvendo o Sistema de Equações Determinantes

A resolução do sistema de EDPs sobredeterminado para  $(\xi, \tau, U)$  é a etapa mais algebricamente intensa da análise de simetria. Embora o processo completo seja extenso e idealmente realizado com o auxílio de pacotes de álgebra computacional como o **ReLie**, o caminho lógico para a solução pode ser esboçado a partir das restrições mais severas impostas pelo sistema. A estratégia consiste em resolver primeiro as equações mais simples para progressivamente restringir a forma das funções infinitesimais.

- **Passo 1: Determinar a forma de  $\tau$ .**

Observando o sistema, as equações mais restritivas são as últimas:  $\tau_x = 0$  e  $\tau_u = 0$ . Elas implicam imediatamente que  $\tau$  não pode depender de  $x$  ou  $u$ , sendo, portanto, uma função exclusiva de  $t$ :

$$\tau = \tau(t).$$

• **Passo 2: Determinar  $\xi$  e  $\tau$ .**

Com  $\tau = \tau(t)$ , a equação  $\tau_{xu} + 2\tau_x + \xi_u = 0$  (e outras análogas) simplifica-se. A análise das equações que envolvem derivadas de  $\xi$  (como  $\xi_u = 0$ , que emerge da combinação das condições) nos leva a concluir que  $\xi$  também não depende de  $u$ , ou seja,  $\xi = \xi(x, t)$ . A equação  $\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0$  torna-se  $-\tau_t + 2\xi_x = 0$ . Integrando em relação a  $x$ , vemos que  $\xi$  deve ser um polinômio de primeira ordem em  $x$ , com coeficientes que dependem de  $t$ . A análise completa mostra que:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= c_4x + 2c_5t + 4c_6xt + c_1, \\ \tau(t) &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2.\end{aligned}$$

• **Passo 3: Determinar  $U$ .**

Finalmente, com as formas de  $\xi$  e  $\tau$  conhecidas, substituímo-las nas equações restantes, que se tornam EDPs apenas para  $U(x, t, u)$ . A equação  $U_{uu} = 0$  (derivada do sistema) implica que  $U$  é linear em  $u$ , da forma  $U = A(x, t)u + B(x, t)$ . Substituindo esta forma na equação principal,  $U_t - U_{xx} = 0$ , e resolvendo para  $A(x, t)$  e  $B(x, t)$ , encontramos a solução geral para  $U$ . No entanto, a linearidade da equação potencial em  $u$  permite uma simetria mais geral,  $X_\alpha$ , onde o infinitesimal de  $u$  é proporcional a  $e^{-u}$  vezes uma solução da equação do calor, resultando na forma final. O resultado deste passo é  $U = \alpha(x, t)e^{-u} + c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2$ .

Este procedimento iterativo de simplificação é a essência do método para resolver as equações determinantes e nos leva à álgebra de simetria de seis dimensões (mais a infinita), gerada por  $X_1, \dots, X_6, X_\alpha$ .

Portanto, a solução para o sistema sobredeterminado da equação de Burgers é

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt, \\ \tau &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2, \\ U &= \alpha(x, t)e^{-u} + c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2,\end{aligned}$$

onde  $c_1, \dots, c_6$  são constantes arbitrárias, e  $\alpha(x, t)$  satisfaz à equação do calor  $\alpha_t = \alpha_{xx}$ . Assim, a forma geral do gerador de simetrias de ponto de Lie da equação de Burgers é

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= (c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt) \frac{\partial}{\partial x} + (c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2) \frac{\partial}{\partial t} + \\ &\quad + (\alpha(x, t)e^{-u} + c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2) \frac{\partial}{\partial u} = \\ &= c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial t} + c_3 \frac{\partial}{\partial u} + c_4 \left( x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} \right) + c_5 \left( 2t \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial u} \right) +\end{aligned}$$

$$+c_6 \left( 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (2t + x^2) \frac{\partial}{\partial u} \right) + \alpha(x, t) e^{-u} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Dessa forma, concluímos que as simetrias da equação de Burgers são geradas por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{X}_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{X}_6 &= 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (2t + x^2) \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{X}_\alpha &= \alpha(x, t) e^{-u} \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Por aplicação do método das características, a exemplo do que fizemos no caso da equação do calor, podemos concluir que as ações de cada um desses geradores de simetria são

$$\begin{aligned} G_1 &: (x, t, u) \mapsto (x, t + \epsilon, u), \\ G_2 &: (x, t, u) \mapsto (x + \epsilon, t, u), \\ G_3 &: (x, t, u) \mapsto (x, t, u + \epsilon), \\ G_4 &: (x, t, u) \mapsto (e^\epsilon x, e^{2\epsilon} t, u), \\ G_5 &: (x, t, u) \mapsto (x + 2\epsilon t, t, u - \epsilon x + \epsilon^2 t), \\ G_6 &: (x, t, u) \mapsto \left( \frac{x}{1 - 4\epsilon t}, \frac{t}{1 - 4\epsilon t}, u - \frac{x^2}{1 - 4\epsilon t} + \ln \sqrt{1 - 4\epsilon t} \right), \\ G_\alpha &= (x, t, u) \mapsto (x, t, \ln(e^u + \epsilon \alpha)). \end{aligned}$$

Logo, podemos observar que  $G_1$  corresponde a uma translação na coordenada temporal,  $G_2$  é uma translação na coordenada espacial,  $G_3$  é uma translação na variável dependente,  $G_4$  é uma transformação de escala,  $G_5$  é uma transformação de Galileu generalizada, e  $G_6$  é um grupo de transformações de ponto locais sem significado físico. Por sua vez,  $G_\alpha$  denota um sistema de dimensão infinita.

Como sabemos, podemos usar essas simetrias para construir soluções da equação de Burgers a partir de outras. Para ilustrarmos esse procedimento, partiremos da solução trivial  $u(x, t) = c$ . A aplicação de  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$  na solução trivial resulta em outra solução trivial. A aplicação de  $G_5$ ,  $G_6$  e  $G_\alpha$  resulta, respectivamente, em

$$u(x, t) = c - \epsilon x + \epsilon^2 t, \quad (5.2)$$

$$u(x, t) = c - \frac{\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 4\epsilon t}, \quad (5.3)$$

e

$$u(x, t) = c - \ln(\epsilon\alpha(x, t) + \bar{c}),$$

onde  $\bar{c} = e^c$ .

Além disso, as simetrias geradas por  $X_5$  e  $X_6$  permitem a interação desse processo indefinidamente. Para mostrarmos isso, chamemos a equação 5.2 de  $u^{(5-1)}(x, t)$ , denotando a aplicação da transformação de simetria  $G_5$  uma vez a  $u(x, t) = c$ , e 5.3 de  $u^{(6-1)}(x, t)$ , pelo mesmo motivo em relação a  $G_6$ .

Aplicando  $G_5$  a  $u^{(5-1)}(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} u^{(5-2)}(x, t) &= u^{(5-1)}(x - 2\epsilon t, t) - \epsilon x + \epsilon^2 t = c - \epsilon(x - 2\epsilon t) + \epsilon^2 t - \epsilon x + \epsilon^2 t = \\ &= c - \epsilon x + 2\epsilon^2 t + \epsilon^2 t - \epsilon x + \epsilon^2 t = c - 2\epsilon x + 4\epsilon^2 t. \end{aligned}$$

Aplicando  $G_5$  mais uma vez,

$$\begin{aligned} u^{(5-3)}(x, t) &= u^{(5-2)}(x - 2\epsilon t, t) = c - 2\epsilon(x - 2\epsilon t) + 4\epsilon^2 t - \epsilon x + \epsilon^2 t = \\ &= c - 2\epsilon x + 4\epsilon^2 t + 4\epsilon^2 t - \epsilon x + \epsilon^2 t = c - 3\epsilon x + 9\epsilon^2 t. \end{aligned}$$

Prosseguindo com o mesmo processo indefinidamente, obtemos

$$u^{(5-n)}(x, t) = c - n\epsilon x + n^2\epsilon^2 t, \quad n = 1, 2, \dots,$$

que, como o método das prolongações nos ensina, define uma família de soluções da equação de Burgers.

Façamos o mesmo aplicando  $G_6$  repetidamente a 5.3. Em uma primeira aplicação, obtemos

$$\begin{aligned} u^{(6-2)}(x, t) &= u^{(6-1)}\left(\frac{x}{1 + 4\epsilon t}, \frac{t}{1 + 4\epsilon t}\right) - \frac{\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 4\epsilon t} = \\ &= c - \frac{\epsilon}{1 + 4\epsilon\left(\frac{t}{1 + 4\epsilon t}\right)} \frac{x^2}{(1 + 4\epsilon t)^2} - \ln\sqrt{1 + \frac{4\epsilon t}{1 + 4\epsilon t}} - \frac{\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 4\epsilon t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u^{(6-2)}(x, t) = c - \frac{2\epsilon x^2}{1 + 8\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 8\epsilon t}. \end{aligned}$$

Aplicando  $G_6$  mais uma vez,

$$\begin{aligned} u^{(6-3)}(x, t) &= u^{(6-2)}\left(\frac{x}{1 + 4\epsilon t}, \frac{t}{1 + 4\epsilon t}\right) - \frac{\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 4\epsilon t} = \\ &= c - \frac{\epsilon}{1 + 8\epsilon\left(\frac{t}{1 + 4\epsilon t}\right)} \frac{x^2}{(1 + 4\epsilon t)^2} - \ln\sqrt{1 + \frac{8\epsilon t}{1 + 4\epsilon t}} - \frac{\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 4\epsilon t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u^{(6-3)}(x, t) = c - \frac{3\epsilon x^2}{1 + 12\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 12\epsilon t}.$$

Continuando esse processo indefinidamente,

$$u^{(6-n)}(x, t) = c - \frac{n\epsilon x^2}{1 + 4n\epsilon t} - \ln\sqrt{1 + 4n\epsilon t},$$

o que define outra família de soluções.

Por sua vez, Mukesh e Raj Kumar [60] constroem soluções para a equação de Burgers fazendo a mesma análise que fizemos, mas sem usar a própria equação para simplificar os cálculos. Os geradores de simetria obtidos por eles, que são equivalentes àqueles apresentados acima, são

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{X}_4 &= u \frac{\partial}{\partial u} - x \frac{\partial}{\partial x} - 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_5 &= xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x - ut) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

Nessa base, as equações de Lagrange-Charpit serão

$$\frac{dx}{a_1xt - a_2x + a_3t + a_4} = \frac{dt}{a_1t^2 - 2a_2t + a_5} = \frac{du}{a_1(x - ut) + a_2u + a_3}.$$

Um caso particular interessante consiste em tomar  $a_1 \neq 0$ , tratando  $A_1 = -\frac{a_1}{a_2}$ ,  $B_1 = \frac{a_3}{a_1}$ ,  $C_1 = \frac{a_4}{a_1}$  e  $D_1 = \frac{a_5}{a_1}$ , e considerando o subcaso  $D_1 < A_1^2$ , com  $k = \frac{k_2}{k_1}$  ( $k_1 \neq 0$ ), onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes arbitrárias, o que resulta em uma solução da equação de Burgers dada por

$$u(x, t) = \alpha + \frac{X}{\sqrt{t + 2A_1t + D_1}} \left[ (t + A_1) - 4\mu \frac{J_{-3/4}(X^2d) - kJ_{3/4}(X^2d)}{J_{1/4}(X^2d) + kJ_{-1/4}(X^2d)} \right],$$

com  $X = \frac{x+B_1-\alpha(A_1+t)}{\sqrt{t^2+2A_1t+D_1}}$ ,  $d^2 = \frac{D_1-A_1^2}{16\mu^2}$  e  $J_n(\cdot)$  é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem  $n$ .

Uma análise gráfica da solução acima evidencia um efeito de amortecimento viscoso, com  $u$  decrescendo à medida que  $\mu$  cresce no tempo  $t$ . Isso mostra, os autores concluem, que a equação de Burgers experimenta uma perda de momento e, portanto, de energia cinética com o tempo. Além do mais, essa solução apresenta natureza degenerada em  $x = 0.06143$  e  $u = 0.4434$ .

Considerando o subcaso  $D_1 = A_1^2$ , a equação de Burgers possui uma solução dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{x + B_1}{t + A_1} + \frac{1}{(t + A_1)^2} \left[ C_1 - A_1B_1 - \frac{3\mu\alpha_1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(x + B_1)(t + A_1) + (C_1 - A_1B_1)} \right. \\ \left. \times \left( \frac{J_{-2/3}(\alpha_1 X_1^{3/2}) - kJ_{2/3}(\alpha_1 X_1^{3/2})}{J_{1/3}(\alpha_1 X_1^{3/2}) + kJ_{-1/3}(\alpha_1 X_1^{3/2})} \right) \right], \end{aligned}$$

com  $X_1 = \frac{C_1 - A_1 B_1}{2(t + A_1)^2} + \frac{x + B_1}{t + A_1}$ ,  $b = -\frac{A_1}{4\mu}$  e  $\alpha_1^2 = \frac{2(A_1 B_1 - C_1)}{\mu^2}$ . Neste caso, multisólitons emergem para  $x = -0.25$ . Para o leitor interessado, a estrutura dinâmica de soluções exatas do tipo sóliton para a equação de Burgers é estudada em [61] por meio da aproximação bilinear.

A exemplo do que fizemos no caso da equação do calor, na tabela 3 apresentamos as relações de comutação dos geradores de simetria da equação de Burgers.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_\alpha$
$X_1$	0	0	0	$2X_1$	$2X_2$	$4X_4 - 2X_3$	$X_{\alpha t}$
$X_2$	0	0	0	$X_1$	$-X_3$	$2X_5$	$X_{\alpha x}$
$X_3$	0	0	0	0	0	0	$-X_\alpha$
$X_4$	$-X_2$	$-2X_1$	0	0	$X_5$	$2X_6$	$X_{\alpha'}$
$X_5$	$X_3$	$-2X_2$	0	$-X_5$	0	0	$X_{\alpha''}$
$X_6$	$-2X_5$	$-2X_3 - 4X_4$	0	$-2X_6$	0	0	$X_{\alpha'''}$
$X_\alpha$	$-X_{\alpha x}$	$-X_{\alpha t}$	$X_\alpha$	$X_{\alpha'}$	$-X_{\alpha''}$	$X_{\alpha'''}$	0

Tabela 3 – Tabela de comutação dos geradores de simetria de ponto de Lie da equação de Burgues. Aqui,  $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$ ,  $\alpha'' = 2t\alpha_x + x\alpha$  e  $\alpha''' = 4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha$ .

Se compararmos as tabelas 2 e 3, notaremos que elas apresentam as mesmas relações de comutação entre seus geradores. Disso, podemos suspeitar que exista alguma relação entre as álgebras de Lie associadas às duas equações. Para mostrarmos que esse de fato é o caso, consideremos a transformação  $w = e^u$ . Daí tiramos que

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial}{\partial w} = e^u \frac{\partial}{\partial w} = w \frac{\partial}{\partial w}.$$

E, os geradores de simetria da equação de Burgers são reescritos como

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= w \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xw \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_6 &= 4xt \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (2t + x^2)w \frac{\partial}{\partial w}, \\ X_\alpha &= \alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Porém, esses são exatamente os geradores de simetria da equação do calor discutida no exemplo 3.18. De fato, dado que  $w = e^u$ , temos que

$$w_t = e^u u_t, \quad w_x = e^u u_x, \quad w_{xx} = (u_{xx} + u_x^2)e^u.$$

Substituindo isso na equação do calor  $w_t = w_{xx}$ ,

$$w_t = w_{xx} \Rightarrow u_t e^u = (u_{xx} + u_x^2) e^u,$$

que é exatamente a equação de Burgers.

O que acabamos de obter é exatamente a **transformação de Cole-Hopf** [59,62,63], que reduz soluções da equação de Burgers a soluções positivas da equação do calor. Esse é um caso particular de uma classe mais geral de mudança de variáveis que permite transformar equações diferenciais parciais parabólicas <sup>1</sup> que apresentam não-linearidade quadrática, como a equação de Burgers, em uma equação do calor. Dessa forma, soluções desse tipo de equações podem ser obtidas de soluções da equação do calor.

Por questões de completude, uma discussão um pouco mais geral sobre essas transformações será dada no apêndice C. Outro exemplo de aplicação da transformação de Cole-Hopf, nesse caso em sua forma complexa, está na transformação da equação de Schrödinger na equação de Madelung, de importância central no campo da hidrodinâmica quântica [66].

Como última observação, a equação 5.3 pode ser associada com soluções fundamentais da equação de Burgers. De fato, se aplicarmos a transformação de Cole-Hopf a 5.3,

$$\ln w = c - \frac{\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t} - \ln \sqrt{1 + 4\epsilon t} \Rightarrow w = \frac{c}{1 + 4\epsilon t} \exp\left(\frac{-\epsilon x^2}{1 + 4\epsilon t}\right),$$

que é exatamente a solução fundamental da equação do calor que obtivemos no exemplo 3.18.

## 5.2 Equação de Korteweg–De Vries

A equação de Korteweg–De Vries, proposta primeiramente por Boussinesq em 1877, e redescoberta por Diederik J. Korteweg e Gustav De Vries em 1895, desempenha papel central em modelos para ondas em superfícies de águas rasas: governa a propagação de ondas de água fracamente não lineares e fracamente dispersivas. Além disso, serve como modelo para quaisquer sistemas físicos onde a relação de dispersão para frequência  $\omega$  número de onda  $k$  é aproximada por  $\omega/k = c_0(1 - \beta k^2)$ , e a não linearidade é fraca e quadrática.

### 5.2.1 Aspectos Históricos

Em 1834, enquanto estava tentando determinar o design mais eficiente para canais de barcos, o engenheiro escocês John S. Russell fez a primeira observação do que ficou

<sup>1</sup> Suponha que  $u(x, t)$  satisfaça a equação  $Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu = G$ , onde  $A, B, \dots, G$  são funções. Essa equação é dita parabólica se  $B^2 - 4AC = 0$ . Por sua vez, se  $B^2 - 4AC > 0$ , a equação é dita hiperbólica. Por fim, se  $B^2 - 4AC < 0$ , a equação é elíptica [64, 65].

conhecido como onda solitária (sóliton). De acordo com suas próprias palavras [67]:

*Estava observando o movimento de um bote guiado rapidamente por um canal estreito por um par de cavalos, quando o bote subitamente parou - mas não a massa de água no canal no qual ele foi posto em movimento; se acumulou na proa do bote em um estado de grande agitação, e então subitamente deixando isso para trás, seguiu adiante em grande velocidade, assumindo a forma de uma larga e solitária elevação, uma pilha arredonda, lisa e bem formada de água, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a acompanhei a cavalo, e a ultrapassei ainda rolando a uma taxa de cerca de oito ou nove milhas por hora, preservando sua forma original, com cerca de nove metros de comprimento e trinta a quarenta centímetros de altura. Sua altura diminuiu gradualmente, e após uma ou duas milhas de perseguição, a perdi nas curvas do canal. Assim, no mês de agosto de 1834, se deu meu encontro com aquele singular e belo fenômeno ao qual chamei de onda de translação.*

Apesar de matemáticos proeminentes, do calibre de Stokes e Airy, acreditarem que essas ondas eram impossíveis, no ano de 1845 D. J. Korteweg e G. De Vries construíram um modelo para modelar águas em um canal raso. O objetivo deles era responder se seria possível que ondas solitárias persistissem naquelas circunstâncias.

É digno de nota que pouco antes o cientista francês J. V. Boussinesq publicou um trabalho incluindo termos não lineares em uma equação que exibia propriedades similares àquelas das ondas solitárias observadas por Russell, mas que acabou não chamando muita atenção na Inglaterra. Quatro anos após Boussinesq, Rayleigh confirmou as observações de Russell independentemente do seu colega francês. Por sua vez, Korteweg e De Vries seguiram o trabalho de Rayleigh adicionando efeitos de tensão de superfície [68, 69].

O redescobrimento da equação KdV, e seu estudo sistemático, se deu por investigações a respeito do problema da rede anarmônica unidimensional de massas iguais acopladas por molas não lineares estudado por Fermi, Pasta e Ulam em 1954. Por sua vez, o desenvolvimento de simulações computacionais por Zabusky e Kruskal em 1965, além da construção do método do espalhamento inverso por Robert Miura e outros em 1968, ajudaram no entendimento da equação e do comportamento de suas soluções.

Dado que a equação KdV busca descrever ondas estacionárias (soluções do tipo sóliton), terminemos, por completeza, seguindo Drazin e Johnson [70], esse breve apanhado histórico com uma definição sobre sólitons:

### Definição 5.1: Sóliton

O termo sóliton pode ser associado a qualquer solução de uma equação (ou sistema) não linear que

- i Representa uma onda de forma permanente;
- ii É localizada, tal que decai ou se aproxima de uma constante no infinito;
- iii Pode interagir fortemente com outros sólitons e reter a sua identidade.

## 5.2.2 Derivação

Antes de iniciarmos a derivação da equação KdV, precisaremos estabelecer alguns resultados preliminares.

### 5.2.2.1 Equação de Euler

Uma equação de importância fundamental na dinâmica de fluidos é a equação de Euler. Poderíamos extraí-la de uma particularização da equação de Navier-Stokes, que utilizamos na seção anterior. Porém, é instrutivo que o façamos a partir de ideias mais fundamentais.

Consideremos um pequeno elemento de fluido de volume  $\delta V$ . A força de rede em tal elemento devido à pressão  $P$  do fluido circundante é  $-\nabla P \delta V$  [71]. Se não desprezarmos a ação da gravidade, temos que a força total atuando nesse elemento é

$$\mathbf{F} = (-\nabla P + \rho \mathbf{g}) \delta V,$$

onde  $\mathbf{g}$  é a aceleração gravitacional.

