

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Renzo Scarpelli Cabral de Bragança

Boa colocação local e comportamento assintótico para a Equação Não Linear de
Schrödinger não homogênea em $H^1(\mathbb{R}^n)$

Belo Horizonte
2024

Renzo Scarpelli Cabral de Bragança.

Boa colocação local e comportamento assintótico para a Equação Não Linear de Schrödinger não homogênea em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Versão final da dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Luiz Gustavo Farah Dias.

Belo Horizonte
2024

Bragança, Renzo Scarpelli Cabral de.

B813b Boa colocação local e comportamento assintótico para a Equação Não Linear de Schrödinger não homogênea em $H^1(\mathbb{R}^n)$ [recurso eletrônico] / Renzo Scarpelli Cabral de Bragança. Belo Horizonte — 2024.
1 recurso online (74 f. il.): pdf.

Orientador: Luiz Gustavo Farah Dias.

Disertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 72-74

1. Matemática – Teses. 2. Problemas de valor inicial – Teses. 3. Equação de Schrodinger– Teses.
4. Espalhamento (Matemática) - Teses. I. Dias, Luiz Gustavo Farah. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)




FOLHA DE APROVAÇÃO

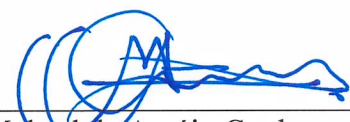
*Boa colocação local e comportamento assintótico para a
Equação Não Linear de Schrodinger não
homogênea em $H^1(\mathbb{R}^n)$*

RENZO SCARPELLI CABRAL DE BRAGANÇA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:


Prof. Luiz Gustavo Farah Dias
Orientador - UFMG


Prof. Luccas Cassimiro Campos
UFMG


Prof. Mykael de Araújo Cardoso
UFPI

Belo Horizonte, 10 de setembro de 2024.

Aos meus pais,
por todo o amor e suporte.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Herálio Mendonça de Bragança e Verônica Scarpelli Cabral de Bragança (*in memoriam*) por sempre me apoiarem e não medirem esforços para me prover educação de mais alta qualidade, além de todo suporte emocional e financeiro durante toda minha vida. Sem eles nada disso seria possível. Agradeço também aos meus irmãos por todo o companheirismo e apoio que tornaram esta caminhada muito mais leve.

Também agradeço a todos meus amigos, sejam do colégio ou faculdade por todos os momentos de descontração que são fundamentais para a manutenção da saúde mental, além de todo o apoio e incentivo que me deram durante esse mestrado. Agradeço também a minha namorada Laura por todo o suporte, incentivo, carinho e companheirismo que foram fundamentais nesta minha trajetória.

Agradeço a todos meus professores, desde o colégio, faculdade e pós graduação, que foram fundamentais para minha formação como aluno. Em especial, agradeço aos professores Israel Vainsencher, Luccas Campos e Luiz Gustavo Farah que desempenharam um papel especial em minha formação matemática. Agradeço também a Andrea e a Kelly pela disponibilidade de sempre.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Luiz Gustavo Farah Dias, pela paciência, atenção e tempo disponibilizado durante a elaboração desse trabalho e de outros que já realizamos nos últimos 5 anos, sempre me motivando e acreditando em meu potencial.

Por fim, agradeço a FAPEMIG e a CAPES pelo apoio financeiro que foi essencial durante o período de mestrado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

para dimensões $n = 2, 3$. Estabelecemos resultado de boa colocação local em $H^1(\mathbb{R}^n)$ utilizando o teorema do ponto fixo de Banach, estimativas de Strichartz e ferramentas de Análise Harmônica. A equação acima é invariante pelo *Scaling* $\lambda \rightarrow \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, que deixa invariante a norma L^2 em dimensão 2 e a norma $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ em dimensão 3. Para $n = 2$, estudamos o fenômeno de *Blow-up* em tempo finito para energia negativa e em dimensão $n = 3$ estabelecemos um resultado de espalhamento (*Scattering*) para soluções abaixo de um nível dado explicitamente pelo *ground state*, utilizando um método baseado em um critério de espalhamento e uma identidade Virial.

Para o resultado de boa colocação, seguimos as ideias de Guzmán [20] e para o resultado de *Blow-up* seguimos Cardoso e Farah [6]. Finalmente, para o resultado de *Scattering* nos baseamos em Campos e Cardoso [4].

Para o desenvolvimento dos resultados principais fazemos uma revisão de importantes ferramentas de Análise funcional e harmônica e apresentamos resultados sobre a equação elítica associada ao problema estudado.

Palavras-chave: boa colocação; *scattering*; *blow-up*; Schrödinger.

Abstract

In this work, we study the initial value problem

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

for dimensions $n = 2, 3$. We establish a local well-posedness result in $H^1(\mathbb{R}^n)$ using the Banach fixed-point theorem, Strichartz estimates, and harmonic analysis tools. The above equation is invariant by the *Scaling* $\lambda \rightarrow \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, which leaves the L^2 norm invariant in dimension 2 and the $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ norm invariant in dimension 3. For $n = 2$, we study the finite time *blow-up* phenomenon for negative energy, and in dimension $n = 3$, we establish a scattering result for solutions below a given level explicitly determined by the ground state, using a method based on a scattering criterion and a Virial identity.

For the well-posedness result, we follow the ideas of Guzmán [20], and for the blow-up result, we follow Cardoso and Farah [6]. Finally, for the scattering result, we base our work on Campos and Cardoso [4].

For the development of the main results, we provide a review of important tools in Functional and Harmonic Analysis and present results on the elliptic equation associated with the studied problem.

Keywords: well-posedness; scattering; blow-up; Schrödinger.

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Notações e estrutura do texto	10
1.2	A equação não linear de Schrödinger não homogênea	10
1.3	<i>Scaling</i> e quantidades conservadas	11
2	Preliminares	13
2.1	Espaços métricos e Teorema do ponto fixo de Banach	13
2.2	Transformada de Fourier	15
2.2.1	Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$	15
2.2.2	Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	16
2.2.3	Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$	19
2.3	Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$	20
2.4	Análise Funcional e Análise Harmônica	22
2.5	Equação linear de Schrödinger e Estimativas de Strichartz	25
2.6	A Equação Elíptica e a desigualdade de Gagliardo Nirenberg	29
3	Boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^n)$	32
3.1	Definições e notações básicas	32
3.2	Lemas auxiliares	33
3.3	Boa colocação local em $H^1(\mathbb{R}^n)$	39
4	<i>Blow-up</i> em tempo finito.	42
4.1	Preliminares	42
4.2	Resultado de <i>Blow-up</i>	44
5	<i>Scattering</i> em $H^1(\mathbb{R}^3)$	50
5.1	Preliminares	50
5.2	Teoria para dado pequeno	55
5.3	Crítério de <i>Scattering</i>	57
5.4	Resultado de <i>Scattering</i>	62
	Bibliografia	72

Capítulo 1

Introdução

1.1 Notações e estrutura do texto

Durante o texto utilizaremos a letra C para indicar uma constante que pode mudar de linha para linha. Utilizamos também a notação $a \lesssim b$ quando existe uma constante $C > 0$ tal que $a \leq Cb$. Também utilizaremos as notações $\|\cdot\|_p$ ou $\|\cdot\|_{L^p}$ para denotar a norma L^p de uma função e $\|\cdot\|_{H^s}$ para a norma em H^s , escolhendo a notação mais conveniente na situação. Também utilizaremos, a depender da situação, de forma indistinta, as notações $\partial_i u$ ou u_i para denotar a derivada de uma função com respeito a variável x_i e também $\partial_t u$ e u_t para denotar a derivada com respeito a variável temporal.

No Capítulo 2, apresentamos resultados preliminares de Análise funcional e harmônica, além da teoria linear para a Equação de Schrödinger e os resultados necessário sobre a equação elítica associada à INLS. No Capítulo 3, apresentamos a teoria local, demonstrando o resultado de boa colocação para o PVI estudado. No Capítulo 4, provamos o resultado de existência de *Blow-up* em dimensão $n = 2$ para soluções com energia negativa. Com a não linearidade fixada, a equação em dimensão 2 se torna L^2 - crítica. Finalmente, no Capítulo 5, provamos o resultado de *Scattering* em dimensão $n = 3$ (equação intercrítica) para soluções abaixo do *ground state* no sentido das relações (5.19) e (5.20).

1.2 A equação não linear de Schrödinger não homogênea

Durante esse trabalho estudaremos a boa colocação local, bem como o comportamento assintótico, tais como *Scattering* e *Blow-up* para o problema de valor inicial da equação não linear de Schrödinger não homogênea (INLS) no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Em sua forma mais geral esta equação é escrita como abaixo:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda|x|^{-b}|u|^{\alpha-1}u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $|\lambda| = 1$ e $\alpha > 1$. Em particular, focaremos no caso $b = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $\lambda = 1$ e dimensões $n = 2, 3$. Entretanto durante esse capítulo utilizaremos a versão mais geral dada pelo PVI (1.1) por completude.

A INLS é uma variação não linear da famosa equação de Schrödinger postulada pelo físico Erwin Schrödinger em 1926. A equação clássica é de grande importância para a física quântica, sendo fundamental para descrever a dinâmica de partículas. A INLS e sua versão

homogênea (NLS) aparecem com frequência no estudo de ótica não linear, como por exemplo, na propagação de laser em meios não lineares de Keer e na teoria de fibra ótica (ver [8], [16],[7]).

1.3 *Scaling* e quantidades conservadas

A INLS possui uma invariância por escala muito importante. De fato, se $u(x, t)$ é uma solução para o PVI (1.1) e $\lambda > 0$ é uma constante, então $u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{2-b}{\alpha-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução com dado inicial $\lambda^{\frac{2-b}{\alpha-1}} u_0(\lambda x)$. Para ver isso basta notar que

$$\partial_t u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{2\alpha-b}{\alpha-1}} \partial_t u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

$$\Delta u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{2\alpha-b}{\alpha-1}} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

e

$$|x|^{-b} |u_\lambda|^{\alpha-1} u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{2\alpha-b}{\alpha-1}} |x|^{-b} |u|^{\alpha-1} u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Outra importante propriedade da INLS são quantidades conservadas, conhecidas como massa e energia.

Proposição 1.3.1. (Quantidades conservadas)

Seja $u(x, t)$ solução do PVI (1.1). Então, as seguintes quantidades são conservadas:

$$M(u(t)) = \|u(x, t)\|_2^2 = M(u_0)$$

e

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \|\nabla u(x, t)\|_2^2 - \frac{\lambda}{\alpha+1} \| |x|^{-b} |u(x, t)|^{\alpha+1} \|_1 = E(u_0).$$

Demonstração: Apresentamos aqui uma conta formal para justificar as quantidades conservadas acima. Para um tratamento mais rigoroso ver Bona e Smith [1] e Capítulo 6 em Linares e Ponce [24]. De fato, em [24] o argumento passa por aproximar a solução em $H^1(\mathbb{R}^n)$ por soluções em $H^2(\mathbb{R}^n)$ (onde a equação faz sentido q.t.p).

Para a conservação da massa, começamos notando que $\partial_t |u(x, t)|^2 = 2\text{Re}\bar{u}\partial_t u = 2\text{Im}\bar{u}i\partial_t u$. Substituindo a equação (1.1) e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^2 dx &= 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}i\partial_t u dx \\ &= -2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(\Delta u + \lambda|x|^{-b}|u|^{\alpha-1}u) dx \\ &= -2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}\Delta u dx \\ &= 2\text{Im} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para mostrar a conservação da energia começamos multiplicando a equação (1.1) por $i\partial_t \bar{u}$ e tirando a parte real obtemos

$$-\text{Re}\partial_t \bar{u}\Delta u - \text{Re}\lambda|x|^{-b}|u|^{\alpha-1}u\partial_t \bar{u} = 0.$$

Integrando por partes obtemos

$$Re \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \bar{u}_t \cdot \nabla u dx - \lambda Re \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-b} |u|^{\alpha-1} u \bar{u}_t dx = 0.$$

Finalmente, derivando a expressão da energia em relação ao tempo encontramos a mesma expressão acima, concluindo a demonstração. ■

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espaços métricos e Teorema do ponto fixo de Banach

A teoria de espaços métricos é de extrema importância em diversas áreas da Matemática. Um espaço métrico, de forma básica, é um espaço onde podemos medir distância entre os pontos neste espaço. Uma grande quantidade de espaços matematicamente importantes são espaços métricos, em particular os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $H^1(\mathbb{R}^n)$ que utilizaremos durante esse trabalho.

Seguindo [23], definimos:

Definição 2.1.1. Uma métrica em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$ chamado de distância entre x e y de modo que para $x, y, z \in X$ sejam satisfeitas as seguintes condições:

- $d(x, x) = 0$;
- Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

□

Um espaço métrico é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma métrica em X .

Um importante conceito em espaços métricos é o de convergência de seqüências. Dado um espaço (X, d) e uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dizemos que x_n converge para um ponto $x \in X$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos $d(x_n, x) < \epsilon$.

Em espaços métricos, existe uma classe de seqüências chamadas de seqüências de Cauchy, que desempenham um importante papel em diversos teoremas em espaços métricos.

Definição 2.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X . Dizemos que (x_n) é uma seqüência de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ temos

$$d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

□

Em essência, seqüências de Cauchy são aquelas cujos termos ficam arbitrariamente próximos quando os índices crescem muito. Dizemos que um espaço métrico é completo, se todas as seqüências de Cauchy nesse espaço são convergentes. Claramente, toda seqüência

convergente é uma sequência de Cauchy, mas o contrário nem sempre é verdade. Um exemplo simples de um espaço métrico não completo é o intervalo $(0, 1) \in \mathbb{R}$, pois claramente a sequência $x_n = \frac{1}{n+1}$ é de Cauchy, mas não converge no intervalo $(0, 1)$.

O Teorema do Ponto fixo de Banach, nos dá condições suficientes para garantir que um mapa $T : X \rightarrow X$ em um espaço métrico possua um único ponto fixo, ou seja, um único $x \in X$ tal que $T(x) = x$. As condições para o Teorema são que o espaço métrico seja completo e a aplicação seja uma contração, isto é, existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Esse teorema é de extrema importância, como será visto no Capítulo 3, pois fornece uma técnica para verificar existência e unicidade de soluções para equações diferenciais e será utilizado nas demonstrações dos resultados principais do trabalho.

Teorema 2.1.3 (Teorema do ponto fixo de Banach). Seja (X, d) um espaço métrico **completo** e $f : X \rightarrow X$ uma contração, então existe um único ponto fixo de f . Esse ponto pode ser obtido iterando $f(x_0)$ sendo x_0 um ponto qualquer de X .

Demonstração:

A demonstração do teorema é feita em duas partes: Unicidade, e existência. Vamos provar primeiramente a unicidade, ou seja, se existirem pontos fixos, existirá um único.

Suponha x_0 e x_1 pontos fixos. Usando o fato de que f é uma contração temos que

$$d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1).$$

Portanto

$$d(x_0, x_1)(1 - \alpha) \leq 0 \iff d(x_0, x_1) = 0 \iff x_0 = x_1.$$

Note que usamos $f(x_0) = x_0$ e $f(x_1) = x_1$, $\alpha < 1$ e também o fato de que a métrica é sempre maior ou igual a zero, o que força $d(x_0, x_1) = 0$, ou seja o ponto fixo é único se existir.

Na prova da existência de um ponto fixo vamos construir a seguinte sequência: $a_0 = x_0$ e $a_n = f^n(x_0)$ para x_0 um ponto qualquer em X . Se esta sequência convergir para $x \in X$ teremos:

$$x = \lim f^n(x_0) \text{ e } f(x) = f(\lim f^n(x_0)) = \lim f^{n+1}(x_0) = x.$$

Ou seja, teremos que $x \in X$ é ponto fixo de f . Então basta provarmos que essa sequência é convergente. Para isso, mostraremos que a_n é uma sequência de Cauchy, e como X é completo essa sequência converge, e então está provado o teorema. De fato

$$d(a_1, a_2) = d(f(a_0), f(a_1)) \leq \alpha d(a_0, a_1)$$

e

$$d(a_2, a_3) = d(f(a_1), f(a_2)) \leq \alpha d(a_1, a_2) \leq \alpha^2 d(a_0, a_1).$$

Por indução vemos que $d(a_n, a_{n+1}) \leq \alpha^n d(a_0, a_1) \forall n \in \mathbb{N}$. Segue-se que, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer:

$$d(a_n, a_{n+p}) \leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + \dots + d(a_{n+p-1}, a_{n+p}) \quad (2.1)$$

$$\leq [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}] \cdot d(a_0, a_1) \quad (2.2)$$

$$= \alpha^n [1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1}] \cdot d(a_0, a_1) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(a_0, a_1). \quad (2.3)$$

Nessa passagem acima utilizamos a desigualdade triangular em (2.1), a relação obtida acima em (2.2), e finalmente, em (2.3) usamos que a soma da PG finita é menor ou igual a infinita quando seus termos são positivos. Como $\lim \alpha^n = 0$, concluímos que os termos da sequência a_n se tornam arbitrariamente próximos, o que à caracteriza como sequência de Cauchy, e assim finaliza a demonstração do Teorema 2.1.3. ■

2.2 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma importante ferramenta matemática que permite analisar o comportamento de funções em um domínio diferente (muitas vezes visto como domínio da frequência). Em engenharia, a transformada de Fourier aparece exaustivamente nas teorias de sinais e sistemas lineares, controle, processamento de sinais, circuitos entre outras, sendo uma ferramenta importante na solução de equações diferenciais, pois uma de suas características é “transformar” equações diferenciais em equações algébricas.

2.2.1 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Durante essa seção, seguindo Linares e Ponce [24], definiremos e exploraremos algumas propriedades da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.2.1. A transformada de Fourier de um função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por \hat{f} é definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (2.4)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $x \cdot \xi$ denota o produto interno usual em \mathbb{R}^n . □

Essa fórmula está bem definida para função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e a partir dela conseguimos extrair algumas propriedades básicas.

Proposição 2.2.2. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então:

1. $f \rightarrow \hat{f}$ define um operador linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

2. \hat{f} é contínua.
3. $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann- Lebesgue).

Demonstração:

1. Para $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixo, temos

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \\ &= \|f\|_1. \end{aligned}$$

Como o lado direito independe de ξ , tomando o supremo essencial temos o resultado.

2. A continuidade da transformada de Fourier é uma consequência direta do Teorema da convergência dominada. De fato, tomando uma sequência $\xi_n \rightarrow \xi$ note que $f(x)e^{-2\pi i\xi_n \cdot x} \rightarrow f(x)e^{-2\pi i\xi \cdot x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como todas as funções são dominadas por $|f(x)|$ e $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos aplicar o teorema da convergência dominada e concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi).$$

3. Para a demonstração do Lema de Riemann-Lebesgue, vamos primeiramente provar o resultado para funções $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ contínuas de suporte compacto e posteriormente, utilizar um resultado de densidade de $C_c(\mathbb{R}^n)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ para concluir a demonstração. Este resultado de densidade pode ser visto em Brezis [2] Teorema 4.3.

Seja $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e sua transformada de Fourier \hat{f} . Fazendo a mudança de variáveis $x \rightarrow x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}$ e lembrando que $e^{-i\pi} = -1$ podemos escrever

$$\hat{f}(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \quad (2.5)$$

Combinando (2.4) e (2.5) obtemos

$$2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(f\left(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) - f(x)\right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \quad (2.6)$$

Por continuidade de f sabemos que $(f(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}) - f(x)) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$ e pelo suporte compacto sabemos que $|f(x + \frac{\xi}{2|\xi|^2}) - f(x)| \leq 2\|f\|_{\infty} \chi(\text{supp}(f))$ que é integrável. Logo, pelo teorema da convergência dominada, $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. Usando a densidade das funções contínuas de suporte compacto em $L^1(\mathbb{R}^n)$ concluímos o resultado. ■

A fim de estender a definição da transformada de Fourier para funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$, que é o espaço de funções fundamental para o trabalho, definimos primeiramente o espaço de Schwartz.

2.2.2 Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.2.3. O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ vale que

$$\sup |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

ou seja, funções que decaem mais rápido que qualquer polinômio em qualquer ordem de suas derivadas. É importante notar que o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está contido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Uma grande vantagem de trabalhar com o espaço de Schwartz é sua densidade em qualquer L^p com $1 \leq p < \infty$. Para provar esse fato, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 2.2.4. O espaço $C_c(\mathbb{R}^n)$ é denso em qualquer $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Além disso, a norma L^p é contínua por translação, isto é, $\lim_{t \rightarrow 0} \|f(x+t) - f(x)\|_p = 0$.

Proposição 2.2.5. (Desigualdade de Minkowski) Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável e $1 \leq p < \infty$. Então

$$\left[\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} dx.$$

Para a demonstração desses resultados, veja Folland [17] Teoremas 6.19 e 8.5.

Proposição 2.2.6. A classe de Schwartz é densa em qualquer $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Começamos mostrando que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C_c(\mathbb{R}^n)$ com respeito a norma L^p , e utilizando a Proposição 2.2.4 concluímos o resultado. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ e defina $\phi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^n} \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. É fácil ver que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\lambda(x) dx = 1$. Seja $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ com e defina $g_\lambda(x) = f \star \phi_\lambda(x)$. É fácil ver que g_λ é C^∞ com suporte compacto (aplicação direta do Teorema da Convergência Dominada). Afirmamos que $g_\lambda \rightarrow f$ em L^p quando $\lambda \rightarrow 0$.

Primeiramente, notamos que fazendo a mudança de variáveis $\tau = \lambda \cdot y$ temos

$$\begin{aligned} f \star \phi_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tau) \phi_\lambda(\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \lambda y) \phi(y) dy. \end{aligned}$$

Estimando agora a norma L^p de $(f - g_\lambda)$ e utilizando a Proposição 2.2.5 obtemos

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - \lambda y) - f(x)) \phi(y) dy \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \lambda y) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \|f(x - \lambda y) - f(x)\|_p dy \end{aligned}$$

e utilizando a Proposição 2.2.4, concluímos que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|g_\lambda - f\|_p = 0$. Dessa maneira, mostramos que o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C_c(\mathbb{R}^n)$ na norma L^p com $1 \leq p < \infty$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço da classe de Schwartz, concluímos o resultado. ■

É interessante notar, que devido ao decaimento das funções no espaço de Schwartz, o resultado não vale para funções em L^∞ . De fato, basta pegar qualquer função constante que não será possível aproximá-la por funções Schwartz na norma L^∞ . A proposição acima nos fornece uma poderosa técnica para estender propriedades obtida para a classe de Schwartz para funções mais gerais.

