

**ESTUDO, CONSIDERAÇÕES E DIFICULDADES NA ANÁLISE
NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Janaina Soraia de Sá Machado Violante

*Aos meus pais
José Geraldo e Creuniz,
minhas irmãs,
Luciana, Karinn e Patricia
e meu marido
Rodrigo.*

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Roberto Marcio da Silva pela orientação, amizade e confiança.

Ao Professor Gray Farias Moita pelas preciosas contribuições e amizade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas e aos amigos do mestrado por todo auxílio recebido e pelo agradável período de convivência do qual sinto muita saudade.

Aos Professores do DEES pela minha formação, pelo estímulo a me enveredar por esta área do conhecimento e pela contribuição para que a Engenharia de Estruturas fizesse parte do meu dia-a-dia.

À amiga Giselle que dentre tantas contribuições me ensinou a tornar as coisas mais simples.

Às minhas irmãs, ao meu marido Rodrigo e a todas as pessoas queridas pelo apoio constante e principalmente por compreenderem as minhas ausências nos últimos tempos.

Acima de tudo eu agradeço aos meus pais pelo amor recebido, pela confiança que sempre tiveram em mim e pelas razões que os levam a abdicar do que for necessário para assistir as conquistas das suas filhas.

A Deus, eu agradeço constantemente pela benção da existência com saúde e paz, e hoje, eu agradeço pela felicidade de ter realizado este trabalho.

RESUMO

Com o objetivo de analisar as estruturas de concreto armado através de modelos que reproduzam o comportamento real desse material, alguns modelos constitutivos têm sido propostos para análises não-lineares via método dos elementos finitos (MEF). Estes modelos procuram incorporar fenômenos como a fissuração, o esmagamento, o *strain-softening*, a interação concreto/aço, o *tension stiffening* dentre outros. Por outro lado, o sucesso alcançado pelas análises lineares de estruturas em geral e pelas análises não-lineares de estruturas de aço, além da multiplicação das facilidades existentes nos programas de análise, têm estimulado o uso das análises não-lineares em estruturas de concreto armado, visando obter soluções para uso prático.

Este trabalho apresenta procedimentos pelos quais aqueles que queiram se dedicar ao trabalho de investigação de estruturas de concreto armado através de análises não-lineares pelo MEF, utilizando os modelos disponíveis nos *software* comerciais, devem passar. Assim, inicialmente faz-se necessário uma fundamentação teórica sobre os modelos para o concreto e os aspectos numéricos que envolvem as análises não-lineares. Em seguida, alguns exemplos são mostrados, fazendo comparações entre os resultados numéricos e experimentais para validar os modelos.

Problemas como as dificuldades numéricas durante o processo de solução das equações não-lineares e os ajustes dos parâmetros associados aos modelos são enfatizados. Os resultados aqui apresentados são mais um indicativo de que os modelos estudados precisam ser melhorados do que uma utilização prática que se possa oferecer.

Palavras-chave: concreto armado; modelos constitutivos; análise não-linear.

ABSTRACT

In the last few years a number of finite element constitutive models for reinforced concrete have been proposed in order to correctly describe the behaviour of this material. These models try to incorporate aspects such as tensile cracking, crushing, strain softening, concrete steel interaction, tension stiffening, amongst others. Moreover, the success of the widely used linear structural analyses and of the nonlinear analyses for steel structures and the advancement of structural analysis software have encouraged the development of nonlinear study of reinforced concrete structures to obtain solutions to be used in practical applications.

This work presents some procedures those that want to investigate the reinforced concrete structures using commercial available finite element software must undertake. Initially it shows various constitutive possibilities to model the reinforced concrete behaviour and the numerical aspects that evolve the nonlinear analysis. Some examples are presented and comparisons are made in order to determine a model that best suits the behaviour expected in this class of material.

Numerical difficulties encountered during the solution of the nonlinear equations and the choice (and adjustment) of the controlling parameters for the models are emphasised. The results of the analyses are more an indication that the models need to be improved than practical application that it could offer at this stage.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 Generalidades	2
1.2 Análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos – Um Breve Histórico	2
1.3 Objetivos	5
1.4 Descrição dos capítulos.....	6
CAPÍTULO 2 – CONCRETO ARMADO.....	8
2.1 Características do concreto	9
2.2 Modelos utilizados para o comportamento do concreto com ênfase na aplicação juntamente com elementos finitos	22
2.2.1 Modelos elásticos	22
2.2.2 Modelos de fratura.....	23
2.2.3 Modelos plásticos.....	30
2.2.4 Modelos baseados na mecânica da fratura	36
2.2.5 Teoria do dano.....	46
2.2.6 Estudos micromecânicos	49
2.2.7 Outros modelos.....	54
2.2.8 A associação do concreto e a armadura.....	55
CAPÍTULO 3 – O <i>SOFTWARE</i> UTILIZADO	69
3.1 Modelos elastoplásticos	70
3.2 Modelo biaxial para o concreto	72
3.3 Modelo de dano	77
3.4 Procedimentos para soluções não-lineares	80
3.5 Elementos utilizados.....	85
3.5.1 Elementos de casca – QSL8	85
3.5.2 Elementos planos – QPM8	86
3.5.3 Elementos de treliça – BAR3	87
CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES.....	88
4.1 Viga analisada numericamente por Proença.....	90
4.2 Viga de Ramaswamy	100
4.3 Laje apoiada nos cantos com carga concentrada	109
4.4 Laje apoiada no contorno.....	117
4.5 Análise dos resultados	124
CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO: LAJES COGUMELO.....	127
5.2. Laje de Silvany	129

CAPÍTULO 6 – COMENTÁRIOS FINAIS 138

BIBLIOGRAFIA 141

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação para a compressão uniaxial	10
Figura 2.2 – Deformação volumétrica	10
Figura 2.3 – Curva tensão-deformação para compressão uniaxial cíclica.....	11
Figura 2.4 – Envoltória de tensões.....	12
Figura 2.5 – Curvas experimentais tensão-deformação para concreto sob (a) compressão biaxial, (b) tração e compressão combinada, e (c) tração biaxial. [Kupfel <i>et al</i> (1969)].....	13
Figura 2.6 – Deformação volumétrica sob compressão biaxial	14
Figura 2.7 – Estados triaxiais.....	15
Figura 2.8 – Comportamento na descarga	15
Figura 2.9 – Superfícies de plastificação e de ruptura	16
Figura 2.10 – Superfície de ruptura no plano desviador	17
Figura 2.11 – Representação das superfícies de ruptura nos planos meridianos e desviadores	19
Figura 2.12 – Relação carga-deslocamento em diferentes métodos de teste	20
Figura 2.13 – Influência da altura do corpo de prova: a) na curva tensão-deformação uniaxial; b) na curva tensão deslocamento pós pico	21
Figura 2.14 – Relação tensão deformação para o concreto fissurado	24
Figura 2.15 – Critérios de ruptura para estados de tração.....	24
Figura 2.16 – Modelo de fissuras e distribuição de tensões no concreto fissurado	26
Figura 2.17 – Sistema local das fissuras numa aproximação de fissuras distribuídas....	27
Figura 2.18 – Critério para fechamento da fissura no concreto simples.....	28
Figura 2.19 – Representação da fissura em um modelo de fissuras discreta	29
Figura 2.20 – Modelo de encruamento não-uniforme desenvolvido por Han e Chen (1985)	31
Figura 2.21 – Modelo de encruamento múltiplo, Ohtani and Chen (1988)	33
Figura 2.22 – Comportamento típicos: (a) Sólido progressivamente fraturado; (b) Teoria do fraturamento plástico.....	34
Figura 2.23 – Exemplo de sensibilidade da malha.....	38
Figura 2.24 – Zona de evolução da fratura	39

Figura 2.25 – Modelo da faixa de fissuração distribuída.....	40
Figura 2.26 – Modelo de amolecimento linear	41
Figura 2.27 – (a) Diagrama tensão de tração-deformação associada à fissura; (b) Diagrama tensão de tração-alongamento	42
Figura 2.28 – Amolecimento linear e bilinear	43
Figura 2.29 – Idealização da região fissurada – Chen (1994).....	44
Figura 2.30 – Efeito da dimensão estrutural	44
Figura 2.31 – Detalhes da massa de concreto: (A) concreto, (B) detalhe da argamassa e (C) interface partículas de areia/pasta de cimento [Chen <i>et al</i> (1993)].....	51
Figura 2.32 – Efeitos da associação entre o aço e concreto: (a) efeito de arrancamento, (b) efeito de enrijecimento a tração e (c) efeito de pino.....	55
Figura 2.33 – Comportamento experimental de barras em tração no concreto. [Proença (1988)].....	56
Figura 2.34 – Distribuição de tensões no concreto fissurado. [Proença (1988)]	56
Figura 2.35 – Critério de carga-descarga do concreto em presença da armadura.....	59
Figura 2.36 – Comparação entre curvas momento-curvatura experimentais com as obtidas utilizando modelos de fissuras fixas e de fissuras rotativas. [Milford (1984)]	61
Figura 2.37 – Representação reológica do concreto fissurado no modelo de Ramswamy (1995), (a) tração uniaxial e (b) caso geral tridimensional.....	62
Figura 2.38 – Representação das armaduras: (a) e (d) distribuída, (b) discreta e (c) embutida.	64
Figura 3.1 Superfícies de escoamento de Mohr Coulomb e de Drucker Prager (a) no espaço das tensões principais e (b) no plano desviador	71
Figura 3.2 – Superfície de ruptura para o modelo de concreto	73
Figura 3.3 – Modelos para fissuras (a) fissura única ou dupla espontânea ortogonal (b) fissura subsequente ortogonal ou não ortogonal	74
Figura 3.4 – Modelos amolecimento. (a) linear e (b) exponencial	74
Figura 3.5 - Modelos de retenção de cisalhamento disponíveis no Lusas	77
Figura 3.6 – Controle de carga pelo método do comprimento de arco modificado de Crisfield.....	83
Figura 3.7 – Configuração nodal do elemento QSL8	86

Figura 3.8 – Configuração nodal do elemento QPM8	86
Figura 3.9 – Configuração nodal do elemento BAR3	87
Figura 4.1 – Detalhamento da viga	90
Figura 4.2 – Discretização da viga.....	91
Figura 4.3 – Diagrama tensão-deformação para o concreto – Critério de von Mises modificado.....	93
Figura 4.4 – Relação entre carga e deslocamento na seção central	94
Figura 4.5 – Variação das tensões normais na camada de concreto mais tracionada da seção central	97
Figura 4.6 – Variação das tensões normais de tração na camada de aço da seção central	98
Figura 4.7 – Variação das tensões normais na camada de concreto mais comprimida da seção central	99
Figura 4.8 – Detalhamento da viga.....	100
Figura 4.9 – Discretização da viga – Elementos planos (QPM8) e Elementos de Casca (QSL8).....	101
Figura 4.10 – Diagrama tensão-deformação para o concreto – Critério de von Mises modificado.....	103
Figura 4.11 – Relação entre carga e deslocamento na seção central	104
Figura 4.12 – Evolução das tensões com o carregamento– (a) Elementos de casca (b) Elementos Planos	106
Figura 4.13 – Panorama da fissuração – Elemento de estado plano de tensão $G_f=400\text{N/m}$. (a) Carga = 20kN; (b)Carga = 70kN.....	108
Figura 4.14 – Laje apoiada nos cantos.....	109
Figura 4.15 – Diagrama tensão-deformação para o concreto – Critério de von Mises modificado.....	111
Figura 4.16 – Relação entre carga e deslocamento no ponto 1.....	112
Figura 4.17 -- (a) Variação de M_y/P ao longo de AC; (b) Panorama da fissuração para $P=1.6, 2.4$ e 3.2 kips.	116
Figura 4.18 – Laje apoiada no contorno	117
Figura 4.19 -- Relação entre carga e deslocamento no centro da laje.	120

Figura 4.20 – Verificação nos pontos de Gauss para carga de 180kN, admitindo para as camadas de concreto: a) Modelo de concreto; b) Modelo elastoplástico.....	122
Figura 4.21 – Modelo sugerido por Noguchi <i>et al</i> (1993)	123
Figura 5.1 – Forma do pavimento.....	129
Figura 5.2 – Malha utilizada nas análises	131
Figura 5.3 – Momento mx – Análise linear [kN.m/m]	132
Figura 5.4 – Momento mx – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=8.40\text{cm}^2/\text{m}$	133
Figura 5.5 – Momento mx – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=7.35\text{cm}^2/\text{m}$	133
Figura 5.6 – Momento mx – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=6.30\text{cm}^2/\text{m}$	134
Figura 5.7 – Momento mx – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=5.04\text{cm}^2/\text{m}$	134
Tabela 5.1 – Comparação dos deslocamentos máximos obtidos.....	135
Figura 5.8 – Distribuição das armaduras nas análises com armadura positiva e negativa	136

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

O sucesso de uma análise de estruturas de concreto armado depende da habilidade em se definir pontos importantes na descrição do comportamento do material e os valores das propriedades deste material que influenciam o problema considerado. Com este objetivo esses tipos de estruturas vêm sendo analisadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) há mais de 30 anos.

No entanto, definir um modelo constitutivo que considere as complexidades que envolvem o concreto armado é uma tarefa bastante elaborada. Muitas das dificuldades que surgem se devem às propriedades distintas de seus materiais componentes e do trabalho destes em conjunto. O aço possui um comportamento inicialmente elástico, com módulo aproximadamente constante, resistência à tração e compressão semelhantes, ausência de retração e fluência sob temperatura ambiente e efeito Bauschinger sob ação de ciclos de cargas. Sendo assim, para o aço uma relação constitutiva inicialmente elástica até o limite de resistência, seguida de um comportamento elastoplástico perfeito fornece bons resultados em análises pelo MEF.

O concreto por sua vez é um material heterogêneo que sofre alterações em suas propriedades ao longo do tempo, possui boa resistência à compressão e baixa resistência à tração, levando à fissuração do material, e sofre deformações provocadas por retração. Como fonte de complicações pode-se citar ainda a fragilidade do material com deformações últimas limitadas, o comportamento sob cargas dinâmicas com ciclos de histerese e degradação da rigidez e da

resistência. Assim, modelos de elasticidade não-linear, plasticidade, mecânica da fratura e do dano são utilizados para tentar representar corretamente o comportamento de tal material.

A interface concreto armadura possui características como a aderência imperfeita, com deslizamento relativo entre ambos que tende a aumentar sob a atuação de ciclos de carga e descarga, a contribuição do concreto tracionado entre fissuras e o efeito de pino que contribuem para um comportamento ainda mais complexo.

Como visto, o concreto armado possui características altamente não-lineares o que levam a questionar o uso de análises lineares em alguns tipos de estruturas. Entretanto a análise não-linear requer um uso amplo de métodos computacionais e manipulação de grande quantidade de dados que em geral não é compatível com a praticidade e demanda de tempo.

Dessa forma as análises não-lineares ainda não servem como uma ferramenta de dimensionamento para uso corrente pelos projetistas de concreto armado. No entanto tratam-se de ferramenta precisa para: verificar a segurança da estrutura para cargas de serviço, permitir ao pesquisador investigar a natureza da ruptura de algum novo sistema estrutural ou detectar subseqüentes eventos de ruptura associados com algum detalhe estrutural.

1.2 Análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos – Um Breve Histórico

O MEF tem se estabelecido como o mais promissor método para análise estrutural. Trata-se de uma ferramenta poderosa que permite ao analista considerar as mais variadas condições de apoio e carregamento, irregularidades geométricas da estrutura, incluindo também as não-linearidades geométricas e físicas do material, sendo assim capaz de prever a resposta global de toda a estrutura.

No entanto, pode-se por vezes encontrar uma realidade em que o método é aplicado sem o devido conhecimento da teoria em que se baseia, tornando o analista mero preparador de dados para o programa empregado, incapaz de compreender a ligação entre tais dados e os resultados obtidos. Isto é particularmente importante no caso de análise não-linear, que por não se tratar

de um processo corriqueiro, requer do analista um grande conhecimento do comportamento do concreto armado e das técnicas de análise utilizando-se elementos finitos. Nestas análises estão presentes a imprecisão associada à escolha do modelo constitutivo adequado ao comportamento do material, à escolha do elemento finito e da malha adequados, além da imprecisão associada ao processo incremental das soluções das equações não-lineares.

Em se tratando de estruturas de concreto armado existem ainda uma série de dificuldades inerentes à sua aplicação, que serão apresentadas ao longo deste trabalho. Tais problemas originam-se por tratar de um material composto, em que os constituintes possuem propriedades bastante diferentes, conforme introduzido no item anterior.

A implementação das propriedades não-lineares do concreto e da armadura em análises em elementos finitos foi feita inicialmente por Ngo e Scordelis (1967)¹. Trata-se do estudo de uma viga simplesmente apoiada submetida a duas cargas concentradas, em que as armaduras foram discretizadas em elementos de treliça e a fissuração considerada através de alterações na malha dos elementos finitos.

Usando o mesmo procedimento, Scordelis *et al* (1974)¹ estudaram o cisalhamento em uma viga simplesmente apoiada, submetida a uma carga concentrada no ponto central. Neste estudo as tensões foram determinadas considerando os estribos, o efeito de pino, o intertravamento dos agregados e o escorregamento da armadura próximo aos apoios.

Com o intuito de definir o estado de fissuração em estudos de reatores nucleares em concreto protendido, Rashid (1968)¹ propôs que a fissuração fosse considerada através da alteração da matriz constitutiva e não mais por meio de redefinições na malha.

A fissuração é o fenômeno mais importante do comportamento do concreto armado. Sua formação, e a conseqüente redistribuição de tensões, tem uma grande influência no comportamento das estruturas, o que resulta em um grande número de estudos relacionados ao tema.

A inclusão da fissuração pela modificação das propriedades do material foi inicialmente aplicada em problemas de estado plano de tensões por

¹ *Apud* Noguchi *et al* (1993)

Cervenka (1970)¹. Com a fissuração, a tensão de tração na direção normal à fissura é reduzida, tornando-se um material ortotrópico. Devido a não-linearidade na compressão, introduziu também em seu modelo a teoria da plasticidade utilizando o critério de von Mises.

O estudo de placas pelo método dos elementos finitos foi um passo importante dadas as dificuldades para se obter soluções analíticas, principalmente nos casos de geometria e condições de apoio variadas. O trabalho de Jofriet e McNeice (1971) utilizou uma seção efetiva na consideração da fissuração utilizando elementos de placas. A utilização de elementos estratificados na análise de placas e cascas foi feita inicialmente por Scanlon (1971)¹, Hand *et al* (1973) e Lin (1973)¹ em trabalhos independentes, sendo adotado um modelo de fissuração dispersa e para a compressão, utilizado o critério de von Mises com uma deformação limite. Scanlon incorporou, além dos efeitos de fissuração dispersa, a deformação lenta, a retração e o enrijecimento do concreto tracionado entre fissuras (*tension stiffening*) em seu modelo de laje. Cope *et al* (1981), Rahman (1982)¹ e Cope (1984)¹ também utilizaram elementos estratificados em estudos de laje.

Gilbert e Warner (1978)¹ estudaram diversas maneiras de considerar *tension stiffening* em seu modelo de laje, seja através da alteração da relação tensão-deformação para o concreto ou aumentando o módulo de elasticidade do aço. A necessidade de inclusão do *tension stiffening* foi observada por vários pesquisadores visto que proporciona um comportamento carga-deslocamento sem perdas bruscas de rigidez ou quebras violentas que ocorre ao se considerar nula a resistência pós fissuração. Mang e Floegl (1981)¹ introduziram o *tension stiffening* na análise de cascas.

A necessidade de um modelo de fissuras dispersas rotacionadas apresentou-se a partir de observações de que, em painéis com taxas de armaduras diferentes nas duas direções, as fissuras subsequentes apresentavam-se giradas em relação as fissuras iniciais, e modelos de fissuras com direções fixas levavam a estrutura à um comportamento mais rígido. Os trabalho de Milford e Schnobrich (1984)¹, Gupta e Akbar (1984)¹ e Crisfield e Wills (1989)

¹ *Apud* Noguchi *et al* (1993)

introduziram as fissuras rotacionadas obtendo resultados melhores quando comparados às fissuras fixas para os painéis testados por Vecchio e Collins (1982)¹. O uso de elementos de placas de Mindlin foi aplicado por Milford e Schnobrich (1984)¹ e Rahman (1982)¹ com a vantagem de incluir as deformações transversais de cisalhamento. Kabir (1976)¹, Chan (1983)¹ e Gallegos e Schnobrich (1988)¹ introduziram os efeitos de deformação lenta e retração, apresentando a conseqüente redução da capacidade de carga em cascas hiperbólicas.

Nos capítulos seguintes serão apresentados muitos dos procedimentos via elementos finitos utilizados na determinação do comportamento de estruturas de concreto armado. Como poderá ser visto, muitas das questões relacionadas ao tema ainda estão em aberto, principalmente no caso de estruturas com condições geométricas e de carregamento diversas das comuns. Nestes casos, os resultados de análises não-lineares só serão confiáveis quando o comportamento do concreto e do aço for completamente entendido e adequadamente modelado. Para isto é necessário uma sólida base de dados experimentais. Entretanto existem também divergência de opiniões na interpretação destes resultados.

1.3 Objetivos

O presente trabalho inicialmente objetivava o estudo dos deslocamentos transversais de pavimentos em laje cogumelo através de análises não-lineares utilizando o software LUSAS (1997). O conceito de se utilizar um modelo constitutivo que representasse com fidelidade o comportamento do concreto e sua interação com o aço em uma análise não-linear, em que a espessura da estrutura seria composta por estratos de ambos os materiais com compatibilidade de deformações, apresentava-se bastante claro. Assim, a linha de estudo seria definir dentre os modelos constitutivos disponíveis aqueles que apresentassem os resultados que mais se aproximassem dos resultados experimentais. No entanto, nas análises realizadas foram detectados alguns problemas, seja relacionado com o método numérico de solução das equações não-lineares, seja com o próprio significado das constantes envolvidas nos modelos

¹ *Apud* Noguchi *et al* (1993)

constitutivos disponíveis ou seja pela inexperiência com o uso das técnicas de análises não-lineares. Com isso o objetivo inicial deste trabalho foi prejudicado.

Assim, fez-se necessário um estudo dos aspectos de formulação e numéricos-computacionais dos diversos modelos para análises com não-linearidades físicas de estruturas de concreto armado, buscando também, obter recomendações que pudessem sanar as dificuldades encontradas.

Pretende-se então, apresentar qualitativamente alguns dos modelos de não-linearidade física do concreto armado. O conteúdo apresentado foi desenvolvido com base nos trabalhos de Proença (1988), Chen e Han (1988), ASCE (1993), Chen (1994) e Chen e Salceeb (1994). Conseqüentemente, a maior parte das figuras aqui apresentadas são originárias daqueles trabalhos.

Utilizando o software citado e explorando os modelos oferecidos, uma série de análises desenvolvidas serão apresentadas fazendo sempre que possível comparações com resultados experimentais.

Além disso, o trabalho objetiva nortear as ações que devem ser seguidas em análises de estruturas de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos. Através das considerações gerais mostradas, os problemas e as principais dificuldades que podem ser minimizados ou, em alguns casos, sanados. Além disto, recomendações sobre a metodologia de análise são explicitadas, ressaltando os cuidados a serem tomados e os passos que devem ser evitados.

1.4 Descrição dos capítulos

O conteúdo geral, o objetivo e a descrição da dissertação estão apresentados neste primeiro capítulo. No capítulo seguinte apresenta-se o vasto tema do concreto armado, com suas características e os modelos utilizados para representação do seu comportamento.

No capítulo 3 são apresentados os recursos utilizados nas análises disponíveis no programa Lusas, referentes aos elementos, aos modelos constitutivos e aos aspectos numéricos da solução do problema incremental-iterativo.

O capítulo 4 apresenta uma série de exemplos processados, fazendo comparações com os resultados experimentais disponíveis e com resultados

teóricos obtidos por outros autores com a aplicação de modelos mais complexos.

Uma aplicação específica da análise não-linear à estruturas de lajes cogumelo é abordada no capítulo 5.

No capítulo 6 apresentam-se os comentários finais e as sugestões para continuação do trabalho e finalmente a bibliografia. A complexidade do tema, que o torna mais atraente, além do contínuo avanço nos métodos numéricos, requer um aprofundamento constante nos estudos.

CAPÍTULO 2 – CONCRETO ARMADO

Na tentativa de se estabelecer modelos matemáticos que descrevam o comportamento real do concreto armado, uma linha de pesquisa comumente utilizada é a baseada nos princípios da mecânica do contínuo, em que a microestrutura do concreto é desconsiderada. Assim modelos de elasticidade não-linear, plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano mostram-se adequados na descrição do comportamento macroscópico da tensão e deformação do concreto.

No entanto, o conhecimento da microestrutura do concreto é fundamental na avaliação dos fenômenos observados durante os ensaios dos corpos de prova, para que assim possam ser reproduzidos nos modelos constitutivos do concreto em nível macroscópico.

Uma das primeiras dificuldades encontradas nas análises de estruturas de concreto armado é a determinação das propriedades mecânicas do concreto, para que, uma vez conhecidas, possam ser adequadamente modeladas. Tais propriedades são obtidas através de ensaios em corpos de provas. Segundo Chen *et al* (1993) algumas das propriedades encontradas podem ser consideradas mais características do corpo de prova, ou da estrutura, do que do material, principalmente no caso do amolecimento, como será visto posteriormente.

Na seção que se segue estão apresentados os vários comportamentos observados em ensaios de corpos de prova de concreto submetidos a diferentes estados de tensões.

2.1 Características do concreto

O concreto é um material formado por um conjunto de agregados, de diferentes tamanhos, embebidos em uma pasta de cimento. Esta constituição leva a existência de um grande número de microfissuras no contato entre os agregados graúdos e a argamassa e de uma grande quantidade de poros preenchidos com água e ar na pasta de cimento. A propagação destas microfissuras durante o carregamento contribui para o comportamento não-linear do concreto em níveis baixos de tensão e causa a expansão volumétrica próximo a ruptura em ensaios de compressão. A existência dos poros e vazios afetam o comportamento e a resistência do concreto em altas pressões hidrostáticas.

Mesmo antes da aplicação de qualquer carregamento o concreto possui ainda uma série de microfissuras que são causadas pela segregação, retração ou pela expansão térmica na argamassa. Devido a diferença de rigidez entre os agregados e a argamassa, estas microfissuras se desenvolvem com o carregamento, o que justifica a baixa resistência à tração do concreto.

A figura 2.1 apresenta a curva tensão-deformação obtida em um ensaio de compressão uniaxial. Para valores de tensões até 30% da resistência à compressão (f_c) o comportamento é elástico linear, caracterizado pela presença de microfissuras estáveis que não sofrem alterações com o carregamento. Entre 30 e 75% de f_c , passam a ocorrer escorregamentos na pasta de cimento que levam a propagação das fissuras, ainda de maneira estável, pois o comprimento de cada uma delas fica praticamente inalterado se o nível de tensão permanece constante. A partir deste nível de tensão inicia-se o processo de propagação instável das fissuras. A ruptura próximo a f_c é causada principalmente pela microfissuração na argamassa na direção da tensão aplicada. Estas microfissuras se unem às microfissuras de aderência (as microfissuras que desenvolvem-se entre os agregados e a argamassa), e formam regiões de dano interno, resultando nas fissuras propriamente ditas. Após esta fase, a curva apresenta uma parte descendente até uma deformação última (ϵ_u), para a qual ocorre a ruptura por esmagamento.

A forma da curva é similar para concretos de diferentes resistências, podendo-se fazer, no entanto, algumas distinções. Para concreto de alta resistência a porção linear

da curva se estende a níveis superiores de tensão, porém o pico de tensão corresponde a deformações da ordem de 2 ‰ em todos os casos, além disso apresenta uma perda brusca de resistência após a tensão máxima.

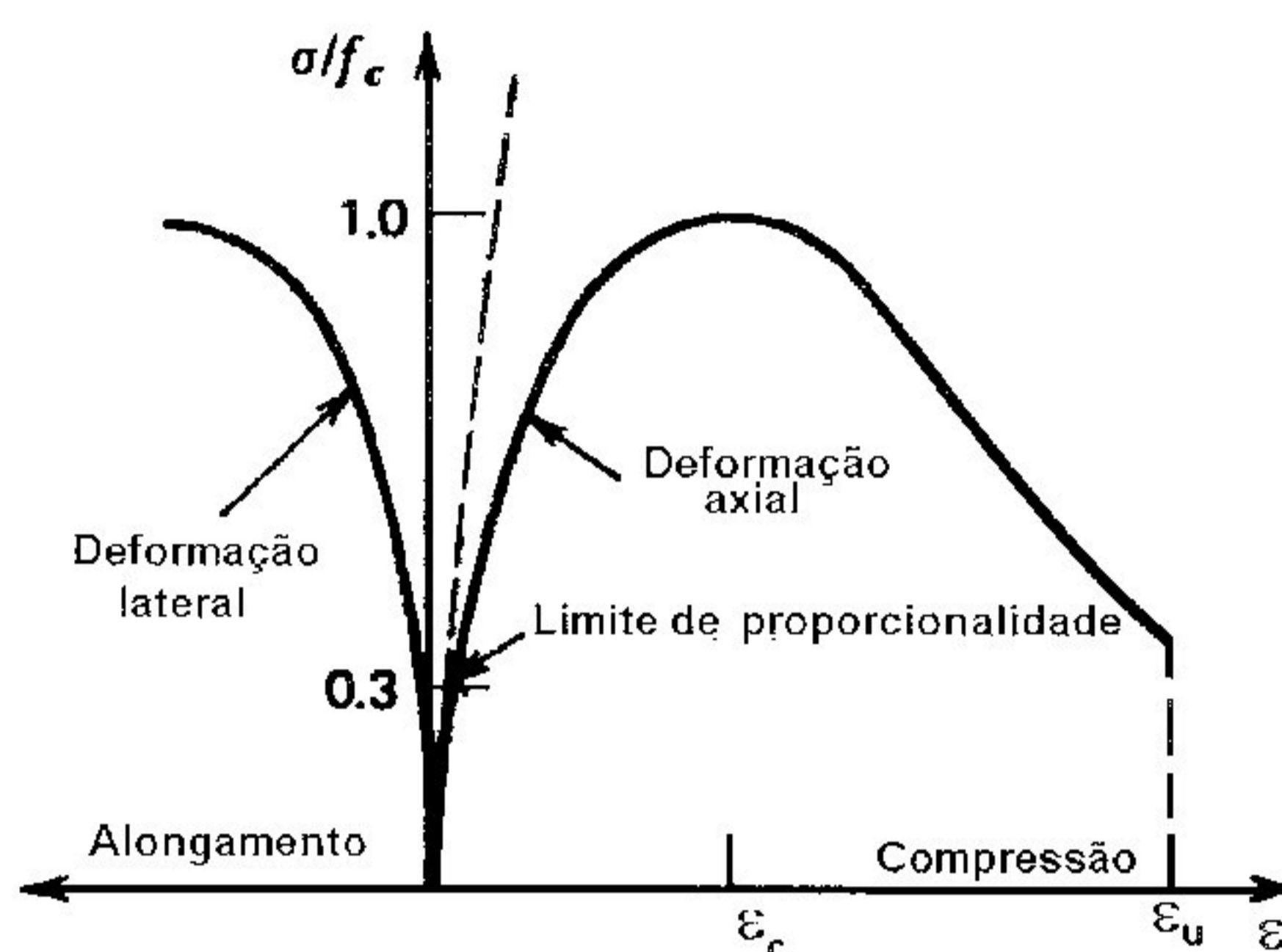


Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação para a compressão uniaxial

A figura 2.2 apresenta o comportamento praticamente linear da deformação volumétrica até 0.75 de f_c , onde a redução do volume é aproximadamente proporcional ao acréscimo de tensão. A partir deste valor o sentido da deformação volumétrica se inverte, resultando na expansão próximo à f_c . Esta dilatação é causada por uma grande expansão transversal que, segundo Barnard (1964)¹, na região de amolecimento chega a ser dez vezes superior à deformação axial. Apesar de ser uma característica dominante observada experimentalmente, a dilatação volumétrica ainda não tem sua importância amplamente reconhecida nas análises estruturais.

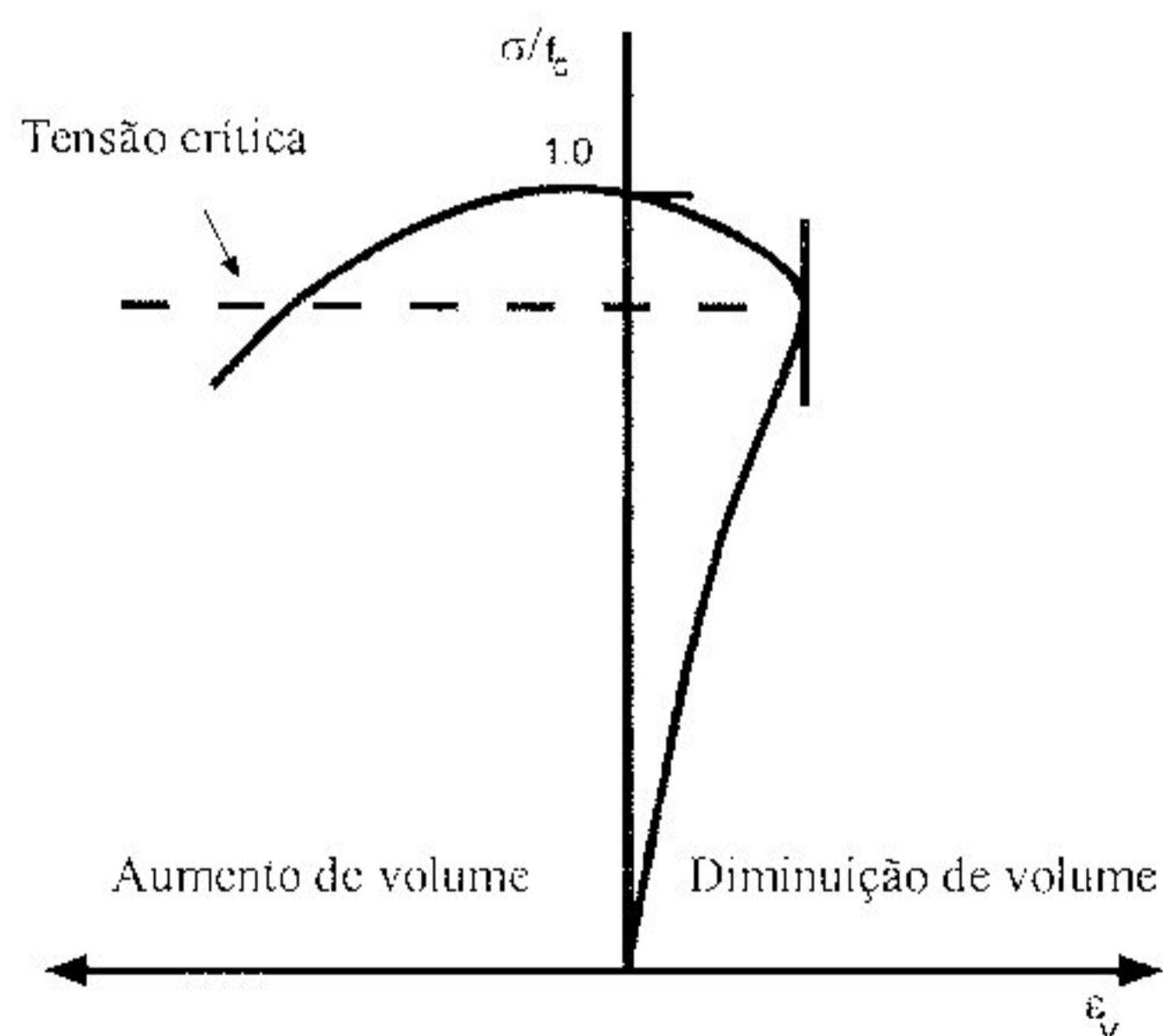


Figura 2.2 – Deformação volumétrica

¹ Apud Chen *et al* (1993)

Ainda nos ensaios de resistência à compressão uniaxial, observa-se que o módulo de elasticidade inicial do concreto depende da resistência à compressão. Com base nos dados obtidos em testes, as diversas normas sugerem fórmulas empíricas para a sua determinação, geralmente como função da resistência à compressão. O coeficiente de Poisson varia entre 0.15 e 0.22, sendo adotado o valor representativo 0.20 em muitas aplicações práticas.

No comportamento do concreto sob tração uniaxial, observa-se que para estados de tensões inferiores a 60% da resistência à tração, f_t , a evolução de novas microfissuras é desprezível. O intervalo de propagação estável das fissuras é relativamente menor do que na compressão. O início da propagação instável das fissuras se dá para tensões da ordem de 75 % de f_t . A direção de propagação da fissura é transversal à direção da tensão. A ruptura é causada pela união das fissuras e não pela quantidade de fissuras como na compressão. A porção descendente da curva tensão-deformação é difícil de ser acompanhada em testes devido a rápida propagação das fissuras nesta fase.

A relação entre as resistências à tração e à compressão uniaxiais varia entre 5 e 10%. O módulo de elasticidade à tração é um pouco maior, e o coeficiente de Poisson um pouco menor do que na compressão uniaxial.

Outro comportamento observado no concreto é que, sob ciclos de carga e descarga, ocorre a degradação da rigidez elástica com o aumento da deformação, conforme mostra a figura 2.3.

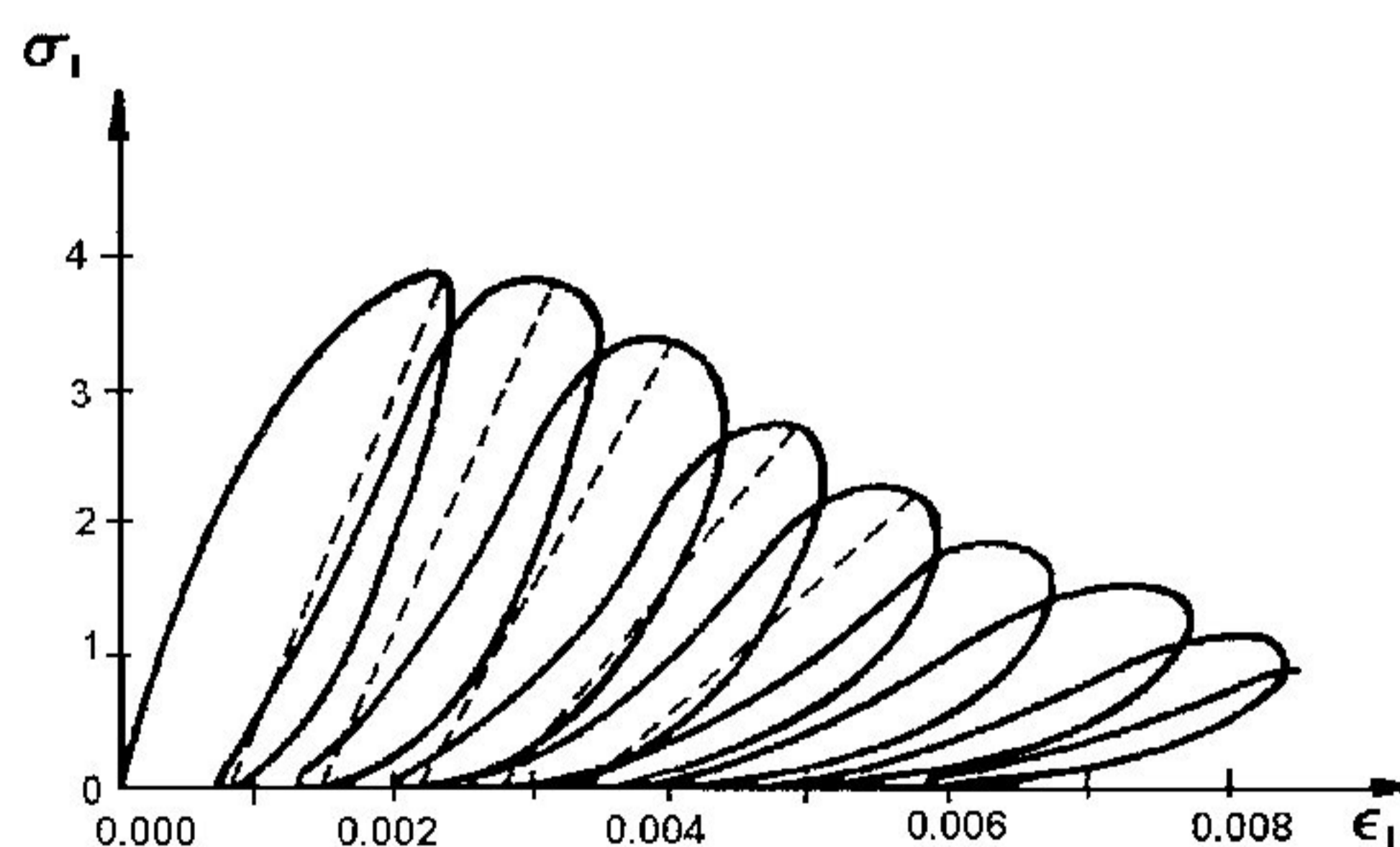


Figura 2.3 – Curva tensão-deformação para compressão uniaxial cíclica

O comportamento do concreto em estados biaxiais de tensão varia de acordo com a combinação das solicitações. Conforme pode ser visto na figura 2.4, a tensão de

compressão limite aumenta em até 25% num estado de compressão biaxial em relação à compressão uniaxial quando $\sigma_2/\sigma_1=0.5$.

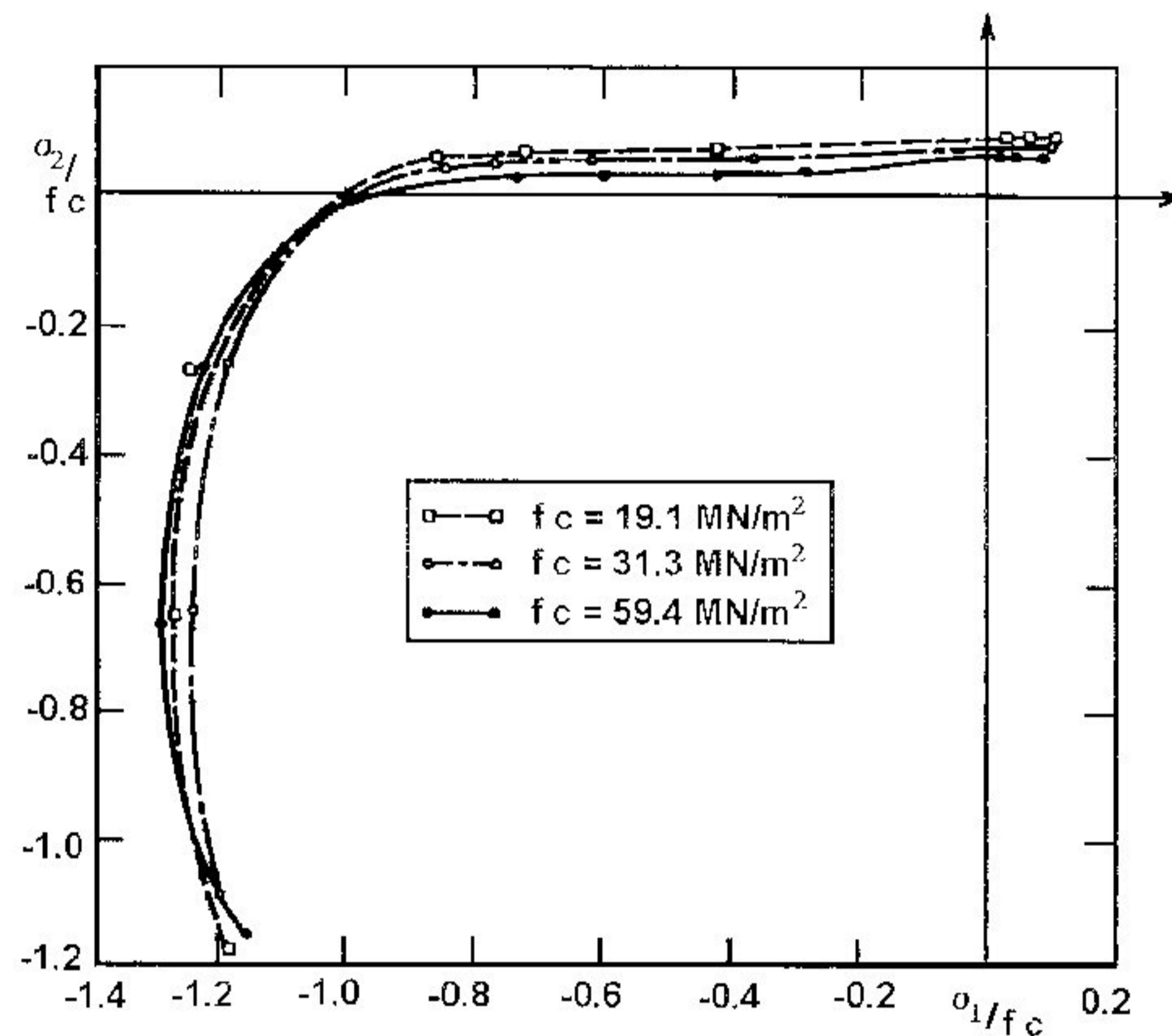


Figura 2.4 – Envoltória de tensões

Sob estados de tração-compressão, a resistência à compressão decresce de forma aproximadamente linear com o acréscimo da tensão de tração. Na tração biaxial, a resistência é praticamente a mesma que a uniaxial. A ductilidade do concreto aumenta na compressão biaxial e diminui quando ocorre tensões de tração, conforme mostrado na figura 2.5.

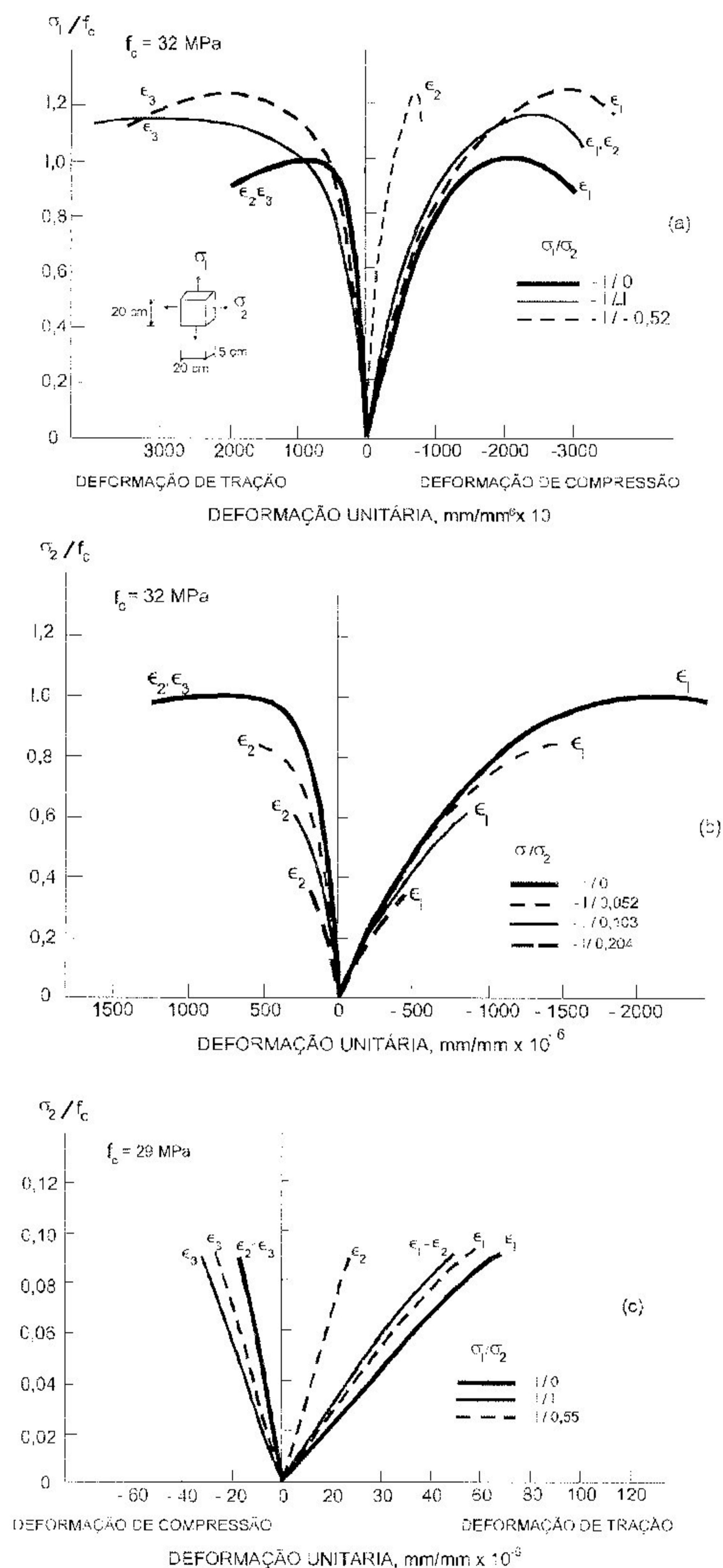


Figura 2.5 – Curvas experimentais tensão-deformação para concreto sob (a) compressão biaxial, (b) tração e compressão combinada, e (c) tração biaxial. [Kupfel *et al* (1969)]¹

Próximo à resistência limite, ocorre o fenômeno da dilatação em que há um

aumento de volume com o acréscimo das tensões de compressão em estados de compressão biaxial, similarmente ao apresentado para o caso uniaxial, conforme observado na figura 2.6.

A ruptura do concreto sob estado de tensão biaxial ocorre por separação ortogonal à direção de tensão de tração máxima ou de deformação (alongamento) máxima. As deformações de tração são de fundamental importância na determinação do critério de ruptura e dos mecanismos de ruptura do concreto.

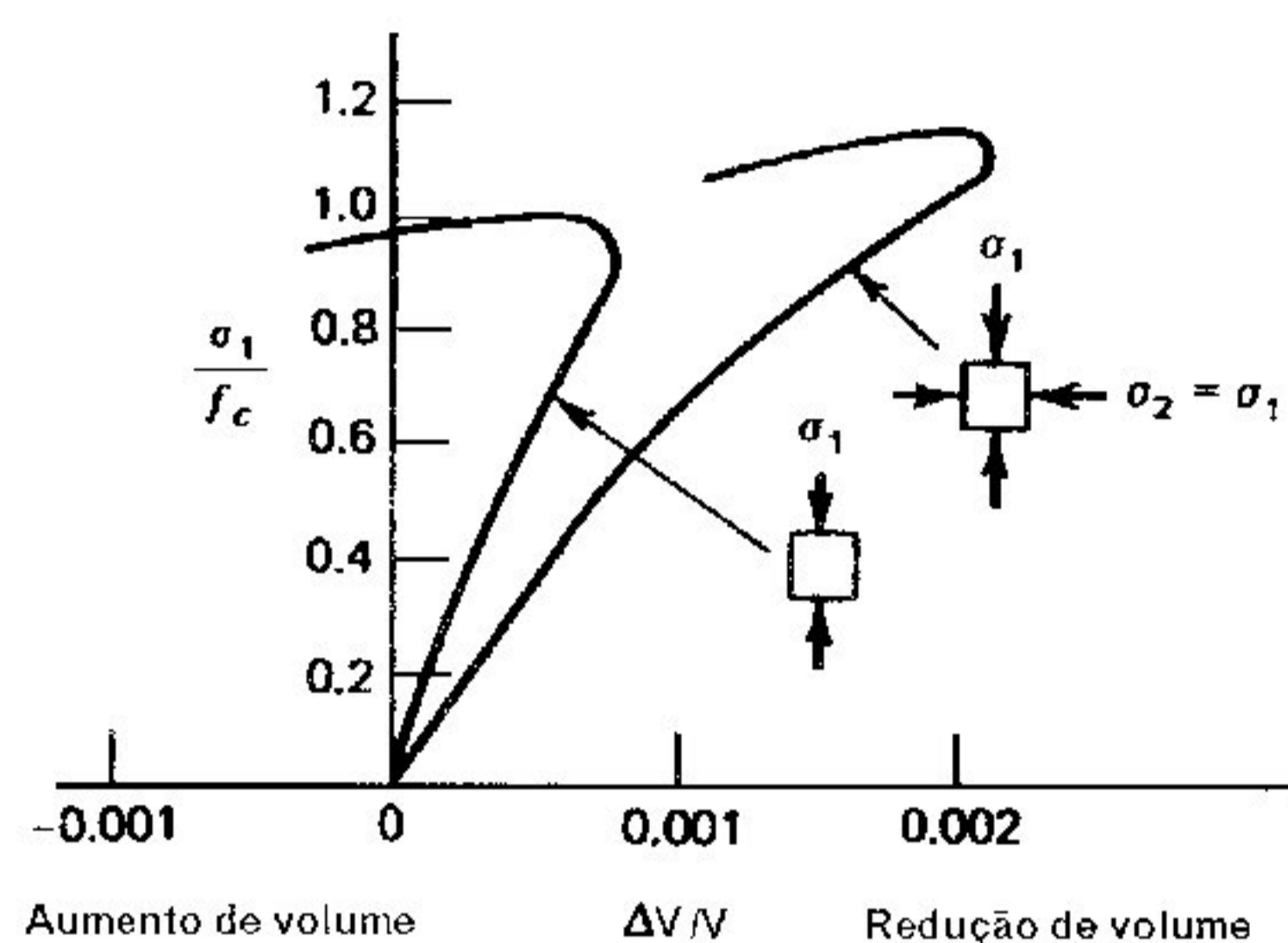


Figura 2.6 – Deformação volumétrica sob compressão biaxial

A figura 2.7 mostra a curva tensão-deformação para estados de tensão triaxiais. Conforme observado, a resistência axial cresce com a pressão de confinamento (volumétrica ou hidrostática) acompanhado de certa ductilidade. No entanto, acima de certos valores de tensão de confinamento, há uma inversão no comportamento ocorrendo a diminuição da ductilidade. Dependendo da tensão de confinamento, o concreto pode apresentar comportamento quase frágil, plástico com amolecimento ou plástico com endurecimento. Isto ocorre porque sob tensões hidrostáticas elevadas, a possibilidade de ruptura por fissuração na interface agregado-argamassa é menor e o modo de ruptura passa a ser o esmagamento da pasta de cimento.

¹ Apud Mehta et al (1994)

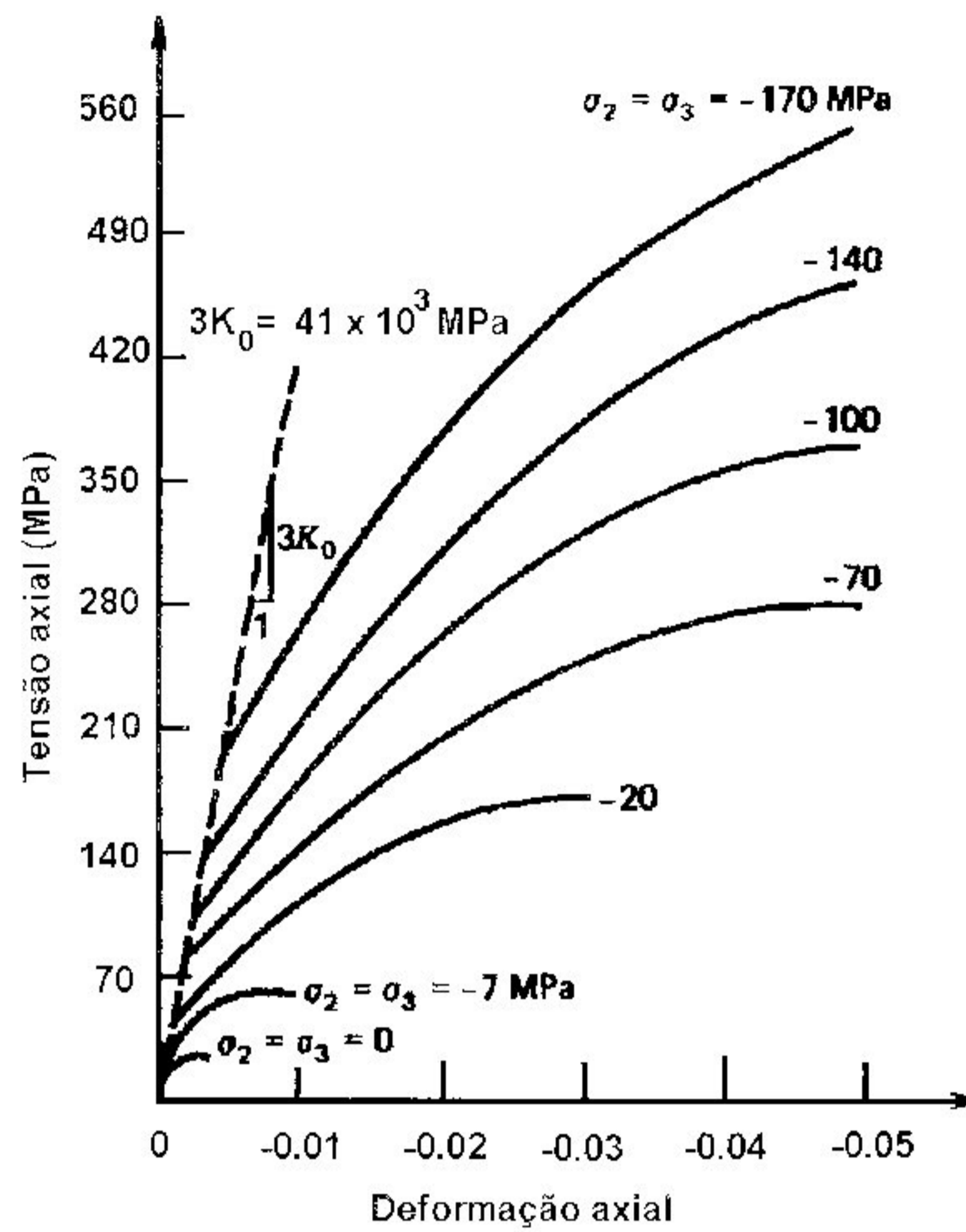


Figura 2.7 – Estados triaxiais

A análise da figura 2.8 mostra o comportamento não-linear do concreto sob compressão hidrostática em que a descarga se dá segundo uma tangente muito próxima da tangente inicial em carga, ocorrendo perda de rigidez para valores baixos do carregamento ao final desse processo.

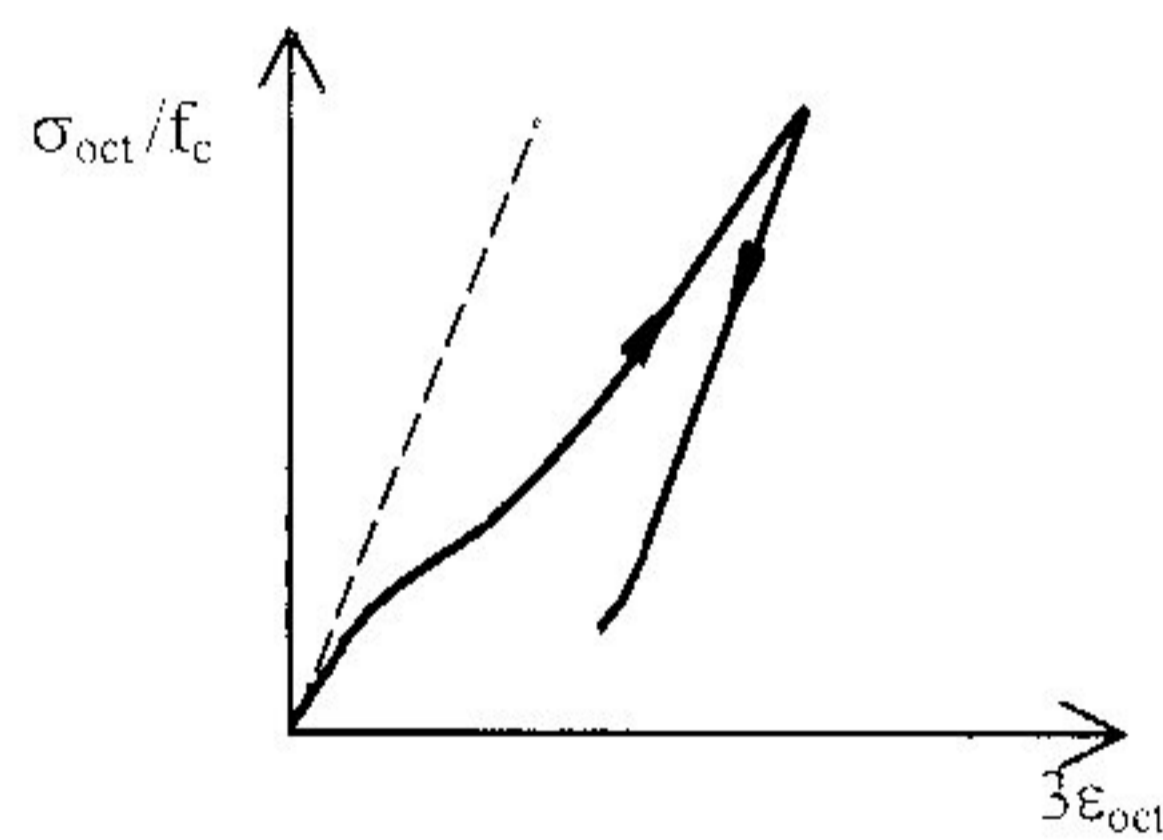


Figura 2.8 – Comportamento na descarga

Estas observações do comportamento do concreto quando submetido a estados multiaxiais de tensões, indicam que o estabelecimento da resistência do concreto somente pode ser feito considerando a interação das várias componentes de tensões através de uma superfície de ruptura conforme a apresentada na figura 2.9. Nesta figura podem ser vistas as superfícies de limite elástico e de ruptura no espaço tridimensional das tensões principais.

