



EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

CÁLCULO I

(EDITORAufmg)

CÁLCULO I



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Reitor: Ronaldo Tadêu Pena

Vice-Reitora: Heloisa Maria Murgel Starling

Pró-Reitoria de Graduação

Pró-Reitor: Mauro Braga

Pró-Reitora Adjunta: Carmela Maria Pólito Braga

Coordenadora do Núcleo de Apoio à Educação a Distância:

Maria do Carmo Vila

EDITORA UFMG

Diretor: Wander Melo Miranda

Vice-Diretora: Silvana Cóser

Conselho Editorial

Wander Melo Miranda (presidente)

Carlos Antônio Leite Brandão

Juarez Rocha Guimarães

Márcio Gomes Soares

Maria das Graças Santa Bárbara

Maria Helena Damasceno e Silva Megale

Paulo Sérgio Lacerda Beirão

Silvana Cóser

MÁRCIA MARIA FUSARO PINTO
JUSSARA DE LOIOLA ARAÚJO
MARIA CRISTINA COSTA FERREIRA

CÁLCULO I

Belo Horizonte
Editora UFMG
2008

© 2008, As Autoras

© 2008, Editora UFMG

Este livro ou parte dele não pode ser reproduzido por qualquer meio sem autorização escrita do Editor.

P659c Pinto, Márcia Maria Fusaro
Cálculo I/Márcia Maria Fusaro Pinto, Jussara de Loiola Araújo, Maria Cristina Costa
Ferreira. – Belo Horizonte : Editora UFMG, 2008.

171 p. – il. (Educação a Distância)

Inclui referências.

ISBN: 978-85-7041-658-2

1. Matemática. 2. Cálculo. 3. Geometria analítica – Estudo e ensino. I. Araújo, Jussara de Loiola. II. Ferreira, Maria Cristina Costa. III. Título. IV. Série.

CDD: 510

CDU: 51

Elaborada pela CCQC - Central de Controle de Qualidade da Catalogação da Biblioteca Universitária da UFMG

Este livro recebeu o apoio financeiro da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO DE TEXTOS DE QUÍMICA: Amary César Ferreira

EDITORAÇÃO DE TEXTOS: Maria do Carmo Leite Ribeiro

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO: Maria do Rosário A. Pereira

REVISÃO DE PROVAS: Isadora Rodrigues, Luana Girundi, Priscilla Iacomini e Márcia Romano

PRODUÇÃO GRÁFICA: Warren M. Santos

PROJETO GRÁFICO, CAPA: Eduardo Ferreira

FORMATAÇÃO: Eduardo Ferreira e Vera Lúcia Sátiro

EDITORA UFMG

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Ala direita da Biblioteca Central - Térreo

Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG

Tel.: (31) 3409-4650 - Fax: (31) 3409-4768

www.editora.ufmg.br - editora@ufmg.br

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

Av. Antônio Carlos, 6.627 - Reitoria - 6º andar

Campus Pampulha - 31270-901 - Belo Horizonte - MG

Tel.: (31) 3409-4654 - Fax: (31) 3409-4060

www.ufmg.br - info@prograd.ufmg.br - educacaoadistancia@ufmg.br

O Curso de Licenciatura em Química da UFMG, modalidade a distância, foi concebido tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro deles se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de professores de alto nível, comprometidos com a qualidade da educação no País.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes do Curso. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isso não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais, que deverá ser consultada à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentações, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula, foi elaborada uma auto-avaliação, com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. A auto-avaliação auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, ele deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância
UFMG

SUMÁRIO

Apresentação	11
Aula 1 Funções	13
1. Introdução	13
2. Alguns exemplos	14
3. Funções	17
4. Formas de representar funções	19
5. Referências	22
Aula 2 Variação e taxa média de variação de uma função	23
1. Introdução	23
2. Variação	23
3. Taxa média de variação	25
4. Taxa média de variação de uma função e seu crescimento ou decrescimento	27
5. Exercícios	29
6. Referências	29
Aula 3 Funções lineares	31
1. Introdução	31
2. Exemplo: preço da corrida de táxi	31
3. Funções lineares	32
4. Taxa média de variação de funções lineares	34
5. Gráficos de funções lineares	35
6. Exercícios	37
7. Referências	37
Aula 4 Algumas funções do tipo potência inteira	39
1. Introdução	39
2. Funções quadráticas do tipo $y = ax^2$	39
3. Funções do tipo $y = ax^n$, em que n é par	46
4. As funções $y = ax^n$, em que n é ímpar	48
5. Algumas funções do tipo $y = ax^{-n}$, em que $n > 0$	53
6. Exercícios	56
Aula 5 Construindo novas funções	57
1. Introdução	57
2. Obtendo novas funções algebricamente	57
3. Definindo funções por partes	62
4. Transladando gráficos de funções	64
5. Completando quadrados (opcional)	68

Aula 6	Funções inversas	71
1.	Introdução	71
2.	Desfazendo a ação de funções: expressando a inversa de $y = 2x+3$	71
3.	Desfazendo a ação de funções: restrições	75
4.	Restrições para a definição da inversa: o conceito de função injetiva	77
5.	Uma definição para a função inversa	79
6.	Propriedades da função inversa	80
7.	Uma relação entre os gráficos de uma função e de sua inversa	81
8.	Definindo potências racionais como funções inversas	82
Aula 7	Funções exponenciais	85
1.	Introdução	85
2.	Exemplos	86
3.	A função exponencial $y = ka^x$, em que $a > 0$, $a \neq 1$	90
4.	O número e	94
5.	Referências	96
Aula 8	Funções logarítmicas	97
1.	Introdução	97
2.	Estudo da inversa da função $y = 10^t$, $t \in \mathbb{R}$	97
3.	A inversa da função exponencial $y = a^x$, onde $a > 0$, $a \neq 1$	101
4.	Propriedades da função $y = \log_a x$	106
5.	O logaritmo natural	108
6.	Uma palavra sobre o desenvolvimento histórico dos logaritmos	111
7.	Referências	112
Aula 9	Taxa instantânea de variação de uma função: derivada	113
1.	Introdução	113
2.	Exemplo: cálculo da velocidade instantânea de um objeto	113
3.	Taxa instantânea de variação e derivada	115
4.	Interpretações geométricas	118
Aula 10	A função derivada	123
1.	Introdução	123
2.	A função derivada	123
3.	Definição de derivada para funções representadas por fórmulas algébricas	126
4.	Exercícios	127

Aula 11 Cálculo de derivadas.....	129
1. Introdução	129
2. Exemplo: cálculo da derivada de $y = f(x) = x^2$	129
3. Derivada de funções constantes	131
4. Derivada de potências de x	131
5. Derivada de produto de função por constante	132
6. Derivada de soma de funções.	133
7. Derivada de uma função polinomial qualquer	134
8. Exercícios.....	134
 Aula 12 A variação acumulada	135
1. Introdução	135
2. A <i>variação total</i> da altura do André a partir da <i>variação acumulada</i> por sua taxa de crescimento.	136
3. Cálculo da distância percorrida por um objeto em função do tempo do percurso.	139
4. Um pouco de teoria.....	145
5. Obtendo a expressão do volume $V(t)$ a partir de sua taxa $\frac{dV}{dt}$	147
 Aula 13 A integral definida	151
1. Introdução	151
2. Exemplo: recuperando $y = F(t)$ a partir de sua taxa $y = f(t) = t^2$...	151
3. Notações e linguagem	155
4. Interpretação geométrica das Somas à Direita e à Esquerda no caso $y = f(t) \geq 0$	156
5. Exemplo: refinando a estimativa para a <i>variação total</i> ΔF	156
6. A definição de área sob uma curva	159
 Aula 14 O teorema fundamental do cálculo (parte 1)	163
1. Introdução	163
2. O teorema fundamental do cálculo (parte 1)	164
3. Exercícios e exemplos	166
4. Demonstração do teorema fundamental do cálculo	168
5. Referências	171

Apresentação

Este livro foi escrito especialmente para a disciplina Cálculo I do curso de Licenciatura em Química da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG – na modalidade a distância. Se, por um lado, há vários livros que se dedicam aos assuntos que nele abordamos, por outro, havia a necessidade de elaborar um material que atendesse às necessidades específicas do aluno desse curso, em uma modalidade que, para nós, é novidade.

A experiência das autoras como professoras de cursos presenciais de Cálculo na UFMG e como pesquisadoras do campo da Educação Matemática (em especial no uso de tecnologias na Educação Matemática) foi determinante nas escolhas e decisões sobre o estilo de escrita e linguagem adotado, o formato do texto e a ordem de apresentação dos conteúdos.

Optamos por não utilizar estritamente a linguagem matemática formal, mas procuramos ficar sempre atentas ao rigor nas definições matemáticas e na construção dos argumentos ao justificar as proposições e teoremas. Em consequência de termos aberto mão do poder de síntese da linguagem matemática, o texto ficou longo. Mesmo prevendo que isto inevitavelmente aconteceria, optamos por esse estilo por entender que a introdução precoce da linguagem técnica, muitas vezes, induz uma ênfase na manipulação simbólica em detrimento de uma discussão conceitual, que tivemos a intenção de proporcionar.

Dentro dessa concepção, o texto é desenvolvido a partir de discussões de exemplos seguidas de sistematizações dos resultados, representando um processo de teorização a partir da organização de experiências vivenciadas pelos alunos. Buscamos exemplos em nosso dia-a-dia, na Internet, em situações típicas da área da Química e no conhecimento matemático que vem sendo trabalhado na escola de ensino médio e fundamental. Refletindo sobre esses exemplos, procuramos construir relações e os conceitos matemáticos, colocando na compreensão desses últimos a ênfase do texto elaborado. Pensamos assim porque os alunos, leitores deste texto, nem sempre terão a seu lado um professor para “explicar a matéria”. Nossa expectativa é a de que beneficiaremos essa compreensão partindo de exemplos conhecidos ou desenvolvendo estratégias para torná-los familiares ao leitor. Tivemos o cuidado, também, de não restringir os conceitos a especificidades dos exemplos escolhidos, para não correremos o risco de os alunos não conseguirem percebê-los em sua

generalidade. Por isso não nos descuidamos dos momentos de síntese e de apresentação explícita dos resultados em linguagem matemática formal, seguidos de outros exemplos, diferentes dos iniciais. Com isso, os alunos podem, em um movimento crescente de abstração, ir elaborando sua compreensão a respeito dos conceitos.

Esse movimento no sentido da teorização pode ser observado, também, na ordem escolhida para apresentação dos conteúdos no livro. Iniciamos com uma discussão sobre o conceito de funções. Com a intenção de proporcionar uma preparação para a introdução do conceito de derivada, que virá bem mais à frente, trabalhamos as funções enfatizando questões relativas ao cálculo de variações e à definição do conceito de taxa média de variação. Essa pequena inversão permite um tratamento qualitativo das funções lineares, quadráticas, potências, polinomiais, exponenciais e logarítmicas, que são tratadas nas aulas que se seguem. A noção de derivada, a partir da idéia de taxa média de variação, e a noção de integral, a partir da idéia de variação total de quantidades, são resultados de nossa tentativa em enfatizar sua compreensão. Ao desenvolver esses dois conceitos, centrais ao Cálculo, damos início, também, a algumas técnicas para facilitar os cálculos. A última aula é dedicada ao Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece uma importante relação entre os conceitos de derivada e integral.

Esperamos ter sido capazes de escrever nosso livro como um convite ao aluno, ao ler seu texto, para refletir e participar do diálogo que tivemos a intenção de estabelecer entre os exemplos e as novas idéias desse importante campo da Matemática.

As autoras

Funções

OBJETIVO

O objetivo desta aula é trabalhar o conceito de função, destacando as diversas formas de representá-la matematicamente. Pretendemos discutir alguns exemplos de aplicação do conceito na Química, em outras áreas e em situações do dia-a-dia.

1. INTRODUÇÃO

A palavra “função” está presente em nosso dia-a-dia. Há várias situações em que ela é utilizada. O *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, por exemplo, traz vinte e uma acepções, ou seja, vinte e um sentidos diferentes para essa palavra. Segundo uma dessas acepções, função é o papel a desempenhar por um indivíduo em determinada situação. Ela pode ser entendida, também, como “o uso a que se destina algo”, como quando dizemos sobre a função de determinada ferramenta.

Podemos também pensar em alguma expressão do tipo “Pedro vive em função do trabalho”. O que isso significa? No entendimento cotidiano, significa que as ações de Pedro dependem das demandas exigidas de seu trabalho, ou seja, que as atividades ligadas a seu trabalho vêm em primeiro lugar em sua vida. Percebemos, então, uma *dependência* das ações de Pedro em função do que é exigido em seu trabalho.

No caso da Matemática, função é um conceito-chave, utilizado em várias áreas. O estudo de funções em um curso de Química traz a possibilidade de relacionar elementos e/ou grandezas químicas segundo alguma dependência.

2. ALGUNS EXEMPLOS

Função, em Matemática, está relacionada com dependência. E como estamos falando de um conceito matemático, uma função diz respeito a uma dependência entre grandezas. Aqui, em especial, trabalharemos com dependência entre valores ou medidas ligados a algum fenômeno. Para ajudar a esclarecer, vamos considerar alguns exemplos.

2.1 Exemplo: previsão do tempo e da temperatura em Belo Horizonte

A tabela abaixo apresenta a previsão da temperatura em Belo Horizonte, Minas Gerais, de hora em hora, no período de 16 a 23 horas do dia 18 de abril de 2006:

Tabela 1
Previsão do tempo e da temperatura em Belo Horizonte
no período de 16h às 23h do dia 18/04/06

Previsão de hora em hora								
Belo Horizonte, Brasil								
Última atualização: Terça-feira, 18 de Abril de 2006, às 15:15 Hora Local (Terça-feira, 18:15 GMT)								
	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.	Ter 18 Abr.
Tempo Previsão	16:00  Pancadas	17:00  Pancadas	18:00  Pancadas	19:00  Pancadas	20:00  Pancadas	21:00  Pancadas	22:00  Pancadas	23:00  Pancadas
Temperatura	21°C	21°C	20°C	20°C	19°C	19°C	19°C	19°C

Fonte: WEATHER, 2006.

A Tabela 1 foi retirada de um *site* da Internet, mas podemos encontrar tabelas assim em jornais impressos ou obter informações semelhantes em noticiários da televisão. Como podemos “ler” as informações contidas nessa tabela? O que você pode concluir a respeito das previsões feitas para Belo Horizonte (BH) no período? Se você estivesse em BH, qual seria a influência da leitura dessa tabela em seu cotidiano?

Se estivermos saindo de casa por volta de 16h, talvez seja prudente levar um agasalho, pois 21°C às 4 horas da tarde é um pouco frio para os padrões belorizontinos, principalmente com previsão de pancadas de chuva. E à medida que as horas vão passando, a temperatura vai ficando mais baixa ainda. Para quem costuma sentir frio, o agasalho vai ser primordial!

Mas o que essa estória de temperatura tem a ver com função? Observem atentamente a frase: “E, à medida que as horas vão passando, a temperatura vai ficando mais baixa ainda.” Podemos perceber, na frase e na Tabela 1, que a temperatura **depende** do instante, do horário do dia, ou seja, para cada hora podemos associar um valor para a temperatura de BH.

Voltamos, assim, à discussão de **dependência** iniciada na Introdução desta aula. Lá, falamos da dependência entre as ações de Pedro e seu trabalho. Neste exemplo, referimo-nos à dependência entre duas grandezas: o horário e a temperatura. Em Matemática, **função** representa algum tipo de dependência. No nosso exemplo, dizemos que a temperatura é **função** do horário.

A Tabela 2 considera, apenas, os valores do horário e da temperatura retirados da Tabela 1:

Tabela 2
Previsão da temperatura em Belo Horizonte
no período de 16h a 23h do dia 18/04/06

Horário (<i>h</i>):	16	17	18	19	20	21	22	23
Temperatura (°C):	21	21	20	20	19	19	19	19

Vamos nos ater a alguns detalhes da relação de dependência representada na Tabela 2. Uma de suas características é o fato de cada hora do dia, entre 16 e 23 horas, ter uma respectiva previsão de temperatura. Mais que isso, **cada hora tem exatamente uma** previsão de temperatura. Isso é coerente com o que conhecemos sobre temperatura de uma cidade: se estivermos em determinado ponto da cidade para medir a temperatura ali, sempre é possível dizer o valor da temperatura, para qualquer instante do dia, e não existe mais de um valor para a temperatura em cada instante. São essas características que nos permitem dizer que a temperatura é **função** do horário. Esse conceito será discutido de maneira mais formal na seção seguinte. Mas antes vamos discutir mais um exemplo.

2.2 Exemplo: densidade da água

A massa específica ou densidade absoluta de uma substância é definida como o quociente entre uma certa massa dessa substância e o volume ocupado por ela à temperatura e pressão especificadas. Nessas condições, a densidade é uma propriedade específica de cada substância, ou seja, cada substância possui um único valor que mede sua densidade absoluta.

¹ Segundo RESNICK e HALLIDAY (1984), a densidade absoluta de uma substância pode variar segundo a temperatura e pressão a que ela está submetida. No caso de substâncias líquidas, como é o caso da água, essa variação é muito pequena e, portanto, desprezível.

² Para dizer que essas duas fórmulas representam a mesma relação, devemos ter o cuidado de garantir que v seja diferente de zero, pois na primeira delas há uma divisão por v . De certa forma, isso está garantido, pois estamos falando de uma quantidade (positiva) de água, como será discutido mais à frente, no exemplo 3.6.

A água, por exemplo, à temperatura de 20°C e pressão de 1 atm , tem densidade absoluta¹ igual a $\rho = 1,000 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ (RESNICK; HALLIDAY, 1984). Assim, se denominarmos de m uma certa massa de água e de v o volume ocupado por essa massa, podemos expressar a densidade da água por

$$\rho = \frac{m}{v}.$$

E como $\rho = 1,000 \times 10^3\text{ kg/m}^3 = 1000\text{ kg/m}^3$, podemos reescrever a relação acima da seguinte forma:²

$$m = 1000v.$$

Com essa fórmula, se conhecermos o volume ocupado por certa quantidade de água, é possível calcular o valor da massa dessa quantidade. Por exemplo, uma quantidade de água com $0,5\text{ m}^3$ de volume tem massa igual a

$$m = 1000\text{ kg/m}^3 \cdot 0,5\text{ m}^3 = 500\text{ kg}.$$

Observe que a multiplicação da unidade de medida de ρ (kg/m^3) pela unidade de medida de v (m^3) resulta na unidade de medida de m (kg), da mesma forma que a multiplicação de ρ por v resulta em m .

A exemplo da situação da temperatura, discutida em 2.1, também aqui podemos observar que para **cada** valor de v corresponde **um único** valor de m . Assim, podemos dizer que a massa m de água é **função** do volume v ocupado por ela.

Os exemplos 2.1 e 2.2 têm algo em comum: cada um deles representa uma relação de dependência entre duas grandezas (temperatura depende do horário e massa depende do volume). Mais que isso, eles têm uma característica especial: a cada valor do horário corresponde um único valor da temperatura, e a cada valor do volume corresponde um único valor da massa. São essas características que vão nos ajudar a definir o que é função em termos matemáticos, o que faremos na próxima seção.

2.3 Exercício

Você conhece alguma situação, algum fenômeno, que pode ser entendido como uma função entre duas grandezas? Confira se seu exemplo satisfaz as mesmas características destacadas nos exemplos anteriores.

3. FUNÇÕES

Sintetizamos, a seguir, a definição de função:

3.1 Definição

Uma **função** é uma relação de dependência entre duas grandezas de tal forma que, para **cada** valor x de uma, está associado **um único** valor y da outra.

3.2 Exemplos

1. No caso do exemplo 2.1, as grandezas envolvidas eram o horário e a temperatura. Assim, para cada valor h do horário, estava associado um único valor t da temperatura.
2. No exemplo 2.2, as duas grandezas eram o volume ocupado por uma certa quantidade de água e sua massa correspondente. E para cada valor v do volume estava associado um único valor m da massa.

A seguir, definiremos alguns conceitos relacionados a funções.

3.3 Definição

Considere uma função que relaciona duas grandezas.

- c) O conjunto de valores que a primeira grandeza pode assumir é denominado **domínio** da função.
- d) O conjunto dos valores assumidos pela segunda grandeza é denominado **imagem** da função.
- e) Um elemento genérico do domínio é denominado **variável independente**, enquanto um elemento genérico da imagem é denominado **variável dependente**.

3.4 Exemplos

1. No exemplo 2.1, o domínio D é o conjunto de valores assumidos por h , ou seja,
$$D = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}.$$

A imagem I é o conjunto de valores assumidos por t , ou seja,

$$I = \{19, 20, 21\}.$$

A variável independente é h , e a variável dependente é t .

2. No exemplo 2.2, o domínio E é o conjunto de valores assumidos por v . E como v pode ser qualquer valor real positivo, dizemos que

$$E = \{v \in \mathbb{R} / v > 0\}.$$

Podemos dizer o mesmo sobre a imagem:

$$J = \{m \in \mathbb{R} / m > 0\}.$$

Isso acontece porque estamos tratando da massa e do volume de uma certa quantidade de água, e não faz sentido falar em valores negativos para essas grandezas. Além disso, como a densidade de uma substância é definida por m/v , ou seja, é uma divisão por v , então v não pode ser 0. Nesse caso, a variável independente é v , e a variável dependente é m .

3.5 Notações e linguagem

É comum (e útil) darmos nomes às funções. Esses nomes, normalmente, são letras do nosso alfabeto. E como a palavra função começa com a letra f , esse é o nome mais usado.

☞ Se f é uma função que associa valores x de uma grandeza a valores y de outra grandeza, dizemos que $y = f(x)$ (lemos assim: y é igual a f de x).

Muitas vezes, damos às variáveis nomes que nos fazem lembrar as grandezas que elas representam.

3.6 Exemplos

1. No exemplo 2.1, estamos representando o horário por h e a temperatura por t , e podemos dizer que $t = g(h)$, ou seja, a temperatura t é função do horário h (se escolhermos o nome g para a função), a qual é representada pela Tabela 2.
2. No exemplo 2.2, representamos o volume por v , a massa por m e dizemos que $m = f(v)$. Nesse caso, a função f é representada pela fórmula $m = f(v) = 1000 v$.

3.7 Exercícios

1. No exercício 2.3, pedimos para você dar alguns exemplos de funções. Após as discussões da seção 3, verifique se os exemplos que você encontrou são mesmo exemplos de funções.

2. Quais são os domínios e imagens das funções que você encontrou?
3. Escolha nomes para essas funções e procure escrevê-las com a notação que apresentamos nesta seção.

Os dois exemplos discutidos nesta aula trazem maneiras diferentes de representar uma função: uma é representada por **tabela** e a outra por **fórmula**. Existem mais duas maneiras de representar uma função: por meio de palavras ou por gráficos. Vamos discutir essas formas com mais detalhes na próxima seção.

4. FORMAS DE REPRESENTAR FUNÇÕES

A Tabela 2 é uma forma de representar a função $t = g(h)$ (temperatura em função do horário) por meio de uma **tabela**. Da mesma forma, a expressão $m = 1000v$ é uma maneira de representar a função $m = f(v)$ (massa em função do volume) por meio de uma **fórmula**.

Assim, tabela e fórmula são duas das maneiras pelas quais uma função pode ser representada. Certamente, no dia-a-dia ou em sua experiência escolar anterior, você já se deparou com tabelas e fórmulas.

4.1 Exercício

Você saberia dizer, com suas próprias palavras, o que são tabelas? E o que são fórmulas? As funções que você deu como exemplo ao longo desta aula estão representadas de que maneira?

Uma função pode ser representada por **palavras**. Considere o exemplo a seguir:

4.2 Exemplo: distância de uma pessoa em relação à sua casa

Ana Maria tinha saído de casa há 10 minutos, em direção ao trabalho, quando percebeu que um pneu de seu carro estava furado. Ela, então, parou o carro e demorou cerca de uma hora para trocar o pneu. Ao final, ela estava completamente suja. E como já estava mesmo atrasada, telefonou para a empresa onde trabalha, relatou o ocorrido e avisou que voltaria em casa para tomar um banho, o que provocaria um atraso maior ainda. 30 minutos depois, ela estava, finalmente, a caminho do trabalho. Assim, um trajeto que, normalmente, demoraria 20 minutos, demorou muito mais...

Apesar de haver números no texto acima, não foram usadas tabelas nem fórmulas para representar a função. Há variáveis relacionadas por meio de alguma função nesse relato?

Vamos reinterpretar o relato sob o ponto de vista de uma função entre as grandezas tempo (t , medido em minutos) e distância (d , medida em quilômetros) de Ana Maria à sua casa:

- Ao tempo $t = 0$, temos também $d = 0$, pois Ana Maria estava em casa.
- Para t variando entre 0 e 10, o valor de d vai aumentando (ela está se afastando de casa) até um certo valor d_0 , que é a distância de casa em que ela se encontra quando percebe que o pneu está furado.
- Para t variando entre 10 e 70, temos $d = d_0$ (constante), pois ela ficou parada por uma hora para trocar o pneu.
- Para t variando entre 70 e 80, o valor de d vai diminuindo até 0, pois ela está se aproximando de casa até chegar lá. Estamos supondo que, para voltar para casa, ela gastaria o mesmo tempo que gastou para ir de casa até o ponto em que o pneu furou.
- Para t variando entre 80 e 110, temos $d = 0$, pois ela ficou em casa por 30 minutos para tomar um banho e se arrumar novamente.
- Finalmente, para t variando entre 110 e 130, o valor de d vai aumentando até que ela chegue ao trabalho, já que foi informado que Ana Maria, normalmente, gasta 20 minutos para chegar lá.

A partir dessa reinterpretação, podemos perceber que, para cada valor de t , existe um único valor de d , apesar de não sabermos exatamente quanto ele vale em cada momento. Temos, então, uma função representada por palavras.

³ Se você tiver dúvidas sobre plano cartesiano, consulte algum livro de Matemática do ensino médio para fazer uma revisão.

Uma outra maneira de representar funções é por meio de **gráficos**. Há diversas formas de representar informações numéricas por meio de um gráfico: há o gráfico de setores, o gráfico de barras etc. A maneira mais usual de traçar gráficos, no caso do Cálculo, é utilizando **plano cartesiano**.³ Como veremos abaixo, o gráfico de uma função é um subconjunto do plano cartesiano.

4.3 Definição

Sejam $y = f(x)$ uma função e D seu domínio.

O **gráfico** de f é definido por

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

4.4 Exemplo

O gráfico da função discutida no exemplo 2.1, a temperatura em função do horário, é:

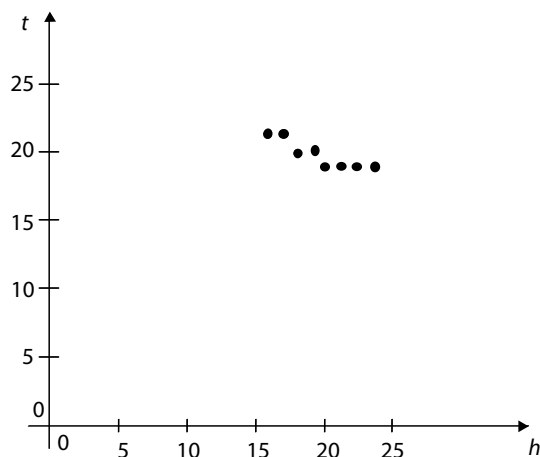


Figura 1 - Gráfico da função $t = g(h)$ (temperatura em função do horário)

Nesse plano cartesiano, o horário, medido em horas, está representado no eixo horizontal e a temperatura, medida em graus Celsius, no eixo vertical.

É importante observar que, como o domínio de g é $D = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}$ e a imagem é $I = \{19, 20, 21\}$, ou seja, conjuntos discretos, o gráfico de g também é um conjunto discreto de pontos.

4.5 Exemplo

O gráfico da função f , discutida no exemplo 3.2, massa em função do volume, é apresentado a seguir. Nele, o domínio $E = \{v \in \mathbb{R} / v > 0\}$ é um conjunto contínuo, assim como a imagem $J = \{m \in \mathbb{R} / m > 0\}$. Por isso, o gráfico de f é um conjunto contínuo. Observe-o a seguir.

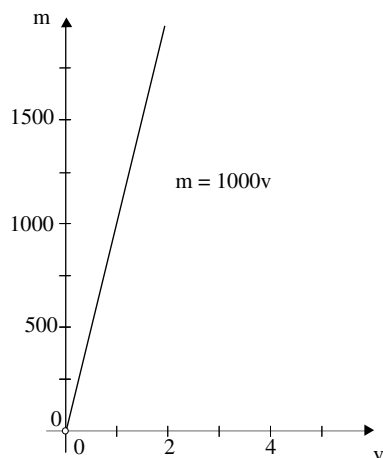


Figura 2 - Gráfico da função $m = f(v) = 1000v$ (massa em função do volume)

Nesse plano cartesiano, o volume, medido em m^3 , está representado no eixo horizontal, e a massa, medida em kg , no eixo vertical. Como tanto volume quanto massa são sempre positivos, o gráfico de f está contido no primeiro quadrante do plano cartesiano. O fato de seu desenho assemelhar-se a uma semi-reta (na verdade, é uma semi-reta) será discutido em uma aula mais à frente.

Concluimos, assim, uma discussão inicial sobre o conceito de função e os modos de representá-la. É importante que você tenha compreendido esse conceito e saiba reconhecer uma função independentemente da forma como ela foi ou está representada. Além disso, é importante também que você saiba relacionar os diferentes modos de representar uma função, a fim de ser capaz de olhar para uma mesma função sob várias perspectivas.

5. REFERÊNCIAS

HOUAISS, A. *Dicionário da Língua Portuguesa*. Disponível em: <<http://houaiss.uol.com.br>>. Acesso em: 07 mar. 2006.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1984. 309 p. 2. v.

WEATHER. Disponível em: <<http://br.weather.com/>>. Acesso em: 18 abr. 2006.

Variação e taxa média de variação de uma função

OBJETIVO

O objetivo desta aula é discutir dois conceitos que nos dão informações mais abrangentes sobre um fenômeno representado por uma função: a variação e a taxa média de variação. Pretendemos, também, trabalhar com alguns exemplos que discutem as interpretações desses conceitos nos fenômenos representados por algumas funções.¹

1. INTRODUÇÃO

Na aula anterior, trabalhamos com o conceito de função (assim como outros conceitos importantes para sua definição) e com alguns exemplos. Quando calculamos o valor de uma função em um elemento de seu domínio temos uma informação pontual sobre o fenômeno que ela representa.

Em algumas situações, entretanto, precisamos de informações mais abrangentes sobre o fenômeno, considerando partes ou subconjuntos do domínio maiores que um único ponto. Esse é o caso, por exemplo, quando queremos saber qual foi o crescimento (ou decrescimento) de alguma grandeza em um determinado intervalo de tempo ou a velocidade média de um automóvel em movimento.

2. VARIAÇÃO

Considere a seguinte nota capturada na Internet:

A tarifa de energia elétrica passará por reajuste em sete estados brasileiros. O índice de reajuste será decidido nessa terça-feira em reunião na Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel). (SUPERAVIT, 2006)

Quem de nós nunca ouviu ou leu uma notícia dessas? Apesar de a notícia não informar de quanto será o reajuste, e nem que esse reajuste significa necessariamente um aumento de tarifa, nossa

¹ De maneira geral, a discussão realizada nesta aula precede o conceito de derivada em livros de Cálculo Diferencial e Integral. Em particular, HUGHES-HALLETT *et al.* (1999) traz uma discussão detalhada desse assunto nas seções 1.1 e 1.2. Bons estudos!

experiência nos diz que, em alguns estados, o consumidor vai pagar mais pela energia elétrica que consome. Observe que a notícia não informa, também, o valor da tarifa de energia, mas ela fala de um “reajuste” da tarifa. Ou seja, o consumidor deve ficar ciente de que haverá um aumento, ou uma variação positiva, desse valor.

Essa informação é diferente daquelas discutidas na aula anterior, na qual foram apresentados alguns exemplos de funções. O valor da tarifa em determinado mês do ano pode ser interpretado como uma função – o valor da tarifa em função do tempo. Já o reajuste da tarifa pode ser melhor compreendido por meio de um conceito que apresentaremos nesta aula: a **variação** de uma função. Vamos discutir um exemplo antes de apresentarmos o conceito.

2.1 Exemplo: altura de André em função da idade

A Tabela 1 apresenta a altura de um menino – André – dada em centímetros, em função de sua idade, dada em meses. Esses dados foram obtidos em visitas de André a seu pediatra.

Tabela 1
Altura (em cm) de André em função de sua idade (em meses)

Idade (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
Altura (cm)	46,0	46,0	49,5	51,5	54,5	57,0	60,0	62,7	65,5	67,5	73,0

A partir da tabela, podemos saber qual era a altura de André em vários momentos, desde o seu nascimento até que ele completasse 1 ano de vida. E se quisermos saber quanto ele cresceu em determinados períodos desse primeiro ano de vida, que cálculos devemos fazer?

Por exemplo, observando a Tabela 1, concluímos que, de 2,0 a 2,5 meses de idade, André cresceu

$$51,5 \text{ cm} - 49,5 \text{ cm} = 2,0 \text{ cm}.$$

E de 2,5 a 4,5 meses, André cresceu

$$57,0 \text{ cm} - 51,5 \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}.$$

Essa diferença dos valores da altura de André é denominada **variação** da altura.

Se utilizarmos a notação introduzida na aula anterior,

$$\left. \begin{array}{l} y: \text{altura de André, medida em cm,} \\ t: \text{idade de André, medida em meses} \\ f: \text{função que relaciona } y \text{ e } t. \end{array} \right\} \Rightarrow y = f(t)$$

podemos representar os cálculos acima por:

$$f(2,5) - f(2,0) = 51,5 - 49,5 = 2,0 \text{ (para a variação de } y \text{ no intervalo } [2,0; 2,5]);$$

$$f(4,5) - f(2,5) = 57,0 - 51,5 = 5,5 \text{ (para a variação de } y \text{ no intervalo } [2,5; 4,5]).$$

De maneira geral, temos a seguinte definição:

2.2 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D . Se $a, b \in D$, a **variação** de y correspondente à variação de x no intervalo $[a, b]$ é definida por:

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Denotamos a variação de y por Δy (lemos “**delta y**”). A unidade de medida de Δy é a mesma unidade de medida de y .

2.3 Exercícios

1. Utilize a Tabela 1 para calcular a variação da altura de André em outros intervalos de sua idade.
2. Retome os exemplos discutidos na aula anterior e escolha alguns intervalos nos domínios das funções que são discutidas lá, para calcular a variação dessas funções nos intervalos escolhidos.

Nos cálculos referentes ao exemplo do André, vemos que ele cresceu 2,0 *cm* no primeiro intervalo de tempo considerado e que, em um intervalo posterior de 2,0 *meses*, ele cresceu 5,5 *cm*. Com essas informações, não é possível saber em qual desses dois intervalos ele cresceu mais rapidamente. Para isso, devemos considerar a taxa média de variação.

3. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

Sabemos que André cresceu 2,0 *cm* de 2,0 a 2,5 meses de idade e 5,5 *cm* de 2,5 a 4,5 meses. Para sabermos em qual desses intervalos ele cresceu mais rapidamente, devemos comparar a variação de sua altura com a variação correspondente de sua idade, por meio de uma razão, como a seguir:

No intervalo $[2,0; 2,5]$,

$$\frac{\text{variação da altura}}{\text{variação da idade}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(2,5) - f(2,0)}{2,5 - 2,0} = \frac{51,5 - 49,5}{2,5 - 2,0} = \frac{2,0}{0,5} = 4,0 \text{ cm / mês}$$

E no intervalo de $[2,5; 4,5]$,

$$\frac{\text{variação da altura}}{\text{variação da idade}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(4,5) - f(2,5)}{4,5 - 2,5} = \frac{57,0 - 51,5}{4,5 - 2,5} = \frac{5,5}{2,0} = 2,75 \text{ cm / mês}$$

Esses cálculos permitem que comparemos a “velocidade de crescimento” do André nos dois intervalos considerados: apesar de ele ter crescido apenas $2,0 \text{ cm}$ no primeiro intervalo, sua velocidade de crescimento aí foi de $4,0 \text{ cm/mês}$.

A informação fornecida por essa razão permite que tenhamos uma estimativa da altura do André, caso seu crescimento fosse constante mês a mês. A última razão, por exemplo, significa que, se o crescimento de André fosse constante a cada mês no intervalo $[2,5; 4,5]$, ele cresceria $2,75 \text{ cm}$ a cada mês. Entretanto, pela Tabela 1, vemos que:

- de $2,5$ a $3,5$ meses ele cresceu $3,0 \text{ cm}$;
- de $3,5$ a $4,5$ meses ele cresceu $2,5 \text{ cm}$.

A razão entre a variação da altura e a variação da idade é denominada **taxa média de variação** da altura em relação à idade. Observe que a unidade de medida da taxa média de variação é a razão entre a unidade de medida da altura e a unidade de medida da idade. Essas informações são sumarizadas na definição a seguir:

3.1 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D . Se $a, b \in D$, a **taxa média de variação** de y correspondente à variação de x no intervalo $[a, b]$ é definida por:

$$\frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

E a unidade de medida de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é $\frac{\text{unidade de medida de } y}{\text{unidade de medida de } x}$.

A velocidade média de um corpo em movimento é um exemplo clássico de taxa média de variação, como veremos a seguir.

3.2 Exemplo

Um objeto se move ao longo de uma linha reta de modo que sua posição em relação ao ponto de partida, após t minutos, é $p = s(t) = t^2 - 2t + 6$.

- a) Após 3 minutos, o objeto estará em uma posição igual a

$$s(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 6 = 9 \text{ m}.$$

O valor $s(3)$ é a posição em que o objeto se encontra, com relação ao ponto de partida, após 3 *min*.

- b) A variação da posição do objeto quando t varia de 3 a 5 *min* é igual a

$$\Delta p = s(5) - s(3) = 21 - 9 = 12 \text{ m.}$$

A quantidade Δp é a distância percorrida pelo objeto no intervalo de tempo $[3, 5]$.

- c) A taxa média de variação do objeto no intervalo $[3, 5]$ é igual a

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = \frac{21 - 9}{5 - 3} = \frac{12}{2} = 6,0 \text{ m/min.}$$

A quantidade $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ é a velocidade média do objeto quando o tempo varia de 3 a 5 *min*, ou seja, nesse intervalo, o objeto tem uma velocidade média igual a 6,0 *m/min*.

Vocês devem ter observado no exemplo do André que, em seu primeiro ano de vida, ele cresceu o tempo todo, e a taxa média de variação era sempre positiva (exceto no primeiro mês, em que sua altura permaneceu constante, e a taxa média foi nula). Essa observação não é coincidência: há uma relação entre o sinal da taxa média de variação de uma função e seu crescimento ou decrescimento.

4. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO E SEU CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO

Antes de apresentarmos a relação, vamos definir o que vem a ser função crescente e função decrescente:

4.1 Definição

- a) Dizemos que uma função f é **crescente** em um intervalo I se, e somente se, para quaisquer a, b neste intervalo obtiver-se:

$$\text{se } a < b \text{ então } f(a) < f(b).$$

- b) Dizemos que uma função f é **decrescente** em um intervalo I se, e somente se, para quaisquer a, b neste intervalo obtiver-se:

$$\text{se } a < b \text{ então } f(a) > f(b).$$

A relação entre taxa média de variação de uma função e seu crescimento é apresentada na proposição a seguir:

4.2 Proposição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a, b \in D$.

- a) Se f é crescente em $[a, b]$, então a taxa média de variação de f nesse intervalo é positiva.
- b) Se f é decrescente em $[a, b]$, então a taxa média de variação de f nesse intervalo é negativa.
- c) Se f é constante em $[a, b]$, então a taxa média de variação de f nesse intervalo é nula.

Demonstração²

Na demonstração de uma proposição matemática, devemos considerar a hipótese como verdadeira e mostrar que a tese decorre da hipótese, por meio de raciocínio lógico-dedutivo. No caso da proposição aqui considerada, temos as afirmativas a), b) e c) para serem demonstradas. Vamos demonstrar apenas a parte a) e deixaremos as partes b) e c) a cargo do leitor. Destacamos, a seguir, a hipótese e a tese da parte a):

Hipótese: a função f é crescente no intervalo $[a, b]$.

