

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Daniel Henrique Nunes Peixoto

**ESTUDO SOBRE DIFERENTES MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO E
APRESENTAÇÃO DA FAMÍLIA SENO-HIPERBÓLICA GENERALIZADA, COM
APLICAÇÃO NA MODELAGEM DE POLÍMEROS, BIOMATERIAIS E TECIDOS
BIOLÓGICOS MOLES**

Belo Horizonte

2024

Daniel Henrique Nunes Peixoto

**ESTUDO SOBRE DIFERENTES MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO E
APRESENTAÇÃO DA FAMÍLIA SENO-HIPERBÓLICA GENERALIZADA, COM
APLICAÇÃO NA MODELAGEM DE POLÍMEROS, BIOMATERIAIS E TECIDOS
BIOLÓGICOS MOLES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutor em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Greco

Belo Horizonte
Escola de Engenharia da UFMG

2024

P379e

Peixoto, Daniel Henrique Nunes.

Estudo sobre diferentes medidas de deformação e apresentação da família seno-hiperbólica generalizada, com aplicação na modelagem de polímeros, biomateriais e tecidos biológicos moles [recurso eletrônico] / Daniel Henrique Nunes Peixoto. – 2024.

1 recurso online (241 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Marcelo Greco.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 233-241.

Bibliografia: f. 218-232

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Polímeros - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. 4. Deformações (Mecânica) - Teses. 5. Biomateriais - Teses. I. Greco, Marcelo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 104 DO ALUNO DANIEL HENRIQUE NUNES PEIXOTO

Às **14:30** horas do dia **14** do mês de **junho** de **2024**, reuniu-se em ambiente virtual na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **26 de abril de 2024**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Estudo sobre Diferentes Medidas de Deformação e Apresentação da Família Seno-Hiperbólica Generalizada, com Aplicação na Modelagem de Polímeros, Biomateriais e Tecidos Biológicos Moles**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Marcelo Greco**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

Prof. Dr. Marcelo Greco - DEES-UFMG (Orientador)
Prof. Dr. Estevam Barbosa de Las Casas - DEES-UFMG
Prof. Dr. Jeferson Wilian Dossa Fernandes - DEES-UFMG
Prof. Dr. Edson Denner Leonel - EESC-USP
Prof. Dr. Francisco Célio de Araújo - UFOP

Após reunião, a Comissão considerou o candidato **APROVADO**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão.

Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 14 de junho de 2024

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;
2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de



Documento assinado eletronicamente por **Jeferson Wilian Dossa Fernandes, Professor do Magistério Superior**, em 14/06/2024, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Estevam Barbosa de Las Casas, Professor do Magistério Superior**, em 14/06/2024, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Professor do Magistério Superior**, em 14/06/2024, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Denner Leonel, Usuário Externo**, em 15/06/2024, às 11:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Celio de Araujo, Usuário Externo**, em 15/06/2024, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 24/06/2024, às 14:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 3244027 e o código CRC **F5913146**.

À Emanuelle, minha amada esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço à minha amada esposa, Emanuelle Brenda Lopes Perpétuo Peixoto, pelo amor, apoio e companheirismo que dela recebi durante todas as etapas do meu doutorado.

Agradeço aos meus pais, Elmar Alves Peixoto e Mariza Inez Nunes Peixoto, pelo incentivo à educação e amor incondicional.

Agradeço aos meus irmãos, Eliza Inez Nunes Peixoto e Anderson Nunes Alves Peixoto, pelo exemplo de estudiosidade e amizade.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Greco, pela exemplar e irretocável orientação. Foi um verdadeiro privilégio ter a oportunidade de trabalhar com alguém tão especial.

Agradeço aos meus familiares das famílias Nunes e Peixoto.

Agradeço aos familiares da minha esposa.

Agradeço aos meus amigos pelo apoio e bons momentos compartilhados. Em especial, agradeço ao Henrique Galvão e ao Pedro Alfradique, grandes amigos que carrego no coração.

Agradeço aos meus colegas de pós-graduação, em especial aos meus amigos Daniel Vasconcellos e Gabriel Rosalem, pelo prazeroso convívio em meio as atividades acadêmicas.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas pelos conhecimentos a mim repassados.

Agradeço aos funcionários do DEES pelo suporte técnico, em especial ao Luciell de Castro pelas grandes ajudas que dele recebi.

Agradeço à FAPEMIG pelo suporte financeiro concedido por meio da bolsa de doutorado.

“Ó meu Deus, tu te dás e te entregas a mim. Eu te amo. E, se ainda é pouco, faze que eu te ame ainda mais. Não posso medir para saber quanto me falta de amor, que seja suficiente para que a minha vida corra para os teus braços e daí não se afaste, até esconder-se no segredo de tua face. Uma só coisa reconheço: é que tudo me corre mal fora de ti, e não só à minha volta, mas em mim mesmo, e que toda a riqueza, que não seja o meu Deus, para mim é indigência.”

Confissões – Santo Agostinho

RESUMO

Este trabalho visa contribuir à área de estudo de grandes deformações, examinando as medidas de deformação de Seth-Hill e seus modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos. Ademais, introduz uma nova família de medidas denominada Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG): simples, objetiva e versátil. A pesquisa consistiu-se em dois ramos. No primeiro ramo (i), investigou-se as distinções na implementação computacional de diferentes medidas de deformação na Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF) para treliças. As expressões matemáticas específicas para cada medida de deformação foram desenvolvidas e aplicadas na análise de quatro estruturas de referência. Examinando as respostas encontradas, discutiram-se as variações resultantes com foco na eficiência computacional. No segundo ramo (ii) fez-se um estudo analítico de sólidos, investigando modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos derivados das medidas de deformação estudadas (SHG e Seth-Hill), usando os modos puros de deformação para examinar o comportamento da família SHG e avaliar a coerência física de todas as respostas obtidas. A aplicabilidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG na descrição mecânica de polímeros, tecidos biológicos moles e biomateriais foi testada para vários materiais com ampla aplicação na engenharia, utilizando dados experimentais obtidos da literatura. A calibração dos parâmetros materiais foi realizada por meio de um método numérico de busca discreta de mínimos quadrados por enumeração. No primeiro ramo, (i) os resultados indicam que o uso de diferentes medidas de deformação impacta o custo computacional em análises estruturais de treliças, tanto ao comparar diferentes modelos constitutivos tipo-Hookeanos como ao comparar o mesmo modelo representado por formulações geradas por diferentes medidas de deformação. No segundo ramo, (ii) os resultados mostram que a família SHG melhora a coerência física das medidas de deformação Seth-Hill e oferece versatilidade com a adição de uma única constante material com claro significado físico. Os modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos propostos são aplicáveis tanto a materiais incompressíveis quanto compressíveis e mostraram-se capazes de representar com grande fidelidade polímeros, tecidos biológicos moles e biomateriais.

Palavras-Chave: medidas de deformação; grandes deformações; modelos hiperelásticos; MEF Posicional.

ABSTRACT

This work aims to contribute to the study of large deformations by examining the Seth-Hill strain measures and their associated Hookean-type hyperelastic models. Additionally, it introduces a new family of strain measures called Generalized Hyperbolic Sine (GHS): simple, objective, and versatile. The research consisted of two branches. In the first branch, (i) the distinctions in the computational implementation of different strain measures in the Positional Formulation of the Finite Element Method (PFFEM) for trusses were investigated. Specific mathematical expressions for each strain measure were developed and applied in the analysis of four benchmark structures. Examining the obtained responses, the resulting variations were discussed with a focus on computational efficiency. In the second branch, (ii) an analytical study of solids was conducted, investigating Hookean-type hyperelastic models derived from the studied strain measures (GHS and Seth-Hill), using pure deformation modes to examine the behavior of the GHS family and assess the physical coherence of all responses obtained. The applicability of the GHS Hookean-type models in the mechanical description of polymers, soft biological tissues, and biomaterials was tested for various materials with broad application in engineering, using experimental data obtained from the literature. The calibration of material parameters was performed through a discrete numerical method of least squares minimization by enumeration. In the first branch, (i) the results indicate that the use of different strain measures impacts the computational cost in structural analyses of trusses, both when comparing different Hookean-type constitutive models and when comparing the same model represented by formulations generated by different strain measures. In the second branch, (ii) the results show that the GHS family improves the physical coherence of the Seth-Hill strain measures and offers versatility with the addition of a single material constant with clear physical meaning. The proposed Hookean-type hyperelastic models are applicable to both incompressible and compressible materials and have proven capable of accurately representing polymers, soft biological tissues, and biomaterials.

Keywords: strain measures; large strain regime; hyperelastic models; positional FEM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Mudança de configuração de uma barra de dois nós no plano.	48
Figura 2.2: Gráfico de Tensão de Cauchy x Estiramento.....	51
Figura 2.3: Gráfico da Tensão de Cauchy x Deformação de Biot (par energético conjugado).	53
Figura 2.4: Pseudo-código para implementação da FPMEF.	63
Figura 3.1: Representação vetorial (3D) nas configurações indeformada e deformada. Fonte: Hackett (2016).	65
Figura 3.2: Ilustração da decomposição polar.	67
Figura 3.3: Mudança de configuração de um sólido.	73
Figura 4.1: Medidas de Deformação clássicas (Família de Seth-Hill).	82
Figura 4.2: Gráficos de Deformação × Estiramento: (a) Seth-Hill family; (b, c, d e e) SHG subfamílias com a variação de n	84
Figura 5.1: Treliza Espacial de Três Barras: a) Vista de cima; b) Vista de frente. Nós A, B e C são rotulados.	96
Figura 5.2: Treliza de von Mises.	97
Figura 5.3: Força Externa (P) x Deslocamento (h).	98
Figura 5.4: Força Interna Axial x Deslocamento Vertical.....	98
Figura 5.5: Da esquerda para a direita: a) Vista de cima; b) Vista de lado.	99
Figura 5.6: Domo Circular Trelizado (com cotas). Fonte: Greco e Ferreira (2009).	99
Figura 5.7: Configurações representativas da trajetória de equilíbrio estudada.	100
Figura 5.8: Trajetórias de equilíbrio do nó central da estrutura.	101
Figura 5.9: Trajetórias de equilíbrio utilizando as medidas da família SHG.	102

Figura 5.10: Trajetórias de equilíbrio utilizando as medidas da família THG.....	102
Figura 5.11: Treliça otimizada de 10 barras.....	103
Figura 5.12: Trajetórias de equilíbrio quadro a quadro.....	105
Figura 5.13: Trajetória de equilíbrio para os nós 3, 4, 5 e 6. Análise com todas as medidas estudadas.....	106
Figura 5.14: Trajetória de equilíbrio para os nós 3, 4, 5 e 6. Análise com as medidas de Biot, Logarítmica, SHG com $n = 2.7$ e Tangente-Hiperbólica (THG com $n = 1.0$).	107
Figura 5.15: Comparação entre a medida Logarítmica e a medida SHG com $n = 2.7$ (Biot como referência).....	108
Figura 5.16: Treliça Espacial de 12-Barras. Vista de cima.	113
Figura 5.17: Treliça Espacial de 12-Barras. Visão 3D.....	113
Figura 5.18: Trajetória de equilíbrio do nó 8, Passo de Incremento x Deslocamento Vertical.	114
Figura 5.19: Tempo gasto para realizar a análise da Treliça Espacial de 12-Barras até os valores de $n_{pi} = 460$ e $n_{pi} = 1400$	115
Figura 5.20: Treliça Espacial de 25-Barras. Visão 3D.....	116
Figura 5.21: Trajetória de equilíbrio do nó 1, Passo de Incremento x Deslocamento Vertical.	118
Figura 5.22: Tempo gasto para realizar a análise da Treliça Espacial de 25-Barras até os valores de $n_{pi} = 250$ e $n_{pi} = 550$	118
Figura 5.23: Domo Circular de 60-Barras. Vista de cima.	120
Figura 5.24: Domo Circular de 60-Barras. Vista frontal.....	120
Figura 5.25: Padrão repetido com numeração por agrupamento.....	120
Figura 5.26: Trajetória de equilíbrio do nó 1, Passo de Incremento x Deslocamento Vertical.	121

Figura 5.27: Tempo gasto para realizar o Domo Circular de 56-Barras até os pontos de comparação.....	122
Figura 5.28: Domo Estelar de 60-Barras. Vista de cima.....	123
Figura 5.29: Domo Estelar de 60-Barras. Vista frontal.....	123
Figura 5.30: Trajetória de equilíbrio do nó central, Força x Deslocamento Vertical.....	124
Figura 5.31: Tempo gasto para realizar o Domo Estelar de 56-Barras até os pontos de comparação.....	125
Figura 6.1: Extensão Axial Simples nas configurações: a) indeformada; b) deformada.	128
Figura 6.2: Carregamento Equi-Biaxial nas configurações: a) indeformada; b) deformada..	133
Figura 6.3: Cisalhamento Simples: a) configuração inicial; b) configuração deformada.	136
Figura 6.4: EAS: gráfico $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ (a) Seth-Hill; (b, c, d, e, f) subfamílias SHG variando o n	144
Figura 6.5: Resumo das limitações da família Seth-Hill para o modo EAS.	145
Figura 6.6: CE-B: gráfico $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ (a) Seth-Hill; (b, c, d, e, f) subfamílias SHG variando o n	147
Figura 6.7: Resumo das limitações da família Seth-Hill para o modo CE-B.....	148
Figura 6.8: CS: gráfico $\sigma_{12C} \times \gamma$ (a) Seth-Hill; (b, c, d, e, f) subfamílias SHG variando o n	149
Figura 6.9: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.48$	156
Figura 6.10: Gráficos capazes de sintetizar as todas as informações da Figura 6.9.....	157
Figura 6.11: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = 0.25$. .	158
Figura 6.12: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = 0.10$. .	158
Figura 6.13: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.10$	159

Figura 6.14: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.25$	159
Figura 6.15: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.50$	159
Figura 6.16: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.75$	160
Figura 6.17: Modo EAS – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.99$	160
Figura 6.18: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.48$.	162
Figura 6.19: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.25$.	163
Figura 6.20: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.10$.	163
Figura 6.21: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.10$	164
Figura 6.22: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.25$	164
Figura 6.23: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.50$	164
Figura 6.24: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.75$	165
Figura 6.25: Modo CE-B – $\sigma_{11C} \times \lambda_1$ e $\sigma_{11C} \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.99$	165
Figura 7.1: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Dwivedi et al. (2020) – Pele Suína.....	173
Figura 7.2: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Quapp e Weiss (1998) – LCM do joelho humano.	175
Figura 7.3: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Johnson et al. (1994) – Tendão Patelar: Jovens Adultos. ...	176

Figura 7.4: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Johnson et al. (1994) – Tendão Patelar: Idosos.....	177
Figura 7.5: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Silver et al. (2002) – Derme Humana: jovem de 23 anos...	178
Figura 7.6: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Silver et al. (2002) – Derme Humana: idosa de 87 anos.....	178
Figura 7.7: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Vorp et al. (2003) – Aorta Torácica Ascendente: Controle e ATAA.....	182
Figura 7.8: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Weisbecker et al. (2012) – Íntima da Aorta Abdominal: 1º e 3º Ciclos.	183
Figura 7.9: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Weisbecker et al. (2012) – Íntima da Aorta Torácica: 1º e 3º Ciclos.	184
Figura 7.10: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Peña et al. (2015) – Aorta Torácica Suína: Camada Inteira.	185
Figura 7.11: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Peña et al. (2015) – Aorta Torácica Suína: Adventícia.	186
Figura 7.12: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Peña et al. (2015) – Aorta Torácica Suína: Íntima.....	186
Figura 7.13: Dados experimentais do fígado suíno, 4 modelos hiperelásticos calibrados por Gao et al. (2010) e representação qualitativa. Fonte: Modificado de Gao et al. (2010).	187
Figura 7.14: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados: Gao et al. (2010) – Fígado Suíno.....	188
Figura 7.15: Calibração Individual EAS: esquerda) Modo EAS calibrado individualmente; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.....	190
Figura 7.16: Calibração Individual CS: esquerda) resposta do modo EAS; direita) Modo CS calibrado individualmente. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.	191

Figura 7.17: Calibração Simultânea Completa EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.	191
Figura 7.18: Resultados experimentais com desvio padrão. Fonte: Budday et al. (2020b). ..	192
Figura 7.19: Calibração Simultânea Manual Subjetiva: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.	193
Figura 7.20: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Córtex.	194
Figura 7.21: Calibração Simultânea Manual Subjetiva: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Córtex.	195
Figura 7.22: Calibração Simultânea EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Coroa Radiada.	196
Figura 7.23: Calibração Simultânea Completa EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Corpo Caloso.	197
Figura 7.24: Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4930.	198
Figura 7.25: Calibração Simultânea Seletiva dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4930.	199
Figura 7.26: Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4950.	200
Figura 7.27: Calibração Simultânea Seletiva EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4950.	201
Figura 7.28: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Ricker e Wriggers (2023) – CR+P.	202
Figura 7.29: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Ricker e Wriggers (2023) – CR+S (preloaded).	203

Figura 7.30: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Ricker e Wriggers (2023) – SBR+P.	203
Figura 7.31: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Yeoh e Fleming (1997) – borracha vulcanizada.	204
Figura 7.32: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Lulei e Miehe (2001) – borracha preenchida com negro de fumo b186.	205
Figura 7.33: Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – Alexander (1968).....	206
Figura 7.34: Calibração Simultânea com seleção de dados experimentais dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – Alexander (1968).....	207
Figura 7.35: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: El-Ratal e Mallick (1996) – Espuma de Assento.....	209
Figura 7.36: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: El-Ratal e Mallick (1996) – Espuma Comercial.....	209
Figura 7.37: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Shao et al. (2022) – Espuma de Silicone Nova.....	210
Figura 7.38: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Shao et al. (2022) – Espuma de Silicone 8 dias.....	210
Figura 7.39: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Wang et al. (2007) – E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido.	212
Figura A-IV.1: esquerda) Curva de tensão logarítmica ("verdadeira") x deformação logarítmica ("verdadeira") do PVC; Direita): Curva de Força x Alongamento. Fonte dos Dados: Alves e Martins (2009).	239
Figura A-IV.2: Correção imposta à previsão elástica para o PVC. Esquerda) Medida de deformação logarítmica; Direita) Medida de deformação da Tangente Hiperbólica.	240
Figura A-V.1: Tabelas com os resultados apresentados e discutidos na Subseção 5.2.	241

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Medidas de deformação pertencentes à família de Seth-Hill e suas tensões conjugadas.	54
Tabela 5.1: Estiramentos obtidos para deformações normais de aproximadamente -6.896%. 96	
Tabela 5.2: Resultados para diferentes medidas de deformação considerando o mesmo Estiramento ($\lambda = 0.9285$).	97
Tabela 5.3: Conjunto de áreas transversais otimizadas. Fonte: Lage (2019).	103
Tabela 5.4: Valores de área de seção transversal. Fonte: Rajeev e Krishnamoorthy (1992). 117	
Tabela 5.5: Incrementos de força aplicados. Fonte: Rajeev e Krishnamoorthy (1992).	117
Tabela 5.6: Áreas dos agrupamentos.	121
Tabela 5.7: Incrementos de forças aplicados.	121
Tabela 6.1: Equações para a relação $P11C \times \lambda^3$. Modo EAS.	155
Tabela 7.1: Intervalos de busca – Pele Suína.	173
Tabela 7.2: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Pele Suína.	173
Tabela 7.3: Intervalos de busca – LCM.	174
Tabela 7.4: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – LCM.	174
Tabela 7.5: Intervalos de busca – Tendão Patelar: Jovens Adultos.	176
Tabela 7.6: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Tendão Patelar: Jovens Adultos.	176
Tabela 7.7: Intervalos de busca – Tendão Patelar: Idosos.	176
Tabela 7.8: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Tendão Patelar: Idosos. ...	176
Tabela 7.9: Intervalos de busca – Derme Humana: jovem de 23 anos.	177

Tabela 7.10: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Derme Humana: jovem de 23 anos.....	177
Tabela 7.11: Intervalos de busca – Derme Humana: idosa de 87 anos.	178
Tabela 7.12: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Derme Humana: idosa de 87 anos.....	178
Tabela 7.13: Intervalos de busca – Aorta Torácica Ascendente: Controle e ATAA.	181
Tabela 7.14: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Ascendente: Controle.	181
Tabela 7.15: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Ascendente: AATA.....	181
Tabela 7.16: Intervalos de busca – Íntima da Aorta Abdominal: 1º e 3º Ciclos.	182
Tabela 7.17: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Abdominal: 1º Ciclo.	183
Tabela 7.18: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Abdominal: 3º Ciclo.	183
Tabela 7.19: Intervalos de busca – Íntima da Aorta Torácica: 1º e 3º Ciclos.	183
Tabela 7.20: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Torácica: 1º Ciclo.	184
Tabela 7.21: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Torácica: 3º Ciclo.	184
Tabela 7.22: Intervalos de busca – Aorta Torácica Suína: Camada Inteira, Adventícia e Íntima.	185
Tabela 7.23: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Suína: Camada Inteira.....	185
Tabela 7.24: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Suína: Adventícia.....	185

Tabela 7.25: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Suína: Íntima.	185
Tabela 7.26: Intervalos de busca – Fígado Suíno.....	188
Tabela 7.27: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Fígado Suíno.	188
Tabela 7.28: Intervalos de busca: EAS Individual, CS Individual e Calibração Simultânea EAS e CS – Gânglios de Base.	189
Tabela 7.29: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Gânglios de Base.....	190
Tabela 7.30: Valores definidos pela Calibração Individual CS – Gânglios de Base.....	190
Tabela 7.31: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Gânglios de Base.	190
Tabela 7.32: Valores definidos pela Calibração Simultânea Manual Subjetiva EAS e CS – Gânglios de Base.	193
Tabela 7.33: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Córtex.	194
Tabela 7.34: Calibração Simultânea Manual Subjetiva EAS e CS – Córtex.	194
Tabela 7.35: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Coroa Radiada.	195
Tabela 7.36: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Corpo Caloso.	196
Tabela 7.37: Intervalos de busca: EAS Individual, CS Individual e Calibração Simultânea EAS e CS – Gânglios de Base.	198
Tabela 7.38: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CE-B – MED-4930.	198
Tabela 7.39: Valores definidos pela Calibração Simultânea Seletiva dos modos EAS e CE-B – MED-4930.	199
Tabela 7.40: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B – MED-4950.	200

Tabela 7.41: Valores definidos Pela da Calibração Simultânea Seletiva EAS e CE-B – MED-4950.	200
Tabela 7.42: Intervalos de busca: Calibração EAS tração – CR+P, CR+S e SBR+P.	202
Tabela 7.43: Valores definidos pela Calibração Individual EAS tração – CR+P, CR+S e SBR+P.	202
Tabela 7.44: Intervalos de busca: Calibração EAS tração & compressão – b186 e borracha vulcanizada.	204
Tabela 7.45: Valores definidos pela Calibração Individual EAS, tração & compressão – b186 e borracha vulcanizada.	204
Tabela 7.46: Intervalos de busca: Calibração Simultânea EAS e CE-B – Borracha Sintética de Neoprene.	205
Tabela 7.47: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B – Borracha Sintética de Neoprene.	205
Tabela 7.48: Valores definidos através da Calibração Simultânea Seletiva dos modos EAS e CE-B – Borracha Sintética de Neoprene.	206
Tabela 7.49: Intervalos de busca – Espuma Comercial e Espuma de Assento.	208
Tabela 7.50: Valores definidos através da Calibração Individual EAS – Espuma de Assento.	208
Tabela 7.51: Valores definidos através da Calibração Individual EAS – Espuma Comercial.	208
Tabela 7.52: Intervalos de busca – Espuma Nova e Espuma de 8 dias.	210
Tabela 7.53: Valores definidos através da Calibração Individual EAS – Espuma Nova.	210
Tabela 7.54: Valores calibrados dos parâmetros materiais – Espuma de 8 dias.	210
Tabela 7.55: Densidade relativa das amostras de espuma EPDM.	211
Tabela 7.56: Intervalos de busca: Calibração EAS compressão – E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido.	211

Tabela 7.57: Valores definidos através da Calibração EAS compressão – E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido.	211
--	-----

LISTAS DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
SHG	Seno-Hiperbólica Generalizada
FPMEF	Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos
1D	Unidimensional
3D	Tridimensional
EAS	Extensão Axial Simples
CE-B	Carregamento Equi-Biaxial
CS	Cisalhamento Simples
MEFC	Método dos Elementos Finitos Convencional
FDED	Função Densidade de Energia de Deformação
PEPTE	Princípio da Energia Potencial Total Estacionária
2D	Bidimensional
THG	Tangente Hiperbólica Generalizada
SH	Seno-Hiperbólica
TH	Tangente-Hiperbólica
<i>npi</i>	Número de passos de incremento
<i>REQMN</i>	Raiz do erro quadrático médio normalizada
CI	A Calibração Individual
CSC	Calibração Simultânea Completa
CSS	Calibração Simultânea Seletiva
CSMS	Calibração Simultânea Manual Subjetiva
CP	Cisalhamento Puro
LCM	Ligamento Colateral Medial
AATA	Aneurisma da Aorta Torácica Ascendente
FE	Elementos finitos
PADeMIS	<i>Peristaltically Actuated Device for Minimal Invasive Surgery</i>
CR+P	Cloropreno + Peróxido
CR+S	Cloropreno + Enxofre (80%), Óxido de zinco e Ácido esteárico
SBR+P	Estireno-butadieno + Peróxido
EPDM	<i>Ethylene-propylene-diene terpolymer</i>
PVC	Cloreto de Polivinila
D-P	Desvio padrão

LISTA DE SÍMBOLOS

$[C]$	Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green
$[F]$	Gradiente de Deformação
$[U]$	Tensor de Alongamento Direito
$[\dot{C}]$	Derivada Temporal do Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green
∂	Símbolo de derivada parcial
ν	Coefficiente de Poisson
∞	Infinito
λ	Estiramento
Π	Energia Potencial Total
Ψ	Energia de Deformação
W	Trabalho realizado por forças externas
K_c	Energia Cinética
K_d	Perda de Energia
k	Graus de liberdades generalizados
$\{x_k\}$	Vetor de coordenadas atuais (graus de liberdade generalizados – k)
$g_k(\{x_k\})$	Vetor de resíduos (graus de liberdade generalizados – k)
$\{x_k^0\}$	Primeiro vetor tentativa
$\{X_k\}$	Vetor de posições iniciais
$\{\Delta x_k\}$	Vetor de correção
$\{x_k^1\}$	Segundo vetor tentativa
q	Símbolo de numeração das barras
$[X_i^\alpha]^{(q)}$	Matriz de coordenadas iniciais da barra q
$[x_i^\alpha]^{(q)}$	Matriz de coordenadas atuais da barra q
α	Representação dos nós das barras
i	Representação dos graus de liberdade dos nós
$[F_i^\alpha]^{(q)}$	Matriz de forças externas
Ψ	Energia de deformação de um sólido específico
ψ	Função Densidade de Energia de Deformação
V_0	Volume Inicial
ε	Deformação
$A_0^{(q)}$	Área transversal e o comprimento inicial da q -ésima barra
$l_0^{(q)}$	Comprimento inicial da q -ésima barra
l_0	Comprimento inicial
l	Comprimento atual

σ_C	Tensão de Cauchy
A	Área transversal atual
T	Força total em uma determinada seção
$\Delta\sigma_C$	Incremento da tensão de Cauchy
ε_C	Medida de deformação que faz par conjugado com a Tensão de Cauchy
ε_B	Deformação de Biot
ε_{sh}	Medida de deformação de Seth-Hill (família)
σ_{sh}	Tensão conjugada da medida de deformação de Seth-Hill (família)
ε_G	Deformação de Green
σ_G	Tensão conjugada da def. de Green (Piola-Kirchhoff de 2ª espécie)
ε_L	Deformação Logarítmica (Hencky)
σ_L	Tensão conjugada da deformação Logarítmica
ε_H	Deformação Hiperbólica
σ_H	Tensão conjugada da deformação Hiperbólica
ε_A	Deformação de Almansi
σ_A	Tensão conjugada da deformação de Almansi
σ_N	Tensão Nominal
c	Constante de integração
$\ln(\dots)$	Logaritmo natural (logaritmo neperiano)
$[f_i^\alpha]^{(q)}$	Matriz de forças internas
$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)}$	Matriz Hessiana
E_t	Módulo de elasticidade tangente
δ_{ij}	Delta de Kronecker
d	Grau de liberdade global
$\{V\}$	Vetor que armazena o caráter do vínculo de um grau de liberdade
$\{\Delta P\}$	Vetor de incremento da posição
$\{\Delta F\}$	Vetor de incremento da força externa
ε_{SH}	Deformação Seno-Hiperbólica
σ_{SH}	Tensão conjugada da deformação Seno-Hiperbólica
$[\boldsymbol{\sigma}]$	Tensor de Tensão (genérico)
$[\boldsymbol{\varepsilon}]$	Tensor de Deformação (genérico)
$\{x\}$	Vetor de posição na configuração deformada
$\{X\}$	Vetor de posição na configuração de referência
$\{v\}$	Vetor de velocidade
$[\dot{\boldsymbol{F}}]$	Derivada temporal do tensor Gradiente de Deformação
$[\boldsymbol{L}]$	Gradiente de Velocidade
$[\boldsymbol{D}]$	Tensor Taxa de Deformação

$[W]$	Tensor Taxa de Rotação
$[R]$	Tensor de Rotação
$[\cdot]^T$	Símbolo de transposição de Matriz/Tensor
$[I]$	Matriz/Tensor Identidade
$[0]$	Matriz/Tensor Nulo
λ_i	Estiramentos Principais (autovalores) de $[U]$
$\{N_i\}$	Direções Principais (autovetores) de $[U]$
\otimes	Símbolo de produto tensorial
Σ	Símbolo de somatório
$[\epsilon]$	Tensor de Deformação Infinitesimal
$[\epsilon^G]$	Tensor de Deformação de Green
$[\epsilon^B]$	Tensor de Deformação de Biot
$[\epsilon^L]$	Tensor de Deformação Logarítmica
$[\epsilon^H]$	Tensor de Deformação Hiperbólica
$[\epsilon^A]$	Tensor de Deformação de Almansi
$[\epsilon^{sh}]$	Tensor de Deformação de Seth-Hill (família)
m	Constante inteira, discrimina medida de deformação da família Seth-Hill
Ω_0	Configuração de referência
$d\Gamma_0$	Elemento de superfície na configuração de referência
$\{\eta_0\}$	Normal externa a um elemento na configuração de referência
$\{t_0\}$	Força de superfície (<i>traction</i>) agindo na configuração de referência
$d\{\zeta_0\}$	Vetor de força na configuração de referência
Ω	Configuração deformada
$d\Gamma$	Elemento de superfície na configuração deformada
$\{\eta\}$	Normal externa a um elemento na configuração deformada
$\{t\}$	Força de superfície (<i>traction</i>) agindo na configuração deformada
$d\{\zeta\}$	Vetor de força na configuração deformada
$[\sigma^C]$	Tensor de Tensão de Cauchy
$[P]$	Tensão Nominal
$[\sigma^{2PK}], [\sigma^G]$	Tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie
$[\dot{\epsilon}]$	Derivada temporal de um tensor de deformação (genérico)
$\dot{\psi}$	Taxa de variação da energia interna por unidade volume de referência
$[\dot{\epsilon}^G]$	Taxa de Deformação de Green
J	Jacobiano, determinante do tensor Gradiente de Deformação
:	Operador que representa o “ <i>double-dot product</i> ”
I_i	Invariantes
$[\bar{F}]$	Parcela volumétrica do Gradiente de Deformação

$[\bar{\mathbf{F}}]$	Parcela isocórica do Gradiente de Deformação
$\tilde{\psi}$	Parcela volumétrica da FDED
$\bar{\psi}$	Parcela isocórica da FDED
$[\bar{\mathbf{C}}]$	Porção isocórica do tensor $[\mathbf{C}]$
\bar{I}_i	Invariantes da porção isocórica do tensor $[\mathbf{C}]$
L_1, L_2	Primeiro e segundo Parâmetros de Lamé
R^*	Conjunto dos números reais não nulos
\in	Símbolo matemático que indica pertencimento
n	Constante real, controle da taxa de aumento de rigidez
ε_{SHG}	Medida de deformação SHG uniaxial (família)
$[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}]$	Versão tensorial da medida de deformação SHG uniaxial (família)
$[\mathbf{d}]$	Tensor de segunda ordem diagonal (genérico)
$[\mathbf{A}]$	Matriz/tensor diagonalizável (genérica)
$[\boldsymbol{\Lambda}^A]$	Tensor cuja diagonal é formada pelos autovalores de $[\mathbf{A}]$
$[\mathbf{B}]$	Tensor cujas colunas são os autovetores de $[\mathbf{A}]$
$[\mathbf{Q}]$	Tensor de Transformação, formado pelos autovetores de $[\mathbf{U}]$
λ_i^{sh}	Deformações principais da família Seth-Hill
$\bar{\sigma}_{ij}$	Componente da projeção de um tensor de tensão nas direções principais
$[\boldsymbol{\sigma}^{SHG}]$	Tensor de Tensão Seno-Hiperbólica Generalizada (conjugado da $[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}]$)
$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{SHG}]$	Tensor Taxa de Deformação SHG
$ad_{[\mathbf{A}]}$	Transformação da Álgebra de Lie
$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$	Representação do comutador das matrizes
L	Comprimento
H	Altura
E	Modulo de Young, Módulo de Elasticidade
P	Força Externa
N	Força Axial Interna
h	Deslocamento Vertical
npi	Número de Passo de Incremento
ΔP	Incrementos de forças
z	Variável auxiliar
P_{11}	Componente axial do tensor de Tensão Nominal
σ_{11}^C	Componente axial do tensor de Tensão de Cauchy
γ	Parâmetro de Cisalhamento
β	Medida de deformação de cisalhamento média
λ_i^C	Autovalores de $[\mathbf{C}]$
w	Variável auxiliar

$\{\overset{E}{\sigma}_{11}^C\}$	Dados experimentais: componente axial da Tensão de Cauchy
$\{\overset{E}{\lambda}_1\}$	Dados experimentais: estiramento
$\{\overset{A}{\sigma}_{11}^C\}$	Valores do modelo analítico: componente axial da Tensão de Cauchy
$REQMN$	Raiz do erro quadrático médio normalizada
P	Potência
$\{b\}$	Vetor de forças de corpo
$\{\nabla\}$	Operador de divergência
$\{a\}$	Aceleração
λ^e	Porção elástica do estiramento
λ^p	Porção plástica do estiramento
ε_L^e	Porção elástica da deformação Logarítmica
ε_L^p	Porção plástica da deformação Logarítmica

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	32
1.1 Considerações iniciais	32
1.2 Objetivos.....	35
1.2.1 Objetivo geral	35
1.1.2 Objetivos específicos.....	35
1.3 Justificativa.....	36
1.3.1 Diferentes medidas de deformação geram diferentes formulações	36
1.3.2 Apresentação de uma nova família de medidas de deformação e estudo analítico de sólidos.....	38
2. FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	44
2.1 Apresentação	44
2.2 Teoria.....	45
2.3 Formulação para estruturas treliçadas	47
2.3.1 Green	59
2.3.2 Logarítmica (Hencky).....	60
2.3.3 Hiperbólica (Swainger).....	60
2.3.4 Almansi.....	61
2.4 Implementação computacional	61
3. HIPERELASTICIDADE.....	64
3.1 Princípios da Mecânica do Contínuo.....	64
3.1.1 Definição de Quantidades Físicas Fundamentais	64

3.1.2	Decomposição Polar	67
3.1.3	Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green	68
3.2	Tensores de Medidas de Deformação.....	68
3.2.1	Tensor de Deformação Infinitesimal	70
3.2.1	Medidas clássicas de deformação (Seth-Hill) – Descrição Lagrangiana	71
3.3	Tensores de Tensão	73
3.4	Pares de Tensão-Deformação Energeticamente Conjugados	76
3.5	Modelos Hiperelásticos	79
4.	NOVAS MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO.....	82
4.1	Família Seno-Hiperbólica Generalizada.....	82
4.1.1	Cálculo dos tensores de deformação SHG	85
4.1.2	Cálculo dos tensores de tensão conjugados da deformação SHG	87
4.1.3	Tensor Taxa de Deformação SHG.....	88
4.2	Família Tangente-Hiperbólica Generalizada.....	93
5.	ESTUDOS NUMÉRICOS UNIDIMENSIONAIS COM A FPMEF: APLICAÇÃO EM TRELIÇAS	94
5.1	Estudo uniaxial: Diferenças na resposta de acordo com a medida de deformação escolhida	95
5.1.1	Treliça espacial de três barras.....	96
5.1.2	Treliça de von Mises.....	97
5.1.3	Domo circular treliçado	99
5.1.4	Treliça otimizada de 10 barras.....	102
5.1.5	Conclusões do estudo de diferenças de respostas para diferentes modelos tipo-Hookeanos uniaxiais.....	108

5.2 Estudo uniaxial: Diferença de eficiência computacional de acordo com a medida de deformação escolhida	109
5.2.1 Treliza Espacial de 12-Barras	113
5.2.2 Treliza Espacial de 25-Barras	116
5.2.3 Domo Circular de 56-Barras.....	119
5.2.4 Domo Estelar de 60-Barras.....	123
5.2.5 Conclusões do estudo de custo computacional na análise de problemas unidimensionais	126
6. ESTUDOS ANALÍTICOS DE MODOS PUROS DE DEFORMAÇÃO: SÓLIDOS ...	128
6.1 Formulação analítica dos modos puros de deformação.....	128
6.2 Materiais quase-incompressíveis	142
6.3 Variação do Coeficiente de Poisson: Seth-Hill e SHG–Biot.....	151
7. ESTUDO DA DESCRIÇÃO MECÂNICA DE MATERIAIS HIPERELÁSTICOS REAIS UTILIZANDO A FAMÍLIA SHG: SÓLIDOS	168
7.1 Tecidos biológicos moles e biomateriais.....	171
7.1.1 Diversos tecidos [Dwivedi et al. (2022)].....	172
7.1.2 Artéria.....	179
7.1.3 Fígado Suíno [Gao et al. (2010)]	186
7.1.4 Cérebro Humano [Budday et al. (2017)]	188
7.1.5 Biomaterial de Silicone [Meier et al. (2003)].....	197
7.2 Elastômeros	201
7.2.1 Compostos de borracha sob tração [Ricker e Wriggers (2023)]	201
7.2.2 Borrachas sob tração & compressão [Lulei e Miehe (2001); Yeoh e Fleming (1997)]	203

7.2.3 Borracha Sintética – Neoprene	205
7.3 Espumas.....	207
7.3.1 Espuma Comercial e Espuma de Assento [El-Ratal e Mallick (1996)]	208
7.3.2 Espuma de Silicone [Shao et al. (2022)]	209
7.3.3 Espuma de EPDM com diferentes densidades [Wang et al. (2007)].....	211
7.4 Discussões sobre a aplicabilidade das medidas SHG.....	212
8. CONCLUSÕES	214
8.1 Sugestões para trabalhos futuros	216
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	218
APÊNDICE I: DEDUÇÃO DA POTÊNCIA GERADA PELA DEFORMAÇÃO DE UM SÓLIDO	233
APÊNDICE II: RELAÇÃO ENTRE O TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO E O TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO DE GREEN	237
APÊNDICE III: DISCUSSÃO SOBRE A OBJETIVIDADE DAS MEDIDAS SHG–SETH-HILL	238
APÊNDICE IV: FAMÍLIA TANGENTE-HIPERBÓLICA GENERALIZADA	239
APÊNDICE V: RESULTADOS DO ESTUDO DE CUSTO COMPUTACIONAL DE ANÁLISE DE TRELIÇAS.....	241

1. INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

A criação e o estudo de diferentes medidas de deformação são antigos e existem desde o século XIX. No Apêndice A do trabalho de Cournier e Rakotomanana (1991) há uma resumida, porém completa, história das medidas de deformação mais relevantes até a data de sua publicação. Korobeynikov (2019) também faz uma revisão das medidas de deformação presentes na literatura, de maneira que expande a revisão feita por Cournier e Rakotomanana (1991) com estudos mais recentes. Por fim, Peixoto, Greco e Vasconcelos (2024) completam a revisão sobre medidas de deformação com os principais trabalhos dos últimos cinco anos. Ao longo da presente tese, o conteúdo de revisão dos três trabalhos supracitados será apresentado conforme se faça apropriado.

Existem algumas justificativas para a existência de várias medidas de deformação. A primeira motivação advém da possibilidade de gerar de forma simples modelos hiperelásticos nos quais a medida de deformação escolhida e sua tensão conjugada são inseridas no contexto da lei de Hooke. Trata-se dos chamados modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos, que por meio de uma relação linear entre pares conjugados de tensão-deformação leva, de maneira confiável, à criação de modelos de materiais hiperelásticos (KOROBAYNIKOV, 2019). A generalização direta da clássica lei de Hooke para deformações finitas, caracterizada meramente pelas duas constantes elásticas de Lamé avaliadas na deformação infinitesimal, é atraente e desejável para fins de cálculos e aplicações práticas por simplicidade (XIAO; CHEN, 2002).

Os modelos constitutivos tipo-Hookeanos herdam as suas características das medidas de deformação que lhes dão origem: nesse contexto, considerando um regime de grandes deformações, cada medida de deformação representa um comportamento material/mecânico. Além da proposição de novas medidas de deformação para melhor representar determinado material (ou classe de materiais), existe também a preocupação com a coerência física da resposta do modelo hiperelástico tipo-Hookeano em regime de grandes deformações. Alguns estudos da literatura se propõem a investigar a adequação física das medidas de deformação mais comumente utilizadas, definindo os limites de coerência física de suas respostas (BATRA,

1998, 2001; CHISKIS; PARNES, 2001; FARAHANI; BAHAI, 2004; XIAO; CHEN, 2002), enquanto outros propõem novas medidas de deformação que são capazes de atender pré-requisitos que garantem a coerência física para maiores intervalos de deformação (BEEEX, 2019; CURNIER; RAKOTOMANANA, 1991; CURNIER; ZYSSET, 2006; DARIJANI; NAGHDABADI; KARGARNOVIN, 2010; KOROBAYNIKOV, 2019).

Há também a motivação referente à conveniência matemática que o uso de uma determinada medida de deformação pode proporcionar, ou seja, a consideração do quão complexo se torna o desenvolvimento matemático da formulação gerada. Esse é um fator muito considerado na escolha da medida a ser utilizada, embora essa questão normalmente não seja explicitamente nomeada. Um exemplo é o habitual uso da medida de deformação de Green no desenvolvimento da formulação geometricamente não linear do MEF Convencional (deslocamentos nodais) para treliças (KIM, 2012; MADUTUJUH, 1991; REDDY, 2005; WRIGGERS, 2010; YANG; KUO, 1994). Outro exemplo é a utilização da medida Logarítmica em modelos elastoplásticos no regime de grandes deformações (DRIEMEIER; BARONCINI PROENÇA; ALVES, 2005; ETEROVIC; BATHE, 1990; FELIPE et al., 2019a; SIMO, 1992), porque esta medida permite que uma decomposição multiplicativa do Gradiente de Deformação se transforme em uma decomposição aditiva da deformação total, definindo-se partes elásticas e plásticas independentes para a deformação, o que facilita grandemente a manipulação algébrica.

Ademais, existem os aspectos computacionais da utilização de diferentes medidas de deformação. Vale destacar a busca por tensores de medidas de deformação e modelos constitutivos hiperelásticos baseados no Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green $[C]$, a fim de evitar o custo computacional da decomposição polar do Gradiente de Deformação $[F]$ necessário para determinar o Tensor de Alongamento Direito $[U]$, como mostra o trabalho de Curnier e Zysset (2006). Tensores de medidas de deformação definidas por exponenciais inteiras do tensor $[C]$ também são preferíveis pois suas derivadas temporais, $[\dot{C}]$, assim como suas primeira e segunda derivadas em relação ao Gradiente de Deformação, $\partial[\epsilon]/\partial[F]$ e $\partial^2[\epsilon]/\partial[F]^2$, são mais fáceis de calcular do que as mesmas quantidades para medidas de deformação definidas por exponenciais inteiras ímpares do tensor $[U]$. Isso geralmente acarreta formulações mais simples e conseqüente menor custo computacional na implementação numérica.

O presente trabalho se insere no contexto de investigações de medidas de deformações com dois propósitos: (i) examinar as diferenças advindas do uso de diferentes medidas de deformação na análise de problemas envolvendo apenas deformações unidimensionais (treliças) pela Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos; e (ii) e analisar a adequação do uso de diferentes modelos tipo-Hookeanos hiperelásticos, ou seja, de diferentes medidas de deformação, na representação de materiais hiperelásticos reais. Uma inovação de ambos os propósitos é a presença de uma nova família de medidas de deformação chamada de Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG). Trata-se de uma família de medidas de deformação simples e objetiva, baseada em uma função seno-hiperbólica normalizada, que com o acréscimo de apenas um parâmetro material, que possui claro significado físico, fornece grande versatilidade. A aplicabilidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG é testada para polímeros, tecidos biológicos moles e biomateriais por meio da calibração dos parâmetros materiais para o ajuste de curva com dados experimentais obtidos da literatura.

Além da família SHG, são estudadas as medidas de Almansi (Karni), Hiperbólica (Swanger), Logarítmica (Hencky), Biot e Green (Green-Lagrange), que são geralmente chamadas de medidas de deformação clássicas. Doyle e Ericksen (1956), Seth (1961) e mais tarde Hill (1968) criaram a percepção de que as medidas de deformação clássicas poderiam ser consideradas membros de uma única família. A nomenclatura dessa família varia na literatura, no presente trabalho é usado o nome família Seth-Hill de medidas de deformação ou simplesmente medidas clássicas.

Na presente seção (Seção 1 – “INTRODUÇÃO”), encontram-se, além das considerações iniciais sobre os temas a serem estudados, os objetivos que se almejam com a pesquisa e as justificativas para a escolha dos temas a serem desenvolvidos. Na Seção 2 – “FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS”, são apresentados os conceitos base da formulação de MEF que será utilizada neste trabalho, assim como as expressões que são aplicadas no caso específico de treliças espaciais e o algoritmo de implementação. Em 3 – “HIPERELASTICIDADE”, é feita uma revisão bibliográfica sobre Hiperelasticidade e Mecânica do Contínuo, apresentado conceitos e definições essenciais para o entendimento do restante do trabalho. Na Seção 4 – “NOVAS MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO”, é revelada uma nova família de medidas de deformação, a família Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG), desenvolvida de maneira inédita ao longo do trabalho de doutorado que resultou na presente tese, sendo definida tanto para o caso unidimensional como para o caso tridimensional. Na

Seção 5 – “ESTUDOS NUMÉRICOS UNIDIMENSIONAIS COM A FPMEF: APLICAÇÃO EM TRELIÇAS”, são mostrados resultados obtidos por meio de análises estruturais de treliças feitas utilizando a FPMEF e, a partir dos resultados, faz-se uma discussão sobre as diferenças advindas do uso de diferentes medidas de deformação, focando principalmente no quesito custo computacional. Na Seção 6 – “ESTUDOS ANALÍTICOS DE MODOS PUROS DE DEFORMAÇÃO: SÓLIDOS”, são feitos estudos analíticos que visam investigar o comportamento dos modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos gerados pelas medidas SHG, aferindo a coerência física das respostas por eles obtidas e comparando-as com as respostas dos modelos tipo-Hookeanos das medidas Seth-Hill. A Seção 7 – “ESTUDO DA DESCRIÇÃO MECÂNICA DE MATERIAIS HIPERELÁSTICOS REAIS UTILIZANDO A FAMÍLIA SHG: SÓLIDOS” mostra a aplicabilidade dos modelos tipo-Hookeanos para a descrição mecânica de polímeros (elastômeros e espumas), biomateriais e tecidos biológicos moles. Por fim, na Seção 8 – “CONCLUSÕES”, são tiradas as principais conclusões do trabalho, revisando os feitos alcançados mais notáveis e discutindo as contribuições mais relevantes da tese, além de sugerir possíveis continuações da pesquisa.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Contribuir para o estudo de materiais e estruturas submetidos a grandes deformações, com investigações a respeito das diferentes medidas de deformação existentes na literatura e a apresentação de uma nova família de medidas de deformação. Foco é dado para eficiência computacional, adequação física e aplicabilidade.

1.1.2 Objetivos específicos

- Fazer uma revisão bibliográfica sobre conceitos fundamentais da Mecânica do Contínuo, modelos hiperelásticos e Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF).
- Revisar as definições de medidas de deformação e tensão existentes na literatura.

- Apresentação de uma nova família de medidas de deformação: família Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG). Definição matemática para os casos 1D e 3D.
- Desenvolvimento algébrico de expressões matemáticas específicas de cada medida de deformação para a FPMEF aplicada a treliças.
- Implementação das fórmulas na FPMEF de treliças e estudo comparativo dos modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos criados a partir das medidas de deformação de Seth-Hill e SHG. Análise das diferenças nas respostas com foco na eficiência computacional.
- Realização de estudo analítico de sólidos utilizando os seguintes modos puros de deformação: Extensão Axial Simples (EAS), Carregamento Equi-Biaxial (CE-B) e Cisalhamento Simples (CS). Avaliação das respostas geradas com os diferentes modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos estudados, Seth-Hill e SHG, com relação à coerência física.
- Aplicação dos modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos originados a partir da família SHG na descrição mecânica de materiais reais: polímeros (elastômeros e espumas), biomateriais e tecidos biológicos moles.

1.3 Justificativa

1.3.1 Diferentes medidas de deformação geram diferentes formulações

Métodos computacionais são técnicas que utilizam a alta capacidade de realização de cálculos dos computadores para solucionar de forma numérica modelos matemáticos que representam fenômenos físicos (PLEVRIS; TSIATAS, 2018), sendo o seu uso já o procedimento padrão na engenharia. No campo da Mecânica das Estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método computacional mais popular para análise estrutural. O MEF é uma ferramenta poderosa para encontrar soluções aproximadas para sistemas estruturais que envolvem geometrias, carregamentos e propriedades de materiais complexos, os quais, se uma solução analítica fosse buscada, seriam impossíveis de resolver (LOGAN, 2022).

No entanto, as análises feitas pelo MEF exigem muitos recursos computacionais e, à medida que respostas mais precisas são necessárias, exigem-se mais recursos, de modo que os engenheiros sempre precisam equilibrar entre precisão e tempo de solução razoável (LOBUR; FARMAGA; SHMIGELSKYI, 2012). Levando isso em consideração, além da capacidade do método de representar fielmente um problema real e fornecer uma solução, é necessário investigar sua eficiência computacional.

Como já explicado na seção “1.1 Considerações iniciais”, para grandes deformações, a escolha de uma medida de deformação deve considerar, além da adequação física, a complexidade matemática e a eficiência computacional da formulação originada para todo o processo de implementação numérica.

Ao se desenvolver a formulação geometricamente não linear de treliças (o mesmo ocorre para outros elementos estruturais, mas no presente trabalho o foco será em treliças), a escolha de qual par conjugado de tensão-deformação utilizar influencia diretamente nas expressões matemáticas finais obtidas para as principais variáveis de interesse: Vetor de Forças Internas e Matriz de Rigidez Tangente (ou matriz Hessiana). Isso ocorre tanto no Método dos Elementos Finitos Convencional (MEFC), baseado em deslocamentos nodais, quanto para a FPMEF, baseada em posições nodais. O desenvolvimento algébrico necessário para obter as expressões matemáticas finais, por si só, também varia e torna-se mais ou menos complexo dependendo do par conjugado escolhido.

No MEFC para treliças, existe uma preferência pela utilização da medida de deformação de Green e da tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, que formam um par energeticamente conjugado, para realizar o desenvolvimento algébrico que gera as formulações finais (CRISFIELD, 1996; WRIGGERS, 2010; YANG; KUO, 1994). Esse par quando utilizado no contexto da Lei de Hooke, ou seja, quando há uma relação linear entre os dois, representa o modelo tipo-Hookeano chamado de Saint-Venant-Kirchhoff. Em Driemeier et al. (2005) é possível encontrar também a expressão matemática para a Matriz de Rigidez Tangente considerando a utilização da medida de deformação Logarítmica e sua tensão conjugada.

A princípio, a mesma formulação, definida a partir da escolha de um determinado par conjugado de tensão-deformação para a realização do desenvolvimento algébrico, pode ser utilizada para representar qualquer modelo constitutivo, inclusive outros modelos hiperelásticos tipo-

Hookeanos gerados utilizando outro par conjugado de tensão-deformação. Coda (2018), por exemplo, para fins didáticos, apresenta o desenvolvimento algébrico e as expressões matemáticas finais da Força Interna e da Matriz Hessiana para a FPMEF de treliças usando a medida de deformação de Green e sua tensão conjugada, a tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. No mesmo trabalho, utilizando estas expressões, são implementados outros modelos tipo-Hookeanos além do próprio modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, a saber: o modelo que representa a Lei de Hooke, que é a relação linear entre a medida de deformação de Biot e Tensão Nominal, e o modelo que representa uma relação linear entre a medida de deformação de Almansi e sua tensão conjugada.

Utilizando a mesma notação de Coda (2018), a presente tese apresentará as expressões matemáticas para a Força Interna e a Matriz Hessiana originadas de todas as medidas de deformação (e suas respectivas tensões conjugadas) aqui estudadas: família Seth-Hill e SHG. A partir desses resultados, observa-se que existem claramente questões matemáticas que favorecem a formulação gerada a partir de uma medida de deformação em detrimento de outras, algumas formulações são mais simples que outras, ou até possuem manipulação algébrica mais fácil. E, a partir do que já foi exposto, o presente trabalho levanta a discussão sobre as seguintes questões: considerando que a análise geometricamente não linear de elementos de treliça requer um desenvolvimento algébrico singular para cada medida de deformação, tanto no MEFC quanto na FPMEF: qual a influência deste fato no custo computacional das análises estruturais feitas a partir da implementação dessas diferentes formulações? Um mesmo modelo constitutivo, quando representado por formulações provenientes de diferentes medidas de deformação (e tensões conjugadas), gera o mesmo custo computacional? O presente trabalho investiga essas questões por meio de experimentos computacionais que utilizam estruturas exemplo de treliças (*benchmarks*) e a FPMEF, comparando o tempo necessário para se atingir uma solução e a própria capacidade de se achar uma solução quando se implementa as diferentes formulações geradas pelas medidas de deformação estudadas.

1.3.2 Apresentação de uma nova família de medidas de deformação e estudo analítico de sólidos

A justificativa para a apresentação de uma nova família de medidas de deformação e o estudo das medidas clássicas começa pela consideração de que não existe um modelo hiperelástico

universal adequado para todos os tipos de materiais. Considerando a vasta quantidade de materiais utilizados na engenharia, é compreensível o grande número de trabalhos dedicados à resolução deste problema. Salienta-se também que, ainda que se trabalhe com um mesmo material, diferentes modelos hiperelásticos podem fornecer um melhor ajuste com os dados experimentais dependendo da forma do componente estrutural analisado, dos modos de deformação envolvidos, das condições de contorno e das cargas aplicadas.

Além disso, deve-se observar que o ajuste de dados usados em análises de elementos finitos de testes experimentais não é uma tarefa fácil e várias dificuldades podem surgir durante o procedimento, como pode ser visto em Cao et al. (2017), Mansouri, Darijani e Baghani (2017) e Lalo (2020). Para um teste uniaxial simples, é relativamente fácil ajustar curvas, mas o mesmo não é verdade quando se almeja calibrar parâmetros materiais de maneira a ajustar curvas para vários modos puros de deformação de maneira simultânea.

Destaca-se o grande e crescente interesse na capacidade de modelar de maneira precisa polímeros, tecidos biológicos moles e biomateriais, materiais que são submetidos a grandes deformações e que receberão o foco do presente trabalho. Tal interesse advém principalmente do propósito de se conceber simulações computacionais realistas e é comprovado pelo grande número de modelos hiperelásticos já presentes na literatura do tema. Para tecidos biológicos moles e biomateriais pode-se consultar, por exemplo, as revisões feitas por Chagnon et al. (2015a) e Khaniki et al. (2023), enquanto que as referências He et al. (2022) e Ricker e Wriggers (2023) são bons exemplos de amplas revisões feitas sobre modelos hiperelásticos criados para representar polímeros (mais especificamente elastômeros).

Recentemente, vários trabalhos se dedicaram a melhorar a modelagem hiperelástica. A abordagem mais comum é a criação de uma Função Densidade de Energia de Deformação (FDED) em que a energia de deformação é função de invariantes ou estiramentos principais de algum tensor com propriedade de medir deformações de maneira objetiva. Dessa abordagem pode-se citar alguns relevantes trabalhos: Stumpf & Marczak (2021) apresentaram uma nova FDED que satisfaz tanto as desigualdades de Baker-Ericksen quanto a definição positiva do operador tangente. Melly et al. (2022) propuseram um modelo constitutivo fenomenológico para materiais hiperelásticos que assume a forma logarítmica para o segundo termo invariante do estiramento, baseado em um modelo polinomial utilizado na teoria da hiperelasticidade. Nesse trabalho de Melly et al. (2022), os autores afirmam que a suposição de

incompressibilidade leva a equações de modelos simplificadas sem afetar a eficiência dos modelos hiperelásticos. Kossa et al. (2023) estudaram o comportamento do modelo hiperelástico neo-Hookeano, considerando compressibilidade e isotropia e para representar a compressibilidade os autores utilizaram o procedimento padrão de decomposição aditiva da FDED em partes deviatória e volumétrica, porém, na compressão foram observadas soluções não únicas e respostas numéricas de *snap-back* foram obtidas para alguns valores de Coeficiente de Poisson. Kang et al. (2023) desenvolveram uma nova forma de potencial elástico multiaxial com dois invariantes da medida de deformação Logarítmica (Hencky), como uma tentativa de contornar as complexidades de acoplamento envolvidas na identificação de parâmetros materiais. Os autores usaram parâmetros independentes desacoplados para que conjuntos de dados de vários modos puros possam ser combinados separadamente com funções independentes de variável única.

Ainda dentro da abordagem baseada na criação de FDEDs dependentes de invariantes/alongamentos principais, vale ressaltar que as redes neurais têm desempenhado um papel de destaque na modelagem constitutiva. Park et al. (2023) usaram esses conceitos para prever curvas tensão-deformação, por meio de uma otimização *dust cover* obtiveram uma tensão máxima equivalente de von Mises reduzida em até 18%. Incorporando muitos termos do tipo polinomial, exponencial e logarítmico, Peirclinck et al. (2024) usaram redes neurais para gerar 4.096 modelos constitutivos e a sub-rotina universal criada pelos autores foi aplicada em simulações realistas do cérebro humano para diferentes mecanismos de trauma craniano usando elementos finitos. Firouzi e Amabili (2024) desenvolveram fórmulas para o comportamento fenomenológico do crescimento dos tecidos biológicos, sendo abordados neste trabalho modelos neo-Hookeanos incompressíveis e compressíveis. St. Pierre et al. (2023) utiliza redes neurais para descobrir de maneira automatizada subclasses do modelo hiperelástico de Ogden, com variável número de parâmetros materiais, que consigam representar de maneira precisa o comportamento mecânico do cérebro.

Além do trabalho supracitado de St. Pierre et al. (2023), existem também varios outros que abordam a descrição do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles e biomateriais através de novos modelos hiperelásticos, dos quais vale a menção de alguns: Saucedo-Mora et al. (2021), por exemplo, apresenta um novo modelo hiperelástico que modifica o modelo tipo-Hookeano da medida Logarítmica para representar o comportamento mecânico do cérebro. Dwivedi et al. (2022) publicou um modelo hiperelástico capaz de descrever o comportamento

mecânico de diversos tecidos biológicos moles para a Extensão Axial Simples (EAS) e investiga a ligação entre os parâmetros materiais do modelo e parâmetros histológicos dos tecidos biológicos. Budday et al. (2020a) examina a fundo as propriedades do tecido cerebral para, a partir de modificações no modelo de Ogden, gerar um modelo hiperelástico baseado nas características micromecânicas do cérebro.

Dentro desse contexto de busca de modelos constitutivos, o uso de medidas de deformação alternativas, bem como a criação de novas famílias de medidas de deformação, pode auxiliar no processo de modelagem hiperelástica. Isso porque, como já explicado, uma forma simples de gerar modelos hiperelásticos é exatamente a utilização de modelos tipo-Hookeanos, que constitui uma abordagem alternativa à criação de FDEDs expressas por invariantes/alongamentos principais. Os modelos constitutivos tipo-Hookeanos possuem comportamento mecânico intrinsecamente ligados as características das medidas de deformação que lhes dão origem. Sendo importante ressaltar também que mesmo em modelos mais elaborados, que utilizam invariantes e constantes materiais na construção de FDEDs, os tensores aos quais pertencem os invariantes/estiramentos e a escolha de qual medida de deformação/tensão a ser utilizada são relevantes.

Um aspecto considerável é que modelos tipo-Hookeanos representam de maneira simples materiais compressíveis. De fato, a variação do Coeficiente de Poisson, ν , permite representar materiais incompressíveis ($\nu \approx 0.5$), compressíveis ($0 < \nu < 0.5$) e auxéticos ($-1 < \nu < 0$). A representação de materiais compressíveis não é facilmente obtida pelo processo de criação de modelos hiperelásticos em que a FDED é expressa por invariantes/estiramentos principais, nesse caso a FDED é dividida de maneira aditiva em parcelas deviatória e volumétrica, o que torna sua manipulação algébrica e implementação computacional mais complexa. Isso é de suma importância, pois embora materiais semelhantes à borracha possam ser modelados com sucesso quando considerados quase-incompressíveis, existem materiais que também suportam grandes deformações e possuem coeficiente de Poisson diferente do valor referente a um material quase-incompressível.

Os tecidos biológicos são um bom exemplo. Islam et al. (2020) afirmam que foi demonstrado por vários laboratórios de pesquisa proeminentes que tecidos biológicos (incluindo tumores) exibem vários graus de compressibilidade e cita alguns artigos que consideram, a partir de evidências experimentais, o coeficiente de Poisson com valores variando entre 0.1 e 0.45

(FUNG, 1993; MPEKRIS et al., 2017; NETTI et al., 2000; NIA et al., 2016; NIKOLAEV et al., 2014; ROOSE et al., 2003; STEWART et al., 2017; STYLIANOPOULOS et al., 2013). Alguns outros exemplos de tecidos biológicos que não são considerados como incompressíveis por outros trabalhos podem ser citados: cérebro (BENNION et al., 2022; MORIN et al., 2017), fígado (WANG et al., 2020) e tendão suíno (BÖL et al., 2015).

Além disso, na prática, modelos constitutivos com menos termos e constantes materiais são preferíveis, mesmo que a correspondência com os dados experimentais não seja a melhor (MIHAI; GORIELY, 2017), na premissa de que tal modelo represente de maneira consistente o comportamento qualitativo global do material. Ainda levando em conta essa premissa, Chagnon et al. (2015b) explica que modelos que usam funções simples, com menos constantes e invariantes materiais, de maneira geral alcançam melhores resultados, uma vez que têm a menor probabilidade de criar respostas não físicas. Madireddy et al. (2015) também chamam a atenção para a escolha de modelos que possuam equilíbrio entre qualidade de ajuste, capacidade preditiva e complexidade. Nesse contexto, modelos tipo-Hookeanos ganham destaque pela sua simplicidade.

Existem vários trabalhos sobre a criação e o estudo de diferentes medidas de deformação na literatura. Korobeynikov (2019) revisa as principais famílias de medidas de deformação apresentadas ao longo dos tempos e cita: Doyle–Ericksen (Seth-Hill) de um parâmetro; Curnier–Rakotomanana de dois parâmetros; Curnier–Zysset de um parâmetro; Itskov de um parâmetro e potência de dois parâmetros; e famílias de medidas de deformação exponencial Darijani–Naghdabadi de um e dois parâmetros (Doyle & Ericksen, 1956; Curnier & Rakotomanana, 1991; Itskov, 2004; Curnier & Zysset, 2006; Darijani, Naghdabadi, & Kargarnovin, 2010; Darijani & Naghdabadi, 2013). O próprio Korobeynikov (2019) apresenta uma nova família de tensores de deformação, a qual possui simetria em relação à medida logarítmica. Beex (2019) criou medidas de deformação que são fusões das medidas de deformação clássicas, de maneira a pegar as boas características e rejeitar as características ruins de cada medida. Korobeynikov et al. (2022) desenvolveram expressões explícitas (formato tensorial livre ou *basis-free*) para os tensores de elasticidade Lagrangianos de quarta ordem para modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos e calibraram o parâmetro material da família de medidas de deformação apresentada por Itskov (2004, 2019) para representar a relação tensão-deformação obtida experimentalmente para o modo de deformação puro EAS de um material de poliuretano. Por fim, Korobeynikov (2023) apresenta uma outra família de

modelos hiperelásticos isotrópicos tipo-Hookeanos que está associada à família clássica de tensores de deformação e é tal que as contrapartes de taxas de relações constitutivas para modelos de materiais desta família têm uma forma ligeiramente modificada de relações constitutivas para modelos de materiais hipoeelásticos isotrópicos tipo-Hookeanos.

O amplo conjunto de trabalhos que têm como tema a criação ou estudo de medidas de deformação, do qual fazem parte os artigos destacados no parágrafo anterior, visa contribuir para a modelagem do comportamento mecânico de materiais com aplicação em engenharia e bioengenharia em regime de grandes deformações. Neste contexto, o presente trabalho apresenta o formato tensorial de uma nova família de medidas de deformação baseada na função seno-hiperbólica: a família Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG). Os modelos constitutivos tipo-Hookeanos originados da família SHG são analisados e comparados com os modelos referentes às medidas de deformação clássicas. Para tanto, são estudadas as respostas dos modelos aos modos puros de deformação: EAS, CE-B e CS. Em seguida, os modelos tipo-Hookeanos SHG são testados quanto à sua aplicabilidade na representação de polímeros, tecidos biológicos moles e biomateriais. Para isso foram coletados dados de testes experimentais feitos com esses materiais disponíveis na literatura e realizou-se calibrações dos parâmetros materiais dos modelos tipo-Hookeano SHG.

2. FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 Apresentação

Formulações de MEF que utilizam as posições nodais como incógnitas foram concebidas nos seguintes trabalhos: Shabana (1996), Shabana (1997), Bonet et al. (2000) e Aguiar e Fosdick (2000). Apresentando algumas semelhanças com essas formulações, a FPMEF foi primeiramente idealizada por Coda (2003) e Coda e Greco (2004). Trata-se de uma formulação construída com base em conceitos de energia e que utiliza o princípio da estacionariedade para definir as equações de equilíbrio das estruturas. A energia do sistema em análise é expressa em função das posições nodais dos elementos finitos, que são descritas em um sistema de coordenadas espaciais fixo (descrição Lagrangiana Total). Diferentemente do MEFC, que considera como incógnitas os deslocamentos nodais, a FPMEF usa as posições nodais como variáveis de estado do problema.

A FPMEF foi concebida de maneira a considerar as não linearidades geométricas de um problema estrutural dado, o que a torna uma ótima opção para executar análises que envolvem grandes deformações e/ou grandes deslocamentos. No entanto, essa formulação também é capaz de realizar análises lineares quando uma solução mais simples for adequada. Como vantagens da FPMEF pode-se destacar a sua simplicidade conceitual e matemática, o que facilita o entendimento e a implementação. Além disso, ao utilizar as posições nodais sob uma descrição Lagrangiana Total para descrever a cinemática da estrutura, a FPMEF dispensa a necessidade de transformações local \leftrightarrow global. Por fim, em um estudo incipiente sobre eficiência computacional de diferentes formulações de MEF, Souza e Silva (2022) comparam a FPMEF com o MEFC (conforme apresentada por Crisfield (1996)) e a formulação corrotacional de MEF, encontrando resultados que indicam que a FPMEF possui uma maior eficiência computacional, pois levou menos tempo para realizar as análises propostas.

Segundo Becho (2020), apesar de relativamente recente, a formulação posicional tem sido objeto de estudo de um número considerável de pesquisadores (conforme ele mesmo revisa de maneira extensiva) principalmente devido a sua capacidade de aplicação a análises não lineares.

2.2 Teoria

Aqui é apresentado o desenvolvimento da teoria base da FPMEF usando as expressões mais generalistas possíveis, porém mais adiante no texto, à medida que se fizer necessário, são apresentadas as fórmulas específicas para cada situação a ser estudada.

