

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Física

**Uma Nova Estratégia para
Manipulações e Cálculos Envolvendo
Divergências em TQC**

Tese de doutorado submetida
ao Departamento de Física da
Universidade Federal de Minas Gerais

Orimar Antonio Battistel

Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Belo Horizonte
1999

Sumário

1	Introdução	15
2	Divergências em Soluções Perturbativas de Teorias Quânticas de Campos	29
2.1	Introdução	29
2.2	A Teoria $\lambda\phi^4$	30
2.2.1	Auto-Energia	34
2.2.2	Espalhamento	35
2.2.3	Cálculo Perturbativo e Parâmetros Físicos	37
2.3	A Eletrodinâmica Quântica	39
2.3.1	A Eletrodinâmica Quântica Como uma Teoria de “Gauge”	40
2.3.2	Auto-Energia do Elétron	44
2.3.3	Auto-Energia do Fóton	45
2.3.4	Correção do vértice da interação	45
2.3.5	Divergências e Consistência	46
3	Estrutura Geral de Integrais Um “loop”	55
3.1	Introdução	55
3.2	As Funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$	56
3.2.1	$\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$	63
3.2.2	$\lim \lambda_1^2 \rightarrow \infty$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$	64
3.2.3	$p^2 \ll 1$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$	64
3.3	As Funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$	65
3.3.1	$p^2 \ll 1$ em $Z_k(m^2, m^2, p^2)$	67
3.3.2	$\lim m^2 \rightarrow 0$ em $Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2)$	68
3.4	As Funções $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$	69

3.4.1	$\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$	71
3.4.2	$\lim \lambda_1^2 \rightarrow \infty$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$	72
3.4.3	$p^2 \ll 1$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$	72
3.5	As Funções $Y_k(m^2, m^2, p^2)$	72
3.5.1	$p^2 \ll 1$ em $Y_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2)$	73
3.6	As Funções ξ_{nm}	74
3.7	As Funções ξ_{nml}	81
4	Cálculo de Integrais de Feynman	85
4.1	Introdução	85
4.2	Parametrização de Feynman	86
4.3	Integrais Finitas	87
4.4	Integração Dimensional	91
4.5	Integrais Divergentes; Regularização	97
4.5.1	Modificação do Integrandos	97
4.5.2	Modificação dos Limites de Integração	98
4.5.3	Modificação na dimensão da Integral	98
4.5.4	Manipulação e Cálculo com Regularização Implícita	99
4.6	Regularização Covariante de Pauli-Villars	99
4.6.1	Regularização Covariante de Pauli-Villars; Prescrição	102
4.7	Regularização Dimensional	103
4.7.1	Fundamentação Matemática	104
4.7.2	Regularização Dimensional; Prescrição	106
4.7.3	Limitações do método de Regularização Dimensional	108
4.8	Manipulação e Cálculo com Regularização Implícita	108
4.8.1	Idéia Básica	109
4.8.2	Prescrição	110
4.9	A Auto-Energia do Quark por Excitação de um Glúon	111
4.9.1	A Amplitude	111
4.9.2	Regularização Covariante de Pauli-Villars	112
4.9.3	Regularização Dimensional	114
4.9.4	Com Regularização Implícita	117

5	Divergências em Teorias Não-Renormalizáveis	121
5.1	Introdução	121
5.2	A Amplitude Protótipo	123
5.3	Massas Iguais	125
5.3.1	Regularização Mínima	125
5.3.2	Regularização Uniforme	127
5.3.3	Regularização Uniforme Multiparamétrica	128
5.3.4	Eliminação de Comportamentos Não-Físicos	130
5.3.5	Unicidade	132
5.3.6	Independência de Método Específico de Regularização	138
5.4	Massas Diferentes	140
6	Relações de Simetria em Amplitudes Contendo Divergências	153
6.1	Introdução	153
6.2	Campo Escalar Complexo	157
6.2.1	Ingredientes	157
6.2.2	Identidade de Ward para a Corrente Vetorial	158
6.2.3	Nível Árvore	160
6.2.4	Nível Um “loop”	161
6.2.5	Manipulações e Cálculos das Integrais de Feynman Divergentes	163
6.2.6	Violação da Relação de Simetria	167
6.3	QED; Pseudo-amplitudes triangulares	168
6.3.1	Ingredientes	169
6.3.2	Identidades de Ward	169
6.3.3	Identidade $q^\lambda T_{\lambda\nu\mu} = 2mT_{\nu\mu}$	171
6.3.4	Identidade $k_{1\mu}T^{\lambda\mu\nu} = k_{2\nu}T^{\lambda\mu\nu} = 0$	178
6.3.5	Violação das Relações de Simetria	180
6.4	Tensor de Polarização do Vácuo na Q.E.D.	181
6.5	Conclusões	187
7	Ambiguidades Associadas às Possíveis Escolhas para os Rótulos dos Mo- mentos em Amplitudes Contendo Divergências	195
7.1	Introdução	195
7.2	A Amplitude Protótipo	197
7.3	Tensor de Polarização do Vácuo na Q.E.D.	201

7.4	Pseudo-Amplitudes Triangulares - Identidades de Ward e Ambiguidades	203
7.4.1	Identidade de Ward $q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu}$	205
7.4.2	Identidade de Ward $k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu}=0$	206
7.4.3	Identidade de Ward $k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}=0$	207
7.4.4	Ambiguidades e Identidades de Ward	207
7.5	Conclusões	208
8	Ambiguidades e Relações de Simetria em um Modelo de férmions de Spin 1/2 livres e de massas iguais	213
8.1	Introdução	213
8.2	O Modelo, Correntes e Identidades de Ward	216
8.3	Estratégia para Manipulação e Cálculo de Amplitudes Divergentes	223
8.4	Ambiguidades	224
8.4.1	Funções de Green de um Ponto	224
8.4.2	Funções de Green de Dois Pontos	227
8.4.3	Funções de Green de Três Pontos	233
8.5	Identidades de Ward	235
8.6	Conclusões	256
9	Ambiguidades e relações de simetria em um modelo de Férmions de spin 1/2 livres com massas diferentes	263
9.1	Introdução	263
9.2	O modelo, correntes e Identidades de Ward	264
9.3	Ambiguidades	268
9.3.1	Funções de um ponto	269
9.3.2	Funções de dois pontos	271
9.3.3	Funções de três pontos	277
9.4	Identidades de Ward	279
9.5	Conclusões	287
10	Relações entre Integrais Divergentes	293
10.1	Introdução	293
10.2	Relações entre integrais de Feynman.	293
10.3	Regularizações e Termos de superfície	299
10.4	O Método de Pauli-Villars	305

10.5	Dimensão Contínua e Complexa (Regularização Dimensional)	308
10.6	Regras de Feynman e divergências	311
11	Férmions de spin 1/2 livres de massa iguais: Funções de três pontos e suas Identidades de Ward-I.	321
11.1	Introdução	321
11.2	Funções de um e dois pontos.	322
11.3	Funções de três pontos	324
11.3.1	Cálculo de T^{SSS}	324
11.3.2	Cálculo de T^{SPP}	325
11.3.3	Cálculo de T^{VSS}	326
11.3.4	Cálculo de T_{λ}^{VPP}	332
11.3.5	Cálculo de T_{λ}^{ASP}	335
11.3.6	Cálculo de $T_{\mu\nu}^{SVV}$	340
11.3.7	Cálculo de $T_{\mu\nu}^{SAA}$	353
11.3.8	Cálculo de $T_{\mu\nu}^{VAP}$	358
11.3.9	Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$	363
11.3.10	Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$	371
12	Férmions de Spin 1/2 livres e de massas iguais: Funções de três pontos e suas Identidades de Ward II - Pseudo-Amplitudes (Anomalias).	375
12.1	Introdução	375
12.2	Funções de um e dois pontos.	376
12.3	Funções de três pontos.	376
12.3.1	Cálculo de $T_{\mu\nu}^{PVV}$	377
12.3.2	Cálculo de $T_{\lambda\mu}^{VAS}$	377
12.3.3	Cálculo de $T_{\mu\nu}^{PAA}$	378
12.3.4	Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$	379
12.3.5	Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$	387
12.4	Conclusões e Discussões	389
13	A Eletrodinâmica Quântica; Divergências Infravermelhas	395
13.1	Introdução	395
13.2	A teoria	396
13.3	Amplitudes divergentes básicas e relações de simetria.	397

13.4	O método de manipulações e cálculo de amplitudes contendo divergências.	399
13.5	O Diagrama “Tadpole”	401
13.6	A Auto-Energia do Fóton (Tensor de Polarização)	404
13.7	Auto-Energia do Elétron	409
13.8	Correção de Vértice.	415
13.9	Interação de três fótons.	428
13.9.1	Processo de quatro fótons.	430
13.9.2	Renormalização	431
13.9.3	Conclusão	436
14	A Teoria $\lambda\phi^4$ ao Nível Dois “loops” e o Problema das Divergências Superpostas	441
14.1	Introdução	441
14.2	A Teoria $\lambda\phi^4$ em Nível Árvore de Aproximação	444
14.3	Nível um “loop” de Aproximação	446
14.3.1	Auto-Energia ao Nível um “loop”	447
14.3.2	Espalhamento Elástico ao Nível um “loop”	448
14.3.3	Renormalização ao Nível um “loop”	451
14.4	Nível dois “loops” de Aproximação	454
14.4.1	Auto Energia ao Nível dois “loops”	454
14.4.2	Espalhamento Elástico ao Nível Dois “loops”	459
14.5	Divergências Superpostas	463
14.5.1	Divergência Logarítmica	464
14.5.2	Divergência Quadrática	465
14.6	Renormalização ao Nível dois “loops”	468
14.7	Relações Entre Divergências Básicas Superpostas	472
14.8	Parametrizações para Divergências Básicas Superpostas	475
14.9	Ambiguidades e relações de simetria	476
14.10	Conclusões	478
15	Considerações Finais	483

Lista de Figuras

2.1	propagador	33
2.2	vrstice	33
2.3	Representação da auto-energia da partícula escalar.	34
2.4	Contribuição um “loop” de ordem mais baixa para a auto-energia.	35
2.5	Contribuição um “loop” de ordem mais baixa para a auto-energia.	35
2.6	Representação do espalhamento elástico de duas partículas escalares.	36
2.7	Diagrama árvore contribuindo para o espalhamento elástico.	36
2.8	Contribuições um “loop” para o espalhamento elástico.	36
2.9	Contribuições dois “loops” para o espalhamento elástico de dois escalares.	37
2.10	Propagador corrigido pela auto-energia.	38
2.11	43
2.12	43
2.13	44
2.14	Representação diagramática da auto-energia do elétron em expansão perturbativa.	44
2.15	Representação diagramática da auto-energia do fóton em expansão perturbativa.	45
2.16	Representação diagramática da correção do vértice em expansão perturbativa até três interações.	45
2.17	Diagramas correspondentes ao processo caracterizado por três fótons externos.	47
2.18	Diagrama “tadpole” na QED.	48
2.19	Diagrama representando o processo com quatro fótons externos.	48
4.1	Representação diagramática das funções de dois pontos.	88
4.2	Ilustração do teorema da continuação analítica.	104

4.3	Domínio de analiticidade de $\Gamma_E(z)$	105
4.4	Domínio de analiticidade de $\Gamma_\omega(z)$	106
4.5	Auto-energia do quark.	111
5.1	a) Auto-energia fermiônica e b) Vértice da interação Férmion-Bóson.	124
6.1	Corrente vetorial acoplada a dois campos escalares.	158
6.2	Contribuição de nível árvore.	161
6.3	Contribuições de nível um “loop” e seus contratermos [4].	161
6.4	Contribuições de nível um “loop” para o vértice da interação.	162
6.5	Diagramas contribuindo para a amplitude $T_{\mu\nu}$ “direto”, (a) e “cruzado”, (b).170	
6.6	Diagramas contribuindo para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}$	171
6.7	Diagrama representando a função de Green da eq.(6.100)	182
7.1	Auto-energia fermiônica com rótulos arbitrários.	197
7.2	Tensor de polarização do vácuo da Q.E.D. com rótulos arbitrários para os momentos das linhas internas.	201
7.3	Diagrama “direto” para a amplitude $T_{\mu\nu}$, com rótulos arbitrários para as linhas fermiônicas do “loop”.	203
8.1	Funções de Green de um ponto. O operador $\Gamma = (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5)$ define as funções $T^S(l, m)$, $T^P(l, m)$, $T_\mu^V(l, m)$ e $T_\mu^A(l, m)$ respectivamente. O momento l é arbitrário.	217
8.2	Funções de Green de dois pontos com rótulos arbitrários para os momento internos. Com os vértices $(\Gamma_i, \Gamma_j) = (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5)$ definimos as funções $T^{ij}(k_1, m; k_2, m)$ de interesse. A diferença $k_1 - k_2$ é o momento externo q	217
8.3	Funções de Green de três pontos. Os momento k_1 , k_2 e k_3 são arbitrários. As diferenças destes estão relacionados aos momentos externos $k_3 - k_1 = p$, $k_1 - k_2 = p'$ e $k_3 - k_2 = q$	218
8.4	Função de Green de três pontos correspondente ao “canal cruzado” do diagrama representado na fig.(8.3).	219
8.5	Representação diagramática da Identidade de Ward relativa à amplitude T_μ^{VS}	236
8.6	Representação diagramática da Identidade de Ward relativa à amplitude T_μ^{PA}	237
8.7	Representação diagramática da Identidade de Ward $(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{AA} = 2mT_\mu^{AP}$.240	

8.8	Representação diagramática para as duas correntes axiais de $T_{\mu\nu}^{AA}$ sucessivamente contraídas com o momento externo.	241
8.9	Diagrama para o “canal direto” da amplitude T_{λ}^{VSS} , seguindo a convenção adotada na seção 2.	242
8.10	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda}^{VSS}$	242
8.11	Diagrama correspondente ao “canal cruzado” de $T_{\lambda}^{V \rightarrow SS}$	243
8.12	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda}^{VPP}$	245
8.13	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda}^{ASP}$	246
8.14	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\mu\nu}^{SVV}$	247
8.15	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\mu\nu}^{SAA}$	248
8.16	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu}^{VAP}$	249
8.17	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\lambda\mu}^{VAP}$	249
8.18	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\mu\nu}^{PVV}$	250
8.19	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu}^{VAS}$	251
8.20	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\lambda\mu}^{VAS}$	251
8.21	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$	252
8.22	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$	253
8.23	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$	254
8.24	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$	255
8.25	Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$	255
8.26	Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$	257
9.1	Representação diagramática da Identidade de Ward relativa à amplitude T_{μ}^{VS}	280
9.2	Representação diagramática da Identidade de Ward $(k_1 - k_2)^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV}$	283
9.3	Representação diagramática de $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda}^{VSS}$	286
9.4	Representação diagramática de $(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda}^{VPP}$	286
13.1	Função de Green de um ponto fermiônica.	401
13.2	Função de Green fermiônica de dois pontos.	404
13.3	Função de Green fermiônica de dois pontos.	409
13.4	A auto-energia do elétron por excitação de um fóton.	410
13.5	A correção de vértice.	415
13.6	Representação diagramática para a eq.(13.120).	426

14.1	Representação da solução perturbativa em ordem mais baixa para o espalhamento elástico de dois escalares.	445
14.2	Representação da solução perturbativa em ordem mais baixa para a auto-energia do escalar.	445
14.3	Contribuições até um “loop” para o espalhamento elástico, (a).	447
14.4	Contribuições até um “loop” para a auto-energia (b).	447
14.5	Diagrama “tadpole” para a auto-energia do escalar.	447
14.6	Diagrama “peixe” para o espalhamento de escalares.	449
14.7	Diagrama “peixe” para o espalhamento de escalares.	449
14.8	Diagramas Contribuindo para a amplitude de espalhamento de duas partículas esclares em ordem λ_0^2 , incluindo os diagramas de contratermos. .	453
14.9	Diagramas Contribuindo para a propagação da partícula escalar interagente, incluindo aquele de contratermo de massa.	454
14.10	Representação diagramática da expansão perturbativa ao nível dois “loops” para a propagação da partícula interagente.	454
14.11	Representação diagramática da expansão perturbativa ao nível dois “loops” para o espalhamento elástico.	455
14.12	Diagrama “double scoop” de dois “loops” para a auto-energia.	455
14.13	Subestruturas de um “loop” no diagrama “double scoop” indicando a presença de contratermos.	456
14.14	Diagramas de contratermos um “loop” induzidos pela identificação de respectivas subestruturas na fig.(14.11).	456
14.15	Diagrama de contratermo com topologia um “loop”, (a), e seu correspondente contratermo, (b).	457
14.16	Diagrama “setting sun”, com rótulos arbitrários para as linhas internas. . .	457
14.17	Subestrutura com topologia um “loop” divergente e correspondentes contratermos um “loop” (b) e árvore (c) no diagrama “setting sun” . Outro conjunto equivalente pode ser obtido por reflexão no eixo horizontal. . . .	458
14.18	Diagramas contribuindo para o espalhamento elástico de dois escalares em ordem λ_0^3 nos canais s (a); u (b) e t (c).	460
14.19	Subestruturas um “loop” no diagrama de dois “loops”.	460
14.20	Diagramas de contratermos respectivos às subestruturas identificadas nos diagramas da fig.(14.17) e seus correspondentes contratermos.	460

14.21	Diagrama dois “loops” contribuindo para o espalhamento elástico com correção de auto-energia em linha interna.	461
14.22	Subestruturas um “loop” e diagrama de contratermo associado.	462
14.23	Diagrama contribuindo para o espalhamento elástico de dois escalares contendo divergências não separáveis em produto.	462
14.24	Subestrutura um “loop” no diagrama de dois “loops”, a) e diagrama de contratermo associado e seu próprio contratermo, b).	463
14.25	Todos os diagramas contribuindo para a auto-energia do escalar até dois “loops”. Os diagramas e seus respectivos contratermos foram agrupados entre chaves e colchetes para ressaltar as suas origens.	470
14.26	Todos os diagramas contribuindo para o espalhamento elástico de dois escalares até dois “loops”. Os diagramas e seus respectivos contratermos foram agrupados para ressaltar as suas origens.	471

Capítulo 1

Introdução

O formalismo matemático construído dentro da teoria quântica de campos (TQC), conhecido como Expansão Perturbativa Diagramática [1], é aceito atualmente como a mais adequada ferramenta teórica para o estudo das partículas elementares e suas interações. Essa crença é, em grande parte, devida ao incrível sucesso da Eletrodinâmica Quântica (QED) na descrição de observáveis físicos [2], a qual produz os melhores números da história da ciência até os dias de hoje. A maneira como estas conclusões foram construídas está longe de ser óbvia. A QED somente foi aceita como uma teoria após uma apropriada interpretação ter sido dada às divergências que aparecem no cálculo perturbativo [3].

Uma TQC pode ser vista, dentro do contexto acima, como sendo representada por uma lagrangiana, a qual incorpora o conjunto básico de hipóteses nas simetrias implementadas em sua construção, ou pelas correspondentes regras de Feynman associadas. Esperamos, da aplicação deste esquema, pelo menos a produção de amplitudes que sejam compatíveis com princípios gerais, tais como unitariedade e simetrias fundamentais da teoria, ordem a ordem na expansão perturbativa. A implementação destas exigências é frequentemente obtida pela imposição de relações entre funções de Green da teoria, as Identidades de Ward [4].

A expansão perturbativa é usualmente feita tendo como parâmetro a constante de acoplamento. Uma vez que a estrutura da lagrangiana, investigações do conteúdo físico e definições de parâmetros são construídas sobre a estrutura dos momentos, é necessária uma reparametrização da teoria a cada nova ordem de aproximação implementada. Esta pode ser realizada escrevendo-se as amplitudes na forma de expansões em potências dos momentos (expansões em série de Taylor, por exemplo) e identificando-se os parâmetros físicos, que são os coeficientes das respectivas potências dos momentos na construção

da lagrangiana. Neste processo o elemento complicador reside no fato de as amplitudes, obtidas a partir das regras de Feynman, em ordens que incluem contribuições de diagramas contendo “loops” ¹ (e, portanto, integrações), apresentarem divergências. Assim, a fim de podermos redefinir as constantes físicas da teoria, numa certa ordem de interesse, nos deparamos antes com a necessidade de encontrar um método consistente para manipulações e cálculos envolvendo integrais divergentes. Visto de outra maneira, precisamos de uma prescrição matemática, para manusear esses “infinitos”, que sirva aos propósitos da reparametrização. Convencionalmente isso tem sido feito de acordo com diferentes filosofias, que têm em comum o fato de modificarem o integrando ou as integrais de modo a torná-las finitas.

No caso específico da QED a prescrição mais famosa historicamente foi a chamada Regularização Covariante de Pauli-Villars [5]. Ela foi construída de modo a permitir a regularizabilidade e simultaneamente manter válidas as Identidades de Ward (invariância de “gauge”). Nesta prescrição um parâmetro (pelo menos) é introduzido nos integrandos sobre o qual é tomado um “limite de conexão” com a situação original ao final dos cálculos. As divergências das integrais originais reemergem então como funções monotônicas do parâmetro de regularização. A identificação da estrutura das divergências permite-nos construir apropriados contratermos a fim de tornar finitas as amplitudes da teoria, ou seja, efetuar a reparametrização (renormalização).

Nos dias atuais, entretanto, a mais famosa e importante filosofia para manusear divergências em TQC é a chamada Regularização Dimensional [6]. Nesta prescrição as divergências são evitadas através da formulação da teoria (regras de Feynman) em dimensão 2ω [7], sendo ω uma variável contínua e complexa. Então, sob a hipótese de que as amplitudes assim obtidas são funções analíticas da variável ω , podemos manuseá-las livremente. Nestas manipulações podem ser incluídos “shifts” na variável de integração, os quais seriam proibidos em integrais divergentes (exceto logaritmicamente)[8] na dimensão física $\omega = 2$. Depois de feitas todas as manipulações necessárias, as amplitudes físicas são obtidas através de uma expansão em torno de $\omega = 2$ e posteriormente toma-se o limite $\omega \rightarrow 2^+$. As divergências originais manifestam-se como pólos em $\omega = 2$. Pode-se assim construir apropriados contratermos, promover a renormalização na ordem desejada e tornar a teoria “finita”. O método da Regularização Dimensional, apesar de pouco

¹Utilizaremos a palavra “loop”, cuja tradução para o português poderia ser laço, neste trabalho por, segundo nosso julgamento, já ter sido incorporada ao vocabulário coloquial deste assunto. O mesmo vale para os vocábulos “gauge”, cuja tradução poderia ser calibre, e “shift” que poderia ser translação.

intuitivo, tem se mostrado plenamente consistente e, por isso, largamente utilizado no tratamento de teorias renormalizáveis, naquelas situações onde se aplica. Este método não pode ser aplicado, de modo natural pelo menos, em situações em que a matriz γ_5 de Dirac é necessária, já que esta não possui generalizações fora da dimensão física [9].

No caso de teorias renormalizáveis, entre as quais a QED se inclui, os procedimentos de regularização são, a rigor, somente necessários para o tratamento de um pequeno número de amplitudes divergentes básicas, pois pode ser verificado que as amplitudes correspondentes em ordem mais elevadas contêm somente divergências similares àsquelas básicas. Esta característica está intimamente ligada ao conteúdo de simetria das teorias, que estabelece relações entre funções de Green em diferentes ordens de teoria de perturbação. Tais vínculos ou relações são materializadas pelas Identidades de Ward. Assim, manter essas identidades válidas em todas as ordens é crucial para a renormalizabilidade da teoria. Portanto, qualquer método de regularização consistente deve preservar essas identidades. Os métodos aos quais nos referimos acima mostram-se ambos consistentes no caso da QED, mas limitados fora deste contexto. A regularização de Pauli-Villars mostra-se problemática em manter válidas as teorias de “gauge” com simetrias não triviais [10]. O principal problema da Regularização Dimensional apresenta-se ao descrever processos envolvendo a matriz γ_5 de Dirac, como já dissemos acima, que são indispensáveis no contexto de teorias fermiônicas e Simetria Quiral. A isso podemos adicionar ambiguidades de interpretação de certas integrais divergentes em teorias com partículas sem massa [11].