Pela segunda lei de Newton, essa força deve ser igual ao produto entre a massa do elemento e sua aceleração. Portanto,

$$m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \delta V \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (-\nabla P + \rho \mathbf{g}) \delta V.$$

Daí, chegamos à equação de Euler

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}.$$

Sabendo que a força gravitacional é conservativa, podendo ser escrita como o gradiente de um potencial  $(-\nabla \chi)$ , e que o termo gravitacional pode ser tomado na direção do eixo  $z$ , tal que  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , teremos que  $\chi = gz$ . Logo, a equação de Euler pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \chi \right),$$

onde explicitamos a derivada total em relação ao tempo e tomamos  $\rho$  constante.

Pelo uso da identidade  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right)$  [72], a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \chi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right).$$

Particularmente, para o caso de um fluido irrotacional ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ) e incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ),

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho} + \chi + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right).$$

Considerando  $\mathbf{u} = \nabla \phi$ , que justificaremos abaixo, a integração da expressão anterior conduz a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P - P_0}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gy + C(t).$$

Porém, tendo em mente que  $P - P_0 = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , com  $T$  sendo a tensão superficial, chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{P}{\rho} = C(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - gy, \quad (5.4)$$

onde  $P$  é a pressão em um ponto abaixo da superfície onde as forças de capilaridade deixam de agir.

### 5.2.2.2 Potencial de Velocidade e Função de Fluxo

Para os nossos propósitos, consideremos uma onda bidimensional. O vetor velocidade será dado por  $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ , com  $u$  e  $v$  sendo funções suaves, contínuas e infinitamente diferenciáveis. Agora, pela condição de irrotacionalidade,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Pelo teorema de Clairaut-Schwarz, a igualdade acima deve ser satisfeita se  $u$  e  $v$  puderem ser escritas como

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

A essa função  $\phi$  daremos o nome de **potencial de velocidade**.

Façamos o mesmo com a condição de incompressibilidade do fluido. Neste caso,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Novamente, nos lembrando do teorema de Clairaut-Schwarz, a igualdade acima é satisfeita se  $u$  e  $v$  puderem ser reescritas em termos de uma função  $\psi$ , que chamaremos de **função de fluxo**, como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

### 5.2.2.3 Obtendo a Equação KdV

Para tratarmos nosso problema, imporemos o que chamaremos de condição de superfície, que enunciaremos como se segue:

**Condição Cinemática de Superfície:** As partículas presentes na superfície de um fluido permanecem lá.

Seja  $F(x, y, t) = y - \eta(x, t)$ , onde  $\eta(x, t)$  descreve uma onda unidimensional. A condição de superfície traduz-se em

$$F(x, \eta(x, t), t) = 0,$$

se  $y = \eta(x, t)$ .

Derivando  $F$  em relação a  $t$ ,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla F) = 0.$$

Mas, da definição de  $F$ , temos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1.$$

Assim,

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v = 0. \quad (5.5)$$

Com os conceitos relevantes devidamente apresentados, sigamos Korteweg e De Vries [73]. Começaremos com a expansão de Rayleigh [74] para as componentes  $u$  e  $v$  em termos de séries rapidamente convergentes, dadas por

$$u = f + yf_1 + y^2f_2 + \dots,$$

$$v = y\theta_1 + y^2\theta_2 + \dots,$$

onde  $y$  representa a altura da partícula em relação ao fundo do canal, e  $f, f_1, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$  são funções de  $x$  e  $t$ .

Pela condição de incompressibilidade,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f_1}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots - \theta_1 - 2y\theta_2 - \dots = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \theta_1 \right) + y \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} - 2\theta_2 \right) + y^2 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - 3\theta_3 \right) + \dots + y^{n-1} \left( \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} - n\theta_n \right) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\theta_n = -\frac{1}{n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}.$$

Por sua vez, pela condição de irrotacionalidade,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = f_1 + y \left( 2f_2 - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) + y^2 \left( 3f_3 - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) + \dots + y^{n-1} \left( nf_n - \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x} \right) = 0.$$

O que resulta em

$$f_n = \frac{1}{n} \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x} = -\frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f_{n-2}}{\partial x^2}.$$

Com os resultados acima, as expansões para  $u$  e  $v$  se tornam

$$u = f - \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24}y^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dots, \quad (5.6)$$

$$v = -y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6}y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y^5 \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \dots. \quad (5.7)$$

Além do mais, o potencial de velocidade  $\phi$  e a função de fluxo  $\psi$  podem ser reexpressas como

$$\phi = \int f dx - \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 24y^4 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots, \quad (5.8)$$

$$\psi = y \cdot f - \frac{1}{6}y^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{120}y^5 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dots. \quad (5.9)$$

Substituindo as expansões 5.6, 5.7 e 5.8 em 5.4,

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} &= C(t) + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - gy - \int \frac{\partial f}{\partial t} dx - \frac{1}{2}f^2 + y^2 \left( \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + \\ &\quad + y^4 \left( -\frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{8} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right) + \\ &\quad + y^6 \left( \frac{1}{720} f \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \frac{1}{48} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{72} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)^2 - \frac{1}{120} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \frac{1}{720} \frac{\partial^6 f}{\partial x^5 \partial t} \right) + \dots = \\ &= L - gy - My^2 + Ny^4 + Py^6 + \dots + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Diferenciando essa expressão com respeito a  $x$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial x} + y^2 \frac{\partial M}{\partial x} + y^4 \frac{\partial N}{\partial x} + y^6 \frac{\partial P}{\partial x} + \dots - g \frac{\partial y}{\partial x} + 2My \frac{\partial y}{\partial x} + 4Ny^3 \frac{\partial y}{\partial x} + 6Py^5 \frac{\partial y}{\partial x} + \dots + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (5.10)$$

Tomemos agora  $y = l + \eta$  e  $f = q_0 + \beta$ , onde  $l$  e  $q_0$  são constantes e  $\eta$  e  $\beta$  são funções de  $x$  e  $t$ . Mas, para ondas longas, que possuem comprimento de onda muito grande comparativamente à profundidade do canal, cada nova derivação com respeito a  $x$  resultará em quantidades cada vez menores. Portanto, em uma primeira aproximação, a equação 5.5, que, como sabemos, deve ser satisfeita na superfície, e 5.10 se tornam, respectivamente,

$$q_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + l \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0,$$

e

$$q_0 \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

A solução para esse sistema de equações é

$$\beta = \frac{q_0}{l}(\eta + \alpha),$$

sujeita às condições  $d\eta/dt = d\beta/dt = 0$ , e tal que  $\beta = \sqrt{gl}$  e  $\alpha$  é uma constante arbitrária que suporemos ser pequena.

Fazendo uma segunda aproximação tal que  $f$  possa ser escrita como  $f = q - \frac{q_0}{l}(\eta + \alpha + \gamma)$ , com  $\gamma$  sendo pequena comparada a  $\eta$  e  $\alpha$ , temos que a substituição em 5.5 e 5.10, rejeitando termos desprezíveis, nos conduz a

$$\frac{q_0}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} - g \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{g}{l}(2\eta + \alpha) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} l^2 g \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0,$$

e

$$\frac{q_0}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{g}{l}(\eta + \alpha) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left( \frac{1}{2} l^2 g - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right).$$

Somando essas equações, concluímos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \frac{g}{q_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right), \quad (5.11)$$

onde  $\sigma = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$  e  $q_0 = \sqrt{gl}$ . Essa é a **equação de Korteweg e De Vries (KdV)**.

### 5.2.3 Soluções Tipo Onda Solitária da Equação KdV

Começamos essa discussão observando que Korteweg e De Vries construíram um modelo para água em um canal raso. Além disso, em consonância com a observação de Russell, esperaríamos que um modelo sucedido explicasse o misterioso fenômeno das "ondas de translação".

Consideremos uma onda estacionária. Neste caso,  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ , o que reduz a equação 5.11 a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Através de uma integração, obtemos que

$$c_1 + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (5.12)$$

Multiplicando esse resultado por  $6d\eta$ ,

$$6c_1 d\eta + 3\eta^2 d\eta + 4\alpha \eta d\eta + 2\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Integrando essa expressão, obtemos

$$c_2 + 6c_1 \eta + \eta^3 + 2\alpha \eta^2 + \sigma \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (5.13)$$

Se considerarmos que o fluido permanece imperturbável no infinito, e que  $l$  é a profundidade nesse ponto, as equações 5.12 e 5.13 devem ser satisfeitas para  $\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} =$

$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ . Portanto, é necessário que  $c_1 = c_2 = 0$  e, por consequência, a equação 5.13 se reduz a

$$\eta^3 + 2\alpha\eta^2 + \sigma \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

ou,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \pm \sqrt{-\frac{\eta^2(\eta + 2\alpha)}{\sigma}}. \quad (5.14)$$

Podemos proceder em dois casos diferentes:

**Caso I:** A constante  $\sigma$  é positiva.

Neste caso,  $\alpha$  deve ser negativa, de modo a garantir que  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  seja real para pequenos valores de  $\eta$ . Expressando  $\alpha = -H$ , a equação 5.14 pode ser reescrita como

$$\frac{d\eta}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1}{\sigma} \eta \sqrt{H - \eta}}.$$

Mas,

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{A-y}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left( \frac{\sqrt{A-x} - \sqrt{A}}{\sqrt{A-x} + \sqrt{A}} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{A}} \operatorname{arcsech}^2 \left( \frac{y}{A} \right).$$

Dessa forma, a solução da equação diferencial acima é

$$\frac{2}{\sqrt{H}} \operatorname{arcsech}^2 \left( \frac{\eta}{H} \right) = \frac{x}{\sigma}.$$

Que, pode ser reexpressa como

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left( x \sqrt{\frac{H}{4\sigma}} \right),$$

que é a equação para uma onda solitária estacionária positiva.

Quando a onda não é estacionária, a equação KdV apresenta a solução [69]

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct + C) \right),$$

cuja forma corresponde ao que Russell observou. A propagação de uma onda solitária é apresentada na figura 11.

**Caso II:** A constante  $\sigma$  é negativa.

Neste caso, a constante  $\alpha$  deve ser positiva. Estabelecendo  $\alpha = H$  e trocando  $\eta$  por  $-\eta'$ , a equação 5.14 se reduz a

$$\frac{d\eta'}{dx} = \pm \sqrt{-\frac{1}{\sigma} \eta' \sqrt{H - \eta'}},$$

cuja solução, seguindo o mesmo procedimento do caso anterior, é

$$\eta = -H \operatorname{sech}^2 \left( x \sqrt{-\frac{H}{4\sigma}} \right),$$

o que corresponde a uma onda solitária se deslocando na direção negativa de  $x$ . Lembrando da expressão para  $\sigma$ , podemos concluir que sempre que a profundidade do canal for menor que  $\sqrt{\frac{3T}{g\rho}}$ , a onda estacionária é negativa. Do contrário, é positiva.

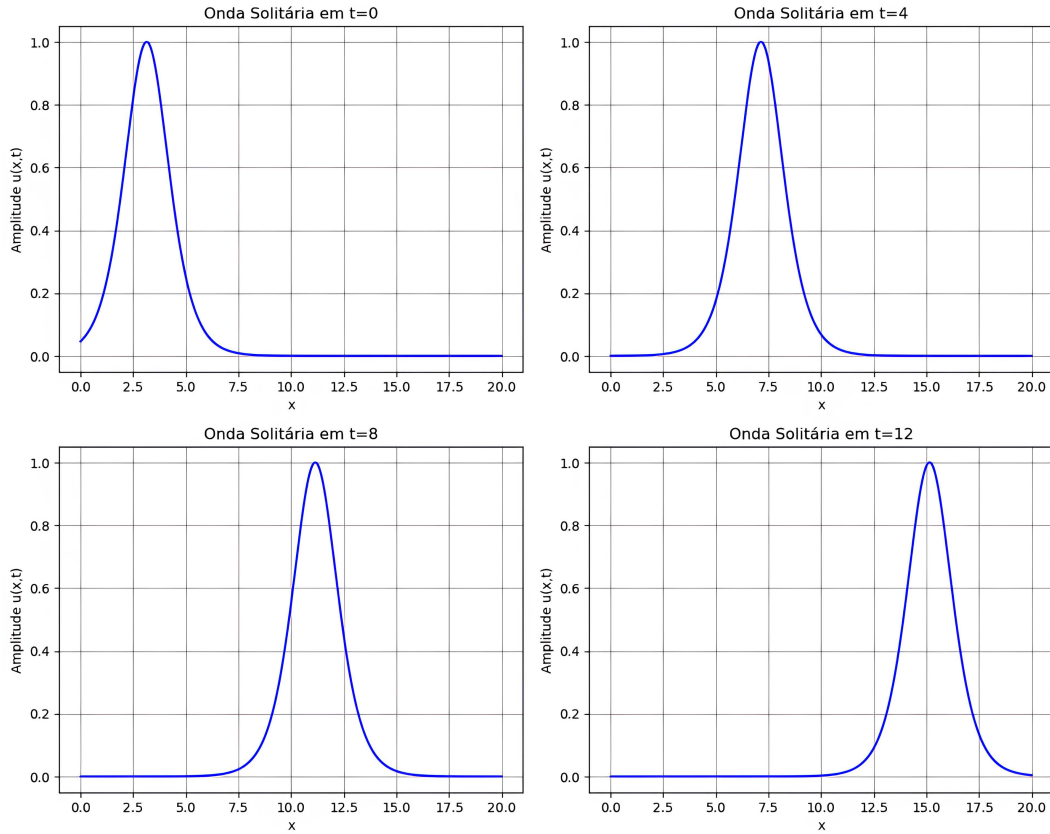


Figura 10 – Propagação de uma onda solitária da esquerda para a direita. Aqui, tomamos  $c = 1$ .

### 5.2.4 Simetrias da Equação KdV

Antes de aplicarmos o método das prolongações para determinarmos os geradores de simetria da equação KdV, é razoável que façamos uma transformação objetivando reescrevê-la na forma que normalmente aparece na literatura.

#### 5.2.4.1 Equação KdV em Notação Moderna

Seja a equação 5.11 nas variáveis  $x'$  e  $t'$ ,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t'} = \frac{3}{2} \frac{g}{q_0} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x'^2} \right).$$

Consideremos a transformação

$$t' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l\sigma}} t, \quad x' = -\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \quad u = \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{3} \alpha.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l\sigma}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \eta = 2u - \frac{2}{3} \alpha.$$

A substituição desses resultados na equação KdV resulta em

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{5.15}$$

que é a forma da equação KdV mais apropriada para os nossos propósitos.

Para tratarmos 5.15, precisaremos prolongar a ação dos geradores de simetria até o espaço de jatos das derivadas de terceira ordem, devido ao termo  $u_{xxx}$ . Chamando 5.15 de  $\Phi$ , a condição de simetria será

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{X}(\Phi) = \phi^t + Uu_x + u\phi^x + \phi^{xxx} = 0.$$

Os termos  $\phi^t$ ,  $\phi^x$  e  $\phi^{xx}$  são aqueles construídos na subseção 3.8.2. Já o termo  $\phi^{xxx}$ , pela equação 3.35, é dado por

$$\begin{aligned} \phi^{xxx} = & D^3(U - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = U_{xxx} + (3U_{xxu} - \xi_{xxx})u_x + (3U_{xuu} - 3\xi_{xxu})u_x^2 + \\ & + (U_{uuu} - 3\xi_{xuu})u_x^3 + (3U_{xu} - 3\xi_{xx})u_{xx} + (3U_{uu} - 9\xi_{xu})u_x u_{xx} - 6\xi_{uu}u_x^2 u_{xx} - 3\xi_u u_{xx}^2 - \xi_{uuu}u_x^4 - \\ & - \tau_{xxx}u_t - 3\tau_{xx}u_{xt} - 3\tau_{xuu}u_x u_t - 3\tau_{xuu}u_x^2 u_t - 3\tau_{xu}u_{xx}u_t - 5\tau_{xu}u_x u_{xt} - \tau_{uuu}u_x^3 u_t - 3\tau_{uu}u_x u_{xx}u_t - \\ & - 3\tau_{uu}u_x^2 u_{xt} + (U_u - 3\xi_x)u_{xxx} - 3\tau_x u_{xxt} - 4\xi_u u_x u_{xxx} - 3\tau_u u_{xt} u_{xx} - \tau_u u_t u_{xxx} - 3\tau_u u_x u_{xxt}. \end{aligned}$$

Substituindo os termos acima na condição de simetria e fazendo uso da expressão 5.15 para eliminarmos  $u_{xxx}$ , obtemos

$$\begin{aligned} & U_t + U_{xxx} + uU_x + (3U_{xxu} - \xi_{xxx} - \xi_t + 2\xi_x u + U)u_x + (3U_{xuu} - 3\xi_{xxu} + 3u\xi_u)u_x^2 + \\ & + (U_{uuu} - 3\xi_{xuu})u_x^3 + (3U_{xu} - 3\xi_{xx})u_{xx} + (3U_{uu} - 9\xi_{xu})u_x u_{xx} - \xi_{uu}u_x^2 u_{xx} - 3\xi_u u_{xx}^2 - \\ & - \xi_{uuu}u_x^4 + (-\tau_{xxx} - \tau_t - u\tau_x + 3\xi_x)u_t - 3\tau_{xu}u_x u_{xt} + (-3\tau_{xuu} + 3\xi_u)u_x u_t + \tau_u u_t^2 - \\ & - 3\tau_{xuu}u_x^2 u_t - 3\tau_{xu}u_{xx}u_t - 5\tau_{xu}u_x u_{xt} - \tau_{uuu}u_x^3 u_t - 3\tau_{uu}u_x u_{xx}u_t - 3\tau_{uu}u_x^2 u_{xt} - 3\tau_x u_{xxt} - \\ & - 3\tau_u u_{xt} u_{xx} - 3\tau_u u_x u_{xxt} = 0. \end{aligned}$$

Para que a expressão acima seja satisfeita, é necessário que cada um de seus elementos seja igual a zero. Isso conduz ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} U_t + U_{xxx} + uU_x = 0, \\ \xi_t - 2u\xi_x + \xi_{xxx} - 3U_{xxu} - U = 0, \\ U_{xuu} - \xi_{xxu} + u\xi_u = 0, \\ U_{uuu} - 3\xi_{xuu} = 0, \\ U_{xu} - \xi_{xx} = 0, \\ U_{uu} - 3\xi_{xu} = 0, \\ \xi_{uu} = 0, \\ \xi_u = 0, \\ \xi_{uuu} = 0, \\ \tau_{xxx} + \tau_t + u\tau_x - 3\xi_x = 0, \\ \tau_{xx} = 0, \\ \tau_{xxu} - \xi_u = 0, \\ \tau_u = 0, \\ \tau_{xuu} = 0, \\ \tau_{xu} = 0, \\ \tau_{xxu} = 0, \\ \tau_{uu} = 0, \\ \tau_x = 0. \end{array} \right.$$

#### 5.2.4.2 Resolvendo o Sistema de Equações Determinantes da Equação KdV

O sistema de equações determinantes para a equação de Korteweg-De Vries é consideravelmente maior que o da equação de Burgers, mas a metodologia para sua resolução é idêntica: partimos das equações mais simples para restringir progressivamente a forma dos infinitesimais.

A análise começa, novamente, com as equações para  $\tau$ . As condições  $\tau_x = 0$  e  $\tau_u = 0$  implicam que  $\tau = \tau(t)$ . Em seguida, as equações para  $\xi$  (como  $\xi_u = 0$ ) mostram que  $\xi = \xi(x, t)$ . A equação  $\tau_{xx} = 0$  é trivialmente satisfeita. A condição chave torna-se  $\tau_t + u\tau_x - 3\xi_x = 0$ , que, com as restrições já encontradas, simplifica para  $\dot{\tau}(t) - 3\xi_x = 0$ . Integrando em relação a  $x$ , concluímos que  $\xi$  é linear em  $x$ :

$$\xi(x, t) = \frac{1}{3}\dot{\tau}(t)x + \sigma(t)$$

para alguma função  $\sigma(t)$ . Ao substituir as formas de  $\xi$  e  $\tau$  nas equações restantes para  $U$ , o sistema se resolve completamente, revelando que  $\tau(t)$  deve ser no máximo linear em  $t$  e

que  $\sigma(t)$  também é linear, levando à solução geral encontrada:

$$\xi = c_2x + c_3 + c_4t, \quad \tau = 3c_2t + c_1, \quad U = -2c_2u + c_4.$$

Este resultado nos fornece a conhecida álgebra de simetria de quatro dimensões para a equação KdV.

Da solução do sistema sobredeterminado para a equação KdV, concluímos que a forma geral de um gerador infinitesimal é dada por

$$\mathbf{X} = (c_1 + 3c_2t)\frac{\partial}{\partial t} + (c_2x + c_3 + c_4t)\frac{\partial}{\partial x} + (c_4 - 2c_2u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Portanto, temos que os geradores de simetria da equação KdV são

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{X}_2 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}.$$

Se calcularmos os comutadores entre esses geradores, temos como resultado a tabela 4.

	$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_2$	$\mathbf{X}_3$	$\mathbf{X}_4$
$\mathbf{X}_1$	0	$3\mathbf{X}_1$	0	$\mathbf{X}_3$
$\mathbf{X}_2$	$-3\mathbf{X}_1$	0	$\mathbf{X}_3$	$\mathbf{X}_4$
$\mathbf{X}_3$	0	$-\mathbf{X}_3$	0	0
$\mathbf{X}_4$	$-2\mathbf{X}_4$	0	0	0

Tabela 4 – Tabela de comutação dos geradores de simetria de ponto da equação de Korteweg e De Vries.