Inicia-se pela definição da Energia Potencial Total (Π) de um sistema estrutura-carregamento, assim como feito por Maciel (2008):

$$\Pi = \Psi + W + K_c + K_d \quad 2.1$$

em que Ψ é a Energia de Deformação, W a energia potencial das forças externas, K_c é a Energia Cinética e K_d é a perda de energia. Segundo Reddy (2002), o Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE) diz que quando a variação do potencial de energia mecânica é nula ocorre o equilíbrio mecânico (estrutural). Portanto, o PEPTE é expresso matematicamente por

$$\delta\Pi = 0 \quad 2.2$$

Utilizando o mapeamento de uma determinada estrutura genérica com um número k de graus de liberdade generalizados através de uma descrição Lagrangiana Total, em que as coordenadas atuais são representadas pelo vetor $\{x_k\}$, é possível reescrever o PEPTE da seguinte maneira:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\{x_k\}} = 0 \quad 2.3$$

A Eq. 2.3 representa um sistema de equações não linear que pode ser solucionado através de métodos numéricos, como o Método de Newton-Raphson que será o utilizado no presente estudo. A Eq. 2.3 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{x_k\}} = g_k(\{x_k\}) \quad 2.4$$

em que $g_k(\{x_k\})$ é o vetor de resíduos que deve ser minimizado até se ter um valor abaixo de uma tolerância numérica preestabelecida para que a solução seja encontrada. O Método de Newton-Raphson é iterativo, nele se utiliza como primeiro vetor tentativa, $\{x_k^0\}$, o vetor de posições iniciais, $\{X_k\}$. Aqui o sobrescrito à direita indica à qual iteração se refere a variável. Aplicando-se uma expansão de Taylor, em que os termos não lineares são desprezados, encontra-se:

$$g_k(\{x_k\}) = g_k(\{x_k^0\}) + \left. \frac{\partial g_k(\{x_k\})}{\partial \{x_k\}} \right|_{\{x_k^0\}} \{\Delta x_k\} = 0 \quad 2.5$$

ou

$$\{\Delta x_k\} = - \left(\left. \frac{\partial g_k(\{x_k\})}{\partial \{x_k\}} \right|_{\{x_k^0\}} \right)^{-1} g_k(\{x_k^0\}) \quad 2.6$$

Substituindo a Eq. 2.4, obtém-se:

$$\{\Delta x_k\} = - \left(\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \{x_k\} \cdot \partial \{x_l\}} \right|_{\{x_k^0\}} \right)^{-1} g_k(\{x_k^0\}) \quad 2.7$$

em que $\left[\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \{x_k\} \cdot \partial \{x_l\}} \right|_{\{x_k^0\}} \right]$ é a Matriz Hessiana da estrutura na primeira iteração. Vale ressaltar que a inversa da Matriz Hessiana não é de fato calculada. Na verdade, é o sistema de equações que é resolvido, sendo a Eq. 2.7 apenas uma representação matemática da solução do problema. Com o vetor de correção $\{\Delta x_k\}$ calculado ao fim da primeira iteração, o primeiro vetor tentativa é corrigido e encontra-se o segundo vetor tentativa $\{x_k^1\}$, que será usado nos cálculos da segunda iteração:

$$\{x_k^1\} = \{x_k^0\} + \{\Delta x_k\} \quad 2.8$$

Assim o processo segue até que a condição de convergência seja atendida:

$$\|g_k(\{x_k\})\| < \textit{tolerância} \quad 2.9$$

2.3 Formulação para estruturas treliçadas

Nesta subseção apresenta-se a FPMEF para análise estática de treliças, mas antes se faz um recorte a fim de delimitar o objeto de estudo: serão consideradas somente forças conservativas, materiais elásticos, análise estática, área transversal da barra constante e desconsidera-se qualquer tipo de dissipação de energia. Dito isso, seguindo a notação e linha de exposição apresentada por Bazant e Cedolin (2010), reescreve-se a Energia Potencial Total (Π) de um sistema estrutura-carregamento da seguinte maneira:

$$\Pi = U + W \quad 2.10$$

A Figura 2.1 mostra a q -ésima barra de uma estrutura no plano (2D). À esquerda tem-se a posição inicial da barra (indeslocada/indeformada), com as coordenadas dos nós representadas pela matriz $[X_i^\alpha]^{(q)}$, e à direita a posição final (deslocada/deformada) denotada por $[x_i^\alpha]^{(q)}$. As forças externas são representadas por $[F_i^\alpha]^{(q)}$. Aqui, para o caso 2D, o sobrescrito à direita, dentro do colchete, representa a numeração dos nós, $\alpha = 1, 2$, e o subscrito à direita representa as direções. O sobrescrito à direita, entre parênteses e fora dos colchetes indica a barra em questão, ou seja, a q -ésima barra.

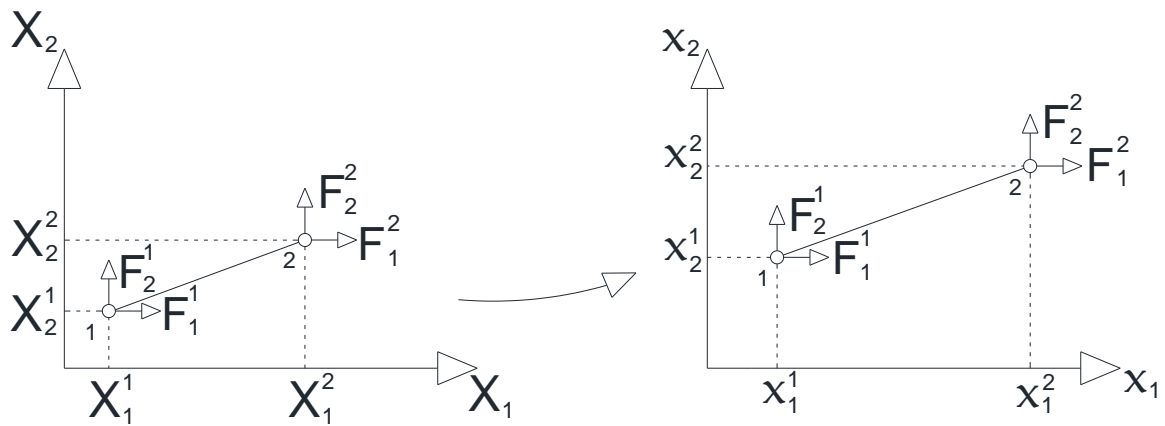


Figura 2.1: Mudança de configuração de uma barra de dois nós no plano.

Considerando as posições nodais como variáveis independentes, com base na Figura 2.1, define-se a energia potencial das forças externas na barra q para levá-la da configuração deformada até a configuração de referência da seguinte maneira:

$$W^{(q)} = - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^2 F_i^\alpha (x_i^\alpha - X_i^\alpha) \quad 2.11$$

Usando a notação indicial, em que a repetição de índices indica soma:

$$W^{(q)} = F_i^\alpha X_i^\alpha - F_i^\alpha x_i^\alpha \quad 2.12$$

Dessa maneira, tem-se a parcela da energia potencial referente ao trabalho das forças externas em função da posição final, $[x_i^\alpha]^{(q)}$, visto que a posição inicial, $[X_i^\alpha]^{(q)}$, é conhecida e constante, portanto, não é uma incógnita. Vale ressaltar que a única diferença do caso plano (2D) para o caso espacial (3D) é que, ao invés de $i = 1, 2$, ter-se-ia $i = 1, 2, 3$. Daqui em diante considera-se o caso 3D, tendo o caso plano sido utilizado somente por simplicidade na elucidação gráfica (Figura 2.1).

A energia de deformação de um sólido específico, Ψ , é geralmente definida como a integral da Função Densidade de Energia de Deformação (FDDED) (ψ), também chamada de Energia Específica de Deformação, em relação a um volume referencial, que no caso Lagrangiano é o Volume Inicial (V_0) do sólido em questão.

$$\Psi = \int_{V_0} \psi dV_0 \quad 2.13$$

A FDED, seja ela passível de ser expressa de maneira explícita ou não, é função da Deformação (ε) e representa uma propriedade do material, ou seja, expressa como um determinado material se comporta. Dito isso e supondo que a deformação se distribua uniformemente ao longo da q -ésima barra, obtém-se a Eq. 2.14.

$$\Psi^{(m)} = V_0^{(m)} \psi(\varepsilon^{(q)}) \quad 2.14$$

Substituindo as Eq. 2.12 e 2.14 na expressão do PEPTE (Eq. 2.10), obtém-se a equação de equilíbrio da barra q :

$$\frac{\partial \Pi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = \frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} + \frac{\partial W^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = 0 \quad 2.15$$

$$\frac{\partial}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} (V_0^{(q)} \cdot \psi(\varepsilon^{(q)})) - \frac{\partial}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} (F_i^\alpha x_i^\alpha - F_i^\alpha X_i^\alpha) = 0 \quad 2.16$$

Efetuando a derivada parcial da energia potencial das forças externas:

$$\frac{\partial}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} (F_i^\alpha X_i^\alpha - F_i^\alpha x_i^\alpha) = -F_i^\alpha \quad 2.17$$

Para efetuar a derivada parcial na parcela referente à Energia de Deformação, é preciso esclarecer que a deformação é função das coordenadas atuais, $\varepsilon([x_i^\alpha]^{(q)})$, sendo necessária a utilização da regra da cadeia para se encontrar a Eq. 2.18 a seguir. Apesar de ser função das coordenadas atuais, a notação a ser utilizada a partir daqui será $\varepsilon^{(q)}$ para a deformação, deixando essa relação de dependência implícita.

$$\frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = \frac{\partial}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \left(V_0^{(q)} \psi(\varepsilon^{(q)}) \right) = A_0^{(q)} l_0^{(q)} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{(q)}} \frac{\partial \varepsilon^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \quad 2.18$$

Na Eq. 2.18 acima, $A_0^{(q)}$ e $l_0^{(q)}$ são a Área Transversal e o Comprimento Inicial da q -ésima barra, respectivamente.

Neste momento, antes de continuar o desenvolvimento algébrico da formulação, faz-se necessária a apresentação do conceito de par energético conjugado, que se refere a pares de Tensão/Deformação que devem ser usados juntos para a manutenção da consistência energética de uma análise a ser desempenhada. Na seção “3.4 Pares de Tensão-Deformação Energeticamente Conjugados” (e no APÊNDICE I), adiante na tese, essa conceituação de pares conjugados será generalizada para sólidos.

Começa-se pela definição de Estiramento (λ), que é a razão entre o Comprimento Deformado e Comprimento Indeformado de uma determinada fibra no sólido. No caso de uma barra: da razão entre o Comprimento Atual, l , e o Comprimento Inicial, l_0 , da barra. É válido salientar que o Estiramento pode ser considerado uma medida de deformação, em que na configuração neutra (indeformada) $\lambda = 1$, sob compressão $0 < \lambda < 1$ e sob tração $\lambda > 1$.

$$\lambda = \frac{ds}{dS} \quad \text{ou} \quad \lambda^{(q)} = \frac{l^{(q)}}{l_0^{(q)}} \quad 2.19$$

Define-se a Tensão de Cauchy (σ_c) como a razão diferencial entre Força Interna e a Área Superficial de uma partícula de sólido na configuração atual. No caso mais tangível de um elemento estrutural, supondo que a força total em uma determinada seção seja denotada por T , que a Tensão seja constante na seção transversal e que A representa a área atual, assim como feito por Belytschko et al. (2014), fica estabelecido que a Tensão de Cauchy é:

$$\sigma_c = \frac{T}{A} \quad 2.20$$

Cabe ressaltar o caráter tensorial relacionado com o conceito de tensão, no qual há componentes normais e de cisalhamento em uma situação mais geral. A Eq. (2.20) é uma redução para o caso de tensão normal média em elementos unidimensionais aplicados a treliças. A Figura 2.2 apresenta o gráfico de Tensão de Cauchy x Estiramento de um material genérico.

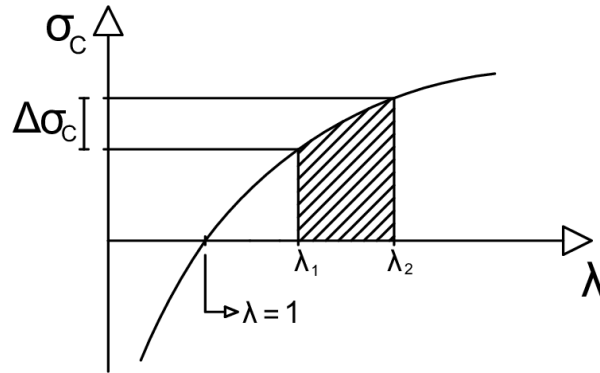


Figura 2.2: Gráfico de Tensão de Cauchy x Estiramento.

A área hachurada no gráfico de Tensão x Deformação (Figura 2.2) é, por definição, a Energia Deformação (DOWLING, 2012). Outra definição mais conceitual, dada por Korsunsky (2001), é a de que a energia específica de deformação, representada pela FDED, é o trabalho, por unidade de volume, realizado pela tensão ao imprimir deformação no meio contínuo. Trata-se de uma grandeza que representa o comportamento de um material, ou seja, ela carrega em si a informação de que um dado incremento da Tensão de Cauchy ($\Delta\sigma_C$) gera um determinado incremento no Estiramento da estrutura analisada, levando de um valor λ_1 para λ_2 . Poder-se-ia dizer o contrário também, que para levar um elemento de um dado Estiramento Inicial, λ_1 , para um valor final, λ_2 , é necessário impor um determinado incremento da Tensão de Cauchy ($\Delta\sigma_C$).

Partindo-se das definições de σ_C e λ , que possuem claros significados físicos e por isso servem de referência, pode-se apresentar outras medidas de deformação e as respectivas tensões com as quais formam pares conjugados. As medidas de deformação usuais são funções de λ e possuem: valor nulo para a configuração indeformada $\varepsilon(\lambda = 1) = 0$; negativo para deformações de compressão $\varepsilon(0 < \lambda < 1) < 0$; e positivos para tração $\varepsilon(\lambda > 1) > 0$. Primeiro é definida a medida de deformação (ε_C) que faz par conjugado com a Tensão de Cauchy (σ_C), partindo do pressuposto da manutenção da consistência energética:

$$\psi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_C d\lambda = \int_{\varepsilon_C(\lambda_1)}^{\varepsilon_C(\lambda_2)} \sigma_C d\varepsilon_C(\lambda) \quad 2.21$$

Substituindo a variável do domínio de integração da integral à direita:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_C d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_C \frac{d\varepsilon_C(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad 2.22$$

Dessa forma, conclui-se que

$$\frac{d\varepsilon_C(\lambda)}{d\lambda} = 1 \quad 2.23$$

Ou seja

$$\varepsilon_C(\lambda) = \lambda + \text{constante} \quad 2.24$$

Como $\varepsilon_C(\lambda = 1) = 0$, então a constante é igual à -1 :

$$\varepsilon_C(\lambda) = \lambda - 1 \quad 2.25$$

ou

$$\varepsilon_C(\lambda) = \frac{ds - dS}{dS} \quad 2.26$$

Para o caso de uma barra:

$$\varepsilon_C(\lambda) = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad 2.27$$

Trata-se da expressão da deformação de Biot ($\varepsilon_B = \varepsilon_C$), que para o caso unidimensional é igual à medida de deformação de engenharia. Dessa forma, fica definido que a Tensão de Cauchy e a Deformação de Biot formam um par conjugado energético (lembrando que aqui se considera a área transversal da barra constante), o que significa que o uso concomitante de ambas garante a consistência energética.

A Figura 2.2 ajuda a ilustrar o conceito de par energético conjugado, que em suma significa que para um mesmo incremento de estiramento ($\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$), caso se utilize uma Tensão e uma medida de Deformação que formam um par energético conjugado, qualquer que seja esse par, o valor da Energia de Deformação é o mesmo, ou seja, o valor da área no gráfico de Tensão x Deformação é o mesmo, o que significa que se estaria representando o mesmo material (modelo constitutivo). Como a Deformação de Biot é uma função linear do estiramento, não só a área tem o mesmo valor como a forma geométrica é igual, conseqüentemente o gráfico da Figura 2.3 é igual ao da Figura 2.2, existindo somente uma translação para a esquerda de magnitude unitária. Para outros pares energéticos a forma geométrica muda, mas o valor da área é sempre igual.

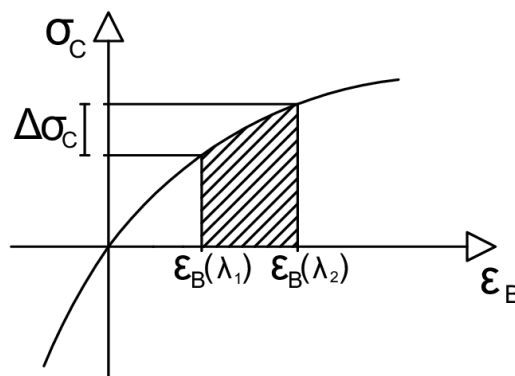


Figura 2.3: Gráfico da Tensão de Cauchy x Deformação de Biot (par energético conjugado).

No presente trabalho optou-se por apresentar os conceitos de Tensão, medida de Deformação, par energético conjugado e FDED utilizando a Tensão de Cauchy, o Estiramento e a Deformação de Biot por essas três grandezas guardarem em si significados físicos claros e intuitivos. Nos entanto, os resultados e gráficos até aqui apresentados são válidos para o caso

unidimensional em que a seção transversal é considerada constante, o que leva a Tensão de Cauchy a ser igual à Tensão Nominal, já que a área atual, A , é igual à área inicial, A_0 .

A seguir é apresentada a família de medidas de deformação de Seth-Hill, também chamadas de medidas clássicas, para o caso uniaxial. Usou-se a notação de Driemeier et al. (2005) e Owen, Peric e Neto (2008), que utiliza o auxílio da constante m :

$$\varepsilon_{sh} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\lambda^m - 1) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln(\lambda) & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad 2.28$$

A Tabela 2.1 mostra as medidas de deformação representadas pela Eq. 2.28 com os seus respectivos nomes, símbolos e fórmulas.

Tabela 2.1: Medidas de deformação pertencentes à família de Seth-Hill e suas tensões conjugadas.

m	Medida de Deformação	Símbolos	Deformação (ε)	Tensão (σ)
2	Green	ε_G σ_G	$(1/2)(\lambda^2 - 1)$	$\lambda^{-1} \cdot \sigma_N$
1	Biot	ε_B σ_B	$(\lambda - 1)$	σ_N
0	Logarítmica (Hencky)	ε_L σ_L	$\ln(\lambda)$	$\lambda \cdot \sigma_N$
-1	Hiperbolica (Swainger)	ε_H σ_H	$(1 - \lambda^{-1})$	$\lambda^2 \cdot \sigma_N$
-2	Almansi	ε_A σ_A	$(1/2)(1 - \lambda^{-2})$	$\lambda^3 \cdot \sigma_N$

Na Tabela 2.1 também estão presentes os pares energéticos conjugados (tensões), que são calculados pelo processo representado pelas (Eq. 2.29 – Eq. 2.31), de maneira semelhante ao utilizado para encontrar a medida de deformação conjugada da Tensão de Cauchy. Tanto na Tabela 2.1 quanto nas equações a seguir utilizou-se a Tensão Nominal, σ_N , pois assim elas representam um contexto mais geral, visto que somente no caso de se considerar a área da seção transversal constante (como considerado na presente tese) a Tensão Nominal e a Tensão de Cauchy são iguais.

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_N \cdot d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_{sh} \frac{d\varepsilon_{sh}(\lambda)}{d\lambda} \cdot d\lambda \quad 2.29$$

$$\sigma_N = \sigma_{sh} \frac{d\varepsilon_{sh}(\lambda)}{d\lambda} \quad 2.30$$

$$\sigma_{sh} = \sigma_N \left[\frac{d\varepsilon_{sh}(\lambda)}{d\lambda} \right]^{-1} \quad 2.31$$

A seguinte fórmula também pode ser usada

$$\sigma_{sh} = \sigma_N \lambda^{1-m} \quad 2.32$$

Partindo de uma notação em que ε e σ representam uma medida de deformação genérica e a sua tensão conjugada, respectivamente, e retomando o conceito de FDED, tem-se:

$$\psi = \int_{\varepsilon}^{\cdot} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad 2.33$$

Por definição matemática do conceito de antiderivada e integral indefinida, define-se:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{d\psi}{d\varepsilon} + c \quad 2.34$$

No jargão da elasticidade matemática os potenciais admitidos como geradores de leis constitutivas consistentes devem ser convexos (CODA, 2018), o que garante: consistência física, existência de uma matriz de rigidez/hessiana positiva-definida e um ponto de mínimo global. Ademais, assume-se que para um valor nulo de deformação tenha-se um valor nulo de tensão, o que somado ao fato de que para uma deformação nula se tem energia de deformação nula, torna imperativo que o valor da constante de integração c da Eq. 2.34 seja nulo.

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{d\psi}{d\varepsilon} \quad 2.35$$

Com o entendimento do conceito de pares energéticos bem estabelecido, retoma-se o desenvolvimento da Eq. 2.18, pois substituindo nela a Eq. 2.35, obtém-se:

$$\frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = A_0^{(q)} l_0^{(q)} \sigma \frac{\partial \varepsilon^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \quad 2.36$$

A continuação do desenvolvimento da FPMEF a partir da Eq. 2.36 precisa ser individualizado para cada medida de deformação, pois está sendo considerada a não linearidade geométrica na concepção da formulação. A seguir é apresentado o desenvolvimento que utiliza a Deformação de Biot e a Tensão Nominal, que, como já demonstrado, formam um par energético conjugado.

Sabendo que $\varepsilon_B = (l - l_0)/l_0$ e considerando a notação na qual $[x_i^\alpha]^{(q)}$ representa as coordenadas da posição atual e $[X_i^\alpha]^{(q)}$ as coordenadas da posição inicial dos nós do q -ésimo elemento de uma estrutura treliçada:

$$l_0^{(q)} = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2} \quad 2.37$$

$$l^{(q)} = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2} \quad 2.38$$

$$\varepsilon_B^{(q)} = \frac{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}}{l_0} - 1 \quad 2.39$$

Derivando a deformação em relação às posições nodais, encontra-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = \frac{(-1)^\alpha}{l_0} (x_i^2 - x_i^1) \quad 2.40$$

Substituindo a Eq. 2.40 na Eq. 2.36, encontra-se a Eq. 2.41 a seguir. Para representar o vetor de forças internas é utilizado $[f_i^\alpha]^{(q)}$.

$$[f_i^\alpha]^{(q)} = \frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = A_0^{(q)} \sigma_B^{(q)} \frac{(-1)^\alpha}{l} (x_i^2 - x_i^1) \quad 2.41$$

Retomando a equação que representa o PEPTTE

$$\frac{\partial \Pi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = \frac{\partial \Psi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} + \frac{\partial W^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} = A_0^{(q)} \sigma_B^{(q)} \frac{(-1)^\beta}{l} (x_k^2 - x_k^1) - F_i^\alpha = 0 \quad 2.42$$

Como já explicado, trata-se de um sistema de equações não linear e para resolvê-lo será utilizado o Método de Newton-Raphson. Retomando o conceito de vetor de resíduos (Eq. 2.4), agora com a nova notação, tem-se a Eq. 2.43 abaixo. O vetor de resíduos é função das coordenadas atuais da barra, mas, por conveniência, essa relação não será explicitada na representação matemática.

$$[g_i^\alpha]^{(q)} = A_0^{(q)} \sigma_B^{(q)} \frac{(-1)^\alpha}{l^{(q)}} (x_k^2 - x_k^1) - F_i^\alpha \quad 2.43$$

Resta agora o cálculo da Matriz Hessiana, $[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)}$, para que se possa implementar o método iterativo de solução. Retomando as Eq. 2.7, 2.10, 2.17 e 2.18, utilizando a medida de Deformação de Biot e seguindo a notação que designa as coordenadas pelos nó e direção, encontra-se:

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = \frac{\partial^2 \Pi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)} \partial [x_k^\beta]^{(q)}} = A_0^{(q)} l_0^{(q)} \frac{\partial}{\partial [x_k^\beta]^{(q)}} \left(\frac{\partial \psi^{(q)}}{\partial \varepsilon_B^{(q)}} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \right) - \frac{\partial}{\partial [x_k^\beta]^{(q)}} (F_i^\alpha) \quad 2.44$$

O 2º termo é nulo (para o caso de forças conservativas) e no termo das forças internas (energia de deformação) é possível aplicar a derivada do produto (Eq. 2.45).

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = A_0^{(q)} l_0^{(q)} \left(\frac{\partial^2 \psi^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)} \partial \varepsilon_B^{(q)}} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_k^\beta]^{(q)}} + \frac{\partial \psi^{(q)}}{\partial \varepsilon_B^{(q)}} \frac{\partial^2 \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)} \partial [x_k^\beta]^{(q)}} \right)$$

2.45

Aplicando-se a regra da cadeia no primeiro termo entre parênteses:

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = A_0^{(q)} l_0^{(q)} \left(\frac{\partial^2 \psi^{(q)}}{\partial (\varepsilon_B^{(q)})^2} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_k^\beta]^{(q)}} + \frac{\partial \psi^{(q)}}{\partial \varepsilon_B^{(q)}} \frac{\partial^2 \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)} \partial [x_k^\beta]^{(q)}} \right)$$

2.46

Sabendo que a primeira derivada da FDED em relação à uma medida de deformação é igual à tensão conjugada (Eq. 2.35), pode-se concluir que a segunda derivada é igual à inclinação da curva do gráfico $\sigma \times \varepsilon$ (taxa de variação), que é chamada de módulo de elasticidade tangente: $E_t(\varepsilon_B)$. No caso específico em que o gráfico $\sigma \times \varepsilon$ é uma reta, ou seja, quando se trata de um modelo constitutivo linear, o módulo de elasticidade tangente é uma constante e é chamado de módulo de Young. Com essas informações, a Eq. 2.46 é reescrita pela Eq. 2.47.

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = A_0^{(q)} l_0^{(q)} \left(E_t^{(q)} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_k^\beta]^{(q)}} + \sigma_B^{(q)} \frac{\partial^2 \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)} \partial [x_k^\beta]^{(q)}} \right) \quad 2.47$$

Utilizando a Eq. 2.40 para continuar a desenvolver a formulação, define-se as equações:

$$\frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)}} \frac{\partial \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_k^\beta]^{(q)}} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha (x_i^2 - x_i^1) (x_k^2 - x_k^1)}{(l_0^{(q)})^2 l^{(q)} l^{(q)}} \quad 2.48$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_B^{(q)}}{\partial [x_i^\alpha]^{(q)} \partial [x_k^\beta]^{(q)}} = -\frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha}{l^{(q)} l_0^{(q)}} \left[\frac{x_i^2 - x_i^1}{l^{(q)}} \frac{x_k^2 - x_k^1}{l^{(q)}} - \delta_{ik} \right] \quad 2.49$$

Com as devidas substituições e rearranjos algébricos a Eq. 2.47 é reescrita a seguir.

$$\left[H_{ik}^{\alpha\beta} \right]^{(q)} = A_0^{(q)} (-1)^\beta (-1)^\alpha \left\{ \left[\frac{(x_i^2 - x_i^1)}{l^{(q)}} \frac{(x_k^2 - x_k^1)}{l^{(q)}} \right] \left(\frac{E_t^{(q)}}{l_0^{(q)}} - \frac{\sigma_B^{(q)}}{l^{(q)}} \right) + \frac{\sigma_B^{(q)}}{l^{(q)}} \delta_{ik} \right\} \quad 2.50$$

As fórmulas para os outros pares conjugados são apresentadas a seguir. A formulação para a deformação de Green foi retirada de Coda (2018), as demais, assim como a formulação para a deformação de Biot apresentada acima, são contribuições originais do presente trabalho.

2.3.1 Green

$$\varepsilon_G^{(q)} = \frac{1}{2} \left(\frac{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}{(l_0^{(q)})^2} - 1 \right) \quad 2.51$$

$$\left[f_k^\beta \right]^{(q)} = \frac{\partial \Psi_e^j}{x_k^\beta} = A_0^{(q)} \sigma_G \frac{(-1)^\beta}{l_0^{(q)}} (x_k^2 - x_k^1) \quad 2.52$$

$$\left[H_{ik}^{\alpha\beta} \right]^{(q)} = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0^{(q)}}{l_0^{(q)}} \left(E_t(\varepsilon_G) \frac{(x_i^2 - x_i^1)}{l_0^{(q)}} \frac{(x_k^2 - x_k^1)}{l_0^{(q)}} + \sigma_G \delta_{ik} \right) \quad 2.53$$

2.3.2 Logarítmica (Hencky)

$$\varepsilon_L^{(q)} = \ln \left(\frac{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}}{l_0^{(q)}} \right) \quad 2.54$$

$$[f_k^\beta]^{(q)} = \frac{\partial \Psi_e^j}{x_k^\beta} = A_0^{(q)} \sigma_L \frac{(-1)^\beta}{l_0^{(q)}} (x_k^2 - x_k^1) \quad 2.55$$

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = (-1)^\alpha (-1)^\beta \frac{A_0^{(q)} \cdot l_0^{(q)}}{(l^{(q)})^2} \left\{ \frac{(x_i^2 - x_i^1)(x_k^2 - x_k^1)}{l^{(q)}} [E_t(\varepsilon_L) + 2 \cdot \sigma_L] - \sigma_L \delta_{ik} \right\} \quad 2.56$$

2.3.3 Hiperbólica (Swainger)

$$\varepsilon_H^{(q)} = \left(1 - \frac{l_0^{(q)}}{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}} \right) \quad 2.57$$

$$[f_k^\beta]^{(q)} = \frac{\partial \Psi_e^j}{x_k^\beta} = A_0^{(q)} \frac{(l_0^{(q)})^2}{(l^{(q)})^3} \sigma_H (-1)^\beta (x_k^2 - x_k^1) \quad 2.58$$

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = (-1)^\alpha (-1)^\beta \frac{A_0^{(q)} (l_0^{(q)})^2}{(l^{(q)})^3} \left\{ (x_i^2 - x_i^1)(x_k^2 - x_k^1) \left[\frac{E_t(\varepsilon_H)}{(l^{(q)})^3} l_0^{(m)} - \frac{3 \cdot \sigma_H}{(l^{(q)})^2} \right] + \sigma_H \delta_{ik} \right\}$$

2.59

2.3.4 Almansi

$$\varepsilon_A^{(q)} = \left[1 - \left(\frac{l_0^{(q)}}{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}} \right)^2 \right] \quad 2.60$$

$$[f_k^\beta]^{(q)} = \frac{\partial \Psi_e^j}{x_k^\beta} = A_0^{(q)} \frac{(l_0^{(q)})^2}{(l^{(q)})^4} \sigma_A (-1)^\beta (x_k^2 - x_k^1) \quad 2.61$$

$$[H_{ik}^{\alpha\beta}]^{(q)} = (-1)^\alpha (-1)^\beta \frac{A_0^{(q)} (l_0^{(q)})^3}{(l^{(q)})^4} \left\{ \frac{(x_i^2 - x_i^1)(x_k^2 - x_k^1)}{(l^{(q)})^2} \left[E_t(\varepsilon_A) \frac{(l_0^{(q)})^2}{(l^{(q)})^2} - 4\sigma_A \right] + \sigma_A \delta_{ik} \right\}$$

2.62

2.4 Implementação computacional

Embora todo o desenvolvimento das formulações tenha sido feito para uma barra específica (q), a transição para uma formulação global pode ser feita antes dos cálculos computacionais usando uma enumeração nodal e uma organização de incidência nodal em relação aos elementos estruturais que permitam a transformação da notação local (definido por uma enumeração local de nós e direções) para uma notação global (baseada apenas em uma enumeração dos graus de liberdade globais da estrutura). Por exemplo, como Coda (2018) sugere, a posição do nó α na direção i é transformada no grau de liberdade global d usando a equação:

$$d = 3(\alpha - 1) + i \quad 2.63$$

Para a formulação desenvolvida, não há necessidade de constantes transformações do nível local para o global durante a fase de cálculo, o que é uma das grandes vantagens da FPMEF.

Quando se deseja encontrar uma série sequencial de pontos de equilíbrio, ou seja, a trajetória de equilíbrio de uma estrutura, um processo iterativo é usado no qual as posições e forças prescritas são incrementadas e as forças e posições desconhecidas correspondentes são calculadas. O pseudocódigo da Fig. 2.4 mostra o processo incremental para a formulação posicional utilizada no presente trabalho. Para compreendê-lo algumas considerações são necessárias: i) quando o grau de liberdade em relação a um nó α e uma direção i tem uma posição prescrita, o elemento $V_i^\alpha \rightarrow V_d$ do vetor $\{V\}$ recebe valor unitário; ii) quando um grau de liberdade tem uma posição prescrita, a coluna e linha relacionada a ele na matriz Hessiana são anuladas, o mesmo é feito para a linha relacionada no vetor de resíduos; iii) $\{\Delta P\}$ e $\{\Delta F\}$ são os vetores de incremento da posição e de incremento da força externa, respectivamente; iv) à esquerda das variáveis, o índice sobrescrito representa o passo de incremento da força/posição e o índice subscrito representa a iteração do método de Newton-Raphson; v) a notação utilizada apresenta a variável calculada, seguida da equação e das variáveis necessárias para tal; vi) por último, ressalta-se que são apresentadas as variáveis relacionadas ao modelo constitutivo tipo-Hookeano derivado da medida de deformação de Biot, mas essa foi uma escolha arbitrária. Para implementar qualquer outra medida basta utilizar as respectivas variáveis e expressões matemáticas já apresentadas.

Uma vantagem do método apresentado na Figura 2.4 é que ele pode realizar um incremento simultâneo de posição e força externa aplicada (“controle misto”), o que é desejável para muitas aplicações, como a simulação de recalque de fundação. Além disso, esses incrementos podem ser facilmente modificados para representar uma análise não monotônica. É comum realizar análises em que apenas as forças externas prescritas são incrementadas (controle de força) e as posições desconhecidas são calculadas, ou apenas as posições prescritas são aumentadas (controle de posição) e as forças desconhecidas são calculadas. No presente trabalho, ambos os tipos de análises são usados. O uso de um “controle misto” é desnecessário nesta tese, embora o código implementado possa fazê-lo.

```


$${}^1_0[F_i^\alpha]^{(q)} = [0]$$


$${}^1_0[\Delta x_i^\alpha]^{(q)} = [1]$$


$${}^1_0[x_i^\alpha]^{(q)} = [X_i^\alpha]^{(q)}$$


$$l_0^{(q)} \rightarrow \text{Eq. 2.37: } [X_i^\alpha]^{(q)}$$

n = 0 (variável de contagem para o Método de Newton–Rapshon)
Faça para p = 1 até o número desejado de incrementos
|   
$${}^p_n[H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(q)} = [0]$$

|   Faça enquanto  ${}^1_0|\Delta x| > tol$ 
|   |   n = n + 1
|   |   
$${}^p_n l^{(q)} \rightarrow \text{Eq. 2.38: } {}^{p-1}_{n-1}[x_i^\alpha]^{(q)}.$$

|   |   
$${}^p_n \lambda^{(q)} \rightarrow \text{Eq. 2.19: } {}^p_n l^{(q)} \text{ e } l_0^{(q)}$$

|   |   
$${}^p_n \varepsilon_B^{(q)} \rightarrow \text{Respectiva equação da Tabela 2.1 e usar: } {}^p_n \lambda^{(q)}$$

|   |   
$${}^p_n \sigma_B^{(q)} = E_t \cdot {}^p_n \varepsilon_B^{(q)}$$
 (Para todos os modelos tipo-Hookeanos:  $E_t$  é constante)
|   |   
$${}^p_n [f_i^\alpha]^{(q)} \rightarrow \text{Eq. 2.41: } A_0^{(q)}, {}^p_n \sigma_B^{(q)}, {}^p_n \lambda^{(q)}, {}^p_n l^{(q)}, {}^{p-1}_{n-1}[x_i^\alpha]^{(q)}.$$

|   |   
$${}^p_n [H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(q)} \rightarrow \text{Eq. 2.50: } A_0^{(q)}, {}^{p-1}_{n-1}[x_i^\alpha]^{(q)}, {}^p_{n-1}[x_k^\gamma]^{(q)}, {}^p_n l^{(q)}, l_0^{(q)}, {}^p_n \sigma_{SH}^{(q)}, {}^p_n \lambda^{(q)}, E_t.$$

|   |   
$${}^p_n [H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(q)} = {}^{p-1}_{n-1}[H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(q)} + {}^p_n [H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(q)}$$
 (propriedade acumulativa).
|   |   
$${}^p_n [g_i^\alpha]^{(q)} \rightarrow \text{Eq. 2.4: } {}^p_n [f_i^\alpha]^{(q)}, {}^p_n [F_i^\alpha]^{(q)}.$$

|   |   Faça para i = 1 até 3
|   |   |   Faça para  $\alpha = 1$  até 2
|   |   |   |   Se  $V_i^\alpha = 1$ 
|   |   |   |   |   
$${}^p_n H_{i1}^{\alpha 1} = {}^p_n H_{i2}^{\alpha 2} = {}^p_n H_{i3}^{\alpha 3} = {}^p_n H_{i4}^{\alpha 4} = {}^p_n H_{1i}^{\alpha 1} = {}^p_n H_{2i}^{\alpha 2} = {}^p_n H_{3i}^{\alpha 3} = {}^p_n H_{4i}^{\alpha 4} = 0$$

|   |   |   |   |   
$${}^p_n g_i^\alpha = 0$$

|   |   |   |   fim
|   |   |   fim
|   |   fim
|   |   
$${}^p_n [\Delta x]^{(q)} = - \left( {}^p_n [H_{ik}^{\alpha\gamma}]^{(q)} \right)^{-1} \cdot {}^p_n [g_i^\alpha]^{(q)}$$

|   |   
$${}^p_n [x]^{(q)} = {}^{p-1}_{n-1}[x]^{(q)} + {}^p_n [\Delta x]^{(q)}$$

|   fim
|   n = 0  $\rightarrow$  variável de contagem para o Método de Newton–Rapshon
|   
$${}^{p+1}_n [x]^{(q)} = {}^p_n [x]^{(q)} + [\Delta P]^{(q)}$$

|   
$${}^{p+1}_n [F_i^\alpha]^{(q)} = {}^p_n [F_i^\alpha]^{(q)} + [\Delta F]^{(q)}$$

fim

```

Figura 2.4: Pseudo-código para implementação da FPMEF.

3. HIPERELASTICIDADE

Hiperelasticidade, segundo Drozdov (1996), é a teoria constitutiva que descreve o comportamento mecânico de sólidos elásticos com o uso de (apenas) uma função material. Tal função, ψ , característica de materiais hiperelásticos, é a Função de Densidade de Energia de Deformação (FDED) (ou Energia Específica de Deformação) que é um potencial para a tensão: $[\sigma] = \partial\psi/\partial[\epsilon]$ (BELYTSCHKO et al., 2014). Os materiais hiperelásticos são verdadeiramente elásticos no sentido de que se uma solicitação for aplicada a tal material e depois removida, o material retorna à sua forma original sem qualquer dissipação de energia no processo (HACKETT, 2018). Para materiais hiperelásticos não há dependência de trajetória e existe uma correspondência biunívoca entre tensão e deformação (HASHIGUCHI, 2020). Aqui vale fazer uma associação com o desenvolvimento da FPMEF da seção anterior, pois como se considerou apenas o comportamento elástico, a teoria da Hiperelasticidade aqui descrita considerando sólidos genéricos, engloba os conceitos que lá foram apresentados utilizando as devidas simplificações referentes ao uso de elementos de barra.

3.1 Princípios da Mecânica do Contínuo

3.1.1 Definição de Quantidades Físicas Fundamentais

O tensor Gradiente de Deformação, $[F]$, fornece uma descrição completa do movimento, incluindo translações, rotações e deformações, de um sólido genérico no espaço a partir da derivada de cada componente do vetor de posição na configuração deformada, $\{x\}$, em relação a cada componente do vetor de posição na configuração de referência, $\{X\}$. A Figura 3.1 ilustra os vetores de posição que representam uma mudança de configuração de um sólido genérico e a Eq. 3.1 mostra a definição matemática do tensor Gradiente de Deformação.

$$[\mathbf{F}] = \frac{\partial \{x\}}{\partial \{X\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad F_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad 3.1$$

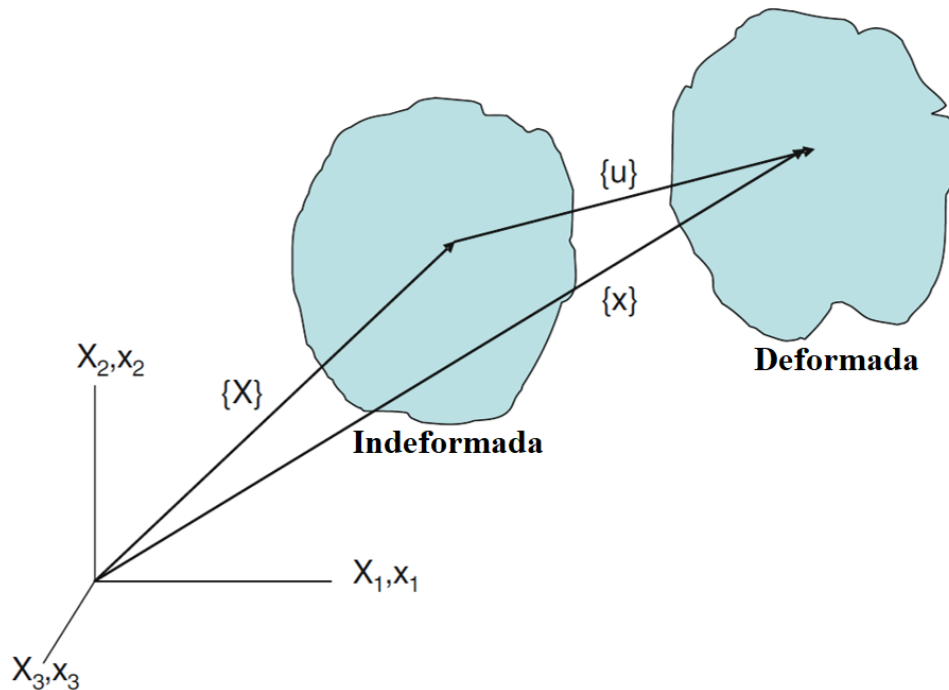


Figura 3.1: Representação vetorial (3D) nas configurações indeformada e deformada.
Fonte: Hackett (2016).

Seguindo Chaves (2013), aplica-se a derivação temporal ao tensor Gradiente de Deformação:

$$[\dot{\mathbf{F}}] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \{x\}}{\partial \{X\}} \right) = \frac{\partial}{\partial \{X\}} \left(\frac{d\{x\}}{dt} \right) = \frac{\partial \{v\}}{\partial \{X\}} \quad 3.2$$

Na Eq. 3.2 a variável $\{v\}$ representa o vetor de velocidade e o ponto em cima do $[\mathbf{F}]$ representa derivação temporal. Ao aplicar a regra da cadeia na expressão final, obtém-se:

$$[\dot{\mathbf{F}}] = \frac{\partial \{v\}}{\partial \{X\}} = \left(\frac{\partial \{v\}}{\partial \{x\}} \right) \left(\frac{\partial \{x\}}{\partial \{X\}} \right) \quad \text{ou} \quad \dot{F}_{ij} = v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad 3.3$$

O primeiro termo do produto é denominado Gradiente de Velocidade, $[\mathbf{L}]$, que se trata de uma quantidade Euleriana, como pode ser observado pelo denominador, que informa que a derivação se dá em relação às coordenadas atuais, $\{x\}$. O segundo termo é o próprio Gradiente de Deformação. Pode-se reorganizar as expressões conforme mostram as Eq. 3.4 e 3.5.

$$[\dot{\mathbf{F}}] = [\mathbf{L}][\mathbf{F}] \quad \text{ou} \quad \dot{F}_{ij} = L_{ik}F_{kj} \quad 3.4$$

$$[\mathbf{L}] = [\dot{\mathbf{F}}][\mathbf{F}]^{-1} \quad \text{ou} \quad L_{ij} = \dot{F}_{ik}F_{kj}^{-1} \quad 3.5$$

O tensor Gradiente de Velocidade ao ser decomposto em partes simétrica e antissimétrica resulta na definição de outros dois importantes tensores, conforme Eq. 3.6. O tensor $[\mathbf{D}]$ é chamado de tensor Taxa de Deformação, na versão apresentada pela Eq. 3.7 trata-se de uma quantidade física Euleriana que descreve a taxa de alongamento e cisalhamento (BONET; WOOD, 2008). O tensor de Taxa de Rotação é representado por $[\mathbf{W}]$ e apresentado pela Eq. 3.8, sendo também uma quantidade Euleriana. A relevância desses dois tensores na presente tese se dá para a explicação do conceito de conjugação energética de pares de tensão-deformação que será feita adiante.

$$[\mathbf{L}] = \frac{1}{2}([\mathbf{L}] + [\mathbf{L}]^T) + \frac{1}{2}([\mathbf{L}] - [\mathbf{L}]^T) \quad 3.6$$

$$[\mathbf{D}] = \frac{1}{2}([\mathbf{L}] + [\mathbf{L}]^T) \quad \text{ou} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad 3.7$$

$$[\mathbf{W}] = \frac{1}{2}([\mathbf{L}] - [\mathbf{L}]^T) \quad \text{ou} \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad 3.8$$

3.1.2 Decomposição Polar

Pelo teorema da Decomposição Polar (TRUESDELL; NOLL, 1965), qualquer tensor Gradiente de Deformação $[F]$ pode ser decomposto multiplicativamente no produto de um tensor ortogonal $[R]$, conhecido como o Tensor de Rotação, e um tensor simétrico $[U]$ chamado de Tensor de Alongamento Direito. A Figura 3.2 ilustra a decomposição polar Lagrangiana, em que a ordem utilizada é de primeiro aplicar uma deformação pura seguida de uma rotação pura. A Eq. 3.9 apresenta a expressão matemática da decomposição polar.

A decomposição polar é essencial no estudo da Mecânica do Contínuo e da Hiperelasticidade, pois permite que a transformação de um sólido da configuração de referência para a configuração deformada seja separada em duas partes. Como explicam de Borst et al. (2012), existe uma parte que representa a deformação pura, $[U]$, geradora de tensão, e a segunda parte que representa o movimento de corpo rígido de rotação, $[R]$, que não deve gerar tensão. A Figura 3.2 mostra a ordem de aplicação das ações no contexto Lagrangiano, em que primeiro se aplica a deformação pura e em seguida, sobre o sólido deformado, a rotação pura. A Eq. 3.9, que deve ser lida da direita para a esquerda, também indica essa ordem.

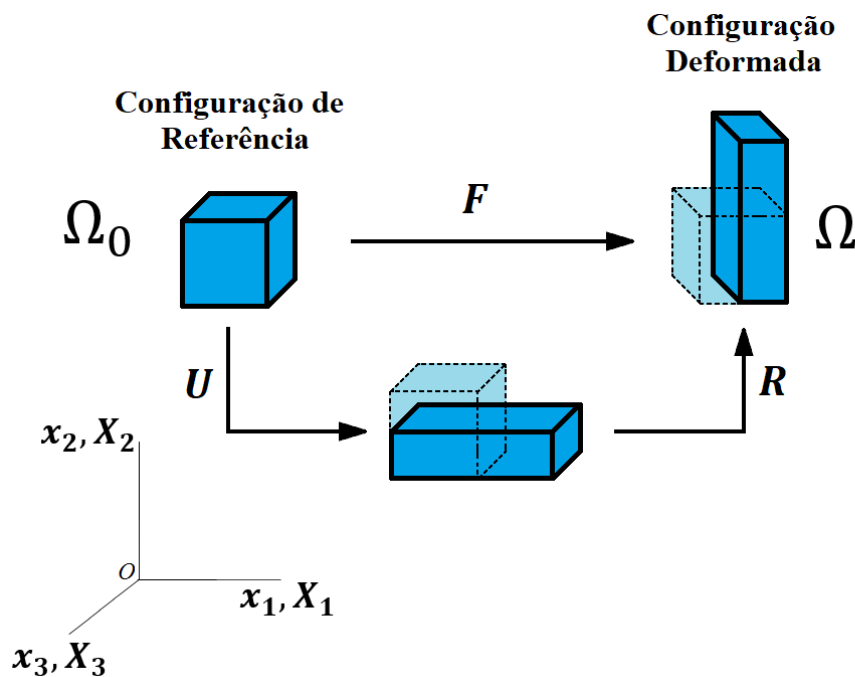


Figura 3.2: Ilustração da decomposição polar.

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{R}][\mathbf{U}] \quad \text{ou} \quad F_{ij} = R_{ik}U_{kj} \quad 3.9$$

3.1.3 Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green

Outra definição importante na eliminação da influência do movimento de corpo rígido na quantificação da mudança de configurações sofrida por um sólido é a do Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green, $[\mathbf{C}]$ (Eq. 3.10).

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] \quad \text{ou} \quad C_{ij} = F_{ki}F_{kj} \quad 3.10$$

A Eq. 3.11 mostra por meio da álgebra tensorial como que a influência do Tensor de Rotação é eliminada.

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] = ([\mathbf{R}][\mathbf{U}])^T([\mathbf{R}][\mathbf{U}]) = [\mathbf{U}]^T[\mathbf{R}]^T[\mathbf{R}][\mathbf{U}] = [\mathbf{U}]^T[\mathbf{U}] = [\mathbf{U}]^2 \quad 3.11$$

3.2 Tensores de Medidas de Deformação

Existem na literatura algumas definições de objetividade que se aprofundam na questão da invariância/indiferença das quantidades físicas em relação à mudança de referencial (*observer frame indifference*), além disso há autores que provam matematicamente a objetividade de tensores de 2ª ordem importantes no estudo da Mecânica do Contínuo (BONET; WOOD, 2008; CHAVES, 2013; HACKETT, 2016; HILL, 1968; OGDEN, 1997; TRUESDELL; NOLL, 1965). Ressalta-se que existem diferentes definições de objetividade dentro dessas referências e que, como mostram Truesdell e Noll (2004) em um apêndice, a história do estudo da objetividade remonta a trabalhos de Hooke (séc. XVII), Poisson (séc. XIX) e Cauchy (séc. XIX).

No presente trabalho a seguinte definição é utilizada: tensões e deformações objetivas são invariantes sob movimentos de corpo rígido, ou seja, nenhuma componente dos tensores de

tensão ou deformação muda quando ocorrem rotações puras de corpo rígido (LAVALL, 1996). Nesse contexto fica claro o porquê da Decomposição Polar do tensor Gradiente de Deformação e a definição do Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green serem importantes, pois desconsideram a rotação. Hill (1968) apresenta as seguintes diretrizes para a criação de um tensor que seja capaz de representar uma medida de deformação apropriada: i) quando o Tensor de Alongamento Direito for igual ao Tensor Identidade, a função (medida de deformação) gera uma resposta nula: $[U] = [I] \rightarrow [\epsilon] = [0]$; ii) a derivada da função (medida de deformação) quando o Tensor de Alongamento Direito for igual ao Tensor Identidade tem que ser igual ao Tensor Identidade: $[U] = [I] \rightarrow [\epsilon]' = [I]$; iii) tem que apresentar aumento monotônico da deformação com o aumento do estiramento.

Por meio da decomposição espectral, pode-se apresentar $[U]$ da seguinte maneira:

$$[U] = \sum_i \lambda_i \{N_i\} \otimes \{N_i\} \quad 3.12$$

em que λ_i e $\{N_i\}$ são os Estiramentos Principais (autovalores) e as correspondentes Direções Principais (autovetores) de $[U]$, respectivamente. Usando essa notação, Hill (1968) generalizou as medidas de deformação:

$$f([U]) = \sum_i f(\lambda_i) \{N_i\} \otimes \{N_i\} \quad 3.13$$

A partir dessa nova notação, as mesmas condições para criação de uma medida de deformação podem ser impostas da seguinte maneira:

$$f(1) = 0; \quad f'(1) = 1; \quad f'(\lambda) > 0 \quad 3.14$$

Aqui se retoma a Tabela 2.1, que mostra a família Seth-Hill de medidas de deformação para o caso uniaxial, nela são mostradas as diferentes medidas de deformação clássicas como funções do estiramento. Naquele contexto, considerando as simplificações da cinemática dos elementos de barra que foram feitas, o estiramento λ_1 é o único autovalor levado em conta, pois os outros

dois são constantes $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Mais à frente são apresentadas as mesmas medidas de deformação presentes na Tabela 2.1, porém agora de maneira generalizada para o caso multiaxial.

3.2.1 Tensor de Deformação Infinitesimal

O Tensor de Deformação Infinitesimal, $[\epsilon]$, introduzido por Cauchy em 1822, é apresentado aqui como exemplo de um tensor que não pode ser utilizado na análise de estruturas/sólidos submetidos a grandes deformações. Próprio da teoria da deformação infinitesimal, trata-se de um tensor adequado para análises em que se considera que as deformações, deslocamentos e rotações são infinitesimalmente menores do que as demais dimensões de interesse do problema, considerações que simplificam grandemente as equações da Mecânica do Contínuo. A Eq. 3.15 mostra a definição do Tensor de Deformação Infinitesimal.

$$[\epsilon] = \frac{1}{2}([\mathbf{F}] + [\mathbf{F}]^T) - [\mathbf{I}] \quad 3.15$$

Como exemplo da incapacidade desse tensor em retornar valor nulo quando submetido à movimento de corpo rígido, pode-se impor uma rotação em torno de um plano definido por dois dos eixos cartesianos (Eq. 3.16). A Eq. 3.17 apresenta qual seria o Tensor de Deformação Infinitesimal para esse caso, mostrando claramente que, para valores pequenos do ângulo de rotação, $\theta \rightarrow [\epsilon] \approx 0$, mas que, para valores maiores de rotação, $[\epsilon] \neq [0]$.

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.16$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.17$$

3.2.1 Medidas clássicas de deformação (Seth-Hill) – Descrição Lagrangiana

3.2.2.1 Medida de Deformação de Green

A medida de deformação de Green (ou Green-Lagrange), segundo Curnier e Rakotomanana (1991), foi introduzida por Green (1841), formulada de maneira independente por Saint-Venant em (1844) e generalizada por Brillouin em 1925. A Eq. 3.18 apresenta o tensor da Deformação de Green, $[\boldsymbol{\varepsilon}^G]$, onde se nota que a sua definição pode ser realizada utilizando tanto o Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green quanto o Tensor de Alongamento Direito.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^G] = \frac{1}{2}([\mathbf{C}] - [\mathbf{I}]) = \frac{1}{2}([\mathbf{U}]^2 - [\mathbf{I}]) \quad 3.18$$

3.2.2.2 Medida de Deformação de Biot

A medida de deformação de Biot (BIOT, 1939), mostrado pela Eq. 3.19, constitui a generalização objetiva e apropriada do Tensor de Deformação Infinitesimal.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^B] = ([\mathbf{C}]^{1/2} - [\mathbf{I}]) = ([\mathbf{U}] - [\mathbf{I}]) \quad 3.19$$

3.2.2.3 Medida de Deformação Logarítmica (Hencky)

A medida de deformação Logarítmica foi apresentada pela primeira vez por Imbert (1880), em uma tentativa de modelar a extensão uniaxial de uma borracha, seguido de Hartig (1893) que usou a mesma medida com finalidade semelhante. Ludwik (1909) foi o primeiro a introduzir a versão unidimensional da medida de deformação Logarítmica como resultado da integral da deformação instantânea para estiramentos uniaxiais. Uma lei elástica logarítmica tridimensional foi apresentada por Hencky (1928), a quem normalmente se atribui o pioneirismo de tal feito. No entanto, recentemente, Martin et al. (2018) mudam essa percepção afirmando que a primeira introdução do tensor de deformação Logarítmica em sólidos (3D) na elasticidade não linear deve-se, na verdade, ao trabalho do geólogo Becker (1893). Depois dessa

breve introdução histórica, apoiada principalmente no trabalho de Martin et al. (2018), o tensor de deformação Logarítmica é apresentado pela Eq. 3.20.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^L] = \frac{1}{2} \ln[\mathbf{C}] = \ln[\mathbf{U}] \quad 3.20$$

3.2.2.4 Medida de Deformação Hiperbólica (Swainger)

A medida de deformação apresentada pela Eq. 3.21 e aqui referida pelo nome de Hiperbólica foi primeiramente descrita por Swainger (1947) e definida com maior rigor matemático por Hershey (1952).

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^H] = [\mathbf{I}] - [\mathbf{C}]^{-1/2} = [\mathbf{I}] - [\mathbf{U}]^{-1} \quad 3.21$$

3.2.2.5 Medida de Deformação de Almansi

A Eq. 3.22 mostra o tensor de deformação introduzido por Almansi (1911) e Hamel (1912) e generalizado por Murnaghan (1937).

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^A] = \frac{1}{2}([\mathbf{I}] - [\mathbf{C}]^{-1}) = \frac{1}{2}([\mathbf{I}] - [\mathbf{U}]^{-2}) \quad 3.22$$

3.2.2.6 Formação da Família Seth-Hill

A Eq. 2.28, que representa a família Seth-Hill para o caso uniaxial, é agora generalizada para sólidos, considerando a descrição Lagrangiana, pela Eq. 3.23. A variável m é uma constante inteira que pode assumir os valores: $m = -2$ (Almansi), $m = -1$ (Hiperbólica), $m = 0$ (Logarítmica), $m = 1$ (Biot) e $m = 2$ (Green), e tem a finalidade de discriminar qual medida de deformação da família Seth-Hill está sendo analisada/utilizada.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{sh}] = \begin{cases} \frac{1}{m}([\mathbf{U}]^m - [\mathbf{I}]) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln([\mathbf{U}]) & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad 3.23$$

3.3 Tensores de Tensão

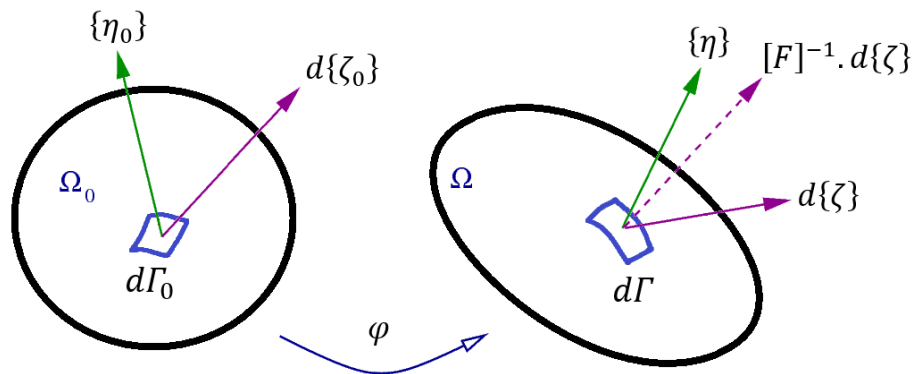


Figura 3.3: Mudança de configuração de um sólido.

Esta subseção utiliza o trabalho de Belytschko et al. (2014) como referência para a apresentação dos conceitos fundamentais para a definição dos tensores de tensão de Cauchy e Nominal. Na Figura 3.3, tem-se a configuração de referência Ω_0 , a normal externa de um elemento de superfície $d\Gamma_0$ é dada por $\{\eta_0\}$ e a força de superfície (*traction*) agindo nessa superfície é $\{t_0\}$ levando a um vetor de força $d\{\zeta_0\}$. Na configuração deformada Ω , o elemento de superfície muda para $d\Gamma$ com normal externa $\{\eta\}$ e força de superfície $\{t\}$ levando a uma força $d\{\zeta\}$. Observe que essa superfície pode ser um corte hipotético dentro do corpo ou uma superfície real.

O tensor de Tensão de Cauchy, $[\boldsymbol{\sigma}^c]$, é definido pelas Eq. 3.24 e 3.25. Percebe-se que, por medir força agindo em um elemento de área na configuração deformada, trata-se de uma medida de tensão Euleriana.

$$d\{\zeta\} = \{t\} d\Gamma = [\boldsymbol{\sigma}^c] \cdot \{\eta\} d\Gamma \quad 3.24$$

ou

$$\{t\} = [\sigma^c] \cdot \{\eta\} \quad 3.25$$

O tensor de Tensão Nominal, $[\mathbf{P}]$, que neste trabalho é considerado como sendo o tensor transposto ao tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff de 1ª espécie, é definido pelas Eq. 3.26 e Eq. 3.27. A definição aqui estabelecida segue a convenção dos seguintes trabalhos (BELYTSCHKO et al., 2014; MARSDEN; HUGHES, 1994; OGDEN, 1997; TRUESDELL; NOLL, 2004), porém encontra-se na literatura nomenclaturas diferentes e contraditórias. Ao contrário da Tensão de Cauchy, a Tensão Nominal possui caráter Lagrangiano, como pode ser comprovado pela sua definição dependente da área na configuração de referência.

$$d\{\zeta\} = \{t\} d\Gamma = [\mathbf{P}] \cdot \{\eta_0\} d\Gamma_0 \quad 3.26$$

ou

$$\{t_0\} = \{t\} \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} = [\mathbf{P}] \cdot \{\eta_0\} \quad 3.27$$

Tanto $[\sigma^c]$ como $[\mathbf{P}]$ são medidas de tensão que possuem claro significado físico. A principal vantagem da utilização do tensor de Tensão de Cauchy está no fato de que, quando se trabalha com grandes deformações, a configuração final é muito diferente da configuração inicial; dessa forma, utilizar uma tensão que é definida na configuração deformada faz-se necessário. Geralmente, devido à clara manutenção do seu significado físico mesmo sob grandes deformações, a Tensão de Cauchy é a medida de tensão reportada como saída de *softwares* comerciais. Como explicam Mal e Singh (1991), a Tensão de Cauchy fornece uma descrição simples e direta da força por unidade de área em qualquer superfície interna de um sólido deformado, o que na prática faz com que seja a única medida de interesse para um engenheiro que conduz uma análise estrutural.

Por outro lado, a principal vantagem da Tensão Nominal está na facilidade de medi-la experimentalmente (SCHWAB; HARTER, 2021), sendo que para alguns modos puros de deformação, dependendo do nível de deformação e do conhecimento prévio que se tem das propriedades mecânicas do material, a sua utilização se faz razoável.

O tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie (Eq. 3.28 e 3.29) também é muito relevante na Mecânica do Contínuo. Trata-se de um tensor de tensão Lagrangiano que é energeticamente conjugado do tensor de Deformação de Green, como será demonstrado adiante. A principal vantagem da utilização desse par conjugado de tensão-deformação está na sua maior eficiência computacional, o que advém principalmente do fato de ser desnecessária uma decomposição polar na definição do tensor de Deformação de Green (CURNIER; ZYSSET, 2006).

$$d\{\zeta_0\} = [F]^{-1} \cdot \{t_0\} d\Gamma_0 = [\sigma^{2PK}]^T \cdot \{\eta_0\} d\Gamma_0 \quad 3.28$$

ou

$$[F]^{-1} \cdot \{t_0\} = [\sigma^{2PK}]^T \cdot \{\eta_0\} \quad 3.29$$

As relações entre essas três medidas de tensão são expressas pelas Eq. 3.30, 3.31 e 3.32, em que J , chamado de Jacobiano, é o determinante do tensor Gradiente de Deformação. A presença do Jacobiano representa a mudança da configuração usada: descrição Euleriana \leftrightarrow descrição Lagrangiana.

$$[\sigma^c] = \frac{[F][P]}{J} \quad 3.30$$

$$[P] = [\sigma^{2PK}][F]^T \quad 3.31$$

$$[\sigma^c] = \frac{[F][\sigma^{2PK}][F]^T}{J} \quad 3.32$$

3.4 Pares de Tensão-Deformação Energeticamente Conjugados

Segundo Farahani e Naghdabadi (2003), o conceito de conjugação em energia apresentado pela primeira vez por Hill (1968) afirma que uma medida de tensão genérica $[\sigma]$ é considerada o par conjugado de uma medida de deformação genérica $[\epsilon]$ se $[\sigma]:[\dot{\epsilon}]$ representa taxa de variação da energia interna por unidade volume de referência (potência), $\dot{\psi}$, ou seja:

$$\dot{\psi} = [\sigma^C]:[D] = [\sigma]:[\dot{\epsilon}] \quad 3.33$$

sendo $[\sigma^C]$ o tensor de Tensão de Cauchy, $[D]$ o tensor Taxa de Deformação definido pela Eq. 3.7, o operador $(:)$ a representação da contração dupla (*double-dot product*) e $[\dot{\epsilon}]$ a derivada temporal da medida de deformação genérica (exemplo: $[\dot{\epsilon}^G]$ é o tensor Taxa de Deformação de Green). A Eq. 3.33 mostra uma conjugação em potência, mas, conforme explicam Belytschko et al. (2014), todo par conjugado em potência também o é em trabalho.

Tem-se o par $[\sigma^C]$ e $[D]$ como referência por conta do claro significado físico que ambos os tensores possuem, que faz com que esses dois tensores apareçam na dedução da definição Potência para sólidos. Essa dedução é exposta por Ogden (1997) e, de maneira bem didática, também por MaGinty (2012), conforme reproduzida no APÊNDICE I. Porém muitos autores partem de pares sabidamente energeticamente conjugados (sabidamente por abundância de referências) para estabelecer relações de conjugação de outras medidas de tensão/deformação.

Aqui apresenta-se, como exemplo, a prova de conjugação em Potência e em trabalho do tensor de Deformação de Green, $[\epsilon^G]$, e o tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, $[\sigma^{2PK}]$. Esse desenvolvimento encontra-se em diversas fontes da literatura do tema, aqui se seguiu os trabalhos de Hackett (2018) e McGinty (2012). Conforme deduzido no APÊNDICE I, a Potência gerada por uma deformação em um sólido é representada pela Eq. 3.34, sendo V o Volume Atual.

$$P = \int_V [\sigma^C]:[D] dV \quad 3.34$$

Conforme a dedução mostrada no APÊNDICE II, a relação entre o tensor Taxa de Deformação, $[\mathbf{D}]$, e o tensor Taxa de Deformação de Green, $[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^G]$, é dada pela Eq. 3.35.

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{F}]^{-T} [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^G] [\mathbf{F}]^{-1} \quad 3.35$$

Substituindo a Eq. 3.35 na Eq. 3.34, obtém-se:

$$P = \int_V [\boldsymbol{\sigma}^C] : [\mathbf{F}]^{-T} [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^G] [\mathbf{F}]^{-1} dV \quad 3.36$$

Substituindo $dV = JdV_0$, em que V_0 é Volume Inicial, representando a mudança da natureza Euleriana para Lagrangiana, chega-se na Eq. 3.37.

$$P = \int_{V_0} [\boldsymbol{\sigma}^C] : [\mathbf{F}]^{-T} [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^G] [\mathbf{F}]^{-1} J dV_0 \quad 3.37$$

A passagem da Eq. 3.37 para a notação indicial facilita a visualização do rearranjo necessário para o próximo passo:

$$P = \int_{V_0} \sigma_{ij}^C F_{im}^{-T} \dot{\epsilon}_{mn}^G F_{nj}^{-1} J dV_0 \quad 3.38$$

Sabendo da relação entre o tensor de Tensão de Cauchy e do tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie (Eq. 3.32), fica claro o rearranjo necessário a ser feito:

$$P = \int_{V_0} J F_{nj}^{-1} \sigma_{ij}^C F_{im}^{-T} \dot{\epsilon}_{mn}^G dV_0 \quad 3.39$$

$$P = \int_{V_0} [\boldsymbol{\sigma}^{2PK}] : [\boldsymbol{\varepsilon}^G] dV_0 \quad 3.40$$

Definido o tensor de tensão energeticamente conjugado do tensor de Deformação de Green, $[\boldsymbol{\varepsilon}^G]$, daqui em diante, por praticidade de notação, utilizar-se-á $[\boldsymbol{\sigma}^G]$ para denotar o tensor de Tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie: $[\boldsymbol{\sigma}^G] = [\boldsymbol{\sigma}^{2PK}]$.

Essa passagem entre diferentes pares pode ser feita também utilizando a definição de trabalho, conforme APÊNDICE I. Muitos trabalhos apresentam relações matemáticas entre diferentes medidas de tensão, entre diferentes medidas de deformação ou entre diferentes quantidades físicas de interesse, assim como alguns outros apresentam a tensão conjugada de uma determinada medida de deformação ou vice-versa (BELYTSCSKO et al., 2014; DUI; REN, 1999; DUI GUANSUO; REN QINGWEN; SHEN ZHUJIANG, 2000; FARAHANI; NAGHDABADI, 2000, 2003; GUO; CHI-SING, 1992; GUO ZHONG-HENG; DUBEY, 1984; HACKETT, 2016; HILL, 1968, 1979; HOGER, 1987; ITSKOV, 2019; LATORRE; MONTÁNS, 2016; OGDEN, 1997; XIAO, 1995).

Farahani e Naghdabadi (2003) apresentam uma fórmula genérica capaz de relacionar matematicamente quaisquer dois tensores de tensão. Sejam $[\boldsymbol{\varepsilon}^f] = \sum_i f(\lambda_i) \{N_i\} \otimes \{N_i\}$ e $[\boldsymbol{\varepsilon}^k] = \sum_i k(\lambda_i) \{N_i\} \otimes \{N_i\}$ tensores de Deformação Lagrangianos arbitrários, conforme a decomposição espectral definida pela Eq. 3.13. Além disso, sejam $[\boldsymbol{\sigma}^f] = \bar{\sigma}_{ij}^f \{N_i\} \otimes \{N_j\}$ e $[\boldsymbol{\sigma}^k] = \bar{\sigma}_{ij}^k \{N_i\} \otimes \{N_j\}$ seus tensores de Tensão energeticamente conjugados, respectivamente. Então, para o caso de estiramentos principais não coalescentes, Farahani e Naghdabadi (2003) apresentam a Eq. 3.41, que relaciona matematicamente as componentes desses tensores de tensão. Essa expressão será importante em desenvolvimentos a serem realizados mais adiante nesta tese.

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ii}^f = \frac{k'(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)} \bar{\sigma}_{ii}^k & i = 1, 2, 3 \\ \bar{\sigma}_{ij}^f = \frac{k(\lambda_i) - k(\lambda_j)}{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)} \bar{\sigma}_{ij}^k & i \neq j \end{cases} \quad 3.41$$

3.5 Modelos Hiperelásticos

A criação de modelos hiperelásticos pode ser dividida em dois grupos. No primeiro, os modelos são gerados a partir de expressões matemáticas que façam da FDED uma função de invariantes (I_i) ou estiramentos (λ_i) do Tensor de Alongamento Direito $[\mathbf{U}]$ ou do Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green $[\mathbf{C}]$. A Eq. 3.42 apresenta esse tipo de modelo, que conta com inúmeros representantes na literatura do tema, com destaque para os modelos de Mooney-Rivlin (MOONEY, 1940), Neo-Hookean (TRELOAR, 1943), Ogden (OGDEN, 1972), Yeoh (YEOH, 1990), Arruda-Boyce (ARRUDA; BOYCE, 1993) e Gent (GENT, 1996), além dos modelos recentemente criados pelos trabalhos citados na subseção “1.3 Justificativa”.

$$\psi = f(I_1, I_2, I_3) \quad \text{ou} \quad \psi = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad 3.42$$

Nesse primeiro grupo, a representação de materiais compressíveis parte da decomposição multiplicativa do tensor Gradiente de Deformação proposta por Flory (1961) mostrada pela Eq. 3.43:

$$[\mathbf{F}] = [\tilde{\mathbf{F}}][\bar{\mathbf{F}}] \quad 3.43$$

em que $[\tilde{\mathbf{F}}]$ é a parcela volumétrica e $[\bar{\mathbf{F}}]$ a parcela isocórica do Gradiente de Deformação, definidas pelas Eq. 3.44 e 3.45.

$$[\tilde{\mathbf{F}}] = J^{1/3} [\mathbf{I}] \quad 3.44$$

$$[\bar{\mathbf{F}}] = \frac{[\mathbf{F}]}{J^{1/3}} \quad 3.45$$

Então, como explica Sansour (2008), a FDED é descrita de maneira desacoplada, a partir de uma decomposição aditiva em partes volumétrica, $\tilde{\psi}$, e isocórica, $\bar{\psi}$:

$$\psi = \tilde{\psi} + \bar{\psi} \quad 3.46$$

As definições dessas duas parcelas, volumétrica e isocórica, são então dependentes de invariantes ou estiramentos ligados às respectivas parcelas, também volumétrica e isocórica, do tensor Gradiente de Deformação ou de tensores dele dependentes. Uma abordagem usual, mostrada aqui como exemplo, usa os invariantes da porção isocórica do Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green, $[\bar{\mathbf{C}}] \rightarrow \bar{I}_1, \bar{I}_2$, definido pela Eq. 3.47 em contraste com a definição dada pela Eq. 3.10.

$$[\bar{\mathbf{C}}] = [\bar{\mathbf{F}}]^T [\bar{\mathbf{F}}] \quad \text{ou} \quad \bar{C}_{ij} = \bar{F}_{ki} \bar{F}_{kj} \quad 3.47$$

$$\psi = \tilde{\psi}(J) + \bar{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad 3.48$$

O segundo grupo de modelos hiperelásticos é baseado na generalização direta da elasticidade linear para grandes deformações, usando a lei de Hooke como base e variando o par conjugado de tensão e deformação. Trata-se de um processo que também encontra na literatura uma relevante variedade de representantes, como citado na subseção “1.3 Justificativa”. Esses modelos chamados de tipo-Hookeanos têm o comportamento mecânico intrinsecamente ligado à medida de deformação utilizada (XIAO; CHEN, 2002). A Eq. 3.49 mostra a lei de Hooke 3D para um par genérico de tensor de tensão, $[\boldsymbol{\sigma}]$, e deformação, $[\boldsymbol{\varepsilon}]$, e a Eq. 3.50 mostra a FDED correspondente.

$$[\boldsymbol{\sigma}] = L_1(\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])[\mathbf{I}] + 2L_2[\boldsymbol{\varepsilon}] \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = L_1 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2L_2 \varepsilon_{ij} \quad 3.49$$

$$\psi([\boldsymbol{\varepsilon}]) = \frac{L_1}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 + L_2 (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}]^2) \quad \text{ou} \quad \psi(\varepsilon_{ij}) = \frac{L_1}{2} (\varepsilon_{kk})^2 + L_2 (\varepsilon_{lm} \varepsilon_{ml}) \quad 3.50$$

Nos modelos tipo-Hookeanos, a variação do Coeficiente de Poisson, ν , permite representar materiais incompressíveis, compressíveis e auxéticos, entrando nas Eq. 3.49 e Eq. 3.50 por meio dos Parâmetros de Lamé, L_1 e L_2 . A simplicidade de representação de materiais compressíveis por FDEDs tipo-Hookeanos em relação às FDEDs dependentes de

invariantes/estiramentos resulta em vantagens práticas relevantes: fórmulas analíticas explícitas e simples para modos puros de deformação, permitindo fácil calibração dos modelos com dados experimentais, e formulações mais simples para implementação computacional.