Do que foi exposto, podemos dizer que temos a disposição uma prescrição consistente (Teoria de Renormalização) para a eliminação das divergências surgidas na expansão perturbativa da TQC, mas este esquema sofre de um grave problema: é profundamente dependente de prescrições específicas de regularização, as quais não são de aplicabilidade geral quando consistentes e, em geral, não consistentes quando aplicáveis sem restrições. Tudo isso para uma classe restrita de possíveis teorias e simetrias de interesse: as teorias renormalizáveis. Fora deste contexto, no que diz respeito às divergências, a situação é mais restritiva.

Embora tenha sido muito importante para o desenvolvimento das teorias fundamentais das Interações Eletrofracas e Fortes, o conceito de renormalizabilidade representa uma limitação fortíssima para a utilização desse conjunto de ferramentas na descrição em geral da fenomenologia das partículas elementares [12]. Ocorre que, em muitos casos de interesse, as simetrias e os números quânticos envolvidos não permitem a construção de teorias renormalizáveis [13]. Neste caso os “infinitos” não podem ser completamente absorvidos

e um possível poder de predição da teoria correspondente envolve, necessariamente, uma “convivência pacífica” com as divergências. A participação dos métodos de regularização torna-se ainda mais importante. As teorias não renormalizáveis sofrem, portanto, de diversos “males”: a inevitável contaminação das amplitudes físicas por divergências, os “infinitos” típicos da TQC, além de todos os inconvenientes associados aos métodos de regularização. Entre estes últimos podemos citar a introdução de comportamentos não físicos, violações de simetria, perda de unitariedade, pólos fantasmas e diferentes tipos de ambiguidades [14].

Teorias efetivas (não renormalizáveis), por outro lado, têm indubitavelmente desempenhado um importante papel no entendimento de vários problemas físicos, em especial a física dos processos hadrônicos de baixas energias [13] [15]. Apesar desses sucessos, uma questão teórica relacionada às divergências permanece sem respostas adequadas, pois os métodos de regularização, que deveriam ser (se possível) considerados como ferramentas auxiliares para as manipulações e cálculos de amplitudes divergentes, influenciam decisivamente os resultados obtidos de um mesmo modelo físico e dentro da mesma aproximação. Em muitos casos duas diferentes formas da mesma amplitude (conectadas por um identidade matemática) produzem resultados diferentes quando tratados pela mesma filosofia de regularização. Do ponto de vista físico isso é inaceitável e devemos buscar construir prescrições de manipulações e cálculos de amplitudes divergentes de modo que os resultados físicos sejam independentes da regularização utilizada e possam refletir apenas o conteúdo físico do modelo dentro dos pressupostos básicos da TQC.

Como podemos ver, existem muitos problemas associados à presença de divergências em soluções perturbativas de TQC. Um problema ainda mais importante do que aqueles acima citados refere-se à própria possibilidade de uma teoria ser “levada a sério” na determinação das consequências de um conjunto de simetrias para um processo físico, ou seja, a possibilidade de determiná-las sem ambiguidades. Esse problema é comum tanto às teorias renormalizáveis como às não renormalizáveis. Assim, se as amplitudes, após manipuladas e calculadas segundo alguma prescrição dada, não carregarem mais o conteúdo de simetria original (violações de simetria) ou contiverem ambiguidades, seguramente estas amplitudes não podem ser “levadas a sério”. Neste aspecto apenas a situação daquelas teorias renormalizáveis nas quais pode ser aplicada a Regularização Dimensional é satisfatória, pois as amplitudes produzidas preservam as simetrias e a solução será livre de ambiguidades originadas pelas possíveis escolhas para os momentos das linhas internas dos “loops”. A razão disto é muito simples e fácil de entender. Se temos várias escolhas

equivalentes possíveis para rotular os momentos dos “loops”, podemos escolher várias expressões para a amplitude correspondente. Uma pode ser levada à outra através de apropriadas redefinições ou “shifts” na variável de integração. No caso da Regularização Dimensional, ainda que as amplitudes sejam divergentes na dimensão física, é possível efetuarem-se “shifts”. Sendo assim qualquer escolha dos rótulos leva ao mesmo resultado final. Fora deste cenário o problema relacionado a essas ambiguidades é bastante complicado. Em teorias não renormalizáveis ou nas renormalizáveis (por contagem de potências) em que a matriz γ_5 de Dirac desempenha papel importante, somos impedidos de utilizar este método consistente. Nestes casos, pelas razões expostas acima, concluímos que as amplitudes podem ser ambíguas. Isto ocorre porque devemos efetuar “shifts” em integrais divergentes se desejamos relacionar duas amplitudes físicas correspondentes a diferentes escolhas para os rótulos dos momentos. A compensação desta operação deve ser a introdução de “termos de superfície”. Desse modo duas amplitudes para o mesmo processo físico, que deveriam resultar iguais, diferem entre si, exatamente pelos termos de superfície, de tal sorte que a amplitude é ambígua. Por razões acima relacionadas, estes termos também estão associados às violações de relações de simetria. O problema da existência de violações destas relações (Identidades de Ward) e ambiguidades ocupou, nas últimas décadas, e ainda hoje ocupa, um destacado posto dentro da TQC onde se encontram as famosas anomalias. Nenhum método convencional de regularização é capaz de evitar esta situação incômoda [16].

Toda esta argumentação serve para que possamos estabelecer um ponto de vista a respeito do atual “status” deste problema: a situação ideal relativa ao tratamento das divergências presentes em soluções perturbativas de TQC não foi ainda obtida. Sendo assim justificam-se investigações adicionais tendo por objetivo a construção de estratégias alternativas para as manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes, que sejam capazes de evitar os inconvenientes citados, isto é, que se mostrem consistentes no mais amplo sentido possível. O alvo principal desta preocupação é o problema das teorias efetivas não renormalizáveis cujo sentido físico depende crucialmente da possibilidade de um adequado tratamento das divergências.

Com base nestas questões nos propusemos a promover estudos em amplitudes contendo divergências que nos levassem ao entendimento da origem matemática dos muitos inconvenientes que contaminam tais amplitudes, a fim de, se possível, poder evitá-los. Princípios pelo caso de amplitudes associadas a teorias não renormalizáveis, porém, com a evolução das investigações, percebemos que a estratégia, que pouco a pouco emerge, é de

aplicabilidade geral e pode substituir as técnicas convencionais, com vantagens, também para o caso das teorias renormalizáveis.

Neste trabalho nos orientamos na busca de respostas adequadas para a seguinte questão:

“Qual o procedimento a ser seguido, no tratamento de integrais divergentes, a fim de que o conteúdo físico de TQC^s, em solução perturbativa, possa ser apreciado livre de inconsistências ou ambiguidades?”

Tendo em vistas que integrais divergentes são objetos indefinidos, do ponto de vista matemático, a resposta para a pergunta acima, se houver, virá na forma de um conjunto de regras. A melhor expectativa que podemos ter é conseguir enunciá-las e, como consequência, obter todas as amplitudes de qualquer teoria ou modelo com as propriedades desejadas.

A fim de alcançar nossos objetivos desenvolveremos nossas investigações de um modo inverso daquele usual. Ao invés de propormos um método de regularização, de início, e verificarmos as consequências disto, vamos em busca das propriedades que um eventual método destes deve incorporar a fim de poder ser consistente. Para que estas possibilidades possam ser estabelecidas será necessário que estudemos uma larga classe de situações possíveis em TQC. Entre as quais podemos citar: teorias com massas iguais, massas diferentes e massas nulas; em simetrias abelianas e não abelianas, para os casos renormalizáveis e não renormalizáveis. Qualquer conjunto de regras, caracterizando um método de regularização, que se mostre consistente numa das situações não necessariamente o será noutra. Deste modo não é possível evitar uma grande e detalhada quantidade de cálculos, o que torna o trabalho longo e volumoso, a fim de que possa ser claro nos seus aspectos principais. O material incluído representa, neste sentido, um conteúdo mínimo e foi organizado do seguinte modo:

No capítulo 2 nós estabelecemos a existência das divergências em amplitudes físicas e alguns conceitos relacionados à idéia de renormalização, considerando as teorias $\lambda\phi^4$ e QED.

No capítulo 3 introduzimos e estudamos um conjunto de funções em termos das quais escrevemos os resultados dos cálculos de todas as amplitudes, ao nível um “loop”, que calcularemos. Estas estruturas, e a sistematização que elas permitem, constituem uma parte importante deste trabalho.

No capítulo 4 discutiremos questões relacionadas ao cálculo de integrais de Feynman (finitas) bem como aquelas relativas a regularizações.

No capítulo 5 começamos as investigações considerando os problemas associados à presença de divergências em amplitudes pertencentes a teorias não renormalizáveis, principalmente a questões dos comportamentos não físicos, violações de unitariedade e dependência com o método específico de regularização.

No capítulo 6 já utilizamos algumas conclusões retiradas do capítulo 5 para estudar relações de simetria envolvendo amplitudes físicas divergentes. Ao colocarmos sob o mesmo ponto de vista Identidades de Ward; para as teorias de campo escalar complexo (carregado), QED e QED quirial (anomalias triangulares), encontramos um conjunto de condições para que as simetrias não sejam violadas.

No capítulo 7 consideramos a questão das ambiguidades associadas às arbitrariedades envolvidas nas escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas. Também verificamos o papel desempenhado por estas ambiguidades em termos potencialmente violadores de relações de simetria. A perspectiva da construção de uma estratégia para o tratamento de divergências emerge ao verificarmos que as condições extraídas no capítulo 6, para que as relações de simetria fossem satisfeitas, são as mesmas, necessárias e suficientes, para que as ambiguidades desapareçam em todos os casos considerados.

No capítulo 8 nós reunimos as conclusões principais dos capítulos 5, 6 e 7, formulamos uma estratégia para manipulações e cálculos de amplitudes divergentes e analisamos todas as amplitudes, com grau superficial de divergência superior ao logarítmico, para um modelo de férmions de spin $1/2$ livres e de massas iguais. As funções de um e dois pontos são calculadas explicitamente e suas Identidades de Ward investigadas. Quanto às funções de três pontos nós determinamos a parte ambígua explicitamente e verificamos as relações de simetria utilizando um modo indireto, que faz uso apenas do cálculo explícito de funções de dois pontos, seguindo uma clássica referência no assunto: o trabalho de Gerstein e Jackiw [17], que se propõe a estabelecer e justificar as anomalias triangulares. Surpreendentes e importantes constatações emergem deste estudo, pois as formas finais das amplitudes oferecidas pela nossa “estratégia” podem ser mapeadas naquelas da R.D. ou naquelas de Gerstein e Jackiw mas por interpretações diferentes dadas a um conjunto de relações entre integrais divergentes. Ao adotarmos a interpretação que mapeia os resultados naquelas da R.D. teremos todas as amplitudes não ambíguas e todas as relações de simetria satisfeitas, inclusive as anômalas.

No capítulo 9 repetimos a análise do capítulo 8 agora para o caso de férmions de spin $1/2$ livres porém com massas diferentes. Descobrimos um novo tipo de ambiguidade a qual denominamos “ambiguidade de escala”. Isto nos permite estabelecer a afirmação de

que todo termo de violação de relação de simetria é ambíguo. Além disto descobrimos a necessidade de comunicações exatas entre as partes finitas e aquelas divergentes nas amplitudes físicas, sem as quais as Identidades de Ward não podem ser satisfeitas. Isto exige a fixação, de um modo único, de todos os termos das amplitudes, não permitindo qualquer dependência com métodos de regularização. Por fim confirmamos a principal conclusão do capítulo 8: o método de Gerstein e Jackiw para análise das funções de três pontos permite concluir pela não violação das Identidades de Ward e pela eliminação de ambiguidades.

No capítulo 10 estudamos relações entre integrais de Feynman a fim de entender as relações entre integrais divergentes que permitem a eliminação dos termos ambíguos e levam a relações de simetria automaticamente satisfeitas: as “relações de consistência”. Descobrimos então que estas relações não podem ser mantidas simultaneamente a algumas propriedades algébricas em integrais divergentes. Isto estabelece dependência do resultado final com os passos intermediários de cálculo, mesmo para a Regularização Dimensional. A única chance de consistência está na reinterpretação das regras de Feynman de modo a evitar a possibilidade de as operações inconsistentes entre si ocorrerem simultaneamente nas amplitudes físicas. A formulação desta regra nos obriga a rever alguns cálculos realizados.

Nos capítulos 11 e 12 analisamos as funções de três pontos e suas Identidades de Ward porém à luz das conclusões do capítulo 10. As anomalias emergem então com o valor correto em uma análise universal livre de ambiguidades. A origem das anomalias e a conexão com o teorema de Sutherland [18] são estabelecidas com simplicidade e transparência. Temos então a consistência desejada para a estratégia.

No capítulo 13 aplicamos o método para a renormalização da QED ao nível um “loop” e também verificamos questões específicas a respeito da presença de partículas de massa nula (divergências infravermelhas).

No capítulo 14 consideramos a renormalização da teoria $\lambda\phi^4$ ao nível dois “loops” a fim de verificar a aplicabilidade do método neste contexto, bem como colher elementos novos específicos deste nível de aproximação perturbativa.

No capítulo 15 nós finalizamos, resumindo as principais conclusões e apontando novos estudos e investigações capazes de complementar o material incluído neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] R.P. Feynman, Phys. Rev. 84, 123 (1951);
R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 749 (1949);
R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 769 (1949);
R.P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961);
R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 37 (1948);
R.P. Feynman and R. Hibbs, “Quantum Mechanics and Path Integrals”, McGraw-Hill (1965);
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
J.D.Bjorken and S.D.Drell; Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York (1965);
J.J.Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, reading, Massachusetts (1967);
W.Greiner and J.Reinhardt: Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, Heidelberg (1994);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
F.Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, John Wiley and Sons, (1993);
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [2] W.E.Lamb and R.C.Rutherford, Phys.Rev. 72, 241(1947);

- B.E.Lantrup, A.Peterman and E.de Rafael, Phys. Rep. 3C, 193 (1972);
 J.Schwinger, Phys. Rev. 73, 416 (1948);
 P.Kusch and H. Foley, Phys. Rev. 72, 1256 (1946);
 P.Kusch and H. Foley, Phys. Rev. 73, 412 (1948);
 S.J.Brodsky, SLAC preprint SLAC-PUB-1699 (1975);
 T.Kinoshita, Quantum Electrodynamics, World Scientific, Singapore (1990);
- [3] R.P. Feynman, Phys. Rev. 74, 939 (1948);
 J.Schwinger, Phys. Rev. 73, 416 (1948);
 J.Schwinger, Phys. Rev. 75, 898 (1949);
 S.Tomonoga, Phys. Rev. 74, 224 (1948);
 F.J.Dyson, Phys. Rev. 75, 486 (1949);
 N.N.Bogolinbov and D.S.Parasink, Acta. Math. 97, 227 (1957);
 k.hepp. Comm. Math. Phys. 2, 301 (1966);
 W.Zimmermann, In Lectures on Elementary Particles and Quantum Field theory,
 Proc. 1970 Brandeis Summer Institute (ed. S. Desser et al.) MIT Press, Cambridge,
 Massachusetts (1970);
- [4] J.C. Ward Phys. Rev. 78, 1824 (1950);
 Y. Takahashi, Nuovo Cimento 6, 370 (1957);
 J.C. Ward , Proc. Phys. Soc. 64, 54 (1951);
 C. Becchi, A. Ronet and R. Stora, Comm. Math. Phys. 42, 127 (1975);
 J.C. Taylor, Nucl. Phys. B33, 436 (1971);
 A.A. Slavnov, Theor. and Math. Phys. 10, 99 (1972);
 O.Piguet and S.P. Sorela, Algebraica Renormalizaçao, Lecture Notes on Physics 28
 Springer-Vetlag (1995);
- [5] W.Pauli and F.Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949);
 T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford
 University Press, New York (1984)
- [6] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company
 (1987);
 B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics
 Publishing, Amsterdam (1986);

- M.E. Fisher and D.S. Gaunt, Phys. Rev. 133, A 224 (1964);
 K.G. Wilson and M.E. Fisher Phys. Rev. Lett. 28, 240 (1972);
 K.G. Wilson , Phys. Rev. 07, 2911 (1973);
 K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. 12, 75 (1974);
 t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
 C. G. Bollini and J.J. Giambiagi, Phys. Lett. 40B, 566 (1972);
 G.M. Cicuta and E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. 4, 329 (1972);
 J.F. Askmore, Nuovo Cimento Lett. 4, 289 (1972);
 E.R. Speer and M.J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré A14, 1 (1971);
- [7] P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
- [8] Treiman, S.L. , Jackiw, R. and Gross, D.J. Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
 S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
 T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984)
 S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, (1996);
 K. Huang, Quarks, Leptons and Gauge Fields, World Scientific (1992);
 P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [9] t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
 W.A. Bardeen, in Proceedings XVI International Conference on High Energy Physics (National Accelerator Lab., Battavia, IL)(1972);
 M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. B159, 225 (1979);
 P. Breitenlohner and D. Maison, Comm. Math. Phys. 52, 11 (1977);
 P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
 P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [10] G.Leibrant Rev. Mod. Phys. 47 (849) 1975;
 R. Gastmans and R. Mensdermans, Nucl. Phys. B105,454 (1973);
 R. Gastmans , J. Verwaest and R. Mensdermans, Nucl. Phys. B105,454 (1976);
 W. Marciano and A.Sirlin Nucl. Phys. B88, 86 (1975);

- [11] S.L.Glashow, Nucl. Phys. 22, 579 (1961);
 S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967);
 A. Salam, Elementary Particle Theory, Stockholm (1968);
 G.t'Hooft , Nucl. Phys. B33, 436 (1971);
 G.t'Hooft , Nucl. Phys. B35, 167 (1971);
 G.t'Hooft , Nucl. Phys. B61, 455 (1973);
 G.t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
 G.t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B50, 318 (1972);
 S.L.Glashow, J.Iliopoulos and L.Maiani, Phys. Rev D2, 652 (1970);
 A. Salam and J.C. Ward, phys.Lett. 19,168 (1964);
 D.J. Gross and F.Wilczek, Phys. Rev. D8, 3633 (1973);
 H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett. 26, 1346(1973);
 H.Georgi and S.L.Glashow, Phys.Rev. D6, 429 (1972);
 H.Georgi and S.L.Glashow, Phys.Rev. Lett. 32, 438 (1974);
 K.G.Wilson and J.Kogut, Phys. Rep. 12C, 75 (1974);
 H.M.Georgi, H.R.Quinn and S.Weiberg, Phys. Rev. Lett. 33, 451 (1974);
 K.G.Wilson ,Phys. Rev. D10, 2445 (1974);
- [12] Veja capítulo 2;
 de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics.
 North-Holland, Amsterdam (1973) ;
 S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987);
 C.G.Callan Jr, S. Coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. 177, 2247 (1969);
 J.Gasser and H. LentWysler, Ann. of Phys. 158, 142 (1984);
- [13] Veja capítulo 5;
- [14] Y. Nambu and J. Jona-Lisinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345;
 A. Kocic, Phys. Rev. D33 (1985) 1785;
 D. Kohana, Phys. Lett. B229 (1989) 9;
 T. Hatsuda and T.Kuniskiro, Phys. rep. 247 (1994) 221;
 J.Bijnens, Phys. Rep. 265 (1996) 369;
 S.P. Kevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992);
 V.Bernard, A.Blin, B.Hiller, Y.P.Ivanov,A.A.Osipov and U.G.Meissner, Annals of
 Phys. 249, 499 (1996);
 de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics.

- North-Holland, Amsterdam (1973) ;
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987);
C.G.Callan Jr, S.coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. 177, 2247 (1969);
J.Gasser and H. LentWysler, Ann. of Phys. 158, 142 (1984);
- [15] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984)
Adler, S.L. Phys. Rev. 177, 2426 (1969);
Bell, J.s. and Jackiw, R. Nuovo Cimento 60A, 47 (1973);
Fijikawa, K. Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979);
Treiman, Jackiw, Tamino and Witten, Corrent Algebra and Anomalias, Princeton University Press (1985);
Sutherland,D.G., Nucl. Phys, B2, 433 (1966);
Veltman, M. Proc. R. Soc. A301, 107 (1967);
Adler, S.L. and Bardeen, W.A. Phys. Rev. 182, 1517 (1969);
Bardeen, W.A. Phys. Rev. 184, 1848 (1969);
K.G. Wilson, Phys. Rev. 125, 1067 (1962).
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
- [16] I.S. Gerstein and R.Jackiw, Phys. Rev. 181 1955 (1969);
- [17] Sutherland D.G. Nucl. Phys. B2, 433 (1966)
Veltman, M. Proc. R. Soc. A301, 107 (1967);

Capítulo 2

Divergências em Soluções Perturbativas de Teorias Quânticas de Campos

2.1 Introdução

As teorias quânticas de campos, que nós consideraremos em nossas discussões, podem ser estabelecidas através de uma lagrangiana \mathcal{L} [1]. Esta é construída a partir de adequadas combinações dos campos associados às partículas, das quais estamos interessados em descrever a dinâmica de interações. Estas combinações são feitas de tal modo a obtermos escalares de Lorentz e do grupo total de simetrias as quais considerarmos relevantes [2]. Uma vez construída a lagrangiana, postularemos aqui que existem modos bem estabelecidos de efetuar a quantização da teoria e que através de uma apropriada aplicação da teoria de perturbações, na solução das equações de movimento, podemos construir uma interpretação consistente da expansão perturbativa pelas regras de Feynman da teoria [3]. Com estas podemos, pela especificação dos campos externos, ou seja, as partículas iniciais e finais, caracterizar um processo físico de interesse, e então construir a amplitude de transição do modo desejado [4]. A partir desta é possível, através dos métodos gerais da teoria quântica de campos, determinar observáveis físicos como seções de choque, comprimentos de espalhamento, polarizações e etc [5]. Em outras palavras, para nossas discussões, uma T.Q.C. será estabelecida pela lagrangiana (que contém os campos e as simetrias desejadas) ou pelas suas regras de Feynman.

Nossa abordagem inicial será no sentido de construir (ou justificar) a lagrangiana e as regras de Feynman para duas situações (teorias) bastante simples, mas suficientemente representativas de teorias quânticas de campos: A teoria para o campo escalar $\lambda\phi^4$ e a Eletrodinâmica Quântica. Nós nos utilizaremos destas teorias simples para estabelecer a existência das divergências em amplitudes físicas e alguns conceitos relacionados à idéia da renormalização. As manipulações e cálculos propriamente ditos somente serão efetivados após a introdução do ferramental necessário.

2.2 A Teoria $\lambda\phi^4$

Para construirmos uma lagrangiana, e conseqüentemente a teoria pretendida, inicialmente devemos identificar os campos que estarão presentes nela. A razão imediata disto é que os números quânticos (spin principalmente) fixam uma parte da lagrangiana, que é aquela restante quando são removidas todas as interações, ou seja, a parte livre. Isto é fixado pelo compromisso que a lagrangiana possui de, sob a aplicação do princípio variacional de Hamilton (Equações de Euler-Lagrange), produzir as adequadas equações de onda relativísticas para os campos [6]:

- Campos escalares (spin zero) \longrightarrow Equação de Klein-Gordon
- Campos de spin 1/2 \longrightarrow Equação de Dirac
- Campos vetoriais (spin 1) \longrightarrow Bargman-Wigner
- Campos de Rarita-Schwinger (spin 3/2) \longrightarrow Bargman-Wigner.