Teorema 2.2.7. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-índice qualquer. Valem as seguintes afirmações:

1. A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo com inversa

$$f^\vee(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

2. $f(x) = (\hat{f})^\vee(x)$

3. Identidade de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\hat{f}(x)dx$$

4. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

5. $\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Demonstração: Iremos demonstrar aqui apenas a identidade de Plancherel e a fórmula da inversão. Para a demonstração das outras propriedades ver Folland [17] Capítulo 8. A demonstração da identidade de Plancherel se baseia no teorema de Fubini.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i x \cdot y} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot y} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\hat{f}(y)dy \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. Para a demonstração da fórmula da inversão, seguimos as ideias de Rudin [28]. Precisamos inicialmente do seguinte lemma:

Lema 2.2.8. Considere $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Então, $\hat{\phi} = \phi$ e

$$\phi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)d\xi.$$

Demonstração: Dada uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, começamos provando que

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)d\xi. \quad (2.7)$$

Defina $g(y) = \phi(y/\lambda)$. Utilizando a fórmula (2.4) concluímos que $\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{\phi}(\lambda\xi)$. Pela identidade de Plancherel, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\lambda^n \hat{\phi}(\lambda\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\hat{f}(x)dx.$$

fazendo a substituição de variáveis $y = \lambda\xi$ concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\hat{\phi}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\hat{f}(x)dx.$$

Finalmente, fazendo $\lambda \rightarrow \infty$ e usando o Teorema da Convergência Dominada obtemos

$$f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(y)dy = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)dx.$$

Aplicando o Lema acima, demonstramos (2.7). Para o caso geral, fixe $x \in \mathbb{R}^n$ e defina $g(y) = f(x+y)$, logo $g(0) = f(x)$ e já vimos que

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)d\xi.$$

Utilizando a fórmula 2.4 é fácil ver que $\hat{g}(\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot x} \hat{f}(\xi)$ e, portanto,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$$

provando a fórmula de inversão. ■

2.2.3 Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

A princípio, não poderíamos definir a transformada de Fourier para funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$ utilizando a expressão (2.4), pois a transformada não estaria bem definida. Existe a estratégia de definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ utilizando a densidade do espaço $L^1 \cap L^2$ no espaço L^2 , entretanto, optamos por fazer essa definição utilizando o espaço de Schwartz devido as suas melhores propriedades. Para fazer essa extensão começamos provando a seguinte proposição.

Proposição 2.2.9. Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então vale que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Demonstração: Começamos notando que

$$\overline{\hat{f}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (2.8)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{2\pi i x \cdot \xi} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right) dx \end{aligned}$$

e utilizando o item 2 do Teorema 2.2.7 concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(x)} dx.$$

Com esta proposição em mãos somos capazes de definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 2.2.10. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Considere f_n uma sequência de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ convergindo para f na norma L^2 . Definimos a transformada de Fourier de f como o limite das transformadas \hat{f}_n em L^2 . Dessa maneira, o operador $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ está bem definido e é unitário.

Demonstração: Para provar esse teorema, precisamos primeiramente verificar que a sequência \hat{f}_n converge na norma L^2 . Como L^2 é um espaço métrico completo, basta provar que essa sequência é de Cauchy. Já sabemos, por hipótese, que a sequência f_n é de Cauchy, pois é convergente. Utilizando a proposição acima, verificamos que $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$ e portanto, concluímos que \hat{f}_n é de Cauchy e logo convergente. Precisamos mostrar agora, que o limite \hat{f} independe da sequência f_n escolhida. Para isso, considere uma sequência

em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ diferente $g_n \rightarrow f$ em L^2 e seja $\hat{g} = \lim \hat{g}_n$. Queremos mostrar que $\|\hat{f} - \hat{g}\|_2 = 0$. Para isso observamos que

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_2 \leq \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2 + \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2 + \|\hat{g}_n - \hat{g}\|_2$$

e o lado direito claramente converge a 0 quando $n \rightarrow \infty$ assim, o operador está bem definido. Finalmente, para mostrar que o operador é unitário, observamos que $\|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2$ e que $\|\hat{f}_n\|_2 \rightarrow \|\hat{f}\|_2$. Como, pela proposição acima, $\|f_n\|_2 = \|\hat{f}_n\|_2$ concluímos que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ e portanto, o operador é unitário. ■

2.3 Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$

Antes de definir os espaços de Sobolev e apresentar suas propriedades, vamos motiva-lo apresentando a definição de derivada fraca. Na teoria de equações diferenciais parciais é muito importante enfraquecer a noção de derivada para assim estender o espaço de funções nos quais se busca as soluções para o problema. Começamos a falar de derivada fraca motivando com um exemplo simples de cálculo.

Se temos duas funções f e g de classe $C^1(\mathbb{R})$, então vale a fórmula de integral por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Perceba que se uma dessas funções tem suporte compacto, então o termo em que se avalia o produto nos extremos vai ser igual a zero, e então ficamos apenas com uma relação entre duas integrais. De forma mais geral temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.1. Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot \partial^\alpha f(x) dx.$$

Para verificar que vale a proposição acima basta realizar a integração por partes repetidas vezes. A ideia de derivada fraca é motivada pela proposição acima.

Definição 2.3.2. Dadas $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u se para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \cdot \varphi(x) dx.$$

□

Com a definição acima, podemos trabalhar com derivadas fracas de funções que não tem derivada clássica e assim definir os espaços de Sobolev. Para exemplos e mais informações sobre derivadas fracas ver Folland [17] e Brezis [2] Capítulo 8.

Definição 2.3.3. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ para $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$ é definido como

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq k\}$$

onde $D^\alpha f$ é a derivada no sentido fraco. □

Proposição 2.3.4. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach quando munido com a norma

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.9)$$

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Evans [12] página 249, Teorema 2.

Uma classe muito importante de espaços de Sobolev é quando $p = 2$, isso porque nesse caso $W^{k,2}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(f, g) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x) \cdot D^\alpha g(x) dx.$$

Neste caso, denotaremos $W^{k,2} = H^k$. Existe uma definição alternativa para os espaços H^k via transformada de Fourier.

Definição 2.3.5. Definimos o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ como

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \Lambda^s f(x) = ((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi))^V(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi)\|_2. \quad (2.10)$$

□

O interessante dessa definição é que ela faz sentido mesmo para s não inteiro. Nesse trabalho, utilizaremos exaustivamente o espaço $H^1(\mathbb{R}^n)$ com a norma

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_2 + \|\nabla f\|_2. \quad (2.11)$$

É preciso mostrar que essa norma é equivalente as outras duas normas utilizadas para definir o espaço H^1 .

Proposição 2.3.6. O espaço $H^1(\mathbb{R}^n)$ definido com as normas (2.9), (2.10) e (2.11) possuem os mesmos elementos.

Demonstração: Basta provar que as normas são equivalentes. Primeiramente, perceba que $\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|\nabla f\|_2)^2 \leq 2(\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2)$ provando a equivalência das normas 2.9 e 2.11. Por fim, é sabido da teoria de distribuições temperadas (ver Linares e Ponce [24] Capítulo 1) que a propriedade 4 do Teorema 2.2.7 sobre a transformada de Fourier da derivada continua válida para derivadas fracas. Assim, utilizando essa propriedade e a isometria da transformada de Fourier em L^2 notamos que

$$\widehat{\partial_{x_i} f}(\xi) = -2\pi i \xi_i \hat{f}(\xi).$$

Logo

$$\|\nabla f\|_2^2 = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi)\|_2 &\leq (\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4\pi^2 \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi)\|_2 \end{aligned}$$

mostrando a equivalência entre as normas (2.10) e (2.9) e concluindo o resultado. ■

Por fim, enunciaremos algumas propriedades do espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.3.7. 1. O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(x) \overline{\Lambda^s g(x)} dx.$$

2. O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, bem como a classe de Schwartz, são densos em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Se $s < s'$ então $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Para o item 1 basta verificar que as propriedades de produto interno são satisfeitas. Para o item 2, basta notar que $H^1 \subset L^2$ (item 3) e utilizar a Proposição 2.2.6. Finalmente, para o item 3 basta notar que $(1 + |\xi|^2)^s \leq (1 + |\xi|^2)^{s'}$. ■

2.4 Análise Funcional e Análise Harmônica

Durante essa seção, apresentaremos alguns resultados fundamentais de Análise Funcional e Harmônica que serão úteis nas seções seguintes. Diferentemente das seções anteriores, muitas demonstrações serão omitidas por simplicidade. Começamos definindo o conceito de convergência fraca e explorando algumas propriedades fundamentais.

Definição 2.4.1. Sejam X um espaço vetorial normado e X^* o espaço dos funcionais lineares contínuos em X . Dizemos que $x_n \subset X$ converge fracamente para x (denotaremos por $x_n \xrightarrow{w} x$) se para todo $T \in X^*$ temos que $T(x_n) \rightarrow T(x)$. □

Proposição 2.4.2. Seja X um espaço vetorial normado e X^* o espaço dos funcionais lineares contínuos em X . Então, se $x_n \xrightarrow{w} x$ vale que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Teorema 2.4.3. Seja E um espaço de Banach reflexivo e x_n uma sequência limitada em E . Então, existe subsequência $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ em E .

A demonstração dos resultados a seguir podem ser encontradas em [2] Proposição 3.5 e Teorema 3.18 respectivamente. A seguir, apresentamos a desigualdade de Hölder, que será fundamental durante todo o trabalho.

Proposição 2.4.4. (Desigualdade de Hölder) Sejam f, g funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $L^q(\mathbb{R}^n)$ respectivamente, com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $r \in [1, \infty]$ tal que $1/p + 1/q = 1/r$. Então, $fg \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e vale que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: A demonstração do caso $r = 1$ pode ser vista em Folland [17] Teorema 6.2. Se $r > 1$, dividimos em dois casos. Primeiro, considere $1 < p, q < \infty$ e perceba que $1 = \frac{r}{p} + \frac{r}{q}$, logo os expoentes p/r e q/r são conjugados, portanto aplicando a desigualdade do caso $r = 1$ temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r |g|^r dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^q dx \right)^{\frac{r}{q}}$$

No caso de $p = \infty$ temos que $r = q$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r |g|^r dx \leq \|f\|_{\infty}^r \|g\|_q^r.$$

Tirando a raiz r -ésima de ambos os lados concluímos o resultado. ■

Os próximos três resultados serão fundamentais na demonstração das estimativas de Strichartz na próxima seção.

Proposição 2.4.5. Seja $f \in L^p(X)$ onde $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável e $p \in [1, \infty]$ com p' seu expoente conjugado, ou seja, $1 = p^{-1} + p'^{-1}$. Então,

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int_X f(x) \overline{g(x)} dx \right|.$$

Demonstração: Provaremos o caso $1 < p < \infty$. Para demonstração do caso geral ver Folland [17] Teorema 6.13. Pela desigualdade de Hölder, temos que para todo $g \in L^{p'}(X)$ com norma unitária

$$\begin{aligned} \left| \int_X f(x) \overline{g(x)} dx \right| &\leq \int_X |f(x) \overline{g(x)}| dx \\ &\leq \|f\|_p \end{aligned}$$

logo

$$\sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int_X f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \|f\|_p.$$

Por outro lado, considere $g = \frac{f|f|^{p-2}}{\|f\|_p^{p-1}}$ e perceba que $p = p'(p-1)$. Assim, é fácil ver que $\|g\|_{p'} = 1$ e temos que

$$\begin{aligned} \int_X f(x) \overline{g(x)} dx &= \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \int_X |f|^p dx \\ &= \|f\|_p \end{aligned}$$

provando a proposição. ■

Corolário 2.4.6. Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ mensuráveis e $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Se $f \in L^q(Y : L^p(X))$, então

$$\|f\|_{L_Y^q, L_X^p} = \sup_{\|g\|_{L_Y^{q'}, L_X^{p'}}=1} \left| \int_Y \int_X f(x, y) \overline{g(x, y)} dx dy \right|.$$

onde $1 = 1/p + 1/p' = 1/q + 1/q'$.

Demonstração: A demonstração segue as mesmas linhas com a da Proposição 2.4.5. Para mais detalhes sobre dualidade em espaços L^p ver Diestel e Uhl [10] Capítulos 3 e 4. ■

Definição 2.4.7. Seja $0 < \alpha < n$, definimos o potencial de Riesz de ordem α por:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = k_\alpha \star f,$$

onde $k_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$. □

Teorema 2.4.8. (Hardy-Littlewood-Sobolev) Sejam $0 < \alpha < n$ e $1 \leq p, q < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então o potencial de Riesz está bem definido q.t.p e se $p > 1$ então

$$\|I_\alpha f\|_q \lesssim \|f\|_p.$$

Demonstração: Provaremos a boa definição do potencial de Riesz. Para a prova completa do teorema ver Linares e Ponce [24] Teorema 2.6. Começamos dividindo o kernel k_α em $k_\alpha = k_\alpha^1 + k_\alpha^2$ onde $k_\alpha^1(x) = k_\alpha(x)\chi_{|x|\leq 1}$ e $k_\alpha^2 = k_\alpha - k_\alpha^1$. Perceba que como $n - \alpha < n$ a função k_α^1 é integrável. Perceba também que, como $q < \infty$ temos $0 < \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ que implica que $p'(n-\alpha) > n$, logo a função $k_\alpha^2 \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, temos $|I_\alpha f(x)| \leq |k_\alpha^1 \star f(x)| + |k_\alpha^2 \star f(x)|$. Nosso objetivo é mostrar que cada uma dessas integrais é finita q.t.p.

Começamos observando que como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $k_\alpha^2 \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ então a desigualdade de Hölder implica que:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)k_\alpha^2(y)dy \right| \leq \|f\|_p \|k_\alpha^2\|_{p'}$$

mostrando a limitação da segunda integral. Para a primeira integral, mostraremos que $k_\alpha^1 \star f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e portanto é finita q.t.p. Para isso, basta aplicar a Proposição 2.2.5 e concluir que

$$\|k_\alpha^1 \star f(x)\|_p \leq \|k_\alpha^1\|_1 \|f\|_p$$

mostrando portanto a boa definição do potencial de Riesz. ■

Temos também um importante resultado de interpolação, conhecido como Teorema de Riesz Thorin.

Teorema 2.4.9. (Riesz-Thorin)

Sejam $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1, T$ um operador linear contínuo de $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ em $L^{q_0}(\mathbb{R}^n)$ com norma M_0 e de $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ em $L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$ com norma M_1 . Então T é contínuo de $L^{p_\theta}(\mathbb{R}^n)$ em $L^{q_\theta}(\mathbb{R}^n)$ com norma M_θ tal que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Demonstração: Ver Linares e Ponce [24] Teorema 2.1. ■

Enunciaremos agora uma versão da desigualdade de Young para números reais que nos será útil no Capítulo 4.

Lema 2.4.10. Sejam $a, b \geq 0$. Dado $\epsilon > 0$, e $p, q > 0$ expoentes conjugados, ou seja, $1/p + 1/q = 1$, então existe $C(\epsilon) = \frac{1}{q(\epsilon p)^{\frac{q}{p}}}$ tal que

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q.$$

Enunciamos agora uma importante desigualdade que nos será útil no Capítulo 5, conhecida como desigualdade de Hardy.

Proposição 2.4.11. Seja $f \in W^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ e $1 < r < n$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^r dx \geq \left(\frac{n-r}{r} \right)^r \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^r}{|x|^r} dx.$$

Demonstração: Para uma demonstração dessa desigualdade ver Apêndice em Murphy [25].

■

Por fim, enunciamos um importante resultado conhecido como imersão de Sobolev, que será de grande utilidade no decorrer do trabalho.

Teorema 2.4.12. Seja $s \in (0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$ e $\widehat{D^s f} = |\xi|^s \hat{f}$.

1. $s \in (0, \frac{n}{p})$, então $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ é continuamente imerso em $L^r(\mathbb{R}^n)$ com $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ e vale

$$\|f\|_r \leq c \|D^s f\|_p. \quad (2.12)$$

2. Se $s = \frac{n}{2}$ então $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $r \in [2, \infty)$ e

$$\|f\|_r \leq c \|f\|_{H^s}. \quad (2.13)$$

3. No caso $p = 2$, temos $H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \in (0, \frac{n}{2})$ continuamente imerso em $L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $r \in [2, \frac{2n}{n-2s}]$ e

$$\|f\|_r \leq c \|f\|_{H^s}. \quad (2.14)$$

Demonstração: Ver Demengel [9] Proposição 4.18, Brezis [2] Capítulo 9 e Linares e Ponce [24] Teorema 3.3. ■

2.5 Equação linear de Schrödinger e Estimativas de Strichartz

A equação linear de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.15)$$

possui solução, obtida via transformada de Fourier, dada por

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \cdot \hat{u}_0(\xi).$$

que denotaremos, no domínio espacial por

$$u(x, t) = e^{it\Delta} u_0. \quad (2.16)$$

É possível mostrar (ver Linares e Ponce [24] Exemplo 4.1) que a solução dada por (2.16) pode ser escrita como

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}} \star u_0(x). \quad (2.17)$$

Nosso objetivo durante essa seção é apresentar propriedades do grupo unitário de Schrödinger $e^{it\Delta}$.

Proposição 2.5.1. Seja $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $s \geq 0$. Então, para todo $t \geq 0$ temos que

$$\|e^{it\Delta} f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$$

Demonstração: Para a demonstração basta calcular a norma $H^s(\mathbb{R}^n)$ de $e^{it\Delta} f$. De fato, pela definição da norma $H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\|e^{it\Delta} f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^s |\widehat{e^{it\Delta} f}(\xi)|^2 d\xi$$

pela definição de $e^{it\Delta} f$, sabemos que sua transformada de Fourier é

$$\widehat{e^{it\Delta} f}(\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} \cdot \hat{f}(\xi)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} f\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^s |e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} \cdot \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|f\|_{H^s}^2, \end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda linha basicamente utilizamos que $|e^{i \cdot k}| = 1$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$. Finalizamos assim a demonstração da proposição. ■

Proposição 2.5.2. (Desigualdade Dispersiva) Seja $p \geq 2$ e $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\|e^{it\Delta} f\|_p \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p})}} \|f\|_{p'}.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.5.1, vemos que $\|e^{it\Delta} f\|_2 = \|f\|_2$. Considere agora $p = \infty$, então $p' = 1$ e utilizando a fórmula 2.17 notamos que

$$\|e^{it\Delta} f\|_\infty \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{n}{2}}} \|f\|_1.$$

Utilizando o teorema de interpolação de Riesz-Thorin concluímos o resultado. ■

Proposição 2.5.3. O grupo unitário $e^{it\Delta}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $e^{it'\Delta} e^{it\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$.
2. $e^{i0\Delta} = Id$

Demonstração: Basta notar que

$$\begin{aligned} e^{it'\Delta}(e^{it\Delta}f)(x) &= \left(e^{-4\pi^2 it'|\xi|^2} \widehat{e^{it\Delta}f} \right)^\vee(x) \\ &= \left(e^{-4\pi^2 it'|\xi|^2} e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} \hat{f} \right)^\vee(x) \\ &= e^{i(t+t')\Delta}f(x). \end{aligned}$$

■

Finalmente, enunciemos as estimativas de Strichartz que serão utilizadas em grande parte dos resultados que seguem no trabalho.

Definição 2.5.4. Dizemos que um par (p, q) é L^2 admissível se:

- $2 \leq p \leq \infty$
- $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} = \frac{n}{2}$

□

Teorema 2.5.5. (Estimativas de Strichartz) Seja (p, q) um par L^2 admissível e $t \in \mathbb{R}$, então, o operador $e^{it\Delta}$ satisfaz:

1.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{it\Delta}f\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \|f\|_2 \quad (2.18)$$

2.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \quad (2.19)$$

3.

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right\|_2 \leq c \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \quad (2.20)$$

4.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \quad (2.21)$$

onde $1/p + 1/p' = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$ e

$$\begin{cases} 2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2} & n \geq 3, \\ 2 \leq p \leq \infty & n = 2 \end{cases}$$

Demonstração: Para as ideias dessa prova seguimos Linares e Ponce [24] Teorema 4.2. Começamos provando (2.19) e posteriormente mostraremos que (2.19) \implies (2.20), (2.20) \implies (2.18) e (2.19) \implies (2.21). Primeiramente notamos que aplicando a desigualdade de Minkowski (Proposição 2.2.5), obtemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}} \|e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t')\|_p dt'$$

e utilizando a desigualdade dispersiva (Proposição 2.5.2)

$$\|e^{i(t-t')\Delta}g(\cdot, t')\|_p \leq c|t-t'|^{-\frac{n}{2}(1/p'-1/p)}\|g(\cdot, t')\|_{p'}.$$

Tomando $\alpha = 1 - \frac{n}{2}(1/p' - 1/p)$ percebemos que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta}g(\cdot, t')dt' \right\|_p \leq cI_\alpha \|g\|_{p'}(t)$$

desde que $0 < \alpha < 1$. Por isso, os casos $p = 2$, $p = \frac{2n}{n-2}$ ou $p = \infty$ devem ser considerados separadamente. Como tomaremos uma norma L^q no tempo e queremos usar Hardy-Littlewood-Sobolev, queremos que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} - \alpha$, que combinado com a definição de par L^2 admissível nos dá $q^* = q'$. Dessa maneira, aplicando o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev encontramos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta}g(\cdot, t')dt' \right\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}} &\leq c \|I_{1-\alpha}\| \|g\|_{p'}(t) \|q \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \end{aligned}$$

demonstrando (2.19). No caso $p = 2$ temos $q = \infty$ e $q' = 1$. Assim, aplicando Minkowski e utilizando a Proposição 2.5.1 com $s = 0$ concluímos o resultado. Por fim, para os casos extremos $p = \frac{2n}{n-2}$ (caso $n \geq 3$) e $p = \infty$ (caso $n = 2$) ver M.Keel e T.Tao [22].

$$(2.20) \implies (2.18)$$

Note que, utilizando Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\Delta} f(x)g(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(x, t) dt \right) dx$$

e utilizando a desigualdade de Hölder e (2.20)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(x, t) dt \right) dx \right| &\leq \|f\|_2 \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(x, t) dt \right\|_2 \\ &\leq c \|f\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot, t)\|_{p'}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando o Corolário 2.4.6 concluímos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{it\Delta} f\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{\|g\|_{L_t^{q'}, L_x^{p'}}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(x, t) dt \right) dx \right| \\ &\leq c \|f\|_2 \end{aligned}$$

concluindo que (2.20) \implies (2.18). Mostremos agora que (2.19) \implies (2.20). Observando que $\overline{e^{it\Delta}} = e^{-it\Delta}$ escrevemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot, t) dt \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it'\Delta} g(\cdot, t') dt' \right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} g(x, t) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right)} dt dx. \end{aligned}$$

Utilizando Fubini, Hölder e (2.19) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} g(x, t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} \overline{g(\cdot, t')} dt' \right) dt dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot, t)\|_{p'} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} \overline{g(\cdot, t')} dt' \right\|_p dt \\ &\leq \|g\|_{L^{q'}, L^{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_p^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \|g\|_{L^{q'}, L^{p'}}^2 \end{aligned}$$

concluindo o resultado. Finalmente, para mostrar que (2.19) \implies (2.21) basta notar que esta última é direto de (2.19) utilizando a função $\chi_{[0,t]}g(\cdot, t')$. ■

As constantes que aparecem na estimativas de Strichartz dependem da dimensão n e dos parâmetros p, q . Dessa maneira, restringindo p, q a intervalos compactos garantimos um supremo finito para essa constante. No capítulo seguinte definiremos algumas normas envolvendo os pares admissíveis de Strichartz.

2.6 A Equação Elíptica e a desigualdade de Gagliardo Nirenberg

Durante essa seção, seguiremos as ideias em Weinstein [30] e Farah [13] sobre a equação elíptica associada a INLS (1.1). Essa equação elíptica aparece naturalmente quando buscamos soluções estacionárias (*solitons*) para a INLS. De fato, se procuramos solução da INLS na forma $u(x, t) = e^{it}Q(x)$ concluímos que a função Q satisfaz a equação

$$\Delta Q - Q + |x|^{-b}|Q|^{\alpha-1}Q = 0 \quad (2.22)$$

que possui única solução positiva e radial. A solução da equação elíptica acima possui íntima relação com a famosa desigualdade de Gagliardo Nirenberg.