Podemos verificar se a álgebra de Lie ( $\mathfrak{L}$ ) formada pelos geradores de simetria da equação KdV é solúvel ou não. Começamos pela subálgebra trivial  $\mathfrak{L}_1 = \text{span}\{\mathbf{0}\}$ , formada pelo elemento nulo. Naturalmente, a comutação de qualquer elemento com  $\mathbf{0}$  resulta em  $\mathbf{0}$ , justificando que  $\mathfrak{L}_1$  é uma subálgebra, em acordo com a definição 2.25.

Com a liberdade de escolher qualquer elemento, seja  $\mathfrak{L}_2 = \text{span}\{\mathbf{X}_3\}$ . Dado que, pela tabela 4, ele não comuta apenas com  $\mathbf{X}_2$ , temos que  $\mathfrak{L}_3 = \text{span}\{\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4\}$  e  $\mathfrak{L}_4 = \text{span}\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4\}$ . Por fim, a subálgebra de  $\mathfrak{L}$  que possui  $\mathfrak{L}_4$  como subálgebra é a própria  $\mathfrak{L}$ . Portanto, temos que

$$\{0\} \subset \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_3 \subset \mathfrak{L}_4 \subset \mathfrak{L},$$

determinando que essa álgebra de Lie é solúvel.

### 5.2.4.3 Soluções Extraídas dos Geradores

Os geradores de simetria da equação de Korteweg e De Vries, conforme já sabemos, correspondem respectivamente à translação temporal, transformação de escala, translação

na coordenada espacial ( $x$ ) e transformação de Galileu. Devido à ação desses geradores, se  $u = f(x, t)$  é solução da equação KdV, então também serão:

$$\begin{cases} G_1 : & u = f(x, t, u) \mapsto u^{(1)} = f(x, t + \epsilon), \\ G_2 : & u = f(x, t, u) \mapsto u^{(1)} = e^{-2\epsilon} f(e^{-\epsilon}x, e^{-3\epsilon}t), \\ G_3 : & u = f(x, t, u) \mapsto u^{(1)} = f(x + \epsilon, t), \\ G_4 : & u = f(x, t, u) \mapsto u^{(1)} = f(x + \epsilon, t) + \epsilon. \end{cases}$$

Para determinarmos soluções da equação KdV a partir dos geradores acima, utilizaremos o procedimento de redução de ordem desenvolvido na subseção 3.6.1.

**Caso (a):** Soluções de Ondas Viajantes.

Primeiramente, consideremos soluções que sejam invariantes por transformações de translação nas variáveis  $t$  e  $x$ . O gerador para tal transformação pode ser dado por

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + c\mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x},$$

onde  $c$  é uma constante fixa. A ação gerada por  $\mathbf{X}$  é

$$(x, t, u) \mapsto (x + \epsilon c, t + \epsilon, u).$$

Podemos tentar construir funções de  $x$ ,  $u$  e  $t$  que são invariantes pela ação desse gerador. Tais funções são

$$y = x - ct, \quad e \quad v = u,$$

pois

$$y' = x' - ct' = x + \epsilon c - c(t + \epsilon) = x - ct = y, \quad e \quad v' = u' = u = v.$$

Daí, uma função invariante por essa transformação é  $v = h(x - ct)$ . Logo,

$$u_t = \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -ch_y = -cv_y,$$

$$u_x = \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = h_y = v_y, \quad u_{xx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = v_{yy}, \quad u_{xxx} = \frac{\partial v_{yy}}{\partial x} = \frac{\partial v_{yy}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = v_{yyy}.$$

Escrevamos a equação KdV de forma ligeiramente diferente, tentando simplificar o nosso trabalho, como

$$u_{xxx} + u_t + uu_x = 0, \tag{5.16}$$

que, em termos de  $y$  e  $v$ , se torna

$$v_{yyy} + vv_y - cv_y = v_{yyy} + \left(\frac{1}{2}v^2\right)_{,y} - cv_y = 0,$$

cuja integração resulta em

$$v_{yy} + \frac{1}{2}v^2 - cv = k.$$

Multiplicando esse resultado por  $v_y$ , temos

$$\left(\frac{1}{2}v_y^2 + \frac{1}{6}v^3 - \frac{c}{2}v^2\right)'_y = kv_y,$$

cujas integração resulta em

$$\frac{1}{2}v_y^2 = -\frac{1}{6}v^3 + \frac{c}{2}v^2 + kv + l.$$

A solução dessa equação, seguindo Olver [24], pode ser expressa em termos de funções elípticas na forma  $u = \mathfrak{P}(x - ct + \delta)$ , com  $\delta$  sendo um desvio de fase arbitrário. Se considerarmos que  $u \rightarrow 0$  rapidamente quando  $|x| \rightarrow \infty$ , devemos ter que  $k = l = 0$ . Neste caso,

$$v_y = \frac{dv}{dy} = \sqrt{v^2 \left(c - \frac{v}{3}\right)}.$$

Já tivemos contato com essa equação diferencial anteriormente, quando estávamos construindo soluções do tipo onda solitária da equação KdV e, portanto, sabemos que a solução dessa equação é

$$v = 3c \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2}y + \delta \right],$$

ou, desfazendo as transformações,

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) + \delta \right].$$

Com isso, explorando os geradores de translação em  $x$  e  $t$ , obtivemos novamente a solução tipo sóliton da equação KdV que já tínhamos obtido na subseção 5.2.3.

Particularmente, se  $c$  também é igual a zero, temos a equação diferencial

$$\frac{dv}{dy} = \sqrt{-\frac{1}{3}v^{3/2}},$$

cujas solução, chamada de estacionária singular, é

$$v = -12y^{-2} \Rightarrow u = -12(x + \delta)^{-2}.$$

**Caso (b) :** Soluções Invariantes por Transformações de Galileu.

Olhemos agora para soluções geradas pelo grupo de Galileu  $\mathbf{X}_4$ . A ação gerada por esse gerador é

$$(x, t, u) \mapsto (x + \epsilon t, t, u + \epsilon).$$

Neste caso, temos as funções invariantes

$$y = t, \quad \text{e} \quad v = yu - x.$$

Isolando  $u$  na segunda expressão e utilizando a primeira, temos as derivadas

$$u_t = \frac{v_y y - v - x}{y^2}, \quad u_x = \frac{1}{y}, \quad u_{xx} = u_{xxx} = 0.$$

A substituição desses resultados na equação 5.16 resulta em

$$\frac{dv}{dy} = 0,$$

cujas soluções são simplesmente  $v = c$ , ou, desfazendo as transformações e isolando  $u$ ,

$$u = \frac{x + \delta}{t}.$$

Podemos ainda combinar  $X_1$  com  $X_4$  para determinar soluções invariantes por transformações de Galileu e por translações temporais. O gerador para este caso pode ser dado por

$$\mathbf{X} = t \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u},$$

que gera a transformação

$$(x + \epsilon t, t + \epsilon a, u + \epsilon),$$

e para o qual temos as funções invariantes

$$y = x - \frac{1}{2}bt^2, \quad \text{e} \quad v = u - bt.$$

A exemplo do que fizemos anteriormente, se expressarmos a equação KdV em termos de  $y$  e  $v$ , chegamos à chamada **primeira transcendente de Painlevé**<sup>2</sup>

$$v_{yy} + \frac{1}{2}v^2 + v_y + c = 0,$$

o que nos permite concluir que soluções da transcendente de Painlevé através de

$$u(x, t) = h\left(x - \frac{1}{2}b^2t\right) + bt.$$

### Caso (c) : Soluções Invariantes por Escala.

Por fim, olhemos para o que podemos extrair do gerador de transformações de escala  $\mathbf{X}_2$ , cuja ação resulta em

$$(x, t, u) \mapsto (\lambda x, \lambda^3 t, \lambda^{-2} u).$$

<sup>2</sup> As transcendentais de Painlevé são soluções de certas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e não lineares no plano complexo, exibindo a **propriedade de Painlevé** (as únicas singularidades móveis são polos, onde por singularidade móvel dizemos pontos onde soluções não se comportam bem e a localização depende das condições iniciais). A primeira transcendente de Painlevé é solução da primeira equação de Painlevé, e assim por diante, havendo seis delas. Geralmente, as equações de Painlevé não podem ser resolvidas em termos de funções ordinárias [70, 75].

Para este caso, temos invariantes definidos no semi-espaco  $t > 0$  dados por

$$y = t^{-1/3}v, \quad v = t^{2/3}u.$$

Aqui, a equação 5.16 é reescrita em termos dessas funções como

$$v_{yyy} + vv_y - \frac{1}{3}yv_y - \frac{2}{3}v = 0, \quad (5.17)$$

que não é de simples solução.

Porém, seguindo os resultados de Miura [76,77], podemos estabelecer a transformação

$$v = \frac{dw}{dy} - 6w^2.$$

Assim, na variável  $w$ , a equação 5.17 se torna

$$w_{yyy} - \frac{1}{6}w^2w_y - \frac{1}{6}yw_y - \frac{1}{3}w = 0,$$

ou,

$$\frac{d}{dy}(w_{yy}) - \frac{1}{18}\frac{d}{dy}(w^3) - \frac{1}{3}\frac{d}{dy}(yw_y) = 0.$$

Através de uma integração, temos

$$w_{yy} = \frac{1}{18}w^3 + \frac{1}{3}yw_y + K,$$

que é conhecida como **segunda transcendente de Painlevé**, com propriedades similares à primeira.

### 5.3 Conclusão

Ao longo deste capítulo, aplicamos os vários resultados que desenvolvemos no capítulo 3 a duas equações de interesse físico. Vimos como podemos utilizar o método para descobrir quais são as simetrias satisfeitas por uma dada equação, e como elas podem ser utilizadas na determinação de soluções.

Na literatura, o método das prolongações é aplicado a diversos modelos e equações que desempenham papéis importantes em diversos campos da física. Por exemplo, Zygmunt Jacek Zawistowski [78] o utiliza para estudar as simetrias e soluções das equações radiais de Maxwell–Vlasov, utilizadas no estudo de plasmas esfericamente simétricos. Por sua vez, Samar Al-Nassar e Mehdi Nadjafikhah [79] o fazem para a equação de Fokker–Planck, obtendo algumas novas soluções no processo.

A equação de Sine-Gordon e suas variantes recebem atenção particular. Para citar alguns exemplos, Sen-yue Lou [80] faz a análise de simetria e obtém soluções exatas para o sistema de sine-Gordon de dimensão 2+1. K. Tenenblat e P. Winternitz [81] estudam as

simetrias das equações de onda e Sine-Gordon intrínseca generalizada. Por sua vez, Ozgur Yildirim e Sumeyra Caglak [82] fazem o mesmo para a equação de Sine-Gordon não linear.

Outro exemplo é dado pela equação de Lane-Emden, de grande importância para a astrofísica, por aparecer no estudo do interior de estrelas. Essa equação é estudada extensamente, fazendo uso do método das prolongações, por Ben Muatjetjeja em sua dissertação de mestrado [83], complementado por seu trabalho com Khaliq e Mahomed [84], utilizando a formulação lagrangiana da equação generalizada de Lane-Emden. O estudo de outras equações, como a equação plástica e a de Khokhlov–Zabolotskaya, pode ser encontrado em [85]. É válido citar também que M. A. Z. Khan e R. B. Narain [86] usam o método para estudar equações de Maxwell-Einstein no modelo Bag MIT para estrelas de quarks em astrofísica relativística.

No próximo capítulo, aplicaremos os resultados construídos no quarto capítulo a problemas de interesse físico, sobretudo nos campos da teoria da relatividade geral e da cosmologia.

## 6 Aplicações II: Relatividade Geral e Cosmologia

No capítulo 4, vimos que o método das prolongações pode ser estendido a lagrangianas, conduzindo à construção de um algoritmo que permite a obtenção de simetrias variacionais (de Noether). Por sua vez, sabemos que, em relatividade geral, o elemento de linha pode ser escrito em termos do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Além disso, a lagrangiana associada a esse elemento de linha é dada por

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (6.1)$$

onde  $\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$ , com  $s$  sendo um parâmetro afim.

Portanto, pela construção desenvolvida no capítulo 4, o método das prolongações pode ser aplicado diretamente aos campos da teoria da relatividade geral, cosmologia e correlatos. Isso é o que buscaremos ilustrar através do presente capítulo.

### 6.1 Killing Versus Noether

Para avançarmos ao longo desta seção, precisaremos definir primeiramente o que exatamente é um vetor de Killing, dado que vetores (geradores) de Noether já foram devidamente tratados ao longo do terceiro capítulo.

#### 6.1.1 Vetores de Killing

Com a experiência que desenvolvemos até aqui, é natural seguirmos Sean Carroll [87] e definirmos simetrias em uma variedade como:

#### Definição 6.1: Simetrias de uma Variedade

Uma variedade  $M$  possui uma simetria se a geometria é invariante sob uma certa transformação que mapeia  $M$  em si própria; isto é, se o tensor métrico associado permanece o mesmo. A essas simetrias do tensor métrico, daremos os nomes de **isometrias**.

Seguindo o mesmo autor, sabemos que, no caso de trajetórias tipo-tempo, a equação da geodésica pode ser escrita em termos da quadrivelocidade  $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ , como

$$U^\sigma \nabla_\sigma U^\mu = 0,$$

ou, em termos do quadrimomento  $p^\mu = mU^\mu$ , como

$$p^\sigma \nabla_\sigma p^\mu = 0.$$

Pela compatibilidade com a métrica ( $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$ ), podemos abaixar o índice  $\mu$ , nos permitindo expandir a derivada covariante para obter

$$p^\sigma \partial_\sigma p_\mu - \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda p^\sigma p_\lambda = 0. \quad (6.2)$$

Olhemos cuidadosamente para cada um dos termos de 6.2. Para o primeiro termo,

$$p^\sigma \partial_\sigma p_\mu = m \frac{dx^\sigma}{d\tau} \partial_\sigma p_\mu = m \frac{dp_\mu}{d\tau}.$$

Logo, esse termo nos diz como as componentes do momento variam ao longo da trajetória parametrizada pelo tempo próprio  $\tau$ .

Já para o segundo termo de 6.2, se expressarmos os símbolos de Christoffel em termos do tensor métrico, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda p^\sigma p_\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\sigma g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha g_{\sigma\mu}) p^\sigma p_\lambda = \frac{1}{2} (\partial_\sigma g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha g_{\sigma\mu}) p^\sigma p^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_\sigma g_{\alpha\mu}) - \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\sigma\mu})] p^\sigma p^\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\alpha}) p^\sigma p^\alpha = \partial_{[\sigma} g_{\alpha]\mu} p^\sigma p^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\alpha}) p^\sigma p^\alpha = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\alpha}) p^\sigma p^\alpha, \end{aligned}$$

onde a simetria do termo  $p^\sigma p^\alpha$  foi utilizada na última igualdade.

Portanto, em termos da análise acima, a equação da geodésica pode ser reescrita como

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\sigma\alpha}) p^\sigma p^\alpha.$$

Mas, se considerarmos que todas as componentes do tensor métrico são independentes da coordenada  $x^{\sigma*}$  ( $\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0$ ), a equação da geodésica nos leva a

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0.$$

As quantidades conservadas oriundas das isometrias são de grande relevância no estudo do movimento de partículas de teste em espaços-tempo curvos.

Um ponto de grande importância que Carroll levanta é que, embora a independência das componentes da métrica em uma ou mais coordenadas implique em isometrias, a recíproca não é verdadeira. Um contraexemplo está nas transformações de Lorentz, que não se manifestam como uma independência de  $\eta_{\mu\nu}$  em qualquer coordenada. Mais do que isso, poderíamos efetuar uma transformação para um sistema de coordenadas tal que até mesmo uma simples simetria por translação não parecesse óbvia. Mas, embora mude as componentes do tensor métrico, tal transformação não pode mudar a geometria associada, na qual se baseia nossa definição de simetria.

Suponhamos que  $x^{\sigma^*}$  seja a coordenada em relação à qual  $g_{\mu\nu}$  não depende. Denominemos  $K$  o vetor

$$K = \partial_{\sigma^*},$$

com coordenadas  $K^\mu = \delta_{\sigma^*}^\mu$ .

Diremos que  $K$  gera uma isometria, tal que a transformação que mantém a geometria invariante pode ser expressa infinitesimalmente como uma translação na direção de  $K^\mu$ , analogamente às discussões do capítulo 3, embora em um contexto diferente. Além disso, usando a definição de  $K$  dada acima,

$$p_{\sigma^*} = \delta_{\sigma^*}^\nu p_\nu = p_\nu \delta_{\sigma^*}^\nu \Rightarrow p_{\sigma^*} = K^\nu p_\nu = p_\nu K^\nu.$$

Devido à constância dessa quantidade escalar ao longo da trajetória, a construção que fizemos anteriormente nos leva a

$$\frac{dp_{\sigma^*}}{d\tau} = 0 \iff p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0.$$

Em outros termos, a invariância da quantidade escalar  $p_\sigma$  ao longo da trajetória equivale a dizer que a derivada direcional ao longo da geodésica desaparece.

Se trabalharmos a segunda expressão, temos que

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu K_\nu (\nabla_\mu p^\nu) + p^\mu p^\nu (\nabla_\mu K_\nu) = p^\mu p^\nu (\nabla_\mu K_\nu) = 0,$$

onde utilizamos na segunda igualdade a equação da geodésica ( $p^\sigma \nabla_\sigma p^\mu = 0$ ). Mas, dado que  $p^\mu p^\nu$  é simétrico, apenas a parte simétrica de  $\nabla_\mu K_\nu$  contribuirá. Dessa forma,

$$p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0,$$

ou seja,

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \Rightarrow p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0. \quad (6.3)$$

A primeira equação é conhecida como **Equação de Killing**, e é o que usaremos no que se segue. Os vetores que a satisfazem são denominados **vetores de Killing**, implicando, pela segunda equação em 6.3, que a quantidade  $K_\nu p^\nu = 0$  é conservada ao longo da trajetória.

O que está apresentado nessa seção é suficiente para os desenvolvimentos subsequentes, mas não é a forma mais rigorosa de construir esses resultados. Para o leitor interessado, Sean Carroll apresenta uma formalização mais rigorosa do tema no apêndice B de [87].

Nas próximas subseções, seguiremos Shamir, Jhangeer e Bhatti [88] no estudo das simetrias de Killing e Noether para espaços-tempos planos e estáticos. Faremos isso com o intuito de validar a conjectura proposta por Bokhari e seus colaboradores em [89]. Tal conjectura pode ser enunciada por:

**Conjectura 6.1**

A álgebra de Lie gerada pelos vetores de Killing (geradores de isometrias) de um determinado espaço-tempo forma uma subálgebra daquela gerada pelos vetores de Noether (geradores de simetrias da lagrangiana associada).

De acordo com [90], o elemento de linha, nesse caso, é

$$ds^2 = A(t)dt^2 - C(x)dx^2 - B(x)(dy^2 + dz^2).$$

Em nome da simplicidade, tomemos  $C(x) = 1$ . Assim, o elemento de linha anterior se torna

$$ds^2 = A(t)dt^2 - dx^2 - B(x)(dy^2 + dz^2). \quad (6.4)$$

Apliquemos a primeira equação 6.3 ao elemento de linha 6.4 para determinar o sistema mais geral de equações que os vetores de Killing devem satisfazer para um espaço-tempo plano e estático. A métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B(x) \end{pmatrix}$$

tem como símbolos de Christoffel não nulos

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}A_{,x}, & \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}B^{-1}B_{,x}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}B_{,x}, \\ \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}A^{-1}A_{,x}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}B^{-1}B_{,x}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2}B^{-1}B_{,x}, \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade de simetria dos símbolos de Christoffel ( $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ ).

Portanto, por simples computação das derivadas covariantes da equação de Killing, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2AK_{,t}^0 + A_{,x}K^1 = 0, & AK_{,x}^0 - K_{,t}^1 = 0, & AK_{,y}^0 - BK_{,t}^2 = 0, \\ AK_{,z}^0 - BK_{,t}^3 = 0, & K_{,x}^1 = 0, & K_{,y}^1 + BK_{,x}^2 = 0, & K_{,z}^1 + BK_{,x}^3 = 0 \\ B_{,x}K^1 + 2BK_{,y}^2 = 0, & K_{,y}^3 + K_{,z}^2 = 0, & B_{,x}K^1 + 2BK_{,z}^3 = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

Apliquemos agora o método das prolongações à lagrangiana associada a 6.4, de modo a obter a forma geral do sistema de equações diferenciais que deve ser resolvido. Após isso, basta particularizarmos esse sistema para o caso de interesse e resolvê-lo.