A situação mais simples possível é aquela envolvendo um campo escalar com simetria interna abeliana (campos comutam). Neste caso sabemos então que a equação de onda relativística para o campo livre é a equação de Klein-Gordon;

$$(\square + \mu^2)\phi(x) = 0. \quad (2.1)$$

Aqui \square é o operador diferencial escalar d'Alambertiano;

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2 \right). \quad (2.2)$$

Deste modo a lagrangiana, a partir da qual nós definimos a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (2.3)$$

impomos a extremização

$$\delta S = 0, \quad (2.4)$$

que nos fornecerá as equações de Euler-Lagrange;

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \right\} = 0, \quad (2.5)$$

será dada em sua parte livre por:

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2. \quad (2.6)$$

A construção dos termos de interação seguem as determinações do grupo de simetrias internas (fora do espaço-tempo) as quais se deseja implementar. No caso da teoria $\lambda\phi^4$ podemos invocar a invariância da lagrangiana frente à transformação discreta [7]

$$\phi \longrightarrow -\phi. \quad (2.7)$$

Então, os termos de interação, invariantes de Lorentz e da simetria adotada, seriam do tipo:

$$\mathcal{L}_I = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \phi^{2n}, \quad (2.8)$$

ou ainda contendo derivadas como:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi) \phi^{2m} \\ (\partial_\mu \phi \partial^\nu \phi)(\partial_\nu \phi \partial^\mu \phi) \phi^{2m}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

A conhecida teoria $\lambda\phi^4$ para o campo escalar corresponde, dentre todas as opções acima, a nos restringirmos a um único termo:

$$\mathcal{L}_I = \frac{\lambda\phi^4}{4!} \quad (2.10)$$

(o fator $4!$ vem por razões de combinatória!). Esta escolha não está relacionada ao conteúdo específico de simetria pretendido já que todos os possíveis termos descartados são compatíveis com este. A interação escolhida é, dentre todas, aquela de mais baixa dimensionalidade e a única que nos fornecerá uma teoria renormalizável [8]. A restrição é portanto de ordem prática. Assim a teoria é dada pela lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda\phi^4}{4!}. \quad (2.11)$$

A equação de movimento fica:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \mu^2)\phi(x) = -\frac{\lambda\phi^3}{3!}. \quad (2.12)$$

Neste ponto é importante registrar que a teoria necessita, para estabelecer seu poder de predição, medir ou fixar três constantes ou parâmetros, um para cada termo da lagrangiana. São eles: a normalização do campo ϕ , a massa μ e a constante de acoplamento λ . Estes números são os “inputs”¹ da teoria. As parametrizações adotadas são, em princípio, arbitrárias desde que a equação de movimento não seja (e não é) afetada. Por exemplo, poderíamos fazer a reparametrização:

$$\begin{cases} \phi \rightarrow Z_\phi^{1/2} \phi' \\ m \rightarrow Z_m m' \\ \lambda \rightarrow Z_\lambda \lambda', \end{cases} \quad (2.13)$$

sem modificar o conteúdo da teoria [9].

Agora é necessário proceder a quantização do campo relativístico e então, fazendo uso de métodos perturbativos, estabelecer as regras de Feynman correspondentes. Para estas, dois objetos são essenciais: os propagadores e os vértices. No caso $\lambda\phi^4$ temos [10]:

- Propagador.

A solução da parte livre da lagrangiana nos fornece o propagador do campo correspondente. No espaço dos momentos (onde são dadas as regras de Feynman) para o campo escalar temos:

$$i\Delta(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0 \rangle, \quad (2.14)$$

ou seja:

$$i\Delta(p) = \frac{1}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (2.15)$$

- vértice

Fornece ou representa o modo pelo qual um certo conjunto de campos interage. No nosso caso:

$$\left. \frac{i\delta^4 \mathcal{L}}{\delta\phi\delta\phi\delta\phi\delta\phi} \right|_{\phi=0} = -i\lambda. \quad (2.16)$$

¹Inputs...

Com estes elementos podemos especificar as regras de Feynman para a teoria $\lambda\phi^4$ as quais, na solução perturbativa, podem ser consideradas como sendo a própria teoria.

- Regras de Feynman para a Teoria $\lambda\phi^4$ [11]

Podemos colocar de um modo simples as regras de Feynman para a teoria $\lambda\phi^4$, que nos permitirão construir as amplitudes para os processos físicos pertinentes:

“Escolha um processo físico pela especificação das linhas externas (partículas iniciais e finais). A amplitude correspondente será dada, na ordem desejada de aproximação, pela soma de todas as contribuições representadas pelos gráficos de Feynman possíveis de serem construídos, por combinações de vértices e linhas internas, capazes de conectar as linhas externas”.

A expressão matemática correspondente é obtida atribuindo-se os valores adequados para as peças que compõem os diagramas obtidos.

i) Linhas Internas

Para cada linha interna deve ser atribuído (associado) um propagador.



Figura 2.1: propagador

ii) Vértice

A cada vértice (interação) devemos associar o fator $-i\lambda$.

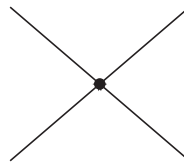


Figura 2.2: vrtice

iii) “loops”

A cada “loop”, ou seja, quando houver um dos momentos que não é fixado pelas relações de conservação de energia-momento, devemos efetuar uma integração neste

momento;

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

iv) Fatores Combinatórios ou de Simetria

Quando houver um fator de simetria dado por:

$$f_S = g \Pi_{n=2,3,..} 2^\beta (n!)^{\alpha_n}.$$

onde:

$-\alpha_n$ = número de pares de vértices conectado por n linhas idênticas auto-conjugadas;

$-\beta$ = número de linhas conectando um vértice com ele mesmo;

$-g$ = número de permutações de vértices os quais deixam o diagrama invariante com linhas externas fixas, então devemos dividir a expressão para o diagrama por este fator.

Construída a teoria e estabelecidas as regras de Feynman vamos então verificar os processos mais simples que ela pode descrever.

2.2.1 Auto-Energia

O processo mais simples é aquele com duas linhas externas (fig.2.1), ou seja, a contribuição das interações para as correções ao propagador da partícula livre. Contribuem para o processo todos os diagramas capazes de conectar as linhas externas (irredutíveis de uma partícula) [12]. A contribuição de ordem mais baixa, de ordem λ , vem do diagrama um “loop” com apenas um vértice e uma linha interna (fig.2.2).



Figura 2.3: Representação da auto-energia da partícula escalar.

A expressão matemática correspondente fica:

$$\frac{-i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \tag{2.17}$$

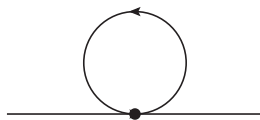


Figura 2.4: Contribuição um “loop” de ordem mais baixa para a auto-energia.

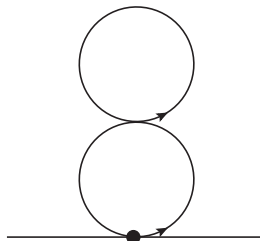


Figura 2.5: Contribuição um “loop” de ordem mais baixa para a auto-energia.

onde o fator $1/2$ é o correspondente fator de simetria. As próximas contribuições perturbativas são de ordem λ^2 e vêm de diagramas dois “loops” (fig.2.3).

A expressão correspondente ao diagrama da fig.2.3.a fica:

$$\frac{1}{4}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(i)^2}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)^2} \quad (2.18)$$

onde o fator $1/4$ é o fator de simetria correspondente. Por sua vez o diagrama da fig.2.3.b fica (com o fator de simetria $1/6$):

$$\frac{1}{6}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{((p - k - l)^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \frac{i}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \frac{i}{(l^2 - \mu^2 + i\epsilon)}. \quad (2.19)$$

Uma simples contagem de potências nos fornece de imediato a informação de que as contribuições são divergentes.

2.2.2 Espalhamento

O próximo processo previsto na teoria é aquele com quatro linhas externas, podendo ser identificado com o espalhamento elástico de duas partículas escalares (fig.2.4).

As contribuições para o processo vêm de diagramas de Feynman capazes de conectar as linhas externas. O de ordem mais baixa é o diagrama árvore (fig.2.5). De acordo com as regras de Feynman a amplitude correspondente vale $-i\lambda$.

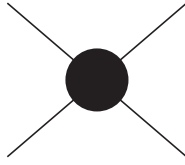


Figura 2.6: Representação do espalhamento elástico de duas partículas escalares.

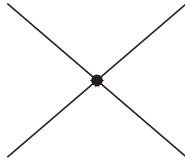


Figura 2.7: Diagrama árvore contribuindo para o espalhamento elástico.

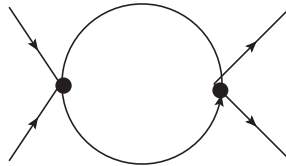


Figura 2.8: Contribuições um “loop” para o espalhamento elástico.

A ordem seguinte inclui diagramas com duas interações e um “loop” (fig.2.6). Aplicando as regras de Feynman ficamos com a expressão:

$$\frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \frac{i}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (2.20)$$

onde: para o canal s (fig.2.6a) $p = p_a + p_b$, para o canal t (fig.2.6b) $p = p_a - p_c$ e para o canal u (fig.2.6c) $p = p_a - p_d$. As variáveis s , u e t são os invariantes de Mandelstam para o espalhamento elástico de dois corpos [13]:

$$\begin{cases} s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \\ t = (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 \\ u = (p_a - p_d)^2 = (p_c - p_b)^2. \end{cases} \quad (2.21)$$

As contribuições perturbativas na ordem seguinte são aquelas que envolvem três interações, com dois “loops” (fig.2.7).

Novamente, com exceção do diagrama árvore, todas as contribuições são divergentes por contagem de potências.

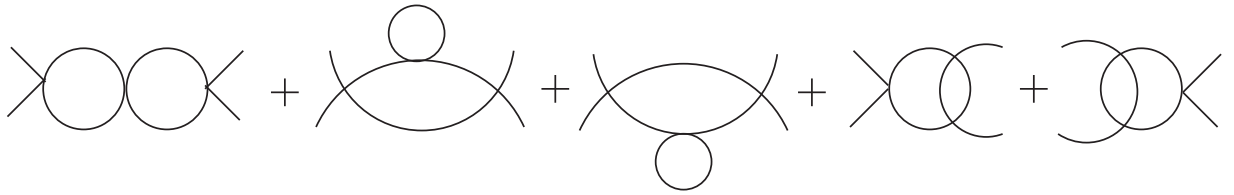


Figura 2.9: Contribuições dois “loops” para o espalhamento elástico de dois escalares.

Neste ponto nós podemos nos questionar a respeito do que fazer com a Teoria Quântica de Campos, como um todo, na solução perturbativa, uma vez que os observáveis físicos, relacionados às amplitudes, são quantidades finitas e as amplitudes obtidas são divergentes. Antes de tentar responder esta pergunta vamos considerar uma questão importante, relacionada ao cálculo perturbativo, que é a relação entre observáveis físicos e amplitudes calculadas.

2.2.3 Cálculo Perturbativo e Parâmetros Físicos

A questão é: quando calculamos contribuições de ordem mais elevada em perturbações, os parâmetros (físicos) da ordem anterior mantêm o mesmo significado? Vejamos por exemplo o propagador livre da partícula, que, como vimos, está relacionado à parte livre da teoria;

$$i\Delta^0(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}. \quad (2.22)$$

Aqui a massa da partícula (o pólo) pode ser identificada pela propriedade:

$$(-) \left[\Delta^0(p^2) \right]^{-1} \Big|_{p^2=0} = \mu^2. \quad (2.23)$$

Por sua vez o coeficiente de p^2 (o resíduo) está relacionado à normalização adotada para o campo livre, já que vem do termo cinético (duas derivadas). Assim:

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \left[\Delta^0(p^2) \right]^{-1} \Big|_{p^2=0} = 1. \quad (2.24)$$

Vamos agora corrigi-lo pelas contribuições de auto-energia, representado pela equação diagramática mostrada na fig.2.8.

A bolha representa as contribuições para a auto-energia em uma certa ordem (número de “loops”, por exemplo). Escrevendo $(-i\Sigma(p^2))$ para estas contribuições, temos

$$i\Delta(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} (-i\Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \dots \quad (2.25)$$



Figura 2.10: Propagador corrigido pela auto-energia.

No espírito das perturbações, somamos a série para obter:

$$i\Delta(p) = \frac{1}{p^2 - \mu^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}. \quad (2.26)$$

As perguntas a serem respondidas são então: μ^2 ainda representa a massa da partícula no sentido da identificação que fizemos acima? E o coeficiente de p^2 será ainda a unidade?

A fim de que o valor a momento nulo do inverso do propagador seja identificado com a massa μ^2 é necessário que:

$$\Sigma(p^2)\Big|_{p^2=0} = 0. \quad (2.27)$$

Do mesmo modo o resíduo permanecerá a unidade se:

$$\frac{\partial \Sigma(p^2)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=0} = 0. \quad (2.28)$$

Ocorre que isto em geral não é verdade. Então, especificando alguma ordem no cálculo perturbativo é necessário reparametrizar a teoria. No caso do propagador podemos escrever a auto-energia na forma:

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + p^2 \Sigma'(0) + \tilde{\Sigma}(p^2). \quad (2.29)$$

Então teremos:

$$(-i) \left[\Delta(p^2) \right] \Big|_{p^2=0} = \mu^2 + \Sigma(0) \equiv M^2. \quad (2.30)$$

Por sua vez

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \left[\Delta(p^2) \right]^{-1} \Big|_{p^2=0} = [1 - \Sigma'(p^2)] \equiv Z_\phi^{-1}. \quad (2.31)$$

Isto significa que devemos identificar M como a massa física da partícula e Z_ϕ como a normalização do campo na ordem em que $\Sigma(p^2)$ é especificada.

É importante notar que isto seria necessário, em princípio, ainda que as contribuições para a auto-energia fossem todas finitas. A necessidade da reparametrização é uma característica do cálculo perturbativo. A expansão perturbativa é feita na constante de acoplamento, ao passo que na lagrangiana, os observáveis físicos (parâmetros da teoria)

são coeficientes de potências dos momentos e dos campos. O elemento complicador neste processo de reparametrização está no fato de as quantidades envolverem objetos divergentes. Esta é a idéia da renormalização; a manipulação e cálculo das amplitudes contendo divergências que sirva aos propósitos da reparametrização.

Nesta mesma linha de raciocínio podemos enquadrar a constante de acoplamento. É sempre necessário para sua determinação (ou fixação) experimental a escolha de algum ponto cinemático no espalhamento de dois corpos como referência. Por exemplo, sendo $\Gamma(s, u, t)$ a amplitude de espalhamento podemos definir a constante de acoplamento λ por:

$$\Gamma(s, u, t)|_{s=u=t=0} = -i\lambda. \quad (2.32)$$

Se $\Gamma(s, u, t)$ for especificada ao nível árvore então λ é a constante de acoplamento física e corresponde àquela da lagrangiana. Entretanto quando $\Gamma(s, u, t)$ for calculada em alguma ordem perturbativa, um “loop” por exemplo, nós podemos escrever:

$$\begin{cases} \Gamma(s) = \Gamma(s=0) + \tilde{\Gamma}(s) \\ \Gamma(u) = \Gamma(u=0) + \tilde{\Gamma}(u) \\ \Gamma(t) = \Gamma(t=0) + \tilde{\Gamma}(t). \end{cases} \quad (2.33)$$

Então teremos:

$$\Gamma(s, u, t)|_{s=t=u=0} = -i\lambda + \Gamma(s=0) + \Gamma(u=0) + \Gamma(t=0). \quad (2.34)$$

Isto nos obriga a reparametrizar para;

$$-i\lambda = -i\lambda^{\text{árvore}} + \Gamma(s=0) + \Gamma(t=0) + \Gamma(u=0), \quad (2.35)$$

ainda que $\Gamma(s=0)$, $\Gamma(t=0)$ e $\Gamma(u=0)$ sejam quantidades finitas. A reparametrização é necessária aqui para reidentificar o observável físico definido como o valor da amplitude de espalhamento num ponto cinemático específico. Nesta discussão utilizamos o ponto $s = u = t = 0$, mas qualquer outro seria igualmente eficaz [14].

Antes de considerar cálculos propriamente ditos, vamos tomar o caso da Eletrodinâmica Quântica a fim de estabelecer outros aspectos relacionados a soluções perturbativas de TQC.

2.3 A Eletrodinâmica Quântica

Na discussão da construção de uma teoria, através de uma lagrangiana, duas coisas desempenham os papéis principais; os campos e as simetrias. A identificação dos campos,

seus números quânticos relativos ao espaço-tempo, estabelece a parte livre. Quanto às simetrias, elas estabelecem o modo pelo qual os campos interagem (se acoplam). Isto, por outro lado, materializa-se através da maneira pela qual os campos sofrem transformações que mantêm a lagrangiana invariante. A estas invariâncias estão associadas correntes conservadas e então quantidades relacionadas aos observáveis físicos [15]. Existem entretanto dois tipos de simetrias; as simetrias globais e as simetrias locais ou simetrias de “gauge”. Estas últimas podem ser utilizadas para gerar dinâmica entre os campos transformados; são as chamadas interações de “gauge” [16]. A mais simples destas teorias é a Eletrodinâmica Quântica que serve de protótipo para outras mais complexas como a Cromodinâmica quântica (QCD). Acredita-se hoje, largamente, que todas as teorias fundamentais são teorias de “gauge” [16].

Nós discutiremos aspectos da QED como sendo uma teoria com simetria local abeliana $U(1)$. Após construí-la, deste modo, nós analisaremos aqueles aspectos relacionados à presença de divergências na solução perturbativa. Os estudos iniciados aqui serão posteriormente retomados, após a introdução das técnicas de regularização, para a discussão da renormalização.

2.3.1 A Eletrodinâmica Quântica Como uma Teoria de “Gauge”

Para construir a teoria, como já dissemos, nós inicialmente devemos especificar as partículas cuja dinâmica desejamos descrever. A estas associaremos campos correspondentes aos seus observáveis físicos (números quânticos). No presente caso desejamos descrever a dinâmica do elétron, um campo de spin $1/2$ e massa m , portanto obedecendo à equação de onda relativística de Dirac [17]. Deste modo a parte livre da lagrangiana é:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (2.36)$$

A bilinearidade desta estrutura nos permite, de imediato, inferir a invariância frente transformações globais $U(1)$ [18]:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha T} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha T} \bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (2.37)$$

Aqui, devido à simetria $U(1)$ T é um número usual e α é um parâmetro, tal que $\alpha \neq \alpha(x)$.

Para transformar a teoria numa teoria de “gauge” local $U(1)$ admitimos $\alpha = \alpha(x)$ e mantemos T como um número usual. Então:

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)\cdot T}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)\cdot T}\bar{\psi}(x). \end{cases} \quad (2.38)$$

O termo derivativo, que sofre uma transformação diferente do caso global, fica:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)\partial_\mu\psi(x) = \bar{\psi}'(x)e^{i\alpha(x)\cdot T}\partial_\mu\left(e^{-i\alpha(x)\cdot T}\psi(x)\right) \\ &= \bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) - i\bar{\psi}(x)(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x). \end{aligned} \quad (2.39)$$

O segundo termo agora quebra a invariância. Para recuperá-la necessitamos construir um novo “objeto” que contenha a derivada e se transforme adequadamente, ou seja, a Derivada Covariante [19]:

$$[D_\mu\psi(x)] \rightarrow [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}[D_\mu\psi(x)], \quad (2.40)$$

tal que a combinação $[\bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x)]$ seja invariante de “gauge” e vetor de Lorentz, simultaneamente. Em outras palavras, garantir que a ação das derivadas não mude as propriedades de transformação dos campos. Isto pode ser materializado pela introdução de um campo vetorial $A_\mu(x)$, o campo de “gauge”, se formarmos a derivada covariante como:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad (2.41)$$

onde e é um parâmetro livre o qual poderá ser futuramente identificado como a constante de acoplamento elétron-fóton (carga elétrica e).

A lei de transformação para a derivada covariante será satisfeita se o campo de “gauge” $A_\mu(x)$ tiver a propriedade de transformação:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e}(\partial_\mu\alpha(x)). \quad (2.42)$$

A lagrangiana invariante fica então:

$$\tilde{\mathcal{L}}_F = \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m] \psi(x). \quad (2.43)$$

Para tornar A_μ uma variável dinâmica de fato, necessitamos introduzir na lagrangiana termos correspondentes à parte livre deste campo vetorial, portanto, com derivadas de $A_\mu(x)$. O termo *mais simples* invariante de “gauge” é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.44)$$

onde;

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.45)$$

Podemos verificar, por substituição direta, que $F_{\mu\nu}$ é invariante sozinho. Isto pode, entretanto, ser feito de um modo mais elegante [20]. O tensor $F_{\mu\nu}$ pode ser relacionado às derivadas covariantes:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x) = (ieF_{\mu\nu})\psi(x). \quad (2.46)$$

Deste modo:

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)]' = e^{-i\alpha \cdot T} [(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)], \quad (2.47)$$

ou seja,

$$F'_{\mu\nu}\psi(x)' = [F_{\mu\nu}\psi(x)] e^{-i\alpha(x) \cdot T}, \quad (2.48)$$

que implica em:

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (2.49)$$

Com isto a lagrangiana da QED, uma teoria de “gauge” com simetria Abelianiana $U(1)$, fica dada pela forma;

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)] \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.50)$$

Neste ponto é importante notar, sobre a teoria construída, que:

- i) Qualquer termo formado a partir de $\psi(x)$, $F_{\mu\nu}$ e D_μ que seja escalar de Lorentz será invariante de “gauge” e portanto compatível com a simetria assumida.
- ii) O campo A_μ é um campo vetorial sem massa pois o termo $A_\mu A^\mu$ não é invariante de “gauge”.
- iii) O acoplamento do campo vetorial com o elétron, de mais baixa dimensionalidade, está contido na derivada covariante $D_\mu\psi$, a qual é construída a partir da propriedade de transformação do próprio elétron. Isto quer dizer que o campo A_μ (fóton) se acoplará com qualquer campo carregado de um modo que depende apenas de propriedade de transformação deste campo frente ao grupo de simetria assumido. A constante de acoplamento será a mesma. Esta propriedade é denominada de universalidade. Outros termos de interação permitidos tais como:

$$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu}, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi D_\nu F^{\mu\nu} \dots, \quad (2.51)$$

são eliminados da teoria pela exigência de renormalizabilidade, que é também o que orienta a escolha do termo cinético do campo A_μ .

- iv) Não há na teoria (não é necessário) o acoplamento do campo vetorial com ele próprio. Isto é interpretado como sendo devido ao fóton (campo A_μ) não carregar o número quântico de “gauge” $U(1)$ (a carga elétrica).

Neste ponto então, com a teoria já construída, devemos nos preocupar com a solução das equações de movimento, se é que estamos interessados nas consequências dinâmicas das nossas hipóteses (simetrias) introduzidas por ocasião da construção da lagrangiana. Temos para isto que resolver três equações diferenciais acopladas envolvendo os campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ e $A_\mu(x)$ [21]. Isto não é viável e nós optamos pelo método perturbativo. Após a quantização, a correspondente expansão perturbativa nos permite identificar um conjunto de elementos básicos a partir dos quais esta série pode ser construída; os vértices, os propagadores e os fatores de simetria. Desde que algumas regras sejam obedecidas é possível construir uma relação um-a-um entre os diagramas construídos, pela combinação de vértices e propagadores, e os termos da série perturbativa. Então, qualquer processo pode ser calculado na teoria pela aplicação destas regras diretamente sem a necessidade de construir a expansão propriamente dita. Para a QED então temos as seguintes peças:

- i) Propagadores

-Férmion de spin 1/2 (elétron);



Figura 2.11:

-Vetor sem massa (fóton);



Figura 2.12:

$$iD(k)_{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right],$$

onde:

$$\begin{cases} \xi = 1 \text{ “gauge” de Feynman} \\ \xi = 0 \text{ “gauge” de Landau.} \end{cases}$$

- ii) Vértice:

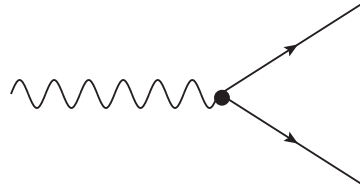


Figura 2.13:

Aqui α e β são índices matriciais relativos ao espaço de Dirac-Lorentz (spinoriais), μ e ν são índices de Lorentz (espaço-tempo) e ξ é o parâmetro de “gauge”, necessário para a quantização da teoria com o campo vetorial sem massa (que não tem consequências dinâmicas).

Vamos então considerar os processos básicos da teoria.

2.3.2 Auto-Energia do Elétron

Um dos processos físicos mais simples da teoria é aquele com dois campos fermiônicos externos; a auto-energia de elétron (fig.2.9).

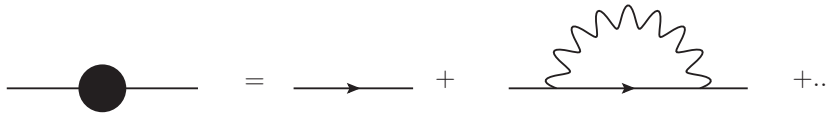


Figura 2.14: Representação diagramática da auto-energia do elétron em expansão perturbativa.