Proposição 2.6.1. Seja $1 + \frac{4-2b}{n} < \alpha < 1 + \frac{4-2b}{n-2}$ e $b < \min(2, N)$. Denote por $\theta = \frac{n(\alpha-1)}{2} + b$, então a desigualdade de Gagliardo Nirenberg

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-b}|u|^{\alpha+1} dx \leq K_{op} \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_2^{\alpha+1-\theta} \quad (2.23)$$

vale com constante K_{op} ótima dada por

$$K_{op} = \left(\frac{\theta}{\alpha + 1 - \theta} \right)^{\frac{2-\theta}{2}} \cdot \frac{\alpha + 1}{\theta \|Q\|_2^{\alpha-1}}$$

em que Q é a única solução positiva radial e decrescente da equação (2.22).

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Farah [13] Teorema 1.2. Sabendo agora que Q é uma solução positiva, radial e decrescente (ver Genoud e Stuart [18] Teorema 2.2) vamos deduzir algumas relações entre as normas de Q .

Proposição 2.6.2. (Identidades de Pohozaev)

A função Q , solução da equação (2.22) satisfaz

$$\|\nabla Q\|_2 = \left(\frac{\theta}{\alpha + 1 - \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \|Q\|_2$$

em que $\theta = \frac{n(\alpha-1)}{2} + b$.

Demonstração: Uma vez que sabemos que a solução Q é positiva, ela satisfaz a equação $\Delta Q - Q + |x|^{-b}Q^\alpha = 0$. Multiplicando a equação, utilizando o decaimento de Q e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \int |x|^{-b}Q^{\alpha+1}dx &= \int Q^2dx - \int Q\Delta Qdx \\ &= \int Q^2dx + \int |\nabla Q|^2dx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Multiplicando agora a equação por $x \cdot \nabla Q$ temos

$$\int (x \cdot \nabla Q)\Delta Qdx - \int (x \cdot \nabla Q)Qdx + \int (x \cdot \nabla Q)|x|^{-b}Q^\alpha dx = 0.$$

Calculando separadamente cada integral e utilizando integração por partes obtemos:

$$\begin{aligned} \int (x \cdot \nabla Q)\Delta Qdx &= \sum_{i,j}^n \int x_i \partial_i Q \partial_j^2 Q dx \\ &= - \sum_{i,j}^n \int \partial_j (x_i \partial_i Q) \partial_j Q dx \\ &= - \int |\nabla Q|^2 dx - \frac{1}{2} \sum_j^n \int \partial_j (|\nabla Q|^2) x_j dx \\ &= \left(\frac{n-2}{2} \right) \int |\nabla Q|^2 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int (x \cdot \nabla Q)Qdx &= - \sum_i^n \int Q \partial_i (x_i Q) dx \\ &= -n \int Q^2 dx - \int (x \cdot \nabla Q)Qdx \end{aligned}$$

logo

$$\int (x \cdot \nabla Q)Qdx = -\frac{n}{2} \int Q^2 dx$$

e por fim,

$$\begin{aligned} \int (x \cdot \nabla Q)|x|^{-b}Q^\alpha dx &= - \sum_i^n \int Q \partial_i (x_i |x|^{-b}Q^\alpha) dx \\ &= -n \int |x|^{-b}Q^{\alpha+1} dx - \sum_i^n \int \alpha Q^\alpha |x|^{-b} x_i \partial_i Q dx + \sum_i^n \int b Q^{\alpha+1} x_i^2 |x|^{-b-2} dx \\ &= -n \int |x|^{-b}Q^{\alpha+1} dx - \alpha \int (x \cdot \nabla Q)|x|^{-b}Q^\alpha dx + b \int |x|^{-b}Q^{\alpha+1} dx \end{aligned}$$

concluindo que

$$\int (x \cdot \nabla Q)|x|^{-b}Q^\alpha dx = - \left(\frac{n-b}{\alpha+1} \right) \int |x|^{-b}Q^{\alpha+1} dx.$$

Portanto,

$$\left(\frac{n-b}{\alpha+1}\right) \int |x|^{-b} Q^{\alpha+1} dx = \frac{n}{2} \int Q^2 dx + \left(\frac{n-2}{2}\right) \int |\nabla Q|^2 dx. \quad (2.25)$$

Juntando as identidades (2.24) e (2.25) concluímos o resultado. ■

Capítulo 3

Boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^n)$

Neste Capítulo trabalharemos apenas nos casos $n = 2$ e $n = 3$ com $\alpha = \frac{5}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$, que serão os casos de interesse no decorrer do trabalho. Para os resultados desse capítulo seguimos as ideias de Guzmán [20] Seção 3.

3.1 Definições e notações básicas

Começamos este Capítulo definindo a noção de boa colocação que utilizaremos para o PVI 1.1.

Definição 3.1.1. Dizemos que um PVI é bem colocado localmente em um espaço de funções X se para todo dado inicial $u_0 \in X$ existe $T > 0$ e $u \in C([0, T], X)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- É solução da equação.
- Unicidade.
- Persistência.
- Dependência contínua com relação aos dados iniciais.

□

A propriedade de persistência, nos diz que a solução da equação permanece no mesmo espaço de funções do dado inicial. A propriedade da dependência contínua com relação aos dados iniciais nos diz que se temos duas soluções referentes a dois dados iniciais "próximos", então essas soluções se mantêm próximas ao longo do tempo de existência. Definiremos agora o que vamos entender como solução da INLS.

Definição 3.1.2. (Princípio de Duhamel)

Dizemos que $u(t)$ satisfaz a INLS com $b = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{2}$, com dado inicial u_0 se $u(t)$ é solução da seguinte equação integral.

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s)ds. \quad (3.1)$$

□

Nosso objetivo final para esse Capítulo é mostrar a existência de uma única função $u(t)$ atrelada ao dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a fórmula de Duhamel e as propriedades de boa colocação para um intervalo de tempo $[0, T]$. Para isso, precisamos recapitular e introduzir algumas definições.

Definição 3.1.3. (Pares L^2 admissíveis)

- Dizemos que (q, r) são L^2 -admissíveis se: $\frac{2}{q} = \frac{N}{2} - \frac{N}{r}$ onde

$$\begin{cases} 2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2} & , N \geq 3 \\ 2 \leq r < \infty & \text{se } N = 2 \\ 2 \leq r \leq \infty & \text{se } N = 1 \end{cases}$$

Notação : $A_0 = \{(q, r) : (q, r) \text{ são pares } L^2\text{-admissíveis}\}$.

- Definimos as seguintes normas: $\|u\|_{S(L^2)} = \sup_{(q,r) \in A_0} \|u\|_{L_t^q L_x^r}$ e também $\|u\|_{S'(L^2)} = \inf_{(q,r) \in A_0} \|u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}$.

□

Com essa definição, podemos escrever as desigualdades de Strichartz úteis para esse capítulo de forma mais concisa. De fato, podemos escrever

•

$$\|e^{it\Delta} f\|_{S(L^2)} \leq c \|f\|_2 \quad (3.2)$$

•

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{S(L^2)} + \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{S(L^2)} \leq \|g\|_{S'(L^2)}. \quad (3.3)$$

Antes de demonstrar o resultado de boa colocação precisaremos de diversos lemas auxiliares.

3.2 Lemas auxiliares

Lema 3.2.1. Sejam $1 < r, r_1, r_2, p_1, p_2 < \infty$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ para $i = 1, 2$. Então,

$$\|\nabla(fg)\|_r \leq c \|\nabla g\|_{p_1} \|f\|_{r_1} + c \|\nabla f\|_{r_2} \|g\|_{p_2}.$$

Demonstração: Começamos notando que pela desigualdade triangular,

$$\|\nabla(fg)\|_r \leq \|(\nabla f)g\|_r + \|(\nabla g)f\|_r$$

e aplicando a desigualdade de Hölder com as triplas (r, r_1, p_1) e (r, r_2, p_2) obtemos

$$\|\nabla(fg)\|_r \leq c \|\nabla g\|_{p_1} \|f\|_{r_1} + c \|\nabla f\|_{r_2} \|g\|_{p_2}$$

concluindo o resultado. ■

Lema 3.2.2. Seja $F(x, z) = |x|^{-\frac{1}{2}} |z|^{\frac{3}{2}} z$ onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{C}$. Então,

$$|F(x, z) - F(x, w)| \lesssim |x|^{-\frac{1}{2}} (|z|^{\frac{3}{2}} + |w|^{\frac{3}{2}}) |z - w|.$$

Demonstração: Ver Guzmán [20] Remark 2.6. ■

Faremos agora uma importante observação que será utilizada no decorrer do trabalho.

Observação 3.2.3. Note que a função $|x|^{-b\gamma}$ nunca é integrável em todo o \mathbb{R}^n . Entretanto, dependendo do expoente essa função pode ser integrável próximo ou longe da origem. De fato, denote B_R a bola de centro na origem e raio R . Então,

$$\int_{B_R} |x|^{-\frac{\gamma}{2}} dx$$

converge se, e somente se, $\gamma < 2n$. Por outro lado,

$$\int_{B_R^c} |x|^{-\frac{\gamma}{2}} dx$$

converge se, e somente se, $\gamma > 2n$.

Apresentaremos a seguir duas proposições estimando a parte não linear da INLS que serão utilizadas na demonstração do Teorema de boa colocação. Durante a demonstração dessas proposições utilizaremos uma abordagem diferente daquela proposta em Guzmán [20]. Neste artigo, Guzmán faz a análise das estimativas dentro e fora da bola unitária, encontrando pares admissíveis independentes para cada caso. A demonstração a seguir separa as estimativas em bolas de raio R e olhamos para uma conta formal justamente no limiar de integrabilidade do termo $|x|^{-\frac{1}{2}}$, conseguindo par admissível que precisa apenas ser levemente distorcido para se adequar as situações dentro e fora da bola. Por fim, escolhemos R de maneira a uniformizar o parâmetro θ em ambas as análises, como veremos a seguir.

Proposição 3.2.4. Seja $n = 3$, $b = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{2}$. Então, valem as seguintes estimativas:

1.

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2, I)} \leq cT^\theta \| \nabla u \|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}} \| v \|_{S(L^2, I)} \quad (3.4)$$

2.

$$\| \nabla (|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{S'(L^2, I)} \leq cT^\theta \| \nabla u \|_{S(L^2, I)}^{\frac{5}{2}}. \quad (3.5)$$

Demonstração: Começamos provando (3.4). Dividindo a estimativa dentro e fora da bola de raio R , onde R será determinado posteriormente temos:

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2, I)} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2(B_R^c), I)} + \| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2(B_R), I)}$$

e denotaremos por B_1 e B_2 , respectivamente, o primeiro e segundo termo da desigualdade acima. Começamos fazendo uma conta formal, considerando o limite de convergência de $|x|^{-\frac{\gamma}{2}}$.

Considere (q_0, r_0) um par L^2 -admissível a ser determinado posteriormente. Utilizando a desigualdade de Hölder, temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_x^{r_0'}} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \cdot \| u \|_{L_x^{\frac{3r_1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \cdot \| v \|_{L_x^{r_0}}$$

onde $\frac{1}{r'_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0}$. Como r_0 e r'_0 são conjugados concluímos que $1 - \frac{2}{r_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{r_1}$. Utilizando a imersão de Sobolev (Teorema 2.4.12) com $s = 1$, temos $1 = \frac{3}{r_0} - \frac{3}{r_1(\frac{3}{2})}$ e

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_x^{r'_0}} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \cdot \| \nabla u \|_{L_x^{r_0}}^{\frac{3}{2}} \cdot \| v \|_{L_x^{r_0}}.$$

Tomando $\gamma = 2n = 6$, e pelas relações acima, concluímos que $r_0 = \frac{21}{8}$. É claro que não poderíamos tomar $\gamma = 6$, pois assim $|x|^{-3}$ não seria integrável nem dentro nem fora da bola de raio R . A ideia é tomar γ ligeiramente maior ou menor do que 6 o que resultará em integrabilidade fora e dentro da bola. Primeiramente, como queremos que r_0 dê origem a um par L^2 -admissível, precisamos conferir que de fato r_0 atende a tais condições. Gostaríamos ainda que r_0 estivesse longe dos extremos de admissibilidade pois isso será importante no decorrer do argumento. Existem três restrições que r_0 deve cumprir. Primeiramente, pela imersão de Sobolev precisamos que $r_0 < n$. Isso é verdade, pois $\frac{21}{8} < 3$. Por fim, para a admissibilidade, note que $2 < r_0 < 6$. Mais do que isso, existe $\delta > 0$ tal que $r_0 + \delta$ e $r_0 - \delta$ ainda satisfazem as condições acima. Finalmente, vamos estimar B_1 e B_2 .

Para estimar B_1 , escolhemos $\gamma = \frac{6}{1-2\epsilon}$, com $\epsilon > 0$ pequeno a ser escolhido posteriormente. Repetindo o argumento da conta formal, temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{B_R^C}^{r'_0}} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma} \cdot \| u \|_{L_x^{r_{1\epsilon}(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} \cdot \| v \|_{L_x^{r_0}} \quad (3.6)$$

com os expoentes satisfazendo $\frac{1}{r'_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{r_{1\epsilon}} + \frac{1}{r_0}$. Substituindo o valor escolhido para γ encontramos $\frac{1}{r_{1\epsilon}} = \frac{1}{r_1} + \frac{\epsilon}{3}$, onde r_1 é o mesmo utilizado na conta formal acima. Perceba que para epsilon pequeno, $r_{1\epsilon}$ está bem próximo de r_1 . Uma vez que o r_1 da conta formal foi escolhido com o objetivo de utilizar a imersão de Sobolev com $s = 1$ e r_0 , faremos o mesmo com $r_{1\epsilon}$ obtendo um $r_{0\epsilon}$ satisfazendo $1 = \frac{3}{r_{0\epsilon}} - \frac{6}{3r_{1\epsilon}}$. Pelas relações entre r_1 , $r_{1\epsilon}$ e r_0 obtemos que $\frac{1}{r_{0\epsilon}} = \frac{1}{r_0} + \frac{2\epsilon}{9}$. Como observado anteriormente, tomando ϵ pequeno o suficiente, $r_{0\epsilon}$ satisfaz as condições de admissibilidade e logo da origem ao par $(q_{0\epsilon}, r_{0\epsilon})$ que é L^2 -admissível. Usando imersão de Sobolev em (3.6) obtemos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{B_R^C}^{r'_0}} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma} \cdot \| \nabla u \|_{L_x^{r_{0\epsilon}}}^{\frac{3}{2}} \cdot \| v \|_{L_x^{r_0}}.$$

Para calcular o termo $\| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma}$ utilizando coordenadas polares em \mathbb{R}^3 obtemos

$$\begin{aligned} \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma} &= \left(c \int_R^\infty r^{-\frac{\gamma}{2}+2} dr \right)^{\frac{1-2\epsilon}{6}} \\ &= CR^{-\epsilon}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, a estimativa espacial fica

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{B_R^C}^{r'_0}} \leq CR^{-\epsilon} \cdot \| \nabla u \|_{L_x^{r_{0\epsilon}}}^{\frac{3}{2}} \cdot \| v \|_{L_x^{r_0}}.$$

Combinado a estimativa acima com a norma temporal, temos

$$\begin{aligned} B_1 &\leq CR^{-\epsilon} \left(\int_0^T \left(\| \nabla u \|_{L_x^{r_{0\epsilon}}}^{\frac{3}{2}} \cdot \| v \|_{L_x^{r_0}} \right)^{q'_0} dt \right)^{\frac{1}{q'_0}} \\ &\leq CR^{-\epsilon} T^{\theta_+} \| \nabla u \|_{L_I^{q_{0\epsilon}} L_x^{r_{0\epsilon}}}^{\frac{3}{2}} \| v \|_{L_I^{q_0} L_x^{p_0}} \end{aligned}$$

com os expoentes satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{1}{q_0} = \theta_+ + \frac{3}{2q_0\epsilon} + \frac{1}{q_0} \\ \frac{1}{q_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_0}\right) \\ \frac{1}{q_0\epsilon} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_0\epsilon}\right) \end{cases}$$

Manipulando as relações acima, encontramos

$$\theta_+ = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_0}\right) \frac{9}{4} + \frac{\epsilon}{2}$$

e queremos $\theta_+ > 0$. Para isso, basta que $r_0 < \frac{42}{13}$ o que é válido pois vimos que $r_0 = \frac{21}{8}$. Finalmente, escolhendo $R = T^{\frac{1}{2}}$ conseguimos a estimativa

$$B_1 \leq CT^\theta \|\nabla u\|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}} \cdot \|v\|_{S(L^2, I)}. \quad (3.7)$$

Lembrando do expoente crítico de Sobolev $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2-b}{\alpha-1}$ para a INLS é possível mostrar que $\theta = \frac{(\alpha-1)(1-s_c)}{2}$. No caso da estimativa do termo B_2 , escolhemos $\gamma = \frac{6}{1+2\epsilon}$ e as contas ficam idênticas apenas substituindo ϵ por $-\epsilon$. Conseguimos portanto,

$$B_2 \leq CR^\epsilon T^{\theta_-} \|\nabla u\|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}} \cdot \|v\|_{S(L^2, I)}$$

com $\theta_- = \theta - \frac{\epsilon}{2}$. Escolhendo $R = T^{\frac{1}{2}}$ conseguimos a estimativa do item 1

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2, I)} \leq CT^\theta \|\nabla u\|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{S(L^2, I)}. \quad (3.8)$$

Vamos agora provar (3.5). Começamos com algumas observações.

- Como $\partial_i |x|^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} x_i |x|^{-\frac{5}{2}}$, concluímos que $|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}})| = C|x|^{-\frac{5}{2}}$.
- Escrevendo $|u|^{\frac{3}{2}} = u^{\frac{3}{4}} \cdot \bar{u}^{\frac{3}{4}}$ podemos mostrar que $|\nabla(|u|^{\frac{3}{2}} u)| \leq C|u|^{\frac{3}{2}} |\nabla u|$.

Prosseguindo de forma análoga à prova de (3.4), começamos com uma conta formal. Seja (q_0, r_0) um par L^2 -admissível, a parte espacial da estimativa fica

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u)\|_{L_x^{r'_0}} \leq \|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}) |u|^{\frac{3}{2}} u\|_{L_x^{r'_0}} + \| |x|^{-\frac{1}{2}} \nabla(|u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{L_x^{r'_0}}$$

e utilizando a desigualdade de Hölder e a observação acima

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u)\|_{L_x^{r'_0}} \lesssim \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \|\nabla u\|_{L_x^{r_0}} \|u\|_{L_x^{r_1(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} + \| |x|^{-\frac{3}{2}} \|_{L_x^d} \|u\|_{L_x^{\frac{5}{2}\epsilon}}^{\frac{5}{2}}. \quad (3.9)$$

Utilizando imersão de Sobolev nos termos $\|u\|_{L_x^{r_1(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}}$ e $\|u\|_{L_x^{\frac{5}{2}\epsilon}}^{\frac{5}{2}}$ em (3.9) obtemos $\|u\|_{L_x^{r_1(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} \lesssim \|\nabla u\|_{L_x^{r_0}}^{\frac{3}{2}}$ e analogamente $\|u\|_{L_x^{\frac{5}{2}\epsilon}}^{\frac{5}{2}} \lesssim \|\nabla u\|_{L_x^{r_0}}^{\frac{5}{2}}$ e portanto, (3.9) se torna

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u)\|_{L_x^{r'_0}} \lesssim \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \|\nabla u\|_{L_x^{r_0}}^{\frac{5}{2}} + \| |x|^{-\frac{3}{2}} \|_{L_x^d} \|\nabla u\|_{L_x^{r_0}}^{\frac{5}{2}}$$

onde os expoentes satisfazem

$$\begin{cases} \frac{5}{2}e = \frac{3}{2}r_1 \\ 1 = \frac{3}{r_0} - \frac{3}{r_1(\frac{3}{2})} \\ \frac{1}{r'_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r'_0} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \end{cases}$$

Para a conta formal, assumimos o caso limite $\gamma = 6$ e já vimos na demonstração de (3.4) que $r_0 = \frac{21}{8}$ forma uma par (q_0, r_0) L^2 -admissível com uma certa folga (longe dos extremos de admissibilidade). Pelas relações dos expoentes acima notamos que ao assumir $\gamma = 6$ naturalmente encontramos $d = 2$ que é também o caso limite de integrabilidade de $|x|^{-\frac{3}{2}}$. Vamos agora, separar a análise fora e dentro da bola de raio R dividindo a estimativa em duas partes B_1 e B_2 respectivamente. Analogamente a prova de (3.4), no caso B_R^C escolhemos $\gamma = \frac{6}{1-2\epsilon}$ e para garantir que $\| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma} = \| |x|^{-\frac{3}{2}} \|_{L_{B_R^C}^d}$ escolhemos $d = \frac{6}{3-2\epsilon}$. Procedendo igual na demonstração do item 1 obtemos

$$\| \nabla (|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{L_{B_R^C}^{r'_0}} \lesssim R^{-\epsilon} \| \nabla u \|_{L_x^{r_0}} \| u \|_{L_x^{r_1\epsilon(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} + R^{-\epsilon} \| u \|_{L_x^{e_\epsilon(\frac{5}{2})}}^{\frac{5}{2}}$$

onde os expoentes satisfazem

$$\begin{cases} \frac{1}{r'_0} = (\frac{1}{6} - \frac{\epsilon}{3}) + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{1\epsilon}} \\ \frac{1}{r'_0} = (\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{3}) + \frac{1}{e_\epsilon} \end{cases}$$

que nos permite concluir que $\frac{1}{r_{1\epsilon}} = \frac{1}{r_1} + \frac{\epsilon}{n}$ e $\frac{1}{e_\epsilon} = \frac{1}{e} + \frac{\epsilon}{n}$. Aplicando agora a imersão de Sobolev com $\frac{3}{2}r_{1\epsilon}$ e $\frac{5}{2}e_\epsilon$ temos

$$\| \nabla (|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{L_{B_R^C}^{r'_0}} \lesssim R^{-\epsilon} \| \nabla u \|_{L_x^{r_0}} \| \nabla u \|_{L_x^{r_{0\epsilon}}}^{\frac{3}{2}} + R^{-\epsilon} \| \nabla u \|_{L_x^{r_{0\epsilon 2}}}^{\frac{5}{2}}$$

em que

$$\begin{cases} 1 = \frac{3}{r_{0\epsilon}} - \frac{3}{r_{1\epsilon}(\frac{3}{2})} \\ 1 = \frac{3}{r_{0\epsilon 2}} - \frac{3}{\frac{5}{2}e_\epsilon} \end{cases}$$

Pelas relações entre r_1 e $r_{1\epsilon}$, e e e_ϵ conclui-se que $\frac{1}{r_{0\epsilon}} = \frac{1}{r_0} + \frac{2\epsilon}{9}$ e $\frac{1}{r_{0\epsilon 2}} = \frac{1}{r_0} + \frac{2\epsilon}{15}$. Escolhendo ϵ suficientemente pequeno, temos $r_{0\epsilon}$ e $r_{0\epsilon 2}$ dentro do intervalo de admissibilidade. Incluindo a parte temporal como fizemos na demonstração de (3.4) obtemos

$$B_1 \lesssim R^{-\epsilon} T^{\theta_+} \| \nabla u \|_{L_I^{q_0} L_x^{r_0}} \| \nabla u \|_{L_I^{q_0\epsilon} L_x^{r_{0\epsilon}}}^{\frac{3}{2}} + R^{-\epsilon} T^{\theta_+^2} \| \nabla u \|_{L_I^{q_0\epsilon 2} L_x^{r_{0\epsilon 2}}}^{\frac{5}{2}}.$$

onde

$$\begin{cases} \frac{1}{q'_0} = \theta_+ + \frac{3}{2q_0\epsilon} + \frac{1}{q_0} \\ \frac{1}{q'_0} = \theta_+^2 + \frac{5}{2q_0\epsilon 2} \end{cases}$$

Gostaríamos que $\theta_+ = \theta_+^2$. Para isso é suficiente que $\frac{5}{2q_0\epsilon 2} = \frac{3}{2q_0\epsilon} + \frac{1}{q_0}$ o que é verdadeiro e pode ser verificado pelas relações entre os expoentes obtidos durante a prova. Novamente tomando $R = T^{\frac{1}{2}}$ ficamos com

$$B_1 \lesssim T^\theta \| \nabla u \|_{S(L^2, I)}^{\frac{5}{2}}$$

e trocando ϵ por $-\epsilon$ no argumento concluímos a mesma estimativa dentro da bola B_R finalizando a prova da proposição. ■

Como no prosseguir do trabalho precisaremos de boa colocação em dimensão 2 e 3, precisamos de uma estimativa da não linearidade similar para a dimensão 2.