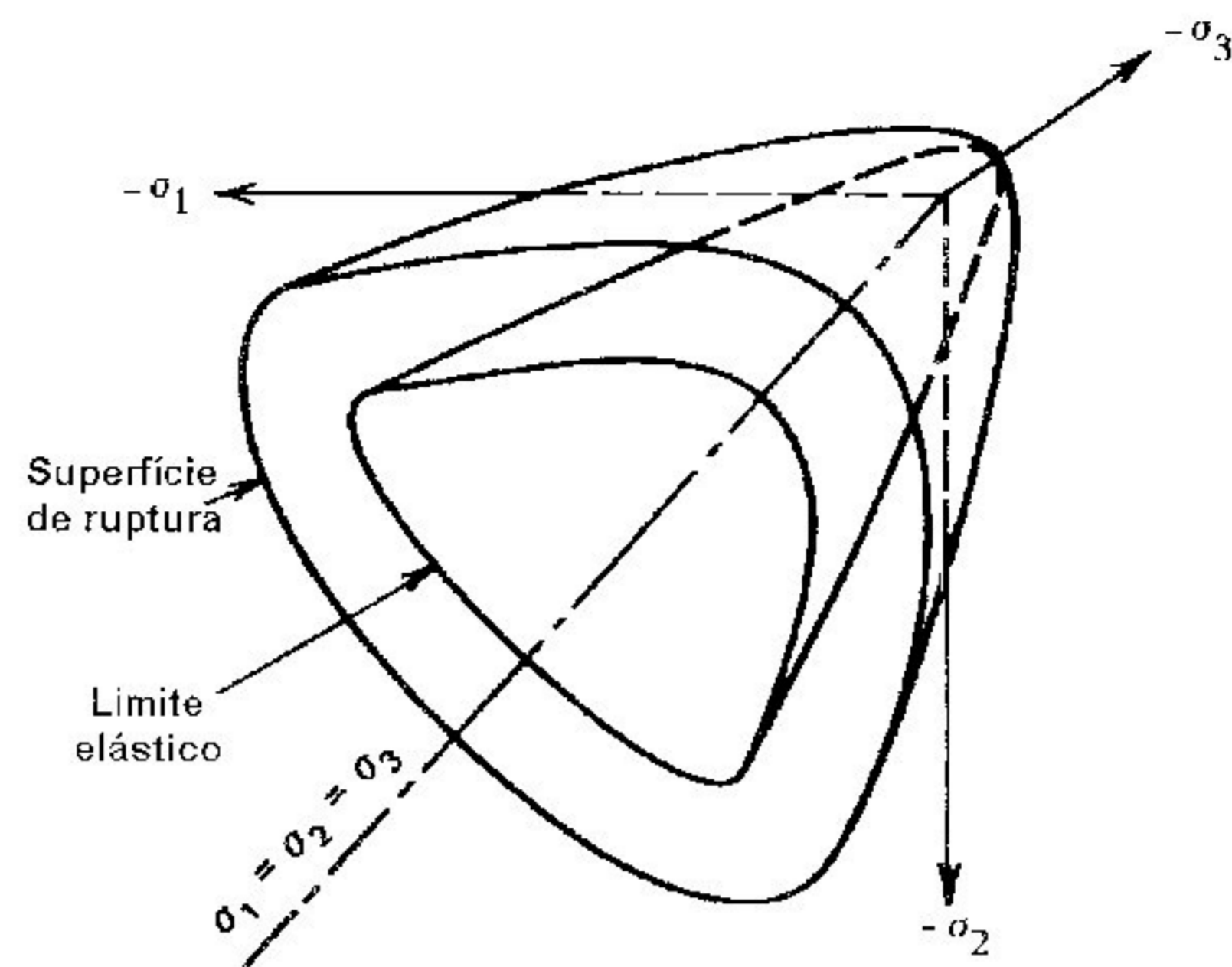


Figura 2.9 – Superfícies de plastificação e de ruptura

De maneira geral, o concreto apresenta dois tipos distintos de ruptura. Uma ruptura frágil por tração ocasionada pela formação de fissuras e a conseqüente perda da resistência normal à direção da fissura e uma ruptura dúctil por compressão, o esmagamento, ocasionada pela superação da coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento caracterizada por grande quantidade de microfissuras.

Sabe-se que um critério de ruptura para materiais isotrópicos baseado em estados de tensões deve ser uma função invariante do estado de tensão. Essa função pode ser expressa em termos das tensões principais $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, dos invariantes de tensão $f(I_1, J_2, J_3) = 0$ ou com o emprego das coordenadas de Haig-Westergaad $f(\xi, \rho, \theta) = 0$.

A forma geral da superfície de ruptura no espaço tridimensional das tensões pode ser descrita pelas formas de sua seção transversal, nos planos desviadores, e pelas formas de seus meridianos, nos planos meridionais. No caso do concreto, para compressões hidrostáticas crescentes, a seção no plano desviador tende a uma forma circular. Para baixos valores de compressão hidrostática as seções são convexas e não circulares.

Para um material isotrópico a seção transversal deve ter três ramos de simetria, como mostra a figura 2.10. Assim, na determinação experimental da superfície é necessário conhecer o setor $0 \leq \theta \leq 60^\circ$.

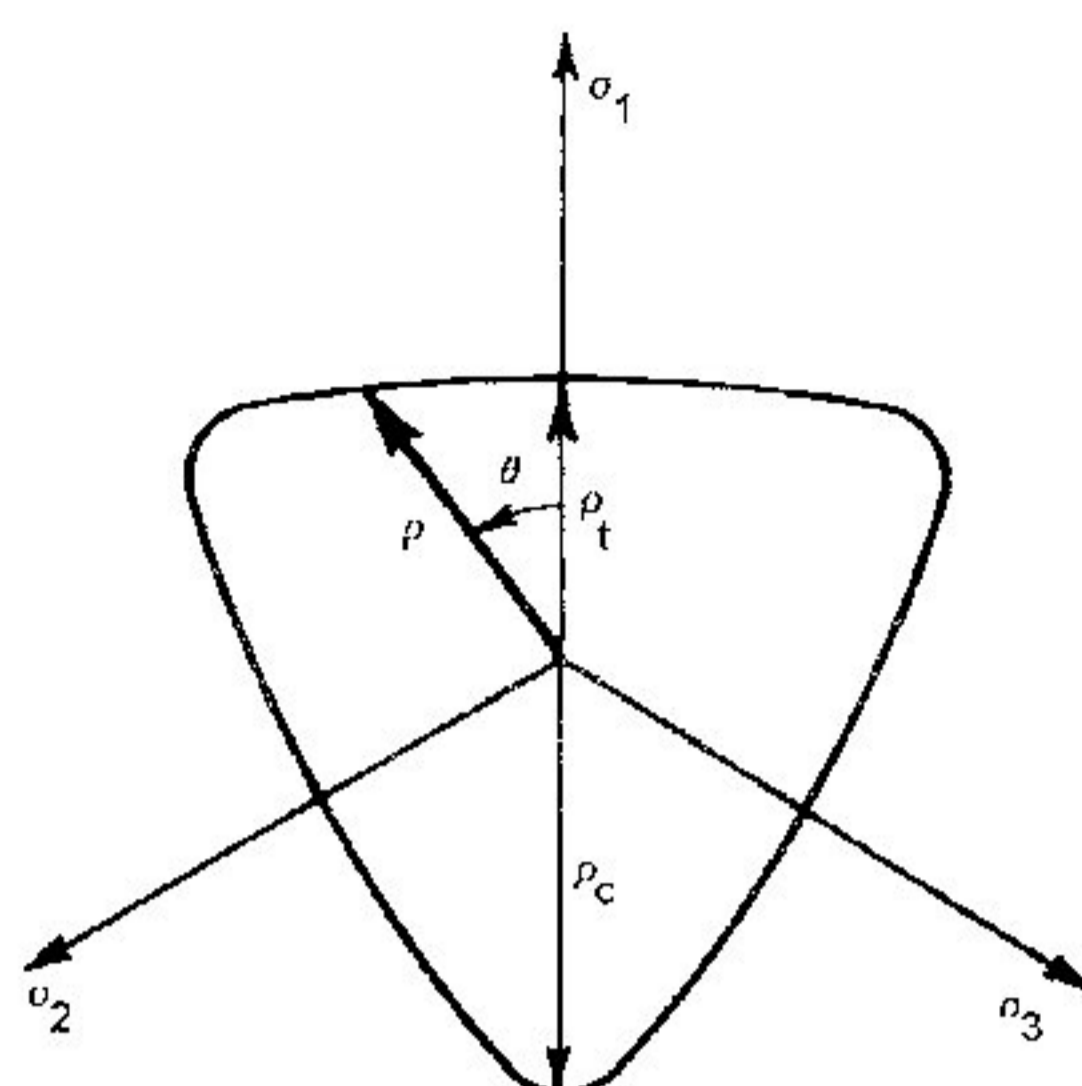


Figura 2.10 – Superfície de ruptura no plano desviador

No plano desviador, observa-se experimentalmente que a superfície é regular e convexa para tensões de compressão e é aproximadamente triangular para pequenas tensões de compressão ou de tração, tornando-se mais circular para altas tensões de compressão. No plano meridional, observa-se que a superfície de ruptura é dependente da componente hidrostática de tensão, é curva, regular e convexa e, sob carregamento hidrostático puro, não causa ruptura.

A partir destas características gerais da superfície de ruptura, uma série de critérios de ruptura são propostos para o concreto. A maioria destes são definidos no espaço de tensão por um número de constantes do material que variam de um a cinco parâmetros.

Quando submetido à ruptura brusca por tensões de tração ou baixas tensões de compressão o critério da máxima tensão de tração de Rankine mostra-se adequado. Para elevadas pressões hidrostáticas, quando ocorre uma ruptura dúctil, critérios de tensões de cisalhamento como os de Tresca e von Mises, ideais para o caso dos metais, são utilizados. Estes critérios foram utilizados nas primeiras aplicações para o concreto em elementos finitos associados à uma superfície de corte na tração e à um critério de deformação de compressão máxima.

Para níveis intermediários de tensão de compressão, em que há grande dependência do tensor hidrostático, os critérios de dois parâmetros de Mohr-Coulomb e Drucker Prager são os mais utilizados. O critério de Mohr-Coulomb, associado ao critério da tensão de tração ou deformação de tração máxima, também é utilizado, levando a cargas de ruptura próximas das observadas em ensaios. Porém este procedimento causa dificuldades numéricas.

Critérios de resistência de três parâmetros, que consideram a relação não-linear observada experimentalmente entre ξ e ρ (ou σ_{oct} e τ_{oct}) ou a dependência do ângulo de similaridade, foram desenvolvidos a partir do critério de Drucker Prager como os critérios de Bresler-Pister e de Willam-Warnke.

Atualmente existem vários critérios de ruptura que apresentam meridianos curvos e seções desviadoras não-circulares de quatro ou cinco parâmetros como os critérios de Ottosen, Hsieh-Ting-Chen e Willam-Warnke. Neste último critério, a necessidade de meridianos convexos conduz à ruptura para elevadas tensões de compressão hidrostática, o que contraria as evidências experimentais, porém trata-se do critério que melhor reproduz as demais características experimentais observadas e comentadas anteriormente.

Todas as superfícies citadas estão apresentadas em seus planos meridionais e desviadores na figura 2.11 e uma descrição detalhada de todos estes critérios apresentados podem ser encontrada em Chen e Saleeb (1994), de onde foram resumidamente extraídos.

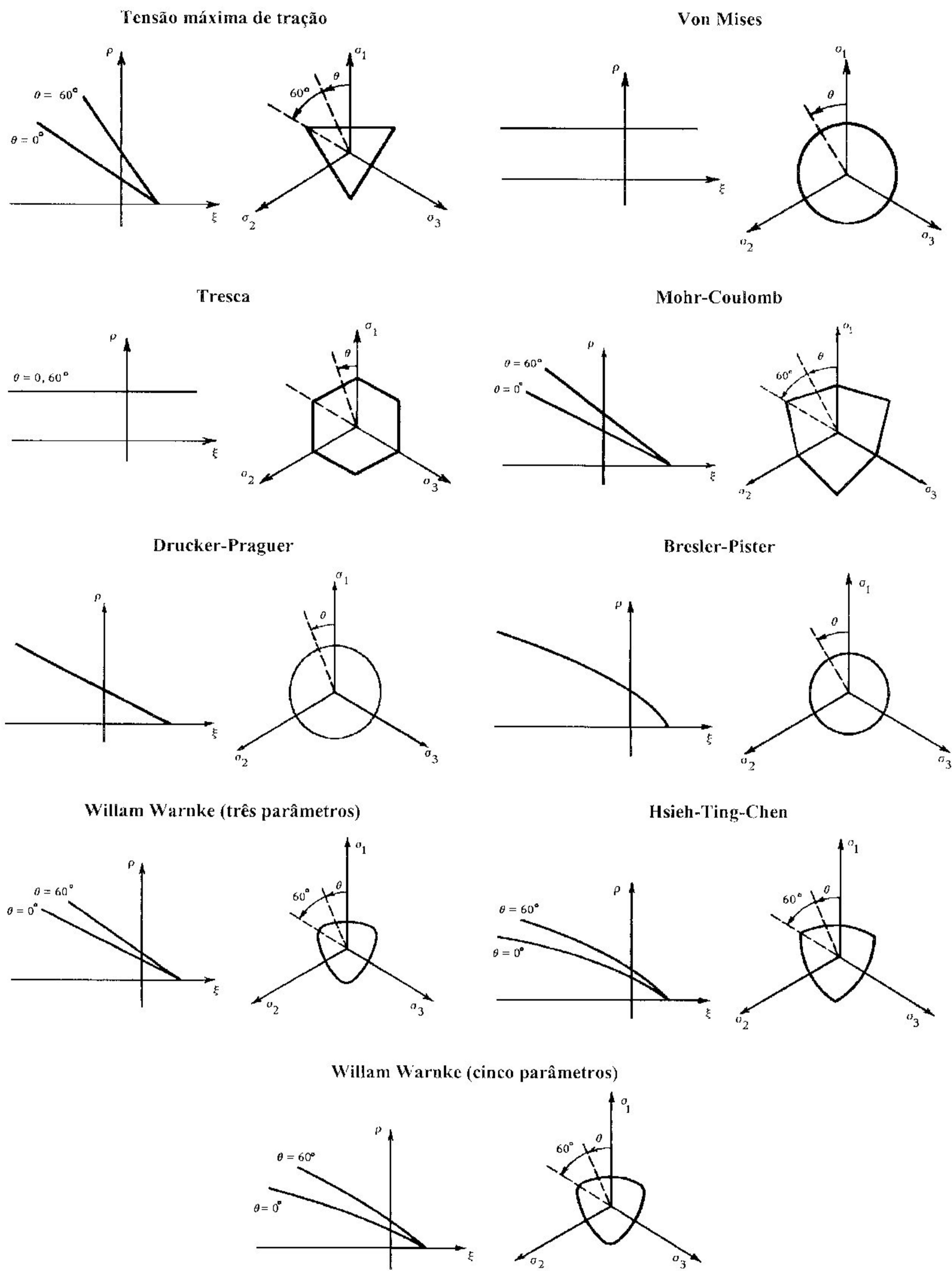


Figura 2.11 – Representação das superfícies de ruptura nos planos meridianos e desviadores

Quando é alcançada a tensão máxima, observa-se que o material não se rompe. O que ocorre é um decréscimo da tensão à medida que a deformação aumenta. Este comportamento, denominado amolecimento (*strain-softening*) é reproduzido pela porção descendente da curva tensão-deformação. No entanto, algumas evidências experimentais, como as apresentadas a seguir, tem sugerido que o amolecimento deva ser considerado como uma propriedade estrutural e não uma propriedade do material, Chen e Han (1988) e Bazant (1976).

A aplicação de um estado de tensão definido nos corpos de prova geralmente é difícil de ser obtido, pois é bastante influenciado pela interação entre este e o aparato de ensaio. A figura 2.12 apresenta o resultado de ensaios à compressão uniaxial realizados por Kotsovos (1983)¹ mostrando que, até a tensão máxima esta influência pode ser desprezada, porém, além deste limite o comportamento é altamente influenciado pelo método de teste, a porção descendente da curva aumenta com o aumento da tensão de contato.

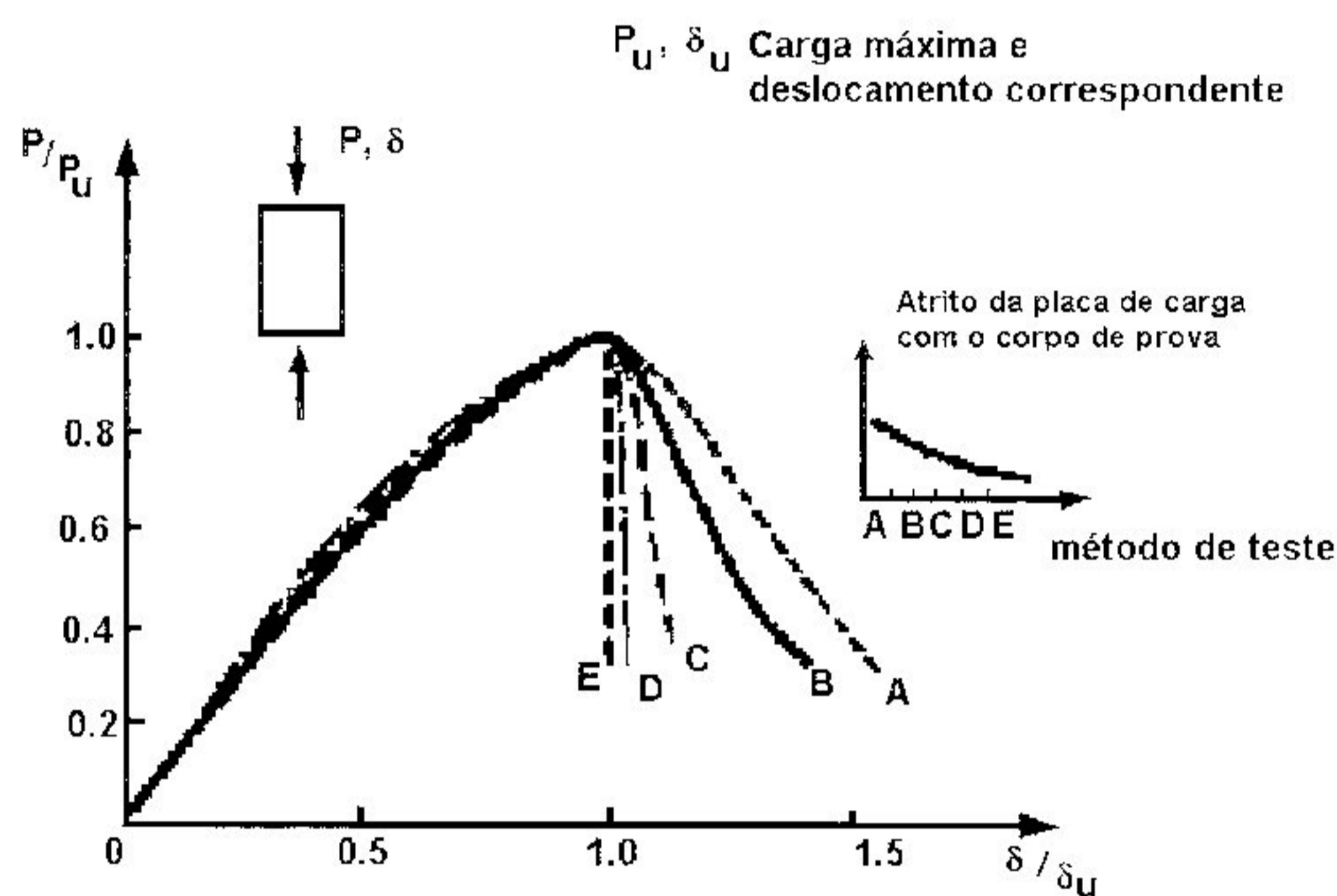


Figura 2.12 ... Relação carga-deslocamento em diferentes métodos de teste

Nos ensaios de compressão uniaxial realizados por van Mier (1984)² em corpos de prova de diferentes alturas, a curva tensão-deformação até a tensão máxima é praticamente idêntica, independente da altura do corpo de prova, enquanto que a porção descendente é altamente influenciada pela altura do corpo de prova como visto na figura 2.13. Por outro lado as curvas tensão-deslocamento apresentaram-se praticamente

¹ Apud Chen et al (1993)

² Apud Chen and Han (1988)

idênticas independente da altura do corpo de prova. Comportamento similar é observado em ensaios de tração uniaxial. O corpo de prova geralmente rompe em uma seção crítica única, normal à direção do carregamento. A deformação subsequente é principalmente resultado da abertura da fissura através do corpo de prova. Observa-se descarregamento em regiões afastadas da fissura enquanto o processo de deformação evolui. É interessante diferenciar que o comportamento de amolecimento, na tração é decorrente da evolução do processo físico de microfissuração localizada, com perda de tensão, que precede a fissura macroscópica da ruptura, e, na compressão é decorrente da microfissuração devido a perda de coesão entre as partículas.

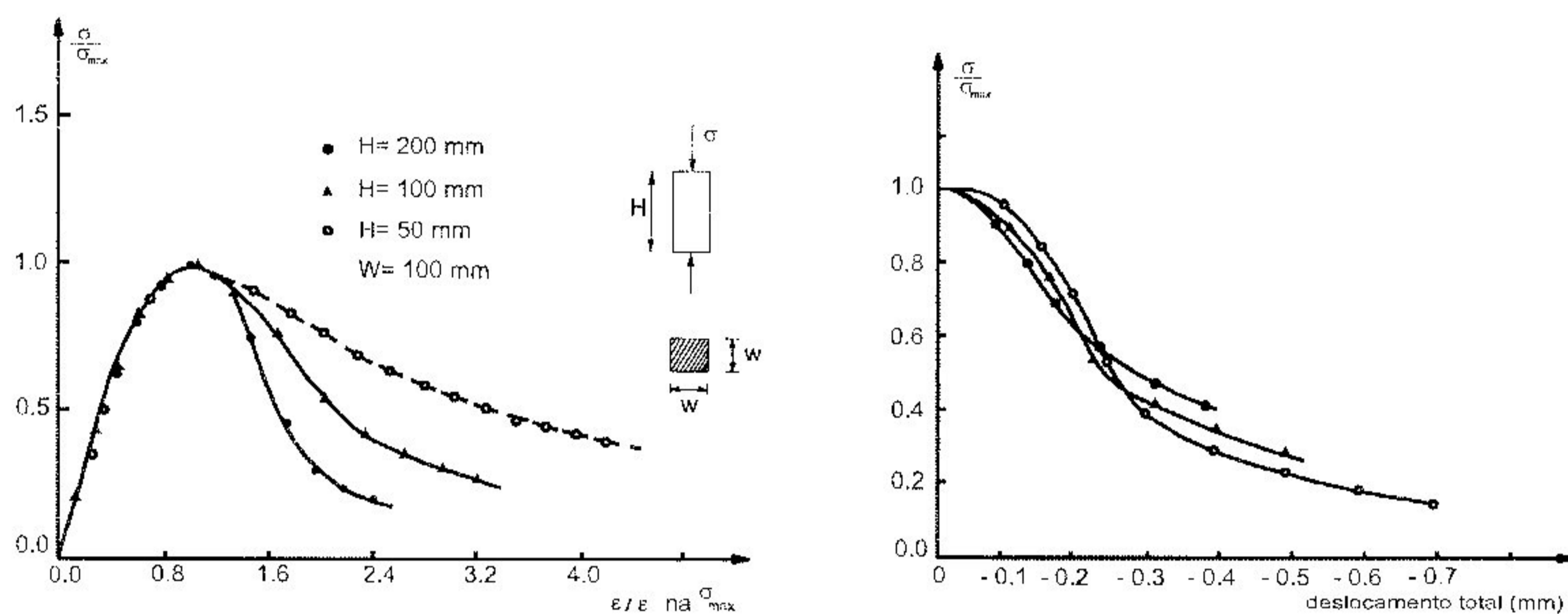


Figura 2.13 – Influencia da altura do corpo de prova: a) na curva tensão-deformação uniaxial; b) na curva tensão deslocamento pós pico

Estas observações mostram que após a tensão máxima este processo de deformação ocorre de forma localizada, com distribuição não mais contínua, deixando de ser homogênea. Assim em função desta deformação localizada, a deformação obtida a partir do deslocamento não é uma medida verdadeira, mas um valor médio sobre o comprimento do corpo de prova. Como resultado, o amolecimento torna-se dependente do tamanho do corpo de prova. O termo *size effect* é sempre associado ao comportamento de amolecimento, Bazant (1976). Segundo Chen e Han (1988), em função destas observações poderia-se concluir que uma descrição real do comportamento pós-pico seria a completa perda de resistência. Na seção 2.2.6 está apresentado um estudo micromecânico desenvolvido por Yamaguchi e Chen (1990,1991)¹ que busca representar este mecanismo de deformação.

¹ Apud Chen et al (1993)

2.2 Modelos utilizados para o comportamento do concreto com ênfase na aplicação juntamente com elementos finitos

2.2.1 Modelos elásticos

Os primeiros modelos utilizados em análises de estruturas de concreto foram os baseados na teoria da elasticidade linear. Tratam-se dos modelos mais simples e apresentam bons resultados considerando-se não-linearidades moderadas. Estes modelos, combinados com um critério de ruptura, são os mais comumente utilizados para o concreto não fissurado e fissurado. Para superar a deficiência destes modelos em representar as deformações inelásticas, são geralmente utilizados os modelos baseados na teoria da elasticidade não-linear como o modelo elástico de Cauchy, o modelo hiperelástico, o modelo hipoeelástico, dentre outros. Uma descrição completa destes modelos podem ser encontrados em Chen e Saleeb (1994) e conforme sintetizado em Barbosa (1997) são:

- Modelo linear elástico isotrópico: adequado para tensões de tração e para tensões de compressão baixas, pois segue a lei de Hooke;
- Modelo elástico de Cauchy: simples de ser utilizado, consiste na adoção de uma relação tensão-deformação arbitrária;
- Modelo hiperelástico: baseia-se na existência de uma função de densidade de energia de deformação;
- Modelo hipoeelástico: descrito em termos de incrementos de tensão e de deformação, sendo capaz de levar em conta a história do carregamento;
- Modelo de módulo variável: basicamente um modelo hipoeelástico acrescido de uma superfície de carregamento, é capaz de descrever processos irreversíveis.

Considerando suas limitações Barbosa acrescenta que o modelo de Cauchy pode gerar energia sob certos ciclos de carga/descarga, violando as leis da termodinâmica. Em modelos hiperelásticos as constantes do material não tem significado físico e são difíceis de serem determinadas. Os modelos hipoeelásticos possuem uma formulação muito complicada para aplicações práticas. O modelo de módulo variável possui uma formulação matemática inconsistente.

2.2.2 Modelos de fratura

Quando o estado de tensão alcança um valor limite, a ruptura do concreto pode ocorrer de duas maneiras distintas dependendo do estado de tensões atuante. Assim, a relação incremental tensão-deformação difere para o concreto fissurado em estados de tração (tração-tração e tração-compressão) e esmagado em estados de compressão (compressão-compressão). No caso da fissuração, após fissurado o concreto perde a resistência na direção normal à fissura mas retém resistência na direção paralela. No entanto, quando o estado de tensão de compressão atinge a superfície de ruptura, ocorre o esmagamento e o concreto perde a resistência completamente.

Para determinar a ruptura do concreto em estados multiaxiais de tensões é necessário definir um critério de ruptura que define este valor limite. Assim critérios como o de Mohr-Coulomb combinado com uma tensão limite de tração (*tension cut off*), indicam que ocorreu o esmagamento quando o estado de tensão de compressão alcança um valor crítico de tensão de cisalhamento e a fissuração ocorre de acordo com o critério da tensão (ou deformação) máxima de tração. Outros critérios de ruptura mais refinados para estados de compressão foram descritos na seção 2.1, no entanto, para estados de tração-tração e tração compressão, o critério da máxima tensão de tração (ou deformação) é o geralmente adotado.

Em estruturas como placas e cascas, em que o estado de tensão é principalmente do tipo tração-compressão biaxial, a fissuração que ocorre para pequenas tensões de tração é a principal causa do comportamento não-linear. Nestes casos, podem ser utilizadas relações tensão-deformação para o concreto não fissurado e fissurado, baseadas na elasticidade linear com diferentes técnicas para a modelagem das fissuras. Tratam-se dos modelos elásticos linear de fratura. Esta formulação pode ser refinada utilizando a teoria da elasticidade não-linear, como os modelos hipoelásticos ou hiperelásticos, associada ao critério de ruptura, para os casos em que a reprodução das deformações inelásticas é significativa.

Buscando um entendimento do processo de formação de fissuras, pode-se dizer que a ruptura por tração é caracterizada pelo crescimento contínuo das fissuras que resulta numa separação de partes da estrutura. Nos primeiros modelos para fissuras este processo era admitido frágil e a resistência na direção da tensão de tração máxima

tornava-se nula logo que as fissuras eram formadas, conforme apresentado na figura 2.14. Posteriormente estes modelos foram modificados, pois além de causarem dificuldades numéricas, considerar esta perda brusca da resistência à tração contraria o comportamento de amolecimento observado experimentalmente. A presença da armadura, como será visto na seção 2.2.8, torna o mecanismo de resistência mais complexo, pois o concreto intacto entre duas fissuras consecutivas proporciona um ganho de resistência.

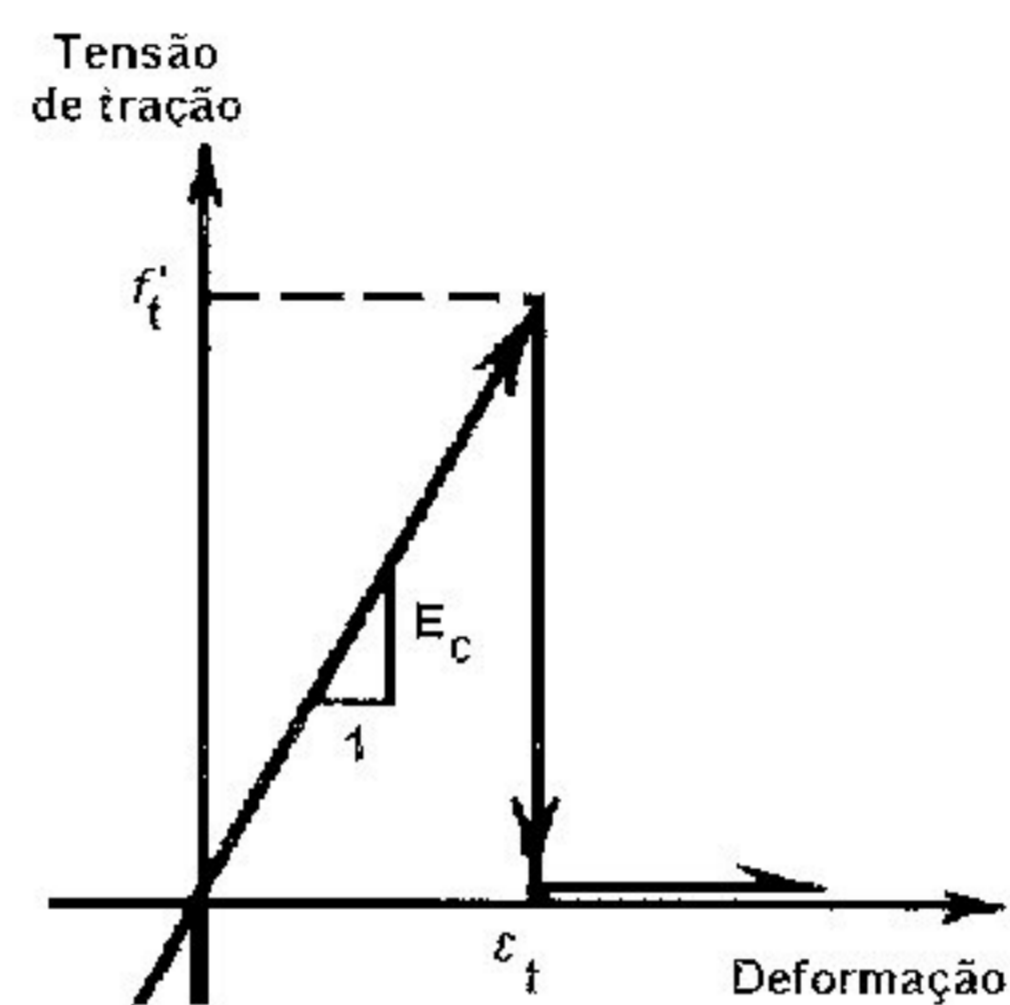


Figura 2.14 – Relação tensão deformação para o concreto fissurado

Como foi dito, o critério de ruptura para estados de tração comumente adotado para o concreto é o critério da máxima tensão principal e o critério da máxima deformação principal, figura 2.15. Excedido este limite, admite-se que a fissura ocorre em um plano normal à direção de tensão ou deformação máxima, mantendo-se fixa nesta direção com o progresso do carregamento.

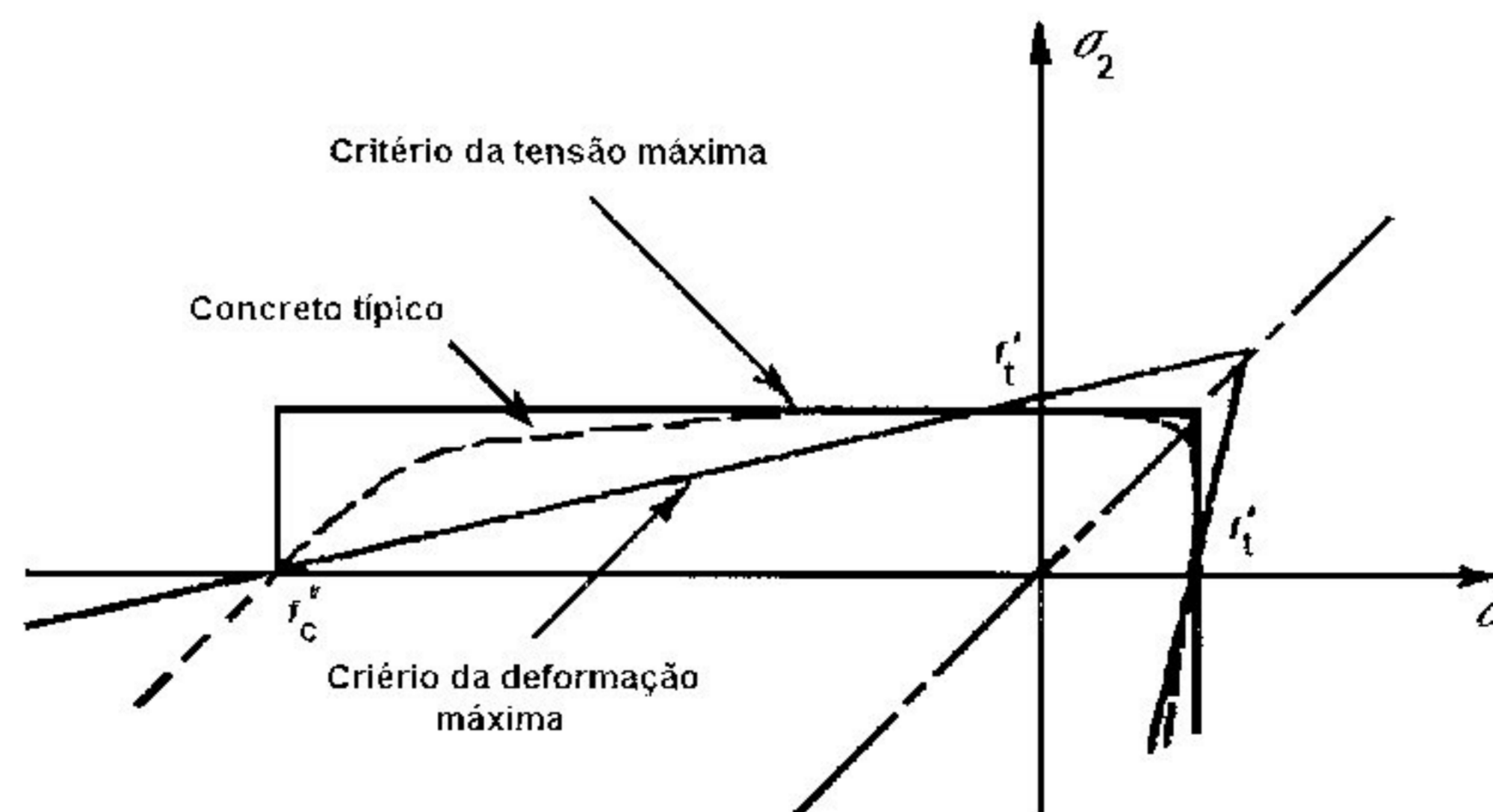


Figura 2.15 – Critérios de ruptura para estados de tração

Em função da dispersão observada nos ensaios, estes valores máximos não são quantidades precisamente definidas. O critério de fissuração para a tração biaxial

comumente utilizado é baseado nos resultados experimentais de Kupfer (1969)¹ *et al* e admite que os valores da resistência à tração biaxial são praticamente independentes da relação entre tensões e iguais à resistência à tração uniaxial f_t . Outros testes para a determinação da resistência à tração são os ensaios de compressão diametral e de flexão de viga.

Após formada a fissura, a tensão de tração não é mais transmitida pela fissura e admite-se então, que há uma redução da rigidez do material nesta direção. Porém, na direção paralela à fissura o concreto é capaz de suportar esforços de acordo com as condições uniaxiais ou biaxiais nesta direção.

Em função da composição heterogênea do concreto, embora a fissura possa estar aberta, ainda é possível que se desenvolva uma força no contato entre as superfícies da fissura impedindo o movimento entre estas. Estas superfícies rugosas, para concreto de resistência normal, são capazes de transferir as tensões de cisalhamento no plano da fissura. Este fenômeno é conhecido como intertravamento dos agregados (*aggregate interlock*) e é muito importante, por exemplo, no estudo da transferência de esforço cortante em vigas de concreto armado. Nestes casos, no início das fissuras inclinadas, o concreto fissurado pode ainda transferir de 40 a 60% do total do esforço cortante em uma viga pela ação do intertravamento dos agregados. É interessante observar que este comportamento pós fissuração altera-se bastante para o concreto de alto desempenho. Neste caso como a resistência da pasta de cimento se aproxima da resistência do agregado, a superfície fissurada torna-se lisa, isto é, as fissuras não mais contornam o agregado mas, passam através deste.

No tratamento das fissuras pelo MEF podem ser utilizados três modelos dependendo dos objetivos da análise. Modelos de fissuras distribuídas são utilizados quando se deseja um comportamento carga-deslocamento global. Quando é importante um comportamento local detalhado, utilizam-se modelos de fissuras discretas. Modelos baseados na mecânica da fratura também são utilizados e serão tratados na seção 2.2.4.

Nos modelos de fissuras distribuídas, a fissura se acha modelada por uma banda de elementos, através dos quais se espalha de forma distribuída, sem que se possa saber sua exata localização dentro da banda. Estabelecem-se mecanismos artificiais de comportamento do material dentro da banda, cujos efeitos fora da mesma são os

¹ *Apud* Chen e Saleeb (1994)

mesmos produzidos pela fissura no sólido real. Dessa forma, o objetivo da análise não é simular o comportamento da fissura, e sim os efeitos da mesma sobre o seu exterior. Estes modelos são os mais utilizados. Nesta aproximação, o concreto fissurado permanece como um material contínuo já que as fissuras são distribuídas por todo o elemento. Podem ser utilizados modelos de fissuras distribuídas fixas, rotativas e múltiplas não ortogonais. Nos modelos de fissuras fixas, a direção da normal à fissura é mantida fixa após o início da fissuração. Modelos de fissuras rotativas, por outro lado, permitem que a normal à fissura gire durante o processo de fissuração. As demais diferenças entre tais modelos serão apresentadas oportunamente, seção 2.2.8.

De maneira geral, admite-se que estas fissuras são paralelas entre si e perpendiculares à direção de tensão ou deformação principal máxima, como pode ser observado na figura 2.16 nas coordenadas globais x-y. Observar que no caso mostrado são desconsiderados o amolecimento e o intertravamento do agregado.

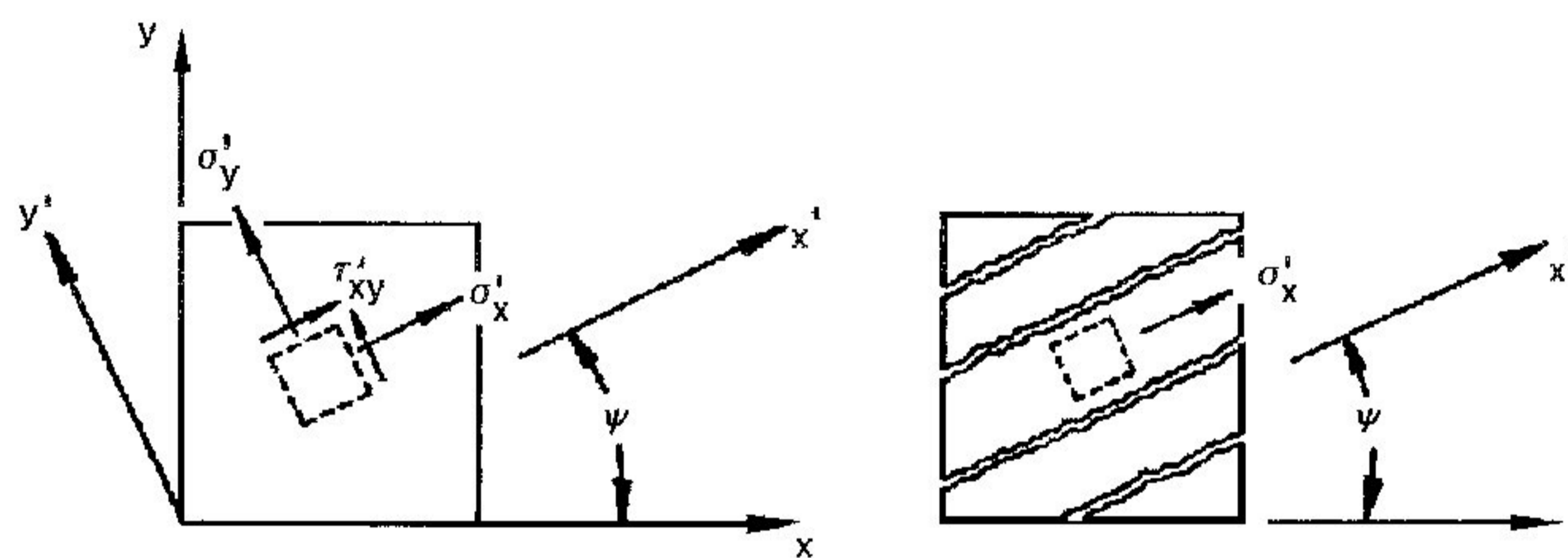


Figura 2.16 – Modelo de fissuras e distribuição de tensões no concreto fissurado

O material é admitido isotrópico linear até a formação das fissuras, considerando a relação tensão-deformação dada pelas hipóteses da elasticidade linear. Após a formação da primeira fissura o concreto fissurado torna-se ortotrópico com um eixo principal orientado na direção da fissura. A nova relação constitutiva incremental é obtida alterando-se a matriz de rigidez tangente, \mathbf{C}_t , que, para situações de estado plano de tensões, conforme os eixos da figura 2.17, por exemplo, torna-se:

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal respectivamente e β é o fator de retenção de tensão de cisalhamento (*shear retention factor*).

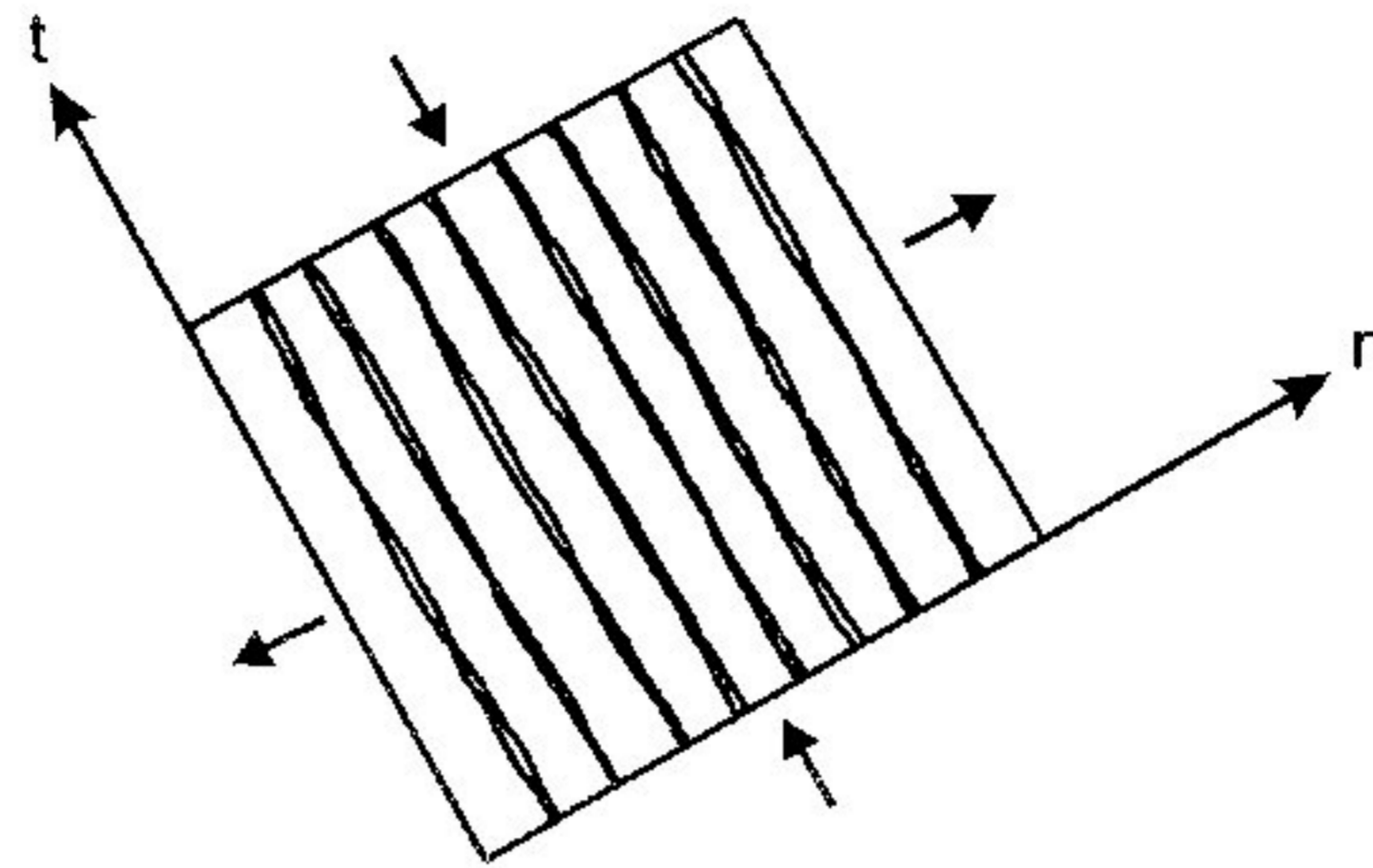


Figura 2.17 – Sistema local das fissuras numa aproximação de fissuras distribuídas

O módulo de elasticidade longitudinal torna-se zero na direção normal à fissura indicando que não há mais possibilidade de transmissão de esforços normais. Admite-se um módulo de elasticidade transversal reduzido do fator β , simulando para cargas posteriores à formação das fissuras, a transmissão das tensões de cisalhamento pelo mecanismo de intertravamento dos agregados. O valor de β varia de 0 a 1. Algumas aplicações práticas adotam $\beta = 0$ para fissura aberta e $\beta = 1$ para fissura fechada e admite-se que a fissura se fecha quando ocorre deformação de compressão.

Com o aumento do carregamento, novas fissuras (fissuras secundárias) se desenvolvem perpendicularmente a direção das primeiras (fissuras primárias) quando as tensões nesta direção atingirem a resistência a tração. Caso a deformação normal através da fissura torne-se superior ao valor correspondente a formação da fissura, a fissura é admitida aberta; caso contrário é admitida fechada.

Para o concreto anteriormente fissurado, em que se fecha todo um conjunto de fissuras em função de um determinado incremento de carga, considera-se que parte das características originais do material são recuperadas. Essa situação de fechamento das fissuras, apesar de freqüente nos casos de carregamentos cíclicos, pode ocorrer eventualmente durante o processo numérico de redistribuição das tensões. Assim sendo, é necessário prever um critério para fechamento das fissuras.

No concreto simples, considerando-se que o material possui um comportamento elástico linear frágil, a abertura da fissura é diretamente proporcional à deformação total do material na direção normal à ela. Assim sendo, a fissura se fecha quando sua deformação total se anula ou passa a ser negativa, com mostra a figura 2.18.

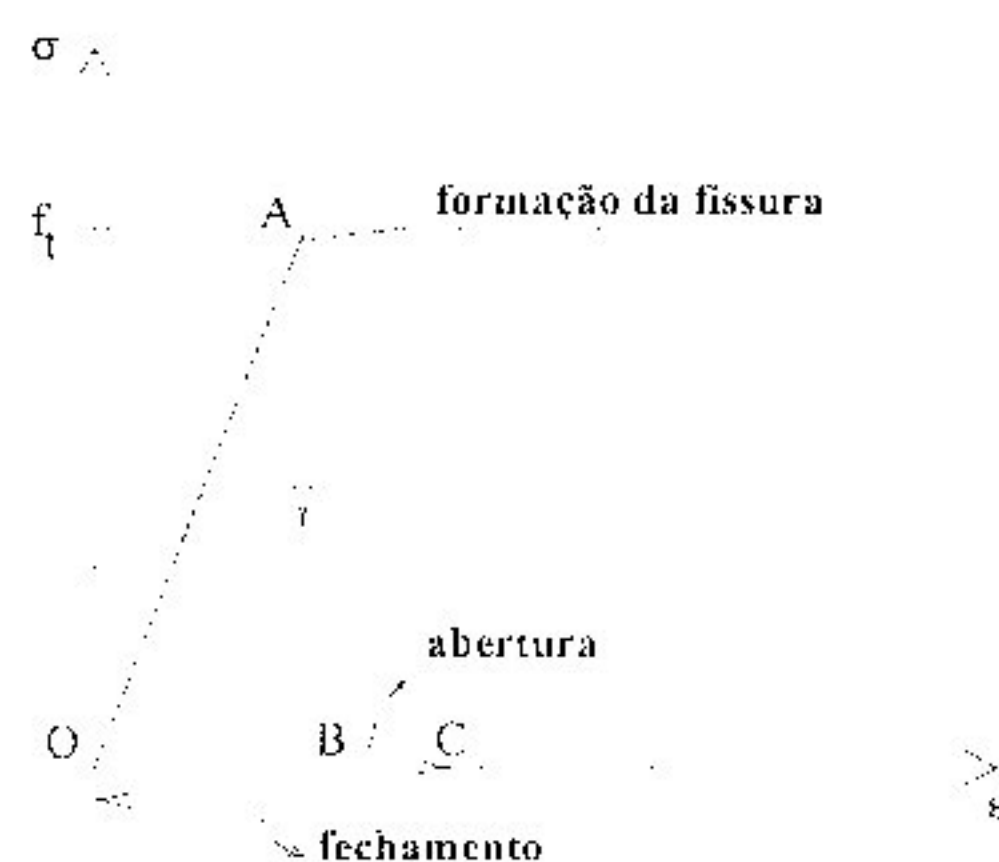


Figura 2.18 – Critério para fechamento da fissura no concreto simples

Nos modelos mais recentes, este comportamento pós-fissuração com redução da tensão normal ao plano da fissura de forma total foi substituído por modelos com redução progressiva da tensão com o aumento da deformação. Tratam-se dos modelos que adotam um diagrama tensão-deformação pós-fissuração com amolecimento. Na seção 2.2.4 será mostrado que a área sob a curva tensão-deslocamento pode ser associada a energia de fratura, G_f , que é uma propriedade do material. No caso do concreto armado, esta perda gradual da resistência simula o *tension stiffening*, como será visto na seção 2.2.8.

No caso dos modelos de fissuras discretas, as fissuras são simuladas pela descontinuidade dos deslocamentos dos nós dos elementos adjacentes, figura 2.19. Assim o início e a propagação das fissuras são direcionados pelas linhas da malha, o que leva a uma certa dificuldade pois é necessário prever a posição e a orientação das fissuras. Após a fissuração, a direção da tensão principal não mais coincide com a normal à fissura, sendo que a maior tensão principal pode até mesmo exceder a resistência à tração em outra direção. Técnicas de redefinição dos nós da malha são utilizadas para contornar estes problemas, no entanto essas soluções são complexas e aumentam o esforço computacional. O intertravamento dos agregados pode ser simulado por elementos de ligação que atravessam a fissura. A simulação da redução dessas forças de intertravamento, à medida que a fissura abre, pode ser feita com a redução da rigidez destes elementos. Este modelo foi utilizado nas análises de vigas por Ngo e Scordelis (1967).

Considerando que o concreto não é um material perfeitamente frágil nem perfeitamente dúctil, mas possui um comportamento intermediário, ambos os tipos de ruptura, fissuração ou esmagamento, ou mesmo um tipo de ruptura mista pode ocorrer.

Neste sentido, Hsieh *et al* (1982)¹ propuseram um modelo que consideram uma ruptura mista do tipo fissuração-esmagamento. Neste modelo determina-se um coeficiente de esmagamento, α , que estima a proporção dos efeitos da fissuração e do esmagamento. Este coeficiente é obtido pela elasticidade linear, sendo assim, apenas uma aproximação. O comportamento pós ruptura é uma interpolação linear do comportamento perfeitamente deformável no esmagamento puro e um comportamento elástico anisotrópico na fissuração pura. O elemento de concreto perde sua rigidez no plano fissurado e a rigidez ortotrópica do elemento fissurado que se estabelece é reduzida proporcionalmente a α .

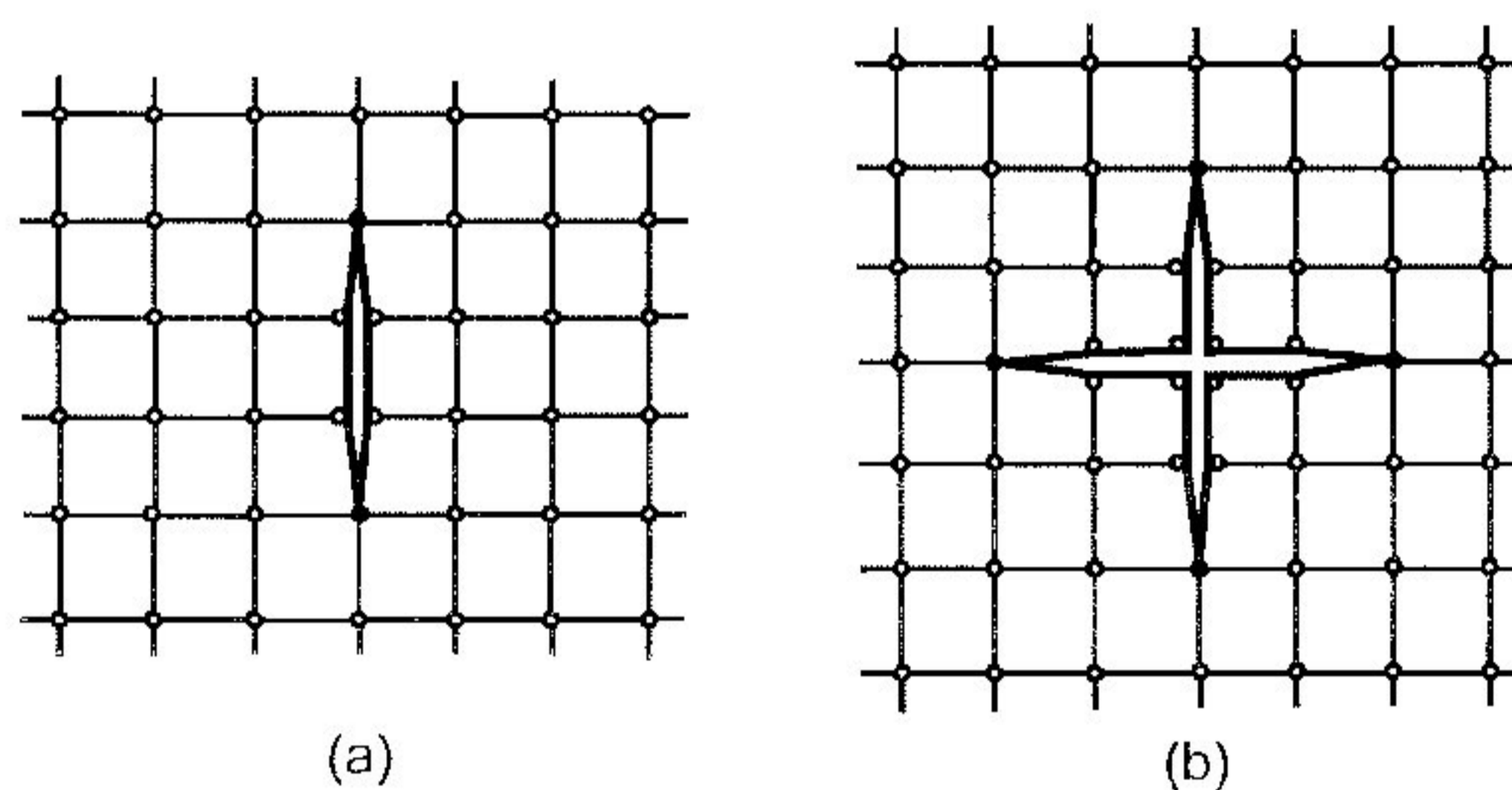


Figura 2.19 – Representação da fissura em um modelo de fissuras discreta

¹ *Apud* Chen e Saleeb (1994)

2.2.3 Modelos plásticos

As dificuldades de caracterização das deformações do concreto no intervalo inelástico de maneira realística resulta em diferentes teorias constitutivas. A teoria clássica da plasticidade é uma aproximação básica utilizada para caracterizar o comportamento inelástico do concreto.

A teoria da plasticidade foi inicialmente desenvolvida para descrição do comportamento dos metais, no entanto, evitando uma interpretação exata de suas definições e com algumas simplificações no comportamento do material, tem sido utilizada em modelos para o concreto. Do ponto de vista macroscópico pode-se dizer que o comportamento não-linear durante o carregamento, a ocorrência de deformações irreversíveis e uma certa ductilidade desenvolvida em ensaios de compressão, assemelham-se ao comportamento do aço e justificam sua utilização.

Sinteticamente a teoria da plasticidade fundamenta-se numa superfície inicial de escoamento, numa regra de encruamento e numa regra de fluxo. A superfície inicial de escoamento no espaço de tensões define o nível de tensão em que se iniciam as deformações plásticas. A regra de encruamento acompanha a evolução das subseqüentes superfícies de carregamento devido as deformações plásticas e a regra de fluxo define a relação tensão-deformação incremental a partir de uma função potencial.

Para o concreto é preciso distinguir a superfície inicial de escoamento, que define o limite elástico, da superfície de ruptura, que define a região de encruamento. Um critério de escoamento define o limite elástico num estado multiaxial de tensões. No caso do concreto, trata-se de uma quantidade suposta utilizada nas relações constitutivas. Os primeiros trabalhos de desenvolvimento de um modelo plástico para o concreto buscavam uma superfície de ruptura adequada e admitia-se, simplificada, que as superfícies de escoamento inicial e subseqüentes teriam esta mesma forma, porém com um tamanho reduzido.

No entanto, esta hipótese define uma zona plástica uniformemente distribuída entre as superfícies de escoamento e de ruptura que resulta na obtenção de deformações plásticas superestimadas para carregamento de tração e subestimadas para carregamento de compressão com elevada pressão de confinamento, contrariando os dados experimentais. Conforme mostrado na figura 2.20, a superfície inicial de escoamento é

fechada e, na região de tração e de pressões hidrostática menores, praticamente coincide com a superfície de ruptura não ocorrendo o encruamento. No entanto na região de compressão com pressão de confinamento elevada, a região plástica é extensa.

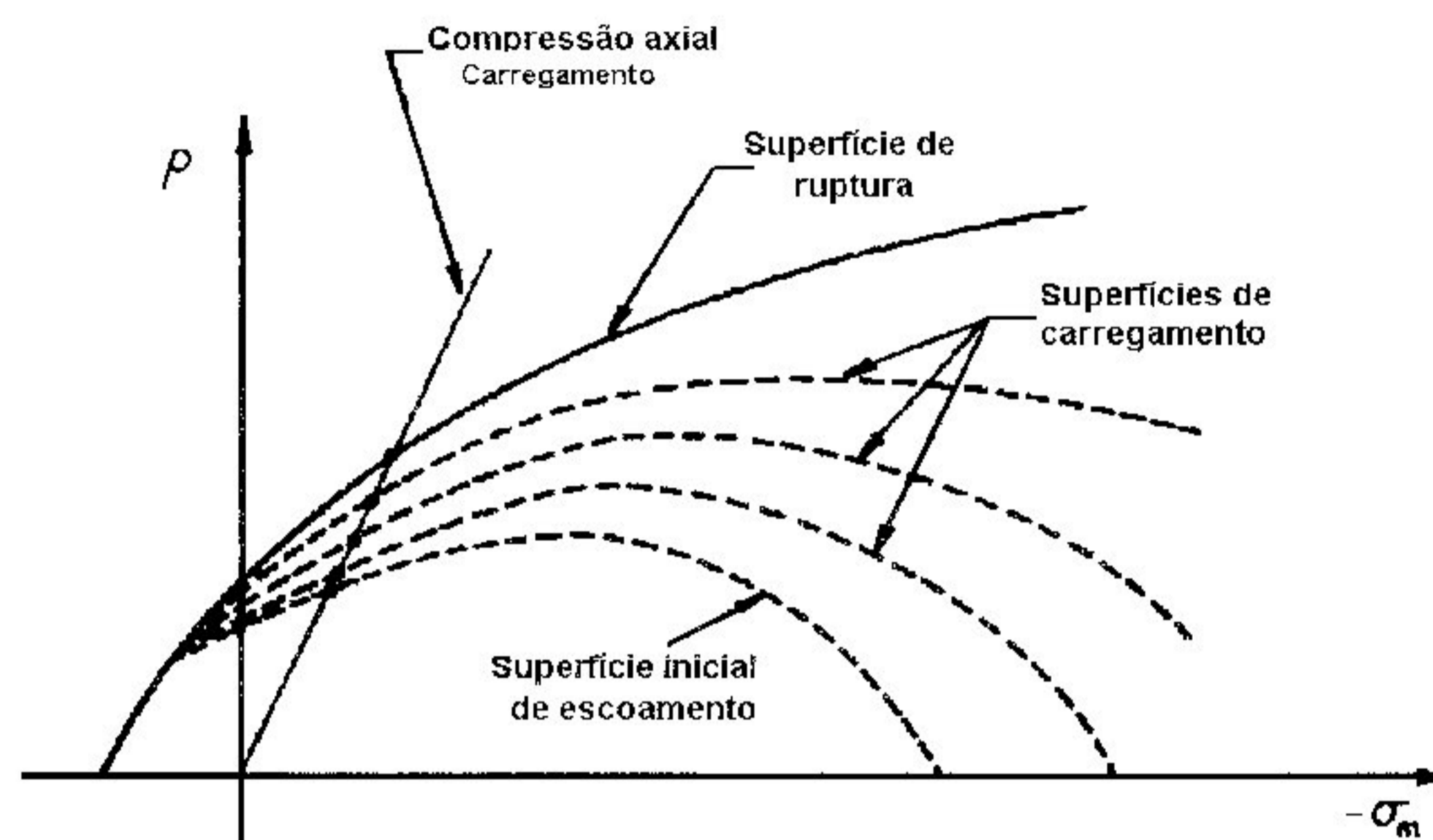


Figura 2.20 – Modelo de encruamento não-uniforme desenvolvido por Han e Chen (1985)

Como a superfície de ruptura serve como um critério de resistência para o concreto, sua determinação é de grande importância, e, baseado em seu conhecimento, uma variedade de critérios de ruptura têm sido propostos e foram apresentados na seção 2.1. Conforme visto, o critério de Willam-Warnke é o que mais se aproxima das observações experimentais.