A lagrangiana que devemos analisar é

$$L = A(x)\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - B(x)(\dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (6.6)$$

onde o ponto denota a derivada em relação ao parâmetro  $s$ . Conforme o método das prolongações, para essa lagrangiana, devemos prolongar a ação do gerador até a primeira ordem, ou seja,

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{X} + (\eta^j_{,s} + \eta^j_{,i}\dot{x}^i - \xi_{,s}x^j - \xi_{,i}\dot{x}^i\dot{x}^j)\frac{\partial}{\partial\dot{x}^j}.$$

A aplicação de  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}$  a 6.6 resulta em

$$\eta^1(A_{,x}\dot{t}^2 - B_{,x}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2)) + 2\dot{t}(\tau_{,s} + \tau_{,t}\dot{t} + \tau_{,i}\dot{x}^i - \dot{t}(\xi_{,s} + \xi_{,i}\dot{x}^i))A(t) - 2\dot{x}(X_{,s} + X_{,t}\dot{t} + X_{,i}\dot{x}^i - \dot{x}(\xi_{,s} + \xi_{,i}\dot{x}^i)) - 2\dot{y}B(x)(Y_{,s} + Y_{,t}\dot{t} + Y_{,i}\dot{x}^i - \dot{y}(\xi_{,s} + \xi_{,i}\dot{x}^i)) - 2\dot{z}B(x)(Z_{,s} + Z_{,t}\dot{t} + Z_{,i}\dot{x}^i - \dot{z}(\xi_{,s} + \xi_{,i}\dot{x}^i)),$$

onde consideramos  $\tau = \eta^0$ ,  $X = \eta^1$ ,  $Y = \eta^2$  e  $Z = \eta^3$ . Além disso, pela notação de derivada total

$$D_s = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x^i}\dot{x}^i,$$

temos que

$$D_s(\xi) = \xi_{,s} + \dot{x}^i\xi_{,i} = \xi_{,s} + \xi_{,x}\dot{x} + \xi_{,y}\dot{y} + \xi_{,z}\dot{z},$$

$$D_s(G) = G_{,s} + G_{,i}\dot{x}^i = G_{,s} + G_{,x}\dot{x} + G_{,y}\dot{y} + G_{,z}\dot{z}.$$

Se substituirmos todas as expressões acima na expressão 4.34, com  $G = B$ , e separarmos os termos, obtemos o sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{,t} = 0, \quad \xi_{,x} = 0, \quad \xi_{,y} = 0, \quad \xi_{,z} = 0, \\ \xi_{,s} - 2\eta^1_{,t} = 0, \quad \eta^2_{,z} + \eta^3_{,y} = 0, \quad 2\eta^1_{,s} + G^1_{,y} = 0, \\ A(2\eta^0_{,t} - \xi_{,s}) + A_{,x}\eta^1 = 0, \\ B(2\eta^2_{,y} - \xi_{,s}) + B_{,x}\eta^1 = 0, \\ B(2\eta^3_{,z} - \xi_{,s}) + B_{,x}\eta^1 = 0 \\ A\eta^0_{,x} - \eta^1_{,t} = 0, \quad A\eta^0_{,y} - B\eta^2_{,t} = 0, \quad A\eta^0_{,z} - B\eta^3_{,t} = 0, \\ \eta^1_{,y} + B\eta^2_{,x} = 0, \quad \eta^1_{,z} + B\eta^3_{,x} = 0 \\ 2B\eta^2_{,s} + G_{,y} = 0, \quad 2B\eta^3_{,s} + G_{,z} = 0, \\ 2A\eta^0_{,y} - G_{,t} = 0, \quad G_{,s} = 0. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

### 6.1.2 Espaço-Tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é o caso mais simples de espaço-tempo plano, sobre o qual a Relatividade Especial é formulada. Ele é caracterizado pelas funções  $A(t) = 1$  e  $B(x) = 1$  na métrica geral que estamos analisando. Com esta escolha, a Lagrangiana 6.6 se reduz a:

$$L = \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2.$$

Vamos agora resolver os sistemas de equações determinantes para as simetrias de Killing e de Noether neste caso particular.

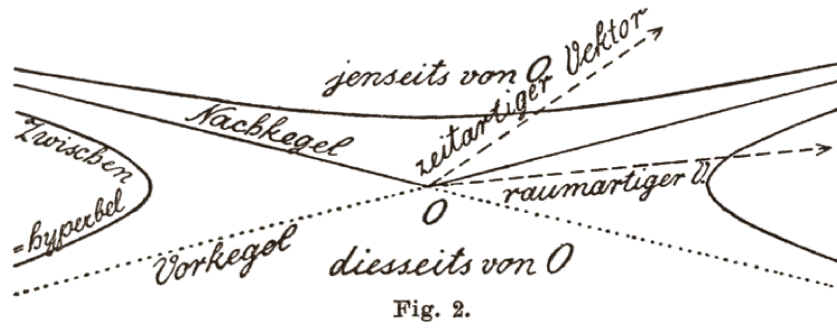


Fig. 2.

Figura 11 – Figura original de Minkowski.

### A. Cálculo dos Vetores de Killing

Ao substituir  $A(t) = 1$  e  $B(x) = 1$  (o que implica  $A_{,t} = 0$  e  $B_{,x} = 0$ ) no sistema geral para os vetores de Killing 6.5, obtemos o seguinte sistema simplificado de EDPs:

$$\begin{cases} K_{,t}^0 = 0, & K_{,x}^0 - K_{,t}^1 = 0, & K_{,y}^0 - K_{,t}^2 = 0, \\ K_{,z}^0 - K_{,t}^3 = 0, & K_{,x}^1 = 0, & K_{,y}^1 + K_{,x}^2 = 0, & K_{,z}^1 + K_{,x}^3 = 0 \\ K_{,y}^2 = 0, & K_{,y}^3 + K_{,z}^2 = 0, & K_{,z}^3 = 0. \end{cases}$$

A resolução deste sistema sobredeterminado procede de forma iterativa. As equações nas diagonais ( $K_{,t}^0, K_{,x}^1, \dots$ ) implicam que cada componente  $K^\mu$  não pode depender de sua própria coordenada (e.g.,  $K^0$  não depende de  $t$ ,  $K^1$  não depende de  $x$ , etc.). As equações mistas, então, relacionam as derivadas, forçando as componentes a serem, no máximo, lineares nas coordenadas. A solução geral deste sistema é:

$$\begin{cases} K^0 = c_1x + c_7y + c_8z + c_{10}, \\ K^1 = c_1t + c_4y + c_2z + c_3, \\ K^2 = c_7t - c_4x + c_5z + c_6, \\ K^3 = c_8t - c_2x - c_5y + c_9. \end{cases}$$

A solução acima depende de 10 constantes de integração arbitrárias ( $c_1, \dots, c_{10}$ ). Portanto, temos os 10 geradores de simetria de Killing do espaço-tempo de Minkowski, que são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{K}_2 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{K}_3 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{K}_4 &= y \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{K}_5 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{K}_6 &= \frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{K}_7 &= t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{K}_8 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{K}_9 &= \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{K}_{10} &= z \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Mas os geradores de simetria que obtivemos são exatamente os do grupo de Poincaré:  $\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_6, \mathbf{K}_9$  e  $\mathbf{K}_{10}$  são os geradores do subgrupo abeliano de translações no espaço e no tempo.  $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_4$  e  $\mathbf{K}_5$  são geradores do grupo de rotações no espaço tridimensional  $\text{SO}(3)$ , que, com os geradores de boosts de Lorentz ( $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_7$  e  $\mathbf{K}_8$ ), formam a álgebra do grupo de Lorentz. Esse resultado é esperado, pois é um fato amplamente utilizado na física, especialmente na física de partículas [91, 92].

## B. Cálculo das Simetrias de Noether

Aqui, o sistema 6.7 deve ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{,t} = 0, \quad \xi_{,x} = 0, \quad \xi_{,y} = 0, \quad \xi_{,z} = 0, \\ \xi_{,s} - 2\eta_{,t}^1 = 0, \quad \eta_{,z}^2 + \eta_{,y}^3 = 0, \quad 2\eta_{,s}^1 + G_{,y}^1 = 0, \\ 2\eta_{,t}^0 - \xi_{,s} = 0, \\ 2\eta_{,y}^2 - \xi_{,s} = 0, \\ 2\eta_{,z}^3 - \xi_{,s} = 0, \\ \eta_{,x}^0 - \eta_{,t}^1 = 0, \quad \eta_{,y}^0 - \eta_{,t}^2 = 0, \quad \eta_{,z}^0 - \eta_{,t}^3 = 0, \\ \eta_{,y}^1 + \eta_{,x}^2 = 0, \quad \eta_{,z}^1 + \eta_{,x}^3 = 0 \\ 2\eta_{,s}^2 + G_{,y} = 0, \quad 2\eta_{,s}^3 + G_{,z} = 0, \\ 2A\eta_{,y}^0 - G_{,t} = 0, \quad G_{,s} = 0. \end{array} \right.$$

Para resolvê-lo, notemos que as primeiras equações,  $\xi_{,t} = 0, \xi_{,x} = 0, \dots$ , nos dizem imediatamente que o infinitesimal  $\xi$  só pode ser uma função do parâmetro afim  $s$ , ou seja,  $\xi = \xi(s)$ . A equação  $\xi_{,s} - 2\eta_{,x}^1 = 0$  (com  $G = cte$ ) e suas análogas para as outras componentes de  $\eta^\mu$  revelam que  $\xi$  deve ser, no máximo, um polinômio de segunda ordem em  $s$ . A integração subsequente das equações para  $\eta^\mu$  leva à solução geral:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2}c_1s^2 + c_2s + c_3, \\ \eta^0 = \frac{1}{2}[(c_1t + c_7)s + c_2t] + c_9x + c_{15}y + c_{16}z + c_{18}, \\ \eta^1 = \frac{1}{2}[(c_1x - c_4)s + c_2x] + c_9t + c_{12}y + c_{10}z + c_{11}, \\ \eta^2 = \frac{1}{2}[(c_1y - c_6)s + c_2y] + c_{15}t - c_{12}x + c_{13}z + c_{14}, \\ \eta^3 = \frac{1}{2}[(c_1z - c_8)s + c_2z] + c_{16}t - c_{10}x + c_{13}y + c_{17}, \\ G = \frac{1}{2}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)c_1 + c_7t + c_4x + c_6y + c_8z + c_5. \end{array} \right.$$

Isso nos permite concluir que o espaço de Minkowski possui 17 geradores de simetria de Noether, dados por

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2}s^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}st \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}sx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}sy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}sz \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_2 &= s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} z \frac{\partial}{\partial z}, \\
\mathbf{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{X}_4 = -\frac{1}{2} s \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_6 = -\frac{1}{2} s \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_7 = \frac{1}{2} s \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{X}_8 = -\frac{1}{2} s \frac{\partial}{\partial z}, \\
\mathbf{X}_9 &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_{10} = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_{11} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{X}_{12} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \\
\mathbf{X}_{14} &= \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_{15} = y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_{16} = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_{17} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_{18} = \frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

É digno de nota que, se efetuarmos a mesma análise, mas usando coordenadas esféricas, obtemos o mesmo número de simetrias de Noether, conforme mostrado por Hussain et al. [93].

### C. Conclusão para o Espaço de Minkowski

Comparando os 10 geradores de Killing com os 17 geradores de Noether, constatamos que todos os geradores de isometrias são também simetrias de Noether. Dessa forma, mostramos que a conjectura de Bokhari et al. se verifica para o espaço de Minkowski: a álgebra de Killing é uma subálgebra da álgebra de Noether.

#### 6.1.3 Universo de Taub

A solução de Taub para as equações de campo de Einstein para o espaço vazio, proposta por Abraham Haskel Taub em 1951 [94], pode ser considerada uma primeira tentativa de desenvolver a métrica para um corpo em rotação, feita posteriormente por Roy Kerr em 1963. Ela encontra aplicação em modelos cosmológicos homogêneos, mas anisotrópicos.

A solução de Taub pode ser interpretada como descrevendo um universo com nada mais do que radiação gravitacional. Com a sua anisotropia, o universo de Taub parece ser a mais simples generalização dos modelos de Friedmann, embora sem matéria. Para mais informações a respeito das propriedades do universo de Taub, o leitor pode consultar Bonanos [95].

É digno de nota que o espaço de Misner [96], dotado de uma estrutura riquíssima e que serve como contraexemplo para uma série de hipóteses em relatividade geral, além de sua utilidade fundamental no estudo da causalidade, é uma versão simplificada com dimensão 1 + 1 do espaço de Taub-NUT, em que o espaço NUT é a parte da variedade fora das duas singularidades presentes, contendo curvas tipo-tempo fechadas.

O elemento de linha para o universo de Taub pode ser dado por  $A(x) = x^{-2/3}$  e  $B = x^{4/3}$ , ou seja,

$$ds^2 = x^{-2/3} dt^2 - x^2 - x^{4/3} (dy^2 + dz^2).$$

### A. Cálculo dos Vetores de Killing

Analogamente ao que fizemos no caso de Minkowski, calculemos os vetores de Killing para o universo de Taub. Aqui, o sistema 6.5 se transforma em

$$\begin{cases} 2x^{-2/3}K_{,t}^0 - \frac{2}{3}x^{-5/3}K^1 = 0, & x^{-2/3}K_{,x}^0 - K_{,t}^1 = 0, & x^{-2/3}K_{,y}^0 - x^{4/3}K_{,t}^2 = 0, \\ x^{-2/3}K_{,z}^0 - x^{4/3}K_{,t}^3 = 0, & K_{,x}^1 = 0, & K_{,y}^1 + x^{4/3}K_{,x}^2 = 0, & K_{,z}^1 + x^{4/3}K_{,x}^3 = 0, \\ \frac{4}{3}x^{1/3}K^1 + 2x^{4/3}K_{,y}^2 = 0, & K_{,y}^3 + K_{,z}^2 = 0, & \frac{4}{3}x^{1/3}K^1 + 2x^{4/3}K_{,z}^3 = 0, \end{cases}$$

Para resolvermos o sistema acima, observemos a presença da equação  $K_{,x}^1 = 0$ , implicando que  $K^1$  não depende de  $x$ . Ao substituir este fato na equação  $B_{,x}K^1 + 2BK_{,y}^2 = 0$ , que se torna  $\frac{4}{3}x^{1/3}K^1 + 2x^{4/3}K_{,y}^2 = 0$ , a dependência explícita em  $x$  força ambos os termos a se anularem independentemente, o que implica  $K^1 = 0$ . Este é um resultado chave. Com  $K^1 = 0$ , o sistema se desacopla e simplifica imensamente: a equação  $A_{,t}K_t^0 + A_{,x}K^1 = 0$  (com  $A_{,t} = 0$ ) implica  $K_x^0 = 0$ , e a equação  $2AK_{,t}^0 + A_{,x}K^1 = 0$  implica  $K_{,t}^0 = 0$ . Juntas, elas mostram que  $K^0$  deve ser uma constante, dando origem ao gerador de translação temporal  $\partial_t$ . As equações restantes para  $K^2$  e  $K^3$  se reduzem ao sistema para as isometrias do plano euclidiano  $(y, z)$ , gerando as translações  $\partial_y$ ,  $\partial_z$  e a rotação  $z\partial_y - y\partial_z$ . Em outros termos, a solução do sistema é

$$\begin{cases} K^0 = c_1, \\ K_1 = 0, \\ K_2 = c_2z + c_3 \\ K_3 = c_4 - c_2y. \end{cases}$$

Daí, fica claro que os vetores de Killing do universo de Taub são:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{X}_2 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_4 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

### B. Cálculo das Simetrias de Noether

Para este universo, a lagrangiana 6.6 é reescrita como

$$L = x^{-2/3}\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - x^{4/3}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

e o sistema 6.7 pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \xi_{,t} = 0, & \xi_{,x} = 0, & \xi_{,y} = 0, & \xi_{,z} = 0, & G_{,s} = 0, \\ \xi_{,s} - 2\eta_{,x}^1 = 0, & \eta_{,z}^2 + \eta_{,y}^3 = 0, & 2\eta_{,s}^1 + G_{,x} = 0, \\ x^{-2/3}(2\eta_{,t}^0 - \xi_{,s}) - \frac{2}{3}x^{-5/3}\eta^1 = 0, & \eta_{,y}^1 + x^{4/3}\eta_{,x}^2 = 0, & \eta_{,z}^1 + x^{4/3}\eta_{,x}^3 = 0, \\ x^{4/3}(2\eta_{,y}^2 - \xi_{,s}) + \frac{4}{3}x^{1/3}\eta^1 = 0, & x^{4/3}(2\eta_{,z}^3 - \xi_{,s}) + \frac{4}{3}x^{1/3}\eta^1 = 0, \\ x^{-2/3}\eta_{,x}^0 - \eta_{,t}^1 = 0, & x^{-2/3}\eta_{,y}^0 - x^{4/3}\eta_{,t}^2 = 0, & x^{-2/3}\eta_{,z}^0 - x^{4/3}\eta_{,t}^3 = 0, \\ 2x^{4/3}\eta_{,s}^2 + G_{,y} = 0, & 2x^{4/3}\eta_{,s}^3 + G_{,z} = 0, & 2x^{-2/3}\eta_{,y}^0 - G_{,t} = 0. \end{cases}$$

A exemplo do que aconteceu no caso de Minkowski, as equações iniciais novamente forçam  $\xi = \xi(s)$ , e a substituição iterativa nas equações para as componentes de  $\eta^\mu$  leva à solução:

$$\begin{cases} \xi = c_1 s + c_2, \\ \eta^0 = \frac{2}{3} c_1 t + c_6, \\ \eta^1 = \frac{1}{2} c_1 x, \\ \eta^2 = \frac{1}{6} c_1 y + c_3 z + c_4, \\ \eta^3 = \frac{1}{6} c_1 z - c_3 y + c_5. \end{cases}$$

Daí, temos que os geradores de simetria de Noether para o universo de Taub serão

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{2}{3} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{6} y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{6} z \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial s}, \\ \mathbf{X}_3 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{X}_4 &= \frac{\partial}{\partial y}, & \mathbf{X}_5 &= \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{X}_6 &= \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

### C. Conclusão para o Universo de Taub

Ao compararmos os 4 geradores de Killing com os 6 geradores de Noether, verificamos que todos os geradores de isometrias são também simetrias de Noether. Assim, mostramos que o universo de Taub também satisfaz a conjectura de Bokhari et al.

#### 6.1.4 Universo de Anti-de Sitter

De grande importância para a física teórica, especialmente para pesquisas relacionadas a esquemas de unificação, devido à famosa correspondência AdS-CFT [97], é o espaço de Anti-de Sitter. Tal espaço, resultado de investigações de Willem de Sitter e Albert Einstein na década de 1920 a respeito da estrutura espaço-temporal do universo, e explorado mais tarde por Paul Dirac, constitui uma solução conformalmente plana das equações de campo de Einstein com constante cosmológica negativa. Para o leitor interessado, as principais propriedades dessa solução das equações de campo de Einstein são dadas em [98].

O elemento de linha para o universo de Anti-de Sitter é obtido tomando  $A(x) = B(x) = e^{2x}$ , isto é,

$$ds^2 = e^{2x}(dt^2 - dy^2 - dz^2) - dx^2.$$

Avançaremos, portanto, para o cálculo dos vetores de Killing e Noether.

#### A. Cálculo dos Vetores de Killing

Procedendo para o cálculo dos vetores de Killing, o sistema 6.5 se torna

$$\begin{cases} K_{,t}^0 + K^1 = 0, & e^{2x} K_{,x}^0 - K_{,t}^1 = 0, & K_{,y}^0 - K_{,t}^2 = 0, \\ K_{,z}^0 - K_{,t}^3 = 0, & K_{,x}^1 = 0, & K_{,y}^1 + e^{2x} K_{,x}^2 = 0, & K_{,z}^1 + e^{2x} K_{,x}^3 = 0, \\ K^1 + K_{,y}^2 = 0, & K_{,y}^3 + K_{,z}^2 = 0, & K^1 + K_{,z}^3 = 0. \end{cases}$$

Aqui, A resolução deste sistema de EDPs acopladas procede ao se explorar as diferentes dependências funcionais. A equação  $K_{,x}^1 = 0$  implica que  $K^1$  é uma função de  $(t, y, z)$ . A condição  $K_{,t}^0 + K^1 = 0$  (vinda de  $2AK_{,t}^0 + A_{,x}K^1 = 0$ ) a conecta com  $K^0$ . A chave está nas equações de acoplamento mistas, como  $K_{,y}^1 + e^{2x}K_{,x}^2 = 0$ . Separando as variáveis, esta equação exige que  $K_{,y}^1$  e  $K_{,x}^2$  tenham formas exponenciais específicas em  $x$ . Seguindo este procedimento para todo o sistema, encontramos que a solução geral é:

$$\begin{cases} K^0 = \frac{1}{2}(-e^{-2x} - t^2 - y^2 - z^2)c_1 - c_2tz - c_3t - c_4ty + c_5y + c_8z + c_{10}, \\ K^2 = \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 - y^2 + z^2)c_4 - c_1ty - c_3y - c_2zy + c_5t + c_7z + c_6, \\ K^3 = \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 + y^2 - z^2)c_2 - c_1tz - c_3z - c_4zy + c_8t - c_7y + c_5. \end{cases}$$

Assim, temos que os geradores de isometrias do universo de Anti-de Sitter são

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2}(-e^{-2x} - t^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial t} - tz\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial x} - ty\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 + y^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial z} - tz\frac{\partial}{\partial t} - zy\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{K}_3 = -t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{K}_4 = -ty\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 - y^2 + z^2)\frac{\partial}{\partial y} - zy\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{K}_5 = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{K}_6 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{K}_7 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{K}_8 = z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathbf{K}_9 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{K}_{10} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

## B. Cálculo das Simetrias de Noether

Para o universo de Anti-de Sitter, a lagrangiana associada é

$$L = e^{2x}(t^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) - \dot{x}^2,$$

e o sistema 6.7 se torna

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{,t} = 0, \quad \xi_{,x} = 0 \quad \xi_{,y} = 0, \quad \xi_{,z} = 0, \\ \xi_{,s} - 2\eta_{,x}^1 = 0, \quad \eta_{,z}^2 + \eta_{,y}^3 = 0, \quad 2\eta_{,s}^1 + G_{,x} = 0, \\ e^{2x}(2\eta_{,t}^0 - \xi_{,s}) + 2e^{2x}\eta^1 = 0, \\ e^{2x}(2\eta_{,y}^2 - \xi_{,s}) + 2e^{2x}\eta^1 = 0, \\ e^{2x}(2\eta_{,z}^3 - \xi_{,s}) + 2e^{2x}\eta^1 = 0 \\ e^{2x}\eta_{,x}^0 - \eta_{,t}^1 = 0, \quad e^{2x}(\eta_{,y}^0 - \eta_{,t}^2) = 0, \quad e^{2x}(\eta_{,z}^0 - \eta_{,t}^3) = 0, \\ \eta_{,y}^1 + e^{2x}\eta_{,x}^2 = 0, \quad \eta_{,z}^1 + e^{2x}\eta_{,x}^3 = 0 \\ 2e^{2x}\eta_{,s}^2 + G_{,y} = 0, \quad 2e^{2x}\eta_{,s}^3 + G_{,z} = 0, \\ 2e^{2x}\eta_{,y}^0 - G_{,t} = 0, \quad G_{,s} = 0. \end{array} \right.$$

Aqui, o processo de resolver o sistema sobredeterminado é mais complicado, mas a lógica a ser seguida é a mesma: partimos das restrições mais simples ( $\xi = \xi(s)$ ) para desembaraçar o sistema e chegar à solução, que é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = c_1, \\ \eta^0 = \frac{1}{2}(-e^{-2x} - t^2 - y^2 - z^2)c_2 - c_3zt - c_5yt - c_4t + c_6y + c_9z + c_{11}, \\ \eta^1 = c_2t + c_3z + c_5y + c_4, \\ \eta^2 = \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 - y^2 + z^2)c_5 - c_2yt - c_3yz - c_4y + c_6t + c_8z + c_7, \\ \eta^3 = \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 + y^2 - z^2)c_3 - c_2zt - c_5yz - c_4z + c_9t - c_8y + c_{10}, \end{array} \right.$$

dando lugar aos seguintes geradores de simetria de Noether:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial s}, \quad \mathbf{X}_2 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(-e^{-2x} - t^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial t} - ty \frac{\partial}{\partial y} - tz \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{X}_3 &= z \frac{\partial}{\partial x} - zt \frac{\partial}{\partial t} - zy \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 + y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_4 = \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial t} - y \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{X}_5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - yt \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(e^{-2x} - t^2 y^2 + z^2) \frac{\partial}{\partial y} - zy \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_6 = y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} \\ \mathbf{X}_7 &= \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{X}_8 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_9 = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_{10} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{X}_{11} = \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

### C. Conclusão para o Universo de Anti-de Sitter

A exemplo dos dois casos anteriores, a comparação dos 10 vetores de Killing com os 11 de Noether nos revela que a conjectura continua válida para este universo. Aqui, apenas a translação em  $s$  ( $\partial/\partial s$ ) não gera uma isometria.