Proposição 3.2.5. Seja $n = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $s = 1$ e $\alpha = \frac{5}{2}$. Então, valem as seguintes estimativas:

1.

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2, I)} \leq c T^{\theta_1} \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L_I^\infty L_x^2} \quad (3.10)$$

2.

$$\| \nabla (|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{S'(L^2, I)} \leq c T^{\theta_1} \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^{\frac{5}{2}} \quad (3.11)$$

lembrando que o par $(\infty, 2)$ é L^2 -admissível.

Demonstração: A demonstração é muito similar ao que foi feito na Proposição 3.2.4. Entretanto, o mesmo r_0 utilizado não funciona para esse caso. Fazendo um argumento similar para descobrir o r_0 adequado encontramos $r_0 = 7$. Para demonstra (3.10) começamos novamente com uma conta formal:

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{r'_0}'} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L^\gamma} \|u\|_{L_x^{r_1(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L_x^2}$$

com $\frac{1}{r'_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2}$. Tomando $\gamma = \frac{n}{b} = 4$ encontramos $r_1 = \frac{28}{3}$ e portanto $r_1(\frac{3}{2}) = 14$, o que nos permite utilizar imersão de Sobolev nesse termo. Pelo Teorema 2.4.12 item 2, vemos que no caso $s = \frac{n}{2}$ temos $\|f\|_{L^r} \leq c \|f\|_{H^s}$ para $r \in [2, \infty)$. Dividindo a estimativa em dentro e fora da bola de raio R , começamos com a estimativa fora da bola (B_R^C). Tomando $\gamma = \frac{4}{1-2\epsilon}$ e seguindo o procedimento da conta formal obtemos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{B_R^C}'} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L^\gamma} \|u\|_{L_x^{r_1(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L_x^2}$$

onde $\frac{1}{r_{1\epsilon}} = \frac{1}{r_1} + \frac{\epsilon}{2}$. Tomando ϵ pequeno garantimos $r_{1\epsilon} \geq 2$ possibilitando aplicar a imersão de Sobolev. Obtemos portanto

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{B_R^C}'} \leq c R^{-\epsilon} \|u\|_{H_x^1}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L_x^2}$$

e tomando a parte temporal concluímos que

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_I^{q'_0} L_{B_R^C}'} \leq c R^{-\epsilon} T^{\frac{1}{q'_0}} \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L_I^\infty L_x^2}.$$

Para a estimativa em B_R as contas são idênticas, trocando ϵ por $-\epsilon$. Tomando $R = 1$ concluímos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(L^2, I)} \leq c T^{\theta_1} \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L_I^\infty L_x^2}$$

onde $\theta_1 = \frac{1}{q'_0} = \frac{9}{14}$. Para a demonstração de (3.11), tomamos novamente $r_0 = 7$ e novamente por uma conta formal concluímos que

$$\| \nabla (|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{L_{r'_0}'} \leq c \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \| \nabla u \|_{L_x^2} \|u\|_{L_x^{r_1(\frac{3}{2})}}^{\frac{3}{2}} + c \| |x|^{\frac{3}{2}} \|_{L_x^d} \|u\|_{L_x^{\frac{5}{2}e}}^{\frac{5}{2}}$$

onde

$$\begin{cases} \frac{1}{r'_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r'_0} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \end{cases}$$

Tomando os limites de integração, ou seja, $\gamma = 4$ e $d = \frac{4}{3}$ obtemos $r_1 = e = \frac{28}{3}$. Assim, $\frac{3}{2}r_1 = 14$ e $\frac{5}{2}e = \frac{70}{3}$ possibilitando (com folga) o uso da imersão de Sobolev. Finalmente, para as análises dentro e fora da bola de raio R , de forma análoga ao que já foi feito anteriormente, tomamos $\gamma = \frac{4}{1 \pm 2\epsilon}$ e $d = \frac{4}{3 \pm 2\epsilon}$ e escolhemos ϵ pequeno o suficiente de maneira que podemos utilizar a imersão de Sobolev com os expoentes $\frac{3}{2}r_{1\epsilon}$ e $\frac{5}{2}e_\epsilon$. Desta maneira, obtemos para a estimativa fora da bola

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{L^r_{B^c_R}} \leq cR^{-\epsilon} \|\nabla u\|_{L^2_x} \|u\|_{H^1_x}^{\frac{3}{2}} + cR^{-\epsilon} \|u\|_{H^1_x}^{\frac{5}{2}}$$

e analogamente, a mesma estimativa com R^ϵ para a região dentro da bola. Tomando $R = 1$, notando que $\|\nabla u\|_{L^2_x} \leq \|u\|_{H^1_x}$ e tomando a norma temporal obtemos

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{S'(L^2, I)} \leq cT^{\theta_1} \|u\|_{L^\infty_I H^1_x}^{\frac{5}{2}}$$

com $\theta_1 = \frac{1}{q'_0}$, finalizando a demonstração de (3.11). ■

Com essas estimativas, conseguimos enunciar e provar o resultado principal deste Capítulo, o teorema de boa colocação local em H^1 . A técnica utilizada na demonstração será o teorema do ponto fixo de Banach, que irá garantir a existência de uma única solução para o operador de Duhamel (3.1) em um espaço adequado.

3.3 Boa colocação local em $H^1(\mathbb{R}^n)$

Teorema 3.3.1. (Teorema de boa colocação local)

Considere o PVI

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (3.12)$$

com $n = 2$ e 3 . Seja $I = [0, T]$ e considere o espaço

$$X = C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^n)) \cap (\cup_{(q,r) \in A_0} L^q([0, T] : H^{1,r}(\mathbb{R}^n))).$$

Então, existe $T = T(\|u_0\|_{H^1}, n, \alpha) > 0$ e única solução para (3.12) com $u \in X$. Mais ainda, vale a dependência contínua com relação aos dados iniciais.

Demonstração: Começamos definindo um $S(a, T) = \{u \in X : \|u\|_{S(L^2, I)} + \|\nabla u\|_{S(L^2, I)} \leq a\}$ onde $a > 0$ e $T > 0$ serão escolhidos posteriormente. Como o objetivo é utilizar o Teorema do ponto fixo de Banach, precisamos mostrar que o espaço $S(a, T) \subset X$ é completo com a métrica $d_T(u, v) = \|u - v\|_{S(L^2, I)}$. Para isso, utilizaremos o Teorema 2.4.3. Como o espaço X é completo, por ser interseção de espaços completos, basta mostrar que $S(a, T)$ é fechado. Tomemos então a sequência u_n em $S(a, T)$ com $d_T(u_n, u) \rightarrow 0$. Pela definição dos espaços X e $S(a, T)$ como $u_n \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é fácil notar que $u_n(t)$ é uniformemente limitada em $H^1(\mathbb{R}^n)$ para quase todo $t \in [0, T]$. De fato, $(\infty, 2)$ é L^2 -admissível e pela definição de $S(a, T)$ $\|u_n\|_{L^\infty_I L^2_x} + \|u_n\|_{L^\infty_I L^2_x} \leq a$, logo $\|u_n\|_{L^\infty_I H^1_x} \leq a$. Portanto, para cada n temos no máximo, um conjunto de medida nula em que $\|u_n(t)\|_{H^1_x}$ não

é limitada. Tomando a união desses conjuntos concluímos que temos no máximo um conjunto de medida nula em que $u_n(t)$ não é uniformemente limitada em $H^1(\mathbb{R}^n)$. Como $H^1(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach reflexivo, $u_n(t) \xrightarrow{w} v(t)$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|v(t)\|_{H^1} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t)\|_{H^1} \leq a$. Mas, por hipótese, $d_T(u_n, u) \rightarrow 0$, logo pela admissibilidade de $(\infty, 2)$ temos que $u_n(t) \rightarrow u(t)$ em L^2 para quase todo $t \in [0, T]$. Mas, se $u_n(t) \xrightarrow{w} v(t)$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$ então, $u_n(t) \xrightarrow{w} v(t)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e pela unicidade do limite $u(t) = v(t)$ em quase todo ponto e ainda $\|u(t)\|_{H^1} \leq a$, logo $u \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^n))$, mas precisamos ainda provar que $u \in S(a, T)$. Note que pela definição de $S(a, T)$ temos que $\|u_n\|_{L_t^q L_x^r} + \|\nabla u_n\|_{L_t^q L_x^r} \leq a$ para todo (q, r) par L^2 -admissível, portanto, $\|u_n(t)\|_{H^{1,r}}$ é limitado em quase todo ponto. Como $H^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo temos que $u_n(t) \xrightarrow{w} v(t)$ em $H^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ e ainda vale que $\|v(t)\|_{H^{1,r}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t)\|_{H^{1,r}}$. Daí, para $q < \infty$ (o caso $q = \infty$ já foi tratado acima) note que pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned} \int_0^T \|v(t)\|_{H^{1,r}}^q dt &\leq \int_0^T \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t)\|_{H^{1,r}}^q dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(t)\|_{H^{1,r}}^q dt \end{aligned}$$

concluindo que $\|v(t)\|_{L_t^q H_x^{1,r}} \leq a$ e $v \in L^q([0 : T] : H^{1,r}(\mathbb{R}^n))$ para todo par admissível.

Por outro lado, como $d_T(u_n, u) \rightarrow 0$ temos que $u_n \rightarrow u$ em $L_t^q L_x^r$ para todo par admissível. Em particular, $u_n(t) \rightarrow u(t)$ em L_x^r em quase todo ponto. Novamente, pela unicidade do limite, $u(t) = v(t) \in S(a, T)$ provando a completude de $S(a, T)$.

Feito isso, definimos o operador de Duhamel

$$G(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 + i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(x, u(s)) dx$$

em que $F(x, u) = |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u$ e queremos mostrar que temos apenas um ponto fixo em $S(a, T)$. Para utilizarmos o Teorema 2.1.3 precisamos mostrar primeiro que $u \in S(a, T) \implies G(u) \in S(a, T)$. Computando as normas $\|G(u)\|_{S(L^2, I)}$ e $\|\nabla G(u)\|_{S(L^2, I)}$ utilizando Strichartz obtemos:

$$\begin{cases} \|G(u)\|_{S(L^2, I)} \leq c\|u_0\|_{L^2} + c\|F(x, u)\|_{S'(L^2, I)} \\ \|\nabla G(u)\|_{S(L^2, I)} \leq c\|\nabla u_0\|_{L^2} + c\|\nabla F(x, u)\|_{S'(L^2, I)}. \end{cases}$$

Utilizando as Proposições 3.2.4 e 3.2.5 junto com a definição de $S(a, T)$ independente do caso $n = 2$ ou $n = 3$ conseguimos

$$\begin{cases} \|F(x, u)\|_{S'(L^2, I)} \leq cT^\theta \|\nabla u\|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}} \|u\|_{S(L^2, I)} \leq cT^\theta a^{\frac{5}{2}} \\ \|\nabla F(x, u)\|_{S'(L^2, I)} \leq cT^\theta \|\nabla u\|_{S(L^2, I)}^{\frac{5}{2}} \leq cT^\theta a^{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Com as estimativas acima, notamos que

$$\|G(u)\|_{S(L^2, I)} + \|\nabla G(u)\|_{S(L^2, I)} \leq c\|u_0\|_{H^1} + 2cT^\theta a^{\frac{5}{2}}$$

e gostaríamos que

$$\|G(u)\|_{S(L^2, I)} + \|\nabla G(u)\|_{S(L^2, I)} \leq a.$$

Escolhendo $a = 2c\|u_0\|_{H^1}$ e $T > 0$ tal que $ca^{\frac{3}{2}} T^\theta = \frac{1}{8}$ conseguimos que $G(u) \in S(a, T)$. É importante notar que a escolha de a nos garante que $S(a, T)$ não é vazio, pois a função

$\phi(x, t) = e^{it\Delta}u_0$ está em $S(a, T)$. Feito isso, basta mostrar que o mapa G é uma contração. Para isso, utilizaremos as estimativas (3.4), (3.10) o Lema 3.2.2 e as estimativas de Strichartz. De fato, computando $d_T(G(u), G(v))$ obtemos

$$\begin{aligned} d_T(G(u), G(v)) &= \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(F(x, u) - F(x, v))ds \right\|_{S(L^2, I)} \\ &\leq c \|F(x, u) - F(x, v)\|_{S'(L^2, I)} \\ &\leq c \left(\| |x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}|u - v| \|_{S'(L^2, I)} + \| |x|^{-\frac{1}{2}}|v|^{\frac{3}{2}}|u - v| \|_{S'(L^2, I)} \right) \\ &\leq cT^\theta (\|\nabla u\|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}} + \|\nabla v\|_{S(L^2, I)}^{\frac{3}{2}}) \|u - v\|_{S(L^2, I)} \\ &\leq 2cT^\theta a^{\frac{3}{2}} d_T(u, v) \\ &< \frac{1}{2} d_T(u, v) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é devido a escolha de a e T . Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, concluímos que G associado ao dado inicial $u_0 \in H^1$ possui apenas um ponto fixo, concluindo a existência e unicidade em $S(a, T)$. Finalmente, provaremos uma dependência contínua dos dados iniciais no sentido de que se temos u_0 e v_0 dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^n)$ com $\|u_0 - v_0\|_{H^1} < \epsilon$, então as soluções associadas $u(t)$ e $v(t)$ se mantém próximas na métrica $d_T(u, v) = \|u - v\|_{S(L^2, I)}$. De fato, tome a e T sendo os valores mínimos entre os obtidos no Teorema de boa colocação para os dados u_0 e v_0 . Então,

$$\begin{aligned} d_T(u, v) &\leq \|e^{it\Delta}(u_0 - v_0)\|_{S(L^2, I)} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(F(x, u) - F(x, v))ds \right\|_{S(L^2, I)} \\ &\leq c\|u_0 - v_0\|_{H^1} + \frac{1}{2}d_T(u, v), \end{aligned}$$

e portanto,

$$d_T(u, v) \leq 2c\epsilon,$$

finalizando assim a prova do teorema. Perceba que provamos aqui uma dependência contínua mais fraca do que em H^1 . Para uma demonstração mais precisa da dependência contínua em H^1 ver Campos, Correia e Farah [5] Teorema 1.1. ■

Uma observação importante de ser feita sobre o teorema de boa colocação é que o tempo T encontrado depende do inverso da norma H^1 do dado inicial. Como veremos no capítulo seguinte, uma limitação uniforme na norma H^1 da solução garante solução global, visto que podemos colar soluções usando de forma iterativa o teorema de boa colocação.

Capítulo 4

Blow-up em tempo finito.

4.1 Preliminares

Durante este capítulo seguiremos as ideias de Cardoso e Farah [6]. Diremos que uma solução da INLS tem *Blow-up* em tempo finito quando o tempo máximo de existência da solução é finito. A princípio essa definição não explica o nome *Blow-up* (explosão) do fenômeno. A relação entre a finitude do tempo de existência e a explosão da solução é dada pelo seguinte lema.

Lema 4.1.1. (Alternativa de *Blow-up*)

Seja $u(t)$ solução do PVI (3.12) e seja $T^* > 0$ o tempo máximo de existência da solução. Então, se $T^* < \infty$ temos que a norma H^1 da solução $u(t)$ explode em tempo finito.

Demonstração: Suponha, por absurdo que existe $M > 0$ tal que $\sup_{t \in [0, T^*]} \|u(t)\|_{H^1} = M$. Então, pelo Teorema 3.3.1 dado qualquer $t_0 \in [0, T^*)$ conseguimos resolver a INLS a partir do tempo t_0 pelo menos no intervalo $[t_0, t_0 + T_0]$ onde T_0 satisfaz $2^{\frac{3}{2}} c^\alpha \|u(t_0)\|_{H^1}^{\frac{3}{2}} T_0^\theta = \frac{1}{8}$. Pela limitação uniforme da norma H^1 , note que $T_0^\theta \geq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}} c^\alpha M} > 0$. Assim, tomando t_0 suficientemente próximo de T^* temos uma contradição, visto que pelo argumento acima conseguimos resolver a INLS até um tempo superior a T^* , contrariando sua maximalidade. Assim, concluímos que $\lim_{t \rightarrow T^*} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$. Pela conservação de massa, concluímos que $\|\nabla u(t)\|_2$ explode em tempo finito. ■

Lembrando do scaling para a INLS, dada uma solução $u(x, t)$ sabemos que $u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{2-b}{\alpha-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução da INLS. Diremos que estamos no caso L^2 -crítico quando a norma L^2 da solução original, coincide com a norma da solução escalonada. Perceba que para isso acontecer, precisamos que $\alpha - 1 = \frac{4-2b}{n}$. Note que, tomando α e b como no teorema de boa colocação ($\alpha = 5/2$ e $b = 1/2$) e $n = 2$ temos o caso L^2 -crítico. Fixaremos esses parâmetros durante os resultados desse capítulo.

As ideias para o resultado de *Blow-up* que provaremos tem como inspirações os trabalhos de Glassey [19] e Ogawa e Tsutsumi [27] para a NLS clássica. Glassey provou *Blow-up* para soluções L^2 -crítica com energia negativa no espaço virial $u(x, t) \in H^1(\mathbb{R}^n)$: $\| |x|u \|_2 < \infty$. Já Ogawa e Tsutsumi, provaram *Blow-up* para soluções radiais dispensando a condição de variância finita do espaço virial. Posteriormente, Dinh [11] estendeu os mesmo resultados de Glassey e Ogawa e Tsutsumi para a INLS. O grande avanço de trabalho de Cardoso e Farah [6] que iremos explorar foi retirar a hipótese de radialidade da solução, visto que o potencial $|x|^{-b}$ irá fornecer um decaimento suficiente longe da origem para concluir o resultado. Antes de enunciar e provar o resultado principal desse capítulo precisamos de um lema auxiliar.

Lema 4.1.2. Seja $n = 2$, $b = \frac{1}{2}$ e ϕ uma função real e positiva. Se $\phi^{\frac{1}{2-b}} = \phi^{\frac{4}{7}} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ então $\forall f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ temos:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi |f|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim \left(\|\phi^{\frac{4}{7}} f\|_2 + \|\nabla(\phi^{\frac{4}{7}}) f\|_2 + \|\phi^{\frac{4}{7}} \nabla(f)\|_2 \right)^{\frac{7}{4}} \|f\|_2^{\frac{7}{4}} \quad (4.1)$$

Demonstração: Para a demonstração do Lema vamos utilizar a desigualdade de Hölder combinada com a Imersão de Sobolev (2.4.12) item 2. De fato, começamos notando que o par $(p, q) = (\frac{8}{7}, 8)$ é conjugado, ou seja, $1/p + 1/q = 1$. Assim, reescrevendo $\phi |f|^{\frac{7}{2}} = \phi |f|^{\frac{7}{4}} |f|^{\frac{7}{4}}$ e aplicando a desigualdade de Hölder com o par (p, q) escolhido concluímos que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi |f|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^2} \phi^8 |f|^{14} dx \right)^{\frac{1}{8}} \cdot \|f\|_2^{\frac{7}{4}}.$$

Percebendo agora que $\frac{1}{8} = \frac{1}{14} \cdot \frac{7}{4}$ podemos reescrever o primeiro termo da desigualdade acima como:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \phi^8 |f|^{14} dx \right)^{\frac{1}{8}} = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} (|f| \phi^{\frac{4}{7}})^{14} dx \right)^{\frac{1}{14}} \right]^{\frac{7}{4}}.$$

Observando que $r = 14 > 2$ e da hipótese de que $f \in H^1$ e $\phi^{\frac{4}{7}} \in W^{1,\infty}$, podemos utilizar a imersão de Sobolev para concluir que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi |f|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim \|(|f| \phi^{\frac{4}{7}})\|_{H^1}^{\frac{7}{4}} \cdot \|f\|_2^{\frac{7}{4}}.$$

Finalmente, lembrando que $\|f\|_{H^1} = \|f\|_2 + \|\nabla f\|_2$ concluímos (4.1). ■

Lema 4.1.3. (Identidade virial)

Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função não negativa e $u(x, t)$ solução do PVI (3.12) com $n = 2$. Defina $\phi_R(x) = R^2 \phi(\frac{x}{R})$ e $Z_R(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_R(x) |u(x, t)|^2 dx$. Então

$$\begin{aligned} z_R''(t) &= 4Re \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_j u(t) \partial_k \overline{u(t)} \partial_{jk}^2 \phi_R dx - \int_{\mathbb{R}^2} |u(t)|^2 \Delta^2 \phi_R dx \\ &\quad - \frac{6}{7} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} \Delta \phi_R dx + \frac{8}{7} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}) \nabla \phi_R |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \end{aligned}$$

e se ϕ é radial,

$$\begin{aligned} z_R''(t) &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial_r \phi_R}{r} |\nabla u(t)|^2 dx + 4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial_r^2 \phi_R}{r^2} - \frac{\partial_r \phi_R}{r^3} \right) |x \cdot \nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} |u(t)|^2 \Delta^2 \phi_R dx + \frac{6}{7} \int_{\mathbb{R}^2} \left[-\partial_r^2 \phi_R - \left(\frac{5}{3} \right) \frac{\partial_r \phi_R}{r} \right] \\ &\quad \times |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $r = |x|$.

Demonstração: Para a demonstração da primeira identidade, basta fazer os cálculos diretamente utilizando sempre que $u(t)$ é solução da INLS (ver Farah e Gúzman [14] Proposição 7.2). Para obter (4.2) começamos notando que

$$\begin{cases} \partial_j = \frac{x_j}{r} \partial_r \\ \partial_{kj}^2 = \left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_k x_j}{r^3} \right) \partial_r + \frac{x_k x_j}{r^2} \partial_r^2 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^2 \partial_j u(t) \overline{\partial_k u(t)} \partial_{jk}^2 \phi_R &= \sum_{j,k=1}^2 \partial_j u(t) \overline{\partial_k u(t)} \left[\left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_k x_j}{r^3} \right) \partial_r \phi_R + \frac{x_k x_j}{r^2} \partial_r^2 \phi_R \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial_j u(t) \overline{\partial_k u(t)}}{r} \delta_{jk} \partial_r \phi_R + \left(\frac{\partial_r^2 \phi_R}{r^2} - \frac{\partial_r \phi_R}{r^3} \right) \sum_{j,k=1}^2 \partial_j u(t) x_j \overline{\partial_k u(t)} x_k \\ &= \frac{\partial_r \phi_R}{r} |\nabla u(t)|^2 + \left(\frac{\partial_r^2 \phi_R}{r^2} - \frac{\partial_r \phi_R}{r^3} \right) |x \cdot \nabla u(t)|^2 \end{aligned}$$

fornecendo as primeiras duas integrais de (4.2). Ainda temos que

$$\Delta \phi_R = \sum_{j=1}^2 \partial_j^2 \phi_R = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \partial_r \phi_R + \sum_{j=1}^2 \frac{x_j^2}{r^2} \partial_r^2 \phi_R = \frac{1}{r} \partial_r \phi_R + \partial_r^2 \phi_R$$

e

$$\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}) \cdot \nabla \phi_R = -\frac{1}{2} |x|^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial_r \phi_R}{r}.$$

Juntando essas duas identidades obtemos a última integral de (4.2) demonstrando o lema. ■

4.2 Resultado de *Blow-up*

Antes de enunciar e provar o resultado de *Blow-up*, vamos dar uma noção do argumento a ser utilizada na prova. Assumindo que a solução é global, a identidade virial (4.2) acima sempre faz sentido. Como veremos a seguir, $z_R''(t) = E(u_0) + K$, mas claramente, $z_R(t)$ é sempre positiva. Se conseguirmos mostrar que $z_R''(t) < C < 0$ para todo o tempo t obtemos uma contradição, visto que integrando duas vezes a desigualdade acima concluímos que $z_R(t)$ está sempre abaixo de uma parábola $\frac{C}{2}t^2 + C_1 t + C_2$ com coeficiente $C < 0$ que claramente fica negativa para t suficientemente grande. Assim, concluímos que $u(t)$ não pode ser solução global. Pelo lema de alternativa de *Blow-up*, concluímos que a norma do gradiente de $u(t)$ explode em tempo finito.