Com o critério de ruptura definido, uma regra de encruamento é o próximo passo para se estabelecer as relações tensão-deformação no campo plástico. Um dos primeiros modelos desenvolvidos trata-se do modelo de encruamento isotrópico de Chen e Chen (1975)¹. Neste modelo a superfície inicial de escoamento é aberta na direção da compressão hidrostática, o que, conforme já apresentado, não condiz com as observações experimentais. Buscando superar esta limitação, Han e Chen (1985)² foram os que inicialmente adotaram uma superfície de escoamento inicial fechada, propondo um modelo de encruamento não uniforme apresentado na figura 2.20. A superfície de ruptura limita todas as superfícies de carregamento. Este modelo adota a superfície de ruptura mais sofisticada de William-Warnke como superfície limite, assume uma superfície de escoamento inicial com forma diferente da superfície de ruptura, propõe

¹ Apud Proença (1988)

² Apud Chen *et al* (1993)

uma regra de encruamento não uniforme para as superfícies subsequentes de carregamento que é dependente da pressão hidrostática e do ângulo de Lode e utiliza uma regra de fluxo não associativa na sua formulação geral. Características importantes do comportamento inelástico do concreto como ruptura frágil na tração, comportamento dúctil na compressão, dependência da pressão hidrostática e dilatação volumétrica sob cargas de compressão podem ser representados neste modelo constitutivo. Entretanto, deve-se observar que uma regra de fluxo não associativa, que é utilizada para modelar a variação inelástica da deformação volumétrica, produz uma matriz de rigidez não simétrica. Segundo Chen (1993), a regra de fluxo não associativa deve ser usada com bastante precaução.

No modelo constitutivo biaxial proposto por Murray *et al* (1979)¹, modelo de encruamento múltiplo, a curva de escoamento é descrita por meio de três tensões de escoamento, uma tensão de escoamento na compressão uniaxial σ_c e dois valores de escoamento na tração uniaxial em direções ortogonais, σ_{t1} e σ_{t2} , sendo tratados como parâmetros de encruamento independentes. Ohtani and Chen (1988)¹ estenderam este modelo para o caso geral tri-dimensional. Neste modelo, o meridiano da superfície de escoamento para a região de compressão curva-se bruscamente na direção do eixo hidrostático e então abre-se com o aumento do carregamento, figura 2.21. A deformação volumétrica é de contração no início do escoamento e altera-se para dilatação próximo à ruptura. É admitida regra de fluxo associativa o que conduz a uma matriz simétrica nas análises numéricas, sendo assim, conveniente nos modelos utilizados em análises não-lineares por elementos finitos. Este modelo apresenta resultados que estão de acordo com os dados experimentais de Kupfer *et al* (1969)¹ em condições biaxiais de carregamentos.

O estudo do comportamento do concreto após a tensão máxima é bem menos completo quando comparado com o comportamento até esta tensão. O comportamento de amolecimento tem sido considerado recentemente e, segundo Bazant (1976), sua inclusão nos modelos mostra-se interessante como ferramenta para obtenção de projetos econômicos devido a redistribuição dos esforços internos.

O amolecimento na compressão, considerando a deformação localizada é tratado

¹ *Apud* Chen (1994)

nos trabalhos de Read e Hegemier (1984)¹ e Chen e Yamaguchi (1985)¹. Como esta deformação localizada, já apresentada no item 2.1, não está bem definida, conforme as observações apresentadas, muitos dos modelos consideram que o concreto sofre uma deformação homogênea após a tensão máxima. Aproximações da mecânica do contínuo, como a teoria da plasticidade e a mecânica do dano são modelos utilizados neste sentido.

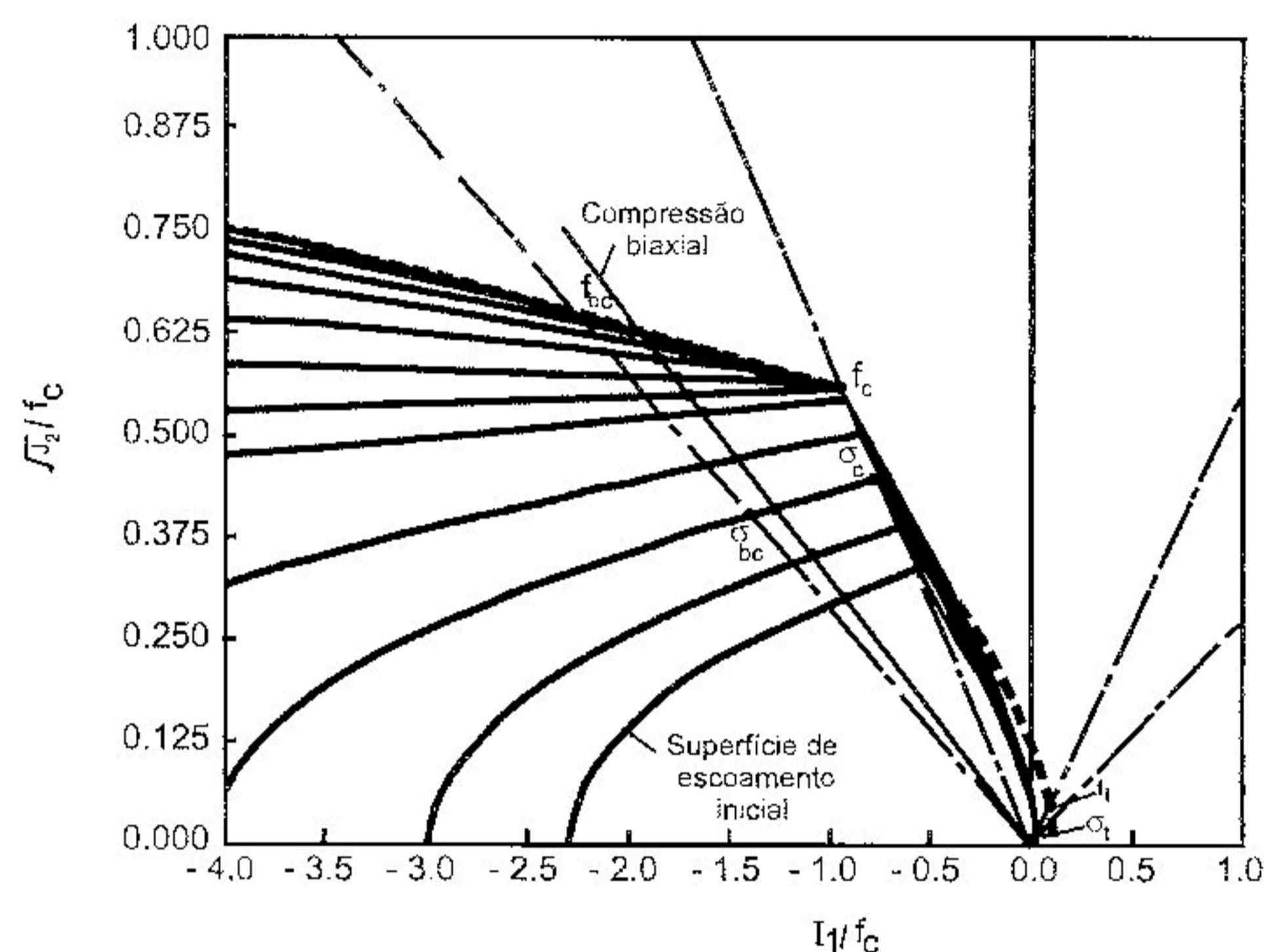


Figura 2.21 – Modelo de encruamento múltiplo, Ohtani and Chen (1988)

No item 2.1 mostrou-se também que, ao contrário de materiais perfeitamente plásticos em que a inclinação da trajetória de carga descarga não se altera com a deformação plástica, observa-se no concreto a degradação da rigidez elástica proveniente do aparecimento de deformações plásticas, sendo mais acentuada no regime de amolecimento. Para considerar este comportamento Dougill (1975)¹ desenvolveu a teoria do sólido de fraturamento progressivo [figura 2.22(a)], onde não há acumulação de deformações plásticas. No entanto, como o concreto apresenta um comportamento plástico com degradação da rigidez, Bazant e Kim (1979)¹ propuseram a teoria do fraturamento plástico [figura 2.22(b)], em que a deformação plástica é descrita pela teoria da plasticidade e a degradação da rigidez pela teoria da fratura de Dougill. Neste caso surge uma dificuldade na definição de um critério de carregamento visto que modelo envolve uma superfície de escoamento no espaço das tensões e uma superfície de fraturamento no espaço das deformações. Assim, Han e Chen (1986)¹ propuseram um modelo plástico no espaço das deformações. Este modelo apresenta-se adequado

¹ Apud Chen (1994)

tanto para o encruamento como para o amolecimento e apresenta-se completamente desenvolvido em Chen e Han (1988). Resumidamente, define-se uma superfície de relaxação no espaço das deformações que serve como um critério para o escoamento e para o fraturamento; a energia dissipada devido ao fraturamento plástico é o parâmetro da história do carregamento e define ambas as evoluções da superfície de relaxação e a degradação elástica; o postulado de Il'yushin é utilizado na obtenção da regra de relaxação e a condição de consistência é usada na determinação dos parâmetros da equação constitutiva.

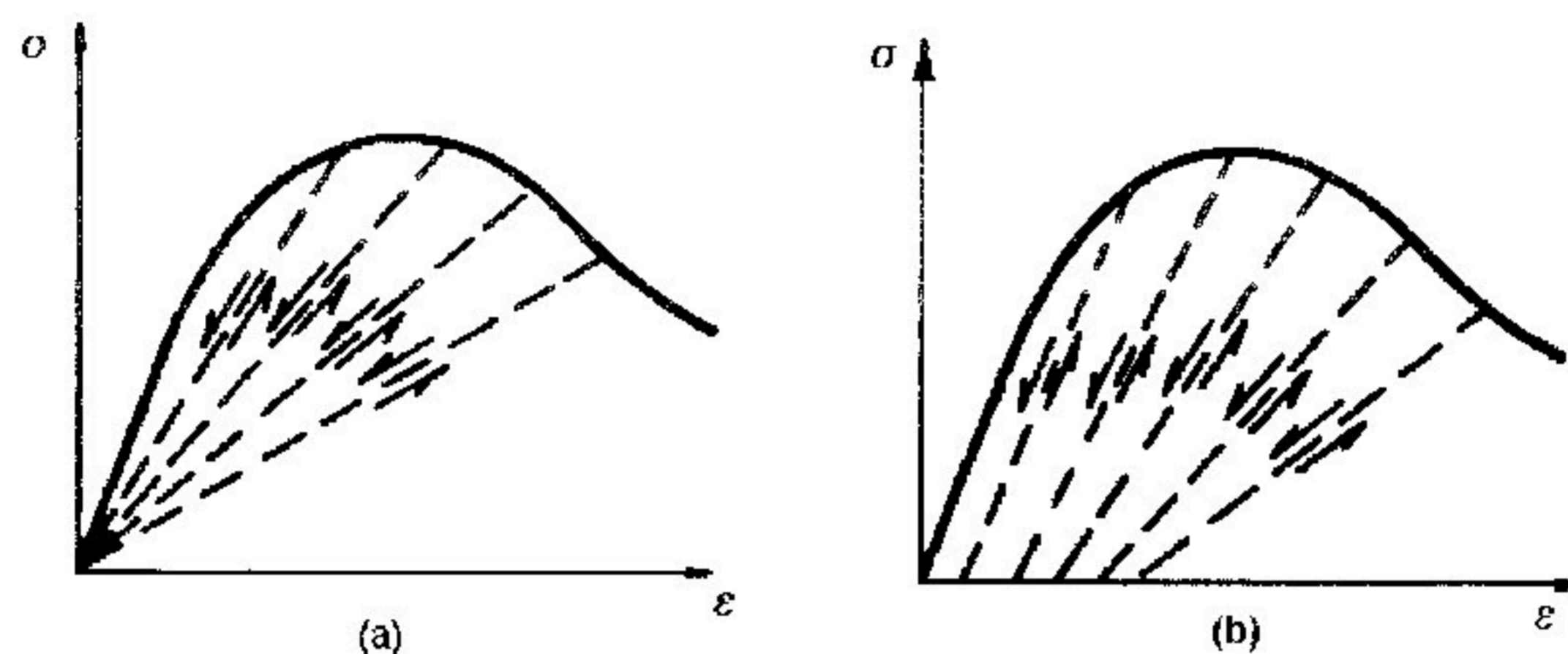


Figura 2.22 – Comportamento típicos: (a) Sólido progressivamente fraturado; (b) Teoria do fraturamento plástico.

Com base no questionamento de se o amolecimento deve ser considerado uma propriedade da estrutura ou uma propriedade do material, manifestam-se críticas à estes modelos propostos por Bazant e Kim (1979)¹ e Han e Chen (1986)¹. Já em modelos como o proposto por Frantziskonis e Desai (1987)¹, em que os efeitos geométricos e estruturais são associados, a descrição contínua do amolecimento apresenta-se melhor justificada. Neste modelo constitutivo, o material é considerado composto de um volume contínuo com comportamento elastoplástico sem amolecimento, e um volume que possui comportamento fraturado. Em todo elemento finito o volume total do material não é alterado e o comportamento é descrito pela média dos dois comportamentos. São adotadas hipóteses correspondentes à técnica de homogeneização de compostos devido a Voigt (Mura, 1982)¹.

Chen (1994) apresenta um modelo baseado na combinação de uma formulação plástica no espaço de deformações e de tensões para o encruamento e o amolecimento, com uma formulação de fraturamento plástico para modelar o comportamento pós ruptura. No comportamento pré-ruptura utiliza-se a superfície de Willam-Warnke com

¹ *Apud* Chen *et al* (1993)

encruamento não uniforme já apresentado na figura 2.20. Alcançada a superfície de ruptura, critérios de ruptura baseado em tensões e deformações são utilizados definindo modos de ruptura ou por fissuração ($\sigma_1 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$), ou por esmagamento ($\sigma_1 \leq 0$ e $\varepsilon_1 < 0$) ou por um modo misto de fissuração e esmagamento ($\sigma_1 \leq 0$ e $\varepsilon_1 > 0$).

O comportamento pós ruptura depende do modo de ruptura. Admite-se que o concreto comporta-se como um material elástico transversalmente isotrópico, utilizando o conceito das fissuras distribuídas associada a um amolecimento linear baseado no conceito da energia de fratura para o comportamento pós fissuração.

Para o comportamento de amolecimento no modo de ruptura misto, uma formulação baseada no espaço de tensões, proposta por Ohtani e Chen (1989)¹, substitui a formulação de fraturamento-plástico do amolecimento baseada no espaço de deformações proposta por Han e Chen (1986)¹, visto que esta pode levar a alguns problemas numéricos em análises via MEF.

Finalmente, para o modo de ruptura por esmagamento, admite-se que todas as tensões são liberadas e o material perde a capacidade de carga completamente. Tal hipótese pode não ser adequada, pois, para condições de elevadas tensões hidrostáticas, o concreto comporta-se de uma maneira mais dúctil do que frágil.

Chen (1994) realça que, como o material é tratado diferentemente de acordo com o modo de ruptura, a transição entre estes modos de ruptura é um ponto de perturbação que pode causar algumas dificuldades numéricas.

¹ *Apud* Chen *et al* (1993)

2.2.4 Modelos baseados na mecânica da fratura

A teoria da mecânica da fratura linear foi desenvolvida em 1920 a partir do trabalho de Ghiffith (1920)¹ para materiais metálicos e sua aplicação para o concreto iniciou-se apenas na década de sessenta. Recentemente, nas décadas de 80 e 90, houve pesquisa intensa, com o desenvolvimento de modelos da mecânica da fratura não-linear, tornando-se sua aplicação mais comum. Bazant *et al* (1993) afirmam que os trabalhos desenvolvidos têm demonstrado que o uso da mecânica da fratura levará a projetos mais seguros e econômicos principalmente no caso do concreto de alto desempenho.

Na concepção inicial da mecânica da fratura elástica linear, o critério para a propagação instável de uma fissura estava associado ao balanço entre a energia potencial das cargas externas, a energia de deformação e a energia de superfície. A energia de superfície, G_f , pode ser interpretada como o trabalho necessário para produzir uma fratura de superfície unitária, e, em função dessa interpretação tem sido denominada energia de fratura. Posteriormente Irwin (1957)¹ propôs que esta energia seria característica do material sendo determinada em um teste de fratura. Assim, a fissura se propaga caso a energia disponibilizada por incremento unitário de área fissurada, definida como $G = -\partial\Pi/\partial a$, supere G_f ,

$$G_f = -\frac{\partial\Pi}{\partial a} \quad (2.2)$$

onde a é o comprimento da fissura e Π é energia potencial da estrutura.

A tensão na ponta da fissura para movimento de abertura por separação das superfícies da fissura, denominado modo I, é obtida como:

$$\sigma = K_I r^{-1/2} f(g) \quad (2.3)$$

onde K_I é chamado fator de intensidade de tensão ou tenacidade da fratura, r é a distância a partir da ponta da fissura e $f(g)$ é uma função que depende da geometria da fissura.

Irwin mostrou que a taxa de liberação de energia está relacionada com K_I , e para problemas de estado plano de tensão e no modo I tem-se:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.4)$$

¹ *Apud* Mehta e Monteiro (1994)

sendo E o módulo de elasticidade.

Com o progresso dos estudos, Ccdolin (1986)¹, comparando a intensidade da tensão obtida à partir de critérios de resistência com a obtida pela mecânica da fratura para placas geometricamente similares de tamanhos diferentes, concluiu que para uma fissura pequena e corpos de prova de tamanhos pequenos, o critério de resistência é dominante e as propriedades da mecânica da fratura não podem ser inferidas. Atualmente é aceito que a mecânica da fratura elástica linear é aplicável somente a estruturas de grandes dimensões, e, conseqüentemente, a mecânica da fratura não-linear tem sido incorporada aos modelos de fissuras distribuídas.

A aplicação da mecânica da fratura para o concreto é bastante útil na medida que considera como o tamanho de um elemento estrutural afetará a sua capacidade de carga última e fornece um critério adequado para a previsão de propagação das fissuras. Este critério, que combina energia e tensões ou deformações, é muito eficiente para análise de fissuras pelo MEF pois supera o problema bastante reconhecido da dependência da malha [Bazant (1976), Bazant *et al* (1993) e Crisfield (1997)] quando são utilizados critérios de resistência onde a resistência à tração é reduzida a zero assim que as fissuras se formam, conforme mostrado na figura 2.23. Este comportamento é observado pois quando a malha na região de fissuração é refinada, a tensão no elemento finito imediatamente a frente da fissura tende ao infinito independente de quão pequena seja a carga, e a energia dissipada pela fissura tende a zero quando o tamanho do elemento tende a zero. Assim os resultados somente são válidos para uma determinada malha, não representando a estrutura. Portanto um modelo de propagação da falha baseado em um critério de energia parece ser uma escolha mais coerente. Bazant *et al* (1993) afirmam ainda que outras razões para sua utilização seriam:

- a abordagem de análise limite existente baseia-se na existência de um patamar de escoamento prolongado nas relações tensão-deformação e carga-deslocamento, o que não é o caso do concreto;
- a capacidade de absorção de energia de uma estrutura, assim como sua ductilidade, só pode ser avaliada a partir do conhecimento do ramo descendente da curva carga-deslocamento, o que não pode ser feito sem o uso da mecânica da fratura.

¹ *Apud* Mehta e Monteiro (1994)

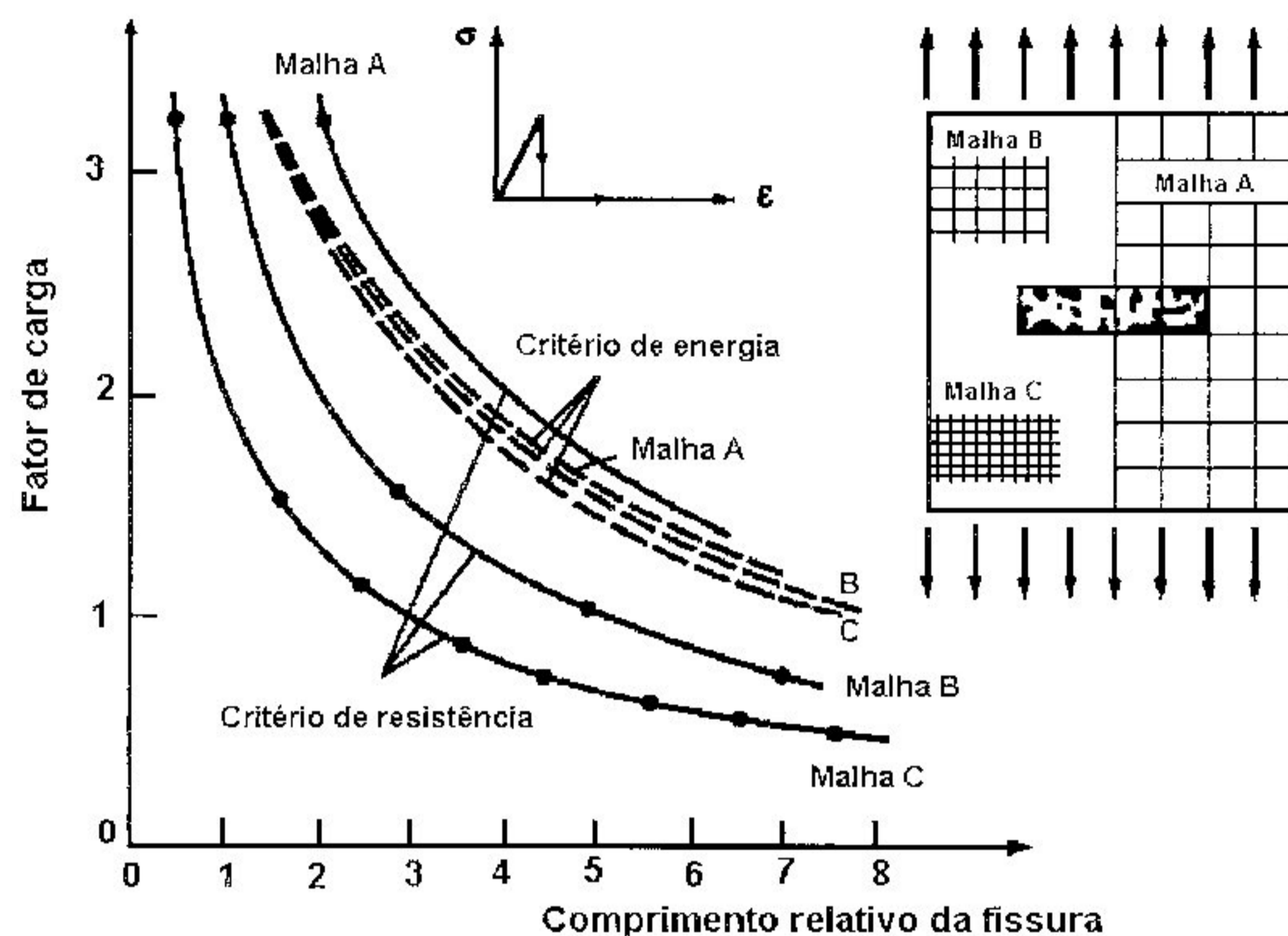


Figura 2.23 – Exemplo de sensibilidade da malha

A utilização de um modelo mais aprimorado desenvolvido a partir da mecânica da fratura não-linear é necessário pois o concreto não se comporta como um material frágil típico mas como um material “quase-frágil”, onde uma região de fissuras se forma dissipando energia antes que uma fissura maior contínua possa ser formada e propagada. A energia de superfície, conseqüentemente, deixa de ser uma função linear do comprimento da fissura. Além disso, o material é heterogêneo e a energia necessária para propagar a fissura pode crescer subitamente, em função das diferenças de resistência entre a ligação agregado-argamassa, da argamassa e do agregado graúdo.

Esta região formada por microfissuras à frente da ponta da fissura é denominada zona de evolução da fratura ou zona de processo da fratura (figura 2.24), e seu conhecimento é de grande importância no desenvolvimento da mecânica da fratura não-linear para o concreto. O comportamento tensão-deformação do concreto é controlado principalmente pela formação destas microfissuras. Experimentalmente esta região pode ser analisada através de microscópicos eletrônicos de varredura, de emissões acústicas ou da interferometria ótica com raio laser, Mehta e Monteiro (1994).

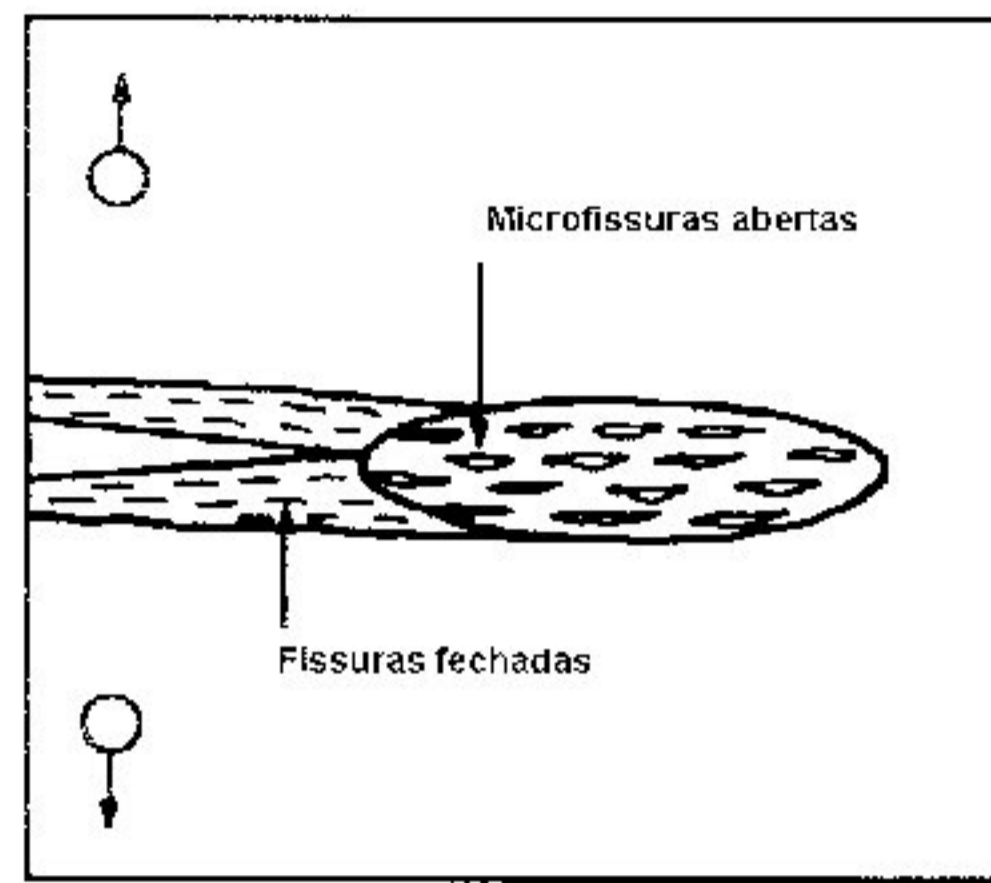


Figura 2.24 – Zona de evolução da fratura

A interpretação do que ocorre na zona de evolução da fratura a partir de um ensaio de deformação controlada permite a determinação precisa da energia de fratura. No início do carregamento existe uma quantidade limitada de microfissuras, mas, quando a tensão de tração alcança a resistência f_t em algum ponto do corpo de prova, as deformações adicionais devido às microfissuras ficam localizadas nesta zona. Observa-se que, num ponto pertencente à zona microfissurada, a capacidade de transferência de tensões decresce progressivamente com o aumento da largura da zona, não caindo repentinamente a zero, caracterizando o processo de amolecimento. No final do processo as microfissuras se aglomeram formando as macrofissuras.

Incorporar a distribuição real da deformação em um modelo analítico é bastante trabalhoso e conseqüentemente surgem os modelos simplificados. Assim, o modelo da faixa de fissuração distribuída de Bazant e Oh (1983)¹, que considera a zona de fratura representada por uma faixa de material microfissurado com largura h e o modelo de fissura fictícia de Hilerborg *et al* (1976)¹, que considera a zona de evolução da fratura como uma fissura fictícia localizada, tratam a fissuração pelo conceito da energia de fratura. Estes modelos apresentam bons resultados em análises via MEF.

Numa aproximação de fissuras distribuídas é muito importante interpretar adequadamente a deformação dentro da zona de evolução da fratura. O desenvolvimento das microfissuras levam ao aumento da deformação normal na zona de fratura mas o efeito na deformação da região externa à zona de fratura é relativamente pequeno. No modelo proposto inicialmente por Bazant e Oh (1983) a descontinuidade local associada a uma fissura é distribuída numa região de largura h , como visto na figura 2.25, de forma que os deslocamentos relativos das superfícies da fissuras passam a ser representados por deformações. Através dessa deformação é possível estabelecer

uma relação constitutiva válida para o concreto fissurado.

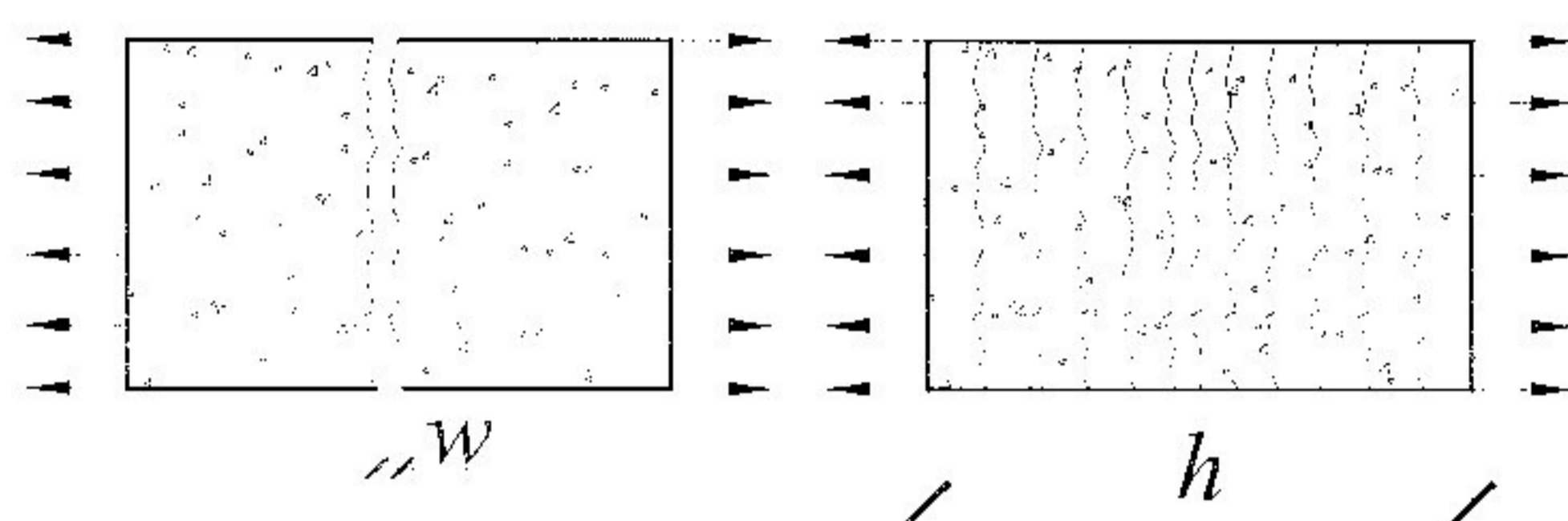


Figura 2.25 – Modelo da faixa de fissuração distribuída

Assim as microfissuras se distribuem uniformemente na largura h , sendo válida a expressão:

$$\varepsilon^{cr} = \frac{w}{h} \quad (2.5)$$

onde ε^{cr} é a deformação nas microfissuras. Dessa forma, o comportamento mecânico da fratura, descrito normalmente pelo seu movimento de abertura, passa a ser representado pela deformação de um meio equivalente cujo modelo constitutivo é dado por um regime de amolecimento. Esta relação constitutiva do concreto fissurado é obtida considerando que a deformação total, medida num ponto na zona fraturada, é composta por uma deformação do concreto entre as microfissuras, ε^{co} , considerada elástica, e a deformação nas microfissuras, ε^{cr} , representando a abertura das microfissuras. Esta última está associada à tensão liberada e permanece localizada na largura da zona fissurada ou na largura do elemento finito em que as microfissuras estão distribuídas nas análises via MEF. Desta maneira, a deformação na fissura, estando sempre relacionada à esta largura, introduz o efeito do tamanho (*size effect*) nas formulações de amolecimento. O módulo de amolecimento deve ser ajustado ao tamanho do elemento escolhido a fim de se evitar que a energia de fratura liberada seja dependente da malha de elemento finitos. Crisfield e Wills (1989) afirmam que na prática para estruturas em geral muitos dos parâmetros de entrada, em particular os relacionados ao comportamento de amolecimento, devem ser feitos dependentes da malha se soluções independentes da malha são desejadas.

Como pode ser visto na figura 2.26, o modelo assume uma relação tensão-deformação linear com inclinação E até o limite de resistência a tração f_t e um braço

¹ Apud Chen (1994)

descendente com inclinação E_t , denominado módulo de amolecimento. Este último é obtido a partir da hipótese fundamental em que a deformação total é composta pelas parcelas de ε^{co} e de ε^{cr} como:

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{C_{cr}^0} \quad (2.6)$$

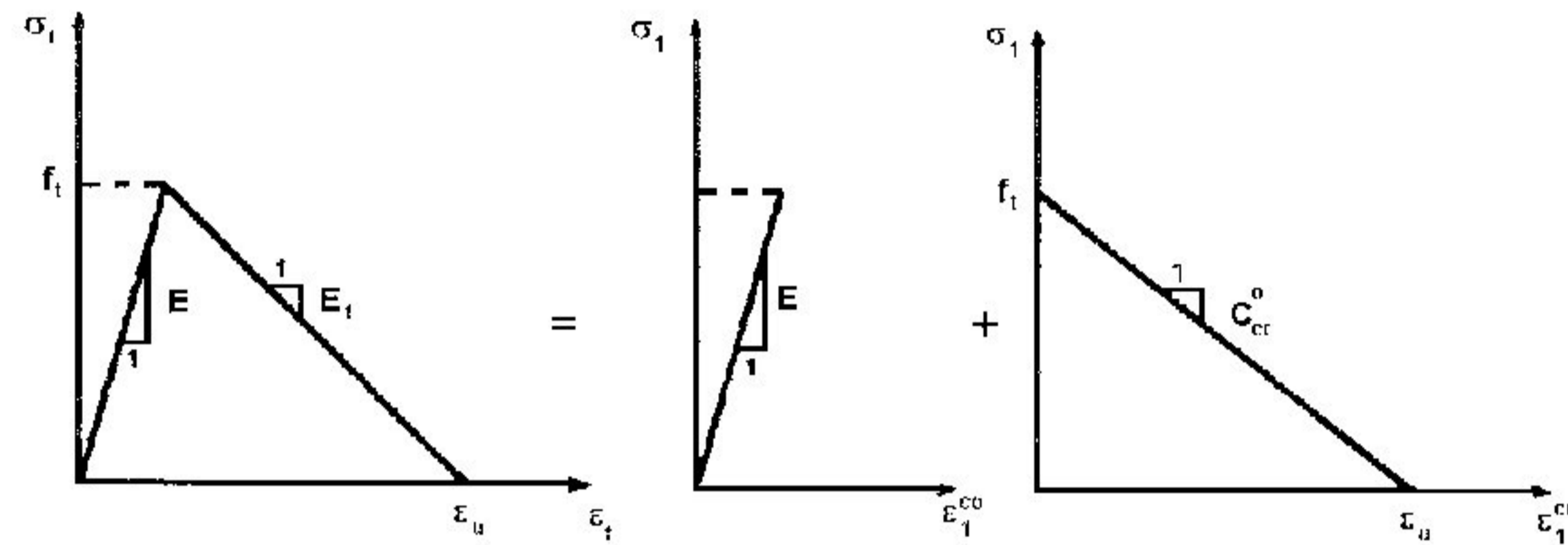


Figura 2.26 – Modelo de amolecimento linear

onde C_{cr}^0 é denominado parâmetro de amolecimento.

A equação constitutiva incremental resultante do elemento, que representa a transição entre o concreto não fissurado e o completamente fissurado, para estado plano de tensão vale, Chen e Saleeb (1994):

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EE_t}{E - \nu^2 E_t} & \frac{\nu EE_t}{E - \nu^2 E_t} & 0 \\ \frac{\nu EE_t}{E - \nu^2 E_t} & \frac{E^2}{E - \nu^2 E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta E}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

O diagrama de amolecimento mostrado na figura 2.27a, σ - ε^{cr} , é definido pela resistência limite f_t para o qual a zona de fratura inicia-se, pela área sob o diagrama, g_f , e pela forma do braço descendente. O valor de f_t pode ser considerado constante e igual a resistência uniaxial à tração. A área sob o diagrama é associada a energia de fratura G_f , figura 2.27b, que é uma propriedade do material definida como a energia necessária para criar uma unidade de área de uma fissura dada por

$$G_f = \int \sigma_n dw \quad (2.8)$$

onde, conforme já visto, na aproximação de fissuras distribuídas w é representado pela deformação na fissura numa determinada largura do elemento finito denominada largura da banda fissurada, h , que, por sua vez depende do tamanho e da forma do elemento.

Dessa forma:

$$G_f = h g_f \quad (2.9)$$

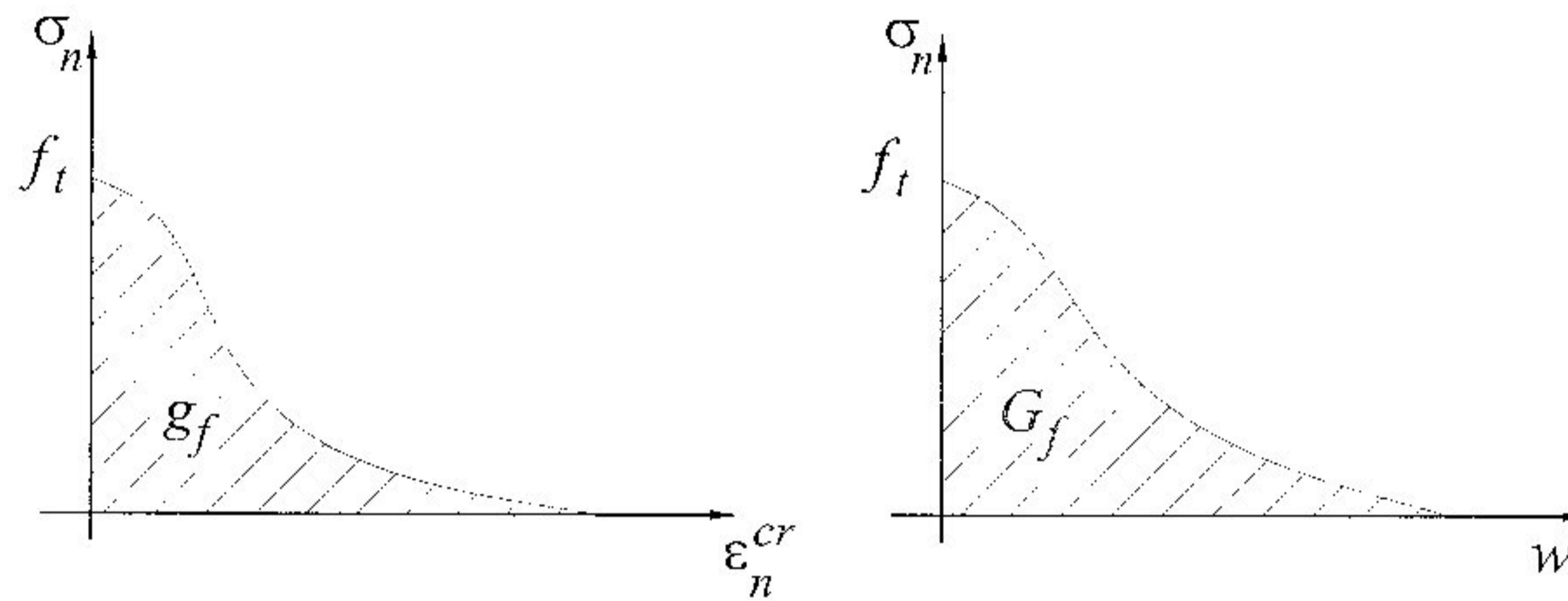


Figura 2.27 – (a) Diagrama tensão de tração-deformação associada à fissura; (b) Diagrama tensão de tração-alongamento

O modelo permite adotar formas arbitrárias da curva de amolecimento desde que se satisfaça a condição da energia de fratura. Assim o parâmetro de amolecimento C_{cr}^0 é ajustado ao valor de h de acordo com a forma do diagrama. A figura 2.28 apresenta uma curva de amolecimento linear e outra bilinear bem como os parâmetros da matriz constitutiva. Segundo Mehta e Monteiro (1994) não há uma lógica básica para a escolha de relações lineares ou bilineares, apenas que sejam numericamente simples e pareçam satisfazer os resultados experimentais relativamente bem. Para Mihashi e Deitetsu Rokugo (1993), a determinação apenas de G_f não é suficiente para o modelo, mas seria necessária também a determinação da forma da curva de amolecimento.

Existem também modelos simples que tratam a mecânica da fratura não-linear por uma aproximação equivalente da mecânica da fratura linear. No modelo de dois parâmetros de Jenq e Shah (1985)¹ as propriedades de fratura do material são caracterizada por G_f e f_t e pela movimentação crítica de abertura elástica da ponta da fissura. Curvas de resistência à fratura ou Curvas R, onde a taxa de liberação de energia de deformação a cada iniciação de fissura é uma função do comprimento da fissura, são utilizadas na determinação de curvas carga-deslocamento.

¹ Apud Bazant et al (1993)

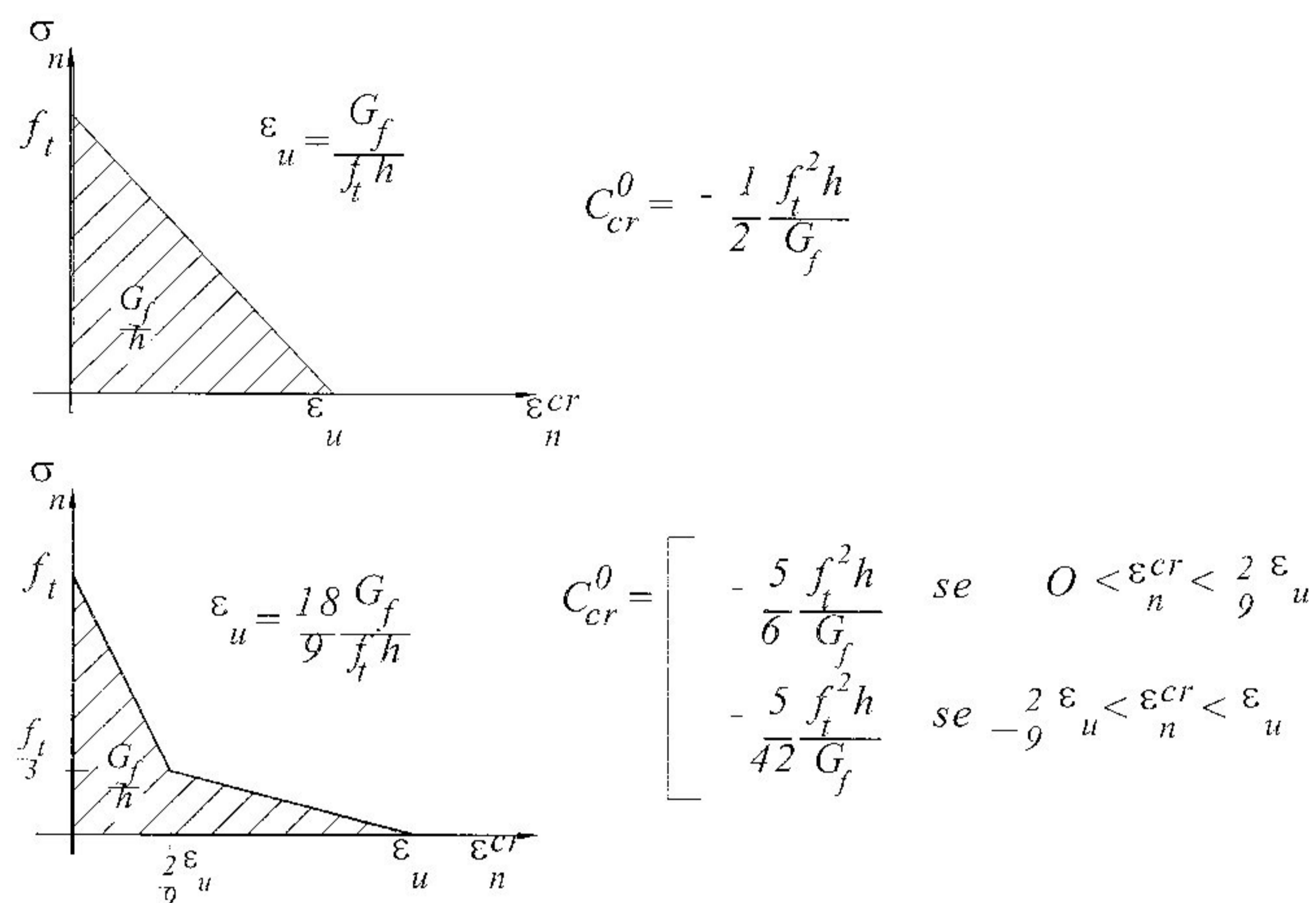


Figura 2.28 – Amolecimento linear e bilinear

Chen *et al* (1994) apresentam uma formulação genérica em que a mecânica da fratura não-linear é incorporada em modelos de fissuras distribuídas. Uma largura finita é dada a fissura e o amolecimento é assumido nesta zona. O conceito básico do modelo de fissuras distribuídas é que uma fissura implica em um número infinito de fissuras paralelas no elemento finito, como pode ser visto na figura 2.29. Assim esta região é considerada como um material composto de duas fases distintas, o concreto intacto e o concreto fissurado, homogeneizada através de um módulo efetivo que descreve as propriedades médias do material. Para isto é empregado o modelo de homogeneização de compostos, modelo de Voigt-Reuss modificado, que assume um estado de deformação homogêneo. Este modelo tem como casos particulares os modelos de amolecimento linear da faixa de fissuração de Bazant e Oh e o modelo de dano composto de Willam *et al* (1984)¹. No primeiro, a largura da região fissurada e do elemento são consideradas idênticas, e no modelo de dano composto um elemento homogêneo equivalente é desenvolvido de maneira que o deslocamento normal a direção da fissura torna-se igual ao do elemento composto pelas duas partes.

¹ Apud Chen (1994)

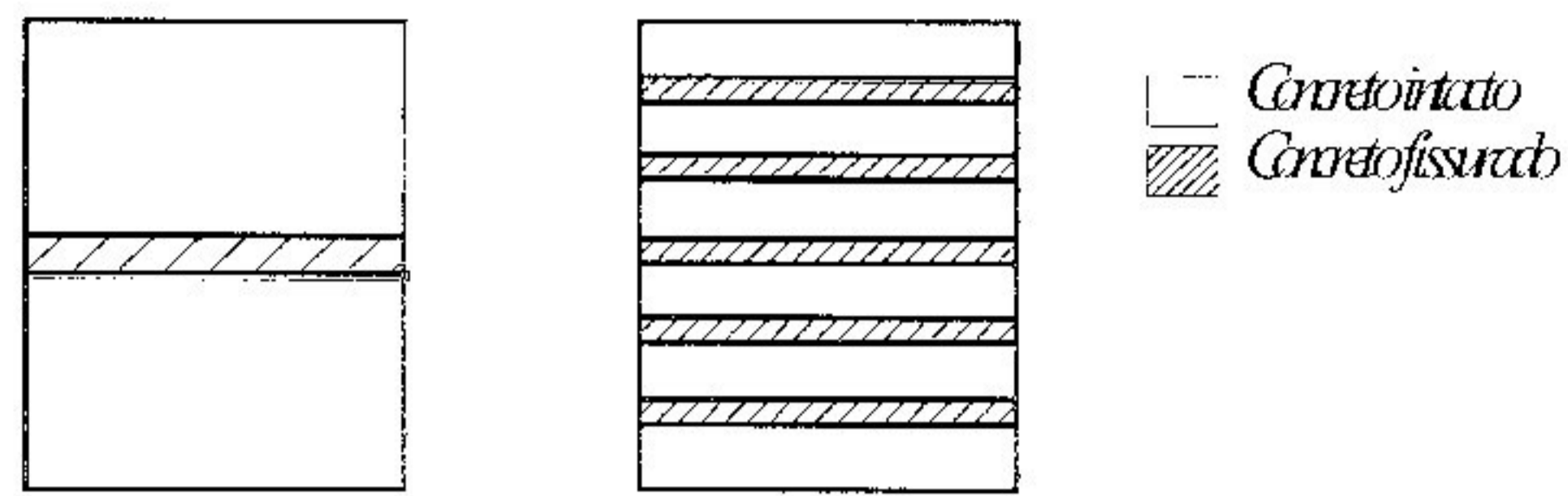


Figura 2.29 – Idealização da região fissurada – Chen (1994)

Uma das consequências mais importantes da mecânica da fratura é que o tamanho da estrutura afeta a carga última de ruptura como mostra a figura 2.30. Para as teorias em que o critério de ruptura é definido em função das tensões e deformações não existe o efeito do tamanho. Para estruturas de concreto a região em processo de fraturamento tem um tamanho significativo que leva a determinação de uma lei de efeito de tamanho, comprovada experimentalmente, como (ACI Comm., 446, 1991)¹:

$$\sigma_N = \frac{Af_t^*}{\sqrt{1 + \lambda}} \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{d}{d_0} \quad (2.10)$$

sendo d , a dimensão característica da estrutura. Nesta equação Af_t^* , que é função da energia de fratura, e d_0 são constantes, Mehta e Monteiro (1994). Este efeito é explicado pela redistribuição de tensões que ocorre devido a fissuração. A energia necessária para a criação de uma fissura de comprimento unitário é aproximadamente independente do tamanho da estrutura, assim, para que a energia liberada seja a mesma, a tensão nominal de ruptura deve ser menor para uma estrutura maior que outra semelhante a ela.

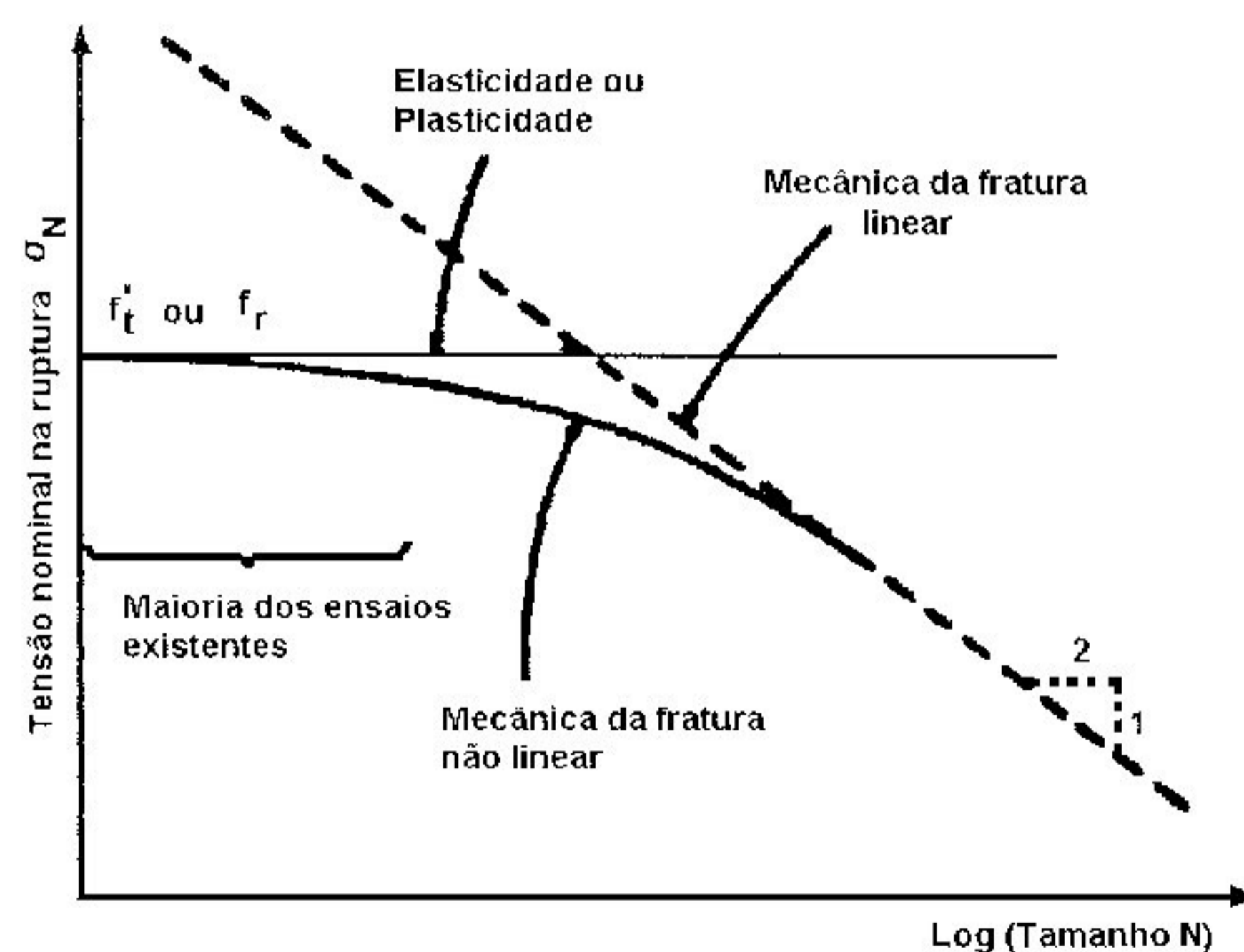


Figura 2.30 – Efeito da dimensão estrutural

¹ Apud Bazant et al (1993)

Esta lei torna possível caracterizar o comportamento qualitativo da estrutura através do índice de fragilidade λ . Estruturas pequenas, $\lambda \ll 1$, são caracterizadas por uma certa ductilidade e assim podem ser analisadas aproximadamente de acordo com a análise limite plástica. Para estruturas maiores, λ é muito maior que a unidade, então a tensão é inversamente proporcional à raiz quadrada de d , como previsto pela mecânica da fratura elástica linear. Para valores intermediários de λ , deve-se usar a mecânica da fratura não-linear, como visto na figura 2.30, pela transição gradual entre o critério de resistência e o critério da mecânica da fratura elástica linear.

Para utilização dos modelos disponíveis é necessária a determinação da energia de fratura do concreto, G_f . Geralmente é determinada por meio experimental segundo a norma RILEM TC-50 FMC (1985) *apud* Mehta *et al* (1994), usando um corpo de prova com um chanfro em “V” e carregado à flexão. O valor de G_f é obtido pelo cálculo da área sob a curva carga-deslocamento e dividindo este resultado pela seção transversal líquida do corpo de prova, acima do chanfro. Quando não se dispõe de dados experimentais, o código modelo do CEB-FIP (1991) recomenda o uso da expressão [N/m]:

$$G_f = \alpha_f (f_{cm} / f_{cm0})^{0.7} \quad (2.11)$$

onde α_f é um coeficiente que depende da dimensão máxima do agregado d_{max} , f_{cm} [MPa] é a resistência à compressão do concreto e f_{cm0} é igual a 10MPa. Van Mier (1997) sugere que G_f [N/m] seja estimado a partir da resistência à compressão f_c [MPa] como:

$$G_f = 0.97 f_c + 41.8 \quad (2.12)$$

É interessante analisar como se relacionam as curvas tensão-deformação e tensão-alongamento. A declividade da curva tensão-deformação é E , e a declividade da curva tensão-alongamento é proporcional à f_t^2/G_f . A relação entre as duas declividades tem unidade de comprimento e é chamada comprimento característico do material, l_{ch} :

$$l_{ch} = \frac{EG_f}{f_t^2} \quad (2.13)$$

O comprimento característico é muitas vezes considerado uma propriedade do material e fornece uma medida da sua fragilidade. Pastas de cimento têm um comprimento característico com variação entre 5-15 mm, argamassas entre 100-200 mm e concretos 200-400 mm. Concretos de alta resistência e concretos de agregados leves têm comprimentos característicos menores comparados ao concreto de resistência

normal. Para um dado concreto o comprimento característico pode ser determinado como $l=2.7d_{max}$, onde d_{max} é o diâmetro máximo do agregado conforme o ACI Comm. 446 (1991).

2.2.5 Teoria do dano

Em função da presença de microvazios e microfissuras em sua composição, o concreto é também estudado pela mecânica do dano contínuo, que é desenvolvida visando representar a degradação da rigidez. A teoria da mecânica do dano contínuo, teoria do dano, foi desenvolvida inicialmente por Kachanov (1958)¹ para metais e posteriormente sua aplicação estendeu-se para a representação do comportamento do concreto.

Dois tipos de modelo de dano, o dano elástico e o dano elastoplástico, tem sido propostos. Nos modelos de dano elástico o comportamento inelástico do concreto é representado pela degradação da rigidez sem a ocorrência de deformações plásticas. Os modelos de dano elastoplástico combinam a teoria convencional da plasticidade com a teoria do dano contínuo conforme comentado na seção 2.2.3.

Nesta seção apresenta-se uma breve descrição dos conceitos da mecânica do dano contínuo e do modelo constitutivo de Mazars (1981)¹, no qual são desprezadas as deformações permanentes, com base no trabalho de Chen *et al* (1994).

A teoria do dano se baseia em duas hipóteses básicas: o comportamento do material depende apenas do estado atual de sua microestrutura e que este estado pode se representado por um conjunto finito de variáveis internas denominadas variáveis de dano, podendo ser um escalar ou uma grandeza tensorial. A variável de dano baseada no conceito de tensão efetiva representa a degradação média do material em microescala.

Originalmente o dano em uma seção transversal era quantificado pela área relativa de vazios. Atualmente muitos dos modelos seguem este conceito utilizando um parâmetro escalar como variável de dano devido a sua simplicidade. Neste caso admite-se que os defeitos sejam uniformemente

¹ *Apud* Chen e Saleeb (1994)

distribuídos e independentes da orientação da superfície considerada (dano isotrópico). O outro tipo de variável de dano é o dano tensorial ou anisotrópico relacionado com o aparecimento de superfícies no material devido a perda de coesão.

Tomando-se uma seção de um elemento de volume extraído de um sólido que apresenta dano, a área dessa seção pode ser dividida em duas, a área danificada A_D e a área resistente efetiva \tilde{A} . O estado de deterioração deste elemento de volume pode ser definido pela variável D ,

$$D = \frac{A_D}{A} \quad (2.14)$$

Definindo-se a área efetiva resistente por \tilde{A} como:

$$\tilde{A} = A - A_D \quad (2.15)$$

tem-se que:

$$D = \frac{A - \tilde{A}}{A} \quad (2.16)$$

Assim, $D=0$ corresponde ao estado sem deterioração do material, e $D=1$ ao estado de deterioração total.

A área que efetivamente resiste à sollicitação interna é então dada por:

$$\tilde{A} = (1-D)A \quad (2.17)$$

No caso do dano tensorial, a variável D é um tensor que depende da orientação do plano definido pela normal à seção do elemento de volume.

O conceito de tensão efetiva e a hipótese de deformação equivalente são fundamentais na determinação da relação constitutiva. Nesta hipótese, a deformação associada a um estado danificado submetido a determinado estado de tensão é equivalente à deformação relativa ao estado não danificado sob uma tensão efetiva. A tensão efetiva é definida como a tensão obtida tomando-se a parte da seção que efetivamente resiste à sollicitação. Assim, tem-se:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (2.18)$$

E a deformação elástica unidimensional de um material com dano pode ser escrita como:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (2.19)$$

O crescimento do dano no material pode ser descrito ou prescrevendo uma lei de evolução do dano [Mazars (1986)]¹ ou usando o conceito da superfície de dano [Krajcinovic e Fonseka (1981)]¹.

O modelo constitutivo de Mazars (1981)¹ utiliza uma variável escalar D que representa e quantifica o estado local de deterioração do material. Admite-se que o aparecimento e a evolução do dano sejam exclusivamente devido à existência de alongamentos. Define-se uma deformação equivalente como uma medida do estado local de extensão como:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (2.20)$$

sendo ε_i a deformação principal e $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i$ se $\varepsilon_i \geq 0$ e $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0$ se $\varepsilon_i < 0$.

O critério de dano é definido como:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0 \quad (2.21)$$

sendo $K(D)$ o valor limite alcançado pela deformação equivalente num determinado ponto e $K(0) = K_0$ é a deformação limite que define o início do dano.

A lei de evolução do dano atende aos princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis, é dada na forma geral por:

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{se } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \text{ ou } \dot{f} < 0 \\ F(\tilde{\varepsilon}) \langle \dot{\varepsilon} \rangle_+ & \text{se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

sendo $F(\tilde{\varepsilon})$ uma função contínua positiva da deformação equivalente.

No concreto, num carregamento de tração, as fissuras são causadas pelas tensões de tração e o alongamento está na mesma direção da tensão. No caso de carregamento de compressão, os alongamentos são transmitidos pelo efeito de Poisson sendo perpendicular à direção das tensões. Para considerar esta diferença têm-se dois parâmetros independentes D_t e D_c que representam o dano na tração e na compressão:

¹ *Apud* Chen e Salecb (1994)

$$\begin{aligned}\dot{D}_t &= F_t(\tilde{\varepsilon}) \langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ \quad \text{para tração} \\ \dot{D}_c &= F_c(\tilde{\varepsilon}) \langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ \quad \text{para compressão}\end{aligned}\tag{2.23}$$

Para o estado multiaxial de tensões, D é definido por uma combinação entre D_t e D_c como:

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c\tag{2.24}$$

sendo α_t e α_c parâmetros determinados a partir do estado de tensão.