A contribuição um “loop” fica, no “gauge” de Feynman [21]:

$$\Sigma(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{[(p - k) - m + i\epsilon]} \gamma^\nu \right\}. \quad (2.52)$$

Uma simples inspeção (contagem de potências) nos revela que a integral é divergente (termos linearmente e logaritmicamente divergentes). Portanto, segundo a teoria que acabamos de considerar, a interação do elétron com o campo eletromagnético, que deveria descrever a dinâmica do elétron na presença das interações, não fornece números finitos (em princípio).

2.3.3 Auto-Energia do Fóton

O processo físico caracterizado pela existência de duas linhas externas de fótons, a auto-energia do fóton, é dado em ordem mais baixa por um “loop” fermiônico (fig.2.10).



Figura 2.15: Representação diagramática da auto-energia do fóton em expansão perturbativa.

A amplitude correspondente ao diagrama pode ser escrita como [21]:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (-)(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{i}{(\not{k} - m) + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{(\not{k} - \not{q}) - m + i\epsilon} \right\}. \quad (2.53)$$

A expressão acima, o tensor de polarização, revela, pela contagem de potências, uma divergência quadrática (em princípio). Novamente a teoria fornece uma amplitude divergente para um processo simples.

2.3.4 Correção do vértice da interação

O processo físico definido por dois campos fermiônicos externos e um fóton, que caracteriza o vértice da interação elétron-fóton, pode igualmente ser calculada perturbativamente (fig.2.11).

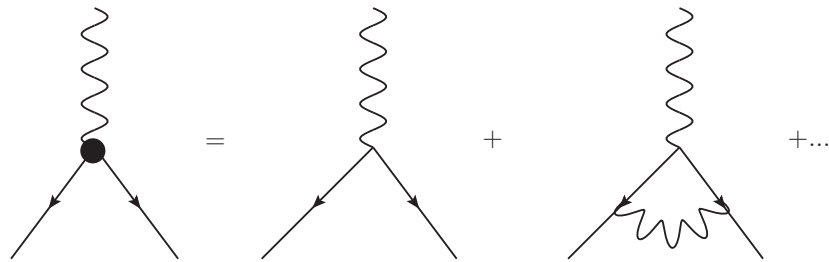


Figura 2.16: Representação diagramática da correção do vértice em expansão perturbativa até três interações.

O segundo dos diagramas da fig.(2.11), com o “loop” ainda não considerado, pode ser escrito, a partir das peças que compõe as regras de Feynman, como (no “gauge” de Feynman) [21]:

$$\Lambda_\mu(p, p') = (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{[p' - k - m + i\epsilon]} \gamma_\mu \frac{i}{[p - k - m + i\epsilon]} \gamma_\nu \right\}. \quad (2.54)$$

A contagem de potências nos revela o caráter divergente, ainda que menos severo (logarítmico).

2.3.5 Divergências e Consistência

Do que podemos ver, os resultados obtidos para a Eletrodinâmica Quântica, dentro do aparato teórico da TQC em solução perturbativa, não são razoáveis. Isto não quer dizer que devemos abandonar estas idéias mas que necessitamos reinterpretar a teoria como um todo, em virtude do cálculo perturbativo. Ou seja, para dar poder de predição devemos reparametrizar a teoria. Isto deveria ser feito, em princípio, ainda que as contribuições dos diagramas avaliados não contivessem divergências. Entretanto, a presença das divergências complica o processo de reparametrização pois exige cuidados especiais nas manipulações e cálculos necessários para que possamos separar as partes físicas e aquelas da reparametrização (subtrações). Como proceder para efetuar esta separação e manter o conteúdo físico da teoria, representado pelas simetrias implementadas é o grande problema da TQC na versão perturbativa. Historicamente, para que isto tenha sido levado adiante, certas técnicas matemáticas desempenharam um papel crucial; as técnicas de regularização. Estas implicam em modificações nas amplitudes divergentes para torná-las finitas e portanto manuseáveis. O problema das manipulações e cálculos de integrais de Feynman, inclusive divergentes, será, por isso, o nosso próximo assunto.

Para concluir esta parte, é importante registrar o aspecto relativo às simetrias no cálculo perturbativo. Quando implementamos na lagrangiana as propriedades de invariância frente ao grupo total de simetrias que julgamos relevantes para descrever a dinâmica de interações pretendida, isto impõe ou determina que as amplitudes do cálculo perturbativo tenham certas propriedades ou mantenham certas relações entre si; estamos falando de relações de simetria ou Identidades de Ward [22]. Elas devem estar presentes no cálculo perturbativo apesar das divergências. No caso da Eletrodinâmica Quântica a invariância de “gauge” ou a conservação da corrente vetorial associada, implica para

cada índice de Lorentz em uma amplitude uma relação de simetria. Como tal o tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}$ deve satisfazer [22]:

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = q_\nu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0. \quad (2.55)$$

Temos também uma relação entre a correção de vértice um “loop” e a auto-energia do elétron no mesmo nível [22]:

$$(p - p')_\mu \Lambda^\mu(p, p') \sim [\Sigma(p) - \Sigma(p')], \quad (2.56)$$

e assim por diante para outros processos. Isto quer dizer que as manipulações necessárias não devem, de modo algum, comprometer estas relações pois, se a amplitude resultante após a reparametrização não possuir estas propriedades, não estaremos mais falando das consequências dinâmicas que pretendíamos investigar. Estes tipos de vínculos são exigências mínimas para qualquer técnica de regularização utilizada na reparametrização.

Outro aspecto igualmente importante, e proximamente relacionado, é a aparente geração de interações entre campos via diagramas, em princípio possíveis, da expansão perturbativa. Como tal, na QED, temos o processo envolvendo três fótons externos [23](fig.2.12).

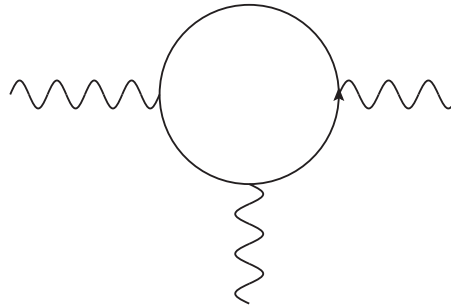


Figura 2.17: Diagramas correspondentes ao processo caracterizado por três fótons externos.

Os diagramas da fig.(2.12) parecem estabelecer uma interação de três fótons na expansão perturbativa. Como a invariância de “gauge” não permite esta interação na lagrangiana, haverá apenas uma chance de mantermos a consistência das predições com as simetrias implementadas; a avaliação dos diagramas deve fornecer um resultado identicamente nulo para a soma destes. O cancelamento destes diagramas é um caso particular de um teorema que prevê a anulação idêntica de processos físicos na QED quando os

campos externos forem em número ímpar de fótons (teorema de Furry) [23]. Isto inclui o diagrama com um fóton externo, o chamado “tadpole” (fig.2.13).

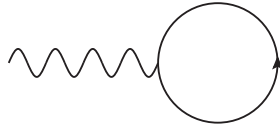


Figura 2.18: Diagrama “tadpole” na QED.

Sendo assim, ainda que os diagramas correspondentes sejam divergentes, o cancelamento deve ser obtido automaticamente pelo método utilizado nas manipulações e cálculos. A importância da anulação destes processos não se resume na eliminação de possíveis interações não-físicas, mas também na verificação de Identidades de Ward envolvendo amplitudes relacionadas a estas e, portanto, com a própria chance de renormalizabilidade da teoria.

Finalmente, temos os processos envolvendo número par de fótons, em especial aquele com quatro fótons externos, cuja contagem de potências revela divergência logarítmica (fig.2.14). Ele parece estabelecer o espalhamento da luz pela luz. Mas o aspecto importante e crucial que nos interessa é o fato de a divergência destes diagramas não poderem ser absorvidos em alguma reparametrização. A estrutura funcional da possível divergência necessitaria de um termo de quarta ordem no campo A_μ do fóton. A invariância de “gauge”, ainda que permitisse a inclusão de um termo destes, tornaria, de imediato, a teoria não-renormalizável. Por “sorte” os cálculos mostram um cancelamento [24] destas divergências incômodas. Virtude das teorias de “gauge”. Nem sempre as aparências se confirmam.

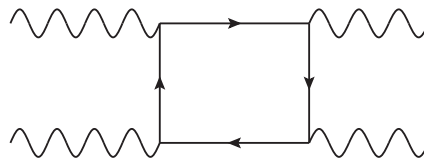


Figura 2.19: Diagrama representando o processo com quatro fótons externos.

Referências Bibliográficas

- [1] C.Nash, Relativistic Quantum Fields, Academic Press, New York (1978);
D.Lurié, Particles and Fields, Interscience, New York (1968);
- [2] R.Utiyama, Phys.Rev. 101, 1597 (1956);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984)
E.Abers and B.W.Lee, gauge Theories, Phys. rep. 9C, 1 (1973);
S.Weinberg, Phys.Rev. 166, 1568 (1968);
•S.coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. 177, 2239 (1969);
C.G.Callan Jr, S.coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. 177, 2247 (1969);
- [3] R.P. Feynman, Phys. Rev. 84, 123 (1951);
R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 749 (1949);
R.P. Feynman, Phys. Rev. 76, 769 (1949);
R.P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961);
R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 37 (1948);
R.P. Feynman and R. Hibbs, “Quantum Mechanics and Path Integrals”, McGraw-Hill (1965);
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
J.D.Bjorken and S.D.Drell; Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York (1965);
J.J.Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, reading, Massachusetts (1967);
W.Greiner and J.Reinhardt: Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, Heidelberg

- (1994);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
F.Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Jhon Wiley and Sons, (1993);
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [4] C.Nash, Relativistic Quantum Fields, Academic Press, New York (1978);
D.Lurié, Particles and Fields, Interscience, New York (1968);
C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
W.Greiner and J.Reinhardt: Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, Heidelberg (1994);
- [5] C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
F.Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Jhon Wiley and Sons, (1993);
D.Lurié, Particles and Fields, Interscience, New York (1968);
F.Mandl and G.Shaw, Quantum Field Theory, Wiley, New York (1984);
- [6] C.Nash, Relativistic Quantum Fields, Academic Press, New York (1978);
D.Lurié, Particles and Fields, Interscience, New York (1968);
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [7] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [8] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- [9] C.Nash, Relativistic Quantum Fields, Academic Press, New York (1978);

- [10] S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
- [11] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- [12] J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992);
- [13] S.Gasiorowicz, Elementary Particle Physics, Wiley, New York (1966);
F.Mandl and G.Shaw, Quantum Field Theory, Wiley, New York (1984);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- [14] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984) ;
F.Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Jhon Wiley and Sons, (1993);
C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980) ;
- [15] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984) ;
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
N.N.Bogolubov and D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantised Fields, Wiley-Interscience (1959);
J.D.Bjorken and S.D.Drell; Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York (1965);
- [16] E.Abers and B.W.Lee, Gauge Theories, Phys. Rep. 9C, 1 (1973);
J.C.Taylor, Gauge Theory of Weak Interactions, Cambridge University Press, Cambridge (1976);
C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;

- T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- L.D.Fadeev and A.A.Slanov, Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory, Benjamin Cummings, Reading, Massachusetts (1980);
- I.J.R.Aitchison and A.J.G.Hey, Gauge Theories in Particle Physics, Hilger, Bristol (1982);
- [17] J.D.Bjorken and S.D.Drell; Relativistic Quantum mechanics. McGraw-Hill, New York (1964);
- J.J.Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1965);
- C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980) ;
- F.Gross, Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Jhon Wiley and Sons, (1993);
- [18] E.Abers and B.W.Lee, Gauge Theories, Phys. Rep. 9C, 1 (1973);
- T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- [19] R.Utiyama, Phys.Rev. 101, 1597 (1956);
- M.Gell-Mann and S.L.Glashow, Ann. Phys. (NY) 15, 437 (1961);
- [20] E.Abers and B.W.Lee, Gauge Theories, Phys. Rep. 9C, 1 (1973);
- T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
- [21] A.Akhiezer and V.B.Berestetskii, Quantum Electrodynamics, Interscience, New York (1965);
- J.M. Jauch and F.Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Springer. Verslag Berlin (1976);
- G.Kallen, Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, Berlin (1972);
- V.B.Berestetskii, E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, Relativistic Quantum Theory, Pergamon Press, Oxford (1971);
- C.Nash, Relativistic Quantum Fields, Academic Press, New York (1978);
- C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);

- P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990);
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
J.D.Bjorken and S.D.Drell; Relativistic Quantum Fields. McGraw-Hill, New York (1965);
J.Schwinger, Quantum Electrodynamics, Dover, New York (1958);
- [22] W.Greiner and J.Reinhardt: Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, Heidelberg (1994);
J.C. Ward Phys. Rev. 78, 1824 (1950);
Y. Takahashi, Nuovo Cimento 6, 370 (1957);
J.C. Ward , Proc. Phys. Soc. 64, 54 (1951);
C. Becchi, A. Ronet and R. Stora, Comm. Math. Phys. 42, 127 (1975);
J.C. Taylor, Nucl. Phys. B33, 436 (1971);
A.A. Slavnov, Theor. and Math. Phys. 10, 99 (1972);
O.Piguet and S.P. Sorela, Algebraic Renormalização, Lecture Notes on Physics 28 Springer-Verlag (1995);
- [23] Furry;
B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986) ;
- [24] R.P. Feynman, "Quantum Electrodynamics", Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961);
B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986);

Capítulo 3

Estrutura Geral de Integrais Um “loop”

3.1 Introdução

A fim de podermos apreciar as consequências dinâmicas de uma TQC, na versão perturbativa, torna-se crucial o papel das técnicas de manipulação e cálculo das integrais de Feynman. Algumas destas, como vimos no capítulo anterior, podem ser divergentes. Neste caso alguma técnica de regularização, ou procedimento equivalente, deve ser introduzido, ainda que como um passo intermediário, para permitir que estas possam ser calculadas. De qualquer forma o cálculo de integrais de Feynman finitas é sempre um passo necessário. A experiência mostra que as expressões resultantes destes cálculos não são, em princípio, simples. Além disso, existem propriedades físicas específicas tais como limites cinemáticos, relações de simetria, ou ainda propriedades gerais como partes imaginárias relacionadas a unitariedade, que necessitam ser enfatizadas ou facilitadas nas formas adotadas para explicitarmos os resultados. Isto torna muito relevante estabelecermos convenções ou estruturas que sejam convenientes para as análises e manipulações que faremos posteriormente. Por isso antes de tratarmos do cálculo de integrais de Feynman vamos, neste capítulo, adotar uma sistematização para escrevermos nossos resultados.

É possível verificar que as integrais de Feynman admitem uma sistematização bastante simples e geral através da introdução de um conjunto de funções de estrutura [1]. Isto se mostrará muito útil em todos os aspectos relacionados aos cálculos envolvendo “loops”. Entre estes a demonstração ou verificação de relações de simetria ou limites cinemáticos de

interesse, a identificação de partes imaginárias relativas à unitariedade e principalmente aqueles relacionados aos procedimentos de reparametrização (cap. 13 e 14). A utilidade da sistematização que adotaremos justifica um estudo em separado destas funções de estrutura. Entre as vantagens desta linguagem está o fato de, em eventuais cálculos computacionais, necessitarmos de rotinas bastante simplificadas.

Neste capítulo definiremos as funções necessárias e úteis para nossas discussões futuras. Devido ao fato de nos restringirmos, na maior parte, a discussões envolvendo amplitudes no nível um “loop”, com até três momentos externos, nós necessitaremos das formas explícitas e dos limites de interesse de basicamente dois tipos de funções.

3.2 As Funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$

O cálculo de integrais de Feynman exhibe naturalmente um conjunto de estruturas matemáticas ou funções em termos das quais é possível discutir os principais aspectos associados às correspondentes amplitudes físicas. Um tipo importante destas funções, que encontraremos frequentemente em nossas discussões, são as funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ definidas por

$$Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \int_0^1 z^k \ln \left(p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 \right) dz, \quad (3.1)$$

restringindo-nos, inicialmente, a valores de k positivos inteiros ou nulo. É possível verificar que a parte finita das amplitudes vindas de cálculos um “loop” pode ser escrita em termos destas funções. Importantes características destas amplitudes, em qualquer teoria quântica de campos, são enfatizadas e fornecidas diretamente pelas características destas funções, em especial aquelas relativas a unitariedade. Elas surgem em integrais com pelo menos dois propagadores, funções de dois pontos, com dependência em algum momento externo. Para nossos propósitos é mais útil definir, a partir da função $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ acima, a função correspondente com argumento adimensional

$$Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}{-\lambda^2} \right). \quad (3.2)$$

Aqui, p^2 é um momento externo do “loop” (ou uma combinação invariante destes), λ_1^2 e λ_2^2 são em geral massas da teoria (ou parâmetros de regularização) e o parâmetro z é o último parâmetro de Feynman utilizado na parametrização a ser integrado (cap. 4). O parâmetro λ^2 desempenha um papel de escala para os momentos e para λ_1^2 e λ_2^2 . É muito

conveniente a utilização de um dos parâmetros λ_1^2 ou λ_2^2 como escala para a construção de formas explícitas. A mudança da escala é obtida da seguinte forma:

$$Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) + \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.3)$$

Estas relações se mostrarão importantes para a discussão da invariância de escala em amplitudes físicas. Vejamos então como obter formas explícitas para os primeiros valores de k .

Tomando $k = 0$ na eq.(3.2) obtemos

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \int_0^1 dz \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}{-\lambda_2^2} \right). \quad (3.4)$$

Um modo de efetuar a integração, e obter a forma explícita desta função, é através da introdução das raízes do polinômio de segundo grau que está no argumento do logaritmo. Fazemos

$$\left[p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 \right] = (-)p^2(z - \alpha)(z - \beta), \quad (3.5)$$

onde:

$$\alpha = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2}}{2p^2} \quad (3.6)$$

e

$$\beta = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2}}{2p^2}. \quad (3.7)$$

As raízes α e β satisfazem portanto as relações:

$$\alpha + \beta = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{p^2}, \quad (3.8)$$

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2}}{p^2}, \quad (3.9)$$

$$\alpha\beta = \frac{\lambda_1^2}{p^2}. \quad (3.10)$$

Das expressões acima para as raízes α e β podemos perceber que certas combinações dos parâmetros λ_1^2 e λ_2^2 com os valores de p^2 resultarão em raízes α e β complexas. Em termos das raízes α e β escrevemos então:

$$\begin{aligned}
Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= \ln\left(\frac{p^2}{\lambda_2^2}\right) + \int_0^1 dz \ln((z - \alpha)(z - \beta)) \\
&= \ln\left(\frac{p^2}{\lambda_2^2}\right) + \int_0^1 dz \ln(z - \alpha) + \int_0^1 dz \ln(z - \beta). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

A partir do resultado simples

$$\int_0^1 dz \ln(z - \alpha) = \left[\ln(1 - \alpha) - \alpha \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) - 1 \right], \quad (3.12)$$

obtemos a forma

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \ln\left(\frac{p^2}{\lambda_2^2}\right) + \left\{ \ln(1 - \alpha)(1 - \beta) - 2 - \left[\alpha \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right) \right] \right\}. \quad (3.13)$$

Utilizando as propriedades das raízes α e β temos:

$$\ln((1 - \alpha)(1 - \beta)) = \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{p^2}\right) \quad (3.14)$$

e também:

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right) \right] \\
&= \left[\frac{(\alpha + \beta)}{2} \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\beta - 1}{\beta}\right) + \frac{(\alpha - \beta)}{2} \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\beta}{\beta - 1}\right) \right] \\
&= \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{2p^2} \ln\left(\frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 + p^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 + p^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}\right) \right\}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Com isso podemos escrever a forma explícita da função $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$:

$$\begin{aligned}
Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= - \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) + 2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{2p^2} \times \right. \\
&\quad \left. \times \ln\left(\frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 + p^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 + p^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}\right) \right\} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

A forma obtida para $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ contém uma raiz quadrada de um polinômio de segundo grau em p^2 em produto com um logaritmo. A parte imaginária da função deve vir da combinação deste produto em três situações distintas. A fim de verificar isto inicialmente consideremos a raiz, definindo:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}. \quad (3.17)$$

Notemos que é possível escrever isto na forma:

$$\left[(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2 \right] = \left[p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \right] \left[p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \right]. \quad (3.18)$$

Portanto temos três representações para $f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ de acordo com a região de valores de p^2 :

- i) $p^2 < (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$. Neste caso:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2} \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}. \quad (3.19)$$

- ii) $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < p^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$. Aqui fica:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = i \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \quad (3.20)$$

- iii) $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$. Nesta região:

$$f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}. \quad (3.21)$$

Agora consideramos o logaritmo. Definindo ,

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \ln \left\{ \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - p^2) + \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - p^2) - \sqrt{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2}} \right\}. \quad (3.22)$$

Notemos que o argumento do logaritmo pode ser reescrito para $p^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$, por exemplo:

$$(p^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \sqrt{(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2} \right)^2 \quad (3.23)$$

e também:

$$(p^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \sqrt{(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^2 p^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2} \right)^2 \quad (3.24)$$

tal que temos três representações para $g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$:

- i) Para $p^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$:

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (3.25)$$

- ii) Para $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < p^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$:

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}} \right\}, \quad (3.26)$$

que pode ser também identificada com:

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 4i \arctan \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (3.27)$$

- iii) Para $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$:

$$g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2 \ln \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \right\}. \quad (3.28)$$

Com os resultados obtidos para $f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ e $g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ nós podemos explicitar o produto de ambas nas três regiões consideradas. Definindo

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2), \quad (3.29)$$

teremos as representações a seguir.

- i) Para $p^2 < (\lambda_1 - \lambda_2)^2$.

Nesta região de valores de p^2 temos:

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = 2\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} \times \ln \left\{ \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - p^2}} \right\} \quad (3.30)$$

- ii) Para $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < p^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2$.

Neste caso temos a representação:

$$h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = (-)4\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + p^2} \arctan \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - p^2}} \right\}. \quad (3.31)$$

- iii) Para $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$:

$$\begin{aligned} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) &= 2\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \times \\ &\quad \times \ln \left\{ \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \right\} \\ &\quad + 2i\pi\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Em termos da função $h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ podemos escrever $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ numa forma bastante simples e compacta:

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = (-) \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + 2 + \frac{h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{2p^2} \right\}. \quad (3.33)$$

Repetindo o procedimento podemos igualmente obter:

$$\begin{aligned} Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= (-) \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} + \frac{1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) - 2\lambda_1^2 p^2]}{4p^4} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{4p^4} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

e também

$$\begin{aligned} Z_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= (-) \left\{ \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{6p^2} + \frac{2}{9} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 2\lambda_1^2 p^2]}{3p^4} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) [(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - 3\lambda_1^2 p^2]}{2p^2 \cdot 3p^4} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \\
& + \frac{[(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 - \lambda_1^2 p^2]}{6p^6} h(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) \left. \right\}. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Podemos então perceber importantes características das funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$:

- As funções desenvolvem uma parte complexa para $p^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$. Desta forma, para $k = 0$,

$$\text{Im}[Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)] = 2\pi\Theta \left(p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \right) \frac{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}{2p^2}. \quad (3.36)$$

Para valores crescentes de k a forma acima aparecerá multiplicada por um polinômio, bem comportado, cuja ordem cresce com o valor de k .

- A parte imaginária das funções surge no ponto $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ a partir do valor zero.
- As funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ são contínuas em ambos os pontos $p^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ e $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$.
- A derivada de $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ é indefinida no ponto $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$.
- As funções são bem comportadas em $p^2 = 0$, ainda que não o sejam termo a termo. Isto recomenda cuidados na tomada de valores próximos a $p^2 = 0$.

Das expressões obtidas, ou a partir da própria definição, é possível estabelecer relações entre as funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$. Como tal temos:

$$\begin{aligned}
Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= \left[1 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{p^2} \right] \frac{Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)}{2} \\
&+ \frac{1}{2p^2} \left[(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1^2 \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right] \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Estas relações são extremamente úteis especialmente em análises envolvendo relações de simetria. Agora consideraremos algumas situações de interesse ou limites das funções Z_k .