4. NOVAS MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

As medidas de deformação clássicas (Tabela 2.1, Eq. 2.28 e Eq. 3.23) são apresentadas de maneira gráfica pela Figura 4.1 na versão uniaxial.

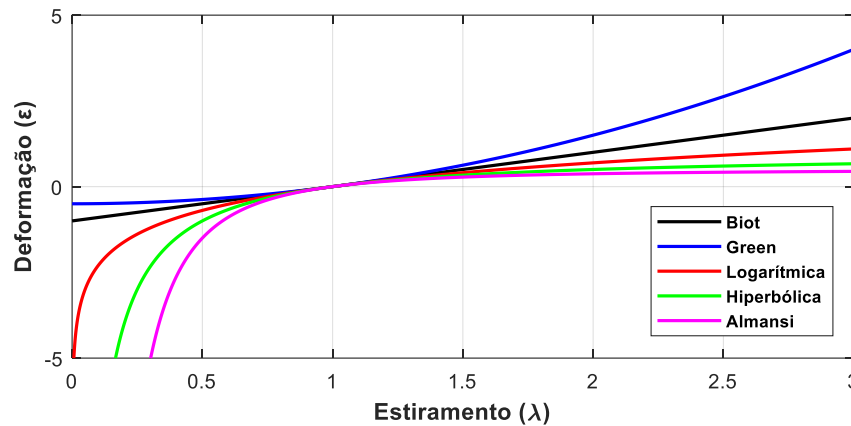


Figura 4.1: Medidas de Deformação clássicas (Família de Seth-Hill).

As dificuldades que decorrem do uso das medidas de deformação clássicas em regime de médias e grandes deformações são: as medidas de Green e Biot são problemáticas na compressão, pois não tendem a $-\infty$ quando o estiramento se aproxima de 0; na tração, as medidas de Almansi e Hiperbólica não apresentam um crescimento monotônico com o aumento do estiramento; e a medida Logarítmica, que atende essas duas demandas, apresenta perda de rigidez ao longo de toda a curva de tração, comportamento incomum entre os materiais hiperelásticos utilizados em engenharia. Lembrando que, por se tratar de um estudo de modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos, a escolha da medida de deformação também tenta descrever o comportamento mecânico do material.

4.1 Família Seno-Hiperbólica Generalizada

Neste contexto, o presente trabalho apresenta uma família de medidas de deformação baseadas em uma função simples, objetiva (discussão sobre objetividade é feita no APÊNDICE III) e versátil. Com a presença de apenas uma constante material real diferente de zero adicionada, $n \in R^*$, pode-se controlar as características que são a principal preocupação sobre a consistência física de uma medida de deformação: aumento monotônico ao longo de toda a curva (primeira derivada sempre positiva) e tendência para $-\infty$ quando o estiramento (λ) se

aproxima de 0. A família de medidas de deformação Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG) é dada, em sua versão uniaxial, ε_{SHG} , pela Eq. 4.1, em que ε representa qualquer medida de deformação já existente ou que venha a ser criada (GRECO; PEIXOTO, 2022).

$$\varepsilon_{SHG} = n^{-1} \sinh(n\varepsilon) \quad 4.1$$

A Eq. 4.2 apresenta a versão tensorial da família SHG, $[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}]$, em que $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ representa qualquer tensor de medida de deformação já existente ou que venha a ser criado (PEIXOTO; GRECO; VASCONCELLOS, 2024).

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] = n^{-1} \sinh(n[\boldsymbol{\varepsilon}]) \quad 4.2$$

Se, por exemplo, retomamos a Eq. 2.28, que apresenta a versão uniaxial da família de Seth-Hill, ε_{sh} , pode-se utilizá-la como argumento da função seno hiperbólica normalizada que caracteriza a família SHG (Eq. 4.3).

$$\varepsilon_{SHG} = \begin{cases} n^{-1} \sinh \left[\frac{n}{m} (\lambda^m - 1) \right] & \text{para } m \neq 0 \\ n^{-1} \sinh[n \ln(\lambda)] = \frac{1}{2n} (\lambda^n - \lambda^{-n}) & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad 4.3$$

Da mesma forma, pode-se utilizar como exemplo a versão tensorial da família Seth-Hill de medidas de deformação para usar como argumento da versão tensorial da família SHG (Eq. 4.4). Essas medidas representadas pela Eq. 4.4 são as medidas de deformação estudadas aqui nesta tese, formando um conjunto de medidas ao qual se dá o nome de família SHG–Seth-Hill. Exemplo de nomenclatura de uma subfamília: para $m = 1 \rightarrow$ subfamília SHG–Biot.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] = \begin{cases} n^{-1} \sinh \left[\frac{n}{m} ([\mathbf{U}]^m - 1) \right] & \text{para } m \neq 0 \\ n^{-1} \sinh[n \ln([\mathbf{U}])] & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad 4.4$$

Conforme apresentado no artigo de Peixoto et al (2024), as Figura 4.2**b**, **c**, **d**, **e** e **f** mostram, respectivamente, as subfamílias derivadas do uso de: $m = 2$ (SHG–Green), $m = 1$ (SHG–

Biot), $m = 0$ (SHG-Logarítmica), $m = -1$ (SHG-Hiperbólica) e $m = -2$ (SHG-Almansi). A Figura 4.1 é repetida como Figura 4.2a para facilitar a comparação.

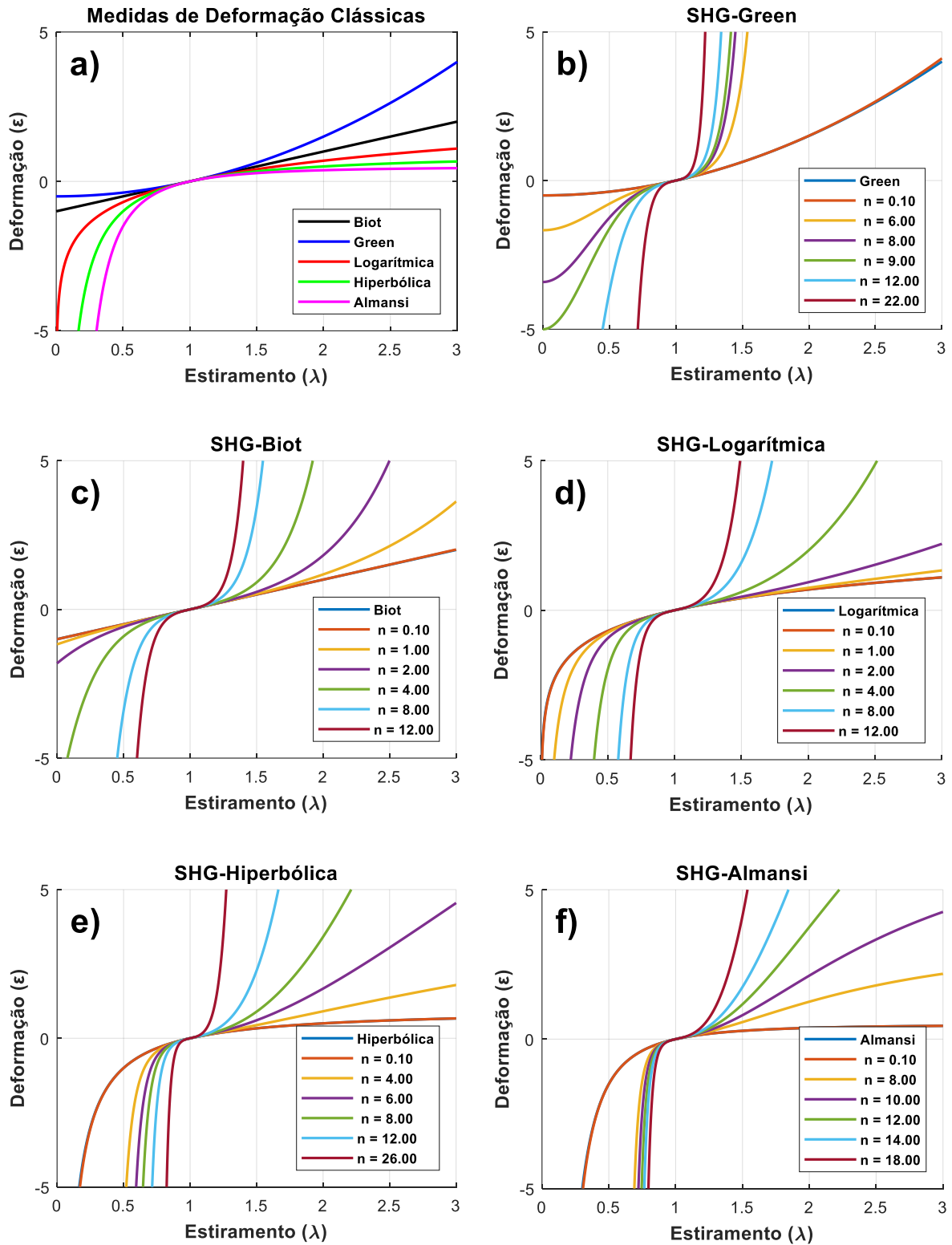


Figura 4.2: Gráficos de Deformação \times Estiramento: (a) Seth-Hill family; (b, c, d e e) SHG subfamílias com a variação de n .

Nos gráficos, alguns valores de n foram utilizados para exemplificar alguns membros da nova família, e para todos os gráficos o valor de $n = 0.1$ foi apresentado para demonstrar a tendência de retorno à medida de deformação original quando n tende a zero. O critério subjetivo utilizado para a escolha dos valores de n foi selecionar aqueles que produzissem gráficos mais claros e ilustrativos para mostrar a versatilidade obtida pela variação de n . Para cada subfamília de medidas de deformação foi necessário utilizar diferentes intervalos de valores de n para atingir esse objetivo.

Vale ressaltar que, se necessário, os valores de m podem variar além dos limites $-2 < m < 2$ para melhor representar um determinado material. Um aspecto importante que pode ser observado é que é possível abranger uma ampla gama de comportamentos mecânicos: i) assimetria entre compressão/tração, com maior rigidez na tração ($m > 1$); ii) simetria entre compressão e tração ($m = 1$); e iii) assimetria entre compressão/tração, com maior rigidez na compressão ($m < 1$). Neste ponto pode-se estabelecer que com a variação das variáveis m e n , são obtidas diversas medidas de deformação, e todas essas medidas de deformação juntas formam a família SHG, com cada uma dessas medidas de deformação representando um modelo hiperelástico que, por sua vez, descreve um determinado comportamento material.

4.1.1 Cálculo dos tensores de deformação SHG

As funções hiperbólicas de tensores de segunda ordem obedecem às seguintes identidades:

$$\sinh([A]) = \frac{e^{[A]} - e^{-[A]}}{2} \quad 4.5$$

$$\cosh([A]) = \frac{e^{[A]} + e^{-[A]}}{2} \quad 4.6$$

No caso da subfamília SHG-Seth-Hill em que $m = 0$, ou seja, tensor de Deformação SHG-Logarítmica, a aplicação da identidade trigonométrica (Eq. 4.5) leva à Eq. 4.7, que expressa como que a partir do conhecimento de $[U]$ se chega à $[\boldsymbol{\epsilon}^{SHG}] \rightarrow m = 0$ de maneira direta. É interessante notar que essa subfamília SHG é igual à família de medidas de deformação definida por Itskov (2004).

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] = \frac{1}{2n} ([\mathbf{U}]^n - [\mathbf{U}]^{-n}) \quad 4.7$$

Para as subfamílias SHG-Seth-Hill em que $m \neq 0$ (Eq. 4.4), lembrando da definição dos tensores de deformação da família Seth-Hill apresentada pela Eq. 3.23, chega-se à Eq. 4.8.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] = \frac{1}{n} \frac{e^{n[\boldsymbol{\varepsilon}^{sh}]} - e^{-n[\boldsymbol{\varepsilon}^{sh}]}}{2} \quad 4.8$$

A função exponencial de tensores de segunda ordem diagonais, $[\mathbf{d}]$, é calculada da seguinte maneira:

$$[\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad 4.9$$

$$e^{[\mathbf{d}]} = \begin{bmatrix} e^{d_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{d_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{d_{33}} \end{bmatrix} \quad 4.10$$

Isso permite calcular a exponencial de uma matriz diagonalizável genérica $[\mathbf{A}]$ da seguinte forma:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}][\boldsymbol{\Lambda}^A][\mathbf{B}]^{-1} \quad 4.11$$

$$e^{[\mathbf{A}]} = [\mathbf{B}]e^{[\boldsymbol{\Lambda}^A]}[\mathbf{B}^{-1}] \quad 4.12$$

em que $[\boldsymbol{\Lambda}^A]$ é o tensor cuja diagonal é formada pelos autovalores de $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ é o tensor cujas colunas são os autovetores de $[\mathbf{A}]$. No caso dos tensores de Deformação e Tensão, $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ e $[\boldsymbol{\sigma}]$, os autovalores são as Deformações e Tensões Principais, respectivamente, e os autovetores são as Direções Principais. No caso dos tensores de Deformação da família Seth-Hill $[\boldsymbol{\varepsilon}^{sh}]$, os seus

autovetores são iguais aos autovetores do Tensor de Alongamento Direito $[U]$, logo o Tensor de Transformação $[Q]$, formado pelos autovetores, é igual para esses dois tensores $[Q_{\varepsilon^{sh}}] = [Q_U]$. A partir dessas informações, chega-se à Eq. 4.13, que juntamente com a relação entre as deformações principais da família Seth-Hill, λ_i^{sh} , e os estiramentos principais (autovalores de $[U]$), λ_i , fica possível, a partir de $[U]$, chegar às subfamílias SHG-Seth-Hill em que $m \neq 0$.

$$[\varepsilon^{SHG}] = \frac{1}{2n} \{ [Q_U] (e^{n[\Lambda^{sh}]} - e^{-n[\Lambda^{sh}]}) [Q_U]^{-1} \} \quad 4.13$$

$$\lambda_i^{sh} = \frac{1}{m} (\lambda_i^m - 1) \quad \rightarrow \quad [\Lambda^{sh}] = \frac{1}{m} ([\Lambda]^m - [I]) \quad 4.14$$

4.1.2 Cálculo dos tensores de tensão conjugados da deformação SHG

A definição dos tensores de tensão conjugados das medidas de deformação SHG é feita a partir da Eq. 3.41. Nessa equação, ao se considerar que $[\varepsilon^k]$ é o tensor de Deformação de Green, $[\varepsilon^G]$, então a Eq. 3.41 se torna:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ii}^f = \frac{\lambda_i}{f'(\lambda_i)} \bar{\sigma}_{ii}^G & i = 1, 2, 3 \\ \bar{\sigma}_{ij}^f = \frac{1}{2} \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)} \bar{\sigma}_{ij}^G & i \neq j \end{cases} \quad 4.15$$

Agora, ao considerar que $[\varepsilon^f]$ é o tensor Deformação SHG para $m \neq 0$, $[\varepsilon^{SHG}]$, tem-se a Eq. 4.16.

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ii}^{SHG} = \lambda_i^{2-m} \operatorname{sech} \left[\frac{n}{m} (\lambda_i^m - 1) \right] \bar{\sigma}_{ii}^G & i = 1, 2, 3 \\ \bar{\sigma}_{ij}^{SHG} = \frac{n}{2} \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{\operatorname{senh} \left[\frac{n}{m} (\lambda_i^m - 1) \right] - \operatorname{senh} \left[\frac{n}{m} (\lambda_j^m - 1) \right]} \bar{\sigma}_{ij}^G & i \neq j \end{cases} \quad 4.16$$

Ademais, ao considerar que $[\boldsymbol{\varepsilon}^f]$ é o tensor Deformação SHG para $m = 0$, obtém a Eq. 4.17.

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ii}^{SHG} = \lambda_i^2 \operatorname{sech}[n \ln(\lambda_i)] \bar{\sigma}_{ii}^G & i = 1, 2, 3 \\ \bar{\sigma}_{ij}^{SHG} = \frac{n}{2} \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{\operatorname{senh}[n \ln(\lambda_i)] - \operatorname{senh}[n \ln(\lambda_j)]} \bar{\sigma}_{ij}^G & i \neq j \end{cases} \quad 4.17$$

As Eq. 4.16 e Eq. 4.17 serão importantes para desenvolvimentos algébricos em seções subsequentes da tese.

4.1.3 Tensor Taxa de Deformação SHG

Aqui é apresentado o tensor Taxa de Deformação SHG, $[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{SHG}]$, que se conjuga com o tensor de Tensão Seno-Hiperbólica Generalizada, $[\boldsymbol{\sigma}^{SHG}]$, no sentido de potência. O tensor Taxa de Deformação SHG não é utilizado na presente tese, porém é definido para possivelmente ser usado em futuros trabalhos que dela precisem, principalmente aqueles que tratem de viscoelasticidade e hipoeelasticidade, em que modelos constitutivos são construídos a partir de relações entre as taxas de tensão e deformação.

Farahani e Naghdabadi (2003) apresentam a Eq. 4.18, em que o ponto ($\dot{\quad}$) significa derivada temporal, apóstrofo ($'$) significa derivada em relação à λ e, como definem Mehrabad e Nemat-Nasse (1987), $\{\dot{N}_i\} = [\boldsymbol{\Omega}^L]\{N_i\}$.

$$\dot{f}([\boldsymbol{U}]) = \sum_i \dot{\lambda}_i f'(\lambda_i) \{N_i\} \otimes \{N_i\} + [\boldsymbol{\Omega}^L]f([\boldsymbol{U}]) - f([\boldsymbol{U}])[\boldsymbol{\Omega}^L] \quad 4.18$$

A partir da formulação acima, tem-se como tensor Taxa de Deformação SHG para $m = 0$:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{SHG}] = \sum_i \dot{\lambda}_i \lambda_i^{-1} \cosh[n \ln(\lambda_i)] \{N_i\} \otimes \{N_i\} + [\boldsymbol{\Omega}^L][\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] - [\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}][\boldsymbol{\Omega}^L] \quad 4.19$$

Enquanto que para $m \neq 0$, obtém-se:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{SHG}] = \sum_i \dot{\lambda}_i \lambda_i^{m-1} \cosh \left[\frac{n}{m} (\lambda_i^m - 1) \right] \{ \mathbf{N}_i \} \otimes \{ \mathbf{N}_i \} + [\boldsymbol{\Omega}^L][\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] - [\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}][\boldsymbol{\Omega}^L] \quad 4.20$$

No entanto, faz-se aqui um desenvolvimento alternativo que apresentará uma expressão em forma fechada (*closed form* ou *basis-free*), inclusive porque alguns aspectos da álgebra/cálculo tensorial possivelmente podem interessar leitores deste trabalho. Partindo da Eq. 4.13, é preciso fazer considerações ao se aplicar a derivada temporal: usando como referência Hirsch et al. (1974), fica estabelecido que

Se $[\mathbf{A}]$ é uma matriz quadrada $n \times n$, então a série

$$[\mathbf{I}] + [\mathbf{A}] + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{A}]^3}{3!} + \dots \quad 4.21$$

converge para uma matriz $n \times n$ que é representada por $e^{[\mathbf{A}]}$, também denotada por $\exp([\mathbf{A}])$. Isto é,

$$e^{[\mathbf{A}]} = \exp([\mathbf{A}]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[[\mathbf{I}] + [\mathbf{A}] + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!} + \frac{[\mathbf{A}]^3}{3!} + \dots + \frac{[\mathbf{A}]^m}{m!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A}]^k}{k!} \quad 4.22$$

Hubbard e West (1995) provam que:

$$\frac{d}{dt} e^{[\mathbf{A}]t} = e^{[\mathbf{A}]t} [\mathbf{A}] = [\mathbf{A}] e^{[\mathbf{A}]t} \quad 4.23$$

quando se trata de uma matriz constante, ou seja, $[\mathbf{A}(t)] = [\mathbf{A}]$ para $t \in (-\infty, \infty)$. A questão que precisa ser esclarecida para a definição do tensor Taxa de Deformação SHG é se, para um caso mais geral, em que $[\mathbf{A}(t)]$ não é uma matriz constante, é possível aplicar a regra da cadeia. Liu (2003) prova, por meio de um contraexemplo, que não, a regra da cadeia não se aplica de maneira geral à exponencial de matrizes. Wood (2004) diz que uma explicação mais conceitual

é a de que a manipulação de matrizes exponenciais não se dá da mesma maneira que em casos escalares a menos que as matrizes envolvidas comutem, o que se aplica à regra da cadeia.

Wilcox (2004) apresenta uma expressão mais geral para a derivada de uma função exponencial cujo expoente é uma matriz função de t , $[\mathbf{A}(t)]$:

$$\frac{d}{dt} e^{[\mathbf{A}(t)]} = \int_0^1 e^{\alpha[\mathbf{A}(t)]} \frac{d[\mathbf{A}(t)]}{dt} e^{(1-\alpha)[\mathbf{A}(t)]} d\alpha \quad 4.24$$

Na Álgebra de Lie pode-se utilizar a expressão mostrada por Rossmann (2002):

$$\frac{d}{dt} e^{[\mathbf{A}(t)]} = e^{[\mathbf{A}(t)]} \frac{1 - e^{ad_{[\mathbf{A}]}}}{ad_{[\mathbf{A}]}} \frac{d[\mathbf{A}(t)]}{dt} \quad 4.25$$

em que $ad_{[\mathbf{A}]}$ é a transformação da Álgebra de Lie dada por $ad_{[\mathbf{A}]}(Y) = [\mathbf{X}, Y]$. A notação $[\mathbf{X}, Y]$ é a representação do comutador das matrizes, $[\mathbf{X}]$ e $[\mathbf{Y}]$ no caso.

Se a regra da cadeia puder ser aplicada ao caso estudado, em que o expoente da função é a família de tensores de Deformação de Seth-Hill, então o cálculo do tensor de Taxa de Deformação SHG simplificar-se-ia expressivamente. Faz-se aqui a seguinte conjectura:

Conjectura 1: Dada uma matriz diagonal $[\mathbf{A}(t)]$ de dimensões $n \times n$ ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$), cujos elementos são funções de t genéricas, contínuas e com primitivas definidas, $a_{ij} = f_i(t)$ para $i = j$, então

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{C}(t)] = \frac{d}{dt} \exp([\mathbf{B}(t)]) = [\mathbf{A}(t)] \exp([\mathbf{B}(t)]) \quad 4.26$$

em que $[\mathbf{B}(t)]$ é uma matriz diagonal com elementos $b_{ij} = F_i(t)$ para $i = j$, sendo $F_i(t)$ as funções primitivas de $f_i(t)$, ou seja, $[\mathbf{A}(s)]$ é tal que

$$\frac{d}{dt} \exp([\mathbf{B}(t)]) = \exp\left(\int_0^t [\mathbf{A}(s)] ds\right) [\mathbf{A}(t)] = \exp([\mathbf{B}(t)]) [\mathbf{A}(t)] \quad 4.27$$

e

$$\frac{d}{dt} \exp([\mathbf{B}(t)]) = [\mathbf{A}(t)] \exp\left(\int_0^t [\mathbf{A}(s)] ds\right) = [\mathbf{A}(t)] \exp([\mathbf{B}(t)]) \quad 4.28$$

Usando o desenvolvimento utilizado por Liu (2003) para exemplificar a não generalidade da regra da cadeia para exponencial de matrizes, constrói-se a racionalização de que a regra se aplica ao caso específico de matrizes diagonais. Dada a matriz função:

$$[\mathbf{A}(t)]_{n \times n} = \begin{bmatrix} f_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(t) \end{bmatrix} \quad 4.29$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^t [\mathbf{A}(s)] ds\right) &= \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n(t) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n(t) \end{bmatrix}^2 + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n(t) \end{bmatrix}^3 + \dots \end{aligned} \quad 4.30$$

Então:

$$\exp\left(\int_0^t [\mathbf{A}(\mathbf{s})] ds\right) = \begin{bmatrix} e^{F_1(t)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{F_2(t)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{F_n(t)} \end{bmatrix} \quad 4.31$$

Para satisfazer a expressão $[\mathbf{C}(\mathbf{t})]' = [\mathbf{A}(\mathbf{t})][\mathbf{C}(\mathbf{t})]$, em que $[\mathbf{C}(\mathbf{t})] = \exp([\mathbf{B}(\mathbf{t})])$, então qualquer elemento de $[\mathbf{C}(\mathbf{t})]'$ deve ser tal que:

$$c'_{ij} = a_{ij}c_{ji} \quad 4.32$$

como $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ são diagonais, então para $i \neq j$ tem-se $c'_{ij} = a_{ij} = b_{ji} = 0$, e para $i = j$ tem-se

$$c'_{ii} = f_i(t)e^{F_i(t)} = e^{F_i(t)}f_i(t) \quad 4.33$$

Apesar de não haver na literatura (ao menos não que seja de conhecimento do autor e de seu orientador) um desenvolvimento explícito de que exponenciais de matrizes diagonais que são funções de uma variável, como t no exemplo, possuem derivada em relação a essa variável que obedece à regra da cadeia, é de conhecimento geral de que matrizes diagonais comutam entre si e que a exponencial de uma matriz diagonal é uma matriz também diagonal, por isso poderia inferir-se que a sua derivada também o seria e que a regra da cadeia aplicar-se-ia.

Com a informação confirmada de que a regra da cadeia se aplica às matrizes diagonais, modifica-se a Eq. 4.13 para que ela se transforme na Eq. 4.34. A partir desse momento, o Tensor de Transformação $[\mathbf{Q}_U]$ formado pelos autovetores do Tensor de Alongamento Direito $[\mathbf{U}]$, será representado simplesmente por $[\mathbf{Q}_U] \rightarrow [\mathbf{Q}]$. Vale ressaltar que os autovalores de $-\boldsymbol{\varepsilon}^{sh}$ possuem o sinal oposto aos autovalores de $[\boldsymbol{\varepsilon}^{sh}]$, mas com valores absolutos iguais.

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] = \frac{1}{2n} \left\{ [\mathbf{Q}]e^{n[\boldsymbol{\Lambda}^{sh}]}[\mathbf{Q}]^{-1} - [\mathbf{Q}]e^{-n[\boldsymbol{\Lambda}^{sh}]}[\mathbf{Q}]^{-1} \right\} \quad 4.34$$

Com as informações já apresentadas, aplicando a derivada temporal (regra do produto) e com os devidos rearranjos algébricos, é possível definir a Taxa de Deformação SHG com a Eq. 4.35. É relevante notar que como $[\mathbf{Q}]$ é um tensor ortogonal de 2ª ordem, $[\mathbf{Q}]^{-1} = [\mathbf{Q}]^T$.

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{SHG}] = [\mathbf{Q}][\dot{\boldsymbol{\Lambda}}^{sh}] \cosh(n[\boldsymbol{\Lambda}^{sh}]) [\mathbf{Q}]^T + [\dot{\mathbf{Q}}][\mathbf{Q}]^T [\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}] + [\boldsymbol{\varepsilon}^{SHG}][\mathbf{Q}][\dot{\mathbf{Q}}]^T \quad 4.35$$

No caso específico de $m = 0$, tem-se:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{SHG}] = \frac{1}{2n} \{ [\dot{\mathbf{Q}}]([\boldsymbol{\Lambda}]^n - [\boldsymbol{\Lambda}]^{-n})[\mathbf{Q}]^T + [\mathbf{Q}]([\dot{\boldsymbol{\Lambda}}]^n - [\dot{\boldsymbol{\Lambda}}]^{-n})[\mathbf{Q}]^T + [\mathbf{Q}]([\boldsymbol{\Lambda}]^n - [\boldsymbol{\Lambda}]^{-n})[\dot{\mathbf{Q}}]^T \} \quad 4.36$$

4.2 Família Tangente-Hiperbólica Generalizada

Aqui se apresenta de maneira breve uma outra nova família de medidas de deformação: a família Tangente Hiperbólica Generalizada (THG). A sua versão uniaxial é dada pela Eq. 4.37, em que ε representa qualquer medida de deformação. A ideia agora é considerar materiais que tenham como característica uma rigidez decrescente, tanto na tração quanto na compressão, de forma a contemplar os materiais que não podem ser modelados pela família SHG. A família THG tende a ser adequada para o regime de pequenas e médias (moderadas) deformações, pois não tende a $-\infty$ quando o estiramento tende a 0 e não apresenta aumento monotônico.

$$\varepsilon_{THG} = n^{-1} \tanh(n\varepsilon) \quad 4.37$$

As justificativas para possíveis aplicações da família THG, no presente trabalho, mantiveram-se em fase especulativa. Por isso, aqui no corpo da tese ela é apresentada somente com as informações necessárias para sua aplicação no estudo de treliças, maiores informações são apresentadas no APÊNDICE IV, podendo o leitor também recorrer à publicação de Peixoto e Greco (2022) para encontrar mais detalhes sobre essa família.

5. ESTUDOS NUMÉRICOS UNIDIMENSIONAIS COM A FPMEF: APLICAÇÃO EM TRELIÇAS

Nesta seção são feitos estudos de treliças utilizando a FPMEF. Além das formulações das medidas de deformação clássicas apresentadas no subitem “2.3 Formulação para estruturas treliçadas”, desenvolveu-se a formulação para o uso da medida SHG–Biot no contexto da FPMEF (Eq. 5.1 – 5.3).

$$\varepsilon_{SHG} = \frac{1}{n} \sinh \left[n \left(\frac{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}}{l_0} - 1 \right) \right] \quad 5.1$$

$$\left(F_k^{\beta(int)} \right) = \frac{\partial U_e^j}{x_k^\beta} = A_0^{(j)} \sigma_{SHG} \cosh[n(\lambda - 1)] (-1)^\beta \frac{(x_k^2 - x_k^1)}{l} \quad 5.2$$

$$\begin{aligned} \left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j = A_0^{(j)} (-1)^\beta (-1)^\alpha \left\{ \left[\frac{(x_i^2 - x_i^1)(x_k^2 - x_k^1)}{l} \right] \left[\frac{E_t(\varepsilon_{SH})}{l_0} \cosh^2[n(\lambda - 1)] \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{SHG} \left(\frac{n \sinh[n(\lambda - 1)]}{l_0} - \frac{\cosh[n(\lambda - 1)]}{l} \right) \right] + \frac{\sigma_{SH}}{l} \delta_{ik} \cosh[n(\lambda - 1)] \right\} \quad 5.3 \end{aligned}$$

As fórmulas necessárias para utilizar a medida THG–Biot são apresentadas a seguir (Eq. 5.4 – 5.6).

$$\varepsilon_{THG} = \frac{1}{n} \tanh \left[n \left(\frac{\sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2}}{l_0} - 1 \right) \right] \quad 5.4$$

$$\left(F_k^{\beta(int)} \right) = \frac{\partial U_e^j}{x_k^\beta} = A_0^{(j)} \cdot \sigma_{THG} \cdot \operatorname{sech}^2[n(\lambda - 1)] \cdot (-1)^\beta \cdot \frac{(x_k^2 - x_k^1)}{l} \quad 5.5$$

$$\begin{aligned} \left(H_{ik}^{\alpha\beta}\right)^j = A_0^{(j)}(-1)^\alpha(-1)^\beta \left\{ \frac{(x_i^2 - x_i^1)(x_k^2 - x_k^1)}{l} \left[\frac{E_t(\varepsilon_{THG})}{l_0} \operatorname{sech}^4[n(\lambda - 1)] \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{THG} \operatorname{sech}^2[n(\lambda - 1)] \left(2n \tanh[n(\lambda - 1)] + \frac{1}{l} \right) \right] - \frac{\sigma_{THG}}{l} \delta_{ik} \cdot \operatorname{sech}^2[n(\lambda - 1)] \right\} \end{aligned}$$

5.6

Nessa seção, a medida SHG-Biot com $n = 1$ será chamada simplesmente de medida Seno-Hiperbólica, e a medida THG-Biot com $n = 1$ será chamada simplesmente de medida Tangente-Hiperbólica. Todas as análises uniaxiais realizadas na presente seção usaram uma implementação computacional da FPMEF feita na linguagem de programação MATLAB.

5.1 Estudo uniaxial: Diferenças na resposta de acordo com a medida de deformação escolhida

Esta subseção apresenta um estudo com a aplicação da FPMEF de treliças na análise de quatro estruturas de referência (*benchmarks*). Aqui o principal objetivo é explicitar como que o uso de diferentes pares conjugados de tensão-deformação (modelos tipo-Hookeanos) geram diferentes trajetórias de equilíbrio, além de diferentes valores para variáveis de interesse ao longo dessas trajetórias. Em outras palavras, diferentes pares energéticos conjugados relacionados linearmente por uma relação hookeana geram diferentes Leis Constitutivas para os materiais.

São utilizadas no presente estudo de treliças, além das medidas Seth-Hill, somente as subfamílias SHG-Biot e THG-Biot, isso porque um aspecto que se tentou evidenciar nas análises é a simetria entre tração e compressão que essas subfamílias e a medida de Biot possuem, em contraste com a assimetria característica das demais medidas clássicas. Especula-se que essa questão é relevante principalmente na coerência das correções feitas na resposta elástica quando se acopla fenômenos de caráter energeticamente dissipativos, como, por exemplo, a plasticidade, a mecânica do dano, a mecânica da fratura, a fadiga etc. (no APÊNDICE IV se explica essa questão com mais detalhes).

5.1.1 Treliça espacial de três barras

Conforme mostra a Figura 5.1, a primeira estrutura a ser analisada é uma treliça espacial simétrica de três elementos com o mesmo comprimento, sendo a projeção da vista de cima igual a $L = 500$ [cm]. A posição vertical do nó central tem altura $H = 200$ [cm] e cada elemento possui as seguintes propriedades: $E = 20500$ [kN/cm²] e $A_0 = 6.53$ [kN/cm²]. Os resultados foram obtidos por meio do controle de deslocamento do nó central, com incrementos de posição fazendo com que sua altura diminuísse. Uma tolerância de 10^{-8} foi usada.

Tabela 5.1: Estiramentos obtidos para deformações normais de aproximadamente -6.896%.

Medida de Deformação	Estiramento (λ)	Força Axial (P)
Green	0.9285	-8571.7608
Biot	0.9310	-9232.0689
Logatômica	0.9334	-9891.2318
Hiperbólica	0.9355	-10549.367
Almansi	0.9374	-11206.576
Seno-Hiperbólica	0.9311	-9253.9979
Tangente-Hiperbólica	0.9309	-9188.1590

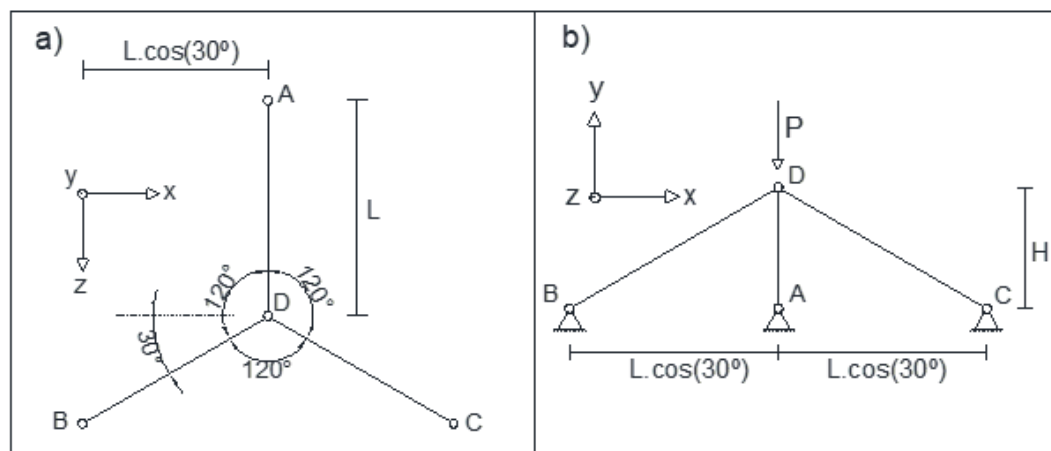


Figura 5.1: Treliça Espacial de Três Barras: a) Vista de cima; b) Vista de frente. Nós A, B e C são rotulados.

A Tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos quando se utiliza o mesmo valor de deformação ($\varepsilon = -6.896\%$). Pode-se perceber que, para uma mesma deformação, diferentes estiramentos e forças axiais são obtidos a partir das fórmulas das medidas de deformação. Nenhuma não linearidade material ou efeito de flambagem foi considerada durante a análise, mas vale a pena mencionar que o nível de tensão impõe estiramentos que chegam à 0.9285. O valor de deformação estabelecido foi escolhido porque, considerando a Deformação de Green, ao final da análise, o nó central (D) está na mesma altura dos nós fixos (A , B e C).

Outra análise possível é obtida impondo uma posição de equilíbrio e calculando a deformação. Por exemplo, a Tabela 5.2 apresenta as deformações normais obtidas para um mesmo nível de estiramento, $\lambda = 0.9285$, e suas tensões/forças axiais nos elementos, considerando diferentes medidas de deformação. Percebe-se que o valor da Deformação de Green, $\varepsilon_G = -0.06896$, é o menor em módulo para essa mesma posição limiar imposta, o que esclarece a utilização deste valor nas análises cujos resultados foram apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.2: Resultados para diferentes medidas de deformação considerando o mesmo Estiramento ($\lambda = 0.9285$).

Medida de Deformação	Deformação ($\mu\epsilon$)	Tensão (σ/σ_N)	Força Axial (kN)
Green	-68966	0.9642	-8571.7608
Biot	-71523	1.0000	-9574.4678
Logarítmica	-74210	1.0375	-10699.377
Hiperbólica	-77033	1.0770	-11961.940
Almansi	-80000	1.1185	-13379.627
Seno-Hiperbólica	-71584	1.0008	-9607.1539
Tangente-Hiperbólica	-71401	0.9982	-9509.4454

5.1.2 Treliça de von Mises

A treliça de von Mises com apoios de pino apresentada em Cai et al. (2019) é analisada aqui considerando os efeitos do uso de diferentes medidas de deformação. A estrutura (Figura 5.2) possui as seguintes propriedades: $L = 10$ [cm], $H = 5$ [cm] e $EA_0 = 20$ [kN]. O controle de deslocamento foi usado na análise e os incrementos de posição vertical foram impostos usando uma tolerância igual a 10^{-8} .

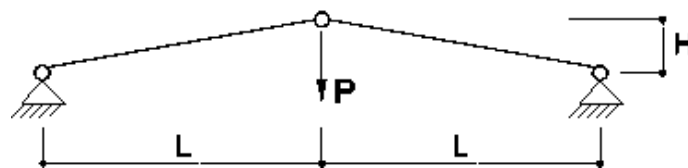


Figura 5.2: Treliça de von Mises.

Para as sete medidas de deformação em estudo, a Figura 5.3 mostra um gráfico com os diferentes caminhos de equilíbrio ($P \times h$) e a Figura 5.4 apresenta os resultados do deslocamento vertical (h) do nó central versus as forças axiais (N) nas barras. A força P e o deslocamento vertical são considerados positivos para baixo. As análises contidas nesses gráficos têm um intervalo de $0.894427 < \lambda < 1.1454$, para aços estruturais comuns, por exemplo, ainda se estaria longe dos pontos de ruptura, tanto em tração quanto em compressão.

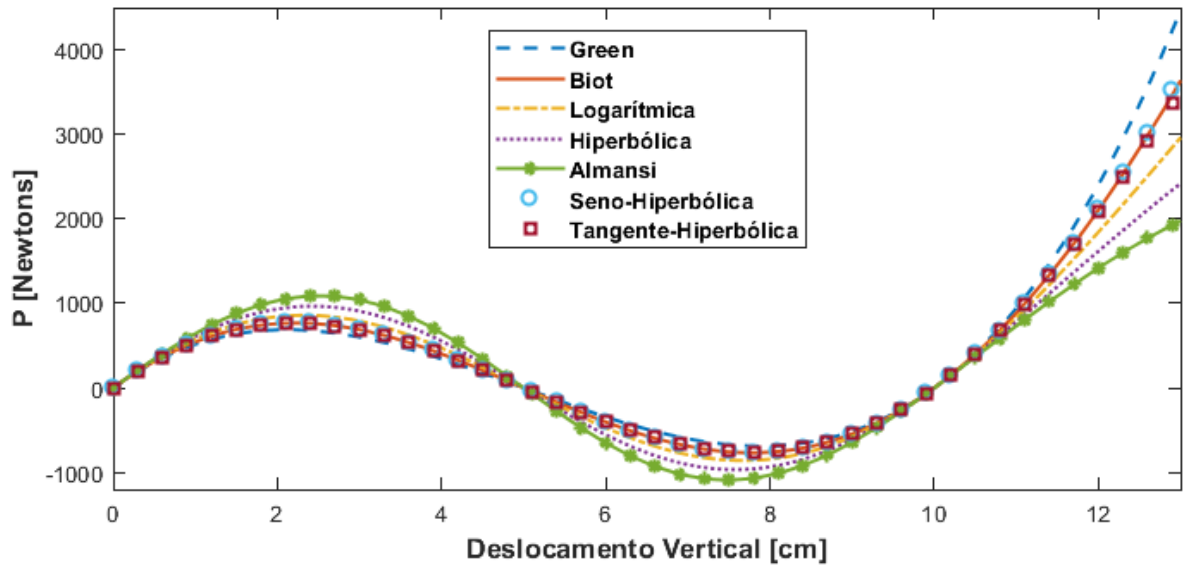


Figura 5.3: Força Externa (P) x Deslocamento (h).

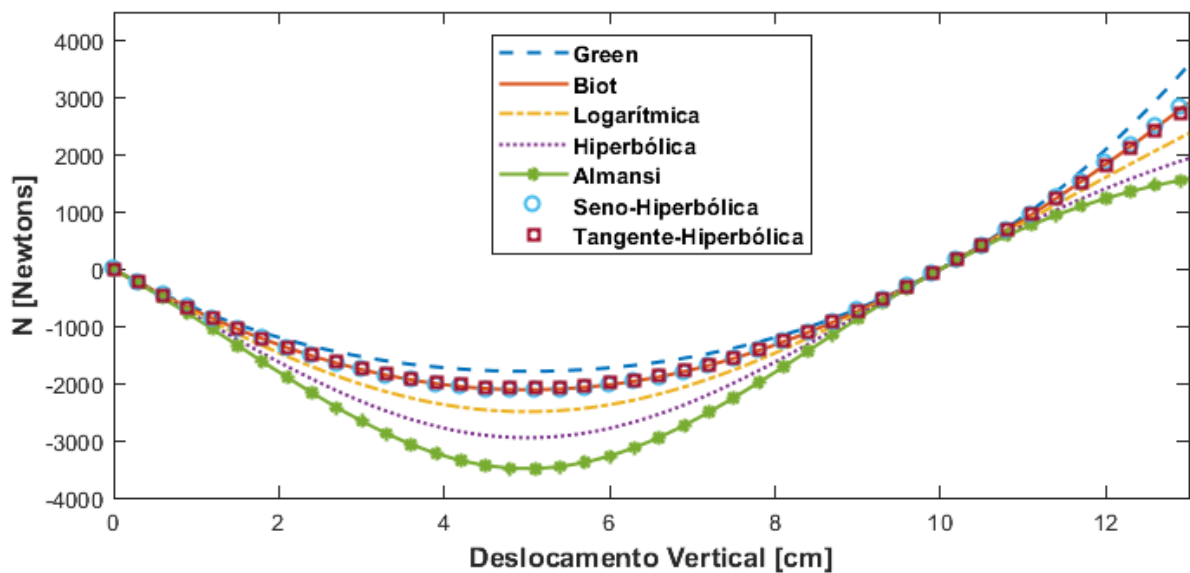


Figura 5.4: Força Interna Axial x Deslocamento Vertical.

Na Figura 5.3 percebe-se que, dependendo da medida de deformação, o caminho de equilíbrio pode ser bem diferente, com diferentes posições e forças externas para a ocorrência do fenômeno *snap-through*. Quando h está próximo de 0 ou 10 e, portanto, o valor de λ está próximo de 1, os caminhos de equilíbrio convergem, o que é consistente com o fato de que todas as medidas de deformação tendem à Deformação de Biot e todos os modelos constitutivos reduzem-se à Lei de Hooke para deformações infinitesimais. De forma semelhante, a Figura 5.4 mostra que as forças axiais apresentam valores diferentes quando a deformação é grande, mas convergem quando a deformação é pequena. Além disso, neste exemplo, os resultados das medidas Seno-Hiperbólica e Tangente-Hiperbólica são próximos aos resultados obtidos da

medida de deformação de Biot em ambos os gráficos. As diferenças de trajetórias de equilíbrio para diferentes modelos tipo-Hookeanos, como mostrado na Figura 5.4 e em outros resultados obtidos ao longo desse estudo também foram alcançados por outros trabalhos, como Brandt e Muñoz-Rojas (2024), por exemplo.

5.1.3 Domo circular treliçado

O domo circular treliçado apresentado na Figura 5.5 e na Figura 5.6 é uma referência disponível em Papadrakakis (1981) e Forde e Stiemer (1987). A estrutura tem 168 elementos, 73 nós e uma rigidez axial de $EA_0 = 10\,000$ [N] para cada membro. Para analisar esta estrutura, o controle de deslocamento foi usado, com incrementos de posição vertical sendo impostos no nó central usando uma tolerância igual a 10^{-8} . A força P e o deslocamento vertical são considerados positivos para baixo.

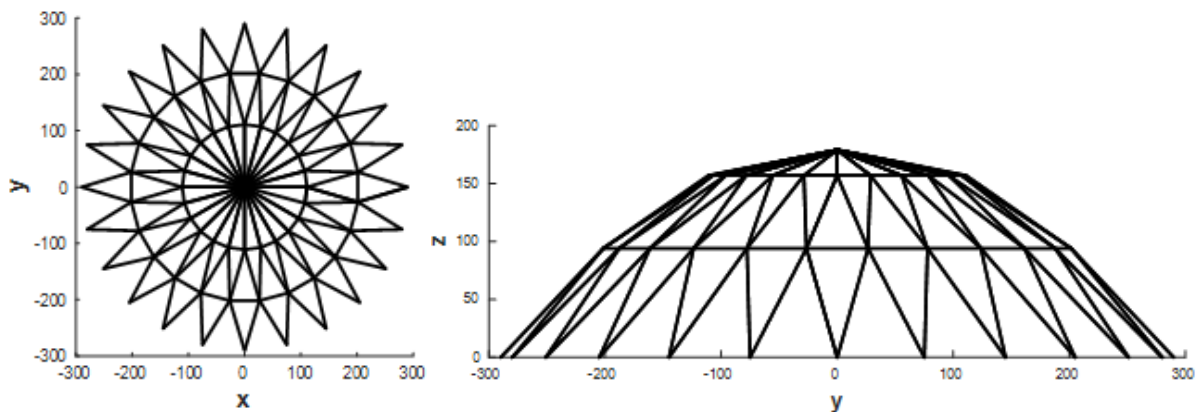


Figura 5.5: Da esquerda para a direita: a) Vista de cima; b) Vista de lado.

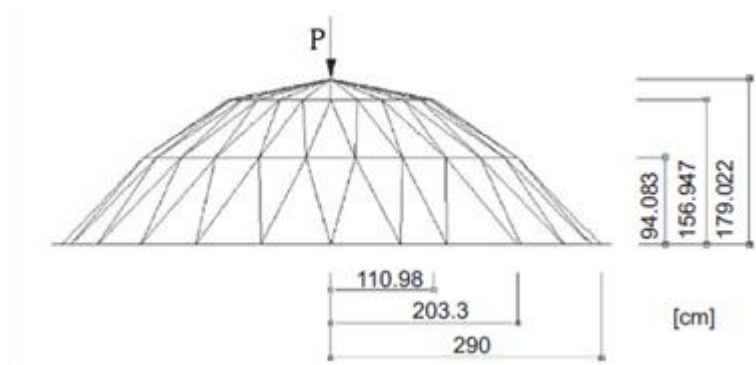


Figura 5.6: Domo Circular Treliçado (com cotas). Fonte: Greco e Ferreira (2009).

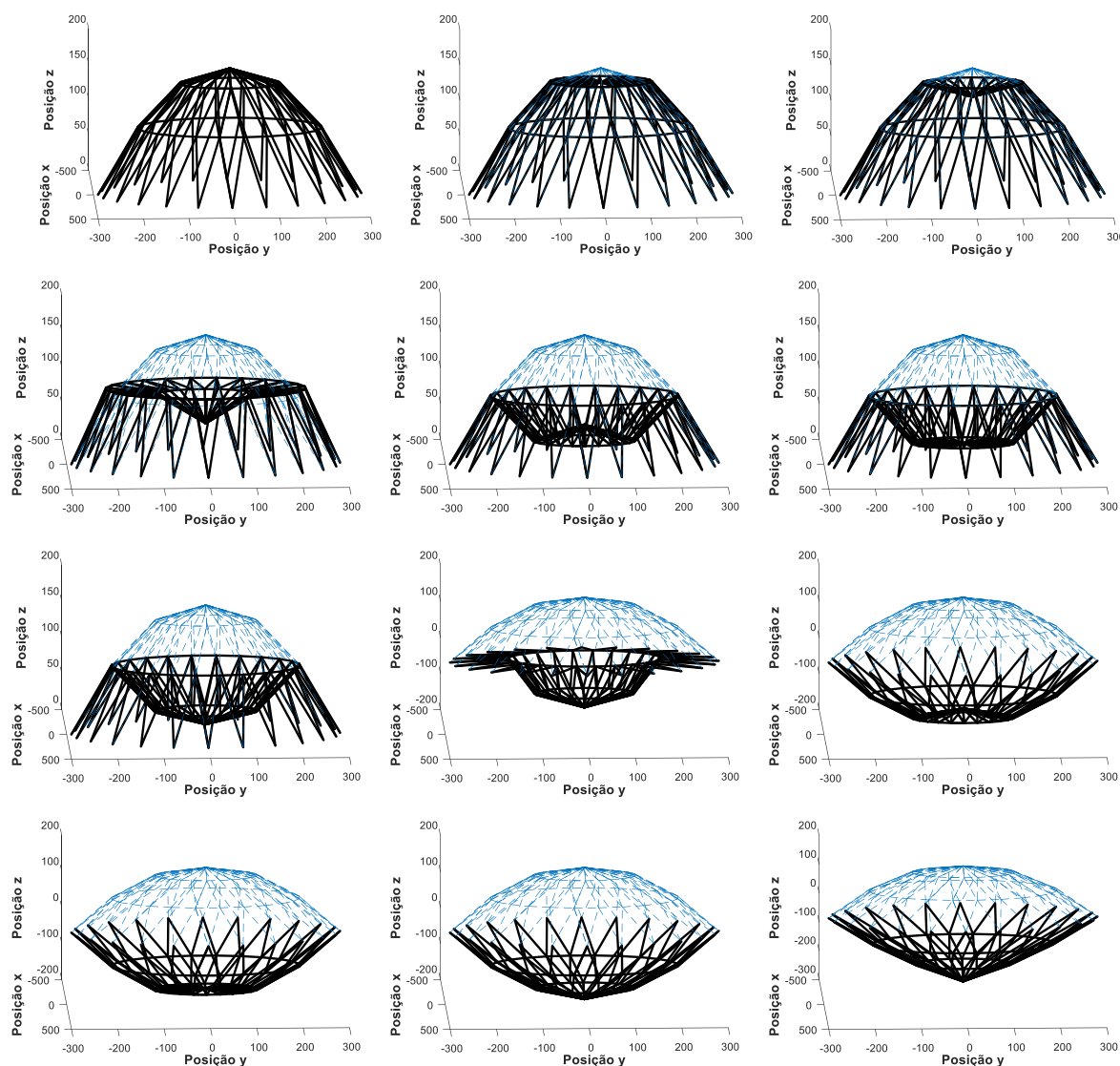


Figura 5.7: Configurações representativas da trajetória de equilíbrio estudada.

À medida que se acompanha o deslocamento do nó central, pode-se dividir o comportamento da estrutura em três etapas: 1) pequeno intervalo em que se tem todas as barras da estrutura sob compressão; 2) grande intervalo em que ocorreriam vários *snap-throughs* se fosse usada o controle de força e que se tem alguns elementos sob compressão enquanto outros estão tracionados; 3) por fim, chega-se a uma configuração onde todos os elementos estão sob tensão de tração e assim permanecem daí em diante. Ênfase é dada à análise do comportamento da estrutura na etapa 2), pois o fato de possuir barras comprimidas e tracionadas pode gerar informações importantes a respeito da importância da simetria de medidas de deformações. A Figura 5.7 apresenta a trajetória de equilíbrio através de uma série de imagens com algumas configurações representativas do comportamento da estrutura.

A Figura 5.8 mostra a Força Externa (P) x Deslocamento Vertical (h) do nó central e representa o movimento estrutural representado pela Figura 5.7.

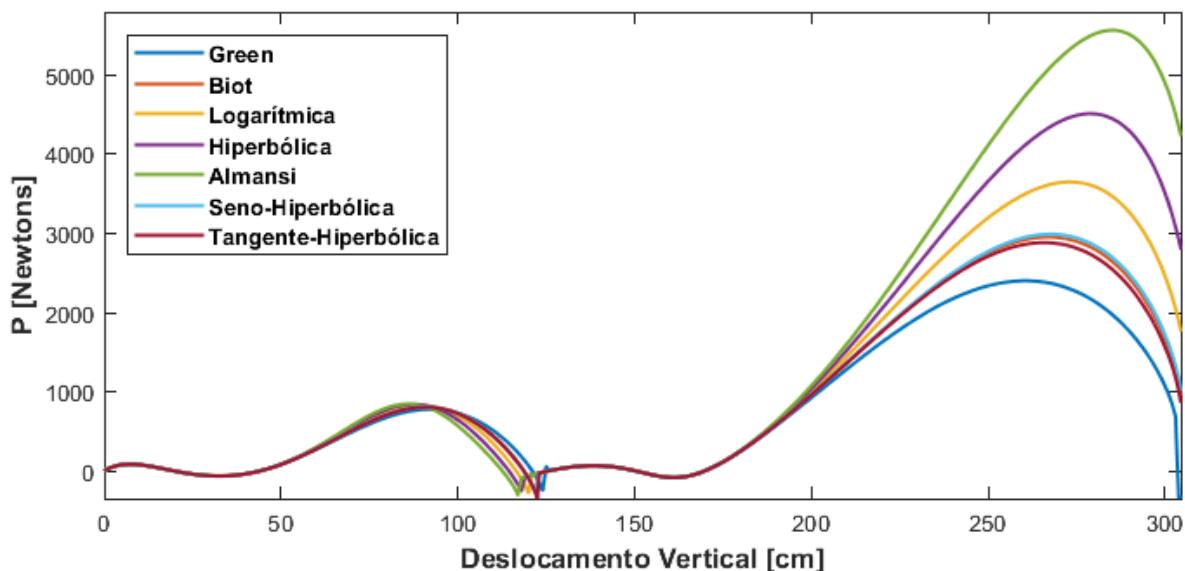


Figura 5.8: Trajetórias de equilíbrio do nó central da estrutura.

Na Figura 5.8, no intervalo de $200 < h < 300$ tem-se configurações em que alguns elementos estão comprimidos ao mesmo tempo que outros estão tracionados, juntamente com a presença de grandes deformações. Por conta disso, existe uma grande disparidade entre as trajetórias de equilíbrio das medidas clássicas, no entanto, as medidas SH e TH permanecem com trajetórias bem próximas da deformação de Biot, sendo essas as três medidas simétricas. Vale ressaltar que neste gráfico, que representa uma trajetória de equilíbrio estrutural mais complexa, fica claro que existem deslocamentos entre as curvas de trajetória de equilíbrio tanto em direção vertical como horizontal. Isso significa, por exemplo, que a ocorrência de um *snap-through* ocorreria em uma posição e sob uma força externa bem diferentes.

Uma dúvida que permanece é se as trajetórias das medidas de Biot, TH e SH não seriam mais próximas pelo simples fato de serem mais parecidas entre si do que das outras medidas clássicas. A fim de tentar elucidar a questão, utilizou-se de medidas da família SHG-Biot e THG-Biot com diferentes valores da constante n (suficientemente grandes para gerar medidas bem distintas da medida de Biot) e calculou-se as trajetórias de equilíbrio do Domo Circular. A Figura 5.9 e Figura 5.10 apresentam os resultados encontrados.

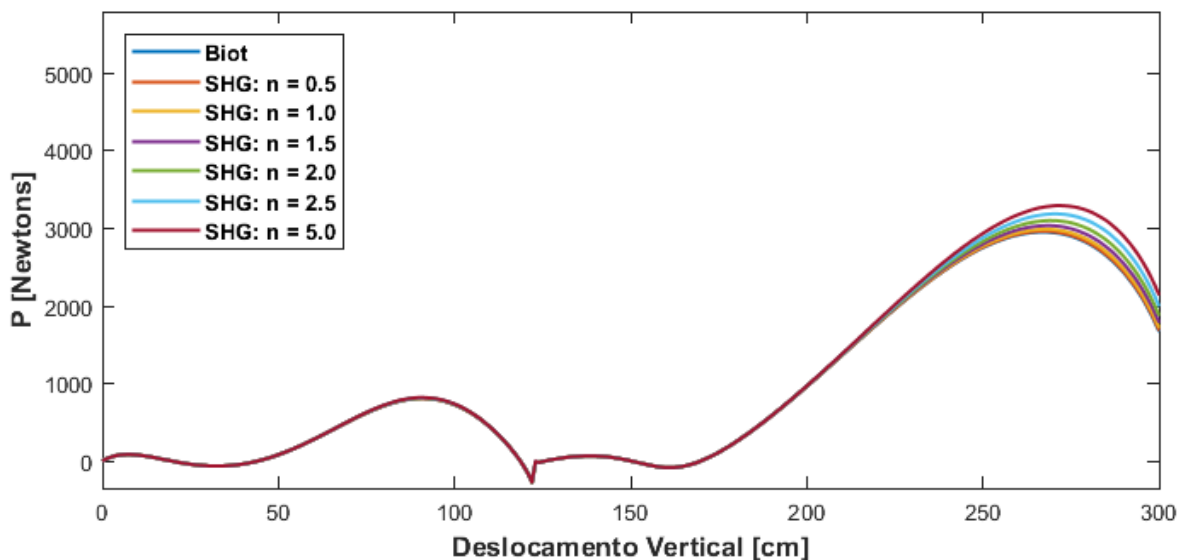


Figura 5.9: Trajetórias de equilíbrio utilizando as medidas da família SHG.

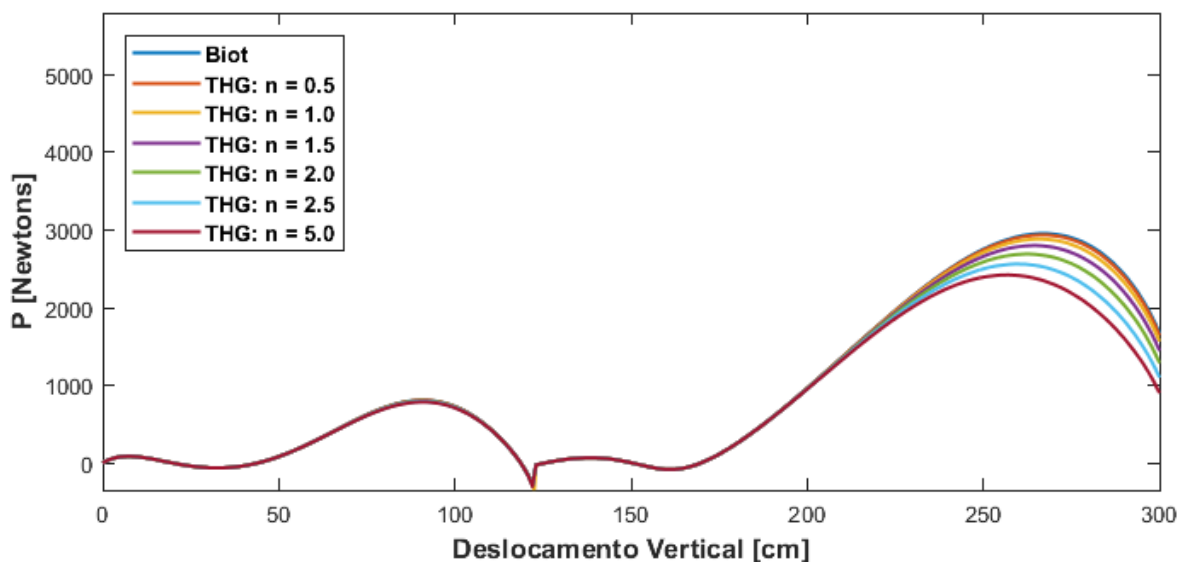


Figura 5.10: Trajetórias de equilíbrio utilizando as medidas da família THG.

A Figura 5.9 e a Figura 5.10 quando comparadas com a Figura 5.8 deixam claro que as medidas SHG-Biot e THG-Biot fornecem trajetórias mais similares entre si e em relação à medida de Biot do que as medidas de deformação clássicas. Esse é mais um indício de que a simetria (ou assimetria) pode ser um fator relevante para um modelo constitutivo.

5.1.4 Treliça otimizada de 10 barras

O próximo exemplo a ser analisado é um *benchmark* clássico para estudos de otimização de treliças, alguns dos autores que trabalharam com ele são: Haftka e Gürdal (1992), Adeli (1994),

Lemonge e Barbosa (2004), Vargas et al. (2016) e Lage (2019). A estrutura, apresentada na Figura 5.11, é composta por 10 barras, enumeradas em algarismos romanos, e 6 nós, enumerados em algarismos arábicos. Para determinar um conjunto otimizado de áreas, forças de 444.82×10^3 [N] foram aplicadas aos nós 3 e 5, e utilizou-se um Módulo de Young de 6.89×10^{11} [N/m²] e uma densidade de 2767.99 [kg/m³] (alumínio).

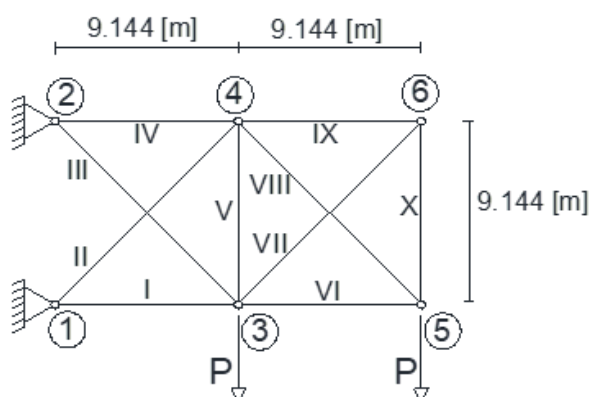


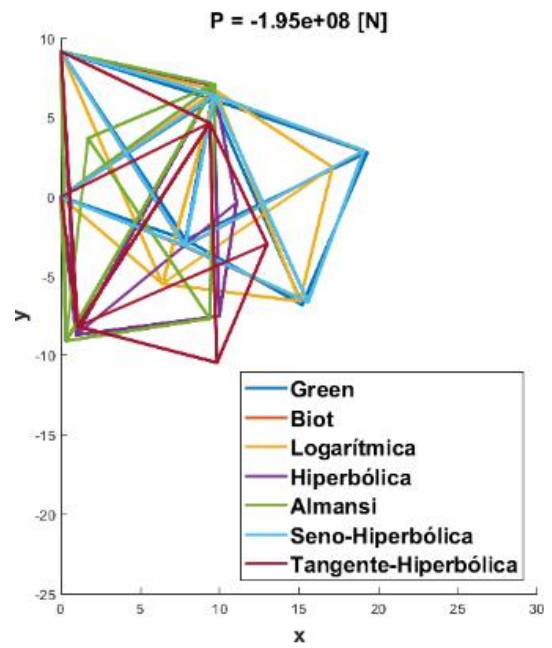
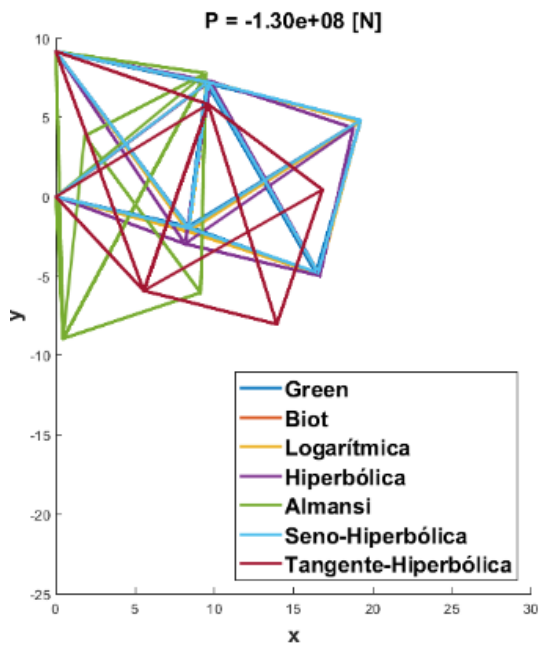
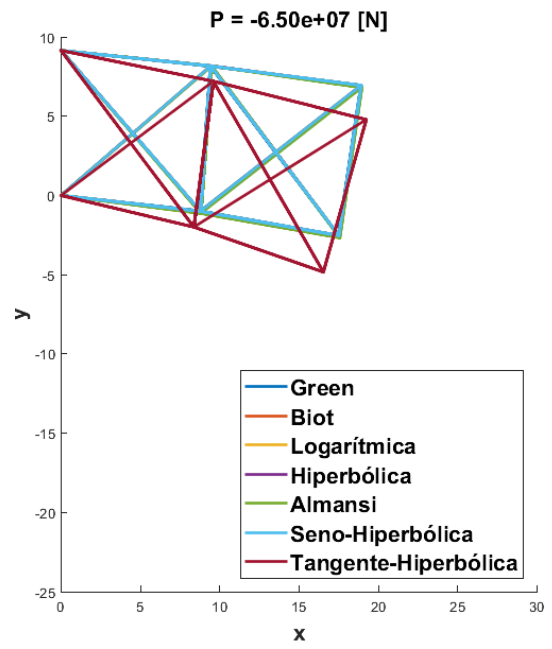
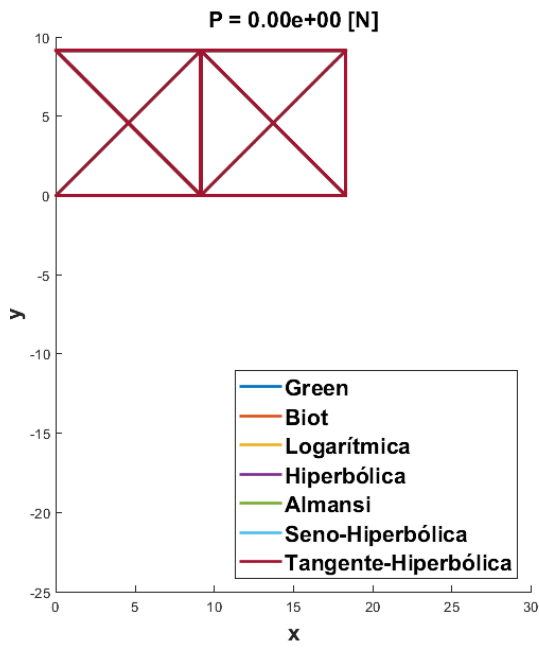
Figura 5.11: Treliça otimizada de 10 barras.

Com os dados apresentados acima, Lage (2019) determinou um conjunto otimizado de áreas de seção transversal para as barras (Tabela 5.3), que é próximo ao encontrado por Haftka e Gürdal (1992).

Tabela 5.3: Conjunto de áreas transversais otimizadas. Fonte: Lage (2019).

Barra	Área Otimizada [m ²]
1	5.20×10^{-3}
2	3.71×10^{-3}
3	3.58×10^{-3}
4	5.10×10^{-3}
5	0.0645×10^{-3}
6	2.52×10^{-3}
7	0.838×10^{-3}
8	3.58×10^{-3}
9	0.0645×10^{-3}
10	0.0645×10^{-3}

Para analisar esta estrutura otimizada de 10 barras, o controle de força foi usado, com incrementos de -6.5×10^7 [N] sendo impostos sobre as duas forças externas (aplicadas nos nós 3 e 5) e usando uma tolerância de 10^{-8} . As forças externas são consideradas positivas para cima neste exemplo, o oposto da convenção dos outros exemplos.