As funções de evolução do dano são definidas a partir dos parâmetros, D_t e D_c , propostos com base em resultados experimentais como:

$$\begin{aligned}D_t(\tilde{\varepsilon}) &= 1 - \frac{K_0(1-A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - A_t \exp[-B_t(\tilde{\varepsilon} - K_0)] \\ D_c(\tilde{\varepsilon}) &= 1 - \frac{K_0(1-A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - A_c \exp[-B_c(\tilde{\varepsilon} - K_0)]\end{aligned}\tag{2.25}$$

sendo K_0 o limite inicial do dano e A_t , B_t , A_c e B_c são parâmetros do material. A_c e B_c são obtidos em testes de compressão uniaxial a partir de corpos de prova cilíndricos e A_t e B_t obtidos em testes de flexão.

As leis constitutiva e incremental são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{D}_0(1-D)\varepsilon \\ \dot{\sigma} &= \mathbf{D}_0(1-D)\dot{\varepsilon} - \mathbf{D}_0\dot{D}\varepsilon\end{aligned}\tag{2.26}$$

sendo \mathbf{D}_0 o tensor elástico do material sem dano.

2.2.6 Estudos micromecânicos

As observações experimentais que mostram um comportamento diferenciado do concreto nos intervalos limitados pela tensão máxima orientaram as pesquisas para estudos micromecânicos que buscam identificar suas causas. Assim, existem linhas de pesquisas direcionadas para estudos micromecânicos no intervalo após a tensão máxima, incluindo mecanismos de deformação, amolecimento e a transição entre o comportamento frágil e dúctil, e para o comportamento micromecânico relacionando-se a microestrutura do concreto na interface da pasta de cimento e agregados graúdos.

Chen *et al* (1993) mostram que, de acordo com as observações experimentais das

microfissuras em um ensaio de compressão axial até a tensão máxima, o comportamento do concreto está associado a propagação das fissuras entre a argamassa e os agregados, fissuras de aderência (*bond cracks*), podendo a deformação ser tratada como homogênea. Esta região em que se inicia o processo de fissuração é denominada zona de transição. Após esta tensão, o comportamento está associado ao desenvolvimento das fissuras da argamassa (*mortar cracks*), formando a zona fraturada que leva às deformações localizadas que caracterizam o amolecimento.

Na medida em que a tensão aumenta, as microfissuras da zona de transição aumentam em comprimento, largura e quantidade, sendo responsável pelo comportamento não-linear do concreto. A ruptura completa do corpo de prova ocorre pela união das fissuras da argamassa e da zona de transição. Este crescimento das fissuras na zona de transição pode ser causado pelo escorregamento entre as superfícies da fissura e a face lateral dos agregados, como pode ser visto na figura 2.31. Este mecanismo pode resultar em deformações plásticas irreversíveis e na dilatação volumétrica inelástica. Este comportamento é observado numa grande quantidade de agregados graúdos em todo o concreto e justifica assim a utilização de uma relação tensão-deformação global no intervalo até a tensão máxima como uma representação adequada das propriedades do material.

Conforme já dito, as fissuras da zona de transição sozinhas não podem causar a ruptura pois estão separadas por alguma distância. A ruptura ocorre quando existe uma quantidade destas fissuras interconectadas com as fissuras da argamassa. O desenvolvimento de uma configuração de fissuras contínuas não causa uma perda imediata de capacidade de carga. Quando sucessivos passos de carga não são mais transferidos pelas fissuras na zona de transição, passam a ser transmitidos totalmente através da argamassa, ou parcialmente através da argamassa e parcialmente através do agregado, tornando possível o acréscimo da carga. À medida que os caminhos alternativos para a carga diminuem, a intensidade da tensão, e assim, a magnitude da deformação nos caminhos restantes, aumentam a uma taxa maior que a carga externa.

Quando se atinge uma configuração toda fissurada, a capacidade de carga reduz substancialmente e o braço descendente da curva tensão-deformação começa a se formar. Este processo de extensão das fissuras introduz vários mecanismos que governam o processo de ruptura do corpo de prova.

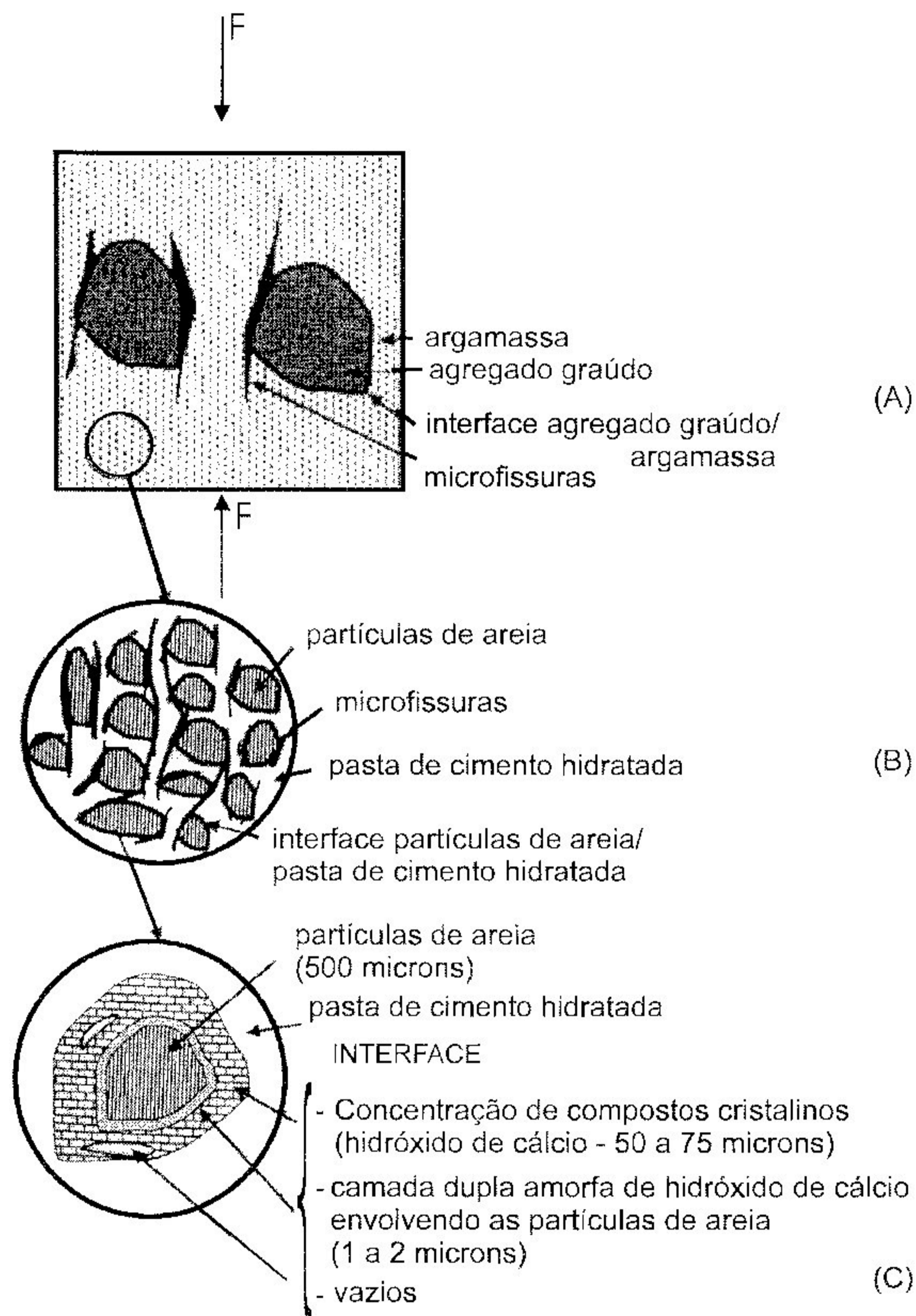


Figura 2.31 – Detalhes da massa de concreto: (A) concreto, (B) detalhe da argamassa e (C) interface partículas de areia/pasta de cimento [Chen *et al* (1993)]

Na tração uniaxial, a direção de propagação das fissuras é transversal à direção da tensão. O início e crescimento de cada nova fissura reduz a área disponível para suportar acréscimos de carga, e esta redução causa um aumento de tensões nas extremidades da fissura crítica. A frequência reduzida de interrupção do crescimento das fissuras significa que a ruptura na tração é causada por algumas fissuras que se unem e não por numerosas fissuras, como no caso de estado de tensões de compressão. O corpo de prova rompe na seção crítica na direção transversal ao carregamento. O resultado observado é que o braço ascendente da curva tensão-deformação é

aproximadamente linear até a tensão máxima. O desenvolvimento desta fissura através da largura do corpo de prova é alcançada logo após a ruptura.

A deformação após a tensão máxima é principalmente o resultado da abertura de uma simples fissura através do corpo de prova. Observa-se experimentalmente o comportamento de descarga nas zonas afastadas da região fissurada enquanto a deformação total procede, Gopalaratnam e Shah (1985)¹. Este comportamento localizado é também confirmado pela observação da área sob o diagrama carga-deslocamento, que pode ser considerado como dissipação da energia de deformação durante o processo de formação de fissura, e, como já mostrado, é influenciado pela altura do corpo de prova, figura 2.13. Esta localização mostra um contraste marcante da deformação anterior a tensão máxima que é quase uniforme por todo o corpo de prova.

Reconhecendo estas diferenças de comportamento observadas experimentalmente, Yamaguchi e Chen (1991)¹ desenvolveram um modelo micromecânico para os casos de tração e compressão uniaxial, usando o método dos elementos finitos, explorando a importância e a função da interface dos agregados graúdos com a pasta de cimento e partículas de areia no comportamento tensão-deformação.

O concreto foi idealizado como um material composto de duas fases distintas, a matriz de argamassa e os agregados graúdos. Estes últimos foram modelados como materiais isotrópicos elásticos lineares pois, de acordo com observações experimentais, permanecem intactos após a ruptura. Para as microfissuras da argamassa, utilizou-se o modelo de fissuras distribuídas baseado no conceito da mecânica da fratura não-linear, já apresentado na seção 2.2.4, e para as fissuras na zona de transição foram utilizados elementos de contato com um modelo plástico de Mohr Coulomb com uma tensão limite.

Uma série de análises foi realizada alterando-se a disposição dos agregados. Os resultados mostraram que esta variação não implica em diferenças na propagação das fissuras de aderência, ao contrário das fissuras na argamassa. Como a diferença da disposição dos agregados gera diferentes estados de tensões, conclui-se que as fissuras da argamassa são mais sensíveis ao estado de tensões do que as fissuras de aderência. Como a distribuição das fissuras de aderência pode ser considerada tão densa quanto a

¹ *Apud* Chen *et al* (1993)

distribuição dos agregados, a deformação até a tensão máxima pode ser considerada homogênea. Por outro lado, a distribuição das fissuras na argamassa é mais esparsa. Assim, pode-se concluir que o comportamento de amolecimento associado ao desenvolvimento das fissuras na argamassa torna a deformação não-homogênea, que eventualmente leva à deformação localizada, assim que estas se juntam formando uma zona contínua fissurada.

Os resultados numéricos mostraram que o aparecimento das fissuras de aderência correspondeu ao fim do limite elástico, que é cerca de 30% do limite de resistência à compressão uniaxial f_c , enquanto que as fissuras da argamassa por toda a estrutura, correspondeu à 80% deste valor, em conformidade com as observações experimentais. Nos ensaios de tração uniaxial, a fissuração contínua se apresentou para tensões cerca de 11% da resistência à compressão, estando também em conformidade com as observações experimentais.

Como mostram estes estudos é preciso um entendimento da importância da interface pasta de cimento-partículas de areia no comportamento tensão-deformação do concreto à compressão. Com esta finalidade, Chen e Cohen (1992)¹ apresentam um estudo do comportamento micromecânico do concreto associando a ciência dos materiais aos aspectos da engenharia estrutural. Em suas observações mostraram que a argamassa é altamente descontínua e heterogênea e a função das partículas de areia e da interface pasta de cimento/partículas de areia não deve ser ignorada. Os primeiros pesquisadores já observavam que nos testes de compressão o comportamento do concreto era similar ao da argamassa, o que leva a concluir que a importância das partículas de areia no comportamento do concreto é mais significativa do que as partículas de agregado graúdo. Bentur e Cohen (1987)¹ confirmaram estas conclusões e acrescentaram que o concreto deve ser considerado composto da pasta de cimento; das inclusões (vazios de ar, partículas de areia) e partículas de agregados graúdos; e da pasta de cimento na interface com as inclusões, cujas propriedades mecânicas e concentrações de cada fase são muito importantes num modelo analítico.

¹ *Apud* Chen *et al* (1993)

2.2.7 Outros modelos

Em trabalhos como o de Chen e Pan (1991)¹ o concreto é tratado como um geomaterial em função da sua constituição por agregados, areia e cimento sendo modelado através dos conceitos desenvolvidos no campo da geomecânica. Nesta aproximação, a descontinuidade e a fragilidade das propriedades do concreto é considerada utilizando a teoria do bloco finito, que idealiza o concreto como um conjunto de blocos distintos. Ao contrário do método dos elementos finitos que impõe a compatibilidade dos deslocamentos nos nós, os blocos finitos podem se separar. Para determinar os movimentos e deformações dos blocos, um sistema de equações de equilíbrio é obtido a partir da minimização da energia potencial total. Estas equações são resolvidas iterativamente até que as restrições cinemáticas da não interpenetração entre os blocos sejam satisfeitas. Esta aproximação numérica é viável atualmente com os avanços computacionais e da teoria cinemática para sistemas de blocos [Shi e Goodman, 1989]¹.

Neste caso, o modelo constitutivo é menos importante pois o comportamento macroscópico do material é alcançado pelo sistema idealizado de blocos. O contato entre os blocos é modelado pela lei de Coulomb. A resistência à tração é modelada numericamente admitindo um nível de tolerância de separação entre os blocos. Segundo seus autores, este modelo que se aproxima das propriedades reais do concreto, material descontínuo e frágil, supera as principais falhas inerentes aos modelos baseados nos princípios da mecânica do contínuo, que são baseados nas hipóteses da não-fissuração, da elasticidade e da plasticidade.

¹ *Apud* Chen *et al* (1993)

2.2.8 A associação do concreto e a armadura.

Até esta seção foram apresentadas as características do concreto simples e os diversos modelos desenvolvidos para representá-las. Como visto, a fissuração é a característica mais marcante do seu comportamento. Assim, a fim de superar esta deficiência de resistência à tração e conseqüentemente aumentar a capacidade de resistência e de deformação das estruturas, o concreto é associado ao aço resultando no material composto concreto armado. No entanto, a presença da armadura altera os mecanismos de resistência, que devem então, ser reproduzidos nos modelos desenvolvidos.

Os dois materiais possuem propriedades bastante distintas. O aço possui módulo de elasticidade com uma ordem de grandeza superior ao do concreto e possui comportamento à tração e à compressão semelhantes. Esta falta de compatibilidade entre ambos pode resultar em ruptura por perda de aderência, por escorregamento das barras, por deformações locais e pela fissuração. Na figura 2.32 estão apresentados alguns dos mecanismos desta interação entre o concreto e a armadura.

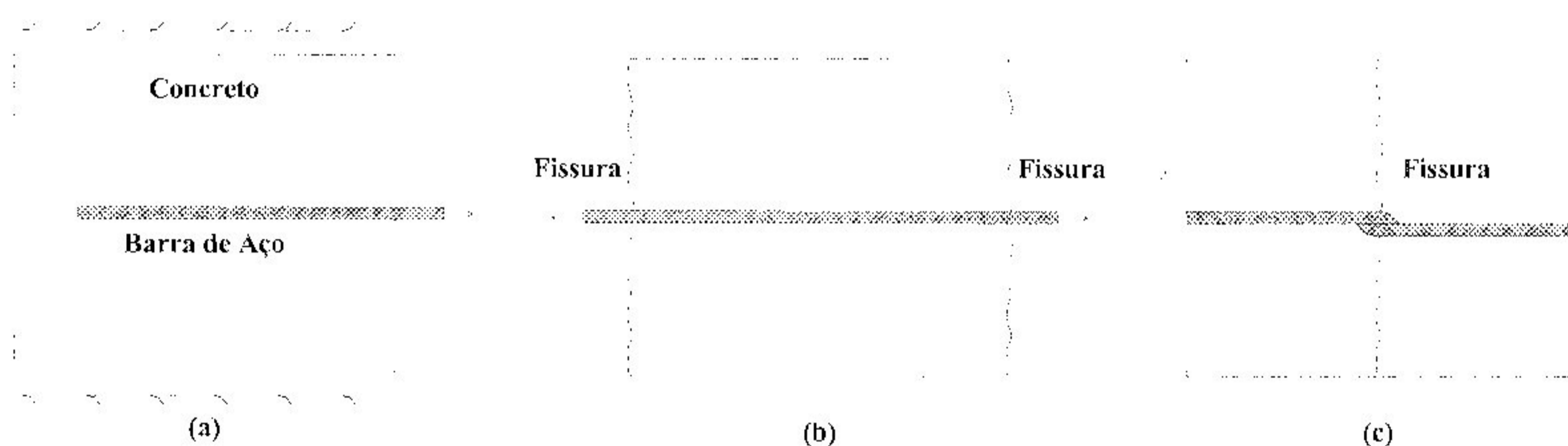


Figura 2.32 – Efeitos da associação entre o aço e concreto: (a) efeito de arrancamento, (b) efeito de enrijecimento a tração e (c) efeito de pino.

O caso (a) apresentado na figura mostra o fenômeno de arrancamento que ocorre na região dos apoios de vigas sujeitas a esforços cortantes elevados ou nas zonas de ancoragem das armaduras. No MEF o efeito de arrancamento é modelado através de molas discretas ou distribuídas, que simulam as forças de contato nas faces das barras cujas características são obtidas em testes de arrancamento [Ngo e Scordelis (1967)].

O caso (b) mostra duas fissuras adjacentes que se formam quando o concreto e a armadura são submetidos à tração. Devido ao fenômeno da aderência, o concreto entre as fissuras permanece, ainda, com uma capacidade significativa de absorver aquele tipo

de solicitação. Este efeito de enrijecimento, o *tension stiffening*, pode proporcionar um aumento significativo na resistência à tração. O enrijecimento à tração está ilustrado nas figuras 2.33 e 2.34 que apresentam resultados de análises experimentais

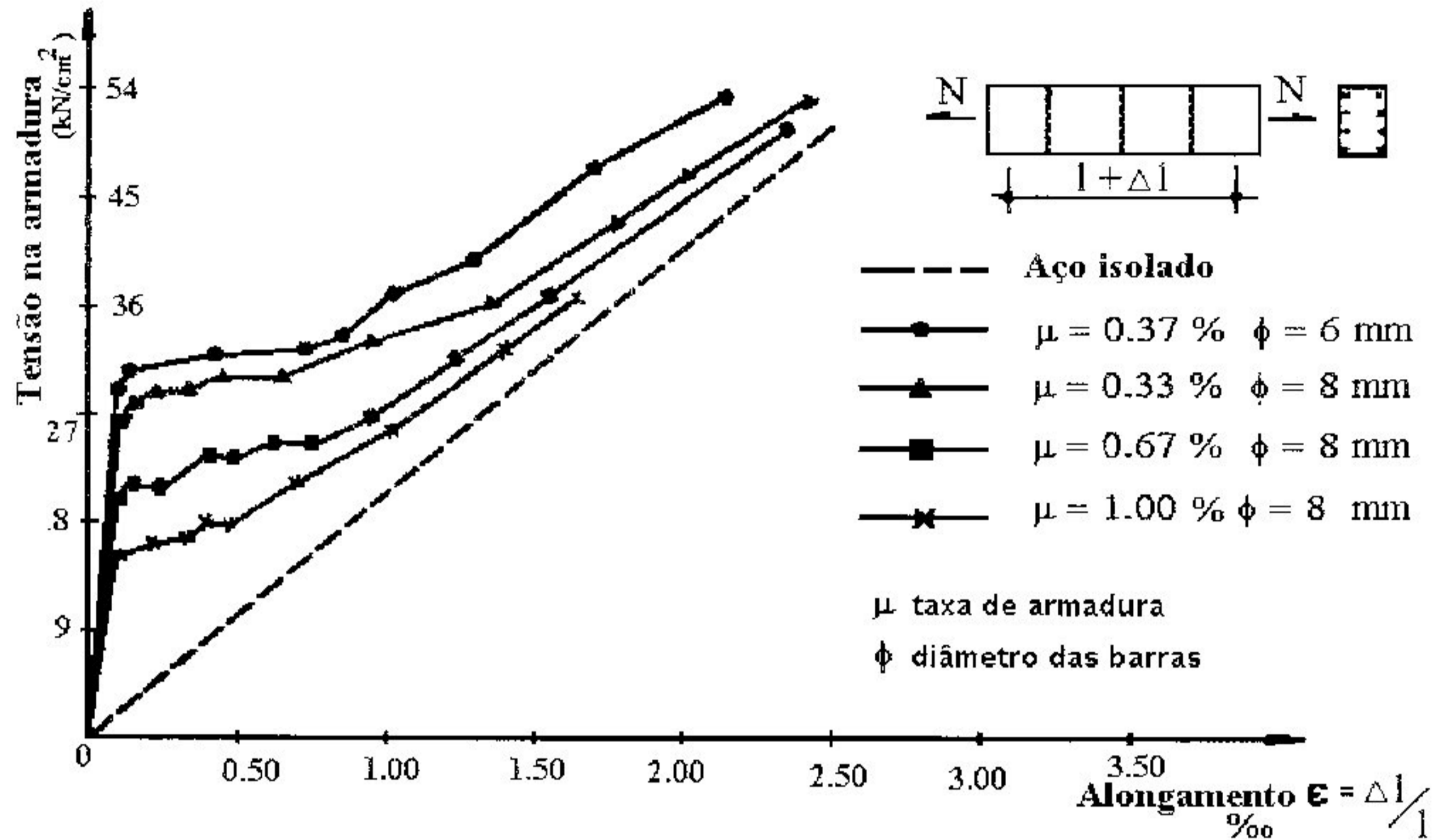


Figura 2.33 – Comportamento experimental de barras em tração no concreto. [Proença (1988)]

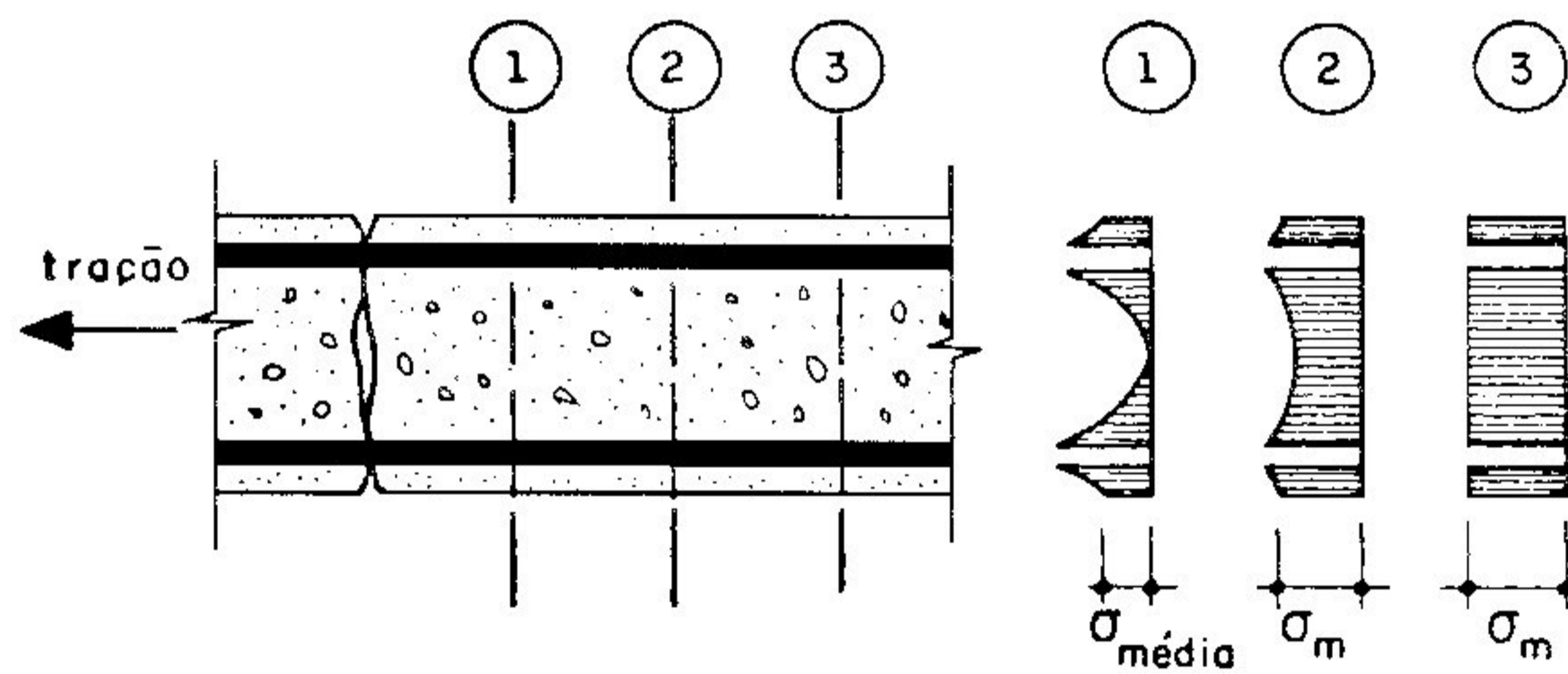


Figura 2.34 – Distribuição de tensões no concreto fissurado. [Proença (1988)]

Na figura 2.33 observa-se que a inclinação da reta de proporcionalidade entre a tensão e a deformação na armadura na região inicial é muito maior do que àquela obtida no caso da armadura isolada. Com a fissuração no concreto nota-se no aço um aumento rápido das deformações para pequenos acréscimos de tensão devido a transferência dos esforços do concreto para a armadura. Assim com o progresso da fissuração, a tendência da armadura é a de adquirir um comportamento de armadura isolada, mostrando com isso a diminuição da colaboração do concreto na resistência à tração. Na figura 2.34, a variação da distribuição de tensões na massa de concreto fissurado está apresentada pela

comparação entre os valores das tensões médias em seções posicionadas em relação à fissura. Como visto, este efeito deve ser introduzido nos modelos, pois, ao desprezar o enrijecimento à tração pode-se conduzir a uma subestimação da capacidade resistente da estrutura.

Em análises via MEF, utilizando-se o modelo de fissuras distribuídas, este efeito pode ser considerado de uma maneira indireta na qual considera-se uma redução progressiva da resistência à tração com o aumento das deformações, da mesma forma apresentada para o amolecimento (*tension softening*) no caso do concreto simples. Uma maneira alternativa de representar o *tension stiffening*, proposta inicialmente por Gilbert e Warner (1978)¹ é aumentar o módulo de elasticidade do aço. Porém, como mostrado por Hu e Schonbrich (1988)¹ esta representação é menos eficiente que a alteração da relação tensão-deformação do concreto.

Num modelo de fissuras distribuídas estes dois conceitos, *tension softening* e *tension stiffening*, estão relacionados, mas devem ser diferenciados. O primeiro trata-se de uma homogeneização da resposta tensão-deformação do concreto simples, que descreve o fenômeno de formação de fissuras num sentido médio, conforme já apresentado, empregado quando o controle é feito por meio de considerações de fratura do concreto. Já *tension stiffening* é um termo utilizado para descrever a interação entre a armadura e o concreto assim que as fissuras são formadas, sendo simulado neste caso da mesma forma que no primeiro, em termos das propriedades médias do material. Estas propriedades são dependentes do espaçamento entre as fissuras, da porcentagem de armadura e da aderência entre os materiais. Estes dois efeitos podem ser considerados simultaneamente, observando-se porém que o amolecimento se dá na direção normal à fissura, enquanto o enrijecimento ocorre na direção da armadura. O modelo de Balakrishnan e Murray (1988) apresenta esta propriedade homogeneizada combinada para o caso em que estas direções são coincidentes. No entanto, a armadura pode apresentar alguma inclinação em relação a fissura. Assim Ramaswamy *et al* (1995) incorporaram na representação de fissuras proposta por de Borst e Nauta (1985)¹, que considera a deformação total do concreto dividida em uma parcela devido ao concreto intacto e outra devido às fissuras e o efeito do enrijecimento a tração com a utilização de uma mola correspondente na direção da armadura.

¹ *Apud* Barzegar (1993)

Pode-se dizer que embora o objetivo dos modelos que incluem o *tension stiffening* e o *tension softening* possam diferir, os efeitos numéricos são similares. Na verdade ambos introduzem a estabilidade numérica da solução, sendo por isso adotado em grande parte dos modelos pesquisados.

O acompanhamento do fechamento das fissuras em função da redistribuição das tensões é feito por um critério análogo ao caso do concreto simples que consiste em anular a deformação total. No caso de modelos de fissuras distribuídas, há a necessidade de um critério de carga e descarga, em função da possibilidade de ocorrerem pequenas descargas durante o processo de redistribuição de tensões. Os critérios mais simples admitem que a descarga acontece elasticamente sem a geração de deformação residual. Segundo Bicanic *et al* (1993) na realidade alguma deformação residual após o fechamento da fissura deve ser esperada, mas este procedimento é numericamente estável. Para que isso seja possível o módulo de deformação deve variar em função do nível de tensão e de deformação no instante da descarga. A figura 2.35 ilustra este critério de carga-descarga.

No caso (c), figura 2.32, há uma deformação de cisalhamento após a formação da fissura. As barras agem aumentando a resistência ao esforço cortante. O esforço cortante pode ser transmitido no concreto armado fissurado através do intertravamento dos agregados e do efeito de pino (*dowel effect*).

O efeito de pino tem origem nas barras que atravessam uma fissura sujeita a deslocamentos relativos devido à força cortante. Embora a função primeira destas barras seja resistir aos esforços devido à flexão, elas poderão colaborar de modo significativo na resistência à força cortante. No caso de peças que tenham quantidade deficiente de armadura transversal este efeito pode ser diminuído devido aos diferentes modos de ruptura associados à flexão localizada da armadura. Um desses modos de ruptura é gerado pela pressão das barras longitudinais sobre o concreto do cobrimento, provocando uma fissuração horizontal adjacente às mesmas. Associado a esse modo de ruptura está um outro decorrente do escoamento da barra por tração e flexão locais exageradas. No caso de armadura transversal em quantidade insuficiente, a ruptura pode ocorrer também por escoamento do estribo.

¹ *Apud* Ramaswamy (1995)

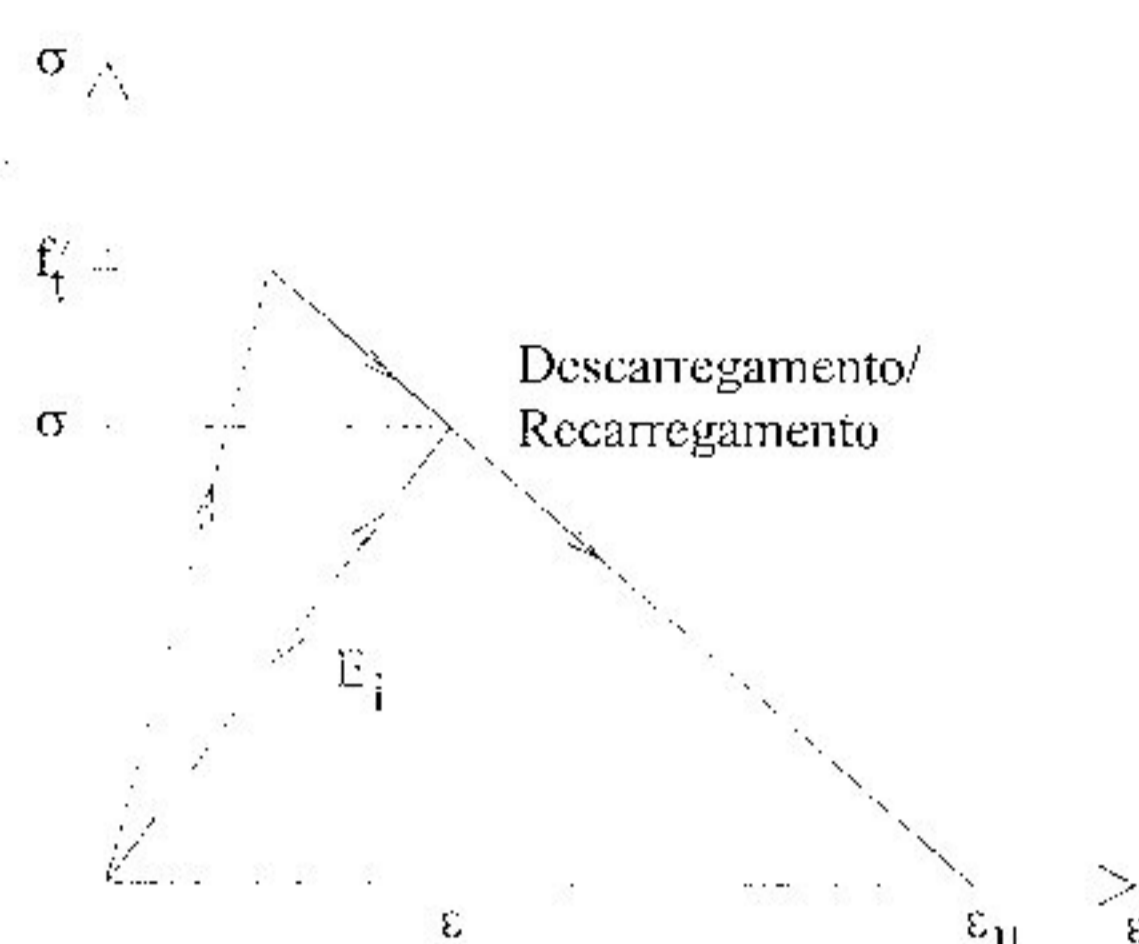


Figura 2.35 – Critério de carga-descarga do concreto em presença da armadura

O efeito de intertravamento dos agregados que ocorre quando há um deslocamento relativo entre as faces irregulares das superfícies da fissura, também é responsável pela transferência do esforço cortante. Este deslocamento só é possível por um aumento na abertura inicial da fissura, entretanto, a transmissão da força cortante só será efetiva na medida em que haja impedimento à separação das superfícies da fissura que poderá ser exercido pela massa de concreto que envolve a fissura ou por intermédio de barras de armadura que a atravessam. É interessante acrescentar que o efeito de intertravamento dos agregados é o maior responsável pela resistência ao cisalhamento, pois com o aumento das fissuras o esforço de pino é rapidamente esgotado. A presença do estribo melhora tanto a contribuição do esforço de pino quanto o intertravamento dos agregados; o confinamento evita a perda de aderência devido ao fendilhamento. Assim o tamanho dos agregados, a abertura inicial da fissura e a taxa de armadura que a atravessa são alguns dos componentes na resistência ao cisalhamento.

O efeito de pino pode ser incorporado em um modelo usando uma rigidez transversal equivalente e uma resistência ao cisalhamento para o concreto fissurado, da mesma maneira proposta para o efeito de intertravamento dos agregados em modelos de fissuras distribuídas fixas na seção 2.2.2. Ottosen (1980)¹ modelou o efeito de pino retendo uma porção do módulo de elasticidade transversal do aço, E_s , em suas conclusões, sugere que este efeito deva ser tratado através da rigidez à flexão ao invés da rigidez ao cisalhamento.

A presença da armadura também altera a configuração das fissuras. Segundo Balakrishnan e Murray (1988a), no caso de lajes com taxa de armadura significativamente diferente nas duas direções, os resultados experimentais de Vecchio

¹ Apud Barzegar (1993)

e Collins (1982) e analíticos de Gupta e Akbar (1984) mostraram que, num sentido médio, a direção das fissuras se alteravam com o carregamento e o comportamento do material era dominado principalmente pela direção recente da fissura do que pela direção inicial desta. Barzegar *et al* (1993) afirmam que, mesmo painéis isotropicamente armados mas com a armadura orientada segundo ângulos que diferem de $\pm 45^\circ$ ou $0/90^\circ$ em relação as direções principais de carregamento, fissuras adicionais não ortogonais podem desenvolver-se.

Os modelos de fissuras distribuídas fixas são baseados no conceito da deformação total. Esta aproximação tem duas desvantagens. A primeira é que quando uma relação total entre tensões e deformações é adotada, não é possível combinar a fissuração com outras não linearidades como a plasticidade e a deformação lenta. A segunda é que o modelo de fissuras fixas, como mostrado na seção 2.2.2, assume que, após alcançado a tensão máxima, a direção do plano da fissura é mantida fixa. No entanto, quando um modelo de amolecimento é adotado, a tensão normal residual que age na fissura e a tensão de cisalhamento podem levar a valores de tensões principais que podem exceder a resistência à tração em uma direção que difere da normal ao plano da fissura existente. Esta rotação dos eixos de tensões principais e a possível violação do critério de resistência em uma nova direção podem não ser adequadamente tratados em uma relação tensão-deformação total, o que pode levar a obtenção de tensões falsas e tendem a resultar em cargas de colapso que superestimam a verdadeira carga de ruptura, como pode ser visto na figura 2.36.

Algumas alternativas como, modelos de fissuras rotativas (*swinging-crack model* ou *rotating crack model*) [Rots (1988)¹, Balakrishnan e Murray (1988a), Crisfield e Wills (1989) e Feenstra e de Borst (1995)], modelos de fissuras múltiplas não ortogonais [Ramaswamy *et al* (1995) e d'Avila e Campos (1997)] e modelos plásticos com o critério de escoamento de Rankine [Crisfield e Wills (1989) e Feenstra de Borst (1995)] são utilizadas para melhorar os resultados obtidos com o modelo de fissuras fixas.

¹ *Apud* Feenstra e de Borst (1993)

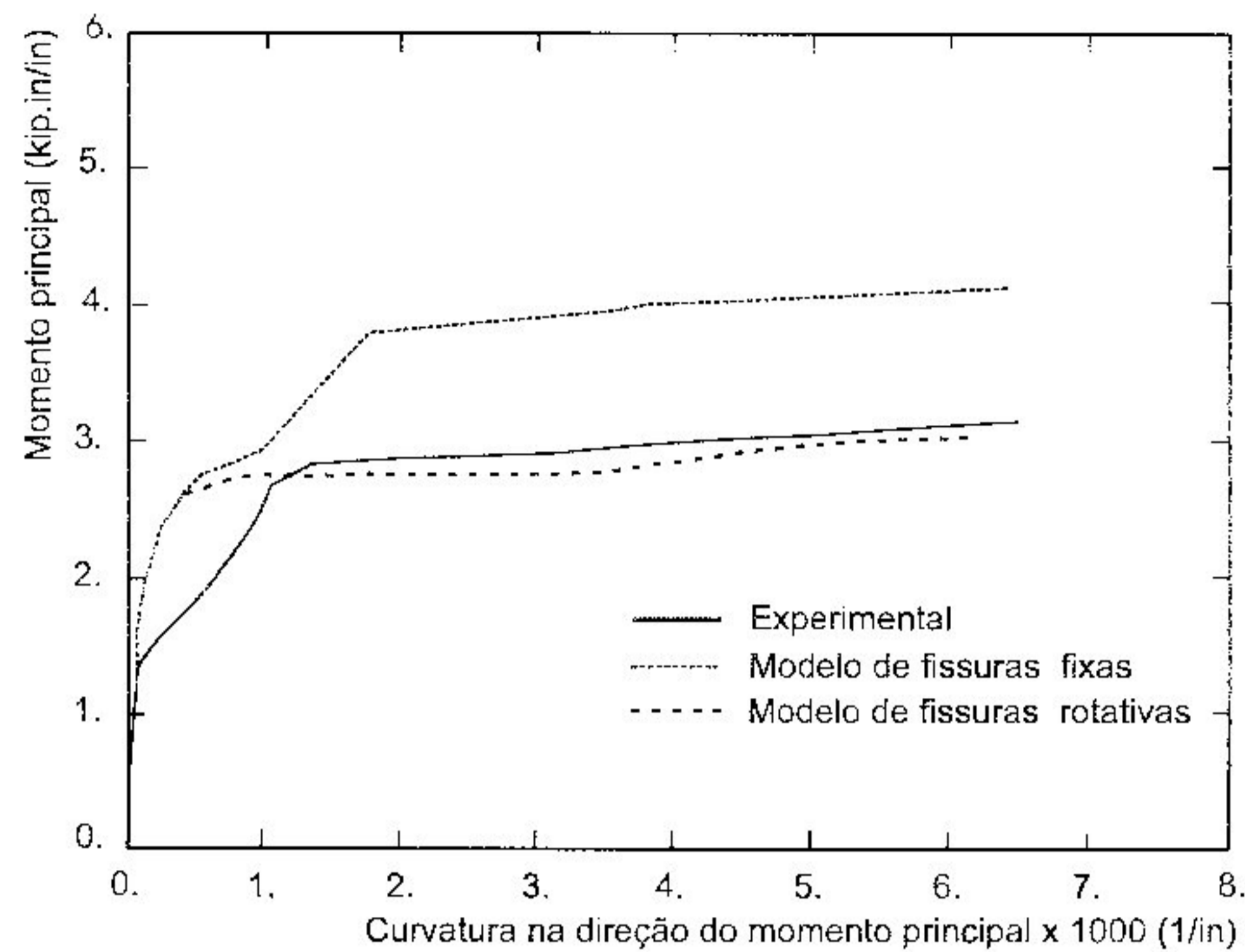


Figura 2.36 -- Comparação entre curvas momento-curvatura experimentais com as obtidas utilizando modelos de fissuras fixas e de fissuras rotativas. [Milford (1984)]¹

No modelo das fissuras múltiplas, proposto inicialmente por de Borst e Nauta (1985)², a deformação de tração do concreto fissurado é decomposta nas deformações das fissuras e nas deformações do concreto intacto entre estas fissuras. Esta formulação é bastante útil pois o comportamento na interface da fissura pode ser tratado independente do comportamento do concreto intacto entre as fissuras. Assim, as não-linearidades entre as fissuras podem ser consideradas utilizando diferentes modelos constitutivos. Esta decomposição da deformação implica que o concreto e a fissura comportam-se como uma associação de molas, como mostrado na figura 2.37 referente ao modelo de Ramaswamy (1995). Em seu modelo, Ramaswamy ainda inclui o efeito do *tension stiffening* na direção da armadura e o comportamento de amolecimento na compressão do concreto fissurado sob estado de tensão de tração-compressão usando a relação empírica dada por Vecchio e Collins (1986)².

Para um modelo em elementos finitos, as múltiplas fissuras ocorrem nos pontos de integração. Novas fissuras se formam à medida que as tensões mudam de direção e violam a resistência à tração em uma nova direção principal fechando as fissuras existentes. Para o surgimento de uma nova fissura, dois critérios devem ser satisfeitos simultaneamente: a tensão principal de tração deve ser superior a uma tensão limite; e, no caso de já existir uma fissura prévia, o ângulo entre a fissura existente e a tensão principal de tração deve exceder o valor de um ângulo limite.

¹ Apud Nogueche et al (1993)

² Apud Ramaswamy et al (1995)

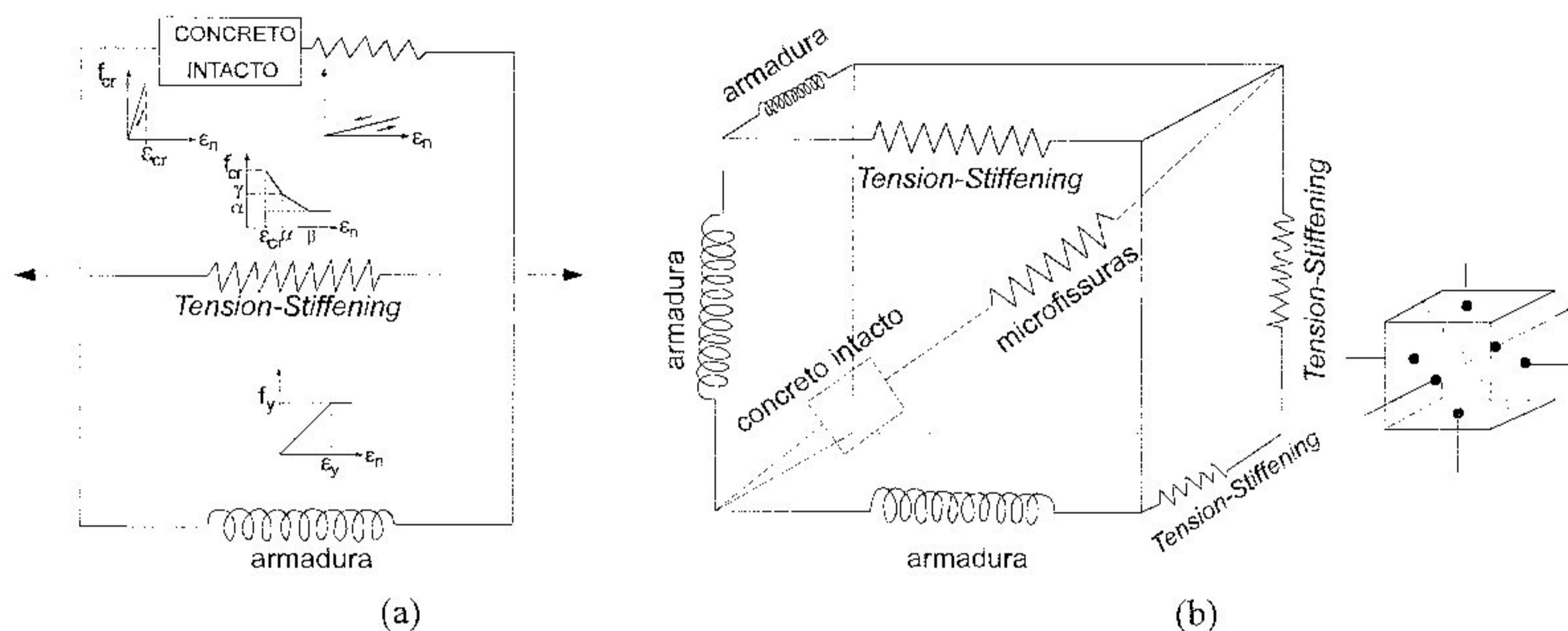


Figura 2.37 – Representação reológica do concreto fissurado no modelo de Ramswamy (1995), (a) tração uniaxial e (b) caso geral tridimensional

Bicanic *et al* (1993) realçam que, apesar do modelo de múltiplas fissuras ser provavelmente o modelo de fissuras distribuídas mais flexível e sofisticado, ele possui algumas desvantagens. A primeira desvantagem deste modelo é justamente a introdução deste novo parâmetro que deve ser fornecido pelo usuário. As respostas da estrutura podem diferir dependendo do valor adotado para este parâmetro, pois este influencia na rigidez ao cisalhamento do sistema de fissuras. Outro problema é o que deve ser feito com a energia dissipada em cada fissura. Como após a abertura de novas fissuras, a fissura existente tende a se fechar, Rots (1988) sugere que parte desta energia seja transferida para a nova fissura. Pode-se citar ainda, os problemas que podem ocorrer quando houver estados de tração e compressão. Nesta aproximação a ruptura na tração é tratada dentro do modelo de fissuras, mas a ruptura por compressão é tratada de acordo com os conceitos da plasticidade. Embora o modelo de fissuras múltiplas seja conceitualmente capaz de considerar os incrementos de deformações compostos de componentes plásticas e elásticas, o algoritmo robusto resultante consiste num problema. Finalmente a própria implementação do modelo de fissuras múltiplas não é direta, as alterações como, por exemplo, abertura de novas fissuras, fechamento e reabertura de fissuras existentes, podem resultar em diferentes respostas para diferentes implementações.

O modelo de fissuras rotativas parte do mesmo conceito de uma relação tensão-deformação total dos modelos de fissuras fixas. A diferença entre eles é que neste modelo, proposto inicialmente por Cope *et al* (1980), as direções da deformação

principal máxima e da normal à fissura estão alinhadas durante todo o processo. Assim as direções da tensão principal e da deformação principal para o concreto fissurado são coincidentes durante todo o processo de fissuração. Após a rotação da direção da deformação principal, a fissura existente é ignorada não existindo, portanto, a possibilidade de se modelar fissuras múltiplas simultâneas.

Nos modelos de fissuras fixas, o fator β , referente ao cisalhamento, é explicitamente inserido na matriz de rigidez. Por outro lado, utilizando modelos de fissuras rotativas, uma rigidez ao cisalhamento implícita naturalmente desenvolve-se a partir da rotação dos eixos principais de tensões e deformações e da necessidade de coaxialidade entre eles.

Desta forma, a maior vantagem do modelo de fissuras rotativas é que não é necessário escolher um fator de retenção de cisalhamento. Noguchi e Schonobric (1993) afirmam que, no caso de lajes em que a taxa de armadura entre as direções ortogonais são bastante diferentes ou quando a estrutura é submetida a um carregamento não proporcional, existe um consenso entre muitos autores que o modelo de fissuras rotativas leva a resultados mais próximos dos experimentais, como visto na figura 2.36 [Cope *et al* (1980), Balakrishnan e Murray (1988a e b), Crisfield e Wills (1989) e Feenstra e de Borst (1995)].

Este modelo, como mostrado por Rots (1988), pode ser visto como um caso limite do modelo de fissuras múltiplas quando o ângulo limite é igualado a zero. Assim uma nova fissura surge a cada passo de carga enquanto a fissura existente é apagada da memória. Somente o dano que ocorreu, resultando na redução da capacidade de absorver tensões de tração, é transferido à nova fissura. Para manter a coaxialidade entre os tensores de tensão e de deformação é necessário que a rigidez incremental ao cisalhamento total do sistema de fissuras e concreto, βG , seja igualado ao termo da rigidez ao cisalhamento definida no modelo de fissuras rotativas:

$$\beta G = (\sigma_m - \sigma_{tt}) / 2(\varepsilon_m - \varepsilon_{tt}) \quad (2.27)$$

Todos esses fenômenos inerentes ao comportamento do concreto armado citados até aqui e a necessidade de se obter a estabilidade numérica da solução vêm estimulando os pesquisadores a inserirem estes aspectos específicos do comportamento do concreto armado em seus modelos via MEF.

Inicialmente os modelos constitutivos para o concreto armado nas análises via

MEF foram desenvolvidos para flexão no plano, caso de vigas e pórticos, seguindo-se para os casos de flexão fora do plano, placas e cascas e posteriormente para o caso mais geral tridimensional. Geralmente os materiais são representados independentemente e combinados ao nível do elemento ou com o uso de elementos distintos para cada material.

Em função do comportamento uniforme do aço, e já bastante consagrado, não se encontra muita ênfase nos modelos constitutivos adotados para o aço nos trabalhos de muitos pesquisadores. Geralmente, este é modelado como uniaxial, com comportamento elástico perfeitamente plástico ou plástico com encruamento, empregando-se diagramas tensão-deformação bilinear ou trilinear. Este último é preferível, pois uma certa inclinação do diagrama tensão deformação, após o início do comportamento não linear, oferece estabilidade numérica. Segundo Darwin (1993) modelos significativamente diferentes para o aço freqüentemente produzem resultados igualmente bons para as estruturas de concreto armado.

Basicamente as formas para representação da armadura em análises via MEF podem ser através de material uniaxial equivalente distribuído, de elementos de treliças conectados nos nós da malha ou com a utilização de um elemento uniaxial embutido em um elemento finito, como pode ser visto na figura 2.38.

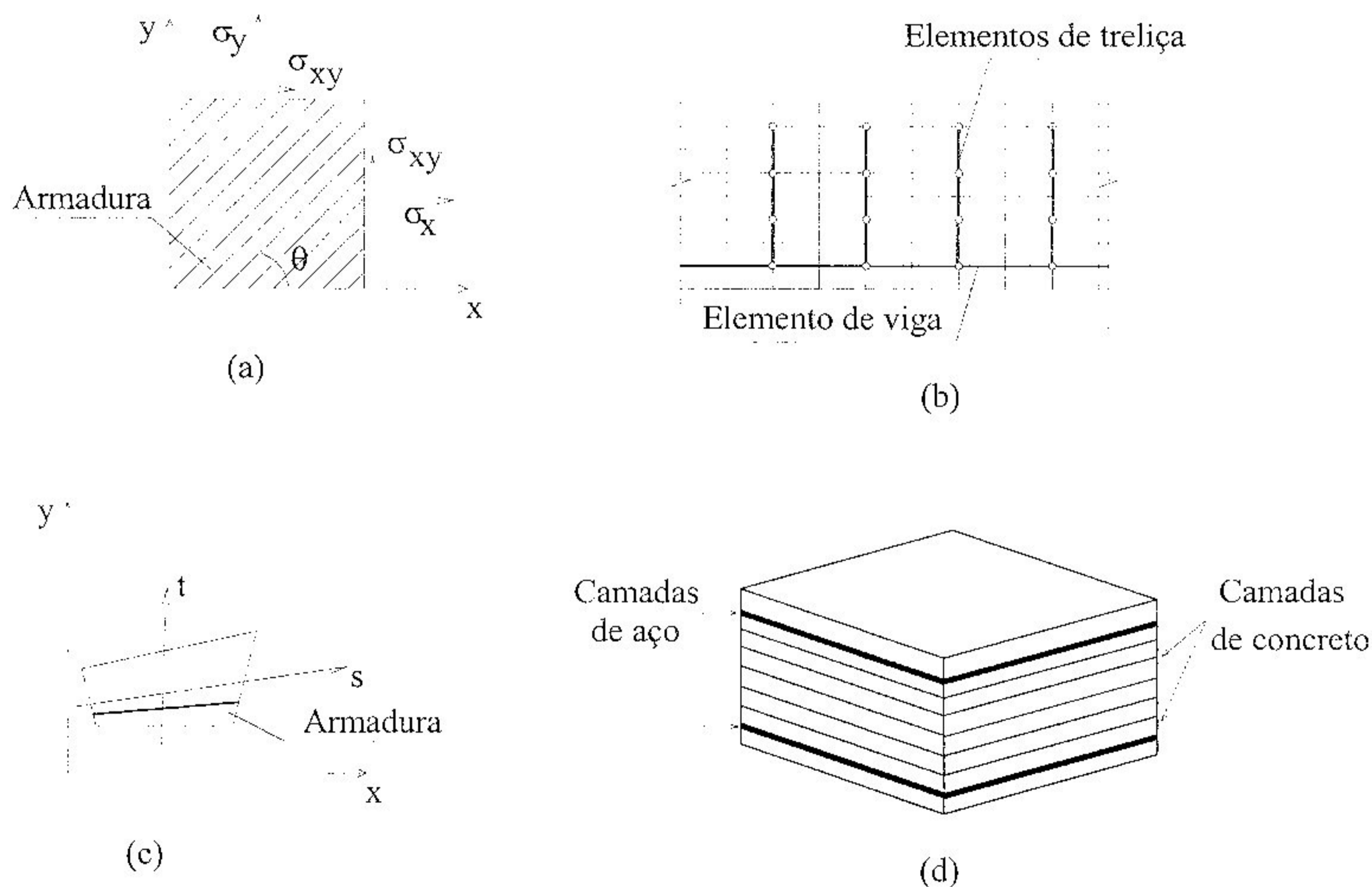


Figura 2.38 – Representação das armaduras: (a) e (d) distribuída, (b) discreta e (c) embutida.

No primeiro modelo, o aço é representado por uma relação constitutiva uniaxial, que num modelo bidimensional:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

onde $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ e $d\tau_{12}$ são os incrementos de tensão nos eixos locais, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ e $d\gamma_{12}$ são os incrementos de deformação nos eixos locais, ρ é taxa de armadura e E_s é a rigidez tangente do aço. A matriz constitutiva é adicionada a matriz do concreto. Esta técnica também pode ser utilizada para adicionar o aço em camadas ou integrar elementos de placas ou cascas. Várias camadas de aço com diferentes orientações podem ser adicionadas no elemento finito.

No segundo modelo, o aço é facilmente representado utilizando os elementos de treliça disponíveis nos programas. Trata-se de uma representação mais realista, porém possui a desvantagem de necessitar da coincidência dos nós da malha de elementos de concreto com a posição da armadura.

Nos modelos com armaduras embutidas, o aço é representado por um elemento uniaxial inserido em um elemento finito de concreto impondo-se a condição de igualdade dos deslocamentos, tratando-se assim de um superelemento.

Utilizando o modelo em que o aço é disperso pelo elemento, elementos estratificados são largamente empregados nas análises envolvendo não-linearidades físicas de estruturas de concreto armado, Hand *et al* (1973), Proença (1988), Ramaswamy *et al* (1995) e Feenstra e de Borst (1995). Nestas análises o elemento é dividido em camadas superpostas, compondo a altura da seção transversal, adotando-se algumas camadas com propriedades do concreto e outras contendo as características do aço. As camadas de aço tem espessura proporcional à quantidade de barras presentes naquela região sendo distribuída sobre a área do elemento, estando assim necessariamente contidas em planos paralelos. Com o modelo em que o aço é disperso pelo elemento as armaduras são também modeladas distribuídas em elementos sólidos como nos trabalhos de Barbosa (1997) e Queiroz *et al* (1999).

Os elementos em camadas simplificam o processo computacional por tratarem as variações das propriedades do material internamente ao elemento, de forma implícita. No entanto, não permitem que se calculem adequadamente as tensões e deformações de

cisalhamento por não permitirem variações nos deslocamentos transversais ao longo da espessura. Para melhorar a representação das tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção transversal, Figueiras e Owen (1983)¹ propuseram fatores de correção da rigidez ao cisalhamento baseados em condição de energia.

Alternativamente a este modelo, Barzegar (1989)¹ introduziu um modelo de estratificação explícita, em que a seção transversal é dividida em elementos finitos distintos, cada um composto unicamente de concreto ou de aço. A compatibilidade é garantida por meio de restrições às variáveis de deslocamentos dos elementos adjacentes ao longo de uma linha vertical, de forma a garantir a flexibilidade ao cisalhamento através da seção transversal. O inconveniente desse processo é o aumento do esforço computacional em função do uso de um número maior de elementos.

Em todos os modelos de representação para a armadura descritos acima, admite-se a aderência perfeita, ignorando-se o deslizamento entre a armadura e o concreto. No caso do modelo com armadura distribuída a aderência perfeita está garantida pela superposição das matrizes constitutivas do aço e do concreto e no caso de se utilizarem elementos distintos, está garantida pela compatibilidade dos deslocamentos dos nós.

O aspecto mais importante da aderência é a sua relação com o desenvolvimento das fissuras. Ao ocorrer a formação da fissura, as tensões no concreto são liberadas e passam a ser absorvidas pelas barras de aço. Estas tensões são então transferidas ao concreto intacto entre as fissuras por meio de tensões de aderência na interface do concreto com o aço. Para as barras nervuradas, a aderência se deve primordialmente às tensões de cisalhamento que se desenvolvem ao redor da barra entre as moedas e no contato entre a face da moeda e o concreto.

As normas de dimensionamento de estruturas são baseadas na hipótese de que não ocorrerá ruptura por perda de aderência. Embora seja reconhecido que ocorrerá a perda de aderência localmente nas proximidades das fissuras, as estruturas são projetadas de forma que as barras de aço sejam adequadamente ancoradas. A ruptura da estrutura é determinada por outras causas como a flexão e o cisalhamento. Por isso, muitos dos modelos desenvolvidos para análises via MEF consideram aderência perfeita. O trabalho experimental de Choi et al (1991)¹ mostra que o deslizamento que ocorre entre a armadura e o concreto tem um efeito reduzido no comportamento carga-deslocamento

¹ *Apud Ramaswamy et al (1995)*

e, segundo Stevens et al (1991)¹, a não ser que o modo de ruptura seja por perda de aderência, modelos que desconsideram este deslizamento não causam um erro significativo na determinação da resposta carga-deslocamento.

Apesar disto, muitos estudos procuram investigar o efeito da interação entre o aço e o concreto. A aderência é inserida em modelos de armadura discreta e distribuída. No primeiro caso, elementos especiais de ligação são usualmente utilizados, como no trabalho de Ngo e Scordelis (1967). Segundo Keuser e Mehlorn (1987)¹ elementos que representam o escorregamento contínuo apresentam melhores resultados que elementos de ligação discretos. No caso de armadura distribuída, a aderência é inserida na matriz constitutiva, como por exemplo, ao se considerar o *tension stiffening*, como nos trabalhos de Ramaswamy et al (1995), Feenstra e de Borst (1995), dentre outros.

Segundo Darwin (1993), a importância destes modelos é questionável. O trabalho de van Mier (1987)¹ mostrou que a aderência não é relevante no comportamento carga-deslocamento de um consolo curto de concreto armado. Balakrishnan et al (1988b) utilizaram elementos de aderência e concluíram que a representação da aderência somente foi importante para vigas críticas ao cisalhamento.

Como apresentado, nos modelos em que a aderência é considerada, geralmente é inserida como uma propriedade do material, ignorando o efeito do movimento relativo entre a barra de aço e o concreto.

Considerando-se o comportamento do concreto armado à compressão, diferentemente dos primeiros modelos que representavam-no como um material elástico linear, atualmente a maioria dos modelos incluem procedimentos para representá-lo como um material de comportamento não-linear. No entanto, de acordo com Darwin (1993), quanto mais importante for o escoamento do aço e a fissuração do concreto no comportamento da estrutura, menos importante são os detalhes do modelo constitutivo do concreto à compressão. Este torna-se mais significativo no caso de estruturas submetidas à carregamentos cíclicos. Os modelos mais amplamente adotados são os modelos plásticos com encruamento e uma condição de esmagamento, Cervera e Hinton (1986), Figueiras (1986), Cope et al (1980), Hand et al (1973), Proença (1988), Corrêa (1991), Barbosa (1997) e com menos frequência com amolecimento, Balakrishnam e Murray (1988a), d'Ávila e Campos (1997) e Ramaswamy et al (1995). Feenstra e de

¹ Apud Darwin (1993)

Borst (1995) apresentam um modelo em que o comportamento na compressão é descrito através da energia de fratura.

Balakrishnan e Murray (1988a) sugerem um modelo que inclui o endurecimento e o amolecimento na compressão. Neste modelo é adotada uma relação tensão-deformação homogeneizada considerando o ganho de resistência e ductilidade devido ao confinamento proporcionado pela presença da armadura transversal, bastante relevante para estruturas com elevadas taxas de armadura transversal, que rompem por ruptura da biela comprimida. Em suas conclusões afirmam que a resistência à compressão do concreto após a fissuração exerce maior influência na carga de ruptura para vigas parede e para painéis com elevadas taxas de armadura. O modelo de Freenstra e de Borst (1995) adota uma resistência à compressão reduzida de 20% para o concreto armado submetido à estados biaxiais de tração e compressão, pois admite-se que a resistência à compressão do concreto simples é influenciada pela fissuração na direção lateral. Este fator foi adotado por Freenstra (1993)¹ após cuidadosa análise dos dados experimentais de Kollegger e Mehlhorn (1990)¹.