Notemos que, em todos os casos que analisamos nesta seção, aparece o gerador de simetria de Noether  $\mathbf{X} = \partial_s$ , relacionado às translações em  $s$ . Isso é esperado, pois esse

gerador está sempre presente quando a lagrangiana está relacionada à minimização do comprimento de arco [99].

## 6.2 Métrica de Schwarzschild e Teorema de Birkhoff

Como é sabido, em novembro de 1915, Albert Einstein publicou a versão final de sua teoria da relatividade geral, na qual foram apresentadas as equações de campo. Porém, é válido notar que o matemático prussiano David Hilbert havia publicado as mesmas equações poucos dias antes. Sobre a contenda envolvendo Einstein, Hilbert e as equações de campo, bem como a história por trás da teoria da relatividade geral, o leitor pode consultar [100].

Curiosamente, devido à forma complicada das equações de campo, Einstein opinou a favor da impossibilidade de resolvê-las. Porém, aproximadamente um mês após essa declaração, no início de 1916, Einstein foi surpreendido por uma carta endereçada a ele por um certo Karl Schwarzschild. Nessa carta, estava contida a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein: a solução de Schwarzschild.

### 6.2.1 A Solução de Schwarzschild Para as Equações de Campo de Einstein

A reserva de Einstein em relação à possibilidade de encontrar soluções para as equações de campo não era injustificada, devido à natureza dessas equações. Porém, conforme foi mostrado em diversas ocasiões posteriores, essas equações podem ser resolvidas em casos muito especiais, utilizando as simetrias que o sistema estudado apresenta.

De fato, a solução proposta por Schwarzschild descreve justamente um espaço-tempo vazio na região exterior a um corpo esfericamente simétrico. Seguindo Hawking e Ellis [101], o elemento de linha para este caso é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.8)$$

com  $m = GM$ .

Para o leitor interessado em saber como essa métrica foi construída, é instrutivo o trabalho original de Schwarzschild [102], ou a tradução feita por Antoci e Loinger [103]. É válido também o comentário feito por Bel [104], que apresenta uma derivação mais simples. Discussões a respeito das diversas propriedades que o espaço-tempo descrito por essa métrica possui, em níveis diferentes, são feitas em [101], [105] e [87].

### 6.2.2 Teorema de Birkhoff

Em um livro publicado em 1923, George D. Birkhoff propôs o teorema que hoje leva o seu nome [106]. Naquele texto, ele escreveu:

*O campo fora de uma distribuição de massa é estático se essa distribuição de matéria é estática ou está em um estado variável. . . portanto, a solução de Schwarzschild é essencialmente a solução mais geral das equações de campo com simetria esférica.*

Em outros termos, o teorema de Birkhoff estabelece simplesmente que a métrica de Schwarzschild é a única solução de vácuo das equações de campo de Einstein que apresenta simetria esférica. Podemos enunciá-lo como:

### **Teorema 6.1: Teorema de Birkhoff**

A métrica de Schwarzschild é a única solução das equações de campo de Einstein no vácuo com simetria esférica.

A seguir, apresentamos uma prova detalhada do Teorema de Birkhoff, que estabelece a unicidade da solução de Schwarzschild como a única solução de vácuo esféricamente simétrica das equações de campo de Einstein.

### **Prova 6.1**

A prova consiste em resolver as equações de campo de Einstein no vácuo,  $G_{\mu\nu} = 0$ , para a métrica esféricamente simétrica mais geral possível, mostrando que a única solução resultante é, de fato, a métrica de Schwarzschild estática. O processo pode ser dividido em três etapas lógicas.

#### **Passo 1: Construção da Métrica Geral.**

Começamos com o elemento de linha associado à métrica de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Utilizando coordenadas esféricas,  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$ , esse elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (6.9)$$

O requerimento para manter a simetria esférica é que o termo  $d\Omega^2$ , associado às variações angulares, seja invariante. Para não violá-lo, podemos introduzir funções que dependem apenas das coordenadas  $t$  e  $r$ . Além disso, para que a assinatura da métrica seja preservada <sup>a</sup>, tais funções devem ser exponenciais. Portanto, podemos generalizar 6.9 para

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2 e^{2\gamma(t,r)} d\Omega^2.$$

que, pela mudança de coordenadas

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \Rightarrow d\bar{r} = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr,$$

se torna

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} e^{-2\gamma(t,r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2,$$

onde supomos que cada função de  $r$  seja uma função de  $\bar{r}$  de alguma maneira óbvia.

Façamos agora a mudança

$$\bar{r} \rightarrow r, \quad e^{2\beta(t,r)} e^{-2\gamma(t,r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} \rightarrow e^{2\beta(t,r)}.$$

O elemento de linha anterior se torna

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (6.10)$$

### Passo 2: Resolvendo as Equações de Campo.

O cálculo das componentes do tensor de Einstein para esta métrica resulta no sistema de equações diferenciais parciais ([105]-Exercício 14.16):

$$G_{tt} = \frac{(1 - e^{-2\alpha})}{r^2} + 2 \frac{\alpha_{,r}}{r} e^{-2\alpha} = 0, \quad (6.11)$$

$$G_{tr} = G_{rt} = 2 \frac{\alpha_{,t}}{r} e^{-(\alpha+\beta)} = 0, \quad (6.12)$$

$$G_{rr} = 2 \frac{\beta_{,r}}{r} e^{-2\alpha} + \frac{e^{-2\alpha} - 1}{r^2} = 0, \quad (6.13)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = \left( \beta_{,rr} + \beta_{,r}^2 - \beta_{,r} \alpha_{,r} + \frac{\beta_{,r}}{r} - \frac{\alpha_{,r}}{r} \right) e^{-2\alpha} - (\alpha_{,tt} + \alpha_{,t}^2 - \alpha_{,t} \beta_{,t}) e^{-2\beta} = 0. \quad (6.14)$$

A chave para a solução do sistema acima está em identificar a equação mais simples, que é a componente mista 6.12. Essa equação implica diretamente que  $\alpha_{,t} = \partial\alpha/\partial t = 0$ . Esta é a conclusão crucial: **a função  $\alpha$  não pode depender do tempo, ou seja,  $\alpha = \alpha(r)$** . Este resultado já impõe uma condição de estaticidade sobre a componente  $g_{tt}$  da métrica.

Com  $\alpha = \alpha(r)$ , a equação 6.11 para  $G_{tt}$  torna-se uma equação diferencial ordinária em  $r$ . Sua solução é prontamente encontrada como:

$$e^{2\alpha(r)} = 1 - \frac{2M}{r},$$

onde  $2M$  é uma constante de integração que, pela análise do limite de campo fraco, é identificada como o raio de Schwarzschild.

Substituindo este resultado para  $\alpha(r)$  na equação 6.13 para  $G_{rr}$ , obtém-se uma equação para  $\beta(r, t)$  que também se simplifica, resultando em  $\beta_{,r} = 0$ . Consequentemente,  $\beta$  pode ser, no máximo, uma função do tempo,  $\beta = f(t)$ .

### Passo 3: A Liberdade de Reescalonamento do Tempo.

Com os resultados anteriores, a métrica assume a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{f(t)} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.15)$$

Porém, a dependência temporal é espúria, pois representa a liberdade de se redefinir a coordenada temporal. Se introduzirmos uma nova coordenada temporal através da transformação  $t_N$ , a transformação

$$t_N = \int e^{f(t)} dt,$$

a equação 6.15 é reescrita como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_N^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

que é simplesmente 6.8 com  $M = m$ .

Isso completa a prova, demonstrando que qualquer solução de vácuo esfericamente simétrica é, necessariamente, estática e isométrica à solução de Schwarzschild.  $\square$

<sup>a</sup> A assinatura do tensor métrico  $\mathbf{g}$  pode ser entendida em termos do número (contado com multiplicidade) de autovalores positivos, zero ou negativos da matriz real simétrica  $g_{\mu\nu}$  desse tensor em uma dada base. As funções que introduzimos devem ser tais que não afetem esse número, de forma que a física do problema não seja afetada.

## 6.2.3 Simetrias de Noether

A lagrangiana relacionada à métrica 6.8 é

$$L = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2.$$

Pela aplicação da condição de simetria 4.34, com gerador  $\mathbf{X} = \sigma \partial_s + \tau \partial_t + \rho \partial_r + J \partial_\theta + F \partial_\phi$ , temos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{,s} = 0, \\ 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tau_{,s} = f_{,t}, \\ \rho \left(\frac{2m}{r^2}\right) + 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tau_{,t} - 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sigma_{,s} = 0, \\ -\frac{2r}{r-2m} \rho_{,s} = f_{,r} \\ -\frac{2r}{r-2m} \rho_{,r} + -\frac{r}{r-2m} \sigma_{,s} + \rho \frac{2m}{(r-2m)^2} = 0 \\ -2r^2 J_{,s} = f_{,\theta} \\ -2r^2 J_{,\theta} + r^2 \sigma_{,s} - 2\rho_{,r} = 0, \\ -2r^2 \sin^2(\theta) F_{,s} = f_{,\phi}, \\ -2r^2 \sin^2(\theta) F_{,\phi} - 2r\rho \sin^2(\theta) - 2Jr^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \sigma_{,s} = 0, \\ 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tau_{,r} - \frac{2r}{r-2m} \rho_{,t} = 0, \\ 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tau_{,\theta} - 2r^2 J_{,t} = 0, \\ 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \tau_{,\phi} - 2r^2 \sin^2(\theta) F_{,t} = 0, \\ -\frac{2r}{r-2m} \rho_{,\theta} - 2r^2 J_{,r} = 0, \\ -\frac{2r}{r-2m} \rho_{,\phi} - 2r^2 \sin^2(\theta) F_{,r} = 0, \\ -2r^2 J_{,\phi} - 2r^2 \sin^2(\theta) F_{,\theta} = 0, \\ \sigma = \sigma(s), \end{array} \right.$$

cuja solução leva aos geradores

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial s}, & \mathbf{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{X}_3 &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, & \mathbf{X}_4 &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, & \mathbf{X}_5 &= \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

A obtenção dos cinco geradores de simetria de Noether acima para a métrica de Schwarzschild a partir do complexo sistema de equações determinantes apresentado é um cálculo não trivial, mas que pode ser compreendido de forma estratégica.

A chave para a solução reside em explorar as simetrias manifestas da lagrangiana. A Lagrangiana associada não depende explicitamente das coordenadas  $s$ ,  $t$  e  $\phi$ . Pelo teorema de Noether, essa independência garante que as translações nessas coordenadas são simetrias. Isso nos fornece imediatamente três dos geradores que encontramos:  $\partial_s (X_1)$ ,  $\partial_t (X_2)$  e  $\partial_\phi (X_5)$ .

Adicionalmente, a invariância do termo esférico  $r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$  sob rotações espaciais garante que os outros dois geradores do grupo  $SO(3)$ ,  $X_3$  e  $X_4$ , também sejam simetrias. A tarefa mais árdua da resolução completa do sistema é, então, mostrar que *não existem outras simetrias de ponto de Lie além destas cinco*. Este resultado é confirmado ao se resolver o sistema completo, onde as equações de acoplamento, que agora dependem

de  $r$ , restringem qualquer outra possível solução a ser uma combinação linear das cinco já encontradas.

Os geradores  $\mathbf{X}_3$ ,  $\mathbf{X}_4$  e  $\mathbf{X}_5$  são apenas geradores de momento angular, satisfazendo, obviamente, a álgebra de  $\text{SO}(3)$ :  $[\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4] = -\mathbf{X}_5$ ,  $[\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5] = \mathbf{X}_4$  e  $[\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5] = -\mathbf{X}_3$ . O que é um resultado esperado, dado que é pressuposto da construção da métrica de Schwarzschild a descrição de um espaço-tempo esfericamente simétrico. Além deles,  $\mathbf{X}_1$  já nos era esperado, como apontamos anteriormente.

Olhemos para o gerador de simetria  $\mathbf{X}_2$ . Sabemos que esse é simplesmente o gerador associado a translações temporais e que a quantidade conservada é dada por

$$I = f - L\eta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\xi^i - \dot{q}^i\eta) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}.$$

Pela substituição de  $\mathbf{X}_2$  em 6.3, é trivial notar que este é um vetor de Killing. Ele deve ser tipo-tempo se estivermos na região  $r > 2m$ , onde a métrica apresenta a assinatura lorentziana usual. A quantidade conservada associada corresponde, portanto, à constante de movimento desse vetor de Killing, satisfazendo [87]

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{ds} = 0.$$

Com os resultados que derivamos nesta seção, seguindo Mukherjee e Roy [107], podemos reexpressar o teorema de Birkhoff como

### Teorema 6.2: Teorema de Birkhoff (Reformulação)

Toda solução esfericamente simétrica das equações de campo de Einstein no vácuo deve ser estática e também assintoticamente plana. Posto de outra forma, as soluções esfericamente simétricas das equações de campo de Einstein no vácuo devem fornecer um vetor de Killing tipo-tempo extra, associado a translações temporais.

Portanto, através do cálculo das simetrias de Noether pelo método das prolongações aplicado à métrica de Schwarzschild, recuperamos os geradores (Killings) da álgebra de  $\text{SO}(3)$ , esperados devido ao tipo de configuração espaço-temporal que buscamos descrever. Adicionalmente, obtivemos um quarto gerador, identificado com um vetor de Killing extra, o que justifica o enunciado alternativo do teorema de Birkhoff.

Em outros termos, pelo que discutimos aqui, o teorema nos diz que as soluções das equações de campo de Einstein no vácuo possuem quatro vetores de Killing ortogonais a hipersuperfícies, isto é, a métrica associada é estática <sup>1</sup>. Além disso, devido à existência de

<sup>1</sup> Para a região  $0 < r < 2m$ , o enunciado do teorema de Birkhoff pode ser enganoso, dado que nessa região a coordenada temporal não é mais tipo-tempo. Para mais detalhes, consultar o segundo apêndice de [101].

$\mathbf{X}_2$ , a métrica é independente de mudanças na distribuição de matéria, a qual é a fonte do campo, garantindo a preservação da simetria esférica.

### 6.3 Noether Approach e Cosmologia Quântica

Na presente seção, discutiremos como o método das prolongações aplicado a lagrangianas, por meio daquilo que é conhecido na literatura como **Noether Approach**. Esse procedimento pode ser usado no estudo de extensões da teoria da relatividade geral e no procedimento de quantizar tais extensões, entrando no domínio da cosmologia quântica.

#### 6.3.1 Noether Approach

Da discussão do capítulo 3, sabemos que a primeira prolongação do gerador de simetria é

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} + (\dot{\eta}^i - \dot{\phi}^i \dot{\xi}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^i}.$$

Aqui, particularmente,  $u^i = \dot{\phi}^i$ , e o gerador acima está associado às transformações envolvendo os campos  $\phi^i$  e coordenadas, dadas por

$$\begin{cases} t' = t + \epsilon \xi(t, \phi^i) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \phi'^i = \phi^i + \epsilon \eta^i(t, \phi^i) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{cases}$$

Seja o sistema dinâmico descrito pela lagrangiana não degenerada  $L(t, \phi^i, \dot{\phi}^i)$ . Pelo que estudamos no capítulo 4, especificamente pela aplicação de 4.34 a esse caso particular, temos que

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(L) + \dot{\xi}L = \dot{g},$$

onde  $g(t, \phi^i)$  é uma quadridivergência que não afeta a dinâmica do sistema. A quantidade conservada associada, dada pela equação 4.23, é

$$I(t, \phi^i, \dot{\phi}^i) = \xi \left( \dot{\phi}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^i} - L \right) - \eta^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^i} + g(t, \phi^i).$$

Como sabemos,  $\xi$  está relacionado ao funcional gerador responsável por mudanças de coordenadas;  $\eta^i$ , em nosso contexto, está relacionado com variações nos campos. Particularmente, se nos atentarmos ao caso com  $\xi = 0$ , que denominaremos **simetrias internas**, dado que as transformações atuam apenas nos campos e não nas coordenadas, a primeira prolongação do gerador de simetrias se reduz a

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \eta^i \frac{\partial}{\partial \phi^i} + \dot{\eta}^i \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}^i}.$$

Por sua vez, a condição de simetria se reduz a

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X}(L) = \eta^i \frac{\partial L}{\partial \phi^i} + \dot{\eta}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^i} = \mathfrak{L}_X(L) = 0,$$

onde  $\mathfrak{L}_X$  é a derivada de Lie com respeito a  $X$  [?] e impomos  $g = 0$ . O que temos aqui é que, para transformações que não envolvem coordenadas, simetrias internas surgem se a derivada de Lie ao longo do fluxo de  $\mathbf{X}$  for igual a zero. Além disso, a quantidade conservada associada será

$$\Sigma_0 = \eta^i \frac{\partial L}{\partial \phi^i}.$$

De importância fundamental para o que faremos adiante, devemos fazer uma mudança de coordenadas para encontrar variáveis cíclicas <sup>2</sup>. Uma possível transformação é tal que o momento conjugado associado à nova variável  $z$  coincida com a quantidade conservada relacionada a alguma simetria variacional, isto é,

$$\pi_z = \Sigma_0.$$

Explicitamente,

$$\eta^i \frac{\partial L}{\partial \phi^i} = \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Obviamente, o gerador de simetria deve se transformar apropriadamente. Consideremos que o gerador de simetria seja escrito em termos de novas variáveis por

$$\mathbf{X}' = \eta^i \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}^i} + \dot{\eta}^i \frac{\partial}{\partial \dot{\bar{\phi}}^i}.$$

Se tomarmos  $\eta^1 = 1$  e  $n^j = 0$  ( $j \neq 1$ ), a quantidade conservada  $\Sigma_0$  associada à variável  $\bar{\phi}^1$  é igual ao momento  $\pi_{\bar{\phi}^1}$  relacionado à variável  $\bar{\phi}^1$ . Formalizando melhor, seja a transformação de coordenadas  $\phi^i \rightarrow \Phi(\phi^i)$ , e definamos a **derivada interna** como

$$i_X d\Phi = \dot{\eta}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\bar{\phi}}^i}.$$

O gerador nas novas variáveis pode ser escrito como

$$\mathbf{X}' = \eta^i \frac{\partial \Phi^k}{\partial \phi^i} \frac{\partial}{\partial \Phi^k} + \dot{\eta}^i \frac{\partial \dot{\Phi}^k}{\partial \dot{\phi}^i} \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}^k} = i_X d\Phi^k \frac{\partial}{\partial \Phi^k} + \frac{d}{dt} (i_X d\Phi^k) \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}^k}.$$

Impondo que a primeira componente do novo gerador deve ser igual a zero e as outras iguais a 1, chegamos a

$$i_X d\Phi^1 = \eta^i \frac{\partial \Phi^1}{\partial \phi^i} = 1, \quad i_X d\Phi^j = \eta^i \frac{\partial \Phi^j}{\partial \phi^i} = 0 \quad (j \neq 1). \quad (6.16)$$

Essas condições permitem a introdução de uma variável cíclica de maneira metódica. Esse procedimento, após a quantização da teoria e obtenção da função de onda do universo, determina onde o critério de Hartle vale: o momento conservado corresponde a componentes oscilantes da função de onda [108].