3.2.1 $\lim \lambda_1^2 \rightarrow 0$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$

Esta situação ocorre em integrais de Feynman associadas a amplitudes físicas de teorias com partículas de massa nula (porém nem todas!). Neste caso, na parte finita das integrais especialmente, devemos tomar este limite para obtermos o resultado desejado. Isto ocorre, normalmente, por que no início dos cálculos, para evitar discussões sobre divergências infravermelhas simultaneamente aquelas ultravioletas, introduzimos uma massa para a partícula de massa nula. Ao final, através deste limite, recuperamos a situação original. Divergências infravermelhas, eventualmente remanescentes, estarão em termos divergentes neste limite. Este é o caso da QED, onde o fóton possui massa nula e o elétron não. Para tal situação temos, para $p^2 < \lambda_2^2$,

$$Z_0(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left\{ \frac{(p^2 - \lambda_2^2)}{p^2} \ln \left(\frac{-p^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) - 2 \right\}, \quad (3.38)$$

$$Z_1(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left\{ \frac{(p^2 - \lambda_2^2)^2}{2p^4} \ln \left(\frac{-p^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) - \frac{(p^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{1}{2} \right\}, \quad (3.39)$$

$$Z_2(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left\{ \frac{(p^2 - \lambda_2^2)^3}{3p^6} \ln \left(\frac{-p^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) - \frac{(p^2 - \lambda_2^2)^2}{3p^4} - \frac{(p^2 - \lambda_2^2)}{6p^2} - \frac{2}{9} \right\}. \quad (3.40)$$

O comportamento destas funções próximo a $p^2 = 0$ é dado por:

$$Z_0(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[-1 - \frac{p^2}{2m^2} - \frac{p^4}{6m^4} + \dots \right], \quad (3.41)$$

$$Z_1(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[-\frac{1}{4} - \frac{p^2}{6m^2} - \frac{p^4}{24m^4} + \dots \right], \quad (3.42)$$

$$Z_2(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[-\frac{1}{9} - \frac{p^2}{12m^2} - \frac{p^4}{60m^4} + \dots \right]. \quad (3.43)$$

De onde observamos a expressão geral para o valor destas funções em $p^2 = 0$.

$$Z_k(0, \lambda_2^2, 0; \lambda_2^2) = \frac{-1}{(k+1)^2}. \quad (3.44)$$

Outro ponto especial é $p^2 = \lambda_2^2$. Neste caso as funções Z_k possuem valor bem definido:

$$Z_k(0, \lambda_2^2, \lambda_2^2; \lambda_2^2) = \frac{-2}{(k+1)^2}. \quad (3.45)$$

3.2.2 $\lim \lambda_1^2 \rightarrow \infty$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$

Esta situação limite surge em integrais de Feynman regularizadas pela prescrição de Pauli-Villars. Neste caso $\lambda_1^2 = \Lambda^2$ é o parâmetro de regularização. O limite $\lambda_1^2 \rightarrow \infty$ é então o “limite de conexão” do método de regularização e deve ser tomado para a identificação das divergências a fim de se construir os contratermos (em teorias renormalizáveis). Neste caso podemos obter diretamente da definição a expressão correspondente

$$Z_k(\infty, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) \simeq \int_0^1 z^k dz \ln(1-z) + \frac{1}{k+1} \ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right), \quad (3.46)$$

que nos fornece os resultados particulares:

$$Z_0(\infty, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[\ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right) - 1 \right], \quad (3.47)$$

$$Z_1(\infty, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right) - \frac{9}{4} \right], \quad (3.48)$$

$$Z_2(\infty, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[\frac{1}{9} \ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right) - \frac{11}{18} \right]. \quad (3.49)$$

3.2.3 $p^2 \ll 1$ em $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$

O comportamento das funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ próximo ao ponto $p^2 = 0$ é sempre um ponto de interesse físico. Esta situação pode corresponder ao comportamento em baixas energias de uma amplitude física. Além disso, o valor limite $p^2 = 0$ é também de especial interesse tanto em situações envolvendo limites de simetria (exato) como em procedimentos de renormalização.

Neste caso nós podemos escrever:

$$\begin{aligned} Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) &= \ln\left(\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right) \int_0^1 z^k dz \\ &+ \int_0^1 dz z^k \ln(z - \xi) + \frac{p^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \int_0^1 \frac{dz z^{k+1}(1-z)}{(z - \xi)} + \\ &- \frac{p^4}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} \int_0^1 \frac{dz z^{k+2}(1-z)^2}{(z - \xi)^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde

$$\xi = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \quad (3.51)$$

Das expressões acima podemos retirar os casos particulares:

$$Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[-1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right] + \frac{p^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right], \quad (3.52)$$

$$Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[-\frac{1}{4} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^2 \ln \left(\frac{-p^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2} \right) \right] + \frac{p^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{1}{6} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^2 - \frac{(\lambda_1^2)^2 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^3} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right], \quad (3.53)$$

$$Z_2(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[-\frac{1}{9} - \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^3 \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right] \frac{p^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\frac{1}{12} + \frac{\lambda_1^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^3 - \frac{(\lambda_1^2)^3 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^4} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right]. \quad (3.54)$$

3.3 As Funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$

Uma situação de interesse, que encontraremos muito nos capítulos posteriores, é aquela onde as integrais de Feynman consideradas estão associadas a amplitudes de teorias com partículas de massas iguais. Neste caso surgirão naturalmente dos cálculos funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$ para $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = m^2$, onde m é a massa das partículas. Para esta situação definimos:

$$Z_k(m^2, m^2, p^2) = \int_0^1 dz z^k \ln(p^2 z(1-z) - m^2), \quad (3.55)$$

com a correspondente de argumento adimensional, de escala λ^2

$$Z_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left(\frac{p^2 z(1-z) - m^2}{-\lambda^2} \right). \quad (3.56)$$

A relação entre funções com escalas diferentes é obtida de modo fácil;

$$Z_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2) + \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right). \quad (3.57)$$

Repetindo o procedimento, ou utilizando as expressões já obtidas, na seção anterior, temos explicitamente:

$$Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) = (-) \left\{ 2 + \frac{h(m^2, m^2, p^2)}{2p^2} \right\}, \quad (3.58)$$

$$Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2) = (-) \left\{ 1 + \frac{h(m^2, m^2, p^2)}{4p^2} \right\}, \quad (3.59)$$

$$Z_2(m^2, m^2, p^2; m^2) = (-) \left\{ \frac{1}{18} + \frac{2(p^2 - m^2)}{3p^2} + \frac{(p^2 - m^2)}{6p^4} h(m^2, m^2, p^2) \right\}, \quad (3.60)$$

onde $h(m^2, m^2, p^2)$ possui três representações:

- i) Para $p^2 < 0$.

Neste caso:

$$h(m^2, m^2, p^2) = 2\sqrt{-p^2}\sqrt{4m^2 - p^2} \ln \left\{ \frac{\sqrt{4m^2 - p^2} - \sqrt{-p^2}}{\sqrt{-p^2} + \sqrt{4m^2 - p^2}} \right\}. \quad (3.61)$$

- ii) Para $0 < p^2 < 4m^2$.

Nesta região:

$$h(m^2, m^2, p^2) = (-)4\sqrt{p^2}\sqrt{4m^2 - p^2} \arctan \left\{ \frac{\sqrt{p^2}}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right\}. \quad (3.62)$$

- iii) Para $p^2 > 4m^2$.

$$\begin{aligned} h(m^2, m^2, p^2) &= 2\sqrt{p^2}\sqrt{p^2 - 4m^2} \ln \left\{ \frac{\sqrt{p^2} - \sqrt{p^2 - 4m^2}}{\sqrt{p^2} + \sqrt{p^2 - 4m^2}} \right\} \\ &\quad + 2i\pi\sqrt{p^2}\sqrt{p^2 - 4m^2}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Das expressões obtidas observamos de imediato as relações:

$$Z_1(m^2, m^2, p^2, m^2) = \frac{Z_0(m^2, m^2, p^2, m^2)}{2} \quad (3.64)$$

e

$$Z_2(m^2, m^2, p^2, m^2) = -\frac{1}{18} - \frac{m^2}{3p^2} Z_0(m^2, m^2, p^2, m^2) + \frac{Z_0(m^2, m^2, p^2, m^2)}{3}. \quad (3.65)$$

Agora consideremos as situações ou limites de interesse.

3.3.1 $p^2 \ll 1$ em $Z_k(m^2, m^2, p^2)$

A principal situação de interesse nas funções que estamos considerando é o comportamento para pequenos valores de p^2 . Neste caso nós escrevemos:

$$\begin{aligned} Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2) &= -\frac{p^2}{m^2} \int_0^1 dz z^{k+1} (1-z) \\ &\quad - \frac{p^4}{2m^4} \int_0^1 dz z^{k+2} (1-z)^2 \\ &\quad - \frac{p^6}{3m^6} \int_0^1 dz z^{k+3} (1-z)^3, \end{aligned} \quad (3.66)$$

tal que podemos retirar os casos particulares:

$$Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) = \left[-\frac{p^2}{6m^2} - \frac{p^4}{60m^4} + \dots \right], \quad (3.67)$$

$$Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2) = \left[-\frac{p^2}{12m^2} - \frac{p^4}{120m^4} + \dots \right], \quad (3.68)$$

$$Z_2(m^2, m^2, p^2; m^2) = \left[-\frac{p^2}{20m^2} - \frac{p^4}{210m^4} + \dots \right]. \quad (3.69)$$

As funções $Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2)$ possuem a propriedade

$$Z_k(m^2, m^2, 0; m^2) = 0. \quad (3.70)$$

3.3.2 $\lim m^2 \rightarrow 0$ em $Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2)$

Em integrais de Feynman provenientes de teorias com partículas de massa nula, a massa m necessita ser removida ao final para que o resultado correto seja obtido. Um exemplo disto é o setor puramente piônico de uma teoria com simetria quiral em realizações não-lineares onde o pión, no limite de simetria exata, possui massa nula. A presença de termos divergentes neste limite deve-se ao fato de, nestas teorias, as divergências infravermelhas estarem presentes nas amplitudes físicas.

Neste caso, um modo conveniente de escrever isto é introduzir uma escala arbitrária λ :

$$\begin{aligned}
Z_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) &= \int_0^1 dz z^k \ln \left[\left(\frac{p^2 z(1-z) - m^2}{-\lambda^2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right] \\
&\Rightarrow \int_0^1 dz z^k \ln \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) + \int_0^1 dz z^k \ln z(1-z) + \\
&\quad + \int_0^1 dz z^k \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \\
&\quad + \int_0^1 dz z^k \ln z + \int_0^1 dz z^k \ln(1-z) \tag{3.71}
\end{aligned}$$

ou seja

$$Z_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \Rightarrow \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{k+1} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 dz z^k \ln(1-z). \tag{3.72}$$

Os casos particulares $k=0, 1$ e 2 ficam, respectivamente:

$$Z_0(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \Rightarrow \left\{ \left[\ln \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) - 2 \right] + \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right\}, \tag{3.73}$$

$$Z_1(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \Rightarrow \left\{ \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right\}, \tag{3.74}$$

$$Z_2(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \Rightarrow \left\{ \left[\frac{1}{3} \ln \left(\frac{-p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{13}{18} \right] + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \right\}. \tag{3.75}$$

3.4 As Funções $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)$

Outro tipo importante e útil de estrutura que surge em cálculos de integrais de Feynman, especialmente quando consideramos integrais divergentes regularizadas no método de Pauli-Villars são as funções que nós definimos por:

$$Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)}{[p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]}. \quad (3.76)$$

Considerando, por ora, apenas valores positivos inteiros ou nulo de k . Com esta definição nós observamos de imediato a relação:

$$\frac{\partial Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{\partial p^2} = Y_{k+1}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2). \quad (3.77)$$

Do mesmo modo que no caso das funções Z_k , podemos introduzir uma escala na definição das funções Y_k :

$$Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)}{\left[\frac{[p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2]}{-\lambda^2} \right]}, \quad (3.78)$$

de tal forma que a relação entre duas funções com escalas diferentes pode ser escrita, por exemplo, como:

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} \right) Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2). \quad (3.79)$$

Ainda que existam relações destas com aquelas que acabamos de discutir, é interessante considerarmos formas explícitas destas funções. Assim nós consideramos inicialmente $k = 0$,

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \int_0^1 \frac{\lambda_2^2}{p^2} \frac{dz(1-z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \quad (3.80)$$

onde α e β são as já conhecidas raízes do polinômio da eq.(3.5). Colocando noutra forma

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{p^2} \frac{1}{\alpha - \beta} \left\{ \int_0^1 \frac{dz(1-z)}{(z-\alpha)} - \int_0^1 \frac{dz(1-z)}{(z-\beta)} \right\}. \quad (3.81)$$

Agora utilizando as relações:

$$\int_0^1 \frac{dz}{(z-\alpha)} = \left[\ln \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \right] \quad (3.82)$$

$$\int_0^1 \frac{dz z}{(z-\alpha)} = \left[1 + \ln \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \right] \quad (3.83)$$

temos:

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left\{ \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\ln \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) - \ln \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right) \right] + \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha \ln \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) - \beta \ln \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right) \right] \right\}. \quad (3.84)$$

Repetindo o procedimento utilizado no caso das funções Z_k , obtemos

$$Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left\{ \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) + (p^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)} \right\}. \quad (3.85)$$

De modo semelhante

$$Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left\{ -1 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) + \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2) + 2\lambda_1^2 p^2 \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}}{2p^2} \right\}. \quad (3.86)$$

e também

$$Y_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{p^2} + \left[\frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{2p^4} + \frac{\lambda_1^2}{2p^2} \right] \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) + \left[\frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{2p^2} - \lambda_1^2 - \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^3}{2p^4} + \frac{3(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1^2}{2p^2} \right] \frac{g(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)}{f(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2)} \right\}. \quad (3.87)$$

Das formas acima podemos observar características importantes para as funções $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$:

- As funções possuem uma parte imaginária. Para $k = 0$, por exemplo

$$Im[Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)] = \frac{2\pi\lambda_2^2}{p^2} \frac{(p^2 - \lambda_2^2 + \lambda_2^2)\Theta(p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2)}{\sqrt{p^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}\sqrt{p^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}}, \quad (3.88)$$

cujos coeficientes tornam-se um polinômio de ordem crescente com o valor de k .

- As funções são contínuas no ponto $p^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$, mas são descontínuas no ponto $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$. O valor destas funções neste último ponto não está definido.

- A parte imaginária destas funções surge no ponto $p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ a partir de um valor infinito (indefinido).
- As funções são bem comportadas em $p^2 = 0$, ainda que não o sejam termo a termo. A convergência torna-se dificultada a medida que k aumenta.

Das expressões obtidas podem ser estabelecidas relações envolvendo as funções Y_k com outras de valores menores de k . Como tal

$$Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} [Y_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] + \frac{\lambda^2}{2p^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \quad (3.89)$$

e

$$Y_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) = \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} [Y_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] - \frac{\lambda^2}{2p^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) - 2Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \quad (3.90)$$

Esta última pode ser reescrita pela eliminação de Y_1 em favor de Y_0 (eq.(3.89)) e pela eliminação de Z_1 em favor de Z_0 (eq.(3.37)). Algumas situações particulares destas funções serão de nosso interesse futuro. Vamos então considerá-las em separado.

3.4.1 **lim** $\lambda_1^2 \rightarrow 0$ **em** $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$

Nós consideramos esta situação limite escrevendo, a partir da definição:

$$Y_k(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left\{ (-) \frac{\lambda_2^2}{p^2} \int_0^1 dz z^{k-1} + \left(\frac{\lambda_2^2}{p^2} \right) \int_0^1 \frac{dz z^{k-1}}{\left[z - \frac{(p^2 - \lambda_2^2)}{p^2} \right]} \right\}, \quad (3.91)$$

tal que os casos particulares $k = 1$ e $k = 2$, para $p^2 < \lambda_2^2$ ficam:

$$Y_1(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = (-) \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left\{ 1 + \frac{\lambda_2^2}{p^2} \ln \left(\frac{\lambda_2^2 - p^2}{\lambda_2^2} \right) \right\} \quad (3.92)$$

e

$$Y_2(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = (-) \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\lambda_2^2}{p^2} \left[1 - \frac{\lambda_2^2}{p^2} \ln \left(\frac{\lambda_2^2 - p^2}{\lambda_2^2} \right) \right] \right\}. \quad (3.93)$$

Estas mesmas funções para pequenos valores de p^2 ficam

$$Y_1(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[\frac{1}{2} + \frac{p^2}{3\lambda_2^2} + \dots \right] \quad (3.94)$$

e

$$Y_2(0, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \left[\frac{1}{6} + \frac{p^2}{12\lambda_2^2} + \dots \right] \quad (3.95)$$

É interessante notar a indefinição destas funções para o ponto $p^2 = \lambda_2^2$.

3.4.2 $\lim \lambda_1^2 \rightarrow \infty$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$

A situação limite $\lambda_1^2 \rightarrow \infty$ pode ser obtida facilmente a partir da definição:

$$Y_k(\infty, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \int_0^1 dz z^k, \quad (3.96)$$

portanto

$$Y_k(\infty, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right). \quad (3.97)$$

3.4.3 $p^2 \ll 1$ em $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$

O comportamento destas funções para p^2 pequeno pode ser escrito em termos de potências de p^2 . Tomando-se os primeiros termos apenas, ficamos com

$$Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2) \simeq (-) \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \xi \int_0^1 dz z^k (1-z) - \frac{p^2}{\lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right)^2 \xi^2 \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)^2}{(z-\xi)^2} + \dots \quad (3.98)$$

onde ξ foi definido como

$$\xi = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \quad (3.99)$$

Efetuada as integrais da expansão acima obtemos expressões com bom comportamento para $p^2 = 0$ e, em especial, o valor destas funções para $p^2 = 0$, que nos serão úteis no futuro.

3.5 As Funções $Y_k(m^2, m^2, p^2)$

A situação envolvendo $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$, que ocorre naturalmente em teorias com partículas de massas iguais, é de grande interesse e utilidade. Nós então definimos

$$Y_k(m^2, m^2, p^2) = \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)}{[p^2 z(1-z) - m^2]}, \quad (3.100)$$

ou introduzindo uma escala para tornar a função adimensional

$$Y_k(m^2, m^2, p^2, \lambda^2) = \int_0^1 \frac{dz z^k (1-z)}{\left[\frac{p^2 z(1-z) - m^2}{-\lambda^2} \right]}. \quad (3.101)$$

Repetindo o procedimento utilizado na seção anterior para explicitarmos as funções $Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_2^2)$ obtemos:

$$Y_0(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{g(m^2, m^2, p^2)}{f(m^2, m^2, p^2)} \right\}, \quad (3.102)$$

$$Y_1(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ -1 + m^2 \frac{g(m^2, m^2, p^2)}{f(m^2, m^2, p^2)} \right\} \quad (3.103)$$

e

$$Y_2(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{m^2}{2} \frac{g(m^2, m^2, p^2)}{f(m^2, m^2, p^2)} \right\} \quad (3.104)$$

As expressões para $g(m^2, m^2, p^2)$ e $f(m^2, m^2, p^2)$ são aquelas das definições eq.(3.61), eq.(3.62) e eq.(3.63). Dos resultados obtidos podemos notar relações entre as funções com diferentes valores de k . Como tal:

$$Y_1(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = \frac{Y_2(m^2, m^2, p^2; \lambda^2)}{2}. \quad (3.105)$$

3.5.1 $p^2 \ll 1$ em $Y_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2)$

Sendo o comportamento para pequenos valores de p^2 de grande interesse nós podemos obtê-lo escrevendo, a partir da definição:

$$Y_k(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) = \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \int_0^1 dz z^k (1-z) + \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dz z^{k+1} (1-z)^2 + \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^2 \int_0^1 dz z^{k+2} (1-z)^3 + \dots \right\} \quad (3.106)$$

Portanto, para $k=0, 1$ e 2 ficamos com:

$$Y_0(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \simeq \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{p^2}{12m^2} + \dots \right\}, \quad (3.107)$$

$$Y_1(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \simeq \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \frac{p^2}{m^2} + \dots \right\} \quad (3.108)$$

e

$$Y_2(m^2, m^2, p^2; \lambda^2) \simeq \frac{\lambda^2}{m^2} \left\{ \frac{1}{12} + \frac{1}{60} \frac{p^2}{m^2} + \dots \right\}. \quad (3.109)$$

3.6 As Funções ξ_{nm}

Quando consideramos integrais de Feynman um “loop” associadas a funções de três pontos, portanto com dois momentos externos e até três massas diferentes, torna-se bastante conveniente a introdução de um novo conjunto de funções de estrutura, definidas em termos dos parâmetros físicos, dos momentos externos e de dois parâmetros de Feynman. Através delas podemos sistematizar as soluções analíticas, as propriedades físicas, a verificação de relações de simetria e assim por diante. Todas funções poderão, ao final, ser escritas em termos das funções Z_k . A utilidade desta organização poderá ser apreciada no capítulos 11, 12 e 13. Nós as definimos por:

$$\xi_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy z^n y^m}{Q(y, z)}, \quad (3.110)$$

onde:

$$Q(y, z) = p^2 y(1-y) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)y + q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)z - \lambda_1^2 - (2p \cdot q)yz. \quad (3.111)$$

Na expressão acima λ_1 , λ_2 e λ_3 são as massas carregadas pelos propagadores das linhas internas e p e q são dois momentos externos (ou uma combinação destes).

Antes de explicitar algumas destas funções e enfatizar suas propriedades úteis, nós definiremos outro conjunto de funções que aparecem como subestruturas das funções ξ_{nm} . Elas são denominadas por η_{nm} e definidas por:

$$\eta_{nm}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy z^n y^m \ln \left(\frac{Q(y, z)}{-\lambda^2} \right). \quad (3.112)$$

Aqui λ^2 , que torna o argumento do logaritmo adimensional e funciona como escala para todas as quantidades físicas é arbitrário e poderá ser escolhido eventualmente como uma das massas.

Nós então explicitamos as funções ξ_{nm} , principiando por aquelas para $n + m = 1$. A primeira pode ser ξ_{10} dada por:

$$\begin{aligned}
\xi_{10} = & \left(\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\
& + \frac{1}{2q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \\
& - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2, \lambda^2)] \\
& \left. + \left[\frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \right\}, \tag{3.113}
\end{aligned}$$

por sua vez ξ_{01} pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned}
\xi_{01} = & \left(\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\
& + \frac{1}{2p^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\
& - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)] \\
& \left. + \left[\frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{00} \right\}. \tag{3.114}
\end{aligned}$$

Aqui notemos que, como deveria ser, um pode ser levado ao outro fazendo as trocas simultâneas:

$$\begin{cases} \lambda_2 \leftrightarrow \lambda_3 \\ p \leftrightarrow q, \end{cases} \tag{3.115}$$

o que vale para todas as funções ξ_{nm} . A escala λ^2 , por outro lado, pode ser facilmente notado é arbitrária.

Para explicitarmos as funções correspondentes a $n + m = 2$ é interessante primeiro fazê-lo com η_{00} . Ela fica:

$$\begin{aligned}
\eta_{00} = & \frac{1}{2} Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2) - \left[\frac{1}{2} + \lambda_1^2 \xi_{00} \right] \\
& + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2} \xi_{01} + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2} \xi_{10}. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Nesta expressão é possível perceber o porquê da definição de η_{nm} em termos de uma escala λ^2 . As funções ξ_{nm} são independentes de λ^2 , mas η_{nm} não.

A forma explícita de ξ_{20} pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \xi_{20} = & \left(\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p - q)^2} \right) \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p \cdot q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & - \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [Z_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] + \frac{1}{2q^2} [\eta_{00}] \\ & \left. + \left[\frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

A função ξ_{11} , por sua vez, pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \xi_{11} = & \left(\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\ & + \frac{1}{2p^2} [Z_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] - \frac{p \cdot q}{2q^2 p^2} [\eta_{00}] \\ & \left. + \left[\frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

A expressão correspondente à função ξ_{02} e outra forma alternativa (equivalente) para ξ_{11} podem ser obtidas pelas trocas indicadas na eq.(3.118).