Tese: a taxa de variação de f em $[a, b]$ é positiva.

Para mostrar a tese, devemos considerar a taxa média de variação de f em $[a, b]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sabemos que $a < b$ (deve ser assim para podermos falar no intervalo $[a, b]$) e, por hipótese, f é crescente em $[a, b]$. Portanto, pela Definição 4.1, temos que $f(a) < f(b)$.

Assim, $\Delta y = f(b) - f(a) > 0$ e $\Delta x = b - a > 0$.

Portanto, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

4.3 Exercício

Demonstre as partes b) e c) da Proposição 4.2.

² Como esta é a primeira demonstração desenvolvida neste livro, vamos tomar alguns cuidados especiais. Procure compreender não apenas o conteúdo da demonstração, mas também o estilo e estratégias nela utilizados.

5. EXERCÍCIOS

1. Escolha outros intervalos de tempo no exemplo 3.2 e calcule a variação e a taxa média de variação de p nesses intervalos. Interprete os resultados obtidos.
2. Calcule a taxa média de variação da altura de André (exemplo 2.1) considerando diferentes intervalos de sua idade. Interprete os resultados obtidos, com relação ao crescimento da função altura.
3. Calcule a taxa média de variação da altura de André no intervalo de 0 a 4,5 *meses* e compare com as taxas médias nos intervalos de 0 a 1 *mês*, 1 a 2 *meses*, 2,5 a 3,5 *meses*, 3,5 a 4,5 *meses*.
4. A tabela abaixo fornece a quantidade Q (dada em *mg*) de uma determinada substância contida em um recipiente em função do tempo t (dado em *horas*):

t (horas)	0	1	2	3	4	5
Q (mg)	125	75	45	27	16,2	9,7

- a) Calcule a taxa média de variação no intervalo de 2 a 5 *horas* e interprete o resultado. A função é crescente ou decrescente nesse intervalo?
 - b) Calcule a taxa média de variação em outros intervalos e interprete o resultado.
5. Seja $y = f(x)$ uma função com domínio IR definida por $y = -x^3 + 2x^2 - 0,5x + 7$. Calcule a variação e a taxa média de variação de $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$.

6. REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* *Cálculo e aplicações*. Tradução E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1999. 329 p.

SUPERAVIT. Tarifa de energia elétrica será reajustada em sete estados. Disponível em: <<http://www.superavit.com.br/>>. Acesso em: 21 ago. 2006.

Funções lineares

OBJETIVO

O objetivo desta aula é realizar um estudo detalhado das funções lineares. Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de identificar funções lineares e o formato de seu gráfico, seja por meio de sua fórmula algébrica ou por meio de características do fenômeno que, porventura, ela venha representar.

1. INTRODUÇÃO

Nas aulas anteriores, discutimos aspectos gerais relativos a funções. Com esta aula, começaremos a focalizar alguns tipos especiais de funções, a fim de as estudarmos em detalhes.

As primeiras a serem consideradas são as funções lineares. Elas são relativamente simples, com relação às suas fórmulas algébricas e a seus gráficos, e podem ser usadas para modelar diversos fenômenos de nosso dia-a-dia.

2. EXEMPLO: PREÇO DA CORRIDA DE TÁXI

Quando utilizamos um táxi como meio de transporte, a cobrança desse serviço é feita por meio de duas taxas: a bandeirada e o quilômetro rodado. A bandeirada é um valor fixo que é cobrado assim que entramos no táxi, e o quilômetro rodado é um valor que é adicionado ao preço a cada vez que se completa o percurso de um quilômetro. Em Belo Horizonte, por exemplo, o valor da bandeirada é R\$3,30, e o quilômetro rodado vale R\$1,67 (BELO HORIZONTE, 2006). Isso significa que, se percorrermos um trajeto de 5 km, o preço a ser pago é igual a

$$P = 3,30 + 5 \times 1,67 = 11,65.$$

Um cálculo semelhante pode ser feito para qualquer distância percorrida, o que nos leva a concluir que o preço pago P é função da distância percorrida d , e podemos expressar essa função por meio da seguinte fórmula:

$$P = f(d) = 3,30 + 1,67d.$$

Vamos esclarecer alguns aspectos referentes ao cálculo do preço da corrida de táxi.

Como d é uma distância percorrida, podemos dizer que d é qualquer número real não negativo. Assim, o domínio de P é o intervalo $[0, \infty)$. Mas qual será a imagem de P ?

Sabemos, de nossa experiência, que se o táxi percorrer uma distância que não seja um número inteiro, o cálculo do preço não será realizado exatamente pela fórmula acima. Por exemplo, se o táxi percorrer $6,5 \text{ km}$, o preço a ser pago não será igual a $f(6,5) = 3,30 + 1,67 \times 6,5 = 14,155$.

Para calcular o preço, é como se o taxímetro aplicasse a fórmula acima ao maior inteiro, menor que a distância percorrida. No caso do percurso de $6,5 \text{ km}$, o preço a ser pago será $P = f(6) = 3,30 + 1,67 \times 6 = 13,32$, já que 6 é o maior inteiro menor que $6,5$.

Em outras palavras, o valor a ser pago é alterado apenas nos momentos em que um percurso de um quilômetro é concluído, e esses valores correspondem a $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ e assim sucessivamente. Portanto, a imagem da função P é $\{f(0), f(1), f(2), f(3), \dots\}$. Entretanto, a título de exemplo, vamos considerar que a fórmula $f(d) = 3,30 + 1,67d$ seja utilizada para qualquer valor de d .

3. FUNÇÕES LINEARES

Funções que têm esse formato (constante adicionada ao produto de outra constante pela variável independente) são denominadas **funções lineares**,¹ e vamos defini-las a seguir.

3.1 Definição

Uma **função linear** é uma função que pode ser expressa por uma fórmula do tipo

$$y = f(x) = ax + b$$

na qual x é a variável independente, e a e b são valores constantes.

A constante a é denominada **coeficiente angular**, e a constante b é denominada **coeficiente linear**.²

¹ Alguns autores denominam funções expressas dessa forma como “funções afins”. Como não há um consenso a esse respeito, e para relacionar o nome das funções com o formato de seu gráfico, vamos adotar essa nomenclatura.

² O motivo dessa nomenclatura será esclarecido mais à frente.

3.2 Exemplos

1. No exemplo discutido na seção anterior, a função $f(d) = 3,30 + 1,67d$ é linear, e os valores de a e b são, respectivamente, $1,67$ e $3,30$.
2. Na Aula 1, um dos exemplos discutidos foi o da relação entre o volume e a massa de uma certa quantidade de água. A relação foi expressa pela função $m = 1000 V$, na qual m

é a massa de água, medida em kg , e V é o volume ocupado por essa massa, medido em m^3 . Ela é uma função linear com $a = 1000$ e $b = 0$.

O exemplo anterior tem uma característica especial que é destacada a seguir.

3.3 Definição: proporcionalidade direta

Dizemos que uma variável (ou grandeza) y é **diretamente proporcional** a outra variável (ou grandeza) x se existir uma constante k tal que

$$y = kx,$$

na qual k é denominada constante de proporcionalidade.

Assim, grandezas que são diretamente proporcionais estão relacionadas por uma função linear na qual o coeficiente linear vale zero. No exemplo 2 acima, dizemos que m e V são variáveis (ou grandezas) diretamente proporcionais, e a constante de proporcionalidade é 1000.

3.4 Exercícios

1. O preço do quilograma de contra-filé bovino em alguns frigoríficos de Belo Horizonte é R\$8,99 (MERCADO MINEIRO, 2006). Usando o modelo que representa uma função linear, apresentado na Definição 3.1, encontre uma fórmula que expresse o preço pago pelo consumidor, nesses frigoríficos, em função da quantidade de contra-filé que ele comprar. As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais? Justifique.
2. A temperatura Fahrenheit ($^{\circ}F$) é uma função linear da temperatura Celsius ($^{\circ}C$). Sabemos que a temperatura em que a água ferve é igual a $100^{\circ}C$ ou $212^{\circ}F$, e que a temperatura em que a água congela é igual a $0^{\circ}C$ ou $32^{\circ}F$. Usando o modelo que representa uma função linear, encontre uma fórmula que expresse a temperatura Fahrenheit como função da temperatura Celsius. As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais? Justifique.

Você deve saber, de seus estudos anteriores, que o gráfico de uma função linear é uma reta. Mas você já se perguntou por que ele é uma reta? Para responder essa pergunta, vamos dedicar a próxima seção ao cálculo da taxa média de variação de funções lineares.

4. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO DE FUNÇÕES LINEARES

4.1 Exemplo: taxa de variação média da função preço da corrida de táxi

A função preço da corrida de táxi, discutida na seção 2, é dada por $P = f(d) = 3,30 + 1,67d$. A taxa média de variação, por exemplo, no intervalo $[2,5]$ é dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta d} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{11,65 - 6,64}{3} = 1,67.$$

Podemos nos perguntar se o fato de esse valor da taxa de variação ser igual ao valor do coeficiente angular da função é mera coincidência. Será que isso vai acontecer em outros intervalos? Para responder essa questão, devemos calcular a taxa média de variação em um intervalo $[a,b]$ qualquer, com $b \neq a$:

$$\frac{\Delta P}{\Delta d} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(3,30 + 1,67b) - (3,30 + 1,67a)}{b - a} = \frac{1,67(b - a)}{b - a} = 1,67.$$

Portanto, para qualquer intervalo do domínio da função f , temos a taxa média de variação igual ao coeficiente angular 1,67. Mas essa propriedade não é privilégio da função preço da corrida de táxi, como demonstraremos a seguir.

4.2 Proposição

taxa média de variação de uma função linear qualquer

Se $y = f(x) = ax + b$ é uma função linear, com coeficientes a e b , então, a taxa média de variação de $f(x)$ é constante e igual a a , em qualquer intervalo de IR .

Demonstração

Hipótese: $y = f(x) = ax + b$ é uma função linear, com coeficientes a e b .

Tese: a taxa média de variação de $f(x)$ é constante e igual a a , em qualquer intervalo de IR .

Queremos mostrar a tese e ela fala de um intervalo qualquer em IR . No exemplo anterior, consideramos o intervalo qualquer como sendo $[a,b]$, mas essa nomenclatura não é adequada para a proposição que queremos demonstrar aqui, pois as letras a e b já foram utilizadas para definir a função f . Vamos escolher uma outra nomenclatura qualquer. Por exemplo, considere um intervalo qualquer $[m, n]$. Queremos mostrar que a taxa média de variação de f , nesse intervalo $[m,n]$, que é genérico, é constante e igual a a . Devemos, então, calcular essa taxa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(m) - f(n)}{m - n} = \frac{(am + b) - (an + b)}{m - n} = \frac{am + b - an - b}{m - n} = \frac{a(m - n)}{m - n} = a$$

Como desenvolvemos esse cálculo para uma função linear qualquer, em um intervalo real qualquer, podemos concluir que, para qualquer função linear, sua taxa média de variação é sempre constante e igual a seu coeficiente angular.

É importante notar que o cálculo efetuado na demonstração só é válido porque estamos considerando um intervalo $[m, n]$ no qual $m \neq n$, já que estamos efetuando uma divisão por $m - n$.

Já temos, então, elementos para estudar os gráficos das funções lineares com maior cuidado e compreender por que eles são retas.

5. GRÁFICOS DE FUNÇÕES LINEARES

5.1 Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função linear $y = f(x) = 2x + 1$. Da seção anterior, sabemos que a taxa média de variação de f é igual a 2 em qualquer intervalo de seu domínio (que é $\mathbb{R}$). Isso significa, em termos gráficos, que a cada intervalo medindo uma unidade no eixo Ox corresponde um intervalo medindo duas unidades na direção Oy , no gráfico de f . De maneira geral, intervalos de comprimentos iguais, no eixo Ox , determinam, na direção Oy , variações iguais ao dobro da variação em Ox , no gráfico de f . Por isso, o gráfico é uma reta. Se não fosse assim, a variação na direção Oy seria maior ou menor que duas unidades, o que entraria em contradição com o fato de a taxa média de variação ser constante e igual a 2.

Na Figura 1, o intervalo $\overline{CE}$ mede 1 unidade e é paralelo a Ox . O intervalo correspondente a $\overline{CE}$, na direção Oy , com relação ao gráfico de f , é o intervalo $\overline{ED}$, e ele mede 2 unidades. Assim, a cada uma unidade que “andamos para a direita” na direção Ox , o gráfico de f “sobe” 2 unidades na direção Oy .

Além dessa propriedade geral do gráfico de f , é importante detectar alguns de seus pontos, como as interseções com os eixos coordenados.

A interseção com o eixo Oy é o ponto que tem abscissa igual a 0. Assim, sua ordenada será $f(0) = 1$, e o ponto $(0, 1)$ é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy . A interseção com o eixo Ox é o ponto que tem ordenada igual a 0. Assim, sua abscissa será encontrada ao resolvermos a equação $2x + 1 = 0$, o que nos leva a $x = -1/2$, e o ponto $(-1/2, 0)$ é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox . Esses pontos podem ser detectados na Figura 1.

Esses mesmos passos podem ser levados em conta para esboçarmos o gráfico de uma função $y = f(x) = ax + b$ qualquer.

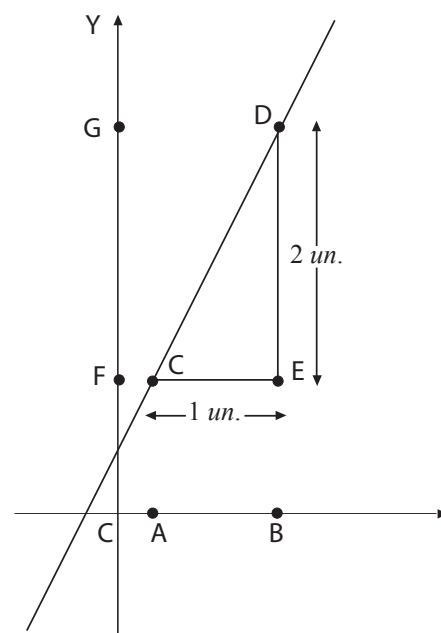


Figura 1 - Comparação entre variações no eixo Ox e no eixo Oy , relativas à função $f(x) = 2x + 1$

5.2 Gráfico da função $f(x) = ax + b$

A interseção do gráfico de f com o eixo Oy é o ponto $(0, f(0))$, que é igual a $(0, b)$, pois

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b.$$

Para encontrarmos a interseção com o eixo Ox , devemos resolver a equação

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a,$$

desde que a seja diferente de 0.

Com relação ao formato do gráfico, cada deslocamento de uma unidade na direção Ox determina um deslocamento de a unidades na direção Oy , sendo que o deslocamento será positivo se a for positivo (e a função é crescente) e negativo se a for negativo (e a função é decrescente).

Considere, novamente, a Figura 1. Como o segmento $\overline{CE}$ é paralelo ao eixo Ox , o ângulo $\hat{DCE}$ é igual ao ângulo que a reta (gráfico da função f) faz com Ox . A tangente desse ângulo é igual à taxa média de variação de f que, por sua vez, é igual a a . Por isso, dizemos que a é a **inclinação** ou o **coeficiente angular** da reta (ou a taxa de variação de y com relação a x).

Quando $a = 0$, ou seja, quando o coeficiente angular é nulo, o ângulo que a reta faz com Ox também é nulo e, portanto, a reta é paralela a Ox .

5.3 Exemplo

A função $y = -2$ é uma função linear que tem coeficiente angular nulo, pois ela pode ser reescrita assim: $y = 0x - 2$. Seu gráfico é uma reta paralela a Ox que intercepta Oy no ponto $(0, -2)$. Isso é coerente, já que a imagem de qualquer valor real pela função é -2 .

Quando queremos encontrar a equação de uma reta que contém dois pontos dados, basta calcularmos a taxa média de variação a da função levando em conta esses dois pontos e impormos a condição de que a taxa média de variação entre qualquer ponto (x, y) de seu gráfico e qualquer um dos pontos dados também seja a . Vejam o exemplo a seguir.

5.4 Exemplo

Encontre a equação da reta que contém os pontos $(0, 3)$ e $(-1, 1)$.

O coeficiente angular da reta será

$$a = \frac{1 - 3}{-1 - 0} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Seja (x, y) um outro ponto qualquer da reta procurada. Para tal, a taxa média de variação entre (x, y) e $(0, 3)$ (ou entre (x, y) e $(-1, 1)$) também deve ser igual a 2:

$$2 = \frac{y-3}{x-0} \Rightarrow y-3 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x + 3.$$

Portanto, a equação é $y = 2x + 3$.

6. EXERCÍCIOS

1. Encontre a equação da reta que contém os pontos $(-7, 2)$ e $(0, 0)$.
2. Esboce o gráfico das seguintes funções:
 - a) $f(x) = -x + 1$;
 - b) $g(x) = -\sqrt{2}$;
 - c) $h(x) = x/2$.
3. Determine as interseções da reta $5y - 2x + 4 = 0$ com os eixos coordenados.
4. Avalie se as tabelas a seguir podem representar funções lineares. Justifique.

a)

x	10	15	20	30
y	-7	3	13	33

b)

t	-1	0	1	2
s	0	2	4	6

7. REFERÊNCIAS

BELO HORIZONTE. Tabela de preços de táxi. Disponível em: http://www.bhtrans.pbh.gov.br/bhtrans/transporte/tab_preco_taxi.asp. Acesso em: 30 nov. 2006.

MERCADO MINEIRO. Pesquisa de preços de carnes. Disponível em: <http://www.mercadomineiro.com.br/carnes.jsp#>>. Acesso em: 20 dez. 2006.

Algumas funções do tipo potência inteira

OBJETIVO

Nesta aula, apresentaremos propriedades gerais e traçaremos os gráficos de algumas funções do tipo $f(x) = ax^n$, nas quais a é constante, para alguns valores particulares do expoente inteiro n . Posteriormente, estudaremos métodos bem acurados de fazer gráficos de curvas que justificarão os esboços aqui apresentados, baseados em técnicas do Cálculo.

1. INTRODUÇÃO

A aula anterior foi dedicada à discussão de funções lineares, e vimos que, entre outras coisas, elas possuem taxa de variação média constante em qualquer intervalo de seu domínio. Entretanto, existem vários outros fenômenos que não têm essas características, como é o caso do movimento de queda livre, que é modelado pela função $s = \frac{1}{2}gt^2$, como veremos a seguir.

2. FUNÇÕES QUADRÁTICAS DO TIPO $y = ax^2$

2.1 Exemplo: queda livre

Quando um corpo cai em queda livre, sujeito apenas à força da gravidade, desprezada a resistência do ar, o seu deslocamento vertical é dado pela fórmula

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

na qual g representa a aceleração da gravidade ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$), t representa o tempo (em segundos) percorrido desde o instante em que o objeto começou a cair, e o espaço percorrido s é medido em metros.

De acordo com esta fórmula, o espaço percorrido pelo objeto no primeiro segundo é $s(1) = \frac{1}{2}g \approx 4,9m$, enquanto o espaço percorrido pelo mesmo objeto nos dois primeiros segundos é dado por $s(2) = \frac{1}{2}g2^2 = 2g \approx 19,6m$. Portanto, ao dobrar o tempo, o espaço percorrido não é dobrado, o que mostra que não há uma relação de proporcionalidade direta entre s e t .

Observe também que o espaço percorrido pelo objeto em intervalos iguais a um segundo, por exemplo, não é o mesmo:

$$\frac{s(2)-s(1)}{2-1} = 1,5g \approx 14,7m/s; \quad \frac{s(3)-s(2)}{3-2} = 2,5g \approx 24,5m/s$$

Temos então que, diferentemente da função linear, a taxa média de variação desta função não é constante.

O movimento de queda livre é um dos fenômenos que não são modelados por funções lineares, mas sim por uma função do tipo $y = ax^2$. A seguir estudaremos as propriedades dessas funções.

2.2 A parábola $y = x^2$

Certamente a função $f(x) = x^2$ já é conhecida por vocês desde a escola básica, e nesta seção apresentaremos as suas principais propriedades que serão utilizadas no decorrer do curso. Esta função é chamada *quadrática* porque ela é expressa por um polinômio do 2º grau.

Como para qualquer x real é possível efetuar o produto $x \cdot x = x^2$, o seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Se x é um número real temos que

a quantidade x^2 é zero, se, e somente se, $x = 0$;

$x^2 > 0$ para qualquer número real $x \neq 0$.

Isso significa que o gráfico desta função está situado somente nos 1º e 2º quadrantes, isto é, os pontos do gráfico da função $f(x) = x^2$ possuem ordenadas não negativas.

Além disso, o *valor mínimo* que a função assume é zero, e o ponto do gráfico no qual esse valor mínimo é assumido é a origem $O = (0,0)$.

Para valores negativos de x , temos que a função é decrescente, isto é, à medida que x cresce os valores correspondentes de y decrescem; por exemplo, temos que

$$-3,7 < -\sqrt{2} \quad \text{mas} \quad (-3,7)^2 = 13,69 > (-\sqrt{2})^2 = 2.$$

No caso geral, se a e b são negativos e $a < b$, então $(a)^2 < (b)^2$.

Para valores positivos de x , a função é crescente, isto é, à medida que os valores de x crescem, os valores correspondentes de y também crescem; por exemplo, temos que

$$14,25 > \sqrt{20} \quad \text{e} \quad (14,25)^2 = 203,0625 > (\sqrt{20})^2 = 20.$$

No caso geral, se a e b são positivos e $a < b$, então $(a)^2 < (b)^2$.

O gráfico da função $f(x) = x^2$ tem a forma mostrada na Figura 1. Esta curva é chamada de *parábola*, e, neste caso, a origem (ponto de mínimo) é chamada de *vértice* da parábola.

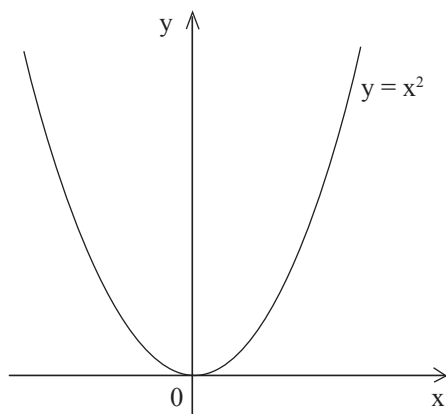


Figura 1 - Gráfico da parábola $y = x^2$

A curva está virada para cima e dizemos que ela é *côncava para cima*.¹ Observe que, para valores pequenos de x , a quantidade x^2 também é muito pequena e menor do que x (por exemplo, se $x = 10^{-5}$ então $x^2 = 10^{-10}$). De fato,

$$\text{se } 0 < x < 1, \text{ então, } 0 < x^2 < x$$

(para obter a segunda desigualdade basta multiplicar a primeira por x , que é positivo). Graficamente, isso significa que no intervalo $(0, 1)$ a parábola está abaixo da reta $y = x$.

¹ Os conceitos de crescimento e decrescimento de funções assim como de concavidade para cima e para baixo de gráficos serão retomados após a introdução do conceito de derivada.

Por outro lado, para x muito grande, a quantidade x^2 também é muito grande e maior do que x (por exemplo, se $x = 327.241.823$ então $x^2 = 107.087.210.720.363.329$). Este resultado geral pode ser obtido observando-se que

$$\text{se } x > 1, \text{ então } x^2 > x$$

(basta multiplicar a primeira desigualdade por x para obter a segunda).

Graficamente, isso significa que, para $x > 1$, a parábola está acima da reta $y = x$, e que para valores muito grandes de x a função $y = x^2$ cresce muito mais rapidamente que a função $y = x$.

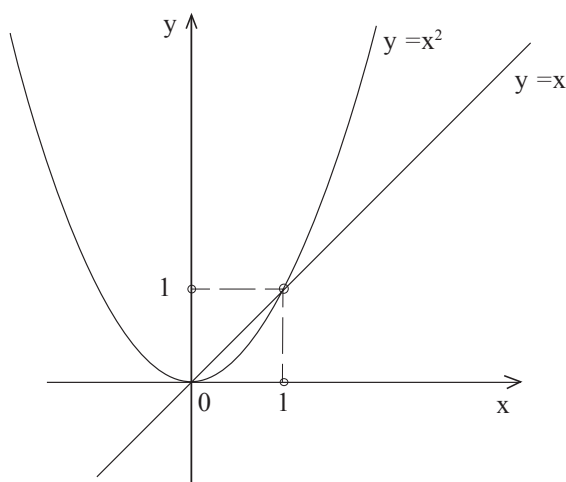


Figura 2 - Posição da parábola $y = x^2$ relativa à reta $y = x$

Observe também que, se “dobrarmos o plano cartesiano” sobre o eixo Oy , a parte da parábola que está no 1º quadrante se sobrepõe à do 2º quadrante, isto é, a parábola é *simétrica em relação ao eixo Oy* .

2.2.1 Definição

Dizemos que dois pontos P e Q são **simétricos em relação ao eixo das ordenadas Oy** se a reta PQ é perpendicular ao eixo Oy , e os pontos P e Q são equidistantes de Oy (isto é, ambos os pontos estão à mesma distância do eixo).

Isso significa que os pontos P e Q pertencem a uma reta horizontal (pois é paralela ao eixo Ox), digamos de equação $y = b$ e que as suas abscissas são simétricas em relação à origem.

Portanto, em coordenadas, temos que, se $P = (a, b)$ então $Q = (-a, b)$.

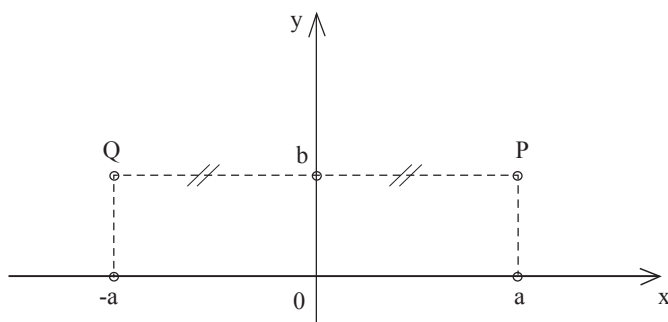


Figura 3 - Simetria em relação ao eixo Oy

Como, para qualquer número real a , vale a propriedade $a^2 = (-a)^2$, os pontos de coordenadas (a, a^2) e $(-a, a^2)$ estão no gráfico da função $y = x^2$ e são simétricos em relação ao eixo Oy . Portanto, a parábola é simétrica em relação a Oy . Funções com essa característica possuem um nome especial, que apresentaremos a seguir.

2.2.2 Definição

Seja f uma função com domínio D e tal que se $x \in D$, então $-x \in D$. Dizemos que f é uma função **par** se $f(x) = f(-x)$ para qualquer $x \in D$.

Esta condição algébrica se traduz graficamente pela simetria do gráfico da função em relação ao eixo Oy , o que demonstraremos a seguir.

2.2.3 Propriedade

Se f é uma função par, então o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas Oy .

Demonstração

Se f é uma função par, então, para qualquer número real a , temos que $f(a) = f(-a)$. Portanto, para qualquer a real, os pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (-a, f(-a)) = (-a, f(a))$ pertencem ao gráfico de f e são simétricos em relação ao eixo Oy .

2.3 A função $y = x^2$

A função $y = -x^2$ também está definida para qualquer número real, isto é, o seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$. Ela é par, pois $f(-a) = -(-a^2) = -a^2 = f(a)$ e, portanto, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy .

Temos também que:

se $x \neq 0$, então $-x^2 < 0$; e

$-x^2 = 0$ se, e somente se $x = 0$.

Portanto, o seu gráfico está situado nos 3º e 4º quadrantes, e a origem $(0, 0)$ é o seu ponto mais alto (*ponto de máximo*).

Observe que, para qualquer número real a , o ponto $P = (a, a^2)$ pertence ao gráfico da função $y = x^2$, enquanto o ponto $Q = (a, -a^2)$ pertence ao gráfico da função $y = -x^2$. Esses pontos são *simétricos em relação ao eixo das abscissas Ox* .

2.3.1 Definição

Dizemos que dois pontos P e Q são **simétricos em relação ao eixo das abscissas Ox** se a reta PQ é perpendicular ao eixo Ox , e os pontos P e Q são equidistantes de Ox (isto é, ambos os pontos estão à mesma distância do eixo).

Temos então que os pontos P e Q pertencem a uma reta vertical (pois ela é paralela ao eixo Oy), digamos de equação $x = a$, e que as suas ordenadas são simétricas em relação à origem. Portanto, em coordenadas, temos que se $P = (a, b)$ então $Q = (a, -b)$.

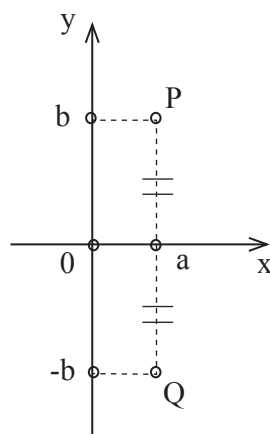


Figura 4 - Simetria em relação ao eixo Ox

O fato de o gráfico da parábola $y = -x^2$ ser simétrico ao gráfico da parábola $y = x^2$ em relação ao eixo Ox significa que se “dobrarmos o plano cartesiano sobre o eixo Ox ”, o gráfico da função $y = -x^2$ se sobrepõe ao gráfico da parábola $y = x^2$. Portanto, o gráfico da função $y = -x^2$ possui o aspecto mostrado na figura 5 e é também uma *parábola* com *vértice* na origem. Essa função é crescente para $x < 0$ e decrescente para $x > 0$. Como ela está virada para baixo, dizemos que ela é *côncava para baixo*.

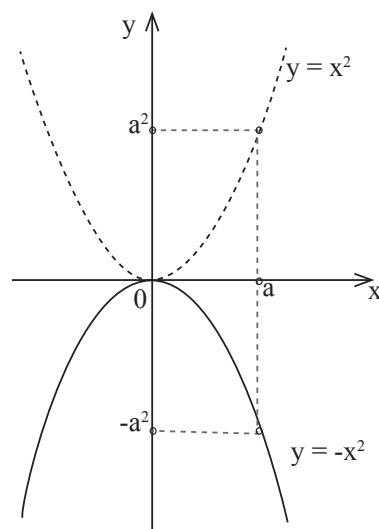


Figura 5 - Gráfico da função $y = -x^2$

2.4 A função $y = ax^2$

Ao multiplicar o segundo membro da equação $y = x^2$ por uma constante positiva a , os gráficos das funções quadráticas obtidas são também parábolas, viradas para cima, e a única diferença está na *abertura* delas.

Por exemplo, as funções $y = 2x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ são pares, e os seus gráficos têm o mesmo aspecto da função $y = x^2$. Entretanto, observe que, para qualquer número real não nulo x , temos que $2x^2 > x^2$, o que significa que as parábolas correspondentes só se intersectam na origem e, para uma mesma abscissa, a ordenada da primeira é maior do que a ordenada da segunda. No gráfico, isso significa que, para qualquer número real a , o ponto de coordenadas $(a, 2a^2)$ está sempre acima do ponto de coordenadas (a, a^2) .

Já para as funções $y = x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ temos que, para qualquer número real não nulo x , vale a desigualdade $x^2 > \frac{1}{2}x^2$. Portanto, o gráfico da segunda curva está abaixo do gráfico da parábola $y = x^2$.

2.4.1 Exercícios

1. Utilizando as informações anteriores, esboce os gráficos das funções $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ e $y=x^2$ em um mesmo sistema de coordenadas.
2. Os gráficos das funções $y=-x^2$, $y=-2x^2$ e $y=-\frac{1}{2}x^2$ são parábolas côncavas para baixo, com vértice na origem. Qual é a relação entre eles? Esboce os gráficos dessas três funções em um mesmo sistema de coordenadas e escreva em linguagem algébrica as desigualdades correspondentes às posições relativas das três curvas.

3. FUNÇÕES DO TIPO $y = ax^n$, EM QUE n É PAR

A função $y = x^4$ possui domínio $\mathbb{R}$, é par e também satisfaz as seguintes propriedades:

para qualquer $x \neq 0$, $x^4 > 0$; e

$x^4 = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Na verdade, para qualquer n par, esses resultados são verdadeiros para as funções $y = x^n$. Portanto, independentemente do valor de n par, o gráfico da função $y = x^n$ está situado nos 1º e 2º quadrantes, e a origem é o seu ponto mais baixo. Além disso, como $(-a)^n = a^n$, a função $f(x) = x^n$ é par e, conseqüentemente, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

3.1 Exercício

Utilizando uma calculadora, preencha a tabela:

x	x^2	x^4	x^6
-21			
$-\sqrt{3}$			
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			
0,1			
$\sqrt{3}$			
10,3			

Qual é a sua conclusão sobre a posição relativa das curvas $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$?

Observe que para qualquer valor de n par, o gráfico da função $y = x^n$ passa pelos pontos $(1,1)$ e $(-1,1)$. É fácil ver (exercício a seguir) também que as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} x < -1 \text{ ou } x > 1 &\Rightarrow \dots x^6 > x^4 > x^2 \\ \text{ou} \\ -1 < x < 1; x \neq 0 &\Rightarrow \dots x^6 < x^4 < x^2. \end{aligned}$$

3.2 Exercício

Mostre que as desigualdades anteriores são verdadeiras.

Graficamente, temos que os gráficos das funções $y = x^n$, em que $n = 2, 4, 6, \dots$, ficam cada vez mais próximos do eixo Ox no intervalo $(-1, 1)$ à medida que o expoente aumenta e, fora deste intervalo, eles vão ficando cada vez mais em pé, pois para x muito grande, quanto maior o valor de n , maior será o valor correspondente a x^n .

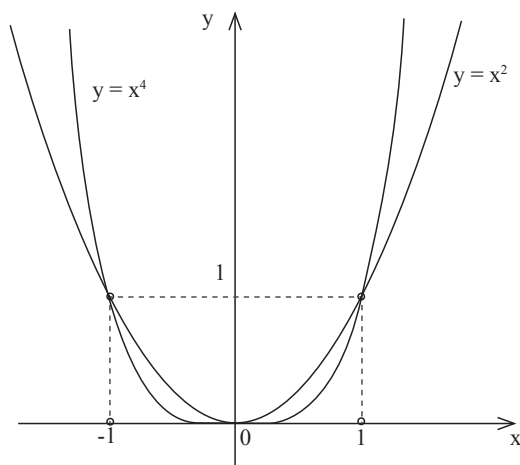


Figura 6 - Gráficos de $y = x^2$, $y = x^4$

Apesar de o formato do gráfico da função $y = x^n$, para n par, ser parecido com o da função $y = x^2$, essas curvas não recebem o nome de parábola. Somente o formato não identifica uma parábola. (Veja a definição de parábola em um livro de Geometria Analítica.)

3.3 Exercícios

1. As funções $y = ax^n$, em que n é par e o coeficiente a é positivo, possuem as mesmas propriedades das funções apresentadas anteriormente, sendo que o coeficiente a interfere somente na abertura da curva. Esboce os gráficos das funções $y = x^4$ e $y = 5x^4$ em um mesmo sistema de coordenadas.
2. Mostre que os gráficos das funções $y = ax^n$ e $y = -ax^n$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas.
3. Esboce os gráficos das funções $y = -x^2$, $y = -x^4$ e $y = -x^6$ em um mesmo sistema de coordenadas e escreva, em linguagem algébrica, as desigualdades correspondentes às posições relativas das três curvas.

4. AS FUNÇÕES $y = ax^n$, EM QUE n É ÍMPAR

4.1 A cúbica $y = x^3$

O domínio da função $f(x) = x^3$ é o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, e $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Diferentemente da função quadrática, temos que

$$x > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \text{ e } x < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0.$$

Portanto, o gráfico desta função está situado no 1º e no 3º quadrantes e, assim como os gráficos das funções $y = ax^2$, ele intersecta os eixos coordenados somente na origem $O = (0,0)$.

Para $x > 1$ temos que $x^3 > x^2 > x$.

(por exemplo, se $x = 1,01$, então $x^2 = 1,0201$ e $x^3 = 1,030301$), portanto a curva $y = x^3$ se afasta do eixo das abscissas quando x é muito grande, estando acima da parábola $y = x^2$.

Por outro lado, se $0 < x < 1$, então temos que $x^3 < x^2 < x$

(por exemplo, se $x = 0,021$, então $x^2 = 4,41 \times 10^{-4}$ e $x^3 = 9,261 \times 10^{-6}$), o que significa que para valores positivos de x próximos de zero, a curva $y = x^3$ está bem próxima do eixo das abscissas e abaixo da parábola $y = x^2$.

Para qualquer a real, os pontos de coordenadas (a, a^3) e $(-a, -a^3)$ pertencem ao gráfico da função $f(x) = x^3$, pois $(-a)^3 = -a^3$. Esses pontos são *simétricos em relação à origem*.

4.1.1 Definição

Dois pontos P e Q são **simétricos em relação à origem O** , se, e somente se, O é ponto médio do segmento de reta PQ .

Em coordenadas, se $P = (a, b)$, então a equação da reta que passa pelos pontos P e O é $y = \frac{b}{a}x$. Logo, o ponto $Q = (-a, -b)$ também pertence a essa reta e $d(P, O) = d(Q, O)$, mostrando assim que eles são simétricos em relação à origem.

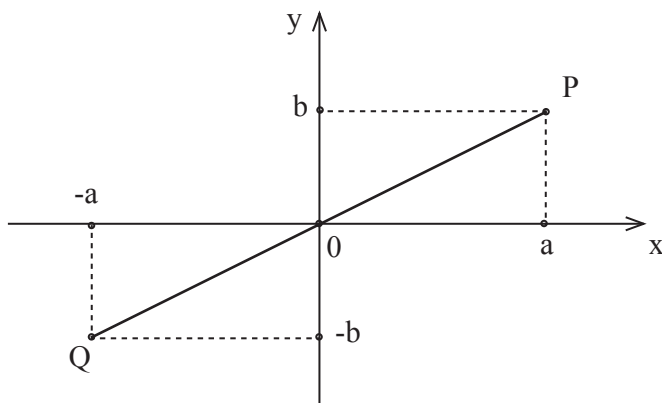


Figura 7 - Simetria em relação à origem

Funções que satisfazem a condição $f(-a) = -f(a)$ possuem um nome especial que apresentaremos a seguir.

4.1.2 Definição

Seja f uma função com domínio D e tal que se $x \in D$, então $-x \in D$. Dizemos que f é uma função **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para qualquer $x \in D$.

Essa condição algébrica se traduz graficamente pela simetria do gráfico da função em relação à origem, resultado que será demonstrado a seguir.

4.1.3 Propriedade

Se f é uma função ímpar, então o seu gráfico é simétrico em relação à origem.

Demonstração

Se f é uma função ímpar, e os números reais a e $-a$ pertencem ao seu domínio D , então $f(-a) = -f(a)$.

Portanto, os pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (-a, f(-a)) = (-a, -f(a))$ pertencem ao gráfico de f , e eles são simétricos em relação ao ponto $O = (0,0)$, que é a origem do sistema de coordenadas.

O gráfico de $f(x) = x^3$ é, assim, simétrico em relação à origem, e o seu esboço está apresentado a seguir. Ela é sempre crescente, e o seu gráfico é côncavo para baixo para $x < 0$ e côncavo para cima para $x > 0$.

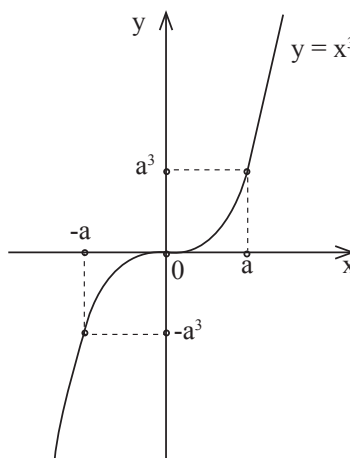


Figura 8 - Gráfico da função $y = x^3$

4.1.4 Exercícios

1. Verifique que se $a < b$, então $a^3 < b^3$, para alguns valores particulares de a e de b .
2. As funções $y = ax^3$ em que o coeficiente a é positivo possuem as mesmas propriedades da função $y = x^3$ apresentadas anteriormente, sendo que o coeficiente a interfere somente na abertura da curva. Esboce os gráficos das funções $y = 2x^3$ e $y = 5x^3$ em um mesmo sistema de coordenadas.