Antecipando a ideia geral da construção que almejamos, a determinação de simetrias de Noether permite estabelecer quantidades adequadas para a aplicação do formalismo de quantização canônica, resultando na versão quântica de qualquer modelo cosmológico que estivermos estudando.

<sup>2</sup> A coordenada  $q_i$  é dita cíclica (ignorável) se  $\partial L / \partial q_i = 0$  [41, 42].

### 6.3.2 Equação de Wheeler-DeWitt e a Função de Onda do Universo

Um dos maiores problemas da física moderna consiste em construir uma teoria quântica da gravitação que seja consistente, unindo a teoria da relatividade geral de Einstein com a teoria quântica de campos. Das diversas formas de tentar essa unificação, uma das primeiras a serem feitas consiste na quantização canônica da relatividade geral, por meio do chamado **formalismo ADM** (Arnowitt–Deser–Misner) [109–117].

Não procederemos aqui com uma derivação do formalismo ADM e sua aplicação à relatividade geral. Para esse fim, o leitor pode consultar [118] e [119]. Nosso intuito será apenas apresentar as ideias mais básicas desse método.

O formalismo ADM é construído sobre a suposição de que o espaço-tempo pode ser foliado em uma família de hipersuperfícies tipo-espaço (*leaves*)  $\Sigma_t$ , rotuladas pelo parâmetro temporal  $t$ . Além disso, cada ponto de uma hipersuperfície é rotulado por uma base tridimensional  $X_i^\alpha$ , tangente à própria superfície. Os elementos dessa base serão ortonormais ao vetor de superfície  $\eta$ , o que leva às condições

$$g_{\mu\nu}X_i^\mu\eta^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu = -1,$$

que são suficientes para determinar  $\eta$ .

Definamos o tensor de deformação por

$$N^\alpha = \dot{X}^\alpha = \partial_0 X^\alpha(t, x^i),$$

cujas decomposição na base apresentada no parágrafo anterior é

$$N^\alpha = N\eta^\alpha + N^i X_i^\alpha,$$

onde  $N$  é chamada de função de lapso (*lapse function*), expressando a mudança de tempo entre hipersuperfícies, e  $N^i$  funções de desvio (*shift functions*), que informam como as coordenadas espaciais mudam entre essas hipersuperfícies.

Em termos dessas funções, o elemento de linha entre dois eventos  $p(x^i, t)$  e  $p'(x^i + dx^i, t + dt)$  pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} ds^2 &= (N_i N^i - N^2) dt^2 + 2N_i dx^i dt + \gamma_{ij} x^i x^j = \\ &= \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - N^2 dt^2, \end{aligned}$$

com  $\gamma_{ij}$  sendo a métrica definida em qualquer hipersuperfície. Assim, o tensor métrico toma a forma

$$\begin{pmatrix} N_i N^i - N^2 & N_j \\ N_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

o que conduz a um elemento de volume dado por

$$\sqrt{-g} d^4x = N \sqrt{\gamma} d^3x dt.$$

Com a decomposição acima, há a separação entre as equações de evolução do espaço-tempo, convertidas em restrições (relacionando condições iniciais em uma hipersuperfície) e equações de evolução (ditando como a geometria do espaço-tempo evolui de uma hipersuperfície para outra).

Tomemos a ação de Einstein-Hilbert na forma [120,121]

$$S = \frac{1}{2} \int_V \sqrt{-g}(R - 2\lambda)d^4x + \int_{\partial V} \sqrt{\gamma}K d^3x,$$

onde  $K = \gamma^{ij}K_{ij}$  é o traço do tensor de curvatura extrínseca ( $K_{ij} = -e_j \cdot {}^4\nabla_{in}$  [118,122]) da hipersuperfície tridimensional  $\nabla V$  envolvida na variedade quadridimensional. Em termos da decomposição anterior, a lagrangiana associada a essa ação torna-se

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma}N(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R) + T.D.,$$

onde  ${}^{(3)}R$  é denominado escalar de **curvatura intrínseca** e é determinado a partir do tensor de curvatura intrínseca  ${}^{(3)}R_{ij}$ , que, por sua vez, depende apenas de  $\gamma_{ij}$  em uma dada hipersuperfície. O termo T.D. contém todos os termos de derivada total, irrelevantes para a dinâmica e que, portanto, podem ser ignorados.

De posse da lagrangiana acima, podemos calcular os momentos conjugados, resultando em

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0, \quad \pi^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}^i} = 0, \quad \pi^{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}(K\gamma^{ij} - K^{ij}).$$

Além disso, a Hamiltoniana será

$$H = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - L,$$

de onde tiramos [123]

$$\dot{\pi} = -\{H, \pi\} = \frac{\delta H}{\delta N} = 0, \quad \dot{\pi}^i = -\{H, \pi^i\} = \frac{\delta H}{\delta N^i} = 0.$$

Tenhamos em mente que as variáveis dinâmicas aqui são o tensor métrico  $\gamma_{ij}(t, x^i)$  dos cortes espaciais tridimensionais  $\Sigma_t$  e seus momentos conjugados. Seguindo os procedimentos do método de quantização canônica, devemos promover tais variáveis dinâmicas a operadores, satisfazendo as operações de comutação

$$\begin{cases} [\hat{\pi}^{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = 0, \\ [\hat{\gamma}^{ij}, \hat{\gamma}^{kl}] = 0, \\ [\hat{\gamma}^{ij}(x), \hat{\pi}^{kl}(x')] = i\delta_{ij}^{kl}\delta^3(x - x'), \quad \delta_{ij}^{kl} = \frac{1}{2}(\delta_i^k\delta_j^l + \delta_i^l\delta_j^k). \end{cases}$$

Tal promoção é dada por

$$\pi \mapsto \hat{\pi} = \frac{\delta}{\delta N}, \quad \pi^i \mapsto \hat{\pi}^i = \frac{\delta}{\delta N^i}, \quad \pi^{ij} \mapsto \hat{\pi}^{ij} = \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}}, \quad \gamma_{ij}(t, x^k) \mapsto \hat{\gamma}_{ij}(t, x^k).$$

Além disso, o procedimento de quantização canônica leva a

$$\hat{H}|\psi\rangle = 0,$$

onde  $\hat{H}$  é a restrição hamiltoniana <sup>3</sup> na versão quantizada da relatividade geral e  $|\psi\rangle$  é chamada de função de onda do universo. Essa é a **equação de Wheeler-DeWitt**.

A função de onda  $\psi$  está definida no espaço de configurações da métrica  $\gamma_{ij}$ , tal que  $\psi(\gamma_{ij}(x))$  descreve a evolução do campo gravitacional. Chamamos esse espaço de **superespaço** (*superspace*), isto é, o espaço de todas as métricas  $\gamma_{ij}$  possíveis.

Dado que o super-espaço é de dimensão infinita, é necessário haver uma redução para **mini-superespaços** (*minisuperspaces*) de dimensão finita para que a equação de Wheeler-DeWitt seja resolvida. Nesse contexto, essa equação se torna diferencial parcial. Porém, apesar da sua utilidade, mini-superespaços carregam apenas aspectos básicos da teoria completa, bem como simetrias, e ignoram outros. Nesse sentido, eles devem ser vistos como *toy models*, e devemos considerar como hipótese que tais modelos são aproximações válidas da teoria completa.

É digno de nota que a equação de Wheeler-DeWitt exhibe flagrantemente o que é conhecido como problema do tempo [124], onde vemos que não há nenhuma dependência com a coordenada temporal, resultando em uma função de onda descrevendo um universo congelado. Além disso, a exemplo da equação de Klein-Gordon [125], a quantidade  $\langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^* \psi dx^3$  não é positiva definida [123] e, portanto, não é possível estabelecer uma interpretação probabilística, como ocorre com a equação de Schrödinger [50].

### 6.3.3 Aplicação da Noether Approach à Cosmologia $f(T)$

Tendo apresentado os aspectos elementares da *Noether Approach* da quantização da relatividade geral nas subseções anteriores, avançaremos para uma discussão geral das extensões teleparalelas da teoria da relatividade geral. Em seguida, aplicaremos o procedimento que desenvolvemos a um caso especial dessas extensões, o da cosmologia  $f(T)$ .

#### 6.3.3.1 Extensões Teleparalelas da Relatividade Geral

Devido a uma série de questões envolvendo a relatividade geral, como os problemas da energia, da matéria escura e de singularidades, além da questão da quantização da gravitação, é natural que haja propostas que busquem modificar a teoria de alguma forma. Uma modificação candidata, denominada **Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral** (*Teleparallel Equivalent of General Relativity*) (TEGR), foi proposta pelo próprio Einstein [126], e para alguns constitui uma das melhores opções disponíveis para serem quantizadas.

<sup>3</sup> Restrição ao sistema devido à hamiltoniana.

A descrição teleparalela da relatividade geral é caracterizada pelo desaparecimento do tensor de curvatura e presença do tensor de torção. Por sua vez, sua dinâmica apresenta as mesmas equações de campo que a relatividade geral, apesar da geometria subjacente ser diferente. Aqui, a geometria riemanniana usual é substituída pela geometria de Weitzenböck<sup>4</sup>. O interesse apresentado nas extensões teleparalelas reside essencialmente no fato de que elas permitem ver a interação gravitacional como uma teoria de gauge<sup>5</sup> do grupo de translações locais. Além disso, a lagrangiana para esses casos é equivalente àquela para a relatividade geral, a menos de um termo de superfície.

Para as extensões TEGR, a ação pode ser tomada como [123]

$$S = \int hT d^4x,$$

onde  $h$  é o determinante dos campos de tetradas  $h_\mu^a$ , definidos pela relação  $g_{\mu\nu} = h_\mu^a h_\nu^b \eta_{ab}$ , e  $T$  é o escalar de torção, definido a partir do tensor de torção

$$T_{\mu\nu}^\rho = 2\Gamma_{[\mu,\nu]}^\rho,$$

como

$$T = T_{\rho\mu\nu} S^{\rho\mu\nu}, \quad S^{\rho\mu\nu} = K^{\rho\mu\nu} - g^{\rho\nu} T_\sigma^{\sigma\mu} + g^{\rho\mu} T_\sigma^{\sigma\nu},$$

$$K_{\rho\mu}^\nu = \frac{1}{2}(T_\rho^\nu{}_\mu + T_\mu^\nu{}_\rho + T^\nu{}_\rho{}_\mu).$$

A exemplo da relatividade geral, a ação da extensão TEGR pode ser modificada de acordo com interesses teóricos e observacionais. A modificação mais simples é tomar a ação em termos de uma função do escalar de torção, ou seja,

$$S = \int h f(T) d^4x. \quad (6.17)$$

### 6.3.3.2 Aplicação ao caso $f(T)$

O caso mais simples de expansão TEGR é a denominada cosmologia  $f(T)$  [128]. Para esse caso, consideremos a ação 6.17 com o campo de tetradas

$$h_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

cujo determinante é simplesmente  $a^3$ , onde  $a$  é o fator de escala do universo. Essa é uma escolha natural de campo de tetradas para o universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Além disso, em um espaço-tempo espacialmente plano de FLRW, o

<sup>4</sup> Para uma revisão a respeito, consultar [127].

<sup>5</sup> Teorias baseadas em simetrias locais, onde as leis da física permanecem invariantes por transformações locais dos campos envolvidos. Essas simetrias implicam em **campos de gauge**, responsáveis por mediar as interações. Exemplos notáveis são a eletrodinâmica e a cromodinâmica quântica [92].

escalar de torção é dado por [123]

$$T = -6 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2.$$

Se utilizarmos o método dos multiplicadores de Lagrange com  $T = -6H^2$ , com  $H = \dot{a}/a$  sendo a constante de Hubble, temos a ação

$$S = 2\pi^2 \int [a^2 f(T) - \lambda(T + 6H^2)] dt,$$

onde, dado que os termos só dependem do parâmetro temporal (tempo cósmico), a parte de superfície tridimensional pode ser diretamente integrada. Pela variação da ação em termos da torção, obtemos que o multiplicador de Lagrange é [123]

$$\lambda = a^3 \frac{\partial f}{\partial T},$$

e a ação se torna

$$S = 2\pi^2 \int [a^3 f(T) - a^3 T f_T(T) - 6a\dot{a}^2 f_T(T)] dt.$$

Assim, teremos que a ação para a cosmologia  $f(T)$  será

$$L = a^3 [f(T) - T f_T(T)] - 6a\dot{a}^2 f_T(T). \quad (6.18)$$

Nas variáveis  $\{a, T\}$ , as equações de Euler-Lagrange e a condição de energia <sup>6</sup> são, respectivamente,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L}{\partial a} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} - \frac{\partial L}{\partial T} = 0, \quad \dot{a} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} + \dot{T} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} - L = 0.$$

Para a lagrangiana 6.18, as equações de Euler-Lagrange e a condição de energia acima se tornam

$$\begin{aligned} \ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \dot{a} \dot{T} \frac{f_{TT}(T)}{f_T(T)} - \frac{1}{4} a \frac{T f_T(T) - f(T)}{f_T(T)} &= 0, \\ a^2 T + 6\dot{a}^2 &= 0, \\ a^2 [f(T) - T f_T(T)] + 6\dot{a}^2 f_T(T) &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que a segunda equação de Euler-Lagrange fornece justamente o escalar de torção com o qual começamos.

Avançemos para a aplicação do método das prolongações à lagrangiana 6.18, definida no espaço de configurações  $\{a, T\}$ , tendo como espaço tangente  $\{a, T, \dot{a}, \dot{T}\}$ . Será sobre esse espaço de configurações (mini-superespaço) que buscaremos construir a versão quântica da cosmologia em estudo.

<sup>6</sup> A condição de energia corresponde simplesmente à hamiltoniana do problema, escrita explicitamente aqui como a transformada de Legendre da lagrangiana correspondente [41, 42].

Considerando que o gerador infinitesimal  $\eta$  pode ser expresso em termos de componentes por  $\eta = (\alpha(a, T), \tau(a, T))$ , a primeira prolongação do gerador de Noether nesse mini-superespaço será

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial a} + \tau \frac{\partial}{\partial T} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \dot{\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{T}}.$$

Aplicando esse gerador de simetria prolongado à lagrangiana 6.18, por meio da condição  $\mathfrak{L}_X(L) = 0$ , chegamos a

$$\begin{aligned} & 3a^2\alpha[f(T) - Tf_T(T)] - a^3\tau f_{TT}(T) - \dot{a}^2[6\alpha f(T) + \\ & + 6\alpha\tau f_{TT}(T) + 12a(\partial_a\alpha)f_T(T)] - 12a\dot{a}\dot{T}(\partial_T\alpha)f_T(T) = 0, \end{aligned}$$

que, para ser satisfeita, resulta no sistema

$$\begin{cases} 3a^2\alpha f(T) - 3a^2\alpha T f_T(T) - a^3\tau f_{TT}(T) = 0, \\ \alpha f_T(T) + 6\alpha\tau f_{TT}(T) + 2a(\partial_a\alpha)f_T(T) = 0, \\ \partial_T\alpha = 0. \end{cases}$$

O sistema acima admite como solução [123]

$$\alpha = \alpha_0 a^{1-\frac{3}{2n}}, \quad \tau = -\frac{3\tau_0}{n} T a^{\frac{3}{2n}}, \quad f(T) = f_0 T^n.$$

Disso, podemos concluir que o universo  $f(T)$  terá simetrias de Noether apenas se  $f(T)$  depender de  $T$  por uma lei de potência da forma acima. Mais do que isso, a substituição de  $f(T)$  na primeira equação de Euler-Lagrange e na condição de energia do sistema nos diz que  $f(T) = f_0 T^{1/2}$ , isto é, o parâmetro  $n$  deve ser restringido ao valor  $1/2$ . De fato, tomemos, por exemplo, a condição de energia

$$a^2[f(T) - Tf_T(T)] + 6\dot{a}^2 f_T(T) = 0.$$

Substituindo  $f(T) = f_0 T^n$ , temos que

$$a^2[T^n - nT^n] + 6\dot{a}^2 n T^{n-1} = 0.$$

Lembrando agora que  $T = -6(\dot{a}/a)^2$ , obtemos

$$\frac{\dot{a}^{2n}}{a^{2n-2}}(1-n) - n \frac{\dot{a}^{2n}}{a^{2n-2}} = 0 \Rightarrow (1-2n) = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{2}.$$

Para quantizarmos a cosmologia  $f(T)$ , podemos passar do mini-superspaço  $\{a, T\}$  para o  $\{z, w\}$  por meio das expressões 6.16. Neste caso, teremos que

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial z}{\partial a} + \tau \frac{\partial z}{\partial T} = 1, \\ \alpha \frac{\partial w}{\partial a} + \tau \frac{\partial w}{\partial T} = 0, \end{cases}$$

que admite como solução

$$z = \frac{2n}{3\alpha_0} a^{3/2n}, \quad w = a^3 T^n,$$

que pode ser invertida, obtendo

$$T = w^{\frac{1}{n}} \left( \frac{3\alpha_0 z}{2n} \right)^{-2}, \quad a = \left( \frac{3\alpha_0 z}{2n} \right)^{\frac{2n}{3}}.$$

Em termos das variáveis  $z$  e  $w$ , a lagrangiana 6.18, tomando  $f(T) = f_0 T^n$ ,  $f_0 = 1$  sem perda de generalidade, é reescrita como

$$L = w(1 - n) - 6n\alpha_0^2 \dot{z}^2 w^{(n-1)/n}, \quad (6.19)$$

de onde prontamente percebemos que  $z$  é uma variável cíclica.

A equação de Euler-Lagrange e a condição de energia no mini-superespaço  $\{z, w\}$  são simplesmente

$$\begin{cases} w = -6^n \alpha_0^{2n} \dot{z}^{2n}, \\ nw\ddot{z} + \dot{w}\dot{z}(n-1) = 0, \end{cases}$$

sendo mais simples do que aquelas no mini-superespaço  $\{a, T\}$ . Aqui, temos

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = -12\alpha_0^2 \dot{z} n w^{(n-1)/n} \Rightarrow \dot{z} = -\frac{\pi}{12\alpha_0^2 n w^{(n-1)/n}},$$

o que nos permite escrever a hamiltoniana

$$H = \dot{z}\pi - L = w(n-1) + \frac{\pi^2}{24\alpha_0^2 n w^{(n-1)/n}}.$$

Assim, estamos em condição de aplicar o processo de quantização canônica. Pela substituição de  $\pi$  por  $i\partial_z$ , o formalismo construído nas seções anteriores nos leva a concluir que

$$\begin{cases} H\psi = 0, \\ i\partial_z \psi = \Sigma_0 \psi. \end{cases}$$

Mais explicitamente,

$$\begin{cases} \left[ w(n-1) - \frac{3\partial_z^2}{24n\alpha_0^2 w^{(n-1)/n}} \right] \psi = 0, \\ i\partial_z \psi = \Sigma_0 \psi, \end{cases}$$

em que a primeira dessas expressões é a equação de Wheeler-DeWitt para o universo, e a segunda está relacionada à conservação de momento, cuja solução é simplesmente

$$\psi = \psi_0 e^{i\Sigma_0 z}.$$

Levando esse resultado na equação de Wheeler-DeWitt, temos que a função de onda para um universo descrito pela cosmologia  $f(T)$  é da forma

$$\psi \sim \exp\{i[2\alpha_0 w^{(n-1)/n} \sqrt{2n(n-1)}]z\}.$$

Conforme demonstrado por Capozziello e Lambiase [129], a existência de uma simetria de Noether para um mini-superespaço atua como uma espécie de regra de seleção, em vista do critério de Hartle, para recuperar comportamentos clássicos na evolução cósmica desde que comportamento ondulatório para a função de onda do universo apareça. Esse é precisamente o caso aqui e, conforme Bajardi e Capozziello nos mostram [123], no caso da cosmologia  $f(T)$  temos que o fator de escala e o escalar de torção podem ser escritos em termos da variável temporal  $t$  como

$$a(t) = a_0 t^{2n/3}, \quad T(t) = -\frac{8n^2}{3t^2},$$

para todo  $f(T) = T^n$ , com  $n \neq 1/2$ . Pelo uso da condição de energia nas coordenadas  $\{z, w\}$ ,  $(\dot{z}\partial_z + \dot{w}\partial_w - 1)L = 0$ , as equações podem ser limitadas para o caso  $n = 1/2$ , o que resulta em um caso trivial. Dependendo dos valores dados para  $n$  nas expressões acima para  $a$  e  $T$ , podemos obter soluções de Friedman com desaceleração ( $0 < n < 3/2$ ) bem como soluções estacionárias com lei de potência.

## 6.4 Conclusão

Neste capítulo, aplicamos o método das prolongações no contexto das simetrias variacionais a alguns sistemas que admitem uma formulação lagrangiana. Como vimos, a aplicação permite testar conjecturas, bem como reformular teoremas, como fizemos com o de Birkhoff. Além disso, nossa discussão nos mostrou que o método das prolongações oferece uma forma direta de quantização para postulantes à teoria da gravitação quântica.

A literatura no contexto que abordamos ao longo do capítulo é particularmente farta. Nos atendo a alguns exemplos, Ahmad, Bokhari e Zaman [130] apresentam o procedimento geral de determinação de simetrias de Noether e quantidades conservadas para lagrangianas construídas a partir de uma métrica lorentziana, como fizemos aqui. O mesmo procedimento é utilizado em [131] para uma classificação completa do espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A discussão é feita dividindo os universos em três classificações gerais: aberto, fechado e plano. Além disso, diferentes fatores de escala cósmica  $a$  são considerados.