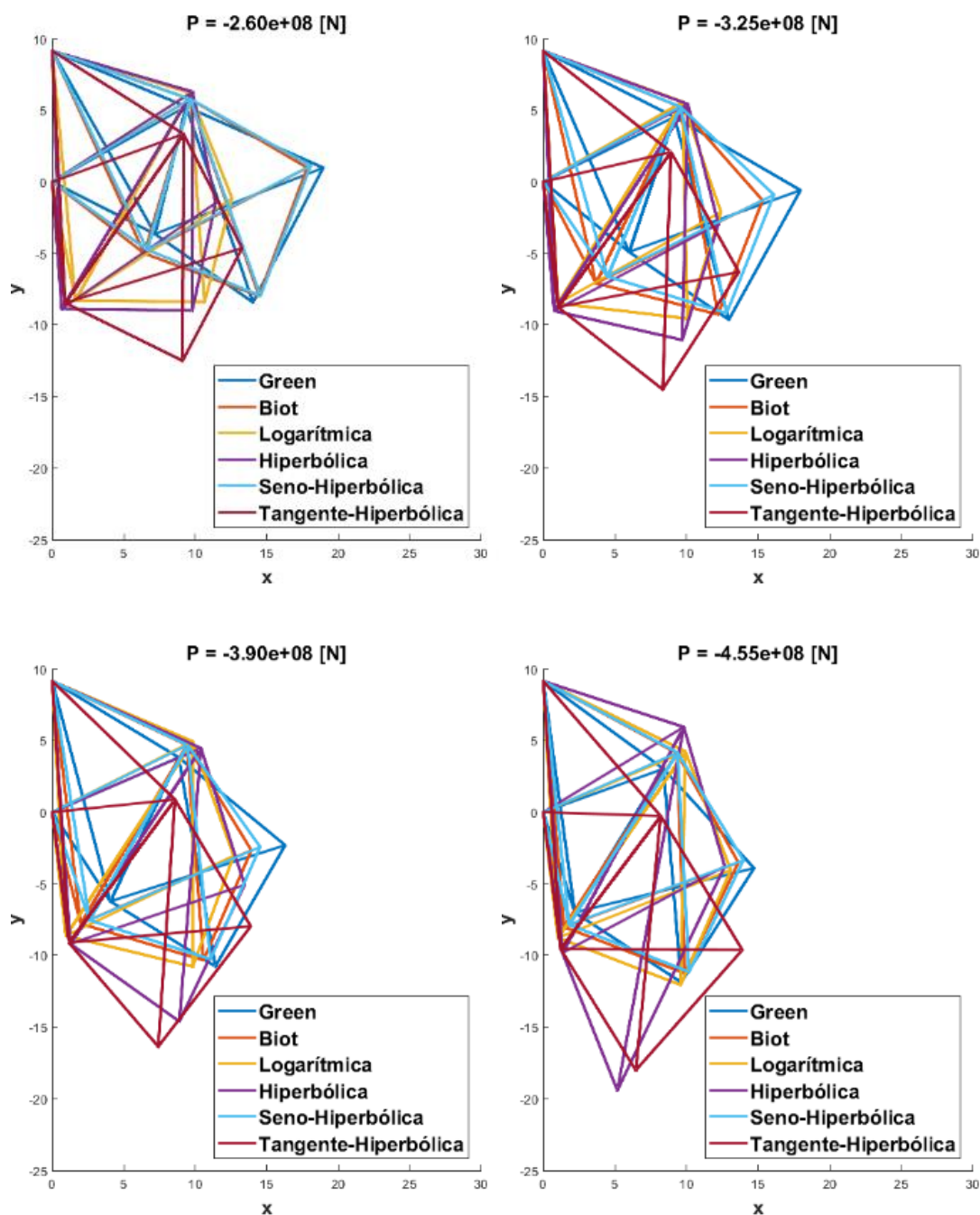


Figura 5.12: Trajetórias de equilíbrio quadro a quadro.

A Figura 5.12 mostra as configurações deformadas da treliça quadro a quadro para todos os modelos constitutivos:

- Quando P é igual a -6.5×10^7 [N], as deformações são pequenas e as configurações são todas semelhantes, somente o modelo de Tangente-Hiperbólica, caracterizado pela perda de rigidez tanto na compressão como na tração, possui uma configuração destoante;

- Para P igual a -1.30×10^8 [N], a configuração do modelo constitutivo de Almansi já é bastante diferente dos demais;
- À medida que as forças externas atingem o valor -1.95×10^8 [N], os modelos de Biot, Green e Seno-Hiperbólica permanecem próximos uns dos outros, enquanto os de Almansi, Hiperbólica, Logarítmica e Tangente-Hiperbólica apresentam configurações divergentes entre si e entre eles e os demais. Neste ponto, o modelo de Almansi já possui uma configuração bastante contrastante e o *script* implementado que faz a análise deixa de rodar.
- Com P de -3.25×10^8 [N] até o final da simulação, permanece o panorama geral do passo de carga anterior, com a diferença que o modelo de Green se distancia dos modelos de Biot e Seno-Hiperbólica, que permanecem próximos;

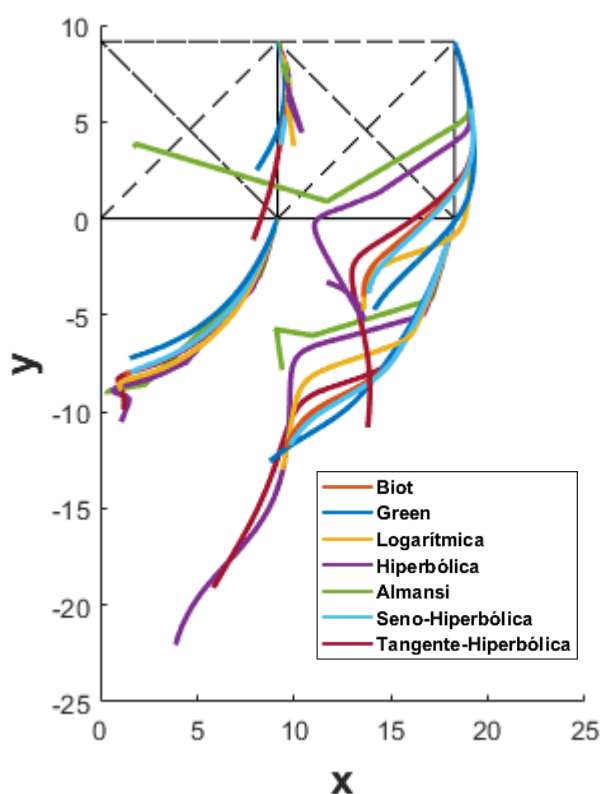


Figura 5.13: Trajetória de equilíbrio para os nós 3, 4, 5 e 6. Análise com todas as medidas estudadas.

A visualização das configurações quadro a quadro (para cada passo de incremento de força) deixa claro que para diferentes medidas de deformação o comportamento da estrutura é também bastante diferente, não só no sentido de que é preciso uma força diferente para cada modelo constitutivo alcançar uma determinada configuração, que supostamente seria comum a todos

os modelos, mas no sentido que diferentes modelos levam a configurações muito diferentes. Essa diferença de trajetória de equilíbrio é mais bem ilustrada utilizando um incremento menor para as forças externas e plotando as trajetórias dos nós 3, 4, 5 e 6, para cada modelo constitutivo. A Figura 5.13 apresenta os resultados dessa análise e mostra que, à medida que as deformações se tornam maiores, os caminhos de equilíbrio divergem.

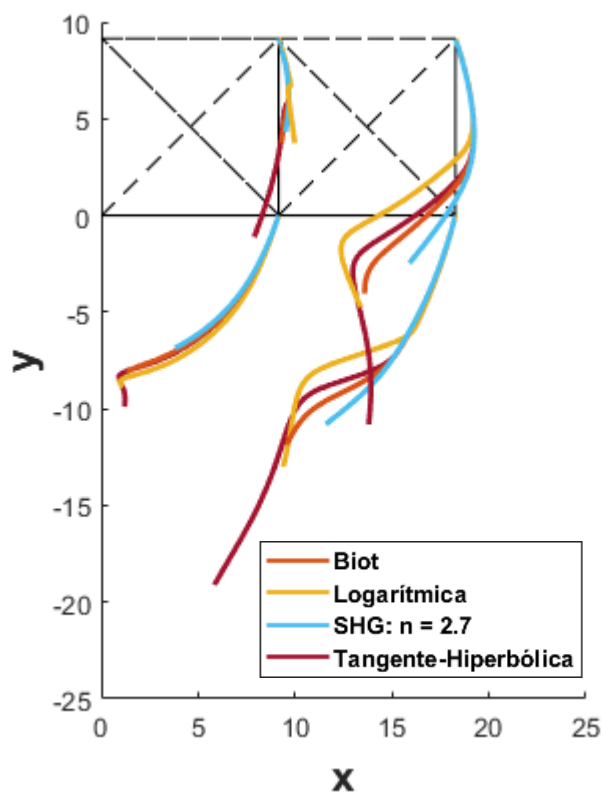


Figura 5.14: Trajetória de equilíbrio para os nós 3, 4, 5 e 6. Análise com as medidas de Biot, Logarítmica, SHG com $n = 2.7$ e Tangente-Hiperbólica (THG com $n = 1.0$).

Na Figura 5.14 são mostradas as trajetórias de equilíbrio das medidas de Biot, Logarítmica, SHG–Biot com $n = 2.7$ e Tangente-Hiperbólica (THG com $n = 1.0$). Existem duas razões para escolher $n = 2.7$ para SHG–Biot, primeiro porque é um valor alto o suficiente para gerar uma medida de deformação SHG–Biot que não está mais próxima da medida de Biot do que as demais medidas clássicas. Em segundo lugar, porque, como pode ser visto na Figura 5.15, quando $n = 2.7$ é usado, SHG e medidas logarítmicas são extremamente próximas na compressão em um intervalo relevante, aproximadamente $0.2 < \lambda < 1.0$. Já a medida Tangente-Hiperbólica, de maneira similar, como pode ser visto na Figura 5.15, possui um comportamento razoavelmente parecido com a medida Logarítmica na tração. Em suma, fez-se uma tentativa de isolar a influência da assimetria, uma vez que se utiliza a medida de Biot, que

é simétrica; a Logarítmica, assimétrica; a medida SHG com $n = 2.7$, que pode ser vista como uma versão simétrica da medida Logarítmica (compressão); e a medida Tangente-Hiperbólica, simétrica, que pode ser vista como uma segunda versão simétrica da medida Logarítmica (tração).

Observa-se na Figura 5.15 que as medidas simétricas SHG–Biot com $n = 2.7$ e Tangente-Hiperbólica possuem trajetórias de equilíbrio mais próximas da de Biot do que a Logarítmica. Trata-se de mais um indício de que a simetria/assimetria é um fator relevante na escolha de um modelo constitutivo. Vale ressaltar que, como a medida THG-Biot com $n = 1$ tem como característica uma perda de rigidez tanto na tração como na compressão, é natural que em um mesmo intervalo de incrementos de força ela possua uma trajetória de equilíbrio mais “longa” (uma mesma força deforma mais a estrutura).

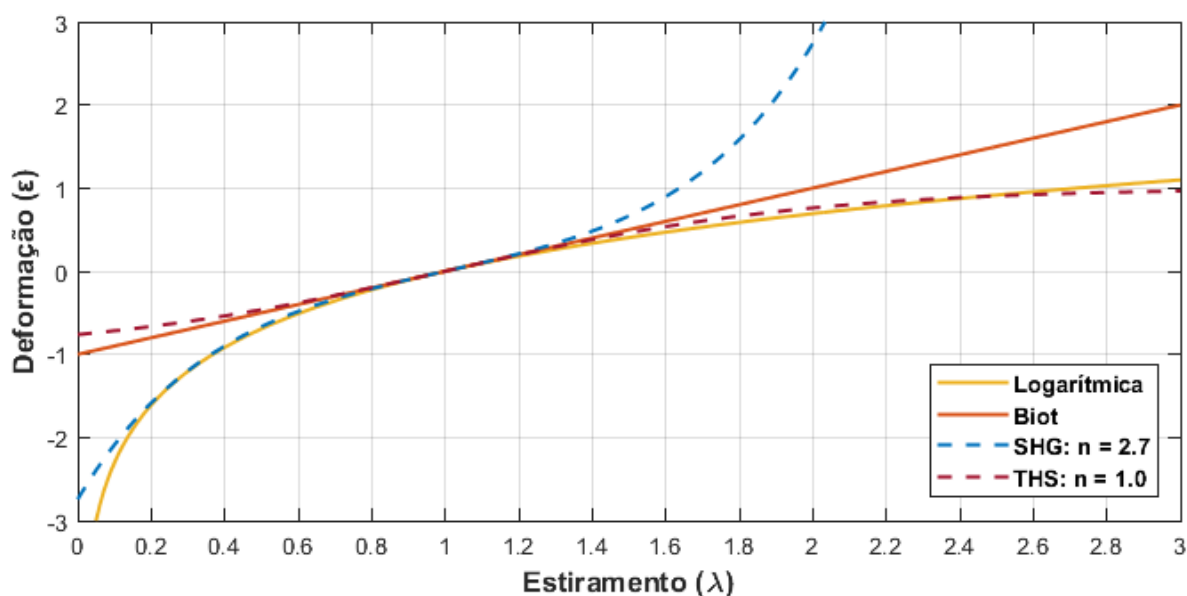


Figura 5.15: Comparação entre a medida Logarítmica e a medida SHG com $n = 2.7$ (Biot como referência).

5.1.5 Conclusões do estudo de diferenças de respostas para diferentes modelos tipo-Hookeanos uniaxiais

Esse estudo realizou abrangentes comparações a partir de análises de treliças que usaram os modelos tipo-Hookeanos de medidas de deformação clássicas e de medidas SHG e THG. A implementação de medidas SHG e THG na FPMEF demonstra a validade dessas medidas para aplicações práticas. Os resultados mostram claramente que, se para pequenas deformações o

par tensão-deformação escolhido não gera diferenças nas trajetórias de equilíbrio, para grandes deformações essa escolha gera diferenças significativas.

Investigou-se a relevância da simetria/assimetria de um modelo constitutivo, que, por si só, pode ser uma fonte de erro na tentativa de modelar materiais com comportamento simétrico para tensão e compressão. Acredita-se que, embora o uso de correções por meio de procedimentos baseados em modelos constitutivos/reológicos possa forçar respostas válidas, conceitualmente, uma correção assimétrica para um material de comportamento simétrico é incoerente. Além disso, alguns desses procedimentos de correção são iterativos e usam a resposta elástica como referência ou uma primeira tentativa de equilíbrio, por isso faz sentido assumir que um modelo constitutivo mais próximo do comportamento real pode gerar uma convergência mais rápida, uma hipótese que carece de investigação mais aprofundada para ser provada e pode ser verificada em estudos futuros.

5.2 Estudo uniaxial: Diferença de eficiência computacional de acordo com a medida de deformação escolhida

Nesta subseção investigam-se implicações computacionais do uso de diferentes medidas de deformação para análises estruturais de treliças, sendo avaliadas as medidas de deformação Seno-Hiperbólica e Tangente-Hiperbólica juntamente com medidas da família Seth-Hill. Usando a FPMEF, o estudo foca em avaliar a eficiência computacional de cada medida de deformação com atenção especial a dois parâmetros-chave: i) o tempo de processamento necessário para completar a análise, e ii) a capacidade de superar com sucesso pontos críticos ao longo da trajetória de equilíbrio. Quatro estruturas de referência, todas diferentes das usadas na subseção anterior, são analisadas.

Como já discutido na seção “1 INTRODUÇÃO”, no desenvolvimento de formulações geometricamente não lineares de MEF, cada par conjugado de tensão-deformação gera diferentes formulações para as variáveis de interesse do método numérico: força interna e matriz hessiana (ou matriz de rigidez tangente no caso do MEFC). Isso é comprovado pelas diferentes formulações da FPMEF de treliças já apresentadas ao longo deste trabalho para cada uma das medidas de deformação estudada. Dessa forma, cada medida de deformação será testada com seu correspondente modelo tipo-Hookeano utilizando as respectivas fórmulas por

ela originada e também se testará o mesmo modelo tipo-Hookeano sendo representado por formulações obtidas por pares conjugados de tensão-deformação diferentes do utilizado para a sua criação. A ideia desse estudo é fornecer resultados que contribuam para a discussão sobre as repercussões do uso de diferentes medidas de deformação na análise estrutural pelo MEF.

Para cada análise performada nas treliças *benchmark*, o tempo necessário para completá-la é medido e verifica-se se a análise pôde ser concluída. O tempo de processamento é medido usando as funções integradas *tic* e *toc* do MATLAB, que são capazes de calcular o tempo necessário para executar um programa. Como já visto na subseção anterior – e será novamente analisado no presente estudo –, ao calcular a trajetória de equilíbrio de uma dada treliça, se diferentes modelos tipo-Hookeanos são usados, diferentes trajetórias de equilíbrio são encontradas. A investigação de qual modelo constitutivo gera a trajetória de equilíbrio mais apropriada é subjetiva ao material que se deseja representar, no entanto, no estudo desta subseção da tese não se está particularmente interessado neste aspecto. Em vez disso, o foco aqui está nas questões computacionais associadas a diferentes medidas de deformação. Portanto, para alcançar esse objetivo, os seguintes critérios foram seguidos:

- a) São selecionados pontos comuns das trajetórias de equilíbrio obtidas com os diferentes modelos tipo-Hookeanos estudados;
- b) Quando existem trajetórias de equilíbrio muito diferentes, mas coerentes, a comparação do tempo de processamento é feita antes do ponto de divergência;
- c) Os pontos das trajetórias de equilíbrio a serem comparados são escolhidos a fim de medir a eficiência computacional antes e depois de pontos de instabilidade, como *snap-throughs* e “quinas” presentes na trajetória de equilíbrio;
- d) Quando mais de 40 minutos são gastos no mesmo passo de incremento de carga/deslocamento, a análise é abortada, e o modelo é considerado incapaz de definir a trajetória de equilíbrio.

As medições são divididas em dois grupos:

O **GRUPO 1** considera simulações que usam modelos do tipo-Hookeanos representados por seu par conjugado de tensão-deformação original e utilizando as formulações geradas por este mesmo par conjugado. Por exemplo: se utiliza as Eq. 2.51 (medida de deformação), Eq. 2.52

(força interna) e Eq. 2.53 (matriz hessiana), que são deduzidas a partir da relação linear entre a medida de deformação de Green e a tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie ($\sigma_G = E \cdot \varepsilon_G$), para representar esse próprio modelo linear, chamado de Saint-Venant-Kirchhoff; outro exemplo: se utiliza as Eq. 2.39 (medida de deformação), Eq. 2.41 (força interna) e Eq. 2.50 (matriz hessiana), que são deduzidas a partir da relação linear entre a medida de deformação de Biot e a tensão Nominal ($\sigma_B = E \cdot \varepsilon_B$), para representar esse próprio modelo linear, chamado de lei de Hooke; e assim é feito para todas as medidas de deformação estudadas e suas respectivas tensões conjugadas.

O **GRUPO 2** envolve simulações que usam formulações originadas pelo uso do modelo tipo-Hookeano de Saint-Venant-Kirchhoff para representar modelos tipo-Hookeanos gerados pelos demais pares de tensão-deformação estudados. Para o modelo tipo-Hookeanos criado a partir do uso da medida de deformação Seno-Hiperbólica e sua tensão conjugada ($\sigma_{SH} = E \cdot \varepsilon_{SH}$), por exemplo, usa-se o desenvolvimento algébrico apresentado pelas Eq. 5.7 – 5.10 para fazê-lo representado pela medida de deformação de Green e pela tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. Desenvolvimentos análogos foram feitos para os demais modelos tipo-Hookeanos. Dessa forma, investigam-se se existem formulações melhores ou piores computacionalmente do que outras; se necessariamente o modelo tipo-Hookeano utilizado para gerar as equações das variáveis de interesse é mais bem representado por essas equações; e se é possível que, para uma determinada análise, uma determinada combinação de modelo tipo-Hookeano/formulação pode ser vantajosa, enquanto para outra não.

$$\varepsilon_G = \frac{\lambda^2 - 1}{2} \rightarrow \lambda = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_G + 1} \quad 5.7$$

$$\varepsilon_{SH} = \sinh(\lambda - 1) = \sinh(\sqrt{2 \cdot \varepsilon_G + 1} - 1) \quad 5.8$$

$$\psi_{SH} = \frac{E \cdot \varepsilon_{SH}^2}{2} = \frac{E \cdot \sinh^2(\sqrt{2 \cdot \varepsilon_G + 1} - 1)}{2} \quad 5.9$$

$$\sigma_G = \frac{d\psi}{d\varepsilon_G} = \frac{E \cdot \sinh(\sqrt{2 \cdot \varepsilon_G + 1} - 1) \cdot \cosh(\sqrt{2 \cdot \varepsilon_G + 1} - 1)}{\sqrt{2 \cdot \varepsilon_G + 1}} \quad 5.10$$

Tanto para as análises do **GRUPO 1** quanto do **GRUPO 2**, são realizadas 10 medições, a fim de avaliar a repetibilidade a partir do desvio padrão. Todas as análises foram realizadas por um notebook com as seguintes configurações:

- Processador: Intel(R) Core (TM) i5-7200U CPU @ 2.50GHz 2.71 GHz;
- Memória Física (RAM) Instalada: 8GB.

Para cada um dos *benchmarks* analisados, primeiro é plotado um gráfico com a trajetória de equilíbrio da estrutura, de maneira semelhante ao estudo feito na subseção anterior. Porém, na presente subseção, nos gráficos são definidos os pontos de interesse para a avaliação do custo computacional, seguindo os critérios preestabelecidos (a, b, c, d). Em seguida são apresentados os resultados obtidos a partir da medição do tempo necessário para realizar as análises até esses pontos de comparação.

Esses resultados são apresentados em gráficos de barra e, quando um modelo é incapaz de realizar uma análise até o ponto de comparação (critério d), seu resultado é denotado por um ponto de exclamação, "!". Um asterisco, "*", é usado para representar uma medição da deformação Tangente-Hiperbólica na Trelíça Estelar de 60-Barras ao comparar o ponto do número de passo de incremento $npi = 280$ (deslocamento igual a 70) porque seu tempo foi significativamente maior do que as outras medições, o que perturbou a representação gráfica dos outros resultados.

Em todos os gráficos, medições referentes aos modelos tipo-Hookens representados pelas medidas conjugadas de tensão-deformação originais, **GRUPO 1**, são representadas pela cor azul, enquanto medições referentes aos modelos tipo-Hookens representados pela medida de deformação de Green, **GRUPO 2**, são representadas pela cor vermelha. Os gráficos exibem valores médios de dez medições separadas. Os valores de desvio padrão para as dez medições usadas para calcular as médias foram incluídos no APÊNDICE V junto aos valores médios correspondentes. As barras do **GRUPO 1** (azul) e **GRUPO 2** (vermelho) correspondentes às

medições referentes ao modelo tipo-Hookeano de Green (modelo de Saint-Venant-Kirchhoff) deveriam, teoricamente, por razões óbvias, ser idênticas. No entanto, na prática, há sempre uma pequena diferença entre as duas barras devido a pequenos desvios-padrão nas medições.

5.2.1 Treliça Espacial de 12-Barras

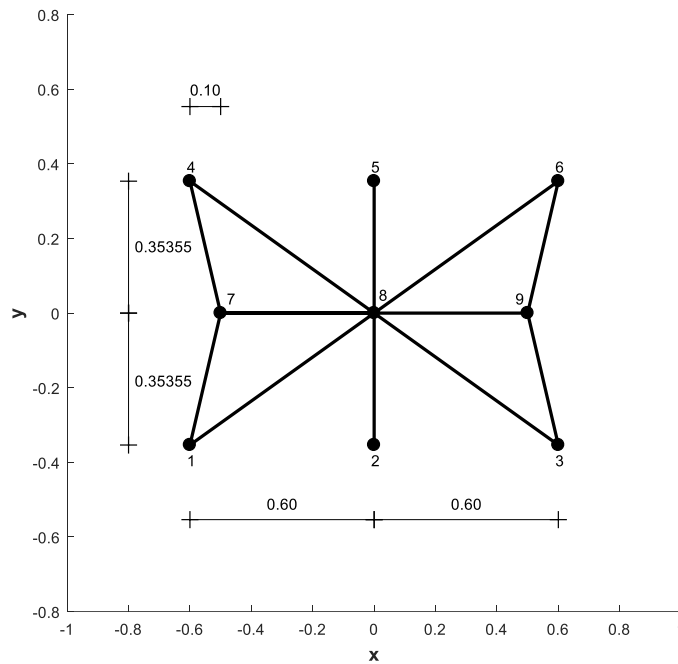


Figura 5.16: Treliça Espacial de 12-Barras. Vista de cima.

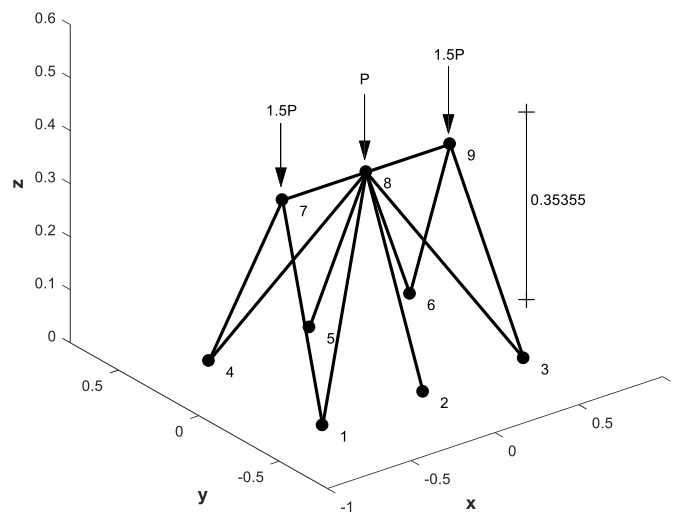


Figura 5.17: Treliça Espacial de 12-Barras. Visão 3D.

A Treliça Espacial de 12 Elementos é comumente usada em trabalhos de análise não lineares de pós-flambagem (KRENK; HEDEDAL, 1995; SOUZA et al., 2018; TAGHAVIAN HAKKAK; REZAIIEE PAJAND, 2006; YANG; LEU, 1991) e é apresentada nas Figura 5.16 e Figura 5.17. A estrutura é composta por 12 barras e 9 nós, com restrições de deslocamento impostas aos nós 1, 2, 3, 4, 5 e 6. A análise utilizou o controle de força e as cargas externas foram aplicadas nos nós 7 ($1.5P$), 8 (P) e 9 ($1.5P$). A área de seção transversal e o módulo de elasticidade foram definidos como 1 e 10, respectivamente. Todas as quantidades físicas são adimensionais e a tolerância utilizada foi de 10^{-7} .

A trajetória de equilíbrio para a análise da Treliça Espacial de 12 barras é apresentada na Figura 5.18. O gráfico ilustra a relação entre o número de passos de incremento (npi) e o deslocamento vertical do nó 8. Dois pontos específicos, indicados por setas pretas e círculos pretos ($npi = 460$ e $npi = 1400$), foram selecionados para comparar o custo computacional dos diferentes modelos tipo-Hookeanos. Os pontos foram escolhidos para medir o custo computacional antes e depois do *snap-through* (critério c). Observa-se que as medidas de deformação Hiperbólica e Almansi falharam em identificar o evento de *snap-through* e produziram resultados bem divergentes antes de alcançar o passo de carga $npi = 1400$ (critério d).

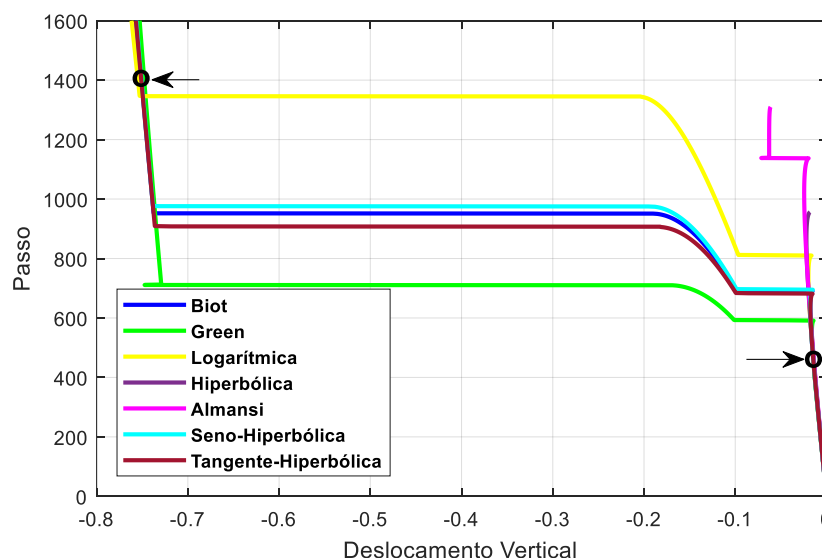


Figura 5.18: Trajetória de equilíbrio do nó 8, Passo de Incremento x Deslocamento Vertical.

A Figura 5.19 apresenta os resultados do custo computacional. Para $npi = 460$, ponto no qual a estrutura ainda não passou pelo *snap-through*, diferenças significativas já são observadas entre os modelos do **GRUPO 1** (barras azuis). Os modelos tipo-Hookeanos de Green, Biot e Seno-Hiperbólica exibiram os menores tempo de processamento, enquanto o modelo de

Tangente-Hiperbólica foi o mais lento. Em contraste, os modelos no **GRUPO 2** (barras vermelhas) mostraram respostas muito semelhantes. Isso pode sugerir que o uso da mesma formulação (originada do mesmo par de tensão-deformação), mesmo utilizado para representar diferentes modelos constitutivos, pode ser o fator mais crítico na determinação do tempo de processamento ao lidar com pequenas deformações que não envolvem fenômenos mais complexos como o *snap-through*. Fica evidente que utilizar diferentes formulações para representar o mesmo modelo tipo-Hookeano (original e Green) resulta em resultados diferentes.

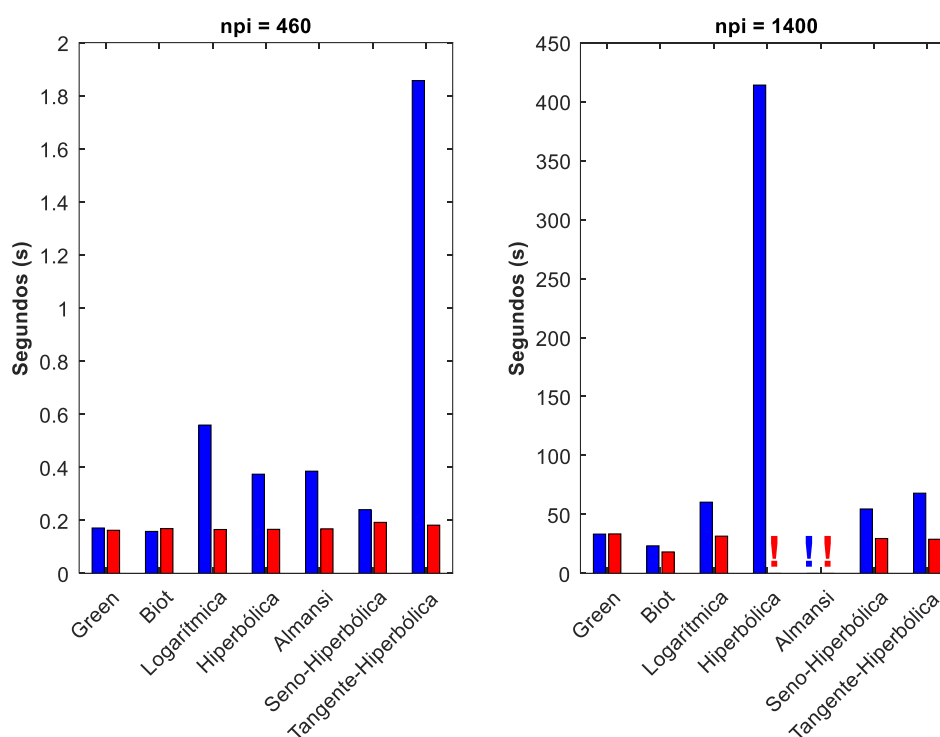


Figura 5.19: Tempo gasto para realizar a análise da Treliça Espacial de 12-Barras até o valor de $npi = 460$ e $npi = 1400$.

Ao comparar os resultados em $npi = 1400$, observa-se que alguns modelos falharam em passar pelo primeiro *snap-through*: Hiperbólica e Almansi no **GRUPO 2** e Almansi do **GRUPO 1**. Uma observação importante é que o mesmo modelo tipo-Hookeano, quando se utiliza diferentes fórmulas, pode ser capaz de realizar uma análise com uma formulação e incapaz com outra, como é o caso do modelo tipo-Hookeano de Hiperbólica. Deixando bem claro o que isso significa: o modelo tipo-Hookeano quando utiliza a Eq. 2.57 (medida de deformação), Eq. 2.58 (força interna) e 2.59 (matriz hessiana), consegue completar a análise, mas quando o mesmo modelo tipo-Hookeano da medida Hiperbólica é inserido em uma implementação que usa Eq. 2.51 (medida de deformação), Eq. 2.52 (força interna) e Eq. 2.53 (matriz hessiana), a análise

não se completa. É exatamente isso que está sendo comparado ao se examinar **GRUPO 1** e **GRUPO 2**.

Além disso, o modelo de Tangente-Hiperbólica, que no primeiro ponto de comparação ($npi = 460$) foi o mais lento no **GRUPO 1**, no segundo ponto de comparação ($npi = 1400$), também no **GRUPO 1**, não foi mais o mais lento e teve um custo computacional similar aos modelos das medidas Logarítmica e Seno-Hiperbólica. Isso mostra que um modelo tipo-Hookeano pode ser mais lento até um certo ponto da análise e então ser mais rápido para passar por um intervalo mais complexo, como o primeiro *snap-through*. Os modelos de Biot e Green, nos dois pontos de comparação e nos dois grupos de medição, provaram serem os mais rápidos, seguidos pelos modelos da medida Seno-Hiperbólica.

5.2.2 Treliça Espacial de 25-Barras

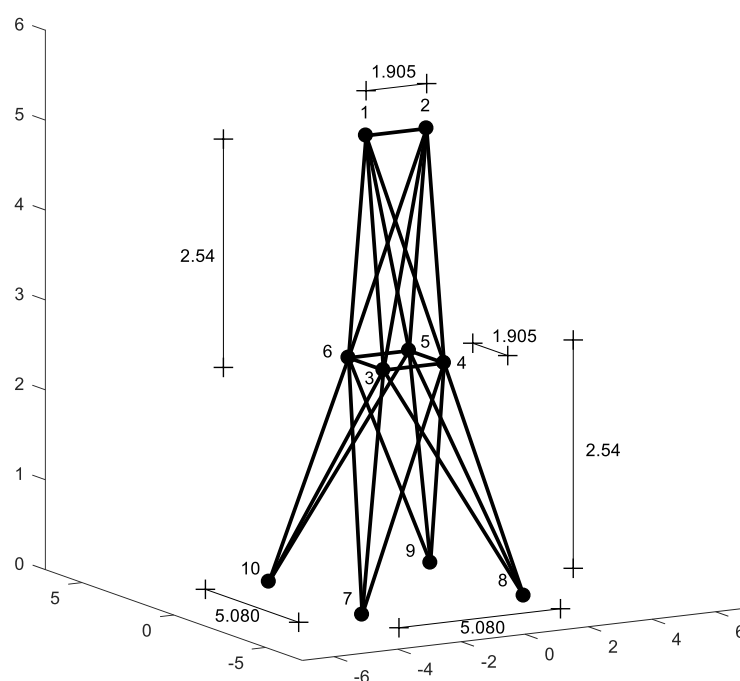


Figura 5.20: Treliça Espacial de 25-Barras. Visão 3D.

A treliça de 25 barras apresentada na Figura 5.20 é muito utilizada em estudos de otimização estrutural (CAPRILES et al., 2007; HASANÇEBI; TEKE; PEKCAN, 2013; RAJEEV; KRISHNAMOORTHY, 1992). A treliça é feita de alumínio, que tem um módulo de Young de $E = 6,89 \times 10^4$ [MPa]. Aqui são utilizados os valores de área de seção transversal das barras relatados por Rajeev & Krishnamoorthy (1992), conforme listados na Tabela 5.4. Na análise,

restrições de deslocamento foram aplicadas aos nós 7, 8, 9 e 10, e utilizou-se o controle de força. Os valores dos incrementos de forças (ΔP), os nós e as direções nas quais as forças foram aplicadas são mostrados na Tabela 5.5, tendo sido utilizada uma tolerância igual a 10^{-6} .

Tabela 5.4: Valores de área de seção transversal. Fonte: Rajeev e Krishnamoorthy (1992).

Agrupação	Barras Membros	Área [m ²]
1	1-2	6.451600×10^{-5}
2	1-4, 2-3, 1-5, 2-6	1.161288×10^{-3}
3	2-5, 2-4, 1-3, 1-6	1.483868×10^{-3}
4	3-6, 4-5	1.290320×10^{-4}
5	3-4, 5-6	6.451600×10^{-5}
6	3-10, 6-7, 4-9, 5-8	5.161280×10^{-4}
7	3-8, 4-7, 6-9, 5-10	1.161288×10^{-3}
8	3-7, 4-8, 5-9, 6-10	1.354800×10^{-3}

Tabela 5.5: Incrementos de força aplicados. Fonte: Rajeev e Krishnamoorthy (1992).

Nó	ΔP_x [N]	ΔP_y [N]	ΔP_z [N]
1	4453.74	-4453.74	-4453.74
2	0.00	-4453.74	-4453.74
3	2226.87	0.00	0.00
6	2672.24	0.00	0.00

A trajetória de equilíbrio do nó 1, exibida através da relação entre o passo de incremento de força \times deslocamento vertical, é mostrada na Figura 5.21. Dois pontos de comparação foram selecionados para capturar o custo computacional antes e após o primeiro *snap-through* (critério c). Pode-se observar que a medida Logarítmica falhou em alcançar o segundo ponto de interesse (critério d). Mais adiante, um fenômeno de *snap-through* similar ocorreu para os modelos das medidas de Biot, Green, Seno-Hiperbólica e Tangente-Hiperbólica, enquanto as medidas Hiperbólica e Almansi seguiram diferentes trajetórias de equilíbrio. No entanto, novamente, é importante notar que o objetivo desta análise é comparar custos computacionais e não discutir as divergências causadas pelo uso de diferentes modelos, portanto, apenas os pontos antes e logo após o primeiro *snap-through* foram analisados, e o segundo *snap-through* não foi considerado (critério b).

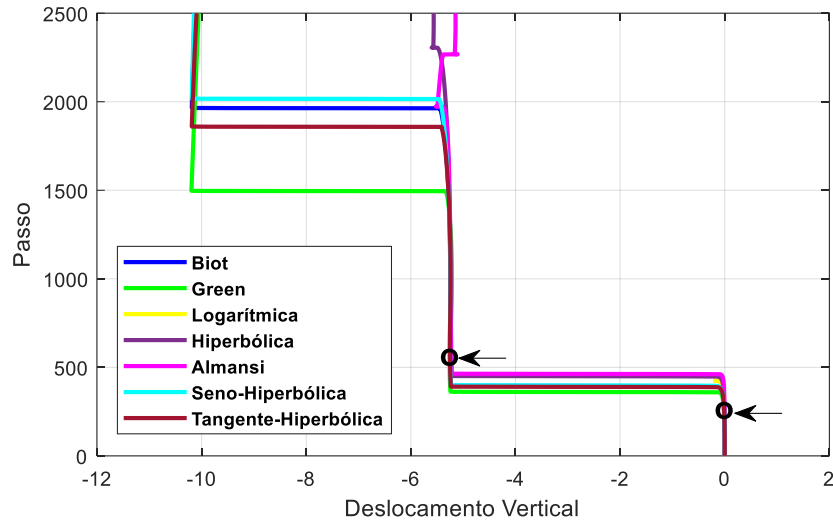


Figura 5.21: Trajetória de equilíbrio do nó 1, Passo de Incremento x Deslocamento Vertical.

A Figura 5.22 apresenta os resultados para a Trelça Espacial de 25-Barras. No primeiro ponto de comparação ($npi = 250$), considerando as medições do **GRUPO 1** (barras azuis), é evidente que os modelos de Biot e Green são os mais rápidos, seguidos pelo modelo da medida Seno-Hiperbólica, enquanto o da Tangente-Hiperbólica é significativamente mais lento, com outros modelos ocupando posições intermediárias.

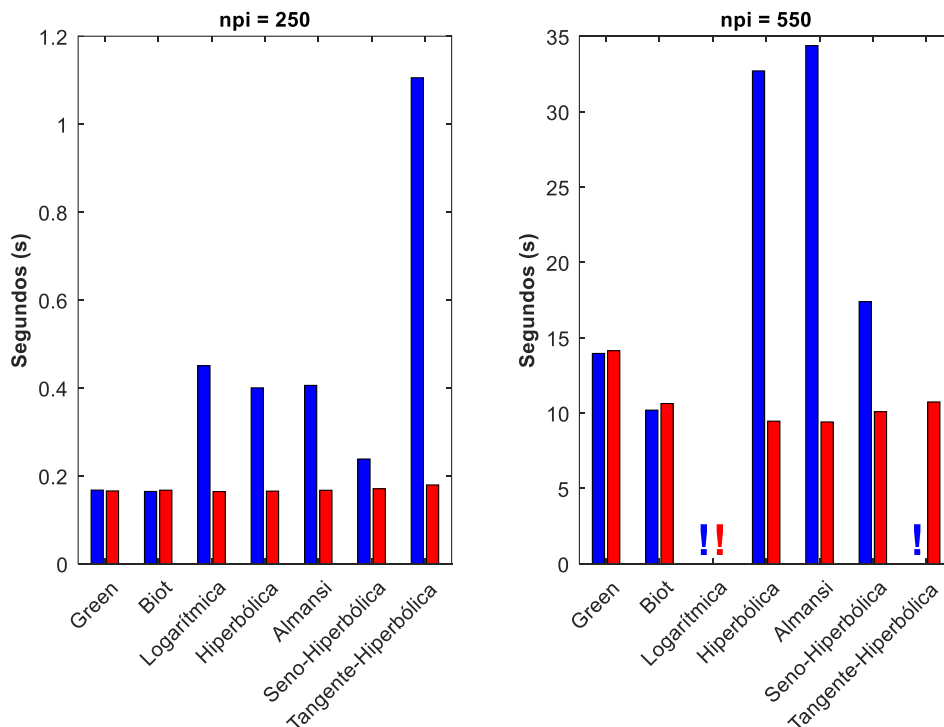


Figura 5.22: Tempo gasto para realizar a análise da Trelça Espacial de 25-Barras até os valore de $npi = 250$ e $npi = 550$.

No caso do **GRUPO 2** (barras vermelhas), similarmente à treliça de referência anterior, é aparente que para pequenas deformações e quando um ponto crítico na trajetória de equilíbrio ainda não foi ultrapassado, a formulação usada (equações de deformação, força e Hessiana obtidas com determinado par conjugado) tem um impacto maior na velocidade de processamento do que o modelo tipo-Hookeano. Isso é indicado pelos resultados dos modelos estarem próximos uns dos outros.

Ao analisar os resultados do segundo ponto de comparação ($n_{pi} = 550$) para as medições do **GRUPO 1**, nota-se que o modelo de Biot é o mais rápido, seguido por Green e Seno-Hiperbólica. Os modelos mais lentos entre aqueles que completaram a análise foram de Almansi e Hiperbólica. As análises dos modelos de Logarítmica e Tangente-Hiperbólica não convergiram, portanto, eles não alcançaram o segundo ponto de comparação. Em relação às medições do **GRUPO 2**, as respostas foram relativamente próximas umas das outras, com exceção do modelo de Logarítmica, que não completou a análise. De maneira intrigante, as fórmulas obtidas pela medida de deformação de Green e seu par conjugado representam outros modelos tipo-Hookeanos com um custo computacional menor do que seu próprio modelo tipo-Hookeano, o que é uma observação interessante.

Também é interessante notar, mais uma vez, que o mesmo modelo, quando representado por diferentes formulações, pode dar resultados muito diferentes, como observado ao comparar as medições do **GRUPO 1** com as do **GRUPO 2** para os modelos de Hiperbólica, Almansi e Seno-Hiperbólica, por exemplo.

5.2.3 Domo Circular de 56-Barras

Um domo circular treliçado, comumente usado em estudos de otimização estrutural (GHANNADI et al., 2020; JAHANFEKR; MOHAMMADIZADEH; SHOJAEE, 2021; MORADI; MIRZAKHANI; GHANBARZADEH, 2015; SHEIKHOESLAMI; KAVEH, 2013), é mostrado nas Figura 5.23 e Figura 5.24. Esta estrutura é composta por 56 elementos e 25 nós, com restrições de deslocamento impostas nos nós 18 a 25. A Figura 5.25 exhibe o padrão repetido usado para construir a treliça de maneira circular, com numeração dos agrupamentos atribuída para definir áreas de seção transversal baseadas nos resultados relatados por Vieira (2023) na Tabela 5.6. A treliça é considerada feita de aço, com um módulo de

elasticidade de 210 [GPa]. Na análise, controle de força foi aplicado usando uma tolerância igual a 10^{-7} , com os incrementos de força especificados na Tabela 5.7.

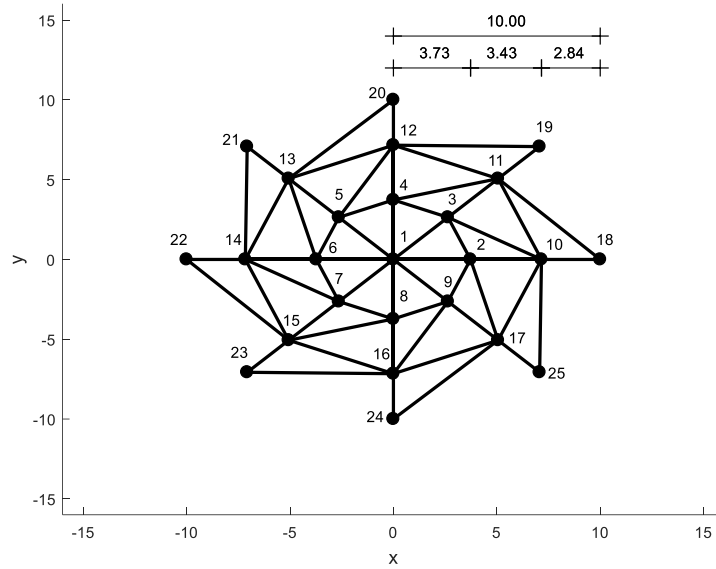


Figura 5.23: Domo Circular de 60-Barras. Vista de cima.

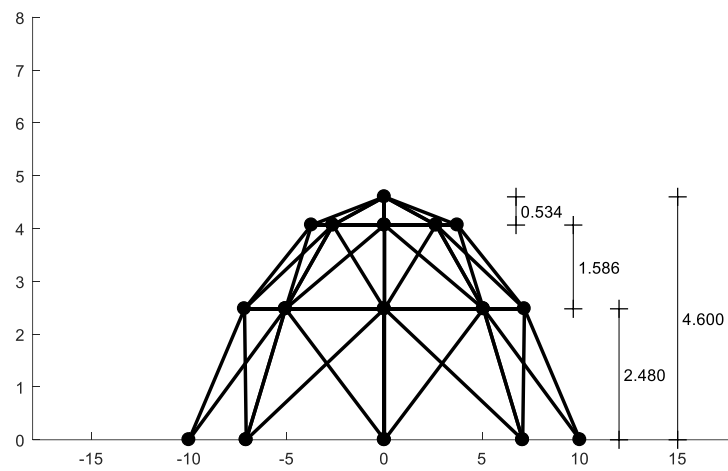


Figura 5.24: Domo Circular de 60-Barras. Vista frontal.

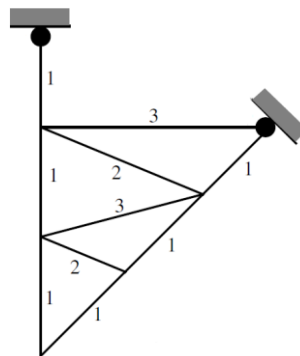


Figura 5.25: Padrão repetido com numeração por agrupamento.

Tabela 5.6: Áreas dos agrupamentos.

Agrupamentos	Área [m ²]
1	5.2029×10^{-4}
2	4.9074×10^{-4}
3	5.1576×10^{-4}

Tabela 5.7: Incrementos de forças aplicados.

Nó	ΔP_x [N]	ΔP_y [N]	ΔP_z [N]
1	0.00	10000.00	-10000.00
4	10000.00	0.00	0.00
12	-10000.00	0.00	0.00

O gráfico de Passo de Incremento de Força x Deslocamento Vertical do nó 1 é plotado na Figura 5.26, com três pontos selecionados ao longo do caminho de equilíbrio que seguem os critérios a, b e c. Pelo gráfico é difícil notar, mas o modelo tipo-Hookeano da medida Hiperbólica não consegue alcançar sequer o primeiro ponto, pois não supera primeiro *snap-through* (critério d). Neste exemplo, todos os modelos tipo-Hookeanos levaram a estruturas a configurações semelhantes durante toda a análise, embora algumas pequenas diferenças tenham sido observadas ao longo da trajetória.

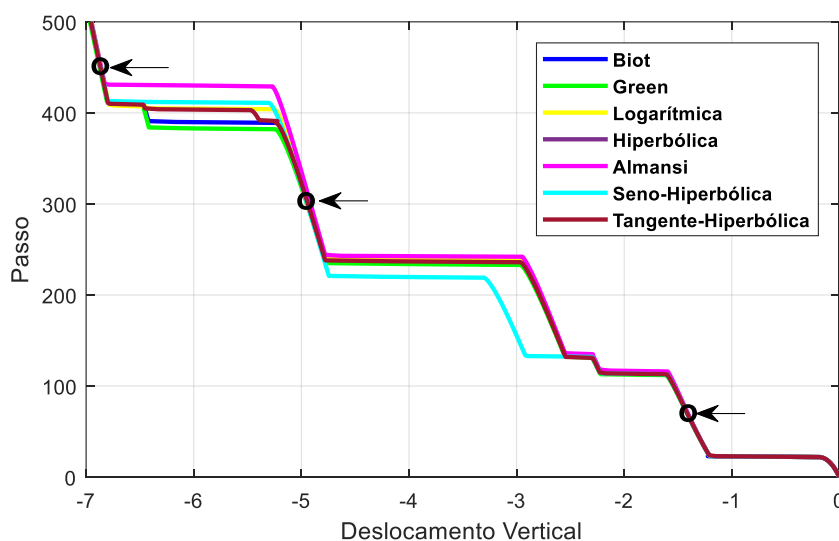


Figura 5.26: Trajetória de equilíbrio do nó 1, Passo de Incremento x Deslocamento Vertical.

Os resultados obtidos das análises da Treliça Domo Circular de 56 Elementos são mostrados na Figura 5.27. Ao examinar os resultados dos três pontos de comparação ($npi = 70$, $npi = 300$ e $npi = 450$) para as medições do **GRUPO 1**, é aparente que os modelos de Biot, Green e Seno-Hiperbólica são os mais rápidos, embora suas posições mudem ao longo da comparação.

Estes três modelos são os únicos que foram capazes de completar a análise até o último ponto. Em contraste, os outros quatro modelos falharam em completar a análise.

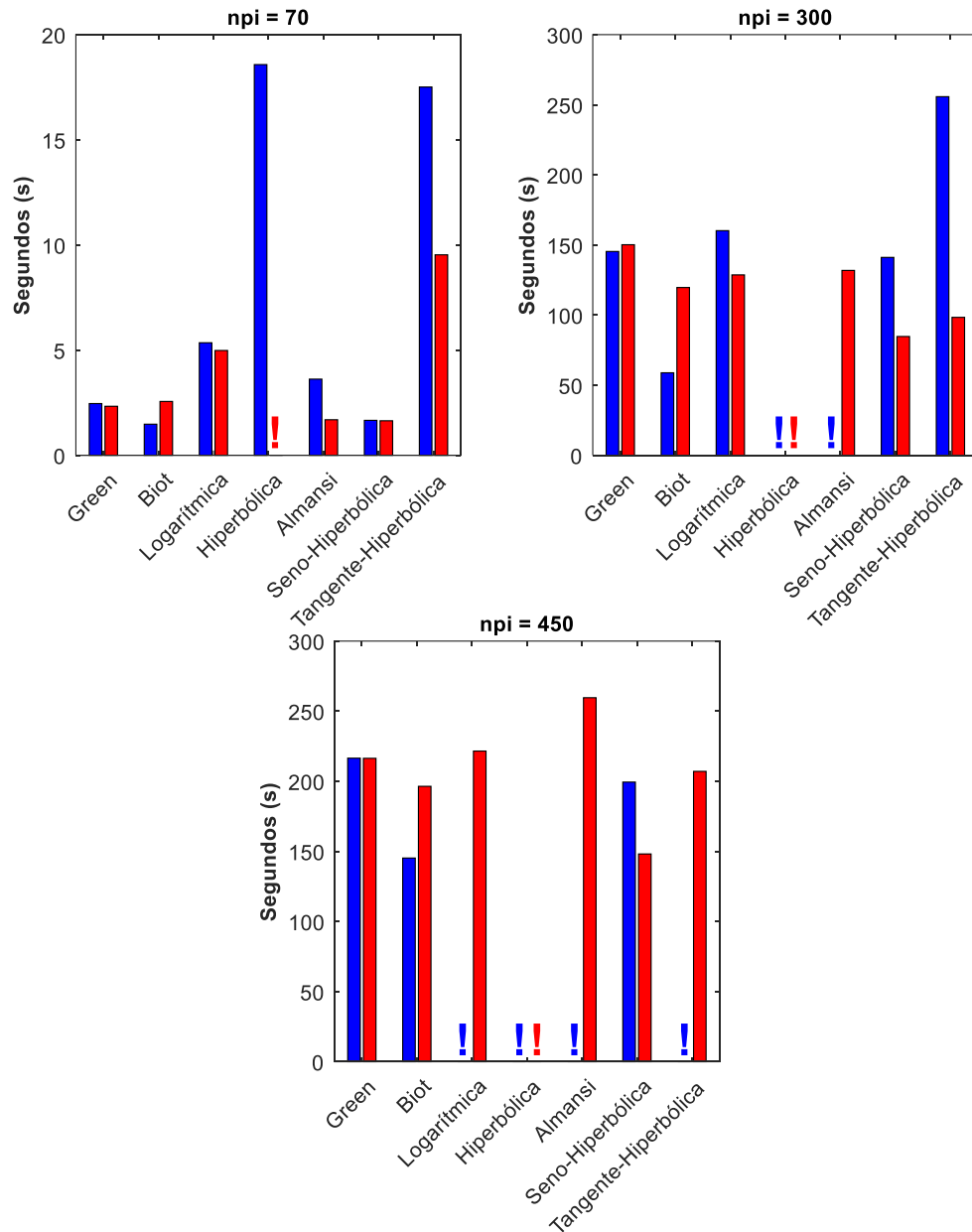


Figura 5.27: Tempo gasto para realizar o Domo Circular de 56-Barras até os pontos de comparação.

Para as medições do **GRUPO 2**, passando por todos os pontos, nota-se que usar a formulação gerada pela medida de deformação de Green para representar os outros modelos constitutivos resultou em processamento mais rápido e estável. Das sete medidas estudadas, apenas o modelo tipo-Hookeano associado à medida Hiperbólica falhou em completar a análise. Em geral, pode-se inferir que usar a formulação gerada pela medida de deformação de Green para representar

todos os modelos produziu resultados menos díspares, sendo outra indicação de que a escolha da medida de deformação é crucial e vai além do comportamento material do modelo constitutivo tipo-Hookeano que ela gera, ou seja, deve-se considerar se a formulação gerada é eficiente e estável.

5.2.4 Domo Estelar de 60-Barras

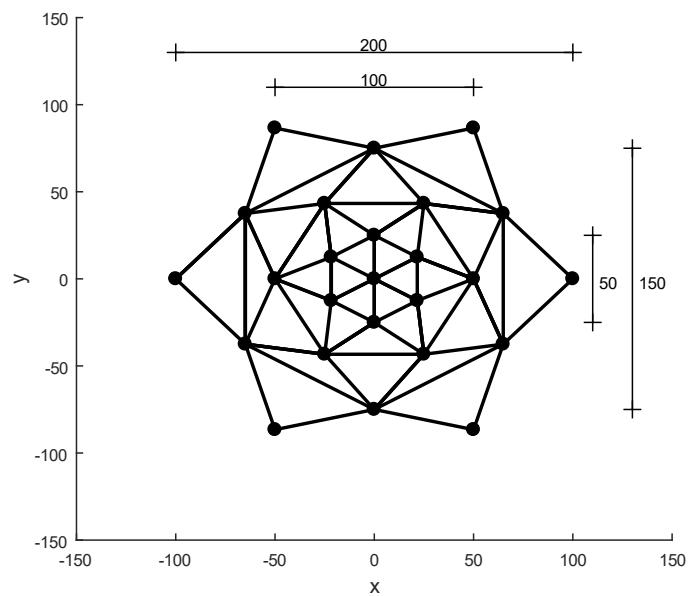


Figura 5.28: Domo Estelar de 60-Barras. Vista de cima.

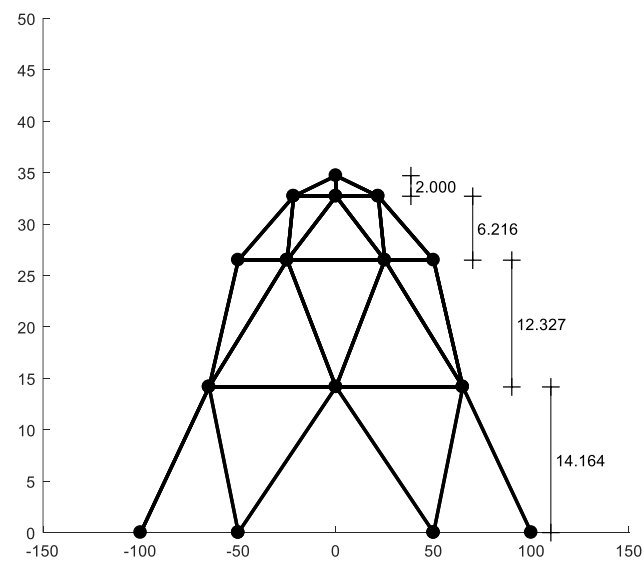


Figura 5.29: Domo Estelar de 60-Barras. Vista frontal.

As Figura 5.28 e Figura 5.29 retratam uma estrutura de treliça que tem sido amplamente utilizada em pesquisas que investigam trajetórias de equilíbrio não lineares na pós-flambagem (CHOONG; HANGAI, 1993; CHOONG; HANGAI; KWUN, 1994; SILVA, 2002; SOUZA et al., 2018). Esta estrutura treliçada é composta por 25 nós e 60 barras, cada uma possuindo a rigidez axial adimensional de $EA = 1 \times 10^{-4}$. Para realizar a análise, foi empregado um método de controle de deslocamento, utilizando um incremento de posição do nó central de $\Delta h = -0.25$ com uma tolerância igual a 10^{-6} .

A trajetória de equilíbrio da estrutura é exibida na Figura 5.30 em um gráfico de Força x Deslocamento Vertical. Neste gráfico, círculos e setas pretas indicam pontos selecionados para comparação de custos computacionais, enquanto setas vermelhas destacam pontos críticos na trajetória de equilíbrio onde a análise requer mais tempo para ultrapassá-los. Os pontos de comparação foram distribuídos ao longo da curva, possibilitando a avaliação da dificuldade de cada modelo tipo-Hookeano em superar pontos críticos específicos (critérios a, b, c). As trajetórias de equilíbrio são muito próximas, o que torna os resultados muito propícios para uma análise de custo computacional de maneira bem isolada e particular.

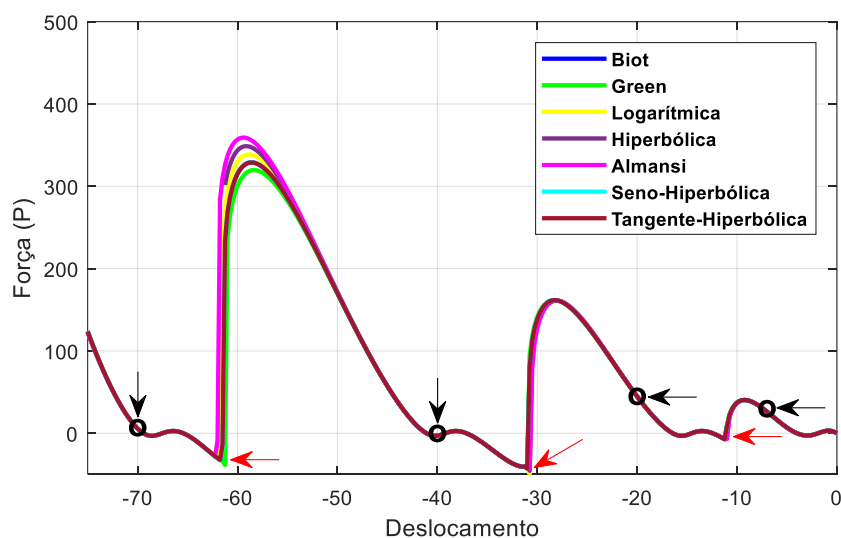


Figura 5.30: Trajetória de equilíbrio do nó central, Força x Deslocamento Vertical.

Os resultados relacionados à Treliça Domo Estrela de 60 Elementos são apresentados na Figura 5.31. Passando pelos resultados do **GRUPO 1** nos pontos de comparação, observa-se que os modelos de Green, Biot e Seno-Hiperbólica consistentemente exibem custos computacionais menores. Por outro lado, o modelo de Tangente-Hiperbólica foi sempre o mais lento e no ponto de $npi = 280$ seu tempo de medição foi tão mais longo que, para não perturbar a análise das

outras medições, seu resultado foi omitido (no APÊNDICE V pode-se encontrar o valor). O modelo de Logarítmica exibe bons resultados, classificando-se como o quarto mais rápido em todos os pontos de comparação, mas falha em completar a análise no último ponto de comparação. Apesar de não serem os mais rápidos, os modelos de Hiperbólica e Almansi completam com sucesso a análise em todos os pontos de comparação.

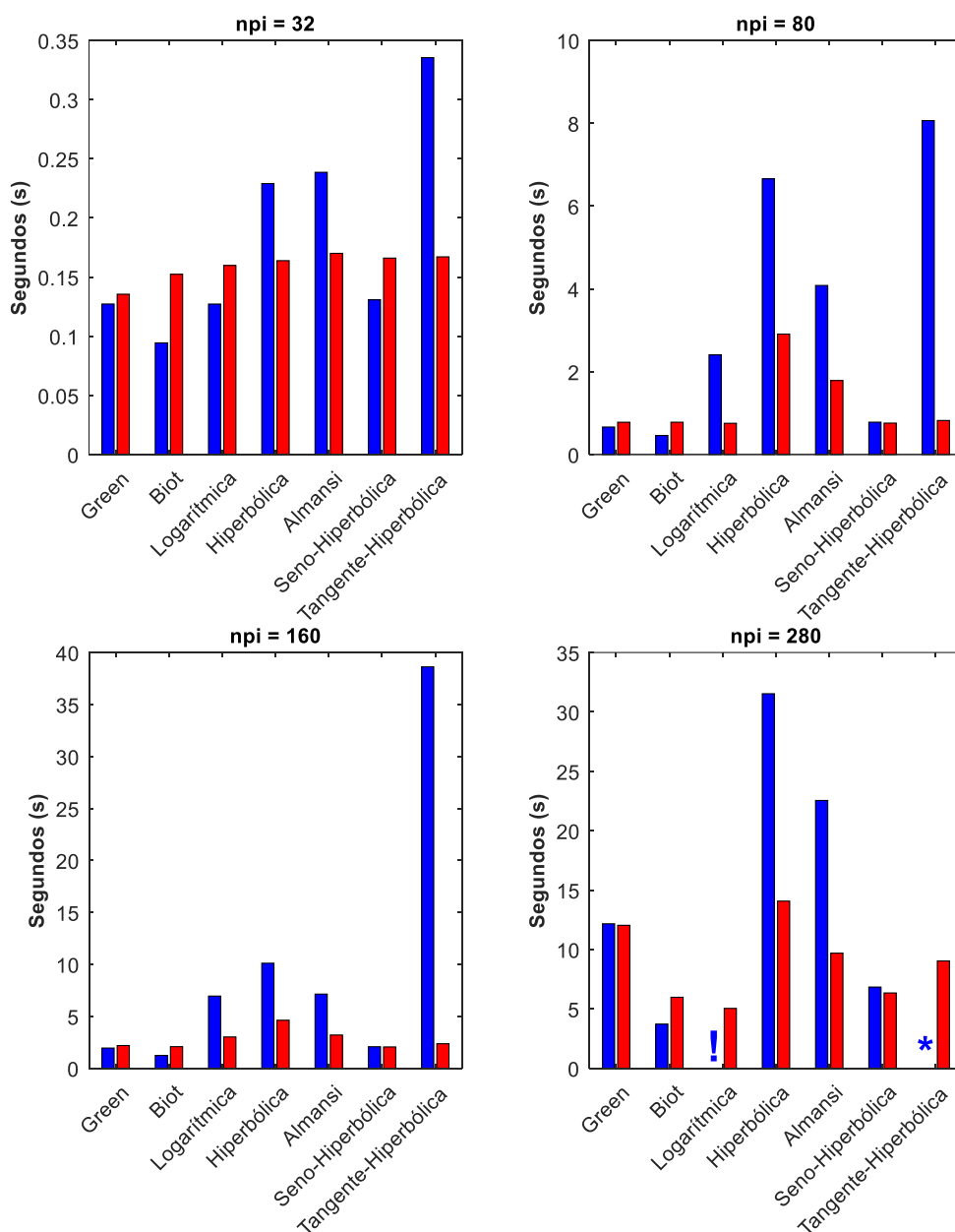


Figura 5.31: Tempo gasto para realizar o Domo Estelar de 56-Barras até os pontos de comparação.

Ao examinar as medições no **GRUPO 2**, pode-se observar que, em geral, elas estão mais próximas umas das outras do que no **GRUPO 1**. Curiosamente, o modelo de Tangente-

Hiperbólica, que foi o mais lento no **GRUPO 1**, agora ocupa uma posição intermediária. O modelo de Logarítmica, que falhou em completar a análise no **GRUPO 1**, revelou-se o mais rápido no **GRUPO 2**. Os modelos de Biot e Seno-Hiperbólica seguiram de perto como o segundo e terceiro mais rápidos, respectivamente. As outras medidas não exibiram comportamentos notáveis.

5.2.5 Conclusões do estudo de custo computacional na análise de problemas unidimensionais

Para uma análise linear estática de treliças simples, o custo computacional pode ser considerado sem importância, embora não irrelevante. No entanto, para treliças mais complexas, com a presença de não linearidade geométrica, e no caso de otimização estrutural, em que um grande número de análises é realizado, escolher um modelo e uma medida de deformação que realizem análises mais rápidas pode ser extremamente vantajoso. Os resultados mostraram que, dependendo das escolhas feitas, o tempo computacional pode ser multiplicado várias vezes, o que impacta fortemente processos que podem levar muitas horas ou alguns dias.

As formulações das variáveis de interesse de uma análise geometricamente não linear (força interna e matriz hessiana) mudam de acordo com o par energeticamente conjugado de tensão-deformação utilizado no desenvolvimento do MEF. Essas diferentes formulações, por si só, provaram ter diferentes capacidades de convergir em pontos críticos da trajetória de equilíbrio (*snap-through* e “quinas”), além disso as diferentes combinações entre essas formulações e os modelos tipo-Hookeanos estudados também possuem diferentes eficiências computacionais. Os resultados até mostram que uma dessas combinações (formulação & modelo) pode ser excelente para analisar uma determinada estrutura até certo ponto (baixo custo computacional), mas que pode ter dificuldade específica em superar um determinado ponto crítico de uma trajetória de equilíbrio. Portanto, ao realizar análises complexas, se o procedimento falhar em convergir, mudar a formulação usada pode ser uma solução possível a se considerar.

A partir dos resultados obtidos, pode-se dizer que os modelos tipo-Hookeanos de Biot e Green são os mais estáveis (já que sempre terminaram a análise) e mais rápidos dentre os modelos tipo-Hookeanos originados das medidas de deformação clássicas. O modelo de Seno-Hiperbólica também se provou muito estável e rápido. Os modelos tipo-Hookeanos de Biot e Seno-Hiperbólica tiveram bons resultados quando representados pelas respectivas formulações

por elas criadas (juntamente com suas tensões conjugadas), ou seja, em medições do **GRUPO 1**, e quando representados pela formulação gerada pela medida de deformação de Green e sua tensão conjugada (**GRUPO 2**). Os outros modelos geraram resultados que variaram muito, tanto em termos de robustez quanto de velocidade de processamento. Apenas a formulação obtida pela medida de deformação de Green e sua tensão conjugada foi usada para representar modelos tipo-Hookeanos gerados pelas outras medidas de deformação, mas muitas outras combinações podem ser feitas, o que ainda deixa muito espaço para investigações futuras.

O estudo foi feito para treliças, porém, ao projetar os resultados encontrados aqui para análises mais elaboradas, com elementos mais complexos, a exemplo de placas, cascas, vigas e sólidos, não parece razoável acreditar que os efeitos do uso de diferentes medidas de deformação sejam suavizados, pelo contrário.

6. ESTUDOS ANALÍTICOS DE MODOS PUROS DE DEFORMAÇÃO: SÓLIDOS

Nesta seção examina-se o comportamento dos modelos tipo-Hookeanos originados das medidas SHG e Seth-Hill quando aplicados em sólidos, particularmente no estudo dos seguintes modos puros de deformação: Extensão Axial Simples (EAS), Carregamento Equi-Biaxial (CE-B) e Cisalhamento Simples (CS).

6.1 Formulação analítica dos modos puros de deformação

6.1.1 Extensão Axial Simples (EAS)

O primeiro modo de deformação a ser estudado é o referente à Extensão Axial Simples (EAS). Considera-se que a deformação é produzida por forças de superfície (*surface tractions*) paralelas ao eixo X_1 , aplicadas apenas nas faces do corpo prismático, como mostra a Figura 6.1, que apresenta de maneira qualitativa o sistema estrutura/carregamento a ser estudado. Ressalta-se que a representação das forças aplicadas é apenas ilustrativa e tem a intenção de indicar as faces onde as cargas são aplicadas.