Na maioria dos modelos encontrados, todas estas características do concreto armado apresentadas são representadas com maior ou menor grau de sofisticação. Muitas vezes o objetivo das análises realizadas é determinar quais fatores dos modelos constitutivos propostos seriam mais relevantes na determinação do comportamento dos diversos tipos de estrutura.

¹ *Apud* Freenstra e de Borst (1995)

CAPÍTULO 3 – O SOFTWARE UTILIZADO

O software utilizado neste trabalho é o LUSAS, um sistema genérico para análise estrutural e de campo através de elementos finitos contendo uma vasta biblioteca com mais de cem elementos.

Para análise estrutural estão disponíveis facilidades para análises estáticas e dinâmicas lineares, não-lineares físicas e geométricas. No caso de análises com não-linearidades físicas uma variedade de modelos constitutivos estão disponíveis. A preparação dos dados e a análise dos resultados são feitas com o auxílio gráfico do pré e pós-processador MYSTRO. Em versões mais recentes, o MYSTRO passou a ser chamado MODELLER.

Uma variedade de modelos constitutivos não-lineares que consideram a plasticidade dos metais e o comportamento frágil do concreto estão disponíveis. Nas análises que estão apresentadas no próximo capítulo, vários modelos constitutivos que possibilitam a consideração das não-linearidades já mencionadas, inerentes ao comportamento do concreto, foram utilizados. Assim os modelos elastoplásticos baseados nos critérios de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e von Mises modificado, o modelo biaxial para o concreto incluindo o amolecimento à tração e o modelo de dano foram utilizados. Os modelos elastoplásticos que utilizam como critério de escoamento as superfícies de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e von Mises modificado são alternativas adotadas por reproduzir características do concreto como as diferenças no comportamento à tração e à compressão e a dependência da pressão hidrostática. No entanto, sabe-se que a superfície de Willian-Warnke de cinco parâmetros é a que melhor reproduz as características experimentais observadas nos ensaios do concreto, porém infelizmente a mesma não encontra-se disponível no programa.

3.1 Modelos elastoplásticos

As análises elastoplásticas realizadas são caracterizadas por um critério de plastificação, por uma regra de fluxo associativa e uma regra de encruamento. Dentre os critérios de plastificação disponíveis foram utilizados os de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e von Mises modificado para o concreto e o de von Mises para o aço. Estes critérios estão destacados a seguir de maneira muito sucinta.

Segundo o critério de Mohr-Coulomb, a plastificação num ponto ocorre uma vez atingindo um valor limite de tensão de cisalhamento que por sua vez é dependente da tensão normal atuante no mesmo plano. O critério é governado pela seguinte expressão

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (3.1)$$

onde ϕ é o ângulo de atrito interno e c a coesão do material. Este critério considera a capacidade resistente ao atrito interno como responsável pela resistência do material. Este resiste através da coesão (na ausência de tensão normal) e pelo atrito interno que se desenvolve na presença de tensões normais. Em função dos invariantes de tensão o critério se escreve (θ é o ângulo de Lode, $0 \leq \theta \leq \pi/3$)

$$F(\sigma, \kappa) = \frac{I_1}{3} \operatorname{sen} \phi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \right) - c \cos \phi = 0 \quad (3.2)$$

onde a coesão e o ângulo de atrito interno dependem do parâmetro de encruamento κ . No espaço das tensões principais, o critério é representado por uma superfície piramidal, cuja seção transversal é um hexágono irregular, conforme se mostra na figura 3.1.

Pode-se demonstrar que as resistências à compressão simples (f_c) e tração simples (f_t) são dadas por

$$f_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi} \quad \text{e} \quad f_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \quad (3.3)$$

Assim, os dois parâmetros do material fornecidos nas análises podem ser determinados.

Uma regularização da superfície de Mohr-Coulomb foi proposta por Drucker e Prager e se constitui em um cone que pode ser ajustado de modo a estar inscrito ou circunscrito à pirâmide irregular de Mohr, figura 3.1. Sua expressão matemática apresenta-se na forma de uma modificação da expressão de von Mises acrescentando uma parcela relativa ao primeiro invariante

$$F(\sigma, \kappa) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (3.4)$$

onde α e k são constantes positivas relacionadas a c e ϕ , e com valores particulares para cada caso de aproximação desejado. Assim, fazendo-se coincidir os meridianos de compressão dos dois critérios, obtém-se

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{2 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (3.5)$$

para o caso implementado em que o cone circunscribe a pirâmide.

Para os dois critérios apresentados a evolução da superfície de escoamento pode ser relacionada com a alteração dos parâmetros físicos do material. O encruamento é definido com a variação do atrito interno e da coesão com a deformação plástica.

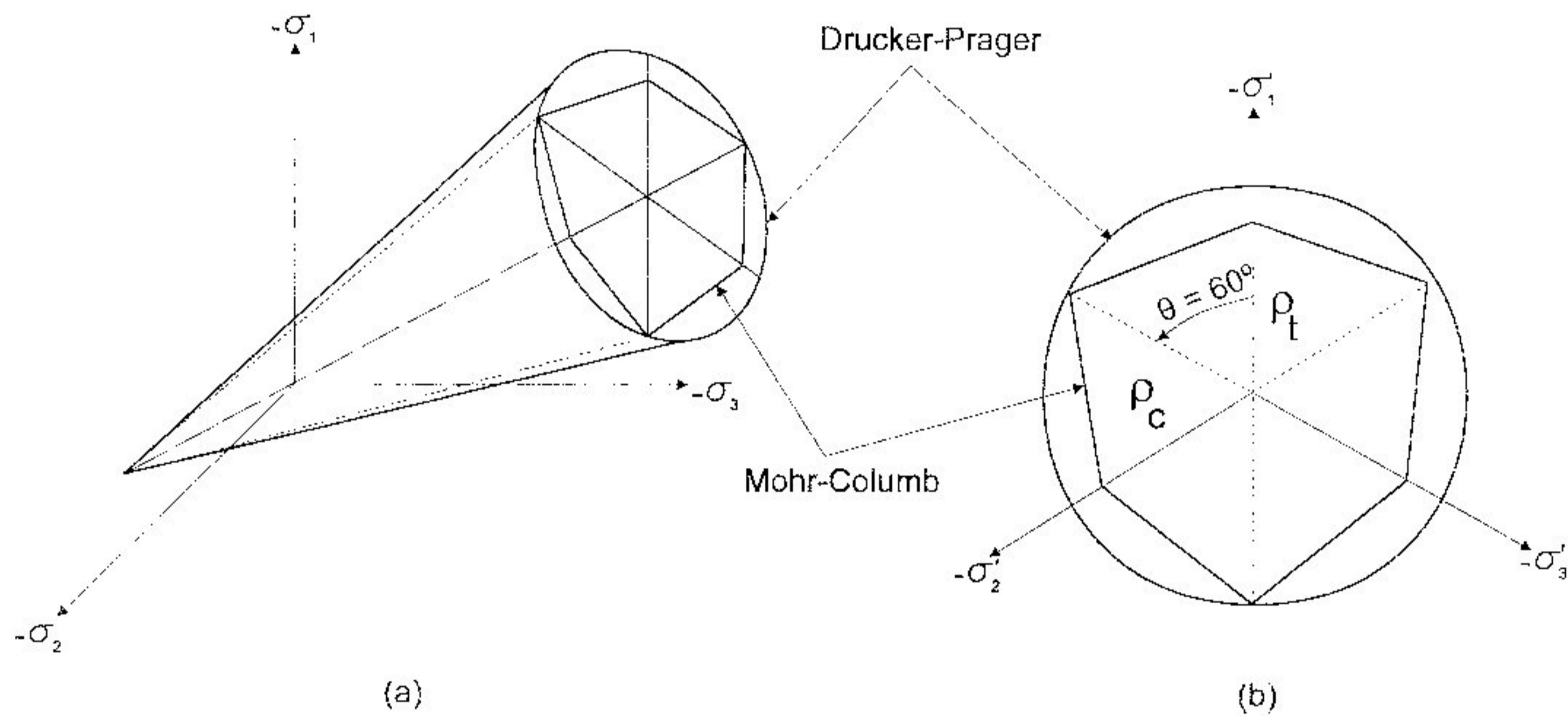


Figura 3.1 -- Superfícies de escoamento de Mohr Coulomb e de Drucker Prager (a) no espaço das tensões principais e (b) no plano desviador

O critério de von Mises é o critério de escoamento mais universalmente utilizado para o materiais metálicos por apresentar uma grande concordância com os resultados experimentais. Von Mises admitiu que a plastificação ocorreria uma vez que a tensão octaédrica de cisalhamento no ponto fosse alcançada. Assim, a superfície inicial é definida como

$$F(\sigma, \kappa) = \sqrt{3J_2} - k = 0 \quad (3.6)$$

Um critério de von Mises modificado é definido por tensões de escoamento iguais em cada uma das três componentes de tensão para tensões de tração e compressão. Caso a tensão de escoamento a tração seja igual à de compressão, o critério padrão de von

Mises é restabelecido.

Para os critérios de von Mises o regime de encruamento é reproduzido através de um critério para evolução das superfícies, de plastificação e potencial, no espaço das tensões. Essa evolução é reproduzida com base numa relação entre tensão efetiva e deformação plástica efetiva definida a partir do comportamento uniaxial do material.

Nas análises elastoplásticas utilizando estes critérios, a fissuração é substituída por um processo de escoamento, que, embora limite o crescimento das tensões de tração, não permite seu anulamento resultando em modelos que conduzem a estrutura a um comportamento mais rígido que a estrutura real.

3.2 Modelo biaxial para o concreto

O modelo biaxial para o concreto apresenta-se como o mais apropriado para análises planas de concreto armado. O modelo considera a diferença entre as resistências à tração e à compressão, o amolecimento à tração (*strain softening*) e a transferência do cisalhamento através da fissura utilizando o conceito da fissuração distribuída. O comportamento do concreto é considerado elástico linear na compressão.

A superfície de ruptura na tração é definida, na tração biaxial, pelo critério da máxima tensão de tração como, figura 3.2:

$$F_1 = \sigma_1 - f_t \leq 0 \quad \text{e} \quad F_2 = \sigma_2 - f_t \leq 0 \quad (3.7)$$

e, para estados de tração-compressão, por uma extrapolação linear entre a resistência à tração uniaxial (f_t) e à compressão uniaxial (f_c) como:

$$F_1 = \sigma_1 - \frac{f_t}{f_c}(f_c + \sigma_2) \leq 0 \quad \text{e} \quad F_2 = \sigma_2 - \frac{f_t}{f_c}(f_c + \sigma_1) \leq 0 \quad (3.8)$$

Nestas expressões σ_1 e σ_2 são as tensões principais no plano.

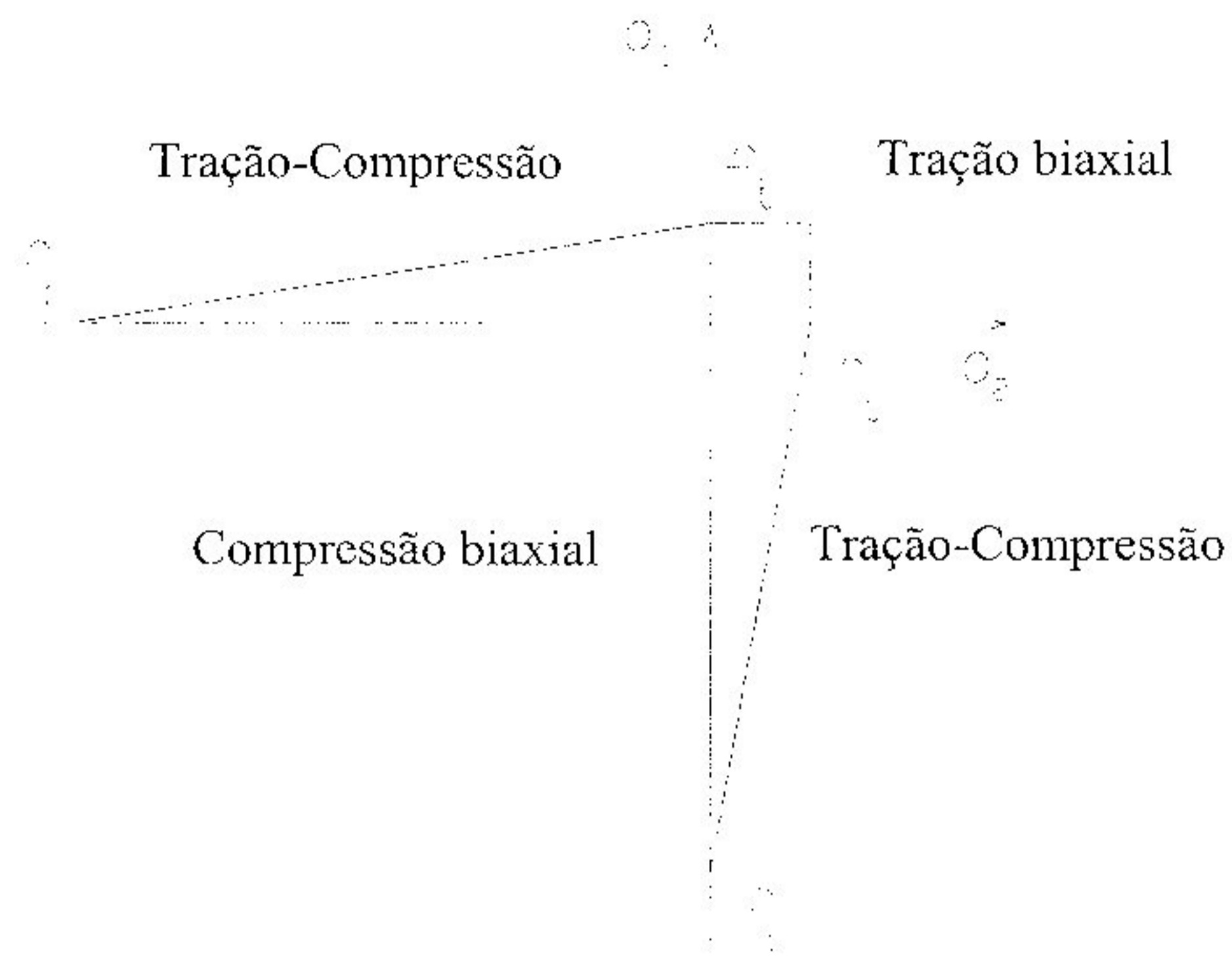


Figura 3.2 - Superfície de ruptura para o modelo de concreto

Quando a combinação das tensões principais violam o critério de ruptura, a fissuração inicia-se perpendicular à direção da tensão principal. A relação tensão-deformação isotrópica é substituída por uma relação ortotrópica com os eixos de ortotropia definidos na direção normal e tangencial à fissura. O sistema de eixos local das fissuras estão apresentados na figura 3.3. O modelo possui uma opção que permite que as fissuras secundárias ocorram em uma direção não ortogonal em relação as fissuras primárias. Um ângulo limite de 30° define o mínimo permitido entre os planos da primeira e a segunda fissura e é usado para evitar que uma fissuração incorreta seja detectada no caso de pequenas rotações do estado de tensões principais. No entanto, embora os planos das fissuras sejam não ortogonais, o método de determinação de tensões não considera o efeito acoplado de suas interações.

Uma vez formadas, as fissuras são consideradas fixas no restante da análise, entretanto elas podem abrir ou fechar no caso de inversão das cargas.

Na direção paralela à fissura a componente de tensão é calculada a partir da relação elástica:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.9)$$

Na direção normal à fissura, a relação entre a tensão na fissura e a deformação é função do diagrama de amolecimento, que pode ser linear ou exponencial, como apresentado na figura 3.4.

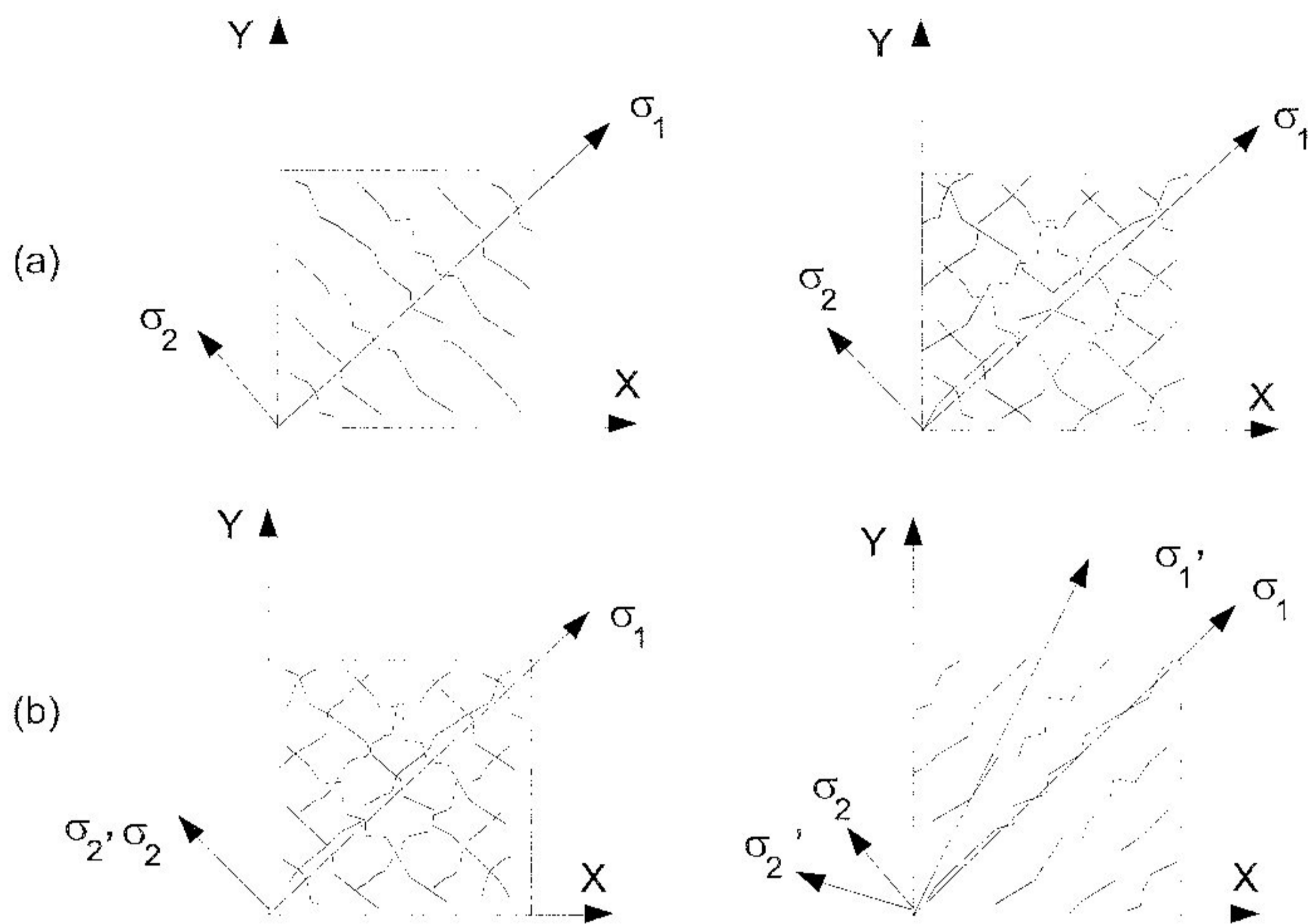


Figura 3.3 – Modelos para fissuras (a) fissura única ou dupla espontânea ortogonal (b) fissura subsequente ortogonal ou não ortogonal

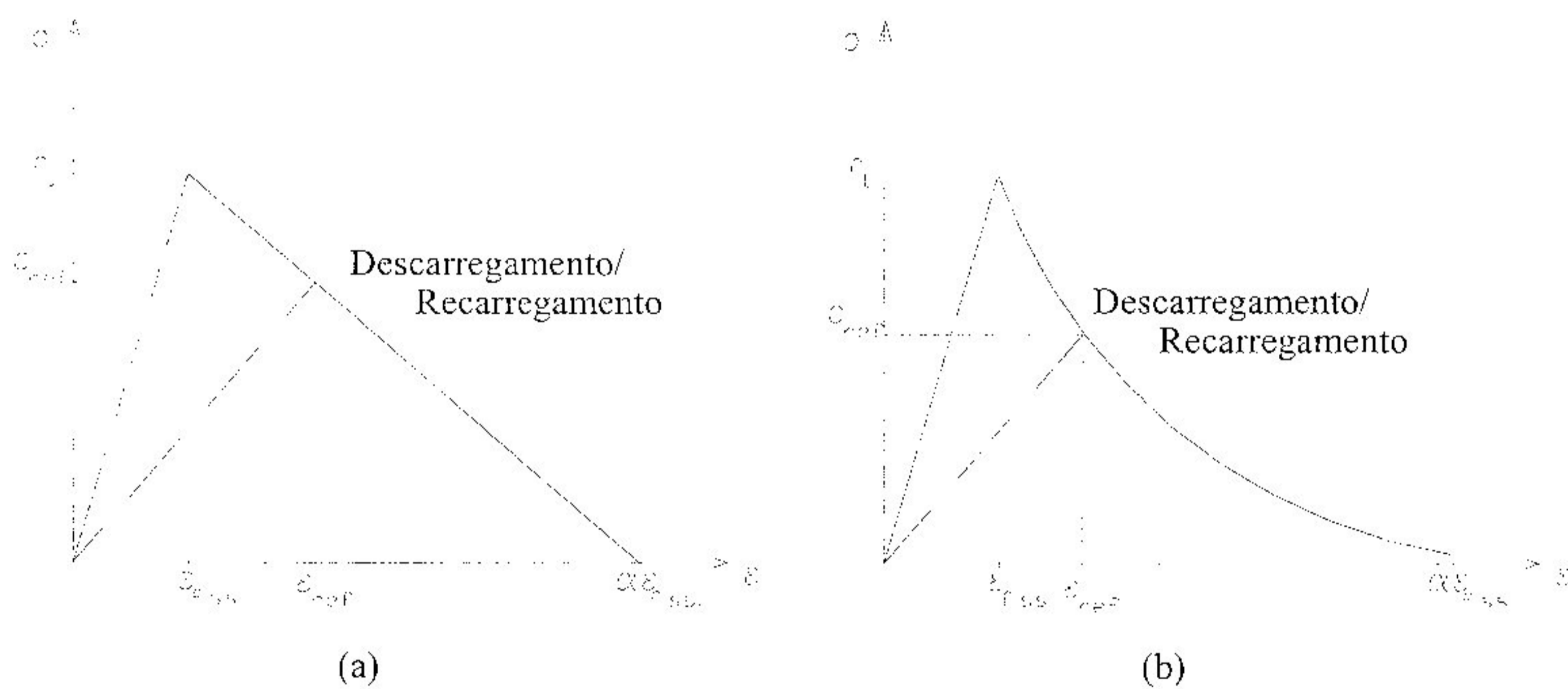


Figura 3.4 – Modelos amolecimento. (a) linear e (b) exponencial

Utilizando-se o diagrama de amolecimento linear, a variação da tensão com a deformação é função de um parâmetro α que relaciona a deformação inicial na fissura com a deformação última de tração por:

$$\varepsilon_{ult} = \alpha \varepsilon_{crack} \tag{3.10}$$

onde

$$\varepsilon_{crack} = \frac{f_t}{E} \quad (3.11)$$

As fissuras são consideradas completamente abertas, não ocorrendo transmissão de tensão, quando a deformação na fissura supera a deformação última de tração.

A determinação deste parâmetro é incerta, dependente do tipo de aplicação, e, em certos problemas pode ser crítico. O programa sugere valores entre 5 a 50 dependendo do modo de ruptura: no caso de comportamento predominante de cisalhamento, baixos valores de α são apropriados; para os casos de flexão dominante, valores elevados de α são mais efetivos.

O critério de carga e descarga admite que a descarga acontece elasticamente sem a geração de deformação residual. Assim o módulo de elasticidade varia em função do nível de tensão e de deformação no instante da descarga. Se a deformação normal atual de tração é maior que a deformação anterior de referência, então a fissura é considerada aberta. A tensão normal é então avaliada usando a curva de amolecimento. Uma deformação normal de tração menor do que a deformação anterior de referência significa que a fissura está parcialmente fechada. Neste caso a tensão normal atual é calculada por:

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \right) \varepsilon_{y'} \quad (3.12)$$

que corresponde ao descarregamento elástico. Uma fissura que passa por uma deformação normal de compressão é assumida estar completamente fechada e a tensão normal é calculada usando a relação elástica:

$$\sigma_{y'} = E \varepsilon_{y'} \quad (3.13)$$

Como alternativa ao modelo de amolecimento linear está o modelo de amolecimento exponencial onde a determinação da curva de amolecimento é função da energia de fratura G_f definida como uma propriedade do material. Além disso, é função também da área do elemento, representada pelo seu comprimento característico l_{ch} . Dessa forma, associando o diagrama à malha adotada, supera-se o problema já bastante reconhecido de resultados dependentes da malha neste tipo de análise.

A tensão reduzida agindo normal a fissura é obtida a partir da curva de amolecimento exponencial dada pela figura 3.4(b).

$$\sigma_y = f_t e^{\frac{\varepsilon_{crack} - \varepsilon}{\alpha}} \quad (3.14)$$

A aproximação da energia da fratura assume que a tensão em um ponto de Gauss é diretamente relacionada com a energia da fratura do material, onde a energia da fratura é definida como a energia necessária para criar uma área unitária de superfície fissurada, i.e.

$$G_f = \int_w \sigma(w) dw \quad (3.15)$$

onde w é a abertura da fissura e G_f é uma medida direta da propriedade física do material.

Pode-se relacionar a abertura da fissura diretamente com a deformação normal através do comprimento característico, i.e.,

$$w = l_{ch} \varepsilon_y \quad (3.16)$$

Igualando a energia liberada neste domínio numérico com aquele na superfície física fissurada, obtém-se o parâmetro de amolecimento como uma função da energia da fratura:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw = \int_{\varepsilon_{crack}}^{\infty} \sigma l_{ch} d\varepsilon = l_{ch} f_t \int_{\varepsilon_{crack}}^{\infty} e^{\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_{crack})}{\alpha}} d\varepsilon = l_{ch} f_t \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{G_f}{f_t l_{ch}} \quad (3.17)$$

O comprimento característico é calculado para problemas bidimensionais a partir da área do elemento utilizado, como

$$l_{ch} = (A)^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

Uma vez que uma fissura se forma no concreto, a capacidade para a transferência de cisalhamento na fissura é modelada através da redução do módulo de deformação transversal, G , empregando um fator β . Como apresentado no capítulo 2, este fator além reduzir as dificuldades numéricas simula o efeito do intertravamento dos agregados. Para o concreto não fissurado β vale 1.

$$\tau_{x'y'} = \beta G \gamma_{x'y'} \quad (3.19)$$

Dois métodos estão disponíveis no LUSAS para a determinação de β . Um método assume que o fator de retenção de cisalhamento é constante para uma dada análise, sendo o mesmo um parâmetro de entrada, definido como (figura 3.5a):

$$\beta = 1 \quad \text{para} \quad \varepsilon < \varepsilon_{crack} \quad (3.20)$$

$$\beta = \beta_{\text{input}} \quad \text{para} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_{\text{crack}}$$

Um segundo modelo relaciona β com a magnitude da deformação uma vez que a deformação de início da fissuração é excedida. Trata-se de uma opção mais real pois a capacidade da fissura transferir tensões de cisalhamento diminui com o aumento da deformação perpendicular ao plano da fissura. Próximo da deformação última de tração, o valor de β tende a zero, como visto na figura 3.5b, sendo β definido como:

$$\beta = 1 \quad \text{para} \quad \varepsilon < \varepsilon_{\text{crack}} \quad (3.21)$$

$$\beta = 1 - \left(\frac{\varepsilon_{\text{crack}}}{\varepsilon_{\text{ult}}} \right)^K \quad \text{para} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_{\text{crack}}$$

sendo K um parâmetro de entrada.

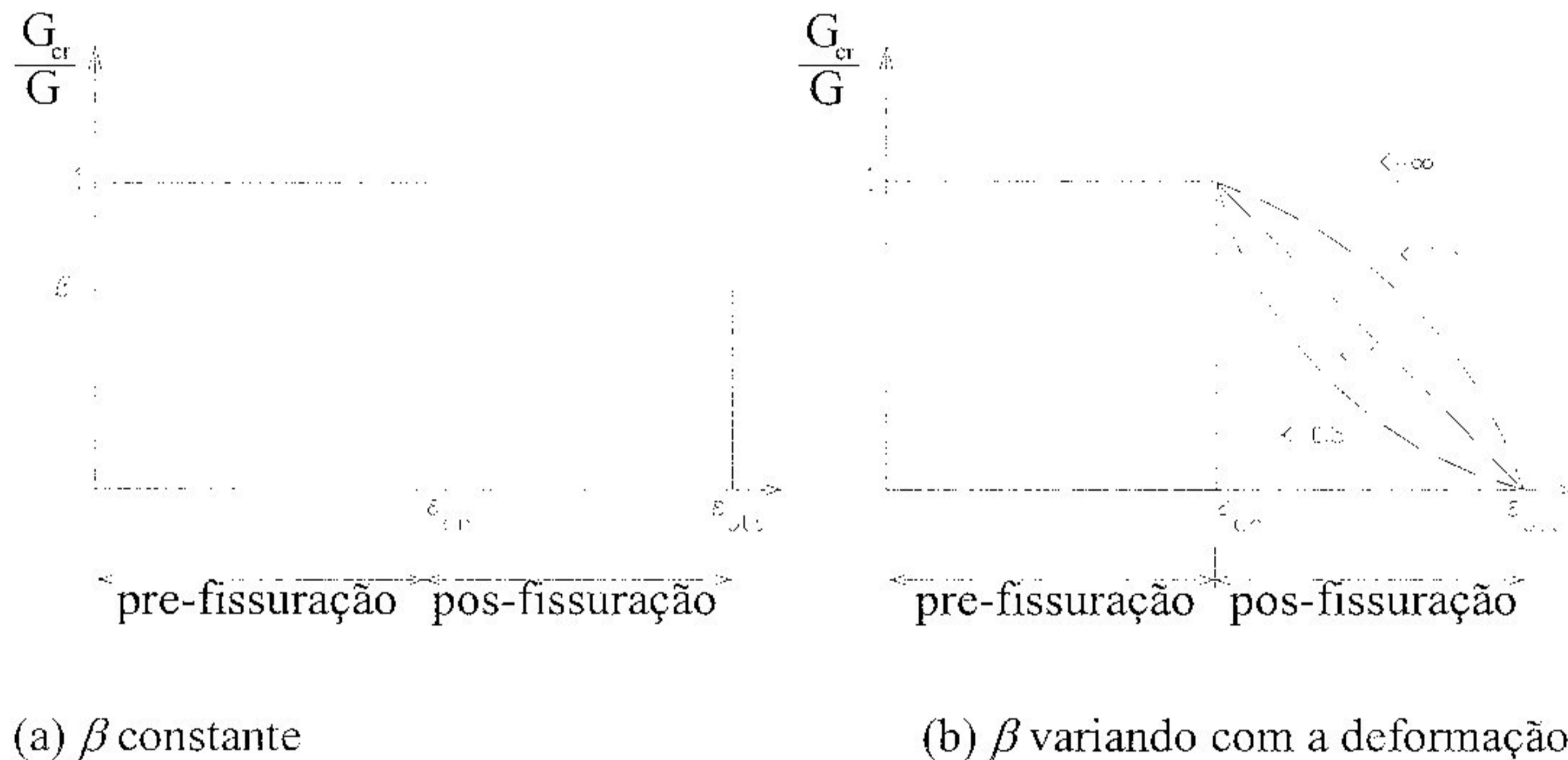


Figura 3.5 - Modelos de retenção de cisalhamento disponíveis no Lusas

3.3 Modelo de dano

Em função da presença de microvazios e microfissuras em sua composição, o concreto é também estudado pela teoria do dano, que é desenvolvida visando representar a degradação da rigidez. No item 2.2.5 foi apresentado o modelo de dano de Mazars (1981) baseado na equivalência em deformação. No LUSAS está implementado um modelo de dano elástico escalar, no campo das tensões, baseado na equivalência em energia, onde o dano é determinado a partir da norma da energia elástica complementar e representado pela variação de um parâmetro escalar.

Basicamente a formulação consiste na determinação de um parâmetro que define

o início do dano e uma regra de fluxo de dano que define a degradação da rigidez elástica. Para o caso do concreto, deve ser utilizado o modelo de Oliver já que o mesmo considera a diferença entre as resistências ao dano à tração e à compressão.

O vetor de deformações é decomposto em uma parcela de deformações elásticas e outra de deformações plásticas. O efeito do dano age sobre o vetor de deformações elásticas, sendo assim o modelo pode ser combinado com um modelo plástico para o acompanhamento das deformações plásticas.

As deformações elásticas são dadas por:

$$\underline{\varepsilon} = \left(\frac{1}{1-d} \right) \frac{\partial \phi^o}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.22)$$

onde:

$$\phi^o(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{D}_e^{-1} \underline{\sigma} \quad (3.23)$$

é a energia complementar elástica, e d , a variável de dano. Nestas equações $\underline{\sigma}$ é a matriz de tensões e \underline{D}_e a matriz de rigidez elástica inicial.

Nestas análises um parâmetro limite que controla o início do dano, que pode ser interpretado analogamente à função de escoamento em análises elastoplásticas, é definido como:

$$r_0 = \frac{\sigma'_d}{\sqrt{E_0}} \quad (3.24)$$

sendo σ'_d , a tensão de tração na qual o dano inicia e E_0 , o módulo de elasticidade inicial.

O critério de dano é implementado pela função de energia complementar:

$$\beta(\underline{\sigma}^T \underline{D}_e^{-1} \underline{\sigma})^{\frac{1}{2}} - r_t \leq 0 \quad (3.25)$$

em que r_t é a norma atual do dano dada pelo maior valor entre r_0 e a norma atual da energia complementar.

O fator β vale:

$$\beta = \left(\theta + \frac{1-\theta}{n} \right) \quad (3.26)$$

Sendo

$$\theta = \frac{\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|} \quad \text{e} \quad n = \frac{\sigma_d^c}{\sigma_d^t} \quad (3.27)$$

onde:

σ_d^t e σ_d^c são as tensões na qual o dano inicia na tração e na compressão, respectivamente, e,

$$\langle \sigma_i \rangle = \begin{cases} \sigma_i & \text{se } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_i \leq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

A função de evolução do dano é dada por:

$$d = G(r_t) = 1 - \frac{r_0}{r_t} \exp\left[A\left(1 - \frac{r_0}{r_t}\right)\right] \quad (3.29)$$

Para o material sem dano, $G(r_t)=0$. O parâmetro característico do material, A , que controla a evolução do dano é dado por

$$A = \left(\frac{G_f E_0}{l_{ch} (\sigma_d^t)^2} - \frac{l}{2} \right)^{-1} \quad (3.30)$$

onde G_f é a energia de fratura por unidade de área e l_{ch} é o comprimento característico do elemento finito, determinado pela raiz quadrada da área do elemento.

3.4 Procedimentos para soluções não-lineares

A solução das análises não lineares via MEF é obtida a partir da solução da equação:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{S} \quad (3.31)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global da estrutura obtida a partir da contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento, \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos nodais e \mathbf{F} e \mathbf{S} são os vetores das forças externas e internas respectivamente.

Nas análises lineares a matriz de rigidez é constante, o que não ocorre nas análises não-lineares onde \mathbf{K} e \mathbf{S} dependem dos deslocamentos e das tensões na estrutura, tornando a equação acima não-linear. Isto é a consequência do comportamento não-linear da estrutura. Nas análises lineares o vetor \mathbf{S} é nulo.

Para acompanhar este comportamento não-linear, as forças externas devem ser aplicadas em incrementos. No início de cada incremento de carga, caso haja uma convergência perfeita, a diferença entre as forças internas e externas devem ser nulas. Esta convergência perfeita nem sempre ocorre, assim essa força residual ao final de cada incremento é transmitida para o próximo incremento. Isto leva a uma acumulação de erros que repercute na alteração da curva carga-deslocamento com a obtenção de cargas de ruptura superestimada.

Uma outra causa para este afastamento das respostas em relação a solução exata é a adoção do método de solução puramente incremental, pois a matriz de rigidez é obtida a partir da linearização das equações não-lineares no início de cada incremento de carga, isto é, a matriz de rigidez é tangente a curva carga-deslocamento apenas para um incremento infinitesimal. Para reduzir estas diferenças são utilizadas iterações de equilíbrio dentro de cada incremento de carga. Assim, o procedimento preferível para solução de equações não-lineares é um procedimento incremental iterativo pela aproximação que produz do equilíbrio real.

Neste procedimento incremental-iterativo de solução das equações não-lineares, um incremento de deslocamento é inicialmente estimado por:

$$\Delta\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}^{-1}[\Delta\mathbf{F} + \mathbf{F}_n - \mathbf{S}_n] \quad (3.32)$$

onde o índice 1 em $\Delta\mathbf{u}$ indica que trata-se do valor estimado na primeira iteração para o vetor de deslocamentos incrementais, \mathbf{F}_n é o vetor de carga acumulado até o incremento

n e $\Delta \mathbf{F}$ é o de incremento de carga. Da mesma forma, o índice n do vetor de forças internas indica que este vetor é calculado usando as tensões no início do incremento de carga, $\sigma_n = \sigma_1$, ou seja, o valor da última iteração:

$$\mathbf{S}_n = \int \mathbf{B}^t \sigma_n dV_0 \quad (3.33)$$

onde \mathbf{B} é a matriz de deformação, $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$. A partir do vetor de deslocamentos incremental $\Delta \mathbf{u}_1$, uma primeira estimativa do incremento de deformação $\Delta \varepsilon_1$ pode ser determinada e, então, o incremento de tensões $\Delta \sigma_1$ a partir da matriz constitutiva. As tensões assim obtidas, após a primeira iteração, são dadas por:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta \sigma_1 \quad (3.34)$$

Geralmente o vetor de forças internas \mathbf{S}_1 , que é obtido a partir das tensões σ_1 , não está em equilíbrio com as forças externas $\Delta \mathbf{F} + \mathbf{F}_n$, há assim a necessidade de corrigir os deslocamentos:

$$d\mathbf{u}_2 = \mathbf{K}^{-1} [\Delta \mathbf{F} + \mathbf{F}_n - \mathbf{S}_1] \quad (3.35)$$

assim o incremento de deslocamento após a segunda iteração é dado por:

$$\Delta \mathbf{u}_2 = \Delta \mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2 \quad (3.36)$$

Da mesma como foram obtidas as deformações e tensões na primeira iteração, são calculadas os valores de $\Delta \varepsilon_2$ e $\Delta \sigma_2$. A repetição deste processo pode ser sistematizado como:

$$\begin{aligned} d\mathbf{u}_{j+1} &= \mathbf{K}^{-1} [\Delta \mathbf{F} + \mathbf{F}_n - \mathbf{S}_j] \\ \Delta \mathbf{u}_{j+1} &= \Delta \mathbf{u}_j + d\mathbf{u}_{j+1} \\ \Delta \varepsilon_{j+1} &= \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{j+1} \\ \Delta \sigma_{j+1} &= f(\Delta \varepsilon_{j+1}) \\ \sigma_{j+1} &= \sigma_n + \Delta \sigma_{j+1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Este processo continua para um determinado incremento até que as forças internas estejam em equilíbrio com as forças externas, ou seja, ocorra a convergência, dentro de uma determinada tolerância estabelecida.

A formulação apresentada acima descreve o procedimento de controle de carga para aplicação do carregamento externo à estrutura. Uma outra alternativa é a aplicação de deslocamentos à estrutura, ou seja, controle de deslocamentos. Esta última opção é recomendada por Bicanic *et al* (1993) por conduzir a convergência mais rapidamente .

Um dos procedimentos iterativos mais utilizados para a solução do sistema de equações não-lineares é o método de Newton Raphson. O programa LUSAS oferece quatro opções relacionadas a este procedimento. Na primeira, Newton Raphson pleno, a matriz de rigidez é atualizada em cada iteração. De acordo com LUSAS (1997), para problemas de elevadas não-linearidades, este procedimento não apresenta-se como o mais adequado pois, além de exigir a atualização e a fatoração da matriz de rigidez em cada iteração, tornando o processo bastante oneroso, a solução freqüentemente diverge. Como alternativa, os procedimentos de Newton Raphson modificados apresentam-se mais efetivos visto que o aumento do número de iterações por incremento para se obter a solução é menos oneroso. A segunda opção mantém invariável a matriz de rigidez inicial do sistema, método da rigidez inicial. A terceira opção procede à atualização da matriz de rigidez tangente na primeira iteração de cada incremento. Finalmente uma quarta possibilidade atualiza a matriz de rigidez tangente na primeira e na segunda iteração de cada incremento de carga. Segundo LUSAS (1997), como a convergência dos procedimentos de Newton Raphson modificado não é quadrática, as análises também podem divergir, porém em conjunto com método de *line search* produz um algoritmo adequado a problemas com grandes não-linearidades físicas.

O método de *line search* é um esquema de aceleração dos processos incrementais através do qual os algoritmos escolhem uma direção no espaço para busca de uma melhor aproximação para solução procurada. Procura-se um escalar tal que, multiplicado pelo vetor unitário em certa direção, torna mínima a energia potencial total naquela direção.

Nos procedimentos de Newton Raphson o nível do incremento de carga permanece constante. Utilizando um controle de carregamento automático, quando a solução não converge para um determinado número máximo de iterações especificadas, o tamanho do incremento pode ser reduzido. Este processo pode ser repetido de acordo com o número máximo especificado ao início da análise para as reduções permitidas. Quando a convergência ainda não é atingida o tamanho do incremento de carga é novamente aumentado na tentativa de superar este ponto de dificuldade de convergência na análise.

Este algoritmo torna-se ineficiente quando é necessário a transposição de pontos limites, como máximos e mínimos de cargas, pois nestes casos a ruptura coincide com o

admitida é de grande importância a fim de evitarem problemas como um número desnecessário de iterações, no caso de uma tolerância pequena, ou obtenção de resultados incorretos, no caso de tolerâncias maiores. Segundo LUSAS (1997), tolerâncias mais flexíveis podem ser efetivas no caso de problemas com não linearidade-físicas em que valores maiores de resíduos locais possam ser admitidos. Estão disponíveis no programa seis critérios de verificação da convergência da solução podendo ser adotados separadamente, ou em conjunto, sendo eles:

- Norma Euclidiana dos resíduos (**rdnorm**): baseia-se na medida do vetor de forças desequilibradas. A norma dos resíduos deve ser menor que uma porcentagem preestabelecida do vetor das forças externas correspondente ao incremento analisado. Para evitar inconsistência de dimensões de deslocamentos e giros, usualmente apenas graus de liberdade de translação são considerados. O programa sugere 0.1% para problemas de não-linearidades geométricas sendo aceitáveis valores até 5.0 % para os problemas com não-linearidades físicas.

- Norma Euclidiana dos deslocamentos (**dpnorm**): A norma dos deslocamentos da iteração deve ser menor que uma porcentagem da norma dos deslocamentos totais. Com este critério pode-se avaliar o acréscimo dos deslocamentos durante uma iteração. Da mesma forma que o critério anterior, para evitar inconsistência de dimensões de deslocamentos e giros, usualmente apenas graus de liberdade de translação são considerados. O programa sugere valores entre 0.1 e 1% como sendo considerados razoáveis;

- Norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais (**dtnorm**): A norma dos deslocamentos da iteração deve ser menor que uma porcentagem da norma dos deslocamentos do incremento. Da mesma forma que o critério da norma dos resíduos apenas graus de liberdade de translação são considerados O programa sugere valores entre 0.1 e 1% como sendo considerados razoáveis;

- Norma do trabalho (**wdnorm**): O trabalho realizado pelas forças residuais na iteração atual é comparado ao do início do incremento. Como *default* LUSAS adota um número elevado;

-Raiz quadrada da média dos resíduos (**rms**): Este critério limita a raiz quadrada da média dos quadrados de todos os resíduos, sendo dependente das unidades utilizadas. Como *default* LUSAS adota um número elevado;

- Resíduo absoluto máximo (**mar**): Este critério limita o resíduo máximo absoluto no problema. Da mesma forma que o critério anterior é dependente das unidades utilizadas. É recomendado para problemas de não-linearidades geométricas próximo aos pontos de bifurcação. Como *default* LUSAS adota um número elevado.

Os recursos disponíveis são bastantes amplos e diversificados e devem ser escolhidos criteriosamente pois podem conduzir a obtenção de resultados que não reproduzem o verdadeiro comportamento da estrutura. No capítulo seguinte onde serão apresentados as estruturas analisadas, todos os recursos utilizados, as dificuldades encontradas e os procedimentos escolhidos apresentam-se justificados.

3.5 Elementos utilizados

Nos exemplos analisados as estruturas foram modeladas utilizando um único elemento estratificado em camadas para representação do concreto e do aço e utilizando também elementos contínuos do tipo estado plano de tensão para o concreto e elementos de treliça para o aço. Uma descrição sucinta destes elementos é apresentada a seguir.

3.5.1 Elementos de casca – QSL8

O elemento isoparamétrico de casca do tipo “*semiloof*” é formulado a partir da degeneração do elemento sólido tri-dimensional. Permite a estratificação em até 99 camadas para as quais podem ser atribuídos materiais e espessuras distintas. Estes elementos possuem 6 ou 8 nós, com graus de liberdade de translação u , v e w nos nós dos cantos e dos meios dos lados e rotações θ_x e θ_y nos nós localizados nas posições $1/3$ e $2/3$ do comprimento do lado (*loof nodes*) como visto na figura 3.7.

Em função da teoria originária, o elemento leva em consideração as deformações de flexão e de membrana mas as deformações de cisalhamento são desconsideradas.

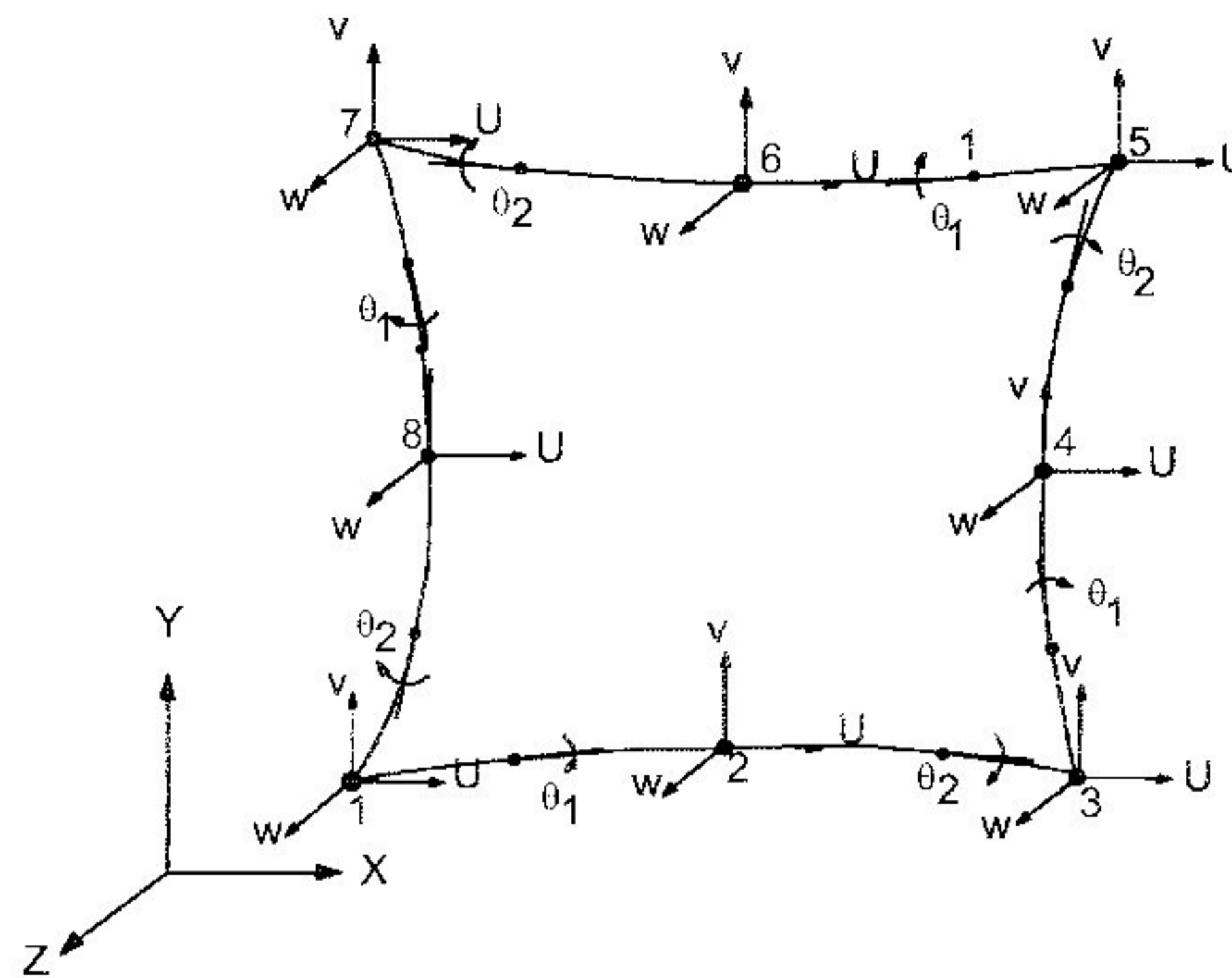


Figura 3.7 - Configuração nodal do elemento QSL8

O esquema de integração das matrizes dos elementos utilizado é a Quadratura de Gauss podendo ser escolhida regras de 2x2 pontos, 3x3 pontos ou 5 pontos. Ao longo da espessura do elemento, para análises lineares a integração procede em 3 camadas, para análises não-lineares, em cinco camadas e, para modelos com elementos estratificados, depende do número de camadas utilizadas.

3.5.2 Elementos planos – QPM8

O elemento isoparamétrico plano, quadrático de 8 nós apresentado na figura 3.8 foi utilizado nas análises de vigas na discretização do concreto.

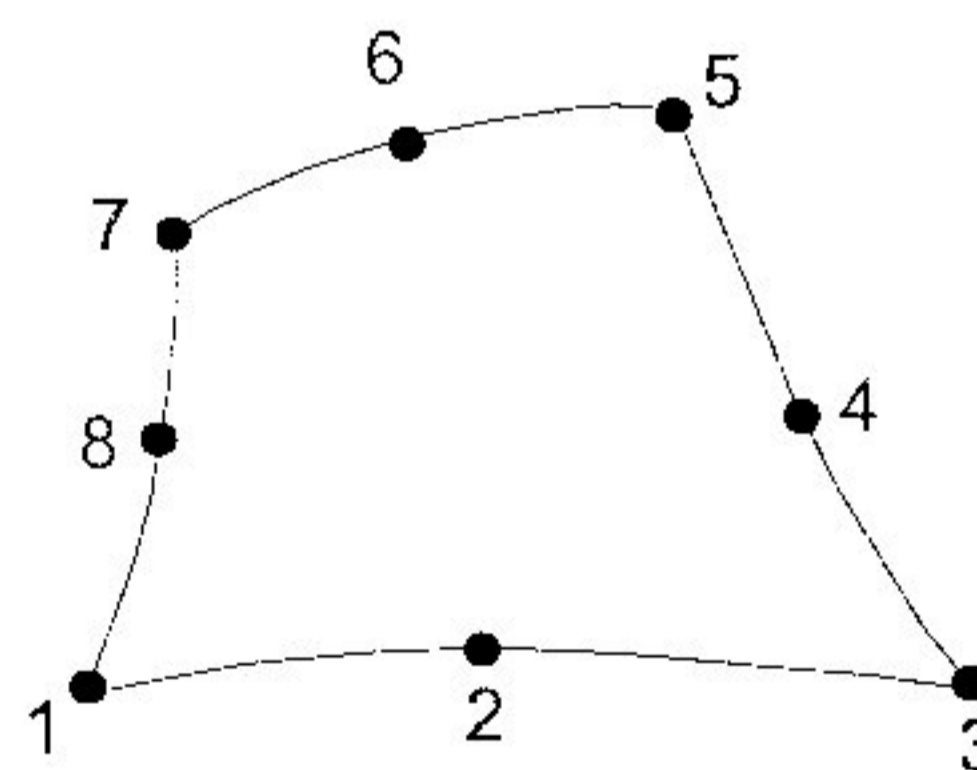


Figura 3.8 - Configuração nodal do elemento QPM8

O esquema de integração das matrizes dos elementos utilizado é a Quadratura de Gauss podendo ser escolhida regras de 2x2 pontos ou 3x3 pontos.

3.5.3 Elementos de treliça – BAR3

O elemento isoparamétrico de treliça com 3 nós apresentado na figura 3.9 foi utilizado nas análises de vigas na discretização do aço.

O esquema de integração das matrizes dos elementos utilizado é a Quadratura de Gauss com 2 pontos.

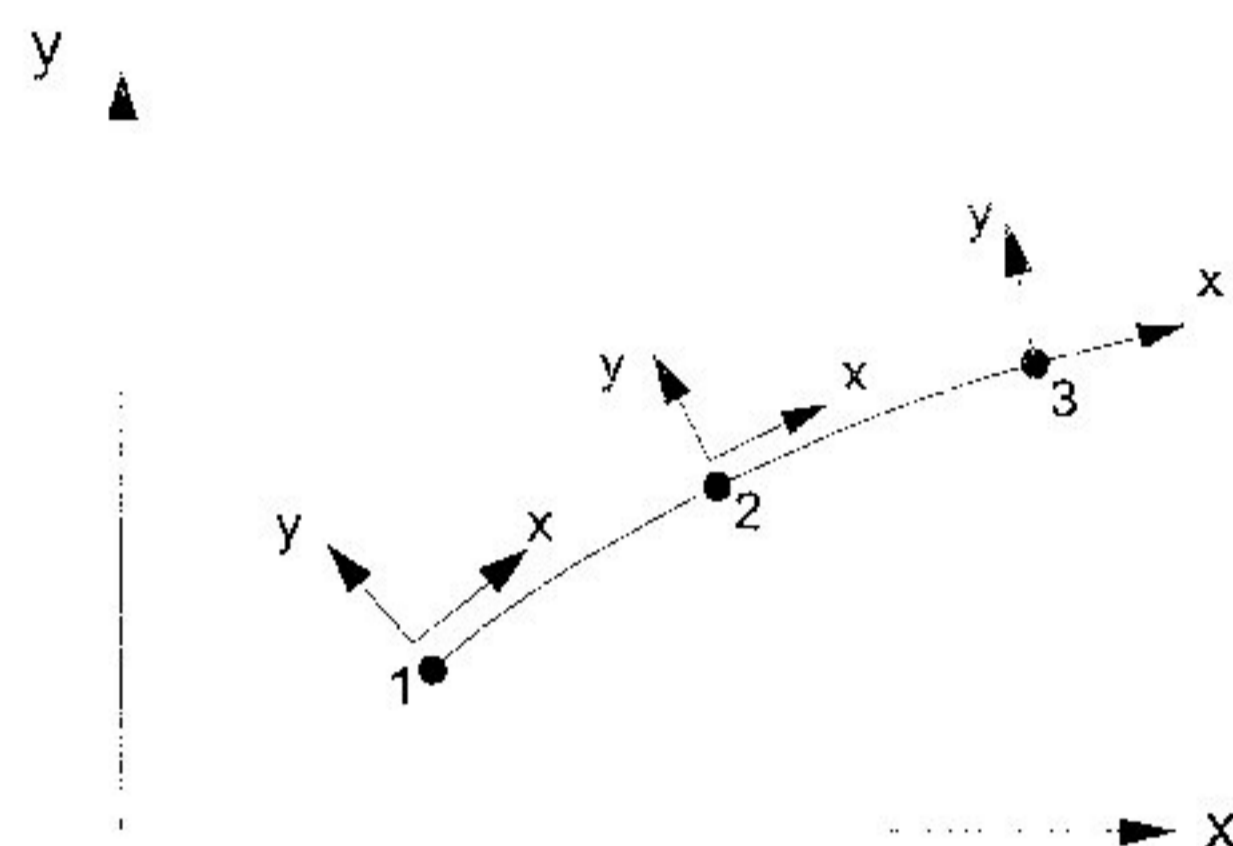


Figura 3.9 - Configuração nodal do elemento BAR3

Todos os elementos citados podem ser empregados em análises estáticas e dinâmicas com não-linearidades físicas e geométricas, permitindo a utilização de modelos elastoplásticos. Análises lineares de estabilidade também podem ser realizadas. Os elementos QSL8 e QPM8 também podem ser utilizados em análises com o modelo de concreto e o modelo de dano e em análises não-lineares de estabilidade.

CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES

Neste capítulo estão apresentados quatro exemplos simples analisados com o objetivo de avaliar os modelos apresentados disponíveis no programa Lusas para o estudo do comportamento do concreto armado e o desempenho dos elementos utilizados sem a pretensão de obter conclusões definitivas. Em todos os exemplos são feitas comparações com resultados experimentais e analíticos obtidos por outros pesquisadores, procurando manter as unidades originais dos trabalhos consultados.

Para o aço, admitiu-se em todos os exemplos o comportamento elastoplástico perfeito, isotrópico, com o critério de escoamento de von Mises, já bastante consagrado.

Nos exemplos de viga foram utilizados, não apenas o elemento estratificado em camada, mas também elementos de estado plano de tensões na discretização do concreto e elementos de treliça na discretização da armadura.

Quando da utilização do elemento estratificado em camadas, o número de camadas e a malha adotados foram os mesmos da bibliografia consultada a fim de minimizar as diferenças entre as análises.

Na maioria dos exemplos o carregamento foi aplicado em incrementos constantes adotando o algoritmo de Newton Raphson Modificado associado com *line search* pois mostrou-se mais vantajoso após exaustivos processamentos preliminares realizados. Esta escolha poderia levar a pressupor processamentos mais demorados, porém, o observado com a utilização de incrementos de carga pequenos foi que a solução sempre convergia sem grandes oscilações. Em alguns exemplos permitiu-se o método do comprimento do arco

após atingido o valor limite do parâmetro CSTIF, comentado no item 3.4.

As tolerâncias para os critérios de convergência adotados variaram entre os exemplos e assim estão citados oportunamente.

Segundo Barbosa (1997), no caso do concreto, em virtude da natureza um tanto imprevisível de seu comportamento e da redistribuição de esforços decorrentes da fissuração, expressivas mudanças ocorrem com freqüência nos modelos, levando a um enorme aumento do número de iterações necessário para que haja convergência, sem que isso afete necessariamente os incrementos de carga subsequentes.

Um dos problemas observados utilizando a incrementação automática de carregamento foi que, ao passar por uma dificuldade de convergência num determinado incremento, o passo de carga era reduzido a valores menores até que houvesse a convergência. Dessa forma, os passos de carga posteriores mantinham este pequeno valor, o que resultava em um número excessivo de passos de cargas, tornado a análise muito lenta. Segundo Foster (1992)¹, relacionar o tamanho do incremento ao número de iterações requerido pelo passo anterior pode não ser uma boa estratégia para um processo automático de cálculo de incrementos, pois uma pequena perturbação em um pequeno grupo de elementos, efeito localizado, pode consumir muito tempo de processamento e não interferir nos resultados do modelo como um todo.

Os exemplos descritos a seguir foram processados em microcomputadores Pentium 133 MHz.

¹ *Apud* Barbosa (1997)

4.1 Viga analisada numericamente por Proença

A viga apresentada na figura 4.1 foi analisada experimentalmente por Martinelli e Takeya (1974) *apud* Proença (1988) e numericamente por Proença. Trata-se de uma viga simplesmente apoiada, submetida à duas cargas concentradas iguais posicionadas nos terços do vão.

Proença utilizou para a análise da viga dois elementos isoparamétricos de 8 nós fazendo uso da simetria longitudinal e transversal. Cada elemento foi dividido ao longo da altura da viga em seis camadas de concreto, às quais foram sobrepostas outras duas camadas representativas da armadura. O modelo para o concreto em compressão foi o de um material elastoplástico perfeito e em tração admitiu-se um comportamento elástico linear, limitado pela resistência à tração seguido de um regime de amolecimento, seguindo uma lei linear. O aço foi também tratado através de um modelo elastoplástico perfeito.

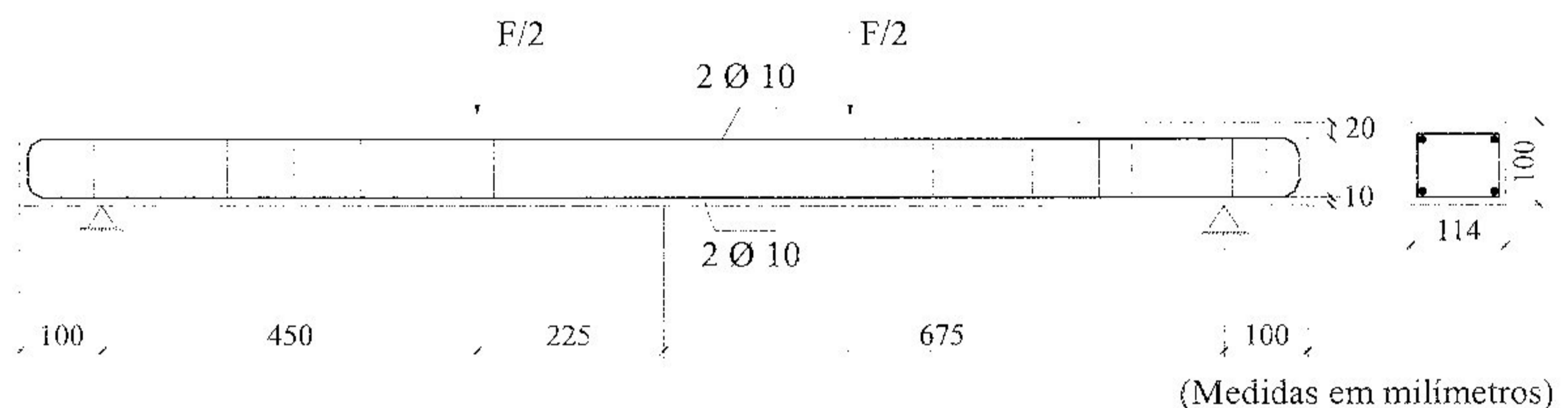


Figura 4.1- Detalhamento da viga

Neste trabalho, tomou-se partido da simetria transversal discretizando a metade da viga em 24 elementos de casca *semiloof* – QSL8. Ao longo da espessura de cada elemento foram utilizadas 9 camadas sendo 7 de concreto e 2 de aço conforme pode ser visto na figura 4.2, dispostas da mesma forma que Proença. A determinação da espessura da camada de aço foi obtida através distribuição da soma das áreas das barras de aço que ocupam uma mesma altura, ao longo da espessura da peça, constituindo uma faixa retangular de mesma área. Os nós situados na linha vertical do apoio receberam restrições às translações verticais e os nós situados no meio do vão receberam restrições às translações longitudinais e às rotações garantindo assim a condição de rotação

nula simulando a simetria.