3. Mostre que a função $y = -x^3$ é ímpar e que o seu gráfico é simétrico ao gráfico da função $y = x^3$ em relação ao eixo das abscissas Ox , isto é, mostre que o ponto $P = (a, b)$ pertence ao gráfico da função $y = -x^3$, se, e somente se, o ponto $Q = (a, -b)$ pertence ao gráfico da função $y = -x^3$.
4. Esboce os gráficos das funções $y = -2x^3$ e $y = -5x^3$ em um mesmo sistema de coordenadas.

4.2 Funções do tipo $y = ax^n$, para n ímpar

Para qualquer valor ímpar do expoente n , as funções $y = ax^n$ possuem domínio $\mathbb{R}$ e intersectam os eixos somente na origem. Elas são funções ímpares e, portanto, seus gráficos são simétricos em relação à origem. Para a positivo, independente do valor de n ímpar, o gráfico dessa função está situado no 1º e no 3º quadrantes e, como $(-1)^n = (-1)$ (para n ímpar) e $1^n = 1$, ele passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

4.2.1 Exercício

Utilizando uma calculadora, preencha a tabela:

x	x^3	x^5	x^7
-21			
$-\sqrt{3}$			
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			
0,1			
$\sqrt{3}$			
10,3			

Qual é a sua conclusão sobre a posição relativa das curvas

$$y = x^3, y = x^5 \text{ e } y = x^7 ?$$

É fácil ver (exercício a seguir) que as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \dots < x^7 < x^5 < x^3 < x$$

$$x > 1 \Rightarrow \dots > x^7 > x^5 > x^3 > x$$

4.2.2 Exercício

Mostre que as desigualdades anteriores são verdadeiras.

No intervalo $(0, 1)$, as desigualdades anteriores significam graficamente que os gráficos das funções $y = x^n$, em que $n = 3, 5, 7 \dots$ ficam cada vez mais próximos do eixo Ox à medida que o expoente aumenta.

Para $x > 1$, o significado geométrico das desigualdades é que os gráficos vão ficando cada vez mais em pé, pois para x muito grande, quanto maior o valor de n , maior será o valor correspondente a x^n .

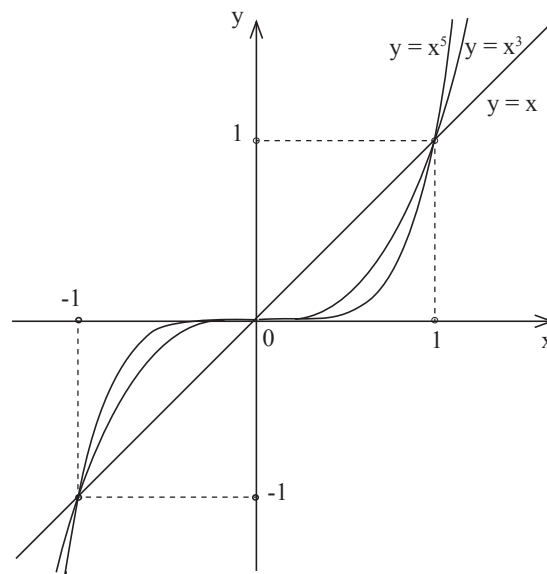


Figura 9 - Gráficos das curvas $y=x$, $y=x^3$ e $y=x^5$

4.2.3 Exercício

Esboce os gráficos das funções $y = -x^3$, $y = -x^5$ e $y = -x^7$ em um mesmo sistema de coordenadas e escreva, em linguagem algébrica, as desigualdades correspondentes às posições relativas das três curvas.

5. ALGUMAS FUNÇÕES DO TIPO $y = ax^{-n}$, EM QUE $n > 0$

5.1 Exemplo: Lei de Boyle

A experiência mostra que, se a temperatura T de uma dada massa gasosa for mantida constante, então, para valores suficientemente baixos da densidade, o volume V deste gás será inversamente proporcional à pressão p exercida sobre ele, isto é, o produto da pressão p pelo volume V é constante. Esse resultado é conhecido como *lei de Boyle* e pode ser expresso através da seguinte relação

$$pV = k \text{ ou } V = \frac{k}{p} \text{ em que } k \text{ é uma constante.}$$

Nesse caso, o volume é expresso como uma potência inteira da pressão ($V = k p^{-1}$).

A função $V = \frac{k}{p}$ é um caso particular das funções $y = \frac{a}{x}$, cujas propriedades fundamentais serão apresentadas a seguir.

5.2 A hipérbole $y = \frac{1}{x}$

A função $y = \frac{1}{x}$ está definida para qualquer número real x não-nulo.

Temos que

$$\text{se } x > 0 \text{ então } \frac{1}{x} > 0; \text{ e}$$

$$\text{se } x < 0 \text{ então } \frac{1}{x} < 0.$$

Portanto, o seu gráfico está situado no 1º e no 3º quadrantes. Esta curva é chamada de *hipérbole*, e a parte que está em cada um dos quadrantes é chamada de *ramo da hipérbole*.

Observe que, para valores positivos e bem pequenos de x , o valor $\frac{1}{x}$ é muito grande (por

exemplo, se $x = 0,00000123$, então $\frac{1}{x} = 813.008,1301$) e, para valores muito grandes de x , o

valor $\frac{1}{x}$ é muito pequeno (por exemplo, se $x = 12.345.678$, então $\frac{1}{x} = 8,10000664 \times 10^{-8}$).

Geometricamente temos que, quando a abscissa x está muito próxima da origem e à direita dela, a ordenada correspondente é muito grande, ou seja, a distância entre o gráfico dessa função e o eixo das ordenadas é muito pequena e fica cada vez menor à medida que x se aproxima da origem.

Temos também que, quando a abscissa x é muito grande, a ordenada correspondente é muito pequena, ou seja, a distância entre o gráfico dessa função e o eixo das abscissas é muito pequena e fica cada vez menor à medida que x cresce.²

Como o ponto $P = \left(a, \frac{1}{a}\right)$ pertence a gráfico desta função, assim como o ponto $Q = \left(-a, -\frac{1}{a}\right)$, e, reciprocamente, temos que o ramo que está no 3º quadrante é *simétrico, em relação à origem*, ao ramo que está no 1º quadrante.

Esta curva está esboçada na figura a seguir. Observe que ela é sempre *decrecente, côncava para cima* no 1º quadrante (para $x > 0$) e *côncava para baixo* no 3º quadrante (para $x < 0$).

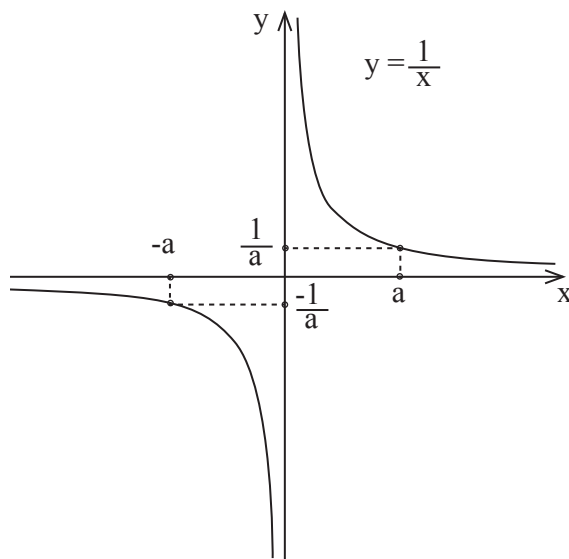


Figura 10 - Gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$

5.2.1 Exercícios

1. A hipérbole $y = -\frac{1}{x}$

O gráfico da hipérbole $y = -\frac{1}{x}$ está situado nos 2º e 4º quadrantes (por quê?) e há uma simetria entre ele e o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ (em relação a qual reta?). Justifique.

Faça um esboço do gráfico de $y = -\frac{1}{x}$.

² As retas $x=0$ e $y=0$ são chamadas *assíntotas* do gráfico e dizemos também que o gráfico se aproxima assintoticamente dessas retas. Posteriormente esse conceito será retomado.

2. As hipérboles $y = \frac{a}{x}$

Generalize os resultados apresentados anteriormente e esboce, em um mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das funções:

a) $y = \frac{2}{x}$ e $y = \frac{5}{x}$;

b) $y = -\frac{2}{x}$ e $y = -\frac{5}{x}$.

5.3 As funções $y = \frac{a}{x^2}$

5.3.1 Exemplo: A Lei de Coulomb

De acordo com a Lei de Coulomb, duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 , separadas por uma distância r , situadas no vácuo, se atraem ou se repelem com uma força F , cujo módulo é dado por

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Se a força F é medida em newtons (N), Q_1 e Q_2 em coulombs (C), e r em metros (m), a constante k_0 tem o valor

$$k_0 = 9,0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}.$$

Esta lei exprime a força (F) entre as cargas em função do inverso do quadrado da distância (r^2), já que Q_1 , Q_2 e k_0 são constantes. Esta função é um caso particular das funções

$y = \frac{a}{x^2}$, que serão apresentadas a seguir.

5.3.2 Propriedades das funções $y = \frac{a}{x^2}$

O domínio das funções $y = \frac{a}{x^2}$ é o conjunto dos números reais

não-nulos, ou seja, seus gráficos não intersectam o eixo Oy .

Se a é positivo, ela é sempre positiva; logo, o seu gráfico está no 1º e no 2º quadrantes. Se a é negativo, ela é sempre negativa, e o seu gráfico está no 3º e no 4º quadrantes.

Como $\frac{a}{x^2} = \frac{a}{(-x)^2}$, há uma simetria, em relação ao eixo Oy , entre as partes (ramos da curva) que estão em cada um dos quadrantes.

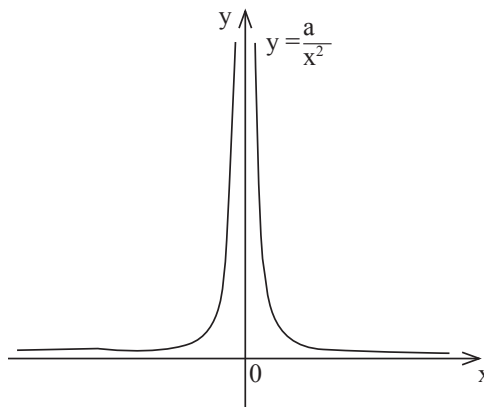


Figura 11 - Gráfico da função $y = \frac{a}{x^2}$, para $a > 0$

6. EXERCÍCIOS

1. Esboce o gráfico da função $y = \frac{-2}{x^2}$ e determine as suas regiões de crescimento e decrescimento. Observe que a distância entre a curva e o eixo das abscissas é muito pequena, para valores de x muito afastados da origem. E também que a distância entre a curva e o eixo das ordenadas fica muito pequena para valores de x muito próximos da origem.
2. Esboce em um mesmo sistema de coordenadas os gráficos das funções $y = \frac{3}{x^2}$ e $y = \frac{7}{x^2}$.

Construindo novas funções

OBJETIVO

Ao fim desta aula, esperamos que você seja capaz de operar com funções, em especial com composição de funções, de combinar funções dadas por mais de uma expressão, de transladar gráficos e de, dada uma determinada expressão algébrica, reconhecer qual o tipo de translação que ela exprime.

1. INTRODUÇÃO

Anteriormente, fizemos um estudo qualitativo de algumas funções expressas por potências inteiras da variável independente. Nesta aula, aprenderemos algumas maneiras de, a partir de funções conhecidas, criar outras, ampliando assim a quantidade de funções à nossa disposição para modelar situações e exemplificar os conceitos abordados no curso.

Trataremos das operações de soma, subtração, produto, quociente e composição de funções e de funções definidas por meio de combinação de fórmulas em diferentes intervalos contidos em $\mathbb{R}$.

Apresentaremos também maneiras de deslocar o gráfico de uma função através de translações horizontais e verticais e de associar deslocamentos do gráfico de uma função às respectivas mudanças na fórmula.

2. OBTENDO NOVAS FUNÇÕES ALGEBRICAMENTE

Uma primeira maneira de se obter novas funções a partir de funções conhecidas é efetuando operações algébricas com elas. É possível estender as operações de soma, subtração, multiplicação e quociente de números reais para as funções. Já trabalhamos com um exemplo no qual a posição s (em m) de um objeto em movimento retilíneo era dado em função do tempo t (em min) pela fórmula $s(t) = t^2 - 2t + 6$. Esta função pode ser vista como a soma de duas funções conhecidas:

a função quadrática $g(t) = t^2$ e a função linear $f(t) = -2t + 6$.

Isso significa que, para qualquer valor de t , $s(t) = g(t) + f(t)$. Por exemplo, se $t=1$, então, substituindo este valor na expressão de $s(t)$, temos que

$$s(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 6 = 1 - 2 + 6 = 5.$$

Por outro lado, substituindo primeiramente esse valor nas expressões de $g(t)$ e de $f(t)$ para depois somá-los temos que $g(1) = 1^2 = 1$ e $f(1) = -2 \times 1 + 6 = 4$ e, conseqüentemente, $s(1) = 1 + 4 = 5$.

De maneira geral, definimos a soma de duas funções como a função cujo valor em cada ponto do domínio é dado pela soma dos valores de cada uma das funções nesse ponto. De maneira análoga, definimos as outras operações de funções.

2.1 Definição

Sejam f e g funções com domínio D . Definimos as funções **soma**, **subtração**, **multiplicação** e **quociente** de f e g por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

As funções $f + g$, $f - g$, fg possuem domínio D , mas o domínio da função $\frac{f}{g}$ é constituído pelos pontos de D para os quais a função g não se anula.

2.2 Exemplos

1. A partir da função $f(x) = x$, podemos obter, por exemplo, a função $h(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 10$, através das operações de soma, multiplicação e subtração, já que $h(x) = [f(x)]^4 - [f(x)]^3 + 5[f(x)]^2 - 7[f(x)] + 10$.

2. A função $q(x) = \frac{1}{x-3}$ pode ser vista como o quociente das funções $f(x) = 1$ (constante e igual a 1) e $g(x) = x - 3$ (linear) e tem como domínio o conjunto.
3. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada polinomial se existem um número natural n e números reais $a_0, a_1, \dots, a_n$, tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Se $a_n \neq 0$, dizemos que f tem grau n .
4. Uma função f é chamada racional se ela pode ser expressa como quociente de dois polinômios $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Neste caso, o seu domínio é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Em Cálculo II, teremos o instrumental necessário para o estudo das propriedades gráficas das funções polinomiais e racionais.

2.3 Composição de funções

Para se obter os valores de funções dadas por expressões algébricas usando uma calculadora, precisamos estar atentos à ordem para apertar as teclas.

Por exemplo, dada a função $h(t) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$, que seqüência de teclas da calculadora devemos escolher para calcular o valor de $h(23,7)$?

Numa calculadora simples deve-se efetuar as operações

$$(23,7)^3 = 13.312,053$$

$$(23,7)^2 = 561,69$$

$$3.(23,7)^2 = 3.(561,69) = 1.685,07$$

$$3.(23,7) = 71,1$$

$$h(23,7) = 13.312,053 + 1.685,07 + 71,1 + 1 = 15.069,223$$

Esta primeira maneira envolve um grande número de contas. Entretanto, se reconhecermos que $h(t)$ é um produto notável: $h(t) = (t+1)^3$, podemos interpretar a ação “calcular o valor de $h(23,7)$ ” como a seguinte seqüência ordenada de comandos:

somar 1 a 23,7 obtendo 24,7

e elevar este último número ao cubo, obtendo 15.069,223.

Para um valor genérico de t , essa última abordagem pode ser vista como uma seqüência da ação de duas funções:

$$1^a - \text{calcular } f(t) = (t+1)$$

$$2^a - \text{calcular } g(u) = u^3, \text{ sendo } u = f(t).$$

Nesse caso, dizemos que a função h é a *composta* das funções f e g .

2.3.1 Definição

Sejam f e g funções com domínios D_1 e D_2 , respectivamente, de tal modo que, se x pertence a D_1 então $f(x)$ pertence a D_2 .

Definimos a função **composta** $g \circ f$ como a função com domínio D_1 , tal que

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

para qualquer x pertencente a D_1 .

Observe que se x é um ponto do domínio D_1 da função f , como exigimos que $f(x)$ pertença ao domínio D_2 de g , então é possível aplicar a função g em $f(x)$. Há, portanto, uma primeira função f e uma segunda função g , e a função composta $g \circ f$ pode ser vista como a ação ordenada dessas duas funções:

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$$

O primeiro comando consiste na ação da função interna (f), e o segundo, na ação da função externa (g).

2.3.2 Exemplo

Suponha que as funções f e g sejam dadas pelas tabelas:

x	$-\sqrt{7}$	-1	-0,5	0	2	$\sqrt{2}$	3/2
$f(x)$	2	-2π	-3	3,6	$3\sqrt{2}$	4	7/2

x	-7	-2π	0	3/2	2	3,6	4
$g(x)$	-0,5	-4	-3,5	0	$3\sqrt{2}$	4	$\sqrt{2}$

Pela definição, para determinar o domínio da função composta $g \circ f$ devemos escolher os valores de x para os quais f está definida em x e g em $f(x)$:

x	$-\sqrt{7}$	-1	$-0,5$	0	2	$\sqrt{2}$	$3/2$
$f(x)$	2	-2π	-3	$3,6$	$3\sqrt{2}$	4	$7/2$
$g(f(x))$	$3\sqrt{2}$	-4	$g(-3)=?$	4	$g(3\sqrt{2})=?$	$\sqrt{2}$	$g(7/2)=?$

Portanto, o domínio da função $g \circ f$ é $D=\{-\sqrt{7}, -1, 0, \sqrt{2}\}$ e ela é dada pela seguinte tabela:

x	$-\sqrt{7}$	-1	0	$\sqrt{2}$
$g \circ f(x)$	$3\sqrt{2}$	-4	4	$\sqrt{2}$

2.3.3 Exercícios

1. Para as funções f e g dadas pelas tabelas anteriores, encontre o domínio e faça a tabela de correspondência para a função composta $f \circ g$.
2. Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^3 + 2x - 2\sqrt{2}$, qual o domínio e a expressão das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$?
3. Se $f(x) = \frac{1}{x}$, calcule a composta $f(f(x))$. Qual é o domínio da função composta?
4. Se $f(x) = x - 2$ e $g(x) = x^2 + 3$, determine:
 - a) $f(g(0))$
 - b) $g(f(0))$
 - c) $f(g(u))$
 - d) $g(f(z))$
 - e) $f(f(x))$
 - f) $g(g(t))$.
5. Se $f(t) = t^3$ e $g(t) = t - 2$, determine:
 - a) $f(t+1)$
 - b) $g(t-1)$
 - c) $f(g(t))$
 - d) $g(f(t))$
 - e) $g(f(t+1))$
 - f) $g(f(t)) + 1$.

3. DEFININDO FUNÇÕES POR PARTES

Nesta seção, mostraremos que nem sempre uma função é representada por uma única fórmula e também como é possível obter funções através da combinação de diferentes expressões em intervalos distintos contidos em $\mathbb{R}$. Inicialmente, retomaremos o exemplo do preço da corrida de táxi apresentado no estudo das funções lineares.

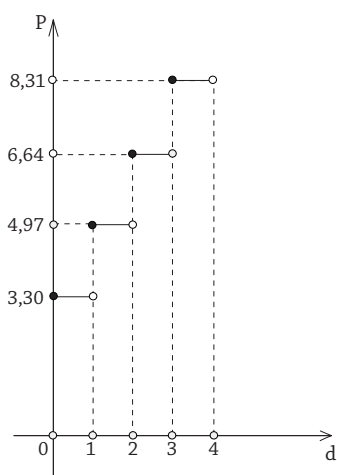


Figura 1 - Gráfico da função preço da corrida de táxi

3.1 Exemplo: preço da corrida de táxi

Como vimos, em Belo Horizonte o valor da bandeirada é R\$3,30, e o quilômetro rodado vale R\$1,67. Se a distância percorrida é um número inteiro positivo, então o preço P a ser pago é dado pela fórmula $P = 3,30 + 1,67d$, e o valor a ser pago é alterado apenas nos momentos em que um percurso de um quilômetro é concluído.

Assim, temos que a função P pode ser expressa por

$$0 \leq d < 1 \Rightarrow P(d) = P(0) = 3,30$$

$$1 \leq d < 2 \Rightarrow P(d) = P(1) = 3,30 + 1,67 \cdot 1 = 4,97$$

$$2 \leq d < 3 \Rightarrow P(d) = P(2) = 3,30 + 1,67 \cdot 2 = 6,64,$$

e assim por diante. O gráfico desta função é formado por vários segmentos de retas horizontais.

3.2 Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Para calcular o valor dessa função em um ponto, precisamos analisar antes se ele é positivo, negativo ou nulo para escolher qual fórmula utilizar. Assim, por exemplo, $f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2$, pois $-\sqrt{2}$ é negativo, e $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, pois $\sqrt{2}$ é positivo.

O seu gráfico é dado pela união da semi-reta $y=x$, localizada no 1º quadrante com a parte da parábola $y=x^2$ que está situada no 2º quadrante.

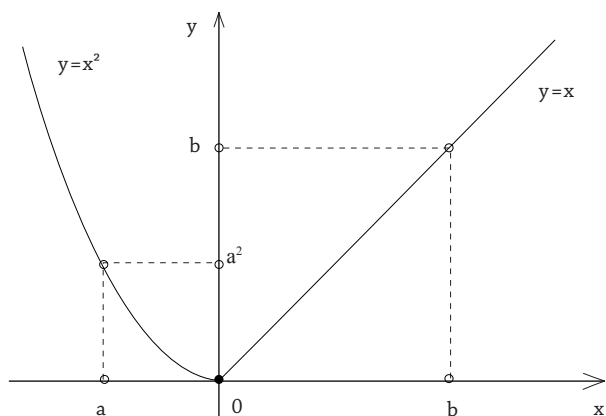


Figura 2 - Gráfico da função dada em partes por $y=x^2$ e $y=x$

3.3 A função valor absoluto

Dado um número real a , podemos definir o seu valor absoluto geometricamente por

$$|a| = d(a, 0),$$

em que 0 representa a origem na reta ordenada e $d(a, 0)$ é a distância de a até a origem 0 da reta. Assim

$$|-2| = d(-2, 0) = 2 \quad \left| \sqrt{7} \right| = d(\sqrt{7}, 0) = \sqrt{7}.$$

A função que associa a cada número real x o seu valor absoluto pode ser expressa por $f(x)=|x|$ ou também pode ser definida em partes pelas expressões

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Ela é uma função par (pois $d(x, 0) = d(-x, 0)$), e o seu gráfico é a reunião de duas semi-retas: a parte da reta $y=x$, que está no 1º quadrante com a parte da reta $y=-x$ que está no 2º quadrante.

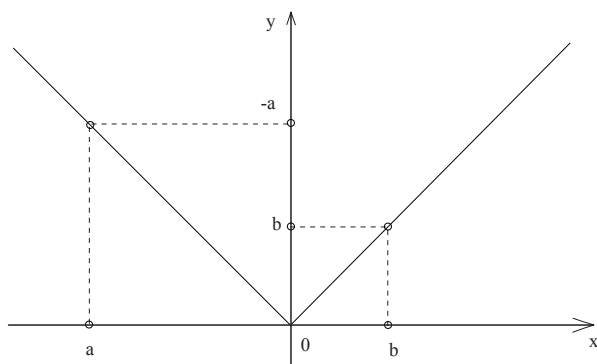
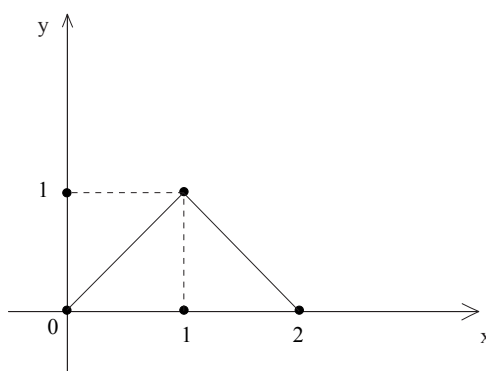


Figura 3 - Gráfico da função valor absoluto

3.4 Exercício

Expresse algebricamente a função dada pelo gráfico a seguir.



4. TRANSLADANDO GRÁFICOS DE FUNÇÕES

4.1 Translações verticais

A partir do gráfico da função $f(x) = x^2$ podemos obter, por exemplo, o gráfico da função $g(x) = x^2 + 1$, observando que cada ponto do gráfico da função original sofre um deslocamento de uma unidade para cima: o ponto $(0, 0)$ do gráfico de $y = x^2$ se desloca para o ponto $(0, 1)$ do gráfico de $y = x^2 + 1$; o ponto $(1, 1)$ para $(1, 2)$; o ponto $(-1, 1)$ para $(-1, 2)$; o ponto $(\sqrt{2}, 2)$ para $(\sqrt{2}, 3)$ e assim por diante.

Dizemos, então, que o gráfico da função $g(x) = x^2 + 1$ é obtido do gráfico da função $f(x) = x^2$ por meio de uma *translação vertical* de uma unidade para cima.

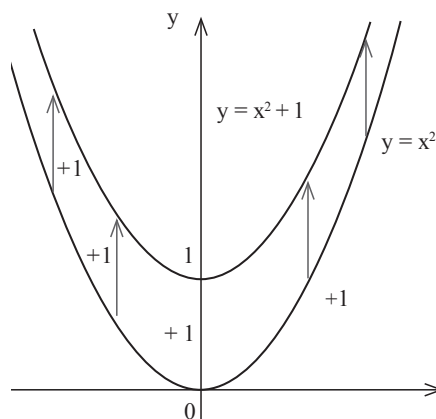


Figura 4 - Translação vertical da parábola $y = x^2$

Um comentário: Olhando o esboço anterior temos a sensação de que as duas parábolas não têm a mesma forma, isto é, que não são semelhantes, entretanto isto não é verdade. O que acontece é que intuitivamente pensamos que se as duas parábolas são paralelas elas deveriam manter a mesma distância na horizontal, o que não acontece. Na verdade a distância entre dois pontos sobre a mesma vertical é sempre igual a 1, como mostrado na figura.

De maneira geral, temos que:

O gráfico da função $y = f(x) + h$ pode ser obtido do gráfico de $y = f(x)$ por meio de um deslocamento vertical, chamado **translação vertical**, de h unidades.

Se h é positivo, o deslocamento é para cima, e se h é negativo, o deslocamento é para baixo.

4.1.1 Exercícios

Esboce o gráfico das funções:

a) $G(x) = 2x^2 + 3$ b) $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4$

c) $F(x) = x^3 + 1$ d) $H(x) = \frac{1}{x} - 2$.

4.2 Translações horizontais

O gráfico da função $g(x) = (x-1)^2$, por exemplo, também pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x^2$.

Observe que, se o ponto (a, b) pertence ao gráfico de $f(x) = x^2$, então as suas coordenadas satisfazem a relação $b = a^2$, e para que um ponto (c, d) pertença ao gráfico de $g(x)$ basta que as suas coordenadas obedeçam a relação $d = (c-1)^2$. Logo, se (a, b) está no gráfico da função $y = f(x)$, então o ponto de coordenadas $(a+1, b)$ pertence ao gráfico da função $y = g(x)$, pois $g(a+1) = [(a+1)-1]^2 = a^2$ e $a^2 = b$ (já que $f(a) = b$).

Temos então que o deslocamento de uma unidade para a direita leva os pontos (a, b) do gráfico de $y = x^2$ nos pontos $(a+1, b)$ que pertencem ao gráfico da função $y = (x-1)^2$. Isso significa que o gráfico da função $y = g(x)$ pode ser obtido do gráfico da função $y = f(x)$ através de uma *translação horizontal* de uma unidade para a direita.

O gráfico da função $g(x)$ é uma parábola côncava para cima, com vértice no ponto $(1, 0)$ e cujo eixo de simetria é a reta vertical $x = 1$.

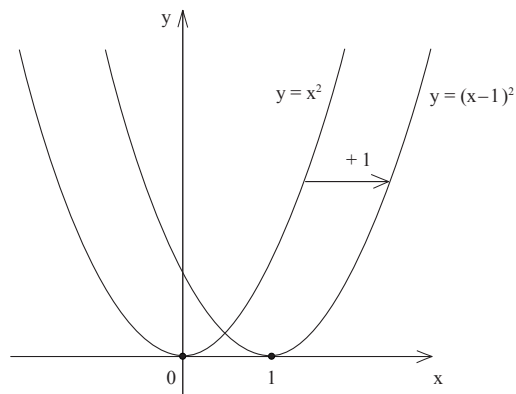


Figura 5 - Translação horizontal da parábola $y = x^2$

De maneira geral, temos que:

O gráfico da função $g(x) = f(x - k)$ pode ser obtido através de uma **translação horizontal** de k unidades do gráfico de $f(x)$. Se k é positivo, então o deslocamento é para a direita, e se k é negativo, o deslocamento é para a esquerda.

4.2.1 Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $g(x) = |x - 2|$ basta fazer uma translação horizontal do gráfico da função $f(x) = |x|$ de duas unidades para a direita.

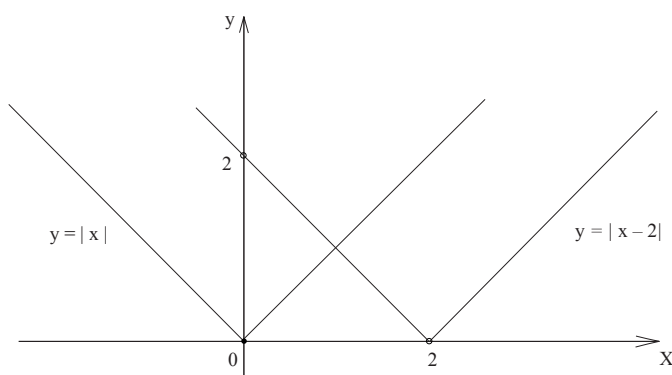


Figura 6 - Translação horizontal do gráfico da função valor absoluto

4.2.2 Exercícios

Esboce os gráficos das funções:

a) $G(x) = 2(x-1)^2$ b) $Q(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2$

c) $F(x) = (x-1)^3$ d) $H(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

4.3 Translações horizontais e verticais

Os dois deslocamentos vistos anteriormente podem ser combinados. Por exemplo, para traçar o gráfico da função $y = 2(x-1)^2 + 3$, devemos deslocar o gráfico da função $y = 2x^2$ nas duas direções, fazendo uma translação horizontal de 1 unidade para a direita e uma translação vertical de 3 unidades para cima. A ordem com que fazemos os dois movimentos é indiferente.

De maneira geral, temos que:

O gráfico da função $y = f(x - k) + h$ pode ser obtido do gráfico de $f(x)$, através de uma translação horizontal de k unidades e de uma translação vertical de h unidades.

O ponto $V = (k, h)$ é chamado de **centro da translação**.

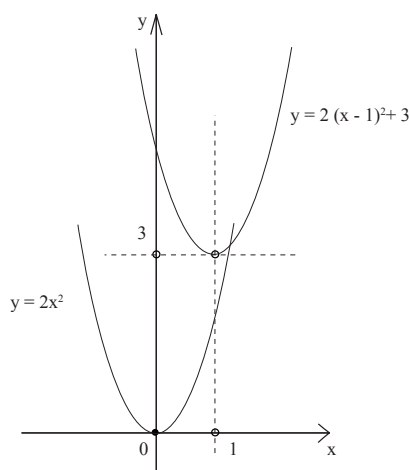


Figura 7 - Translações horizontal e vertical da parábola $y = 2x^2$

4.3.1 Exemplo

A seguir esboçamos o gráfico da função $g(x) = \frac{1}{x-k} + h$,

para $k > 0$ e $h > 0$ a partir de translações do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

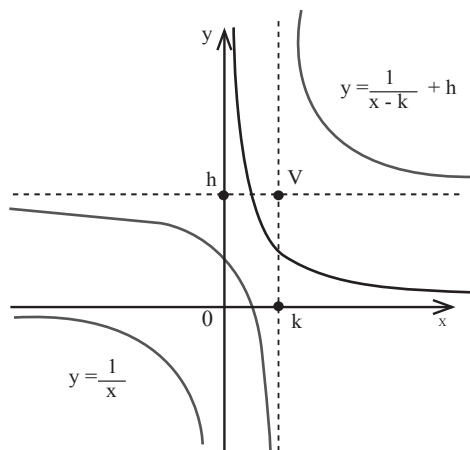
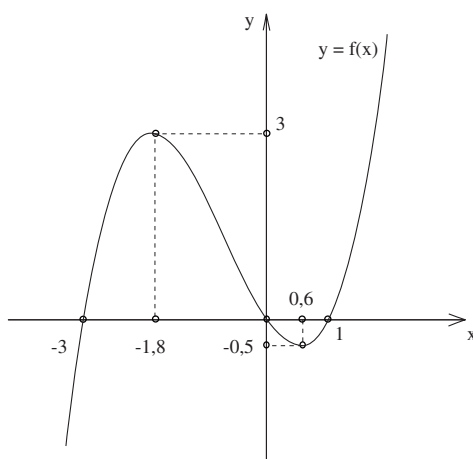


Figura 8 - Translações horizontal e vertical da hipérbole $y = \frac{1}{x}$

4.4 Exercício

Considere a função $y = f(x)$ dada pelo gráfico abaixo.



Esboce os gráficos das funções:

- a) $y = f(x+1)$ b) $y = f(x-3)$
 c) $y = f(x)-2$ d) $y = f(x) + \sqrt{2}$.

5. COMPLETANDO QUADRADOS (OPCIONAL)

Dado um trinômio do segundo grau, $p(x) = ax^2 + bx + c$, é sempre possível escrevê-lo na forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x-k)^2 + h$$

e então, utilizando as translações dadas anteriormente, podemos traçar o gráfico da parábola correspondente, a partir do gráfico da parábola $y = ax^2$.

Por exemplo, se $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, podemos proceder da seguinte forma:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x^2 - 2x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{5}{2}\right) = 2\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{5}{2}\right]$$

$$f(x) = 2\left[(x-1)^2 + \frac{3}{2}\right] = 2(x-1)^2 + 3$$

Esse processo denominado “completando quadrados” pode ser feito para qualquer trinômio do segundo grau. No caso geral procedemos da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a};$$

ou seja, $k = -\frac{b}{2a}$ e $h = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Observe que o ponto (k, h) é o vértice da parábola.

O objetivo de apresentarmos a dedução dessa fórmula é mostrar o procedimento geral de completar quadrados. Esperamos que você seja capaz de utilizá-lo sempre que seja necessário. Ela é útil, inclusive, para determinar a fórmula das raízes da equação do 2º grau.

5.1 Exercício

Escreva cada uma das funções abaixo na forma $y = a(x-k)^2 + h$ e, utilizando translações, esboce o seu gráfico especificando: coordenadas do vértice, concavidade, valor mínimo ou máximo e o eixo de simetria.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ b) $f(x) = -2x^2 + 4x$

c) $f(x) = x^2 + 8x - 23$ d) $f(x) = x^2 + 8x$.

Funções inversas

OBJETIVO

Esperamos que, ao fim desta aula, você seja capaz de conceituar funções inversas e de explorá-las através das diversas representações matemáticas de função já discutidas. Gostaríamos ainda que você fosse capaz de utilizar este novo conceito para resolver problemas e para definir novas funções a partir das já estudadas.

1. INTRODUÇÃO

Existem pares de regras (ou de operações) relacionadas de tal modo que, essencialmente, uma desfaz a ação da outra. Caso tais regras representem funções, isso significa dizer que existem pares de funções em que uma função desfaz a ação da outra. Se interpretarmos a ação da função num ponto de seu domínio como o processamento de uma sequência de comandos, estamos dizendo que existem seqüências de comandos que neutralizam a ação de outras seqüências de comandos.

Pares de funções com tal propriedade têm o nome de funções inversas, e dizemos que uma função do par é inversa da outra. Esta noção é importante na definição de novas funções.

2. DESFAZENDO A AÇÃO DE FUNÇÕES: EXPRESSANDO A INVERSA DE $y = 2x + 3$

Vamos iniciar discutindo se é possível desfazermos a ação representada em $y = 2x + 3$ por meio da ação de uma outra função. Para isso, definimos função como uma seqüência de comandos, por representações gráficas e, por fim, por equações. As construções da inversa por meio de cada uma destas três representações estão relacionadas entre si. Nossa intenção é a de mostrar que elas se complementam, compondo a noção de função inversa.

2.1 Exemplo: interpretando $y = 2x + 3$ como uma seqüência de comandos

Podemos descrever a função $y = 2x + 3$ como uma seqüência de comandos sucessivos. Para tal, imagine-se efetuando este cálculo numa calculadora: selecionamos o número x e o multiplicamos por 2; aparece um resultado no visor de nossa calculadora; a este resultado no visor adicionamos 3.

A questão a ser respondida é: existe uma seqüência de comandos que desfaz a ação de $y = 2x + 3$ em um ponto arbitrário x de seu domínio? Ou seja, partindo do último número y no visor da calculadora, como recuperamos o valor x inicial? Da descrição da seqüência de comandos que $y = 2x + 3$ representa, podemos recuperar tal valor tomando o valor y e subtraindo 3, e depois dividindo o resultado por 2. Em outras palavras, a seqüência de ações que desfaz a regra “duplicar e somar 3” será: “subtrair 3 e dividir tudo por 2”, nesta ordem.¹ Representando matematicamente esta última seqüência,

diremos que $y = \frac{(x-3)}{2}$ desfaz a ação da função $y = 2x + 3$. Ou seja,

as funções $y = \frac{(x-3)}{2}$ e $y = 2x + 3$ constituem um par de funções

inversas. Ainda em matemática, dizemos: $y = \frac{(x-3)}{2}$ é a inversa

da função $y = 2x + 3$.

2.2 Exercício

¹ De um modo geral, sempre que uma função é representada por uma expressão algébrica, podemos interpretar sua ação num ponto de seu domínio como o processamento de uma seqüência de “comandos”, como descrito neste exemplo 2.1. Na verdade, quando estamos utilizando calculadoras, processamos tais seqüências de comandos ao calcular o valor y da função $y = f(x)$, em um dado ponto x de seu domínio.

Também a função $y = 2x + 3$ desfaz a ação de $y = \frac{(x-3)}{2}$, pois se esta última desfaz a ação da primeira, a primeira desfaz a ação da última. Queremos dizer: se $y = \frac{(x-3)}{2}$ é inversa de $y = 2x + 3$, então $y = 2x + 3$ é inversa de $y = \frac{(x-3)}{2}$. Deixamos para você a verificação desta afirmativa, descrevendo $y = \frac{(x-3)}{2}$ como uma seqüência de comandos, como no primeiro exemplo.

2.3 Exemplo: o processo de determinar a inversa no gráfico de $y = 2x + 3$

A representação de funções em gráficos foi discutida na aula 1.

Como discutido naquela aula, o gráfico de $y = 2x + 3$, esboçado na Figura 1, foi construído do seguinte modo: para cada valor de x no domínio da função, modificamos este valor pela regra $2x + 3$ e localizamos no plano cartesiano o ponto $(x, 2x + 3)$, de ordenada $y = 2x + 3$.

A representação de funções em gráficos nos auxilia a compreender a construção de inversas. É possível pensá-las graficamente porque, em síntese, elas vêm responder à questão: *dada a ordenada de um ponto sobre o gráfico de $y = 2x + 3$ (dado um valor y), como recuperar o valor da abscissa (como recuperar o valor de x)?*

Na Figura 2, procuramos representar este procedimento.