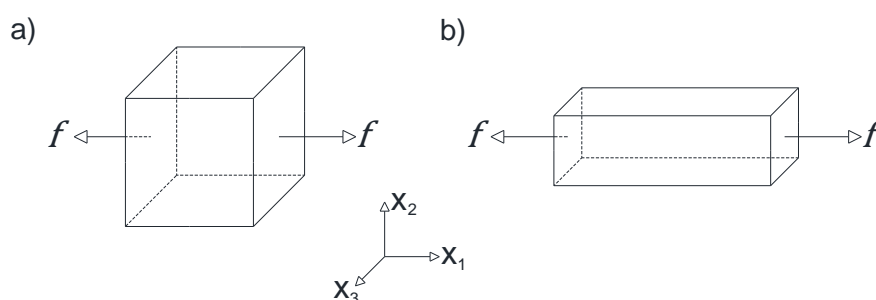


Figura 6.1: Extensão Axial Simples nas configurações: a) indeformada; b) deformada.

A descrição Lagrangiana da deformação das partículas do corpo prismático é definida por:

$$x_1 = \lambda_1 X_1; \quad x_2 = \lambda_2 X_2; \quad x_3 = \lambda_3 X_3; \quad 6.1$$

sendo x_1 , x_2 e x_3 as posições das partículas na configuração deformada. Dessa forma o tensor Gradiente de Deformação $[\mathbf{F}]$, em termos das direções principais de estiramento, é dado por:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad 6.2$$

Como não há rotação, a decomposição polar gera:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 6.3$$

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad 6.4$$

Considerando um par conjugado genérico de tensores de Deformação e Tensão, $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ e $[\boldsymbol{\sigma}]$, e a generalização direta da lei de Hooke clássica para deformações finitas, considerando materiais isotrópicos, tem-se a expressão já apresentada pela Eq. 3.49, que é aqui repetida em uma versão expandida pela Eq. 6.5. As definições dos parâmetros de Lamé, dependentes do Módulo de Young (E) e Coeficiente de Poisson (ν), são expressas pelas Eq. 6.6 e Eq. 6.7.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = L_1 \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot L_2 \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad 6.5$$

$$L_1 = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad 6.6$$

$$L_2 = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad 6.7$$

Para a Extensão Axial Simples tem-se: $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$ e $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, dessa forma encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\sigma_{11} = L_1 \cdot (\varepsilon_{11} + 2 \cdot \varepsilon_{22}) + 2 \cdot L_2 \cdot \varepsilon_{11} \quad 6.8$$

$$0 = L_1 \cdot (\varepsilon_{11} + 2 \cdot \varepsilon_{22}) + 2 \cdot L_2 \cdot \varepsilon_{22} \quad 6.9$$

Um rearranjo algébrico da Eq. 6.9 resulta em:

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = - \left[\frac{L_1}{2 \cdot (L_1 + L_2)} \right] \cdot \varepsilon_{11} \quad 6.10$$

Substituindo na primeira equação do sistema, reorganizando e lançando mão de uma variável auxiliar (z), característica da relação estudada considerando-se um modo de deformação específico e dependente do material:

$$\sigma_{11} = \left[\frac{3 \cdot L_1 \cdot L_2 + 2 \cdot L_2^2}{(L_1 + L_2)} \right] \cdot \varepsilon_{11} \quad 6.11$$

$$z = \left[\frac{3 \cdot L_1 \cdot L_2 + 2 \cdot L_2^2}{(L_1 + L_2)} \right] \rightarrow \sigma_{11} = z \cdot \varepsilon_{11} \quad 6.12$$

Para comparar o comportamento dos modelos constitutivos tipo-Hookeanos baseados nas medidas das famílias SHG e Seth-Hill é necessário substituir na Eq. 6.12 as medidas de deformação e suas respectivas tensões conjugadas e, por fim, por meio de relações entre as medidas de tensão, encontrar o tensor de Tensão Nominal $[\mathbf{P}]$. Ressalta-se que alguns autores (BELYTSCHKO et al., 2014; MARSDEN; HUGHES, 1994; OGDEN, 1997; TRUESDELL; NOLL, 2004) chamam o tensor transposto de $[\mathbf{P}]$ de Tensor de Tensão Nominal, $[\mathbf{N}] = [\mathbf{P}]^T$, porém no modo EAS em questão os tensores $[\mathbf{N}]$ e $[\mathbf{P}]$ coalescem, então essa questão de nomenclatura é indiferente.

Utilizando a notação da Eq. 3.13 para representar um tensor de deformação genérico da seguinte maneira: $[\boldsymbol{\varepsilon}] = f([\boldsymbol{U}]) = \sum_i f(\lambda_i) \{N_i\} \otimes \{N_i\}$, sabendo-se da relação entre o tensor de Tensão Nominal e o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie (Eq. 3.31), e fazendo uso da fórmula genérica expressa pela Eq. 3.41, a partir de manipulações algébricas chega-se na Eq. 6.13. Trata-se de uma fórmula original desta tese, com capacidade de descrever a curva tensão x estiramento para qualquer medida de deformação sob o modo de deformação EAS.

$$P_{11} = zf(\lambda_1)f'(\lambda_1) \quad 6.13$$

Quando se trabalha em um regime de grandes deformações, o uso do tensor de Tensão de Cauchy, $[\sigma^C]$, é frequentemente vantajoso em comparação ao tensor de Tensão Nominal $[P]$. Com isso em mente, a investigação do comportamento da relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ é tão importante quanto (ou até mais importante que) que $P_{11} \times \lambda_1$. A passagem do tensor de Tensão Nominal para o tensor de Tensão de Cauchy é feita através da Eq. 3.30 que se torna a 6.14 quando as condições do modo EAS são consideradas.

$$\sigma_{11}^C = \frac{zf(\lambda_1)f'(\lambda_1)}{\lambda_2^2} \quad 6.14$$

Faz-se necessário encontrar uma relação entre λ_1 e λ_2 para deixar σ_{11}^C em função apenas de λ_1 . Utiliza-se a lei de Hooke na notação indicial para definir a componente σ_{22} :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \cdot \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} \right] \quad 6.15$$

$$\sigma_{22} = \frac{\nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + (1 - \nu)\varepsilon_{22}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} E \quad 6.16$$

Como no caso do modo EAS tem-se $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ e $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$, encontra-se a definição do coeficiente de Poisson (Eq. 6.17).

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \quad 6.17$$

Pode-se agora definir a relação entre λ_1 e $\lambda_2 = \lambda_3$. A Eq. 6.18 (KOROBAYNIKOV, 2019) refere-se às medidas de deformação de Seth-Hill com $m \neq 0$ e a Eq. 6.19 (KOROBAYNIKOV, 2019) refere-se à medida de deformação Logarítmica ($m = 0$). A relação $\lambda_2 \times \lambda_1$ para SHG–Seth-Hill com $m \neq 0$ é dada pela Eq. 6.20 e quando $m = 0$ pela Eq. 6.21. A função arco seno-hiperbólica é simbolizada como $\operatorname{asenh}(\cdot)$.

$$\lambda_2 = (1 + \nu - \nu \lambda_1^m)^{1/m} \quad 6.18$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-\nu} \quad 6.19$$

$$\lambda_2 = \left\{ \frac{m}{n} \operatorname{asenh} \left[-\nu \operatorname{senh} \left(\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right) \right] + 1 \right\}^{1/m} \quad 6.20$$

$$\lambda_2 = \exp\{n^{-1} \operatorname{asenh}[-\nu \operatorname{senh}(n \ln(\lambda_1))]\} \quad 6.21$$

Por fim, substituindo as Eq. 6.18 – 6.21 na Eq. 6.14 encontra-se: a Eq. 6.22 para medidas de deformação de Seth-Hill com $m \neq 0$, Eq. 6.23 para a medida de deformação Logarítmica ($m = 0$), Eq. 6.24 para SHG–Seth-Hill com $m \neq 0$ e a Eq. 6.25 para SHG–Seth-Hill com $m = 0$.

$$\sigma_{11}^c = \frac{z}{m} \lambda_1^{m-1} (\lambda_1^m - 1) (1 + \nu - \nu \lambda_1^m)^{-2/m} \quad 6.22$$

$$\sigma_{11}^c = z \lambda_1^{2\nu-1} \ln \lambda_1 \quad 6.23$$

$$\sigma_{11}^c = \frac{z \lambda_1^{m-1}}{n} \cosh \left[\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right] \operatorname{senh} \left[\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right] \left\{ \frac{m}{n} \operatorname{asenh} \left[-\nu \operatorname{senh} \left(\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right) \right] + 1 \right\}^{-2/m}$$

6.24

$$\sigma_{11}^c = \frac{z}{n\lambda_1} \sinh[n \ln(\lambda_1)] \cosh[n \ln(\lambda_1)] \exp\{-2n^{-1} \operatorname{asinh}[-\nu \sinh(n \ln(\lambda_1))]\} \quad 6.25$$

6.1.2 Carregamento *Equi-Biaxial* (CE-B)

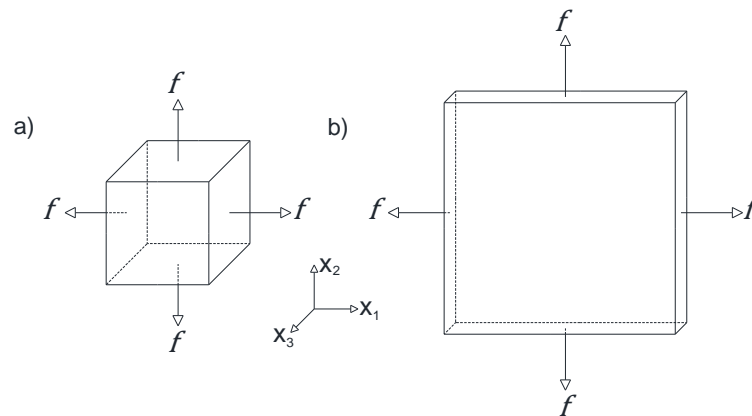


Figura 6.2: Carregamento Equi-Biaxial nas configurações: a) indeformada; b) deformada.

O modo puro gerado por um carregamento Equi-Biaxial, representado pela Figura 6.2, consiste na aplicação de carregamentos axiais iguais em duas direções principais de um sólido cúbico. As forças representadas na Figura 6.2 possuem função meramente ilustrativa e servem somente para identificar as faces em que os carregamentos são aplicados. Trata-se de um modo de deformação muito associado ao estudo de membranas feitas de materiais elásticos capazes de suportar grandes deformações, sendo os elastômeros e os tecidos biológicos moles exemplos relevantes. O desenvolvimento da formulação é muito semelhante ao realizado para o modo EAS, podendo ser utilizada a sequência da Eq. 6.1 até a Eq. 6.7 para representar o modo CE-B.

A diferença surge da interpretação do problema, que leva a concluir que no caso atual tem-se $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$ e $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, dessa forma encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\sigma_{11} = L_1(2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 2L_2\varepsilon_{11} \quad 6.26$$

$$0 = L_1(2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + 2L_2\varepsilon_{33} \quad 6.27$$

Uma reorganização do sistema leva à seguinte igualdade:

$$\varepsilon_{33} = -\left(\frac{2L_1}{L_1 + 2L_2}\right) \cdot \varepsilon_{11} \quad 6.28$$

Substituindo na primeira equação do sistema e realizando as devidas simplificações:

$$\sigma_{11} = \left[\frac{6L_1L_2 + 4L_2^2}{(L_1 + 2L_2)}\right] \cdot \varepsilon_{11} \quad 6.29$$

Aqui a variável auxiliar z é expressa pela Eq. 6.30 para a relação entre $\sigma_{11} \times \lambda_1$, de forma que caracteriza o modo puro CE-B.

$$z = \left[\frac{3L_1L_2 + 2L_2^2}{(L_1 + L_2)}\right] \rightarrow \sigma_{11} = z\varepsilon_{11} \quad 6.30$$

Fica claro agora quão oportuno é o uso da variável auxiliar z ao se notar que a Eq. 6.13, definida para o modo EAS, pode ser reutilizada aqui no modo CE-B. A passagem de P_{11} para σ_{11}^C também é feita a partir da Eq. 3.30, porém para o modo CE-B as relações entre os estiramentos principais mudam para: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, de maneira que a componente σ_{11}^C é expressa pela Eq. 6.31.

$$\sigma_{11}^C = \frac{P_{11}}{\lambda_1\lambda_3} \quad 6.31$$

A lei de Hooke 3D juntamente com as condições que definem o modo CE-B resultam em uma nova expressão para o Coeficiente de Poisson (Eq. 6.32).

$$\nu = \frac{\varepsilon_{33}}{-2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}} = \frac{\varepsilon_{33}}{-2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}} \quad 6.32$$

Com essa nova definição é possível estabelecer as relações entre $\lambda_1 \times \lambda_3$: Eq. 6.33 para medidas de deformação de Seth-Hill com $m \neq 0$, Eq. 6.34 para a medida de deformação Logarítmica ($m = 0$), Eq. 6.35 para SHG–Seth-Hill com $m \neq 0$ e a Eq. 6.36 para SHG–Seth-Hill em que $m = 0$.

$$\lambda_3 = \left[\frac{\nu(1 - 2\lambda_1^m) + 1}{1 - \nu} \right]^{1/m} \quad 6.33$$

$$\lambda_3 = \lambda_1^{2\nu/(\nu-1)} \quad 6.34$$

$$\lambda_3 = \left\{ \frac{m}{n} \operatorname{asinh} \left[\frac{2\nu}{\nu-1} \operatorname{senh} \left(\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right) \right] + 1 \right\}^{1/m} \quad 6.35$$

$$\lambda_3 = \exp \left\{ n^{-1} \operatorname{asinh} \left[\frac{2\nu}{\nu-1} \operatorname{senh}(n \ln(\lambda_1)) \right] \right\} \quad 6.36$$

Finalmente, as expressões para a componente axial do tensor de Tensão de Cauchy são definidas: Eq. 3.37 para medidas de deformação de Seth-Hill com $m \neq 0$, Eq. 3.38 para a medida de deformação Logarítmica ($m = 0$), Eq. 3.39 para SHG–Seth-Hill em que $m \neq 0$ e a Eq. 3.40 para SHG–Seth-Hill com $m = 0$.

$$\sigma_{11}^C = \frac{z}{m} \lambda_1^{m-2} (\lambda_1^m - 1) \left[\frac{\nu(1 - 2\lambda_1^m) + 1}{1 - \nu} \right]^{-1/m} \quad 6.37$$

$$\sigma_{11}^C = z \lambda_1^{2(1-2\nu)/(\nu-1)} \ln(\lambda_1) \quad 6.38$$

$$\sigma_{11}^c = \frac{z\lambda_1^{m-2}}{n} \cosh\left[\frac{n}{m}(\lambda_1^m - 1)\right] \sinh\left[\frac{n}{m}(\lambda_1^m - 1)\right] \left\{ \frac{m}{n} \operatorname{asinh}\left[\frac{2\nu}{\nu-1} \sinh\left(\frac{n}{m}(\lambda_1^m - 1)\right)\right] + 1 \right\}^{-1/m}$$

6.39

$$\sigma_{11}^c = \frac{z}{n\lambda_1^2} \sinh[n \ln(\lambda_1)] \cosh[n \ln(\lambda_1)] \exp\left\{-n^{-1} \operatorname{asinh}\left[\frac{2\nu}{\nu-1} \sinh(n \ln(\lambda_1))\right]\right\} \quad 6.40$$

6.1.3 Cisalhamento Simples (CS)

O modo de Cisalhamento Simples é de interesse para o estudo do comportamento de diferentes modelos constitutivos sob ação que gera rotações relativas dos eixos principais.

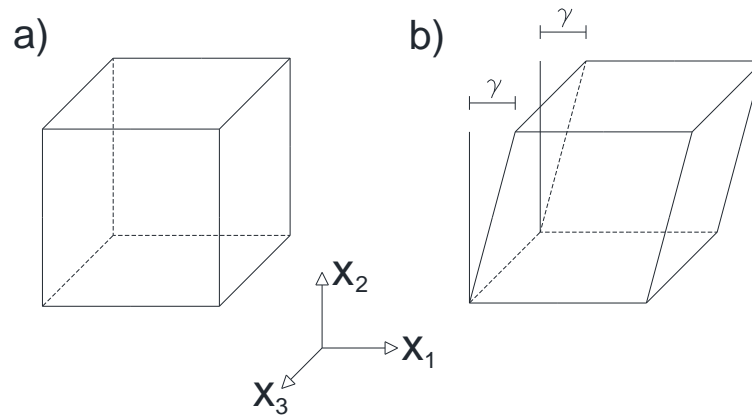


Figura 6.3: Cisalhamento Simples: a) configuração inicial; b) configuração deformada.

A Figura 6.3 ilustra o modo CS e as equações a seguir descrevem matematicamente o problema.

$$x_1 = X_1 + \gamma \cdot X_2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3 \quad 6.41$$

Faz-se a introdução da grandeza β , uma medida de deformação de cisalhamento média entre as distorções das fibras horizontal (zero) e vertical (γ).

$$\gamma = 2 \tan(\beta) \rightarrow \beta = \text{atan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad 6.42$$

O tensor Gradiente de Deformação $[\mathbf{F}]$ que descreve o movimento é:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 6.43$$

Para se encontrar o tensor $[\mathbf{U}]$ utilizar-se-á a estratégia usada por Hashiguchi e Yamakawa (2012). A partir de $[\mathbf{F}]$, não simétrico, define-se o Tensor de Deformação Direito de Cauchy-Green (Eq. 6.44).

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T \cdot [\mathbf{F}] = [\mathbf{U}]^T \cdot [\mathbf{U}] = [\mathbf{U}]^2 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 6.44$$

Os autovalores de $[\mathbf{C}]$, aqui denotados por λ_i^C , são as raízes do polinômio característico:

$$\det([\mathbf{C}] - \lambda_i^C \cdot [\mathbf{I}]) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda_i^C & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 - \lambda_i^C & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i^C \end{bmatrix} \quad 6.45$$

$$1 - 3 \cdot \lambda_i^C + 3 \cdot (\lambda_i^C)^2 - \gamma^2 \cdot \lambda_i^C + \gamma^2 \cdot (\lambda_i^C)^2 - (\lambda_i^C)^3 = 0 \quad 6.46$$

A interpretação física do modo CS indica que $\lambda_3^C = 1$ é solução do problema, pois trata-se de uma mudança de configuração sem alterações na direção X_3 , e a substituição desse valor na equação confirma matematicamente essa interpretação. Reorganizando a Eq. 6.46 e lançando mão do processo algébrico chamado divisão sintética, a ordem do polinômio característico é reduzida.

$$-(\lambda_i^c)^3 + (3 + \gamma^2) \cdot (\lambda_i^c)^2 - (3 + \gamma^2) \cdot \lambda_i^c + 1 = 0 \quad 6.47$$

-1	$(3 + \gamma^2)$	$-(3 + \gamma^2)$	+1	$\lambda_i^c = 1$
	-1	$2 + \gamma^2$	-1	
-1	$2 + \gamma^2$	-1	0	

$$(\lambda_i^c - 1) \cdot (-(\lambda_i^c)^2 + (2 + \gamma^2) \cdot \lambda_i^c - 1) = 0 \quad 6.48$$

A solução da equação de 2º grau revela os outros dois autovalores:

$$\lambda_1^c = \frac{2 + \gamma^2 + \gamma \cdot \sqrt{4 + \gamma^2}}{2} \quad 6.49a$$

$$\lambda_2^c = \frac{2 + \gamma^2 - \gamma \cdot \sqrt{4 + \gamma^2}}{2} \quad 6.49b$$

Substituindo $\gamma = 2 \cdot \tan(\beta)$ e executando simplificações algébricas:

$$\lambda_1^c = \left(\frac{\text{sen}(\beta) + 1}{\cos(\beta)} \right)^2 \quad 6.50a$$

$$\lambda_2^c = \left(\frac{\text{sen}(\beta) - 1}{\cos(\beta)} \right)^2 \quad 6.50b$$

$$\lambda_3^c = 1 \quad 6.50c$$

Sabendo que os autovalores de $[\mathbf{U}]$, aqui representados por λ_i , relacionam-se com os autovalores de $[\mathbf{C}]$ da seguinte maneira:

$$\lambda_i = \sqrt{\lambda_i^C} \quad 6.51$$

Tem-se

$$\lambda_1 = \frac{\text{sen}(\beta) + 1}{\cos(\beta)} \quad 6.52a$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{sen}(\beta) - 1}{\cos(\beta)} \quad 6.52b$$

$$\lambda_3 = 1 \quad 6.52c$$

Para definir os autovetores de $[\mathbf{U}]$ basta definir os autovetores de $[\mathbf{C}]$, pois eles são iguais.

$$[\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{N}_i] = \lambda_i^C \cdot [\mathbf{N}_i] \quad 6.53a$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1^{(I)} \\ N_1^{(II)} \\ N_1^{(III)} \end{Bmatrix} = \left(\frac{\text{sen}(\beta) + 1}{\cos(\beta)} \right)^2 \cdot \begin{Bmatrix} N_1^{(I)} \\ N_1^{(II)} \\ N_1^{(III)} \end{Bmatrix} \quad 6.53b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_2^{(I)} \\ N_2^{(II)} \\ N_2^{(III)} \end{Bmatrix} = \left(\frac{\text{sen}(\beta) - 1}{\cos(\beta)} \right)^2 \cdot \begin{Bmatrix} N_2^{(I)} \\ N_2^{(II)} \\ N_2^{(III)} \end{Bmatrix} \quad 6.53c$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_3^{(I)} \\ N_3^{(II)} \\ N_3^{(III)} \end{Bmatrix} = 1 \cdot \begin{Bmatrix} N_3^{(I)} \\ N_3^{(II)} \\ N_3^{(III)} \end{Bmatrix} \quad 6.53d$$

O entendimento físico do que as equações representam indica que o autovetor $\vec{N}_3 = \{0, 0, 1\}$. A solução do sistema de equações formado por Eq. 6.53b e 6.53c fornece os outros dois autovetores que juntos formam o tensor de Transformação $[\mathbf{Q}_U]$:

$$[\mathbf{Q}_U] = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\beta)}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen}(\beta)}} & \frac{\operatorname{sen}(\beta) + 1}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen}(\beta)}} & 0 \\ \frac{\cos(\beta)}{\sqrt{2 - 2 \operatorname{sen}(\beta)}} & \frac{\operatorname{sen}(\beta) - 1}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen}(\beta)}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 6.54$$

Com o tensor $[\mathbf{Q}_U]$ definido e sabendo que $[\mathbf{\Lambda}]$ é um tensor diagonal composto pelos autovalores λ_i (Eq. 6.52), ou seja, é a projeção do tensor $[\mathbf{U}]$ nas Direções Principais, para encontrar o tensor $[\mathbf{U}]$ basta executar a transformação inversa:

$$[\mathbf{\Lambda}] = [\mathbf{Q}_U] \cdot [\mathbf{U}] \cdot [\mathbf{Q}_U]^T \quad \rightarrow \quad [\mathbf{U}] = [\mathbf{Q}_U]^T \cdot [\mathbf{\Lambda}] \cdot [\mathbf{Q}_U] \quad 6.55$$

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\beta) & \frac{1 + \operatorname{sen}^2(\beta)}{\cos(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 6.56$$

Com as definições das medidas de deformação investigadas em função de $[\mathbf{U}]$ (Eq. 3.23 e Eq. 4.4) e utilizando a generalização da lei de Hooke para deformações finitas (Eq. 3.49), é possível estudar o comportamento do componente do tensor de Tensão de Cauchy referente ao cisalhamento (σ_{12}^C) em relação ao aumento da Deformação de Cisalhamento (γ). Conforme Peixoto et al. (2024), as equações para se achar $\sigma_{12}^C \times \gamma$ são apresentadas, sendo que, devido ao tamanho das expressões, quando for preciso usar mais de uma linha, o sinal de subtração “-”, o sinal de adição “+” e o de multiplicação “×” (até aqui omitido nas equações) serão indicados ao final de uma linha e no começo da linha subsequente. Tem-se para os tensores de Deformação da família Seth-Hill com $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^C &= \frac{\lambda_1^{m-2}}{2m} \{\cos(\beta) + \gamma[1 + \text{sen}(\beta)]\} [2L_2(\lambda_1^m - 1) + L_1(\lambda_1^m + \lambda_2^m - 2)] - \\ & \quad - \frac{\lambda_2^{m-2}}{2m} \{\cos(\beta) + \gamma[\text{sen}(\beta) - 1]\} [2L_2(\lambda_2^m - 1) + L_1(\lambda_1^m + \lambda_2^m - 2)] \end{aligned} \quad 6.57$$

Para o tensor de Deformação Logarítmica ($m = 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^C &= \frac{\lambda_1^{-2}}{2} \{\cos(\beta) + \gamma[1 + \text{sen}(\beta)]\} \{2L_2 \ln(\lambda_1) + L_1[\ln(\lambda_1) + \ln(\lambda_2)]\} - \\ & \quad - \frac{\lambda_2^{-2}}{2} \{\cos(\beta) + \gamma[\text{sen}(\beta) - 1]\} \{2L_2 \ln(\lambda_2) + L_1[\ln(\lambda_1) + \ln(\lambda_2)]\} \end{aligned} \quad 6.58$$

Para SHG–Seth-Hill em que $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^C &= \frac{\lambda_1^{m-2}}{2n} \cosh \left[\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right] \{\cos(\beta) + \gamma[1 + \text{sen}(\beta)]\} \times \\ & \quad \times \left\{ 2L_2 \sinh \left[\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right] + L_1 \left[\sinh \left(\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right) + \sinh \left(\frac{n}{m} (\lambda_2^m - 1) \right) \right] \right\} + \\ & \quad + \frac{\lambda_2^{m-2}}{2n} \cosh \left[\frac{n}{m} (\lambda_2^m - 1) \right] \{\cos(\beta) + \gamma[\text{sen}(\beta) - 1]\} \times \\ & \quad \times \left\{ 2L_2 \sinh \left[\frac{n}{m} (\lambda_2^m - 1) \right] + L_1 \left[\sinh \left(\frac{n}{m} (\lambda_1^m - 1) \right) + \sinh \left(\frac{n}{m} (\lambda_2^m - 1) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad 6.59$$

E para SHG–Seth-Hill com $m = 0$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^c = & \frac{\cosh[n \ln(\lambda_1)]}{2n\lambda_1^2} \{\cos(\beta) + \gamma[1 + \sin(\beta)]\} \times \\
& \times \{2L_2 \sinh[n \ln(\lambda_1)] + L_1[\sinh(n \ln(\lambda_1)) + \sinh(n \ln(\lambda_2))]\} + \\
& + \frac{\cosh[n \ln(\lambda_2)]}{2n\lambda_2^2} \{\cos(\beta) + \gamma[\sin(\beta) - 1]\} \times \\
& \times \{2L_2 \sinh[n \ln(\lambda_2)] + L_1[\sinh(n \ln(\lambda_1)) + \sinh(n \ln(\lambda_2))]\}
\end{aligned}
\tag{6.60}$$

6.2 Materiais quase-incompressíveis

Com as expressões matemáticas previamente definidas na subseção anterior (“6.1 Formulação analítica dos modos puros de deformação”), gráficos são plotados para analisar a coerência física das respostas obtidas. Os resultados foram obtidos usando um Coeficiente de Poisson referente a um material aproximadamente incompressível ($0,47 < \nu < 0,50$). Para representar materiais semelhantes à borracha, é utilizado um valor de $E = 4$ [MPa] para o módulo de Young e um Coeficiente de Poisson de $\nu = 0,48$, seguindo Batra (2001).

Para construir uma análise sobre a capacidade dos modelos constitutivos estudados de gerar respostas fisicamente coerentes, bem como para identificar os limites dessa capacidade, alguns critérios são apresentados a seguir. Os Critérios **I** e **II** são análogos ao critério apresentado por Hill (1968), no qual a necessidade de se ter uma função monotônica suave foi estabelecida. O Critério **III** foi originalmente apresentado por Treloar (1975). O Critério **IV** é inspirado em discussões feitas por Batra (1998) e Batra (2001).

- **Critério I:** quanto maior a força/tensão de tração axial na direção X_1 (maior σ_{11}^c), maior o estiramento na direção X_1 (maior λ_1);
- **Critério II:** quanto maior a força/tensão de compressão axial na direção X_1 (menor σ_{11}^c), menor o estiramento na direção X_1 (menor λ_1);

- **Crítério III:** nos gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, espera-se que na compressão, à medida que o valor de λ_1 tenda a 0, o componente axial de tensão (σ_{11}^C) tenda a menos infinito, porque, caso contrário, é comum enfrentar problemas de convergência e instabilidade computacional em simulações, conforme afirma Beex (2019), além de significar que um valor finito de tensão de compressão faria o material desaparecer. Quando o **crítério II** não é atendido para os gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, o **crítério III** também não é atendido;
- **Crítério IV:** alguns modelos constitutivos têm limites de estiramento que são diferentes de 0 ou $+\infty$, mas sem perda de coerência física. Verifica-se que, para um valor de estiramento finito, diferente de 0 ou $+\infty$, o valor da força/tensão tende ao infinito, ou seja, há uma assíntota vertical neste valor de estiramento. Este critério diz respeito à limitação do alcance da capacidade de representação de um dado modelo constitutivo, estando relacionado à sua adequação na modelagem de um dado material, e não à ocorrência de inconsistência física.

6.2.1 Análise gráfica: modo puro EAS

Primeiramente, a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ é examinada para o modo EAS. A Figura 6.4 apresenta os gráficos dessa relação, sendo: a) representando a família Seth-Hill, b) a subfamília SHG–Green, c) a subfamília SHG–Biot, d) a subfamília SHG–Logarítmica, e) a subfamília SHG–Hiperbólica e f) a subfamília SHG–Almansi.

Para melhor compreender o significado físico do parâmetro material n , pode-se analisar os gráficos das Figura 6.4b, c, d, e, f, cada um mostrando as medidas de deformação de uma das subfamílias SHG para diferentes valores do parâmetro n . Na parte de compressão da curva, começando em $\lambda = 1$, à medida que se move para a esquerda ($\lambda < 1$), quanto maior o valor de n , maior será o valor da rigidez tangente (primeira derivada) e maior será a taxa de aumento da rigidez tangente (segunda derivada, negativa para compressão). Na parte de tensão da curva, começando em $\lambda = 1$, à medida que se move para a direita ($\lambda > 1$), quanto maior o valor de n , maior será o valor da rigidez tangente (primeira derivada) e maior será a taxa de aumento da tangente de rigidez (segunda derivada). Assim, pode-se dizer que o parâmetro n controla a taxa de aumento da rigidez tangente, tanto na compressão quanto na tração.

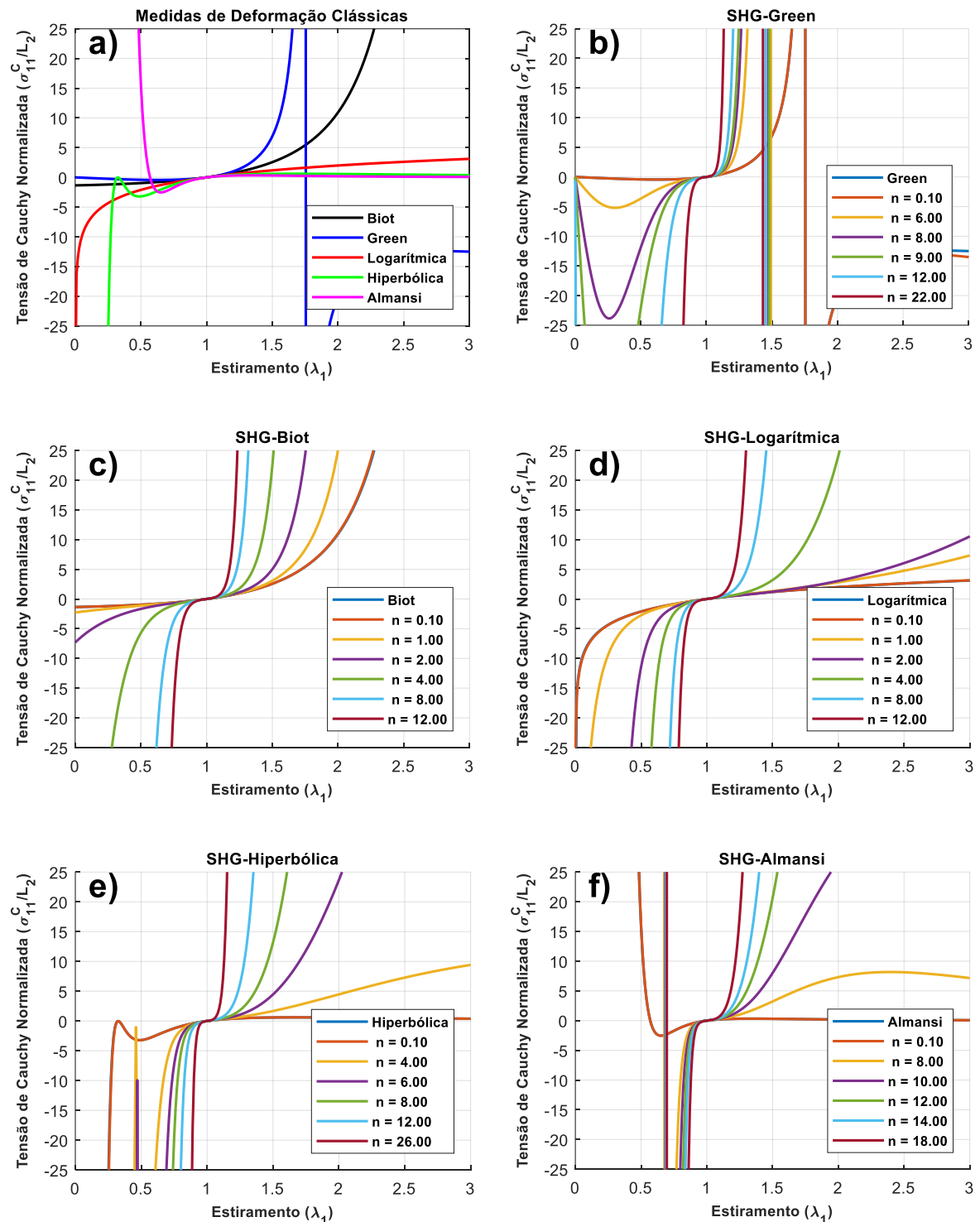


Figura 6.4: EAS: gráfico $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ (a) Seth-Hill; (b, c, d, e, f) subfamílias SHG variando o n .

A partir daqui, inicia-se a análise das limitações de coerência física pela família Seth-Hill (Figura 6.4a). O modelo tipo-Hookeano da deformação Logarítmica mostra um aumento monotônico na tensão à medida que o estiramento aumenta, portanto atende aos critérios **I** e **II**, e além disso, o componente axial da tensão tende a $-\infty$ quando λ_1 tende a 0, portanto também

atende ao critério **III**. As curvas referentes às medidas Hiperbólica e Almansi não atendem ao critério **II** nos pontos $\lambda_1 \approx 0.48$ e $\lambda_1 \approx 0.65$, respectivamente, e ao critério **I** nos pontos $\lambda_1 \approx 1.66$ e $\lambda_1 \approx 1.33$, respectivamente. O modelo de Green não possui coerência física na compressão (**II**) abaixo de $\lambda_1 \approx 0.63$. Na tração, os modelos de Green e Biot atendem ao critério **I**, pois não perdem a coerência física, porém essas curvas possuem assíntotas verticais (**IV**) em $\lambda_1 \approx 1.76$ e $\lambda_1 \approx 3.1$, respectivamente. Na compressão, Biot atende ao critérios **II**, mas não ao **III**. A Figura 6.5 resume o intervalo de coerência física para as medidas de deformação de Seth-Hill.

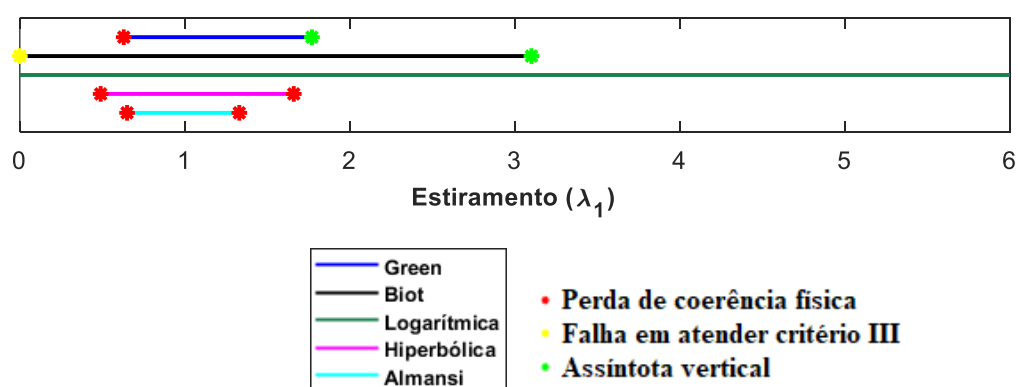


Figura 6.5: Resumo das limitações da família Seth-Hill para o modo EAS.

Além da análise objetiva/quantitativa, uma observação subjetiva/qualitativa sobre o comportamento do modelo da medida Logarítmica vale a pena ser mencionado. Embora o modelo da medida Logarítmica apresente um aumento monotônico na tensão à medida que o estiramento aumenta, ele também mostra uma diminuição contínua na rigidez, que não chega a ser negativa, mas diminui de forma acentuada e contínua, o que caracteriza um comportamento incomum para materiais hiperelásticos submetidos a grandes deformações.

A partir da Figura 6.4b, c, d, e, f, algumas observações gerais podem ser feitas sobre o comportamento da família SHG de medidas de deformação. À medida que o valor de n tende a zero, a medida de deformação SHG tende a recuperar o comportamento da medida de deformação original, é por isso que todos os gráficos têm $n = 0.1$ apresentado, para mostrar essa propriedade da família SHG. Dada a natureza da função seno hiperbólica, seu uso melhora todos os critérios em relação à consistência física: **I**, **II** e **III**. Sobre o critério **IV**, observa-se que a variação de n pode alterar o valor de λ_1 onde a assíntota ocorre, o que é útil na representação de diferentes materiais. A grande variedade de curvas originadas tem a capacidade de representar uma grande variedade de materiais: para materiais com uma maior

rigidez em compressão do que na tensão, por exemplo, pode-se buscar dentro das subfamílias com $m \leq 0$ (Logarítmica, Hiperbólica e Almansi), e quando o comportamento do material é o inverso, com uma maior rigidez na tração do que em compressão, o uso das subfamílias com $m > 0$ é mais adequado. Lembra-se que valores de m fora de $-2 \leq m \leq 2$ são válidos, assim como o uso da função seno-hiperbólica com outras medidas de deformação fora da família Seth-Hill sendo usadas como argumento. Quanto ao comportamento qualitativamente ruim da medida de deformação Logarítmica em tração, a variação de n claramente o melhora.

6.2.2 Análise gráfica: modo puro CE-B

Os mesmos parâmetros de material usados no estudo do modo EAS são usados aqui na análise do modo CE-B, bem como o mesmo intervalo de deformação. Os Critérios **I**, **II**, **III** e **IV** também são repetidos aqui, pois foram projetados para fazer sentido para ambos os modos de deformação. A Figura 6.6 apresenta os resultados para o modo CE-B, com o mesmo formato e a mesma ordem usados na Figura 6.4.

Sobre o comportamento das medidas de deformação de Seth-Hill, mostrado pela Figura 6.6a e resumido pela Figura 6.7, pode-se dizer que as medidas Hiperbólica e de Almansi claramente não são adequadas para o regime de grandes deformações (não cumprem os critérios **I** e **II**) e seu uso é viável apenas para modos de deformação e cargas muito específicos. A medida de deformação de Green mostra uma restrição relevante em tração devido a uma assíntota para um pequeno valor de estiramento e falha em atender ao critério **III** em compressão, portanto, a mesma conclusão de inadequação para representar o regime de grandes deformações pode ser feita. A medida de deformação de Biot tem um bom comportamento, atendendo aos critérios **I** e **II**, no entanto, possui uma assíntota vertical (**IV**) em $\lambda_1 \approx 1.55$, não alcançando o regime de grandes deformações. Para o modo CE-B, a medida de deformação Logarítmica tem um comportamento similar ao visto no modo EAS, com a mesma vantagem de atender a todos os critérios objetivos e a mesma desvantagem de ter um comportamento material incomum em tração.

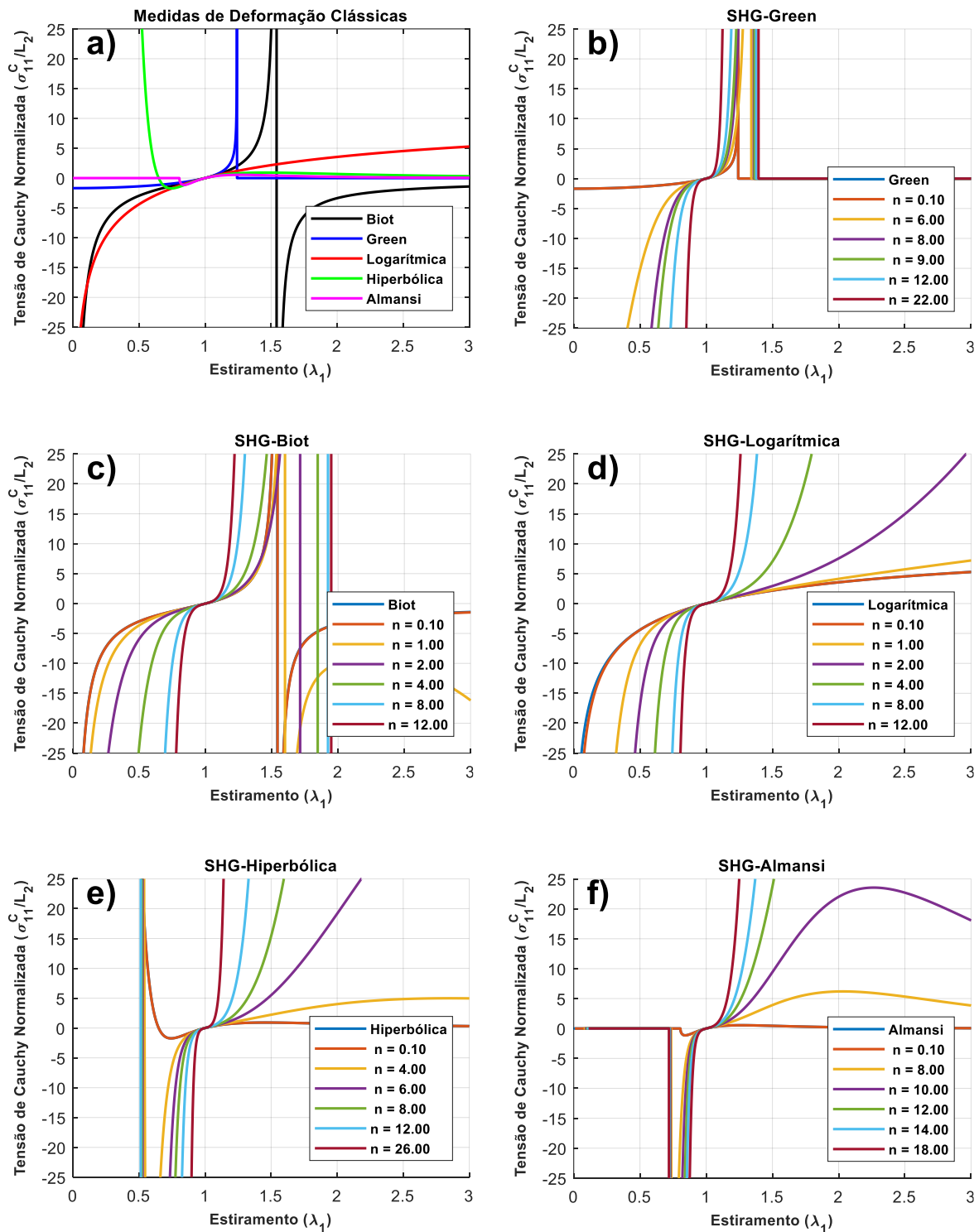


Figura 6.6: CE-B: gráfico $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ (a) Seth-Hill; (b, c, d, e, f) subfamílias SHG variando o n .

As Figura 6.6b, c, d, e, f, mostram que, além de proporcionar versatilidade ao variar a constante n , o uso da função seno-hiperbólica melhora o comportamento de todas as medidas de deformação analisadas em relação a todos os critérios estabelecidos para análise de coerência física, e as mesmas conclusões feitas para o modo EAS podem ser repetidas aqui para o modo

CE-B. A razão para essas conclusões é que o mesmo significado físico atribuído a n no modo puro EAS pode ser repetido aqui para o modo de Carregamento Equi-Biaxial, ou seja: o parâmetro n controla a taxa de aumento da rigidez tangente tanto em compressão quanto em tração. Por causa desse significado físico, os intervalos de coerência física tendem a expandir e, qualitativamente, as respostas começam a parecer mais com o comportamento usual de materiais hiperelásticos.

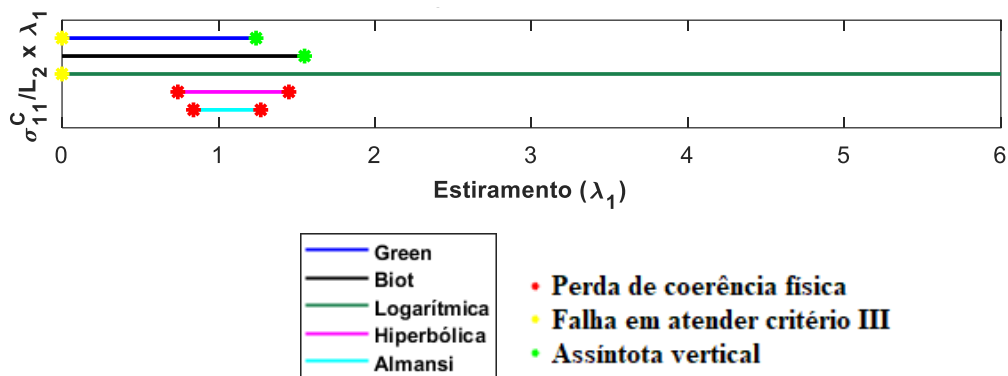


Figura 6.7: Resumo das limitações da família Seth-Hill para o modo CE-B.

6.2.3 Análise gráfica: modo puro CS

A Figura 6.8 apresenta a relação entre o componente de cisalhamento do tensor de Tensão de Cauchy (σ_{12}^c) e o parâmetro de cisalhamento (γ). Os parâmetros materiais usados nos modos EAS e CE-B foram repetidos aqui. A investigação da viabilidade física dos modelos constitutivos é realizada observando se um aumento na deformação é causado por um aumento na tensão de cisalhamento, o mesmo critério usado por Korobeynikov (2019) e Batra (2001).

A Figura 6.8a apresenta curvas iguais para Green e Almansi e curvas iguais para Biot e Hiperbólica, todas com coerência física em todo o intervalo estudado, mesmo resultado encontrado por Farahani e Bahai (2004). A deformação Logarítmica mostra uma forte diminuição na rigidez ao cisalhamento, um comportamento indesejável e incomum para materiais hiperelásticos. Além disso, alcança um limite de coerência física em $\gamma \approx 3.02$, que é marcado com um 'x' na Figura 6.8a.

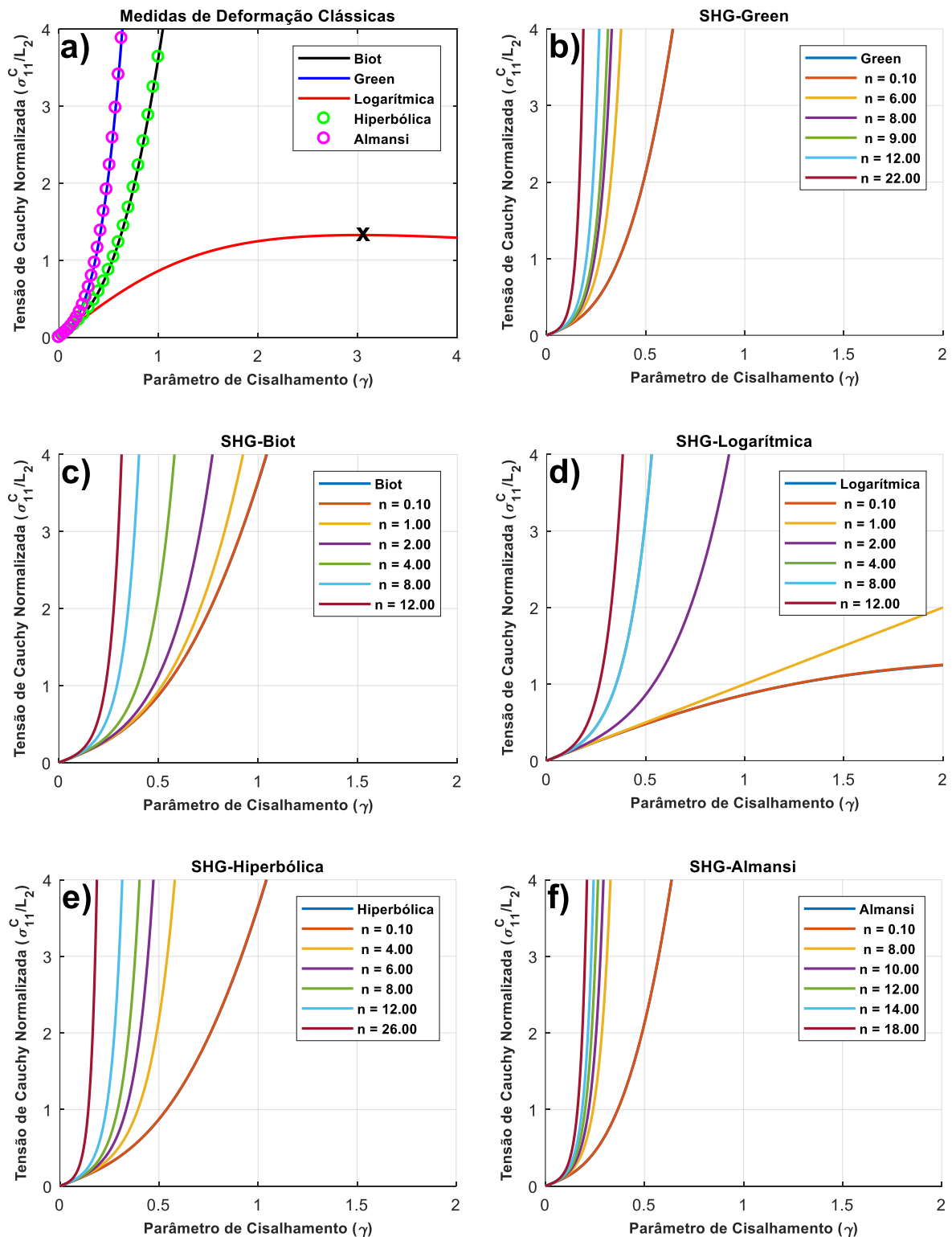


Figura 6.8: CS: gráfico $\sigma_{12}^C \times \gamma$ (a) Seth-Hill; (b, c, d, e, f) subfamílias SHG variando o n .

As Figura 6.8b, c, d, e, f mostram as curvas da família SHG. Os gráficos mostram que todas as medidas de deformação continuam a ter respostas consistentes e ganham versatilidade com a variação do valor de n . Como aconteceu nos modos EAS e CE-B, as curvas da família SHG

tendem às medidas de deformação originais à medida que n se aproxima de 0 no modo CS. A medida de deformação Logarítmica beneficia-se mais do uso da função seno hiperbólica, pois, além de ganhar versatilidade, torna-se mais apropriada para representar materiais hiperelásticos, que geralmente têm um ganho contínuo em rigidez. O mesmo significado físico atribuído a n nos modos puros de deformação anteriores pode ser repetido aqui para o modo CS.

6.2.4 Discussões sobre os resultados das análises gráficas para modos puros: materiais quase-incompressíveis

Aqui se apresentou a aplicação da família de medidas de deformação SHG em um estudo analítico de modos puros de deformação para sólidos quase-incompressíveis. Comparou-se o comportamento das medidas de deformação clássicas (família Seth-Hill) e das medidas da família SHG por meio da plotagem de gráficos das respostas de seus modelos constitutivos tipo-Hookeanos para os modos puros de deformação EAS, CE-B e CS. Para os modos puros EAS e CE-B, novas expressões matemáticas genéricas que relacionam o componente axial do tensor de Tensão de Cauchy ao estiramento paralelo ($\sigma_{11}^C \times \lambda_1$), adequadas a qualquer função de medida de deformação dada, foram apresentadas e aplicadas para a família SHG de medidas de deformação.

As respostas gráficas das famílias SHG e Seth-Hill, no que diz respeito aos modos puros de deformação estudados, foram analisadas usando quatro critérios estabelecidos em literatura pertinente para avaliar os intervalos de coerência física de seus modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos. A família SHG, que usa uma forma normalizada simples da função seno hiperbólica, provou ser capaz de superar as principais desvantagens das medidas de deformação clássicas, aprimorando o comportamento físico dessas medidas e proporcionando versatilidade com a adição de apenas uma constante material, n . Um fato importante é que se estabeleceu o significado físico de n : controlar, tanto na tração quanto na compressão, a taxa de aumento da rigidez à medida que a força/tensão aumenta.

6.3 Variação do Coeficiente de Poisson: Seth-Hill e SHG–Biot

De maneira a complementar o estudo de materiais quase-incompressíveis convencionais, que possuem um Coeficiente de Poisson positivo entre $0.47 < \nu < 0.50$, materiais compressíveis convencionais ($0.00 \leq \nu < 0.47$) e materiais auxéticos ($-1.00 < \nu < 0.00$) são aqui analisados. Embora os materiais semelhantes à borracha possam ser modelados com sucesso quando considerados quase-incompressíveis, existem materiais que também suportam grandes deformações e possuem um Coeficiente de Poisson diferente do valor referente a um material quase-incompressível. Como já explicado e referenciado na subseção “1.3 Justificativa”, vários tecidos biológicos são exemplos de materiais compressíveis, exibindo variados graus de compressibilidade; além deles, vale ressaltar as espumas, que são polímeros muitas vezes com alto grau de compressibilidade e que trabalham em regime de grandes deformações.

Materiais com comportamento elastoplástico que atingem grandes deformações antes da ruptura, como os metais dúcteis, também justificam o estudo de modelos hiperelásticos compressíveis. Isso porque muitos modelos constitutivos elastoplásticos são baseados em modelos hiperelásticos (*hyperelastic-based elastoplastic models*), sobre os quais correções são impostas, e parece irrazoável aplicar correções em modelos fisicamente incoerentes. Tais materiais também têm Coeficientes de Poisson diferentes daqueles relacionados a materiais quase-incompressíveis.

A investigação do comportamento dos modelos constitutivos ao usar valores negativos para o Coeficiente de Poisson (materiais auxéticos) é justificada pelo crescente interesse no estudo desses materiais, que, em alguns casos, funcionam dentro do domínio elástico e suportam deformações finitas. Os materiais auxéticos possuem algumas propriedades aprimoradas quando comparados aos materiais convencionais, como: resistência à indentação (ARGATOV; GUINOVART-DÍAZ; SABINA, 2012; COENEN; ALDERSON, 2011; LAKES; ELMS, 1993; MADKE; CHOWDHURY, 2020; RAMÍREZ et al., 2012), resistência ao arrancamento (CRESPO; MONTÁNS, 2018), limite de escoamento (LAKES; ELMS, 1993), capacidade de absorção de energia (BRIGHENTI, 2014; EVANS, 1991a; HUANG et al., 2021; MOHSENIZADEH et al., 2015; SANAMI et al., 2014), durabilidade à fadiga (SANAMI et al., 2014; ZHOU; JIANG; HU, 2016), resistência ao cisalhamento (CHOI; LAKES, 1992; HENYŠ et al., 2019; NOVAK et al., 2020), absorção de ruído e vibração (LIU, 2006), isolamento acústico (CHEKKAL et al., 2010; EGHBALI; YOUNESIAN; FARHANGDOUST, 2020; YE;

TAO; ZHANG, 2018), tenacidade à fratura (CHOI; LAKES, 1996; DONOGHUE; ALDERSON; EVANS, 2009; LIU, 2006; MAZHNIK; OGANOV, 2019), curvatura sinclástica (EVANS, 1991b) e capacidade de ajuste de forma (CARNEIRO; MEIRELES; PUGA, 2013). Devido às suas excelentes propriedades, os materiais auxéticos são promissores para muitas aplicações, como: bandagens inteligentes para entrega de medicamentos, *stents* médicos, sensores, equipamentos de proteção, materiais de absorção de energia, filtros com permeabilidade ajustável, fixadores, amortecedores acústicos e assim por diante (ZHANG et al., 2022). Entre a ampla variedade de materiais auxéticos produzidos e descobertos, destacam-se: espumas de poliuretano, metais, polímeros, cerâmicas, biomateriais, montagens de tijolos, compósitos reforçados por fibras, UHMWPE etc. (CRESPO; MONTÁNS, 2018).

Para contemplar materiais convencionais compressíveis e materiais auxéticos, a investigação é estendida a diferentes valores do coeficiente de Poisson. Os valores adicionais escolhidos foram 0.25, 0.10, -0.10, -0.25, -0.50, -0.75 e -0.99, pois se acredita que representam a faixa considerada de interesse no estudo de materiais isotrópicos ($-1.00 < \nu < 0.50$). Quanto à variação do Coeficiente de Poisson, um aspecto relevante deve ser esclarecido: é frequente que, durante processos de grande deformação, o Coeficiente de Poisson de materiais compressíveis e auxéticos apresente grandes variações, inclusive apresentando transições de comportamento auxético para comportamento convencional (CRESPO; MONTÁNS, 2018; GASPAR et al., 2005; MIR et al., 2014; ZHANG et al., 2022). Esta é uma razão relevante para olhar a coerência física de um modelo de maneira mais geral, pois, para materiais que têm uma variação no Coeficiente de Poisson, é importante ter coerência física em toda a gama de valores que podem ser assumidos ao longo do processo de grandes deformações.

Na subseção “6.2 Materiais quase-incompressíveis”, utilizou-se somente da relação entre o componente axial do tensor de Tensão de Cauchy e o estiramento paralelo ($\sigma_{11}^C \times \lambda_1$) para aferência da coerência física de um dado modelo hiperelástico tipo-Hookeano. Na presente subseção apresenta-se uma análise que leva em conta também a relação entre o componente axial do tensor de Tensão de Cauchy e o estiramento perpendicular a ele ($\sigma_{11}^C \times \lambda_3$). Aqui é avaliada somente a subfamília SHG–Biot (Eq. 4.4 quando $m = 1$), utilizada como representante das medidas SHG investigadas para se apresentar a análise de coerência física levando em conta a variação da compressibilidade e a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$.

Faz-se necessário complementar os **critérios I, II e III** utilizados na subseção “6.2 Materiais quase-incompressíveis” (o que é acrescentado está em itálico e negrito), de maneira a se avaliar também a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Somente o **critério IV** mantém-se inalterado.

- **Critério I:** quanto maior a força/tensão de tração axial na direção X_1 (maior σ_{11}^C), maior o estiramento na direção X_1 (maior λ_1) *e menor o valor do estiramento na direção X_3 (menor λ_3);*
- **Critério II:** quanto maior a força/tensão de compressão axial na direção X_1 (menor σ_{11}^C), menor o estiramento na direção X_1 (menor λ_1) *e maior o valor do alongamento na direção X_3 (maior λ_3);*
- **Critério III:** nos gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, espera-se que, na compressão, à medida que o valor de λ_1 tenda a 0, o componente axial de tensão (σ_{11}^C) tenda a menos infinito, porque, caso contrário, é comum enfrentar problemas de convergência e instabilidade computacional em simulações, conforme afirma Beex (2019), além de significar que um valor finito de tensão de compressão faria o material desaparecer. *Por razões semelhantes, nos gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, espera-se que, na tração, à medida que o valor de λ_3 tenda a 0, o componente axial da tensão (σ_{11}^C) tenda ao infinito.* Quando o **critério II** não é atendido para os gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, o **critério III** também não é atendido; *e quando o critério I não é atendido para os gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, o critério III também não é atendido;*
- **Critério IV:** alguns modelos constitutivos têm limites de estiramento que são diferentes de 0 ou $+\infty$, mas sem perda de coerência física. Verifica-se que, para um valor de estiramento finito, diferente de 0 ou $+\infty$, o valor da força/tensão tende ao infinito, ou seja, há uma assíntota vertical neste valor de estiramento. Este critério diz respeito à limitação do alcance da capacidade de representação de um dado modelo constitutivo, estando relacionado à sua adequação na modelagem de um dado material, e não à ocorrência de inconsistência física.

Com as partes acrescentadas, esses critérios, além de funcionar para materiais convencionais ($0.50 > \nu > 0$), também podem ser utilizados para materiais auxéticos. No entanto, na análise dos gráficos representando $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, é necessário observar que a lógica para verificar a consistência física da resposta é a mesma, mas agora, à medida que o estiramento λ_3 aumenta,

espera-se que σ_{11}^C também aumente (aumento monótono na tração), e à medida que λ_3 diminui, espera-se também que σ_{11}^C diminua (aumento monótono na compressão).

6.3.1 Análise gráfica: modo puro EAS

Primeiro apresenta-se o desenvolvimento algébrico necessário para se encontrar a relação entre σ_{11}^C x λ_3 , começando pela Eq. 6.10, que é rearranjada para isolar ε_{11} :

$$\varepsilon_{11} = - \left[\frac{2(L_1 + L_2)}{L_1} \right] \cdot \varepsilon_{22} = - \left[\frac{2(L_1 + L_2)}{L_1} \right] \cdot \varepsilon_{33} \quad 6.61$$

Substituindo na Eq. 6.8, encontra-se:

$$\sigma_{11} = - \left[\frac{6L_1L_2 + 4L_2^2}{L_1} \right] \cdot \varepsilon_{22} = - \left[\frac{6L_1L_2 + 4L_2^2}{L_1} \right] \cdot \varepsilon_{33} \quad 6.62$$

Nesse momento, faz-se conveniente redefinir a variável auxiliar z de modo a representar a presente relação (σ_{11}^C x λ_3) e introduzir uma nova variável auxiliar w (Eq. 6.64).

$$z = \left[\frac{6L_1L_2 + 4L_2^2}{L_1} \right] \rightarrow \sigma_{11} = -z\varepsilon_{22} = -z\varepsilon_{33} \quad 6.63$$

$$w = \left[\frac{2(L_1 + L_2)}{L_1} \right] = \frac{1}{\nu} \rightarrow \varepsilon_{11} = -w\varepsilon_{22} = -w\varepsilon_{33} \quad 6.64$$

O componente P_{11} é isolado no lado esquerdo de uma expressão matemática, agora usando a Eq. 3.31, Eq. 3.41 e Eq. 6.62. O resultado é a Eq. 6.65, uma fórmula genérica original deste trabalho, que possui como diferenças em relação à Eq. 6.13 o valor de z e a presença de ambos λ_1 e λ_3 .

$$P_{11} = -zf'(\lambda_1)f(\lambda_3) \quad 6.65$$

Para expressar a equação exclusivamente em termos de λ_3 , pode-se usar a Eq. 6.64. Para exemplificar, a deformação de Green será usada:

$$\varepsilon_{11}^G = -w \varepsilon_{33}^G \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(\lambda_1^2 - 1) = -w \left(\frac{1}{2}\right)(\lambda_3^2 - 1) \rightarrow \lambda_1 = \sqrt{-w(\lambda_3^2 - 1) + 1} \quad 6.66$$

Essa estratégia gera a Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Equações para a relação $P_{11}^C \times \lambda_3$. Modo EAS.

Green	$P_{11} = -z \sqrt{-w(\lambda_3^2 - 1) + 1} \left(\frac{\lambda_3^2 - 1}{2}\right)$	6.67
Biot	$P_{11} = -z(\lambda_3 - 1)$	6.68
Logarítmica	$P_{11} = -z\lambda_3^w \ln(\lambda_3)$	6.69
Hiperbólica	$P_{11} = -z[w(1 - \lambda_3^{-1}) + 1]^2(1 - \lambda_3^{-1})$	6.70
Almansi	$P_{11} = -z \frac{1 - \lambda_3^{-2}}{2[w(1 - \lambda_3^{-2}) + 1]^{-3/2}}$	6.71
SHG-Biot	$P_{11} = -z \cosh[n(\lambda_1 - 1)] \frac{\sinh[n(\lambda_3 - 1)]}{n}$ $\lambda_1 = \frac{\operatorname{asinh}\{-w \sinh[n(\lambda_3 - 1)]\}}{n} + 1$	6.72

A passagem de P_{11} para σ_{11}^C é facilmente realizada aplicando as condições do modo EAS na Eq. 3.30 e utilizando as relações dadas pelas Eq. 6.18, Eq. 6.19 e Eq. 6.20. Com todas as expressões que representam as relações $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, pode-se começar a avaliação das respostas das medidas clássicas e da subfamília SHG–Biot.

A Figura 6.9a mostra o gráfico $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ com o Coeficiente de Poisson de $\nu \approx 0.48$ para as medidas da família de Seth-Hill mais a medida Seno-Hiperbólica (subfamília SHG–Biot com $n = 1$). Esse gráfico é igual ao gráfico da Figura 6.4a, porém com o acréscimo da medida Seno-Hiperbólica. Já a Figura 6.9b mostra o gráfico $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ com o Coeficiente de Poisson de $\nu \approx 0.48$ para as medidas da subfamília de SHG–Biot com a variação do parâmetro n . A Figura 6.9c passa para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, abordando as medidas de Seth-Hill mais a medida Seno-Hiperbólica. Por fim, a Figura 6.9d mostra a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$ para as medidas da subfamília de SHG–Biot com a variação do parâmetro n .

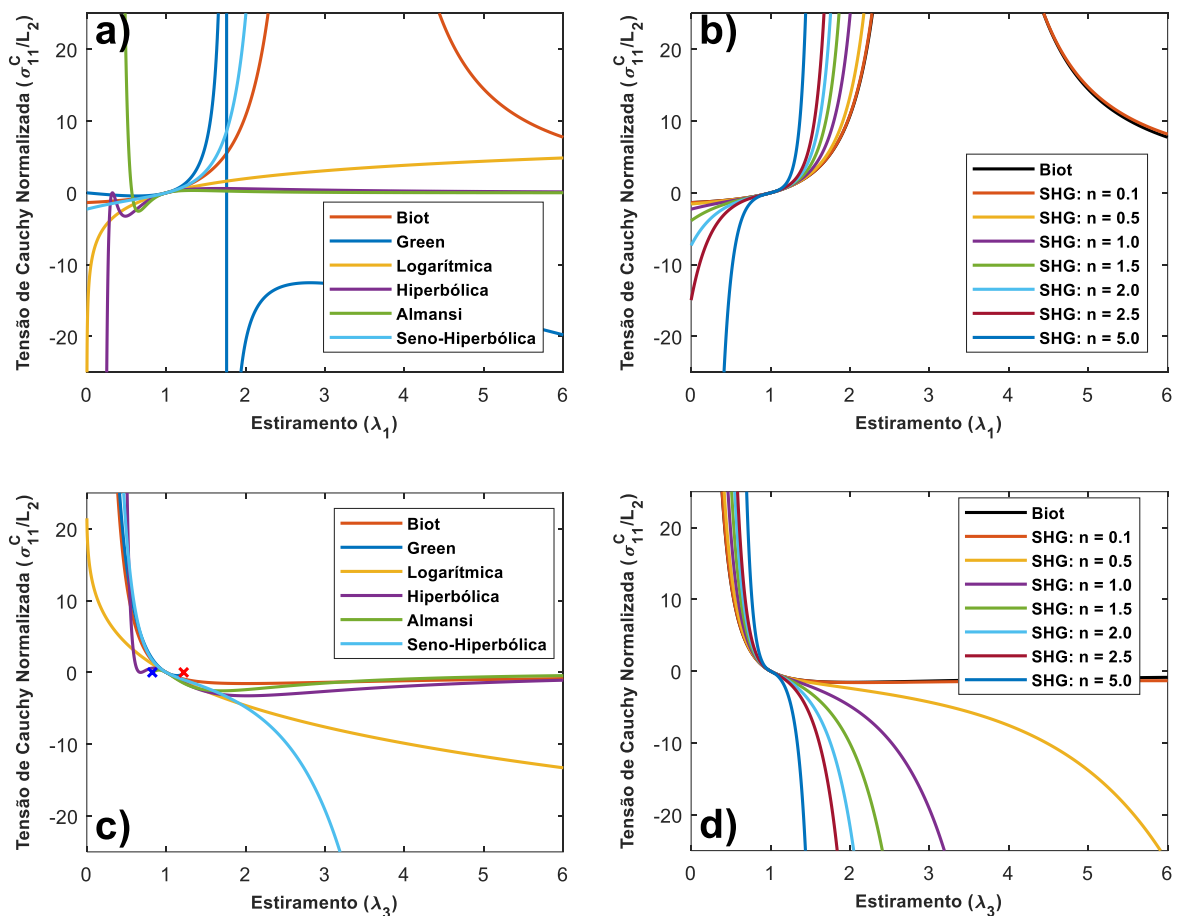


Figura 6.9: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.48$.

A partir dos gráficos da Figura 6.9 monta-se uma síntese dos resultados apresentados, como mostra a Figura 6.10, o que vai ajudar na análise mais geral do comportamento das medidas da subfamília SHG–Biot e Seth-Hill ao longo da variação dos valores do Coeficiente de Poisson. No topo dos gráficos é mostrado o valor do Coeficiente de Poisson, na lateral esquerda de cada gráfico é apresentada a relação ($\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ ou $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$) e no eixo das abscissas tem-se o estiramento no qual os limites de validade dos modelos constitutivos são delineados (λ_1 ou λ_3). Esse formato apresentado pela Figura 6.10 é adotado daqui em diante nessa tese.