Lema 4.2.1. Seja $u(t)$ solução do PVI (3.12) com $n = 2$ e z_R definida como no Lema 4.1.3. Então,

$$z_R''(t) = 16E(u_0) + K_1 + K_2 + K_3$$

onde

$$K_1 = -4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r} \right) |\nabla u(t)|^2 dx - 4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial_r \phi_R}{r^3} - \frac{\partial_r^2 \phi_R}{r^2} \right) |x \cdot \nabla u(t)|^2 dx,$$

$$K_2 = \frac{4}{7} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{3}{2} (2 - \partial_r^2 \phi_R) + \frac{5}{2} \left(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r} \right) \right] |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx$$

e

$$K_3 = - \int_{\mathbb{R}^2} |u(t)|^2 \Delta^2 \phi_R dx.$$

Demonstração: Lembrando da conservação da energia, temos que

$$16E(u_0) = 8 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(t)|^2 dx - \frac{32}{7} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{7}{2}} dx.$$

Somando a expressão acima com K_1, K_2, K_3 obtemos o resultado. ■

Finalmente conseguimos enunciar e provar o principal resultado desse capítulo.

Teorema 4.2.2. (*Blow-up*) Seja $u(x, t)$ solução do PVI (3.12) com $n = 2$ e $E(u_0) < 0$. Então, temos *Blow-up* em tempo finito.

Demonstração: Primeiramente, tomamos $z_R(t)$ definido como no Lema 4.1.3 e, notamos que, supondo a existência global de $u(x, t)$, a definição de $z_R(t)$ faz sentido e $z_R(t) \leq R^2 \|\phi\|_\infty \|u_0\|_2$. Como mencionado anteriormente, nosso objetivo é obter uma contradição supondo que $u(t)$ é uma solução global, mostrando que $z_R''(t) < C < 0$. Como a energia de u_0 é negativa por hipótese, pelo Lema 4.2.1, basta mostrar que $K_1 + K_2 + K_3 < |8E(u_0)|$. Para isso, precisamos definir a função ϕ_R que iremos utilizar. Como desejamos mostrar que $K_1 + K_2 + K_3 < |8E(u_0)|$, temos algumas dicas sobre o comportamento dessa função ϕ_R . Primeiramente, inspirado no trabalho de Glassey [19], queremos que ϕ_R se comporte como $|x|^2$ dentro de uma bola e esperamos que algum decaimento seja suficiente para compensar o comportamento longe da origem. Inspirado no trabalho de Ogawa e Tsutsumi [27], definimos

$$v(r) = \begin{cases} 2r, & 0 \leq r \leq 1 \\ 2r - 2(r-1)^k, & 1 < r \leq 1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}} \\ \text{suave e } v' < 0, & 1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}} < r < 2 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$

onde $k > 1$ será escolhido posteriormente. Por fim, defina $\phi(r) = \int_0^r v(s) ds$ e $\phi_R(x) = R^2 \phi(\frac{x}{R})$. Pela definição de ϕ_R temos que $\partial_r \phi_R(r) = Rv(\frac{r}{R})$ e $\partial_r^2 \phi_R(r) = v'(\frac{r}{R})$. Começamos mostrando que para todo $r = |x|$ vale

$$\partial_r \phi_R(r) - r \partial_r^2 \phi_R(r) \geq 0. \quad (4.3)$$

1. $0 \leq r \leq R$:

Pela definição de v nesta região, $\partial_r \phi_R(r) = 2r$ e $\partial_r^2 \phi_R(r) = 2$ e portanto (4.3) vale 0 nesta região.

2. $r \geq 2R$:

Como $v(\frac{r}{R}) = 0$ nesta região, trivialmente temos que (4.3) = 0.

3. $R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}) < r < 2R$:

Como v é sempre positiva e nessa região $v'(\frac{r}{R}) < 0$ vale (4.3).

4. $R < r \leq R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}})$:

Nessa região, $\partial_r \phi_R(r) = 2r - 2R(\frac{r}{R} - 1)^k$ e $r \partial_r^2 \phi_R(r) = 2r - 2rk(\frac{r}{R} - 1)^{k-1}$ e daí

$$\partial_r \phi_R(r) - r \partial_r^2 \phi_R(r) = 2 \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{k-1} [2rk - 2r + 2]$$

que é maior ou igual a zero devido ao intervalo em que r se encontra e $k > 1$.

Feita essa observação, podemos começar a estimar os termos da identidade virial. Com a identidade (4.3) que acabamos de provar e observando que $|x \cdot \nabla u(t)|^2 \geq 0$ concluímos que

$$\begin{aligned} K_1 &= -4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r} \right) |\nabla u(t)|^2 dx - 4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial_r \phi_R}{r^3} - \frac{\partial_r^2 \phi_R}{r^2} \right) |x \cdot \nabla u(t)|^2 dx \\ &\leq -4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r} \right) |\nabla u(t)|^2 dx \end{aligned}$$

e como $\frac{\partial_r \phi_R}{r} = 2$ na região $0 < r < R$,

$$K_1 \leq - \int_{|x|>R} \Phi_{1,R} |\nabla u(t)|^2 dx \quad (4.4)$$

onde $\Phi_{1,R} = 4(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r})$. Para estimar K_2 começamos notando que para $0 \leq r \leq R$ temos $\partial_r \phi_R(r) = 2r$ e $\partial_r^2 \phi_R(r) = 2$ e portanto

$$K_2 = \int_{|x|>R} \Phi_{2,R} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx$$

onde $\Phi_{2,R} = \frac{4}{7} [\frac{3}{2}(2 - \partial_r^2 \phi_R) + \frac{5}{2}(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r})]$. Pela definição de ϕ_R , concluímos que $\partial_r \phi_R \leq 2r$ e $\partial_r^2 \phi_R \leq 2$ para todo $r = |x|$, e então $\Phi_{1,R}$ e $\Phi_{2,R}$ são positivas e radiais. Como a função $|x|^{-\frac{1}{2}}$ é decrescente, temos

$$K_2 \leq \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{2,R} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx. \quad (4.5)$$

A ideia é utilizar o Lema 4.1.2 em (4.5) a fim de obter melhor estimativa para K_2 . Entretanto, precisamos primeiro garantir que $\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Pela definição de $\Phi_{2,R}$ perceba que esse termo depende de v e v' que são contínuas e não nulas no compacto $|x| \leq 2$, sendo assim limitadas. Portanto, $\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}$ é limitado. Precisamos então estimar apenas $\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})$.

1. $r \leq R$ ou $r \geq 2R$:

Nessa região, os termos $2 - \partial_r^2 \phi_R$ e $2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r}$ são constantes e portanto $\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}) = 0$.

2. $R \leq r \leq R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}})$:

Lembrando que para uma função radial $\nabla f = \frac{x}{r} \partial_r f$, e substituindo os termos $2 - \partial_r^2 \phi_R$ e $2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r}$ na região analisada temos que

$$\begin{aligned} |\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})| &= |\partial_r \Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}| \\ &= \left| \partial_r \left[\left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{\frac{4(k-1)}{7}} \left(\frac{4}{7} [3k + 5k \left(1 - \frac{R}{r} \right)] \right)^{\frac{4}{7}} \right] \right| \end{aligned}$$

Perceba que nesta região $(\frac{4}{7}[3k + 5k(1 - \frac{R}{r})]) \geq \frac{12k}{7}$. Denotando esse termo por $I(r)$ temos

$$\begin{aligned} |\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})| &\leq C \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{\frac{4(k-1)}{7}-1} \frac{1}{R} + \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{\frac{4(k-1)}{7}} I(r)^{\frac{4}{7}-1} \partial_r I(r) \\ &\lesssim \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{\frac{4(k-1)}{7}-1} \frac{1}{R} + \frac{R}{r^2}. \end{aligned}$$

Na região analisada, $\frac{R}{r^2} \leq \frac{1}{R}$, e caso o expoente $\frac{4(k-1)}{7} - 1$ seja positivo, ou seja, $k > \frac{11}{4}$ o termo $(\frac{r}{R} - 1)^{\frac{4(k-1)}{7}-1}$ é limitado. E portanto,

$$|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})| \lesssim \frac{1}{R}$$

nesta região.

3. $R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}) < r < 2R$:

Lembrando da definição de $\Phi_{2,R}$ e das relações entre v e as derivadas de ϕ_R temos que

$$\Phi_{2,R} = \frac{4}{7} \left[\frac{3}{2} \left(2 - v' \left(\frac{r}{R} \right) \right) + \frac{5}{2} \left(2 - \frac{R}{r} v \left(\frac{r}{R} \right) \right) \right].$$

Como nesta região o segundo termo é sempre positivo e $v' < 0$ temos que

$$\Phi_{2,R} \geq \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{12}{7}$$

e, portanto, $\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}-1}$ é limitado nesta região. Logo,

$$\begin{aligned} |\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})| &= |\partial_r \Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}| \\ &= \left| \Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}-1} \partial_r \Phi_{2,R} \right| \\ &\lesssim \left(\frac{1}{R} |v'' \left(\frac{r}{R} \right)| + \frac{R}{r^2} |v \left(\frac{r}{R} \right)| + \frac{1}{r} |v' \left(\frac{r}{R} \right)| \right). \end{aligned}$$

Como v é escolhida para ser suave e tem suporte compacto, os termos $|v|, |v'|, |v''|$ são limitados. Note também, que na região analisada $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{R(1+(\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}})}$, e portanto,

$$|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})| \lesssim \frac{1}{R},$$

mostrando que $\Phi_{2,R} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Dessa maneira, podemos utilizar o Lema 4.1.2 para estimar K_2 .

Partindo da identidade (4.5) e utilizando o Lema 4.1.2, obtemos

$$K_2 \lesssim \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \left(\|\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} u(t)\|_2 + \|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}) u(t)\|_2 + \|\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} \nabla(u(t))\|_2 \right)^{\frac{7}{4}} \|u(t)\|_2^{\frac{7}{4}}.$$

Utilizando o fato sobre números positivos que $(a+b)^\alpha \lesssim a^\alpha + b^\alpha$ para $\alpha > 1$, que $\Phi_{2,R} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ e a conservação da massa temos

$$\begin{aligned} K_2 &\lesssim \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \left(\|\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} u(t)\|_2 \right)^{\frac{7}{4}} \|u_0\|_2^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \left(\|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}) u(t)\|_2 + \|\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} \nabla(u(t))\|_2 \right)^{\frac{7}{4}} \|u(t)\|_2^{\frac{7}{4}} \\ &\lesssim \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \|u_0\|_2^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} \left(\|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}) u(t)\|_2 + \|\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} \nabla(u(t))\|_2 \right)^{\frac{7}{4}} \|u(t)\|_2^{\frac{7}{4}}. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.4.10 com $p = \frac{8}{7}$, $q = 8$ e $\epsilon > 0$ a ser escolhido temos

$$K_2 \lesssim \frac{\|u_0\|_2^{\frac{7}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} + \epsilon \left(\|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}}) u(t)\|_2 + \|\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}} \nabla(u(t))\|_2 \right)^2 + \frac{\|u_0\|_2^{14}}{R^4 \epsilon^7}.$$

Como mostramos anteriormente, $|\nabla(\Phi_{2,R}^{\frac{4}{7}})| \lesssim \frac{1}{R}$. Novamente, utilizando que $(a+b)^2 \lesssim a^2 + b^2$ e a estimativa acima concluímos que

$$K_2 \lesssim \frac{\|u_0\|_2^{\frac{7}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|u_0\|_2^{14}}{R^4 \epsilon^7} + \frac{\epsilon}{R^2} \|u_0\|_2^2 + \epsilon \int_{|x|>R} \Phi_{2,R}^{\frac{8}{7}} |\nabla u(t)|^2 dx. \quad (4.6)$$

Por fim, estimamos o termo K_3 . Para isso, note que como $\phi_R(x) = R^2\phi(\frac{x}{R})$, temos que $\partial_{ijkl}^4\phi_R(x) = \frac{1}{R^2}\partial_{ijkl}^4\phi(\frac{x}{R})$. Assim, como a função ϕ definida possui derivadas uniformemente limitadas de qualquer ordem concluímos que $\|\Delta^2\phi_R\|_\infty \lesssim \frac{1}{R^2}$. Dessa maneira, $K_3 \lesssim \frac{\|u_0\|_2^2}{R^2}$. Juntando essa estimativa com (4.4) e (4.6), temos

$$\begin{aligned} z_R''(t) &\leq 8E(u_0) + \int_{|x|>R} \left(c\epsilon\Phi_{2,R}^{\frac{8}{7}} - \Phi_{1,R} \right) |\nabla u(t)|^2 dx + c\frac{\epsilon}{R^2}\|u_0\|_2^2 \\ &\quad + c\frac{\|u_0\|_2^{14}}{R^4\epsilon^7} + c\frac{\|u_0\|_2^{\frac{7}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para concluir o resultado, começaremos mostrando que existe $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente de maneira que $\left(c\epsilon\Phi_{2,R}^{\frac{8}{7}} - \Phi_{1,R} \right) \leq 0$ para todo $|x| > R$. Feito isso, escolheremos R suficientemente grande de maneira que os outros termos somados fiquem menores que $|4E(u_0)|$ concluindo assim que $z_R''(t) \leq 4E(u_0) < 0$.

1. $R < r < R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}})$

Usando a definição da função ϕ_R nesta região temos

$$\begin{aligned} \left(c\epsilon\Phi_{2,R}^{\frac{8}{7}} - \Phi_{1,R} \right) &= c\epsilon \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{\frac{8(k-1)}{7}} \left(\frac{8}{7} \left[\frac{3k}{2} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \right] \right)^{\frac{8}{7}} - \frac{8R}{r} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^k \\ &= \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^k \left[c\epsilon \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^{\frac{k-8}{7}} \left(\frac{8}{7} \left[\frac{3k}{2} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \right] \right)^{\frac{8}{7}} - \frac{8R}{r} \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left[c\epsilon \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{k-8}{7(k-1)}} \left(\frac{8}{7} \left[\frac{3k}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right] \right)^{\frac{8}{7}} - \frac{8}{1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}} \right] \end{aligned}$$

e perceba que se $k > 8$ então $\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{k-8}{7(k-1)}} \leq 1$, $\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k-1}} \leq 1$ e $\frac{8}{1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}} \geq 4$. Assim,

$$\left(c\epsilon\Phi_{2,R}^{\frac{8}{7}} - \Phi_{1,R} \right) \leq \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left[c\epsilon \left(\frac{12k}{7} + \frac{20}{7} \right)^{\frac{8}{7}} - 4 \right]$$

sendo possível encontrar ϵ pequeno o suficiente de maneira que

$$\left(c\epsilon\Phi_{2,R}^{\frac{8}{7}} - \Phi_{1,R} \right) \leq 0.$$

2. $r > R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}})$

Começamos observando que a função v definida no problema atinge seu máximo em $r = 1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}$. Dessa maneira, a função $v(\frac{r}{R})$ atinge seu máximo em $R(1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}})$, e portanto, nessa região vale que

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r \phi_R(r)}{r} &= \frac{R}{r} v\left(\frac{r}{R}\right) \\ &\leq \frac{1}{1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}} v\left(1 + \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right) \\ &= 2 - \frac{2\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{1 + \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\partial_r^2 \phi_R(r)| &= |v'(\frac{r}{R})| \\ &\leq \|v'\|_\infty. \end{aligned}$$

Perceba também, que como $v \geq 0$ e pela segunda estimativa acima podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi_{2,R} &= \frac{4}{7} \left[\frac{3}{2}(2 - \partial_r^2 \phi_R) + \frac{5}{2}(2 - \frac{\partial_r \phi_R}{r}) \right] \\ &\lesssim \frac{3}{2}(2 + \|v'\|_\infty) + 2 \cdot \frac{5}{2} \\ &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a primeira das estimativas acima, concluí-se que

$$\begin{aligned} \Phi_{1,R} &= 4 \left(2 - \frac{R}{r} v(\frac{r}{R}) \right) \\ &\geq \frac{8(\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}}{1 + (\frac{1}{k})^{\frac{1}{k-1}}}. \end{aligned}$$

Sendo assim, fica claro que conseguimos ϵ suficientemente pequeno de maneira que $c\epsilon\Phi_{2,R} - \Phi_{1,R} \leq 0$.

Perceba que inicialmente escolhemos $k > 8$ e depois $\epsilon > 0$ tal que (4.7) se torna

$$z''(t) \leq 8E(u_0) + c\frac{\epsilon}{R^2}\|u_0\|_2^2 + c\frac{\|u_0\|_2^{14}}{R^4\epsilon^7} + c\frac{\|u_0\|_2^{\frac{7}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}}$$

e agora escolhendo R suficientemente grande conseguimos garantir que $z''(t) \leq 4E(u_0)$ concluindo o resultado de *Blow-up* em tempo finito. Uma observação importante é porque o mesmo raciocínio não funciona no caso da NLS ($b = 0$). Fazendo o argumento com parâmetros α, b mais gerais (ver Cardoso e Farah [6]) encontramos $k > \frac{4}{b}$, e portanto, para o caso $b = 0$ não conseguimos k suficiente para concluir o resultado. Por isso, para o resultado de *Blow-up* em tempo finito para a NLS não se pode aplicar a mesma técnica para retirar a condição de radialidade. ■

Capítulo 5

Scattering em $H^1(\mathbb{R}^3)$

5.1 Preliminares

Durante esse capítulo iremos explorar o fenômeno de *Scattering* (espalhamento) para o PVI (3.12) no caso $n = 3$. Seguiremos as ideias expostas em Campos e Cardoso [4]. Começamos definindo este fenômeno e revisando um pouco da literatura sobre o assunto.

Definição 5.1.1. Seja $u(t)$ uma solução para o PVI (3.12) com $n = 3$. Dizemos que $u(t)$, uma solução global, se espalha para frente no tempo em $H^1(\mathbb{R}^3)$ se existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - e^{it\Delta} u_+\|_{H^1} = 0$$

ou seja, a solução $u(t)$ se aproxima de uma solução da equação linear de Schrödinger. \square

Lembrando do *scaling* para a INLS, sabemos que dada uma solução $u(t)$ a função escalonada $u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{2-b}{\alpha-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ também é solução. Lembrando do índice crítico de Sobolev, $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2-b}{\alpha-1}$ note que nos valores $n = 3, \alpha = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$ que iremos utilizar neste capítulo temos $s_c = \frac{1}{2}$. Quando $s_c \in (0, 1)$ dizemos que estamos no caso intercrítico.

O objetivo do presente capítulo é provar o seguinte teorema.

Teorema 5.1.2. (*Scattering*)

Seja $u(t)$ solução do PVI (3.12) com $n = 3$ e dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo

$$M(u_0)E(u_0) < M(Q)E(Q)$$

e

$$\|u_0\|_2 \|\nabla u_0\|_2 < \|Q\|_2 \|\nabla Q\|_2$$

onde Q é a solução da equação da equação elítica (2.22) associada com os parâmetros $n = 3, b = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{5}{2}$. Então, ocorre o *Scattering*.

Scattering em $H^1(\mathbb{R}^3)$ com as condições acima foi originalmente provado no caso de dado radial por Farah e Guzmán [15] usando o método de concentração e compacidade. No decorrer deste capítulo iremos utilizar um outro método para provar *Scattering* adaptando um critério originalmente proposto por Tao [29] com uma identidade virial do tipo Morawetz, cujo caso radial pode ser visto em Campos [3]. Para provar o caso não radial seguiremos as ideias de Campos e Cardoso [4] que estende as ideias presentes em Murphy [26] utilizando o decaimento de $|x|^{-b}$ assim como fizemos no resultado de *Blow-up* no capítulo anterior.

Começamos definindo a noção de um par \dot{H}^s admissível, assim como fizemos para pares L^2 admissíveis.

Definição 5.1.3. Seja $s \in (-1, 1)$. Dizemos que um par (q, r) é \dot{H}^s admissível se

$$\frac{2}{q} = \frac{3}{2} - \frac{3}{r} - s$$

onde $(\frac{6}{3-2s})^+ \leq r \leq (6)^-$. Definiremos para $s \in (0, 1)$ os espaços $A_s = \{(q, r) : \dot{H}^s\text{-admissível}\}$ e $A_{-s} = \{(q, r) : \dot{H}^{-s}\text{-admissível}\}$ e as normas $\|u\|_{S(\dot{H}^s, I)} = \sup_{(q,r) \in A_s} \|u\|_{L_I^q L_x^r}$ e $\|u\|_{S'(\dot{H}^{-s}, I)} = \inf_{(q,r) \in A_{-s}} \|u\|_{L_I^{q'} L_x^{r'}}$. \square

Vamos sumarizar agora as estimativas de Strichartz que utilizaremos no decorrer deste capítulo. Para uma referência ver Kato [21].

$$\|e^{it\Delta} f\|_{S(\dot{H}^s)} \leq c \|f\|_{\dot{H}^s} \quad (5.1)$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{S(\dot{H}^s)} + \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{S(\dot{H}^s)} \leq \|g\|_{S'(\dot{H}^{-s})} \quad (5.2)$$

$$\left\| \int_a^b e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{S(\dot{H}^s)} + \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t') dt' \right\|_{S(\dot{H}^s)} \leq \|g\|_{S'(\dot{H}^{-s}, [a, b])} \quad (5.3)$$

onde vale $s = 0$ em (5.1) e (5.2).

Assim como fizemos no Capítulo 3, precisamos de estimativas para a parte não linear da equação. Entretanto, como temos o objetivo de provar primeiramente um resultado de boa colocação global não desejamos o aparecimento do termo dependente de T .