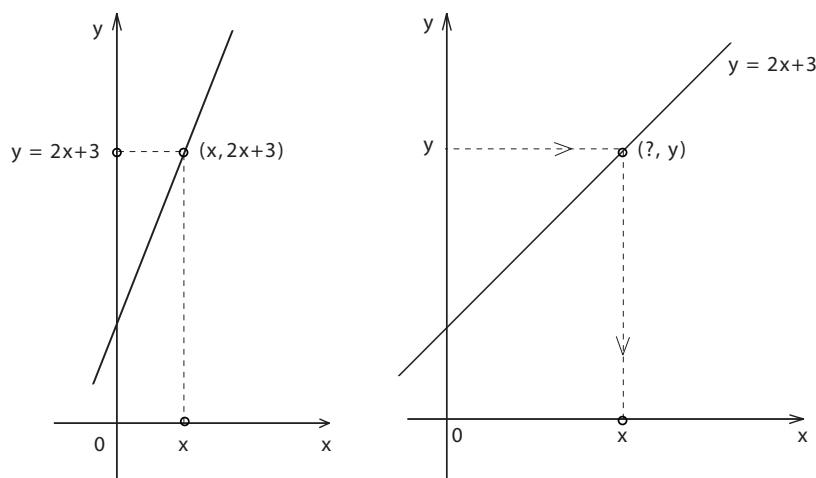


Figura 1: Dado o valor de y como recuperar a abscissa na relação $y = 2x + 3$

2.4 Exemplo: representando $y = 2x + 3$ como uma equação algébrica

Em termos algébricos, o procedimento explorado no gráfico da função $y = 2x + 3$ corresponde a resolver a equação $y = 2x + 3$, em termos de y ; ou seja, a resolver uma equação algébrica para inverter a função $y = 2x + 3$. Isso porque responder à questão *fixada uma ordenada y arbitrária, como determinar a abscissa x , em função dela*, em termos algébricos, corresponde a escrever

$$2x = y - 3, \text{ ou seja,}$$

$$x = \frac{(y - 3)}{2}.$$

Este resultado pode ser lido como o comando em y “subtrair 3 e dividir por 2”, nesta ordem. Ele nos dá a função inversa da função $y = 2x + 3$, como no exemplo 2.1.

Vale aqui uma observação importante: usualmente, nós damos o nome x às variáveis no domínio de uma função, e denominamos y às variáveis dependentes. Por isso, reescrevemos a relação anterior que representa a função inversa da função dada, como $y = \frac{(x-3)}{2}$;

ou seja, permutamos a variável x com a variável y na equação encontrada, após resolvê-la algebricamente em termos de y .

Muitos de vocês já devem ter procedido assim, ao escrever as inversas de funções.

2.5 Exemplo: utilizando os procedimentos anteriores para expressar a medida de temperatura em Fahrenheit e em Celsius

Em um exercício na Aula 3 obtivemos uma fórmula relacionando os valores das medidas de temperatura em Fahrenheit (F) e em Celsius (C). Lá, a proposta era expressar a temperatura em Fahrenheit em função da temperatura em Celsius. É provável que você tenha obtido sua expressão na forma $F=f(C)$; a saber, $F=1,8C+32$. Utilizando esta fórmula, traduzimos os valores de temperaturas medidas em graus Celsius para graus Fahrenheit. Aqui, vamos propor escrever os valores da temperatura em Celsius em função de valores em Fahrenheit.

Assim, a questão é: escreva uma expressão relacionando as duas variáveis C e F na forma $C=g(F)$. Uma idéia para respondê-la seria retomar o exercício da aula anterior, e resolvê-lo com este novo enunciado. No entanto, uma vez que conhecemos a fórmula $F=1,8C+32$, vamos utilizá-la para solucionar o novo problema.

Interpretando $F=1,8C+32$ como uma equação em C e F , podemos resolvê-la em termos de F , escrevendo

$$1,8 C = F - 32, \text{ ou seja,}$$

$$C = \frac{F - 32}{1,8}.$$

As expressões $F=1,8C+32$ e $C = \frac{F - 32}{1,8}$ constituem um par de

funções inversas. Vale a pena mencionarmos que, ao contrário do exemplo anterior, torna-se interessante mantermos os nomes das variáveis C e F como na escrita acima. Aqui, as variáveis têm um referente concreto: as medidas da temperatura em Celsius e em Fahrenheit.

3. DESFAZENDO A AÇÃO DE FUNÇÕES: RESTRIÇÕES

É sempre possível obtermos a inversa de uma função? Explorando os exemplos que se seguem vamos discutir algumas restrições para responder afirmativamente a esta questão.

3.1 Exercício: a função preço da corrida de táxi

Neste exercício, nós ampliamos nossa discussão sobre a função preço da corrida de táxi $P = 3,30 + 1,67d$, onde P é o valor em reais a ser pago e d é medida de distância em quilômetros.²

Queremos explorá-la na perspectiva desta aula: a de determinação de funções inversas. Procure responder às perguntas abaixo, e continue com a leitura do texto em 3.2. O significado deste exercício será construído a partir dela.

- Que expressão matemática você proporia para representar a distância percorrida pelo taxista, caso soubéssemos o valor em reais que ele recebeu por uma dada corrida?
- Ao ir a uma festa em casa de um amigo, eu paguei R\$14,15. Qual foi a distância percorrida pelo táxi em minha viagem?
- Comente sua resposta à letra b), discutindo se seu enunciado corresponde ou não a uma situação possível na vida real cotidiana, em relação ao valor pago ao taxista.
- Comente sua resposta à letra b), discutindo se é possível sabermos a medida exata do espaço percorrido a partir do preço pago no taxímetro, numa situação real.

3.2 Um comentário sobre a função preço da corrida de táxi

O exercício anterior induz a algumas questões sobre a possibilidade ou não de definirmos a inversa da função preço da corrida de táxi. Ali as questões que causam dificuldades emergem principalmente do contexto real que é modelado pela função $P = 3,30 + 1,67d$. Como já discutido na Aula 3, nem todo número real corresponderia a um valor possível para o preço de corrida, também por causa da nossa unidade monetária. O seu gráfico apresentado na Aula 4 confirma ser impossível determinarmos o valor exato da distância percorrida a partir do valor registrado no taxímetro: o taxímetro só é alterado em valores inteiros na quilometragem rodada. Contornar tais questões e considerar a função como linear e definida em $\mathbb{R}$, ou em $\mathbb{N}$, e invertê-la, resultaria na perda de informações sobre a realidade que ela modela.

² Aula 3, Funções Lineares.

Agora você verá que a função $y = x^2$ também oferece obstáculos à discussão sobre como desfazer sua ação. No caso desta, as dificuldades serão contornadas com restrições em seu domínio.

3.3 Exemplo: discutindo uma inversa para $y = x^2$

Explore o gráfico de $y = x^2$, buscando responder à questão: *dada a ordenada de um ponto sobre a curva, gráfico de uma função (ou seja, dado o valor b no visor da calculadora), como recuperar o valor da abscissa (ou seja, como recuperar o valor de x)?*

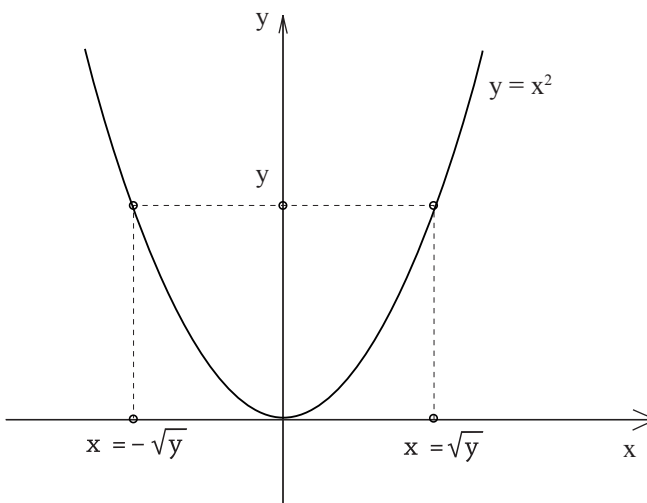


Figura 3 - Resolvendo a equação $y = x^2$, para $x \in \mathbb{R}$

Não é possível respondê-la como em 2.3, exibindo um valor único para a abscissa do ponto fixado.

Algebricamente, resolvendo a equação $y = x^2$ em termos de x , ou seja, colocando o x em função de y , resultaria nos valores $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Assim, não há uma ação bem determinada que desfaça o processo que a função representa. Uma regra que a cada valor y associa dois valores diferentes $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$ não definiria uma função.

No entanto, observe atentamente o gráfico da função $y = x^2$, desenhado na figura a seguir: se *restringirmos* a função a uma parte de seu domínio, por exemplo, $x \geq 0$, torna-se possível desfazer a ação de $y = x^2$ sobre o número x por meio da regra $x = \sqrt{y}$.

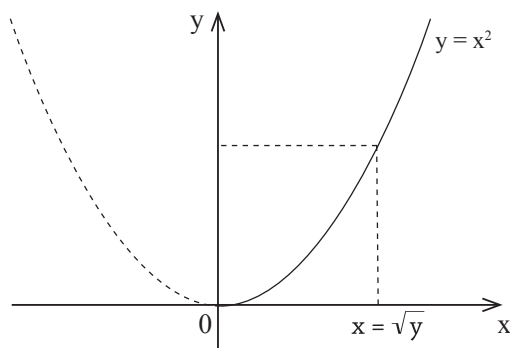


Figura 4 - Gráfico de $y=x^2, x \in [0, +\infty)$

Esta é a função inversa de $y = x^2$, no domínio $x \in [0, +\infty)$. Como anteriormente, escrevemos $y = \sqrt{x}$, fazendo a troca de nomes do domínio e da imagem, conforme o uso em linguagem matemática.

3.4 Exercício

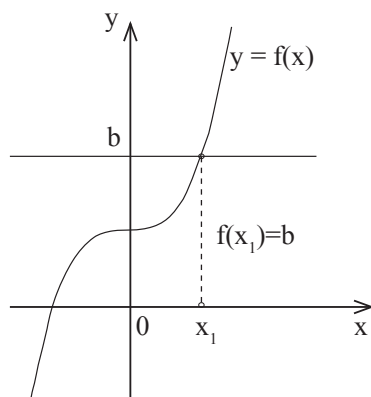
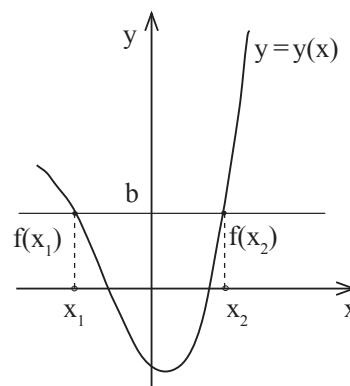
Uma discussão análoga a esta última pode ser feita considerando a restrição da função $y = x^2$, a $x \in (-\infty, 0]$.

Faça um gráfico representando esta nova função, identificando e discutindo a regra que desmancha sua ação sobre um número negativo x .

4. RESTRIÇÕES PARA A DEFINIÇÃO DA INVERSA: O CONCEITO DE FUNÇÃO INJETIVA

Os últimos exemplos nos mostram que nem sempre é possível definirmos a inversa para uma função $y = f(x)$ em seu domínio. Na verdade, obstáculos como os discutidos no caso da função $y = x^2$ acontecem frequentemente. Muitas vezes, pode acontecer de um dado valor b , na imagem de $y = f(x)$, ser obtido como valor modificado de mais de um valor de x . Ou seja, ser imagem de mais de um valor de x no domínio da função. Os gráficos nas figuras a seguir ilustram a possibilidade deste fato.

Uma estratégia para verificarmos se uma função admite ou não inversa em todo seu domínio poderá ser explorar seu gráfico, observando se as retas paralelas ao eixo x , de equação $y = b$, o interceptam no máximo uma vez. Havendo interseção única, torna-se evidente como obter o valor de x que, ao ser modificado pela regra da função, está correspondendo ao valor b na imagem, pois ele é único.

Figura 5 - b é imagem apenas de x_1 Figura 6 - b é imagem de x_1 e de x_2

Neste caso, valores distintos em seu domínio serão associados a valores distintos em sua imagem. A função nunca assumirá um mesmo valor mais de uma vez. Uma função que satisfaz tal propriedade tem um nome especial – função injetora (ou injetiva).

Estamos prontos para enunciar, em linguagem matemática, sua definição.

4.1 Definição

Uma função $y=f(x)$ definida em um domínio D é denominada **injetora** (ou **injetiva**) quando

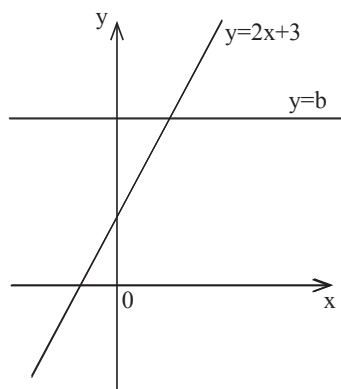
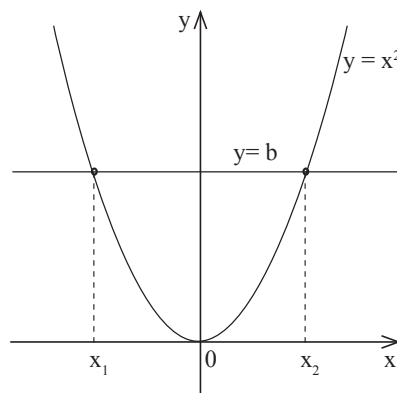
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ ou equivalentemente,}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ para quaisquer } x_1 \text{ e } x_2 \text{ em } D.$$

4.2 Exemplo

Observe os gráficos das funções $y=2x+3$ e $y=x^2$ desenhados a seguir.

Na Figura 7, gráfico da função $y=2x+3$, cada reta de equação $y=b$ intercepta a curva desenhada em apenas um ponto.

Figura 7 - $y=2x+3$ é injetivaFigura 8 - $y=x^2$ não é injetiva

Além disso, sempre há interseção entre o gráfico de $y = 2x+3$ (Figura 7) e a reta de equação $y = b$ para quaisquer valores de b (pois a imagem de $y = 2x+3$ é $\mathbb{R}$). Isso significa que $y = 2x+3$ é injetiva em seu domínio, que é $\mathbb{R}$, e admitirá inversa. O domínio da inversa também será $\mathbb{R}$. Algebricamente: se $x_1 \neq x_2$, então $2x_1+3 \neq 2x_2+3$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$ para quaisquer x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$. Pela definição 4.1, $y = 2x+3$ é injetiva.

Já no caso do gráfico de $y = x^2$ (Figura 8), as retas da forma $y = b$ o interceptam apenas quando $b \geq 0$, mas o fazem em dois pontos. Algebricamente, escrevemos: $(x_1)^2 = (x_2)^2$ não implica $x_1 = x_2$. Por exemplo, considere $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Isso quer dizer que a função $y = x^2$ não é injetiva em seu domínio, que é $\mathbb{R}$.

5. UMA DEFINIÇÃO PARA A FUNÇÃO INVERSA

5.1 Notação e linguagem

É comum denominarmos f^{-1} à inversa de f . Aqui, vamos usar esta terminologia.³

Observe que a função f^{-1} atua sobre pontos na imagem de f , e ela trata de responder a questão: este ponto é imagem de que valor? Assim, a imagem da função f será o domínio da função f^{-1} .

Já o domínio da função f será a imagem da função f^{-1} , porque ao desfazer a ação de f , a função f^{-1} age sobre o valor y retornando ao valor x antes de ser modificado pela f . Essas observações podem ser sintetizadas na definição a seguir.

5.2 Definição

Seja uma função $y = f(x)$ injetora, em seu domínio D , com imagem I . Então sua função **inversa** f^{-1} tem domínio I e é definida como uma regra que satisfaz

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \text{ para todo } y \text{ em } I.$$

Vale comentar que, uma vez determinada a regra $x=f^{-1}(y)$ (caso esta exista), trocamos o nome de sua variável independente e de sua variável dependente denominando-as como usualmente fazemos: y nomeando a variável dependente e x nomeando a variável independente. Ou seja,

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

³ Vale a pena comentar que essa linguagem possui um inconveniente. Para muitos o nome f^{-1} sugere a expressão $\frac{1}{f}$, que não corresponde à inversa da função f , como estamos discutindo. Seremos cuidadosos, e quando estivermos nos referindo a $\frac{1}{f}$, usaremos o símbolo $(f)^{-1}$, com os parênteses conforme indicado.

5.3 Exemplo

A inversa f^{-1} da função $y = f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ será $y = \sqrt{x}$, porque $f^{-1}(y) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$, quando $x \in [0, +\infty)$. Pela definição 5.2, afirmamos: $y = x^2$, definida em $[0, +\infty)$, tem como inversa $y = \sqrt{x}$, também definida em $[0, +\infty)$.

6. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO INVERSA

Ao compor duas funções f e g deixamos atuar a ação de uma sobre o resultado da ação da outra.

Uma vez que a ação de f^{-1} desfaz a ação de f , é mais que natural escrevermos que:

6.1 Propriedade

- a) $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo x no domínio da f .
- b) $f(f^{-1}(x)) = x$, para todo x no domínio da f^{-1} .

Estas propriedades são demonstradas a partir da definição 5.2, como a seguir.

6.2 Demonstração

Temos que $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (definição 5.2). Então $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y)$ (pois $f(x) = y$ pela definição 5.2), o que torna $f^{-1}(f(x)) = x$ (pois $f^{-1}(y) = x$ pela definição 5.2).

A demonstração do item b é análoga.

6.3 Exemplo

Vamos explorar como estas propriedades funcionam, no caso das funções específicas do nosso primeiro exemplo. Denominamos $f^{-1}(x) = (x - 3)/2$ à inversa de $f(x) = 2x + 3$. Compondo as duas funções, podemos escrever:

$f(f^{-1}(x)) = 2(f^{-1}(x)) + 3 = 2((x - 3)/2) + 3 = x$, para todo x no domínio de f^{-1} .

6.4 Exercício

De modo análogo ao exercício anterior, podemos mostrar que $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo x no domínio de f . Verifique agora você esta afirmação.

7. UMA RELAÇÃO ENTRE OS GRÁFICOS DE UMA FUNÇÃO E DE SUA INVERSA

Sabemos que o gráfico de uma função $y = f(x)$ é o conjunto de pares de pontos do plano da forma $(x, f(x))$. Pela definição 5.2, $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$. Observe então que: se (a, b) está no gráfico de f , então (b, a) está no gráfico de f^{-1} .

A primeira figura a seguir ressalta a relação entre pontos da forma (a, b) e (b, a) , no plano cartesiano: eles são simétricos em relação à reta $y = x$.

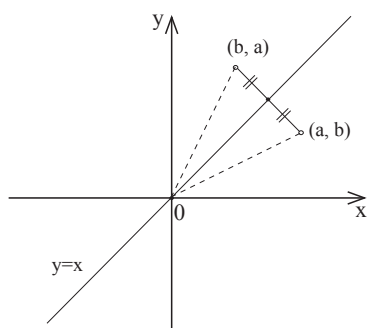


Figura 9 - Simetria em relação à reta $y=x$

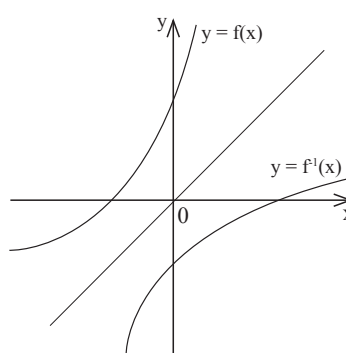


Figura 10 - Relação entre gráficos de f e f^{-1}

A Figura 10 ilustra a relação que existirá entre o gráfico de uma função f e de sua inversa f^{-1} . Ele será obtido a partir do gráfico de f , através de sua reflexão em torno da reta $y = x$.

7.1 Exercício

Utilizando o procedimento acima, esboçar os gráficos das inversas de

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$

7.2 Exemplo: definindo a função inversa $y = \sqrt[3]{x}$

E se $y = x^3$, você saberia dizer se há possibilidade de invertê-la? Consultando o texto referente à Aula 4, você poderá explorar seu gráfico e verificar que $y = x^3$ é uma função injetiva em todo seu domínio, que é $\mathbb{R}$. Para isso basta confirmar que as retas de equação $y = b$ interceptam o gráfico apenas uma vez, para todo valor de b . Pela definição 5.2, sua inversa f^{-1} será dada por $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = x^3$. Ou seja, a regra f^{-1} , que corresponde à inversa da função $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, associa a qualquer número a em $\mathbb{R}$ um valor b , também em $\mathbb{R}$, tal que $b^3 = a$.

Este valor b é denominado **raiz cúbica** de a ; e escrevemos $b = \sqrt[3]{a}$. Utilizando esta notação e a noção de função inversa, afirmamos: $y = x^3$ tem como inversa a função $y = \sqrt[3]{x}$, ambas com domínio $\mathbb{R}$. O gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ está esboçado a seguir, e foi obtido refletindo o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ em relação à reta $y = x$.

8. DEFININDO POTÊNCIAS RACIONAIS COMO FUNÇÕES INVERSAS

As funções $y = x^2$ e $y = x^3$ são exemplos importantes porque constituem bons modelos para o estudo das funções inversas de duas classes de funções – a das funções $y = x^n$, e n é um número *par*, e o das funções $y = x^n$, em que n é um número *ímpar*. Retome suas anotações sobre a Aula 4, e confirme o desenvolvimento que faremos a seguir.

8.1 A Função $y = \sqrt[n]{x}$, onde n é um número par

É possível restringirmos a função $y = x^n$, onde n é um número par, como no caso da função $y = x^2$, de modo a ser possível definir sua inversa. Você sabe dizer como isso pode ser feito? Procure responder esta questão, antes de ler o quadro:

A função $y = x^n$, n número par, restrita ao domínio $[0, +\infty)$, admite inversa

$y = \sqrt[n]{x}$, também definida em $[0, +\infty)$ e satisfazendo

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x.$$

A função $y = x^n$, n número par, restrita ao domínio $(-\infty, 0]$, admite inversa

$y = -\sqrt[n]{x}$, definida em $[0, +\infty)$, satisfazendo

$$y = -\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x.$$

8.2 A Função $y = \sqrt[n]{x}$, quando n é um número ímpar

Para as funções $y = x^n$, quando n é um número ímpar, nenhuma restrição precisa ser feita. Retomando a Aula 4, você verá que $y = x^n$, no qual n é um número ímpar, é uma *função ímpar*; e seu gráfico é simétrico em relação à origem. As retas de equação $y = b$ sempre cortam seu gráfico, e em um único ponto, o que quer dizer que a função é sempre injetiva. Assim, pela definição 5.2, podemos sempre definir sua inversa.

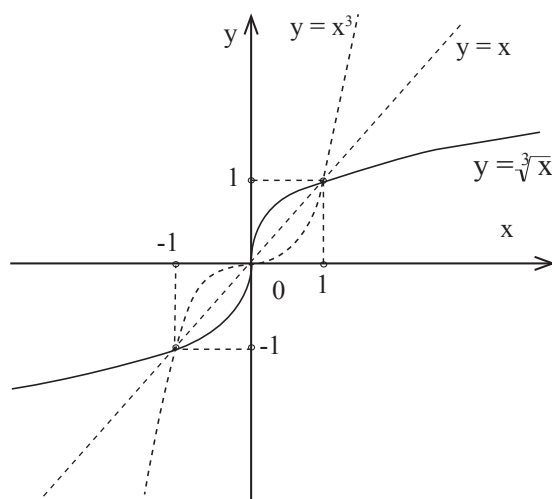


Figura 11 - Gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$

A inversa da função $y = x^n$, onde n é um número ímpar, é a função $y = \sqrt[n]{x}$, definida em $\mathbb{R}$, satisfazendo $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$.

8.3 Notação e linguagem

As **raízes n-ésimas** de um número a – denominação usada para falarmos de $\sqrt[n]{a}$ – são também representadas por $a^{\frac{1}{n}}$. Na verdade, nós utilizamos tais denominações há muito tempo, sem nos determos sobre o que de fato estes símbolos estariam representando. Esta observação diz respeito ao fato de que uma potência natural de um número a , como a^n , tem um significado também natural: ela expressa o produto do número a por ele mesmo n vezes. No entanto, não seria possível atribuir um significado como este a expressões tais como $3^{\frac{1}{3}}$. É através da noção de Função Inversa que um significado matemático é associado a uma potência racional de um número.

Por exemplo, consideremos o símbolo $3^{\frac{2}{3}}$. Que número real é esse? Esse símbolo representa um número real? Qual o significado matemático para esse símbolo?

Assumindo como válidas ainda neste caso as propriedades de potências naturais, vamos escrever:

$$3^{\frac{2}{3}} = (3^{\frac{1}{3}})^2 = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}, \text{ onde } 3^{\frac{1}{3}} \text{ é o número } b \text{ tal que } b^3 = 3.$$

É desse modo que atribuímos um significado matemático a um símbolo como $x^{\frac{p}{q}}$. Ou seja, definimos:

8.4 Definição

A potência $x^{\frac{p}{q}}$, onde p e q são números naturais e x é um número real, é definida como o produto de p parcelas iguais a $x^{\frac{1}{q}}$ (desde que $x^{\frac{1}{q}}$ exista).

As propriedades já conhecidas para potências inteiras de números reais serão estendidas às operações com os novos símbolos introduzidos na definição 5.2. Para recordá-las, consulte um texto do ensino médio, relativo ao tema Potências.

8.5 Exercícios

- Restrinja convenientemente o domínio da função $y=x^6$, e defina sua inversa. Esboce o gráfico de $y=x^6$, bem como o de sua inversa.
- Para a função $y=x^5$, defina sua inversa e esboce seu gráfico.

Funções exponenciais

OBJETIVO

O objetivo desta aula é definir o que vem a ser funções exponenciais, a partir de algumas situações que elas modelam, e estudar algumas de suas propriedades básicas.

1. INTRODUÇÃO

Em aulas anteriores, estudamos a função linear e a função potência. Discutimos procedimentos para construir novas funções, a partir de funções conhecidas.

Nesta aula, vamos estudar uma função que não se constrói a partir das que já estudamos, e que é definida por expressões como $f(x) = a^x$, no qual a é um número real positivo. Elas surgem naturalmente na modelagem de inúmeros problemas importantes, como no estudo de circuitos elétricos, de reações químicas, da desintegração radioativa, do crescimento de populações e outros fenômenos da Biologia, Economia, Física e Química. Tais funções são chamadas de funções exponenciais.

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de identificar uma função exponencial quando representada por expressões algébricas, gráficos e tabelas. Ainda, que seja capaz de obter sua expressão algébrica e seu gráfico, a partir de informações em um conjunto de dados; de entender e trabalhar com os conceitos de meia vida, tempo de duplicação relacionados a crescimento e decaimento exponenciais, e de perceber a relação que se pode estabelecer entre exponenciais em diferentes bases.

2. EXEMPLOS

2.1 Crescimento populacional

Observe a tabela a seguir. Ela registra o crescimento da população brasileira, no período de 1997 a 2002. É possível expressarmos a relação entre o número de habitantes e o tempo transcorrido a partir de 1997 por meio de uma fórmula algébrica?

Para responder esta pergunta, retomamos a discussão da Aula 3 e calculamos a variação anual da população (diferença entre as populações em dois anos consecutivos). Os resultados estão apresentados na terceira coluna.

Tabela 1

Ano	População (milhões de habitantes)	Variação da população (milhões)
1997	163,47	—
1998	165,69	2,22
1999	167,91	2,22
2000	170,14	2,23
2001	172,38	2,24
2002	174,63	2,25

¹ Este fato não é propriedade apenas deste conjunto de dados, mas sim característico da modelagem do crescimento de populações. O que acontece é que, normalmente, as populações crescem mais rapidamente quando ficam maiores, porque o número de pessoas que têm filhos aumenta. Essa é a justificativa para o aumento dos números que aparecem na terceira coluna da tabela.

Dados extraídos da planilha “Estimativas e taxas 1980-2012 Universo.xls”. Fonte: IBGE/DPE/ Departamento de População e Indicadores Sociais. Gerência de Estudos e Análises da Dinâmica Demográfica. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 02 maio 2006.

Veja que essa variação está aumentando, ao longo dos anos. Ou seja, uma função linear não seria um bom modelo para descrever os dados na Tabela 1. Como sabemos, o modelo linear é adequado para representar um modelo cuja taxa de variação é constante. O exemplo presente se ajustaria a este caso se os valores da terceira coluna da Tabela 1 fossem iguais.¹

Uma outra proposta seria a de calcular o aumento percentual da população, ano a ano. Isso porque variações bastante diferentes na população podem ser induzidas por aumentos percentuais bem próximos (uma vez que estes são calculados com base nos valores iniciais da população, que podem ser muito distintos, no período considerado).

De 1997 a 1998, a população do Brasil teve um crescimento de 2,22 milhões de pessoas, ou seja, aproximadamente 1,35% de 163,47 milhões (população de 1997). De 1998 a 1999, o crescimento foi de 2,22 milhões, que representa aproximadamente 1,34% de 165,68. De 1999 a 2000, o crescimento percentual foi de 1,33%, de 2000 a 2001 foi de 1,32% e de 2001 a 2002, de 1,31%.

Organizando nossos dados, registramos:

População de 1998 = (População de 1997) + 0,0135 (População de 1997) = 1,0135 (População de 1997)
 População de 1999 = (População de 1998) + 0,0134 (População de 1998) = 1,0134 (População de 1998)
 População de 2000 = (População de 1999) + 0,0133 (População de 1999) = 1,0133 (População de 1999)
 População de 2001 = (População de 2000) + 0,0132 (População de 2000) = 1,0132 (População de 2000)
 População de 2002 = (População de 2001) + 0,0131 (População de 2001) = 1,0131 (População de 2001)

Observe, no quadro acima, que a população em um ano é obtida multiplicando a do ano anterior por um *fator*, denominado *fator de crescimento*, que neste caso é $a \approx 1,0133$, a média simples dos fatores de crescimento anuais no período considerado. Este fator corresponde a uma *taxa* de aumento percentual da população brasileira, que entre quaisquer dois anos consecutivos no período de 1997 a 2002 foi de 1,3%, ou $r \approx 0,013$, aproximadamente.² Esta taxa r é denominada *taxa de crescimento*, neste caso, anual.³

Para escrevermos uma fórmula relacionando as variáveis envolvidas – número de habitantes e tempo – precisamos nomeá-las. Escolhemos chamar a variável tempo (em anos) de t , e a população brasileira (em milhões de habitantes) de $P(t)$. Nesta notação, t anos após 1997, temos:

$$\begin{aligned} P(0) &= 163,47; & P(1) &= 165,69; & P(2) &= 167,91; \\ P(3) &= 170,14; & P(4) &= 172,38 & e & P(5) = 174,63. \end{aligned}$$

Utilizando o fator de crescimento do período, escrevemos $P(t)$ como a seguir:

$$\begin{aligned} P(0) &= 163,47; & P(1) &= 163,47 (1,013)^1; & P(2) &= 163,47 (1,013)^2; \\ P(3) &= 163,47 (1,013)^3; & P(4) &= 163,47 (1,013)^4; \\ P(5) &= 163,47 (1,013)^5. \end{aligned}$$

O padrão acima pode ser generalizado: t anos após 1997 a população será

$$P(t) = P_0 (1,013)^t,$$

em que t é um número natural, e P_0 denota a população em 1997, ou seja, vale $P(0)$. A partir desta fórmula, torna-se possível fazermos projeções para o valor da população anos antes de 1997 e anos após 1997, sempre supondo que o crescimento da população tenha se mantido, e se mantenha, à mesma *taxa de crescimento* $r \approx 0,013$.

² Os valores encontrados para os percentuais de crescimento da população também não são constantes. Aparentemente, considerá-los constantes seria tão inadequado quanto modelarmos o fenômeno utilizando uma função linear. No entanto, no caso do modelo linear, o erro que cometeríamos ao considerarmos constante a variação da população (verificar terceira coluna da tabela 1) é da ordem de 0,01 milhões de pessoas (10.000 pessoas). Já ao considerarmos o percentual de crescimento como sendo, por exemplo, 0,013, nosso erro seria no máximo da ordem de 0,0005 milhões de pessoas (500 pessoas).

³ Observe que o *fator de crescimento* $a \approx 1,013$ obtido no cálculo do aumento percentual da população se escreve como $1 + r$, onde r é a *taxa de crescimento*.

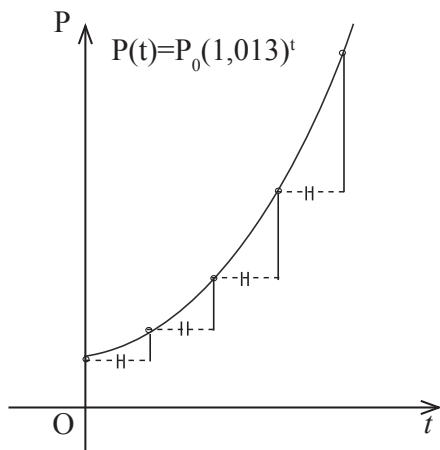


Figura 1 - Gráfico da função $P(t)=P_0(1,013)^t$

A função $P(t)=P_0(1,013)^t$ é denominada *função exponencial* de t , de base $a \approx 1,013$. Ela é uma função crescente e à medida que t torna-se um número muito grande (ou seja, com o passar de muitos anos), a população $P(t)=P_0(1,013)^t$ ficará também muito grande.⁴

Além disso, quando t cresce, o crescimento de $P(t)=P_0(1,013)^t$ fica cada vez mais acentuado, mais rápido. Este fato se confirma retomando os valores na Tabela 1: observe, na terceira coluna, que os valores de ΔP , em intervalos regulares de tempo, ficam maiores com o passar do tempo. Isso significa que a *taxa de variação* $\frac{\Delta P}{\Delta t}$

desta função é *crescente*.

Na Figura 1, esboçamos o gráfico de $P(t)=P_0(1,013)^t$ procurando realçar:

- o crescimento ilimitado de $P(t)=P_0(1,013)^t$ quando t fica muito grande;
- o crescimento da taxa de variação da função, quando t cresce, destacando alguns valores de ΔP , para intervalos regulares de tempo.

Por fim, duas observações importantes devem ser feitas:

1. O fato de a taxa de variação $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ ser crescente se reflete na forma do gráfico de $y=P(t)$: ele se configura como uma curva *côncava para cima*.
2. Há vários modos de estudarmos os fenômenos naturais. Utilizando a modelagem matemática, tornamo-nos capazes de explorá-los sob um ponto de vista quantitativo. Na modelagem, construímos representações matemáticas, tais como funções, que devem ser entendidas como *aproximações* para o fenômeno em sua complexidade. Por exemplo, no caso em estudo, não faz sentido nos referirmos a um número fracionário $P(t)$ de pessoas. Apesar disso, esboçamos o gráfico de $y = P(t)$ *contínuo* – “sem tirar o lápis do papel” –, o que significa termos considerado valores de $P(t)$ em $[0, +\infty)$. Um gráfico mais apropriado para uma função crescimento populacional deveria apresentar *descontinuidades* – ou “saltos” –, já que sua imagem $P(t)$ só assume valores inteiros. No entanto, a representação que propusemos é satisfatória: como os valores da função estão na casa dos milhões, os espaços provocados pelos saltos correspondentes a uma unidade se tornam invisíveis na escala utilizada. Mesmo assim, a curva desenhada “sem tirar o lápis do papel” representa apenas uma *aproximação* para o crescimento da população.

⁴ Quando x fica muito grande, um valor $f(x) = a^x$, $a > 1$, que corresponde a elevar à potência x um número a maior que 1, fica também muito grande. Em nosso exemplo, ao retomarmos o significado da base $a \approx 1,013$ como fator de crescimento da população, é natural concluirmos que a população cresce à medida que o tempo passa.

2.1.1 Exemplo: projetando o crescimento populacional em anos anteriores a 1997

Vamos explorar o gráfico de $P(t) = P_0(1,013)^t$ para t no intervalo $(-\infty, 0]$. Seu significado seria o de modelar o crescimento populacional em anos anteriores a 1997, supondo que em tal período também tenha se mantido o fator de crescimento $a = 1,013$.

Ora, um expoente t , negativo, numa potência de $a = 1,013$ representa o valor $a^t = \frac{1}{a^{|t|}}$. Os valores do denominador desta última expressão crescem muito, quando o valor absoluto de t crescer (porque $a = 1,013$ é maior que 1). Assim, o valor de $a^t = \frac{1}{a^{|t|}}$ irá

diminuir, ficando muito próximo de zero (mas nunca sendo nulo).⁵

Outras características (concavidade, crescimento) se mantêm como a mesma observada para $t \in [0, +\infty)$. O gráfico de $P(t) = P_0(1,013)^t$, com $t \in \mathbb{R}$, tem seu esboço como na figura a seguir.

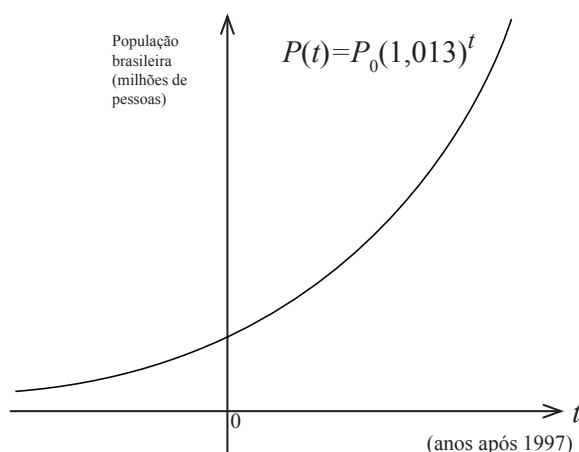


Figura 2 - Gráfico de $P(t) = P_0(1,013)^t$, $t \in \mathbb{R}$

2.2 Exemplo: eliminação da nicotina no sangue⁶

Quando se fuma um cigarro, a nicotina que entra na corrente sanguínea é metabolizada e é eliminada a uma taxa estimada de 30% a cada hora. Os cigarros comuns contêm, aproximadamente, 0,4 mg de nicotina. Podemos construir uma função $q(t)$, para modelar a quantidade de nicotina em nosso sangue que é eliminada t horas depois que um cigarro é fumado, como a seguir:

Em $t=0$, $q = 0,4$; ou seja, $q(0) = 0,4$.

⁵ Observe que, dessa vez, esta representação faz todo o sentido em termos do que ela está modelando: a população se inicia com alguns de seus membros; não haveria início de crescimento a partir de zero habitantes.

Supondo que toda a nicotina foi para a corrente sanguínea, e de acordo com os dados, passada uma hora, 30% da quantidade inicial de nicotina será eliminada. Neste momento, restará, portanto, 70% de 0,4 mg, ou seja,

$$q(1) = 0,4(0,7).$$

Repetindo este raciocínio, após 2 e 3 horas teremos, respectivamente,

$$q(2) = q(1) \cdot (0,7) = 0,4(0,7) \cdot (0,7) = 0,4(0,7)^2$$

$$q(3) = q(2) \cdot (0,7) = 0,4(0,7)^2 \cdot (0,7) = 0,4(0,7)^3 \text{ e, após } t \text{ horas,}$$

$$q(t) = 0,4(0,7)^t.$$

Se você calcular os valores acima numa calculadora, verá que eles representam quantidades decrescentes, quando t cresce. De fato, a função representa a quantidade que resta de nicotina no sangue, que está sendo eliminada a uma taxa de decaimento $y = 0,3$. Observe que o fator de decaimento $a = 0,7$, que é a base de nossa exponencial, se escreve como $a = 1 - 0,3$.

O gráfico desta função encontra-se na figura abaixo.

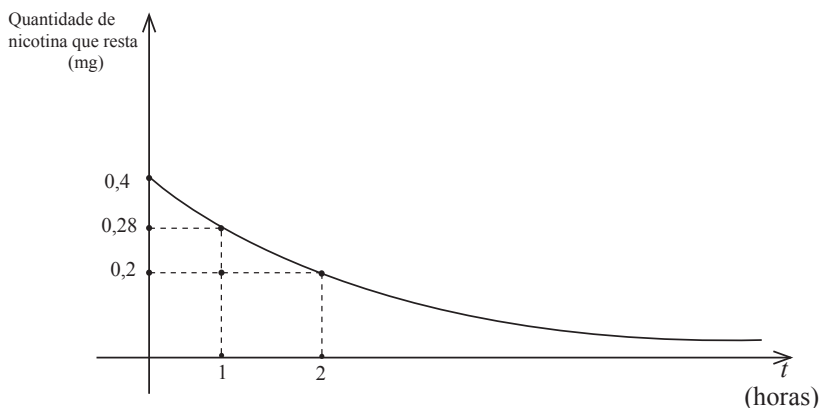


Figura 3 - Gráfico da função $q(t) = 0,4(0,7)^t$

⁶ Aqui, vamos analisar uma situação em que a função $q(t)$, modelando o fenômeno, é decrescente, ao invés de crescente.