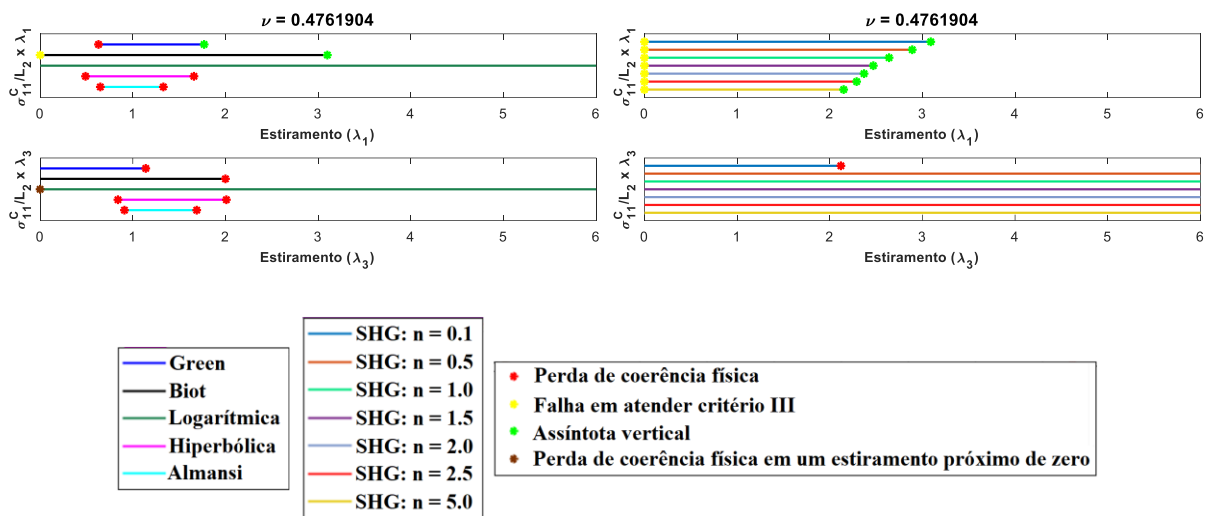


Figura 6.10: Gráficos capazes de sintetizar as todas as informações da Figura 6.9.

Os resultados referentes ao Coeficiente de Poisson de materiais quase-incompressíveis ($\nu \approx 0.48$) para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ já foram discutidos na subseção “6.1.1 Extensão Axial Simples (EAS)”, e ainda que os valores de n para a subfamília SHG–Biot tenham sido alterados, as conclusões mantêm-se inalteradas. Já as respostas para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$ são novidade: devido ao efeito de Poisson, há uma mudança nas curvas em relação aos gráficos que têm λ_1 no eixo das abscissas, agora quanto maior a tensão na direção X_1 , menor o valor de λ_3 ; e quanto maior a compressão na direção X_1 , maior o valor de λ_3 . Analisando esses gráficos, percebe-se que todos os membros da família de medidas de deformação de SHG atendem aos critérios **I**, **II** e **III** simultaneamente, enquanto nenhuma das medidas clássicas é capaz de tal feito. Na compressão, Green, Biot, Hiperbólica e Almansi falham no critério **II**, pois têm limites em $\lambda_3 \approx 1.14$, $\lambda_3 \approx 2.0$, $\lambda_3 \approx 2.01$ e $\lambda_3 \approx 1.69$, respectivamente. A medida Logaritmica atende ao critério **II**. Na tensão, Green e Biot atendem aos critérios **I** e **II**, já que σ_{11}^C tende ao infinito à medida que $\lambda_3 \rightarrow 0$, enquanto Hiperbólica e Almansi têm limites em $\lambda_3 \approx 0.84$ e $\lambda_3 \approx 0.91$. A

medida Logarítmica falha no critério **III**, porque σ_{11}^C não tende ao infinito à medida que λ_3 se aproxima de 0, um grande *zoom* nesta região do gráfico até mostraria uma falha no critério **I** muito próximo de $\lambda_3 = 0$.

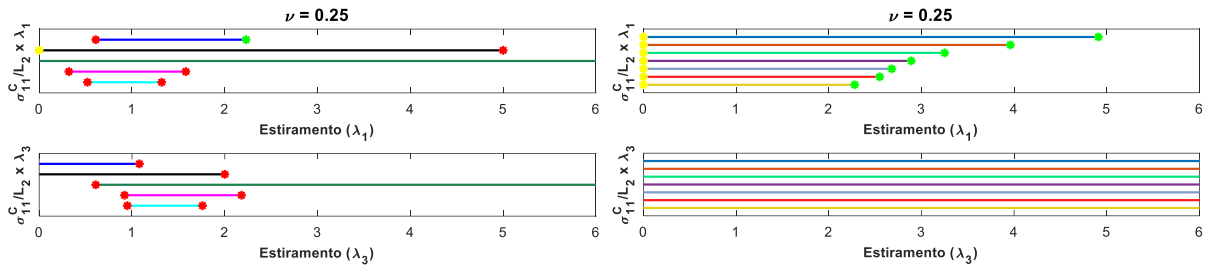


Figura 6.11: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = 0.25$.

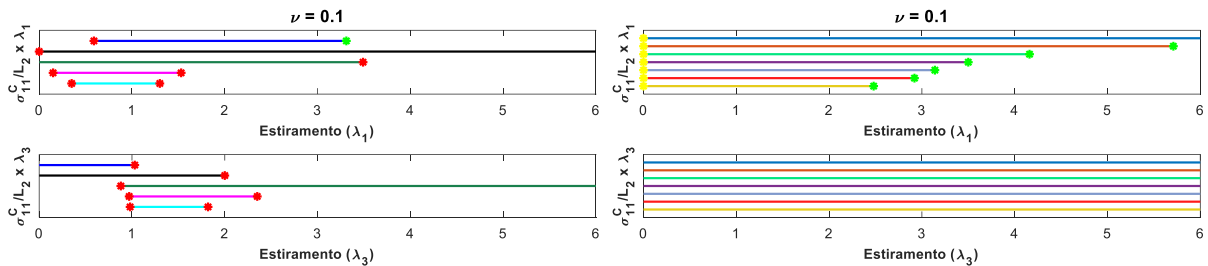


Figura 6.12: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = 0.10$.

Os gráficos das Figura 6.11 e Figura 6.12 mostram valores de Coeficiente de Poisson para materiais compressíveis convencionais. A análise dos resultados começa examinando a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ em ambas as Figura 6.11 e Figura 6.12. Em geral, o comportamento da subfamília SHG–Biot é muito bom, pois não há perda de coerência física em nenhum caso e, embora nenhum dos modelos tenda a menos infinito quando λ_1 se aproxima de 0, a variação do valor de n pode mitigar o problema aproximando a curva da resposta desejada. Existem assíntotas verticais para os modelos da subfamília SHG–Biot em tensão, mas o intervalo de estiramento viável pode ser ajustado com a variação de n . De todas as medidas clássicas, apenas as medidas de Biot e Logarítmica podem ser consideradas apropriadas para a representação de deformações finitas; as outras têm intervalos de estiramento viáveis tão pequenos que podem ser considerados incompatíveis com o regime de grandes deformações. A medida de Biot tem um comportamento similar à medida de SHG–Biot com $n = 0.1$. A medida de deformação Logarítmica tem perda de coerência física em tensão para os gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ quando $\nu = 0.10$.

No caso da relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ quando $\nu = 0.25$, a medida Logarítmica tem um comportamento excelente, cumprindo todos os critérios esperados sobre o intervalo de estiramento estudado.

Para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, a subfamília SHG–Biot apresenta excelentes resultados: todos os membros da família mantêm coerência física ao longo do intervalo estudado, atendendo aos critérios **I**, **II** e **III**, tanto para $\nu = 0.25$ quanto para $\nu = 0.10$. Nos gráficos de $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$ nota-se que nenhuma das medidas clássicas pode ser considerada para representar grandes deformações para valores do coeficiente de Poisson de $\nu = 0.25$ e $\nu = 0.10$. A medida Logarítmica, que para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ teve bons resultados, apresenta um intervalo muito pequeno de coerência física em tensão nos gráficos de $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$.

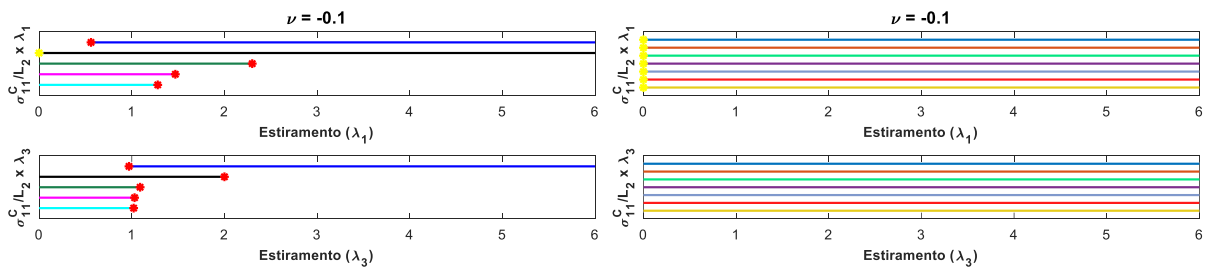


Figura 6.13: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.10$.

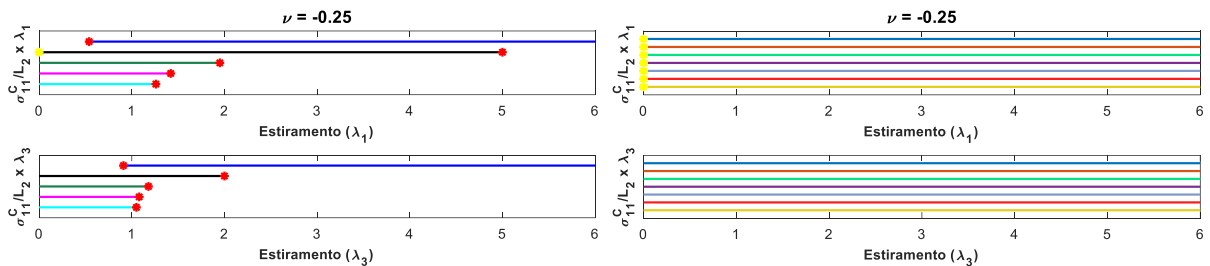


Figura 6.14: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.25$.

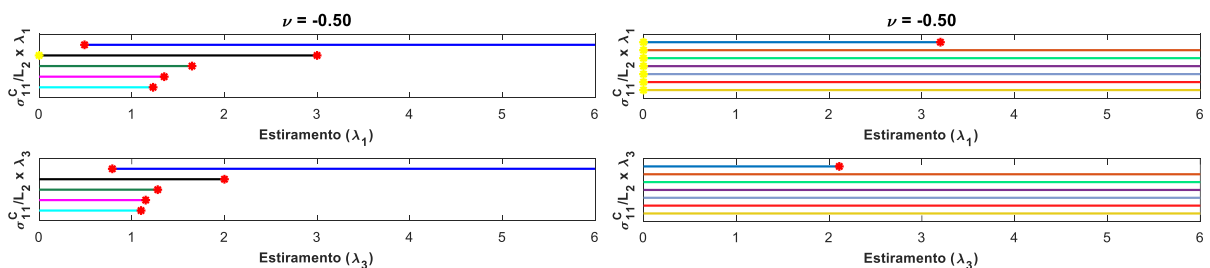


Figura 6.15: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.50$.

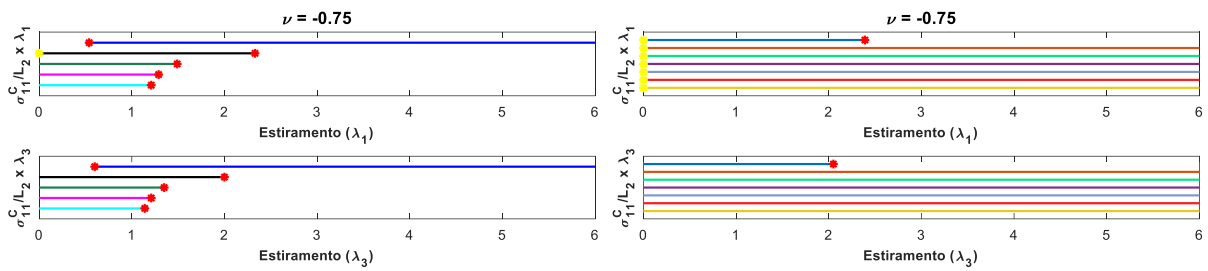


Figura 6.16: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.75$.

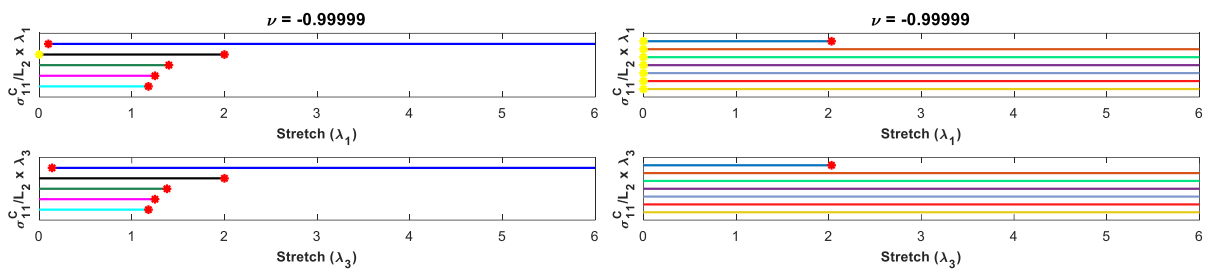


Figura 6.17: Modo EAS – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu = -0.99$.

As respostas dos modelos constitutivos referentes aos Coeficientes de Poisson negativos (Figura 6.13 a Figura 6.17) são todas analisadas conjuntamente, uma vez que padrões significativos são possíveis de serem identificados dessa forma. Na representação de materiais auxéticos, a subfamília SHG–Biot apresenta resultados excelentes. Exceto pela medida SHG–Biot com $n = 0.1$, que mostrou uma perda de coerência física nas relações $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$ para os valores de Coeficiente de Poisson de $\nu = -0.5$ e $\nu = -0.99$, todas as outras medidas da subfamília mostraram coerência física em todo o intervalo de estiramento estudado e para todos os valores do Coeficiente de Poisson. Na relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, o componente de tensão não tende a menos infinito conforme λ_1 tende a 0, mas esse problema pode ser controlado variando o valor de n , o que adequa a medida ao material a ser modelado. De uma forma geral, as medidas de deformação clássicas não conseguem representar bem materiais auxéticos em grandes deformações, todas elas apresentam perda de coerência física e os intervalos em que são viáveis são muito insuficientes.

6.3.2 Análise gráfica: modo puro CE-B

O caminho para desenvolver a formulação para a relação $P_{11} \times \lambda_3$ no caso do modo CE-B é o mesmo que para o modo EAS. As expressões encontradas são apresentadas pelas Eq. 6.73, Eq. 6.74, Eq. 6.75 e Eq. 6.76.

$$\varepsilon_{11} = - \left[\frac{L_1 + 2L_2}{2L_1} \right] \varepsilon_{33} \quad 6.73$$

$$\sigma_{11} = - \left[\frac{3L_1L_2 + 2L_2^2}{2L_1} \right] \varepsilon_{33} \quad 6.74$$

$$z = \left[\frac{3L_1L_2 + 2L_2^2}{2L_1} \right] \rightarrow \sigma_{11} = -z\varepsilon_{33} \quad 6.75$$

$$w = \left[\frac{L_1 + 2L_2}{2L_1} \right] = \frac{1 - \nu}{2\nu} \rightarrow \varepsilon_{11} = -w\varepsilon_{33} \quad 6.76$$

As diferenças entre CE-B e EAS são incorporadas pelas variáveis auxiliares z e w , mas o grupo de equações apresentado na Tabela 6.1 pode ser reutilizado aqui. A transição de P_{11} para σ_{11}^C é feita usando a Eq. 6.31, mas como se deseja construir a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, as Eq. 6.33, Eq. 6.34, Eq. 6.35 e Eq. 6.36 são adaptadas para isolar λ_1 ao invés de isolar λ_3 . Como aqui no estudo de materiais convencionais compressíveis e auxéticos só estão sendo investigadas as medidas da família de Seth-Hill e a subfamília SHG–Biot, somente suas respectivas relações são apresentadas a seguir: Eq. 6.77 para Seth-Hill com $m \neq 0$, Eq. 6.78 para a medida Logarítmica e Eq. 6.79 para a subfamília SHG–Biot.

$$\lambda_1 = \left(\frac{-\nu - \nu\lambda_3^m + \lambda_3^m - 1}{-2\nu} \right)^{1/m} \quad 6.77$$

$$\lambda_1 = \lambda_3^{(1-\nu)/-2\nu} \quad 6.78$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{n} \operatorname{asinh} \left\{ \frac{\sinh[n(\lambda_3 - 1)] - \nu \sinh[n(\lambda_3 - 1)]}{-2\nu} \right\} + 1 \quad 6.79$$

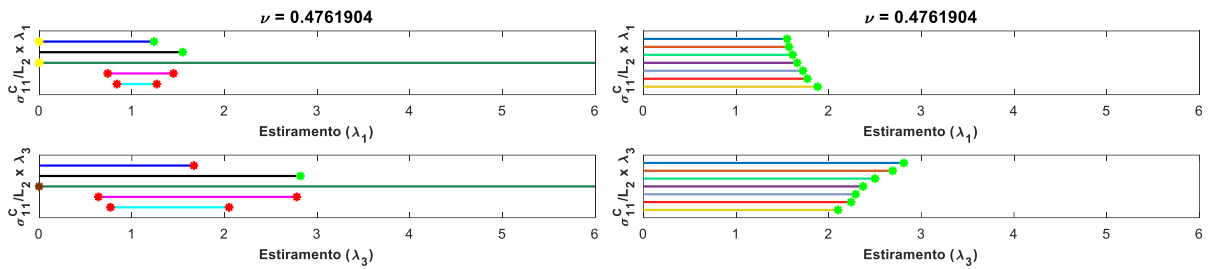


Figura 6.18: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.48$.

Com todas as fórmulas necessárias já estabelecidas, pode-se começar a análise dos resultados. A Figura 6.18 apresenta, em um formato diferente, resultados semelhantes aos mostrados pelas Figura 6.6a e Figura 6.6b para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$. As novidades são os resultados relacionados aos gráficos $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Por essas respostas referentes a materiais quase-incompressíveis, as medidas de Green, Hiperbólica e Almansi mostram restrições relevantes na representação de grandes deformações, um comportamento já presente nos resultados do modo EAS. Por causa disso, essas medidas de deformação não terão suas respostas analisadas em detalhe, deixando como conclusão geral de que elas não são adequadas para grandes deformações e seu uso é viável apenas para modos de deformação e cargas muito específicos (para $\nu \approx 0.48$).

A medida de deformação de Biot tem uma resposta muito semelhante à medida SHG–Biot com $n = 0.1$ e, por isso, a medida de Biot será tratada como tendo o comportamento limite da tendência apresentada pelas medidas SHG–Biot quando n tende a zero, portanto seus resultados também não serão analisados individualmente (para $\nu \approx 0.48$).

Isso deixa as medidas Logarítmica e SHG–Biot para serem examinadas com mais detalhes. A deformação Logarítmica é claramente apropriada para o regime de grandes formações, mas também tem limitações em ambos os gráficos. Para $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ percebe-se que o valor da tensão tende a um valor finito quando λ_1 se aproxima de 0, então a deformação Logarítmica não atende

ao critério **III**. No gráfico $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, na tensão, a deformação Logarítmica falha em atender ao critério **I**, porque há uma perda de coerência física quando λ_3 está próximo de 0.

A medida de deformação SHG–Biot também se mostra apropriada para o regime de grandes deformações. Em ambos os gráficos, $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, todas as medidas de deformação SHG–Biot atendem aos critérios **I**, **II** e **III**. No entanto, todas as medidas têm assíntotas verticais que limitam a amplitude de seu uso, sendo necessário o ajuste do valor de n para se adequar ao material a ser modelado.

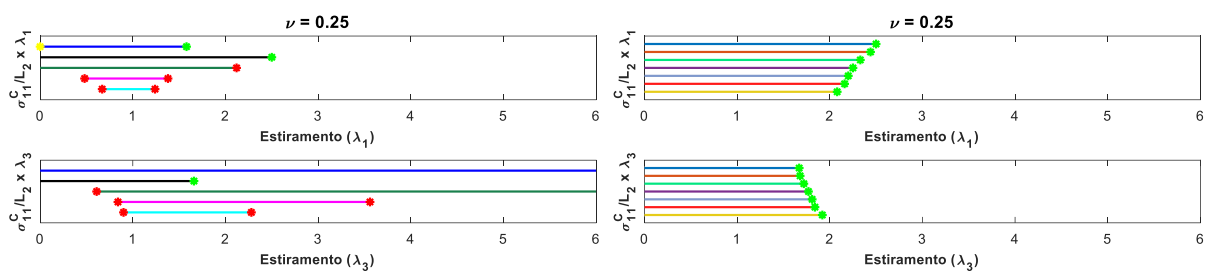


Figura 6.19: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.25$.

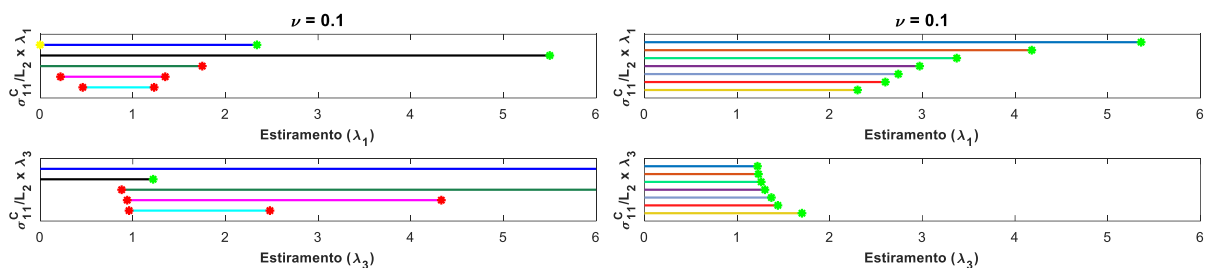


Figura 6.20: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx 0.10$.

Os resultados referentes a materiais convencionais compressíveis ($\nu = 0.25$ e $\nu = 0.1$) são analisados aqui (Figura 6.19 e Figura 6.20), começando com a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$. As medidas SHG–Biot não perdem coerência física, no entanto, apresentam assíntotas verticais em tensão. Os intervalos de estiramento nos quais os modelos da subfamília SHG–Biot são capazes de representar são de tamanho razoável e ajustáveis através da variação de n . Em relação às medidas clássicas, Biot apresenta o melhor comportamento. A medida Logarítmica perde coerência física em tensão e o tamanho do intervalo de estiramento onde é viável é apenas razoável. As deformações de Almansi, Hiperbólica e Green claramente não são adequadas para grandes deformações de materiais compressíveis.

Ainda analisando os resultados de materiais compressíveis, para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, nota-se que a subfamília SHG–Biot apresenta o comportamento almejado em tensão (atende todos os critérios), mas o alcance de λ_3 no qual os modelos da subfamília podem representar um material convencional em compressão é pequeno (especialmente para $\nu = 0.10$). No entanto, considerando o que tal valor pequeno do Coeficiente de Poisson representa fisicamente, este problema se torna menos relevante, mesmo que indesejado. Curiosamente, para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, a medida de Green é a medida de deformação com o melhor comportamento. As medidas de Almansi, Logarítmica e Hiperbólica têm respostas indesejadas, pois perdem a coerência física muito rapidamente em tensão (especialmente para $\nu = 0.10$).

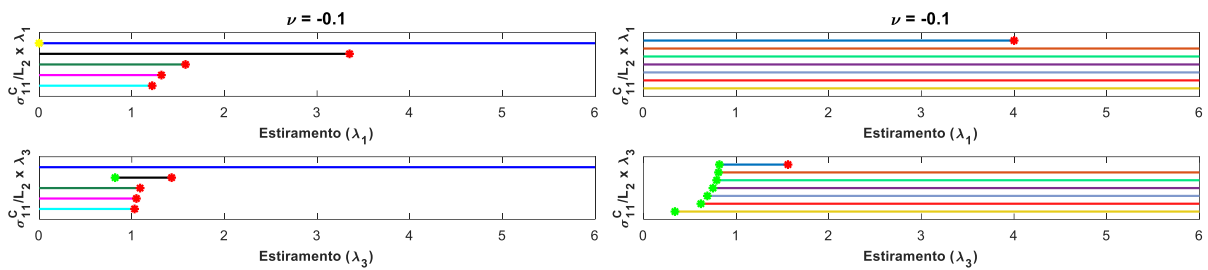


Figura 6.21: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.10$.

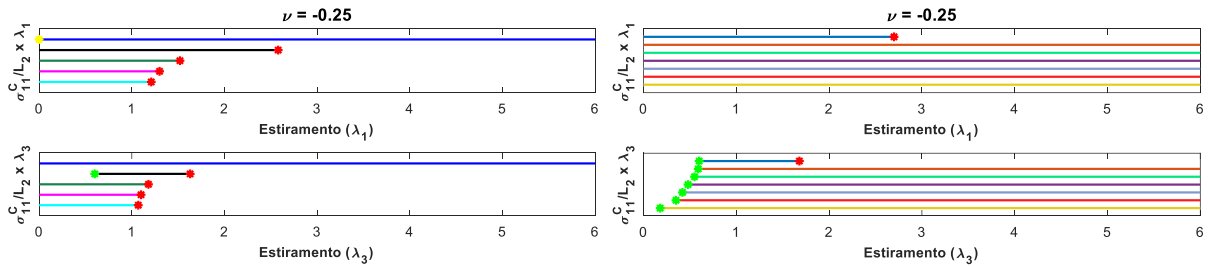


Figura 6.22: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.25$.

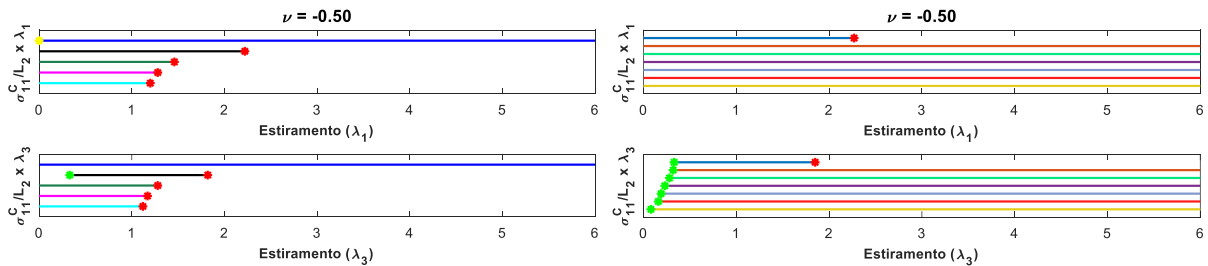


Figura 6.23: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.50$.

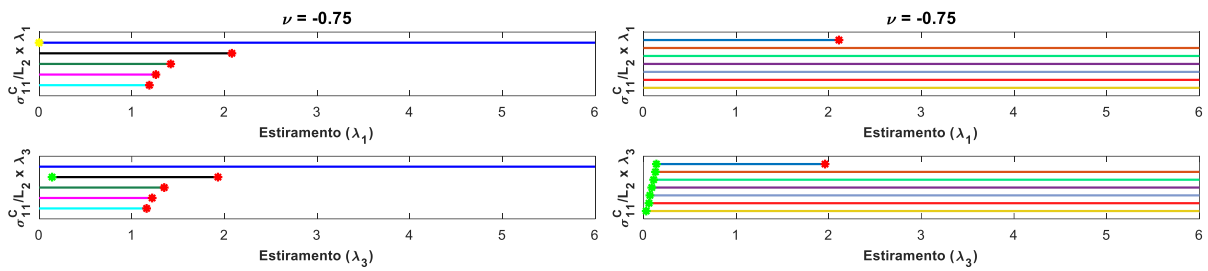


Figura 6.24: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.75$.

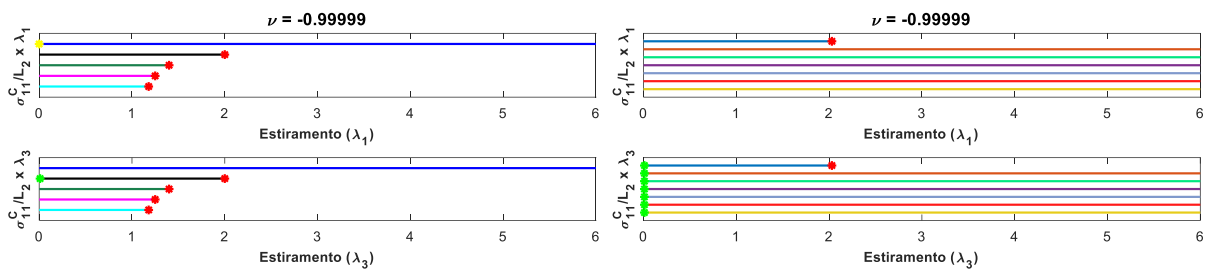


Figura 6.25: Modo CE-B – $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$. Famílias SHG e Seth-Hill. $\nu \approx -0.99$.

Os gráficos da Figura 6.21 até a Figura 6.25 representam o comportamento dos modelos estudados para materiais auxéticos no modo CE-B. Na relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, a subfamília SHG–Biot apresenta resultados muito bons. Desconsiderando a medida SHG–Biot com $n = 0.1$, todos os membros de subfamília têm consistência física em todo o intervalo de estiramento estudado e com a componente de tensão tendendo ao infinito negativo na compressão. As medidas clássicas, considerando a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$, têm resultados ruins de uma forma geral, com a exceção da medida de Green, que apresenta resultados excelentes.

Analisando agora a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$ dos materiais auxéticos, as medidas da subfamília SHG–Biot mostram-se adequadas para utilização em regime de grandes deformações, sendo a medida com $n = 0.1$ a única com perda de coerência física. Todas as medidas SHG–Biot têm uma assíntota vertical na compressão em valores de λ_3 que variam de acordo com o valor de n : quanto menor o valor do Coeficiente de Poisson, menor o valor de λ_3 no qual ocorre a assíntota vertical. Ao considerar o significado físico do Coeficiente de Poisson e que a versatilidade para modelar diferentes materiais exige diferentes curvas, esse resultado é o desejado. As medidas clássicas têm resultados geralmente insatisfatórios para a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, com exceção da medida de deformação de Green, que novamente apresenta resultados excelentes para todos os valores negativos do Coeficiente de Poisson investigados.

6.3.2 Análise gráfica: modo puro CS

Os resultados para o modo CS ao variar o valor do coeficiente de Poisson não apresentam alterações significativas em relação aos resultados encontrados com os parâmetros de materiais quase-incompressíveis, embora as curvas não sejam idênticas. A questão relevante para as medidas clássicas de deformação é a mesma: a medida Logarítmica perde o significado físico, sempre no mesmo ponto ($\gamma \approx 3,02$). Para as demais medidas clássicas e para a subfamília SHG–Biot, não existem limitações de coerência física, somente variação de resposta que deve ser analisada para adequabilidade de representação de um determinado material.

6.3.4 Discussões sobre os resultados das análises gráficas para modos puros: variação do Coeficiente de Poisson

Novos limites de viabilidade para o uso de medidas de deformação clássicas foram obtidos analisando a relação $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$ e o processo original usado para alcançar tais resultados pode ser usado para testar qualquer outra medida de deformação além das investigadas no presente trabalho. O comportamento das medidas clássicas e da subfamília SHG–Biot para materiais compressíveis convencionais e materiais auxéticos em grandes deformações foi investigado.

Mostrou-se que a medida de deformação Logarítmica, comumente considerada sem problemas de consistência física devido à sua excelente resposta no gráfico $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ no modo EAS, tem problemas de inconsistência física e limitações para outras relações, modos e/ou valores de Coeficiente de Poisson. As medidas da subfamília SHG–Biot mostraram um comportamento geral muito bom dentro do escopo da investigação, isto é, considerando todos os modos, Coeficientes de Poisson e relações estudadas. O principal ponto de atenção para o uso das medidas SHG–Biot é o fato de que a tensão frequentemente não tende a menos infinito (ou infinito) quando a razão de estiramento analisada tende a 0. Este ponto de atenção pode ser evitado/melhorado através da variação de n . Exceto pela medida SHG–Biot com $n = 0,1$, nenhuma outra medida da família mostrou uma resposta fisicamente inconsistente dentro do intervalo de razão de estiramento estudado.

É interessante notar que, para uma relação (tensão x estiramento), um modo puro ou um valor de Coeficiente de Poisson específicos, um dado modelo tipo-Hookeano pode ter uma resposta muito boa, mas, quando uma dessas condições muda, o modelo se torna impraticável. Um

exemplo é a medida de Green, que, para o modo CE-B, tem respostas muito boas para as relações $\sigma_{11}^C \times \lambda_1$ e $\sigma_{11}^C \times \lambda_3$, especialmente para materiais auxéticos. No entanto, quando essas mesmas relações são analisadas para o modo EAS, resultados muito ruins são observados para vários valores de Coeficiente de Poisson. Este parece ser o desafio da modelagem de materiais hiperelásticos em geral: representar qualitativamente bem materiais em grandes deformações, sem risco de perda de coerência física e de forma global (diferentes condições de contorno).

7. ESTUDO DA DESCRIÇÃO MECÂNICA DE MATERIAIS HIPERELÁSTICOS REAIS UTILIZANDO A FAMÍLIA SHG: SÓLIDOS

Esta seção da tese dedica-se à aplicação da família SHG na descrição mecânica de materiais reais por meio de seus modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos. Dessa forma, é testada a sua capacidade de capturar, em uma abordagem *a priori* fenomenológica, as complexas respostas mecânicas de biomateriais, tecidos biológicos moles e polímeros (elastômeros e espumas), cujos comportamentos quando submetidos a deformações são de particular interesse em diversas áreas de pesquisa e de aplicações industriais.

Na presente seção são investigados os modelos tipo-Hookeanos SHG–Seth-Hill. Até o momento só foram estudadas as medidas em que a constante m é um valor inteiro e se encontra entre $-2 \leq m \leq 2$ (medidas clássicas: Green, Biot, Logarítmica, Hiperbólica e Almansi), a partir daqui, valores decimais e que extrapolam esses limites também são utilizados, de maneira a expandir as possibilidades de ajuste de curvas. A imposição da função seno-hiperbólica normalizada que caracteriza a família SHG, como já explicado, pode ser feita para qualquer medida de deformação, portanto as possibilidades aqui contempladas (SHG–Seth-Hill) são apenas parte de todas as possíveis.

Os modelos tipo-Hookeanos SHG–Seth-Hill possuem quatro parâmetros materiais: Módulo de Elasticidade (E), Coeficiente de Poisson (ν) e os parâmetros de definição da medida de deformação m e n . Os dois primeiros possuem significados bem definidos pela teoria da mecânica dos sólidos. Os significados físicos dos parâmetros m e n são: i) coeficiente de assimetria de rigidez entre compressão e tração, por exemplo: para materiais com uma maior rigidez em compressão do que na tensão usa-se $m \leq 0$ e quanto maior essa assimetria de rigidez, menor deve ser o valor de m , e para materiais com uma maior rigidez na tensão do que em compressão usa-se $m > 0$, sendo que quanto maior essa assimetria de rigidez, maior deve ser o valor de m ; e ii) n controla a taxa de aumento da rigidez tangente.

O fato de existirem claros significados físicos para todos os parâmetros materiais a serem calibrados é essencial para o ajuste de curvas performado, que consiste em: preestabelecer

intervalos de busca para as constantes materiais por meio de uma precalibração empírica (“manual” ou não-automatizada) e em seguida o emprego de um método numérico de busca discreta de mínimos quadrados por enumeração (automatizada). Ao final desse processo, com o resultado obtido pelo método de otimização numérica, mediante uma análise qualitativa da representação do resultado experimental pelo modelo analítico, define-se se o resultado é adequado ou não. Se não, por meio de modificações nos intervalos de valores de parâmetros materiais investigados e/ou mudanças no nível de deformação a ser descrito, a busca é refeita, de maneira manual ou automatizada, para se encontrar um resultado satisfatório.

O método numérico (automatizado) empregado consiste em fazer um ranqueamento das respostas (por meio de “varredura” de possíveis combinações) dentro dos intervalos pré-definidos dos parâmetros materiais referentes aos modelos tipo-Hookeanos SHG, calculando o somatório do quadrado dos resíduos encontrados com diferentes combinações de parâmetros. Ao final dessa busca, fica definido a combinação de valores dos parâmetros que melhor ajusta o modelo analítico aos dados experimentais, ou seja, o grupo que possui o menor somatório de resíduos. Todos os dados experimentais utilizados foram obtidos da literatura científica.

Aqui se faz uso de um exemplo para explicar o processo de calibração. Começa-se com um conjunto de dados experimentais retirados de uma publicação em periódico científico que representa a resposta mecânica de um determinado material sob modo puro de deformação EAS, ou seja, um conjunto de p valores de tensão \times estiramento obtidos experimentalmente ($\{\sigma_{11}^E\} \times \{\lambda_1^E\}$). Esse resultado experimental é comparado com os valores analíticos calculados usando as Eq. 6.24 e Eq. 6.25 ($\{\sigma_{11}^A\} \times \{\lambda_1^E\}$), sendo que a partir da variação dos parâmetros materiais de maneira empírica chega-se a uma resposta aproximada. A partir desta resposta aproximada, estabelecem-se intervalos de busca para os parâmetros materiais; e por meio do somatório das diferenças quadradas entre $\{\sigma_{11}^E\}$ e $\{\sigma_{11}^A\}$, encontra-se a função S a ser minimizada, com o objetivo de encontrar o conjunto de valores dos parâmetros materiais (m, n, ν, E) que proporciona ajuste entre curvas com maior exatidão (Eq. 7.1). O método numérico então busca a melhor resposta.

$$S = \sum_{i=1}^p (\sigma_{11}^E - \sigma_{11}^A)^2 \quad 7.1$$

Para avaliação do ajuste de curvas é usado como parâmetro a raiz do erro quadrático médio normalizada (desvio padrão dos resíduos normalizado). A Eq. 7.2 mostra o cálculo do *REQMN*, sendo o denominador a média dos valores experimentais. É comum apresentar esse valor como porcentagem, mas aqui o seu valor é apresentado como número decimal.

$$REQMN = \frac{\sqrt{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p S}}{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p |E_i \sigma_{11}^c|} \quad 7.2$$

O modelo analítico proposto pressupõe isotropia dos materiais, o que nem sempre condiz com o comportamento real preciso de alguns tecidos biológicos moles. No entanto, considerando a grande variabilidade das respostas experimentais e a complexidade de se modelar o comportamento anisotrópico (sem abrir mão de outras considerações), a utilização do modelo tipo-Hookeano SHG se faz atrativo pela capacidade de captar a resposta qualitativa dos tecidos biológicos moles. No caso da representação de artérias, por exemplo, escolheram-se partes do tecido que possuem resposta quase-isotrópica, o que faz o uso do modelo tipo-Hookeano SHG muito apropriado. Os polímeros estudados (borrachas, silicones e espumas) possuem comportamento isotrópico, inclusive o biomaterial MED-49xx.

Uma questão que é importante ressaltar é que a definição do Coeficiente de Poisson de um material pode ser muito difícil. A depender do material em questão, pode existir uma tendência à suposição de comportamento incompressível sem dados experimentais ou estudos científicos para apoiá-la, valores experimentais contraditórios em diferentes publicações e resultados experimentais que indicam uma variação do Coeficiente de Poisson à medida que se aumenta a deformação. Além disso, uma série de trabalhos encontra valores acima de 0.5 para o Coeficiente de Poisson de diferentes tecidos biológicos. De uma forma geral, aqui se adotou ou a consideração de incompressibilidade ou um valor específico de Coeficiente de Poisson, sempre se levando em conta a literatura do tema. Nos gráficos de Tensão Nominal x Estiramento do modo EAS o valor do Coeficiente de Poisson não possui nenhuma influência.

As calibrações realizadas na presente seção são chamadas de: Calibração Individual, Calibração Simultânea Completa, Calibração Simultânea Seletiva e Calibração Simultânea Manual Subjetiva. A Calibração Individual (CI) é a calibração automatizada de apenas um modo puro

de deformação, ainda que a partir dos valores de parâmetros materiais definidos com essa calibração sejam apresentadas as respostas de outros modos puros de deformação. Calibração Simultânea Completa (CSC) é a calibração simultânea de dois modos de deformação (EAS e CE-B ou EAS e CS) utilizando todos os dados experimentais disponíveis e o método numérico de otimização (automatizada). A Calibração Simultânea Seletiva (CSS) difere da Calibração Simultânea Completa apenas pelo fato de que, a partir de análises subjetivas, são selecionados parte dos dados experimentais para a calibração, descartando aqueles que se julgam dispensáveis, com o objetivo de melhorar o ajuste de curvas. Por fim, a Calibração Simultânea Manual Subjetiva (CSMS) é utilizada quando se acredita que a Calibração Simultânea Completa pode ser, considerando critérios subjetivos/qualitativos, melhorada, sendo utilizados os valores definidos pela calibração automatizada como ponto de partida e variando os valores por meio de “tentativa e erro”.

7.1 Tecidos biológicos moles e biomateriais

Aqui são apresentados alguns tecidos biológicos moles e dois biomateriais para se investigar a capacidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG–Seth-Hill de representá-los. Além da importância científica, o tema desperta relevante interesse na indústria de biomateriais e bioengenharia para a concepção de próteses, procedimentos para regeneração de tecidos, *software* de simulação cirúrgica e sistemas para cirurgias auxiliadas por robôs.

Uma característica marcante do estudo do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles é a dificuldade de realizarem-se ensaios experimentais precisos, o que, juntamente com a intrínseca aleatoriedade de comportamentos mecânicos do mesmo tecido em diferentes indivíduos, gera grande dispersão nos resultados. Além disso, replicar experimentalmente modos de deformação puros e a modelagem de materiais hiperelásticos em regime de grandes deformações, independentemente do material, ainda encontra obstáculos significativos. Desse modo, o desafio contemporâneo na pesquisa científica do tema é qualitativamente capturar o comportamento mecânico dos tecidos biológicos moles, ao passo que uma representação global e com grande exatidão mostra-se um objetivo ainda distante.

7.1.1 Diversos tecidos [Dwivedi et al. (2022)]

A presente subseção apresenta uma série de tecidos biológicos moles estudados no trabalho de Dwivedi et al. (2022) para justificar a apresentação de um novo modelo hiperelástico. Nomeado de “*Exp-Ln hyperelastic model*”, o modelo pressupõe comportamento incompressível e isotrópico, além de possuir 5 parâmetros materiais que os autores buscaram correlacionar com parâmetros histológicos dos tecidos estudados. No trabalho em que esse modelo foi apresentado, os autores mostram a inadequação dos modelos de Yeoh, Mooney-Rivlin e Ogden em representar de maneira global o comportamento de tecidos biológicos, pois quando se usa a Calibração Individual do modo EAS para ajustar o modelo aos dados experimentais, demais modos puros de deformação apresentaram resultados sem sentido físico ou a implementação em MEF se tornava instável (quanto mais parâmetros materiais o modelo de Ogden possuía, mais instável as respostas ficavam). Dessa forma, Dwivedi et al. (2022) mostram o modelo *Exp-Ln* calibrado para o modo EAS juntamente com a resposta de outros modos puros de deformação para a verificação de que essas respostas são coerentes, ainda que não tenham sido calibradas com dados experimentais. Para alguns dos tecidos biológicos moles examinados, os autores simplesmente mostram a Calibração Individual do modo EAS.

Aqui é seguido o mesmo padrão usado por Dwivedi et al. (2022) para apresentação de resultados, a única diferença é que, ao invés de apresentar resultados para o modo de Cisalhamento Puro (CP), são apresentados os resultados para Cisalhamento Simples (CS). Essa escolha foi feita porque a solução analítica para o modo CP possui inerente dependência da suposição de incompressibilidade. O modo EAS é usado na calibração do modelo e as respostas dos modos CE-B e CS para o modelo definido são apresentados para conferência da coerência física. Isso busca mostrar, além da capacidade de representar diferentes materiais, a vantagem de previsibilidade das respostas dos modelos tipo-Hookeanos SHG. Essa característica se deve ao fato de se ter poucos parâmetros materiais, todos com claro significado físico, o que diminui a chance de métodos de otimização levarem os parâmetros materiais a valores que geram respostas não físicas. Vale ressaltar que os resultados experimentais estudados por Dwivedi et al. (2022) foram obtidos de outros trabalhos (devidamente citados) e que todos os resultados usaram a Tensão Nominal.

7.1.1.1 Pele suína [Dwivedi et al. (2022)]

O primeiro tecido a ser investigado é a pele suína, que possui dados experimentais referentes ao modo EAS publicados no trabalho de Dwivedi et al. (2020). Utilizou-se um valor de Coeficiente de Poisson condizente com um material quase-incompressível ($\nu = 0.499$) e a partir da precalibração manual definiram-se os intervalos de busca para os demais parâmetros a serem utilizados na Calibração Individual do modo EAS, conforme mostra a Tabela 7.1. Os resultados encontrados são apresentados na Tabela 7.2 e a Figura 7.1 mostra graficamente as respostas do modelo hiperelástico tipo-Hookeano SHG definido, tanto para o modo EAS, para o qual o modelo foi calibrado, como para os modos CE-B e CS, que mostram respostas fisicamente coerentes.

Tabela 7.1: Intervalos de busca – Pele Suína.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	10.00
m	-7	1	7
n	0.1	0.1	30.00

Tabela 7.2: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Pele Suína.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.13
m	-5
n	26.4

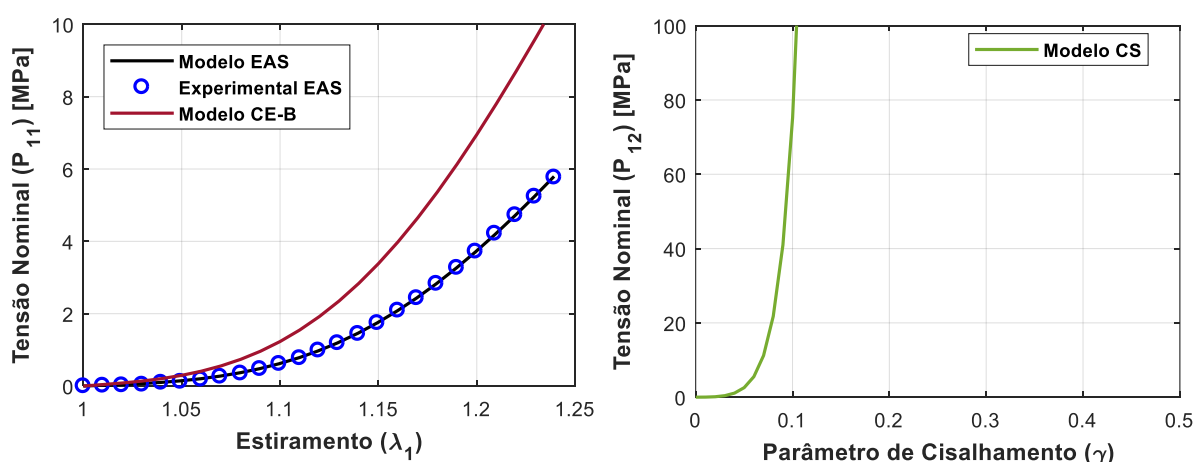


Figura 7.1: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS.
Fonte de Dados Experimentais: Dwivedi et al. (2020) – Pele Suína.

Para os valores de parâmetros materiais definidos, tem-se $REQMN = 0.0082$, o que representa um ajuste entre modelo e dados experimentais com valores de resíduos muito pequenos (grande exatidão).

7.1.1.2 Ligamento Colateral Medial do joelho humano [Quapp e Weiss (1998)]

Aqui é modelado o Ligamento Colateral Medial (LCM) do joelho humano a partir dos dados experimentais do artigo de Quapp e Weiss (1998). Seguindo o trabalho de Yang et al. (2023), definiu-se um valor de Coeficiente de Poisson de $\nu = 0.3$, ou seja, considerando o LCM um material convencional compressível; e buscaram-se dentro dos intervalos preestabelecidos (Tabela 7.3) os valores dos demais parâmetros materiais que melhor ajustassem o modelo analítico com os dados experimentais. Os resultados encontram-se na Tabela 7.4, sendo que o valor de $REQMN$ para a calibração foi de 0.0193, representando um ajuste de curvas que gera pequenos resíduos.

Tabela 7.3: Intervalos de busca – LCM.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	100	1	150
m	-15	1	2
n	0.1	0.1	40.0

Tabela 7.4: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – LCM.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	146
m	-11
n	36.6

A Figura 7.2 mostra os resultados gráficos da calibração, com as curvas experimental e do modelo analítico para o modo EAS sobrepostas e as curvas do modelo analítico para os modos CE-B e CS exibidas para conferência de coerência física das respostas.

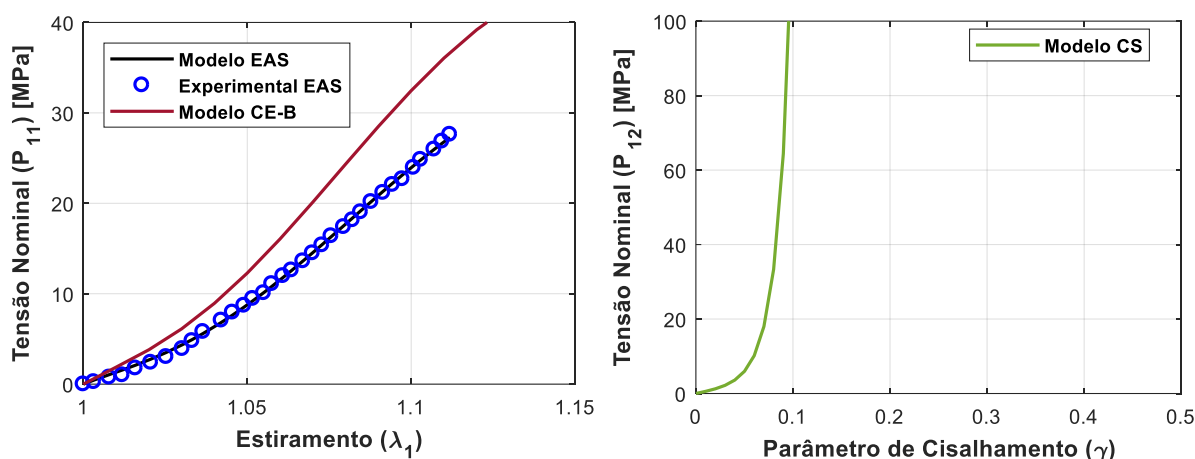


Figura 7.2: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS.
 Fonte de Dados Experimentais: Quapp e Weiss (1998) – LCM do joelho humano.

7.1.1.3 Tendão Patelar do joelho humano [Johnson et al. (1994)]

Aqui são examinados os dados experimentais do comportamento mecânico do Tendão Patelar do joelho humano coletados por Johnson et al. (1994). Os autores fizeram testes experimentais para representar o modo EAS em amostras de dois grupos, cada um com 15 indivíduos: 1º Grupo) Jovens Adultos: entre 29 e 50 anos de idade; 2º Grupo) Idosos: entre 64 e 93 anos de idade. Os testes coletaram respostas até um certo grau de deformação ($\lambda \approx 1.07$) e depois se definiram os valores dos pares de tensão-estiramento no momento da ruptura. Referente aos tecidos do grupo de Jovens Adultos, tem-se a Tabela 7.5 apresentando os intervalos de busca, a Tabela 7.6 mostrando os valores dos parâmetros definidos pela calibração e a Figura 7.3 as respostas gráficas; para Idosos as mesmas informações são encontradas, na mesma ordem, nas Tabela 7.7, Tabela 7.8 e Figura 7.4.

A calibração para os dados do 1º Grupo obteve $REQMN = 0.0398$, já para o 2º Grupo o valor do ajuste foi de $REQMN = 0.0831$. É interessante notar que para o Tendão Patelar o teste mecânico foi até a ruptura, o que gerou o comportamento característico de perda de rigidez tangente logo antes de se atingir a carga máxima, o que é possível de se capturar com a utilização de modelos tipo-Hookeanos SHG com valores negativos de m . Relevante também perceber que, como os mesmos parâmetros materiais foram utilizados para calibrar o Tendão Patelar de jovens adultos e idosos, é possível que se encontrem correlações entre esses parâmetros e aspectos micromecânicos dos tecidos que mudam com a idade.

Tabela 7.5: Intervalos de busca – Tendão Patelar: Jovens Adultos.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	225	1	325
m	-14	1	2
n	20.0	0.1	60.0

Tabela 7.6: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Tendão Patelar: Jovens Adultos.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	321
m	-14
n	46.30

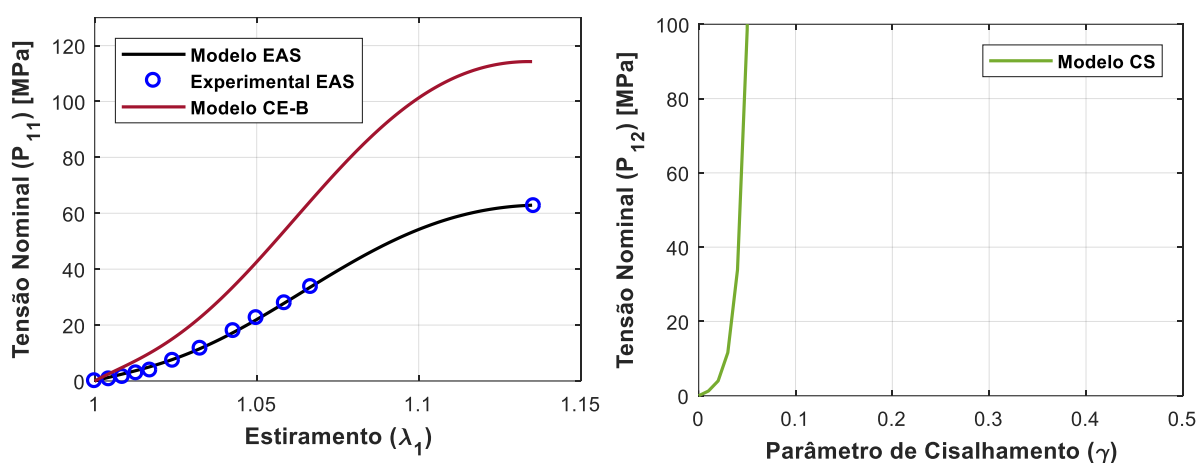


Figura 7.3: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS.
 Fonte de Dados Experimentais: Johnson et al. (1994) – Tendão Patelar: Jovens Adultos.

Tabela 7.7: Intervalos de busca – Tendão Patelar: Idosos.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	225	1	325
m	-14	1	2
n	20.0	0.1	60.0

Tabela 7.8: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Tendão Patelar: Idosos.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	225
m	-12
n	40.4

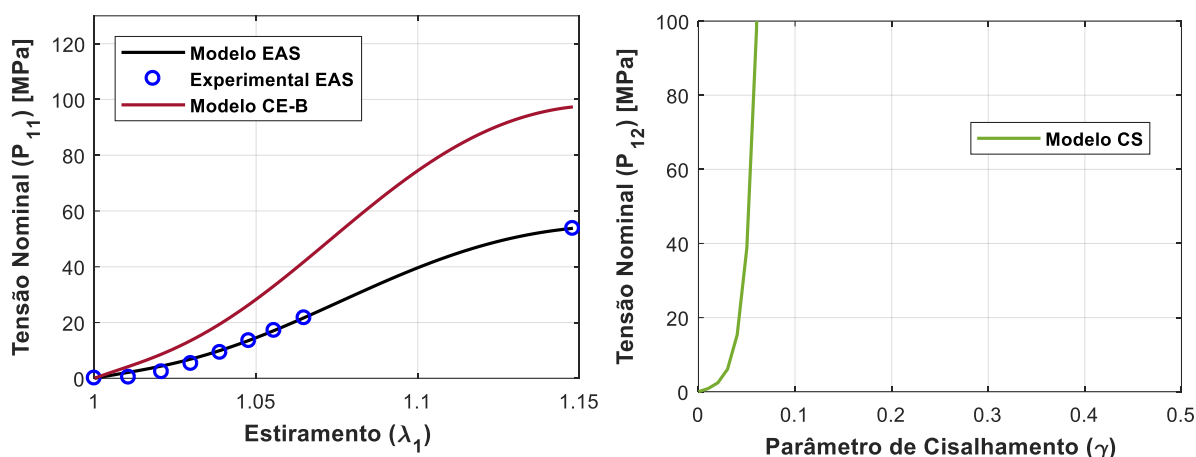


Figura 7.4: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS.
 Fonte de Dados Experimentais: Johnson et al. (1994) – Tendão Patelar: Idosos.

7.1.1.4 Derme humana [Silver et al. (2002)]

O trabalho de Silver et al. (2002) performou testes experimentais do modo EAS para a derme humana de dois doadores: um jovem caucasiano do sexo masculino de 23 anos de idade e uma idosa caucasiana do sexo feminino de 87 anos de idade. Utilizando os resultados apresentados por Silver et al. (2002), é feita a calibração do modelo analítico baseado na medida SHG. Considerou-se que a derme humana se comporta como um material incompressível ($\nu = 0.49$). Os dados referentes à calibração feita para a derme do jovem de 23 anos são mostrados pelas Tabela 7.9, Tabela 7.10 e Figura 7.5, já para os referentes a da idosa de 87 anos são mostrados pelas Tabela 7.11, Tabela 7.12 e Figura 7.6. Para a calibração da derme do jovem obteve-se um $REQMN = 0.0176$, enquanto a da derme da idosa teve um $REQMN = 0.0197$, ambos valores que indicam ajustes muito próximos.

Tabela 7.9: Intervalos de busca – Derme Humana: jovem de 23 anos.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.1	0.1	15.0
m	-6	1	2
n	0.1	0.1	20.0

Tabela 7.10: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Derme Humana: jovem de 23 anos.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	10.1
m	-4
n	16.3

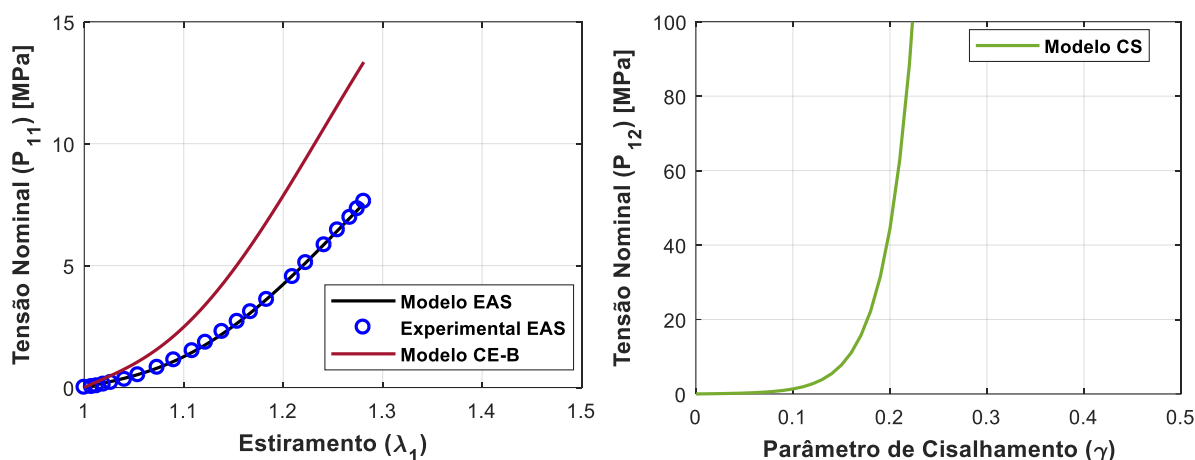


Figura 7.5: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS.
 Fonte de Dados Experimentais: Silver et al. (2002) – Derme Humana: jovem de 23 anos.

Tabela 7.11: Intervalos de busca – Derme Humana: idosa de 87 anos.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.1	0.1	15.0
m	-6	1	2
n	0.1	0.1	15.0

Tabela 7.12: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Derme Humana: idosa de 87 anos.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	1.6
m	-3
n	14.6

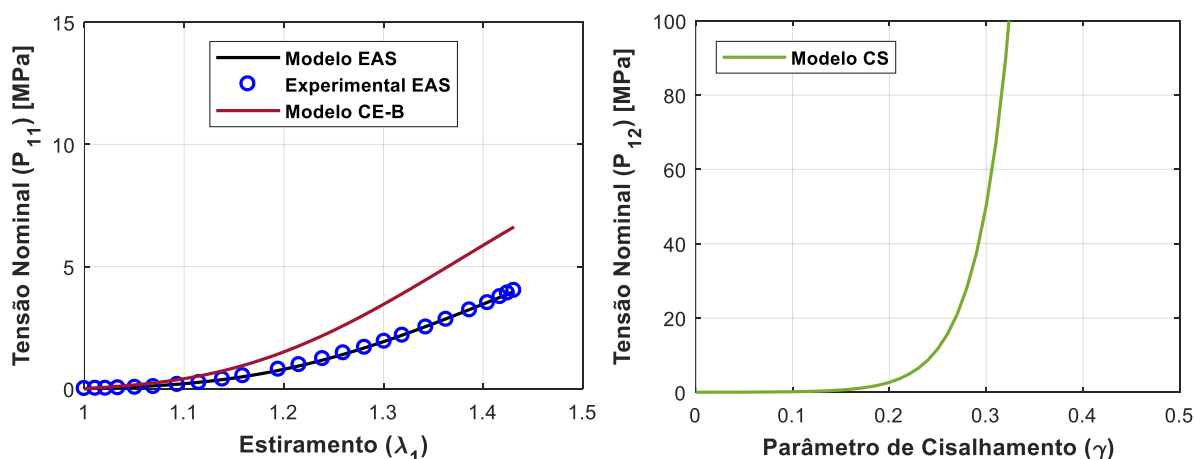


Figura 7.6: esquerda) Modo EAS calibrado + resposta CE-B; direita) resposta do modo CS.
 Fonte de Dados Experimentais: Silver et al. (2002) – Derme Humana: idosa de 87 anos.

7.1.2 Artéria

Nesta subseção é investigado o comportamento mecânico da Artéria Aorta de humanos e suínos, assim como a capacidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG de descrevê-lo. No trabalho de Vorp et al. (2003), utilizaram-se de amostras da artéria aorta ascendente humana de vinte e seis pacientes (idade de 66 ± 2 anos) com Aneurisma da Aorta Torácica Ascendente (AATA) e de 10 indivíduos (idade de 51 ± 6 anos) sem aneurisma (grupo controle), a fim de investigar o comportamento mecânico da artéria aorta ascendente e a influência do AATA nele. O objetivo do trabalho de Vorp et al. (2003) é aumentar o conhecimento sobre a resistência da parede do aneurisma e as forças atuando na parede, de forma a, potencialmente, fornecer a identificação diagnóstica de aneurismas para os quais o risco de ruptura supera os riscos de reparo.

Weisbecker et al. (2012) coletaram dados experimentais de aortas torácicas e abdominais humanas com espessamento intimal não-aterosclerótico. Os testes mecânicos do modo EAS e, conseqüentemente, os resultados foram obtidos para cada camada do tecido arterial: túnica íntima, túnica média e túnica adventícia, além de resultados para o tecido inteiro. As amostras usadas foram: 14 aortas torácicas (60 ± 12 anos) e 9 aortas abdominais (61 ± 11 anos). Weisbecker et al. (2012) justificam o estudo dizendo que um maior conhecimento do comportamento mecânico da artéria aorta pode-se aprimorar os estudos de elementos finitos (FE) voltados para a melhoria do design das geometrias de *stents* (endoprótese vascular) e facilitar a aplicação de procedimentos baseados em cateter.

Peña et al. (2015) investigam as propriedades mecânicas da artéria aorta torácica de suínos. Foram testadas experimentalmente para o modo EAS 9 amostras de porcas fêmeas com aproximadamente 3.5 ± 0.45 meses de idade, que foram separadas por camadas – íntima, média e adventícia – e por localização: aorta torácica porção superior e aorta torácica porção inferior. Peña et al. (2015) afirmam que pesquisas em suínos são relevantes devido às semelhanças entre os sistemas cardiovasculares humano e suíno, e que os conhecimentos adquiridos sobre as características mecânicas da artéria aorta podem ser usados por engenheiros biomédicos para investigar terapias melhores e desenvolver dispositivos específicos para artérias, levando-se em consideração a localização da anomalia.

Os três trabalhos utilizam modelos analíticos (implementados computacionalmente ou não) para tentar descrever mecanicamente a artéria aorta. Vorp et al. (2003) usam um modelo

isotrópico e incompressível, Weisbecker et al. (2012) e Peña et al. (2015) usam modelos anisotrópicos e incompressíveis. Peña et al. (2015) são os únicos que plotam várias curvas dos resultados experimentais de diferentes amostras no mesmo gráfico, o que deixa bem claro visualmente a variabilidade das respostas de indivíduo para indivíduo. Weisbecker et al. (2012) não fazem a plotagem, mas apresentam resultados mediante tabelas com parâmetros estatísticos que também indicam uma alta variabilidade de respostas para diferentes indivíduos. Vorp et al. (2003) lidam com Aorta Torácica Ascendente como um todo, sem dividir em camadas, e acreditam que a aproximação de isotropia é razoável. Weisbecker et al. (2012) e Peña et al. (2015) fazem testes experimentais para direções longitudinal e circunferencial, obtendo:

- Weisbecker et al. (2012): autores não fazem discussão a respeito de quase-isotropia de diferentes camadas, mas pelos gráficos plotados com a média das respostas e com os parâmetros estatísticos dos dados, o autor da presente tese acredita que se pode atribuir a característica de quase-isotropia para a íntima tanto da aortas torácica como da aorta abdominal;
- Peña et al. (2015): na discussão feita a partir dos resultados experimentais, os autores do artigo atribuem para a as amostras de íntima e adventícia da porção superior da Aorta Torácica um comportamento quase-isotrópico. Considerando os resultados plotados graficamente, a variabilidade de respostas e a grande interseção no desvio padrão de dados experimentais nas direções longitudinal e circunferencial, o autor da presente tese acredita que as amostras inteiras da porção superior da Aorta Torácica também podem ser consideradas quase-isotrópicas.

Levando-se em conta as informações supracitadas, uma vez que o modelo tipo-Hookeano SHG é isotrópico, são aqui estudadas: (i) a Aorta Torácica Ascendente humana (seguindo Vorp et al. (2003)); (ii) as amostras da íntima, (iii) da adventícia e (iv) da amostra inteira da porção superior da Aorta Torácica suína (seguindo Peña et al. (2015)); e (v) a íntima das aortas torácicas e (vi) abdominais humanas (baseado nos resultados de Weisbecker et al. (2012)). O presente trabalho também se utilizará da pressuposição de incompressibilidade ($\nu = 0.49$), apesar do modelo tipo-Hookeano SHG aqui apresentado comportar diferentes níveis de compressibilidade, diferentemente dos modelos usados pelos três trabalhos de onde se retiram os dados experimentais, que só são viáveis sob a suposição de incompressibilidade. Isso é um fato relevante, pois pesquisas experimentais recentes encontraram resultados que diferem da

suposição de incompressibilidade, como Skacel e Bursa (2022) que obtiveram valores de $0.3 \leq \nu \leq 0.4$ para o Coeficiente de Poisson de artéria suína.

7.1.2.1 Aorta Torácica Ascendente Humana: influência do aneurisma [Vorp et al. (2003)]

Aqui é feita a calibração dos parâmetros materiais do modelo tipo-Hookeano SHG para descrever mecanicamente o comportamento de Aneurismas da Aorta Torácica Ascendente (ATA) humana e do grupo Controle (Aorta Torácica Ascendente sem aneurisma), seguindo os dados experimentais de Vorp et al. (2003). A Tabela 7.13 mostra os intervalos de busca que foram utilizados tanto para o grupo Controle como para o grupo ATA, a Tabela 7.14 mostra os valores das constantes materiais obtidas para o grupo Controle e a Tabela 7.15 mostra os valores para o grupo com ATA.

Tabela 7.13: Intervalos de busca – Aorta Torácica Ascendente: Controle e ATA.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	3
m	-5	1	5
n	0.01	0.01	16

Tabela 7.14: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Ascendente: Controle.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.35
m	2
n	0.85

Tabela 7.15: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Ascendente: ATA.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.67
m	-2
n	12.17

A Figura 7.7 mostra simultaneamente os ajustes para os grupos Controle e ATA, sendo que estes obtiveram valores de $REQMN$ iguais a 0.0240 e 0.0099, respectivamente, mostrando grande exatidão dos resultados.

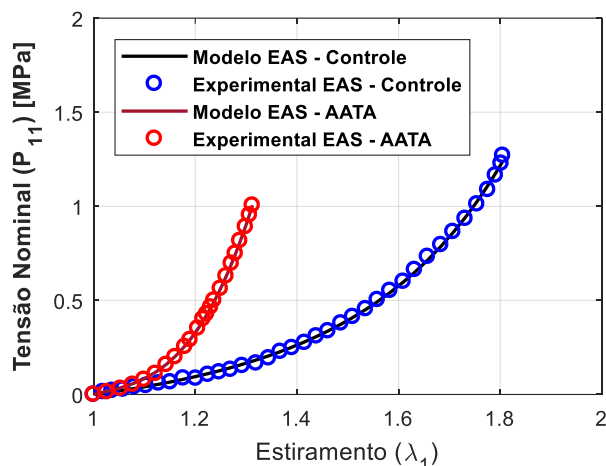


Figura 7.7: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Vorp et al. (2003) – Aorta Torácica Ascendente: Controle e AATA.

7.1.2.2 Aortas Torácicas e Abdominais Humanas com espessamento não aterosclerótico da íntima [Weisbecker et al. (2012)]

Os dados experimentais da íntima das Aortas Torácicas e Abdominais humanas coletados por Weisbecker et al. (2012) são aqui analisados. Weisbecker et al. (2012) aplicaram ciclos de carregamento e descarregamento no teste do modo EAS, pois queriam modelar também a perda de energia do sistema através da mecânica do dano. Aqui se utilizam os resultados da curva virgem e do último ciclo de carregamento para serem modelados, mas sem nenhuma consideração da mecânica do dano, considerando cada uma das curvas como sendo representantes de um material hiperelástico. O objetivo é apenas mostrar a capacidade do modelo tipo-Hookeano SHG de, através da variação dos parâmetros materiais, representar tanto o material virgem como ele após ciclos de carregamento.

Começa-se pela calibração referente à camada íntima da Aorta Abdominal. A Tabela 7.16 mostra os intervalos de busca para ambos os ciclos, a Tabela 7.17 mostra os resultados para o 1º ciclo ($REQMN = 0.0285$), enquanto a Tabela 7.18 mostra os resultados do 3º Ciclo ($REQMN = 0.0104$) e, por fim, a Figura 7.8 apresenta ambas as curvas calibradas.