O carregamento foi aplicado nos três nós do alinhamento da carga em incrementos constantes de $F/200$ (0.135 kN), permitindo-se vinte e cinco iterações por incremento. Além disso, no caso de dificuldade de convergência permitiu-se que cada incremento fosse reduzindo em até cinco vezes.

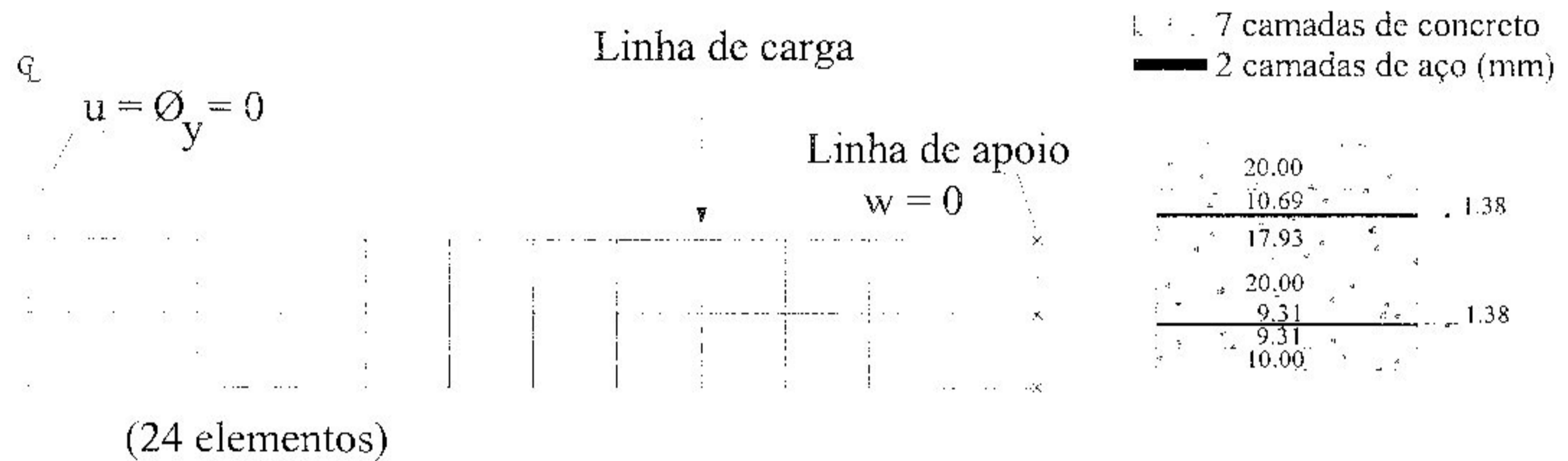


Figura 4.2- Discretização da viga

Para a verificação da convergência adotou-se a tolerância de 1% para norma euclidiana dos resíduos (rdnrm) e 5% para norma euclidiana dos deslocamentos incrementais (dtnrm) pois valores menores resultavam em análises extremamente longas que freqüentemente não convergiam. Para os demais critérios de convergência os valores de tolerâncias permaneceram os *default* do programa. Embora as tolerâncias possam parecer altas, elas estão dentro do intervalo recomendado pelo programa.

Dentre os modelos constitutivos disponíveis foram analisados o modelo de concreto biaxial, o modelo elastoplástico que utiliza como critério de escoamento a superfície de von Mises modificada e o modelo de dano de Oliver associado à superfície de von Mises modificada. Nos modelos de concreto, o algoritmo de solução adotado foi o de Newton Raphson Modificado associado com *line search* e nos modelos elastoplásticos e de dano utilizou-se o algoritmo de Newton Raphson pleno.

Na tabela 4.1 estão apresentadas as características dos materiais utilizados nas análises de acordo com Proença.

Tabela 4.1 – Propriedades dos materiais

Concreto	Aço
Módulo de elasticidade: $E_c=4.00 \times 10^4$ MPa	Módulo de elasticidade:
Coefficiente de Poisson: 0.2	$E_s=1.96 \times 10^5$ MPa
Resistência à compressão: 39.2MPa	Coefficiente de Poisson: 0.3
Resistência à tração: 3.0MPa	Tensão de escoamento: $f_y = 511$ MPa
Deformação última de compressão: $\epsilon_{uc} = 0.005$	
Deformação última de tração: $\epsilon_{ut} = 0.0005$	

Proença salienta que os valores da deformação última de compressão ϵ_{uc} e da deformação última de tração na presença de armadura, ϵ_{ut} , foram adotados considerando que taxa de armadura é elevada ocasionando alterações nos limites normais de deformação no concreto. Assim, o valor de ϵ_{uc} é superior ao valor padrão sugerido por norma e ϵ_{ut} , que para peças normalmente armada é da ordem de dez vezes o valor da deformação limite elástica, no caso das superarmadas, pela fissuração mais sistemática, tem seu valor diminuído, uma vez que a colaboração do concreto na resistência à tração tende a ser mais limitada.

Utilizando o modelo de concreto, várias análises foram realizadas variando-se os parâmetros disponíveis. Para a fissuração, o modelo adotado foi o que permite formação das fissuras em duas direções fixas ortogonais. Para o comportamento pós fissuração utilizou-se o modelo de amolecimento linear com o parâmetro $\alpha=6.67$, obtido a partir da deformação última de tração. O modelo de amolecimento exponencial também foi avaliado adotando para a energia de fratura, $G_f=79.8$ N/m, estimada a partir da resistência à compressão de acordo com van Mier (1997), equação 2.12. A influência do modelo de transmissão do cisalhamento foi avaliada, sendo que nas primeiras análises o fator de retenção de cisalhamento, β , foi mantido constante e igual a 0.5 conforme sugerido por Cervera e Hinton (1986). Outros valores entre 0 e 1.0, ainda constantes, e valores variáveis adotando para K, 0.5, 1 e ∞ , também foram avaliados nas análises que se seguiram. A influência do fator β foi

avaliada pois foi encontrada uma grande variação para os valores deste parâmetro entre os vários autores consultados. A integração numérica foi feita com 5 pontos (*default*), 2x2 e 3x3 pontos de gauss procurando avaliar sua influência.

O modelo elastoplástico baseado no critério de von Mises modificado foi avaliado considerando o comportamento elastoplástico perfeito na tração e elastoplástico com encruamento isotrópico na compressão, através da curva trilinear de tensão-deformação mostrada figura 4.3.

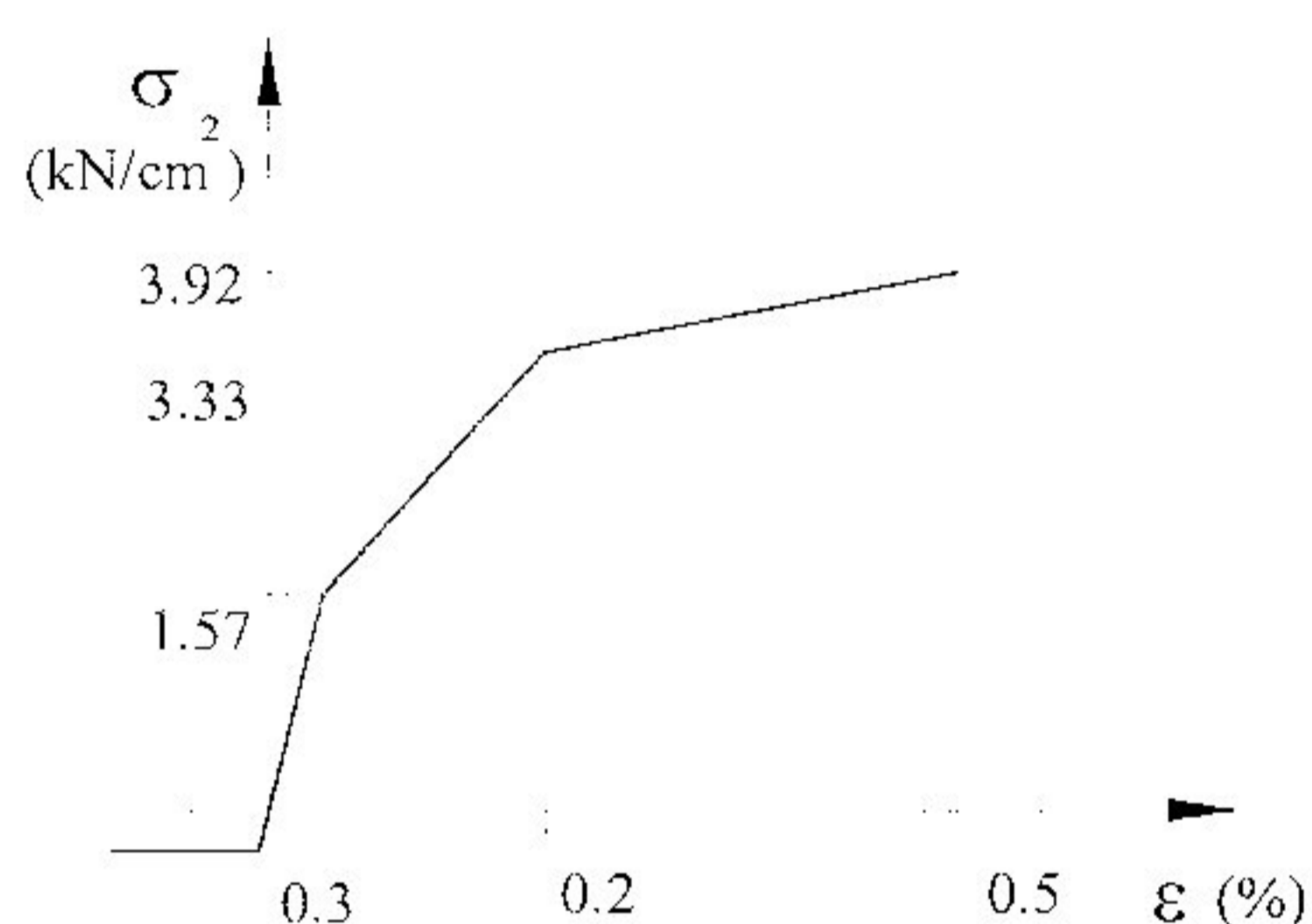


Figura 4.3 – Diagrama tensão-deformação para o concreto – Critério de von Mises modificado

Utilizando o modelo de dano foi realizada uma análise considerando o dano nas camadas de concreto, e nas camadas de aço admitiu-se o comportamento elástico a fim de avaliar o modelo de dano na degradação da rigidez no concreto. Uma segunda análise foi realizada associando o modelo de dano ao modelo elastoplástico de von Mises com encruamento para o concreto e para o aço o modelo elastoplástico perfeito de von Mises. Os parâmetros necessários para o modelo foram $r_0=0.00474$, $A=0.17$ e $n=13.06$ que são o limite inicial do dano (equação 3.24), o parâmetro característico do material (equação 3.30) e o parâmetro que relaciona a resistência à tração com a resistência à compressão (equação 3.27) respectivamente. O comprimento característico, l_{ch} , necessário para a determinação do parâmetro A foi obtido pela raiz quadrada da área do elemento utilizado.

O comportamento dos modelos foi avaliado pela variação do deslocamento na seção central com o carregamento. A figura 4.4 apresenta a comparação entre os deslocamentos obtidos nas análises realizadas neste trabalho, na análise

de Proença (1988) e no modelo físico de Martinelli e Takeya (1974).

Força x deslocamento

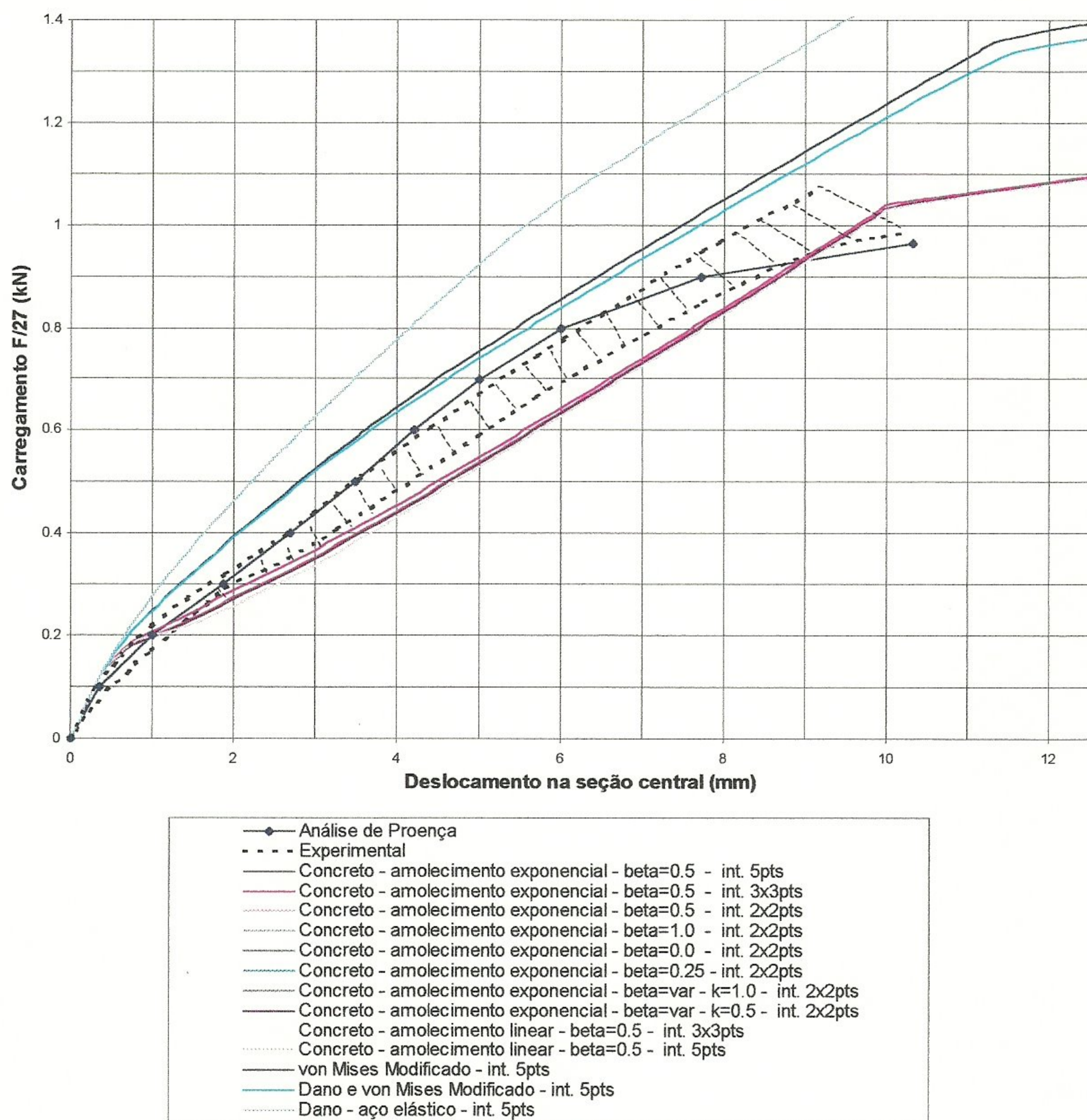


Figura 4.4 – Relação entre carga e deslocamento na seção central

Em todas as análises os deslocamentos acompanharam linearmente o aumento da carga aplicada até o início da fissuração que ocorreu próximo ao parâmetro de carga igual a 0.125. A partir dessa carga, as curvas apresentaram comportamentos distintos caracterizando o comportamento de cada modelo.

No modelo de von Mises Modificado a redução de rigidez decorrente da

fissuração ocorreu de forma gradual em virtude de não haver na verdade um processo de formação de fissuras, e sim de plastificação perfeita, na região tracionada. Dessa forma, houve apenas a redução da capacidade de absorção de acréscimos de tensões, mantendo durante toda a história restante do carregamento tensões resistentes no concreto tracionado. Resultando assim num modelo sempre mais rígido que a análise experimental. Após o início da fissuração a curva seguiu uma trajetória não-linear com constante redução da inclinação em função da não-linearidade decorrente do encruamento do concreto em compressão até que houve o escoamento da armadura para uma carga aproximadamente igual a 1.35 do parâmetro de carga. Este modelo associado ao modelo de dano de Oliver agindo na parcela elástica conduziu a resultados mais flexíveis à partir do parâmetro de carga igual a 0.55.

As tensões na fibra de concreto mais tracionada teve um comportamento diferente do esperado. Após a carga de fissuração, seguiu uma trajetória não-linear bastante suave alcançando tensões significativamente maiores que a tensão de resistência à tração. Este fato contribuiu para que a tensão de compressão também alcançasse valores superiores ao da resistência à compressão e que a tensão na armadura tracionada fosse sempre aquém da esperada. Esse comportamento contribuiu para a grande rigidez apresentada pelo modelo na relação carga-deslocamento. Provavelmente as causas desse comportamento esteja associada ao estabelecimento dos parâmetros dos materiais, no entanto estes foram determinados de acordo com a documentação do programa. A análise prosseguiu sem apresentar dificuldades numéricas até o parâmetro de carga igual a 1.5 fornecido como limite.

A análise em que o aço foi considerado elástico e o concreto regido pelo modelo de dano, apesar de também representar a perda inicial de rigidez após a fissuração, seguiu uma trajetória carga-deslocamento com redução gradual de rigidez, apresentando-se sempre mais rígido que os demais.

Nas análises utilizando o modelo de concreto os resultados foram bastante semelhantes, praticamente coincidentes, durante a maior parte da história do carregamento. No intervalo do processo de fissuração, os deslocamentos tiveram um crescimento gradual devido ao modelo de amolecimento, porém

maior do que o esperado quando comparado com os resultados experimentais, retomando um crescimento praticamente linear porém de maior declividade em função da degradação de rigidez decorrente da abertura das fissuras até que passaram a ter um crescimento bastante rápido, denunciando o escoamento da armadura a partir do parâmetro de carga igual a 1.05.

Mantendo-se constante os demais parâmetros do material, a escolha do número de pontos de Gauss para integração numérica apresentou o comportamento esperado, ou seja solução ligeiramente mais rígida para integração com 3x3 pontos, mais flexível para 2x2 pontos e intermediária para 5 pontos.

A variação de β , fator de transmissão de tensões de cisalhamento através das fissuras, pouco interferiu nos resultados finais em termos de diagramas carga-deslocamento. Este comportamento, também foi observado por Barbosa (1997) em estudo de uma viga de concreto armado utilizando elementos sólidos com armaduras dispersas. Darwin (1993) afirma que a escolha do valor de β não apresenta-se crítico mas deve sempre ser considerado nas análises pois proporciona estabilidade nas soluções. A utilização de um valor variável para β em função da deformação perpendicular ao plano da fissura, apesar de representar melhor o comportamento real, também não interferiu no diagrama carga deslocamento mas resultou numa análise de convergência mais lenta e, ao adotar $K=\infty$, a análise não prosseguiu após o início da fissuração.

Quanto ao comportamento pós-ruptura do concreto tracionado, o modelo com amolecimento linear apresenta-se mais flexível do que o modelo exponencial pois a transferência de tensão de tração do concreto para o aço se dá mais rapidamente do que no modelo exponencial. Em um estudo comparativo de modelos do comportamento do concreto a tração, d'Avila e Campos (1997), analisando vigas de concreto armado, concluíram que os melhores resultados foram obtidos para curvas de amolecimento exponencial, porém ao contrário do comportamento aqui observado, o modelo de amolecimento linear proporcionou um comportamento mais flexível.

A evolução das tensões na borda mais tracionada para os modelos de dano, dano associado ao critério de von Mises Modificado e de concreto com

amolecimento exponencial pode ser vista na figura 4.5. Como pode ser observado as tensões cresceram linearmente até a tensão de resistência à tração, entrando no regime de amolecimento no modelo de concreto e apresentando um encruamento nos modelos elastoplásticos com o critério de von Mises. Nestes últimos, o que se esperava era um escoamento perfeitamente plástico em função dos parâmetros fornecidos.

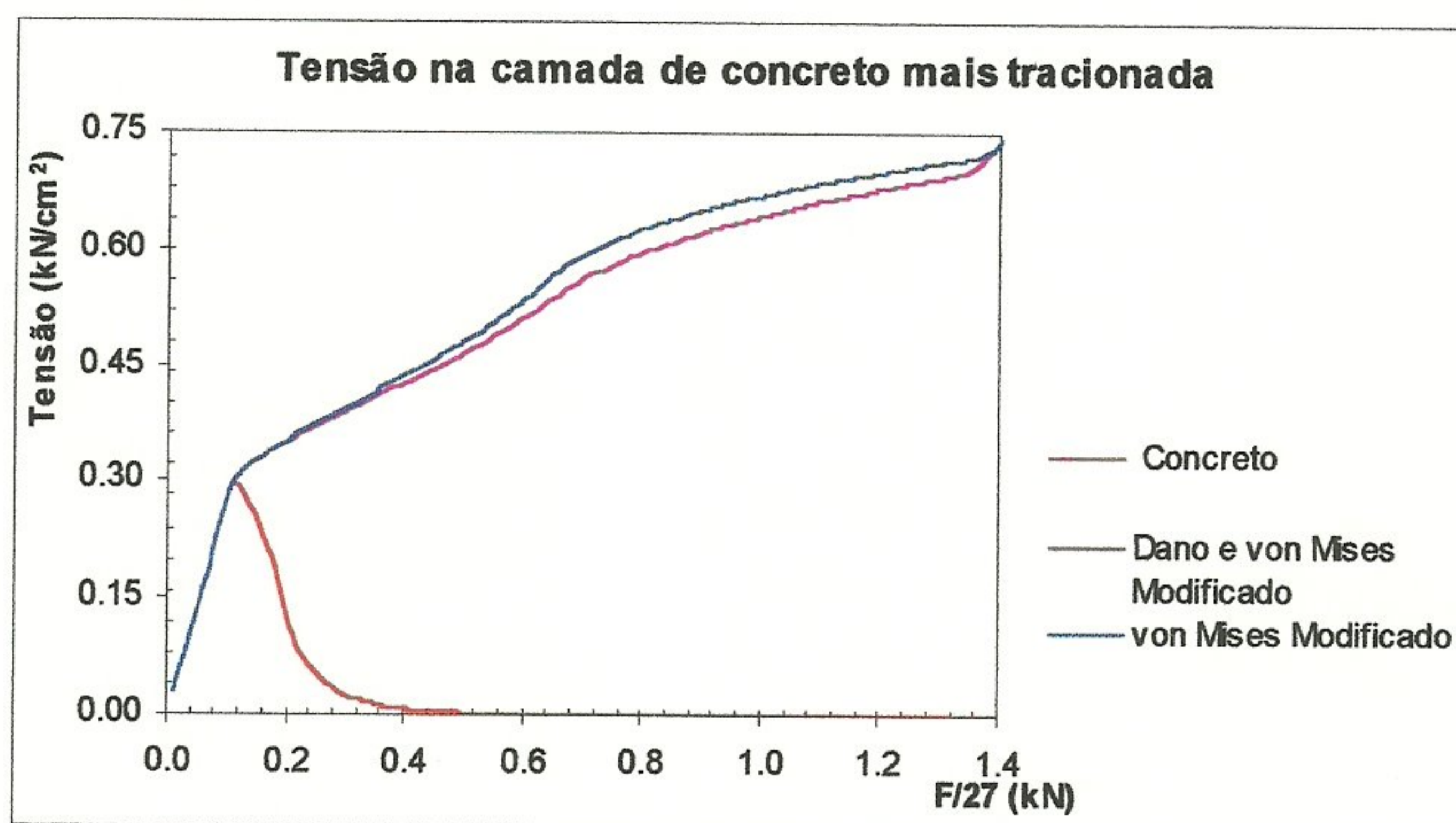


Figura 4.5 – Variação das tensões normais na camada de concreto mais tracionada da seção central

As tensões de tração na armadura seguiram qualitativamente o comportamento esperado conforme apresentado na figura 4.6. Todos os modelos seguiram linear até o início da fissuração. Em seguida, nos modelos elastoplásticos, onde a fissuração foi representada pelo escoamento do concreto tracionado, houve um aumento na taxa de crescimento das tensões continuando praticamente linear até o escoamento. No modelo biaxial de concreto o crescimento da tensão no intervalo da fissuração foi mais expressivo, pois neste caso a tensão foi totalmente transferida para a camada de aço ao final do processo de amolecimento do concreto tracionado. Em seguida, prossegue novamente linear até o início do escoamento.

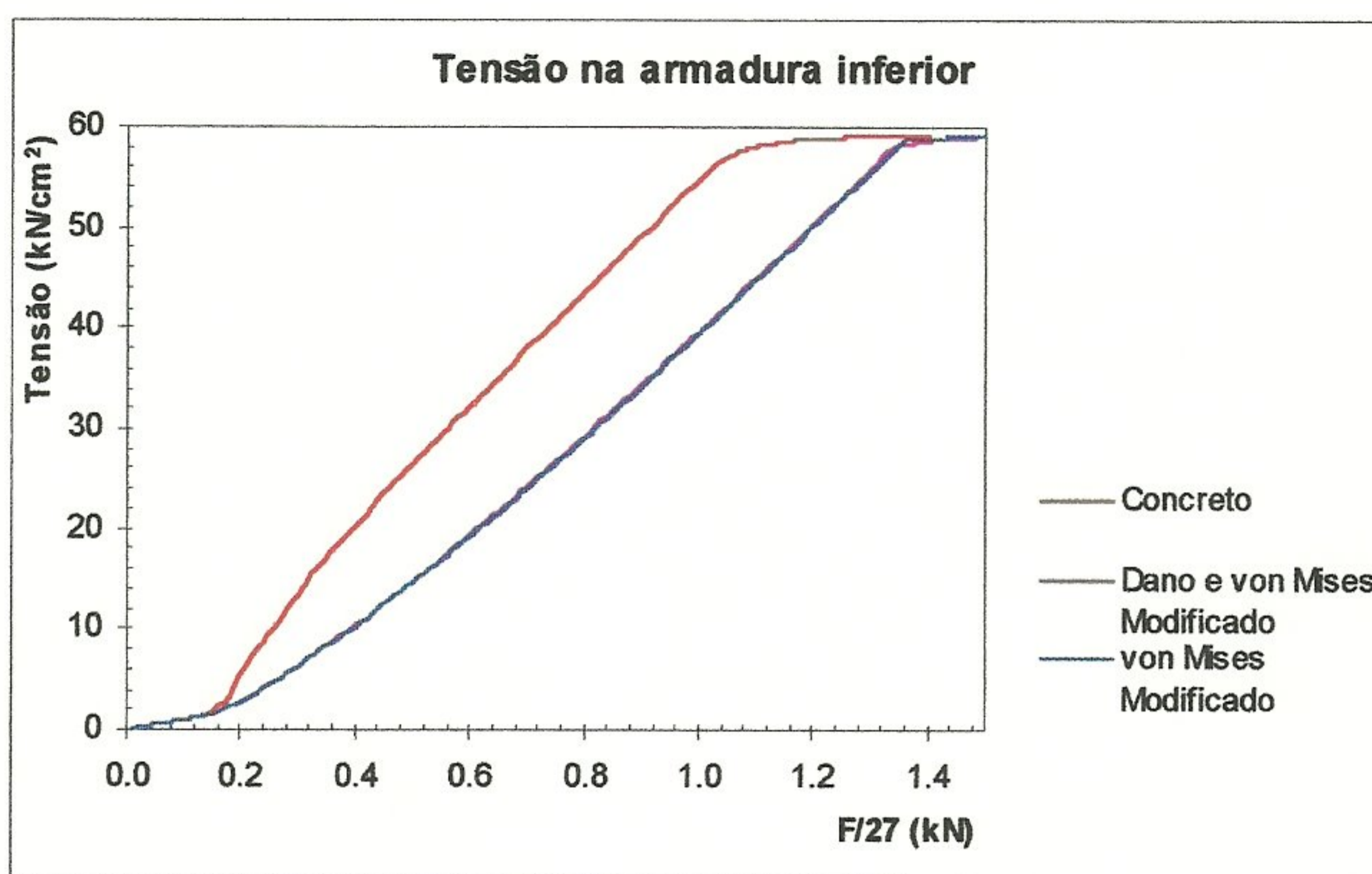


Figura 4.6 – Variação das tensões normais de tração na camada de aço da seção central

A evolução das tensões de compressão na camada de concreto mais comprimida, apresentada na figura 4.7, seguiu dois trechos de variação linear separados pela fase de transição correspondente à fissuração, sendo mais expressivo no modelo de concreto e, após o início do escoamento da armadura, passou a apresentar valores superiores à tensão de escoamento. Para o modelo de concreto este comportamento poderia ocorrer pois não há caracterização da degradação da rigidez à compressão. Entretanto os modelos elastoplásticos deveriam apresentar um escoamento perfeitamente plástico.

Os modelos elastoplásticos apresentaram sempre grande estabilidade numérica, prolongando a análise até o parâmetro de carga igual a 1.5 sem que ocorresse falha por perda de convergência da solução numérica. Ao contrário, os modelo de concreto, em que a ocorrência da ruptura à tração acompanhada do amolecimento é considerada, apresentaram um acréscimo no número de iterações por incremento para a convergência no intervalo de fissuração e deixaram de convergir para o parâmetro de carga superior a 1.39.

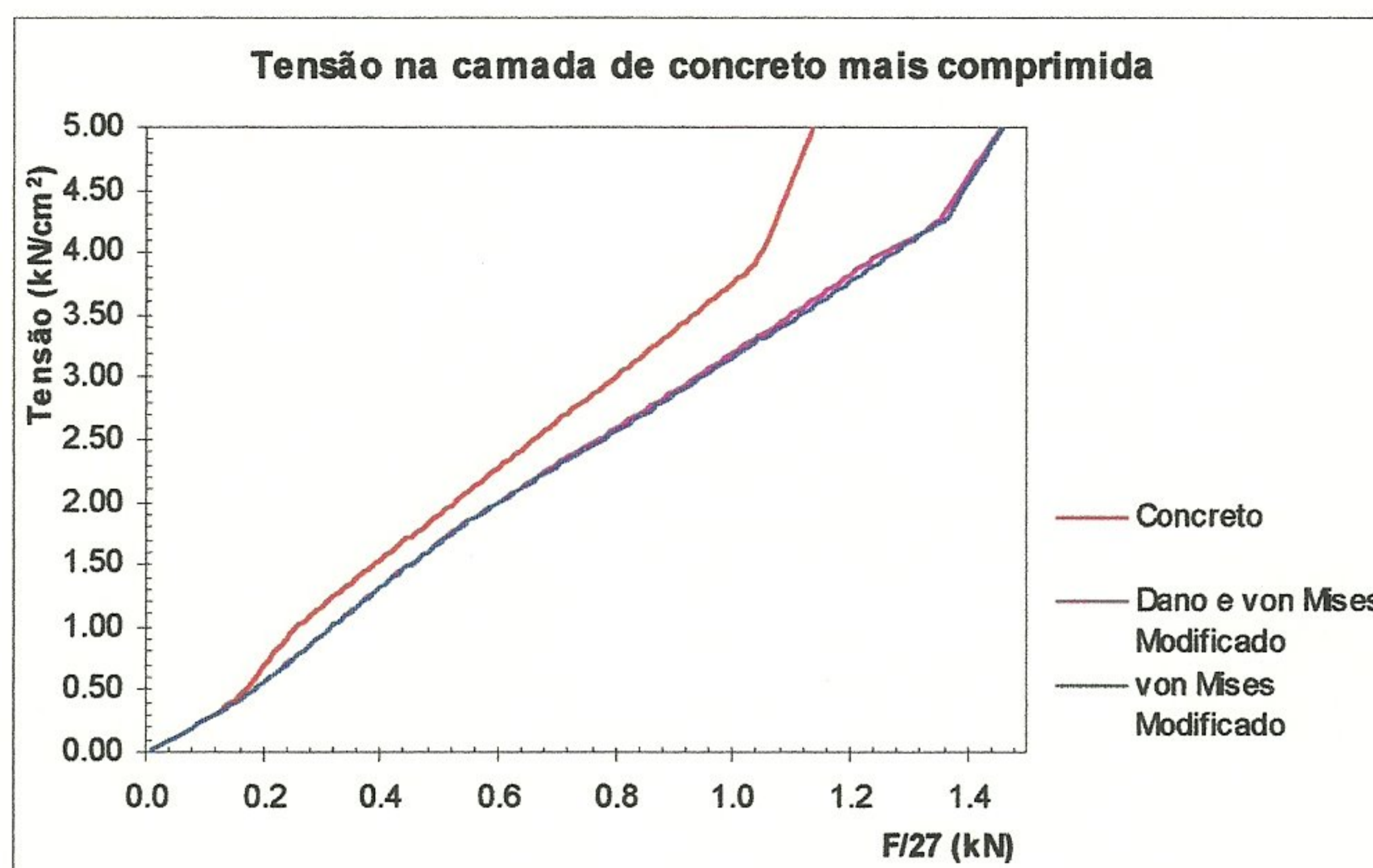


Figura 4.7 – Variação das tensões normais na camada de concreto mais comprimida da seção central

O modelo específico para o concreto apresenta-se como o mais satisfatório dentre os analisados mas precisa ser melhorado. Pode-se dizer que apresentou uma redução de rigidez devido a fissuração maior do que a observada experimentalmente. E, por tratar-se de uma viga muito armada, para obtenção de um resultado satisfatório, o modelo deveria representar a redução da rigidez decorrente da micro-fissuração do concreto comprimido.

4.2 Viga de Ramaswamy

A figura 4.8 apresenta a viga testada por Walraven (1979) *apud* Ramaswamy *et al* (1995) e analisada numericamente por Ramaswamy.

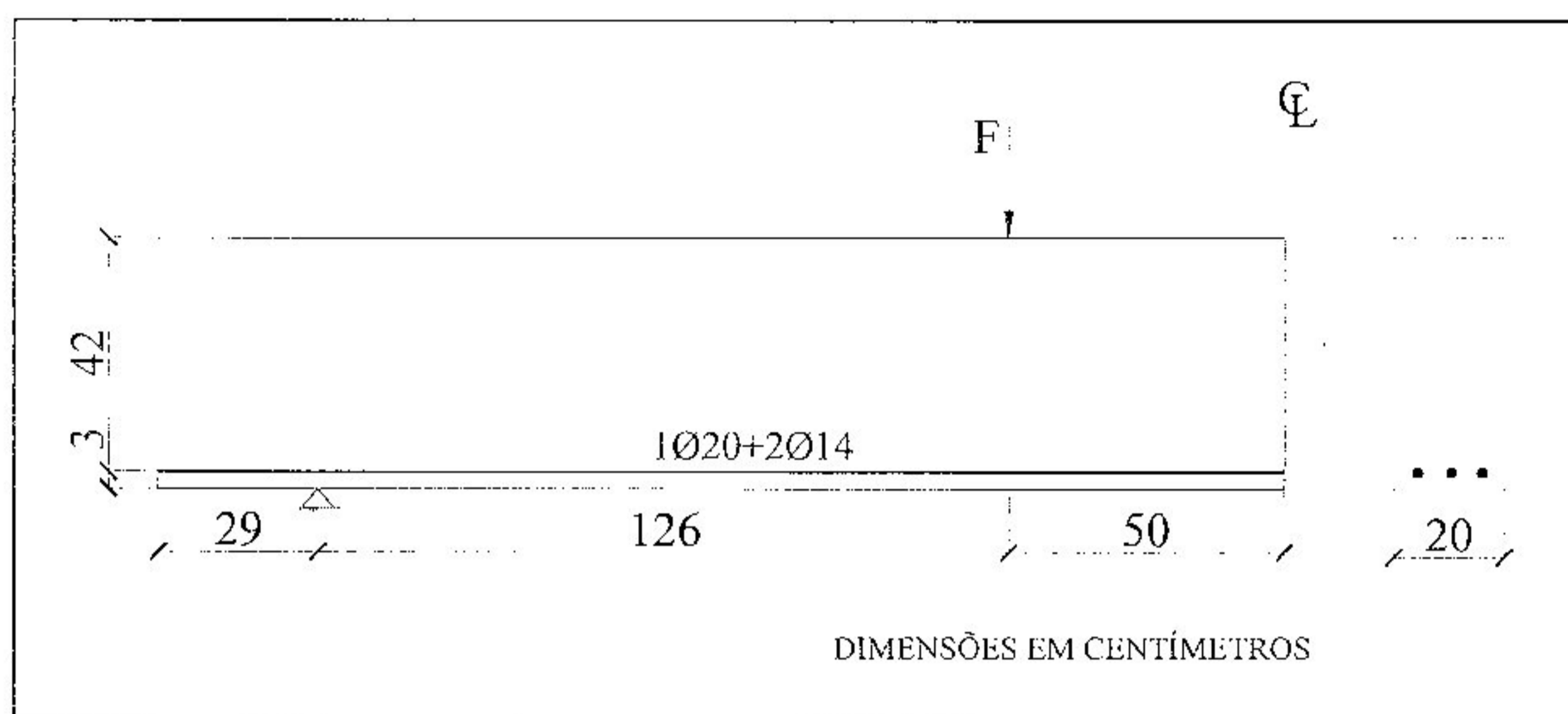


Figura 4.8- Detalhamento da viga

Nessas análises, duas formulações distintas de estratificação em camadas foram avaliadas utilizando elementos de casca: uma formulação de camadas implícitas e outra de camadas explícitas. Na formulação implícita o elemento finito equivale ao utilizado nas análises do presente trabalho, isto é, as variações das propriedades dos materiais ocorrem internamente no elemento, a seção transversal é dividida em camadas de aço e de concreto. Na formulação explícita, a seção transversal da estrutura é composta de vários elementos finitos, cada um composto unicamente de concreto ou aço, onde a compatibilidade das deformações é garantida por restrições impostas aos deslocamentos dos elementos adjacentes ao longo de uma linha vertical. Em ambas as formulações o modelo constitutivo do concreto é bastante complexo, incluindo o efeito do enrijecimento à tração (*tension stiffening*) ao longo da direção da armadura, o efeito da variação do intertravamento dos agregados baseado na tensão normal de confinamento na fissura e um modelo de amolecimento na compressão (*compression softening*). O modelo ainda inclui as deformações por cisalhamento, permitindo o desenvolvimento de fissuras inclinadas ao longo da seção transversal.

No presente trabalho procurou-se avaliar a influência do tipo do elemento finito utilizado. Assim foram realizadas análises utilizando o elemento de casca

QSL8 com camadas de concreto e aço e análises utilizando elementos planos QPM8 para o concreto e elementos de treliça BAR3 para o aço. Para as primeiras foram avaliadas duas malhas distintas, idênticas às utilizadas por Ramaswamy. As malhas utilizadas, as restrições nodais e o detalhamento das camadas para o elemento estratificado podem ser vistos na figura 4.9.

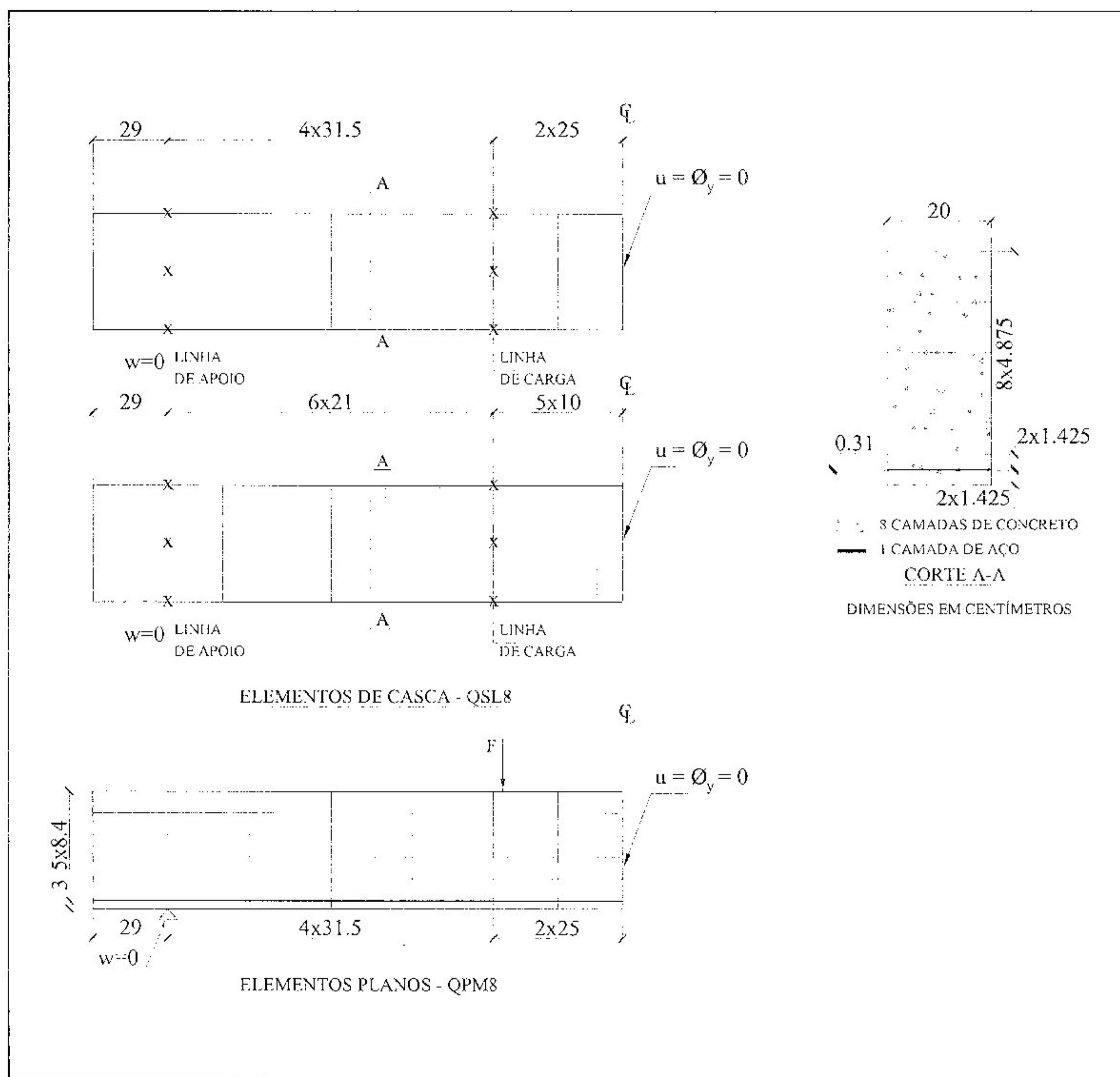


Figura 4.9- Discretização da viga – Elementos planos (QPM8) e Elementos de Casca (QSL8)

As características dos materiais utilizados por Ramaswamy foram: $f_c=25.7\text{MPa}$, $f_t=0.8\text{MPa}$ para o concreto e $f_s=440\text{MPa}$ para o aço. Como não foi apresentada nenhuma indicação dos módulos de elasticidade adotou-se para o concreto $E_c=23730\text{MPa}$ obtido de acordo com ACI 363 (1992) e para o aço $E_s=210000\text{MPa}$.

Os modelos constitutivos para o concreto foram os mesmos utilizados no exemplo anterior. O carregamento foi aplicado em incrementos constantes de 1 kN permitindo-se vinte e cinco iterações por incremento e que, no caso de dificuldade de convergência, cada incremento fosse reduzido em até cinco vezes. O algoritmo de solução adotado foi o de Newton Raphson Modificado associado ao *line search*. A incrementação do carregamento deixou de ser constante quando o parâmetro CSTIF atingiu o valor de 0.4, seguindo com o método do comprimento do arco.

Dos critérios disponíveis para verificação da convergência adotou-se a tolerância de 1% para norma euclidiana dos resíduos (rdnrm) e 1% para norma euclidiana dos deslocamentos incrementais (dtnrm). Os demais valores de tolerâncias permaneceram os *default* do programa.

Utilizando os elementos de casca estratificados optou-se pela integração numérica com 2x2 pontos de Gauss e para os elementos planos avaliou-se o desempenho com 2x2 e 3x3 pontos de Gauss.

Nos modelos de concreto permitiu-se a formação das fissuras em duas direções fixas ortogonais. No comportamento pós fissuração utilizou-se o modelo de amolecimento exponencial para dois níveis de energia de fratura, para $G_f=60\text{N/m}$ e 400N/m , conforme sugerido por Ramaswamy. O fator de retenção de cisalhamento, β , foi mantido constante e igual a 0.85, tendo em vista a sua pouca influência nos resultados, conforme observado no exemplo anterior.

O modelo elastoplástico baseado no critério de von Mises modificado foi avaliado considerando o comportamento elastoplástico perfeito na tração e elastoplástico com encruamento isotrópico na compressão, através do diagrama multilinear de tensão-deformação (que reproduz a simplificação proposta pela NBR 6118) apresentado na figura 4.10.

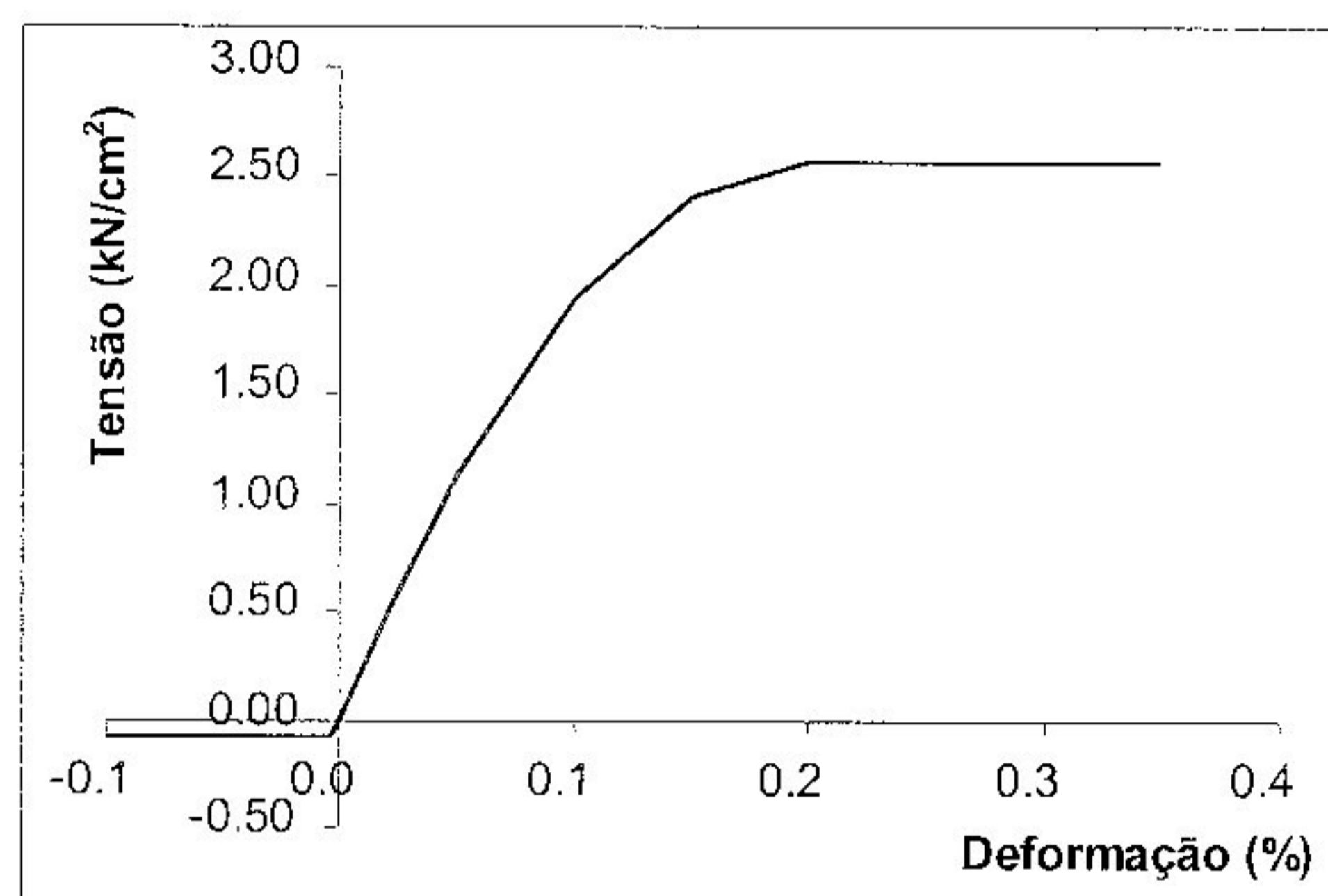


Figura 4.10- Diagrama tensão-deformação para o concreto – Critério de von Mises modificado

Utilizando o modelo de dano foram realizadas análises considerando-o isoladamente e associado ao modelo elastoplástico de von Mises modificado com encruamento. Os parâmetros necessários para o modelo de dano foram $r_o=0.00164$, $n=32.13$, $A=0.105$ para elementos de casca com a malha mais pobre e $A=0.067$ para elementos de casca com a malha mais refinada e elementos planos. Estes parâmetros foram determinados para $G_f=60\text{kN/m}$. Uma análise considerando que o dano em compressão iniciou-se para o mesmo nível de tensão em que foi considerado o início do encruamento no modelo de von Mises modificado também foi realizada, neste caso o parâmetro n vale 6.43.

Na figura 4.11 mostra-se a evolução das flechas com o carregamento variando-se os modelos constitutivos e os elementos utilizados e os obtidos experimentalmente para a seção central.

Para o modelo de concreto não houve diferença significativa entre as curvas para as duas malhas distintas com elementos estratificados e uma mesma energia de fratura. Este resultado mostra-se bastante satisfatório visto que os modelos de amolecimento, em que a energia da fratura está associada ao comprimento característico do elemento, resultam em resultados independentes da malha adotada. Os resultados mostraram-se sensíveis a variação da energia de fratura; como esperado a maior energia de fratura levou a resultados mais rígidos. As curvas de evolução das tensões com carregamento apresentadas na figura 4.12 mostram o aumento da região de amolecimento mantendo a tensão

no concreto tracionado até cargas mais elevadas, resultando num escoamento tardio da armadura.

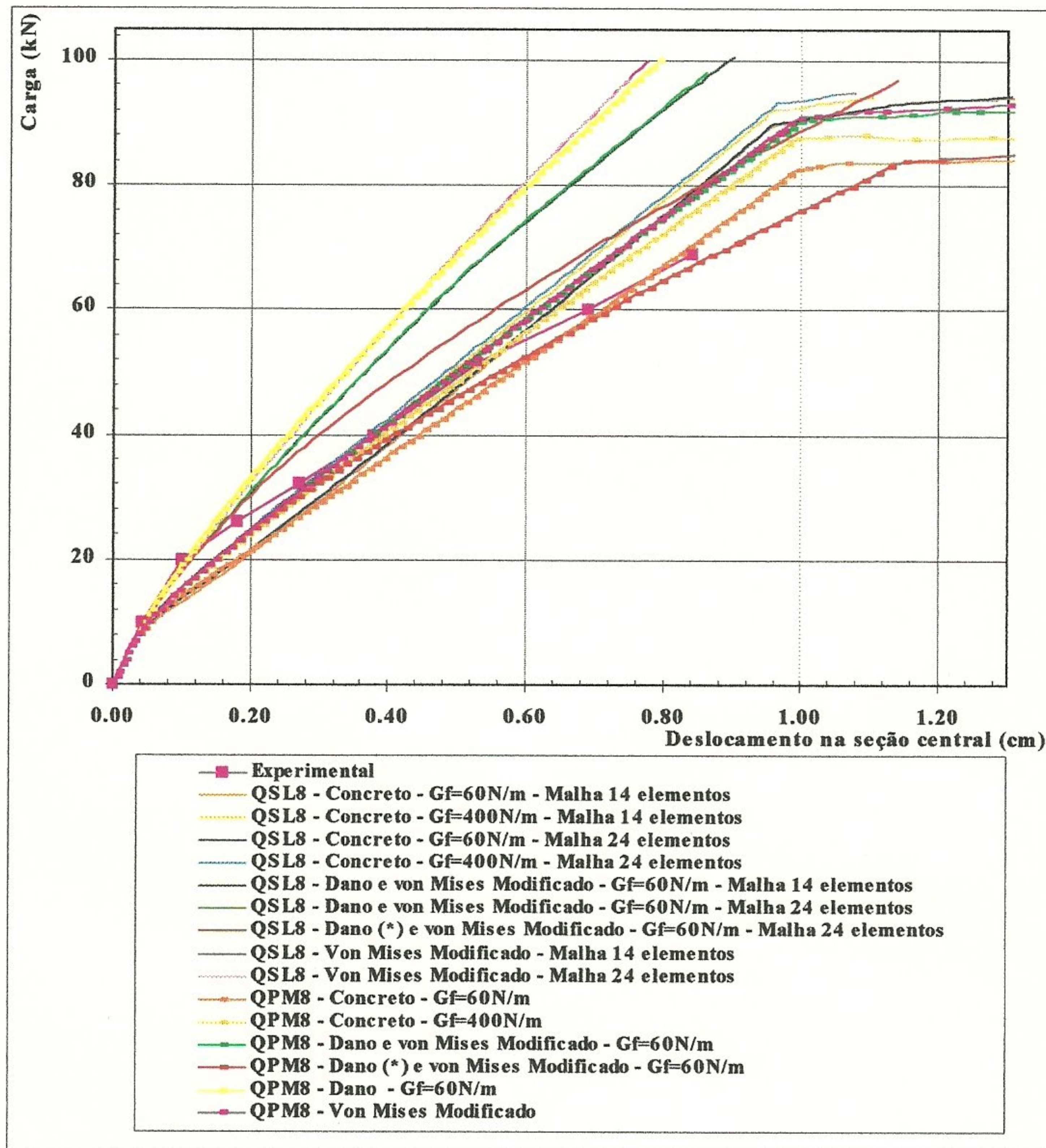


Figura 4.11 – Relação entre carga e deslocamento na seção central

Os resultados de Ramaswamy também mostraram-se mais rígidos com aumento da energia de fratura em seu modelo de camadas explícitas. No entanto, utilizando o valor mais baixo foi detectado um esmagamento prematuro no concreto. A distribuição das fissuras encontrada indicou um esmagamento localizado junto ao ponto de aplicação da carga próximo a carga de ruptura. Para um mesmo nível de energia, utilizando a formulação implícita, não houve convergência para carga superior a 68 kN com a malha mais pobre, já com a malha mais refinada foi alcançada uma carga de ruptura de 78 kN. Quando

comparada com a carga de ruptura obtida experimentalmente de 69 kN, Ramaswamy conclui que possíveis razões para esta diferença seria a consideração superestimada da participação do concreto tracionado em seu modelo, o *tension stiffening*, e um possível escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente presente no experimento, não foi considerado na análise. O autor evidenciou a superioridade do modelo de camadas explícitas na avaliação das não-linearidades ao longo da seção transversal e na resposta carga-deslocamento ao introduzir a flexibilidade devido ao cisalhamento através da seção transversal. No entanto, trata-se de um procedimento bem mais oneroso que deve ser utilizado quando justificar seus benefícios, como no caso de seções moderadamente espessas.

No presente trabalho, independente da energia de fratura adotada, as análises começaram a apresentar dificuldade de convergência a partir de 90kN não convergindo além de 99kN. Os resultados mostram mais uma vez a deficiência do modelo no comportamento do concreto em compressão levando as análises até cargas de ruptura significativamente superiores às esperadas.

As análises em que o modelo elastoplástico foi associado às camadas de concreto também não apresentaram diferenças dependendo da malha adotada. Nestes modelos ao se incluir o dano os resultados mostraram-se mais flexíveis, porém sempre mais rígidos que os modelos de concreto.

As análises utilizando elementos planos deixaram de convergir precocemente para a integração com 2x2 pontos de Gauss. As recomendações sobre o elemento QPM8 em LUSAS (1997) ressaltam que o elemento possui um modo de energia zero que pode ser ativado em análises não-lineares. Consequentemente as análises que se seguiram foram realizadas utilizando a integração 3x3 pontos de Gauss. Utilizando o modelo de concreto o comportamento observado foi o mesmo quanto a variação da energia da fratura porém, apresentando-se sempre mais flexíveis do que o modelo com elementos estratificados. Pode-se observar que praticamente não houve diferença nas curvas das flechas e das tensões com o carregamento entre os modelos elastoplásticos e aos associados ao modelo de dano.

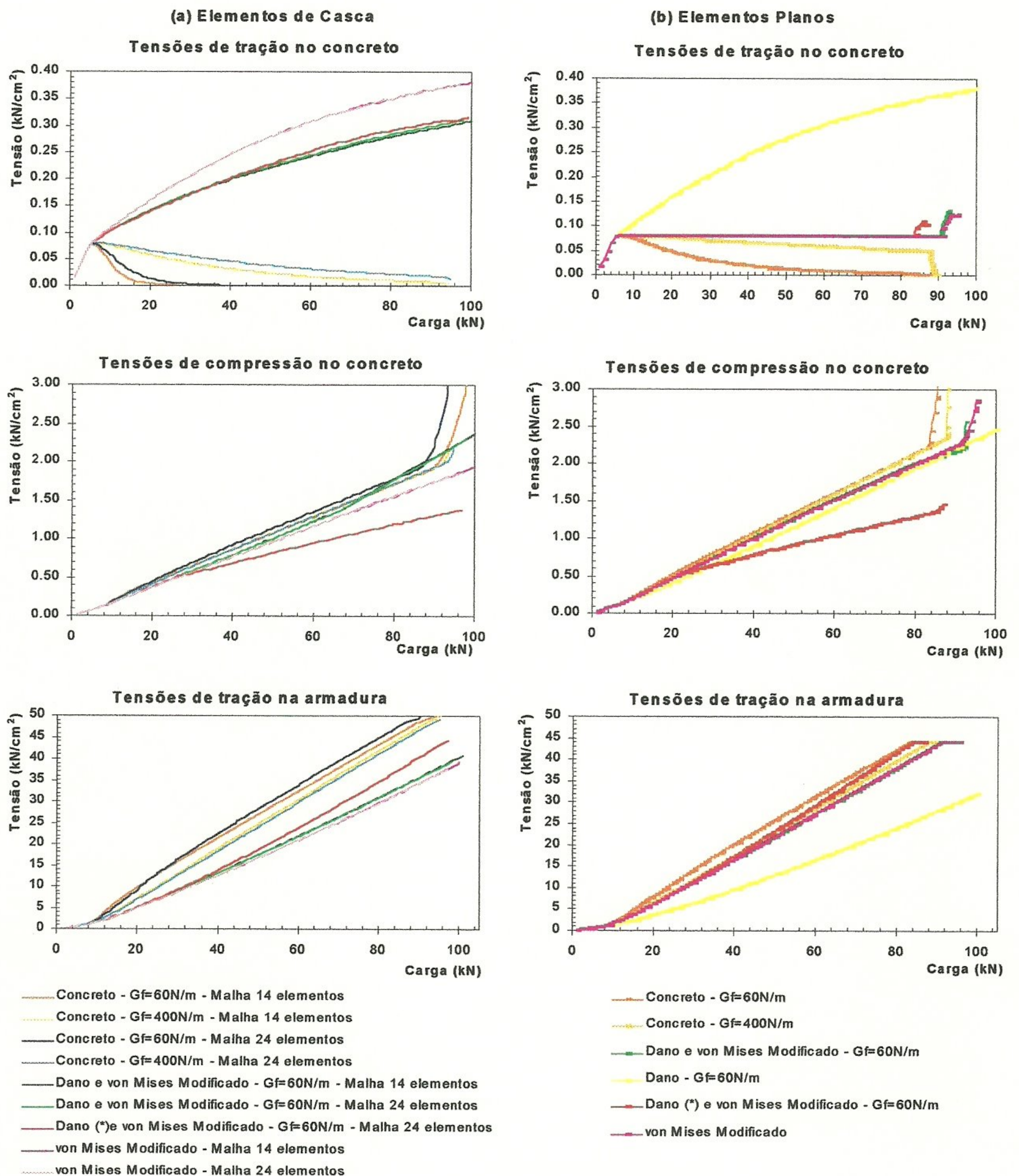


Figura 4.12- Evolução das tensões com o carregamento– (a) Elementos de casca (b) Elementos Planos

A avaliação isolada do modelo de dano no comportamento do concreto somente foi possível nas análises utilizando elementos planos. Estas, apesar de representarem a perda de rigidez do intervalo de fissuração, como observado nas curvas de evolução das flechas e das tensão, mostraram-se bastante rígidas

sem apresentar dificuldade de convergência até a carga de 100kN em que foi limitada a análise. No caso de elementos estratificados, análises em que o modelo de dano é associada apenas às camadas de concreto e o modelo elastoplástico apenas às camadas de aço não podem ser realizadas pois resultam num modelo não admissível pelo programa.

As análises em que os parâmetros do modelo de dano foram definidos considerando-se a evolução do dano iniciada para o mesmo nível em que se definiu o início do encruamento nos modelos elastoplásticos apresentaram a mesma redução de rigidez no intervalo da fissuração para ambos os tipos de elementos. No entanto, ao contrário dos demais modelos, seguiram uma trajetória não-linear com constante perda de rigidez, obtendo-se para o caso de elementos planos, a curva carga-deslocamento mais próxima da experimental, ao longo de toda a história do carregamento. É preciso salientar que a malha de elementos estratificados com menos elementos deixou de convergir precocemente. Excluindo este caso, nas análises utilizando o modelo de concreto, os resultados foram mais flexíveis para os dois tipos de elementos.

Considerando um mesmo modelo constitutivo, os resultados mais flexíveis foram observados nas análises com elementos planos. Nestas análises, a evolução das tensões de tração no concreto para os modelos elastoplástico seguiram o comportamento elastoplástico perfeito esperado, ao contrário dos elementos estratificados em que sempre foi observado um encruamento. Nestes modelos, o escoamento da armadura também ocorreu quando a tensão atingiu a tensão de escoamento fornecida e não um valor ligeiramente superior como nas análises com elementos estratificados.

A maior flexibilidade encontrada nos modelos com elementos planos pode ser justificada pela influência das tensões de cisalhamento através da seção transversal, como pode ser visto na figura 4.13, com o desenvolvimento de fissuras inclinadas. A figura mostra o estado de fissuração encontrado para a carga de 20kN, que, quando comparado com o panorama de fissuração observado por Ramaswamy *et al* (1995), apresenta-se avançado. Este comportamento de fissuração precoce e mais acentuada, observado nos modelos com elementos estratificados através da curva de evolução dos deslocamentos, é

o mesmo observado no exemplo anterior.