⁷ Tais funções são definidas com valores $a > 0$ e $a \neq 1$, para sua base. Valores negativos para a base podem resultar em funções com domínio bem complexo. Por exemplo, como já vimos, raízes n -ésimas de um número negativo não existem quando n é par. No caso de $a = 1$, tais funções são constantes.

3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL $y = ka^x$, EM QUE $a > 0$, $a \neq 1$

As duas situações estudadas são bons exemplos para as funções $y = f(x) = ka^x$. Queremos dizer: a discussão geral para $y = f(x) = ka^x$, em que $a > 1$ e $k > 0$ é semelhante à do exemplo 2.1; e para $0 < a < 1$ e $k > 0$ é semelhante à do exemplo 2.2. Por isso, devemos entendê-los bem!⁷

Um comentário sobre o *domínio* de expressões como $y = f(x) = ka^x$ vale a pena ser feito, antes de sua definição. Observe que em nosso primeiro exemplo os dados referem-se a valores anuais da população, enquanto o gráfico contínuo, “esboçado sem tirar o lápis do papel”, considerou valores da população em quaisquer instantes. Desse modo, o *domínio* da função representada no gráfico, ao invés dos números naturais $\mathbb{N}$, foi o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Sair de modelos discretos, em que os dados correspondem a valores em $\mathbb{N}$, e passar para o modelo contínuo requer a definição de função potência para valores “intermediários” de x . A Aula 6 nos tornou capazes de considerar potências racionais de um número. Não discutimos ainda o significado de potências irracionais, e nem seremos capazes de fazer essa discussão aqui. Adiantamos que estas últimas são definidas através das *aproximações* racionais dos números irracionais. Feita esta ressalva, definimos:

3.1 Definição

Uma relação entre variáveis expressa na forma $y = f(x) = ka^x$ é denominada **função exponencial** de x com base a , em que a e k são números reais, e $a > 0$, $a \neq 1$. O domínio desta função é $\mathbb{R}$.

3.2 Propriedades e Gráficos

1. No caso de $a > 1$, a função $y = f(x) = a^x$ é crescente, e geralmente denominada um crescimento exponencial.

No caso de $0 < a < 1$, a função $y = f(x) = a^x$ é decrescente, e denominada um decaimento exponencial.

Os gráficos desenhados a seguir representam as duas situações.

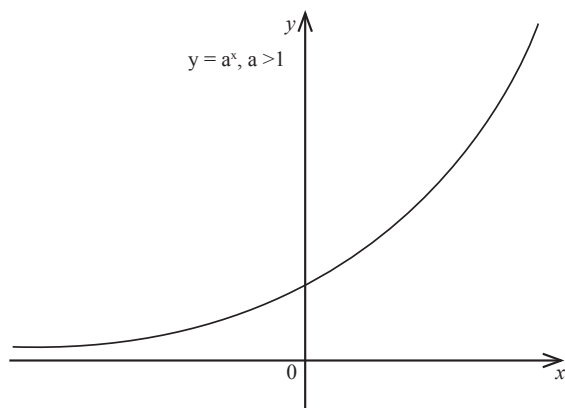
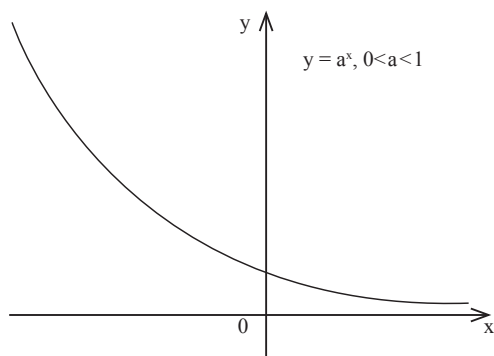


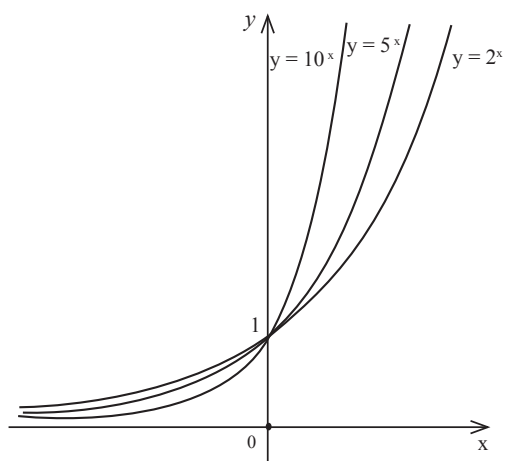
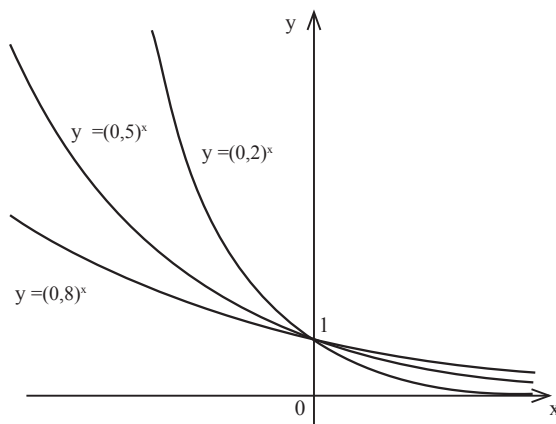
Figura 4 - Gráfico de $y = a^x$, $a > 1$

Figura 5 - Gráfico de $y = a^x, 0 < a < 1$

2. Atribuindo à base a o significado de *fator* de crescimento ou decaimento exponencial, aceitaremos que:

- valores grandes de a em $y = f(x) = a^x$ modelam crescimentos rápidos;
- valores de a próximos de 0 em $y = f(x) = a^x$ modelam decaimentos rápidos.

Os gráficos desenhados a seguir dão uma idéia do significado destas afirmações.

Figura 6 - Gráfico de $y = a^x, a > 1$ Figura 7 - Gráfico de $y = a^x, 0 < a < 1$

3. O crescimento ou decaimento exponencial é muitas vezes dado em percentuais, ou seja, explicitando a *taxa de crescimento*. Em nosso exemplo 2.1 este percentual foi de 1,3%, o que correspondeu a uma taxa $r = 0,013$. Ainda naquele nosso exemplo, o *fator de crescimento* será $a = 1 + r$, e a função que modela o fenômeno será

$$y = f(x) = a^x.$$

Numa situação de decaimento, o *fator de decaimento* será $a = 1 - r$, e este valor corresponderá à base da função exponencial que modela o fenômeno.

3.3 Exercício

A partir dos gráficos nas Figuras 4 e 5, construa os gráficos de $y = ka^x$, discutindo o que acontece quando consideramos valores diferentes para k . Organize sua resposta em dois itens, correspondentes a valores de $k > 0$ e valores de $k < 0$.

3.4 Exercício⁸

Um dos contaminantes principais de um acidente nuclear, tal como o de Chernobyl, é o estrôncio-90, que decai exponencialmente a uma taxa de, aproximadamente, 2,5% ao ano.

- Escreva a expressão da função que descreve o decaimento neste caso. Para isso, denomine por k_0 a quantidade de estrôncio presente no início do acidente.
- Considerando que ao tempo $t=0$ há 100% do contaminante presente, escreva a porcentagem de estrôncio-90 restante, P , em função de anos t , desde o acidente nuclear.
- Esboce o gráfico de $P(t)$.

3.5 Propriedades e tabelas de dados

Como reconhecer se uma tabela de valores x e y provém de uma função linear? Ou de uma função exponencial?

Funções lineares se caracterizam pelo fato de sua *taxa de variação* ser constante. Portanto, os dados em uma tabela correspondem a uma função linear $y = f(x)$ caso sua *taxa de variação* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ permaneça sempre constante.

Já no caso das funções exponenciais $y = f(x) = ka^x$, as *razões* entre um valor de y , e o outro valor correspondente à variação de uma unidade em x , devem permanecer constantes, possibilitando a definição de um *fator* de crescimento ou decrescimento (como visto nos exemplos 2.1 e 2.2).

⁸ Adaptação do exercício 17, p. 36 em HUGHES-HALLET *et al.* *Cálculo e aplicações*.

3.6 Exercício⁹

Quais das seguintes tabelas podem corresponder a uma função linear? Quais podem corresponder a uma função exponencial? Ou a nenhuma delas?

x	$f(x)$
0	10,5
1	12,7
2	18,9
3	36,7

t	$f(t)$
-1	50,2
0	30,12
1	18,07
2	10,8432

u	$g(u)$
0	27
2	24
4	21
6	18

4. O NÚMERO e

Até aqui consideramos expressões $y = f(x) = ka^x$, onde a base a é um número qualquer maior que 0 e diferente de 1.

Uma base que usamos frequentemente é o número irracional $e = 2,7182$. Esta base é tão usada que as calculadoras têm um botão e^x . Os motivos de tal preferência não serão discutidos aqui. Ao invés de justificá-la, agora, queremos apenas chamar sua atenção para o fato de que seu estudo e seu gráfico são análogos aos anteriores.

Qualquer outra função exponencial da forma $y = f(x) = ka^x$ pode ser escrita na base e , ou em qualquer outra base. Para percebermos isso, observe o gráfico da função $y = e^x$, desenhado na Figura 8. Como vimos, desenhamos gráficos de exponenciais sem tirar o lápis do papel. Isso quer dizer que, dado qualquer valor $y = a$, onde $a > 0$, existe um valor, digamos, m , tal que $e^m = a$. Veja este valor na figura abaixo:

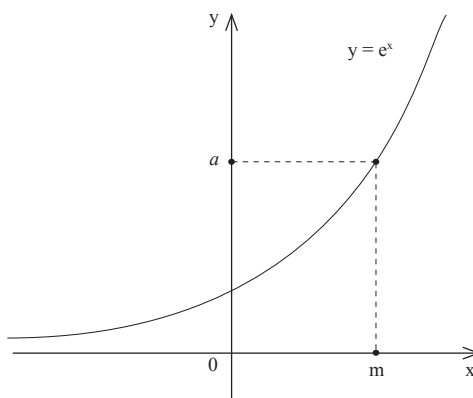


Figura 8 - A exponencial de base e

⁹ Exercício 13, p. 36, HUGHES-HALLET *et al.* *Cálculo e aplicações*.

Substituindo este valor $e^m = a$ na expressão $y = f(x) = ka^x$ podemos escrever:¹⁰

$$y = f(x) = ka^x = k(e^m)^x = ke^{mx}$$

O destaque no quadro acima traduz uma função exponencial de base a em termos de uma função exponencial de base e . Fica aqui a observação de que para estudarmos as exponenciais $y = f(x) = ka^x$ não é necessário esgotarmos milhares e milhares de valores para a base a . Basta, por exemplo, estudarmos as expressões $y = ke^{mx}$.

Este é um dos motivos de sua calculadora trabalhar com a expressão de uma única exponencial; no caso, a expressão e^x .

4.1 Exemplo: decaimento radioativo

Experimentos em laboratórios indicam que alguns tipos de átomos emitem parte de sua massa na forma de radiação. Com sua massa reduzida, transforma-se em outro elemento não radioativo. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui e, conseqüentemente, a massa da nova substância não radioativa aumenta. Esse processo é denominado de decaimento radioativo.

Se M_0 denota a massa inicial (instante $t = 0$) de uma substância radioativa, então a massa que resta em qualquer tempo t posterior será dada por

$$M(t) = M_0 e^{-rt}, r > 0,$$

e o número r é chamado de *taxa de desintegração* da substância.

Por exemplo, o carbono 14, ou radiocarbono, indicado por ^{14}C , se desintegra para o nitrogênio 14, ^{14}N , e a sua taxa de decaimento, determinada experimentalmente, é de aproximadamente $r = 1,2 \times 10^{-4}$, quando t é medido em anos.

Temos então que

$$M(1000) = M_0 e^{-1000r} = M_0 e^{-1,2 \times 10^{-4} \times 1000} = M_0 e^{-0,12} = 0,8869 M_0$$

$$M(5000) = M_0 e^{-5000r} = M_0 e^{-1,2 \times 10^{-4} \times 5000} = M_0 e^{-0,6} = 0,5488 M_0.$$

Usualmente, a taxa de desintegração de uma substância é dada em termos de sua *meia-vida*, isto é, o tempo necessário para que a metade dos núcleos, presentes originalmente na amostra, sofram decaimento radioativo. Para determinar a meia-vida do carbono, vamos escrever a quantidade inicial de massa de uma amostra por M_0 e o tempo necessário para que essa amostra fique reduzida à metade por T , ou seja,

¹⁰ Entre a terceira e a quarta igualdade, utilizamos propriedades de potências, que são também válidas quando operamos com exponenciais.

$$M(T) = \frac{1}{2} M_o. \text{ Logo, } M_o e^{rt} = \frac{1}{2} M_o \Rightarrow e^{rt} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{rt} = 2.$$

Como determinar o valor de T , numa relação como esta? Podemos fazê-lo por tentativa e erro, ou usar uma calculadora, caso soubéssemos o valor de r . No momento, faltam-nos instrumentos capazes de escrever o valor de T de modo explícito, a partir de uma equação como esta.

A resolução de equações como $e^{rt} = 2$ é um dos objetivos de nossa próxima aula.

5. REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1999.

IBGE/DPE/Departamento de População e Indicadores Sociais. Gerência de estudos e análises da dinâmica demográfica. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 02 maio 2006.

Funções logarítmicas

OBJETIVO

Esperamos que ao final desta aula você saiba utilizar a função logarítmica para resolver equações como a proposta ao final da Aula 7, denominadas equações exponenciais, e ainda para discutir a utilização de escalas logarítmicas.

1. INTRODUÇÃO

Nossa última aula deixou ao seu final uma equação para ser resolvida. Equações como aquela emergem frequentemente no contexto dos problemas estudados. Sua resolução requer a determinação de inversas para a função exponencial, já conhecida.

A inversa da função exponencial é denominada função logarítmica. Nosso objetivo, nesta aula, é defini-la, discutindo suas propriedades, seu gráfico, e relações entre as possíveis bases.

2. ESTUDO DA INVERSA DA FUNÇÃO $y = 10^t$, $t \in \mathbb{R}$

A exponencial com base 10 e sua inversa são instrumentos importantes em aplicações da matemática. Iniciamos nossa aula estudando-as em detalhe. As questões colocadas aqui orientam o estudo da exponencial, com base a qualquer, e de sua inversa.

Nossa pergunta inicial – como resolver equações exponenciais – é respondida para este caso particular, nas duas seções a seguir. O estudo da resolução de uma equação específica, a equação $10^t = 216$, antecede o desenvolvimento do caso geral.

2.1 Resolvendo a equação $10^t = 216$

Existiria um valor de t tal que $10^t = 216$?

O gráfico da função $y = 10^t$, esboçado na Figura 1, nos sugere que tal valor existe. Explorando a questão numericamente, é até fácil verificarmos que $2 < t < 3$, porque $10^2 < 216 < 10^3$.

Podemos até refinar esta busca um pouco mais. Por exemplo, será que $2,0 < t < 2,5$? Para respondermos, verificamos (usando uma calculadora!) se $10^2 < 216 < 10^{2,5}$. Utilizando recursivamente esta estratégia, podemos conseguir aproximações numéricas cada vez melhores para o valor de t procurado.

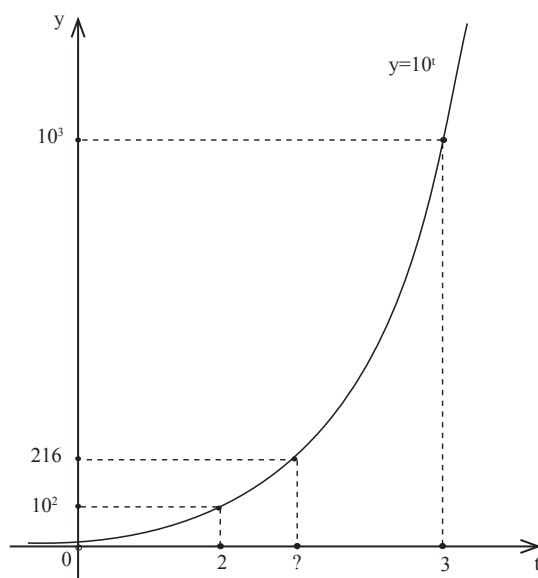


Figura 1 - Resolvendo a equação $10^t = 216$

¹ De um modo geral, sempre que uma função é representada por uma expressão algébrica, podemos interpretar sua ação num ponto de seu domínio como o processamento de uma sequência de “comandos”, como descrito neste exemplo 2.1. Na verdade, quando estamos utilizando calculadoras, processamos tais sequências de comandos ao calcular o valor y da função $y = f(x)$, em um dado ponto x de seu domínio.

2.1.1 Definição

Nós damos o nome *logaritmo na base 10 de 216* a este valor de t (tal que $10^t = 216$), e escrevemos: $\log_{10} 216$.

Em outras palavras, o valor $t = \log_{10} 216$, que é o *logaritmo na base 10 de 216*, é a potência a que se deve elevar o número 10 para obtermos 216.

No gráfico da Figura 1, este valor corresponde ao ponto marcado com o sinal de interrogação, no eixo das abscissas.

2.2 Estabelecendo condições para a resolução da equação $10^t = b$

Em que condições existe um valor de t tal que $10^t = b$, em que b é um número real?

A noção de função inversa, estudada na Aula 6, nos ajuda a responder esta questão.

Observe o esboço do gráfico de $y = 10^t$, na Figura 2. Podemos determinar o valor de t tal que $10^t = b$, desde que $b > 0$.

Note também, ainda explorando a Figura 2, que este valor será positivo caso $b > 1$; será negativo caso $0 < b < 1$ e será 0 caso $b = 1$.

2.2.1 Definição

O valor de t tal que $10^t = b$ será denominado *logaritmo na base 10 de b* e escrevemos: $t = \log_{10} b$.

Em outras palavras, o valor $t = \log_{10} b$, que é o *logaritmo na base 10 de b* , é a potência t a que se deve elevar o número 10 para se obter.

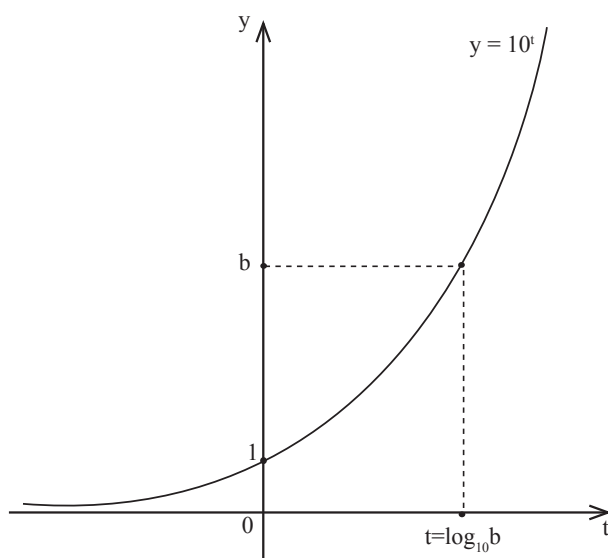


Figura 2 - Definindo graficamente $\log_{10} b$

2.3 Definindo a função inversa de $y=10^t$, $t \in \mathbb{R}$

A inversa de $y = 10^t$, $t \in \mathbb{R}$, pode ser definida porque $y = 10^t$ é injetiva em $\mathbb{R}$. É possível verificarmos esta afirmação observando o seu gráfico na Figura 2: as retas de equação $y = b$, onde b é um número real, o interceptam quando $b > 0$, e no máximo uma vez.

A Figura 3, a seguir, representa um esboço do gráfico da inversa de $y = 10^t$, $t \in \mathbb{R}$. Este esboço foi obtido a partir do gráfico de $y = 10^t$, como fizemos anteriormente na Aula 6. Como discutido naquela aula, estamos utilizando um único sistema de coordenadas, e refletindo o gráfico de $y = 10^t$ em torno da reta $y = t$.

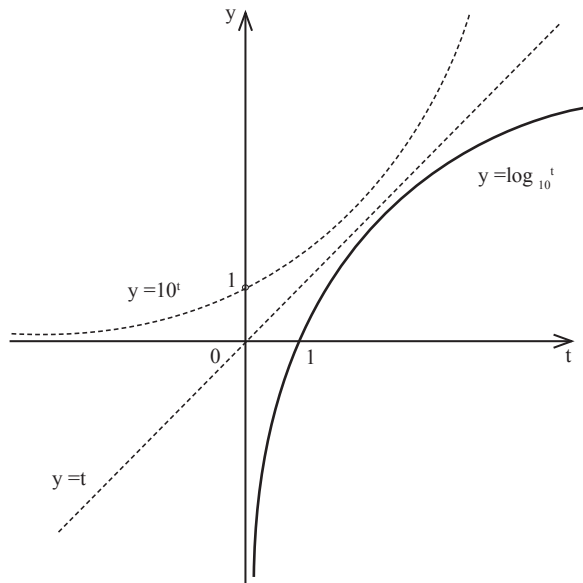


Figura 3 - O gráfico da função $y = \log_{10} t$

2.3.1 Definição

A inversa de $y = 10^t$, $t \in \mathbb{R}$, é denominada $y = \log_{10} t$ (lê-se y igual a *logaritmo na base 10 de t*).

Uma vez que o valor $\log_{10} x$ é a potência a que se deve elevar o número 10 para se obter o valor x , ou seja,

$$\log_{10} x = C \text{ significa que } 10^C = x,$$

podemos dizer que a inversa de $y = 10^t$, $t \in \mathbb{R}$, que denominamos $y = \log_{10} t$, é a função que satisfaz: $\log_{10} t = y \Leftrightarrow 10^y = t$.

2.4 Exercício: estudando a inversa de $y = 10^t$

- Qual é o domínio e qual é a imagem da função $y = \log_{10} t$? Responda esta questão explorando o gráfico das Figuras 2 e 3.
- É verdade que $\log_{10} 1 = 0$? Explique por quê.
- O que você acha que irá acontecer com os valores da função $y = \log_{10} t$ quando os valores de t ficarem muitos grandes e positivos? Diga por quê.
- O que você acha que irá acontecer com os valores da função $y = \log_{10} t$ quando t estiver muito próximo de 0? Diga por quê.

3. A INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL $y = a^x$, ONDE $a > 0$, $a \neq 1$

As questões discutidas no estudo da função $y = 10^t$ são importantes para a determinação da inversa da função exponencial $y = a^x$, onde $a > 0$, $a \neq 1$.

Vamos retomá-las neste caso geral e explorar os esboços dos gráficos nas Figuras 4 e 5, para estabelecer as condições em que podemos definir a inversa de $y = a^x$, onde $a > 0$, $a \neq 1$. Retas de equação $y = b$, onde b é um número real, interceptam a função $y = a^x$ quando $b > 0$; e no máximo uma vez.

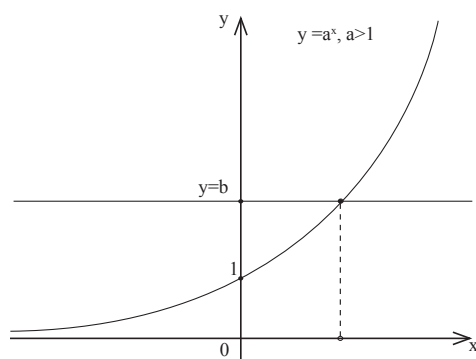


Figura 4 - Interseção do gráfico de $y = a^x$, $a > 1$ com $y = b$

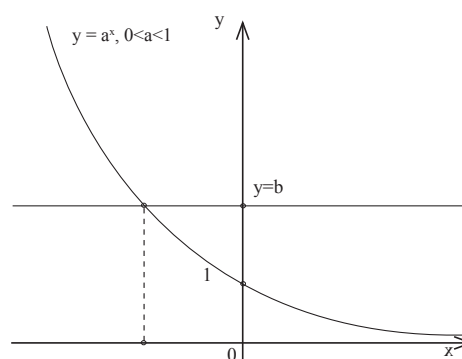


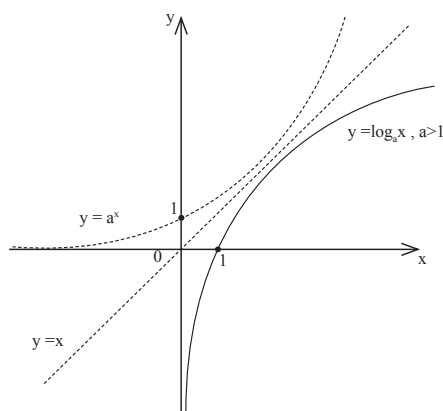
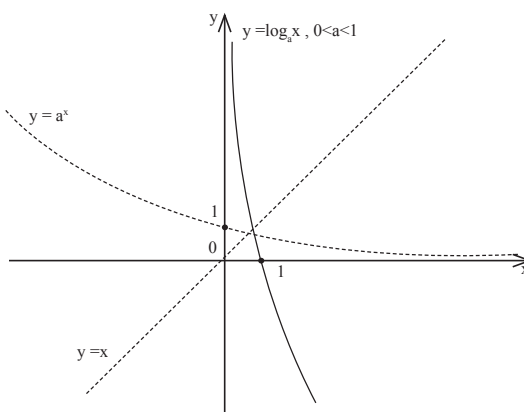
Figura 5 - Interseção do gráfico de $y = a^x$, $0 < a < 1$ com $y = b$

Desse modo, as funções $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) admitem inversas em todo o seu domínio, que é $\mathbb{R}$.

3.1 Notação e linguagem

A inversa da função exponencial $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), denominada *função logarítmica*, é simbolizada por $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$). Como antes, lê-se *logaritmo na base a de x*.

As Figuras 6 e 7 a seguir representam o gráfico de $y = \log_a x$, obtido no mesmo sistema de coordenadas de sua inversa $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), como discutido na Aula 6.

Figura 6 - Gráfico da função $y = \log_a x$, $a > 1$ Figura 7 - Gráfico da função $y = \log_a x$, $0 < a < 1$

Como anteriormente, o valor $y = \log_a x$ representa a potência a que se deve elevar o número a para se obter o valor x . Relembrando que $\mathbb{R}_+^*$ representa os números reais positivos, excluindo o zero, podemos definir:

3.2 Definição

A inversa de $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $x \in \mathbb{R}$, que denominamos $y = \log_a x$, é definida em $\mathbb{R}_+^*$ e é a função que satisfaz $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

3.3 Explorando o gráfico de $y = \log_a x$, onde $a > 0$, $a \neq 1$

Descrições qualitativas e informações importantes podem ser obtidas a partir do gráfico de uma função.

Por exemplo, na aula sobre funções inversas, discutimos a relação que existe entre o domínio e imagem de uma função e de sua inversa. O domínio de $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), que é $\mathbb{R}$, será a imagem de sua função inversa. A imagem de $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), que é $\mathbb{R}_+^*$, será o domínio da função inversa.

Uma leitura do gráfico nas Figuras 6 e 7 nos sugere:

A função $y = \log_a x$ tem domínio $\mathbb{R}_+^*$ e imagem $\mathbb{R}$.

Observe que todos os gráficos nas Figuras 6 e 7, da Aula 7, interceptam o eixo y no valor 1. Isso decorre do fato de que o valor das funções exponenciais $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), no ponto $x = 0$, é 1, qualquer que seja o valor $a > 0$. No caso das funções logarítmicas, definidas como inversas de funções exponenciais, podemos afirmar:

$$\log_a 1 = 0, \text{ qualquer que seja o valor } a > 0.$$

Gráficos de funções, que representam relações entre variáveis, nos permitem visualizar como a variação de uma delas afeta a outra. Por exemplo, observe os gráficos das funções logarítmicas, que nunca interceptam o eixo Oy . As curvas-gráfico parecem se aproximar deste eixo, à medida que o valor de x fica muito pequeno em $\mathbb{R}^*_+$. Ou seja, quando x fica próximo do $x = 0$, ainda que positivo, o valor da ordenada y no gráfico das funções logarítmicas parece ficar:

- muito grande (em valor absoluto), mas negativo, no caso de $a > 1$;
- muito grande, positivo, no caso da base $0 < a < 1$.

Já quando o valor de x fica muito grande em $\mathbb{R}^*_+$, o gráfico sugere que:

- o valor da ordenada y fica muito grande e positivo, no caso da base $a > 1$;
- o valor da ordenada y fica muito grande (em valor absoluto), sempre negativo, no caso da base $0 < a < 1$.

Observe o gráfico de $y = \log_a x$, com $a > 1$, na Figura 8 a seguir. É interessante perceber sua forma, como que curvada para baixo. Vimos que uma curva com tal formato é denominada *côncava para baixo*.

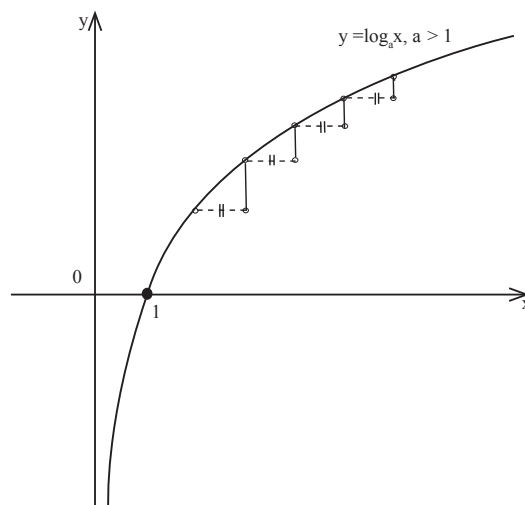


Figura 8 - Representando a variação de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $y = \log_a x$, $a > 1$

Seria natural nos perguntarmos o que poderia estar provocando este efeito visual. Ele resulta do fato de que as variações Δy , como representadas na Figura 8, para $x > 1$, são cada vez menores (mantendo espaços regulares de variação Δx). Em outras palavras,

quando x cresce, as taxas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ têm seu valor cada vez menor, o que significa que a função se modifica cada vez mais devagar.

Informações como estas são importantes e são justificadas algébrica ou numericamente; e podem ser recuperadas de leituras atentas de bons esboços de gráficos.

3.4 A construção de escalas logarítmicas

A ação da função $y = \log_a x$ sobre um número x tem um efeito interessante, que pode ser verificado na Figura 8. A partir da discussão acima sobre sua taxa de variação, vemos que a função amplia as distâncias na imagem de números no intervalo $[0, 1]$, e as reduz na imagem de números no intervalo $[0, +\infty)$.

Esse efeito importante é utilizado na construção de escalas para representação de valores, denominadas escalas logarítmicas. Isso porque, ao representarmos dados em gráficos, se escolhermos escalas para conter dados muito grandes, é comum tornarmos impossível a representação de valores muito pequenos. Ao escolhermos escalas para representar valores pequenos com facilidade, dados muito grandes podem acabar ficando fora dos limites do papel.

A função $y = \log_{10} x$ é utilizada em escalas para resolver questões como estas. Costuma-se representar dados em gráficos com *escalas logarítmicas* em um dos eixos (ver Figura 9 a seguir), ou em ambos. Nelas, os valores corresponderão não a um número real c como numa escala milimetrada, mas ao número $\log_{10} c$.

Observe no gráfico de $y = \log_{10} x$, na Figura 7, porque esta escala funciona para resolver os problemas que anunciamos. Veja que a ação de $y = \log_{10} x$ sobre valores muito grandes de x os reduz em sua imagem – a ordenada y é sempre menor que o valor da abscissa x correspondente. E mais que isso, os valores das taxas $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se tornam

cada vez menores, o que diminui as distâncias entre dois números que serão marcados na escala. Esse fato deixa as distâncias cada vez menores, à medida que os valores de x crescem. Já os números pequenos, correspondentes a valores de x entre 0 e 1, têm a imagem de suas abscissas ampliadas no intervalo $(-\infty, 0]$, o que possibilita sua representação.

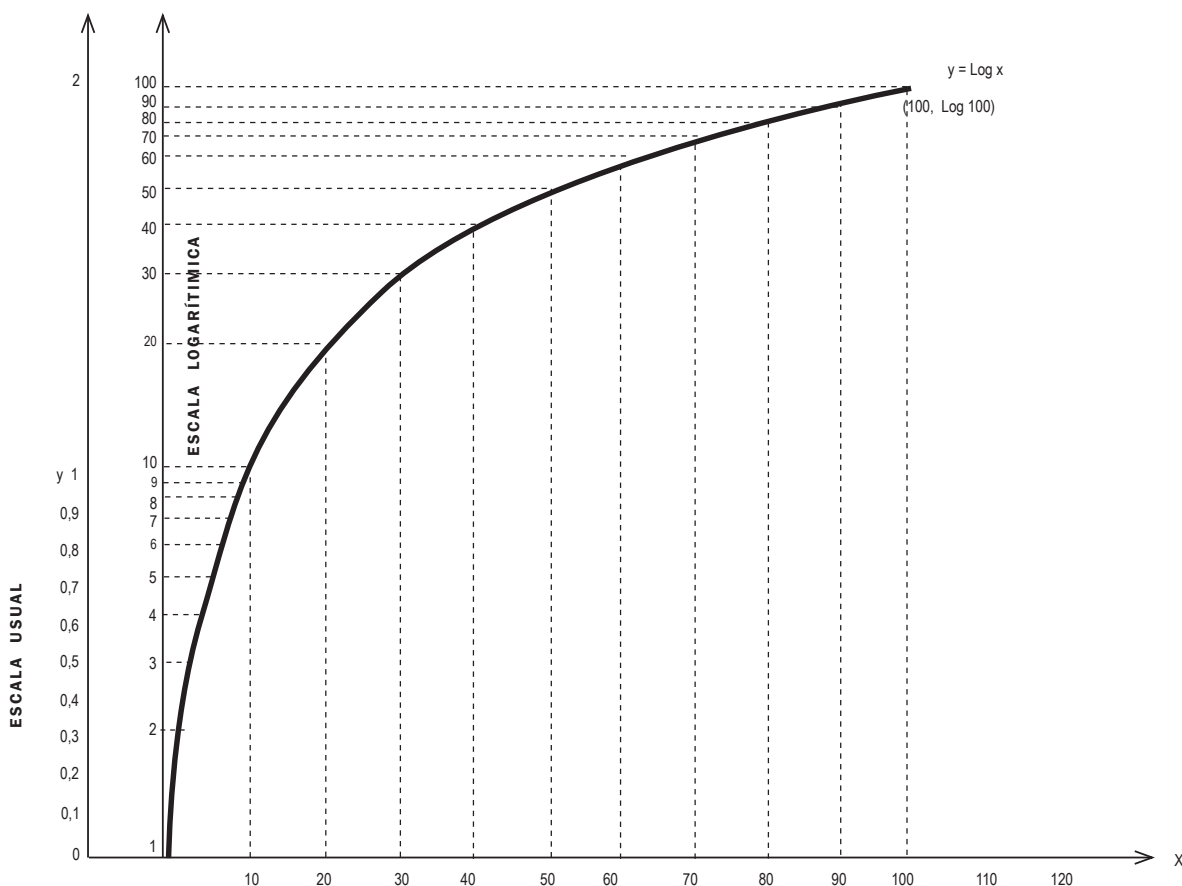


Figura 9 - Comparação entre escala usual e escala logarítmica

4. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO $y = \log_a x$

A função $y = \log_a x$, definida como inversa de $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), desfaz a ação desta última sobre um valor x . Como consequência, podemos escrever:

4.1 Propriedade

$$\log_a a^x = x, \text{ para todo } x \text{ em } \mathbb{R}.$$

Observe que desfazer a ação da exponencial sobre o número x corresponde a recuperá-lo a partir da expressão a^x . Isso é obtido em 4.1 fazendo a ação $y = \log_a x$ atuar sobre a^x ; ou seja, compondo as duas funções.

Da mesma forma, $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) desfaz a ação de $y = \log_a x$ em um ponto x . Lembre-se de que se f é inversa de g , então g é inversa de f . Assim, podemos escrever:

4.2 Propriedade

$$a^{\log_a x} = x, \text{ para todo } x \text{ em } \mathbb{R}_+^*.$$

A propriedade 4.3 é um caso especial da propriedade 4.1, uma vez que $a^0 = 1$, independente do valor da base a .

4.3 Propriedade

$$\log_a 1 = 0$$

Além destas, três outras propriedades são importantes quando utilizamos a função $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) na resolução de problemas. São elas:

4.4 Propriedade

$$\log_a (AB) = \log_a (A) + \log_a (B)$$

4.5 Propriedade

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \log_a (A) - \log_a (B)$$

4.6 Propriedade

$$\log_a (A^B) = B \log_a (A)$$

Demonstração de 4.4

Da definição de função inversa temos

$$f \text{ e } f^{-1} \text{ são inversas então } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

No caso do par de inversas $y = \log_a x$ e $y = a^x$, a definição se traduz em

$$\log_a x = c, \text{ quer dizer } a^c = x.$$

Assim, sejam $c_1 = \log_a A$ e $c_2 = \log_a B$. Então $a^{c_1} = A$ e $a^{c_2} = B$; e

$$\log_a (AB) = \log_a (a^{c_1} a^{c_2}). \text{ Fazendo uso das propriedades}$$

de exponenciais,

$$\log_a (a^{c_1} a^{c_2}) = \log_a (a^{c_1+c_2}) = c_1 + c_2 = \log_a A + \log_a B,$$

como queríamos demonstrar.

As demais propriedades se demonstram de modo análogo. Podemos encontrar sua demonstração, bem como as das três propriedades iniciais, na maioria de nossos livros tradicionais de Cálculo.

As propriedades acima são importantes na resolução de equações que envolvem funções logarítmicas.

4.7 Exemplo: resolvendo equações logarítmicas

Determinar o valor de t que satisfaça

$$5 = 3(10^{2t})$$

Podemos escrever:

$\log_{10}(5) = \log_{10}(3(10^{2t}))$. Aplicando a propriedade 4.4 ao segundo membro da igualdade, temos,

$$\log_{10}(3(10^{2t})) = (\log_{10} 3) + \log_{10}((10^{2t}))$$

Veja você que, no segundo membro desta última expressão, temos $\log_{10}(10^{2t}) = 2t$, pela propriedade 4.1.

Desse modo, retomando a equação que estamos resolvendo, já com estas informações, escrevemos

$$\log_{10}(5) = (\log_{10} 3) + (2t). \text{ Segue que } t = \frac{\log_{10}(5) - \log_{10}(3)}{2}. \text{ Em}$$

situações práticas, a escrita deste valor como um número decimal, em geral aproximado, pode ser obtida com auxílio de uma calculadora, ou de uma tabela.

4.8 Exemplo: reescrevendo expressões envolvendo logaritmos

Observe o resultado que obtivemos no exemplo 4.7:

$$t = \frac{\log_{10}(5) - \log_{10}(3)}{2}$$

Ainda utilizando as propriedades no início desta seção, podemos reescrever esta expressão, tornando-a concisa.

Da propriedade 4.5, a expressão do numerador se reescreve

$$\log_{10}(5) - \log_{10}(3) = \log_{10} \frac{5}{3}.$$

Desse modo,

$$t = \frac{1}{2} \left(\log_{10} \left(\frac{5}{3} \right) \right).$$

Utilize agora a propriedade 4.6 para escrever $t = \log_{10} \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$.

4.9 Exercícios

Resolva as equações, determinando o valor de t :

a) $3 = 4(10^t)$

b) $5(3^t) = 2(7^t)$

Consulte os livros de Cálculo em nossa biblioteca e resolva outras equações deste tipo. Nos primeiros exercícios que você resolver, procure explicitar as propriedades que estão sendo usadas, como fizemos acima.

5. O LOGARITMO NATURAL

Definimos o logaritmo natural de um número x como o valor c tal que $e^c = x$.

Ou seja, $c = \log_e x$, em que o número e é igual a 2,7182...

É usual denominarmos $\log_e x$ por $\ln x$. Assim, a função $y = \ln x$ é a inversa de $y = e^x$.

Como observamos na aula sobre funções exponenciais, a base e é muito usada. Desse modo sua inversa $y = \ln x$ terá um papel central dentre o grupo de funções estudadas nesta aula. Numa calculadora científica, temos o comando LN, que corresponde a esta função. Por isso muitas vezes resolvemos as equações exponenciais utilizando a função logaritmo natural.

A resolução de equações utilizando o logaritmo natural não acrescenta nada diferente aos procedimentos desenvolvidos até aqui.