Tabela 7.16: Intervalos de busca – Íntima da Aorta Abdominal: 1º e 3º Ciclos.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	2.00
m	-7	1	7
n	0.1	0.1	35.0

Tabela 7.17: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Abdominal: 1º Ciclo.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.09
m	-5
n	30.0

Tabela 7.18: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Abdominal: 3º Ciclo.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.06
m	4
n	7.1

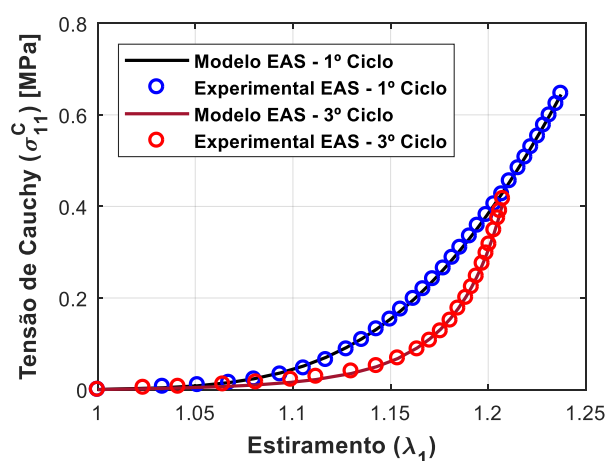


Figura 7.8: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Weisbecker et al. (2012) – Íntima da Aorta Abdominal: 1º e 3º Ciclos.

De maneira similar ao procedimento feito para a íntima da Aorta Abdominal, agora é investigada a íntima da Aorta Torácica, com todas as informações relevantes do processo de calibração apresentadas em: Tabela 7.19,

Tabela 7.20, Tabela 7.21 e Figura 7.9. Para o 1º ciclo obteve-se $REQMN = 0.00115$ e para o 3º ciclo $REQMN = 0.0078$.

Tabela 7.19: Intervalos de busca – Íntima da Aorta Torácica: 1º e 3º Ciclos.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [Mpa]	0.01	0.01	2.00
m	-7	1	7
n	0.1	0.1	30

Tabela 7.20: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Torácica: 1º Ciclo.

Parâmetro	Resultado
E [Mpa]	0.14
m	-5
n	28.0

Tabela 7.21: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Íntima da Aorta Torácica: 3º Ciclo.

Parâmetro	Resultado
E [Mpa]	0.14
m	3
n	7.2

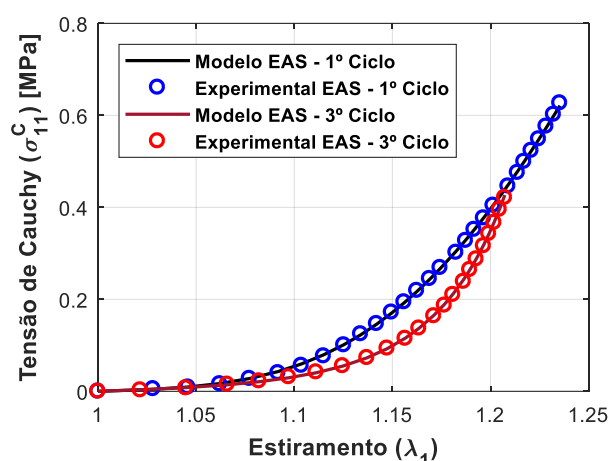


Figura 7.9: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Weisbecker et al. (2012) – Íntima da Aorta Torácica: 1º e 3º Ciclos.

7.1.2.3 Aorta Torácica Suína [Peña et al. (2015)]

Aqui são examinados os dados experimentais obtidos por Peña et al. (2015) para o comportamento mecânico da Aorta Torácica suína sob o modo puro de deformação EAS. As camadas aqui examinadas são todas da porção superior: camada inteira (tecido completo), íntima e adventícia. Utilizaram-se os mesmos intervalos de busca para essas três camadas (Tabela 7.22), os resultados dos valores dos parâmetros materiais encontrados são mostrados pelas Tabela 7.23 ($REQMN = 0.0216$), Tabela 7.24 ($REQMN = 0.0445$) e Tabela 7.25 ($REQMN = 0.0355$), e os gráficos dos ajustes de curvas são apresentados pelas Figura 7.10, Figura 7.11 e Figura 7.12.

Tabela 7.22: Intervalos de busca – Aorta Torácica Suína: Camada Inteira, Adventícia e Íntima.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.05	0.01	1
m	-2	1	4
n	0.01	0.01	10

Tabela 7.23: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Suína: Camada Inteira.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.10
m	2
n	2.44

Tabela 7.24: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Suína: Adventícia.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.05
m	3
n	1.8

Tabela 7.25: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Aorta Torácica Suína: Íntima.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.06
m	3
n	0.80

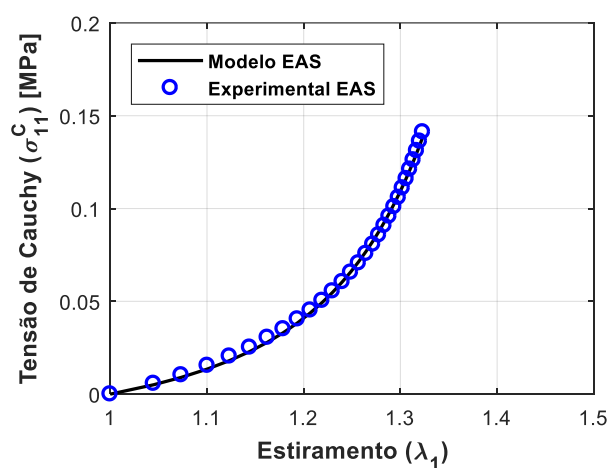


Figura 7.10: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Peña et al. (2015) – Aorta Torácica Suína: Camada Inteira.

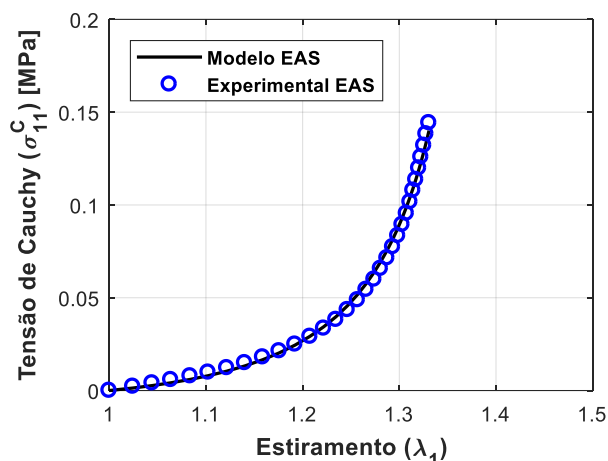


Figura 7.11: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Peña et al. (2015) – Aorta Torácica Suína: Adventícia.

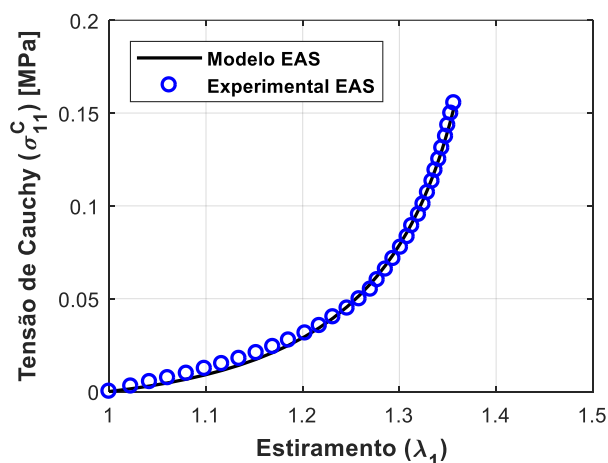


Figura 7.12: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Peña et al. (2015) – Aorta Torácica Suína: Íntima.

7.1.3 Fígado Suíno [Gao et al. (2010)]

Aqui são analisados os dados experimentais de fígado suíno apresentados no artigo de Gao et al. (2010), onde foram feitos testes do modo puro EAS tanto para compressão não confinada como para tração em amostras de doze suínos. Os autores apresentaram dois novos modelos hiperelásticos para tentar descrever o comportamento do fígado qualitativamente. Ambos os modelos são isotrópicos e incompressíveis. George et al. (2018) usam um Coeficiente de Poisson de 0.3 para o fígado em uma simulação, já Hostettler et al. (2010) usam $\nu = 0.47$ e apresentam referências que encontraram experimentalmente valores de Coeficiente de Poisson entre 0.4 e 0.5 para o fígado. Nesta tese, considerando que é feito somente a Calibração Individual do modo EAS e que os dados experimentais são apresentados usando a Tensão

Nominal, a escolha do Coeficiente de Poisson é irrelevante, mas cabe lembrar que o modelo tipo-Hookeano SHG pode representar materiais compressíveis.

Gao et al. (2010) apresentam em um só gráfico todas as curvas da compressão e da tração obtidas experimentalmente, com o objetivo de juntar os dois testes em uma resposta só, de forma a poder comparar os modelos hiperelásticos pelos autores apresentados (Exponencial Ogden e Logarítmico Ogden) com os dados experimentais completos. A Figura 7.13 mostra os resultados experimentais e 4 modelos hiperelásticos calibrados por Gao et al. (2010) na tentativa de representar qualitativamente o comportamento mecânico do fígado suíno. Na Figura 7.13 foi feita pelo autor da tese a escolha de uma série de pontos que se julgam representar bem, qualitativamente, os dados experimentais, e é a partir desses pontos que é feita aqui a calibração do modelo tipo-Hookeano SHG.

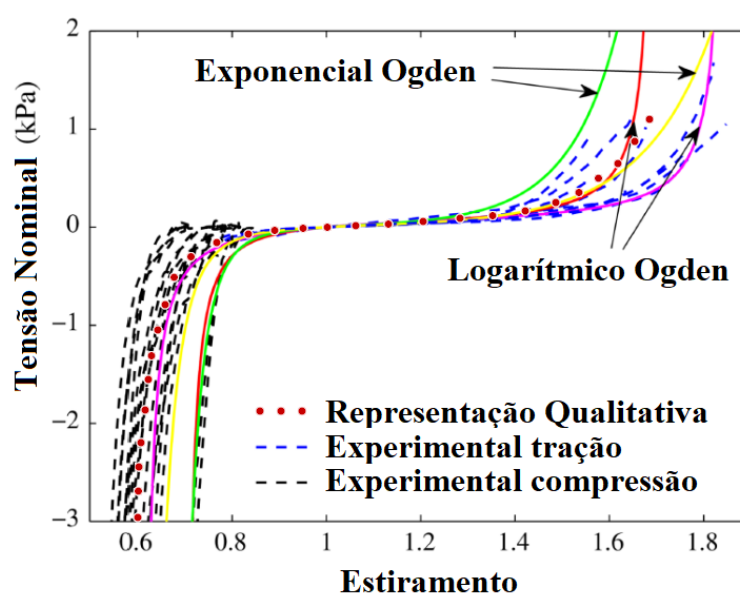


Figura 7.13: Dados experimentais do fígado suíno, 4 modelos hiperelásticos calibrados por Gao et al. (2010) e representação qualitativa. Fonte: Modificado de Gao et al. (2010).

A Tabela 7.26 mostra os intervalos de busca utilizados na calibração dos parâmetros materiais, a Tabela 7.27 apresenta os valores definidos e a Figura 7.14 mostra o gráfico da calibração. Obteve-se um valor de $REQMN = 0.1028$, que é um valor que indica um bom ajuste de curvas, mas que é o maior valor de todas as calibrações feitas até aqui. Esse resultado do $REQMN$ expressa bem a dificuldade de se representar de maneira global o comportamento de materiais hiperelásticos em regime de grandes deformações, pois o simples fato de se ter a compressão e

a tração para serem calibradas simultaneamente, ainda que se esteja dentro do mesmo modo de deformação puro (EAS), já dificulta o ajuste de curvas.

Tabela 7.26: Intervalos de busca – Fígado Suíno.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.1	0.1	2
m	-5	1	5
n	0.1	0.1	20

Tabela 7.27: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Fígado Suíno.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.1
m	0
n	5.8

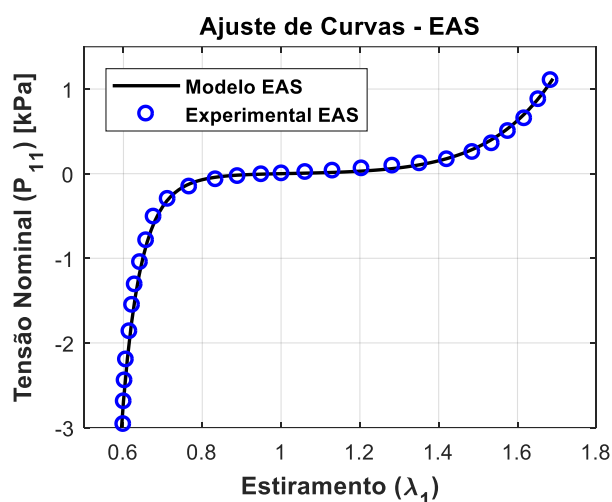


Figura 7.14: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados: Gao et al. (2010) – Fígado Suíno.

7.1.4 Cérebro Humano [Budday et al. (2017)]

Budday et al. (2017) obtiveram experimentalmente a resposta mecânica de 4 diferentes tecidos do cérebro humano: Córtex, Gânglios da Base, Coroa Radiada e Corpo Caloso, tendo realizado testes que representam os modos puros de deformação EAS e CS. Aqui são analisados esses dados experimentais para averiguar a capacidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG de descrever o comportamento mecânico do cérebro. O tecido cerebral é muitas vezes considerado um material incompressível (BUDDAY et al., 2017; DE ROOIJ; KUHL, 2016; MIHAI et al., 2017; ST. PIERRE; LINKA; KUHL, 2023) e isso se deve, ao menos em parte, à conveniência de se diminuir a complexidade da modelagem hiperelástica. No entanto, diversos trabalhos

definem diferentes valores de Coeficiente de Poisson para o cérebro (ESKANDARI; RAHMANI; SHAFIEIAN, 2021; MORAN; SMITH; GARCÍA, 2014; MORIN et al., 2017; SOZA et al., 2005; TENTI; SIVALOGANATHAN; DRAKE, 1999). Tendo em vista os resultados encontrados na literatura, acredita-se que o intervalo de $0.40 \leq \nu < 0.50$ é razoável para o valor de Coeficiente de Poisson, sendo esse, portanto, o intervalo de busca nas calibrações.

A necessidade de calibrar simultaneamente diferentes modos puros de deformação (EAS completo, com compressão e tração, mais o modo CS) expõe mais uma vez a complexidade da modelagem de materiais hiperelásticos no regime de grandes deformações. Ao mesmo tempo, fica evidente a grande conveniência de se ter sob análise apenas parâmetros materiais com claro significado físico, o que dá ao engenheiro um controle do processo de calibração que permite ajustes qualitativos da resposta obtida.

7.1.4.1 Gânglios de Base

A partir dos dados experimentais dos Gânglios de Base apresentados por Budday et al. (2017), primeiro é feita a Calibração Individual de cada um dos modos EAS e CS, para em seguida ser feita a Calibração Simultânea Completa desses dois modos. A Tabela 7.28 mostra os intervalos de busca utilizados em todas as calibrações. As Tabela 7.29, Tabela 7.30 e Tabela 7.31 mostram os resultados obtidos para as calibrações EAS Individual ($REQMN = 0.0613$), CS Individual ($REQMN = 0.0100$) e Simultânea Completa EAS e CS ($REQMN = 0.1302$), respectivamente. Os valores de $REQMN$ demonstram como que é mais simples a calibração individual do CS, um único modo puro, do que a calibração individual do EAS, que também é um único modo puro, mas que inclui dois testes experimentais (tensão e compressão), e como mais difícil ainda é a calibração simultânea dos modos EAS e CS.

Tabela 7.28: Intervalos de busca: EAS Individual, CS Individual e Calibração Simultânea EAS e CS – Gânglios de Base.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.1	0.1	5.0
m	-5	0.1	2
n	0.1	0.1	15.0
ν	0.40	0.01	0.49

Tabela 7.29: Valores definidos pela Calibração Individual EAS – Gânglios de Base.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.4
m	-3
n	4.7
ν	0.4

Tabela 7.30: Valores definidos pela Calibração Individual CS – Gânglios de Base.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	1.7
m	1.9
n	7.9
ν	0.45

Tabela 7.31: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Gânglios de Base.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.3
m	-2.8
n	5.3
ν	0.4

Para ilustrar bem como a calibração de um modo puro não garante boas respostas para outros modos, são apresentados para cada Calibração Individual realizada também a resposta gráfica do outro modo puro de deformação.

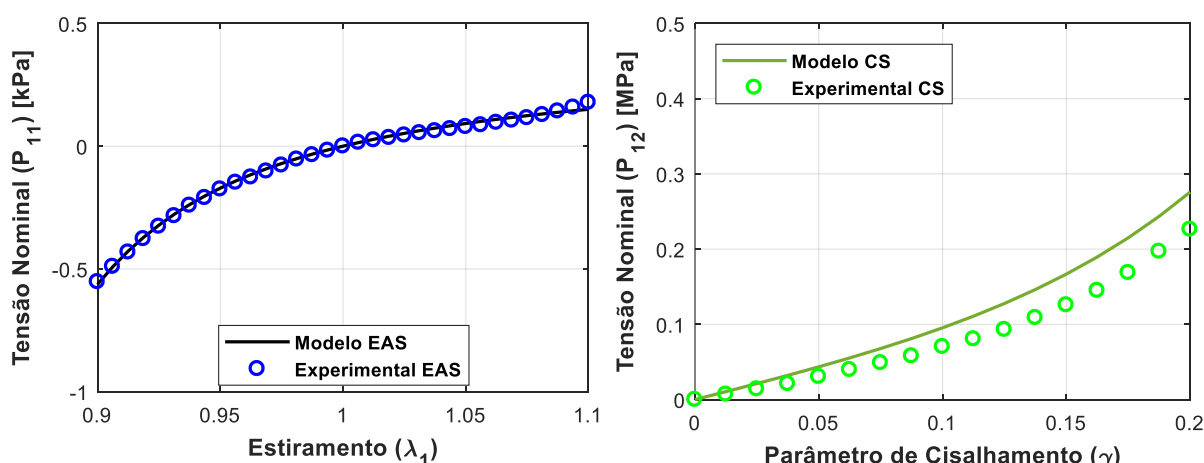


Figura 7.15: Calibração Individual EAS: esquerda) Modo EAS calibrado individualmente; direita) resposta do modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.

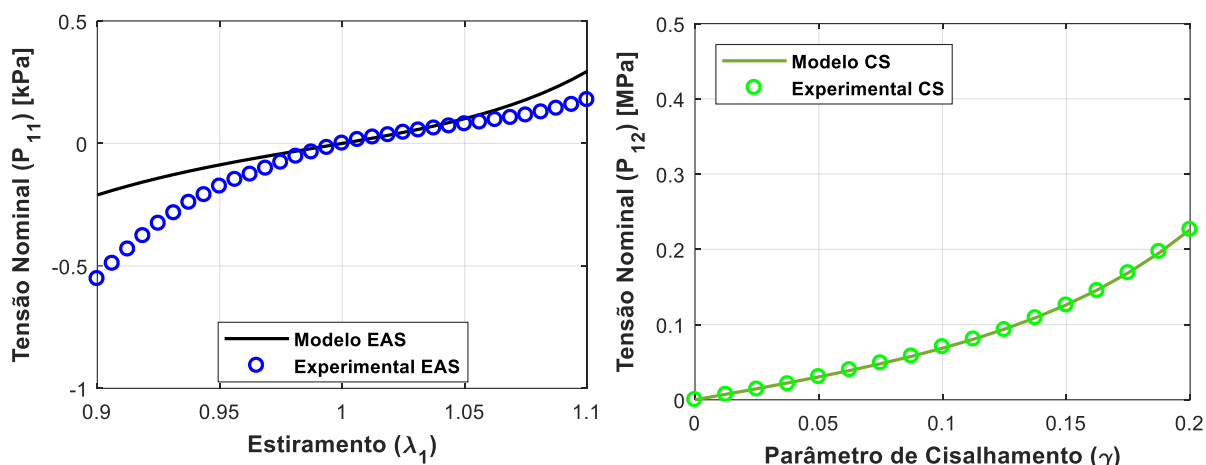


Figura 7.16: Calibração Individual CS: esquerda) resposta do modo EAS; direita) Modo CS calibrado individualmente. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.

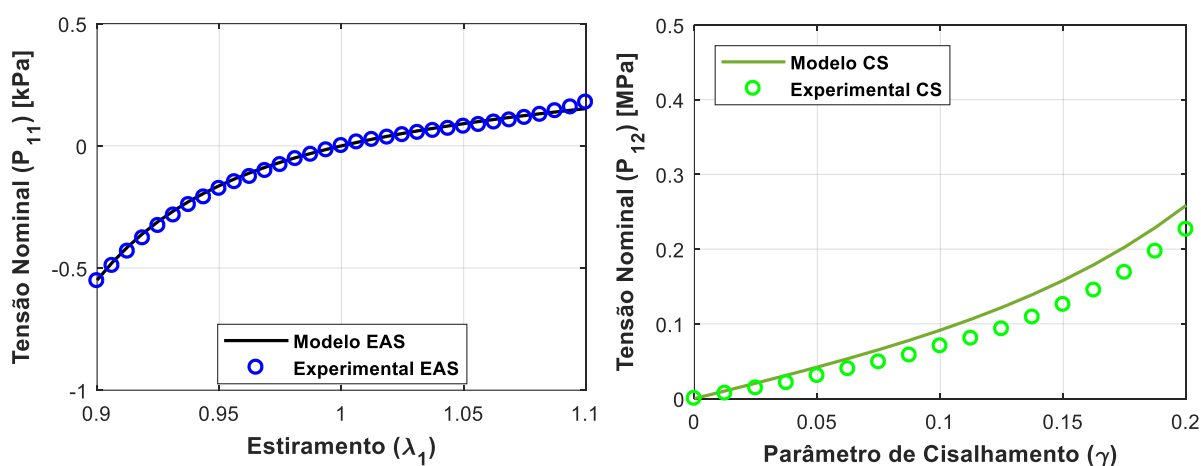


Figura 7.17: Calibração Simultânea Completa EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.

A Figura 7.15 mostra as respostas obtidas pela Calibração Individual EAS, ficando evidente como que os resultados do modo CS possuem diferenças bem maiores entre modelo analítico e dados experimentais (ainda que a resposta tenha sido qualitativamente boa); a Figura 7.16 mostra as respostas obtidas pela Calibração Individual CS, ficando evidente como há um grande desajuste para o modo EAS; por fim, a Figura 7.17 mostra como a Calibração Simultânea Completa gera resultados globais melhores, e que se conseguiu representar o comportamento mecânico do material de maneira qualitativa.

Apesar de a Calibração Simultânea Completa garantir que os valores dos parâmetros materiais encontrados são aqueles que minimizam a somatória de resíduos quadrados, ao menos dentro dos intervalos de busca, é importante ressaltar que nem sempre essa é necessariamente a melhor resposta. A Figura 7.18 mostra gráficos retirados de Budday et al. (2020b) em que os resultados experimentais de Budday et al. (2017) são apresentados juntamente com os respectivos desvio-padrão. Para os Gânglios de Base fica claro que existe uma menor dispersão de resultados para a tração do que para a compressão e para o Cisalhamento Simples, sendo que para esses dois testes a dispersão é crescente à medida que a deformação aumenta.

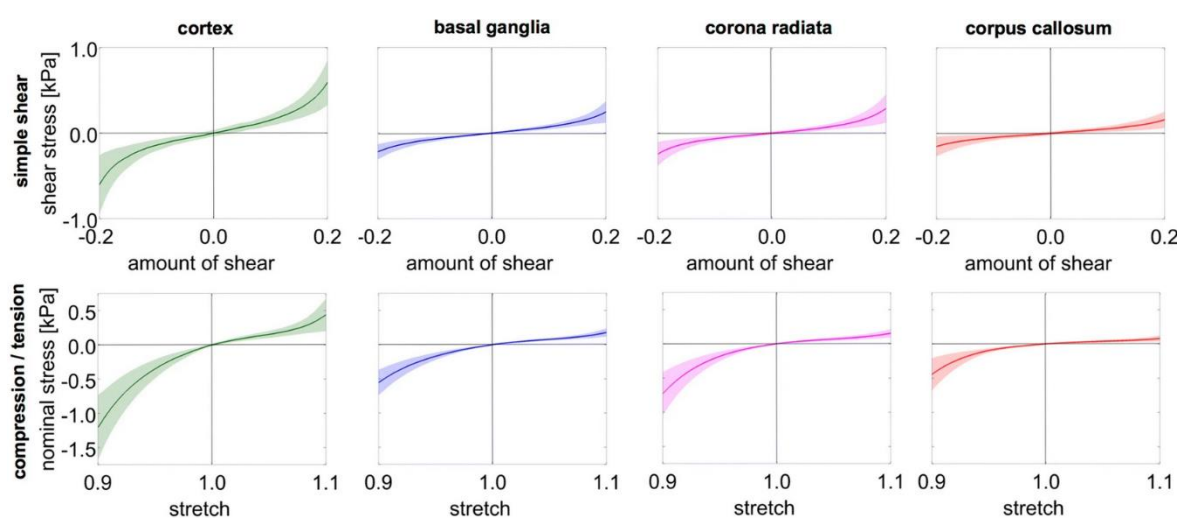


Figura 7.18: Resultados experimentais com desvio padrão. Fonte: Budday et al. (2020b).

Tendo isso em vista e considerando que é possível, partindo dos resultados já obtidos da Calibração Simultânea Completa (automatizada), calibrar os parâmetros de maneira “manual”, ou seja, utilizando tentativa e erro, já que os parâmetros todos possuem significados físicos, faz-se um ajuste de modo a melhor representar (subjetivamente) de maneira qualitativa os dados experimentais pelo modelo analítico, conforme apresenta a Figura 7.19. Essa é a Calibração Simultânea Manual Subjetiva.

Os valores dos parâmetros materiais encontram-se na Tabela 7.32, tendo-se obtido um valor de $REQMN = 0.2023$. Na calibração subjetiva buscou-se priorizar a representação da tração como um todo (quantitativa e qualitativamente), já para o Cisalhamento Simples tentou-se garantir um bom ajuste de curvas para menores deformações e garantir a representação qualitativa da resposta experimental para maiores deformações; por fim, na compressão o objetivo fixou-se em descrever o comportamento qualitativo da resposta ao mesmo tempo em que se tentou manter o resultado dentro do desvio-padrão do resultado experimental.

Tabela 7.32: Valores definidos pela Calibração Simultânea Manual Subjetiva EAS e CS – Gânglios de Base.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	1.7
m	-2.0
n	10.4
ν	0.4

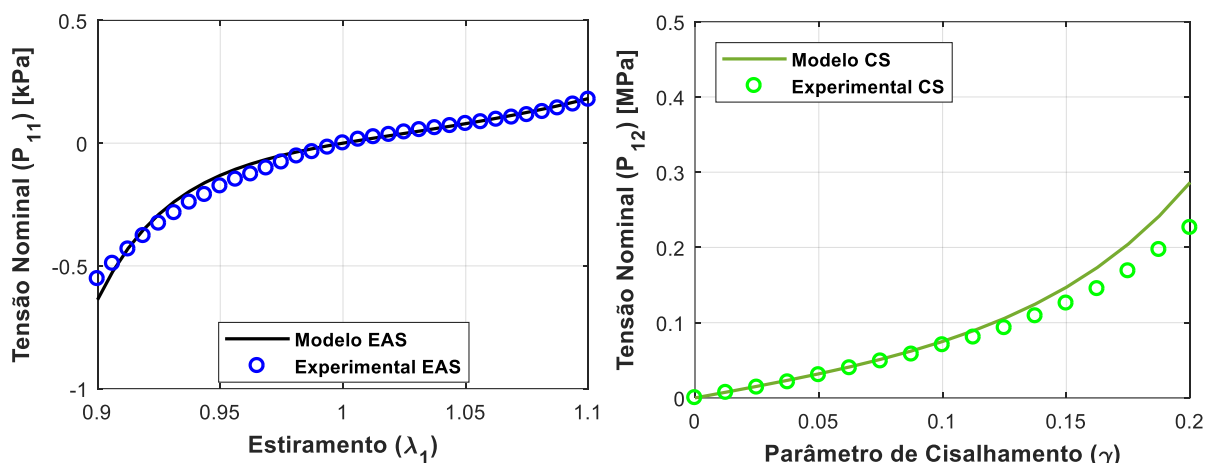


Figura 7.19: Calibração Simultânea Manual Subjetiva: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Gânglios de Base.

O mesmo padrão de resultados obtidos para os Gânglios de Base são obtidos para os demais tecidos do cérebro: calibrações individuais capazes de representar o modo de deformação específico em análise, mas com menor qualidade de representação do comportamento qualitativo global do tecido; calibração simultânea garante a minimização dos resíduos e em geral apresenta boa descrição mecânica global do tecido, ainda que não necessariamente represente o melhor resultado qualitativo quando se levam em consideração questões subjetivas; calibração por “tentativa e erro” é performada para se tentar atingir melhores resultados qualitativos. Por isso, para os próximos tecidos só serão apresentados os resultados da Calibração Simultânea Completa (automatizada) e da Calibração Simultânea Manual Subjetiva.

7.1.4.2 *Córtex*

Os dados experimentais de Budday et al. (2017) para o Córtex Cerebral são aqui utilizados para a Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CS. Encontrou-se um valor de $REQMN = 0.1121$ para essa calibração, tendo sido utilizados aqui para o Córtex os mesmos

intervalos de busca apresentados pela Tabela 7.28, e sendo os valores calculados para os parâmetros materiais mostrados pela Tabela 7.33. A Figura 7.20 apresenta os gráficos dos ajustes de curvas obtidos pela Calibração Simultânea Completa, que exibem uma boa representação qualitativa dos dados experimentais pelo modelo analítico.

Tabela 7.33: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – CórteX.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	4.4
m	-2.4
n	7.1
ν	0.4

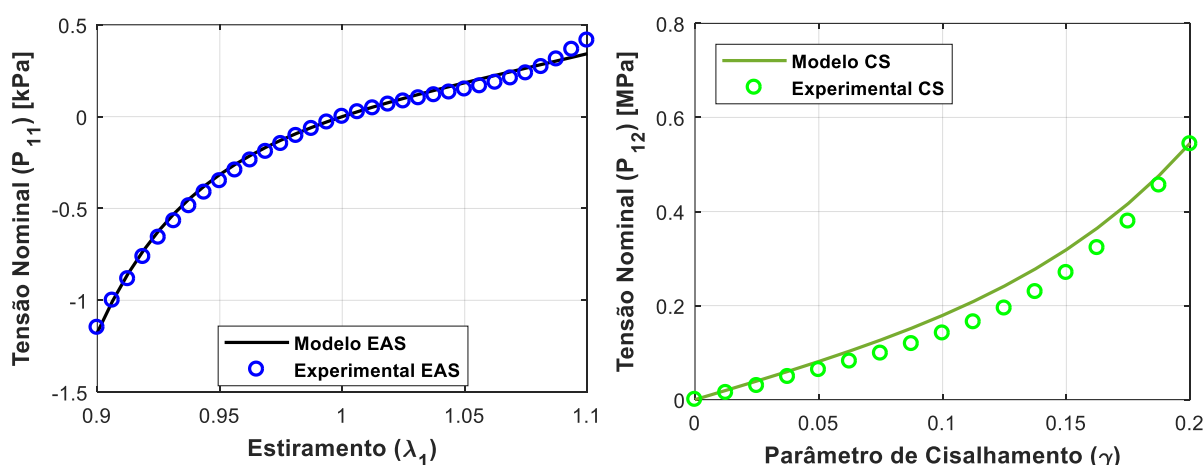


Figura 7.20: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – CórteX.

A partir dos resultados da calibração automatizada buscou-se, mediante uma busca empírica, melhorar a resposta global do modelo analítico por meio da variação dos parâmetros materiais. A Tabela 7.34 mostra os resultados alcançados pela Calibração Simultânea Manual Subjetiva, que gerou um $REQMN = 0.1904$, e a Figura 7.21 apresenta os gráficos dos dois modos calibrados.

Tabela 7.34: Calibração Simultânea Manual Subjetiva EAS e CS – CórteX.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	3.1
m	-1.9
n	11.5
ν	0.40

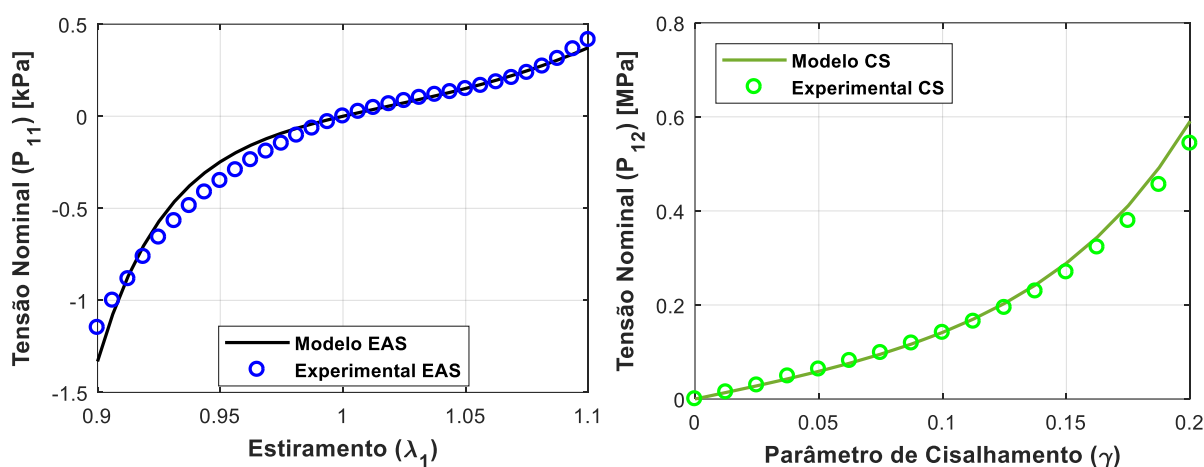


Figura 7.21: Calibração Simultânea Manual Subjetiva: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – CórteX.

7.1.4.3 Coroa Radiada

A partir dos dados experimentais dos testes conduzidos com a Coroa Radiada, é feita aqui a calibração do modelo tipo-Hookeano SHG com o objetivo de representar os dados experimentais. Começa-se pela Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CS, com os intervalos de busca aplicados na calibração sendo aqueles presentes na Tabela 7.28. Os valores calculados a partir da calibração automatizada estão dispostos na Tabela 7.35, tendo sido encontrado um $REQMN = 0.2021$. A Figura 7.22 mostra graficamente o resultado da calibração, apresentando um ótimo ajuste qualitativo das duas curvas. O modo CS apresenta um pior ajuste quantitativo do que o modo EAS, porém aparenta manter-se dentro do desvio padrão dos dados experimentais (Figura 7.18). Tentou-se aprimorar os resultados obtidos com a Calibração Simultânea Manual Subjetiva, mas nenhum ajuste tentado melhorou qualitativamente o resultado da calibração automatizada no caso da Coroa Radiada.

Tabela 7.35: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Coroa Radiada.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.3
m	-3.6
n	6.7
ν	0.4

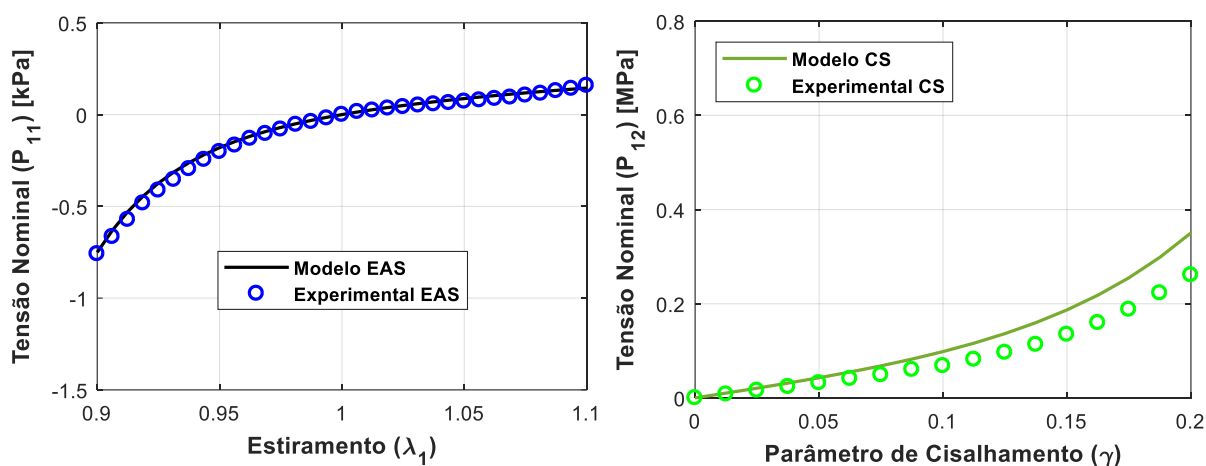


Figura 7.22: Calibração Simultânea EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS.
 Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Coroa Radiada.

7.1.4.4 Corpo Caloso

Aqui são examinados os dados experimentais do Corpo Caloso. Para a Calibração Simultânea Completa EAS e CS, novamente se utilizaram os intervalos de busca da Tabela 7.28, tendo encontrado os resultados apresentados pela Tabela 7.36. O valor de $REQMN = 0.2174$ juntamente com o gráfico da Figura 7.23 indicam que a calibração automatizada conseguiu alcançar um ajuste de curvas qualitativamente adequado, que consegue representar bem o comportamento do Corpo Caloso. Assim como para a Coroa Radiada, para o Corpo Caloso a Calibração Simultânea Manual Subjetiva não resultou em um melhor ajuste qualitativo de curvas.

Tabela 7.36: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CS – Corpo Caloso.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	1.2
m	-3.5
n	7.8
ν	0.4

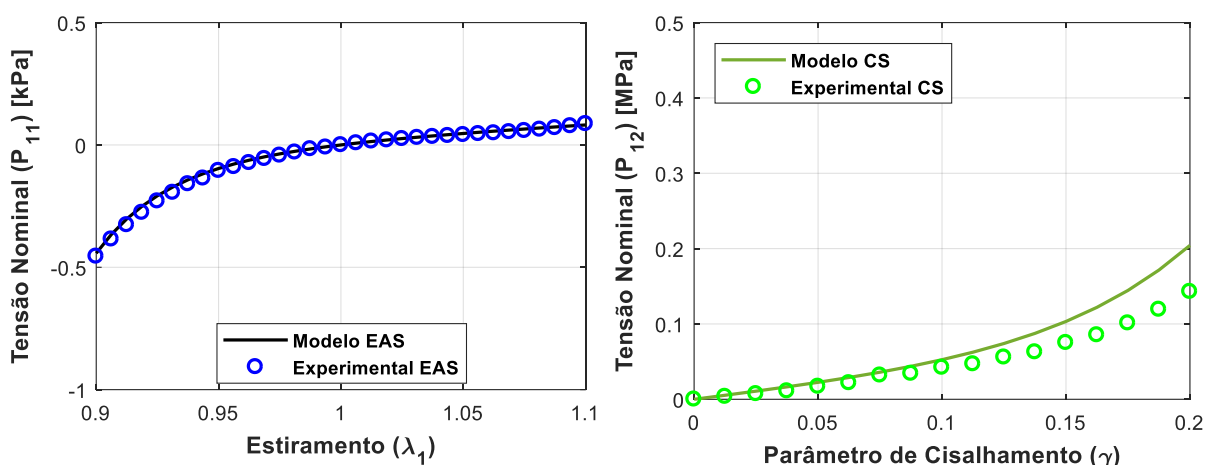


Figura 7.23: Calibração Simultânea Completa EAS e CS: esquerda) Modo EAS; direita) Modo CS. Fonte de Dados Experimentais: Budday et al. (2017) – Corpo Caloso.

7.1.5 Biomaterial de Silicone [Meier et al. (2003)]

Meier et al. (2003) investigam as respostas mecânicas de dois silicones utilizados no desenvolvimento de um Dispositivo Atuado por Peristaltismo para Cirurgia Minimamente Invasiva (*Peristaltically Actuated Device for Minimal Invasive Surgery – PADeMIS*). O objetivo dos autores era definir um modelo hiperelástico a ser implementado em um software de MEF para se construir um design otimizado. Meier et al. (2003) obtiveram resultados de experimentos realizados com MED-4930 e MED-4950, dois tipos de elastômero de silicone para moldagem por injeção líquida, em que os dois últimos algarismos indicam a dureza Shore. Meier et al. (2003) explicam que a carga usual aplicada ao PADeMIS durante a sua utilização gera uma deformação resultante correspondente, aproximadamente, a uma tensão equi-biaxial. Porém, os autores do artigo realizaram, além do teste do modo puro CE-B, o teste do modo puro EAS, e utilizaram um processo de calibração para ajustar simultaneamente as duas curvas ao modelo hiperelástico de Mooney-Rivlin de 6 termos. Aqui se utiliza a seguinte abordagem: é feita a Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B e em seguida a Calibração Simultânea Seletiva priorizando o ajuste do modo CE-B, diminuindo o nível de deformação representado do modo EAS (mediante seleção de dados) até que se tenha uma boa resposta. Para borrachas de silicone a pressuposição de comportamento incompressível é bastante razoável e apoiada por dados experimentais da literatura, portanto, utiliza-se aqui um Coeficiente de Poisson de $\nu = 0.49$.

7.1.5.1 MED-4930

Tendo o material MED-4930 como objeto de estudo, começou-se pela Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Os intervalos de busca são mostrados pela Tabela 7.37, enquanto a Tabela 7.38 e a Figura 7.24 mostram os resultados obtidos ($REQMN = 0.0966$).

Tabela 7.37: Intervalos de busca: EAS Individual, CS Individual e Calibração Simultânea EAS e CS – Gânglios de Base.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	3.0
m	-5	0.1	5
n	0.01	0.01	4.00

Tabela 7.38: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa EAS e CE-B – MED-4930.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.17
m	0.1
n	0.69

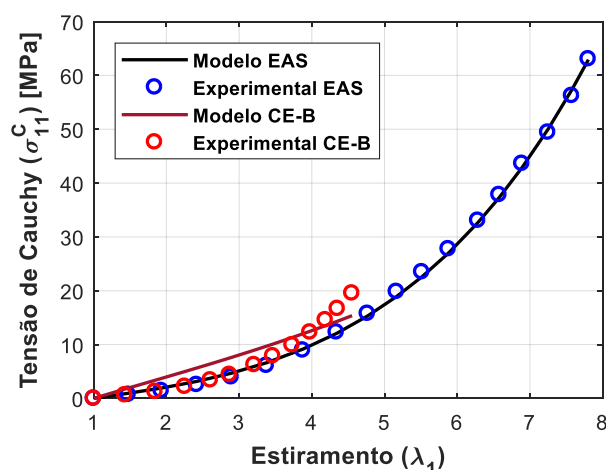


Figura 7.24: Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4930.

Os resultados mostram um valor baixo de $REQMN$, um ajuste muito bom para o modo EAS e a capacidade de representar razoavelmente o modo CE-B. Tendo em vista que Meier et al. (2003) afirmam que na utilização prática o PADeMIS é utilizado em uma situação que pode ser aproximada pelo modo CE-B, são feitos os seguintes ajustes no processo de calibração: são utilizados todos os dados experimentais do modo CE-B, para garantir um bom ajuste nesse modo, e varia-se a quantidade de dados experimentais do modo EAS até que se obtenha uma

resposta qualitativa boa para esse modo em um nível de deformação condizente com a aplicação prática do PADeMIS. Nesse processo utilizaram-se os mesmos intervalos de busca apresentados pela Tabela 7.37. A Tabela 7.39 e a Figura 7.25 mostram o resultado obtido com esse processo mais subjetivo, em que se fez uma seleção de dados a serem calibrados. Acredita-se que, considerando a aplicação prática do PADeMIS e o já relevante grau de deformações que se conseguiu contemplar para o modo EAS, mesmo com a seleção de dados, esse segundo ajuste de curvas é qualitativamente melhor. O valor de $REQMN$ encontrado com a seleção de dados caiu para 0.0622, mostrando uma maior exatidão.

Tabela 7.39: Valores definidos pela Calibração Simultânea Seletiva dos modos EAS e CE-B – MED-4930.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.63
m	0.2
n	0.98

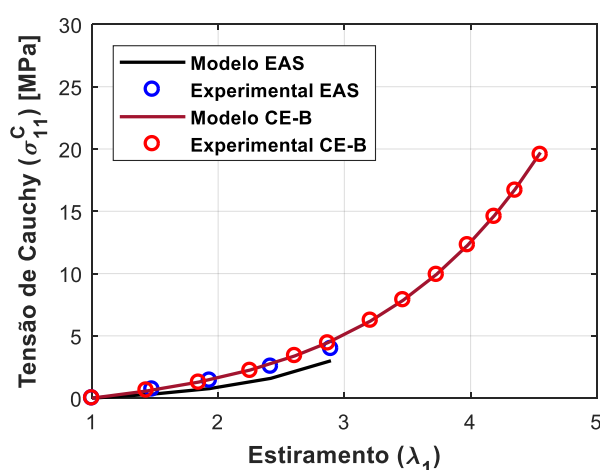


Figura 7.25: Calibração Simultânea Seletiva dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4930.

7.1.5.1 MED-4950

Seguindo o mesmo processo da subseção anterior, agora se faz a investigação do material MED-4950. Os intervalos de busca utilizados aqui foram os mesmos apresentados pela Tabela 7.37. Os resultados para a Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B são mostrados pelas Tabela 7.40 e Figura 7.26, tendo sido encontrado um valor de $REQMN = 0.1497$. Esse primeiro ajuste feito pela Calibração Simultânea Completa consegue representar razoavelmente

o comportamento global do material, mas apenas de maneira qualitativa. Nenhum dos modos puros é representado com grande exatidão quantitativa.

Tabela 7.40: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B – MED-4950.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.98
m	0.1
n	0.66

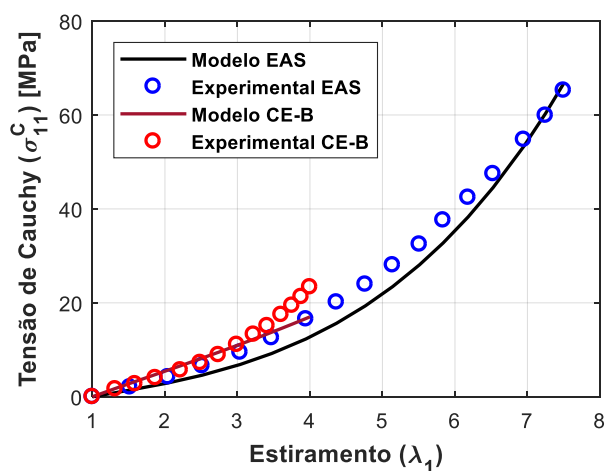


Figura 7.26: Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4950.

Seguindo o mesmo processo feito para o MED-4930, aqui para o MED-4950 foi feita uma segunda calibração com o objetivo de garantir um melhor ajuste para o modo CE-B, selecionando uma quantidade de dados do modo EAS que garantisse também a sua representação para um nível razoável de deformação. A Tabela 7.41 e a Figura 7.27 mostram os resultados obtidos com um valor de $REQMN = 0.0495$. Nessa calibração com seleção de dados experimentais fica garantida uma representação muito melhor do modo CE-B e, simultaneamente, uma boa representação do modo EAS até um nível de $\lambda_1 \approx 2.5$ de deformação.

Tabela 7.41: Valores definidos Pela da Calibração Simultânea Seletiva EAS e CE-B – MED-4950.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	2.01
m	0.1
n	1.25

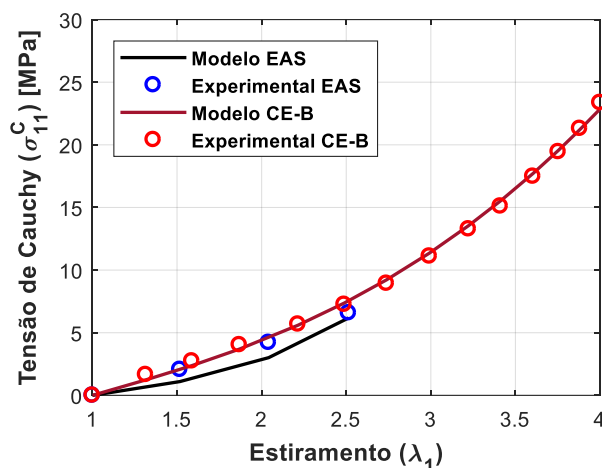


Figura 7.27: Calibração Simultânea Seletiva EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – MED-4950.

7.2 Elastômeros

Elastômeros são polímeros com comportamento majoritariamente elástico e que suportam grandes deformações, sendo amplamente utilizados em diversas áreas da engenharia: sistemas de vedação, amortecedores, pneus, ligação entre componentes e materiais adesivos (ALARIFI, 2023). Ressalta-se também que existem muitos biomateriais fabricados utilizando-se elastômeros, a exemplo do silicone, tendo esse tipo de material ampla aplicação na bioengenharia (LIQUN; RUI, 2015). Os trabalhos de He et al. (2022) e Ricker e Wriggers (2023) são bons exemplos de amplas revisões feitas sobre modelos hiperelásticos criados para representar elastômeros, ambos listando exclusivamente modelos que são gerados a partir de FDEs que são função de invariantes ou estiramentos dos tensores $[U]$ ou $[C]$. No entanto, também existem modelos tipo-Hookeanos que foram criados exatamente com a intenção de representar elastômeros, como o modelo tipo-Hookeano de Hencky e os modelos tipo-Hookeanos criados por Darijani e Naghdabadi (2013). Na presente subseção é investigada a capacidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG de representar alguns elastômeros que possuem dados experimentais de testes mecânicos disponíveis na literatura do tema.

7.2.1 Compostos de borracha sob tração [Ricker e Wriggers (2023)]

Ricker e Wriggers (2023) apresentaram dados experimentais de vários compostos de borracha comumente utilizados na indústria para testar a validade dos diversos modelos hiperelásticos

por eles revisados. Aqui são utilizados os dados experimentais de 3 dos compostos de borracha, todos eles que foram testados exclusivamente para o carregamento de tração (modo EAS): CR+P (Borracha de cloropreno + Peróxido), CR+S pré-carregado (Borracha de cloropreno + Enxofre (80%), Óxido de zinco e Ácido esteárico) e SBR+P (Estireno-butadieno + Peróxido). A Tabela 7.42 mostra os intervalos de busca utilizados na calibração dos três compostos de borracha. A Tabela 2.1 apresenta os valores dos parâmetros materiais calculados a partir da calibração e as Figura 7.28, Figura 7.29 e Figura 7.30 mostram os resultados gráficos dos ajustes de curva realizados.

Tabela 7.42: Intervalos de busca: Calibração EAS tração – CR+P, CR+S e SBR+P.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	4.00
m	-2	0.1	2
n	0.01	0.01	5.00

Tabela 7.43: Valores definidos pela Calibração Individual EAS tração – CR+P, CR+S e SBR+P.

	Parâmetro	Resultado
CR+P	E [MPa]	2.04
	m	0.1
	n	1.02
CR+S	E [MPa]	0.81
	m	0.9
	n	0.35
SBR+P	E [MPa]	1.34
	m	-0.4
	n	2.54

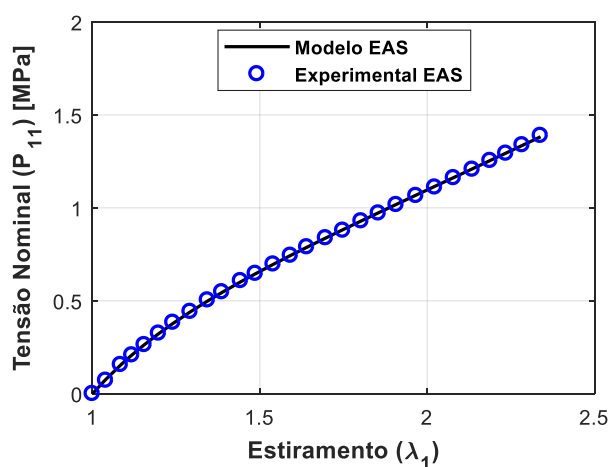


Figura 7.28: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Ricker e Wriggers (2023) – CR+P.

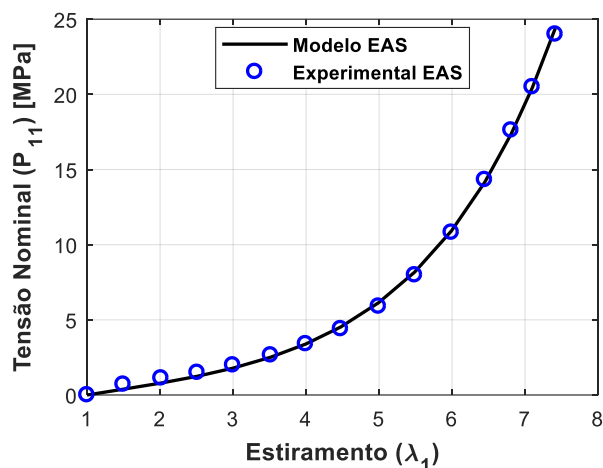


Figura 7.29: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Ricker e Wriggers (2023) – CR+S (preloaded).

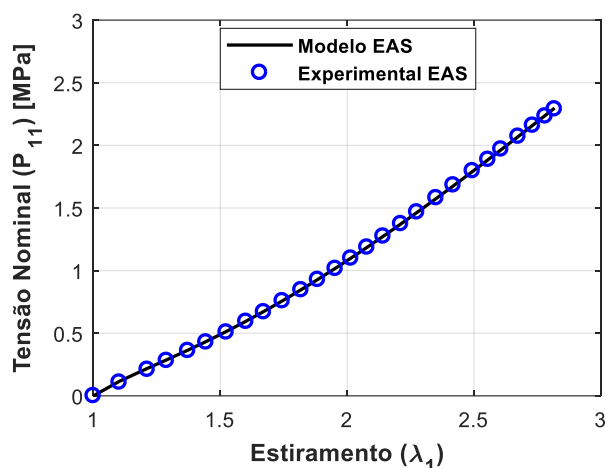


Figura 7.30: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Ricker e Wriggers (2023) – SBR+P.

Os gráficos mostram ajustes de curvas com alto grau de exatidão para os materiais estudados, tendo sido encontrados os valores de $REQMN = 0.004$ para o CR+P, $REQMN = 0.0279$ para o CR+S e $REQMN = 0.004$ para o SBR+P, todos condizentes com calibrações que geram valores muito pequenos de resíduos.

7.2.2 Borrachas sob tração & compressão [Lulei e Miehe (2001); Yeoh e Fleming (1997)]

Aqui são analisados os dados experimentais de elastômeros submetidos a compressão e tração (modo EAS completo). Duas borrachas são examinadas: a primeira trata-se de uma borracha

vulcanizada estudada por Yeoh e Fleming (1997) e a segunda é uma borracha preenchida com negro de fumo b186 (*carbon black-filled rubber b186*) testada por Lulei e Miehe (2001).

Tabela 7.44: Intervalos de busca: Calibração EAS tração & compressão – b186 e borracha vulcanizada.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	10.00
m	-2	0.1	2
n	0.01	0.01	10.00

Tabela 7.45: Valores definidos pela Calibração Individual EAS, tração & compressão – b186 e borracha vulcanizada.

	Parâmetro	Resultado
Yeoh & Fleming	E [MPa]	1.48
	m	0.3
	n	0.71
Lulei & Miehe	E [MPa]	4.63
	m	0.1
	n	1.12

Encontrou-se valores de $REQMN = 0.0280$ e $REQMN = 0.0635$ para a borracha vulcanizada e a borracha b186, respectivamente, ambos evidenciando ajustes muito bons.

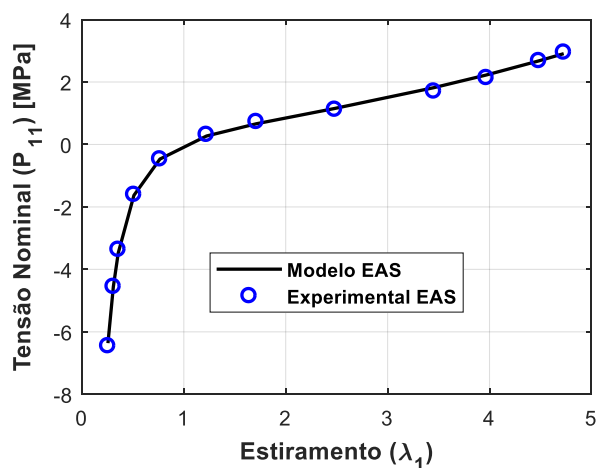


Figura 7.31: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Yeoh e Fleming (1997) – borracha vulcanizada.

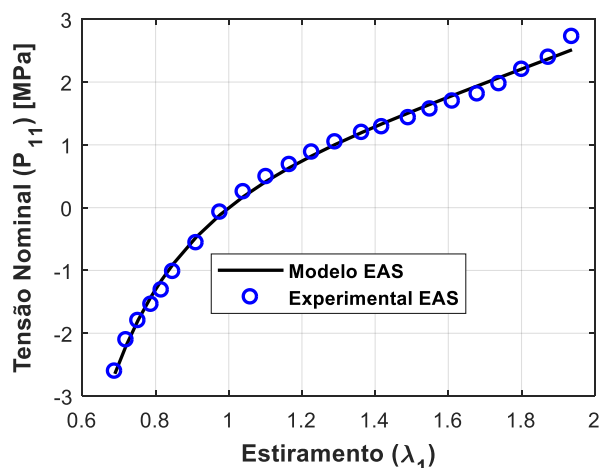


Figura 7.32: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Lulei e Miehe (2001) – borracha preenchida com negro de fumo b186.

7.2.3 Borracha Sintética – Neoprene

Alexander (1968) conduziu testes experimentais com membrana de borracha sintética de neoprene com o objetivo de caracterizar esses materiais, tendo como principal interesse a sua aplicação em balões de grandes altitudes. Para esse uso prático a borracha de neoprene trabalha com cargas que são aproximadamente equi-biaxiais, então, além do modo EAS, foi feito o teste que representa o modo CE-B. Faz-se aqui a Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B, utilizando um Coeficiente de Poisson referente a um material quase-incompressível ($\nu = 0.49$) e os intervalos de busca mostrados pela Tabela 7.46.

Tabela 7.46: Intervalos de busca: Calibração Simultânea EAS e CE-B – Borracha Sintética de Neoprene.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	6.00
m	-2	0.1	2
n	0.01	0.01	4.00

Tabela 7.47: Valores definidos pela Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B – Borracha Sintética de Neoprene.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.5
m	1.5
n	0.03

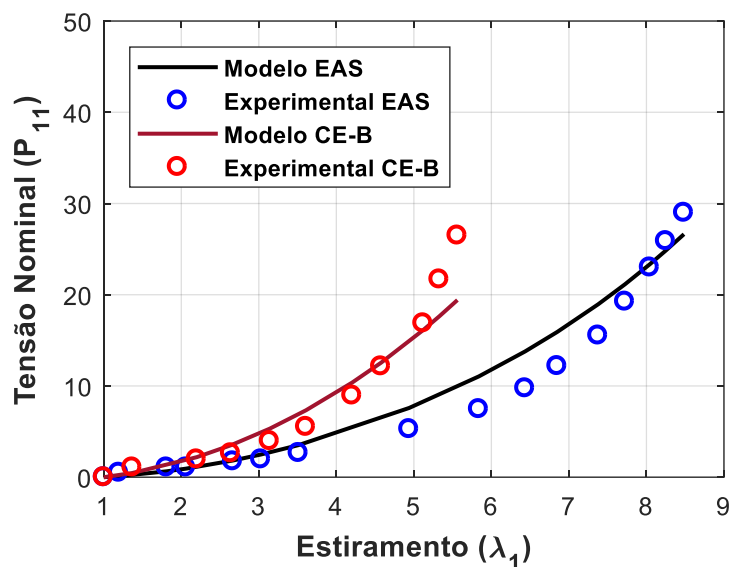


Figura 7.33: Calibração Simultânea Completa dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – Alexander (1968).

Os valores finais encontrados pela calibração simultânea dos modos EAS e CE-B para os parâmetros materiais são mostrados pela Tabela 7.47. A Figura 7.33 mostra graficamente o ajuste obtido pela calibração que gerou um valor de $REQMN = 0.2449$, resultado que mostra que, apesar de ser uma representação qualitativamente razoável, não há muita exatidão na descrição dos dados experimentais pelo modelo analítico. Como a utilização do material é para um fim bem definido – balões de grandes altitudes – e sabendo que o modo CE-B é mais importante para essa aplicação, fez-se a opção por representar esse modo de maneira mais exata e desconsiderar os dados experimentais do modo EAS acima de $\lambda \approx 3.5$. Com isso, foi aplicada uma Calibração Simultânea Seletiva e chegou-se a novos resultados que são apresentados pela Tabela 7.48 e Figura 7.34, tendo-se atingido um valor de $REQMN = 0.0784$. Considerando a aplicação do material e o elevado nível de deformação que essa nova calibração consegue representar de maneira eficiente, acredita-se que as escolhas feitas são razoáveis e condizentes.

Tabela 7.48: Valores definidos através da Calibração Simultânea Seletiva dos modos EAS e CE-B – Borracha Sintética de Neoprene.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.46
m	1.2
n	0.27

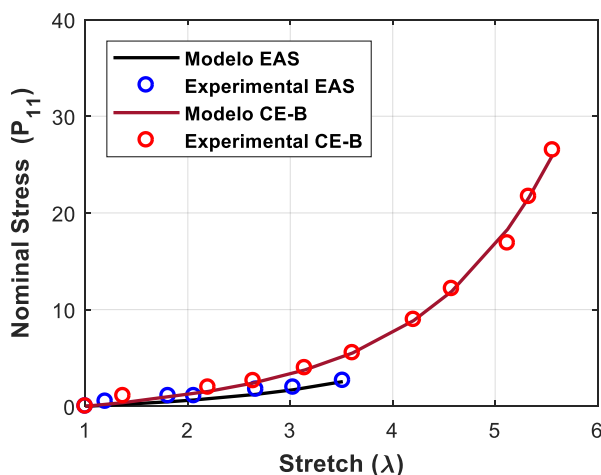


Figura 7.34: Calibração Simultânea com seleção de dados experimentais dos modos EAS e CE-B. Fonte de Dados Experimentais: Meier et al. (2003) – Alexander (1968).

7.3 Espumas

Espumas poliméricas são materiais leves e porosos, compostos principalmente por uma matriz polimérica entremeada por células de gás. Esses materiais se destacam por propriedades como: baixa densidade, bom isolamento térmico e acústico, e alta capacidade de absorção de impacto. Espumas são utilizadas em uma ampla gama de aplicações na indústria/engenharia, dentre as quais pode-se citar: estruturas leves na indústria naval, aeroespacial e automotiva; proteção (coletes salva-vidas e capacetes); segurança passiva na embalagem de materiais frágeis; dispositivos flutuantes aquáticos; embalagem; juntas/ligações; e utilizações voltadas para o conforto, como almofadas e camas.

Aqui são examinados os dados experimentais de testes mecânicos de algumas espumas para que se analise a capacidade de, ao se escolher a hiperelasticidade para modelar espumas, utilizarem-se os modelos tipo-Hookeanos SHG na representação desses materiais. Uma característica relevante das espumas é o seu alto grau de compressibilidade, o que faz com que a utilização de modelos tipo-Hookeanos seja muito apropriada pela sua capacidade de representar esse comportamento de maneira simples.

7.3.1 Espuma Comercial e Espuma de Assento [El-Ratal e Mallick (1996)]

El-Ratal e Mallick (1996) realizam ensaios experimentais de tração (modo EAS) em dois tipos de espumas de poliuretano, a primeira espuma é de uso comercial geral, como almofadas de móveis, isoladores e amortecedores de ruído (Espuma Comercial) e a segunda espuma é utilizada em assentos automotivos para amortecimento (Espuma de Assento). El-Ratal e Mallick (1996) examinam também o Coeficiente de Poisson desses materiais, mostrando que os valores variam bastante com o nível de deformação. Aqui são utilizados valores constantes, que foram escolhidos tendo como referência valores aproximados dos encontrados para pequenas deformações no trabalho de referência: $\nu = 0.35$ para Espuma Comercial e $\nu = 0.25$ para a Espuma de Assento.

Tabela 7.49: Intervalos de busca – Espuma Comercial e Espuma de Assento.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.1	0.1	50
m	-2	0.1	5
n	0.1	0.1	20

Tabela 7.50: Valores definidos através da Calibração Individual EAS – Espuma de Assento.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	15.8
m	2.5
n	1.9

Tabela 7.51: Valores definidos através da Calibração Individual EAS – Espuma Comercial.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	29.7
m	-1
n	7.1

As Tabela 7.51 e Tabela 7.52 mostram os valores encontrados para os parâmetros materiais através da Calibração Individual EAS, tendo sido encontrados valores de $REQMN = 0.0362$ para a Espuma de Assento e $REQMN = 0.0258$ para a Espuma Comercial. Esses valores de $REQMN$ juntamente com os gráficos das Figura 7.35 e Figura 7.36 evidenciam que se obtiveram ajustes de curvas muito bons.

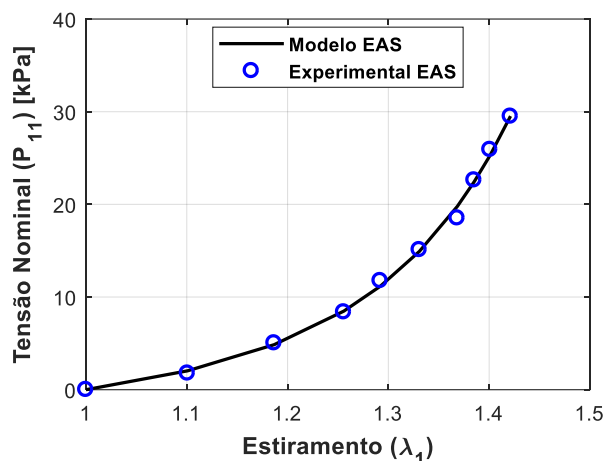


Figura 7.35: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: El-Ratal e Mallick (1996) – Espuma de Assento.

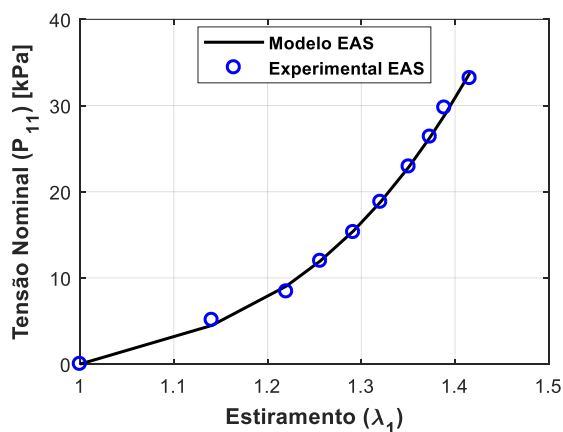


Figura 7.36: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: El-Ratal e Mallick (1996) – Espuma Comercial.

7.3.2 Espuma de Silicone [Shao et al. (2022)]

Shao et al. (2022) estudaram o variação do comportamento mecânico da espuma de silicone com o passar do tempo. Aqui são analisados os resultados experimentais obtidos por Shao et al. (2022) para o teste do modo EAS na compressão para amostras novas e amostras de 8 dias, utilizando, assim como os autores do trabalho de referência, um valor de Coeficiente de Poisson de $\nu = 0.05$. A Tabela 7.52 apresenta os intervalos de busca, enquanto as Tabela 7.53 e Tabela 7.54 mostram os valores definidos pela Calibração Individual EAS para a Espuma Nova ($REQMN = 0.0300$) e para a Espuma de 8 dias ($REQMN = 0.0337$). As Figura 7.37 e Figura 7.38 mostram os gráficos com os dados experimentais e os modelos analíticos calibrados.

Tabela 7.52: Intervalos de busca – Espuma Nova e Espuma de 8 dias.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	2.00
m	-2.0	0.1	2.0
n	0.01	0.01	5.00

Tabela 7.53: Valores definidos através da Calibração Individual EAS – Espuma Nova.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.81
m	0.8
n	1.55

Tabela 7.54: Valores calibrados dos parâmetros materiais – Espuma de 8 dias.

Parâmetro	Resultado
E [MPa]	0.55
m	0.6
n	1.50

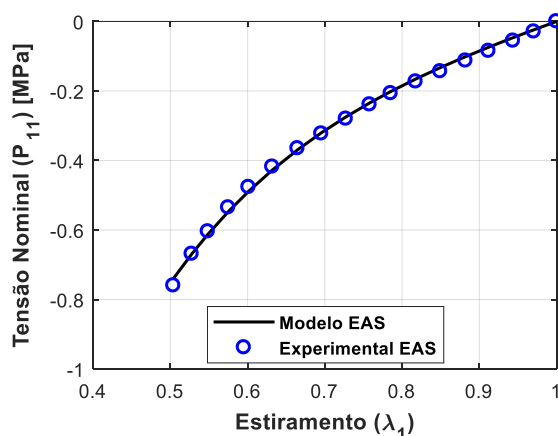


Figura 7.37: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Shao et al. (2022) – Espuma de Silicone Nova.

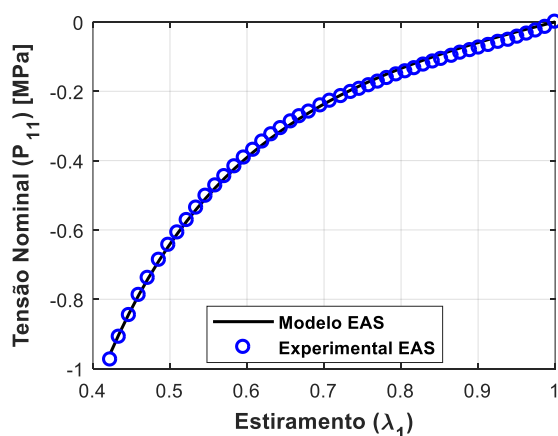


Figura 7.38: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Shao et al. (2022) – Espuma de Silicone 8 dias.

7.3.3 Espuma de EPDM com diferentes densidades [Wang et al. (2007)]

Wang et al. (2007) investigaram o comportamento mecânico de espumas de terpolímero de etileno-propileno-dieno, mais conhecido como EPDM (*ethylene-propylene-diene terpolymer*), quando submetidas à compressão (EAS). O estudo foi projetado para se encontrar correlações entre a variação da densidade e a resposta mecânica da espuma, por isso foram testadas 5 amostras: E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido. A Tabela 7.55 mostra as densidades relativas de cada amostra, tendo como referência o EPDM sólido ($\rho_s = 1.04 \text{ [g/cm}^3\text{]}$).