Lema 5.1.4. Existe θ positivo e suficientemente pequeno tal que valem as seguintes estimativas:

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_I^\infty L_x^r} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{5}{2}} \text{ com } \frac{12}{17} < r < \frac{12}{7} \quad (5.4)$$

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{S'(\dot{H}^{-\frac{1}{2}}, I)} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, I)}^{\frac{3}{2}-\theta} \|v\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, I)} \quad (5.5)$$

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{S'(L^2, I)} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, I)}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u\|_{S(L^2, I)} \quad (5.6)$$

e

$$\| \nabla (|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u) \|_{S'(L^2, I)} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, I)}^{\frac{3}{2}-\theta} \| \nabla u \|_{S(L^2, I)}. \quad (5.7)$$

Demonstração: A demonstração do lema acima é similar a demonstração da Proposição 3.2.4. Para demonstrar (5.4), dividiremos a análise dentro e fora de uma bola B_R de raio R centrada na origem. Começamos com uma conta formal a fim de descobrir as restrições em r . Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_x^r} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \|u\|_{L_x^{\frac{5}{2}r_1}}^{\frac{5}{2}}$$

e gostaríamos de utilizar imersão de Sobolev no último termo. Vamos tomar $\gamma = 6$ como o limite de integração do termo $|x|^{-\frac{1}{2}}$. Como vamos realizar uma pequena perturbação em γ para o primeiro termo ser integrável (dentro/fora da bola), queremos que $\frac{5}{2}r_1 \in (2, 6)$. Pela relação de Hölder, $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{6}$ e, portanto, $\frac{12}{17} < r < \frac{12}{7}$ como enunciado no lema. Fazendo agora análise fora da bola, tomamos r no intervalo acima e $\gamma = \frac{6}{1-2\epsilon}$ com $\epsilon > 0$ a ser escolhido temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_{B_R^C}^r} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma} \| u \|_{L^{\frac{5}{2}r_1\epsilon}}$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{1-2\epsilon}{6} + \frac{1}{r_1\epsilon}$ e portanto, $\frac{1}{r_1\epsilon} = \frac{1}{r_1} + \frac{\epsilon}{3}$. Escolhendo $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente, $\frac{5}{2}r_1\epsilon \in (2, 6)$ podendo assim aplicar imersão de Sobolev. Já vimos na demonstração da Proposição 3.2.4 que para $\gamma = \frac{6}{1-2\epsilon}$ temos $\| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{B_R^C}^\gamma} = cR^{-\epsilon}$. Utilizando a imersão de Sobolev (2.14) com $s = 1$ temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_{B_R^C}^r} \leq cR^{-\epsilon} \| u \|_{H_x^1}$$

e analogamente, trocando ϵ por $-\epsilon$ temos a estimativa dentro da bola

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_{B_R}^r} \leq cR^\epsilon \| u \|_{H_x^1}.$$

Finalmente, escolhendo $R = 1$ e tomando a norma temporal temos (5.4). Para mostrar (5.5), começamos novamente com uma conta formal. Seja $(\tilde{a}, \tilde{r}) \in A_{-\frac{1}{2}}$ e $(\hat{a}, \hat{r}) \in A_{\frac{1}{2}}$ a serem definidos.

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{\tilde{r}}^{\tilde{a}'}} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_x^\gamma} \| u \|_{L_x^{r_1\theta}} \| u \|_{L_x^{r_2(\frac{3}{2}-\theta)}}^{\frac{3}{2}-\theta} \| v \|_{L_x^{\hat{r}}}$$

Queremos usar a imersão de Sobolev na norma $L^{\theta r_1}$ e queremos que $r_2(\frac{3}{2} - \theta) = \hat{r}$. Como na realidade iremos perturbar γ a fim de integrar o termo $|x|^{-\frac{1}{2}}$ iremos seguir a conta formal considerando esse termo uma constante. Utilizando a imersão de Sobolev e tomando a norma temporal temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{\tilde{r}}^{\tilde{a}'}} \lesssim \| u \|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \| u \|_{L_I^{a_1(\frac{3}{2}-\theta)} L_x^{\hat{r}}}^{\frac{3}{2}-\theta} \| v \|_{L_I^{\hat{r}} L_x^{\hat{r}}}$$

e queremos que $\hat{a} = a_1(\frac{3}{2} - \theta)$. Logo pela relação de Hölder, $\frac{1}{\hat{a}'} = \frac{5-\theta}{\hat{a}}$. Utilizando as relações de admissibilidade de (\hat{a}, \hat{r}) e (\tilde{a}, \tilde{r}) e a relação acima encontramos $\hat{r} = \frac{21-6\theta}{5-2\theta}$. Precisamos verificar agora que existe $\theta > 0$ tal que \hat{r} esteja nos intervalos de admissibilidade. Note que como \hat{r} deve formar pares tanto $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$, quanto $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ admissíveis, é necessário e suficiente que $3 < \hat{r} < 6$. Ambas as restrições são atendidas se $\theta < \frac{3}{2}$. Estamos prontos agora para provar (5.5), separando a análise dentro e fora da bola unitária. Começando dentro da bola, e utilizando \hat{r} encontrado acima com $\theta < \frac{3}{2}$ temos por Hölder

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_B^{\tilde{a}'}} \leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_B^\gamma} \| u \|_{L_x^{r_1\theta}}^\theta \| u \|_{L_x^{r_2(\frac{3}{2}-\theta)}}^{\frac{3}{2}-\theta} \| v \|_{L_x^{\hat{r}}}$$

e como na conta formal, tomamos $r_2(\frac{3}{2} - \theta) = \hat{r}$. Os expoentes satisfazem

$$\frac{1}{\tilde{r}'} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{r_1} + \frac{\frac{3}{2} - \theta}{\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{r_1} - \frac{\frac{7}{2} - \theta}{\hat{r}}.$$

Note que, para $\| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_B^\gamma} < \infty$ precisamos que $\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{6}$, ou seja,

$$1 - \frac{1}{r_1} - \frac{7 - 2\theta}{2\hat{r}} > \frac{1}{6}$$

e substituindo $\hat{r} = \frac{21-6\theta}{5-2\theta}$ note que $\frac{7-2\theta}{2\hat{r}} = \frac{5}{6} - \frac{\theta}{3}$ resultando em $\theta r_1 > 3$. Como queremos utilizar a imersão de Sobolev nesse termo, podemos tomar $\theta r_1 = 6$ e pela imersão de Sobolev e a integrabilidade do primeiro termo a estimativa fica

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_B^{\hat{r}'}} \lesssim \|u\|_{H_x^1}^\theta \|u\|_{L_x^{\hat{r}}}^{\frac{3}{2}-\theta} \|v\|_{L_x^{\hat{r}}}.$$

No caso da estimativa fora da bola, para o termo $\| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{BC}^\gamma}$ ser finito é necessário que $\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{6}$, ou seja, $\theta r_1 < 3$. É importante observar, que em ambos os casos estamos utilizando o mesmo parâmetro θ . O que muda da análise dentro e fora da bola são apenas γ e r_1 . Tomando então, $r_1 \theta = 2$ e lembrando que $\|u\|_{L_x^2} \leq \|u\|_{H_x^1}$ temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_{BC}^{\hat{r}'}} \lesssim \|u\|_{H_x^1}^\theta \|u\|_{L_x^{\hat{r}}}^{\frac{3}{2}-\theta} \|v\|_{L_x^{\hat{r}}}.$$

e portanto, vale a estimativa em todo o espaço \mathbb{R}^3 . Tomando agora a norma temporal e lembrando que escolhemos os pares (\tilde{a}, \hat{r}) e (\hat{a}, \hat{r}) de maneira que $\frac{1}{\tilde{a}'} = \frac{\frac{5}{2}-\theta}{\hat{a}}$ temos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} v \|_{L_I^{\tilde{a}'} L_x^{\hat{r}'}} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{L_I^{\hat{a}} L_x^{\hat{r}}}^{\frac{3}{2}-\theta} \|v\|_{L_I^{\hat{a}} L_x^{\hat{r}}}.$$

Como $(\tilde{a}, \hat{r}) \in A_{-\frac{1}{2}}$ e $(\hat{a}, \hat{r}) \in A_{\frac{1}{2}}$ provamos (5.5). Para mostrar (5.6) utilizaremos o mesmo expoente \hat{r} da estimativa anterior e tomemos $(\hat{q}, \hat{r}) \in A_0$ par L^2 -admissível. A mesma estimativa para a parte espacial de (5.5) nos dá

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_x^{\hat{r}'}} \lesssim \|u\|_{H_x^1}^\theta \|u\|_{L_x^{\hat{r}}}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u\|_{L_x^{\hat{r}}}.$$

Tomando a norma temporal e utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_I^{\hat{q}'} L_x^{\hat{r}'}} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{L_I^{a_1(\frac{3}{2}-\theta)} L_x^{\hat{r}}}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u\|_{L_I^{\hat{q}} L_x^{\hat{r}}}.$$

com a_1 satisfazendo $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\hat{q}} = \frac{1}{\hat{q}'}$. Afiramos que $(\frac{3}{2} - \theta)a_1 = \hat{a}$ onde $(\hat{a}, \hat{r}) \in A_{\frac{1}{2}}$. De fato, utilizando a condição de Hölder acima e a relação de admissibilidade do par (\hat{q}, \hat{r}) encontramos $\frac{1}{a_1} = \frac{3}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{q}}$. Substituindo o valor $\hat{r} = \frac{21-6\theta}{5-2\theta}$ obtemos $(\frac{3}{2} - \theta)a_1 = 7 - 2\theta = \hat{a}$. Dessa maneira, concluímos (5.6). Finalmente, provemos (5.7). Assim como fizemos no Capítulo 3, começamos notando que

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u)\| \lesssim |x|^{-\frac{1}{2}} (|u|^{\frac{3}{2}} |\nabla u| + |x|^{-1} |u|^{\frac{3}{2}} |u|).$$

Iremos utilizar (2,6) como par L^2 -admissível e consequentemente $(2, \frac{6}{5})$ como seu dual. Começando com uma conta formal temos

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u)\|_{L_A^{\frac{6}{5}}} \lesssim \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_A^{r_1}} \left(\| |u|^{\frac{3}{2}} \nabla u \|_{L_x^{r_2}} + \| |x|^{-1} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{L_x^{r_2}} \right). \quad (5.8)$$

Para garantir a integrabilidade do termo $|x|^{-\frac{1}{2}}$ iremos escolher $\frac{1}{r_1} = \frac{1+\theta}{6}$ onde θ será escolhido adequadamente e tomaremos sinal positivo quando integrarmos dentro da bola ($A = B(0, 1)$) e negativo fora da bola ($A = (B(0, 1))^C$). Pela relação de Hölder, sabemos que $\frac{1}{r_2} = \frac{4+\theta}{6}$. Para estimar o termo $|x|^{-1}|u|^{\frac{3}{2}}u$ iremos utilizar a desigualdade de Hardy (2.4.11) e por isso queremos encontrar θ pequeno tal que $1 < r_2 < 3$ tanto para $A = B(0, 1)$ quanto para $A = (B(0, 1))^C$. Para isso, basta escolher θ tal que $\frac{1}{3} < \frac{4-\theta}{6}$ e $\frac{4+\theta}{6} < 1$, ou seja, $0 < \theta < 2$. Utilizando a desigualdade de Hardy temos

$$\begin{aligned} \||x|^{-1}|u|^{\frac{3}{2}}u\|_{L_x^{r_2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(|u|^{\frac{3}{2}}u)^{r_2}}{|x|^{r_2}} dx \right)^{\frac{1}{r_2}} \\ &\lesssim \|\nabla(|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{L_x^{r_2}} \\ &\lesssim \| |u|^{\frac{3}{2}} \nabla u \|_{L_x^{r_2}} \end{aligned}$$

e portanto, (5.8) se torna

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{L_A^{\frac{6}{5}}} \lesssim \||x|^{-\frac{1}{2}}\|_{L_A^{r_1}} \| |u|^{\frac{3}{2}} \nabla u \|_{L_x^{r_2}}.$$

Como já vimos que podemos aplicar a desigualdade de Hardy escolhendo θ adequadamente, podemos considerar o termo $\||x|^{-\frac{1}{2}}\|_{L_A^{r_1}}$ como uma constante durante a conta formal, visto que posteriormente tomaremos $A = B(0, 1)$ ou $A = (B(0, 1))^C$. Assim, utilizando a estimativa acima e novamente a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{L_A^{\frac{6}{5}}} &\lesssim \| |u|^{\frac{3}{2}} \nabla u \|_{L_x^{r_2}} \\ &\lesssim \|u\|_{L_x^{r_3(\frac{3}{2}-\theta)}}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u\|_{L_x^{r_4\theta}}^\theta \|\nabla u\|_{L_x^{r_5}} \end{aligned}$$

onde queremos $p = r_5 = r_3(\frac{3}{2} - \theta)$ e gostaríamos de utilizar imersão de Sobolev na norma $L^{\theta r_4}$. A relação entre os expoentes é $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_4} + \frac{5-2\theta}{2p} = \frac{4+\theta}{6}$. Primeiramente, supondo que podemos aplicar a imersão de Sobolev no termo θr_4 vamos descobrir quem deve ser o parâmetro p . Para isso, note que aplicando a imersão de Sobolev e tomando a norma temporal gostaríamos de obter a seguinte desigualdade:

$$\|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{L_I^2 L_A^{\frac{6}{5}}} \lesssim \|u\|_{L_I^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{L_I^{\tilde{q}} L_x^p}^{\frac{3}{2}-\theta} \|\nabla u\|_{L_I^q L_x^p}$$

onde $(q, p) \in A_0$ e $(\tilde{q}, p) \in A_{\frac{1}{2}}$ e $\frac{1}{2} = \frac{3-2\theta}{2\tilde{q}} + \frac{1}{q}$. Utilizando a expressão acima e as relações de admissibilidade dos pares (q, p) e (\tilde{q}, p) encontramos $p = \frac{15-6\theta}{4-2\theta}$. Como já vimos anteriormente, para $(q, p) \in A_0$ e $(\tilde{q}, p) \in A_{\frac{1}{2}}$ é necessário que $3 < p < 6$, mas isso é verdade se $\theta < \frac{3}{2}$.

Finalmente, basta verificar que de fato podemos utilizar a imersão de Sobolev tanto dentro, quanto fora da bola $B(0, 1)$, ou seja, para $r_2 = \frac{6}{4+\theta}$ e $r_2 = \frac{6}{4-\theta}$. Pela relação $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_4} + \frac{5-2\theta}{2p}$ e substituindo $p = \frac{15-6\theta}{4-2\theta}$ obtemos $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_4} + \frac{2-\theta}{3}$. Gostaríamos de mostrar que $2 \leq \theta r_4 \leq 6$. Começando com $r_2 = \frac{6}{4+\theta}$ temos $\theta r_4 = 2$ e para $r_2 = \frac{6}{4-\theta}$ temos $\theta r_4 = 6$ e portanto, todos os passos da conta formal são justificados tanto em $A = B(0, 1)$ quanto em $A = (B(0, 1))^C$ finalizando a prova de (5.7). \blacksquare

5.2 Teoria para dado pequeno

As estimativas provadas na seção anterior serão fundamentais para estabelecer o primeiro resultado de *Scattering* do trabalho. Começamos a estudar o fenômeno de *Scattering* sobre uma condição especial de pequenez sobre o dado inicial.

Teorema 5.2.1. (Boa colocação global)

Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ com $\|u_0\|_{H^1} \leq E$, então existe $\delta_{sd} = \delta_{sd}(E) > 0$ tal que se

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}},[0,\infty))} \leq \delta_{sd},$$

então a solução do PVI 3.12 com $n = 3$ e dado inicial u_0 está definida globalmente em $[0, \infty)$. Mais ainda,

$$\|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}},[0,\infty))} \leq 2\|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}},[0,\infty))}$$

e

$$\|u\|_{S(L^2,[0,\infty))} + \|\nabla u\|_{S(L^2,[0,\infty))} \lesssim \|u_0\|_{H^1}.$$

Observação 5.2.2. Perceba que por (5.1), se $c\|u_0\|_{H^1} \leq \delta_{sd}$ as condições do teorema acima são satisfeitas.

Demonstração: Para provar esse resultado, utilizaremos uma estratégia parecida com a prova do Teorema de Boa Colocação 3.3.1, buscando encontrar ponto fixo para um operador de Duhamel. Começamos definindo o espaço adequado onde buscaremos esse ponto fixo. Seja B definido por

$$B = \left\{ \begin{array}{l} u : \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}},[0,+\infty))} \leq 2\|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}},[0,+\infty))} \text{ e,} \\ \|u\|_{S(L^2,[0,+\infty))} + \|\nabla u\|_{S(L^2,[0,+\infty))} \leq 2c\|u_0\|_{H^1} \end{array} \right.$$

onde $c > 0$ é a constante das estimativas de Strichartz. Considere a métrica $d(u, v) = \|u - v\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}},[0,+\infty))}$. A prova da completude desse espaço segue ideia similar aquela exposta na demonstração do Teorema 3.3.1 e será omitida neste caso. Definimos o operador

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(s)|^{\frac{3}{2}} u(s) ds$$

e gostaríamos de mostrar que é uma contração em B . Começamos mostrando que se $u \in B$ então, $\Phi(u) \in B$. Para simplificar a notação, omitiremos o intervalo $[0, \infty)$ nas normas. Utilizando a desigualdade triangular e a estimativa de Strichartz (5.2) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(s)|^{\frac{3}{2}} u(s) ds \right\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} + c \| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{S'(\dot{H}^{-\frac{1}{2}})}, \end{aligned}$$

e utilizando (5.5), temos

$$\|\Phi(u)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} + c \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^{\frac{5}{2}-\theta}.$$

Pela definição de B e lembrando que o par $(\infty, 2) \in A_0$ temos $\|u\|_{L_t^\infty H_x^1} \leq 2c\|u_0\|_{H^1} \leq 2cE$ e $\|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \leq 2\|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \leq 2\delta_{sd}$. Assim, temos

$$\|\Phi(u)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \leq (1 + CE^\theta \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta}) \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}.$$

Similarmente, utilizando desigualdade triangular, a estimativa de Strichartz (5.2) e (5.6) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_{S(L^2)} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(L^2)} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(s)|^{\frac{3}{2}} u(s) ds \right\|_{S(L^2)} \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(L^2)} + c \| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \|_{S'(L^2)} \\ &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{S(L^2)} + c \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u\|_{S(L^2)}. \end{aligned}$$

Novamente pela definição de B e pela estimativa de Strichartz (5.1) obtemos

$$\|\Phi(u)\|_{S(L^2)} \leq (1 + CE^\theta \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta}) (c\|u_0\|_{H^1}).$$

Finalmente, estimamos $\|\nabla\Phi(u)\|_{S(L^2)}$. Procedendo da mesma maneira, utilizando (5.1), (5.2), (5.6) e a definição do espaço B temos

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi(u)\|_{S(L^2)} &\leq \|e^{it\Delta}\nabla u_0\|_{S(L^2)} + c \|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u)\|_{S'(L^2)} \\ &\leq (1 + CE^\theta \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta}) (c\|u_0\|_{H^1}). \end{aligned}$$

Note que, para $\Phi(u) \in B$ é suficiente que $(1 + CE^\theta \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta}) = \frac{3}{2} < 2$, isto é, $\delta_{sd} = \frac{1}{(2CE^\theta)^{\frac{2}{3-2\theta}}}$.

Falta mostrarmos que o operador Φ é de fato uma contração em B com a métrica d definida. Para isso, note que utilizando (5.2) temos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} &= \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} (|u|^{\frac{3}{2}} u - |v|^{\frac{3}{2}} v)(s) ds \right\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq c \| |x|^{-\frac{1}{2}} (|u|^{\frac{3}{2}} u - |v|^{\frac{3}{2}} v) \|_{S'(\dot{H}^{-\frac{1}{2}})} \end{aligned}$$

e combinado o Lema 3.2.2 com (5.5) obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} &\leq C \left(\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} (u - v) \|_{S'(\dot{H}^{-\frac{1}{2}})} + \| |x|^{-\frac{1}{2}} |v|^{\frac{3}{2}} (u - v) \|_{S'(\dot{H}^{-\frac{1}{2}})} \right) \\ &\leq C \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u - v\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} + C \|v\|_{L_t^\infty H_x^1}^\theta \|v\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u - v\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq C^* E^\theta \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u - v\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned}$$

Novamente, escolhendo δ_{sd} pequeno tal que $C^* E^\theta \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta} = \frac{1}{2}$ temos que o operador é uma contração em B . Por fim, tomando δ_{sd} o mínimo entre os dois valores encontrados e aplicando o Teorema do ponto fixo de Banach, temos o resultado. \blacksquare

Uma vez provado a boa colocação global para dado pequeno, provaremos que essas soluções admitem *Scattering*.

Teorema 5.2.3. (*Scattering* para dado pequeno)

Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo as hipótese do Teorema 5.2.1 e $u(t)$ a solução da INLS associada a u_0 . Então, existe $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\|u(t) - e^{it\Delta}u_+\|_{H^1} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: A ideia para provar *Scattering* é baseada na seguinte observação. Pela fórmula de Duhamel, note que

$$e^{-it\Delta}u(x, t) = u_0 + i \int_0^t e^{-is\Delta}|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s)ds.$$

Assim, caso fosse possível tomar o limite quando $t \rightarrow \infty$ do lado direito conseguiríamos o resultado desejado, pois se fosse possível definir

$$u_+ = u_0 + i \int_0^\infty e^{-is\Delta}|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s)ds$$

em $H^1(\mathbb{R}^3)$ teríamos que

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{it\Delta}u_+\|_{H^1} &= \|e^{-it\Delta}u(t) - u_+\|_{H^1} \\ &= \left\| \int_t^\infty e^{-is\Delta}|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s)ds \right\|_{H^1}, \end{aligned}$$

que tenderia a 0 em $H^1(\mathbb{R}^3)$ quando $t \rightarrow 0$. Portanto, é suficiente mostrar que $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$ para concluir o resultado. Para isso, note que

$$\|u_+\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^1} + \left\| \int_0^\infty e^{-is\Delta}|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s)ds \right\|_2 + \left\| \int_0^\infty e^{-is\Delta}\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s))ds \right\|_2$$

e denote por

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-is\Delta}|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s)ds$$

e

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-is\Delta}\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u(s)|^{\frac{3}{2}}u(s))ds.$$

Observamos que $\|u\|_2 = \|e^{it\Delta}u\|_2 \leq \|e^{it\Delta}u\|_{L_t^\infty L_x^2}$ e como o par $(\infty, 2) \in A_0$, podemos estimar $I(x)$ utilizando (5.2) e (5.6) por

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}I(x)\|_{L_t^\infty L_x^2} &\lesssim \||x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u\|_{S'(L^2)} \\ &\lesssim \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}^\theta \|u\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}})}^{\frac{3}{2}-\theta} \|u\|_{S(L^2)} \\ &\lesssim \|u_0\|_{H^1}^{\theta+1} 2^{\frac{3}{2}-\theta} \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta} \end{aligned}$$

que é finito e, analogamente, utilizando (5.7) temos

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}J(x)\|_{L_t^\infty L_x^2} &\lesssim \|\nabla(|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u)\|_{S'(L^2)} \\ &\lesssim \|u_0\|_{H^1}^{\theta+1} 2^{\frac{3}{2}-\theta} \delta_{sd}^{\frac{3}{2}-\theta}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $u_+ \in H^1(\mathbb{R}^3)$, e finalizamos a prova do teorema. ■

5.3 Critério de *Scattering*

Durante essa seção demonstraremos um resultado chave para o teorema principal deste capítulo. Esse critério, surge inicialmente para a NLS no trabalho de Tao [29] e se mostra extremamente útil para provar *Scattering* no regime intercrítico da equação. O objetivo desta seção é provar o seguinte critério.

Teorema 5.3.1. Seja $u(x, t)$ solução para o PVI (3.12) com $n = 3$ definida globalmente e $\sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\|_{H^1} = E < \infty$. Então, existem constante R e ϵ positivas dependendo de E tais que se

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{B(0, R)} |u(x, t)|^2 dx \leq \epsilon^2 \quad (5.9)$$

então temos *Scattering*.

A demonstração do teorema acima será uma consequência simples do seguinte lema.