5.1 Exemplo: resolvendo a equação proposta ao final da Aula 7

Em nossa aula anterior, não sabíamos determinar o valor de T na equação $e^{rT} = 2$, em que $r = 1,2 \times 10^{-4}$ é a taxa de decaimento do carbono 14. Após esta aula, sabemos resolvê-la:

$$\ln(e^{rT}) = \ln 2, \text{ ou seja, } rT = \ln 2,$$

$$\text{o que nos dá } T = \frac{\ln 2}{r}.$$

O valor de T , de acordo com o problema que resultou nesta equação, representa a meia-vida do carbono 14.

5.2 Indo além, e avaliando a idade de um fóssil¹

Um crânio descoberto em uma escavação arqueológica tem 10% da quantidade original de carbono 14 presente. Como avaliar sua idade?

Ora, como discutido na Aula 7, a quantidade q de carbono 14 radioativo, que permanece no organismo t anos depois da morte, pode ser expressa por $q = q_0 e^{-0,000121t}$, na qual q_0 é a quantidade de carbono inicial. Para respondermos a questão proposta, devemos determinar o valor do tempo t para o qual $q = \frac{10}{100} q_0$.

Resolvendo a equação $\frac{10}{100} q_0 = q_0 e^{-0,000121t}$, escrevemos

$$\frac{1}{10} = e^{-0,000121t}$$

$$\ln \frac{1}{10} = \ln e^{-0,000121t}, \text{ ou}$$

$$-\ln 10 = -0,000121t. \text{ Ou seja, } t = 10^6 \frac{\ln 10}{121}.$$

Com o auxílio de uma calculadora, a resposta é $t = 15.678,7$ anos.

5.3 Exemplo: gráficos em escalas semi-log

São inúmeros os fenômenos modelados por funções como $y = f(t) = ke^{-mt}$.

Para serem estudadas, seus gráficos costumam ser representados em papel com escala semi-log, também chamada escala mono-log.

¹ HUGHES-HALLET et al. *Cálculo e aplicações*, p. 49. exercício 13.

Este consiste de um papel com uma escala milimetrada no eixo x e outra, correspondendo ao eixo y , com graduações segundo relações logarítmicas na base 10. Para representarmos o gráfico de uma função $y = f(t) = ke^{-mt}$ num sistema como este, devemos escrever, para cada valor de t marcado na escala milimetrada, o valor correspondente $\log_{10} y$. Obtendo-o na relação $y = f(t) = ke^{-mt}$, temos que

$$\log_{10} y = \log_{10} (ke^{-mt})$$

ou, utilizando as propriedades de logaritmo,

$$\log_{10} y = \log_{10} k - mt \log_{10} e.$$

Tomando $\log_{10} e \approx 0,43$, escrevemos: $\log_{10} y = \log_{10} k - 0,43 mt$.

A relação entre $Y = \log_{10} y$, que será marcado no eixo Y do papel em escala semi-log – a variável t é linear –, e seu gráfico será uma reta (observe que todas as outras letras na relação representam constantes). Desse modo, fica mais fácil estabelecermos as relações que são necessárias entre as constantes envolvidas no problema.

5.4 Um comentário final: mudança de bases

Observe os gráficos das funções representados na figura a seguir.

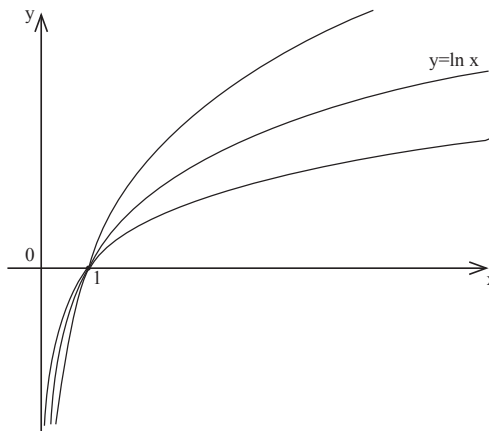


Figura 10 - Gráficos das funções $y = k \ln x$

São gráficos de funções logarítmicas, de equação $y = k \ln x$, para diferentes valores do número real positivo k .

É possível mostrarmos que qualquer outra função $y = \log_a x$ está representada nesta figura, para um valor conveniente da constante k . Em outras palavras, é possível mostrarmos que existe um valor adequado k para cada valor da base a tal que

$$\log_a x = k \ln x.$$

Esta constante é conhecida como mudança de base, e está determinada no quadro em destaque a seguir.

Em síntese, se conhecemos bem a função $y = \ln x$ (ou na verdade, qualquer *uma* outra função $y = \log_a x$), conhecemos *todas* as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

A expressão da mudança de base entre $y = \log_a x$ e $y = \ln x$:

Da definição da função $y = \log_a x$ como inversa de $y = a^x$, sabemos

$$a = e^{\ln a}, \text{ para todo } a > 0$$

$$\log_a x = c \text{ é o mesmo que dizer } a^c = x.$$

Uma vez que $a = e^{\ln a}$, podemos escrever

$$a^c = (e^{\ln a})^c = x, \text{ ou seja, } e^{c \ln a} = x.$$

Isso é o mesmo que dizer

$$c \ln a = \ln x.$$

De outro modo, $c = \frac{1}{\ln a} \ln x$, o que nos permite escrever $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$.

Obtivemos assim o valor da constante mudança de base, $k = \frac{1}{\ln a}$.

6. UMA PALAVRA SOBRE O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DOS LOGARITMOS

A função logarítmica possui uma propriedade interessante que, na verdade, foi o motivo de sua concepção, no século das grandes navegações – o século XVII. Buscavam-se, naquela época, meios para tornar mais simples os cálculos numéricos. Dentre outras propriedades, a função logarítmica transforma produtos de números em somas.

Historicamente, sua invenção antecedeu os estudos da função exponencial geral. Isso significa que a ordem que escolhemos aqui para apresentar esses dois conteúdos inverte a ordem histórica de suas criações. No entanto, hoje é mais natural apresentá-los desse modo; inclusive porque a evolução da tecnologia, com o advento de calculadoras e computadores, tornou sem sentido o motivo inicial (transformar produtos de números em somas) da concepção dos logaritmos.

7. REFERÊNCIAS

HUGHES-HALLETT, D. *et al.* *Cálculo e aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1999.

Site

<<http://www.mat.ufrgs/~edumatec/atividades/ativ24/grafico.html>>

Taxa instantânea de variação de uma função: derivada

OBJETIVO

O objetivo desta aula é apresentar e discutir o conceito de derivada a partir da idéia de taxa média de variação, por meio de uma discussão sobre taxa instantânea de variação.

1. INTRODUÇÃO

Após trabalharmos com diferentes tipos de funções, vamos retomar aqui uma discussão que, embora tenha sido considerada em todas as aulas, foi tratada com maior destaque na Aula 2: a taxa média de variação.

Naquela aula, além de definirmos a taxa média e trabalharmos com alguns exemplos, vimos que esse conceito permite que seja feita uma avaliação mais global da função, ao invés de considerarmos somente informações pontuais, ampliando assim a possibilidade de discussões. Nesta aula, vamos apresentar e discutir o conceito de derivada a partir da idéia de taxa média de variação, por meio de uma discussão sobre taxa instantânea de variação. Vamos começar discutindo um exemplo.

2. EXEMPLO: CÁLCULO DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA DE UM OBJETO

Na Aula 2, trabalhamos com um exemplo (exemplo 3.2) no qual constatamos que a velocidade média de um objeto é a taxa média de variação da função que dá a distância percorrida pelo objeto em função do tempo do percurso. Vamos retomar aquele exemplo para calcular a velocidade instantânea do objeto, 3 *minutos* após sua partida. O enunciado do exemplo é reproduzido a seguir:

Um objeto se move ao longo de uma linha reta de modo que sua posição em relação ao ponto de partida, após t minutos, é $p = s(t) = t^2 - 2t + 6$. Na Aula 2, calculamos a posição em que o objeto se encontrava, com relação ao ponto de partida, após 3 min:

$$s(3) = 9 \text{ m},$$

e a velocidade média do objeto quando o tempo variava de 3 a 5 min:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = 6,0 \text{ m/min}.$$

Em princípio, esse valor da velocidade média poderia ser uma aproximação da velocidade instantânea do objeto no instante $t = 3 \text{ min}$. Mas o que poderíamos fazer para buscar uma melhor estimativa?

Se considerarmos intervalos de tempo menores, tendo 3 como seu extremo esquerdo, obteremos melhores aproximações para a velocidade instantânea do objeto no instante 3 min. Vamos, então, calcular as velocidades médias ($v_1, v_2 \dots v_6$) do objeto (ou as taxas médias de variação da função s) para intervalos de tempo cada vez menores:¹

$$[3; 4]: v_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{14 - 9}{4 - 3} = \frac{5}{1} = 5,0 \text{ m/min};$$

$$[3; 3,5]: v_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,5) - s(3)}{3,5 - 3} = \frac{11,25 - 9}{3,5 - 3} = \frac{2,25}{0,5} = 4,5 \text{ m/min};$$

$$[3; 3,25]: v_3 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,25) - s(3)}{3,25 - 3} = \frac{10,0625 - 9}{3,25 - 3} = \frac{1,0625}{0,25} = 4,25 \text{ m/min};$$

$$[3; 3,125]: v_4 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,125) - s(3)}{3,125 - 3} = \frac{9,515625 - 9}{3,125 - 3} = \frac{0,515625}{0,125} = 4,125 \text{ m/min};$$

$$[3; 3,01]: v_5 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,01) - s(3)}{3,01 - 3} = \frac{9,0401 - 9}{3,01 - 3} = \frac{0,0401}{0,01} = 4,01 \text{ m/min};$$

$$[3; 3,001]: v_6 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,001) - s(3)}{3,001 - 3} = \frac{9,004001 - 9}{3,001 - 3} = \frac{0,004001}{0,001} = 4,001 \text{ m/min}.$$

Observe que, neste exemplo, usamos valores da velocidade média do objeto, em intervalos que continham o instante $t = 3 \text{ min}$, como aproximações para o valor da velocidade instantânea em $t = 3 \text{ min}$.

¹ Escolhemos, aleatoriamente, alguns valores para o extremo direito do intervalo, de tal forma que os tamanhos dos intervalos vão diminuindo.

2.1 Exercício

Calcule as taxas médias de variação da mesma função $p = s(t) = t^2 - 2t + 6$ nos intervalos $[2; 3]$, $[2,5; 3]$, $[2,75; 3]$, $[2,99; 3]$, $[2,999; 3]$ e assim sucessivamente, e compare com as taxas médias calculadas anteriormente. O que você pode concluir?

A cada passo dessas duas seqüências (do exemplo e do exercício), parece que os valores das taxas médias de variação vão se aproximando, cada vez mais, de 4 m/min . Em outras palavras, à medida que os tamanhos dos intervalos vão se aproximando de zero, os valores das velocidades médias, calculadas nesses intervalos, vão se estabilizando em torno de 4 m/min . Esse processo é denominado “cálculo de limite”.²

Podemos levantar a hipótese de que a velocidade instantânea do objeto, no instante $t = 3$, é exatamente igual a 4 m/min . Na verdade, essa hipótese está correta e podemos definir a velocidade instantânea de um objeto utilizando o processo usado no exemplo.

2.2 Definição

A **velocidade instantânea** de um objeto no instante t é o limite das velocidades médias do objeto, calculadas em intervalos de tempo cada vez menores, contendo t .

3. TAXA INSTANTÂNEA DE VARIAÇÃO E DERIVADA

A definição anterior pode ser generalizada para qualquer função, e não apenas para a distância percorrida como função do tempo. Para isso, devemos lembrar que velocidade média é um caso especial de taxa média de variação.

3.1 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A **taxa instantânea de variação** de f em a é o limite das taxas médias de variação de f em intervalos cada vez menores contendo a .

A unidade de medida da taxa instantânea é

$$\frac{\text{unidade de medida de } y}{\text{unidade de medida de } x}.$$

Dessa definição, podemos concluir que valores da taxa média de variação de f , em intervalos cada vez menores contendo a , são aproximações para a taxa instantânea de variação de f em a .

3.2 Exemplo

A população P do Quênia (medida em milhões de habitantes) escrita em função do tempo t (medido em anos desde 1984) é dada pela fórmula $P = f(t) = 19,5 e^{0,042t}$. Vamos calcular a taxa instantânea de variação da população do Quênia em 1985, ou seja, para $t = 1$.

² Há uma definição formal, em termos matemáticos, do conceito de “limite”. Optamos, por enquanto, por trabalhar com esse conceito de forma mais intuitiva, como feito no exemplo anterior.

Para realizar esse cálculo, precisamos calcular taxas médias de variação de P em intervalos de tempo pequenos, contendo o ponto $t = 1$. Faremos esses cálculos para quatro intervalos e denominaremos as respectivas taxas de T_1, T_2, T_3 e T_4 . Vamos utilizar tanto intervalos nos quais o ponto 1 seja seu extremo esquerdo quanto intervalos nos quais o ponto 1 seja seu extremo direito. Como estamos trabalhando com uma função exponencial, vamos precisar de uma calculadora científica para realizar os cálculos:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{f(1,001) - f(1)}{1,001 - 1} = \frac{20,33730 - 20,33644}{1,001 - 1} = \frac{0,00086}{0,001} = 0,85415; \\ T_2 &= \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{f(1,0001) - f(1)}{1,0001 - 1} = \frac{20,33653 - 20,33644}{1,0001 - 1} = \frac{0,00009}{0,0001} = 0,85414; \\ T_3 &= \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0,9999)}{1 - 0,9999} = \frac{20,33644 - 20,33636}{1 - 0,9999} = \frac{0,00008}{0,0001} = 0,85412; \\ T_4 &= \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0,999)}{1 - 0,999} = \frac{20,33644 - 20,33559}{1 - 0,999} = \frac{0,00085}{0,001} = 0,85411. \end{aligned}$$

A partir desses cálculos, parece que 0,854 é uma boa aproximação para a taxa instantânea de variação de P em $t = 1$. Isso significa que a população do Quênia, em 1985, crescia (pois a taxa é positiva), em média, 0,854 milhões de habitantes por ano, ou 0,854 *milhões/ano*.

Também aqui utilizamos valores da taxa média de variação de P , em intervalos que continham o instante $t = 1$ *ano*, como aproximações para o valor da taxa instantânea de variação em $t = 1$ *ano*.

Observemos que, como a unidade de medida de P é *milhões de habitantes* e a unidade de medida de t é *anos*, então, a unidade de medida de $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ é $\frac{\text{milhões de habitantes}}{\text{ano}}$, o que já tínhamos afirmado no parágrafo anterior.

3.3 Exercícios

1. Para cada função abaixo, calcule a taxa instantânea de variação no ponto indicado:
 - a) $y = f(x) = -3x + 12$ em $x = 2$;
 - b) $y = g(t) = 2^t$ em $t = 3$;
 - c) $y = f(x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$, em $x = 0$.

2. Às vezes, não temos uma fórmula para a função, mas temos alguns de seus valores, representados por meio de uma tabela. Apesar de não podermos calcular exatamente a taxa instantânea de variação da função, podemos aproximar esse cálculo por meio da taxa média de variação, como fizemos nos dois exemplos já discutidos nesta aula.

Calcule uma aproximação para a taxa instantânea de variação da altura de André em função do tempo no momento em que ele tinha 2,0 *meses* de idade, a partir da Tabela 1:

Tabela 1
Altura (em cm) de André em função de sua idade (em meses)

Idade (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
Altura(cm)	46,0	46,0	49,5	51,5	54,5	57,0	60,0	62,7	65,5	67,5	73,0

A taxa instantânea de variação de uma função, como você deve ter percebido, é um conceito importante na Matemática, já que ela fornece informações a respeito da variação instantânea da função em um ponto. Enquanto o valor $f(x)$ nos dá um “retrato” da função no ponto x , a taxa instantânea de variação nos dá informações sobre a tendência da função, a partir de $f(x)$. É possível saber, por exemplo, se a função está crescendo ou decrescendo nas proximidades daquele ponto e, mais que isso, a magnitude desse crescimento (ou decrescimento). Por isso, esse conceito importante recebe um nome especial.

3.4 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A **derivada** da função f no ponto a é definida como sendo a taxa instantânea de variação de f em a .

3.5 Notações e linguagem

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A derivada de f no ponto a é denotada por $f'(a)$ e lemos “f linha de a”.

Portanto, como $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de f em a e esta, por sua vez, pode ser aproximada por valores da taxa média de variação de f , em intervalos cada vez menores contendo a , podemos concluir que

$$f'(a) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

em que os Δx são as medidas de intervalos cada vez menores contendo a .

3.6 Exercício

Para cada função abaixo, calcule a derivada no ponto indicado:

a) $y = f(x) = x^2$ calcule $f'(1)$;

b) $y = g(t) = t^4$ calcule $g'(1)$.

4. INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

Sabemos que uma das formas de representar uma função é por meio de gráfico. Faz sentido, então, tentar compreender o que significam, nesse gráfico, os conceitos que estamos estudando: a taxa média de variação e a taxa instantânea de variação (ou derivada) de uma função em um ponto.

4.1 Interpretação geométrica da taxa média de variação

Consideremos uma função $y = f(x)$ e dois pontos pertencentes a seu gráfico, $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ (Figura 1). A taxa média de variação de f no intervalo $[a, b]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

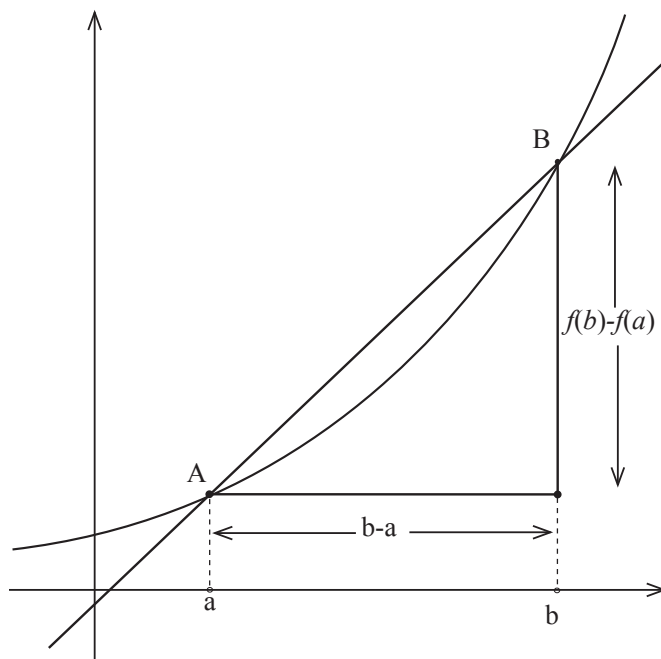


Figura 1 - Interpretação geométrica da taxa média de variação

Da Aula 3 (Funções Lineares) sabemos que o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

é o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta

que contém os pontos A e B . Portanto, podemos concluir que:

A taxa média de variação de $y = f(x)$, quando x varia em $[a, b]$, é igual à inclinação da reta que contém os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Definição

Uma reta que contém, pelo menos, dois pontos do gráfico de uma função é denominada **reta secante** ao gráfico da função.

Levando em conta os dois últimos quadros, podemos concluir que:

A taxa média de variação de $y = f(x)$, quando x varia em $[a, b]$, é igual à inclinação da reta secante que contém os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

4.2 Interpretação geométrica da derivada ou taxa instantânea de variação

Seja $y = f(x)$ uma função e a um ponto de seu domínio. Já sabemos que:

1. a derivada de f em a é o limite das taxas médias de variação de f , em intervalos contendo a cujos comprimentos tendem a zero; e
2. a taxa média de variação de f é a inclinação de uma reta secante a seu gráfico.

De 1 e 2 podemos concluir que, geometricamente, a derivada de f em a é o limite de inclinações de retas secantes ao gráfico de f , em intervalos contendo a cujos comprimentos tendem a zero.

Na Figura 2 apresentamos algumas retas secantes ao gráfico da função $y = f(x)$, obtidas de pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, pertencentes ao gráfico de f . Mas como queremos compreender a derivada geometricamente, vamos considerar as taxas médias de variação de f em alguns intervalos $[a, b]$ de tal forma que a esteja fixo e b se aproxime de a , fazendo com que o tamanho do intervalo $[a, b]$ tenda a zero. Dessa forma, estaremos satisfazendo a definição de derivada.

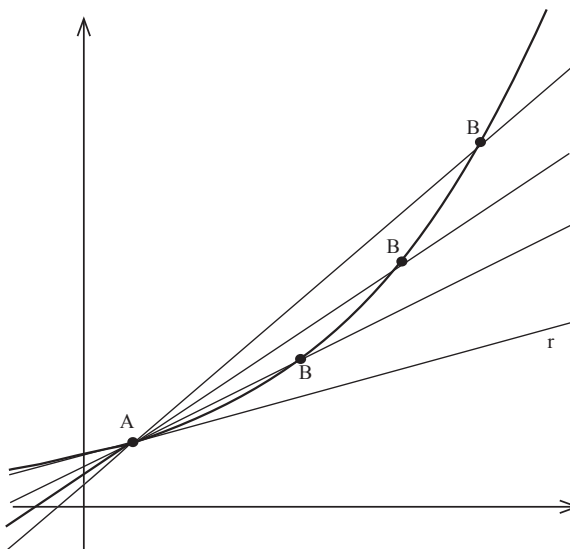


Figura 2 - Interpretação geométrica da derivada ou taxa instantânea de variação

Da figura, podemos observar que a seqüência de retas secantes tende para a reta r , à medida que os pontos B se aproximam do ponto A . Essa reta, limite das retas secantes, é denominada **reta tangente** ao gráfico de f em a . Sumarizamos tudo isso abaixo:

A derivada da função $y = f(x)$ no ponto a é igual ao limite das inclinações das retas secantes ao gráfico de f , nos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, quando o ponto B tende ao ponto A (ou quando b tende a a).

Definição

A reta limite das retas secantes ao gráfico de f , determinada como descrito acima, é denominada **reta tangente** ao gráfico de f em $x = a$.

Levando em conta os dois últimos quadros, podemos concluir que:

A derivada da função $y = f(x)$, em $x = a$, é igual à inclinação da reta tangente ao gráfico de f em a .

Em particular, é fácil calcular a derivada de funções lineares, já que a tangente a uma reta é a própria reta. Assim, se $y = ax + b$, então a reta tangente ao gráfico dessa função, em qualquer ponto, é ela própria e tem inclinação igual a a , o que nos leva a concluir que sua derivada é igual a a em qualquer ponto.

4.3 Inclinação do gráfico de uma função

A Figura 3 apresenta o gráfico de uma função $y = f(x)$ e a reta tangente em um ponto A qualquer de seu gráfico. Podemos observar que, localmente, essa reta tangente quase coincide com o gráfico da função.

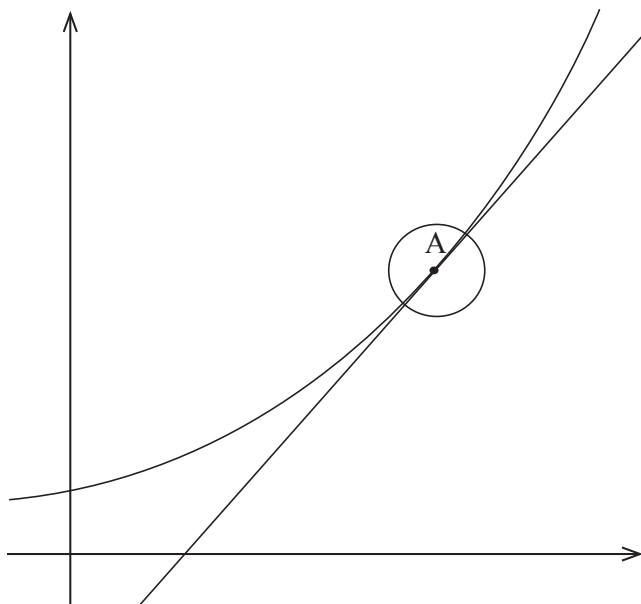


Figura 3 - Gráfico de $y = f(x)$ e reta tangente ao gráfico em um ponto A

Quanto mais próximos estivermos do ponto A , mais a reta tangente e o gráfico da função estão próximos um do outro. Podemos dizer, então, que:

A inclinação do gráfico de f em um ponto A é igual à inclinação da reta tangente ao gráfico de f em A que, por sua vez, é igual à derivada de f em a .

Vamos resumir todas essas propriedades a seguir:

Seja $y = f(x)$ uma função e $A = (a, f(a))$ um ponto de seu gráfico. Então a derivada de f em a , ou $f'(a)$, é igual a:

- a) a taxa instantânea de variação de f em a ; ou
- b) o limite das taxas médias de variação de f em intervalos cada vez menores contendo a ; ou
- c) o limite das inclinações das retas secantes ao gráfico de f , nos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, quando o ponto B tende ao ponto A (ou quando b tende a a); ou
- d) a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em a ; ou
- e) a inclinação do gráfico de f em a .

4.4 Exercícios

Para cada função abaixo, calcule a derivada no ponto indicado, desenhe o gráfico da função e a reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado:

- a) $y = f(x) = -3x + 12$, em $x = 2$;
- b) $y = g(t) = 2^t$, em $t = 3$;
- c) $y = f(x) = -x^3$, em $x = 1$.

A função derivada

OBJETIVO

O objetivo desta aula é estender o conceito de derivada de uma função para todos os pontos do domínio da função para os quais isso é possível, culminando com a definição de função derivada. Vamos definir derivada para funções representadas por fórmulas algébricas.

1. INTRODUÇÃO

Na aula anterior, definimos a derivada de uma função em um ponto como a taxa instantânea de variação da função nesse ponto. Nesta aula, vamos estender essa definição para todos os pontos do domínio da função para os quais essa extensão for possível.

As estratégias utilizadas para o cálculo da derivada em um ponto, na aula anterior, vão se mostrar muito trabalhosas quando se pretende calcular derivadas para muitos pontos. Daí, surgirá a necessidade de buscarmos técnicas mais eficientes para o cálculo de derivadas. Essas técnicas só serão abordadas na próxima aula, mas a origem delas será discutida nesta aula.

2. A FUNÇÃO DERIVADA

Até agora estamos calculando a derivada de uma função em apenas um ponto de seu domínio. Se realizarmos esse processo para todos os pontos do domínio da função, nos quais for possível realizá-lo, obteremos uma nova função.

2.1 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D . A **função derivada** de f é a taxa instantânea de variação de f em x , para cada ponto $x \in D$ no qual é possível calcular essa taxa.

Como estamos denotando a derivada de f em um ponto a por $f'(a)$, você já deve desconfiar de como será denotada a derivada de f em um ponto x qualquer de seu domínio. Entretanto, por motivos históricos,¹ existe mais de uma maneira de expressar essa função.

¹ O Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido, principalmente, pelo inglês Isaac Newton e pelo alemão Gottfried Leibniz, no século XVII. Para maiores informações a esse respeito, consulte um livro de História da Matemática.

2.2 Notações e linguagem

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D . Existem duas maneiras principais para denotar a função derivada de f :

1) Notação de Newton: $f'(x)$;

2) Notação de Leibniz: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$.

A escolha entre a notação de Newton ou a de Leibniz vai depender do que pretendemos fazer com a derivada. Se quisermos expressar a derivada de uma função em um ponto específico, $x = -3$, por exemplo, é mais conveniente utilizarmos a notação de Newton: $f'(-3)$. Por outro lado, a notação de Leibniz nos faz recordar que a derivada pode ser aproximada pela taxa média de variação:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Nos próximos dois exemplos, vamos buscar meios de obter a função derivada para duas funções dadas.

2.3 Exemplo: avaliação gráfica da função derivada

Vamos avaliar a função derivada da função $y = f(x)$ cujo gráfico está esboçado na Figura 1:

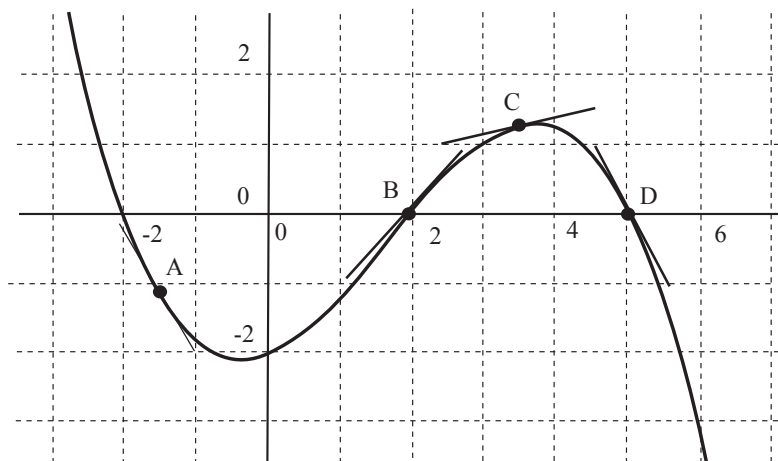


Figura 1 - Gráfico da função $y = f(x)$

A partir do quadriculado do plano cartesiano, podemos estimar a inclinação da reta tangente. E como a derivada é igual à inclinação da reta tangente, em cada ponto do gráfico, será possível estimar o valor da função derivada. Vamos fazer isso para os pontos A, B, C e D destacados na figura. Desenhemos, para cada um deles, um segmento de reta tangente ao gráfico de f . Como o quadriculado é

composto por quadrados que medem 1 *unidade* $\times$ 1 *unidade*, vamos estimar a inclinação de cada segmento comparando-o com diagonais de quadrados ou retângulos contidos no quadriculado.

Ponto A = (a, f(a)): o segmento tangente é, aproximadamente, a diagonal de um retângulo constituído de dois quadrados do quadriculado, um em cima do outro: a base do retângulo mede 1 *un.* ($\cong \Delta x$) e sua altura mede 2 *un.* ($\cong \Delta y$). Além disso, a inclinação é negativa. Portanto,

$$f'(a) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Ponto B = (b, f(b)): o segmento tangente é, aproximadamente, a diagonal de um quadrado constituído de quatro quadrados do quadriculado: a base e a altura do quadrado medem 2 *un.*; e a inclinação é positiva. Portanto, $f'(b) \cong 1$.

Ponto C = (c, f(c)): raciocinando de forma análoga, $f'(c) \cong 1/4$.

Ponto D = (d, f(d)): $f'(d) \cong -2$.

Para estimar a inclinação dos segmentos tangentes nos pontos A, B, C e D, levamos em conta, também, o seu sinal:

- f tem derivada negativa até, aproximadamente, $x = -0,3$. O módulo da derivada começa grande e vai diminuindo até $x = -0,3$;
- $f'(-0,3) = 0$;
- f tem derivada positiva para x aproximadamente entre $-0,3$ e $3,6$. No início do intervalo o valor da derivada é pequeno, cresce até certo ponto e depois volta a diminuir;
- $f'(3,6) = 0$;
- f tem derivada negativa para x maior que $3,6$, aproximadamente. O módulo da derivada começa pequeno nesse intervalo e vai crescendo à medida que x aumenta.

2.4 Exemplo: avaliação numérica da função derivada

Se as informações a respeito de uma função forem dadas em uma tabela, é possível encontrar uma aproximação para a função derivada a partir das taxas médias de variação, como já foi discutido na aula anterior.

Por exemplo, no exercício 2 da seção 3.3 da Aula 9, foi apresentada a altura de André (em *cm*) em função de sua idade (em *meses*). Daquele exercício, podemos obter a Tabela 1 a seguir, que apresenta a derivada da função altura, também em função da idade:

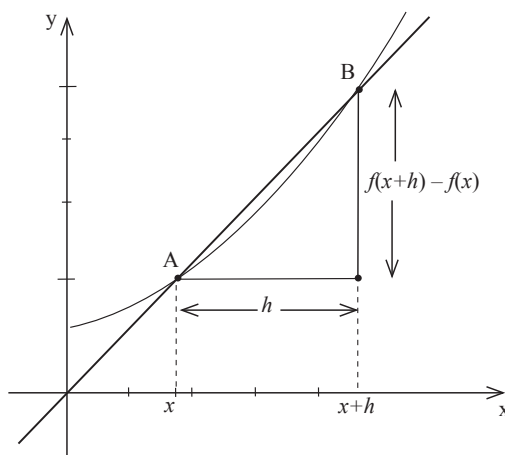
Tabela 1
A derivada da função altura em função da idade²

t (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
$f'(t)$ (cm/mês)	0,0	3,5	4,5	3,0	2,5	2,5	2,7	2,8	2,0	1,83	-

Nos dois exemplos desta seção, apesar de estarmos discutindo a função derivada, calculamos essa função em apenas alguns pontos. Como as funções estavam representadas por um gráfico (exemplo 2.3) ou por uma tabela (exemplo 2.4), não era possível fazer muito mais do que foi feito. No caso de uma função representada por meio de alguma fórmula algébrica, o cálculo da derivada para cada ponto de seu domínio poderia ser feito utilizando-se o mesmo processo usado, por exemplo, nas seções 2 e 3.2 da Aula 9. Mas como podemos constatar naquela aula, esses cálculos são muito longos, e seria tedioso efetuar-los para todos os pontos do domínio de uma função. Para buscar meios mais eficientes de encontrar fórmulas para a função derivada de uma função representada por fórmulas algébricas, vamos apresentar uma outra definição na seção a seguir.

3. DEFINIÇÃO DE DERIVADA PARA FUNÇÕES REPRESENTADAS POR FÓRMULAS ALGÉBRICAS

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D . Vamos definir $f'(x)$ para um valor x qualquer pertencente a D . Definimos, na aula anterior, a derivada de uma função em um ponto como a taxa instantânea de variação da função nesse ponto. E para calcularmos a taxa instantânea de variação, devemos calcular taxas médias de variação da função em intervalos cada vez menores, contendo o ponto no qual queremos calcular a derivada. Observe a Figura 2; nela marcamos um valor x arbitrário no eixo Ox e consideramos um pequeno acréscimo h , somado a x .



² Para construir essa tabela, aproximamos $f'(0)$ pela taxa média de variação no intervalo $[0, 1]$, aproximamos $f'(1)$ pela taxa média de variação em $[1, 2]$ e assim sucessivamente. Por isso, não foi possível preencher a última célula da tabela.

Figura 2 - Taxa média de variação de f no intervalo $[x, x+h]$

Vamos calcular a taxa média de variação de y em $[x, x+h]$ e depois, para calcularmos a taxa instantânea de variação de y , faremos h tender a zero:³

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

3.1 Notações e linguagem

Matematicamente, calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que depende de h , e fazer h

tender a zero é expresso da seguinte forma: “calcular o limite

de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando h tende a 0” e é denotado por $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Apresentamos, então, a seguinte definição de derivada:

3.2 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio D . A **função derivada** de f , denotada por f' , é

definida por $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, desde que seja possível calcular o limite.

Como já foi discutido anteriormente, fazer $h \rightarrow 0$, na Figura 2, significa fazer com que o ponto B tenda para o ponto A e com que a reta secante que passa por A e B tenda à reta tangente ao gráfico de f no ponto A . Essa reta tangente, como já sabemos, tem inclinação igual a $f'(x)$.

Na próxima aula, vamos usar a definição anterior para calcular as derivadas⁴ de algumas funções representadas por fórmulas, mas não podemos nos esquecer das interpretações geométrica e numérica que fizemos ao longo desta aula.

4. EXERCÍCIOS

1. Considere a função $y = f(x) = x^2$.

- Desenhe o gráfico de f em um papel quadriculado.
- Marque os pontos $A = (-2, f(-2))$, $B = (-1, f(-1))$, $C = (0, f(0))$, $D = (1, f(1))$ e $E = (2, f(2))$ do gráfico de f e desenhe segmentos de reta tangentes ao gráfico nesses pontos.

³ Para definirmos derivada, um mesmo procedimento deve ser realizado para $h < 0$: calculamos a taxa média de variação de y em $[x+h, x]$ e depois fazemos h tender a zero.

⁴ Quando falarmos em “calcular a derivada” estaremos nos referindo à função derivada.

- c) Utilize os segmentos e o quadriculado para fazer estimativas para $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ e $f'(2)$.
- d) Você consegue prever uma fórmula para $f'(x)$?
2. Considere o exemplo 2.3. A partir da discussão que foi desenvolvida naquele exemplo, esboce um gráfico para a função $f'(x)$.
3. A Tabela 2 apresenta a quantidade Q de cafeína (em mg), no corpo de uma pessoa que ingeriu uma xícara de café, em função do tempo t (em min).

Complete a terceira coluna da tabela, apresentando estimativas para a função $Q'(t)$.

Tabela 2
Quantidade de cafeína no corpo de uma pessoa
em função do tempo

t (min)	$Q(t)$ (mg)	$Q'(t)$ (mg/min)
0	100,0	
10	97,0	
20	94,2	
30	91,4	
40	88,7	
50	86,1	
60	83,5	
70	81,1	
80	78,7	
90	76,3	
100	74,1	
110	71,9	
120	69,8	
130	67,7	

Cálculo de derivadas

OBJETIVO

O objetivo desta aula é calcular a derivada de qualquer função polinomial. A título de exemplo dos cálculos que faremos, vamos começar calculando a derivada de $f(x) = x^2$ utilizando a definição 3.2 da Aula 10.

1. INTRODUÇÃO

Toda a discussão realizada até agora é importante para que entendamos bem o conceito de derivada, levando em conta suas interpretações algébrica, gráfica e numérica. A definição de derivada apresentada ao final da aula anterior possibilita uma estratégia mais eficiente para o cálculo de funções derivadas. Dedicaremos esta aula a uma abordagem mais técnica do conceito de derivada: vamos calcular a função derivada para um grupo específico de funções, representadas por meio de fórmulas.

2. EXEMPLO: CÁLCULO DA DERIVADA DE $y = f(x) = x^2$

Começaremos calculando a taxa média de variação de f :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h}$$

Chegamos em um ponto delicado do cálculo: podemos cancelar o número h , que é múltiplo do numerador e do denominador na taxa média? Para responder essa questão, devemos nos certificar de que $h \neq 0$. Para tal, lembremos de como o h surgiu nessa história: ele foi um acréscimo dado à variável x , de tal forma que o intervalo $[x, x+h]$ fosse bem pequeno. Na verdade, um raciocínio análogo pode ser feito se considerarmos h negativo, e isso deve ser levado em conta

na definição 3.2 da Aula 10. Nesse caso, fazemos os cálculos para o intervalo $[x+h, x]$. O que importa é que $h \neq 0$ e que, portanto, ele pode ser cancelado no cálculo anterior.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$ na expressão acima, obtemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

A última passagem decorre do fato de que, quanto mais próximo de 0 estiver o h , mais próximo de $2x$ estará o $2x + h$.

Portanto, se $f(x) = x^2$, então, $f'(x) = 2x$. Já sabíamos desse resultado para $x = 1$ (de um exercício da Aula 9), e agora sabemos que ele vale para qualquer valor real de x .

Geometricamente, isso significa que, para qualquer valor de x , a variação instantânea de y , nas proximidades de x , é o dobro do valor de x .

2.1 Exercícios

1. Retome o estudo da função $y = x^2$, realizada na Aula 4 (Potências Inteiras) e procure interpretar o resultado anterior. Em que esse resultado influencia no formato de seu gráfico?
2. Se $y = f(x) = ax + b$, calcule $f'(x)$ utilizando a definição 3.2 da Aula 10 e interprete o resultado geometricamente.
3. Se $y = g(t) = t^2 - t$, calcule $g'(t)$.
4. Calcule $s'(t)$, na qual $p = s(t) = t^2 - 2t + 6$ (primeiro exemplo trabalhado na Aula 9) e confira os cálculos que foram realizados lá.

Para realizarmos o cálculo da derivada de uma função polinomial qualquer, vamos recordar que a representação geral de um polinômio de grau n é:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

na qual n é um número inteiro positivo, os coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, n são constantes reais e $a_n \neq 0$.

Portanto, se soubermos calcular a derivada de funções constantes, de potências de x , de multiplicação de função por constante e de soma de funções, a derivada de qualquer polinômio será facilmente calculada. Faremos isso nas seções seguintes.

3. DERIVADA DE FUNÇÕES CONSTANTES

Seja $y = f(x) = c$ uma função constante. Assim como fizemos para $y = x^2$, vamos começar calculando a taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Portanto, $f'(x) = 0$.