Tabela 7.55: Densidade relativa das amostras de espuma EPDM.

Espuma	Densidade Relativa
E1	0.11
E2	0.20
ED3	0.51
ED4	0.62
EDPM Sólido	1.00

Tabela 7.56: Intervalos de busca: Calibração EAS compressão – E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido.

Parâmetro	Valor Inicial	Incremento	Valor Final
E [MPa]	0.01	0.01	6.00
m	-2	0.1	2
n	0.01	0.01	6.00

Tabela 7.57: Valores definidos através da Calibração EAS compressão – E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido.

	Parâmetro	Resultado
E1	E [MPa]	0.05
	m	0.1
	n	0.47
E2	E [MPa]	0.08
	m	-0.1
	n	0.36
ED3	E [MPa]	0.38
	m	0.2
	n	1.09
ED4	E [MPa]	1.06
	m	0.3
	n	1.42
EDPM Sólido	E [MPa]	5.08
	m	0.5
	n	0.40

Para calibrar os resultados obtidos experimentalmente com o modelo tipo-Hookeano SHG usou-se o mesmo intervalo de busca para as 5 amostras (Tabela 7.56), encontrando os resultados presentes na Tabela 7.57. A Figura 7.39 apresenta os resultados calculados para os 5 materiais de maneira condensada em um só gráfico. Os valores de $REQMN$ encontrados para E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido foram 0.0243, 0.0298, 0.0515, 0.0395 e 0.0066, respectivamente, indicando valores dos modelos analíticos muito próximos dos dados experimentais.

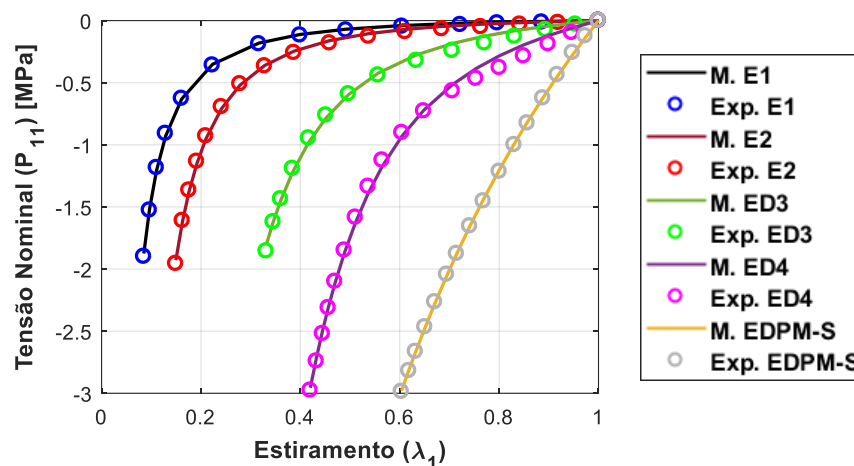


Figura 7.39: Modo EAS calibrado. Fonte de Dados Experimentais: Wang et al. (2007) – E1, E2, ED3, ED4 e EPDM sólido.

7.4 Discussões sobre a aplicabilidade das medidas SHG

A investigação da aplicabilidade de modelos tipo-Hookeanos SHG em uma ampla variedade de materiais, incluindo tecidos biológicos, biomateriais e polímeros, revelou *insights* significativos sobre o potencial e as limitações destes modelos. Os resultados das calibrações foram particularmente promissores, com valores de $REQMN$ indicando uma alta exatidão em múltiplas calibrações. Isso evidencia a eficácia dos modelos SHG em capturar com acuidade, dentro de uma abordagem fenomenológica, as respostas mecânicas dos materiais estudados.

Embora a calibração simultânea de modos puros represente um desafio significativo para a aplicação de modelos hiperelásticos mais simples, como é o caso dos modelos tipo-Hookeanos SHG, que possuem um número reduzido de parâmetros materiais, os resultados obtidos demonstram que os modelos SHG conseguem representar o comportamento qualitativo global dos materiais estudados. Esta capacidade torna-se ainda mais relevante quando se considera

que os modelos SHG conseguem representar a compressibilidade de forma simplificada, já que a pressuposição de incompressibilidade para materiais como tecidos biológicos moles e espumas não condiz com resultados experimentais. Isso constitui uma vantagem considerável, contribuindo para aplicabilidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG em um espectro mais amplo de materiais.

Vale ressaltar ainda que o significado físico claro de todos os parâmetros materiais nos modelos SHG facilita o processo de calibração, permitindo ajustes qualitativos manuais e assegurando que as modificações estejam fundamentadas em uma compreensão física sólida. Esta característica também ajuda a evitar o aparecimento de respostas não físicas e proporciona um maior controle para quem executa as calibrações.

Considerando a simplicidade dos modelos SHG, que são essencialmente uma generalização da Lei de Hooke para deformações finitas, a vasta gama de materiais que puderam ser por eles descritos é relevante. Essa capacidade abrangente indica um potencial promissor dos modelos SHG para futuras aplicações em pesquisa e desenvolvimento de materiais.

8. CONCLUSÕES

Medidas de Deformação: esse é o tema principal deste trabalho, que permeou todas as seções/subseções, do início ao fim. As discussões, investigações analíticas e experimentos computacionais realizados visaram contribuir para um maior entendimento do tema, que apesar de se fazer presente em todas as áreas da engenharia estrutural, mesmo que algumas vezes passe despercebido, ainda possui lacunas a serem preenchidas e questões a serem respondidas. Em especial, buscou-se esclarecer a importância das medidas de deformação, principalmente no regime de grandes deformações, ressaltando as motivações existentes por trás da escolha de uma determinada medida de deformação em detrimento de outras.

Nas primeiras seções da tese, identificaram-se e organizaram-se de maneira resumida as justificativas que levam à escolha de uma determinada medida de deformação: adequação física, conveniência (complexidade) matemática e custo computacional. Discussões e exemplificação de situações em que cada uma dessas motivações é utilizada foram feitas. Fez-se uma revisão bibliográfica/histórica de todas as medidas e famílias de medidas de deformação existentes na literatura do tema, tentando conectar a motivação da criação de cada uma e as suas aplicações com as justificativas previamente identificadas. Todas as medidas de deformação (e tensão) que foram usadas nos estudos das seções posteriores da tese foram definidas matematicamente nas suas versões uniaxial (1D) e multiaxial (3D), inclusive a nova família de medidas de deformação apresentada aqui de maneira original: família Seno-Hiperbólica Generalizada (SHG) de medidas de deformação.

Na revisão bibliográfica da Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF), exemplificou-se a importância da escolha do par tensão/deformação no desenvolvimento algébrico de formulações geometricamente não lineares de MEF. Por meio da definição das diferentes formulações da FPMEF de treliças para todas as medidas de deformação estudadas, ficou claro que diferentes expressões são encontradas para variáveis de interesse do método numérico para diferentes medidas de deformação, além de que diferentes níveis de complexidade matemática estão presentes nesses diferentes desenvolvimentos algébricos.

Em uma seção dedicada exclusivamente ao estudo da aplicação da FPMEF de treliças na análise de estruturas unidimensionais utilizando-se diferentes medidas de deformação, investigaram-se

primeiramente as consequências de se utilizar diferentes modelos tipo-Hookeanos na análise de estruturas de referência (*benchmarks*) da literatura. A partir do exame das diferentes trajetórias de equilíbrio obtidas, concluiu-se que para médias e grandes deformações existem grandes divergências de comportamento das estruturas estudadas, ficando um alerta de que fora do regime de pequenas deformações e de uma análise geometricamente linear, mesmo que se aplique correções relacionadas à não linearidade física, a escolha da medida de deformação é relevante. Segundamente, investigaram-se as consequências do uso das diferentes formulações, originadas da utilização de diferentes pares de tensão-deformação, no custo computacional de análise de treliças de referência. Além disso, por meio do uso do mesmo modelo tipo-Hookeano representado por diferentes formulações, buscou-se isolar os fatores que levam ao aumento do custo computacional das análises. Os resultados mostraram que o uso de diferentes formulações, de diferentes modelos tipo-Hookeanos e de diferentes combinações entre esses dois influenciam no custo computacional de análises. Obtiveram-se indícios que a formulação (originada de um par de tensão-deformação) escolhida tem um peso maior do que o modelo tipo-Hookeano.

Um estudo analítico de sólidos foi realizado utilizando três modos puros de deformação: Extensão Axial Simples (EAS), Carregamento Equi-Biaxial (CE-B) e Cisalhamento Simples (CS). Fórmulas analíticas originais capazes de fornecer respostas de qualquer medida de deformação foram desenvolvidas e apresentadas. Investigaram-se os limites de coerência física de modelos tipo-Hookeanos das medidas de deformação da família Seth-Hill e das medidas da família SHG, mostrando que a segunda fornece maior versatilidade e consegue manter a coerência física por intervalos de deformação maiores, de maneira mais previsível e com maior controle (através da variação do parâmetro material n). Nesse estudo analítico contemplaram-se materiais quase-incompressíveis, compressíveis e auxéticos, examinando a coerência física dos modelos tipo-Hookeanos para variados valores do Coeficiente de Poisson, ou seja, para um variado grau de compressibilidade. Os modelos SHG mostraram uma capacidade de representar grandes deformações que se manteve constante com a variação do Coeficiente de Poisson, o que é muito relevante, pois muitos materiais reais apresentam compressibilidade variável à medida que se aumenta o nível de deformação.

Por fim, testou-se a capacidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG para descrever o comportamento mecânico de diversos materiais reais: tecidos biológicos moles, biomateriais e polímeros (elastômeros e espumas). Por meio de um processo de ajuste de curvas entre modelo

analítico x dados experimentais que usou um método de calibração automatizado, baseado na minoração do somatório de resíduos quadrados, juntamente com ajustes manuais que priorizavam aspectos qualitativos/subjetivos, comprovou-se a aplicabilidade dos modelos tipo-Hookeanos SHG. Além da versatilidade comprovada devido à representação de variados materiais hiperelásticos reais, alguns aspectos relevantes valem ser destacados na performance dos modelos tipo-Hookeanos SHG: capacidade de representação de materiais compressíveis de maneira simples e existência de poucos parâmetros materiais, todos com claros significados físico.

8.1 Sugestões para trabalhos futuros

- Derivar as expressões da Matriz de Rigidez Tangente e da Força Interna para o MEF Convencional utilizando todos os pares de tensão-deformação das medidas de Seth-Hill. Fazer um estudo de custo computacional dessas diferentes formulações também para o MEFC e, posteriormente, fazer uma comparação abrangente com a FPMEF.
- Com as diferentes fórmulas das variáveis de interesse de MEF (MEFC ou FPMEF), investigar quais as diferenças, conceituais/teóricas e numéricas, são geradas a partir da aplicação de correções advindas da não linearidade física;
- O método de calibração dos parâmetros utilizado nesta tese para fazer o ajuste de curvas entre dados experimentais e o modelo analítico tipo-Hookeano SHG possui grandes limitações, pois possui elevado custo computacional. Sugere-se aplicar métodos de otimização mais eficientes, de maneira a permitir buscas mais completas, ou seja, usar intervalos de busca mais abrangentes;
- Automatizar também as considerações subjetivas e qualitativas da calibração de parâmetros materiais. Para tal, parece apropriado o uso de técnicas de Inteligência Artificial de forma a reconhecer padrões nos dados experimentais que permitam direcionar a modelagem analítica para parâmetros mais condizentes com o objetivo de representação qualitativa dos materiais, evitando ajustes que sejam puramente quantitativos;

- Investigar o uso de outras famílias de medidas de deformação (além da família Seth-Hill aqui abordada) como argumento da função seno hiperbólica normalizada que caracteriza a família SHG. Inclusive, várias famílias citadas na revisão bibliográfica desta tese podem ser utilizadas.
- Para materiais hiperelásticos que possuem o gráfico de Coeficiente de Poisson \times Estiramento obtido de testes experimentais, como no trabalho sobre espumas de El-Ratal e Mallick (1996), representar analiticamente essa variação de compressibilidade dentro do modelo tipo-Hookeano;
- Implementar na FPMEF para sólidos os modelos tipo-Hookeanos SHG e simular os modos puros de deformação EAS, CE-B e CS;
- Investigar as adaptações necessárias para se utilizar modelos tipo-Hookeanos na representação do comportamento anisotrópico de alguns materiais hiperelásticos;
- Averiguar a coerência teórica do uso de valores de Coeficiente de Poisson acima de 0.5 nos modelos hiperelásticos tipo-Hookeanos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADELI, H. **Advances in Design Optimization**. 1. ed. United Kingdom: H. Adeli, 1994.
- AGUIAR, A. R.; FOSDICK, R. L. A singular problem in incompressible nonlinear elastostatics. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 10, n. 08, p. 1181–1207, nov. 2000.
- ALARIFI, I. M. A comprehensive review on advancements of elastomers for engineering applications. **Advanced Industrial and Engineering Polymer Research**, Biodegradable Polymers for Engineering Applications. v. 6, n. 4, p. 451–464, 1 out. 2023.
- ALEXANDER, H. A constitutive relation for rubber-like materials. **International Journal of Engineering Science**, v. 6, n. 9, p. 549–563, 1 set. 1968.
- ALMANSI, E. Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi. **Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei: Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali**, v. 20, p. 705–714, 1911.
- ALVES, L. M.; MARTINS, P. A. F. Understanding Invert Forming of Thin-Walled Polyvinyl Chloride Tubes Using a Die Based on a Mechanical Flow Formulation. **Materials and Manufacturing Processes**, v. 24, n. 12, p. 1398–1404, 21 dez. 2009.
- ARGATOV, I. I.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J. On local indentation and impact compliance of isotropic auxetic materials from the continuum mechanics viewpoint. **International Journal of Engineering Science**, v. 54, p. 42–57, 1 maio 2012.
- ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 41, n. 2, p. 389–412, 1 fev. 1993.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. [s.l.] Klaus-Jürgen Bathe, 2014.
- BATRA, R. C. Linear Constitutive Relations in Isotropic Finite Elasticity. **Journal of Elasticity**, v. 51, n. 3, p. 243–245, 1 jun. 1998.
- BATRA, R. C. Comparison of results from four linear constitutive relations in isotropic finite elasticity. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Millard Beatty: 70th Anniversary issue. v. 36, n. 3, p. 421–432, 1 maio 2001.
- BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories**. [s.l.] World Scientific Publishing Co., 2010.
- BECHO, J. S. **Método dos Elementos Finitos Posicional em análise viscoelástica: Elementos de pórtico com cinemática de Reissner**. Belo Horizonte - MG: Universidade Federal de Minas Gerais, nov. 2020.
- BECKER, G. F. The finite elastic stress-strain function. v. 46, p. 337–356, 1893.

BEEEX, L. A. A. Fusing the Seth–Hill strain tensors to fit compressible elastic material responses in the nonlinear regime. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 163, p. 105072, 1 nov. 2019.

BELYTSCHKO, T. et al. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. 2. ed. Chichester - United Kingdom: [s.n.].

BENNION, N. J. et al. In vivo measurement of human brain material properties under quasi-static loading. **Journal of The Royal Society Interface**, v. 19, n. 197, p. 20220557, 14 dez. 2022.

BIOT, P. M. A. XLIII. Non-linear Theory of Elasticity and the linearized case for a body under initial stress. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, 1 abr. 1939.

BÖL, M. et al. Tissue-scale anisotropy and compressibility of tendon in semi-confined compression tests. **Journal of Biomechanics**, v. 48, n. 6, p. 1092–1098, 13 abr. 2015.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579–595, 10 nov. 2000.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

BORST, R. DE et al. **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2012.

BRANDT, D. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. Transient analysis of trusses considering nonlinear elastic and viscoelastic material models. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 21, p. e521, 22 jan. 2024.

BRIGHENTI, R. Smart behaviour of layered plates through the use of auxetic materials. **Thin-Walled Structures**, v. 84, p. 432–442, 1 nov. 2014.

BUDDAY, S. et al. Mechanical characterization of human brain tissue. **Acta Biomaterialia**, v. 48, p. 319–340, 15 jan. 2017.

BUDDAY, S. et al. Towards microstructure-informed material models for human brain tissue. **Acta Biomaterialia**, v. 104, p. 53–65, 1 mar. 2020a.

BUDDAY, S. et al. Fifty Shades of Brain: A Review on the Mechanical Testing and Modeling of Brain Tissue. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 27, n. 4, p. 1187–1230, 1 set. 2020b.

CAI, J.; FENG, J.; XU, Y. Effects of Elastic Supports on the Snap-through Buckling of Mises Trusses. **Mechanics of Solids**, v. 54, n. 3, p. 486–490, maio 2019.

CAO, J. et al. Large elastic deformations of soft solids up to failure: new hyperelastic models with error estimation. **Acta Mechanica**, v. 228, n. 3, p. 1165–1175, 1 mar. 2017.

CAPRILES, P. V. S. Z. et al. Rank-based ant colony algorithms for truss weight minimization with discrete variables. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 6, p. 553–575, 2007.

CARNEIRO, V. H.; MEIRELES, J.; PUGA, H. Auxetic materials — A review. **Materials Science-Poland**, v. 31, n. 4, p. 561–571, 1 out. 2013.

CHAGNON, G.; REBOUAH, M.; FAVIER, D. Hyperelastic Energy Densities for Soft Biological Tissues: A Review. **Journal of Elasticity**, v. 120, n. 2, p. 129–160, 1 ago. 2015a.

CHAGNON, G.; REBOUAH, M.; FAVIER, D. Hyperelastic Energy Densities for Soft Biological Tissues: A Review. **Journal of Elasticity**, v. 120, n. 2, p. 129–160, 1 ago. 2015b.

CHAVES, E. W. V. **Notes on Continuum Mechanics**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2013.

CHEKKAL, I. et al. Vibro-Acoustic Properties of Auxetic Open Cell Foam: Model and Experimental Results. **Acta Acustica united with Acustica**, v. 96, n. 2, p. 266–274, 1 mar. 2010.

CHISKIS, A.; PARNES, R. Linear stress-strain relations in nonlinear elasticity. **Acta Mechanica**, v. 146, n. 1, p. 109–113, 1 mar. 2001.

CHOI, J. B.; LAKES, R. S. Non-linear properties of metallic cellular materials with a negative Poisson's ratio. **Journal of Materials Science**, v. 27, n. 19, p. 5375–5381, 1 out. 1992.

CHOI, J. B.; LAKES, R. S. Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio: experiment and analysis. **International Journal of Fracture**, v. 80, n. 1, p. 73–83, 1 mar. 1996.

CHOONG, K. K.; HANGAI, Y. Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures. **Journal- International Association for Shell and Spatial Structures**, 1993.

CHOONG, K. K.; HANGAI, Y.; KWUN, T. J. A PATH-SWITCHING STRATEGY BY COMBINING THE USE OF GENERALIZED INVERSE AND LINE SEARCH. **Proceedings of the Computational Structural Engineering Institute Conference**, p. 95–102, 1994.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos - Brasil: [s.n.].

COENEN, V. L.; ALDERSON, K. L. Mechanisms of failure in the static indentation resistance of auxetic carbon fibre laminates. **physica status solidi (b)**, v. 248, n. 1, p. 66–72, 2011.

CRESPO, J.; MONTÁNS, F. J. A continuum approach for the large strain finite element analysis of auxetic materials. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 135, p. 441–457, 1 jan. 2018.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Essentials: Volume 1**. Volume 1 edição ed. Chichester: Wiley-Blackwell, 1996.

CURNIER, A.; RAKOTOMANANA, L. Generalized Strain and Stress Measures: Critical Survey and New Results. **Engineering Transactions**, v. 39, n. 3–4, p. 461–538, 31 dez. 1991.

CURNIER, A.; ZYSSET, PH. A family of metric strains and conjugate stresses, prolonging usual material laws from small to large transformations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 10, p. 3057–3086, 1 maio 2006.

DARIJANI, H.; NAGHDABADI, R. Kinematics and kinetics modeling of thermoelastic continua based on the multiplicative decomposition of the deformation gradient. **International Journal of Engineering Science**, v. 62, p. 56–69, 1 jan. 2013.

DARIJANI, H.; NAGHDABADI, R.; KARGARNOVIN, M. H. Hyperelastic materials modelling using a strain measure consistent with the strain energy postulates. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 224, n. 3, p. 591–602, 1 mar. 2010.

DE ROOIJ, R.; KUHL, E. Constitutive Modeling of Brain Tissue: Current Perspectives. **Applied Mechanics Reviews**, v. 68, n. 010801, 18 jan. 2016.

DONOGHUE, J. P.; ALDERSON, K. L.; EVANS, K. E. The fracture toughness of composite laminates with a negative Poisson's ratio. **physica status solidi (b)**, v. 246, n. 9, p. 2011–2017, 2009.

DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials**. 4th Revised ed. edição ed. Boston: Prentice Hall, 2012.

DOYLE, T. C.; ERICKSEN, J. L. **NONLINEAR ELASTICITY**. [s.l.] ACADEMIC PRESS, 1956.

DRIEMEIER, L.; BARONCINI PROENÇA, S. P.; ALVES, M. A contribution to the numerical nonlinear analysis of three-dimensional truss systems considering large strains, damage and plasticity. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 10, n. 5, p. 515–535, 1 ago. 2005.

DRIEMEIER, L.; PROENÇA, S. P. B.; ALVES, M. A contribution to the numerical nonlinear analysis of three-dimensional truss systems considering large strains, damage and plasticity. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 10, n. 5, p. 515–535, 1 ago. 2005.

DROZDOV, A. **Finite Elasticity and Viscoelasticity: A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1996.

DUI, G.; REN, Q. Conjugate stress of strain $E(3) = 1/3(U3-I)$. **Conjugate stress of strain $E(3) = 1/3(U3-I)$** , v. 26, n. 5, p. 529–534, 1999.

DUI GUANSUO; REN QINGWEN; SHEN ZHUJIANG. Conjugate stresses to Seth's strain class. **Mechanics Research Communications**, v. 27, n. 5, p. 539–542, 1 set. 2000.

DWIVEDI, K. K. et al. The Effect of Strain Rate on the Stress Relaxation of the Pig Dermis: A Hyper-Viscoelastic Approach. **Journal of Biomechanical Engineering**, v. 142, n. 091006, 13 abr. 2020.

DWIVEDI, K. KR. et al. A hyperelastic model to capture the mechanical behaviour and histological aspects of the soft tissues. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 126, p. 105013, 1 fev. 2022.

EGHBALI, P.; YOUNESIAN, D.; FARHANGDOUST, S. Enhancement of the low-frequency acoustic energy harvesting with auxetic resonators. **Applied Energy**, v. 270, p. 115217, 15 jul. 2020.

EL-RATAL, W. H.; MALLICK, P. K. Elastic Response of Flexible Polyurethane Foams in Uniaxial Tension. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 118, n. 2, p. 157–161, 1 abr. 1996.

ESKANDARI, F.; RAHMANI, Z.; SHAFIEIAN, M. The effect of large deformation on Poisson's ratio of brain white matter: An experimental study. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine**, v. 235, n. 4, p. 401–407, 1 abr. 2021.

ETEROVIC, A. L.; BATHE, K.-J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, n. 6, p. 1099–1114, 1990.

EVANS, K. E. Auxetic polymers: a new range of materials. **Endeavour**, v. 15, n. 4, p. 170–174, 1 jan. 1991a.

EVANS, K. E. The design of doubly curved sandwich panels with honeycomb cores. **Composite Structures**, v. 17, n. 2, p. 95–111, 1 jan. 1991b.

FARAHANI, K.; BAHAI, H. Hyper-elastic constitutive equations of conjugate stresses and strain tensors for the Seth–Hill strain measures. **International Journal of Engineering Science**, v. 42, n. 1, p. 29–41, 1 jan. 2004.

FARAHANI, K.; NAGHDABADI, R. Conjugate stresses of the Seth–Hill strain tensors. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 38, p. 5247–5255, 18 set. 2000.

FARAHANI, K.; NAGHDABADI, R. Basis free relations for the conjugate stresses of the strains based on the right stretch tensor. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 22, p. 5887–5900, 1 nov. 2003.

FELIPE, T. R. C. **Análise Mecânica e Probabilística de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo**. Tese de Doutorado—São Carlos - SP: Universidade de São Paulo, 2019.

FELIPE, T. R. C. et al. A comprehensive ductile damage model for 3D truss structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 112, p. 13–24, 1 jun. 2019a.

FELIPE, T. R. C. et al. A comprehensive ductile damage model for 3D truss structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 112, p. 13–24, 1 jun. 2019b.

FIROUZI, N.; AMABILI, M. Two-dimensional growth of incompressible and compressible soft biological tissues. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 103, p. 105150, 1 jan. 2024.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v. 57, n. 0, p. 829–838, 1 jan. 1961.

FORDE, B. W. R.; STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 27, n. 5, p. 625–630, 1 jan. 1987.

FUNG, Y.-C. Mechanical Properties and Active Remodeling of Blood Vessels. Em: FUNG, Y.-C. (Ed.). **Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues**. New York, NY: Springer, 1993. p. 321–391.

GAO, Z.; LISTER, K.; DESAI, J. P. Constitutive Modeling of Liver Tissue: Experiment and Theory. **Annals of biomedical engineering**, v. 38, n. 2, p. 505, fev. 2010.

GASPAR, N. et al. Novel honeycombs with auxetic behaviour. **Acta Materialia**, v. 53, n. 8, p. 2439–2445, 1 maio 2005.

GENT, A. N. A New Constitutive Relation for Rubber. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 69, n. 1, p. 59–61, 1 mar. 1996.

GEORGE, D. et al. Influence of the liver vascular distribution on its overall mechanical behavior: A first approach to multiscale fluid-structure homogenization. **Journal of Cellular Immunotherapy**, 7th International Symposium Europe China Stem Cells and Regenerative Medicine. v. 4, n. 1, p. 35–37, 1 set. 2018.

GHANNADI, P. et al. Efficiency of grey wolf optimization algorithm for damage detection of skeletal structures via expanded mode shapes. **Advances in Structural Engineering**, v. 23, 2 jun. 2020.

GRECO, M.; FERREIRA, I. P. Logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, n. 10, p. 632–639, 1 ago. 2009.

GRECO, M.; PEIXOTO, D. H. N. Comparative assessments of strain measures for nonlinear analysis of truss structures at large deformations. **Engineering Computations**, v. 39, n. 5, p. 1621–1641, 3 maio 2022.

GREEN, G. On the Propagation of Light in Crystallized Media. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, v. 7, p. 121–140, 1841.

GUO, Z.-H.; CHI-SING, M. Conjugate stress and tensor equation $\sum_{r=1}^m U_r - 1 X U_r - 1 = C$. **International Journal of Solids and Structures**, v. 29, n. 16, p. 2063–2076, 1 jan. 1992.

GUO ZHONG-HENG; DUBEY, R. N. Basic aspects of Hill's method in solid mechanics. **Basic aspects of Hill's method in solid mechanics**, v. 9, n. 3, p. 353–380, 1984.

GURTIN, M. **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York, NY: Richard Bellman, 1981. v. 158

HACKETT, R. M. **Hyperelasticity Primer**. [s.l.] Springer International Publishing, 2016.

HACKETT, R. M. **Hyperelasticity Primer**. 2nd 2018 ed. edição ed. Cham: Springer, 2018.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3. ed. [s.l.] Springer Netherlands, 1992.

HAMEL, G. **Elementare Mechanik**. [s.l.] Рипол Классик, 1912.

HARTIG, E. Der Elastizitätsmodul des geraden Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung. **Der Civilingenieur**, v. 39, p. 113–138, 1893.

HASANÇEBI, O.; TEKE, T.; PEKCAN, O. A bat-inspired algorithm for structural optimization. **Computers & Structures**, v. 128, p. 77–90, 1 nov. 2013.

HASHIGUCHI, K. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Elasticity-Plasticity: Multiplicative Decomposition with Subloading Surface Model**. 1^a edição ed. [s.l.] Elsevier, 2020.

HASHIGUCHI, K.; YAMAKAWA, Y. **Introduction to Finite Strain Theory for Continuum Elasto-Plasticity**. Illustrated edição ed. Chichester, West Sussex: Wiley, 2012.

HE, H. et al. A comparative study of 85 hyperelastic constitutive models for both unfilled rubber and highly filled rubber nanocomposite material. **Nano Materials Science**, Trends in Nanomaterials and Nanocomposites: Fundamentals, Modelling and Applications - Part A. v. 4, n. 2, p. 64–82, 1 jun. 2022.

HENCKY, H. Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. **Zeit. Tech. Phys.**, v. 9, p. 215–220, 1928.

HENYŠ, P. et al. Normal and shear behaviours of the auxetic metamaterials: homogenisation and experimental approaches. **Meccanica**, v. 54, n. 6, p. 831–839, 1 abr. 2019.

HERSHEY, A. V. **A review of the definitions of finite strain**. Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. **Anais...** Em: U.S. NAT. CONGR. APPL. MECH. 1952.

HILL, R. On constitutive inequalities for simple materials—I. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 16, n. 4, p. 229–242, 1 ago. 1968.

HILL, R. Aspects of Invariance in Solid Mechanics. Em: YIH, C.-S. (Ed.). **Advances in Applied Mechanics**. [s.l.] Elsevier, 1979. v. 18p. 1–75.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**. 1. ed. [s.l.: s.n.].

HOGER, A. The stress conjugate to logarithmic strain. **International Journal of Solids and Structures**, v. 23, n. 12, p. 1645–1656, 1 jan. 1987.

HOSTETTLER, A. et al. Bulk modulus and volume variation measurement of the liver and the kidneys in vivo using abdominal kinetics during free breathing. **Computer Methods and Programs in Biomedicine**, v. 100, n. 2, p. 149–157, 1 nov. 2010.

HUANG, T. T. et al. Based on auxetic foam: A novel type of seismic metamaterial for Lamb waves. **Engineering Structures**, v. 246, p. 112976, 1 nov. 2021.

HUBBARD, J. H.; WEST, B. H. **Differential Equations: A Dynamical Systems Approach**. 1. ed. New York: Samuel Eilenberg & Hyman Bass, 1995.

IMBERT, A. **Recherches théoriques et expérimentales sur l'élasticité du caoutchouc**. Lyon, França: Faculté des Sciences de Marseille, 1880.

ISLAM, M. T. et al. Non-invasive imaging of Young's modulus and Poisson's ratio in cancers in vivo. **Scientific Reports**, v. 10, n. 1, p. 7266, 29 abr. 2020.

ITSKOV, M. On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity. **Mechanics Research Communications**, v. 31, n. 5, p. 507–517, 1 set. 2004.

ITSKOV, M. **Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics**. 5th ed. 2019 edition ed. New York, NY: Springer, 2019.

JAHANFEKR, E.; MOHAMMADIZADEH, M. R.; SHOJAEI, S. Insight to Damage Identification in Truss-Type Structures Using a Second-Order Gradient-Based Algorithm. **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering**, v. 45, n. 4, p. 2145–2175, 1 dez. 2021.

JOHNSON, G. A. et al. Tensile and viscoelastic properties of human patellar tendon. **Journal of Orthopaedic Research: Official Publication of the Orthopaedic Research Society**, v. 12, n. 6, p. 796–803, nov. 1994.

KANG, J. et al. Unified and accurate simulation for large elastic strain responses of rubberlike soft materials under multiple modes of loading. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, 17 nov. 2023.

KHANIKI, H. B. et al. Hyperelastic structures: A review on the mechanics and biomechanics. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 148, p. 104275, 1 jan. 2023.

KIM, N.-H. **Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. 2015^a edição ed. New York: Springer, 2012.

KOROBAYNIKOV, S. N. Objective Symmetrically Physical Strain Tensors, Conjugate Stress Tensors, and Hill's Linear Isotropic Hyperelastic Material Models. **Journal of Elasticity**, v. 136, n. 2, p. 159–187, 1 ago. 2019.

KORSUNSKY, A. M. Elastic Behavior of Materials: Continuum Aspects. Em: BUSCHOW, K. H. J. et al. (Eds.). **Encyclopedia of Materials: Science and Technology**. Oxford: Elsevier, 2001. p. 2398–2404.

KOSSA, A.; VALENTINE, M. T.; MCMEEKING, R. M. Analysis of the compressible, isotropic, neo-Hookean hyperelastic model. **Meccanica**, v. 58, n. 1, p. 217–232, 1 jan. 2023.

KRENK, S.; HEDEDAL, O. A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 123, n. 1, p. 95–107, 1 jun. 1995.

LAGE, C. M. Otimização do projeto de estruturas treliçadas formadas por perfis tubulares soldados, usando algoritmos genéticos e método dos elementos finitos. 2019.

LAKES, R. S.; ELMS, K. Indentability of Conventional and Negative Poisson's Ratio Foams. **Journal of Composite Materials**, v. 27, n. 12, p. 1193–1202, 1 dez. 1993.

LALO, D. F. **NUMERICAL MODELING AND EXPERIMENTAL CHARACTERIZATION OF CONICAL-LAMINATED ELASTOMERIC BEARINGS SUBJECTED TO DIFFERENT MODES OF LARGE MULTIAXIAL STRAINS – AN APPLICATION OF DIC TECHNIQUE IN BIAXIAL STRAINING**. Belo Horizonte - MG: Federal University of Minas Gerais, 2020.

LATORRE, M.; MONTÁNS, F. J. Stress and strain mapping tensors and general work-conjugacy in large strain continuum mechanics. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 5, p. 3938–3950, 1 mar. 2016.

LAVALL, A. C. C. **Uma formulação consistente para análise não-linear de pórticos planos de aço considerando imperfeições iniciais e tensões residuais**. text—[s.l.] Universidade de São Paulo, 1996.

LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, n. 5, p. 703–736, 2004.

LIQUN, Z.; RUI, S. Biomedical Elastomer. Em: KOBAYASHI, S.; MÜLLEN, K. (Eds.). **Encyclopedia of Polymeric Nanomaterials**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. p. 172–177.

LIU, J. H. A Remark on the Chain Rule for Exponential Matrix Functions. **The College Mathematics Journal**, v. 34, n. 2, p. 141–143, 2003.

LIU, Q. Literature Review: Materials with Negative Poisson's Ratios and Potential Applications to Aerospace and Defence. **Aust. Gov. Dep. Def.**, 1 jan. 2006.

LOBUR, M.; FARMAGA, I.; SHMIGELSKYI, P. Evaluation the solution time of finite element analysis using gaussian elimination. 2012.

LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method: Enhanced Edition**. 6th ed. edição ed. [s.l.] Cengage Learning, 2022.

LUDWIK, P. **Elemente der Technologischen Mechanik**. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 1909.

LULEI, F.; MIEHE, C. A physically-based constitutive model for finite viscoelastic deformations in rubber polymer based on a directly evaluated micro-macrotransition. **Constitutive Models for Rubber II**, p. 117–125, 1 jan. 2001.

MACIEL, D. N. **Análise de Problemas Elásticos Não Lineares Geométricos Empregando o Método dos Elementos Finitos Posicional**. Tese de Doutorado—São Carlos - SP: Universidade de São Paulo, 2008.

MADIREDDY, S.; SISTA, B.; VEMAGANTI, K. A Bayesian approach to selecting hyperelastic constitutive models of soft tissue. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 291, p. 102–122, 1 jul. 2015.

MADKE, R. R.; CHOWDHURY, R. Anti-impact behavior of auxetic sandwich structure with braided face sheets and 3D re-entrant cores. **Composite Structures**, v. 236, p. 111838, 15 mar. 2020.

MADUTUJUJUH, N. Geometrically nonlinear analysis of plane trusses and plane frames. 15 dez. 1991.

MAL, A. K.; SINGH, S. J. **Deformation of Elastic Solids**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1991.

MANSOURI, M. R.; DARIJANI, H.; BAGHANI, M. On the Correlation of FEM and Experiments for Hyperelastic Elastomers. **Experimental Mechanics**, v. 57, n. 2, p. 195–206, 1 fev. 2017.

MARSDEN, J. E.; HUGHES, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Revised ed. edition ed. New York: Dover Publications, 1994.

MARTIN, R. J. et al. A brief history of logarithmic strain measures in nonlinear elasticity. **PAMM**, v. 18, n. 1, p. e201800366, 2018.

MAZHNIK, E.; OGANOV, A. R. A model of hardness and fracture toughness of solids. **Journal of Applied Physics**, v. 126, n. 12, p. 125109, 28 set. 2019.

MCGINTY, R. **Notes on Continuum Mechanics**. Mercer University, USA: [s.n.].

MEHRABADI, M. M.; NEMAT-NASSER, S. Some basic kinematical relations for finite deformations of continua. **Mechanics of Materials**, v. 6, n. 2, p. 127–138, 1 jun. 1987.

MEIER, P. et al. **Uniaxial and equi-biaxial tension tests of silicone elastomer -Constitutive Models for Rubber III**. Lisse: Busfield & Muhr, 2003.

MELLY, S. K. et al. A phenomenological constitutive model for predicting both the moderate and large deformation behavior of elastomeric materials. **Mechanics of Materials**, v. 165, p. 104179, 1 fev. 2022.

MIHAI, L. A. et al. A family of hyperelastic models for human brain tissue. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 106, p. 60–79, 1 set. 2017.

MIHAI, L. A.; GORIELY, A. How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 473, n. 2207, p. 20170607, nov. 2017.

MIR, M. et al. Review of Mechanics and Applications of Auxetic Structures. **Advances in Materials Science and Engineering**, v. 2014, p. e753496, 13 nov. 2014.

MOHSENIZADEH, S. et al. Crashworthiness assessment of auxetic foam-filled tube under quasi-static axial loading. **Materials & Design**, v. 88, p. 258–268, 25 dez. 2015.

MOONEY, M. A Theory of Large Elastic Deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, p. 582–592, 1 set. 1940.

MORADI, A.; MIRZAKHANI, A.; GHANBARZADEH, A. Multi-objective optimization of truss structures using the bee algorithm. **Scientia Iranica**, v. 22, p. 1789–1800, 1 out. 2015.

MORAN, R.; SMITH, J. H.; GARCÍA, J. J. Fitted hyperelastic parameters for Human brain tissue from reported tension, compression, and shear tests. **Journal of Biomechanics**, v. 47, n. 15, p. 3762–3766, 28 nov. 2014.

MORIN, F. et al. Chapter 6 - Biomechanical Modeling of Brain Soft Tissues for Medical Applications. Em: PAYAN, Y.; OHAYON, J. (Eds.). **Biomechanics of Living Organs**. Translational Epigenetics. Oxford: Academic Press, 2017. v. 1p. 127–146.

MPEKRIS, F. et al. Role of vascular normalization in benefit from metronomic chemotherapy. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 114, n. 8, p. 1994–1999, 21 fev. 2017.

MURNAGHAN, F. D. Finite Deformations of an Elastic Solid. **American Journal of Mathematics**, v. 59, n. 2, p. 235–260, 1937.

NETTI, P. A. et al. Role of extracellular matrix assembly in interstitial transport in solid tumors. **Cancer Research**, v. 60, n. 9, p. 2497–2503, 1 maio 2000.

NIA, H. T. et al. Solid stress and elastic energy as measures of tumour mechanopathology. **Nature Biomedical Engineering**, v. 1, p. 0004, 2016.

NIKOLAEV, N. I. et al. Changes in the stiffness of human mesenchymal stem cells with the progress of cell death as measured by atomic force microscopy. **Journal of Biomechanics**, v. 47, n. 3, p. 625–630, 7 fev. 2014.

NOVAK, N. et al. Compression and shear behaviour of graded chiral auxetic structures. **Mechanics of Materials**, v. 148, p. 103524, 1 set. 2020.

OGDEN, R. W. Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 326, p. 565–584, 1 fev. 1972.

OGDEN, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations**. Reprint edition ed. Mineola, NY: Dover Publications, 1997.

OWEN, D. R. J.; PERIC, D.; NETO, E. A. DE S. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. 1ª edição ed. Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons Inc, 2008.

PAPADRAKAKIS, M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. **Computers & Structures**, v. 14, n. 5, p. 393–402, 1 jan. 1981.

PARK, J.; KIM, C.; LEE, H. Prediction of Nonlinear Stress-strain Behaviors with Artificial Neural Networks and Its Application for Automotive Rubber Parts. **International Journal of Automotive Technology**, v. 24, n. 6, p. 1481–1491, 1 dez. 2023.

PEIRLINCK, M. et al. On automated model discovery and a universal material subroutine for hyperelastic materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 418, p. 116534, 1 jan. 2024.

PEIXOTO, D.; GRECO, M. **Presentation and characterization of a new family of strain measures based on the hyperbolic tangent function**. Proceedings of the 8th International

Symposium on Solid Mechanics. **Anais...** Em: 8TH INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SOLID MECHANICS. ABCM, 2022. Disponível em: <<http://abcm.org.br/anais-de-eventos/MSL22/0147>>. Acesso em: 25 abr. 2023

PEIXOTO, D. H. N.; GRECO, M.; VASCONCELLOS, D. B. A new family of strain tensors based on the hyperbolic sine function. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 21, p. e529, 1 mar. 2024.

PEÑA, J. A.; MARTÍNEZ, M. A.; PEÑA, E. Layer-specific residual deformations and uniaxial and biaxial mechanical properties of thoracic porcine aorta. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 50, p. 55–69, out. 2015.

PLEVRIS, V.; TSIATAS, G. C. Computational Structural Engineering: Past Achievements and Future Challenges. **Frontiers in Built Environment**, v. 4, 2018.

QUAPP, K. M.; WEISS, J. A. Material characterization of human medial collateral ligament. **Journal of Biomechanical Engineering**, v. 120, n. 6, p. 757–763, dez. 1998.

RAJEEV, S.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 5, p. 1233–1250, 1 maio 1992.

RAMÍREZ, M. et al. Enhancement of Young's moduli and auxetic windows in laminates with isotropic constituents. **International Journal of Engineering Science**, Recent advances in Micromechanics. v. 58, p. 95–114, 1 set. 2012.

REDDY, J. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3rd edition ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2005.

REDDY, J. N. **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2002.

RICKER, A.; WRIGGERS, P. Systematic Fitting and Comparison of Hyperelastic Continuum Models for Elastomers. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 30, n. 3, p. 2257–2288, 1 abr. 2023.

ROOSE, T. et al. Solid stress generated by spheroid growth estimated using a linear poroelasticity model. **Microvascular Research**, v. 66, n. 3, p. 204–212, 1 nov. 2003.

ROSSMANN, W. **Lie Groups – An Introduction Through Linear Groups**. [s.l.: s.n.].

SANAMI, M. et al. Auxetic Materials for Sports Applications. **Procedia Engineering**, The Engineering of Sport 10. v. 72, p. 453–458, 1 jan. 2014.

SANSOUR, C. On the physical assumptions underlying the volumetric-isochoric split and the case of anisotropy. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 27, n. 1, p. 28–39, 1 jan. 2008.

SAUCEDO-MORA, L. et al. A two-parameter strain energy function for brain matter: An extension of the Hencky model to incorporate locking. **Brain Multiphysics**, v. 2, p. 100036, 1 jan. 2021.

SCHWAB, R.; HARTER, A. Extracting true stresses and strains from nominal stresses and strains in tensile testing. **Strain**, v. 57, n. 6, p. e12396, 2021.

SETH, B. R. **GENERALIZED STRAIN MEASURE WITH APPLICATIONS TO PHYSICAL PROBLEMS**. Wisconsin Univ-Madison Mathematics Research Center: [s.n.]. Disponível em: <<https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0266913>>. Acesso em: 11 maio. 2023.

SHABANA, A. A. Finite Element Incremental Approach and Exact Rigid Body Inertia. **Journal of Mechanical Design**, v. 118, n. 2, p. 171–178, 1 jun. 1996.

SHABANA, A. A. Definition of the Slopes and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 1, n. 3, p. 339–348, 1 set. 1997.

SHAO, Z. et al. The Variety of the Stress–strain Response of Silicone Foam after Aging. **Polymers**, v. 14, n. 17, p. 3606, jan. 2022.

SHEIKHOESLAMI, R.; KAVEH, A. A survey of chaos embedded metaheuristic algorithms. **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, v. 3, p. 617–633, 1 nov. 2013.

SILVA, W. T. M. El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. **Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería**, 2002.

SILVER, F. H. et al. Viscoelastic properties of young and old human dermis: A proposed molecular mechanism for elastic energy storage in collagen and elastin. **Journal of Applied Polymer Science**, v. 86, n. 8, p. 1978–1985, 2002.

SIMO, J. C. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 99, n. 1, p. 61–112, 1 ago. 1992.

SKACEL, P.; BURSA, J. Poisson's ratio and compressibility of arterial wall – Improved experimental data reject auxetic behaviour. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 131, p. 105229, 1 jul. 2022.

SOUZA, L. A. F. DE; SILVA, E. L. C. DA. Formulações não lineares de elementos finitos de treliça 2D para análise de estruturas com grandes deslocamentos. **The Journal of Engineering and Exact Sciences**, v. 8, n. 7, p. 14600–01e, 27 set. 2022.

SOUZA, L. A. F. et al. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. **TEMA (São Carlos)**, v. 19, n. 1, p. 161–179, jan. 2018.

SOZA, G. et al. Determination of the elasticity parameters of brain tissue with combined simulation and registration. **The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery**, v. 1, n. 3, p. 87–95, 2005.

ST. PIERRE, S. R.; LINKA, K.; KUHL, E. Principal-stretch-based constitutive neural networks autonomously discover a subclass of Ogden models for human brain tissue. **Brain Multiphysics**, v. 4, p. 100066, 1 jan. 2023.

ST. VENANT, B. D. Sur les pressions qui se développent a l'intérieur des corps solides lorsque les déplacements de leurs points sans altérer l'élasticité, ne peuvent cependant pas être considérés comme très-petits. **Bull. Soc. Phil.**, v. 5, p. 26–28, 1844.

STEWART, D. C. et al. Mechanical characterization of human brain tumors from patients and comparison to potential surgical phantoms. **PLOS ONE**, v. 12, n. 6, p. e0177561, 5 jun. 2017.

STUMPF, F. T.; MARCZAK, R. J. Constitutive framework of a new hyperelastic model for isotropic rubber-like materials for finite element implementation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, p. e346, 15 mar. 2021.

STYLIANOPOULOS, T. et al. Coevolution of solid stress and interstitial fluid pressure in tumors during progression: implications for vascular collapse. **Cancer Research**, v. 73, n. 13, p. 3833–3841, 1 jul. 2013.

SWAINGER, K. H. Large Strains and Displacements in Stress-Strain Problems. **Nature**, v. 160, n. 4064, p. 399–400, set. 1947.

TAGHAVIAN HAKKAK, M.; REZAIEE PAJAND, M. Nonlinear Analysis of Truss Structures Using Dynamic Relaxation (RESEARCH NOTE). **International Journal of Engineering**, v. 19, n. 1, p. 11–22, 1 dez. 2006.

TENTI, G.; SIVALOGANATHAN, S.; DRAKE, J. Brain Biomechanics: Steady-State Consolidation Theory of Hydrocephalus. **Can. Appl. Math. Q.**, v. 7, n. 1, p. 111–124, 1999.

TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules—II. **Transactions of the Faraday Society**, v. 39, n. 0, p. 241–246, 1 jan. 1943.

TRELOAR, L. R. G. **The Physics of Rubber Elasticity**. [s.l.] OUP Oxford, 1975.

TRUESDELL, C.; NOLL, W. **The Non-Linear Field Theories of Mechanics**. 3. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1965. v. 3

TRUESDELL, C.; NOLL, W. **The Non-Linear Field Theories of Mechanics**. 3. ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.

VARGAS, D. E. C. et al. A differential evolution based algorithm for constrained multiobjective structural optimization problems. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 32, n. 2, 1 jun. 2016.

VIEIRA, J. M. P. **Otimização estrutural multi-objetivo de treliças planas e espaciais considerando aspectos dinâmicos e de estabilidade global**. Juiz de Fora - MG: Federal University of Juiz de Fora, 2023.

VORP, D. A. et al. Effect of aneurysm on the tensile strength and biomechanical behavior of the ascending thoracic aorta. **The Annals of Thoracic Surgery**, v. 75, n. 4, p. 1210–1214, abr. 2003.

WANG, B. et al. Compressive response and energy absorption of foam EPDM. **Journal of Applied Polymer Science**, v. 105, n. 6, p. 3462–3469, 2007.

WANG, B. et al. Modeling the initial-volume dependent approximate compressibility of porcine liver tissues using a novel volumetric strain energy model. **Journal of Biomechanics**, v. 109, p. 109901, 26 ago. 2020.

WEISBECKER, H. et al. Layer-specific damage experiments and modeling of human thoracic and abdominal aortas with non-atherosclerotic intimal thickening. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 12, p. 93–106, ago. 2012.

WILCOX, R. M. Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics. **Journal of Mathematical Physics**, v. 8, n. 4, p. 962, 21 dez. 2004.

WOOD, J. A. The Chain Rule for Matrix Exponential Functions. **The College Mathematics Journal**, v. 35, n. 3, p. 220–222, 2004.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Softcover reprint of hardcover 1st ed. 2008 edição ed. Berlin: Springer, 2010.

XIAO, H. Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary hill's strain. **International Journal of Solids and Structures**, v. 32, n. 22, p. 3327–3340, 1 nov. 1995.

XIAO, H.; CHEN, L. S. Hencky's elasticity model and linear stress-strain relations in isotropic finite hyperelasticity. **Acta Mechanica**, v. 157, n. 1, p. 51–60, 1 mar. 2002.

YANG, S. et al. Stress and strain changes of the anterior cruciate ligament at different knee flexion angles: A three-dimensional finite element study. **Journal of Orthopaedic Science**, 6 jul. 2023.

YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. **Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures**. 1st edition ed. New York: Prentice Hall, 1994.

YANG, Y.-B.; LEU, L.-J. Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis of trusses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 92, n. 1, p. 121–131, 1 nov. 1991.

YE, H. F.; TAO, M.; ZHANG, W. Z. Modeling and Sound Insulation Performance Analysis of Two Honeycomb-hole Coatings. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1016, p. 012001, maio 2018.

YEOH, O. H. Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 63, n. 5, p. 792–805, 1 nov. 1990.

YEOH, O. H.; FLEMING, P. D. A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity. **Journal of Polymer Science B Polymer Physics**, v. 35, p. 1919–1931, 1 set. 1997.

ZHANG, M. et al. Three-dimensional composites with nearly isotropic negative Poisson's ratio by random inclusions: Experiments and finite element simulation. **Composites Science and Technology**, v. 218, p. 109195, 8 fev. 2022.

ZHOU, L.; JIANG, L.; HU, H. Auxetic composites made of 3D textile structure and polyurethane foam. **physica status solidi (b)**, v. 253, n. 7, p. 1331–1341, 2016.

APÊNDICE I: DEDUÇÃO DA POTÊNCIA GERADA PELA DEFORMAÇÃO DE UM SÓLIDO

Na Subseção “3.4 Pares de Tensão-Deformação Energeticamente Conjugados” partiu-se dos tensores de Tensão de Cauchy, $[\sigma^c]$, e de Taxa de Deformação, $[D]$, para se definir energia interna por unidade volume de referência (potência), $\dot{\psi}$, e, conseqüentemente, para encontrar outros pares conjugados de tensores de tensão e deformação. Aqui é apresentada a dedução da definição Potência para sólidos, mostrando como essas duas quantidades físicas aparecem ao longo do desenvolvimento exatamente por possuírem claros significados físico. A dedução, aqui mostrada de maneira resumida, é uma adaptação das presentes em Ogden (1997) e MaGinty (2012).

Trabalho é:

$$W = \int \{F\} \cdot d\{x\} \quad \text{A-I.1}$$

Potência é a derivada do trabalho em relação ao tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \{F\} \frac{d\{x\}}{dt} \quad \text{A-I.2}$$

Mas $d\{x\}/dt$ é velocidade, $\{v\}$:

$$P = \{F\} \cdot \{v\} \quad \text{A-I.3}$$

Para cálculos de mecânica/estruturas, é melhor calcular energia e trabalho através de tensão e deformação, ao invés de força e deslocamento. Sendo $\{t\}$ a força de superfície e a força externa total aplicada em um sólido a integral das forças de superfície na totalidade da superfície externa; e considerando que $\{b\}$ representa as forças de corpo (devido à gravidade, magnetismo, etc.) distribuídas pela totalidade do volume, a força total aplicada em um sólido é:

$$\text{Força Total} = \int \{t\} dA + \int \{b\} dV \quad \text{A-I.4}$$

Substituindo, a Potência é obtida pelo produto escalar entre as forças e o vetor de velocidade:

$$P = \int \{t\} \cdot \{v\} dA + \int \{b\} \cdot \{v\} dV \quad \text{A-I.5}$$

Agora pode-se dividir a potência em parcelas relacionadas ao movimento (velocidade) e à deformação (tensão-deformação). Mas primeiro é relembrada a Eq. 3.25 da tese, uma identidade que relaciona o tensor de Tensão de Cauchy e as forças de superfície: $\{t\} = [\sigma^C] \cdot \{\eta\}$. Substituindo:

$$P = \int ([\sigma^C] \cdot \{\eta\}) \cdot \{v\} dA + \int \{b\} \cdot \{v\} dV \quad \text{A-I.6}$$

Aplica-se agora o Teorema da Divergência ao primeiro termo para transformar a integral de superfície em integral de volume:

$$P = \int \{\nabla\} \cdot ([\sigma^C] \cdot \{\eta\}) \cdot \{v\} dV + \int \{b\} \cdot \{v\} dV \quad \text{A-I.7}$$

Para expandir o termo com o operador de divergência recorre-se à notação indicial:

$$\{\nabla\} \cdot ([\sigma^C] \cdot \{\eta\}) = (\sigma_{ij}^C v_i)_{,j} \quad \text{A-I.8}$$

Aplicando a regra do produto:

$$(\sigma_{ij}^C v_i)_{,j} = \sigma_{ij,j}^C v_i + \sigma_{ij}^C v_{i,j} \quad \text{A-I.9}$$

Que é igual a:

$$\{\nabla\}([\boldsymbol{\sigma}^C] \cdot \{\eta\}) = \sigma_{ij,j}^C v_i + \sigma_{ij}^C v_{i,j} = (\{\nabla\} \cdot [\boldsymbol{\sigma}^C]) \cdot \{v\} + [\boldsymbol{\sigma}^C]:\{\nabla\}\{v\} \quad \text{A-I.10}$$

Substituindo:

$$P = \int (\{\nabla\} \cdot [\boldsymbol{\sigma}^C]) \cdot \{v\} dV + \int [\boldsymbol{\sigma}^C]:\{\nabla\}\{v\} dV + \int \{b\} \cdot \{v\} dV \quad \text{A-I.11}$$

O termo $\{\nabla\} \cdot [\boldsymbol{\sigma}^C]$ aparece na equação de equilíbrio, em que $\{a\}$ é a aceleração:

$$\{\nabla\} \cdot [\boldsymbol{\sigma}^C] + \{b\} = \rho\{a\} \quad \text{A-I.12}$$

Substituindo:

$$P = \int (\rho\{a\} - \{b\}) \cdot \{v\} dV + \int [\boldsymbol{\sigma}^C]:\{\nabla\}\{v\} dV + \int \{b\} \cdot \{v\} dV \quad \text{A-I.13}$$

Expandindo o primeiro termo:

$$P = \int \rho\{a\} \cdot \{v\} dV - \int \{b\} \cdot \{v\} dV + \int [\boldsymbol{\sigma}^C]:\{\nabla\}\{v\} dV + \int \{b\} \cdot \{v\} dV \quad \text{A-I.14}$$

$$P = \int \rho\{a\} \cdot \{v\} dV + \int [\boldsymbol{\sigma}^C]:\{\nabla\}\{v\} dV \quad \text{A-I.15}$$

O termo $\int \rho\{a\} \cdot \{v\} dV$ é a derivada da Energia Cinética $\int (1/2)\rho\{v\} \cdot \{v\} dV$. Reescrevendo:

$$P = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho \{v\} \cdot \{v\} dV + \int [\sigma^c]: \{\nabla\}\{v\} dV \quad \text{A-I.16}$$

Ou

$$P = \frac{d}{dt} \int \text{Energia Cinética} + \int [\sigma^c]: \{\nabla\}\{v\} dV \quad \text{A-I.17}$$

Sabendo que, conforme definido na Eq. 3.4, o divergente da velocidade é o tensor Gradiente de Velocidade, $[L]$, tem-se:

$$P = \frac{d}{dt} \int \text{Energia Cinética} + \int [\sigma^c]: [L] dV \quad \text{A-I.18}$$

Como $[L] = [D] + [W]$ (Eq. 3.6):

$$P = \frac{d}{dt} \int \text{Energia Cinética} + \int [\sigma^c]: [D] dV + \int [\sigma^c]: [W] dV \quad \text{A-I.19}$$

Como $[\sigma^c]$ é um tensor simétrico e $[W]$ um tensor antisimétrico, $[\sigma^c]: [W] = 0$, portanto:

$$P = \frac{d}{dt} \int \text{Energia Cinética} + \int [\sigma^c]: [D] dV \quad \text{A-I.20}$$

O segundo termo representa a energia advinda da deformação.

APÊNDICE II: RELAÇÃO ENTRE O TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO E O TENSOR TAXA DE DEFORMAÇÃO DE GREEN

Conforme as Eq. 3.10 e Eq. 3.18, o tensor de Deformação de Green pode ser expresso da seguinte maneira:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^G] = \frac{1}{2}([\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] - [\mathbf{I}]) \quad \text{A-II.1}$$

A sua derivada temporal, ou seja, o tensor Taxa de Deformação de Green, é:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G] = \frac{1}{2}([\mathbf{F}]^T[\dot{\mathbf{F}}] + [\dot{\mathbf{F}}]^T[\mathbf{F}]) \quad \text{A-II.2}$$

Dada a definição apresentada pelas Eq. 3.4 e 3.5, pode-se reescrever a equação acima:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G] = \frac{1}{2}([\mathbf{F}]^T[\mathbf{L}][\mathbf{F}] + [\mathbf{F}]^T[\mathbf{L}]^T[\mathbf{F}]) \quad \text{A-II.3}$$

Agrupando:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G] = [\mathbf{F}]^T \left(\frac{[\mathbf{L}] + [\mathbf{L}]^T}{2} \right) [\mathbf{F}] \quad \text{A-II.4}$$

Pela definição de $[\mathbf{D}]$ (Eq. 3.7), percebe-se que a relação entre $[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G]$ e $[\mathbf{D}]$ é dada pela equação:

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^G] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{F}] \quad \text{A-II.5}$$

APÊNDICE III: DISCUSSÃO SOBRE A OBJETIVIDADE DAS MEDIDAS SHG–SETH-HILL

Aqui é feita uma breve discussão a respeito da objetividade das medidas da família Seno-Hiperbólica Generalizada quando se utiliza as medidas da família Seth-Hill como argumento (SHG–Seth-Hill), levando em consideração que na presente tese foram abordadas somente as versões Lagrangianas das medidas de Seth-Hill.

Nos trabalhos de Gurtin (1981), Ogden (1997) e Chaves (2013), demonstra-se que o Tensor de Alongamento Direito, $[U]$, e o Tensor Direito de Deformação de Cauchy-Green, $[C]$, são objetivos. Nesses trabalhos, isso se traduz nas igualdades $[U] = [U^*]$ e $[C] = [C^*]$, o que expressa que uma mudança de posição do observador ou a aplicação de um movimento de corpo rígido não alteram esses tensores. A partir dessas definições, Ogden (1997) e Chaves (2013) afirmam que um tensor de deformação expresso em função de $[U]$ e/ou $[C]$ também é, por consequência, objetivo.

Ao discutir sobre o Tensor de Deformação de Green, Bathe (2014) afirma que é claro que a invariância dos componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange em relação às rotações de corpo rígido já decorre da sua definição em função de $[U]$, uma vez que a rotação de corpo rígido das fibras, que são expressas pelo tensor de rotação $[R]$, não entra em sua definição. Raciocínio semelhante é usado por Ogden (1997), que explica que o gradiente de deformação $[F]$ representa uma rotação pura de corpo rígido se e somente se $[U] = [I]$, ao passo que, se $[R] = [I]$, então $[F] = [U]$ e a deformação é considerada pura, do que decorre que as medidas da família Seth-Hill de deformação, que são definidas exclusivamente em função do Tensor Direito de Alongamento de Cauchy, são objetivas.

A partir do que foi discutido acima, conclui-se que a família SHG–Seth-Hill é formada por medidas de deformação objetivas, pois trata-se de uma família definida em função de $[U]$ (ou $[C]$) e constantes (Eq. 4.4), que são sempre objetivas.

APÊNDICE IV: FAMÍLIA TANGENTE-HIPERBÓLICA GENERALIZADA

A família Tangente Hiperbólica Generalizada foi apresentada em sua versão 1D e 3D no artigo Peixoto e Greco (2022). Neste trabalho, a fim de caracterizar o modelo tipo-Hookeano THG, algumas treliças de referência foram analisadas usando a FPMEF e as respostas dos modos puros EAS, CE-B e CS foram investigadas.

Uma possível área de aplicação da família THG está na representação do comportamento elastoplástico e da mecânica do dano em materiais que trabalham sob deformações moderadas. Neste tipo de modelagem, os materiais tendem a apresentar um comportamento aproximadamente simétrico e perda de rigidez ao longo da curva tensão-deformação. Acredita-se que o uso de medidas de deformação com um comportamento mais próximo (e mais coerente) ao comportamento do material a ser modelado é conceitualmente importante, permitindo uma adequada conciliação entre modelos micromecânicos e a formulação matemática. Como exemplo, pode-se citar o Cloreto de Polivinila (PVC), cuja curva do material é mostrada na figura abaixo.

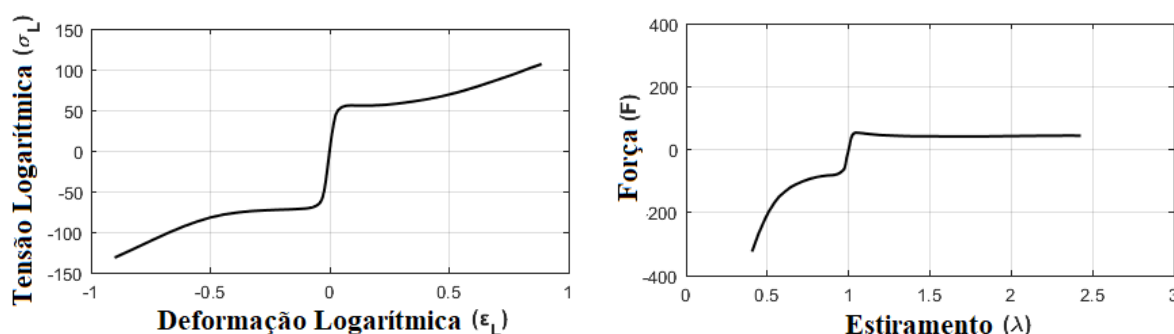


Figura A-IV.1: esquerda) Curva de tensão logarítmica ("verdadeira") x deformação logarítmica ("verdadeira") do PVC; Direita): Curva de Força x Alongamento. Fonte dos Dados: Alves e Martins (2009).

Na análise de treliças (elementos de barra) para deformações moderadas e grandes, como já explicado na tese, é comum usar a medida Logarítmica devido ao fato de que essa medida permite a decomposição multiplicativa do Gradiente de Deformação, $[F]$, que no caso 1D é o estiramento λ ($\lambda = \lambda^e \lambda^p$), enquanto uma decomposição aditiva da deformação total pode ser

usada ($\varepsilon_L = \varepsilon_L^e + \varepsilon_L^p$). Driemeier et al. (2005), Greco e Ferreira (2009), Felipe (2019) e Felipe et al. (2019b) são alguns exemplos de estudos que usam a deformação Logarítmica na análise de treliças. No entanto, essa medida tem uma forte assimetria, o que torna difícil conciliar a "correção" devido à plastificação e degeneração do material (que são claramente fenômenos energeticamente dissipativos) com considerações sobre a micromecânica desses fenômenos.

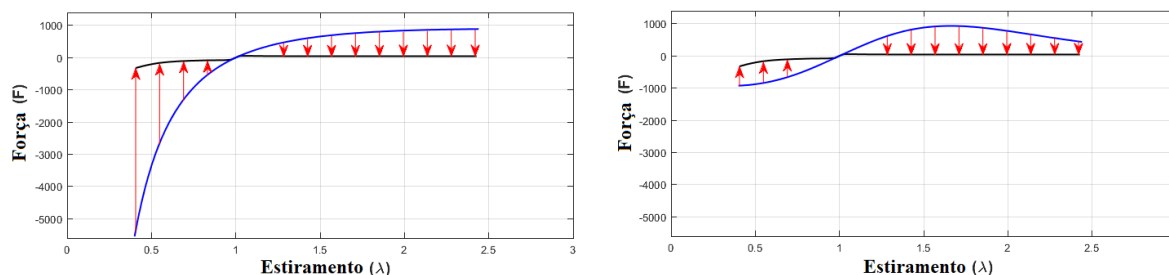


Figura A-IV.2: Correção imposta à previsão elástica para o PVC. Esquerda) Medida de deformação logarítmica; Direita) Medida de deformação da Tangente Hiperbólica.

Observando a figura acima, percebe-se que a "correção" aplicada quando se usa a deformação Logarítmica é muito diferente para compressão e tração, enquanto a "correção" quando se usa a deformação Tangente-Hiperbólica é mais razoável. Pode-se até questionar se valores menores de "correções" podem levar a um custo computacional menor. Embora seja necessária uma investigação mais aprofundada para confirmar se a família THG é realmente mais coerente para formulações de mecânica elastoplástica e de dano, a discussão sobre como o uso de diferentes medidas de deformação afeta os parâmetros dessas formulações precisa ser feita, pois tais parâmetros geralmente têm significados físicos atribuídos a eles, especialmente quando um modelo micromecânico é usado na concepção da formulação. Nesta tese não foram produzidos resultados que validem essas especulações, por isso essa discussão fica restrita a esse apêndice.

APÊNDICE V: RESULTADOS DO ESTUDO DE CUSTO COMPUTACIONAL DE ANÁLISE DE TRELIÇAS

Todos os resultados obtidos no estudo de custo computacional (Subseção 5.2) são apresentados nas tabelas abaixo com seus respectivos valores de desvio padrão (D-P).

		GRUPO 1															
		Green		Biot		Logarítmica		Hiperbólica		Almansi		Seno-Hiperbólica		Tangente-Hiperbólica			
		Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P		
Treliça	npi																
Treliça Espacial de 12-Barras	460	0.1711	0.0087	0.1582	0.0139	0.5589	0.0174	0.3738	0.0178	0.3852	0.0102	0.2403	0.0205	1.8570	0.0185		
	1400	33.3212	0.2742	23.3869	0.0947	60.3861	0.2299	413.9796	0.9969	-	-	54.6292	0.5967	68.0187	0.2605		
Treliça Espacial de 25-Barras	250	0.1676	0.0129	0.1644	0.0088	0.4505	0.0185	0.4001	0.0194	0.4057	0.0069	0.2382	0.0113	1.1055	0.0203		
	550	13.9535	0.1736	10.1924	0.2149	-	-	32.6990	0.2273	34.3793	0.1915	17.3917	0.1196	-	-		
Domo Circular de 56-Barras	70	2.459	0.17648	1.477	0.01182	5.350	0.05297	18.576	0.08088	3.621	0.01495	1.660	0.01043	17.511	0.1114525		
	300	145.350	1.73075	58.834	0.48725	160.195	1.69023	-	-	-	-	141.124	0.5195	255.759	0.6613583		
Domo Estrelar de 60-Barras	450	216.513	2.58216	145.274	0.99963	-	-	-	-	-	-	199.457	3.59892	-	-		
	32	0.1272	0.0173	0.0943	0.0088	0.1271	0.0118	0.2290	0.0067	0.2385	0.0063	0.1308	0.0086	0.3354	0.0132		
	80	0.6626	0.0351	0.4577	0.0090	2.4061	0.2024	6.6565	0.0470	4.0814	0.0324	0.7799	0.0151	8.0626	0.0391		
	160	1.9411	0.0822	1.2346	0.0920	6.9413	0.5032	10.1067	0.1328	7.1316	0.2754	2.0696	0.0176	38.6231	0.8126		
	280	12.1623	0.4306	3.7196	0.2572	-	-	31.5317	0.1220	22.5434	0.1134	6.8341	0.1324	961.5305	8.5520		

		GRUPO 2															
		Green		Biot		Logarítmica		Hiperbólica		Almansi		Seno-Hiperbólica		Tangente-Hiperbólica			
		Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P	Média	D-P		
Treliça	npi																
Treliça Espacial de 12-Barras	460	0.1625	0.0099	0.1690	0.0136	0.1654	0.0112	0.1661	0.0059	0.1680	0.0138	0.1923	0.0123	0.1818	0.0123		
	1400	33.4877	1.1572	18.2112	0.5249	31.5850	0.5070	-	-	-	-	29.5915	1.2602	28.9624	0.3758		
Treliça Espacial de 25-Barras	250	0.1657	0.0105	0.1673	0.0075	0.1642	0.0080	0.1652	0.0066	0.1672	0.0080	0.1706	0.0115	0.1793	0.0176		
	550	14.1345	0.0863	10.6314	0.3659	-	-	9.4607	0.5736	9.4095	0.2387	10.0893	0.2374	10.7373	0.1404		
Domo Circular de 56-Barras	70	2.3298	0.0806	2.5592	0.1121	4.9823	0.2734	-	-	1.6899	0.0652	1.6409	0.0548	9.5318	0.2892		
	300	150.1683	1.4537	119.6534	1.7557	128.6604	1.3284	-	-	131.8495	1.4958	84.7183	1.2127	98.3761	1.2030		
Domo Estrelar de 60-Barras	450	216.4046	3.0163	196.4181	1.3576	221.5793	2.6326	-	-	259.6207	1.7899	148.1806	1.2614	207.0891	1.6436		
	32	0.1355	0.0086	0.1523	0.0243	0.1598	0.0219	0.1638	0.0191	0.1700	0.0228	0.1694	0.0315	0.1670	0.0269		
	80	0.7784	0.0741	0.7788	0.0535	0.7530	0.0725	2.9075	0.1376	1.7863	0.1254	0.7574	0.0614	0.8205	0.0511		
	160	2.1816	0.1088	2.0748	0.1221	3.0114	0.1544	4.6206	0.1463	3.1982	0.1368	2.0495	0.1440	2.3597	0.2399		
	280	12.0333	0.2522	5.9741	0.2223	5.0401	0.1834	14.0716	0.2642	9.6885	0.1586	6.3371	0.2609	9.0315	0.3237		

Figura A-V.1: Tabelas com os resultados apresentados e discutidos na Subseção 5.2.