Em um trabalho de 2011 [132], Mubasher Jamil, Fazal M. Mahomed e D. Momeni utilizam o Noether *approach* para estudar um modelo taquiônico em um universo descrito pela extensão  $f(R)$  da gravitação. Naquele estudo, eles se concentram na determinação de funções potenciais taquiônicas pela aplicação de simetrias de Noether a uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker plana. Simetrias de Noether também são elementos centrais nas investigações sobre as equações geodésicas para um espaço-tempo de Kerr carregado [133], conduzidas por Ibrar Hussain, F. M. Mahomed e Asghar Qadir.

Salvatore Capozziello e diversos colaboradores estudam a aplicação do Noether *approach* em diversos problemas nos campos da astrofísica, cosmologia e da relatividade geral. Por exemplo, com Francesco Bajardi, Capozziello publicou um livro [134] onde o método é aplicado a uma variedade de extensões e alternativas da teoria da relatividade geral, como os casos  $f(R)$  e  $f(T)$ , extensões de ordem superior e universos de Bianchi. O estudo segue com análises de sistemas solares, estrelas e galáxias, além de como a inflação e condições de energia surgem em certos casos.

## Conclusão

Nesta dissertação estudamos o método das prolongações. Vimos como o método é construído para as chamadas transformações de ponto. Como sabemos, o assunto não foi exaurido, pois pode também ser desenvolvido tendo em mente transformações de contato, dinâmicas e assim por diante. O mesmo pode ser dito em relação às várias técnicas de obtenção de solução, tanto no contexto das equações diferenciais ordinárias quanto no das parciais.

No que tange às simetrias variacionais, acontece o mesmo. Em [24], o assunto é analisado mais profundamente pelo estudo, por exemplo, de simetrias generalizadas. Além disso, como poderíamos esperar, o método das prolongações pode ser estendido às funções hamiltonianas, que, de fato, podem ser obtidas a partir das lagrangianas via transformações de Legendre, que são exemplos de transformações de contato [23]. Em [24] e [85], isso é explorado em profundidade. De fato, a segunda referência vai além e se envereda pelo procedimento de segunda quantização, o que deve encontrar ressonância com o *Noether* approach explorado na seção final do sexto capítulo.

Buscamos apresentar o método e ilustrá-lo por meio de problemas comuns a áreas diversas da física. Nesse sentido, o leitor não deve nutrir a falsa percepção de que o procedimento aqui exposto é de aplicação limitada. Na verdade, ele é de abrangência geral, desde que as condições das diversas definições, teoremas e outros constructos matemáticos sejam respeitadas. Portanto, os leitores das mais diversas áreas da física, da astrofísica à matéria condensada, da física matemática à cosmologia e à física de partículas, podem encontrar nessas páginas conteúdo que pode ser útil aos propósitos que porventura tenham.

A aplicação do formalismo a sistemas físicos, detalhada na Parte II, transcendeu a mera exemplificação, revelando conexões profundas e resultados significativos. A análise da equação de Burgers, por exemplo, não apenas determinou sua álgebra de simetria, mas também explicitou sua relação fundamental com a equação do calor através da transformação de Cole-Hopf — uma equivalência que se manifesta na isomorfia entre suas respectivas álgebras de Lie. Para a equação de Korteweg-De Vries, demonstrou-se como diferentes geradores (translação, escala e Galileu) sistematicamente reduzem a equação a diferentes classes de soluções, incluindo as ondas solitárias e as transcendentais de Painlevé. No domínio da Relatividade Geral, a abordagem de Noether proporcionou uma reformulação elegante do Teorema de Birkhoff, provando que a simetria esférica no vácuo implica a existência de um vetor de Killing tipo-tempo adicional. Finalmente, o método demonstrou seu poder preditivo ao atuar como um critério de seleção para modelos cosmológicos, restringindo a forma funcional da gravidade  $f(T)$  àquela que admite uma

simetria de Noether, viabilizando assim a quantização canônica do sistema e a obtenção da função de onda do universo.

Neste espírito, o domínio do método das prolongações, consolidado ao longo desta dissertação, revela-se uma ferramenta de grande valia para a pesquisa em física teórica. A capacidade, agora estabelecida, de identificar sistematicamente as simetrias de Lie e seus geradores habilita uma análise mais profunda da estrutura dos problemas de fronteira e oferece um caminho rigoroso para superar os desafios inerentes a eles. Desta forma, o conhecimento adquirido neste projeto de mestrado constitui a base técnica para investigações futuras e avançadas nos campos da cosmologia, física de partículas e no problema da gravitação quântica.

Como desdobramento natural desta pesquisa, o *Noether Approach*, explorado no Capítulo 6, será aplicado a teorias de gravidade modificada, como modelos  $f(R, T)$ , para investigar a existência de novas quantidades conservadas e selecionar modelos fenomenologicamente viáveis. Em particular, a técnica de encontrar variáveis cíclicas será utilizada para simplificar a quantização canônica desses modelos, buscando uma melhor compreensão da função de onda do universo em cenários que vão além da relatividade Geral. Esta linha de investigação representa o próximo passo lógico, utilizando o arcabouço teórico e computacional aqui consolidado para abordar questões em aberto na fronteira da cosmologia quântica.

## Referências

- [1] Cornwell, John F.: *Group Theory in Physics: An Introduction*. Academic Press, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 16, 32 e 35.
- [2] Pires, Antônio S. T.: *Geometria Diferencial Para Físicos*. Editora Livraria da Física, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.
- [3] Pires, Antônio S. T.: *A Bried Introduction to Topology and Differential Geometry in Condensed Matter Physics - Second Edition*. Morgan & Claypool Publishers, 2019. Citado na página 21.
- [4] Gamelin, Theodore W. e Robert Everist Greene: *Introduction to Topology - Second Edition*. Dover Publications, Inc., 1999. Citado na página 22.
- [5] Mendelson, Marion: *Introduction to Topology - Third Edition*. Dover Publications, Inc., 1990. Citado na página 25.
- [6] Gilmore, Robert: *Lie Group, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 33.
- [7] Jr., Jayme Vaz e Edmundo Capelas de Oliveira: *Métodos Matemáticos - Volume 3*. Editora da Unicamp, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 37.
- [8] Turnbull, H. W.: *A Matrix Form of Taylor's Theorem*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2:33–54, 1930. Citado na página 30.
- [9] Higham, Nicholas J.: *Functions of Matrices: Theory and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. Citado na página 30.
- [10] Nicholson, W. Keith: *Linear Algebra with Applications - Open Edition*. Vretta-Lyryx, 2023. Citado na página 33.
- [11] Osborn, Hugh: *Group Theory Lecture Notes*, 2013. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/ho/GNotes.pdf>. Citado na página 37.
- [12] Wemyss, Michael: *Introduction to Group Theory*, 2012. <https://www.maths.gla.ac.uk/~mwemyss/teaching/3alg1-7.pdf>. Citado na página 37.
- [13] Popa, Mihnea: *Chapter 5: Jet Spaces and Arc Spaces*. <https://people.math.harvard.edu/~mpopa/571/chapter5.pdf>. Citado na página 40.

- [14] Moosa, Rahim e Thomas Scanlon: *Jet and Prolongation Spaces*. Journal of the Inst. of Math., 9:391–430, 2010. <https://www.math.uwaterloo.ca/~rmoosa/jetA.pdf>. Citado na página 40.
- [15] Olver, Peter J.: *Jets and Differential Invariants*, 2012. [https://www-users.cse.umn.edu/~olver/sm\\_/j.pdf](https://www-users.cse.umn.edu/~olver/sm_/j.pdf). Citado na página 40.
- [16] Mehri, Sima: *The Hockey Stick Theorems in Pascal and Trinomial Triangles*. página 7, 2016. <https://arxiv.org/pdf/1404.5106>. Citado na página 41.
- [17] Sista, Sivaji Ganesh: *Chapter 1: Introduction*. <https://www.math.iitb.ac.in/~siva/ma51510/pde1.pdf>. Citado na página 42.
- [18] Salih, A.: *Method of Characteristics*, 2016. [https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/MoC\\_0.pdf](https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/MoC_0.pdf). Citado na página 42.
- [19] John, Fritz: *Partial Differential Equations - Fourth Edition*. Springer-Verlag, 1982. Citado na página 42.
- [20] Oliveri, Francesco: *Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions*. Symmetry, 2:658–706; 2010. Citado na página 45.
- [21] Coddington, Earl A.: *An introduction to ordinary differential equations*. Englewood Cliffs, 1961. Citado na página 47.
- [22] Bluman, George W. e Stephen C. Anco: *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 94.
- [23] Hydon, Peter E.: *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*. Cambridge University Press, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 63, 94 e 187.
- [24] Olver, Peter J.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations - Second Edition*. Springer-Verlag, 1993. Citado 12 vezes nas páginas 64, 72, 90, 94, 96, 102, 111, 128, 129, 134, 154 e 187.
- [25] Spivak, Michael: *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, 1965. Citado na página 65.
- [26] Prasad, Sachchidanand: *Inverse Function Theorem and its Applications*. [https://students.iiserkol.ac.in/~sp17rs038/assets/attachments/Inverse\\_Function\\_Theorem.pdf](https://students.iiserkol.ac.in/~sp17rs038/assets/attachments/Inverse_Function_Theorem.pdf). Citado na página 65.
- [27] Aksoy, A. e M. Martelli.: *Mixed Partial Derivatives and Fubini's Theorem*. College Mathematics Journal of MAA, 33:126–130, 2002. Citado na página 71.

- [28] Apostol, Tom M.: *Mathematical analysis: a modern approach to advanced calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, 1965. Citado na página 71.
- [29] Speck, Jared: *Class Meeting # 5: The Fundamental Solution for the Heat Equation*, 2011. [https://ocw.mit.edu/courses/18-152-introduction-to-partial-differential-equations-fall-2011/9acdeff6449529106ac254f7ada967da\\_MIT18\\_152F11\\_lec\\_05.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/18-152-introduction-to-partial-differential-equations-fall-2011/9acdeff6449529106ac254f7ada967da_MIT18_152F11_lec_05.pdf). Citado na página 86.
- [30] Wubneh, Kahsay Godifey e Teklay Hailay Tsegay: *Derivation of Fundamental Solution of Heat Equation by using Symmetry Reduction*. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE), 9:5, 2020. Citado na página 86.
- [31] Baumann, Gerd: *Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica<sup>®</sup>*. Springer Science + Business Media, LLC, 2000. Citado na página 90.
- [32] Champagne, B., W. Hereman e P. Winternitz: *The computer calculation of Lie point symmetries of large systems of differential equations*. Computer Physics Communications, 66:319–340, 1991. Citado na página 90.
- [33] Head, A.K.: *LIE, a PC program for Lie analysis of differential equations*. Computer Physics Communications, 96:311–313, 1996. Citado na página 90.
- [34] Oliveri, Francesco: *ReLie: A Reduce Program for Lie Group Analysis of Differential Equations*. Symmetry, 13:39, 2021. Citado na página 90.
- [35] *REDUCE Computer Algebra System*. <https://reduce-algebra.sourceforge.io/>. Citado na página 90.
- [36] Wolf, T.: *Investigating differential equations with CRACK, LiePDE, applsymm and ConLaw*. Handbook of Computer Algebra, Foundations, Applications, Systems, 37:465–468, 2002. Citado na página 91.
- [37] Stephani, Hanz e Malcolm Maccallum: *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. Cambridge University Press, 1989. Citado na página 94.
- [38] Cohen, Abraham: *An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups: With Applications to the Solution of Differential Equations*. D.C. Heat & Co. Publishers, 1911. Citado na página 94.
- [39] Cantwell, Brian J.: *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge University Press, 2002. Citado na página 94.
- [40] Rudin, Walter: *Functional Analysis - Second Edition*. McGraw-Hill, 1991. Citado na página 96.

- [41] Goldstein, Herbert, Charles P. Poole e John L. Safko: *Classical Mechanics - Third Edition*. Pearson Education, Inc., 2002. Citado 7 vezes nas páginas 99, 100, 117, 118, 121, 177 e 182.
- [42] Lemos, Nivaldo A.: *Mecânica Analítica - Segunda Edição*. Editora Livraria da Física, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 99, 117, 118, 121, 177 e 182.
- [43] Courant, R. e David Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*. John Wiley and Sons, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 103 e 117.
- [44] Sobolev, S. L.: *Applications Of Functional Analysis In Mathematical Physics*. American Mathematical Society, 1963. Citado na página 103.
- [45] *The Integral Theorems*. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/vc/vc4.pdf>. Citado na página 104.
- [46] Robinson, Stephen M.: *A Short Proof of Cramer's Rule*. Mathematics Magazine, 43:94–95, 1970. Citado na página 106.
- [47] Ghosh, Dipan Kumar: *Classical Mechanics Examples (Lagrange Multipliers)*, 2015. <https://static1.squarespace.com/static/570e7b14e707ebd28d391286/t/58089d741b631b83fe943727/1476959606817/classical-6.pdf>. Citado na página 117.
- [48] Griffiths, David J.: *Introduction to Electrodynamics - Third Edition*. Prentice Hall, Inc., 1999. Citado na página 119.
- [49] *Conservation of Mass*. <https://web.mit.edu/1.061/www/dream/TWO/TWOTHEORY.PDF>. Citado na página 119.
- [50] Griffiths, David J.: *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Inc., 1995. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 180.
- [51] Noether, Emmy: *Invariante Variationsprobleme*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918:235–257, 1918. Citado na página 121.
- [52] Houchmandzadeh, Bahram: *A geometric derivation of Noether's theorem*. arXiv:2502.19438, página 10, 2025. <https://arxiv.org/pdf/2502.19438>. Citado na página 121.
- [53] Baccouch, Mahboub: *Numerical Methods for the Viscid and Inviscid Burgers Equations*. IntechOpen, February 2024. <https://www.intechopen.com/chapters/1200864>. Citado na página 133.

- [54] Bateman, Harry: *Some Recent Researches on the Motion of Fluids*. Monthly Weather Review, 43:163–170, 1915. Citado na página 133.
- [55] Whitham, G. B.: *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, 1974. Citado na página 133.
- [56] Kumar, Nand Kishor: *A Review on Burgers' Equations and It's Applications*. Journal of Institute of Science and Technology, 22:49–52, 2023. Citado na página 133.
- [57] Burgers, J.M.: *A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence*. Advances in Applied Mechanics, 1:171–199, 1948. Citado na página 133.
- [58] Bonkile, Mayur P., Ashish Awasthi, C. Lakshmi, Vijitha Mukundan e V. S. Aswin: *A systematic literature review of Burgers' equation with recent advances*. Pramana - Journal of Physics, 90:21, 2018. Citado na página 133.
- [59] Bilodeau, David: *Cole-Hopf Transformation*. <https://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f11/downloads/ColeHopf.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 133 e 141.
- [60] Kumar, Mukesh e Raj Kumar: *Some More Solutions of Burgers' Equation*. Journal of Physics: Conference Series, 574:6, 2015. Citado na página 139.
- [61] Hossen, M. Belal, Harun-Or-Roshid e M. Zulfikar Ali: *Dynamical structures of exact soliton solutions to Burgers' equation via the bilinear approach*. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 3:8, 2021. Citado na página 140.
- [62] Cole, Julian D.: *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*. Quartely of Applied Mathematics, 9:225–236, 1951. Citado na página 141.
- [63] Hopf, Eberhard: *The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Communications on Pure and Applied Mathematics, 3:201–230, 1950. Citado na página 141.
- [64] *Parabolic PDEs*. <https://www.sheffield.ac.uk/media/32085/download?attachment=>. Citado na página 141.
- [65] *Parabolic partial differential equations*. <https://old.vscht.cz/mat/Pavel.Pokorny/students/pdepara/parabolicPDEeng.pdf>. Citado na página 141.
- [66] Madelung, E.: *Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrödinger*. Naturwissenschaften, 114, 1926. Citado na página 141.
- [67] Brauer, Klaus: *The Korteweg-de Vries Equation: History, exact Solutions, and graphical Representation*, 2000. [https://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math\\_485/KDV.pdf](https://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/KDV.pdf). Citado na página 142.

- [68] Miles, John W.: *The Korteweg-de Vries equation: a historical essay*. Journal of Fluid Mechanics, 106:131 – 147, 1981. Citado na página 142.
- [69] Schalch, Nicolas: *The Korteweg-de Vries Equation*, 2018. [https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/itp-dam/documents/gaberdiel/proseminar\\_fs2018/11\\_Schalch.pdf](https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/itp-dam/documents/gaberdriel/proseminar_fs2018/11_Schalch.pdf). Citado 2 vezes nas páginas 142 e 148.
- [70] P. G. Drazin, R. S. Johnson: *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 142 e 155.
- [71] Janna, William S.: *Introduction to fluid mechanics*. Taylor and Francis Group, LLC, 2010. Citado na página 143.
- [72] *Vector Identities*. [https://sites.astro.caltech.edu/~srk/Ay121/Notes/Vector\\_Identities.pdf](https://sites.astro.caltech.edu/~srk/Ay121/Notes/Vector_Identities.pdf). Citado na página 143.
- [73] Korteweg, D. J. e G. de Vries: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 39:422–443, 1895. Citado na página 145.
- [74] Rayleigh, L.: *On Waves*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1:257–279, 1876. Citado na página 145.
- [75] Clarkson, P. A.: *Chapter 32 Painlevé Transcendents*. <https://dlmf.nist.gov/32>. Citado na página 155.
- [76] Miura, Robert M.: *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation Available to Purchase*. Journal of Mathematical Physics, 9:1202–1204, 1968. Citado na página 156.
- [77] Miura, Robert M., Clifford S. Gardner e Martin D. Kruskal: *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion*. Journal of Mathematical Physics, 9:1204–1209, 1968. Citado na página 156.
- [78] Zawistowski, Zygmunt Jacek: *Symmetries of Radial Maxwell–Vlasov Equations*. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 50:304–308, 2004. Citado na página 156.
- [79] Al-Nassar, Samar e Mehdi Nadjafikhah: *Lie symmetry analysis and some new exact solutions of the Fokker–Planck equation*. Arabian Journal of Mathematics, 12:467–482, 2023. Citado na página 156.

- [80] Loua, Sen yue: *Symmetry analysis and exact solutions of the 2+1 dimensional sine-Gordon system*. Journal of Mathematical Physics, 41:16, 2020. Citado na página 156.
- [81] Tenenblat, K. e P. Winternitz: *On the symmetry groups of the intrinsic generalized wave and sine-Gordon equations*. Journal of Mathematical Physics, 34:3527–3542, 1993. Citado na página 156.
- [82] Yildirim, Ozgur e Sumeyra Caglak: *Lie point symmetries of difference equation for nonlinear sine-Gordon equation*. Physica Scripta, 94:14, 2019. Citado na página 157.
- [83] Muatjetjeja, Ben: *NOETHER SYMMETRY CLASSIFICATION AND REDUCTIONS OF THE GENERALIZED LANE-EMDEN EQUATION*. Dissertação de Mestrado, North West University,, 2006. Citado na página 157.
- [84] Khaliq, C Masood, Fazal M Mahomed e Ben Muatjetjeja: *Lagrangian formulation of a generalized Lane-Emden equation and double reduction*. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, página 152–161, 2008. Citado na página 157.
- [85] Bocharov, A. V., A. M. Verbovetsky, S. V. Duzhin, A. V. Samokhin, Yu. N. Torkhov e N. G. Khorkova V. N. Chetverikov: *Translations of Mathematical Monographs*. Em Vinogradov, A. M. e I. S. Krasilshchik (editores): *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*, volume 182, página 333. American Mathematical Society, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 157 e 187.
- [86] Khan, M. A. Z. e R. B. Narain: *Lie symmetry analysis of the Einstein-Maxwell equations for quark stars*. arXiv:2305.10864v1, página 19, 2023. <https://arxiv.org/pdf/2305.10864v1>. Citado na página 157.
- [87] Carroll, Sean: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, Inc., 2004. Citado 4 vezes nas páginas 158, 160, 170 e 175.
- [88] Shamir, M. Farasat, Adil Jhangeer e Akhlaq Ahmad Bhatti: *Killing and Noether Symmetries of Plane Symmetric Spacetime*. International Journal of Theoretical Physics, 52:3106–3117, 2013. Citado na página 160.
- [89] Bokhari, A. H., A. H. Kara, A. R. Kashif e F. D. Zaman: *Noether Symmetries Versus Killing Vectors and Isometries of Spacetimes*. International Journal of Theoretical Physics, 45:1029–1039, 2006. Citado na página 160.
- [90] Stephani, Hans, Dietrich Kramer, Malcolm Maccallum, CornElius Hoenselaers e Eduard Herlt: *Exact Solutions of Einstein's Field Equations - Second Edition*. Cambridge University Press, 2003. Citado na página 161.