Esse resultado já era esperado, já que os gráficos das funções constantes $f(x) = c$ são retas paralelas ao eixo Ox e, como já afirmamos, têm por derivada a sua inclinação. Nesse caso especial, a inclinação é zero, o que é equivalente a dizer que a taxa de variação é nula. Demonstramos, portanto, a seguinte proposição:

3.1 Proposição

Se $f(x) = c$ (constante), então $f'(x) = \frac{d}{dx}[c] = 0$.

4. DERIVADA DE POTÊNCIAS DE x

Vamos calcular a derivada da função $y = f(x) = x^n$, para qualquer valor de n inteiro e positivo. Para utilizar a definição de derivada apresentada na seção 3.2 da Aula 10, vamos começar calculando a taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

No numerador desse quociente, temos o binômio de Newton¹ $(x+h)^n$. Vamos expandi-lo a seguir:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + a_{n-2}x^{n-2}h^2 + \dots + a_2x^2h^{n-2} + a_1xh^{n-1} + a_0h^n.$$

A lógica dessa expansão é a seguinte:

- ela é uma soma de $n + 1$ monômios do tipo (constante). (potência de x). (potência de h);
- as potências de x decrescem de n até 0, a cada monômio;
- as potências de h crescem de 0 até n , a cada monômio;
- as constantes são obtidas na $(n+1)$ -ésima linha do Triângulo de Pascal.² Para os cálculos que realizaremos aqui, basta sabermos que a primeira constante é 1 e que a segunda é n .

¹ Se você quer estudar um pouco mais sobre os binômios de Newton, consulte algum livro do ensino médio.

² Se você quer estudar um pouco mais sobre Triângulo de Pascal, consulte algum livro do ensino médio.

Continuemos, então, o cálculo da taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + a_{n-2}x^{n-2}h^2 + \dots + a_1xh^{n-1} + a_0h^n}{h}$$

Ao invés de continuarmos esses longos cálculos,³ vamos lembrar que o próximo passo é colocar h em evidência, já que ele é fator de todos os termos do numerador. Como $h \neq 0$, podemos cancelá-lo no numerador e no denominador e, após o cancelamento, o único termo que não terá h como fator será o primeiro, já que todos os outros tinham uma potência de h maior que 1. Portanto, apenas o primeiro termo não tenderá a zero após o cálculo do limite. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

Fica demonstrada, então, a seguinte proposição:

4.1 Proposição

Se $y = f(x) = x^n$, na qual n é um número inteiro e positivo,

$$\text{então } f'(x) = \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Observe que esse resultado confere com vários cálculos que já efetuamos nessas últimas aulas.

5. DERIVADA DE PRODUTO DE FUNÇÃO POR CONSTANTE

Seja $f(x)$ uma função qualquer. Vamos calcular a derivada da função $y = g(x) = c \cdot f(x)$, na qual c é uma constante real. A taxa média de variação é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

O próximo passo para o cálculo de $g'(x)$ é calcularmos o limite do quociente anterior quando $h \rightarrow 0$. Observemos que a constante c está multiplicando a taxa média de variação da função f . Apesar de não demonstrarmos essa propriedade formalmente, é razoável considerarmos que c não influenciará no cálculo do limite nessa última expressão, e que o resultado será o produto de c pelo limite do quociente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

³ Mas realizar esses cálculos é um bom exercício!

Temos, portanto, a seguinte proposição:

5.1 Proposição

Se c é uma constante e $f(x)$ é uma função, então $\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$, para todo x no qual f tem derivada.

6. DERIVADA DE SOMA DE FUNÇÕES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções quaisquer. Vamos calcular a derivada da soma de f e g , isto é, vamos derivar a função $y = S(x) = f(x) + g(x)$. Começamos pela taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}.$$

Podemos reorganizar o numerador do último quociente da seguinte forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

O próximo passo para o cálculo de $S'(x)$ é calcularmos o limite quando $h \rightarrow 0$. Observemos que a última expressão obtida acima é a soma entre as taxas médias de variação de f e de g . Apesar de não demonstrarmos essa propriedade formalmente, é razoável considerarmos que o limite da soma de duas funções seja igual à soma dos limites de cada uma das funções:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Raciocinando de forma semelhante para a função $D(x) = f(x) - g(x)$, chegamos à seguinte proposição:

6.1 Proposição

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções, então $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$, para todo x no qual f e g têm derivada.

Com as quatro últimas proposições, temos condições de calcular a derivada de qualquer função polinomial.

7. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL QUALQUER

Queremos derivar a função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Utilizando a proposição 6.1 temos:

$$p'(x) = \frac{d}{dx}[a_n x^n] + \frac{d}{dx}[a_{n-1} x^{n-1}] + \dots + \frac{d}{dx}[a_2 x^2] + \frac{d}{dx}[a_1 x] + \frac{d}{dx}[a_0].$$

Utilizando a proposição 5.1 temos:

$$p'(x) = a_n \cdot \frac{d}{dx}[x^n] + a_{n-1} \cdot \frac{d}{dx}[x^{n-1}] + \dots + a_2 \cdot \frac{d}{dx}[x^2] + a_1 \cdot \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[a_0].$$

Por fim, utilizando a proposição 4.1 e a proposição 3.1, demonstramos a última proposição desta aula:

7.1 Proposição

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial, então sua derivada é

$$p'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_2 x + a_1.$$

Vamos calcular a derivada da função polinomial no exemplo seguinte procurando automatizar a proposição anterior:

7.2 Exemplo

Se $p(x) = 3x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 7$, então

$$p'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 3x^2 - 4 \cdot 2x + 10 = 12x^3 - 3x^2 - 8x + 10.$$

8. EXERCÍCIOS

1. Utilizando as proposições desta aula, calcule as derivadas das seguintes funções polinomiais:

a) $f(x) = -\sqrt{3}x^7 + \frac{3}{5}x^4 + 568x + 12$.

b) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Considere a função quadrática genérica, $q(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Calcule $q'(x)$.

b) Calcule o valor de x para o qual $q'(x) = 0$.

A variação acumulada

OBJETIVO

Ao final desta aula, esperamos que você tenha se familiarizado com a noção de variação acumulada e com estratégias para estimá-la. Não esperamos que você tenha dominado completamente o uso da notação e linguagem proposto, o que irá se consolidar ao longo destas últimas aulas.¹

1. INTRODUÇÃO

Em nossa aula “Taxa Instantânea de Variação de uma Função: Derivada”, desenvolvemos estratégias e algoritmos para determinar a taxa instantânea de variação (ou derivada) de uma função conhecida $y = F(t)$. Aqui, nosso objetivo é o de desenvolver estratégias para recuperarmos informações sobre uma quantidade expressa por uma função $F(t)$ que não conhecemos, no caso de conhecermos a sua taxa instantânea de variação $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$. Isso quer dizer:

pretendemos obter informações sobre uma função a partir do conhecimento de sua *taxa instantânea de variação*.

Para tal, vamos trabalhar uma nova noção: a noção de *variação acumulada* a partir de uma taxa $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$, em um intervalo $[a, b]$. Auxiliados por esta última, vamos estimar valores para a *variação total* $\Delta F = F(b) - F(a)$.

Os procedimentos técnicos para medir a *variação acumulada* serão refinados. Para isso introduzimos a idéia de *partição* em subintervalos; e, aos poucos, a notação utilizada em Matemática. Vamos também desenvolver o hábito de representar graficamente o processo que está sendo desenvolvido para estimarmos a *variação acumulada* a partir de certa taxa de variação em certo período, relacionando-o com o problema de medida de área sob uma curva.

¹ Vale aqui uma observação sobre notação e linguagem matemática, uma vez que ela começa a se tornar densa à medida que nosso trabalho se desenvolve. Notação e linguagem técnicas, em qualquer área do conhecimento, podem a princípio parecer um obstáculo a mais em nossos esforços para entender o conteúdo. No entanto, aos poucos vocês perceberão que notações e linguagem matemática foram concebidas para garantir fluência nas manipulações algébricas, cálculos e demonstrações. Portanto, utilizá-las gradativamente, desde o início, irá garantir eficiência nas estimativas e algoritmos a serem desenvolvidos posteriormente.

1.1 Um breve comentário sobre a organização desta aula

A organização deste texto, embora semelhante à de muitos outros neste curso, distingue-se pelo fato de que sua sistematização não se esgota nesta Aula. Neste primeiro momento, nossa proposta é a de explorar três exemplos centrais, que estão orientando o desenvolvimento das seções 2, 3 e 4.

Aqui, tais seções são constituídas pelas etapas de desenvolvimento de cada exemplo em estudo e incluem exercícios. Nelas, discutiremos estratégias para obter uma aproximação para a *variação total* $\Delta F = F(b) - F(a)$ em um intervalo $[a, b]$, a partir de sua taxa $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$, que supomos conhecida.

É através de experiências com exemplos que pretendemos tornar significativos os conceitos de *variação total* e de *variação acumulada*. Ao final deste texto, daremos início a uma sistematização que se consolidará com o enunciado e demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, nas próximas aulas.

Nossa idéia é a de construirmos, juntos, cada um dos três exemplos. Em alguns momentos, você deverá resolver as questões relativas a cada um deles, deixadas como exercícios.

2. A VARIAÇÃO TOTAL DA ALTURA DO ANDRÉ A PARTIR DA VARIAÇÃO ACUMULADA POR SUA TAXA DE CRESCIMENTO

Como primeiro exemplo, vamos retomar a função $y = f(t)$ que foi construída a partir da evolução da altura do André (em cm) e que registra sua *taxa de crescimento*, (ou *derivada* $f'(t)$), t em meses, nos primeiros 9 meses de sua vida (Tabela 1).²

Ao construí-la, o valor da derivada $f'(0)$ foi aproximado pela *taxa média de variação* da altura no intervalo $[0, 1]$, o valor da derivada $f'(1)$ foi aproximado pela *taxa média de variação* da altura em $[1, 2]$ etc...

Tabela 1
Taxa instantânea de variação da função altura em função da idade

t (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
$f'(t)$ (cm/mês)	0,0	3,5	4,5	3,0	2,5	2,5	2,7	2,8	2,0	1,83	

² A construção desta tabela foi proposta como exercício na Aula 9.

Como poderíamos estimar quantos centímetros André cresceu nos seus 6 primeiros anos de vida, a partir desta tabela? Em outras palavras, como poderíamos estimar a *variação total* da altura do André, nos seus primeiros 6 meses de vida? Em matemática, como estimar o valor da *variação total* $\Delta f = f(6) - f(0)$? Aqui estamos falando de estimativas, de aproximações; mas isso não significa que não devamos estabelecer critérios ao fazê-las.

Por exemplo, a Tabela 1 com que estamos trabalhando foi construída a partir de estimativas, com um critério claro: os valores que correspondem a *taxas instantâneas* de variação $f'(a)$ estão sendo aproximados por *taxas médias de variação* da altura de André, em períodos que contêm $t = a$, e que estão explícitos.³ No caso em estudo, tais períodos foram determinados pelas visitas do André ao pediatra.

Retomando o procedimento em linguagem simbólica, o valor $f'(a)$, da *taxa de crescimento* do André num período $[a, b]$, foi aproximado pela *taxa média de crescimento* ou de *variação da altura* no período, que é $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Ou seja, $f'(a) \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ora, veja você que exatamente esta última expressão nos sugere como obter uma estimativa para a *variação total* $\Delta f = f(b) - f(a)$, no período $[a, b]$: multiplicando ambos os membros por $\Delta t = (b - a)$! Assim procedendo, segue que

$$f'(a) \cdot \Delta t \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \Delta t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(a).$$

Observe que a *variação total* da altura $\Delta f = f(b) - f(a)$, no período $[a, b]$, pode ser aproximada por $f'(a) \cdot \Delta t$.

2.1 Definição

Vamos chamar o valor $f'(a) \cdot \Delta t$ de *variação acumulada* da altura f do André a partir da taxa de crescimento $f'(a)$, no período $f[a, b]$.

Este valor corresponderia à variação da altura do André no período $[a, b]$, caso ele tivesse crescido à taxa constante e igual a $f'(a)$ por mês. Com esta hipótese, podemos fazer estimativas para o crescimento de André, ou seja, para a *variação total* Δf de sua altura, em cada período registrado na Tabela 1. É o que faremos a seguir.

³ Pela definição de taxa instantânea de variação, faz sentido estimá-las por meio de *taxas médias*. Isso porque a *taxa de variação* $f'(a)$ foi definida como o valor para o qual se estabilizam as *taxas médias de variação* de f , calculadas em intervalos cada vez menores contendo a .

Ora, em seu primeiro mês de vida, André cresceu a uma taxa aproximada $f'(0) = 0$. Isso significa que André não cresceu; o que é coerente com o cálculo da *variação acumulada* $f'(0).\Delta t$ para a sua altura no período $[0,1]$, que é nula.

Estimativas para a *variação total* Δf nos outros períodos podem ser obtidas do mesmo modo. Em $[1,2]$, por exemplo, a *variação total* $\Delta f = \Delta f(2) - f(1)$ é próxima da *variação acumulada* $f'(1).\Delta t = f'(1) \times 1 = 3,5 \times 1 = 3,5 \text{ cm}$.

Isso quer dizer que o André cresceu aproximadamente 3,5 cm no segundo mês de vida. Organizando os dados numa tabela:

Tabela 2
Cálculo da *variação total* da altura do André

Intervalo	Comprimento do Intervalo	Valor considerado da taxa	Variação acumulada	Variação total aproximada
$[0, 1]$	$\Delta t = 1 - 0$ $= 1$	$f'(0) = 0$	$f'(0).\Delta t = 0(1)$ $= 0$	$\Delta f = f(1) - f(0)$ $\approx f'(0).\Delta t = 0$
$[1, 2]$	$\Delta t = 2 - 1$ $= 1$	$f'(1) = 3,5$	$f'(1).\Delta t = 3,5(1)$ $= 3,5$	$\Delta f = f(2) - f(1)$ $\approx f'(1).\Delta t = 3,5$
$[2, 2,5]$	$\Delta t = 2,5 - 2$ $= 0,5$	$f'(2) = 4,5$	$f'(2).\Delta t = 4,5(0,5)$ $= 2,25$	$\Delta f = f(2,5) - f(2)$ $\approx f'(2).\Delta t = 2,25$
$[2,5, 3,5]$	$\Delta t = 3,5 - 2,5$ $= 1$	$f'(2,5) = 3$	$f'(2,5).\Delta t = 3(1)$ $= 3$	$\Delta f = f(3,5) - f(2,5)$ $\approx f'(2,5).\Delta t = 3$
$[3,5, 4,5]$	$\Delta t = 4,5 - 3,5$ $= 1$	$f'(3,5) = 2,5$	$f'(3,5).\Delta t = 2,5(1)$ $= 2,5$	$\Delta f = f(4,5) - f(3,5)$ $\approx f'(3,5).\Delta t = 2,5$
$[4,5, 6]$	$\Delta t = 6 - 4,5$ $= 1,5$	$f'(4,5) = 2,5$	$f'(4,5).\Delta t = 2,5(1,5)$ $= 3,75$	$\Delta f = f(6) - f(4,5)$ $\approx f'(4,5).\Delta t = 3,75$

Assim, uma estimativa para a *variação total* da altura do André no período $[0,6]$ a partir dos dados da Tabela 1 poderá ser obtida adicionando as *variações acumuladas* em cada período, determinados pela visita ao pediatra, como calculadas acima:

$$f'(0).\Delta t + f'(1).\Delta t + f'(2).\Delta t + f'(3).\Delta t + f'(2,5).\Delta t + f'(3,5).\Delta t + f'(4,5).\Delta t = 0 \text{ cm} + 3,5 \text{ cm} + 2,25 \text{ cm} + 3,0 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm} + 3,75 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

Sabendo que o André nasceu com 46,0 cm, concluiríamos que aos 6 meses sua altura era de aproximadamente 61 cm. Se você consultar a Tabela com os dados sobre sua altura, na Aula 9, você verá que o erro em nossa estimativa foi de apenas 1 cm!

Vale a pena também explorar simbolicamente a expressão que nós calculamos:

$$(f(1) - f(0)) + f(2) - f(1) + (f(2,5) - f(2) + f(3,5) - f(2,5)) + (f(4,5) - f(3,5) + f(6) - f(4,5)) \approx f'(0) \cdot \Delta t + f'(1) \cdot \Delta t + f'(2) \cdot \Delta t + f'(2,5) \cdot \Delta t + f'(3,5) \cdot \Delta t + f'(4,5) \cdot \Delta t$$

Veja que no primeiro membro da igualdade quase todos os valores entre os parênteses podem ser cancelados, resultando em $\Delta f = f(6) - f(0)$. Verifique esta afirmação, porque ela é importante!

2.2 Exercício

Vamos recuperar os dados sobre a evolução da altura de André nos primeiros 9 meses de vida, a partir dos dados na Tabela 1?

Sabemos que André nasceu com 46,0 cm. Pelo exemplo anterior, obtivemos sua altura no início do sexto mês, que foi 61 cm. Trabalhando daquele mesmo modo, complete os dados em nossa tabela:

Tabela 3
A altura de André em função da idade, recuperada pelo cálculo da *variação acumulada* a partir da Tabela 1

t (meses)	0,0	1,0	2,0	2,5	3,5	4,5	6,0	7,0	8,0	9,0	12,0
$f(t)$ (cm/mês)	46,0						61,0				

3. CÁLCULO DA DISTÂNCIA PERCORRIDA POR UM OBJETO EM FUNÇÃO DO TEMPO DO PERCURSO

Em certa ocasião, Jussara viajava a São Paulo com uma boa frequência. Um dia, ao verificar que o odômetro de seu carro não estava funcionando, ela passou a registrar a *velocidade instantânea* indicada no velocímetro de seu carro, em intervalos regulares de tempo de 15 minutos. Com estes dados sobre sua velocidade, ela fez estimativas para a distância percorrida, e, é claro, para a distância que ainda devia percorrer para chegar a sua casa.

Antes de apresentarmos os dados obtidos por Jussara, vamos discutir porque é possível estimarmos o cálculo da distância percorrida, a partir do conhecimento de valores da velocidade instantânea.

Torna-se possível estimarmos este cálculo porque, como sabemos, a velocidade $y = v(t)$ é a *taxa de variação* da função espaço percorrido $y = s(t)$ em relação ao tempo. Simbolicamente, $\frac{ds}{dt} = v(t)$.

Como discutido na Aula 9, a *velocidade instantânea* $v = (c)$, em um certo instante $t = c$, é definida como sendo o valor para o qual se estabilizam as *velocidades médias* calculadas em intervalos de tempo $[a, b]$, contendo $t = c$, de comprimento $\Delta t = b - a$ cada vez

menores. Ou seja, $v(c) \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$.

Como no exemplo anterior, veja você que esta última expressão nos sugere como obter uma estimativa para a variação total $\Delta s = s(b) - s(a)$, no período $[a, b]$: multiplicando ambos os membros por $\Delta t = b - a$, segue que

$$v(c) \cdot \Delta t \approx \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} (b - a) = s(b) - s(a).$$

De outro modo, o espaço percorrido $\Delta s = s(b) - s(a)$, no período $[a, b]$, pode ser estimado como $v(c) \cdot \Delta t$.

3.1 Definição

Vamos chamar o valor $v(c) \cdot \Delta t$ de *variação acumulada* da distância s percorrida no período $[a, b]$, à taxa $s'(c) = v(c)$.

Na verdade, não estamos trazendo aqui uma grande novidade: se num dado intervalo de tempo, digamos, de $\frac{1}{2}$ hora, a velocidade de um carro for constante e igual a 80 km/h , numa mesma direção e sentido, sabemos que o deslocamento do carro neste intervalo de tempo será de $80 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ km}$.

Na linguagem que estamos introduzindo, estamos dizendo que a *variação total* (da função espaço percorrido $y = s(t)$), em $[0, \frac{1}{2}]$, estimada como *variação acumulada* à taxa de $y = v(t) = 80 \text{ km/h}$ será

$$\Delta s = s\left(\frac{1}{2}\right) - s(0) \approx \text{Taxa de variação} \times \text{intervalo de tempo} =$$

$$v \cdot \Delta t = 80 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ km}.$$

Aqui, com a hipótese de que a velocidade se manteve constante, teremos o valor da *variação acumulada* correspondendo ao valor exato da *variação total*.

3.2 Exercício

Represente os dados

$$v(t) = 80, \text{ para } t \text{ em } \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

em um gráfico da *velocidade* $\times$ *tempo*. Neste gráfico, você tem alguma idéia sobre como poderia representar o valor da *variação acumulada*, ou seja, a distância total percorrida?

3.3 Exemplo

Vamos retomar nossa discussão sobre a viagem de Jussara a partir de dados que ela registrou, e que estão reproduzidos na tabela abaixo:

Tabela 4
Velocidade no velocímetro do carro, em função do tempo

Tempo (h)	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$
Velocidade (km/h)	70	75	100	100	110	120

Observe que, de modo diferente da construção da Tabela 1, a Tabela 3 está mantendo intervalos de comprimentos Δt iguais (com a variável *tempo* agora medida em horas). No caso da Tabela 1, visitas ao pediatra foram antecipadas por algum motivo, o que resultou em uma subdivisão do período de 6 meses em intervalos de comprimento desiguais.⁴ No caso de Jussara, ela teve liberdade de escolha, e o fez como na Tabela 3, escolhendo intervalos de tempo de comprimento $\Delta t = \frac{1}{4}$. Seu motivo foi manter um padrão de organização de seus dados, e seu conhecimento sobre a praticidade deste padrão para efetuar os cálculos ao final, como você verá.

Por meio desta tabela, nem sempre poderíamos calcular a distância *exata* percorrida pelo carro (você saberia discutir por quê?). Mas podemos *estimar* a distância percorrida por Jussara após 1 hora e quinze minutos de viagem.

Como sua velocidade $y = v(t)$ era registrada em quilômetros por hora e o intervalo Δt de 15 minutos corresponde a $\frac{1}{4}$ de hora, temos que:

Se em $[0, \frac{1}{4}]$ Jussara manteve sua velocidade constante e igual a $v(0) = 70 \text{ km/h}$, ela percorreu nos primeiros 15 minutos $v(0) \cdot \frac{1}{4} = 70 \cdot \frac{1}{4} = 17,5 \text{ km}$. Ou seja, a distância percorrida em $[0, \frac{1}{4}]$ foi $\Delta s = s(\frac{1}{4}) - s(0) = v(0) \cdot \Delta t = v(0) \cdot \frac{1}{4} = 17,5 \text{ km}$.

Os dados serão organizados na tabela a seguir.

⁴ Na verdade sempre poderíamos considerar os valores de Δt desiguais, quando efetuando estes cálculos.

Tabela 5
Variação total do espaço percorrido

Intervalo	Comprimento do Intervalo	Valor considerado da taxa	Variação acumulada	Variação total aproximada
$[0, 1/4]$	$\Delta t = 1/4 - 0 = 1/4$	$v(0) = 70$	$v(0) \cdot \Delta t = 70(1/4) = 17,5$	$\Delta f = f(1/4) - f(0) \approx v(0) \cdot \Delta t = 17,5$
$[1/4, 1/2]$	$\Delta t = 1/2 - 1/4 = 1/4$	$v(1/4) = 75$	$v(1/4) \cdot \Delta t = 75(1/4) = 18,75$	$\Delta f = f(1/2) - f(1/4) \approx v(1/4) \cdot \Delta t = 18,75$
$[1/2, 3/4]$	$\Delta t = 3/4 - 1/2 = 1/4$	$v(1/2) = 100$	$v(1/2) \cdot \Delta t = 100(1/4) = 25$	$\Delta f = f(3/4) - f(1/2) \approx v(1/2) \cdot \Delta t = 25$
$[3/4, 1]$	$\Delta t = 1 - 3/4 = 1/4$	$v(3/4) = 100$	$v(3/4) \cdot \Delta t = 100(1/4) = 25$	$\Delta f = f(1) - f(3/4) \approx v(3/4) \cdot \Delta t = 25$
$[1, 5/4]$	$\Delta t = 5/4 - 1 = 1/4$	$v(1) = 110$	$v(1) \cdot \Delta t = 110(1/4) = 27,5$	$\Delta f = f(5/4) - f(1) \approx v(1) \cdot \Delta t = 27,5$

Na verdade, Jussara não manteve sua velocidade constante durante os intervalos de tempo, como nós consideramos. Por isso vamos escrever que a distância total percorrida S , após uma 1 e 15 minutos de viagem, foi de *aproximadamente*

$$v(0) \cdot \frac{1}{4} + v\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + v\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} + v\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} + v(1) \cdot \frac{1}{4} =$$

$$70 \cdot \frac{1}{4} + 75 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{1}{4} + 110 \cdot \frac{1}{4} = 113,75 \text{ km}$$

Reescrevendo em termos das noções que estamos introduzindo, a *variação total* Δs (que é a distância total S) no intervalo $[0, \frac{5}{4}]$ será estimada como aproximada pela adição das *variações acumuladas* nos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ etc., ou seja,

$$\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s(0) \approx v(0) \cdot \Delta t + v\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Delta t + v\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t + v\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Delta t + v(1) \cdot \Delta t = 113,75 \text{ km}.$$

Observe que, com este procedimento, nós recuperamos dados sobre a função distância percorrida $y = s(t)$, através de valores conhecidos de sua taxa instantânea de variação – a função velocidade $y = v(t)$. Ou seja, a *variação total* da função distância no período $[0, \frac{5}{4}]$, que se escreve $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s(0)$, está sendo estimada por meio da *variação acumulada* à taxa $y = v(t)$, como registrada na Tabela 3.

3.4 Exercício

Represente os dados da tabela anterior em um gráfico da *velocidade* $\times$ *tempo*. Para isso suponha, como no desenvolvimento de nosso exemplo anterior, que a velocidade se manteve constante nos intervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ etc... (A função $y = v(t)$ que você vai

representar terá um gráfico que lembra o da função preço da corrida de táxi⁵). Neste gráfico, e com a suposição de que a velocidade se manteve constante nos intervalos de tempo considerados, procure representar o espaço total percorrido S .

Ou seja, procure representar no gráfico que você esboçou a *variação total* $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s(0)$ da função distância $y = s(t)$.

3.5 Exemplo

Vamos interpretar os dados da Tabela 5 sugerindo uma tendência de acréscimo na velocidade com que Jussara estava dirigindo. Ou seja, vamos supor que a função $y = v(t)$ que estaria modelando sua velocidade seja crescente no intervalo $[0, \frac{5}{4}]$. Neste caso, observe que no exemplo 3.2 teríamos obtido uma estimativa inferior, isto é, *por falta* do valor S da distância que foi percorrida. Isso porque em cada subintervalo de tempo de 15 minutos, consideramos que Jussara dirigiu a uma velocidade que corresponderia ao seu menor valor naquele período de tempo: aquela que, neste caso, teria sido calculada no extremo inferior de cada subintervalo de tempo $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ etc... Confira na tabela!

Poderíamos afirmar que a distância total S percorrida é maior que o valor obtido, ou seja, $S \geq 113,75 \text{ km}$. Poderíamos ainda obter uma aproximação *por excesso* para este valor pensando do seguinte modo:

- de acordo com a Tabela 4, nos primeiros 15 minutos, a velocidade do carro foi de, no máximo, 75 km/h . Diferente do que fizemos em 3.2, vamos considerar aqui a velocidade $v(t)$ constante e igual a $v(\frac{1}{4})$ no intervalo $[0, \frac{1}{4}]$;
- já no segundo intervalo de tempo, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, a velocidade registrada foi de no máximo 100 km/h , que corresponde a $v(\frac{1}{2})$. Tomaremos este como o valor constante da velocidade $v(t)$ em $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$;
- no terceiro intervalo, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, a velocidade seria no máximo 100 km/h , que corresponde ao valor de $v(\frac{3}{4})$; e assim por diante.

Observe que estamos agora considerando, em cada intervalo de $\frac{1}{4}$ de hora, os valores da velocidade $v(\frac{1}{4})$, $v(\frac{1}{2})$, $v(\frac{3}{4})$ etc., como registrados, respectivamente, nos extremos esquerdos de cada um dos intervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ etc...

⁵ Consulte a Aula 5, “Construindo novas funções”.

Relembrando o fato de que estamos supondo que a função $y = v(t)$ é crescente, uma estimativa superior, isto é, *por excesso* da distância será

$$v(\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{4} + v(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{4} + v(\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{4} + v(1) \cdot \frac{1}{4} + v(\frac{5}{4}) \cdot \frac{1}{4} = \\ 75 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{1}{4} + 110 \cdot \frac{1}{4} + 120 \cdot \frac{1}{4} = 126,25 \text{ km}.$$

Assim, a distância total S é menor que o valor obtido, ou seja, $S \leq 126,25 \text{ km}$. Podemos dizer que $113,75 \text{ km} \leq S \leq 126,25 \text{ km}$.

A diferença entre estes dois valores é de $12,50 \text{ km}$. Isso nos permite conhecer a margem de erro que estamos cometendo em nossas estimativas do valor da distância S , ou seja, da *variação total* $\Delta s = s(\frac{5}{4}) - s(0)$.

3.6 Exercício

Represente os dados exemplificados em 4.4 em um gráfico da velocidade em função do tempo. Em sua percepção, o que poderia estar representando o valor da distância total percorrida, estimado *por excesso*?

3.7 Exemplo

O que podemos sugerir à Jussara para melhorar sua estimativa da distância percorrida? Podemos, por exemplo, sugerir que ela registre sua velocidade em intervalos de tempo menores do que 15 minutos! (Talvez, convidando um amigo para ajudá-la, durante a viagem.) Suponhamos que um registro assim tenha sido feito, em intervalo de tempo de 5 minutos, como na tabela a seguir:

Tabela 6a
Velocidade no velocímetro do carro, em função do tempo

Tempo (h)	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$
Velocidade (km / h)	70	73	75	75	80	90	100	100	100

Tabela 6b
Velocidade no velocímetro do carro, em função do tempo

Tempo (h)	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{14}{12}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{17}{12}$
Velocidade (km / h)	100	105	110	110	115	118	120	120	125

3.8 Exercício

- Usando uma calculadora, calcule o valor das aproximações *por falta* e *por excesso* da distância S percorrida, ou seja, do valor $\Delta s = s\left(\frac{5}{4}\right) - s(0)$. Para isso considere, como anteriormente, a função velocidade como uma função crescente.
- Efetue a diferença entre os valores das duas aproximações encontradas. Compare este resultado com a diferença obtida ao final do exemplo 4.4. Discuta este resultado, dizendo o que ele significa para você, em termos da estimativa do valor da distância percorrida.
- Represente os dados exemplificados acima em um gráfico da velocidade em função do tempo, e o valor da distância total percorrida, estimado *por falta* e *por excesso*.
- Compare este último gráfico com os outros obtidos nos exercícios 2 e 3, comentando o que ele sugere estar acontecendo, em termos da estimativa feita.

4. UM POUCO DE TEORIA

Vamos comentar, em geral, a estratégia que estamos desenvolvendo para obter informações sobre uma função $F(t)$, a partir de sua taxa de variação $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$. Retomando as idéias trabalhadas nas

Aulas 9, 10 e 11, estamos, de certo modo, “desmanchando” os processos ali desenvolvidos. Naquelas aulas, a noção de *taxa instantânea de variação* (ou *derivada*) $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$ foi definida

a partir das taxas médias $\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ em intervalos $[a, b]$, de comprimentos cada vez menores. Aqui, uma vez conhecida a taxa de variação $\frac{dF}{dt}$ de uma função $F(t)$, estamos utilizando-a para estimar o valor $\Delta F = F(b) - F(a)$.

4.1 Definição

A *variação total* da função $y = F(t)$ no intervalo $[a, b]$ é definida como $\Delta F = F(b) - F(a)$.

A estratégia que estamos utilizando retoma o fato de que a taxa instantânea de F em c , ou seja, $\frac{dF}{dt}(c)$, é definida como o valor em torno do qual as taxas médias de variação $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ se estabilizam (caso isso aconteça), quando calculadas em intervalos $[a, b]$, contendo c , de comprimento $\Delta t = (b - a)$ cada vez menores.

$$\text{Como vimos, } \frac{dF}{dt}(c) \approx \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Multiplicando todos os termos da última expressão pelo valor $\Delta t = (b - a)$ obteremos:

$$\frac{dF}{dt}(c) \cdot \Delta t \approx \frac{\Delta F}{\Delta t} \cdot \Delta t = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \cdot \Delta t.$$

Ou seja,

$$\frac{dF}{dt}(c) \cdot \Delta t \approx \Delta F = F(b) - F(a).$$

4.2 Definição

A *variação acumulada* de F à taxa $\frac{dF}{dt}(c)$, no intervalo $[a, b]$, é definida pela expressão $\frac{dF}{dt}(c) \cdot \Delta t$.

Nesta aula, estamos adicionando *variações acumuladas* para obter aproximações para o valor da *variação total* da função F , recuperando a ação da função. Ou seja, estamos recuperando informações sobre uma função a partir do conhecimento de sua taxa de variação.

Discutimos que, caso a *taxa de variação* da função seja constante num determinado intervalo, podemos escrever

$$\text{variação acumulada} = \text{taxa de variação} \times \text{comprimento do intervalo} \\ = \text{variação total}.$$

Em geral, a igualdade não se verifica, porque a taxa de variação ou derivada de uma função também pode não ser constante. Numa situação como esta, estimamos a *variação total*, efetuando cálculos como os anteriores, subdividindo o intervalo em estudo em um certo número de partes. Para cada uma destas partes ou subintervalos, estaremos supondo a taxa de variação constante, e escrevemos

variação acumulada = taxa de variação $\times$ comprimento do intervalo
 $\approx$ *variação total*.

Ou seja, consideramos a *variação total* da função em intervalos menores como aproximada por $\frac{dF}{dt}(c) \cdot \Delta t$, em que Δt é seu comprimento. Adicionando as variações acumuladas em cada subintervalo, teremos uma estimativa para a *variação total* da função no intervalo em estudo.

Estimativas para a *variação total* $\Delta F = F(b) - F(a)$ por meio da *variação acumulada* a partir da taxa $\frac{dF}{dt}$ podem ser refinadas.

Vamos designar por n o número de subintervalos de comprimentos Δt , iguais, utilizados em cada estimativa.

Nos exemplos trabalhados, bem como nos que trabalharemos em nossas aulas, nós aumentamos o valor de n , o que correspondeu a diminuir o valor de ΔF . Esta será a proposta para melhorar a estimativa para a *variação total* a partir da *variação acumulada* em cada subintervalo da partição que estaremos considerando.

5. OBTENDO A EXPRESSÃO DO VOLUME $V(t)$ A PARTIR DE SUA

TAXA $\frac{dV}{dt}$

Um balão de gás está sendo preenchido a uma taxa $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ cm^3 / min . Sabendo que o balão continha um volume inicial de 5cm^3 de gás, como obter a variação de seu volume no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 3 \text{ min}$?

Observe que a variação do volume solicitada é a *variação total* do volume de gás que foi acumulada, no intervalo de tempo, à taxa de $3t \text{ cm}^3 / \text{min}$. O intervalo de tempo em estudo é o intervalo $[0, 3]$.

Dividindo este intervalo em dois pedaços, ou seja, tomando $n = 2$, ele estará inicialmente dividido em subintervalos de comprimentos

Δt , iguais, que valem $\Delta t = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$.

Nosso intervalo de tempo é, então, escrito como a união de dois subintervalos: o primeiro, $[0, \frac{3}{2}]$, de extremos 0 e $\frac{3}{2}$; e o segundo, $[\frac{3}{2}, 3]$, de extremos $\frac{3}{2}$ e 3. (Represente-os num desenho na reta!)

A proposta aqui é medirmos a *variação acumulada* ΔV a cada $\frac{3}{2}$ minutos, considerando que sua variação ocorra a uma taxa fixa em cada subintervalo, estimada a partir da taxa de variação real $y = \frac{dV}{dt} = 3t$. Observe que $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ é uma função crescente.

Portanto, uma estimativa *por falta* do valor da variação acumulada do volume de gás nos primeiros $\frac{3}{2}$ minutos será $\left(\frac{dV}{dt}(0)\right) \cdot \frac{3}{2} = 0$. Isso quer dizer que, em $[0, \frac{3}{2}]$, uma estimativa *por falta* para $\Delta V = V(\frac{3}{2}) - V(0) = \left(\frac{dV}{dt}(0)\right) \cdot \frac{3}{2} = 0$.

Nos últimos $\frac{3}{2}$ minutos, uma estimativa por falta da variação acumulada do volume de gás será $\left(\frac{dV}{dt}(\frac{3}{2})\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$. Ou seja, em $[\frac{3}{2}, 3]$, uma estimativa *por falta* para $\Delta V = V(3) - V(\frac{3}{2}) = \left(\frac{dV}{dt}(\frac{3}{2})\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$.

Desse modo, uma primeira estimativa para a *variação acumulada* à taxa $y = \frac{dV}{dt} = 3t$, no intervalo de tempo $[0, 3]$, é obtida quando adicionamos as variações em cada subintervalo, e se escreve $\Delta V = (V(\frac{3}{2}) - V(0)) + (V(3) - V(\frac{3}{2})) = 0 \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$. Observe, novamente, que as expressões das parcelas entre parênteses podem ser canceladas, tendo como resultado $V(3) - V(0)$.

5.1 Exercício

Represente a função $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ em um gráfico da taxa de variação do volume em função do tempo (eixos cartesianos serão $t \times \frac{dV}{dt}$).

Ainda neste gráfico, situe, no eixo t , o intervalo de tempo $[0, 3]$, e os respectivos subintervalos $[0, \frac{3}{2}]$ e $[\frac{3}{2}, \frac{6}{2}]$. Supondo $\frac{dV}{dt}$ constante em cada um dos subintervalos, como foi desenvolvido no exemplo acima, represente a função (do tipo da função preço da corrida de táxi) resultante.

Você saberia dizer como a estimativa para a variação acumulada ΔV poderia ser representada neste gráfico?

5.2 Exemplo

Prosseguindo com estimativas para o valor ΔV , poderíamos obter uma aproximação por excesso ainda com $n = 2$ e $\Delta t = \frac{3}{2}$ como a seguir.

Usando o fato de $y = \frac{dV}{dt} = 3t$ ser crescente, basta considerarmos o

valor $\frac{dV}{dt}(\frac{3}{2})$, que é o maior valor da *taxa de variação* nos primeiros

$\frac{3}{2}$ minutos, no cálculo do valor aproximado da variação do volume, correspondente então ao primeiro subintervalo de tempo $[0, \frac{3}{2}]$.

Ainda, tomamos $\frac{dV}{dt}(3)$ no cálculo do valor aproximado da variação

do volume, no segundo intervalo de tempo, $[\frac{3}{2}, \frac{6}{2}]$.

A *variação acumulada* no primeiro subintervalo é:

$$\left(\frac{dV}{dt} \left(\frac{3}{2} \right) \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}.$$

A *variação acumulada* no segundo subintervalo é:

$$\left(\frac{dV}{dt} (3) \right) \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}.$$

Uma aproximação *por excesso* para ΔV no intervalo $[0, 3]$ é dada por

$$\Delta V = \left(\frac{dV}{dt} \left(\frac{3}{2} \right) \right) \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{dV}{dt} (3) \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4} + \frac{27}{2} = \frac{81}{4}.$$

5.3 Exercício

Represente estes novos dados no gráfico esboçado no exercício 5.1.

5.4 Exemplo

Refinando o processo que estamos utilizando, poderíamos subdividir o intervalo $[0, 3]$ em $n = 4$ partes, por exemplo, que corresponderiam a subintervalos de comprimentos $\Delta t = \frac{3}{4}$. Em procedimento análogo ao anterior, aproximações *por falta* e *por excesso* para a *variação total* podem ser obtidas.