Prosseguindo podemos explicitar os casos $n + m = 3$. Para tal é interessante primeiro estabelecer as funções η_{nm} para $n + m = 1$. Assim teremos:

$$\begin{aligned} \eta_{10} = & \frac{1}{3} [Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{6} + \lambda_1^2 \xi_{00} \right] \\ & + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{3} \xi_{20} + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{11}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

e também:

$$\begin{aligned} \eta_{01} = & \frac{1}{3} [Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2) - Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{6} + \lambda_1^2 \xi_{01} \right] \\ & + \frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{3} \xi_{02} + \frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{3} \xi_{11}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

De posse destas subestruturas fica fácil escrever ξ_{30} ;

$$\begin{aligned}
\xi_{30} = & \left(\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\
& + \frac{(p \cdot q)}{2p^2 q^2} [-Z_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\
& + \frac{1}{q^2} [\eta_{10}] \\
& \left. + \left[\frac{(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2q^2} - \frac{(p \cdot q)(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20} \right\}, \tag{3.121}
\end{aligned}$$

e também para ξ_{21} :

$$\begin{aligned}
\xi_{21} = & \left(\frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right) \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [(-)Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)] \right. \\
& + \frac{1}{2p^2} [Z_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)] \\
& - \frac{(p \cdot q)}{p^2 q^2} [\eta_{10}] \\
& \left. + \left[\frac{(p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot q)(q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2)}{2p^2 q^2} \right] \xi_{20} \right\}. \tag{3.122}
\end{aligned}$$

Destas decorrem aquelas ξ_{12} e ξ_{03} pelas adequadas transformações.

É interessante perceber que as funções ξ_{nm} para $n + m$ fixo, são escritas em termos daquelas $n + m - 1$. Estas, por sua vez, em termos daquelas $n + m - 2$ e assim por diante, de tal forma que, ao final, todas, na prática, são combinações de funções Z'_k s (para k positivo) mais a função ξ_{00} . Esta última também pode ser reduzida a uma combinação de Z'_k s, porém com valores negativos para k [1]. Podemos ilustrar isto em uma situação simplificada, porém imediata: quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = m$ (massas iguais) e $q^2 = p^2 = 0$ (partículas externas na camada de massa, com massa nula), teremos:

$$\xi_{00} = \frac{Z_{-1}(m^2, m^2, S; m^2)}{S} \tag{3.123}$$

onde $S = -2p \cdot q$. No caso geral ξ_{00} será uma combinação das funções $Z_{-1}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2)$, $Z_{-1}(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2)$ e $Z_{-1}(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p - q)^2; \lambda^2)$. Ao longo deste trabalho não necessitamos da forma explícita desta combinação. Neste ponto é interessante destacar algumas propriedades importantes destas funções.

- **Partes Imaginárias**

As funções ξ_{nm} , e isso pode ser facilmente percebido pela estrutura destas em termos das já bem conhecidas Z'_k s, possuem três limiares imaginários, correspondentes aos pontos:

$$\begin{cases} p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ q^2 = (\lambda_1 + \lambda_3)^2 \\ (p - q)^2 = (\lambda_2 + \lambda_3)^2 \end{cases} \quad (3.124)$$

Estas partes complexas desenvolvidas estão relacionadas às exigências de unitariedade em funções de três pontos, uma para cada vértice que conecta um momento externo às linhas internas, e correspondem à relação de conservação de energia-momento tal que as partículas internas passam a estar na camada de massa.

Relacionadas às propriedades acima, existem pontos onde estas funções não estão definidas. Estes correspondem às situações onde as funções ξ_{nm} adquirirão um pólo duplo e, conseqüentemente, se tornarão derivadas das funções básicas Z'_k s, ou seja funções do tipo Y_k . Estas últimas, como sabemos, não estão definidas nos pontos onde a parte imaginária aparece. Fisicamente, estas situações estão relacionadas aos limites “softs” para as partículas externas em funções de três pontos.

O que acabamos de mencionar pode ser ilustrado, para a mais simples destas funções, no caso $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = m^2$. Neste caso teremos:

i) Para $p = 0$:

$$\xi_{00} = -Y_0(m^2, m^2, q^2). \quad (3.125)$$

ii) Para $q = 0$:

$$\xi_{00} = -Y_0(m^2, m^2, p^2). \quad (3.126)$$

iii) Para $q = -p$:

$$\xi_{00} = -Y_0(m^2, m^2, (p - q)^2). \quad (3.127)$$

Estas situações mostram claramente os três pontos onde ξ_{00} não está definida.

• Comportamento a momentos nulos

Uma das situações de interesse físico associadas às funções ξ_{nm} é aquela correspondente ao comportamento de baixa anergia ou seja p^2 e q^2 pequenos. Estas expansões podem ser feitas com auxílio daquelas correspondentes às funções Z'_k s desenvolvidas na seção (3.2.2). Aqui, para utilização futura ressaltamos apenas os valores a momentos nulos de algumas delas;

$$\begin{cases} m^2 \xi_{00}(m^2, 0, m^2, 0, m^2; m^2) = -\frac{1}{2} \\ m^2 \xi_{10}(m^2, 0, m^2, 0, m^2; m^2) = -\frac{1}{6}, \end{cases} \quad (3.128)$$

resultado que nos serão úteis nos capítulos 11 e 12.

• **Propriedades**

A principal utilidade das funções ξ_{nm} é a sistematização simples que elas oferecem para escrevermos as soluções analíticas para funções de três pontos. Estas, por sua vez, estão relacionadas através de Identidades de Ward. A tarefa de verificação destas relações entre as amplitudes, após terem sido calculadas, ficará extremamente facilitada se algumas propriedades das funções ξ 's forem notadas. Estas são, ao final, relações entre funções ξ 's e Z 's. Elas entretanto, tornam a verificação de Identidades de Ward um procedimento completamente algébrico (na linguagem matemática que adotamos neste trabalho). Estas importantes propriedades são:

i) Para $n+m=1$

$$\begin{aligned} \bullet [q^2 \xi_{10} + p \cdot q \xi_{01}] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \xi_{00} \right\} \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \bullet [p^2 \xi_{01} + p \cdot q \xi_{10}] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + Z_0(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + (p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \xi_{00} \right\} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Notemos que, apesar das complicadas expressões individuais de ξ_{10} e ξ_{01} , estas combinações apresentam-se bastante simplificadas.

ii) Para $n+m=2$

$$\begin{aligned} \bullet [q^2 \xi_{20} + p \cdot q \xi_{11}] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + \eta_{00} + (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \xi_{10} \right\} \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \bullet [q^2 \xi_{11} + p \cdot q \xi_{02}] &= \frac{1}{2} \left\{ Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. - Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + Z_1(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \xi_{01} \right\} \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\bullet [p^2 \xi_{02} + p \cdot q \xi_{11}] = \frac{1}{2} \left\{ Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right.$$

$$+ \eta_{00} + (p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \xi_{01} \} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \bullet [p^2 \xi_{11} + p \cdot q \xi_{20}] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad + Z_1(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2) \\ &\quad \left. + (p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \xi_{10} \right\}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Notemos que o lado esquerdo destas relações envolvem ξ' s para as quais $n + m = 2$, ao passo que o lado direito apresenta no máximo, $n + m = 1$.

iii) Para $n+m=3$

$$\begin{aligned} \bullet [q^2 \xi_{30} + p \cdot q \xi_{11}] &= \left\{ -\frac{1}{2} Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + \eta_{10} + \frac{1}{2} (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \xi_{20} \right\} \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \bullet [q^2 \xi_{12} + p \cdot q \xi_{03}] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad + 2Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \\ &\quad - Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \\ &\quad + Z_2(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda^2) \\ &\quad \left. + (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \xi_{02} \right\} \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \bullet [q^2 \xi_{21} + p \cdot q \xi_{12}] &= \frac{1}{2} \left\{ Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad - Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \\ &\quad \left. + \eta_{10} + (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \xi_{11} \right\} \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \bullet [p^2 \xi_{21} + p \cdot q \xi_{30}] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad + Z_2(\lambda_1^2, \lambda_3^2, q^2; \lambda^2) \\ &\quad \left. + (p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \xi_{20} \right\} \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} \bullet [p^2 \xi_{03} + p \cdot q \xi_{12}] &= \left\{ -\frac{1}{2} Z_0(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right. \\ &\quad + Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \\ &\quad \left. + \eta_{01} + \frac{1}{2} (p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) \xi_{02} \right\} \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\bullet [p^2 \xi_{12} + p \cdot q \xi_{21}] = \frac{1}{2} \left\{ Z_2(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \right.$$

$$\begin{aligned}
& -Z_1(\lambda_2^2, \lambda_3^2, (p-q)^2; \lambda^2) \\
& + \eta_{01} + (p^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\xi_{11} \}. \tag{3.140}
\end{aligned}$$

Para o que necessitamos neste trabalho estas funções e suas propriedades serão suficientes.

3.7 As Funções ξ_{nml}

Do mesmo modo que o cálculo explícito de funções de três pontos tem nas funções ξ_{nm} uma sistematização útil, nós podemos definir um conjunto análogo, as funções ξ_{nml} , para o caso de cálculos envolvendo funções de quatro pontos [2]. Estas para um valor de $n + m + l$ fixo, poderão ser escritas primeiramente em termos de funções ξ_{nml} para $n + m + l - 1$, funções ξ' s e Z' s. Ao final por sucessivas “reduções” poderão restar apenas funções básicas Z' s. Deste modo as principais propriedades físicas das amplitudes de quatro pontos poderão ser facilmente visualizadas. Entre estas, suas partes imaginárias, pontos indefinidos, limites de baixas energias, etc... Além disso propriedades análogas àquelas para as ξ' s com vistas a verificação de relações de simetria podem igualmente ser estabelecidas. A sistematização oferecida por esta linguagem facilita enormemente os cálculos inclusive computacionais. Nós não nos deteremos em formas explícitas nem ao estudo das propriedades destas funções por não ser isto necessário neste trabalho. Registramos apenas a definição destas funções:

$$\xi_{nml}(\lambda_1^2, p^2, \lambda_2^2, q^2, \lambda_3^2, l^2; \lambda_4^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} \frac{dx z^n y^m x^l}{Q(x, y, z)} \tag{3.141}$$

onde:

$$\begin{aligned}
Q(x, y, z) = & l^2 x(1-x) + (\lambda_1^2 - \lambda_4^2)x \\
& + p^2 y(1-y) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)y \\
& + q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)z \\
& - 2p \cdot lxy - 2p \cdot qyz - 2q \cdot lxz - \lambda_1^2
\end{aligned} \tag{3.142}$$

Aqui os λ_i^2 são as massas carregadas pelos propagadores internos ao “loop” e l, p e q são momentos externos.

Para finalizar ressaltamos que o conteúdo deste capítulo representa a adoção de uma linguagem matemática para o tratamento de amplitudes físicas em soluções perturbativas

de T.Q.C.'s. Estas definições, propriedades e etc..., permitem uma completa sistematização dos cálculos, tornando todos os procedimentos enormemente simplificados. A motivação para esta organização está além das necessidades deste trabalho, e deve-se também à constatação de que na literatura não se adota uma linguagem matemática para a apresentação dos resultados [3] o que dificulta enormemente a verificação e compreensão daqueles eventualmente obtidos com os de outros autores previamente realizadas. Outro aspecto importante refere-se à ênfase das propriedades físicas especialmente aquelas relativas à unitariedade. Isto porque, nestas amplitudes, somos obrigados a conviver com pólos, limiares complexos, indefinições em certas situações cinemáticas e etc... Com isso, muitas vezes, na tarefa simples de fazer um gráfico, para o resultado de um cálculo realizado, enfrentamos dificuldades computacionais injustificáveis. A adoção das estruturas propostas neste capítulo tem se mostrado de enorme utilidade para as mais diversas finalidades em cálculos de amplitudes ao nível um "loop". A extensão disto para outros níveis de aproximação, por outro lado, mostra-se completamente viável. Consideramos, por isso, esta sistematização uma parte importante deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel, Sistematização para o cálculo de integrais de Feynman ao nível um “loop”, (em preparação);
- [2] O.A. Battistel and O.L. Battistel, Sistematização para o cálculo de funções de quatro pontos, (em preparação);
- [3] t’Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B153, 365 (1979);

Capítulo 4

Cálculo de Integrais de Feynman

4.1 Introdução

Uma teoria quântica de campos, em solução perturbativa, pode ser caracterizada ou representada pelo seu conjunto de regras de Feynman. Nós esperamos então que todas as simetrias fundamentais implementadas na lagrangiana, por ocasião da sua construção, bem como os princípios gerais da TQC, estejam contidos, automaticamente, nas amplitudes correspondentes a processos físicos específicos de interesse, calculadas através destas regras. Entretanto, para a determinação destas amplitudes, perturbativamente, nos deparamos, em geral, com o cálculo das chamadas “Integrais de Feynman”. Ocorre que ao construirmos a expressão matemática correspondente aos diagramas de Feynman, que contribuem para um processo físico, podemos ter mais momentos associados à linhas internas do que vértices independentes a estabelecerem vínculos para estes momentos. Isto permite que existam momentos capazes de satisfazer todas as relações de conservação de energia-momento assumindo quaisquer valores. Como cada um destes valores representa uma contribuição possível, devemos somá-las todas, ou seja, integrar sobre todos os valores dos momentos não restritos. Em muitos casos isto nos fornece uma quantidade divergente, e é necessário reinterpretá-la adequadamente. Em outros a amplitude obtida é finita e basta efetuarmos as devidas integrações para obtê-la. Do que não estamos livres, entretanto, a não ser em casos restritos onde consideramos apenas contribuições de diagramas árvore, isto é, sem “loops” e portanto sem integrações, é de, para determinar uma amplitude de transição, que é o passo inicial para o cálculo de observáveis físicos, efetuar o cálculo de integrais de Feynman. Em virtude disto nós dedicamos este capítulo

à discussão de estratégias úteis para isto.

Inicialmente apresentamos uma técnica auxiliar importante conhecida como parametrização de Feynman. Esta tem a virtude de colocar as integrais nos momentos numa forma genérica possível de ser tratada de um modo bastante sistemático, quando finitas. Estamos nos referindo à integração dimensional com a qual obteremos os resultados que necessitaremos no futuro.

Em seguida discutiremos os problemas relacionados às manipulações e cálculos de integrais divergentes (regularizações). Isto será feito dentro do ponto de vista primeiramente dos métodos convencionais de regularização: Regularização Covariante de Pauli-Villars e Regularização Dimensional e, posteriormente, segundo uma estratégia que será deduzida nos capítulos seguintes. A fim de evidenciar os modos específicos de cada método bem como as diferenças essenciais existentes entre eles nós consideraremos um exemplo simples de amplitude contendo divergências: a auto-energia do quark por excitação de um glúon.

4.2 Parametrização de Feynman

O processo de manipulação e cálculo de integrais de Feynman é consideravelmente facilitado se nos utilizamos do artifício conhecido como parametrização de Feynman. O método consiste em utilizar a expressão [1]:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n]^n}, \quad (4.1)$$

onde os x_i são os parâmetros de Feynman cuja integração é vinculada pela distribuição $\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)$. Quanto aos a_i^s eles são, em geral, propagadores de partículas correspondentes às linhas internas do diagrama considerado, ao qual está associada a integral que se deseja calcular. Estes a_i^s são, portanto, monômios quadráticos dos momentos internos e externos e, eventualmente, envolvem massas. É sempre possível, e recomendável, a utilização deste artifício. Quando temos dois ou mais fatores a_i^s iguais basta derivarmos a expressão acima, nos dois lados, em relação a um dos a_i^s para se obter a expressão adequada. Deste modo temos:

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 \dots a_n} = n! \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i) x_1}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n]^{n+1}}. \quad (4.2)$$

Alguns casos particulares podem ser extraídos, entre eles:

$$i) \quad \frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[(b-a)x + a]^2}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad & \frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-x)dx}{[(b-a)x+a]^3} \\
iii) \quad & \frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{[(c-a)z+(b-a)y+a]^3}.
\end{aligned}$$

É importante notar que a forma genérica do denominador, após a parametrização de Feynman, ficará na forma;

$$[k^2 + B(p \cdot k) + C]^\alpha,$$

o que torna simples a integração em k . Para finalizar, registramos que esta não é a única forma de parametrização. Nós podemos nos valer também de exponenciais [2].

4.3 Integrais Finitas

O problema geral, no que diz respeito a integrais de Feynman, é aquele relativo a integrais finitas. Isto porque, mesmo no caso de integrais divergentes, o cálculo somente é de fato efetuado após tornarmos as mesmas finitas, através de algum procedimento.

Para ilustrar os ingredientes e procedimentos envolvidos no cálculo de integrais de Feynman bem como para nos utilizarmos destes na obtenção de resultados gerais, logo a seguir, consideraremos o cálculo explícito de uma típica integral finita [3];

$$I(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-) [p^2 - 2p \cdot k + \lambda_1^2 - \lambda_2^2]}{(k^2 - \lambda_1^2)^2 [(p-k)^2 - \lambda_2^2]}, \quad (4.3)$$

cujo cálculo pode, por isso, ser feito diretamente. Inicialmente nos utilizamos da parametrização de Feynman;

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{[(b-a)z+a]^3}. \quad (4.4)$$

Tomando;

$$\begin{cases} a = (k^2 - \lambda_1^2) \\ b = [(p-k)^2 - \lambda_2^2], \end{cases} \quad (4.5)$$

ficamos com:

$$[(b-a)z+a] = k'^2 + H^2,$$

onde:

$$k' = k - pz,$$

e

$$H^2 = (-) \left[p^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 \right].$$

Efetuando o “shift” também no numerador:

$$\left(p^2 - 2p \cdot k - \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \right) \longrightarrow \left[p^2(1-2z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \right],$$

onde já foi retirado o termo ímpar. Com isso a integral fica:

$$I(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = -2 \int_0^1 dz \left[p^2(1-2z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \right] (1-z) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - H^2)^3}. \quad (4.6)$$

Temos então que integrar nos momentos. Para tal lembramos que estamos num espaço de Minkowski [4];

$$\begin{cases} d^4k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 \\ k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \\ k^2 - H^2 = k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + H^2). \end{cases} \quad (4.7)$$

Deste modo a integral nos momentos fica:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - H^2 + i\epsilon)^3} = \int d^3k \int dk_0 \left\{ \frac{1}{k_0^2 - [(\mathbf{k}^2 + H^2)^{1/2} - i\epsilon]^2} \right\}^3. \quad (4.8)$$

Para efetuar a integração em k_0 notamos que o integrando possui pólos no plano complexo k_0 como indicado na fig.4.1.

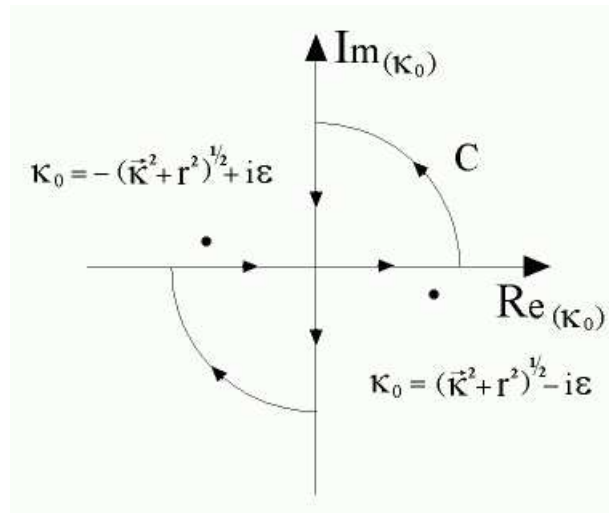


Figura 4.1: Representação diagramática das funções de dois pontos.

Pelo teorema de Cauchy [5] temos que:

$$\int_C f(k_0) dk_0 = zero ,$$

para

$$f(k_0) = \frac{1}{\{k_0^2 - [(\mathbf{k}^2 + H^2)^{1/2} - i\epsilon]^2\}^3}.$$

Notemos ainda que $f(k_0)$ cai rapidamente para k_0 grande, isto é:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} f(k_0) \sim \frac{1}{k_0^6}.$$

Portanto a contribuição do contorno circular se anula, restando apenas as partes sobre os eixos. Isto implica que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k_0) dk_0 = \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(k_0) dk_0 .$$

Deste modo, podemos efetuar a integração sobre qualquer um dos eixos. Por conveniência vamos então efetuar uma rotação de $\pi/2$ e passar do eixo real para o eixo imaginário, ou seja, fazemos a mudança de variável (rotação de Wick):

$$k_0 \rightarrow ik_4,$$

com k_4 real. Com isso a integral em k_0 fica:

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(k_0) dk_0 &= i \int_{-\infty}^{+\infty} f(ik_4) dk_4 \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_4}{[k_4^2 + \mathbf{k}^2 + H^2 - i\epsilon]^3} . \end{aligned}$$

Na prática isto quer dizer que passamos para um espaço euclideano;

$$\begin{cases} k_\mu = (k_1, k_2, k_3, k_4) \\ k_2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \mathbf{k}^2 + k_4^2 . \end{cases} \quad (4.9)$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é a seguinte:

$$\int_{Mink.} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - H^2 + i\epsilon)^3} = -i \int_{Eucl.} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + H^2 - i\epsilon)^3} .$$

É conveniente usar agora coordenadas polares quadridimensionais;

$$\begin{cases} k_1 = k \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ k_2 = k \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ k_3 = k \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \\ k_4 = k \cos \alpha , \end{cases} \quad (4.10)$$

com as correspondentes relações inversas:

$$\begin{cases} k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \mathbf{k}^2 + k_4^2 \\ tg\phi = \frac{k_2}{k_1} \\ tg\theta = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k_3} \\ tg\alpha = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}}{k_4}, \end{cases} \quad (4.11)$$

de modo que:

$$\int d^4k = \int_0^\infty k^3 dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta \int_0^\pi \text{sen}^2\alpha d\alpha .$$

Portanto a integral fica:

$$\begin{aligned} (-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + H^2 - i\epsilon)^3} &= (-i)(2\pi^2) \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{(2\pi)^4 (k^2 + H^2 - i\epsilon)^3} \\ &= \frac{(-i)}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk^2}{(k^2 + H^2 - i\epsilon)^3} . \end{aligned}$$

Agora se utilizamos a expressão para as Funções Beta de Euler [5];

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1} dt}{(t + a^2)^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} ,$$

temos que:

$$(-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + H^2 - i\epsilon)^3} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{(-1)}{2(H^2 - i\epsilon)} .$$

Voltando com este resultado para a integral original e reintroduzindo a definição de H^2 , teremos:

$$I(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{[p^2(1-2z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)](1-z) dz}{[p^2z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 + i\epsilon]} . \quad (4.12)$$

Podemos escrever este resultado numa forma mais adequada notando que:

$$\frac{[p^2(1-2z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)]}{[p^2z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 + i\epsilon]} = \frac{d}{dz} \left[\ln(p^2z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 + i\epsilon) \right] ,$$

de modo que:

$$\begin{aligned} I(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left\{ (1-z) \ln(p^2z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 + i\epsilon) \right\}_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 dz \ln [p^2z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2 + i\epsilon] , \end{aligned} \quad (4.13)$$

ou seja:

$$I(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left\{ Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_1^2) \right\} , \quad (4.14)$$

onde introduzimos a definição da função $Z_0(\lambda_1^2, \lambda_2^2, p^2; \lambda_1^2)$ (cap.3).

4.4 Integração Dimensional

A última seção serviu para, através do cálculo de uma típica integral de Feynman finita, ilustrar um procedimento explícito, suficiente, para o cálculo de integrais finitas nos momentos. Seguindo este procedimento poderíamos calcular qualquer integral na forma geral fornecida pela parametrização de Feynman;

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\alpha, \dots)}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (4.15)$$

É possível entretanto evitar esta multiplicidade de integrais, deduzindo um resultado geral do qual podem ser extraídos todos os outros necessários. O cálculo de integrais de Feynman torna-se enormemente facilitado através desta sistemática. Trata-se da extensão $n = m + 1$ -dimensional, da forma genérica das integrais nos momentos oferecida pela parametrização de Feynman. Os passos necessários são essencialmente os mesmos delineados na seção anterior (propositadamente). Este resultado, num contexto um pouco diferente, serve como base para a construção do método de regularização dimensional. Tratando-se de um resultado de grande utilidade, justifica-se a discussão com uma certa riqueza de detalhes.