Os resultados aqui apresentadas sugerem a superioridade do modelo de concreto utilizando elementos planos para o concreto e elementos de treliça para o aço nas análises de viga.

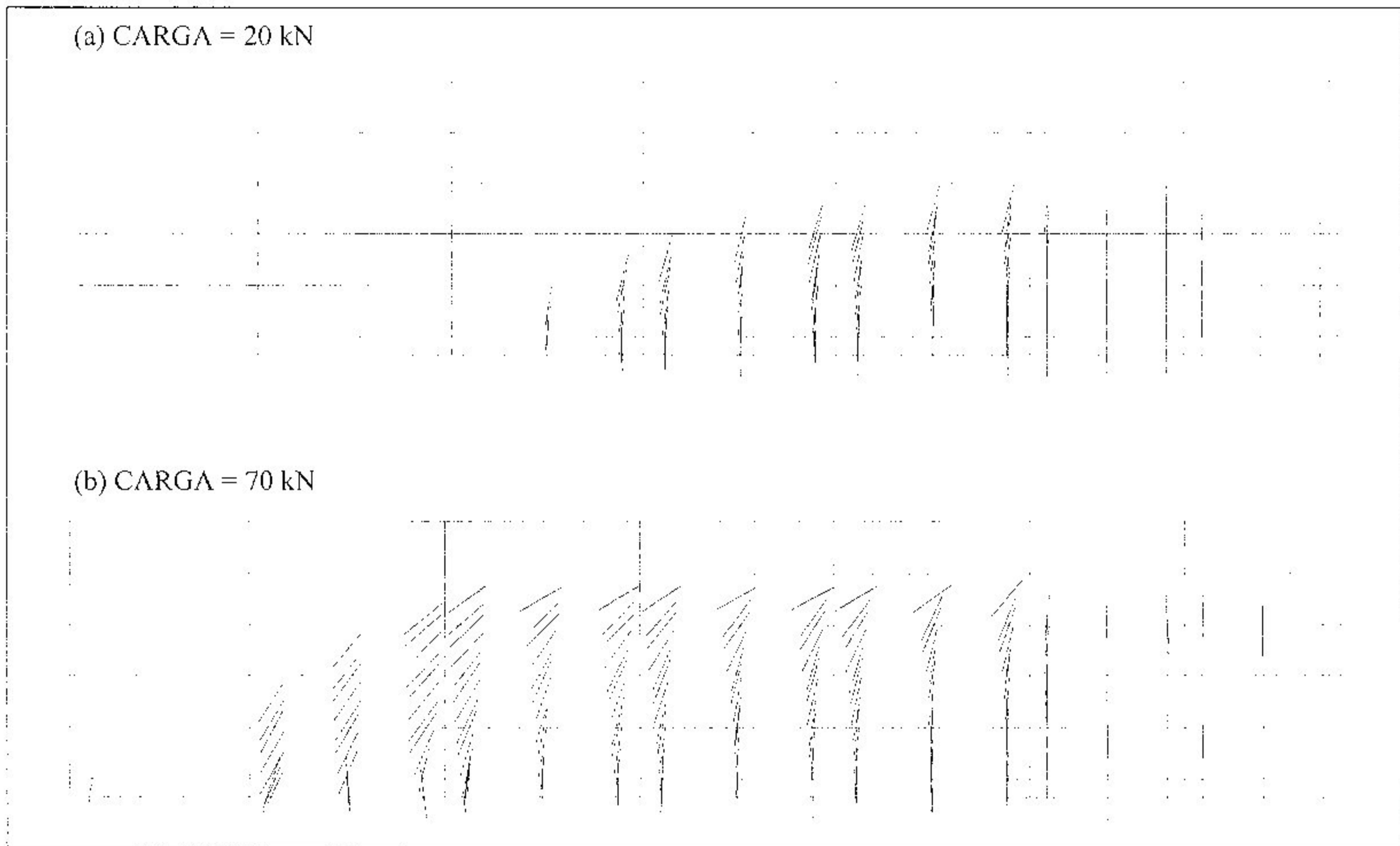


Figura 4.13 – Panorama da fissuração – Elemento de estado plano de tensão $G_f=400\text{N/m}$. (a) Carga = 20kN; (b)Carga = 70kN

4.3 Laje apoiada nos cantos com carga concentrada

A figura 4.14 apresenta a laje quadrada apoiada nos cantos e submetida a uma força concentrada no centro, testada experimentalmente por McNeice *apud* Jofriet e McNeice (1971), e analisada pelo método dos elementos finitos por vários pesquisadores dentre eles Jofriet e McNeice (1971), Hand *et al* (1973), Corrêa (1991) e Chueiri (1994).

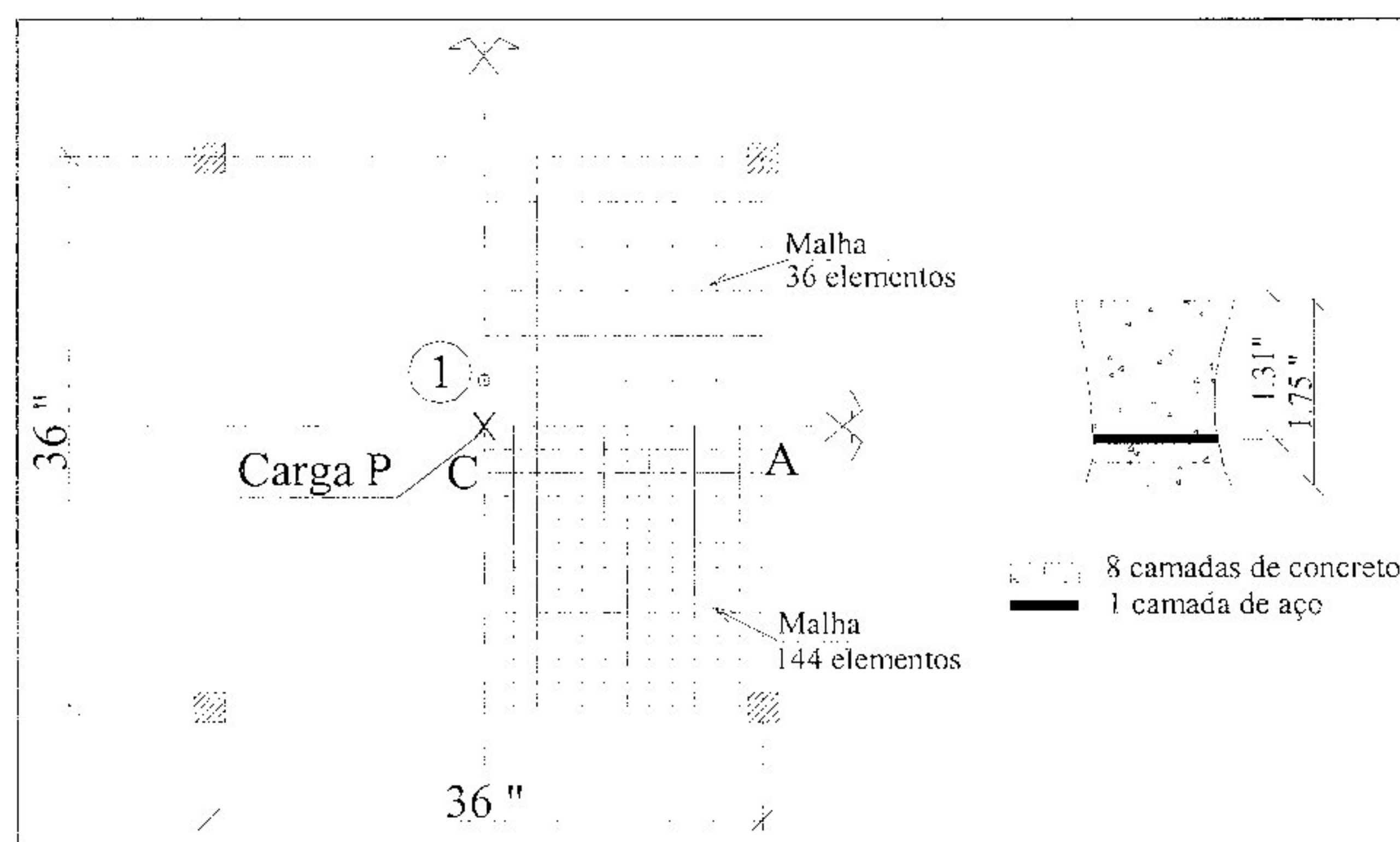


Figura 4.14 – Laje apoiada nos cantos

As análises de Hand *et al* e Chueiri utilizaram um modelo estratificado com uma relação tensão deformação idealizada para o concreto e o aço com algumas hipóteses de compatibilidade de deformações entre os dois materiais. As análises de Jofriet e Corrêa utilizaram uma relação momento curvatura completa, refletindo os vários estágios do comportamento do material. Nestas análises, a evolução do deslocamento para o ponto 1, mostrado na figura 4.14, com o carregamento ficou muito próxima do resultado experimental durante toda a história do carregamento.

Na presente análise, utilizando o elemento de casca QSL8, um quarto da laje foi discretizado em duas malhas distintas, com 36 e 144 elementos, cada elemento estratificado em 9 camadas como visto na figura 4.14. Duas considerações foram feitas para o nó de apoio, a primeira mantendo as translações horizontais livres e a segunda fixas, da mesma forma que avaliada por Hand.

As características dos materiais fornecidas na análise experimental foram: $f_c=5500\text{psi}$, $E_c=4.15 \times 10^6\text{psi}$ e $\nu=0.15$ para o concreto e $E_s=29 \times 10^6\text{psi}$ para o aço. Para a resistência à tração do concreto adotou-se $f_t=550\text{psi}$ e para a resistência do aço $f_s=50000\text{psi}$ de acordo com Corrêa e Chueiri. A armadura tem a mesma distribuição nas duas direções com taxa geométrica de 0,85% em relação a área útil.

Nestas análises, além dos modelos utilizados nos exemplos anteriores para as camadas de concreto, foram também analisados os modelos elastoplásticos que utilizam a superfície de escoamento Drucker-Prager e a de Mohr-Coulomb.

O carregamento foi aplicado em incrementos constantes de 0.025 kips permitindo-se vinte e cinco iterações por incremento e que, no caso de dificuldade de convergência, cada incremento fosse reduzindo em até cinco vezes. Nas análises utilizando o modelo de concreto adotou-se o algoritmo de Newton Raphson modificado associado ao *line search*, e nos demais, o pleno. Dos critérios disponíveis para verificação da convergência adotou-se a tolerância de 5% para norma euclidiana dos resíduos (*rdnrm*) e 5% para norma euclidiana dos deslocamentos incrementais (*dtmrm*). Os demais valores de tolerâncias permaneceram os *default* do programa. Nos modelos de concreto foram avaliadas as três possibilidades de integração numérica.

Nos modelos de concreto, além do modelo fissuras fixas ortogonais como nos exemplos anteriores, avaliou-se o modelo de fissuras não ortogonais. No comportamento pós fissuração utilizou-se o modelo de amolecimento exponencial com $G_f=0.449\text{lbs/in}$. Para o fator de retenção de cisalhamento, β , adotou-se o valor constante e igual a 0.85 e o modelo variável com $K=1.0$ e 0.5.

O modelo elastoplástico baseado no critério de von Mises modificado foi avaliado considerando o comportamento elastoplástico perfeito na tração. É preciso salientar que foi preciso considerar o módulo tangente após o escoamento igual a um milésimo do módulo de elasticidade para superar as dificuldades de convergência que ocorreram. Na compressão adotou-se o comportamento elastoplástico com encruamento isotrópico através do diagrama bilinear de tensão-deformação sugerido por Hand apresentado na figura 4.15.

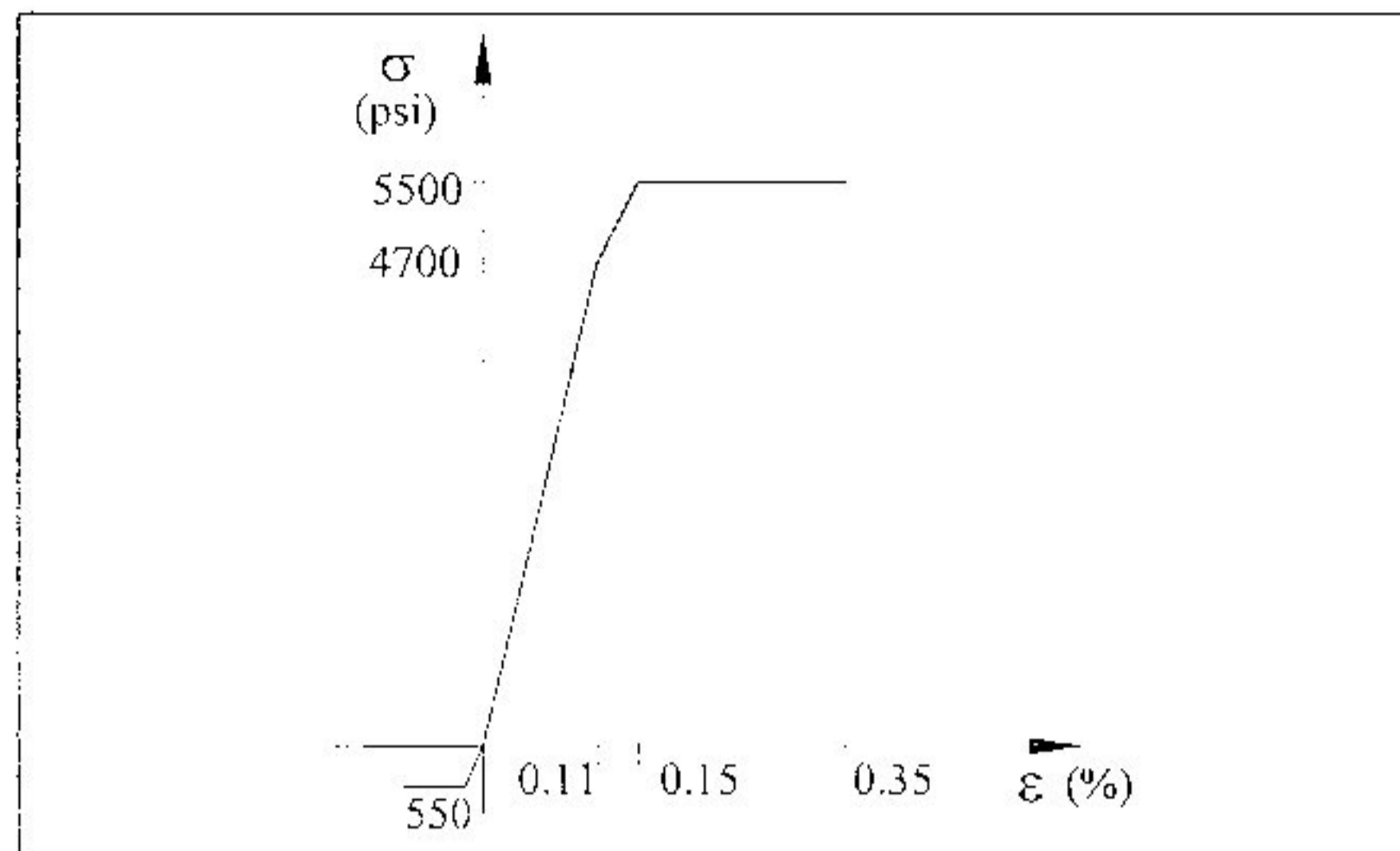


Figura 4.15- Diagrama tensão-deformação para o concreto – Critério de von Mises modificado

Utilizando o modelo de dano, foram realizadas análises considerando-o isoladamente e associado ao modelo elastoplástico de von Mises modificado com encruamento. Os parâmetros necessários para o modelo de dano foram $r_o=0.27$, $n=10$, $A=0.644$. Da mesma forma que no exemplo anterior, uma análise considerando que o dano iniciou-se para o mesmo nível de tensão em que foi considerado o início do encruamento no modelo de von Mises modificado também foi realizada, neste caso o parâmetro n vale 8.54.

A figura 4.16 apresenta a variação do deslocamento do ponto 1 com o carregamento para as diversas análises realizadas e a análise experimental. Nos trabalhos consultados a evolução dos deslocamentos para a análise experimental é apresentada até a carga de 3.2 kips sem que seja comentada a condição de ruptura. Apenas o trabalho de Chueiri salienta que não houve convergência para o incremento correspondente a 3.2 kips.

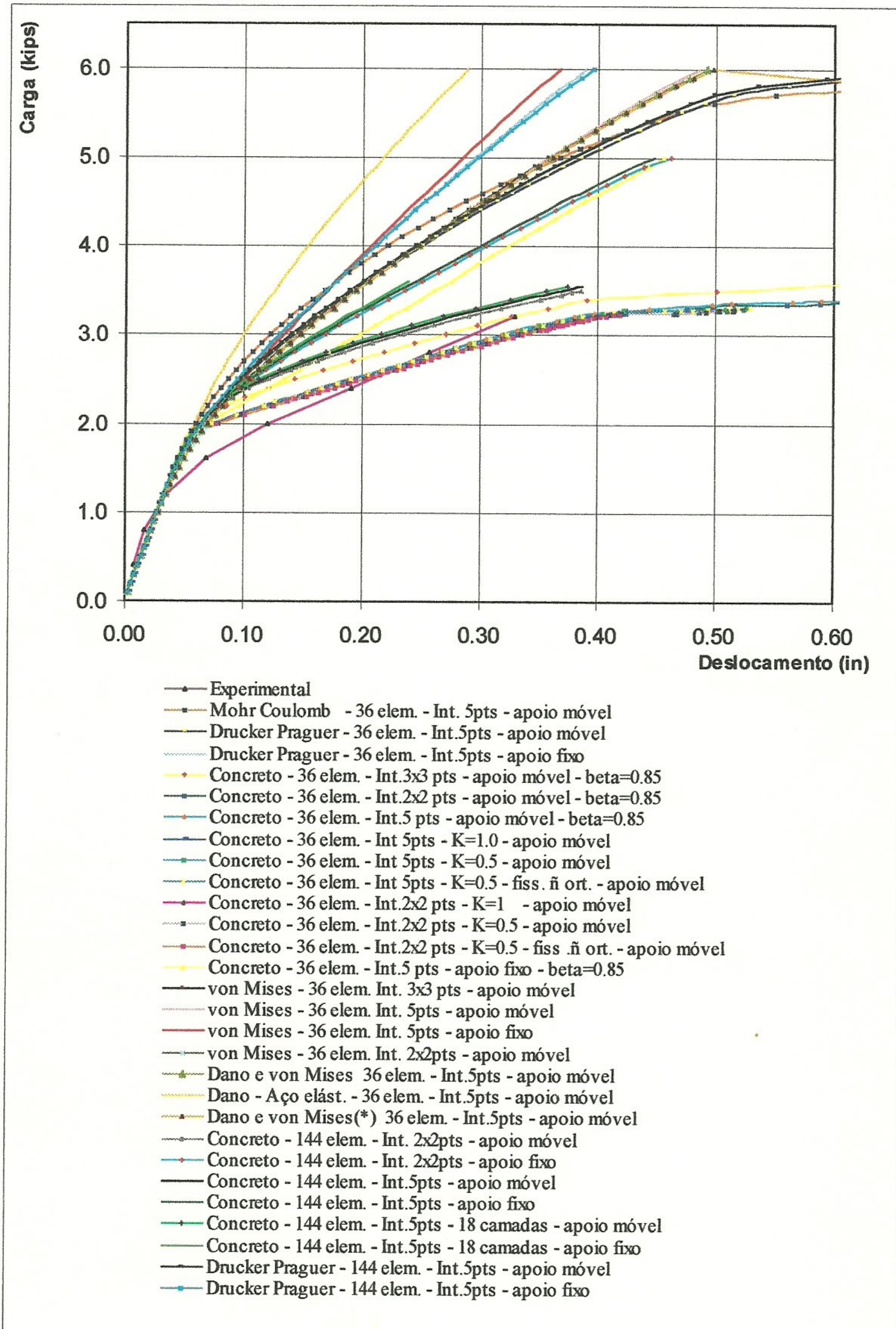


Figura 4.16 – Relação entre carga e deslocamento no ponto 1.

Para um mesmo modelo a malha mais refinada apresentou um comportamento mais rígido. Esta diferença foi mais acentuada nos modelos de concreto do que nos modelos elastoplásticos.

Os resultados considerando o apoio apenas com restrição às translações verticais apresentaram-se mais flexíveis em relação ao apoio que incluiu as restrições as translações horizontais. Esta influência das condições de apoio no plano na rigidez da estrutura foi observada nas análises de Hand *et al* (1973), embora com resultados, em qualquer caso, mais flexíveis em relação a presente análise.

As curvas carga-deslocamento para os modelos de concreto mostram que o início da fissuração ocorreu para um nível de carga superior ao obtido pela análise experimental. Com o início do escoamento da armadura próximo ao ponto de aplicação da carga para a carga de 2.0 kips, ocorreu uma redução brusca da rigidez com aumento apreciável dos deslocamentos, proporcionando valores maiores do que os observados experimentalmente.

Nestas análises, a avaliação dos resultados levando em consideração o número de pontos de Gauss utilizados para a integração numérica, através da observação da curva carga deslocamento, nos conduz a afirmar que nenhuma diferença apreciável foi percebida. No entanto, a observação da deformada utilizando a integração com 2x2 pontos de Gauss mostrou a ocorrência de mecanismos. As documentações do programa sobre este elemento recomendam a integração com 2x2 pontos pois fornece o melhor desempenho, mas alertam que no caso de malhas regulares e carregamento fora do plano há a possibilidade da ocorrência de mecanismos. O mesmo ocorrendo para integração com 5 pontos para o caso de malhas com poucas restrições e carregamento fora do plano. A integração com 3x3 pontos proporciona um elemento em que não há a possibilidade de formação de mecanismos mas tende a gerar soluções mais rígidas, sendo necessária uma malha mais refinada do que utilizando a integração com 5 pontos. Por isso as demais análises foram realizadas utilizando 5 pontos de Gauss.

Os resultados não foram sensíveis à alteração do número de camadas nem à opção que permite o desenvolvimento de fissuras não ortogonais. O que

observou-se foi que os incrementos de cargas foram reduzidos, tornando a convergência mais lenta. Da mesma forma como observado no primeiro exemplo analisado, os resultados também não foram sensíveis a utilização de um fator de retenção de cisalhamento variável.

O modelo de dano nas camadas de concreto, considerando o comportamento elástico na camada de aço, evoluiu linearmente até o início da fissuração quando teve uma pequena redução na rigidez. A partir desta carga, o comportamento manteve-se praticamente linear até a carga de 6.0 kips limitada pela análise, denunciando a grande importância do modelo de plastificação para o aço na degradação da rigidez para a laje em estudo.

Nos casos em que admitiu-se o modelo elastoplástico perfeito para o aço, o comportamento observado foi praticamente o mesmo quando o modelo de von Mises foi associado às camadas de concreto e quando foi acoplado ao modelo de dano, indicando a pouca representatividade do modelo de dano utilizado.

Os modelos elastoplásticos de von Mises iniciaram a redução de rigidez para níveis de carga inferiores aos de Drucker Prager porém a redução contínua da rigidez foi menos acelerada permitindo que análise alcançasse a carga de 6.0 kips sem apresentar dificuldade de convergência.

As análises utilizando o modelo de plastificação de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager apresentaram o comportamento esperado, ou seja, a redução na rigidez da estrutura devido a fissuração, apesar de não representarem corretamente este fenômeno e como visto na figura 4.16, com a evolução do carregamento, as curvas distanciaram-se da curva experimental. Este comportamento significativamente mais rígido foi o mesmo observado por Barbosa (1997) em análise de vigas utilizando elementos de cascas estratificados. As curvas apresentaram o trecho inicial linear, seguida da fase correspondente à fissuração um trecho não-linear com constante redução da inclinação das tangentes à curva, até um trecho em que os deslocamentos aumentaram bastante para pequenos acréscimos de carga, caracterizando uma situação de carga última. Porém para o modelo de Drucker-Prager a convergência foi obtida até a carga de 6.0 kips limitada pela análise, sem apresentar dificuldades numéricas, e o modelo de Mohr-Coulomb apresentou

dificuldades de convergência a partir de 5.2 kips não atingindo a carga de 5.3kips. Comparados entre si, a redução de rigidez ocorreu inicialmente no modelo de Drucker-Prager. Com o progresso do carregamento o modelo Mohr-Coulomb passou a apresentar uma redução ligeiramente mais acelerada invertendo o comportamento nos últimos incrementos de carga. Este comportamento pode ser explicado já que a superfície de Drucker-Prager definida circunscribe a superfície de Mohr-Coulomb.

O comportamento observado no geral é que a carga de fissuração foi superestimada, porém, além deste ponto, nota-se um rápido aumento dos deslocamentos para pequenos acréscimos de carga aproximando da curva experimental, principalmente nas análises utilizando o modelo de concreto que apresentaram o comportamento mais flexível. Comportamento similar foi observado na análise de Scalon e Murray (1971, 1974) conforme apresentado em Darwin (1993)

É interessante observar a redistribuição dos esforços internos decorrente da fissuração. A figura 4.17 apresenta as variações dos momentos fletores ao longo do segmento AC, através da razão entre o momento (M_y) e a carga (P) aplicada, para P igual a 1.6, 2.4 e 3.2 kips, das quais pode-se fazer algumas comparações da mesma forma que em Corrêa (1989).

Para cargas inferiores a 0.8 kip, o comportamento é elástico com um pico de momentos sob a carga concentrada, região onde inicia-se o processo de fissuração, com redução de rigidez. Com isto ocorre uma redistribuição de momentos, de modo que para carga igual a 1.6 kips, o momento praticamente se uniformiza ao longo de AC. Na presente análise nota-se que ocorreu a uniformização dos momentos, porém há ainda um pico de momento mais acentuado do que observado em Corrêa. Com o aumento da carga, a fissuração se estende a regiões afastadas do centro, tendendo a igualar a distribuição da rigidez pela laje. Então a tendência de atrair grande parte do momento para o centro novamente aparece, como se percebe observando-se os resultados para $P=2.4$ e 3.2 kips.

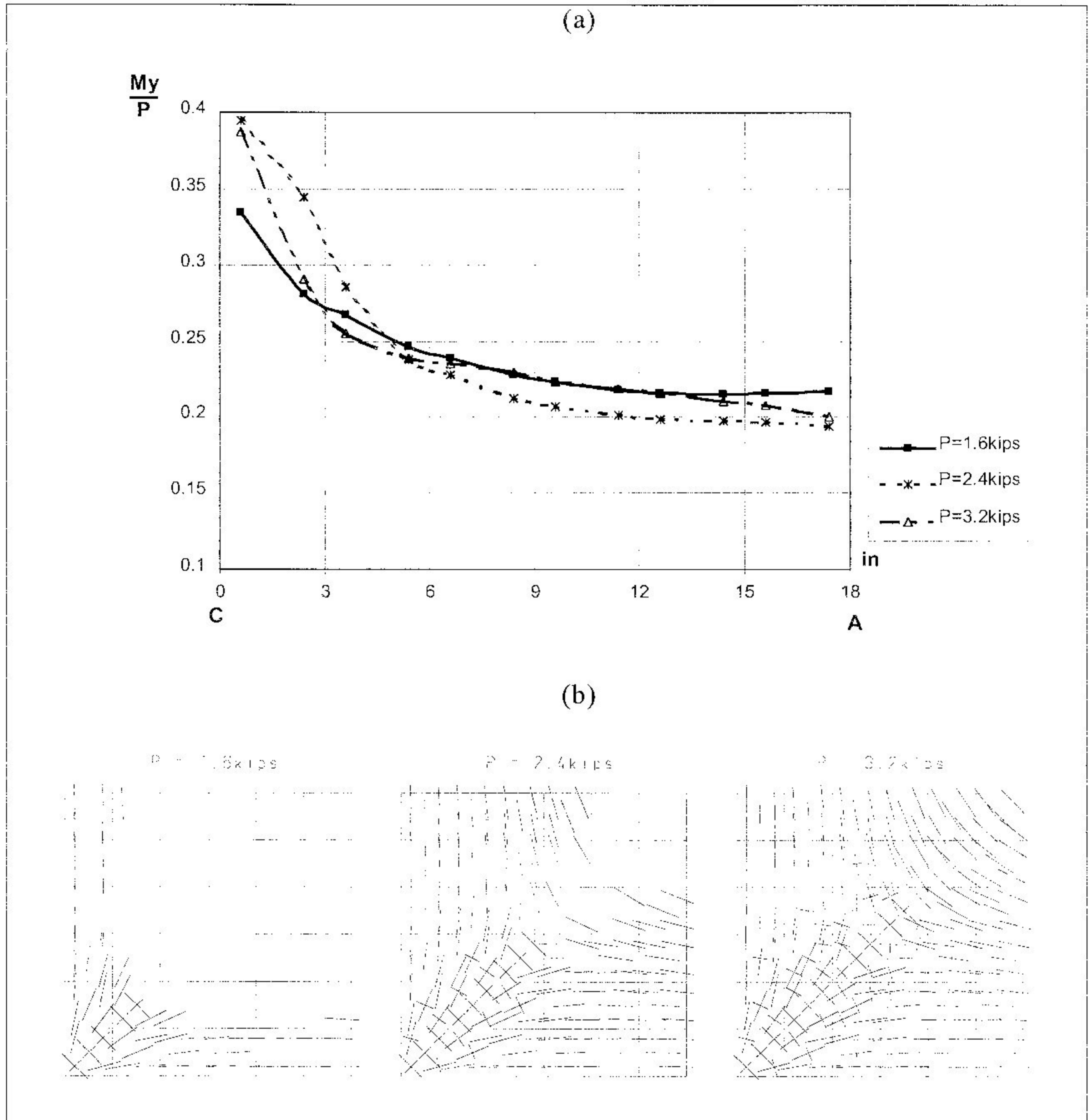


Figura 4.17 – (a) Variação de M_y/P ao longo de AC; (b) Panorama da fissuração para $P=1.6, 2.4$ e 3.2 kips.

4.4 Laje apoiada no contorno

A figura 4.18 apresenta a malha de elementos finitos utilizada na presente análise e na análise de Ramaswamy *et al* (1995) para a laje testada experimentalmente por Regan (1986) *apud* Ramaswamy *et al* (1995). As características do modelo constitutivo para o concreto e do elemento finito utilizado por Ramaswamy são os mesmos descritos no exemplo do item 4.2. Na figura 4.18 também pode ser visto o detalhamento das camadas utilizado.

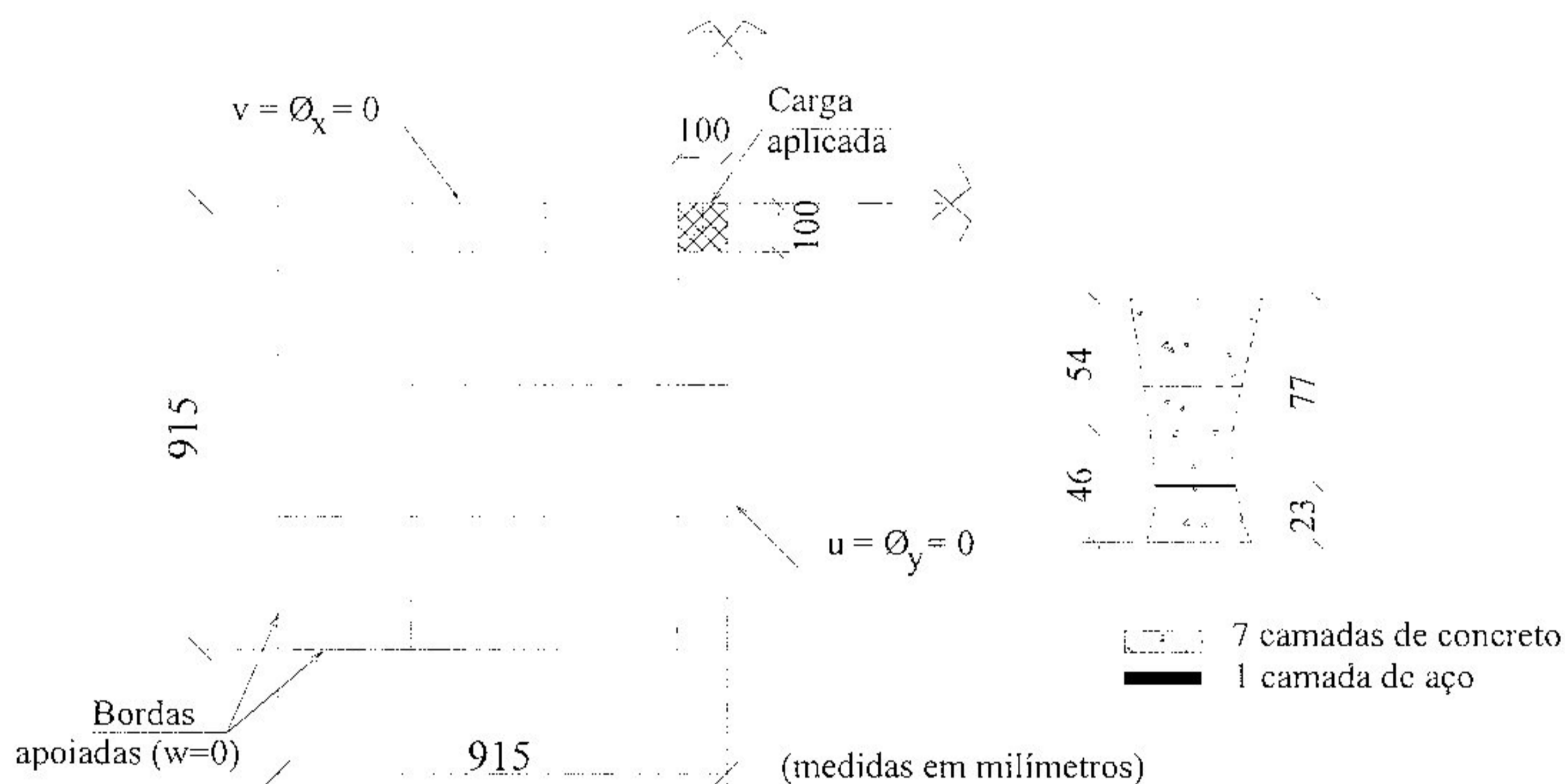


Figura 4.18 – Laje apoiada no contorno

As características dos materiais utilizados por Ramaswamy foram: $f_c=25\text{MPa}$, $f_t=1.6\text{ MPa}$ para o concreto e $f_s=500\text{ MPa}$ para o aço. Como não foi apresentado nenhuma indicação dos módulos de elasticidade adotou-se para o concreto $E_c=23500\text{ MPa}$ obtido de acordo com ACI 363 (1992) e para o aço $E_s=210000\text{ MPa}$. A armadura tem a mesma distribuição nas duas direções com taxa geométrica de 1.2% em relação a área útil.

Dentre os modelos constitutivos disponíveis, foram analisados o modelo de concreto e o modelo elastoplástico que utiliza como critério de escoamento a superfície de von Mises modificada associado ao modelo de dano.

Nos modelos de concreto adotou-se para a fissuração o modelo que permite a formação das fissuras em duas direções fixas ortogonais e para o

comportamento pós fissuração o modelo de amolecimento exponencial com a energia de fratura $G_f=6.6 \times 10^{-4}$ kN/cm obtida de acordo com van Mier (1997). Para o fator de retenção de cisalhamento β , utilizou-se o valor constante de 0.85 e valores variáveis adotando-se para K, 0.5, 1.0, 1.5 e ∞ .

No modelo elastoplástico adotou-se para tração, o comportamento elastoplástico perfeito com módulo de rigidez após o escoamento igual a um milésimo do módulo de elasticidade e para compressão, o comportamento elastoplástico com encruamento isotrópico através do diagrama multilinear de tensão-deformação, que reproduz a simplificação proposta pela NBR6118. No modelo de dano os parâmetros fornecidos foram $r_o=0.0033$, $A=0.578$ e $n=4.688$, este último considerando que o dano em compressão inicia-se para 30% da tensão de resistência à compressão da mesma forma que considerado para o início das deformações plásticas no modelo elastoplástico.

O carregamento foi aplicado em incrementos constantes de 1.25 kN. O algoritmo para a solução numérica e as demais condições de incrementação foram as mesmas do exemplo anterior.

Mais uma vez avaliou-se os resultados com a variação do número de pontos de Gauss utilizado para a integração numérica e com a variação das tolerâncias adotadas para os mesmos critérios de convergência utilizados nos exemplos anteriores.

A carga de ruptura obtida no experimento foi de 178 kN e na análise de Ramaswamy 146 kN, em ambos os casos por esmagamento do concreto na região central. Segundo este, esta diferença poderia ser justificada pelo estado de compressão triaxial que se desenvolve na ligação com o pilar resultando num aumento da capacidade resistente. Tal comportamento não é caracterizado na análise numérica, pois com a utilização de elementos de casca a tensão normal à superfície é nula, resultando numa ruptura prematura. O autor fez outras análises considerando ou não o *tension stiffening* e o *compression softening*. Ao se desconsiderar o *tension stiffening*, a ruptura passou a ser determinada pelo escoamento da armadura sem esmagamento do concreto, com redução de 10% na carga de ruptura, enquanto que nenhuma modificação significativa ocorreu com a omissão do *compression softening*. Com estes resultados, Ramaswamy

ressalta a importância de se incluir o *tension stiffening*, o que aumenta a capacidade de carga da estrutura. Quanto ao amolecimento à compressão, segundo ele, sua contribuição é efetiva quando a estrutura está completamente fissurada e o esmagamento ocorre numa região anteriormente fissurada, e, já em casos como este, com fissuração localizada e a ruptura resulta do esmagamento do concreto numa região anteriormente não fissurada, o seu efeito não é significativo.

A curva carga-deslocamento obtida na presente análise para o ponto central é apresentada na figura 4.19.

Nos modelos de concreto, para tolerância de 1% para d_{tnrm} e r_{dnrm} e utilizando a integração com 5 e 2x2 pontos de Gauss a solução deixou de convergir para cargas no início do intervalo de fissuração. Alterando a tolerância para 5%, a análise com 5 pontos passou a convergir até o número de incrementos definido como limite e a análise com 2x2 pontos permaneceu no intervalo de fissuração após 160 incrementos definidos como limite. As análises utilizando 3x3 pontos de Gauss evoluíram sem apresentar dificuldades de convergência até o parâmetro de carga limitado pela análise para ambas as situações de tolerância.

Nos modelos elastoplásticos o comportamento observado através da curva carga-deslocamento no centro da laje foi essencialmente o mesmo durante toda a história do carregamento, independentemente da tolerância e do esquema de integração admitidos.

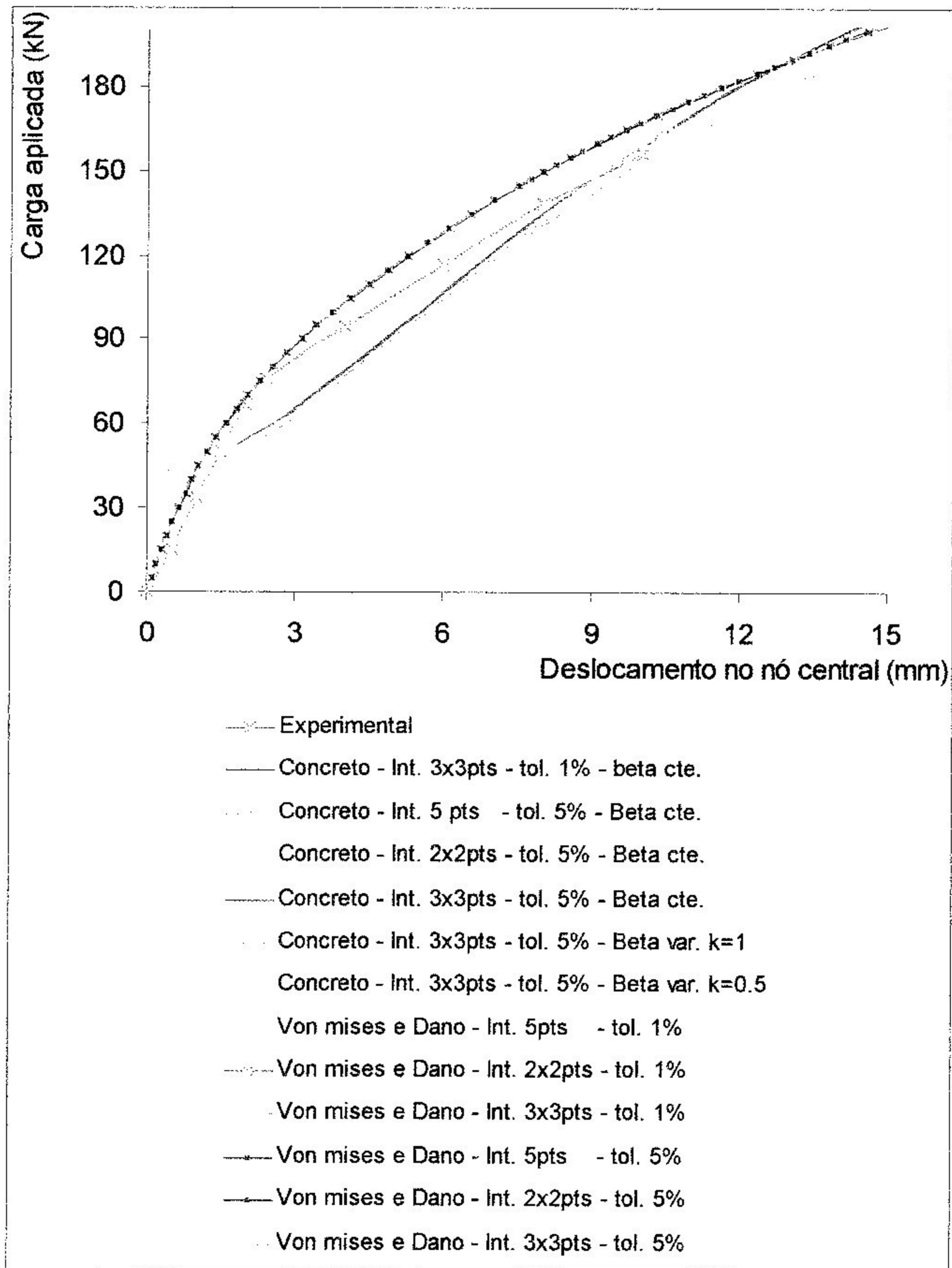


Figura 4.19 – Relação entre carga e deslocamento no centro da laje.

Nos modelos de concreto, a curva apresenta, após a fase elástica, o trecho em há a redução da rigidez devido a fissuração e o comportamento praticamente linear para os níveis de carga seguintes até que se atingiu um patamar definido devido o escoamento da camada de aço. As curvas para o modelo em que se admitiu a variação do fator de retenção de cisalhamento com a deformação apresentam um comportamento mais flexível, distanciando das demais a partir da carga de 120 kN, atingindo o patamar para um nível de carga menor. É

interessante observar que este foi o primeiro exemplo em que foi observada uma variação do comportamento carga-deslocamento com a utilização de β variável.

Nos modelos elastoplásticos associados ao dano a curva apresenta a redução gradual da rigidez após a fase elástica, reproduzindo o comportamento admitido pelo modelo, ou seja, o comportamento não-linear na tração e na compressão. O comportamento elastoplástico perfeito admitido para o concreto neste modelo resulta numa estrutura bastante dúctil em que a convergência não foi alcançada para níveis de carga elevados em função do escoamento da camada de aço. Comparado com o modelo de concreto com fator de retenção de cisalhamento variável observa-se que, neste caso, o escoamento do aço ocorreu para um nível carga inferior pois as tensões são transferidas para a camada de aço mais rapidamente. A figura 4.20 mostra que para a carga de 180kN uma maior porção da laje atingiu o escoamento no modelo de concreto.

A figura 4.20 mostra a condição verificada nos pontos de Gauss para ambos os modelos para a carga de 180kN. Para o modelo de concreto, onde a situação representada corresponde a ruptura decorrente da fissuração onde há solicitações de tração, é interessante observar a fissuração radial típica de ruptura por punção. Para os modelos elastoplásticos associados ao dano, a ocorrência do escoamento está representado pela letra Y (*yield*). Nestes casos observa-se que praticamente em todas as camadas de concreto por toda a laje foi verificado o escoamento. Os resultados apresentados na figura são para as análises com 3x3 pontos de Gauss e com tolerância de 5% para os critérios de convergência citados.

Em qualquer modelo, no entanto, a ruptura por esmagamento não foi detectada em função das suas deficiências. No modelo de concreto a análise evoluiu até níveis de carga bem elevados pois mesmo após o escoamento da camada de aço as camadas de concreto são capazes de absorver tensões de compressão. O modelo elastoplástico associado ao dano, apesar de representar a degradação da rigidez do concreto comprimido, resultou numa análise com um comportamento dúctil em função do comportamento elastoplástico perfeito admitido para ambos os materiais, atingindo também, cargas bem elevadas.

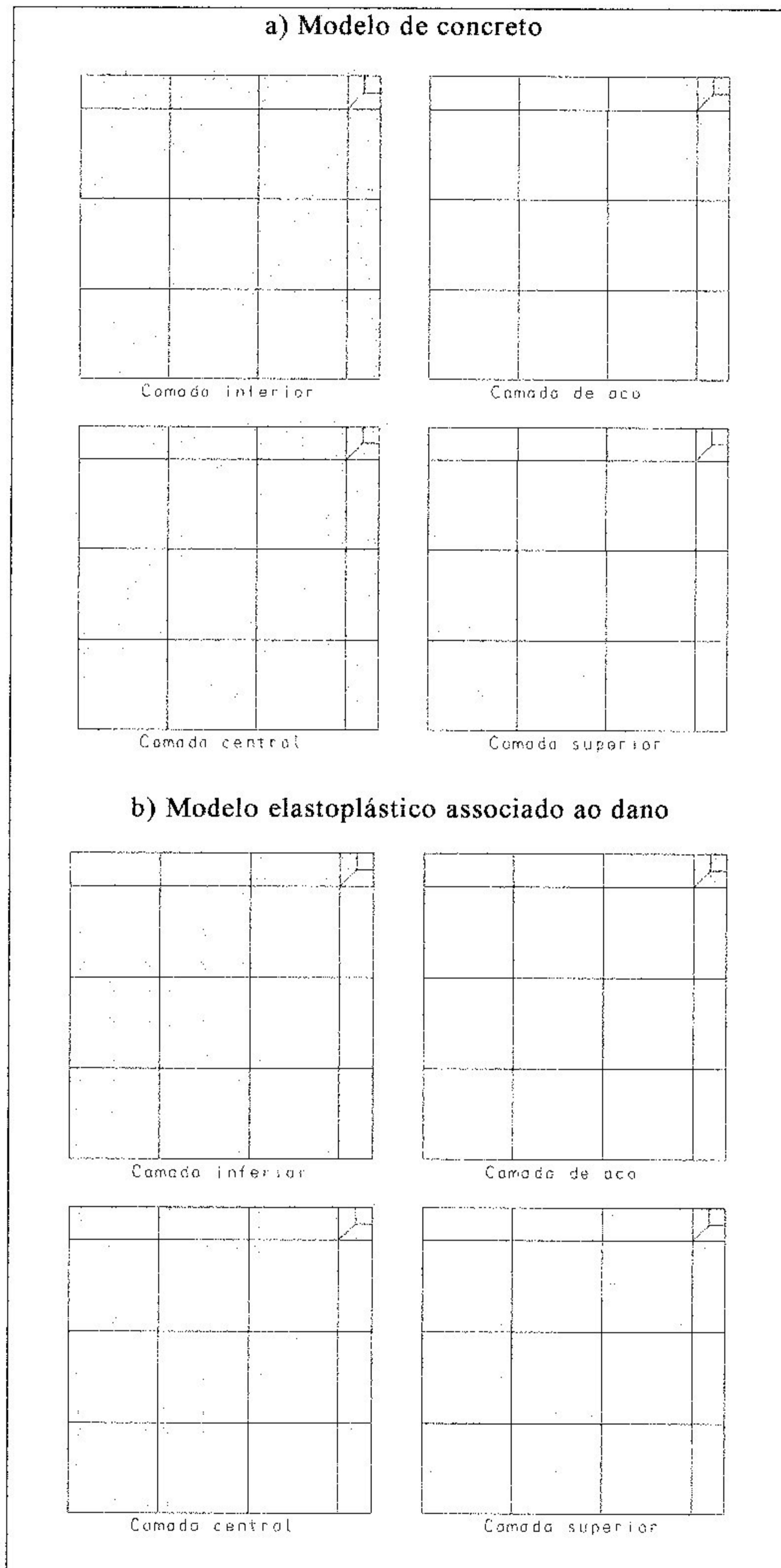


Figura 4.20 – Verificação nos pontos de Gauss para carga de 180kN, admitindo para as camadas de concreto: a) Modelo de concreto; b) Modelo elastoplástico.

Além das deficiências observadas nos modelos constitutivos, Ramaswamy salienta que para a obtenção de um modelo que se aproxime mais do

comportamento real da estrutura seria necessário uma análise tridimensional da laje, utilizando um número adequado de elementos sólidos ao longo da espessura da laje a fim de caracterizar a propagação da fissuração. O uso de elementos de treliça para modelar o aço e elementos adicionais para modelar o comportamento na interface concreto-aço levaria a uma análise extremamente onerosa. Uma alternativa seria utilizar elementos sólidos em regiões submetidas ao estado triaxial de tensões, com uma transição gradual para elementos estratificados de casca quando a tensão de cisalhamento normal for pequena em relação à tensão de cisalhamento no plano.

Noguchi e Schonobrich (1993), sugerem o modelo apresentado na figura 4.21. Na região junto ao pilar devem ser utilizados elementos sólidos em número adequado ao longo da espessura da laje a fim de caracterizar a propagação da fissuração. Noguchi realça a importância do conhecimento prévio do modo de fissuração que se desenvolverá para que os elementos tridimensionais sejam dispostos na região de propagação da fissuração devido a punção. Um elemento de transição capaz de reduzir a um o número elementos sólidos ao longo da espessura deve preceder um elemento de transição entre os elementos sólidos e os de casca. Este elemento deve possuir em uma face os graus de liberdade dos elementos sólidos e na outra dos elementos de casca.

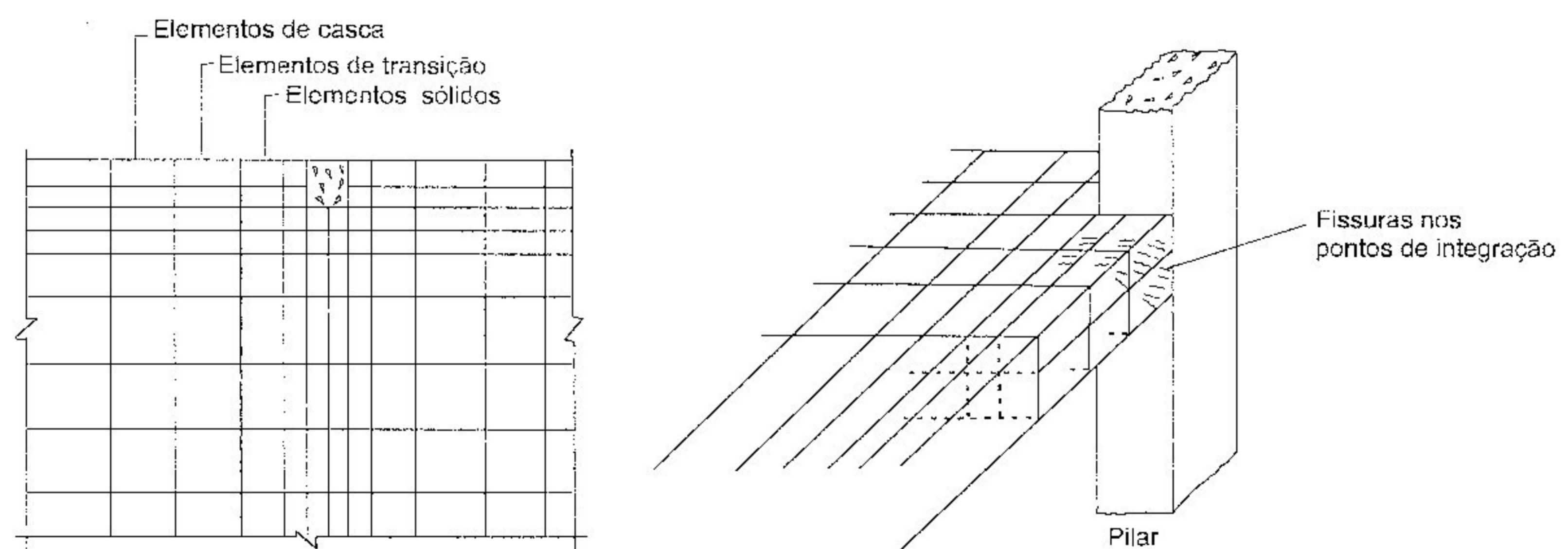


Figura 4.21 – Modelo sugerido por Noguchi *et al* (1993)

4.5 Análise dos resultados

Neste capítulo foi feito um estudo, avaliando o desempenho dos modelos disponíveis no programa utilizado na representação do comportamento do concreto armado. Com base no que foi apresentado, podemos sintetizar as seguintes observações:

- Nas análises utilizando o modelo para o concreto é aconselhável iniciar a análise aplicando incrementos constantes e utilizar o algoritmo de Newton Raphson Modificado associado com o *line search* para obter a convergência da solução;
- O tamanho destes incrementos devem ser tão pequeno quanto possível;
- Nos exemplos em que foi possível avaliar as tolerâncias utilizadas, não foi observada diferença significativa na curva carga-deslocamento ao se adotar 1% ou 5% para os critérios de convergência em força (rdnrm) e em deslocamento (dtnrm). No entanto, para algumas análises em que foi utilizado o modelo de concreto, a convergência só foi alcançada ao adotar 5%.
- A escolha do esquema de integração influenciou as análises em que foram utilizados elementos estratificados com o modelo de concreto. No terceiro exemplo, laje apoiada nos cantos, a análise da deformada denunciou a ocorrência de mecanismos. No quarto exemplo, laje apoiada no contorno, as análises utilizando 2x2 e 5 pontos de integração apresentaram problemas de convergência. Neste exemplo, nos casos em que os modelos elastoplásticos foram associados às camadas de concreto, o comportamento observado através da curva carga-deslocamento no centro da laje foi essencialmente o mesmo durante toda a história do carregamento, independentemente do esquema de integração admitido.
- Nos exemplos de viga, utilizando o elemento estratificado, a escolha do número de pontos de integração não apresentou-se crítica. O comportamento observado foi o esperado, ou seja, solução ligeiramente mais rígida para integração com 3x3 pontos, mais flexível para 2x2 pontos e intermediária para 5 pontos. Ao contrário, utilizando o elemento

plano na discretização do concreto, a análise deixou de convergir prematuramente utilizando integração com 2x2.

- Os resultados aqui apresentados sugerem a superioridade das análises utilizando elementos planos com o modelo biaxial de concreto e elementos de treliça com o modelo elastoplástico para o aço nas análises de viga.
- No terceiro exemplo, laje apoiada nos cantos, os resultados, através da observação da curva carga-deslocamento, não mostraram-se sensíveis a variação do número de camadas dos elementos estratificados.
- Nos modelos de concreto os resultados não foram sensíveis a opção que permite o desenvolvimento de fissuras não ortogonais. A escolha do parâmetro β não apresenta-se crítico e as curvas carga-deslocamento foram essencialmente as mesmas, exceto para o último exemplo em que observou-se o comportamento esperado: um comportamento mais flexível ao permitir que o parâmetro fosse reduzido com a abertura das fissuras. O modelo de amolecimento exponencial mostrou-se mais adequado, pois a determinação da curva do amolecimento é função da energia de fratura, uma propriedade do material, e da área do elemento.

Não foram realizadas análises em número suficiente para se fazer afirmações conclusivas. Muito tempo despendeu-se na definição dos parâmetros de entrada de cada modelo, principalmente do modelo específico para o concreto, que apresentou-se bastante dependente do problema analisado, para que se chegasse a resultados aparentemente satisfatórios quando comparados com dados experimentais.

Do que foi apresentado, pode-se dizer que as análises utilizando o elemento estratificado, com o modelo de concreto para as camadas de concreto e o modelo elastoplástico de von Mises para as camadas de aço, mostram-se satisfatórias na determinação de dois fenômenos dominantes no comportamento não-linear de lajes, a fissuração e o escoamento das armaduras. Assim, quando o objetivo da análise não for a determinação de carregamentos limites, mas a representação do comportamento da estrutura em serviço, podem fornecer

resultados mais próximos dos reais.

Os modelos elastoplásticos associados as camadas de concreto podem conduzir a resultados também satisfatórios nas análises em que o comportamento de compressão for dominante. Os resultados podem ser melhorados quando considerado juntamente com o modelo de Dano, principalmente ao alterar o parâmetro que controla o início do dano na compressão.

CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO: LAJES COGUMELO

O sistema estrutural de lajes sem vigas, lajes cogumelo, possui uma série de vantagens como possibilitar uma grande liberdade para disposição das alvenarias e divisórias, reduzir a altura total da edificação, simplificar as instalações além de facilitar a execução de formas. No entanto a ausência da rigidez proporcionada pelas vigas aumenta os deslocamentos transversais que são bastante influenciados pela fissuração. A ocorrência de deslocamentos que ultrapassem determinados limites podem causar desconforto aos usuários, danos aos elementos não-estruturais e interferência no funcionamento da própria estrutura.

A NBR 6118 (1980) permite o cálculo do deslocamento transversal de lajes considerando a rigidez do concreto não fissurado (estádio I) e o de vigas considerando a rigidez do concreto fissurado (estádio II). Porém, as peças fletidas de concreto armado estão parte no estágio I e parte no estágio II. Nas seções mais solicitadas geralmente há fissuração mas à medida que se afasta dessas regiões tem-se seções não fissuradas. Desta forma é desejável considerar um grau de fissuração intermediário entre o da seção não fissurada e da completamente fissurada. O ACI 318 (1992) recomenda uma expressão para determinação de um momento de inércia efetivo para o cálculo dos deslocamento transversais de vigas, mas também tem sido utilizado para calcular o deslocamento de lajes parcialmente fissuradas, Scalon e Murray (1982) *apud* Silvany (1996).

Atualmente não é raro o cálculo dos deslocamentos elásticos iniciais em lajes de concreto armado utilizando o método dos elementos finitos nos

escritórios de projeto. Para determinação do deslocamento real obtido em função da redução de rigidez devido a fissuração, analogamente ao que é feito para determinar os deslocamentos decorrentes da fluência e da retração, são utilizados multiplicadores nos deslocamentos elásticos. No entanto este procedimento exige do projetista um grande conhecimento da relação entre o comportamento da estrutura e os resultados obtidos.

No outro extremo está a aplicação de análises não-lineares cujo emprego é bastante oneroso e praticamente inviável para uso corrente em escritórios de projeto. Assim, estas análises devem ser usadas como referência para outras mais simplificadas. Um estudo parametrizado que englobasse as dimensões usuais deste tipo de estrutura e as características dos materiais em análises não-lineares, utilizando um modelo constitutivo adequado, permitiria a obtenção de um fator redutor da rigidez elástica para ser usado em análises lineares. Os deslocamentos assim obtidos estariam mais próximos dos reais.

Com este objetivo, Figueiredo Filho (1989) apresenta os valores de módulos de deformação longitudinal, recomendados por Takeya *et al* (1985), em função da resistência característica do concreto à compressão mostrados na tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Módulos de deformação fictícios do concreto

f_{ck} (MPa)	E_c (GPa)
15	14.0
18	16.6
20	17.5

Conforme apresentado no final do capítulo anterior, os resultados obtidos não apontaram um modelo adequado para representar o comportamento do concreto durante toda história do carregamento (estado não fissurado, fissurado e estados últimos). No entanto, os resultados podem ser considerados satisfatórios para a análise da estrutura sob ação das cargas de utilização. Além disso, como também salientado, as análises consumiram um tempo além do previsto impedindo que o estudo parametrizado do pavimento fosse realizado.

Neste capítulo, como ilustração, apresenta-se um exemplo de um pavimento em laje cogumelo, analisado por Silvany (1996), utilizando o modelo de concreto e o modelo de von Mises modificado associado ao Dano para avaliação do aumento nos deslocamentos em decorrência dos efeitos da fissuração.

5.2. Laje de Silvany

O pavimento apresentado na Figura 5.1 foi analisado por Silvany (1996), que utilizou o programa de elementos finitos que incorpora uma rotina para considerar o comportamento elastoplástico do concreto armado através do diagrama momento curvatura proposto por Corrêa (1991). Todo o conteúdo apresentado neste exemplo segue exatamente as mesmas considerações feitas por Silvany.