- [91] Pal, Palash B.: *An Introductory course of Particle Physics*. Taylor & Francis Group, LLC, 2015. Citado na página 164.
- [92] Maggiore, Michele: *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 164 e 181.
- [93] Reissner–Nordström Metric, Second Order Approximate Symmetries of the Geodesic Equations for the e Re Scaling of Energy of a Test Particle. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 115:9, 2007. Citado na página 165.
- [94] Taub, A. H.: *Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions*. *Annals of Mathematics*, 53:472–490, 1951. Citado na página 165.
- [95] Bonanos, S.: *On the Stability of the Taub Universe*. *Commun. math. Phys.*, 22:90—222, 1971. Citado na página 165.
- [96] Misner, C. W.: *Taub-NUT space as a counterexample to almost anything*. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19660007407>. Citado na página 165.
- [97] Boer, Jan de: *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. <https://ncatlab.org/nlab/files/deBoer-IntroAdS-CFT.pdf>. Citado na página 167.
- [98] Griffiths, Jerry B.: *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, 2009. Citado na página 167.
- [99] Qadir, A.: *Geometric Linearization of Ordinary Differential Equations*. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, página 7, 2007. Citado na página 170.
- [100] Pais, Abraham: *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, 2005. Citado na página 170.
- [101] Hawking, S. W. e G. F. R. Ellis: *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 170 e 175.
- [102] Schwarzschild, Karl: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 7:189–196, 1916. [https://archive-org.translate.google/details/sitzungsberichte1916deutsch/page/188/mode/2up?view=theater&\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=pt&\\_x\\_tr\\_hl=pt&\\_x\\_tr\\_pto=tc&\\_x\\_tr\\_hist=true](https://archive-org.translate.google/details/sitzungsberichte1916deutsch/page/188/mode/2up?view=theater&_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt&_x_tr_pto=tc&_x_tr_hist=true). Citado na página 170.
- [103] Antoci, S. e A.Loinger: *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory: K. Schwarzschild (translation and foreword by S.Antoci and A.Loinger)*. arXiv:physics/9905030, página 7, 1999. <https://arxiv-org.translate.google/abs/>

- physics/9905030?\_x\_tr\_sl=en&\_x\_tr\_tl=pt&\_x\_tr\_hl=pt&\_x\_tr\_pto=tc. Citado na página 170.
- [104] Bel, Llúis: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes " nach der Einsteinschen Theorie*. arXiv:0709.2257, página 8, 2007. [https://arxiv-org.translate.google.com/abs/0709.2257?\\_x\\_tr\\_sl=en&\\_x\\_tr\\_tl=pt&\\_x\\_tr\\_hl=pt&\\_x\\_tr\\_pto=tc](https://arxiv-org.translate.google.com/abs/0709.2257?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt&_x_tr_pto=tc). Citado na página 170.
- [105] Misner, Charles W., Kip S. Thorne e John Archibald Wheeler: *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 170 e 172.
- [106] Birkhoff, G. D.: *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923. Citado na página 170.
- [107] Mukherjee e Mukherjee: *Birkhoff 's Theorem and Lie Symmetry Analysis*. Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology, 7:1280–1297, 2021. Citado na página 175.
- [108] Hartle, J. B. e S. W. Hawking: *Wave function of the Universe*. Physical Review, 28:16, 1983. Citado na página 177.
- [109] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*. Physical Review, 116:1322–1330, 1959. Citado na página 178.
- [110] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Quantum Theory of Gravitation: General Formulation and Linearized Theory*. Physical Review, 113:745–750, 1959. Citado na página 178.
- [111] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Canonical Variables for General Relativity*. Physical Review, 117:1595–1602, 1960. Citado na página 178.
- [112] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Finite Self-Energy of Classical Point Particles*. Physical Review Letters, 4:375–377, 1960. Citado na página 178.
- [113] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity*. Physical Review, 118:1100–1104, 1960. Citado na página 178.
- [114] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Gravitational-Electromagnetic Coupling and the Classical Self-Energy Problem*. Physical Review, 120:313–320, 1960. Citado na página 178.
- [115] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Interior Schwarzschild Solutions and Interpretation of Source Terms*. Physical Review, 120:321–324, 1960. Citado na página 178.

- [116] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Wave Zone in General Relativity*. Physical Review, 121:1556–1566, 1961. Citado na página 178.
- [117] Arnowitt, R., S. Deser e C. Misner: *Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity*. Physical Review, 122:997–1006, 1961. Citado na página 178.
- [118] Corichi, Alejandro e Darío Núñez: *Introduction to the ADM Formalism*. arXiv:2210.10103v2, página 24, 1991. <https://arxiv.org/pdf/2210.10103>. Citado 2 vezes nas páginas 178 e 179.
- [119] Beiner, Gabriel: *The Wheeler-deWitt Equation: Constructing a Canonical Theory of Quantum Gravity*. [https://math.berkeley.edu/~gbeiner/papers/Wheeler\\_DeWitt.pdf](https://math.berkeley.edu/~gbeiner/papers/Wheeler_DeWitt.pdf). Citado na página 178.
- [120] Thiemann, Thomas: *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, 2010. Citado na página 179.
- [121] DeWitt, Bryce S.: *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*. Physical Review, 160:24, 1991. Citado na página 179.
- [122] Hirata, Christopher M.: *Lecture XXXIV: Hypersurfaces and the 3+1 formulation of geometry*, 2012. <http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/2011-12/lec34.pdf>. Citado na página 179.
- [123] Bajardi, Francesco e Salvatore Capozziello: *Noether symmetries and quantum cosmology in extended teleparallel gravity*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 18:15, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 179, 180, 181, 182, 183 e 185.
- [124] Anderson, Edward: *The Problem of Time: Quantum Mechanics Versus General Relativity*. Springer-Verlag, 2017. Citado na página 180.
- [125] *Lecture 4 - Relativistic wave equations*. [http://nsmn1.uh.edu/hunger/class/fall\\_2015/lectures/lecture\\_4.pdf](http://nsmn1.uh.edu/hunger/class/fall_2015/lectures/lecture_4.pdf). Citado na página 180.
- [126] Einstein, Albert: *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus*. Preussische Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, Sitzungsberichte, 1928:217–221, 1928. Citado na página 180.
- [127] Paquet, Eric, Herna L. Viktor e Gabriel St-Pierre-Lemieux: *Exact shape flattening by means of Weitzenböck geometry and teleparallel*. Displays, 75:8, 2022. Citado na página 181.
- [128] Cai, Yi Fu, Salvatore Capozziello e Emmanuel N Saridakis:  *$f(T)$  teleparallel gravity and cosmology*. Reports on Progress in Physics - IOP Science, 79:122, 2016. Citado na página 181.

- [129] Capozziello, S. e G. Lambiase: *Selection Rules in Minisuperspace Quantum Cosmology*. General Relativity and Gravitation, 32:673–696, 2000. Citado na página 185.
- [130] Ahmad, Ahmad M., Ashfaque H. Bokhari e F. D. Zaman: *Symmetries, Conservation Laws, and Wave Equation on the Milne Metric*. Journal of Applied Mathematics, 2012:7, 2012. Citado na página 185.
- [131] Jhangeer, Adil, M. Farasat Shamir, Tayyaba Naz e Nazish Iftikhar: *Classification of Cosmic Scale Factor via Noether Gauge Symmetries*. International Journal of Theoretical Physics, 2015:2343–2353, 2015. Citado na página 185.
- [132] Jamil, Mubasher, Fazal M. Mahomed e D. Momeni: *Noether Symmetry Approach in  $f(R)$ Tachyon Model*. Physics Letters B, 702:315–319, 2011. Citado na página 185.
- [133] Hussain, Ibrar, F. M. Mahomed e Asghar Qadir: *Approximate Noether symmetries of the geodesic equations for the charged-Kerr spacetime and rescaling of energy*. General Relativity and Gravitation, 41:2399–2414, 2009. Citado na página 185.
- [134] Bajardi, Francesco e Salvatore Capozziello: *Noether Symmetries in Theories of Gravity: With Applications to Astrophysics and Cosmology*. Cambridge University Press, 2023. Citado na página 186.
- [135] Frankel, Theodore: *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 1997. Nenhuma citação no texto.
- [136] Zee, Anthony: *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016. Nenhuma citação no texto.
- [137] Ledermann, Walter e Alan J. Weir: *Introduction to Group Theory - Second Edition*. Addison Wesley Longman, 1996. Nenhuma citação no texto.
- [138] Steinkirch, Marina von: *Introduction to Group Theory for Physicists*, 2011. <https://web.phys.ntnu.no/~mika/group.pdf>. Nenhuma citação no texto.
- [139] Morris, Sidney A.: *Topology Without Tears*, 2024. <https://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf>. Nenhuma citação no texto.
- [140] Au, Thomas Kwok Keung: *Introduction to Topology*, 2024. [https://www.math.cuhk.edu.hk/course\\_builder/1415/math3070/InTopology3.pdf](https://www.math.cuhk.edu.hk/course_builder/1415/math3070/InTopology3.pdf). Nenhuma citação no texto.
- [141] Hancock, Matthew J.: *The method of characteristics applied to quasi-linear PDEs*, 2006. [https://ocw.mit.edu/courses/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/085f9ac605e03e9c72328a7239d11d10\\_quasi.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/085f9ac605e03e9c72328a7239d11d10_quasi.pdf). Nenhuma citação no texto.

- [142] Brunt, Bruce van: *The Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 2004. Nenhuma citação no texto.
- [143] Schumann1, Aidan: *Lie, Noether, and Lagrange: symmetries, and their relation to conserved quantities*, 2017. <http://buzzard.ups.edu/courses/2017spring/projects/schumann-lie-group-ups-434-2017.pdf>. Nenhuma citação no texto.
- [144] Gourieux, Thierry e Raphaël Leone. *European Journal of Physics*, 42:24, 2020. Nenhuma citação no texto.
- [145] Boussinesq, J.: *Essai sur la théorie des eaux courantes*, 1877. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076>. Nenhuma citação no texto.
- [146] Coleman, Neal: *A Derivation of the Navier-Stokes Equations*. [https://digitalresearch.bsu.edu/mathexchange/wp-content/uploads/2021/02/A-Derivation-of-the-Navier-Stokes-Equations\\_coleman.neal\\_.pdf](https://digitalresearch.bsu.edu/mathexchange/wp-content/uploads/2021/02/A-Derivation-of-the-Navier-Stokes-Equations_coleman.neal_.pdf). Citado na página 204.
- [147] Gibiansky, Andrew: *Fluid Dynamics: The Navier-Stokes Equation*. <https://andrew.gibiansky.com/downloads/pdf/Fluid%20Dynamics:%20The%20Navier-Stokes%20Equations.pdf>. Citado na página 204.
- [148] Evans, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010. Citado na página 208.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Fórmula de Jacobi

Neste apêndice, apresentamos a derivação da Fórmula de Jacobi, uma identidade fundamental no cálculo matricial. Esta fórmula é utilizada no Capítulo 4, durante a prova do Teorema 4.3, para calcular a variação do determinante do Jacobiano de uma transformação de coordenadas, um passo crucial para estabelecer o critério de invariância para simetrias variacionais.

No cálculo matricial, a fórmula de Jacobi expressa a derivada do determinante de uma matriz  $A$  em termos de sua matriz adjunta e da derivada de  $A$ . Neste apêndice, apresentaremos a fórmula como um teorema e a demonstraremos em seguida.

## Teorema A.1

Para o mapeamento diferenciável  $A$  dos números reais nas matrizes reais  $n \times n$ , vale que

$$\frac{d}{dt}(\det A) = \text{Tr} \left( \text{Adj}(A) \frac{dA}{dt} \right).$$

## Prova A.1

Seja  $A$  uma matriz diferenciável e tal que  $A = BC$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^{-1}A') &= \text{Tr}((BC)^{-1}(BC)') = \text{Tr}(C^{-1}B^{-1}(B'C + BC')) = \\ &= \text{Tr}(C^{-1}B^{-1}B'C) + \text{Tr}(C^{-1}B^{-1}BC') = \\ &= \text{Tr}(CC^{-1}B^{-1}B') + \text{Tr}(C^{-1}C') = \text{Tr}(B^{-1}B') + \text{Tr}(C^{-1}C'), \end{aligned}$$

onde foi utilizada a propriedade de ciclicidade do traço. Em particular, se  $L$  é uma matriz invertível, então  $I = L^{-1}L$ . Assim, pelo raciocínio anterior,

$$\text{Tr}(I^{-1}I') = 0 = \text{Tr}(L(L^{-1})') + \text{Tr}(L^{-1}L'). \quad (\text{A.1})$$

Como  $A$  possui autovalores distintos, existe uma matriz diferenciável  $L$  tal que  $A = L^{-1}DL$ , com  $D$  diagonal. Agora, sejam  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os autovalores de  $A$ . Logo,

$$\frac{(\det A)'}{\det A} = \sum_i \frac{\lambda_i'}{\lambda_i} = \text{Tr}(D^{-1}D') = \text{Tr}((L^{-1}AL)^{-1}(L^{-1}AL)') =$$

$$= \text{Tr}(AA^{-1}L(L^{-1})') + \text{Tr}(A^{-1}A') + \text{Tr}(L^{-1}L') = \text{Tr}(A^{-1}A'),$$

através do uso da relação A.1. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(\det A)'}{\det A} &= \text{Tr}(A^{-1}A') \Rightarrow \frac{d}{dt}(\det A) = (\det A)\text{Tr}(A^{-1}A') = \\ &= \text{Tr}((\det A)A^{-1}A') = \text{Tr}\left(\text{Adj}(A)\frac{dA}{dt}\right), \end{aligned}$$

onde  $\text{Adj}(A)(dA/dt) = (\det A)A^{-1}A'$  define a matriz adjunta de  $A$ .

Assim,

$$\frac{d}{dt}(\det A) = \text{Tr}\left(\text{Adj}(A)\frac{dA}{dt}\right),$$

que é a conhecida fórmula de Jacobi para a derivada do determinante de uma matriz.

□

## APÊNDICE B – Equação de Navier-Stokes

*Este apêndice é dedicado à derivação da equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis [146, 147], partindo dos primeiros princípios de conservação de massa e momento. A equação de Burgers, analisada em detalhe no Capítulo 5, é uma simplificação unidimensional da equação de Navier-Stokes e descreve o balanço entre convecção não linear e difusão viscosa, cujas bases físicas são estabelecidas aqui.*

### Princípios Fundamentais e a Hipótese do Contínuo

Neste apêndice, derivaremos as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis. A derivação será autocontida, com todos os conceitos e resultados relevantes devidamente apresentados.

Começemos definindo propriedades intensivas e extensivas de fluidos. Uma propriedade intensiva não depende do volume de medida (ex: pressão, densidade). Propriedades extensivas dependem (ex: massa, volume). As equações de Navier-Stokes lidam principalmente com a relação entre as propriedades intensivas pressão e velocidade.

Adotaremos a **hipótese do contínuo**: lidaremos com um fluido macroscópico, ignorando sua natureza discreta. Assumiremos que as propriedades do fluido podem ser descritas por funções contínuas e infinitamente diferenciáveis.

### Conservação da Massa: A Equação da Continuidade

A lei da conservação da massa enuncia que a quantidade de matéria em um sistema isolado permanece constante. Para um volume de controle arbitrário  $V$ , a taxa de variação da massa total  $M$  dentro do volume deve ser igual ao fluxo líquido de massa através de sua fronteira  $\partial V$ .

A massa total é  $M = \int_V \rho dV$ , e sua taxa de variação é  $\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ .

O fluxo de massa para fora através de um elemento de superfície  $d\mathbf{A} = \hat{n}dA$  é  $\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$ . O fluxo total para fora é  $\oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$ . A conservação da massa implica que a taxa de aumento de massa é o negativo do fluxo para fora:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}.$$

Usando o Teorema da Divergência no lado direito, temos:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV.$$

Como esta equação deve valer para qualquer volume  $V$ , o integrando deve ser nulo, o que nos leva à **equação da continuidade**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

## Conservação do Momento: A Equação de Cauchy

A segunda lei de Newton para um volume de fluido afirma que a taxa de variação do momento total é igual à soma das forças aplicadas. As forças podem ser divididas em **forças de corpo** ( $\mathbf{f}$ ), que atuam sobre o volume (ex: gravidade), e **forças de superfície**, que atuam na fronteira do volume (pressão e tensões viscosas).

A força de superfície é descrita pelo tensor de tensões  $\sigma$ . A força por unidade de área em uma superfície com normal  $\hat{n}$  é  $\mathbf{T}(\hat{n}) = \sigma \cdot \hat{n}$ . A força total de superfície é  $\oint_{\partial V} \sigma \cdot d\mathbf{A}$ .

A segunda lei de Newton para o fluido no volume  $V$  é:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \oint_{\partial V} \sigma \cdot d\mathbf{A}.$$

Usando o Teorema da Divergência no termo de superfície e o Teorema do Transporte de Reynolds no termo de momento, chegamos à forma diferencial, conhecida como **equação de momento de Cauchy**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma.$$

## O Fluido Newtoniano e o Tensor de Tensões

Para prosseguir, precisamos de um modelo constitutivo para o tensor de tensões  $\sigma$ . Para um fluido em repouso, a única tensão é a pressão hidrostática isotrópica,  $\sigma = -pI$ , onde  $I$  é o tensor identidade. Para um fluido em movimento, há tensões adicionais devido à viscosidade.

Para um **fluido Newtoniano**, assume-se que a parte viscosa do tensor de tensões (tensor de tensões deviônico,  $\tau$ ) é linearmente proporcional ao tensor de taxa de deformação  $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ . A relação completa para um fluido isotrópico é:

$$\sigma = -pI + \tau = -pI + 2\mu\epsilon + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})I.$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $\lambda$  é a segunda viscosidade.

## A Equação de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis

Para um **fluido incompressível**, a densidade  $\rho$  é constante. A equação da continuidade simplifica para:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Com  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , o tensor de tensões se torna  $\sigma = -pI + 2\mu\epsilon$ . O termo da divergência do tensor de tensões é:

$$\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu\epsilon) = -\nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})).$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , isso se simplifica para  $\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \mu\nabla^2 \mathbf{u}$ .

Substituindo este resultado na equação de momento de Cauchy, obtemos a **equação de Navier-Stokes para um fluido Newtoniano incompressível**:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

Dividindo por  $\rho$  e definindo a viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho$ , a equação é frequentemente escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}.$$

## APÊNDICE C – Transformação de Cole-Hopf

*A Transformação de Cole-Hopf é uma ferramenta matemática poderosa que lineariza a equação de Burgers, mapeando-a na equação do calor. Neste apêndice, derivamos esta transformação e demonstramos como ela funciona. A sua importância é central para a conclusão da análise de simetria no Capítulo 5, onde se mostra que as álgebras de Lie das duas equações são isomórficas, um fato que é elegantemente explicado por esta transformação.*

A transformação de Cole-Hopf é uma mudança de variáveis que permite a transformação de um tipo especial de PDE parabólica com uma não linearidade quadrática em uma equação do calor linear. Para vermos isso, consideremos a PDE

$$u_t - a\nabla^2 u + b\|\nabla u\|^2 = 0, \quad (\text{C.1})$$

com  $u(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . Aqui,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $a$  e  $b$  são constantes. Além disso,  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $w = \phi(u)$ , com  $\phi(\cdot)$  sendo uma função suave desconhecida. Para  $w$ , temos que

$$w_t = \phi' u_t, \quad \nabla w = \phi' \nabla u, \quad \nabla^2 w = \phi' \nabla^2 u + \phi'' \|\nabla u\|^2,$$

onde  $\phi' = d\phi/du$ . Substituindo C.1 na expressão para  $w_t$ , temos que

$$w_t = \phi' u_t = \phi'(u)(a\nabla^2 u - b\|\nabla u\|^2) = a\phi'(u)\nabla^2 u - b\phi'(u)\|\nabla u\|^2. \quad (\text{C.2})$$

Substituindo a expressão de  $\nabla^2 w$  no primeiro termo de C.2, obtemos

$$w_t = a(\nabla^2 w - \phi''(u)\|\nabla u\|^2) - b\phi'(u)\|\nabla u\|^2 = a\nabla^2 w - (a\phi''(u) + b\phi'(u))\|\nabla u\|^2.$$

Mas, se restringirmos  $\phi$  para satisfazer  $a\phi''(u) + b\phi'(u) = 0$ , temos que a equação acima se torna

$$w_t = \nabla^2 w, \quad (\text{C.3})$$

que é a equação do calor.

Para satisfazermos a restrição que impusemos acima, podemos tomar  $\phi(u) = e^{-bu/a}$ . Portanto,

$$w(u) = e^{-\frac{b}{a}u},$$

que é justamente a transformação de Cole-Hopf.

De posse da transformação, o problema de valor inicial pode ser reescrito como

$$w_t - \nabla^2 w = 0, \quad w(0, \mathbf{x}) = e^{-\frac{b}{a}f(\mathbf{x})}.$$

A solução para esse problema é [148]

$$w(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4at} - \frac{b}{a}f(\mathbf{y})} d\mathbf{y}.$$

Porém, pela relação entre  $w$  e  $u$ ,

$$u = -\frac{a}{b} \ln w \Rightarrow u = -\frac{a}{b} \ln \left[ \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4at} - \frac{b}{a}f(\mathbf{y})} d\mathbf{y} \right]. \quad (\text{C.4})$$

## C.1 Aplicação à Equação de Burgers Viscosa

Consideremos a equação de Burgers viscosa, com  $n = 1$ , dada por

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} + uu_x = 0, & \text{em } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u = f, & \text{sobre } \mathbb{R} \times [0, \infty). \end{cases}$$

Tomando

$$w(x, t) := \int_{-\infty}^x u(y, t) dy, \quad \text{e } g(x) = \int_{-\infty}^x g(y) dy,$$

temos que

$$\begin{cases} w_t - aw_{xx} + \frac{1}{2}w_x^2 = 0, & \text{em } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ w = h, & \text{sobre } \mathbb{R} \times [0, \infty), \end{cases}$$

que é da forma C.1 para  $n = 1$ ,  $b = 1/2$ . Portanto, pela aplicação da expressão C.4,  $w(x, t)$  é dado por

$$w = -2a \ln \left[ \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4at} - \frac{b}{a}h(y)} dy \right].$$

Contudo, dado que  $u = w_x$ , a derivação dessa equação resulta em

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4at} - \frac{h(y)}{2a}} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4at} - \frac{h(y)}{2a}} dy}, \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

que é uma solução da equação de Burgers viscosa com a condição de contorno estipulada.