Numa estimativa *por falta*, a *variação total* é aproximadamente:

$$\Delta V = 0 \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{27}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{162}{16}.$$

Uma aproximação *por excesso* para a *variação total* nos dá:

$$\Delta V = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{27}{4} \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{3}{4} = \frac{183}{16}.$$

5.5 Exercício

- a) Represente os dados acima em um gráfico da variação do volume em função do tempo. Compare a diferença entre as estimativas para a *variação total* correspondentes a $\Delta t = \frac{3}{2}$ e $\Delta t = \frac{3}{4}$. O que você acha que vai acontecer, se você dividir nosso intervalo em 8 partes?
- b) Refaça o procedimento utilizado acima, dividindo o intervalo em 8 partes, ou seja, considerando $\Delta t = \frac{3}{8}$. Registre os dados e calcule aproximações *por falta* e *por excesso* da *variação total*. Represente a função $y = \frac{dV}{dt} = 3t$, e os dados obtidos ao tomar $\Delta t = \frac{3}{8}$, num gráfico como no exercício 5.1.
- c) O que lhe sugere o gráfico desenhado no exercício 5.5?
- d) A partir de sua análise, você arriscaria enunciar um outro procedimento para determinar (exatamente) a *variação total*, neste caso?

A integral definida

OBJETIVO

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de estimar o valor da Integral Definida de funções expressas em gráficos, fórmulas e tabelas. Em algumas situações bem especiais, esperamos que você seja capaz de determinar seu valor exato. É importante ainda que, ao final desta aula, perceba que cálculos de área e de variação total podem ser obtidos como uma Integral Definida; e que o cálculo de Integrais Definidas e da variação total pode ser obtido através do cálculo de áreas.

1. INTRODUÇÃO

Na Aula 12, procuramos desenvolver estratégias para recuperarmos informações sobre uma função a partir do conhecimento de sua taxa de variação. Discutimos as noções de *variação total* e de *variação acumulada*.

Agora, o objetivo é refinar a estratégia para o cálculo da *variação total* por meio da *variação acumulada*, apresentando a noção de *Integral Definida*. Notação e linguagem compõem um aspecto denso neste texto, e, novamente, importante para o desenvolvimento do trabalho.

2. EXEMPLO: RECUPERANDO $y = F(t)$ A PARTIR DE SUA TAXA $y = f(t) = t^2$

No último exemplo da Aula 12, recuperamos informações sobre a função $y = V(t)$, a partir do cálculo de *variações acumuladas* à taxa

$y = \frac{dV}{dt} = 3t$ no intervalo $[0, 3]$. Em exercício ao final daquela mesma aula, você provavelmente percebeu que o refinamento de nossas estimativas pareceu se ajustar à medida de uma área, que naquele caso sabíamos determinar.

Vamos retomar o procedimento utilizado naquele exercício e buscar informações sobre a função $y = F(t)$ cuja taxa de variação é $y = f(t) = t^2$, no intervalo $[0, 1]$. Representaremos geometricamente o processo, verificando sua relação com o cálculo de áreas neste novo exemplo.

Iniciamos dividindo o intervalo $[0, 1]$ em duas partes, ou seja, considerando $n = 2$. Neste caso $\Delta t = \frac{1}{2}$, e teremos os subintervalos $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$, de extremos $0, \frac{1}{2}, 1$.

Pelo fato da taxa de variação $y = f(t) = t^2$ ser crescente, estimativas *por falta* para ΔF serão calculadas como a seguir:

No subintervalo $[0, \frac{1}{2}]$, consideramos a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = 0$, que é o *extremo esquerdo* do intervalo (menor valor da taxa de variação no subintervalo, no caso desta função).

No subintervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, consideramos a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = \frac{1}{2}$, que é o extremo esquerdo do intervalo (correspondendo ao menor valor da taxa no subintervalo, no caso desta função). A tabela abaixo representa estes dados, escritos para a estimativa *por falta*:

t	0	$\frac{1}{2}$
$y = f(t)$	0	$(\frac{1}{2})^2$

Como na aula anterior, a *variação total*

$$\Delta F \approx f(0) \cdot \Delta t + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Veja no gráfico a seguir a representação destes dados. Observe a região sombreada. Ela representa a estimativa *por falta* que obtivemos para a *variação total* ΔF . Você sabe dizer por quê?

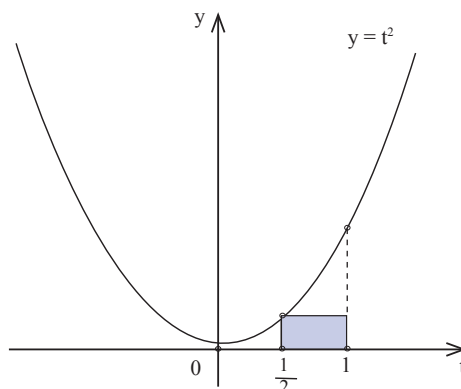


Figura 1 - Estimativa por falta para a variação total ΔF

Ainda pelo fato da taxa de variação $y = f(t) = t^2$ ser crescente, estimativas por excesso para ΔF serão calculadas como a seguir:

No subintervalo $[0, \frac{1}{2}]$, consideramos a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = \frac{1}{2}$, que é o *extremo direito* do intervalo (correspondendo ao maior valor da taxa no subintervalo, no caso desta função).

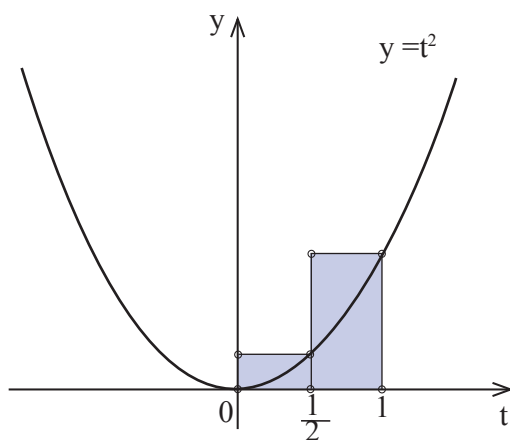
No subintervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, consideramos a taxa de variação constante e igual ao valor de $y = f(t) = t^2$ em $t = 1$, que é o *extremo direito* do intervalo (maior valor da taxa no subintervalo, no caso desta função).

A tabela abaixo representa estes dados, calculados para a estimativa *por excesso*:

t	$\frac{1}{2}$	1
$y = f(t)$	$(\frac{1}{2})^2$	1

$$\Delta F \approx f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta t + f(1) \cdot \Delta t = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Veja no gráfico a seguir a representação destes dados. A região sombreada representa a estimativa *por excesso* que obtivemos para a *variação total* ΔF . Você vê alguma relação entre a soma da medida das áreas dos retângulos de alturas $\frac{1}{4}$ e 1, e base $\Delta t = \frac{1}{2}$ com o valor da *variação total* ΔF ?



2.1 Exemplo: refinando a estimativa para a *variação total* ΔF

Vamos melhorar nossa estimativa para o valor da variação total ΔF . Consideremos agora $n = 3$, que corresponderá a $\Delta t = \frac{1}{3}$. Teremos os subintervalos $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$, de extremos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. As estimativas *por falta* e *por excesso* de ΔF serão calculadas com auxílio de tabelas, construídas como no caso $n = 2$.

Estimativa *por falta*:

$\sup_{t \in [0, \frac{1}{3}]} f(t) = 0$, em $[0, \frac{1}{3}]$; $f(t) = (\frac{1}{3})^2$ em $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ e $f(t) = (\frac{2}{3})^2$ em $[\frac{2}{3}, 1]$.

t	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y = f(t)$	0	$(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{2}{3})^2$

$$\Delta F \approx f(0) \cdot \Delta t + f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Delta t + f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Delta t = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}.$$

Estimativa *por excesso*:

$\sup_{t \in [0, \frac{1}{3}]} f(t) = (\frac{1}{3})^2$, em $[0, \frac{1}{3}]$; $f(t) = (\frac{2}{3})^2$ em $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ e $f(t) = 1$ em $[\frac{2}{3}, 1]$.

t	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y = f(t)$	$(\frac{1}{3})^2$	$(\frac{2}{3})^2$	1

$$\Delta F \approx f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Delta t + f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \Delta t + f(1) \cdot \Delta t = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{27}.$$

2.2 Exercício

- Represente a função $y = f(t) = t^2$ e os dados acima em um mesmo gráfico cartesiano, como no caso $n = 2$. Escreva o valor das alturas dos retângulos cuja soma das áreas corresponde à aproximação por excesso do valor ΔF .
- Repita os procedimentos dos exercícios anteriores para $n = 4$, $\Delta t = \frac{1}{4}$. Descreva com suas palavras o que a seqüência de gráficos que você desenhou nos exercícios anteriores lhe sugere.

3. NOTAÇÕES E LINGUAGEM

Seja $y = f(t)$ definida em um intervalo $[a, b]$ da reta IR . Vamos estabelecer uma linguagem específica para estimarmos a *variação total* ΔF em $[a, b]$, onde $\frac{dF}{dt} = f(t)$, através do cálculo da *variação acumulada* a partir de $y = f(t)$.

É usual dividirmos o intervalo $[a, b]$ em n partes ou subintervalos, de comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Subintervalos serão escritos como $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots [t_{n-1}, b]$. Seus extremos serão $a = t_0, t_1, t_2, \dots t_{i-1}, t_i, \dots t_n = b$.

A estimativa para a *variação total* que se escreve $f(t_0).\Delta t + f(t_1).\Delta t + \dots + f(t_{n-1}).\Delta t$ terá o nome de *Soma à Esquerda*.

Observe que neste caso a *variação acumulada* em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ considera o valor fixo e igual a $f(t_{i-1})$; ou seja, é estimada a partir de uma taxa calculada nos extremos à esquerda de cada um dos subintervalos.

A estimativa da *variação total* que se escreve $f(t_1).\Delta t + f(t_2).\Delta t + \dots + f(t_n).\Delta t$ terá o nome de *Soma à Direita*.

Observe, nesta última, como a *variação acumulada* em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ está sendo calculada.

Usando a notação $\sum$, que sintetiza a expressão de somas de parcelas diversas, escreveremos:

$$f(t_0).\Delta t + f(t_1).\Delta t + \dots + f(t_{n-1}).\Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i).\Delta t \quad (\text{Soma à Esquerda})$$

$$f(t_1).\Delta t + f(t_2).\Delta t + \dots + f(t_n).\Delta t = \sum_{i=1}^n f(t_i).\Delta t \quad (\text{Soma à Direita})$$

4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS SOMAS

À DIREITA E À ESQUERDA NO CASO $y = f(t) \geq 0$

Caso $y = f(t) \geq 0$, cada parcela $f(t_0) \cdot \Delta t$, $f(t_1) \cdot \Delta t$, $f(t_2) \cdot \Delta t \dots$ etc. pode ser interpretada como o valor da medida da área de um retângulo de base Δt e alturas $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2) \dots$ etc., respectivamente. Assim, para $y = f(t) \geq 0$, as *Somas à Esquerda* e à *Direita* definidas acima representam a soma de medidas de áreas de retângulos, de altura $f(t_i)$ e base Δt .

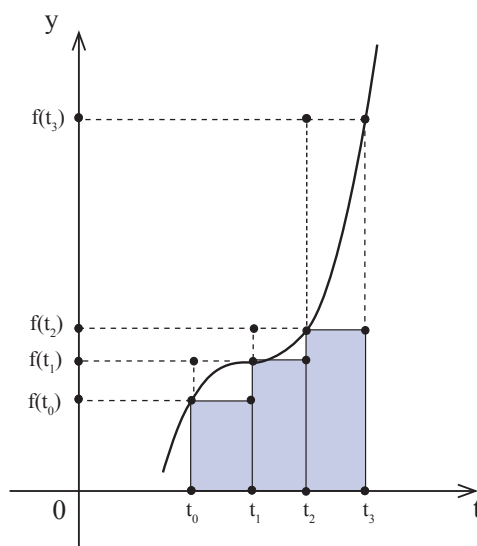


Figura 3 - Representação de Somas à Esquerda e à Direita para $y = f(t) \geq 0$

5. EXEMPLO: REFINANDO A ESTIMATIVA PARA

A VARIAÇÃO TOTAL ΔF

Retomando nossa estratégia para estimar a *variação acumulada* a partir da função $y=t^2$, propomos agora subdividir o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos. Neste caso, $\Delta t = \frac{1}{n}$.

Os subintervalos se escrevem como $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}]$, $\dots, [\frac{n-1}{n}, 1]$ (com extremos em $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$).

Para obtermos o valor da *Soma à Direita*, escrevemos as alturas dos retângulos como $(\frac{1}{n})^2$, $(\frac{2}{n})^2$, $(\frac{3}{n})^2$, $\dots, (\frac{n-1}{n})^2$, 1 . A base dos retângulos será dada por $\Delta t = \frac{1}{n}$.

Este valor será escrito

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + 1^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

5.1 Exercício

Escreva a *Soma à Esquerda* para $y = f(t) = t^2$, subdividindo o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos, como feito para a *Soma à Direita*.

5.2 Restrições e notações

Em consequência das escolhas que fizemos, as estimativas para a *variação total*, em termos da *variação acumulada* a partir das funções estudadas, podem ser melhoradas ao aumentarmos o número n de subintervalos: quanto maior o valor de n , menor o erro em nossa estimativa.

A possibilidade de determinarmos o valor “exato” da *variação total*, que será debatida na aula sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, requer, em primeiro lugar, um estudo sobre como tal procedimento de aumentar indefinidamente o valor de n pode ser concebido. Aqui vamos nos ater a verificar que o procedimento de aumentar o valor de n pode resultar, ou não, numa estabilização dos valores obtidos em cada *Soma*. Vamos dar um exemplo sobre como proceder.

5.2.1 Notação e linguagem

A notação $\lim_{n \rightarrow \infty}$ indica este processo de "aumentar indefinidamente o valor de n ", e é lida: **limite quando n tende ao infinito**.

Nesta linguagem, nosso desafio se traduz: investigar a possibilidade de associar um valor numérico às expressões

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot \Delta t$, verificando se estas somas se estabilizam em

torno de algum número real.

Se para uma dada função $y = f(t)$ em intervalo $[a,b]$ ambos os valores puderem ser definidos,¹ e se eles forem iguais, este valor terá o nome de *Integral Definida*.

A notação usada para nos referimos à *Integral Definida* será $\int_a^b f(t) dt$.

No caso das funções $y = f(t)$ que trabalhamos até agora, os limites

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot \Delta t$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$ sempre existem e são iguais.

Para este grupo de funções, enunciamos:

¹ Nem sempre os valores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot \Delta t \quad \text{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$$

existem.

5.3. Definição

A integral definida de $y = f(t)$ no intervalo $[a, b]$ da reta IR , que se escreve $\int_a^b f(t)dt$, é definida como sendo o valor do limite da soma à direita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$ ou da soma à esquerda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot \Delta t$.

5.4 Exemplo: aumentando indefinidamente o valor de n

No exemplo 5, obtivemos o valor $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$ para a *Soma à Direita*, referente à *variação acumulada* à taxa $y = f(t) = t^2$, numa partição do intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos.

Nosso objetivo neste exemplo será o de calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$.

Para isso, vamos trabalhar a expressão $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$.

Observe que $\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = i^2 \cdot \frac{1}{n^3}$. Assim $\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \left(\sum_{i=1}^n i^2\right) \cdot \frac{1}{n^3}$.

É possível mostrar que $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Poderemos então escrever:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \cdot \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right).$$

Note que as duas últimas parcelas da última soma entre parênteses ficarão desprezíveis quando n crescer muito. Desse modo a soma se estabiliza em $\frac{1}{3}$, quando n cresce indefinidamente.

Assim afirmamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

Pela definição anterior, diremos que a integral definida de $y = f(t) = t^2$ de 0 a 1 é $\frac{1}{3}$ e escreveremos $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

5.5 Exercício

Encontre o valor de $\int_0^1 t^2 dt$ calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot \Delta t$, ou seja, utilizando a *Soma à Esquerda*.

5.6 Notação e linguagem

As somas $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$ e $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \cdot \Delta t$ são denominadas *Somas*

de Riemman da função f .

A função f é denominada *integrando*, e os valores a e b denominam-se *limites de integração*. Comentamos que nem sempre os limites das *Somas de Riemman* existem. No caso de sua existência, as funções denominam-se *integráveis*. Neste texto, estaremos restritos a um subconjunto das funções integráveis.

6. A DEFINIÇÃO DE ÁREA SOB UMA CURVA

Nós sugerimos em exercícios anteriores, quando $y = f(t)$ era uma função positiva, que cada termo da forma $f(t_i) \cdot \Delta t$ poderia ser interpretado como a medida da área de um retângulo de altura $f(t_i)$ e base Δt .

À medida que o número n de subintervalos cresce, o comprimento Δt se aproxima de zero. Neste processo, podem acontecer casos em que as somas das medidas das áreas dos retângulos se estabilizam em um valor real. Em nossos exemplos, ao representar geometricamente o processo, os retângulos parecem se ajustar abaixo da curva gráfico de $y = f(t)$.

Para o grupo de funções com os quais estivemos trabalhando, nós vamos enunciar a seguinte definição:

6.1 Definição

Para $y = f(t)$ positiva em $[a, b]$, o valor da integral definida

$\int_a^b f(t) dt$ representa a medida da **área abaixo da curva gráfico** de $y = f(t)$, acima do eixo t , e entre as retas $t = a$ e $t = b$.

6.2 Soma algébrica de áreas

Nem sempre um fenômeno é modelado por uma função $F(t)$ em que a variação é acumulada a uma taxa $y = f(t)$ positiva.

Por exemplo, numa reação química, pode haver perda de uma dada substância num certo intervalo de tempo $[c, d]$. Em matemática este fato se traduz por uma taxa f negativa em $[c, d]$. As áreas dos

retângulos $f(t_i) \cdot \Delta t$ correspondentes à *variação acumulada* em subintervalos de comprimento Δt contidos em $[c, d]$ serão subtraídas. De fato, valores de $f(t_i)$ serão todos negativos em $[c, d]$, e, ainda, como há perda de substância neste intervalo, a *variação total* ΔF será negativa aí. Neste caso, uma vez conhecida a área S entre o gráfico de $y = f(t)$ e o eixo t no intervalo $[c, d]$, o valor $\int_c^d f(t)dt$ será $-S$.

6.3 Definição

O valor de $\int_a^b f(t)dt$ representa uma soma de áreas entre a curva gráfico de $y = f(t)$ e o eixo t , em que as áreas acima do eixo são computadas positivamente, e as áreas abaixo do eixo são computadas negativamente.

6.4 Exemplo: espaço percorrido e deslocamento

Em certo dia, quando à metade da distância entre sua casa e seu local de trabalho, Márcia percebeu que havia esquecido seus óculos para leitura, sendo, assim, obrigada a retornar. No final de seu trajeto, seu deslocamento – distância entre casa e local de trabalho – não correspondeu ao espaço que foi percorrido, registrado no odômetro do carro. Supondo, para simplificar, que o trajeto de Márcia entre casa e trabalho fosse linear, seu retorno à sua casa correspondeu a deslocar-se em direção contrária à inicial. Este retorno é computado no valor do espaço percorrido; mas não o é no valor de seu deslocamento ao final da viagem.

Situações como estas devem ser modeladas adequadamente e, por isso, sinais positivos e negativos são associados à velocidade. O que acontece é que o *deslocamento* de um corpo em movimento linear corresponde à *variação acumulada* de sua posição a uma taxa igual à sua velocidade. Este valor corresponde à *variação total* da posição, que pode, no entanto, não corresponder ao espaço total percorrido. Seja, por exemplo, uma função $y = v(t)$, cujo gráfico está representado abaixo; esta função pode ser interpretada como a velocidade de um corpo em movimento linear.

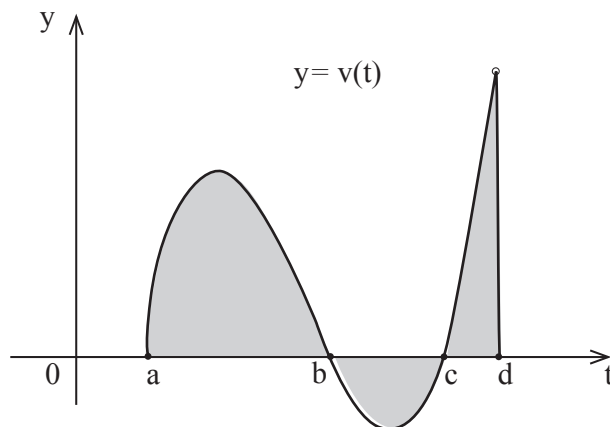


Figura 4 - Espaço percorrido ou deslocamento?

Observe os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ em que $v(t) \geq 0$. Nestes, está representado o corpo movendo-se para a direita (convencionado como o sentido positivo). Em $[b, c]$ $v(t) \leq 0$. O significado é o de o corpo mover-se em sentido contrário ao inicial, o que neste exemplo corresponde a mover-se para a esquerda. Ao calcularmos o *deslocamento*, que é a *variação total* da posição da partícula, estaremos:

- computando positivamente a *variação acumulada* nos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ que corresponderam a movimento num mesmo sentido positivo;
- excluindo a *variação acumulada* correspondente a $[b, c]$, que correspondem a um retorno, em relação a outra direção, escolhida como positiva.

Fazendo uso da interpretação da *variação acumulada* em termos de áreas sob a curva que representa a função velocidade, podemos escrever:

$$\text{Variação total} = \text{deslocamento} = \int_a^d v(t) dt = A_1 - A_2 + A_3$$

Já o espaço percorrido corresponde a computar o valor absoluto da variação acumulada em cada um dos três intervalos considerados:

$$\text{Espaço percorrido} = \int_a^d |v(t)| dt = A_1 + A_2 + A_3.$$

6.5 Exercício

- a) Determine o valor da integral definida $\int_{-1}^3 (x-1) dx$, esboçando o gráfico de $y = x - 1$. Observe sua localização em relação ao intervalo $[-1, 3]$, cujos extremos são os limites de integração da integral definida.
- b) Se a proposta fosse determinar a área entre o gráfico de $y = x - 1$, o eixo x e as retas $x = -1$ e $x = 3$, como você procederia?

O teorema fundamental do cálculo (parte 1)

OBJETIVO

Ao final desta aula, esperamos que você tenha compreendido o Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1) como uma estratégia para calcular ou estimar a *variação total* através da *Integral Definida*. E vice-versa, como uma estratégia para a resolução de *Integrais Definidas*, através da estimativa ou do cálculo da *variação total*. Em alguns casos especiais, esperamos que você seja mesmo capaz de calcular *Integrais Definidas* e *variações totais*, pelo método enunciado no Teorema.¹

1. INTRODUÇÃO

A *variação total* de uma função $y = F(t)$ foi estimada por meio de aproximações por somas, na Aula 13. Lá discutimos estratégias para melhorar tais aproximações, tornando-as mais precisas; tal refinamento resultou na definição de *Integral Definida*. Utilizando este último conceito, tornamo-nos capazes de medir *áreas*.

Aqui, nosso objetivo é o de estabelecermos que o valor exato da *variação total* de uma função é dado pelo cálculo de uma *Integral Definida*. Tal resultado é enunciado em um teorema conhecido como *Teorema Fundamental do Cálculo*, que articula dois problemas sobre os quais os matemáticos se debruçaram durante séculos: o de determinar retas tangentes e o de calcular áreas. A proposta desta aula é desenvolvermos uma primeira versão de seu enunciado. A contextualização e a representação gráfica ao final do texto são tentativas de tornar significativos e visuais os argumentos em sua demonstração.

A representação gráfica e a discussão sobre o procedimento para a determinação da *precipitação total acumulada* de chuva, ao final do texto, foram inseridos por motivos didáticos. Esperamos que você relacione o que estamos denominando por *acumular alturas* com o processo algébrico desenvolvido na demonstração do *Teorema Fundamental*, para entendê-lo melhor.

¹ Você estudará técnicas, chamadas Técnicas de Integração, que permitirão o uso sistemático do Teorema Fundamental do Cálculo.

2. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (PARTE 1)

2.1 Teorema

Seja $f(t)$ contínua para $t \in [a, b]$.

Então $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, em que $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$; ou seja, $\frac{dF}{dt} = f(t)$.

O teorema enunciado, dito de outra forma, estabelece que a *Integral Definida* da taxa de variação $f(t)$ de uma função $F(t)$ é a *variação total* desta última, no intervalo considerado.

O teorema pode ser utilizado quando queremos calcular ou avaliar o valor da *variação total* $F(b) - F(a)$, se conhecermos a taxa de variação $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$.

2.2 Exemplo: avaliando $F(b) - F(a)$, a partir de estimativas para $\int_a^b f(t) dt$

Numa reação química, uma substância está reagindo a uma taxa $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$, na qual $f(t)$ representa a concentração da substância.

Observe o gráfico na Figura 1 e interprete-o como representando a função $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$.

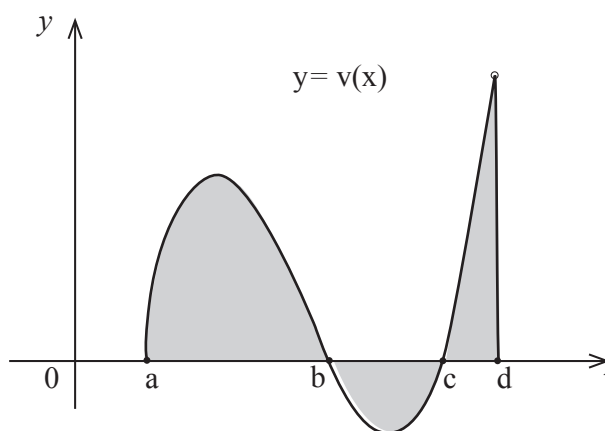


Figura 1 - Gráfico da taxa de variação da concentração

Pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, o valor de $\int_a^b f(t)dt$ representa a *variação acumulada* da substância à taxa $f(t)$ no intervalo de tempo $[a, b]$.

Na Aula 13, relacionamos o valor de *Integrais Definidas* com medida de *áreas*: a integral tem seu valor igual ao da medida da área entre o gráfico e o eixo t , contada positiva quando acima do eixo das abscissas, e negativa quando abaixo desse. Na Figura 1, a área abaixo do eixo é maior que a área acima do eixo, ou seja, o valor da integral é negativo. Isso quer dizer que a variação total que queremos determinar é negativa, ou seja, o valor da concentração durante o período decaiu.

Também podemos utilizar o *Teorema Fundamental do Cálculo* para encontrar o valor de *Integrais Definidas*, no caso de sermos capazes de determinar $y = F(t)$. Para isto basta calcularmos $F(b) - F(a)$. Este procedimento sugere novos conceitos, que são os de *Integral Definida* e de *primitiva* ou *antiderivada* de uma função.

2.3 Notação e linguagem

É costume denominarmos *Integral Indefinida* ao processo (ou comando) de “desmanchar” a ação da derivada. A *Integral Indefinida* de $y = f(t)$ é denotada por $\int f(t)dt$. A função $F(t) = \int f(t)dt$ é chamada *primitiva* ou *antiderivada* da função $y = f(t)$. Por exemplo, $V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 5$ é uma *primitiva* de $y = 3t^2$.

2.4 Exemplo: encontrando o valor de $\int_a^b f(t)dt$ através da determinação da primitiva e do cálculo de $F(b) - F(a)$

Como no exemplo 2.2, vamos considerar uma reação química em que uma substância está reagindo a uma taxa $y = \frac{dF}{dt} = f(t)$, em que $F(t)$ representa a concentração da substância. O cálculo de

$\int_a^b f(t)dt$ representa a *variação acumulada* da substância à taxa $f(t)$ no intervalo de tempo $[a,b]$.

Ter conhecimento da função concentração $F(t)$ – algebricamente, ou num gráfico, ou em uma tabela – que nos dá a quantidade de substância presente em cada tempo t permite calcular este mesmo valor $\int_a^b f(t)dt$ da *variação acumulada* no intervalo de tempo $[a, b]$ efetuando $F(b) - F(a)$.

Em outras palavras, uma vez que se conheça $F(t)$, podemos escrever $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, como enunciado no *Teorema Fundamental do Cálculo*.

O exercício a seguir diz respeito a esta discussão.

3. EXERCÍCIOS E EXEMPLOS

3.1 Exercício

- a) Verifique que para $F(t) = \frac{t^3}{3}$, então $y = \frac{dF}{dt} = t^2$.
- b) Usando o *Teorema Fundamental do Cálculo*, e o resultado do item (a), calcule o valor da *variação acumulada* de uma substância reagindo a uma taxa $y = t^2$ no intervalo $[0, 1]$.
Ou seja, calcule $\int_0^1 t^2 dt$. Suponha que a concentração da substância é igual a 0 (zero) no início do experimento.
- c) Confira o valor que você obteve com o valor encontrado em exemplos na Aula 13.

3.2 Exemplo

Retomamos aqui a discussão sobre um balão de gás que está sendo preenchido a uma taxa $y = \frac{dV}{dt} = 3t \text{ cm}^3/\text{min}$, com volume inicial 5 cm^3 .

O Teorema Fundamental do Cálculo e o exemplo 3.1 sugerem uma estratégia para determinar a *variação acumulada* do volume do balão no intervalo de tempo $[0, 3]$, que pode ser descrita como a seguir: determinar uma função $y = V(t)$ que satisfaça a condição $V(0) = 5$ (o volume inicial de gás no balão, em cm^3) e cuja *derivada* em relação a t , ou seja, cuja *taxa de variação instantânea*, seja $y = 3t$. Se formos capazes de determinar tal função, a variação do volume que procuramos se escreverá como $\Delta V = V(3) - V(0)$.

O desafio corresponderia a “desmanchar” o efeito da derivada sobre a função $y = V(t)$, no sentido de determinar a função cuja derivada é a expressão conhecida. Podemos partir do fato conhecido de que o processo de derivar uma função do tipo $y = t^n$ faz cair o seu grau em uma unidade. Então, para que o resultado de uma derivada seja $y = 3t$ (que é de grau 1 na variável t), a função que estaria sendo derivada deveria ser de grau 2. Assim, por tentativa e erro, vamos experimentar, como candidato à função $y = V(t)$, a expressão $y = at^2 + bt + c$. Seu segundo membro é um polinômio completo de grau 2, e as constantes a, b e c são números reais a determinar.

Neste caso, $\frac{dy}{dt} = 2at + b$. Para que esta expressão seja igual a $y = 3t$, devemos ter $2a = 3$, ou seja, $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$, e c , a princípio, pode ser um número real qualquer.

Assim, nossa candidata à função procurada se escreve, provisoriamente, na forma $y = V(t) = \frac{3}{2}t^2 + c$.

Da informação de que $V(0) = 5$ segue que $c = 5$.

Logo, $V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 5$ e

$$\Delta V = V(3) - V(0) = \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 5 - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 + 5 \right) = \frac{27}{2}.$$

3.3 Exercício

- a) Verifique que a expressão obtida para a função $V(t)$ satisfaz as condições do problema proposto, derivando a função $V(t) = \frac{3}{2}t + 5$ e calculando o valor de $V(0)$.

- b) O modelo matemático para o movimento em queda livre supõe um objeto a uma altura s_0 acima da superfície da Terra, lançado para cima ou para baixo com velocidade v_0 , e em seguida movendo-se sujeito apenas à força da gravidade. A velocidade instantânea do objeto em movimento é descrita por $v = \frac{ds}{dt} = v_0 - gt$, em que $g(m/s^2)$ é a aceleração devido à gravidade e t é medido em segundos. A partir da expressão da velocidade em função do tempo, determine o espaço percorrido, no intervalo de tempo $[1,3]$, por um objeto que caiu (então $v_0 = 0$) de uma altura de $50m$, reconstruindo a estratégia utilizada no exemplo 3.2.

4. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Mesmo que o enunciado do Teorema agora nos pareça evidente, demonstrar em Matemática tem um significado diferente. Um resultado é considerado verdadeiro quando pode ser deduzido usando regras da lógica clássica, a partir das definições que foram dadas aos conceitos. Nos quadros que se seguem, trabalharemos de um modo próximo ao da demonstração matemática do Teorema Fundamental.

Primeiro, o registro da definição dos conceitos envolvidos, a notação e a linguagem estão no quadro a seguir, denominado Preliminares.

4.1 Preliminares

Pela definição 5.2 na Aula 13, o valor de $\int_a^b f(t)dt$ é deter-

minado através do $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$.

O cálculo da expressão de $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$ será feito dividindo

o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, de comprimentos

iguais a $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. (Faça um desenho!)

O Teorema está demonstrado nos dois quadros a seguir.

4.2 Um esboço da demonstração

Seja $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n = b$ uma subdivisão com propriedades como as descritas no quadro Preliminares.

Nossa proposta é calcular o valor $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$.

Observe que o enunciado do teorema relaciona este limite com a expressão de F , que é uma primitiva de f . Por isso, para determiná-lo, nossa estratégia pressupõe uma releitura de cada uma das parcelas de $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t$ em termos da primitiva F .

Analisando o primeiro intervalo da subdivisão, de extremos $t_0 = a$ e t_1 , observe que a parcela correspondente a ele no somatório, $f(t_1) \cdot \Delta t$, pode ser interpretada como uma estimativa² para a *variação acumulada* no intervalo considerado:

$$f(t_1) \cdot \Delta t = \text{taxa de variação} \times \text{intervalo de tempo} \approx \text{variação acumulada em } [t_0, t_1].$$

Em termos da primitiva $F(t)$, a *variação acumulada* em $[t_0, t_1]$ é $\Delta F = (F(t_1) - F(t_0 = a))$.

Assim, a relação $f(t_1) \cdot \Delta t \approx \Delta F = (F(t_1) - F(t_0 = a))$ escreve a primeira parcela do somatório em termos da primitiva $F(t)$.

Numa subdivisão em que n é muito grande, o intervalo $[t_0, t_1]$ terá um comprimento muito pequeno, e a estimativa para ΔF pode ser muito boa. Em geral, esta estimativa ficará mais próxima do valor real à medida que aumentarmos o n .

Do mesmo modo, no segundo subintervalo, estimaremos:

$$f(t_2) \cdot \Delta t = \text{taxa de variação} \times \text{intervalo de tempo} \approx \text{variação acumulada em } [t_1, t_2],$$

ou seja, $f(t_2) \cdot \Delta t \approx \Delta F = (F(t_2) - F(t_1))$.

Num intervalo genérico $[t_{i-1}, t_i]$, $f(t_i) \cdot \Delta t \approx \Delta F = (F(t_i) - F(t_{i-1}))$.

Para o último intervalo da partição $[t_{n-1}, t_n = b]$

$$\Delta F = (F(t_n = b) - F(t_{n-1})) \approx f(t_n = b) \cdot \Delta t.$$

Assim, $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t = f(t_1) \cdot \Delta t + f(t_2) \cdot \Delta t + \dots + f(t_i) \cdot \Delta t + \dots + f(b) \cdot \Delta t \approx \Delta F =$

$$(F(t_1) - F(t_0 = a)) + (F(t_2) - F(t_1)) + \dots + (F(t_i) - F(t_{i-1})) + \dots + (F(t_n = b) - F(t_{n-1}))$$

Cancelando os termos no segundo membro da igualdade (observe as expressões entre parênteses!), podemos escrever

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t \approx \Delta F = F(b) - F(a).$$

A noção de limite justifica a afirmação

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta t = F(b) - F(a).$$

² Isso porque a taxa de variação $f(t)$ (que não é constante) está sendo considerada constante e igual a $f(t_1)$.

4.3 Visualizando o processo de acumular alturas

O texto abaixo, em destaque, foi extraído de orientações que podem ser recuperadas na íntegra no endereço <www.cpte.inpe.br/~ensinop/med_prec.html>.

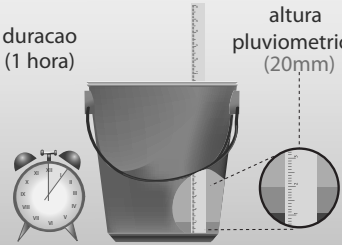
Acumulando a precipitação

*Se alguém lhe perguntasse em que época chove mais na sua cidade você saberia como calcular? Para fazer este cálculo é necessário **acumular as alturas** pluviométricas durante um certo período, um dia, um mês ou um ano, ignorando a intensidade, a duração e o tempo de retorno. Dessa forma teremos a precipitação acumulada no período.*

Você acredita que a resposta à pergunta “Em que época chove mais na sua cidade? Você saberia como calcular?” tem alguma relação com o *Teorema Fundamental do Cálculo*?

No que se segue, a idéia de *acumular (variações de) alturas* – no caso do nosso teorema, determinadas em ordenadas de pontos sobre curvas – passa a ser central a um novo olhar para a questão de definir a *variação acumulada* a partir da *taxa de variação*. Sendo assim, será também central às questões de cálculo de *Integrais Definidas* e de determinação de *áreas* sob curvas.

Ora, a *precipitação*, cujo significado é o de liberação de água proveniente da atmosfera sobre a superfície da Terra, é medida pela *altura pluviométrica*, em mm.

conceitos intensidade média = 20mm/h altura pluviométrica (20mm) duração (1 hora) 	Por sua vez, esta altura corresponde à estimativa, com o auxílio de um <i>pluviômetro</i>, da variação na precipitação provocada em um dado período de chuva. No desenho ao lado, observa-se que este é calculado por <i>intensidade da chuva (taxa de variação da altura pluviométrica por unidade de tempo, em mm/min ou mm/h) x intervalo de tempo de duração da chuva</i>.
--	---

No desenho a seguir, as alturas pluviométricas correspondem às variações Δy , que são aproximadas por $dy = f'(x) dx$.

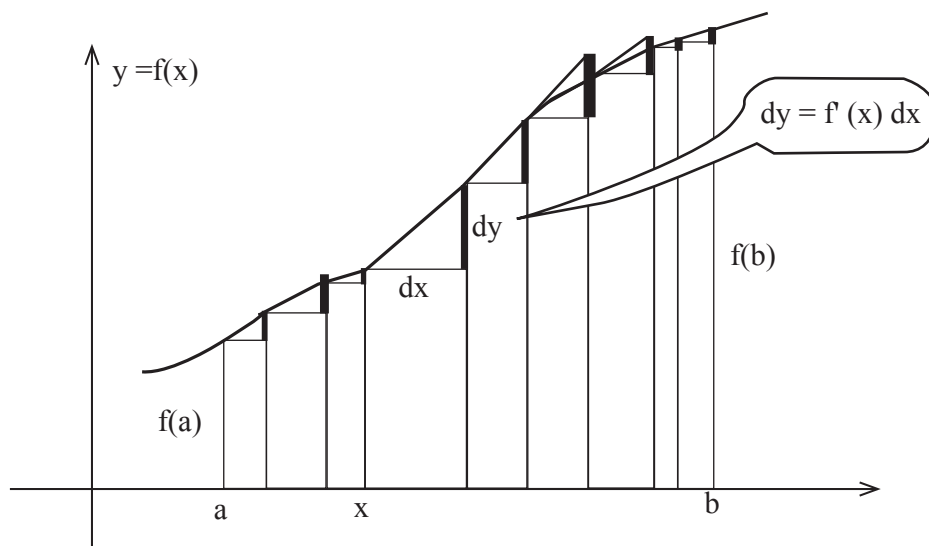


Figura 2 - Cálculo da variação de $y=f(x)$ em $[a, b]$, como soma de comprimentos $\sum dy$

Visto assim, *acumular as alturas* pluviométricas corresponderia a adicionar os valores Δy , como no *Teorema Fundamental do Cálculo*.

Ainda como em nosso Teorema, uma vez que cada altura pluviométrica é estimada no pluviômetro computando *intensidade de chuva* $\times$ *tempo de sua duração*, ou *taxa de variação* $\times$ *comprimento de intervalo*, teríamos considerado as duas formas de escrever o cálculo da precipitação acumulada em dado período.

Na verdade, é o *Teorema Fundamental do Cálculo* que tem relação com a busca de solução para questões tais como a determinação quantitativa dos períodos em que mais chove, em determinadas regiões. Ao longo da construção do conhecimento matemático, foi a busca por soluções para questões deste tipo que sugeriu seu enunciado.

5. REFERÊNCIA

TALL, David. Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics Teaching*, 37, p. 29-32, 1991.



Para obter mais
informações sobre
outros títulos da
EDITORA UFMG,
visite o site

www.editora.ufmg.br

A presente edição foi composta pela Editora UFMG e impressa pela Gráfica Editora O Lutador, em sistema offset, papel Off-set 90g (miolo) e cartão supremo 250g (capa), em março de 2008.

ISBN 978-85-7041-658-2



CENTRO DE APOIO
À EDUCAÇÃO A
DISTÂNCIA UFMG

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Educação