Nós tomamos como ponto de partida a mais simples das integrais na forma oferecida pela parametrização de Feynman [6];

$$I(Q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \quad (4.16)$$

De início efetuamos o “shift”:

$$\begin{aligned} (k^2 + 2Q \cdot k - H^2) &= [(k + Q)^2 - (Q^2 + H^2)] \\ &= k'^2 - M^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde definimos:

$$\begin{cases} K' = k + Q \\ M^2 = Q^2 + H^2 \end{cases}$$

Com isso a integral fica:

$$I(Q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - M^2]^\alpha}. \quad (4.18)$$

Agora, abandonando a linha em k , fazemos uma extensão para $m + 1 = n$ dimensões do espaço dos momentos (tipo Minkowski);

$$I(Q, n) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2)^\alpha}. \quad (4.19)$$

Então teremos:

$$\begin{cases} d^n k = dk_0 dk_1 dk_2 \dots dk_m = dk_0 d^m \mathbf{k} \\ k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \\ \mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Assim $I(Q, n)$ ficará:

$$I(Q, n) = \int d^m \mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon)^2]^\alpha} \right\}. \quad (4.21)$$

A integração em k_0 pode ser facilmente efetuada se nós identificamos, no plano complexo k_0 , os pólos do integrando 4.1.

Com o contorno C escolhido, a integral de $f(k_0)$;

$$f(k_0) = \frac{1}{\{k_0^2 - [(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon]^2\}^\alpha},$$

se anula.

Observemos ainda que $f(k_0)$ cai abruptamente com k_0 grande (tanto quanto $\alpha > 1$). Isto é:

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} f(k_0) \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}}. \quad (4.22)$$

Então a contribuição sobre o contorno circular C se anula e apenas restam as contribuições sobre os eixos. Fazemos a conveniente mudança de variável

$$k_0 \longrightarrow ik_{m+1}, \quad (4.23)$$

com k_{m+1} real. Com isso a integral em k_0 fica:

$$\begin{aligned} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1} f(ik_{m+1}) \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{[(ik_{m+1})^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon)^2]^\alpha} \\ &= i(-1)^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{[k_{m+1}^2 + \mathbf{k}^2 + i\epsilon]^\alpha}. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que passamos, na prática, para um espaço euclidiano n -dimensional;

$$\begin{cases} k_\mu = (k_1, k_2, \dots, k_{m+1}) \\ k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{m+1}^2 \\ d^n k = dk_1 dk_2 \dots dk_{m+1}. \end{cases} \quad (4.24)$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por:

$$\int_{Mink.} \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\alpha} = (-1)^{-\alpha} i \int_{Eucl.} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \quad (4.25)$$

Agora expressamos o espaço euclideano n -dimensional em coordenadas polares;

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = k \text{sen} \theta_m \text{sen} \theta_{m-1} \dots \text{sen} \theta_2 \text{sen} \theta_1 \\ k_2 = k \text{sen} \theta_m \text{sen} \theta_{m-1} \dots \text{sen} \theta_2 \text{cos} \theta_1 \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ k_{m+1} = k \text{cos} \theta_m. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

O elemento de volume será dado por:

$$\int d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \text{sen} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \text{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m. \quad (4.27)$$

A integral nos momentos fica com isso, na forma:

$$I(Q, n) = (-1)^\alpha i \int_0^{2\pi} \theta_1 \int_0^\pi \text{sen} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \text{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{k^m dk}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \quad (4.28)$$

O integrando somente depende de k^2 , de forma que podemos integrar nos ângulos. Para tal tomamos auxílio nas expressões [6]:

$$\begin{array}{l} i) \quad \int_0^\pi \text{sen}^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}, \\ ii) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{array}$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \text{sen} \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \int_0^\pi \text{sen}^{m-1} \theta_m d\theta_m = \\ & = (2\pi) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1 + 1)} \right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + 1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)} \right] \dots \\ & \dots \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+m-1}{2}\right)} \right] \\ & = \frac{(2\pi)(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

ou seja, obtivemos:

$$\int d\Omega_m = \frac{2(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \quad (4.29)$$

Voltando com este resultado para a integral:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i (\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2 + M^2)^\alpha}, \quad (4.30)$$

a qual, usando a expressão para a função Beta de Euler [5], fornece:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i (\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)\right)}{(M^2)^{\alpha - \left(\frac{m+1}{2}\right)} \Gamma(\alpha)}. \quad (4.31)$$

Com $m + 1 = n$, fica:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(2)^n \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}} (\pi)^{m+1 - \left(\frac{m+1}{2}\right)}}, \quad (4.32)$$

ou ainda:

$$I(Q, n) = \frac{(-1)^{-\alpha} i \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\alpha) (M^2)^{\alpha - \frac{n}{2}}}. \quad (4.33)$$

A forma da expressão justifica a definição:

$$n \equiv 2\omega,$$

que então nos fornecerá:

$$I(Q, n) = \frac{i \Gamma(\alpha - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (4.34)$$

que é o resultado desejado. A presença da função $\Gamma(\alpha - \omega)$ nos diz que o resultado obtido é válido para $\alpha > \omega$, ou seja, para integrais finitas. Este resultado geral, como já dissemos, se constitui na base para a construção do método de regularização dimensional. Neste caso a função $\Gamma(\alpha - \omega)$ é trocada pela sua continuação analítica $\Gamma_\omega(\alpha - \omega)$, a função Γ na representação de Weierstrass, quando incluímos o domínio $\alpha < \omega$, o que discutiremos posteriormente. Por enquanto podemos ressaltar a grande utilidade deste resultado no tratamento de integrais finitas pois as outras formas genéricas podem ser obtidas a partir desta. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu(Q, 2\omega) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}, \quad (4.35)$$

primeiro derivamos o lado esquerdo $I(Q, 2\omega)$ em relação ao momento externo Q_μ ;

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} \right\} = -2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}}. \quad (4.36)$$

A seguir derivamos o lado direito,

$$\frac{d}{dQ_\mu} \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}} \right\} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)(\alpha - \omega)(-2Q_\mu)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}. \quad (4.37)$$

Deste modo, igualando ambos os lados, teremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^{\alpha+1}} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)(\alpha - \omega)(Q_\mu)}{\alpha\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \\ &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha + 1 - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha + 1)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega+1}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Definindo $\alpha' = \alpha + 1$, uma vez que α é arbitrário, temos:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}. \quad (4.39)$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras integrais necessárias para os cálculos de amplitudes. Uma vez que estamos tratando aqui de integrais finitas, ω pode ser tomado na dimensão física $\omega = 2$ nos resultados.

A seguir apresentamos os resultados para integrais comumente encontradas nos cálculos de amplitudes físicas.

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \quad (4.40)$$

$$\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(-)\Gamma(\alpha - \omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu + \delta_{\alpha\nu} Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(2\omega + 2) Q_\alpha \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} \right] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha} Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta} Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha} Q_\mu Q_\beta + \\
&\quad \quad \quad + \delta_{\nu\beta} Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta} Q_\mu Q_\nu) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right] \quad (4.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2} ((2\omega + 4) Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\alpha\beta} Q^2) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{4} (2\omega + 2) \delta_{\alpha\beta} \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right] \quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \left[\frac{Q^4 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega}} + \right. \\
&\quad + \frac{(2\omega + 2) Q^2 \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 1}} + \\
&\quad \left. + \frac{\omega(\omega + 1) \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) [-Q^2 - H^2]^{\alpha - \omega - 2}} \right]. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

É interessante notar que decorrem destes resultados as seguintes propriedades:

$$i) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} f(k^2) k_\mu = zero \quad (4.49)$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2) \quad (4.50)$$

$$iii) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4\omega(\omega+1)} (g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2), \quad (4.51)$$

que serão muito úteis em cálculos futuros.

Uma vez que já dispomos de uma sistemática adequada para o cálculo de integrais finitas, vejamos agora o caso de integrais divergentes.

4.5 Integrais Divergentes; Regularização

Os procedimentos estabelecidos nas seções anteriores, mais aqueles do capítulo 3, nos garantem os ingredientes necessários para o cálculo de integrais finitas nos momentos. Entretanto, como sabemos, no cálculo de amplitudes físicas contendo “loops”, temos também a presença de integrais divergentes. A questão agora é então: como proceder para efetuar os cálculos necessários quando as integrais são divergentes? Para tal nós dispomos de alguns procedimentos.

4.5.1 Modificação do Integrand

Neste caso, o procedimento convencional, é o da adoção de algum esquema que modifique a dependência dos momentos na região de grandes valores, responsáveis pelas divergências, de modo a tornar a integral finita. Isto normalmente é realizado através da introdução, na integral, de uma função ou distribuição, caracterizada por um conjunto de parâmetros, que caia para zero em momentos altos mais rapidamente do que a integral original diverge. A conexão com a integral original se dá através de alguma situação limite onde a função modificadora se reduz à unidade. Esquematicamente;

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) [G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)], \quad (4.52)$$

onde:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} k^4 f(k) = \infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k^4 f(k) G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = 0 \\ \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = 1. \end{cases} \quad (4.53)$$

As divergências da integral original, no “limite de conexão”, se manifestarão por funções monotônicas de Λ^2 (divergentes). Um dos mais representativos esquemas baseado nesta filosofia, que será muito utilizado por nós nas discussões futuras, é a regularização covariante de Pauli-Villars. Neste caso, podemos identificar, numa das situações:

$$G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^n. \quad (4.54)$$

4.5.2 Modificação dos Limites de Integração

Este tipo de filosofia fundamenta-se num raciocínio bastante simples; limitar a integração, impedindo que ela inclua a região de momentos altos, e com isso evitando as divergências. Esquemáticamente:

$$\int_0^\infty k^3 dk \longrightarrow \int_0^\Lambda k^3 dk. \quad (4.55)$$

A conexão entre os resultados é evidentemente feita tomando-se o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Este esquema pode ser formulado covariantemente:

$$\int d^4k f(k) \longrightarrow \int d^4k \Theta(k^2, \Lambda^2), \quad (4.56)$$

onde $\Theta(k^2, \Lambda^2)$ é a distribuição de Heaviside [5] em quatro dimensões. Visto deste modo esta filosofia pode ser considerada como um caso particular do anterior. É interessante, entretanto, caracterizá-los assim devido às profundas diferenças apresentadas, especialmente na formulação de teorias quânticas efetivas (não-renormalizáveis). Este método, denominado regularização covariante “sharp cut off”, é largamente utilizado nestes casos.

É importante registrarmos, neste ponto, que quando tomamos o “limite de conexão” todos os métodos ou esquemas deste tipo devem concordar entre si. Isto se deve ao fato de a parte finita destas integrais, que estarão associadas ao conteúdo físico das amplitudes, necessitarem ser univocamente definidas para que possamos atribuir algum conteúdo físico, sem ambiguidades, às amplitudes associadas. A parte divergente por sua vez se manifestará de acordo com a filosofia de regularização, mas no caso de ser caracterizada por um parâmetro de regularização apenas (“cut off” Λ^2) deverá igualmente concordar, independentemente do método, neste limite.

4.5.3 Modificação na dimensão da Integral

A idéia básica desta filosofia está na constatação de que algumas integrais que são divergentes na dimensão física, $3 + 1 = 4$, não o seriam em dimensões inferiores. O espaço dos

momentos, sob o qual é feita a integração, é inicialmente estendido para uma dimensão n que é posteriormente, através de continuação analítica, tomado como $n = 2\omega$ contínuo e complexo. Ao final dos cálculos, o parâmetro de regularização ω é tomado, nas expansões feitas ao redor de $\omega = 2$, como tendendo a $\omega = 2^+$. As partes finitas e divergentes são identificadas facilmente; as divergentes serão caracterizadas por pólos em $\omega = 2$ e as finitas por aqueles termos finitos quando $\omega = 2$. Esta filosofia se constitui no método da Regularização Dimensional, o mais utilizado dentre todos. Nós o discutiremos brevemente numa seção posterior.

4.5.4 Manipulação e Cálculo com Regularização Implícita

Nós gostaríamos de acrescentar, àquelas tradicionais, nossa própria filosofia: manipulação e cálculo de amplitudes contendo divergências utilizando regularização implicitamente. Este método tem seu ponto de partida na idéia de que métodos de regularização devem ser apenas ferramentas matemáticas auxiliares e portanto equivalentes. Nenhum conteúdo físico ou identidade, tais como relações de simetria entre funções de Green da teoria (Identidades de Ward, por exemplo) devem depender, de modo algum, do esquema de manipulação das integrais divergentes. Buscando realizar esta idéia filosófica nós chegamos a importante conclusão de que os métodos de regularização são, na verdade, dispensáveis. Isto será introduzido e largamente discutido nos capítulos posteriores, e desempenhará um papel importante em todas as nossas discussões futuras. Nesta filosofia as integrais divergentes são manipuladas por identidades até que os objetos divergentes sejam reduzidos às divergências básicas. Estas então são definidas, elas próprias, como os conteúdos divergentes das amplitudes.

Para facilitar as discussões posteriores e proporcionar um melhor contato com a problemática relativa às divergências tais como: regularização, manipulações, cálculos e outros aspectos envolvidos, nós consideraremos a seguir uma breve discussão e apresentação de resultados úteis nas filosofias: Regularização Covariante de Pauli-Villars, Regularização Dimensional e com Regularização Implícita.

4.6 Regularização Covariante de Pauli-Villars

Um dos principais esquemas de regularização, baseados na modificação da dependência dos momentos do “loop”, é a Regularização Covariante de Pauli-Villars [7]. Esta filosofia

de regularização pode ser colocada em termos muito simples: um dos propagadores do “loop” é modificado segundo a relação:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k^2 - \Lambda_i^2} \quad (4.57)$$

onde os Λ_i^2 , os parâmetros de regularização, são tais que $\Lambda_i^2 \gg \mu^2$ (condição de regularização). As escolhas dos a_i^s são feitas de tal modo que a função resultante, na condição mais favorável, não contenha potências de k^2 no numerador e assim o propagador modificado ganhe um número suficiente de potências dos momentos internos do “loop” no denominador, tornando as integrais convergentes.

A regularização de integrais com graus de divergências até lineares pode ser feita com apenas um coeficiente não-nulo. Neste caso escolhemos $a_1 = -1$, ficando com:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right). \quad (4.58)$$

Notemos que no limite $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ a função $G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)$ obtida torna-se a unidade (limite de conexão). Por outro lado, quando necessitamos de dois termos não-nulos na soma que gera o propagador modificado (divergências até cúbicas), a escolha adequada dos coeficientes a_1 e a_2 nos fornece:

$$a_1 = - \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_1^2}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \right) \quad (4.59)$$

e

$$a_2 = - \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_2^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \right). \quad (4.60)$$

Isto nos leva a:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right). \quad (4.61)$$

Aqui notemos que o resultado correspondente à integral original é obtido pelo limite de conexão $\lim(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \rightarrow \infty$. Uma vez que a consistência do método nos exige apenas que $(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \gg \mu^2$, podemos fazer $(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2) \simeq \Lambda^2$ e então reduzir a apenas um parâmetro de regularização. Assim

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2. \quad (4.62)$$

Seguindo este raciocínio é fácil mostrar que para três regularizadores as escolhas que privilegiam a regularização são:

$$a_1 = \frac{-(\mu^2 - \Lambda_2^2)(\mu^2 - \Lambda_3^2)}{(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)(\Lambda_3^2 - \Lambda_1^2)}, \quad (4.63)$$

$$a_2 = \frac{-(\mu^2 - \Lambda_1^2)(\mu^2 - \Lambda_3^2)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)(\Lambda_3^2 - \Lambda_2^2)} \quad (4.64)$$

e

$$a_3 = \frac{-(\mu^2 - \Lambda_3^2)(\mu^2 - \Lambda_2^2)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_3^2)(\Lambda_2^2 - \Lambda_3^2)}. \quad (4.65)$$

Isto nos fornece:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_3^2}{k^2 - \Lambda_3^2} \right). \quad (4.66)$$

Os resultados (4.58), (4.61) e (4.66) nos induzem à generalização para n fatores:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \cdots \cdots \left(\frac{\mu^2 - \Lambda_n^2}{k^2 - \Lambda_n^2} \right). \quad (4.67)$$

A forma acima pode ser colocada na forma de expansão em frações;

$$\frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \rightarrow \frac{G_{\Lambda_i}(k^2, \Lambda_i^2)}{(k^2 - \mu^2)} = \frac{1}{k^2 - \mu^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{i \neq j}^n (\mu^2 - \Lambda_i^2)}{\prod_{i \neq j}^n (\Lambda_i^2 - \Lambda_j^2)} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_j^2)}. \quad (4.68)$$

Agora o “limite de conexão” é dado por:

$$\lim_{(\Lambda_1^2, \Lambda_2^2, \dots, \Lambda_n^2) \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}(k^2, \Lambda_i^2) = 1. \quad (4.69)$$

Uma das importantes características deste método é o fato de podermos obter soluções analíticas para as integrais regularizadas do modo acima descrito, ainda que na forma generalizada. As formas integradas podem ser escritas em termos de funções $Y_k(\lambda_1, \lambda_2, p^2)$ e $Z_k(\lambda_1, \lambda_2, p^2)$, com $(\lambda_1^2, \lambda_2^2)$ sendo parâmetros de regularização e/ou massas da teoria. Isto torna o método bastante útil em discussões envolvendo integrais nos momentos; desde regularização propriamente dita com propósitos de renormalização, teorias não renormalizáveis e até equações de onda relativísticas na forma de equações integrais.

Para o caso de utilização do método em teorias renormalizáveis isto nos fornece uma prescrição bastante simples, o que pode ser visto na próxima subseção. Para o caso de teorias não renormalizáveis, onde uma vez introduzida a regularização não poderá ser removida, já que o “limite de conexão” não poderá, a rigor, ser implementado pois os parâmetros de regularização devem permanecer finitos, é importante notar que, com a

introdução destes fatores, as integrais tornam-se finitas e os cálculos podem ser levados adiante. Entretanto, as amplitudes, após a regularização, serão função de todos os parâmetros físicos (massas, normalizações dos campos, constantes de acoplamento, etc.) e também de, pelo menos, um parâmetro adicional Λ^2 . Conseqüentemente todos os observáveis físicos decorrentes tornar-se-ão, em princípio, funções destes parâmetros.

Ainda sobre a regularização de Pauli-Villars é importante ressaltar que as escolhas dos coeficientes a_i^s , feitas nas discussões acima têm como objetivo único privilegiar a regularização. Quando se está interessado em outros aspectos, simultaneamente, tais como relações de simetria, a escolha dos coeficientes a_i^s pode não corresponder estritamente aquelas que fizemos aqui. Existe liberdade suficiente no método para satisfazermos ao mesmo tempo regularização e propriedades específicas das amplitudes físicas envolvidas, representadas, por exemplo, por Identidades de Ward.

4.6.1 Regularização Covariante de Pauli-Villars; Prescrição

Nós podemos obter a regularização desejada, através da filosofia da regularização covariante de Pauli-Villars, e utilizá-la para fins de renormalização, seguindo os seguintes passos:

- i) Identificar o grau de divergência da integral e introduzir o fator adequado de regularização, tomando o número suficiente de termos não-nulos na soma que gera o termo modificador;

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(k^2 - \Lambda_i^2)}, \quad (4.70)$$

escolhendo os coeficientes a_i^s tais que a regularização se dê com o menor número possível de a_i^s não-nulos e tomando $(\Lambda_i^2 \sim \Lambda^2) \gg \mu^2$.

Na prática isto pode ser resumido à escolha do número n de regularizadores;

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2} \left(\frac{n^2 - \Lambda^2}{(k^2 - \Lambda^2)} \right)^n \quad (4.71)$$

- ii) Efetuar a integração nos momentos da integral regularizada e nos parâmetros de Feynman (utilizando-se das expressões das seções 2 e 3).
- iii) Identificar as partes finita (independente de Λ^2) e divergente (funções de Λ^2) e promover o limite $\Lambda^2 \rightarrow \infty$, identificando os termos dominantes.

- iv) Introduzir os contratermos adequados, ou efetuar as renormalizações dos parâmetros físicos pertinentes, para eliminar os termos dependentes de Λ^2 (que é a forma pela qual se manifestam as divergências originais da teoria).

É importante registrar que nós não estamos livres de uma ambiguidade mínima, que é a escolha de uma constante na definição da parte finita, passo *iii*), a qual dependerá dos passos intermediários do cálculo.

4.7 Regularização Dimensional

O método de Regularização Dimensional [8] é seguramente o mais importante dentre todos. Isto se deve à sua larga utilização no contexto de teorias quânticas fundamentais de “gauge”. No que se segue apresentaremos uma discussão mínima a respeito das idéias básicas e limitações deste método. A discussão apresentada aqui baseia-se, em parte, em um clássico artigo sobre o assunto [9].

A idéia inicial da regularização está na constatação de que as divergências que ocorrem na dimensão física $n = 4$ poderiam não ocorrer se a dimensão fosse reduzida. Como tal a integral logicamente divergente, em dimensão $3 + 1$;

$$I(p^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]}, \quad (4.72)$$

seria convergente em dimensão $2 + 1$;

$$I(p^2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (4.73)$$

Isto nos inspira a evitar as divergências pela modificação da dimensão do espaço. Para isto nós devemos primeiro generalizar as integrais nos momentos para uma dimensão qualquer $n = 1, 2, 3, \dots$ e então estabelecer a validade destes resultados para $n = 2\omega$ contínuo e complexo. Neste caso ω torna-se o parâmetro de regularização. Deste modo aquelas integrais em quatro dimensões $I(4)$, que não existem, podem ser definidas em 2ω -dimensões, como funções analíticas de ω , e calculadas explicitamente. Uma vez que tenhamos efetuado todas as manipulações convenientes e necessárias tais como: integração simétrica, “shifts” na variável de integração e integrações por partes, podemos invocar o princípio da continuação analítica e retornar à dimensão física $\omega = 2$. Desta última afirmação podemos perceber que o principal ingrediente na construção da técnica de Regularização Dimensional é a continuação analítica.

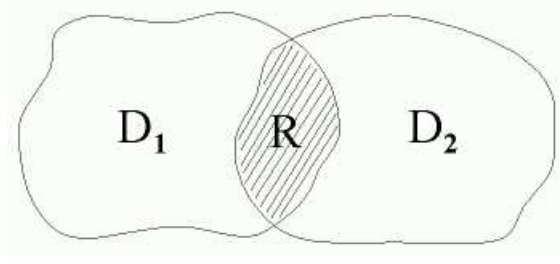


Figura 4.2: Ilustração do teorema da continuação analítica.

O método da dimensão contínua, como também é chamado, oferece simplicidade, relativamente aos outros métodos, que se baseiam na modificação da dependência dos momentos internos do “loop”. A interpretação física, dificultada nestes últimos, é clara, na dimensão contínua, pelo menos para alguns valores de $2\omega = 1, 2, 3, \dots$. Este método tem sido aplicado para o tratamento de amplitudes no contexto de teorias de “gauge” abelianas e não-abelianas e a preservação de simetrias de “gauge” é o principal argumento para isto.

4.7.1 Fundamentação Matemática

Uma vez que no princípio da continuação analítica reside o principal ingrediente matemático na fundamentação do método, justifica-se o registro de um teorema devido a Knopp [10], extraído de Leibbrandt [9], que expressa o princípio da continuação analítica utilizado na construção do método.

Teorema. “Seja uma função analítica $q_1(z)$ definida em uma região D_1 e seja D_2 outra região a qual tem uma subregião R , mas somente esta, em comum com D_1 . Então, se uma função $q_2(z)$ existe e é analítica em D_2 e coincide com $q_1(z)$ em R , pode existir apenas uma desta tal função (é única). Nós denominamos $q_1(z)$ e $q_2(z)$ de continuação analítica uma da outra”.

As funções $q_1(z)$ e $q_2(z)$ são iguais na subregião R . Fora dela q_1 e q_2 possuem, naturalmente, representações diferentes.

A utilização deste teorema, para os propósitos de construção do método, materializa-se na presença da função Γ de Euler, naturalmente, em nossos resultados. Podemos ver isso retomando o resultado que obtivemos para a extensão 2ω -dimensional da integral nos momentos, seção 3;

$$I(2\omega, \theta) = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (4.74)$$

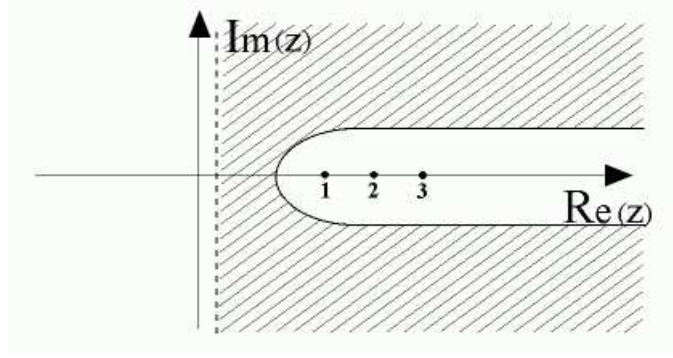


Figura 4.3: Domínio de analiticidade de $\Gamma_E(z)$.