Lema 5.3.2. Seja $u(x, t)$ solução para o PVI (3.12) com $n = 3$ definida globalmente e $\sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\|_{H^1} = E < \infty$. Se u satisfaz (5.9) para algum $0 < \epsilon < 1$ e $R = R(\epsilon) > \epsilon^{(-\alpha+2)}$, então existem $\gamma, T > 0$ tais que

$$\|e^{i(t-T)\Delta} u(T)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T, \infty))} \lesssim \epsilon^\gamma.$$

Demonstração: Fixe $\alpha, \gamma > 0$ a serem determinados posteriormente. Como $\|e^{it\Delta} u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [0, \infty))} \leq \|u_0\|_{H^1} \leq E$, então existe $T_0 > \epsilon^{-\alpha}$ tal que $\|e^{it\Delta} u_0\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T_0, \infty))} \leq \epsilon^\gamma$. Para $T \geq T_0$ a ser escolhido depois defina $I_1 = [T - \epsilon^{-\alpha}, T]$ e $I_2 = [0, T - \epsilon^{-\alpha}]$ e considere uma função $\eta(x)$ valendo 1 em $B(0, \frac{1}{2})$ e 0 em $B(0, 1)^C$ e defina $\eta_R(x) = \eta(x/R)$. Pela fórmula de Duhamel temos

$$e^{i(t-T)\Delta} u(T) = e^{it\Delta} u_0 + iF_1 + iF_2$$

onde

$$F_i = \int_{I_i} e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(s)|^{\frac{3}{2}} u(s) ds.$$

Denotaremos por passado recente o termo F_1 e passado distante o termo F_2 . Perceba que pela escolha de $T \geq T_0$ temos

$$\|e^{i(t-T)\Delta} u(T)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T, \infty))} \lesssim \epsilon^\gamma + \|F_1\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T, \infty))} + \|F_2\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T, \infty))}. \quad (5.10)$$

Começamos com a estimativa do passado recente. A ideia é separar a solução em $u(x, t) = \eta_R(x)u(x, t) + (1 - \eta_R(x))u(x, t)$ e estimar cada termo separadamente. Começamos estimando a derivada da "massa" do termo $\eta_R(x)u(x, t)$. Note que $\partial_t |u|^2 \eta_R = 2\eta_R \operatorname{Re}(\bar{u} \partial_t u)$ e pela equação, temos que $i\bar{u} \partial_t u = -\bar{u} \Delta u - |u|^{\frac{7}{2}}$. Portanto, $\partial_t |u|^2 \eta_R = -2\operatorname{Im}(\eta_R \bar{u} \Delta u)$. Perceba que integrando por partes e pela regra do produto temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R \bar{u} \Delta u dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla(\eta_R \bar{u}) \cdot \nabla u dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \eta_R \cdot \nabla u) \bar{u} dx \end{aligned}$$

logo

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u|^2 dx = -2\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \eta_R \cdot \nabla u) \bar{u} dx.$$

Note também que $|\nabla\eta_R(x)| = \frac{1}{R}|\nabla\eta(x)|$ e portanto, pela desigualdade de Hölder e como $\sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\|_{H^1} = E < \infty$ temos

$$\begin{aligned} \left| \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R |u|^2 dx \right| &\leq \|\nabla\eta_R\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Tendo esta estimativa para a derivada, para todo $t \in I_1$ vale que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R(x) |u(x, t)|^2 dx &\lesssim \int_{\mathbb{R}^3} \eta_R(x) |u(x, T)|^2 dx + \frac{\epsilon^{-\alpha}}{R} \\ &\lesssim \epsilon^2 + \frac{\epsilon^{-\alpha}}{R} \end{aligned}$$

escolhendo $T > 0$ tal que $\int_{B(0, R)} |u(x, T)|^2 dx \lesssim \epsilon^2$, o que é possível pois $u(x, t)$ satisfaz (5.9) por hipótese. Como $R > \epsilon^{-(\alpha+2)}$ temos que $\int_{\mathbb{R}^3} \eta_R(x) |u(x, t)|^2 dx \lesssim \epsilon^2$ para todo $t \in I_1$, logo

$$\|\eta_R u\|_{L_{I_1}^\infty L_x^2} \lesssim \epsilon. \quad (5.11)$$

Utilizando $(\hat{q}, \hat{r}) \in A_{-\frac{1}{2}}$ como na demonstração da estimativa (5.5) e repetindo a conta feita nessa demonstração temos

$$\||x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} (\eta_R u)\|_{L_{x'}^{\hat{r}'}} \lesssim \|u(t)\|_{H^1}^\theta \|u(t)\|_{L_x^{\hat{r}}}^{\alpha-1-\theta} \|\eta_R u(t)\|_{L_x^{\hat{r}}}$$

mas $\|u(t)\|_{H^1} \leq E$ e $2 < \hat{r} < 6$. Logo, utilizando a limitação da norma H^1 e a imersão de Sobolev temos

$$\||x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} (\eta_R u)\|_{L_{x'}^{\hat{r}'}} \lesssim \|\eta_R u(t)\|_{L_x^{\hat{r}}}.$$

Como $2 < \hat{r} < 6$, existe $\hat{\theta} \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{\hat{\theta}}{2} + \frac{1-\hat{\theta}}{6}$$

e utilizando a desigualdade de Hölder, a cota (5.11) e a imersão de Sobolev conseguimos

$$\begin{aligned} \|\eta_R u(t)\|_{L_x^{\hat{r}}} &\lesssim \|u(t)\|_{L_x^6}^{1-\hat{\theta}} \|\eta_R u(t)\|_{L_x^2}^{\hat{\theta}} \\ &\lesssim \|u(t)\|_{H^1}^{1-\hat{\theta}} \epsilon^{\hat{\theta}} \\ &\lesssim \epsilon^{\hat{\theta}}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\||x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} (\eta_R u)\|_{L_{x'}^{\hat{r}'}} \lesssim \epsilon^{\hat{\theta}}. \quad (5.12)$$

Precisamos estimar agora o termo $(1 - \eta_R) |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u$. Pela definição da função η_R e pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \|(1 - \eta_R) |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u\|_{L_{x'}^{\hat{r}'}} &\leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u\|_{L_{|x| > \frac{R}{2}}^{\hat{r}'}} \\ &\leq \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{|x| > \frac{R}{2}}^{r_1}} \|u(t)\|_{L_x^{r_2 \theta}}^\theta \|u(t)\|_{L_x^{\hat{r}}}^{\frac{5}{2}-\theta} \end{aligned}$$

onde os expoentes satisfazem a relação de Hölder

$$\frac{1}{\hat{r}'} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{5 - 2\theta}{2\hat{r}}$$

e queremos $r_1 > 6$ para garantir a integrabilidade do primeiro termo e $2 \leq \theta r_2 \leq 6$ para utilizar a imersão de Sobolev. Note que pela demonstração de (5.5) temos liberdade na escolha de $0 < \theta < \frac{3}{2}$. Escolhendo $0 < \theta < 1$, $r_1 = \frac{6}{\theta}$ e lembrando que $\hat{r} = \frac{21-6\theta}{5-2\theta}$ a relação entre os expoente acima nos diz que $r_2 = \frac{6}{1+\theta} \in (2, 6)$, pois $0 < \theta < 1$. Portanto, pela imersão de Sobolev temos

$$\|(1 - \eta_R)|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u(t)\|_{L_x^{\hat{r}'}} \lesssim \| |x|^{-\frac{1}{2}} \|_{L_{|x|>\frac{R}{2}}^{r_1}} \|u(t)\|_{H^1}^{\frac{5}{2}},$$

e integrando o primeiro termo obtemos,

$$\begin{aligned} \|(1 - \eta_R)|x|^{-\frac{1}{2}}|u|^{\frac{3}{2}}u(t)\|_{L_x^{\hat{r}'}} &\lesssim \frac{1}{R^{\frac{1}{2}-\frac{3}{r_1}}} \|u(t)\|_{H^1}^{\frac{5}{2}} \\ &\lesssim \epsilon^{\hat{\theta}} \end{aligned}$$

tomando R suficientemente grande. Com isso em mãos conseguimos estimar o passado recente utilizando a estimativa de Strichartz (5.3) e as estimativas acima obtendo

$$\begin{aligned} \left\| \int_{I_1} e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(s)|^{\frac{3}{2}} u(s) ds \right\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T, \infty))} &\lesssim \left\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u \right\|_{S'(\dot{H}^{-\frac{1}{2}}, I_1)} \\ &\lesssim \left\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} (\eta_R u) \right\|_{L_{I_1}^{\hat{q}'} L_x^{\hat{r}'}} \\ &\quad + \left\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} (1 - \eta_R) u \right\|_{L_{I_1}^{\hat{q}'} L_x^{\hat{r}'}} \\ &\lesssim \epsilon^{\hat{\theta} |I_1|^{\frac{1}{\hat{q}'}}} \\ &\lesssim \epsilon^{\frac{\hat{\theta}}{2}} \end{aligned} \tag{5.13}$$

se escolhermos $\alpha = \frac{\hat{q}'\hat{\theta}}{2}$ e notarmos que $|I_1| = \epsilon^{-\alpha}$. Agora passamos para a estimativa do passado distante. Tome $(q, r) \in A_{\frac{1}{2}}$ e lembre que $3^+ < r < 6^-$. Começamos com uma conta formal escrevendo $|F_2| = |F_2|^{\frac{1}{2}} \cdot |F_2|^{\frac{1}{2}}$ e utilizando Hölder podemos escrever

$$\|F_2\|_{L_x^r} \leq \|F_2\|_{L_x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} \|F_2\|_{L_x^d}^{\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

com os expoentes satisfazendo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2d}.$$

Tomando a norma temporal temos

$$\|F_2\|_{L_t^q L_x^r} \leq \|F_2\|_{L_t^\theta L_x^6}^{\frac{1}{2}} \|F_2\|_{L_t^c L_x^d}^{\frac{1}{2}}$$

onde queremos $(c, d) \in A_0$. Utilizando que $(q, r) \in A_{\frac{1}{2}}$ e que $\frac{1}{q} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2\theta}$ descobrimos $\theta = \infty$. Como no decorrer da demonstração será necessário integrar no tempo, temos que

evitar a norma L^∞ . Fazemos isso introduzindo uma pequena variação nos expoente de (5.14) tomando $\delta > 0$ pequeno e reescrevendo a estimativa como

$$\|F_2\|_{L_x^r} \leq \|F_2\|_{L_x^{\frac{6}{1-4\delta}}}^{\frac{1}{2}} \|F_2\|_{L_x^d}^{\frac{1}{2}}$$

onde agora

$$\frac{1}{d} = 2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1-4\delta}{12} \right).$$

Precisamos conferir apenas que d definido da maneira acima está do intervalo necessário para formar um par L^2 admissível, ou seja, se $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{d} \leq \frac{1}{2}$ o que ocorre se

$$\frac{1}{6} - \frac{\delta}{3} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{3} + \frac{\delta}{3}$$

o que é verdade para δ suficientemente pequeno pela definição de $A_{\frac{1}{2}}$ e pelo fato de $(q, r) \in A_{\frac{1}{2}}$. Escolhido d , sabemos o expoente c tal que $(c, d) \in A_0$. Pela relação de admissibilidade temos

$$\frac{1}{c} = 2 \left(\frac{1}{q} - \frac{\delta}{2} \right)$$

e portanto, tomando a norma temporal obtemos

$$\|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^q L_x^r} \leq \|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^c L_x^d}^{\frac{1}{2}} \cdot \|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}} L_x^{\frac{6}{1-4\delta}}}^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

visto que $\frac{1}{q} = \frac{1}{2c} + \frac{\delta}{2}$. Agora temos que estimar cada uma das normas acima. Começamos observando que, pela fórmula de Duhamel (3.1) e pela definição de F_2 temos

$$F_2 = e^{it\Delta} \left(e^{i(-T+\epsilon^{-\alpha})\Delta} u(T - \epsilon^{-\alpha}) - u_0 \right)$$

e como $(c, d) \in A_0$, pela estimativa de Strichartz (5.1) segue que

$$\begin{aligned} \|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^c L_x^d} &\lesssim \|e^{i(-T+\epsilon^{-\alpha})\Delta} u(T - \epsilon^{-\alpha}) - u_0\|_{L^2} \\ &\lesssim \|u_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

pela conservação de massa. Para estimar o segundo termo, utilizando a definição de F_2 e a desigualdade dispersiva (2.5.2) obtemos

$$\begin{aligned} \|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}} L_x^{\frac{6}{1-4\delta}}} &= \left\| \int_0^{T-\epsilon^{-\alpha}} e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u(s) ds \right\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}} L_x^{\frac{6}{1-4\delta}}} \\ &\lesssim \left\| \int_0^{T-\epsilon^{-\alpha}} \left\| e^{i(t-s)\Delta} |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u(s) \right\|_{L_x^{\frac{6}{1-4\delta}}} ds \right\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}}} \\ &\lesssim \left\| \int_0^{T-\epsilon^{-\alpha}} |t-s|^{-(1+2\delta)} \left\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u(s) \right\|_{L_x^{\frac{6}{5+4\delta}}} ds \right\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}}} \end{aligned}$$

e tomando $\delta > 0$ pequeno podemos usar (5.4) para estimar

$$\begin{aligned} \left\| |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{3}{2}} u(s) \right\|_{L_x^{\frac{6}{5+4\delta}}} &\lesssim \|u\|_{L_{[T,\infty)}^\infty H_x^1} \\ &\lesssim E \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}} L_x^{\frac{6}{1-4\delta}}} &\lesssim \left\| \int_0^{T-\epsilon^{-\alpha}} (t-s)^{-(1+2\delta)} ds \right\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}}} \\ &\lesssim \|(t-T+\epsilon^{-\alpha})^{-2\delta}\|_{L_{[T,\infty)}^{\frac{1}{\delta}}} \\ &\lesssim \epsilon^{\alpha\delta} \end{aligned}$$

e substituindo em (5.15), obtemos

$$\|F_2\|_{L_{[T,\infty)}^q L_x^q} \lesssim \epsilon^{\frac{\alpha\delta}{2}}. \quad (5.16)$$

Finalmente, substituindo (5.13) e (5.16) em (5.10) e tomando $\gamma = \min(\frac{\hat{\theta}}{2}, \frac{\alpha\delta}{2})$ obtemos

$$\|e^{i(t-T)\Delta} u(T)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T,\infty))} \lesssim \epsilon^\gamma$$

finalizando a demonstração do lema. ■

Com este lema conseguimos provar o critério de *Scattering* (Teorema 5.3.1).

Demonstração: do Teorema 5.3.1

Escolhendo $\epsilon > 0$ e $R(\epsilon)$ como no Lema 5.3.2 e u satisfazendo as hipóteses do Teorema (5.3.1) temos

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} u(T)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [0,\infty))} &= \|e^{i(t-T)\Delta} u(T)\|_{S(\dot{H}^{\frac{1}{2}}, [T,\infty))} \\ &\leq c\epsilon^\gamma. \end{aligned}$$

Tomando-se ϵ pequeno o suficiente tal que $c\epsilon^\gamma \leq \delta_{sd}$ a teoria de dado pequeno garante o resultado de *Scattering*. ■

5.4 Resultado de *Scattering*

Durante essa seção, provaremos resultados que nos levarão a concluir a existência de *Scattering* em condições bem mais gerais. Por enquanto, provamos *Scattering* para dado pequeno e também um critério de *Scattering*. No que se segue, estabeleceremos condições para que a solução atenda o critério de *Scattering* provado na seção anterior. Os resultados provados durante essa seção continuam seguindo as ideias presentes em Campos e Cardoso [4]. Começamos esta seção com um lema conhecido como *Energy trapping*.

Lema 5.4.1. Seja u solução de (3.12) com $n = 3$ e dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e Q a solução positiva e radial da equação elítica (2.22). Se existe $\delta > 0$ tal que

- $M(u_0)E(u_0) < (1 - \delta)M(Q)E(Q)$
- $\|u_0\|_2 \|\nabla u_0\|_2 \leq \|Q\|_2 \|\nabla Q\|_2,$

então existe $\delta' = \delta'(\delta) > 0$ tal que

$$\|u_0\|_2 \|\nabla u(t)\|_2 < (1 - \delta') \|Q\|_2 \|\nabla Q\|_2$$

para todo $t \in I$, onde I é o intervalo máximo de existência da solução. Mais ainda, $I = \mathbb{R}$ e a solução é uniformemente limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Antes da demonstração, são importantes alguns comentários sobre o lema acima. Basicamente o que lema nos diz é que se estamos abaixo da solução Q no sentido dado pelo lema no tempo inicial, então estaremos sempre abaixo e a solução será global.

Demonstração: Começamos lembrando da desigualdade de Gagliardo Nirenberg (2.23) e sua melhor constante (ver seção 2.6). Por essa desigualdade temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |u|^{\frac{7}{2}} dx \leq K_{op} \|\nabla u\|_2^{\frac{11}{4}} \|u\|_2^{\frac{3}{4}}$$

onde $K_{op} = \frac{14}{11 \|Q\|_2^{\frac{3}{4}} \|\nabla Q\|_2^{\frac{3}{4}}}$. Lembrando que

$$2E(u_0) = \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{4}{7} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx$$

e aplicando a desigualdade de Gagliardo Nirenberg, obtemos

$$2E(u_0) \geq \|\nabla u(t)\|_2^2 - \left(\frac{4K_{op}}{7} \|u_0\|_2^{\frac{3}{4}} \right) \|\nabla u(t)\|_2^{\frac{11}{4}}.$$

Denotando por $B = \frac{4K_{op}}{7} \|u_0\|_2^{\frac{3}{4}}$ considere a função $f(x) = x^2 - Bx^{\frac{11}{4}}$. Perceba que para $x > 0$ essa função possui um único ponto de máximo em $x_0 = \left(\frac{8}{11B}\right)^{\frac{4}{3}}$. Substituindo o valor de B e K_{op} obtemos $x_0 = \frac{\|Q\|_2 \|\nabla Q\|_2}{\|u_0\|_2}$. Escrevendo a função f como $f(x) = x^2(1 - Bx^{\frac{3}{4}})$ e substituindo o ponto de máximo obtemos $f(x_0) = \frac{3}{11}x_0^2$. Lembrando que a desigualdade de Gagliardo Nirenberg se torna igualdade para a função Q podemos escrever a energia $E(Q)$ como

$$\begin{aligned} 2E(Q) &= \|\nabla Q\|_2^2 - \frac{4}{7} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |Q(x)|^{\frac{7}{2}} dx \\ &= \|\nabla Q\|_2^2 - \frac{4K_{op}}{7} \|Q\|_2^{\frac{3}{4}} \|\nabla Q\|_2^{\frac{11}{4}} \\ &= \|\nabla Q\|_2^2 - \frac{8}{11} \|\nabla Q\|_2^2 \\ &= \frac{3}{11} \|\nabla Q\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto o valor máximo da função f é

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{3}{11} x_0^2 = \frac{3}{11} \frac{\|Q\|_2^2 \|\nabla Q\|_2^2}{\|u_0\|_2^2} \\ &= \frac{2E(Q)M(Q)}{M(u_0)}, \end{aligned}$$

mas por hipótese, $M(u_0)E(u_0) < (1 - \delta)M(Q)E(Q)$, logo

$$f(x_0) = \frac{2E(Q)M(Q)}{M(u_0)} > \frac{2E(u_0)}{1 - \delta} > 2E(u_0).$$

Note que $f(\|\nabla u_0\|_2) \leq 2E(u_0) < (1 - \delta)f(x_0)$ e como por hipótese $x_0 \geq \|\nabla u_0\|_2$ temos que pela desigualdade acima de fato existe $\delta' > 0$ tal que $\|\nabla u_0\|_2 < (1 - \delta')x_0$. Pela conservação da energia, vale que para todo $t \in I$ $f(\|\nabla u(t)\|_2) < (1 - \delta)f(x_0)$ e, portanto, pela continuidade em t da norma $\|\nabla u(t)\|_2$ temos que $\|\nabla u(t)\|_2 < (1 - \delta')x_0$ o que implica que

$$\|u_0\|_2 \|\nabla u(t)\|_2 < (1 - \delta')\|Q\|_2 \|\nabla Q\|_2.$$

Por fim, perceba que a conservação da massa combinada com a relação acima nos fornece uma limitação uniforme para a norma H^1 da solução, portanto, pelo Lema 4.1.1 (Alternativa de *Blow-up*) a solução é global. Uma visualização gráfica do argumento acima está descrita pela Figura 1 abaixo. Perceba que $\|\nabla u(t)\|_2$ fica aprisionado na região em vermelho, pois $f(\|\nabla u(t)\|_2) \leq 2E(u_0)$.

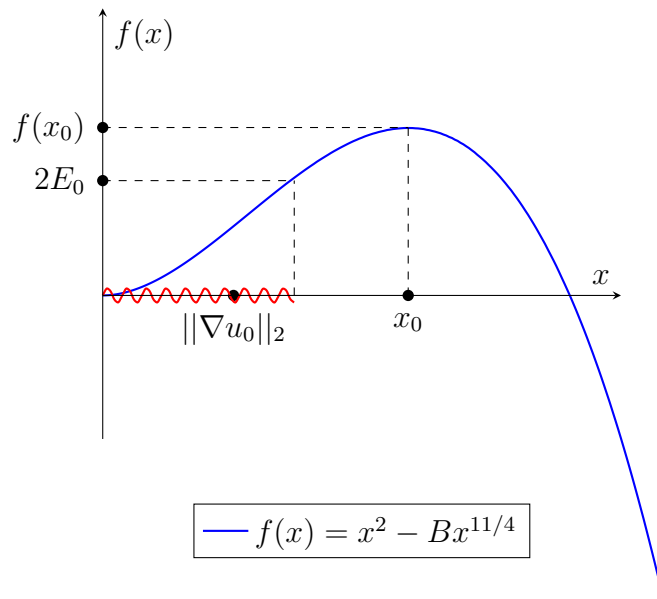


Figura 1: Elaborada pelo autor.

■

Os próximos dois lemas serão úteis para estabelecer um importante resultado de coercividade local.