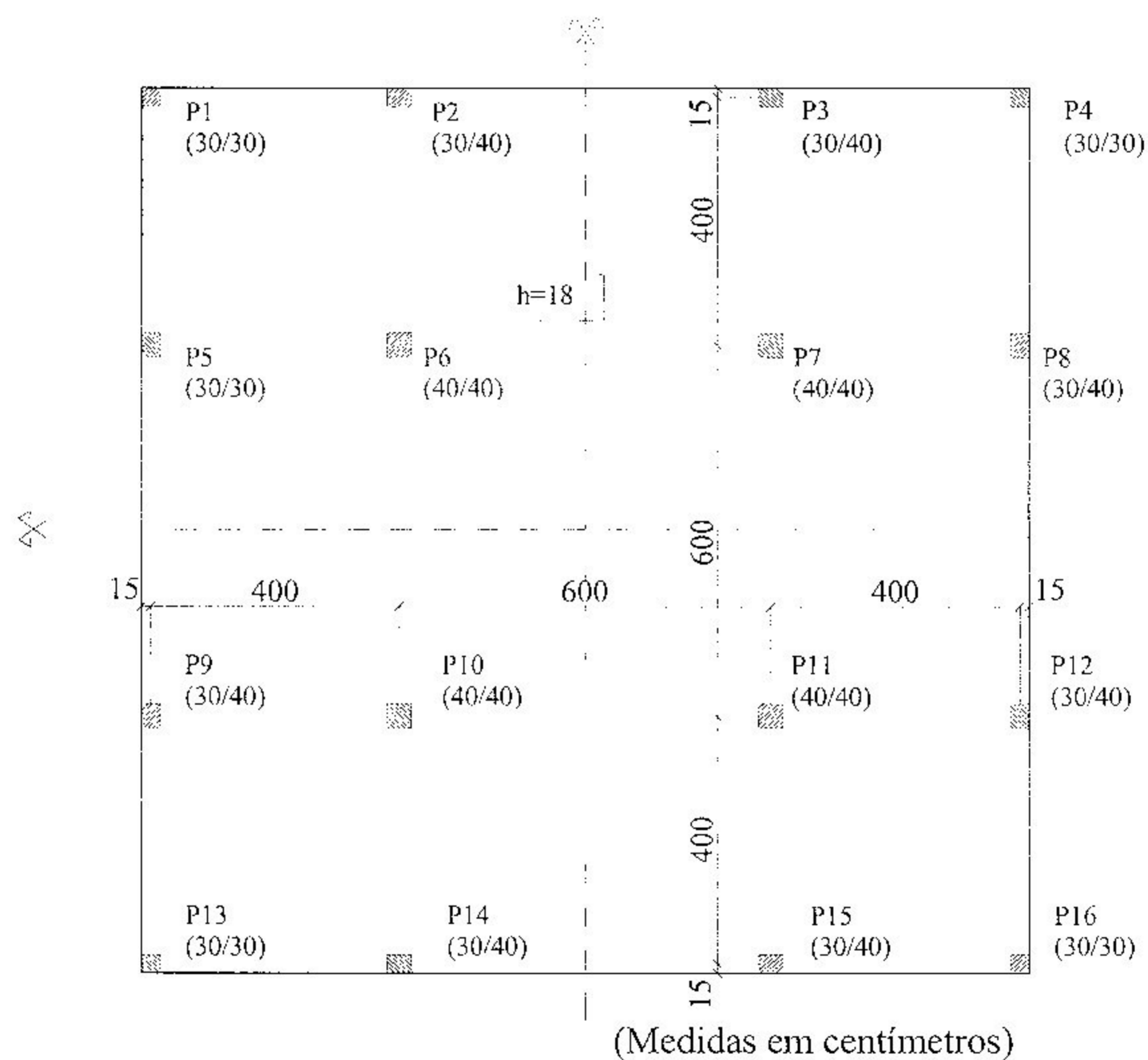


Figura 5.1 – Forma do pavimento

Para a determinação da taxa de armadura foi feita a análise linear do pavimento. Inicialmente foram realizadas análises não-lineares para uma única taxa de armadura, e, a partir de seus resultados, foi feito um refinamento da

armadura de forma que o pavimento tivesse regiões com diferentes taxas de armadura.

Para determinação da taxa inicial de armadura a partir da análise linear, o coeficiente de majoração pode ser aplicado tanto nas ações como nos esforços. Porém, nas análises não-lineares este coeficiente deve ser aplicado nas ações no início da análise, pois esta depende da história do carregamento. Conforme a NBR 8681 (1984) o coeficiente de ponderação das ações, γ_f , é considerado como um produto de dois outros fatores: γ_{f1} , que leva em conta as incertezas das ações e γ_{f3} , que leva em conta as incertezas dos esforços. Assim, nas análises lineares e não-lineares todas as ações foram majoradas de $\gamma_{f1}=1.25$ como quantificado foi por Corrêa (1991). Para determinação da solicitação de cálculo majoram-se os esforços obtidos de γ_{f3} ($\gamma_{f3}=1.12$ para $\gamma_f=1.4$). Na determinação dos deslocamentos para verificação dos estados limites de utilização são utilizadas ações de serviço em que o coeficiente γ_f vale um.

A laje analisada possui 18 cm de espessura. O concreto utilizado é o C20, coeficiente de Poisson $\nu=0.2$ e módulo de elasticidade $E_c=2.88 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, calculado conforme indicação da NBR6118. O aço utilizado é o CA-50 com módulo de elasticidade $E_s=2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$. A resistência do concreto a tração é calculada a partir do f_{ck} conforme indicação da NBR6118 onde $f_{tk}=0.06f_{ck}+0,7$ [MPa]. O carregamento do pavimento é dado por:

Ações permanentes:	peso próprio	4.5 kN/m ²
	Revestimentos	2.0 kN/m ²
	Paredes	1.8 kN/m ²
Ações variáveis:		2.0 kN/m ²
Total:		<u>10.3 kN/m²</u>

Devido a dupla simetria, somente um quarto do pavimento foi discretizado. A malha utilizada é constituída de 1024 elementos retangulares de casca estratificados. Em todas as análises os elementos foram estratificados em nove camadas, sendo oito de concreto e uma de aço nas análises com uma única taxa de armadura, e nas análises com armadura nas faces tracionadas e

comprimidas, sete de concreto e duas de aço. As camadas de aço foram posicionadas ao longo da altura considerando a altura útil de 16cm. Os apoios nos pilares foram representados pelas restrições às translações (verticais e horizontais) dos nós, figura 5.2.

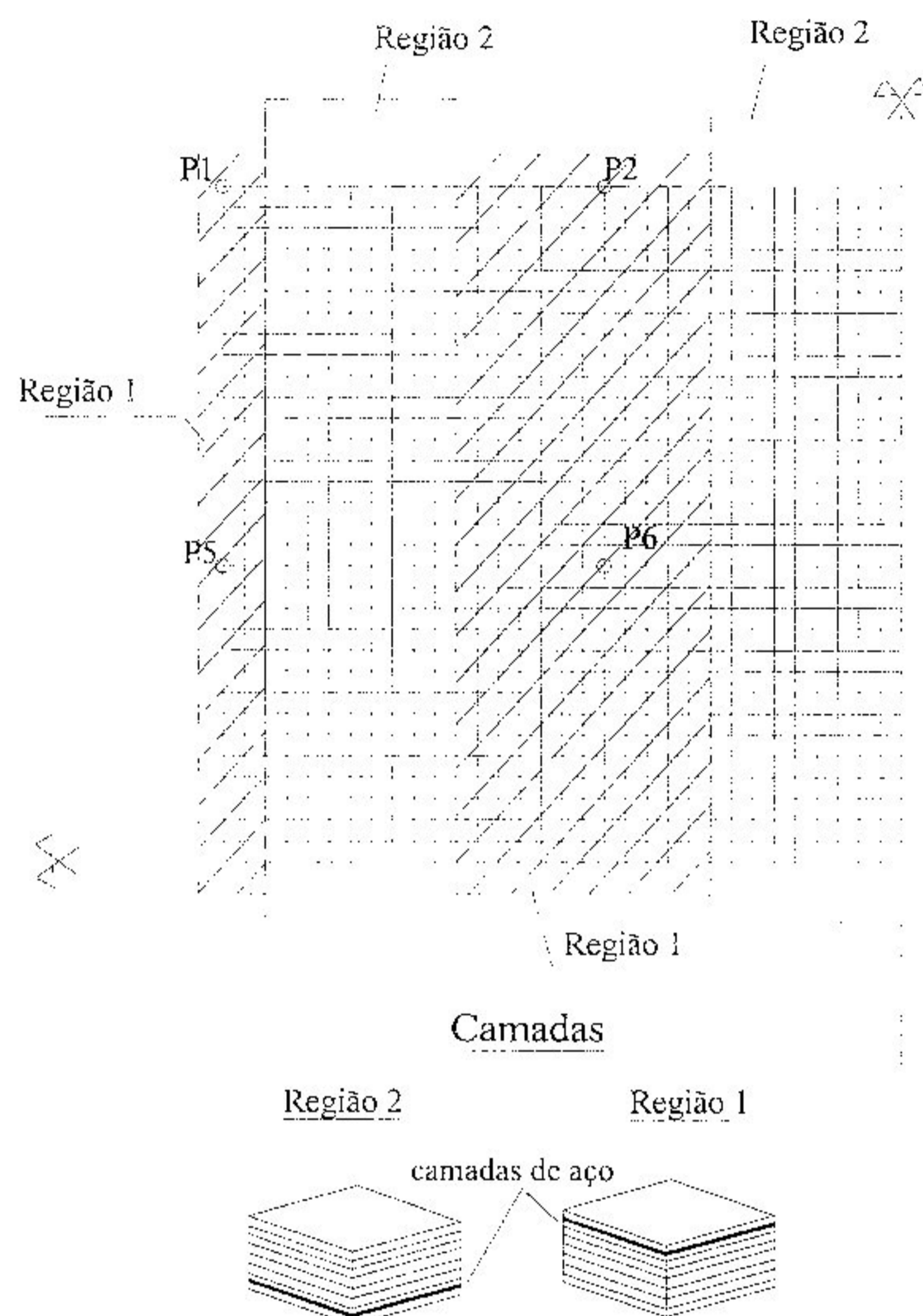


Figura 5.2 – Malha utilizada nas análises

A distribuição dos momentos obtidos na análise linear foi semelhante à da análise de Silvany. Na figura 5.3 pode ser visto a distribuição dos momentos m_x . Os maiores momentos ocorrem junto aos pilares internos, e na análise de Silvany da ordem de 60 kN.m/m. Como estes momentos foram obtidos com as ações majoradas de 25%, o momento 60kN.m/m corresponde ao momento característico de 48 kN.m/m. Para considerar a plastificação do concreto foram adotadas reduções de tal momento em 20%, 30%, 40% e 50% nas análises não-lineares.

Fazendo a redução de 20% no momento de 48kN.m/m resulta em um momento de 38,4kN.m/m que deve ser resistido por uma armadura de $8,40\text{cm}^2/\text{m}$. Esta primeira aproximação considera que a armadura em qualquer região da laje não supera este valor, sendo a armadura posicionada nas faces

tracionadas. Na figura 5.2 também podem ser vistos a discretização para as análises não-lineares.

A redução de 30% do momento máximo resulta num momento de 33,6kN.m/m, que é resistido por uma área de armadura de 7,35cm²/m. Para redução de 40%, o momento é de 28,8kN.m/m que é resistido por uma área de armadura de 6,30cm²/m e finalmente a redução de 50 % resulta num momento de 24kN.m/m que é resistido por uma área de armadura de 5,04cm²/m.

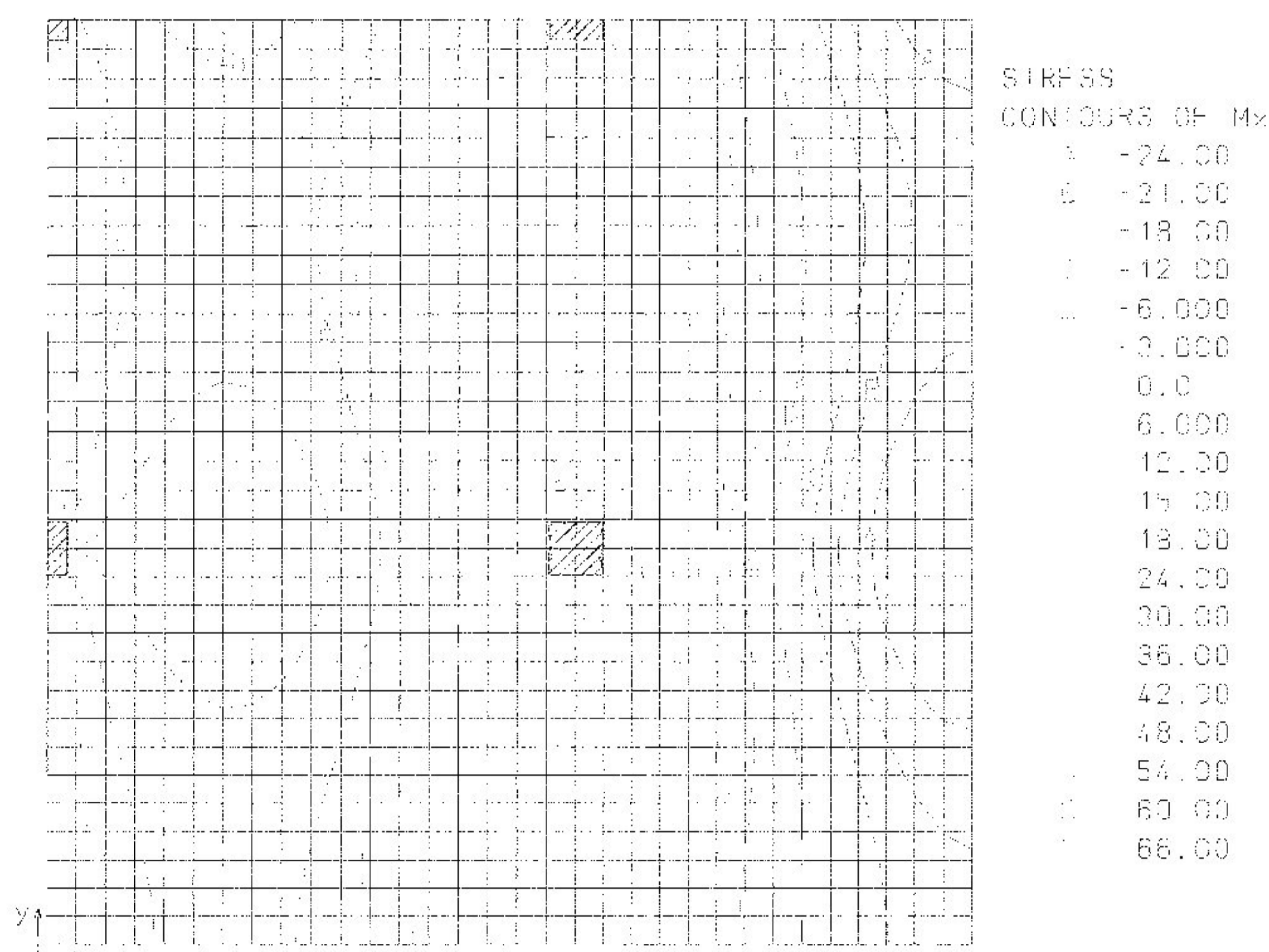


Figura 5.3 – Momento mx – Análise linear [kN.m/m]

As análises não-lineares foram realizadas considerando para o concreto, o modelo biaxial de concreto e o modelo de von Mises modificado associado ao Dano, e para o aço, o modelo elastoplástico perfeito de von Mises.

No modelo biaxial de concreto adotou-se o modelo de fissuras fixas ortogonais e a curva de amolecimento exponencial com $G_f=0.06$ kN/m obtido de acordo com o CEB-FIP (1991), que corresponde ao concreto C20, cujo diâmetro máximo do agregado não supere 16 mm. O valor adotado para o parâmetro β foi de 0.85.

O carregamento total foi aplicado em dez incrementos constantes permitindo-se vinte e cinco iterações por incremento. No caso de dificuldade de convergência permitiu-se que o incremento fosse reduzido em até 5 vezes. As

tolerâncias foram 5% para $dtnrm$ e 5% $rdnrm$ e a integração numérica foi feita com 5 pontos de Gauss. Adotou-se o algoritmo de Newton Raphson modificado associado ao *line search*. As figura 5.4 a 5.7 apresentam as curvas de momento m_x obtidas nestas análises.

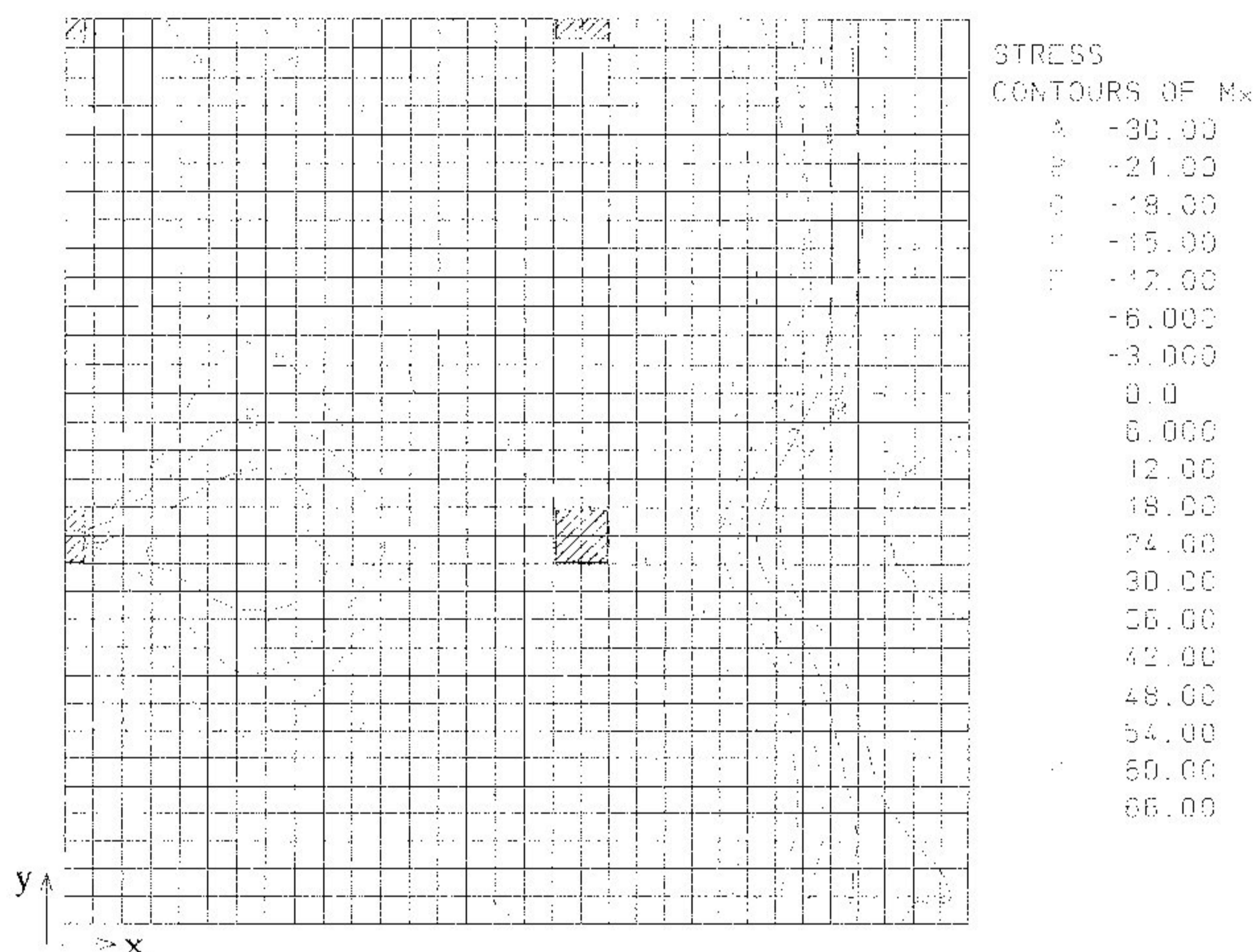


Figura 5.4 – Momento m_x – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=8.40\text{cm}^2/\text{m}$

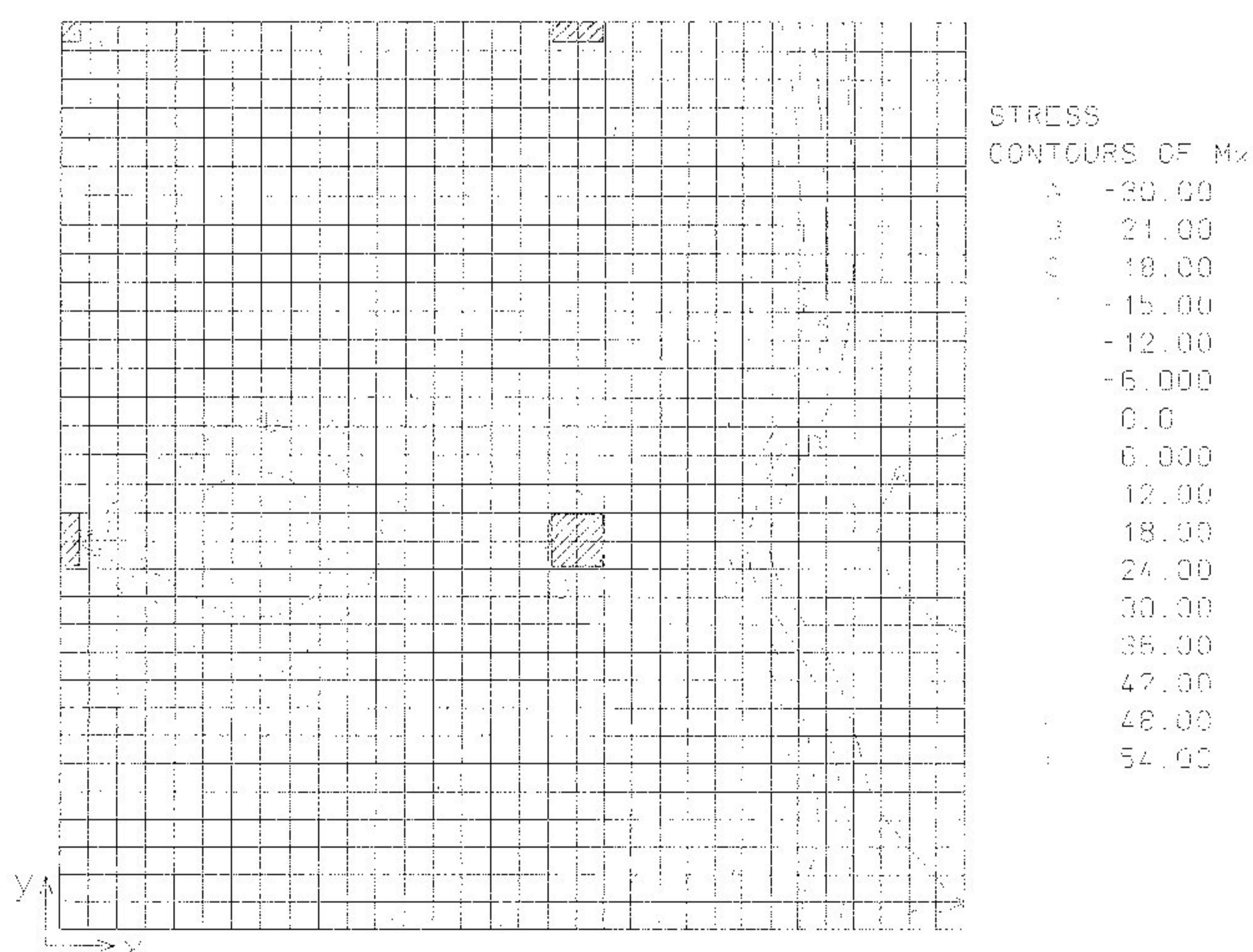


Figura 5.5 – Momento m_x – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=7.35\text{cm}^2/\text{m}$

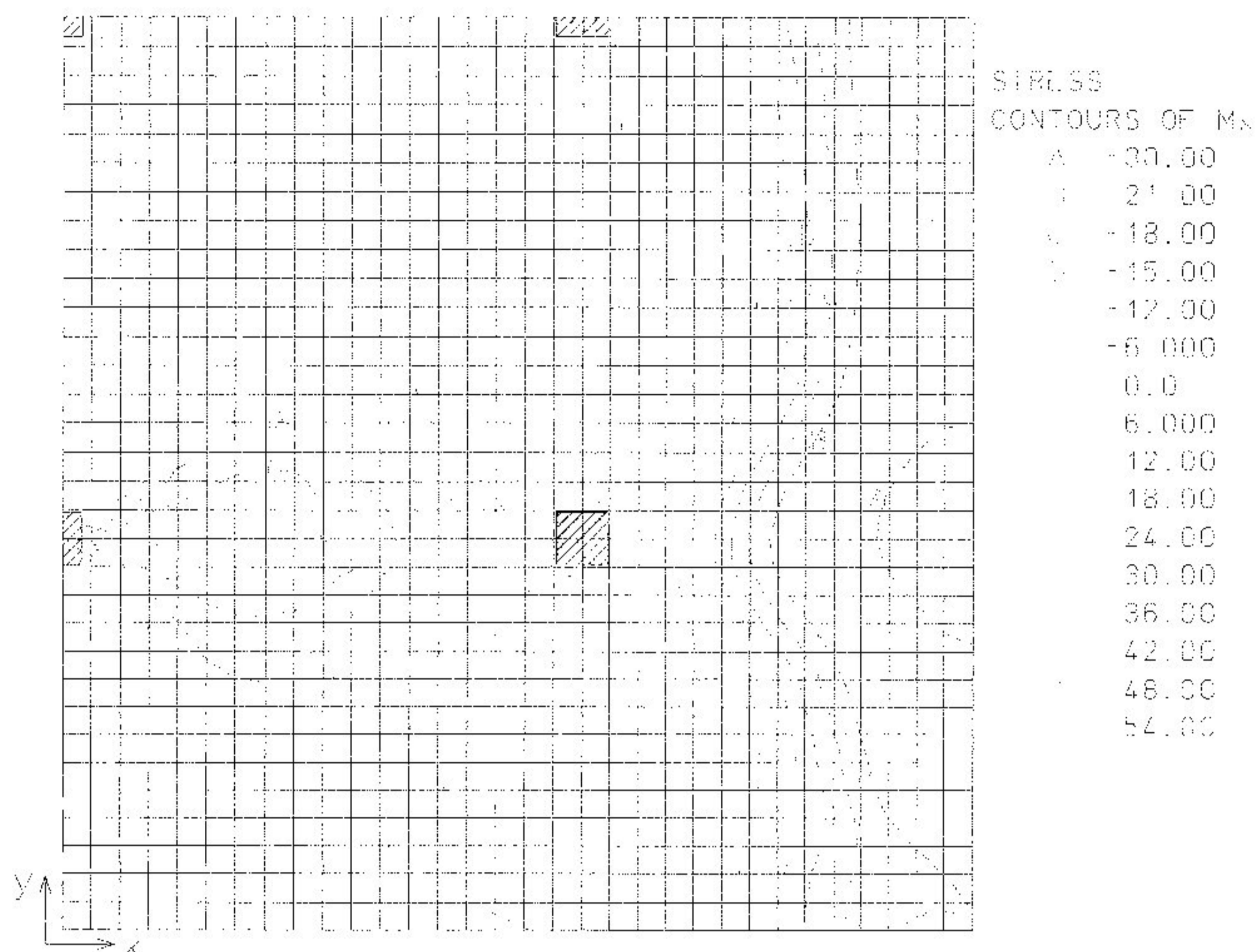


Figura 5.6 – Momento m_x – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=6.30\text{cm}^2/\text{m}$

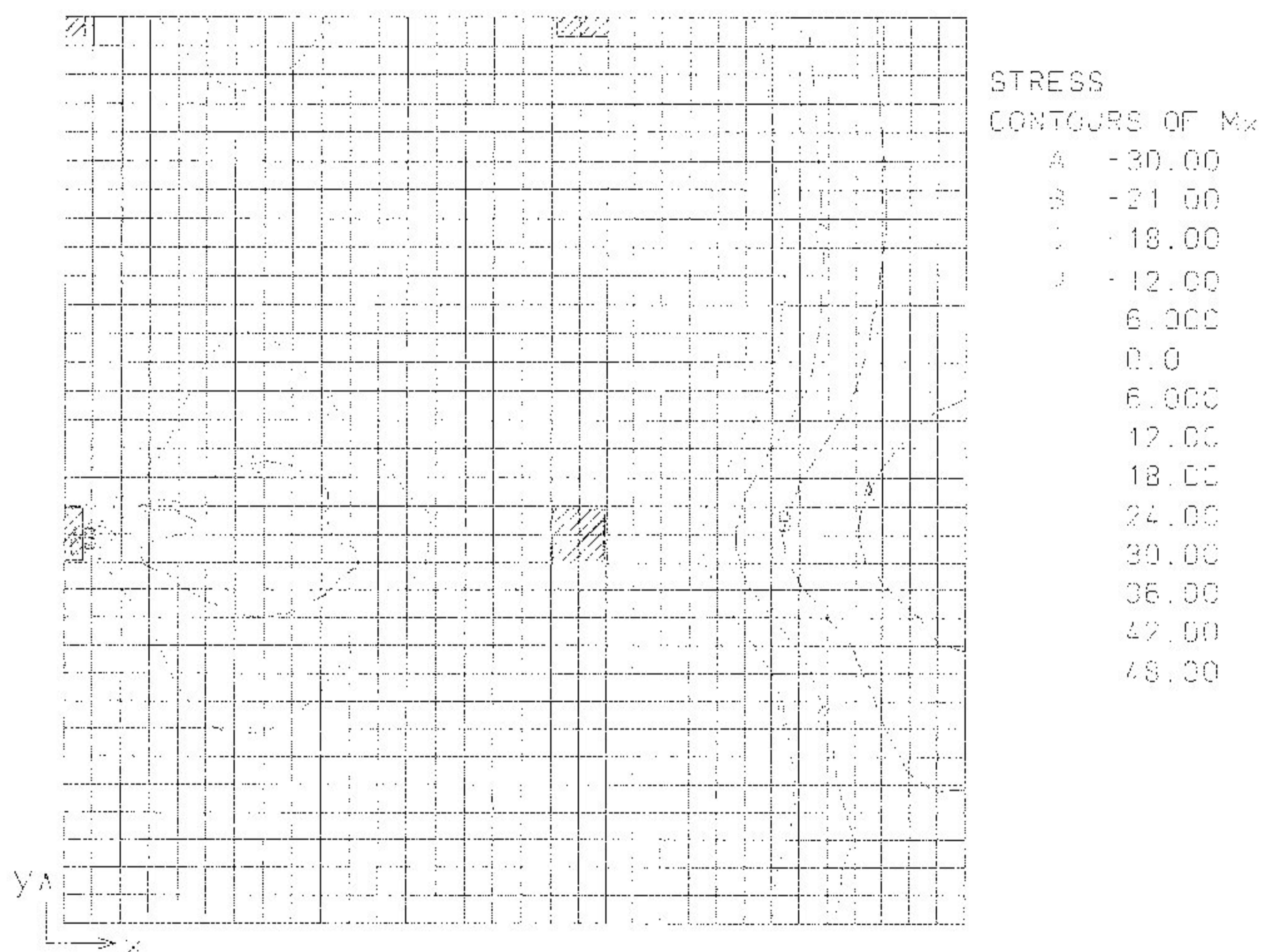


Figura 5.7 – Momento m_x – Análise não- linear [kN.m/m] – $A_s=5.04\text{cm}^2/\text{m}$

No modelo elastoplástico de von Mises considerou-se o comportamento elastoplástico perfeito na tração e elastoplástico com encruamento isotrópico na compressão através do diagrama multilinear de tensão-deformação que reproduz

a simplificação proposta pela NBR 6118. Para o modelo de dano de Oliver os parâmetros adotados foram $r_o=0.354$, $A=0.605$ e $n=10.32$.

Na tabela 5.1 podem ser vistos os deslocamento máximos obtidos nestas análises e nas análises de Silvany. Na análise linear o deslocamento máximo foi de 0.90cm enquanto que o obtido por Silvany foi de 0,92 cm.

Tabela 5.1 – Comparação dos deslocamentos máximos obtidos

Área de aço (cm ² /m)	Presente análise (cm)		Análise Silvany (cm)
	Modelo de concreto	Modelo elastoplástico (Dano e von Mises)	
8.40	1.71	1.61	2.23
7.35	1.81	1.70	2.60
6.30	1.92	1.77	3.22
5.04	2.09	1.87	4.88

Para verificação do estado limite de utilização estes não seriam os deslocamentos utilizados pois estão majorados pelo coeficiente de segurança γ_{fl} . Neste caso, o coeficiente de ponderação das ações, γ_f , é igual a 1.0. O deslocamento final é obtido pelo somatório do deslocamento devido a ação total com o deslocamento decorrente do efeito da deformação lenta das ações de longa duração (permanente + parcela da ação variável de caráter permanente). Na combinação quase-permanente de utilização, as ações acidentais são multiplicadas pelo coeficiente ψ_2 que depende do tipo da ação [NBR 8681 (1984)].

No entanto estes deslocamentos foram apresentados pois o objetivo principal é mostrar os acréscimos nos deslocamentos decorrente da redução de rigidez por fissuração reproduzido pelos modelos constitutivos utilizados.

A comparação dos resultados exibidos na tabela permite perceber que os deslocamentos obtidos nas análises de Silvany são mais sensíveis à variação da taxa de armadura que aqueles obtidos no presente trabalho. Entre os modelos constitutivos adotados no presente trabalho a maior diferença observada foi de 11%.

No prosseguimento do estudo da estrutura, uma nova distribuição de armadura foi determinada a partir dos resultados obtidos na análise com a taxa

de armadura de $8.4\text{cm}^2/\text{m}$. Assim, a armadura foi posicionada nas faces inferiores e superiores de toda a laje conforme mostrado na Figura 5.8. O deslocamento máximo obtido com o modelo de concreto foi de 1.80cm enquanto que o obtido com o critério de von Mises modificado foi de 1.66cm . No primeiro modelo foram necessários 39 incrementos e no segundo 20.

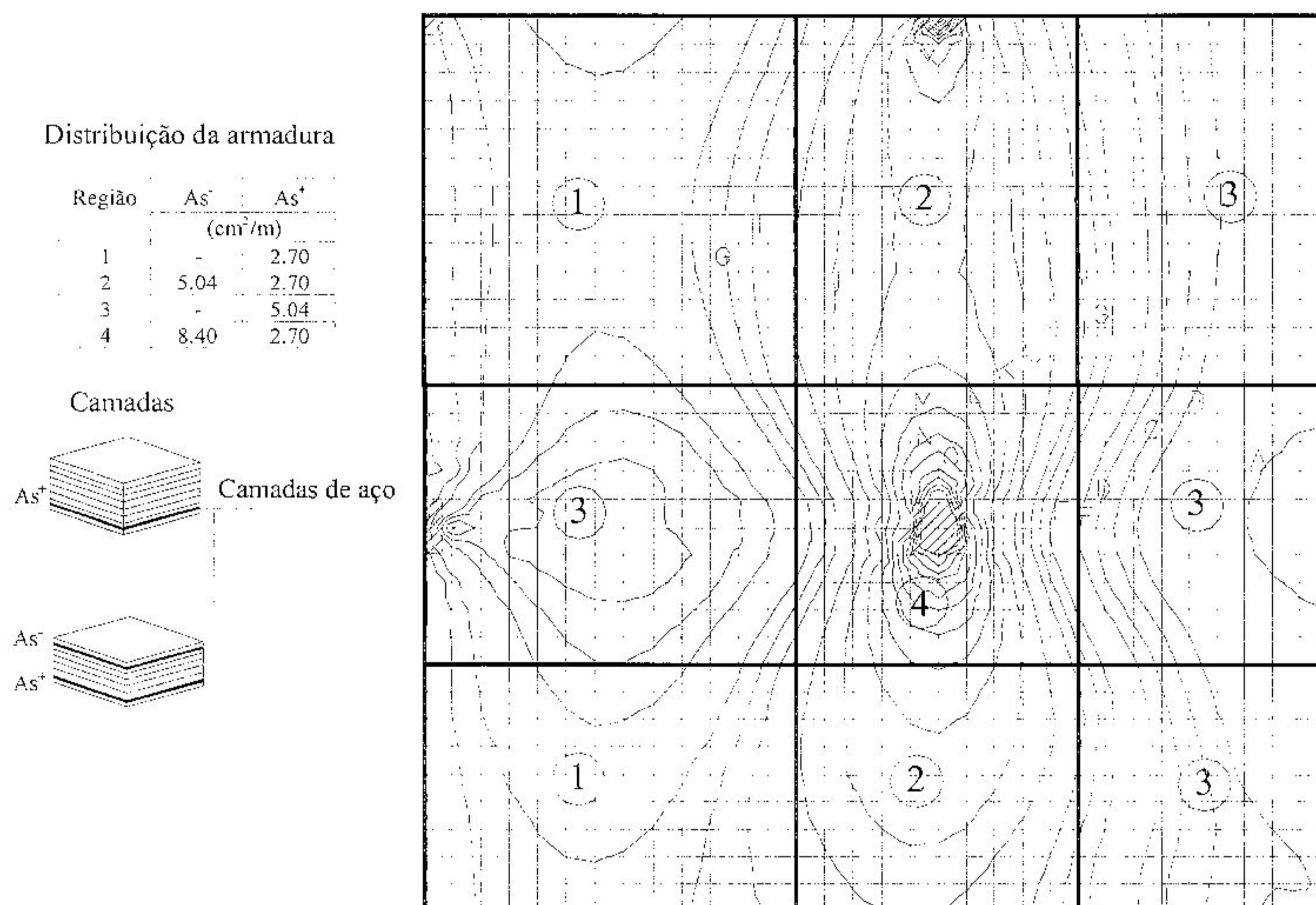


Figura 5.8 – Distribuição das armaduras nas análises com armadura positiva e negativa

Para verificação do estado limite de utilização deve-se utilizar o coeficiente γ_f igual a 1. Os deslocamento assim obtidos para as ações totais ($10,3\text{ kN/m}^2$) foram 1.22 e 1.15cm , para os modelos de concreto e elastoplástico com dano, respectivamente. Pode-se perceber que neste caso, ocorreu uma pequena redução da diferença entre os modelos pois a fissuração para este nível de carga é menor.

O procedimento completo de verificação seria acrescentar a este deslocamento a parcela da deformação lenta decorrente das ações de longa duração.

Evidentemente numa situação de projeto, o processo deve se repetir até a determinação de uma distribuição de armadura adequada que atenda aos estados

limites últimos, aos estados limites de utilização e as condições de exequibilidade e economia.

Na avaliação dos modelos empregados não é possível apresentar afirmações conclusivas pois seriam necessárias comparações com resultados experimentais.

É preciso realçar mais uma vez que o objetivo almejado ao estudar este pavimento foi avaliar os acréscimos nos deslocamentos decorrente da redução da rigidez por fissuração reproduzido pelos modelos constitutivos utilizados. Sendo assim, a representação da ligação da laje com os pilares precisa ser melhorada, pois para o resultado apresentado, o que foi feito, foi apenas restringir as translações nos nós de apoio, o que de fato representa uma aproximação grosseira. Algumas alternativas foram inicialmente testadas, como discretizar o pilar com elementos de vigas, restringir as translações verticais para os nós situados no contorno do pilar e a utilização de elementos de vigas nos elementos junto a ligação com o pilar. No entanto, devido as dificuldades de convergência que surgiram, a inclusão destas alternativas, poderiam torna-se um complicador adicional e assim não se investiu num estudo mais aprofundado. Figueiredo Filho (1989) afirma que os deslocamentos das bordas das lajes e do centro dos painéis são influenciados pela porção da laje ligada ao pilar e pelo tamanho e rigidez destes pilares. Nesta região é desejável que se utilizem elementos tridimensionais. Uma alternativa seria a utilização de um modelo semelhante ao proposto por Noguchi apresentado na seção 4.4. Cervera e Hinton (1988) incentivam o uso de elementos tridimensionais no estudo de lajes de concreto armado pois a consideração das tensões e deformações de cisalhamento pode ser significativa principalmente próximo aos apoios.

Queiroz e De Paula (1999) obtiveram resultados bastantes satisfatórios utilizando elementos sólidos na discretização de uma laje de concreto de um novo tipo de sistema misto. Neste trabalho, um modelo robusto foi desenvolvido com utilização um elemento de concreto armado com caracterização de ruptura por fissuração e esmagamento na compressão. Em função do custo do processamento destas análises, um novo modelo foi proposto utilizando parâmetros do primeiro modelo.

CAPÍTULO 6 – COMENTÁRIOS FINAIS

O comportamento altamente não-linear do concreto armado conduz ao desenvolvimento de análises não-lineares para o estudo de suas estruturas. Entretanto a análise não-linear requer um uso amplo de métodos computacionais e manipulação de grande quantidade de dados.

Assim, este trabalho procurou mostrar que existe um caminho a ser seguido para aqueles que querem se dedicar ao trabalho de investigação de estruturas de concreto armado através de análises não-lineares pelo MEF, utilizando os modelos disponíveis nos *softwares* comerciais.

Inicialmente faz-se necessário uma fundamentação teórica sobre os modelos constitutivos para o concreto e os aspectos numéricos que envolvem as análises não-lineares. No capítulo dois, com base na bibliografia consultada, foi apresentada uma síntese do comportamento do concreto e de alguns dos principais modelos disponíveis para representá-lo.

Naturalmente que deve ser desenvolvido um estudo sobre a influência dos parâmetros dos modelos constitutivos e das facilidades para os procedimentos da solução numérica do problema não-linear, disponíveis no *software* utilizado. No capítulo três foram apresentados os recursos disponíveis no programa LUSAS, referentes aos elementos, aos modelos constitutivos e aos aspectos numéricos da solução do problema incremental-iterativo. No capítulo quatro foi apresentada uma série de exemplos processados, fazendo comparações com os resultados experimentais e com resultados teóricos obtidos por outros autores com a aplicação de modelos mais complexos. No capítulo cinco uma aplicação específica da análise não-linear à estruturas de lajes cogumelo foi apresentada.

Nestes exemplos procurou-se mostrar detalhadamente todas as condições em que foram realizadas as análises, ou seja, os aspectos da solução numérica, da discretização e dos parâmetros dos modelos utilizados, constituindo assim, uma base de referência para trabalhos futuros.

Finalmente é preciso salientar mais uma vez alguns aspectos que envolvem uma análise não-linear. Para as estruturas de concreto armado, esta análise requer a definição inicial da geometria e da armadura. Assim sua aplicação para estruturas de concreto armado não deve ser considerada como uma ferramenta de projeto mas uma ferramenta útil que permite o pesquisador investigar a natureza da ruptura de algum novo sistema estrutural, detectar subsequentes eventos de ruptura associados com algum detalhe estrutural ou para qualquer estrutura em que o projetista tiver dúvidas sobre o seu comportamento. As análises não-lineares também podem ser utilizadas como referência para outras análises mais simplificadas.

O uso de ferramentas sofisticadas no ambiente de projeto não tem sido o procedimento usual. Como visto neste trabalho, problemas como as dificuldades numéricas durante o processo de solução das equações não-lineares e os ajustes dos parâmetros associados ao modelo de concreto podem ocorrer. É necessário muita habilidade do analista para tirar proveito das ferramentas disponíveis e detectar quais comportamentos são fundamentais e devem ser incorporados na análise de determinada estrutura, principalmente em função da quantidade de modelos e programas existentes. Muitas vezes estes programas são somente testados para alguns problemas básicos e assim quando são utilizados em análises mais abrangentes passam a ser imprevisíveis. Dessa forma, despende-se muito tempo na calibragem do modelo impedindo que o trabalho de pesquisa se estenda a estruturas maiores limitando-se aos modelos mais simples.

Nem sempre há esta disponibilidade de tempo, o avanço das novas tecnologias construtivas impulsionam a obtenção de soluções para uso prático num período cada vez mais reduzido. Assim, seria interessante que os trabalhos fossem desenvolvidos em equipes que interagissem de forma que o progresso fosse mais amplamente divulgado, atingindo a todos num tempo mais curto, contribuindo para reduzir a distância entre os objetivos propostos e os resultados alcançados. Naturalmente este panorama deve ser alterado em

virtude do estrondoso avanço tecnológico que temos presenciado nos últimos tempos.

Neste sentido, os resultados aqui apresentados são mais um indicativo de que os modelos estudados precisam ser melhorados do que uma utilização prática que se possa oferecer para a determinação dos deslocamentos em lajes cogumelo.

Como o objetivo inicialmente vislumbrado não foi alcançado e tratando-se de um tema de grande interesse, sugere-se que, uma vez definido um modelo constitutivo adequado para o comportamento do concreto armado, um estudo parametrizado para determinação dos deslocamentos deve avaliar as seguintes variáveis:

- a resistência do concreto;
- a presença de vigas de borda;
- a presença de armadura na face superior da laje;
- as condições de apoio das lajes;
- as dimensões dos pilares;
- o tamanho e a forma dos painéis (relação lado maior/lado menor);
- a relação vão/espessura das lajes.

Como um passo posterior, um estudo englobando a influência do acréscimo nos deslocamentos devido a retração e a deformação lenta deve ser desenvolvido, pois esta é uma grande parcela do deslocamento final. Contribuindo assim, para a determinação realista dos deslocamentos finais visando não comprometer a utilização da edificação ao longo de sua vida útil.

BIBLIOGRAFIA

ACI COMMITTEE 446; *Fracture mechanics of concrete: concepts, models and determinations of material fracture properties. State of art report ACI 446.91R-91*, ed by Z. P. Bazant, ACI, Detroit, 1991.

ACI COMMITTEE 363; *State of the Art Report on High Strength Concrete*; 1992.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI). *Building code requirements for reinforced concrete. 318R-89-Revised* 1992.

ASCE; *Finite element analysis of reinforced concrete structures II*. J. Isenberg ed., New York, 1993.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Ações e segurança nas estruturas - NBR 8681*. Rio de Janeiro, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de obras de concreto armado - NBR 6118*. Rio de Janeiro, 1980.

BALAKRISHNAN, S. and MURRAY, D.W.; Concrete constitutive model for NLFE analysis of structures, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol.114, No.7, pp. 1449-1466. July, 1988.

BALAKRISHNAN, S. and MURRAY, D.W.; Prediction of R/C panel and deep beam behavior by NLFE analysis, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1988a.

BALAKRISHNAN, S., ELWI, A. E. and MURRAY, D.W.; Effect of modeling on NLFEA of concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.114 No.7, pp. 1467-1487. July, 1988b.

BARBOSA, F.B.; *Estudo de Modelos para análise não-linear de estruturas de concreto pelo método dos elementos finitos*. Belo Horizonte. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia da UFMG, 1997.

BARNARD P.R.; Researchers into the complete stress-strain curve for concrete, *Magazine of Concrete Research*, 16, (49), pp. 103-210. December 1964.

BARZEGAR, F. *et al*; Generic Problems. In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 490-569. New York, 1993.

BARZEGAR, F.; Layering of RC membrane and plate elements in nonlinear analysis. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 114 (11), pp. 2474-2492, 1989 .

BAZANT, Z. P. and OH, B. H.; Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*. RILEM, 16, pp. 155-177. Paris, 1983.

BAZANT, Z. P., and KIM, S.; Plastic-fracturing theory for concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 105, (EM3),pp. 407-428. June 1979.

BAZANT, Z. P.; Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete, *Journal of The Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.102, No.EM2, pp. 331-344. April, 1976.

BAZANT, Z.P. *et al*. Fracture Mechanics. In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 118-151. New York, 1993.

BAZANT,Z.P. and BELYTSCHKO, T.; Strain softening continuum damage localization and size effect. *Constitutive Laws For Engineering Materials*, C.S. Desai et al., Eds., Elsevier, pp. 11-33. New York, 1987.

BENTUR, A. and COHEN, M. D.; Effect of condense silica fume on the microstructure of the interfacial zone in portland cement mortars. *Journal Of*

American Ceramic Society, 70, (10), pp. 738-743, 1987.

BICANIC, N. *et al*; Computational Aspects. In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 367-489. New York, 1993.

CEDOLIN, L.; Introduction to fracture mechanics of concrete. *Il Cemento*, 283, 1986.

CERVENKA, V.; *Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under in-plane loads*, Ph.D. Dissertation, Department Of Civil Engineering, University Of Colorado, Boulder, 1970.

CERVERA, M. and HINTON, E.; Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model. In: HINTON, E., OWEN, R., ed. *Computational Modelling*, Pineridge Press, Swansea, pp.327-371; 1986.

CHAN, E. C. Y.; *Nonlinear geometric material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with beams*, Ph.D. Dissertation, University of California, 1983.

CHEN, A. C. T. and CHEN, W. F.; Constitutive relations for concrete. *Journal of Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 101(4), pp.465-481. August 1975.

CHEN, W. F. and COHEN, M. D.; Micromechanical Considerations In: CONCRETE CONSTITUTIVE MODELING. *Proceeding of 10th ASCE Structures Congress*, San Antonio, Tx, J. Morgan, Ed., pp. 270-273. May 13-15, 1992.

CHEN, W. F. and HAN, D. J.; *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.

CHEN, W. F. and SALEEB, A F.; *Constitutive Equations for Engineering Materials – Volum 1: Elasticity and Modeling*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1994.

CHEN, W. F., YAMAGUCHI, E., KOTSOVOS, M. D. and PAN, A., D.; Constitutive Model In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 36-117, New York, 1993.

CHEN, W. F.; *Constitutive Equations for Engineering Materials – Volum 2: Plasticity*

and Modeling. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1994.

CHEN, W.F. AND PAN, A .D.;. Finite element and finite block methods in geomechanics. *Proceedings Of The Third International Conference On Constitutive Laws For Engineering Materials*, ASME Press, pp. 669-675. January 1991.

CHEN, W.F., and YAMAGUCHI, E.; On constitutive modeling of concrete Materials. In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES, *ASCE*, pp. 48-71, 1985.

CHOI, O. C., HADJE-GRAFFARI, H., DARWIN, D., and McCABE, S.L.; Bond strength of epoxy-coated reinforcement: bar parameters, *ACI Matls. J.*, 88(2), pp.207-217, 1991.

CHUEIRI, L. H. M.; *Formulação do Método dos elementos de Contorno para Análise Elastoplástica de Placas*. São Carlos. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1994.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP Model Code 1990. *CEB: Bulletin D'Information*, nº 203. July, 1991.

COPE, R. J., RAO, P. V., CLARK L. A. AND NORRIS P.; Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridge slabs in: TAYLOR, C.; HINTON, E.; OWEN, D. R. J., eds. *Numerical methods for non-linear problems*, Swansea, Pinerige Press, vol.1, pp. 457-470, 1980.

COPE, R.J.; Material modeling of real, reinforced concrete slabs, *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Damjanic et al eds., Pineridge Press, 1984.

CORRÊA, M.R.S.; *Aperfeiçoamento de Modelos Usualmente Empregados no Projeto de Sistemas Estruturais de Edifícios*. São Carlos. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1991.

CRISFIELD, M.A. and WILLS, J.; Analysis of R/C panels using different concrete models, *Journal of Structural Mechanics*, ASCE, Vol.115, No.3, pp.578-597. March, 1989.

CRISFIELD, M.A.; *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structure - Vol.2 - Advanced Topics*, John Willey, England, 1997.

D'AVILA, V. M. R. e CAMPOS Fº. A.; Estudo comparativo de modelos constitutivos para o concreto tracionado em aplicações do método dos elementos finitos. In: XXVIII JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL. *Anais*, v.3, pp.935-944. São Carlos, 1997.

DARWIN, D.; Reinforced Concrete. IN: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 203-232. New York, 1993.

de BORST, R. and NAUTA, P.; Non-orthogonal cracks in smeared finite element model. *Engrg. Computations*, 2(3), 35-46, 1985.

DOUGILL, J.W.; Some remarks on path independence in the small in plasticity. *Quarterly of applied mathematics*, 32, pp. 233-243. October 1975.

FEENSTRA, P.H and de BORST, R.; Constitutive Model For Reinforced Concrete, *Journal of Structural Mechanics*, ASCE, Vol.121, No.5, pp.587-595. May, 1995.

FEENSTRA, P.H; *Computation aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*. Ph.D. thesis, Delft Univ. Of Technol., Delft, The Netherlands, 1993.

FIGUEIRAS, J. A., and OWEN, D. R. J.; Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. *Int. J. Numer. Methods in Engrg.*, Vol. 19, pp.541-566, 1983.

FIGUEIRAS, J. A.; Pratical approach for modelling the nonlinear response of RC shells. In: HINTON,E., OWEN, R.; ed;; *Computationl Modelling of reinforced concrete strutures*, Pineridge Press, Swansea, p.217-253; 1986.

FIGUEIREDO FILHO, J.R.; *Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para projeto e execução*. São Carlos. 262p. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989.

FOSTER, S.; An aplicacion of the arc length method involving concrete cracking. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons Ltd,

s.1, V.33, p.269-285, 1992.

FRANTZISKONIS, G. and DESAI, C.S.; Elastoplastic model with damage for strain softening geomaterials. *Acta Mechanica*, 68, pp. 151-170, 1987.

GALLEGOS-CAZARES and SCHNOBRICH W. C.; Effects of creep and shrinkage on the behavior of reinforced concrete gable roof hyperbolic-paraboloids, University of Illinois, *Structural Research Series*, N° 543, Nov. 1988.

GILBERT, R. I., and WARNER, R. F., Tension-stiffening in reinforced concrete slabs. *J. Struc. Division*, ASCE, 101 (ST12), pp. 1885-1900. (1978).

GILBERT, R. I., and WARNER, R.F.; Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs with tension stiffening, *UNICIV Report N° R-167*, University Of New South Wales, Kensington, N.S.W., Australia, 1977.

GOPALARATNAM, V. S. and SHAH, S. P.; Softening response of plain concrete in direct tension. *ACI Journal*, 82, pp. 310-323, 1985.

GRIFFITH, A. A.; The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions*, Royal Society of London, Series A 221, 163-198, 1920.

GUPTA A .K. and AKBAR, H.; Cracking in reinforced concrete analysis. *J. Struct Engrg. Div.* ASCE, Vol. 110(8), 1984.

HAN, D. J. and CHEN, W. F.; A nonuniform hardening plasticity model for concrete materials. *Mechanics of Materials*, 4 (4), pp.283-302, 1985.

HAN, D. J. and CHEN, W. F.; Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elasto-plastic coupling. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.22, N° 8, 99.935-950, 1986.

HAND, F.R, PECKNOLD, D.A and SCHNOBRICH W.C.; Nonlinear layered analysis of RC plates and shells, *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol.99, No. ST7, pp.1491-1505. July, 1973.

HILLERBORG, A., MODEER, M. and PETERSON, P.E.; Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite

elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773-782, 1976.

HSIEH, S.S., TING, E. C., and W.F. CHEN; A plasticity-fracture model for concrete, Parte I: Theory. *International Journal Of Solids And Structures*. Vol.18, N° (3), pp 181-197, 1982.

HU, H. T. and SCHONOBRIK, W. C.; Nonlinear analysis of plane stress state reinforced concrete under short term monotonic loading. *Civil Engineering Studies*, SRS 539, University of Illinois, Urbana, IL, 1988.

IRWIN, G. R.; Trans ASME, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364, 1957.

JENQ, Y. S. and SHAH, S. P.; Two-parameter fracture model for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 111, pp. 1227-1241, 1985.

JOFRIET, J.C. and MCNEICE, G. M.; Finite Element analysis of reinforced concrete slabs, *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol.97, No. ST3, pp. 785-805. March, 1971.

KABIR A. F.; *Nonlinear analysis of concrete panels, slabs, and shells for time dependent effects*, Ph.D. Dissertation, University Of California Berkeley. Dec. 1976.

KACHANOV, L. M.; On the creep fracture time., *IZV. AN SSR, Otd. Tekhn. Nauk*, N° 8, pp.26-31, 1958.

KEUSER, M., and MEHLHORN, G.; Finite element models for bond problems. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 113(10), 2160-2173, 1987.

KOLLEGER, J., and MEHLHORN, G.; Experimentelle untersuchungen zur bestimmung der druckfestigkeit des gerissenen stahl-betons bei einer querzugbeanspruchung. Heft 413, Deutscher Ausschub fur Stahlbeton, Ernst und Sohn. Berlin, Germany 1990.

KOTSOVOS, M. D.; Effect of testing techniques on the post-ultimate behavior of concrete in compression. *Materials & Structures*, RILEM, 16, (92), pp. 3-12. January-February 1983.

KRAJČINOVIC, D. e FONSEKA, G. U.; The continuous damage theory of brittle materials, Part I and Part II. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 48, pp.809-824, 1981.

KUPFER, H., HILSDORF H. K., and RUSCH, H.; Behavior of concrete under biaxial stresses, *ACI Journal*, Vol 66, N° (8), pp. 656-666. August 1969.

LÉGER, P. and PAULTRE, P.; Microcomputer analysis of reinforced concrete slab systems, *Can. J. Civ. Eng.*, 20, pp. 587-601, 1993.

LIN, C. S; *Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs and shells*, Ph.D. Dissertation, University of California Berkeley. April 1973.

LOURENÇO, P.B. and FIGUEIRAS, J.A.; Solution for the design of reinforced concrete plates and shells, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.121, No.5, pp. 815-823, May, 1995.

LUSAS THEORY MANUAL 1 - Fea Ltd, Kingston Upon Thames, UK, 1997.

MANG, H.A. and FLOEGL, H.; Tension-stiffening concept for reinforced concrete surface structures, *Advanced Mechanics Of Reinforced Concrete*, IABSE Colloquium, Delft, 1981.

MARTINELLI, D. A. O. e TAKEYA, T.; *Ruína das ligações laje-pilar nas bordas de lajes-cogumelo*. São Carlos, Relatório parcial apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, 1974.

MAZARS, J.; Mechanical damage and fracture of concrete structures. *Advance in Fracture Research*, Proc. ICF5. Vol.4, pp. 1499-1506. Cannes, France, 1981.

MAZARS, J.; A model of a unilateral elastic damageable material and its application to concrete. *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, Edited by F.H. Wittmann, Elsevier Science Publishers, pp.61-71. Amsterdam, 1986.

MEHTA, P. K. e MONTEIRO, P. J. M.; *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. São Paulo; Ed. Pini, 1994.

MIHASHI, H. AND DEITETSU ROKUGO. Some aspects of strain softening

properties under tension. In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 167-177 New York, 1993.

MILFORD R.V. and SCHNOBRICH W.C.; Nonlinear behavior of reinforced concrete cooling towers, *Structural Research Series* 514, University Of Illinois, 1984.

MURA,T.; Micromechanics of defects in solids. *Martinus Nijhoff*, The Hague, The Netherlands, 1982.

MURRAY, D.W., CHITNUYANONDH, L., RIJUB-AGHA, K.Y. and WONG, C.; Concrete plasticity theory for biaxial stress analysis. *Journal Of Engineering Mechanics Division*, ASCE, 105(6), pp. 989-1006. December 1979.

N. T. REUNION INTERNATIONALE DE LABORATOIRES D'ESSAIS ET MATERIAUX - RILEM 50 – FMC Committee; Determination of fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. Draft Recommendation, *ibid.*, 18 (106), pp. 285-290, 1985.

NGO, D. and SCORDELIS, A. C.; Finite element analysis of reinforced concrete beams, *American Concrete Institute Journal*, V. 67, No 9. Sept. 1967.

NOGUCHI, H. M. and SCHONBRICH, W. C.; Finite element analysis of reinforced concrete in Japan and US: introduction and overview. In: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II – ASCE, ASCE, pp. 2-35. New York, 1993.

OHTANI, Y., and CHEN W.F.; A plastic-softening model for concrete materials. *Computers And Structures*, 33(4), pp. 1047-1055, 1989.

OHTANI, Y., and CHEN, W.F.; Multiple hardening plasticity for concrete materials. *Journal Of Engineering Division*, ASCE, 114(11), pp. 1890-1910, 1988.

OTTOSEN, N. S.; Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structure. *Report Riso-R-411*, Riso National Laboratory , Denmark. May, 1980.

PROENÇA, S.P.B.; *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto- análise crítica e contribuições*. São Carlos. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988.

QUEIROZ, G. and DE PAULA, F. A., A simplified finite element model for slim composite floor analysis. In: XX CILAMCE, COMPUTATION METHODS IN ENGINEERING – *Procedures*, pp. 122.1-122.11, São Paulo, 1999.

RAHMAN, A. H. H.; *Computational models for nonlinear analysis of reinforced concrete flexural slab systems*. Ph.D. Dissertation, Swansea, May 1982.

RAMASWAMY, A., BARZEGAR, F. and VOYIADJIS, G.Z.; Study of layering procedures in finite-element analysis of RC flexural and torsional elements, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.121, No.12, pp. 1773-1783. May, 1995.

RASHID, Y. R.; Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels, *Nuclear Engineering and Design*, Vol 7, 1968.

READ, H.E., and HEGEMIER, G.A.; Strain softening of rock, soil and concrete - a review article. *Mechanics Of Materials*, 3, pp. 271-294, 1984.

REGAN, P. E.; Symmetric punching of reinforced concrete slabs. *Mag. Concrete Res.*, 38(136), pp. 115-128, 1986.

ROTS, J. G.; *Computational modeling of concrete fracture*. PhD dissertation, Civil Engineering Department, Delft University of Technology, 1988.

SCALON, A. e MURRAY, D.W.; Practical calculation of two-way slab deflections. *Concrete International: Design & Construction*. V.4, nº 11, pp.43-50. Nov. 1982.

SCANLON, A.; *Time dependent deflections of reinforced concrete slabs*, Ph.D. Dissertation University of Alberta, Edmonton, Canada, Dec. 1971.

SCORDELIS, A. C., NGO, D., and FRANFLIN , H.A.; Finite element study of reinforced concrete beams with diagonal tension cracks. *Shear In Reinforced Concrete*, Vol 1, American Concrete Institute Publication SP 42, 1974.

SHI, G. H. and GOODMAN, R. E.; Generalization of two-dimensional Discontinuous deformation analysis for forward modeling. *International Journal For Numerical And Analytical Methods in Geomechanics*, 13 (4), pp. 359-380. August 1989.

SILVANY, T.T.; *Deslocamentos Transversais em Lajes-Cogumelo*. São Carlos.

Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1996.

STEVENS, N.J., UZUMERI, S. M., COLLINS, M. P., and WILL, G.T.; Constitutive model for reinforced concrete finite element analysis. *ACI Struct. J.*, 88(1), 49-59, 1991.

TAKEYA, T. *et al.* *Recomendações para o projeto e a execução da estrutura em lajes cogumelo pertencentes às UBS do plano metropolitano de saúde.* Relatório 31p. São Carlos, EESC-USP, 1985.

van MIER, J. G. M.; Examples of non-Linear analysis Of reinforced concrete structures ith DIANA, *Heron*, (Netherlands), 32(3), 1987.

van MIER, J. G. M.; *Fracture processes of Concrete: assessment of material parameters for fractures models*, CRC Press, 448p. 1997.

van MIER, J.G.M.; Complete stress-strain behavior and damaging status of concrete under multiaxial conditions, RILEM-CEB-CNRS, *International Conference On Concrete Under Multiaxial Conditions*, Vol. 1, Presses De l'Université Paul Sabatier, Toulouse, France, pp. 75-85,1984.

VECCHIO F.J. and COLLINS M.P.; The modified compression field theory for reinforced concrete elements subject shear. *ACI Journal*, 83(22), pp. 219-231., 1986.

VECCHIO F.J. and COLLINS M.P.; The response of Reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses, *Publ. N° 82-03*, University Of Toronto, 1982.

WALRAVEN, J.; The influence of depth on the shear strength of concrete beams without shear reinforcement. *Rep. 5-78-4*, Stevens Lab., Delft Univ. Of Technol., Delft, The Netherlands, 1979.

WILLAM, K. J., STURE, S., BICANIC, N., CHRISTENSEN, J. and HURLBUT, B.; Identification of strain-softening properties and computation predictions of localized fracture. *Report N° 7404*, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, Univ. of Colorado, Boulder, 1984.

YAMAGUCHI, E. and CHEN, W.F.; Microcrack propagation study of concrete under

compression, *Journal Of Engineering Mechanics*, ASCE, 117,(3), pp.653-673. March 1991.

YAMAGUCHI, E., and CHEN, W.F.; Cracking model for finite element analysis of concrete materials, *Journal Engineering Mechanics Division*, ASCE, 116(6), pp. 1242-1260, 1990.