Lema 5.4.2. Suponha $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\|f\|_2 \cdot \|\nabla f\|_2 < (1 - \delta)\|Q\|_2 \cdot \|\nabla Q\|_2$$

então, existe $\delta' = \delta'(\delta) > 0$ tal que

$$\delta' \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |f|^{\frac{7}{2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|^2 dx - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |f|^{\frac{7}{2}} dx.$$

Demonstração: Lembrando da constante ótima da desigualdade de Gagliardo Nirenberg e utilizando a hipótese temos

$$K_{op} = \frac{14}{11\|Q\|_2^{\frac{3}{4}} \|\nabla Q\|_2^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{14(1 - \delta)^{\frac{3}{4}}}{11\|f\|_2^{\frac{3}{4}} \cdot \|\nabla f\|_2^{\frac{3}{4}}}$$

e portanto, por (2.23) segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |f|^{\frac{7}{2}} dx &\leq K_{op} \|\nabla f\|_2^{\frac{11}{4}} \cdot \|f\|_2^{\frac{3}{4}} \\ &\leq \frac{14(1-\delta)^{\frac{3}{4}} \|\nabla f\|_2^2}{11} \end{aligned}$$

concluindo que

$$\frac{11}{14(1-\delta)^{\frac{3}{4}}} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |f|^{\frac{7}{2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|^2 dx.$$

Finalmente, escrevendo $\frac{11}{14(1-\delta)^{\frac{3}{4}}} = \frac{11}{14} + \delta'$ concluímos que

$$\delta' \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |f|^{\frac{7}{2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|^2 dx - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |f|^{\frac{7}{2}} dx.$$

■

Lema 5.4.3. Seja ϕ suave valendo 1 em $|x| \leq \frac{1}{2}$ e com suporte em $|x| \leq 1$ e defina $\phi_R(x) = \phi(\frac{x}{R})$. Se $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_R f)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\nabla f|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R (\Delta \phi_R) |f|^2 dx.$$

Em particular,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_R f)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\nabla f|^2 dx \right| \leq \frac{C}{R^2} \|f\|_2^2.$$

Demonstração: Começamos notando que

$$\begin{aligned} |\nabla(\phi_R f)|^2 &= \langle \nabla(\phi_R f), \nabla(\phi_R \bar{f}) \rangle \\ &= |\nabla \phi_R|^2 |f|^2 + 2 \operatorname{Re} \phi_R \nabla \phi_R \cdot (\nabla f) \bar{f} + \phi_R^2 |\nabla f|^2 \end{aligned}$$

e que $\nabla(|f|^2) = 2 \operatorname{Re} \bar{f} \nabla f$ e $\nabla(\phi_R^2) = 2 \phi_R \nabla \phi_R$, daí

$$|\nabla(\phi_R f)|^2 = |\nabla \phi_R|^2 |f|^2 + \frac{1}{2} \nabla(|f|^2) \cdot \nabla(\phi_R^2) + \phi_R^2 |\nabla f|^2. \quad (5.17)$$

Integrando por partes podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}(|f|^2) \partial_{x_i}(\phi_R^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}(|f|^2) \phi_R \partial_{x_i} \phi_R dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 (\partial_{x_i} \phi_R)^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}(|f|^2) \phi_R \partial_{x_i}^2 \phi_R dx. \end{aligned}$$

Somando em i obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla(|f|^2) \cdot \nabla(\phi_R^2) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_R|^2 |f|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R (\Delta \phi_R) |f|^2 dx. \quad (5.18)$$

Finalmente, integrando (5.17) e utilizando (5.18) concluímos a primeira parte do lema. Para a segunda parte do lema, basta notar que $\Delta \phi_R(x) = \frac{1}{R^2} \Delta \phi(\frac{x}{R})$ e utilizar o fato de ϕ ser suave, e portanto limitada em todas as suas derivadas.

■

Finalmente, com os lemas acima conseguimos enunciar o resultado de coercividade local.

Lema 5.4.4. (Coercividade Local)

Seja u solução do PVI 3.12 com $n = 3$ satisfazendo

$$\|u\|_2 \cdot \|\nabla u\|_2 < (1 - 2\delta)\|Q\|_2 \cdot \|\nabla Q\|_2 \quad (5.19)$$

e

$$M(u)E(u) < M(Q)E(Q). \quad (5.20)$$

Seja ϕ definida como no Lema 5.4.3. Então existe $\bar{R} = \bar{R}(\delta, M(u_0), Q) > 0$ tal que para todo $R \geq \bar{R}$ temos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\phi_R u(t)\|_2 \cdot \|\nabla(\phi_R u(t))\|_2 \leq (1 - \delta)\|Q\|_2 \|\nabla Q\|_2.$$

Em particular, pelo Lema 5.4.2, existe $\delta' = \delta'(\delta) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \delta' \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R u(t)|^{\frac{7}{2}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_R u(t))|^2 dx \\ &\quad - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R u(t)|^{\frac{7}{2}} dx. \end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente, note que faz sentido tomar o supremo em todo \mathbb{R} pois como u satisfaz (5.19) e (5.20) então a solução é global pelo Lema 5.4.1. Como $\phi_R \leq 1$ temos que $\|\phi_R f\|_2 \leq \|f\|_2$. Portanto, pelo Lema 5.4.3 temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_R u(t))|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{C}{R^2} \|u(t)\|_2^2$$

e como $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ para todo $a, b \geq 0$ obtemos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\phi_R u(t)\|_2 \cdot \|\nabla(\phi_R u(t))\|_2 \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_2 \left[\|\nabla u\|_2 + \frac{C}{R} \|u(t)\|_2 \right].$$

Finalmente, utilizando a conservação da massa e (5.19) segue

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\phi_R u(t)\|_2 \cdot \|\nabla(\phi_R u(t))\|_2 &\leq (1 - 2\delta)\|Q\|_2 \cdot \|\nabla Q\|_2 + \frac{C}{R} \|u_0\|_2^2 \\ &= (1 - \delta)\|Q\|_2 \cdot \|\nabla Q\|_2 \\ &\quad + \left(\frac{C}{R} \|u_0\|_2^2 - \delta \|Q\|_2 \cdot \|\nabla Q\|_2 \right) \end{aligned}$$

e existe \bar{R} grande o suficiente tal que

$$\left(\frac{C}{R} \|u_0\|_2^2 - \delta \|Q\|_2 \cdot \|\nabla Q\|_2 \right) \leq 0$$

para todo $R \geq \bar{R}$ finalizando a demonstração. ■

Perceba que esse lema nos diz que dada uma solução satisfazendo (5.19) e (5.20), então é possível localizar a solução com um corte suave e continuar satisfazendo uma relação similar a (5.19). A seguir, enunciaremos e provamos um resultado que será fundamental na prova do resultado principal de *Scattering*.

Proposição 5.4.5. (Virial-Morawetz)

Seja u solução do PVI (3.12) com $n = 3$ e satisfazendo as relações (5.19) e (5.20). Então, existe $R > 0$ tal que para todo $T > 0$ vale

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{|x| \leq R} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim \frac{R}{T} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Demonstração: Começamos a prova definindo uma função radial auxiliar que nos será útil para a identidade virial a ser utilizada. Defina $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suave por

$$a(x) = \begin{cases} |x|^2 & , |x| \leq \frac{R}{2} \\ 2R|x| & , |x| > R \end{cases}$$

e na região intermediária satisfazendo $\partial_r a \geq 0$, $\partial_r^2 a \geq 0$ e $|\partial^\alpha a(x)| \lesssim R|x|^{-|\alpha|+1}$ para $|\alpha| \geq 1$, onde lembramos que $\partial_r a = \nabla a \cdot \frac{x}{|x|}$. Defina agora a função

$$f(t) = 2Im \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(t)} \nabla u(t) \cdot \nabla a dx \quad (5.21)$$

onde tomaremos u solução do PVI (3.12) com $n = 3$ e sobre as mesmas hipótese do Lema 5.4.4. Perceba que pela definição da função $a(x)$ e pela desigualdade de Hölder temos

$$|f(t)| \lesssim R$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto $f(t)$ está bem definida. Similar ao que fizemos no Lema 4.1.3 temos uma estimativa para $f'(t)$ dada por

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4Re \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^3} a_{ij} \overline{u_i(t)} u_j(t) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 a |u(t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{4}{7} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{5}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} x \cdot \nabla a dx - \frac{6}{7} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} \Delta a dx. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de a ser radial podemos reescrever $f'(t)$ por

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4I + 4 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_r^2 a |\partial_r u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta^2 a |u(t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{4}{7} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{5}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} x \cdot \nabla a dx - \frac{6}{7} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} \Delta a dx \end{aligned}$$

onde

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial_r a}{r} |\nabla u(t)|^2 - \frac{\partial_r a}{r^3} |x \cdot \nabla u(t)|^2 \right) dx.$$

Como $|x \cdot \nabla u(t)|^2 \leq r^2 |\nabla u|^2$ temos que $I \geq 0$. Algumas observações sobre a função a nos permite estimar por baixo $f'(t)$ (diferentemente do que fizemos no resultado de *blow-up*). Perceba que na região $|x| \leq \frac{R}{2}$ temos $\Delta a = 6$, $\Delta^2 a = 0$ e $\nabla a(x) = 2x$. Por outro lado, se $|x| > R$ temos que $\Delta a(x) = \frac{4R}{|x|}$ e, conseqüentemente, $|\Delta^2 a(x)| \lesssim \frac{R}{|x|^3}$ pois a cada grau de derivada ganhamos um fator $\frac{1}{|x|}$. Mais ainda, pelas hipótese sobre a função a temos que $\partial_r^2 a \geq 0$ em todo o domínio. Tomando $\alpha = 4$ concluímos que na região intermediária

$\frac{R}{2} < |x| \leq R$ vale que $|\Delta^2 a(x)| \lesssim \frac{R}{|x|^3}$. Utilizando essas observações, e separando as integrais em dentro e fora da bola de raio $\frac{R}{2}$ temos

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4I - \frac{44}{7} \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx + 8 \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |\nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad + \int_{|x| > \frac{R}{2}} \left[-\frac{6}{7} \Delta a - \frac{4}{7} \frac{x \cdot \nabla a}{|x|^2} \right] |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \\ &\quad + 4 \int_{|x| > \frac{R}{2}} \partial_r^2 a |\partial_r u(t)|^2 dx - \int_{|x| > \frac{R}{2}} \Delta^2 a |u(t)|^2 dx \end{aligned}$$

onde utilizamos também que

$$4 \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} \partial_r^2 a |\partial_r u(t)|^2 dx = 8 \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |\nabla u(t)|^2 dx$$

pela definição de $a(x)$ nesta região. Finalmente, notando que

$$4 \int_{|x| > \frac{R}{2}} \partial_r^2 a |\partial_r u(t)|^2 dx \geq 0,$$

$4I \geq 0$, a estimativa sobre $|\Delta^2 a(x)|$ na região $|x| > \frac{R}{2}$ e o fato do termo

$$\left[-\frac{6}{7} \Delta a - \frac{4}{7} \frac{x \cdot \nabla a}{|x|^2} \right]$$

ser limitado nesta mesma região temos

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq 8 \left[-\frac{11}{14} \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx + \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |\nabla u(t)|^2 dx \right] \\ &\quad - c \int_{|x| > \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx - c \frac{M(u_0)}{R^2} \\ &\geq 8 \left[-\frac{11}{14} \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx + \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |\nabla u(t)|^2 dx \right] \\ &\quad - \frac{c}{\sqrt{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx - c \frac{M(u_0)}{R^2}. \end{aligned}$$

utilizando a imersão de Sobolev, concluímos

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq 8 \left[-\frac{11}{14} \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx + \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |\nabla u(t)|^2 dx \right] \\ &\quad - \frac{c}{\sqrt{R}} E^{\frac{7}{2}} - c \frac{M(u_0)}{R^2}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde $E = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1}$. Perceba que o primeiro termo de (5.22) é similar aos que aparecem nos lemas 5.4.3 e 5.4.4. Para estimar esse termo introduziremos um corte suave para colocar a integração em todo o \mathbb{R}^3 e, posteriormente, manipularemos a expressão a fim de usar os lemas 5.4.3 e 5.4.4. Isso introduzirá termos de erro, que serão controlados com ajuda da definição adequada da função de corte. Primeiramente, escolhemos $R \geq \bar{R}$ como no

lema 5.4.4 e definimos ϕ^A um corte suave valendo 1 e $|x| \leq \frac{1}{2}$ e com suporte em $|x| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$ e como já feito anteriormente denotamos $\phi_R^A(x) = \phi^A(\frac{x}{R})$. Com isso, conseguimos escrever o primeiro termo de (5.22) como

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |\nabla u(t)|^2 dx - \frac{11}{14} \int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx &= \int_{\mathbb{R}^3} |\phi_R^A \nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} (\phi_R^A)^2 |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx - I_A \end{aligned}$$

onde

$$I_A = \int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{A}} \left(|\phi_R^A \nabla u(t)|^2 - \frac{11}{14} (\phi_R^A)^2 |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} \right) dx.$$

Por simplicidade, denotaremos o primeiro termo de (5.22) por X . Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} X &= \int_{\mathbb{R}^3} |\phi_R^A \nabla u(t)|^2 dx - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R^A u(t)|^{\frac{7}{2}} dx - I_A \\ &\quad - II_A \end{aligned}$$

onde

$$II_A = -\frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} \left[(\phi_R^A)^{\frac{7}{2}} - (\phi_R^A)^2 \right] |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx.$$

Observamos que pelo Teorema da Convergência Dominada, fazendo $A \rightarrow \infty$ os termos de erro $I_A, II_A \rightarrow 0$. Esta observação será utilizada na conclusão da demonstração. Utilizando agora o Lema 5.4.3 e que $|\phi_R^A(x)| \lesssim 1$ e $|\Delta \phi_R^A(x)| \lesssim \frac{1}{R^2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\phi_R^A \nabla u(t)|^2 dx - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R^A u(t)|^{\frac{7}{2}} dx &\geq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_R^A u(t))|^2 dx - \frac{c}{R^2} M(u_0) \\ &\quad - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R^A u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \end{aligned}$$

Substituindo essas informações em (5.22) e utilizando o Lema 5.4.4 obtemos

$$\begin{aligned} f'(t) &\geq 8 \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(\phi_R^A u(t))|^2 dx - \frac{11}{14} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R^A u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \right] - \frac{c}{\sqrt{R}} E^{\frac{7}{2}} \\ &\quad - \frac{c}{R^2} M(u_0) - 8I_A - 8II_A \\ &\geq 8\delta' \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R^A u(t)|^{\frac{7}{2}} dx - \frac{c}{\sqrt{R}} E^{\frac{7}{2}} - \frac{c}{R^2} M(u_0) - 8I_A - 8II_A \end{aligned}$$

e então temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-\frac{1}{2}} |\phi_R^A u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim f'(t) + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\sqrt{R}} + I_A + II_A.$$

Fazendo $A \rightarrow \infty$ e notando que para $R \geq 1$ vale $\frac{1}{R^2} \lesssim \frac{1}{\sqrt{R}}$ temos, pelo Teorema da convergência dominada,

$$\int_{|x| \leq \frac{R}{2}} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim f'(t) + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Finalmente, integrando no tempo e lembrando que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \lesssim \frac{1}{R}$, obtemos

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_{|x| \leq R} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim \frac{R}{T} + \frac{1}{\sqrt{R}}$$

finalizando a prova da proposição. ■

Provaremos agora, uma simples consequência da Proposição 5.4.5 que é o último ingrediente necessário para provarmos o resultado de *Scattering* desejado (Teorema 5.1.2).

Proposição 5.4.6. (Evacuação da Energia)

Nas hipótese da Proposição 5.4.5, existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $R_n \rightarrow \infty$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t_n)|^{\frac{7}{2}} dx = 0.$$

Demonstração: Tome uma sequência crescente $T_n \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n-1}}{T_n} < 1$. Um exemplo de sequência satisfazendo isso é $T_n = e^n$. Agora, tome R_n tal que

$$\frac{R_n}{T_n} = \frac{1}{\sqrt{R_n}}$$

ou seja, $R_n = T_n^{\frac{2}{3}}$. Daí, percebe-se que

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \lesssim \frac{1}{T_n^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0.$$

Utilizando agora o Teorema do valor intermediário, conseguimos sequência $t_n \in [T_{n-1}, T_n]$ indo para infinito tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_n} \int_{T_{n-1}}^{T_n} \int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx &= \frac{T_n - T_{n-1}}{T_n} \int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t_n)|^{\frac{7}{2}} dx \\ &\leq \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t)|^{\frac{7}{2}} dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e como por hipótese $\frac{T_n - T_{n-1}}{T_n}$ não converge a 0, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(t_n)|^{\frac{7}{2}} dx = 0$$

concluindo o resultado. ■

Com a proposição acima, conseguimos provar o teorema principal desta seção. De fato, provaremos que as soluções sobre as hipótese do Teorema 5.1.2 satisfazem o critério de *Scattering*.

Demonstração: do Teorema 5.1.2 Sejam R e ϵ como no critério de *Scattering* (Teorema 5.3.1) e as sequências t_n e R_n como na proposição anterior. Pela desigualdade de Hölder temos

$$\int_{|x| \leq R} |u(x, t_n)|^2 dx \lesssim R^{\frac{9}{7}} \left(\int_{|x| \leq R} |u(x, t_n)|^{\frac{7}{2}} dx \right)^{\frac{4}{7}}$$

onde usamos o par de Hölder $(\frac{7}{4}, \frac{7}{3})$ e o fato de que a medida da bola de raio R em \mathbb{R}^3 é proporcional a R^3 . Finalmente, tomando n suficientemente grande temos $R < R_n$ e notando que no conjunto $|x| \leq R_n$ vale que $\frac{R}{|x|} \geq 1$ temos

$$\int_{|x| \leq R} |u(x, t_n)|^2 dx \lesssim R^{\frac{11}{7}} \left(\int_{|x| \leq R_n} |x|^{-\frac{1}{2}} |u(x, t_n)|^{\frac{7}{2}} dx \right)^{\frac{4}{7}} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, pelo Teorema 5.3.1 concluímos o resultado de *Scattering*. ■

Bibliografia

- [1] Bona, J. L. e Smith, R. "The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation". Em: *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 278.1287 (1975), pp. 555–601. ISSN: 0080-4614. DOI: 10.1098/rsta.1975.0035. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.1975.0035>.
- [2] Brezis, Haim. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [3] Campos, Luccas. "Scattering of radial solutions to the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: *Nonlinear Anal.* 202 (2021), Paper No. 112118, 17. ISSN: 0362-546X. DOI: 10.1016/j.na.2020.112118. URL: <https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112118>.
- [4] Campos, Luccas e Cardoso, Mykael. "A virial-Morawetz approach to scattering for the non-radial inhomogeneous NLS". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 150.5 (2022), pp. 2007–2021. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/proc/15680. URL: <https://doi.org/10.1090/proc/15680>.
- [5] Campos, Luccas, Correia, Simão e Farah, Luiz Gustavo. *Sharp well-posedness and ill-posedness results for the inhomogeneous NLS equation*. 2024. arXiv: 2210.07060 [math.AP]. URL: <https://arxiv.org/abs/2210.07060>.
- [6] Cardoso, Mykael e Farah, Luiz Gustavo. "Blow-up of non-radial solutions for the L^2 critical inhomogeneous NLS equation". Em: *Nonlinearity* 35.8 (2022), pp. 4426–4436. ISSN: 0951-7715. DOI: 10.1088/1361-6544/ac7b60. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ac7b60>.
- [7] Copie, François, Randoux, Stéphane e Suret, Pierre. "The Physics of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation in fiber optics: Rogue waves, modulation instability and self-focusing phenomena". Em: *Reviews in Physics* 5 (2020), pp. 2405–4283.
- [8] Datta, Tanmoy e Sen, Mrinal. "Raman mediated ultrafast all-optical NOR gate". Em: *Appl. Opt.* 59.21 (jul. de 2020), pp. 6352–6359.
- [9] Demengel, Françoise e Demengel, Gilbert. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. Universitext. Translated from the 2007 French original by Reinie Erné. Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2012, pp. xviii+465. ISBN: 978-1-4471-2806-9; 978-2-7598-0698-0. DOI: 10.1007/978-1-4471-2807-6. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2807-6>.
- [10] Diestel, J. e Uhl Jr., J. J. *Vector measures*. Mathematical Surveys, No. 15. With a foreword by B. J. Pettis. American Mathematical Society, Providence, RI, 1977, pp. xiii+322.

- [11] Dinh, Van Duong. "Blowup of H^1 solutions for a class of the focusing inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: *Nonlinear Anal.* 174 (2018), pp. 169–188. ISSN: 0362-546X. DOI: 10.1016/j.na.2018.04.024. URL: <https://doi.org/10.1016/j.na.2018.04.024>.
- [12] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998. ISBN: 9780821807729. URL: https://books.google.com.br/books?id=5Pv4LVB_m8AC.
- [13] Farah, Luiz G. "Global well-posedness and blow-up on the energy space for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: *J. Evol. Equ.* 16.1 (2016), pp. 193–208. ISSN: 1424-3199. DOI: 10.1007/s00028-015-0298-y. URL: <https://doi.org/10.1007/s00028-015-0298-y>.
- [14] Farah, Luiz Gustavo e Guzmán, Carlos M. "Scattering for the radial focusing inhomogeneous NLS equation in higher dimensions". Em: *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 51.2 (2020), pp. 449–512. ISSN: 1678-7544. DOI: 10.1007/s00574-019-00160-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s00574-019-00160-1>.
- [15] Farah, Luiz Gustavo e Guzmán, Carlos M. "Scattering for the radial focusing inhomogeneous NLS equation in higher dimensions". Em: *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 51.2 (2020), pp. 449–512. ISSN: 1678-7544. DOI: 10.1007/s00574-019-00160-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s00574-019-00160-1>.
- [16] Fibich, Gadi. *The Nonlinear Schrödinger Equation: Singular Solutions and Optical Collapse*. 1ª ed. Applied Mathematical Sciences 192. Springer International Publishing, 2015.
- [17] Folland, G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2013. ISBN: 9781118626399. URL: <https://books.google.com.br/books?id=wI4fAwwAAQBAJ>.
- [18] Genoud, François e Stuart, Charles A. "Schrödinger equations with a spatially decaying nonlinearity: existence and stability of standing waves". Em: *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 21.1 (2008), pp. 137–186. ISSN: 1078-0947. DOI: 10.3934/dcds.2008.21.137. URL: <https://doi.org/10.3934/dcds.2008.21.137>.
- [19] Glassey, R. T. "On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations". Em: *J. Math. Phys.* 18.9 (1977), pp. 1794–1797. ISSN: 0022-2488. DOI: 10.1063/1.523491. URL: <https://doi.org/10.1063/1.523491>.
- [20] Guzmán, Carlos M. "On well posedness for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 37 (2017), pp. 249–286. ISSN: 1468-1218. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.02.018>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S146812181730041X>.
- [21] Kato, Tosio. "An $L^{q,r}$ -theory for nonlinear Schrödinger equations". Em: *Adv. Stud. Pure Math.* 23 (1994), pp. 223–238.
- [22] Keel, Markus e Tao, Terence. "Endpoint Strichartz estimates". Em: *Amer. J. Math.* 120.5 (1998), pp. 955–980. ISSN: 0002-9327. URL: http://muse.jhu.edu/journals/american_journal_of_mathematics/v120/120.5keel.pdf.
- [23] Lima, Elon Lages. *Espaços métricos*. Vol. 4. Projeto Euclides [Euclid Project]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

- [24] Linares, Felipe e Ponce, Gustavo. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Second. Universitext. Springer, New York, 2015.
- [25] Murphy, Jason. "A simple proof of scattering for the intercritical inhomogeneous NLS". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 150.3 (2022), pp. 1177–1186. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/proc/15717. URL: <https://doi.org/10.1090/proc/15717>.
- [26] Murphy, Jason. "A simple proof of scattering for the intercritical inhomogeneous NLS". Em: *Proc. Amer. Math. Soc.* 150.3 (2022), pp. 1177–1186. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.1090/proc/15717. URL: <https://doi.org/10.1090/proc/15717>.
- [27] Ogawa, Takayoshi e Tsutsumi, Yoshio. "Blow-up of H¹ solution for the nonlinear Schrödinger equation". English. Em: *Journal of Differential Equations* 92.2 (ago. de 1991), pp. 317–330. ISSN: 0022-0396. DOI: 10.1016/0022-0396(91)90052-B.
- [28] Rudin, Walter. *Functional analysis*. Second. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991, pp. xviii+424. ISBN: 0-07-054236-8.
- [29] Tao, Terence. "On the asymptotic behavior of large radial data for a focusing non-linear Schrödinger equation". Em: *Dynamics of Partial Differential Equations* 1 (out. de 2003). DOI: 10.4310/DPDE.2004.v1.n1.a1.
- [30] Weinstein, Michael I. "Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates". Em: *Communications in Mathematical Physics* 87.4 (dez. de 1982), pp. 567–576. DOI: 10.1007/BF01208265.