Este resultado não está definido para $\alpha \leq \omega$ pois esta situação não está no domínio de analiticidade das funções Γ de Euler, a qual podemos representar por [9]:

$$\Gamma_E(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad ; \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (4.75)$$

O domínio de analiticidade está à parte real de z positiva, 4.3.

Para fazer uso do teorema de Knopp, e estabelecer a validade do resultado acima para as situações não atendidas, necessitamos de uma representação para a função $\Gamma(z)$ que tenha em comum um domínio $\text{Re}(z) < 0$. Esta função na verdade está disponível e é precisamente a expressão em funções parciais de Weierstrass [9]:

$$\Gamma_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+z)^{n!}} + \int_1^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (4.76)$$

a qual é analítica no plano inteiro exceto nos pontos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (4.3). A representação de Weierstrass, como é garantido no teorema, é única pois as condições são preenchidas.

A identificação da continuação analítica de $\Gamma_E(z)$, as funções $\Gamma_\omega(z)$, nos fornece o último ingrediente necessário para a fundamentação da Regularização Dimensional ou seja; a validade da relação:

$$I(2\omega, \theta) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (4.77)$$

para 2ω contínuo e complexo. Em outras palavras, para os valores de 2ω inteiros o resultado acima é apenas a extensão 2ω -dimensional do resultado para $\omega = 2$. Para valores de ω além destes, o lado direito deve ser considerado como uma definição do lado

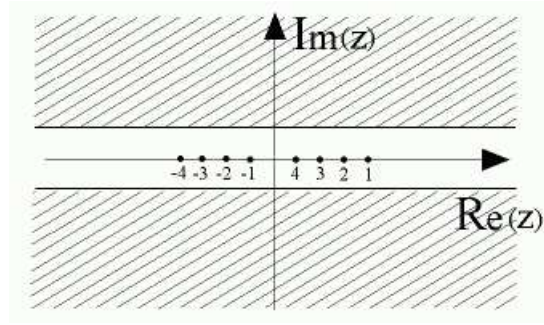


Figura 4.4: Domínio de analiticidade de $\Gamma_\omega(z)$.

esquerdo, para ω contínuo e complexo. Com isso todos os outros resultados obtidos a partir deste, na seção 3, devem ser interpretados do mesmo modo.

Nós então estamos prontos para resumir tudo numa prescrição para Regularização Dimensional.

4.7.2 Regularização Dimensional; Prescrição

A fim de utilizar Regularização Dimensional, nós seguimos um conjunto de passos que caracterizam o procedimento:

Consideremos uma integral definida no espaço quadridimensional de Minkowski;

$$I(4, Q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k^2, k \cdot p, M^2), \quad (4.78)$$

a qual pode ser divergente ultravioleta. Então nós devemos:

- 1) Estender todos os objetos presentes na integral e as eventuais álgebras existentes entre estes em $n = 2\omega$ dimensões.

Isto significa definir os momentos, seus produtos escalares etc., em 2ω -dimensões.

Como tal:

$$\begin{cases} p^\mu p_\mu = p^2 \\ p^\mu g_{\mu\nu} = p_\nu, \end{cases} \quad (4.79)$$

e, em integração simétrica, substituir:

$$p_\mu p_\nu \rightarrow \left(\frac{p^2}{2\omega} \right) g_{\mu\nu}. \quad (4.80)$$

Em teorias contendo férmions temos que estender as matrizes γ_μ e sua álgebra [10]. Assim teremos

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I. \quad (4.81)$$

Por sua vez:

$$Tr(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 2^\omega g_{\mu\nu}. \quad (4.82)$$

Conseqüentemente, manipulações envolvendo estas matrizes serão dependentes de ω . Como tal temos, por exemplo:

$$\begin{cases} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = 2(1 - \omega) \not{p} \\ \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu = 4p \cdot q + 2(\omega - 2) \not{p} \not{q}. \end{cases} \quad (4.83)$$

- 2) Parametrizar, através da parametrização de Feynman, todos os propagadores de partículas internas, para obter a forma geral de integrar nos momentos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, \dots)}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha}. \quad (4.84)$$

- 3) Integrar no espaço dos momentos com o auxílio da expressão:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}} \quad (4.85)$$

ou daquelas que decorrem dela (seção 3). Que está definida para $\omega < \alpha$.

- 4) Estender a validade do resultado 3), através da evocação do princípio da continuação analítica, para ω contínuo e complexo ($\Gamma_E(z) \rightarrow \Gamma_\omega(z)$).
- 5) Expandir todos os termos ou funções obtidas ao redor de $\omega=2$ e completar a integração nos parâmetros de Feynman (ou vice-versa), para obter a forma geral:

$$I(2\omega, 2) = \frac{A(p^2)}{\omega - 2} + B(p^2) + (\omega - 2)C(p^2), \quad (4.86)$$

onde é possível identificar as partes finitas e divergentes quando o limite $\omega \rightarrow 2^+$ for tomado.

- 6) Cancela-se os termos divergentes com apropriados contratermos adicionados à lagrangiana, ou em renormalizações de parâmetros físicos.

- 7) Toma-se o limite $\omega \rightarrow 2^+$ no resultado obtido (já sem os termos contendo pólos em $\omega = 2$) e invoca-se o princípio da continuação analítica para reconhecer que o resultado obtido é válido para a dimensão física $\omega = 2$.

Do que foi exposto fica claro que este método não é adequado para teorias não-renormalizáveis pois isto exigiria que a dimensão do espaço fosse um parâmetro ajustável já que este é o parâmetro de regularização do método.

4.7.3 Limitações do método de Regularização Dimensional

Nos sete passos que usamos para construir uma prescrição para a utilização da técnica de Regularização Dimensional temos pelo menos um dos passos que não pode ser preenchido em todas as situações de interesse. Trata-se do primeiro procedimento. Ocorre que nem todos os objetos existentes em quatro dimensões têm sua contrapartida em 2ω dimensões. Este é o caso da matriz γ_5 ou do correspondente tensor totalmente antissimétrico $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$, que não existe fora das quatro dimensões. Esta limitação portanto torna-se bastante séria quando as amplitudes em discussão são pseudo-quantidades, onde é necessário recorrer a outros métodos de regularização, como é o caso do estudo das anomalias. Existem algumas sugestões para evitarmos isso mas nenhuma é completamente satisfatória [11]. Embora não haja dúvidas sobre a grande utilidade do método, no contexto convencional, tem-se nesta limitação a principal razão para que a utilização seja feita com certos cuidados. É preciso notar ainda que em virtude do modo como são definidas as partes finita e divergente, em uma soma de termos, não estaremos livres de ambiguidades em pelo menos uma constante. Além disso, na presença de álgebras obedecidas pelos elementos que compõem a amplitude divergente, o momento em que é introduzido o método pode levar a resultados diferentes, em outras palavras, o resultado final pode depender dos passos intermediários do cálculo. Há ainda um problema na aplicação deste método em teorias com partículas sem massa [12].

4.8 Manipulação e Cálculo com Regularização Implícita

Nas duas últimas seções nós discutimos, brevemente, dois dos mais representativos métodos de regularização. Estes cumprem o principal objetivo de tornar manuseáveis as integrais divergentes até o ponto de identificarmos as partes finita e divergente da mesma. Nenhum dos dois pode ser considerado perfeito. Se por um lado o método de

Regularização Dimensional não viola invariâncias de “gauge”, contrariamente ao de Pauli-Villars, por outro lado ele não é geral, já que possui limitações bastante importantes, que não existem no de Pauli-Villars. Existe, entretanto, uma questão de origem filosófica, ligada ao fato de diferenciarmos os métodos de regularização entre si. Estes não deveriam ser mais do que ferramentas auxiliares tomadas para manipulações das expressões. Nenhuma dependência deveria existir em relação a estes métodos e todos deveriam gerar resultados equivalentes. Afinal não pode haver dois resultados corretos diferentes para o mesmo cálculo. Deveríamos exigir independência total dos métodos de regularização.

Nós demonstraremos em discussões futuras detalhadas, que é na verdade possível construir uma prescrição para a manipulações e cálculos de integrais divergentes que torna desnecessário explicitar, para todo e qualquer propósito, métodos de regularização.

4.8.1 Idéia Básica

Quando fazemos uso de alguma técnica de regularização, estamos interessados em identificar e separar as partes finita e divergente. O modo pelo qual se manifestam as divergências, ao final, depende do método de regularização. A parte finita, por sua vez, não deve depender de método-a-método, já que está relacionada ao conteúdo físico da amplitude. A ausência total de ambiguidades, como vimos, não pode ser garantida em nenhum método de regularização, uma vez que estas partes são identificadas em uma soma de termos. A adição e subtração de uma constante à expressão pode nos levar a identificação diferente para a parte finita, pois uma constante sempre é descartada, por comparação, na parte divergente. Ocorre que, muitas vezes, as integrais estão multiplicadas por momentos externos e a indefinição em uma constante na parte finita leva a uma amplitude diferente, o que pode levar até mesmo à violações em relações de simetria da teoria, como veremos posteriormente. Para evitar isto existe um único caminho: *identificar as partes finitas e divergentes sem o uso de qualquer método de regularização, ou seja, sem o cálculo de integrais divergentes*. Isto pode ser obtido através do uso de identidades, sem que em momento algum qualquer modificação das integrais que compõem a amplitude seja necessária e portanto estaremos ainda trabalhando com as decorrências diretas da aplicação das regras de Feynman da teoria.

4.8.2 Prescrição

Para obtermos a forma desejada para as amplitudes divergentes nós devemos proceder da seguinte forma:

- a) Escrever a amplitude de interesse como uma soma de integrais identificando aquelas divergentes;
- b) Nas integrais divergentes adota-se implicitamente a presença de uma regularização par no momento do “loop” e com “limite de conexão” bem definido. Estas então devem ser manipuladas, através do uso de identidades ao nível do integrando, até que obtenhamos uma estrutura tal que as partes dependentes dos momentos externos ao “loop” sejam finitas;
- c) As integrais finitas devem ser integradas sem restrições;
- d) As integrais divergentes devem ser reduzidas a objetos básicos através de *consistentes* relações entre integrais puramente divergentes;
- e) Para a eliminação das divergências devem ser construídos adequados contratermos à lagrangiana com a correspondente renormalização dos parâmetros físicos. Estes contratermos serão constituídos pelas próprias integrais divergentes básicas.

Nos capítulos posteriores nós deduziremos, através de discussões gerais, este procedimento e mostraremos detalhadamente como ele leva a resultados consistentes e em que sentido ele elimina a necessidade de regularização.

Em amplitudes 1-“loop”, com divergências no máximo cúbicas, as quantidades básicas divergentes serão:

$$I_{quad}(\lambda^2) = \int_{\lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (4.87)$$

e

$$I_{log}(\lambda^2) = \int_{\lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}. \quad (4.88)$$

Isto quer dizer que as divergências originais das amplitudes serão, ao final das manipulações e cálculos, expressadas em termos destes objetos. O modo como estas “reduções” são efetuadas consistentemente será discutido nos capítulos posteriores. A extensão para mais do que um “loop” será igualmente considerada. Nosso interesse no momento é apenas a comparação com os outros métodos considerados na discussão de uma amplitude simples.

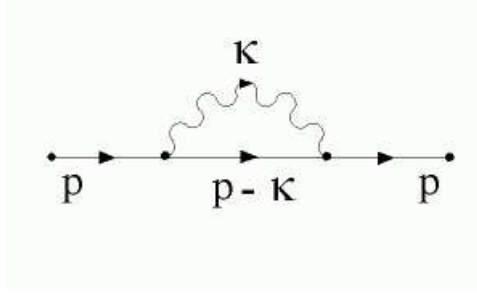


Figura 4.5: Auto-energia do quark.

4.9 A Auto-Energia do Quark por Excitação de um Glúon

Para exemplificar e ilustrar as peculiaridades de cada um dos métodos delineados na seção anterior vamos considerar uma típica amplitude divergente: a auto-energia de um quark por excitação de um glúon, e tratá-la nos três métodos descritos.

4.9.1 A Amplitude

A amplitude correspondente à auto-energia de um quark, por excitação de um glúon, representada pelo diagrama mostrado na fig. 4.5 pode ser facilmente obtida, pela aplicação das regras de Feynman correspondentes [13]:

$$i\Sigma(p) = -g^2 C_F \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\gamma_\mu [(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma^\mu}{k^2 [(p-k)^2 - m^2]} - (1 - \alpha) \left[\frac{\gamma_\nu [(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu k^\mu k^\nu}{k^2 [(p-k)^2 - m^2] k^2} \right] \right\} \quad (4.89)$$

onde α é o parâmetro de “gauge” (Feynman =1, Landau =0), g^2 é a constante de acoplamento, C_F são fatores de simetria (cor e sabor) e m é a massa do quark. Para evitar divergências infravermelhas nós introduzimos uma massa μ^2 para o glúon que pode ao final ser removida sem problemas tomando-se o limite $\mu^2 \rightarrow 0$. Ainda tomamos o “gauge” de Feynman. Portanto ficamos com a expressão:

$$i\Sigma(p) = -g^2 C_F \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\gamma_\mu [(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma^\mu}{(k^2 - \mu^2) [(p-k)^2 - m^2]} \right\}, \quad (4.90)$$

a qual trataremos nos três métodos descritos.

4.9.2 Regularização Covariante de Pauli-Villars

Para introduzir a regularização covariante, nós tomamos a expressão para a auto-energia:

$$i\Sigma(p) = -2g^2 C_F \left\{ (\not{p} - 2m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]} - \gamma_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]} \right\}, \quad (4.91)$$

onde utilizamos:

$$[\gamma_\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\mu] = -2(\not{p} - \not{k} - 2m),$$

na eq.(4.90). Podemos escrever isto ainda na forma:

$$i\Sigma(p) = -2g^2 C_F \{ (\not{p} - 2m)I - \gamma_\mu I^\mu \};$$

com as definições:

$$\begin{cases} I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]} \\ I^\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]}, \end{cases} \quad (4.92)$$

cujos resultados, em regularização covariante, ficam:

$$\begin{cases} I = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) - Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] \\ I_\mu = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) p_\mu [Z_1(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) - Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]. \end{cases} \quad (4.93)$$

Nós então identificamos:

$$\begin{cases} i\Sigma^{fin}(p) = \frac{2g^2 C_F i}{(4\pi)^2} [(\not{p} - 2m)Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \not{p}Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] \\ i\Sigma^{div}(p) = \frac{-2g^2 C_F i}{(4\pi)^2} [(\not{p} - 2m)Z_0(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) - \not{p}Z_1(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2)]. \end{cases} \quad (4.94)$$

O próximo passo é, na parte finita $\Sigma^{fin}(p)$, retirar a massa fictícia para o glúon. Isto é feito trocando as expressões (cap.3):

$$Z_k(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \rightarrow Z_k(0, m^2, p^2; m^2). \quad (4.95)$$

Por sua vez, na parte divergente $\Sigma^{div}(p)$, devemos tomar o limite $\Lambda^2 \rightarrow \infty$. Isto corresponde à troca (cap.3):

$$Z_k(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) \rightarrow Z_k(\infty, m^2, p^2; m^2). \quad (4.96)$$

Explicitamente, para $p^2 < m^2$, temos as expressões:

$$\begin{cases} Z_0(0, m^2, p^2; m^2) = \left\{ \left(\frac{p^2 - m^2}{p^2} \right) \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) - 2 \right\} \\ Z_1(0, m^2, p^2; m^2) = \left\{ \left(\frac{(p^2 - m^2)^2}{2p^4} \right) \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) - \frac{(p^2 - m^2)}{2p^2} - \frac{1}{2} \right\}. \end{cases} \quad (4.97)$$

Por sua vez:

$$\begin{cases} Z_0(\infty, m^2, p^2; m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - 1 \right] \\ Z_1(\infty, m^2, p^2; m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{3}{4} \right]. \end{cases} \quad (4.98)$$

O procedimento a partir deste ponto é geral e refere-se a definição das quantidades renormalizadas. Para tal nós escrevemos a auto-energia na forma geral:

$$\Sigma(p) = A(p^2) + \not{p}B(p^2).$$

Para facilitar, escolhamos como ponto de renormalização, por conveniência, $\not{p} = 0$. Deste modo o propagador do quark pode ser escrito na forma:

$$iS_F^k(p) = \frac{iZ_\psi}{\not{p} - M - Z_\psi \tilde{\Sigma}_{fin}(p)} \quad (4.99)$$

onde definimos as quantidades: massa física;

$$M = \frac{m + \Sigma(0)}{1 - \Sigma'(0)}, \quad (4.100)$$

constante de normalização do campo do quark

$$Z_\psi = \frac{1}{1 - \Sigma'(0)}. \quad (4.101)$$

Por sua vez definimos:

$$\tilde{\Sigma}_{fin}(p) = \Sigma(p) - \Sigma(0) - \not{p}\Sigma'(0) = \Sigma^{fin}(p). \quad (4.102)$$

É importante ressaltar que para a obtenção destes resultados dois passos são cruciais; o cálculo das integrais divergentes (a prescrição de regularização) e a definição das partes finita e divergente. Os procedimentos restantes são automáticos. Em vista disto podemos tecer alguns comentários.

A identificação das partes finita e divergente não é bem definida. Isto por que ela depende do estágio do cálculo em que isto é feito. A razão para isto está no fato de efetuarmos esta identificação em uma soma de termos com limites envolvidos. Assim,

se primeiro efetuarmos os possíveis cancelamentos nas diferenças $[Z_k(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) - Z_k(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]$ e depois identificarmos as referidas partes chegaríamos a resultados diferentes. Como tal, nas funções Z_1 temos termos que evidenciam esta preocupação:

$$[Z_1(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) - Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] = \left[\frac{(p^2 - m^2 + \Lambda^2)}{2p^2} - 1 + \dots \right] - \left[\frac{(p^2 - m^2 + \mu^2)}{2p^2} - 1 \dots \right] \quad (4.103)$$

como podemos ver até mesmo a dependência com os momentos é modificada. Isto pode ser evitado tomando-se o limite $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ logo após a integração nos momentos, portanto antes da integração nos parâmetros de Feynman. Neste caso teríamos uma constante ambígua e a amplitude calculada teria uma indefinição da forma:

$$a + \not{p}b,$$

onde a e b são constantes. Esta situação não é tão problemática pois uma prescrição adequada de renormalização absorveria esta ambiguidade. O problema se tornaria complicado em integrais divergentes de ordem quadrática ou mais, pois a indefinição poderia até mesmo envolver funções Z_k levando a ambiguidade à ordem da contribuição calculada. De qualquer modo a utilização do método deve ser cuidadosa pois, em geral, as amplitudes físicas possuem limites cinemáticos determinados pelas simetrias envolvidas ou então Identidades de Ward e a ambiguidade até mesmo em uma constante pode levar a violação destes conteúdos destruindo assim aquilo que se pretende investigar, nos processos de manipulações e cálculos das divergências.

4.9.3 Regularização Dimensional

Em Regularização Dimensional tomamos como ponto de partida a expressão para a auto-energia e a extendemos para 2ω -dimensões;

$$i\Sigma(p) = -g^2 C_F \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ \frac{\gamma_\mu [(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma^\mu}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (4.104)$$

Então utilizamos a álgebra 2ω -dimensional das matrizes γ_μ , para obter:

$$[\gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\mu] = 2(1 - \omega)(\not{p} - \not{k}) + 2\omega(m).$$

Agora, depois da apropriada parametrização de Feynman e integração nos momentos ficamos com:

$$i\Sigma(p) = -g^2 C_F \int_0^1 dz \left(\frac{1}{(4\pi)^\omega} \right) \left\{ \frac{[(1-\omega)\not{p}(1-z) + m\omega]\Gamma(2-\omega)}{(H^2)^{2-\omega}} \right\}, \quad (4.105)$$

onde:

$$H^2 = p^2 z(1-z) + (\mu^2 - m^2)z - \mu^2.$$

Neste ponto, segundo a prescrição, é necessário expandir tudo ao redor de $\omega = 2$. Nós fazemos isto com o auxílio de:

$$a^x \simeq 1 + x \ln a,$$

para x pequeno. Também para a função $\Gamma(z)$, na representação de Weierstrass, temos, para $\epsilon \rightarrow 0$ e $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, a expressão [14]:

$$\Gamma(-n + \epsilon) \simeq \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1) \right] + O(\epsilon^2) \right\}, \quad (4.106)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi(s) = \frac{d \ln \Gamma(s)}{ds} \\ \psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_E \\ \psi'(n+1) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ \psi'(1) = \frac{\pi^2}{6} \\ \psi(1) = -\gamma_E = -0,5772. \end{cases} \quad (4.107)$$

Isto nos fornece a forma geral:

$$\Gamma(2-\omega) = \frac{A}{(2-\omega)} + B + C(2-\omega) + \dots, \quad (4.108)$$

onde, em virtude das expressões acima, $A = 1$ e $B = -\gamma_E$.

Por sua vez:

$$(H^2)^{\omega-2} \simeq 1 + (\omega-2) \ln(H^2) + \dots \quad (4.109)$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) = \frac{-2g^2 C_F}{(4\pi)^2} [1 + (2-\omega) \ln(4\pi)] \int_0^1 dz \{ [(1-\omega)\not{p}(1-z) + m\omega] \} \times \\ \times \{ 1 + (\omega-2) \ln(H^2) \} \times \\ \times \left\{ \frac{A}{\omega-2} + B + (\omega-2)C \right\} \quad (4.110) \end{aligned}$$

o que fornece:

$$\begin{aligned}
i\Sigma(p) = & \frac{-2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz [(1-\omega)\not{p}(1-z) + m\omega] \times \\
& \times \left\{ \frac{A}{\omega-2} + B + (\omega-2)C + \right. \\
& + A \ln(H^2) + (\omega-2)B \ln(H^2) + (\omega-2)^2 C \ln(H^2) + \\
& - A \ln(4\pi) + (2-\omega)B \ln(4\pi) - (\omega-2)^2 C \ln(4\pi) + \\
& - (\omega-2)^2 B \ln(4\pi) \ln(H^2) - (\omega-2)A \ln(4\pi) \ln(H^2) \\
& \left. - (\omega-2)^3 C \ln(4\pi) \ln(H^2) \right\}. \tag{4.111}
\end{aligned}$$

Exceto pelo pólo simples em $\omega = 2$ no primeiro termo podemos tomar $\omega \rightarrow 2^+$ na amplitude. Por isso nós o separamos dos demais e escrevemos:

$$\begin{aligned}
i\Sigma(p) = & \frac{-2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left(\frac{A}{\omega-2} \right) \int_0^1 dz [(1-\omega)\not{p}(1-z) + m\omega] + \\
& - \frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} [B - A \ln(4\pi) + \ln(-m^2)] \frac{\not{p} - 4m}{2} \\
& + \frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} [(\not{p} - 2m)Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \not{p}Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)].
\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
i\Sigma(p) = & \frac{-2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{(\not{p} - 4m)}{2} \left[\left(\frac{1}{2-\omega} \right) - \gamma_E - \ln(4\pi) + \ln(-m^2) - \frac{1}{2} \right] - m \right\} \\
& + \frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left\{ (\not{p} - 2m)Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - \not{p}Z_1(0, m^2, p^2; m^2) \right\}, \tag{4.112}
\end{aligned}$$

onde substituímos os valores de A e B e eliminamos nas funções Z_k a massa fictícia do glúon. Do resultado obtido notamos que:

- i) A fim de que a parte finita possa ser identificada com aquela obtida no método anterior devemos agregar à parte divergente várias constantes finitas.
- ii) O resultado final obtido é explicitamente dependente do método já que a constante γ_E faz parte deste.

4.9.4 Com Regularização Implícita

Neste método nós podemos utilizar os mesmos passos iniciais que aqueles da Regularização Covariante. Partimos então da expressão:

$$i\Sigma(p) = -2g^2 C_F [(\not{p} - 2m)I - \gamma_\mu I^\mu].$$

Entretanto reorganizamos as integrais de acordo com a filosofia adotada. Assim:

$$\begin{aligned} I = & \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \\ & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-(m^2 - \mu^2)}{(k^2 - m^2)^2 (k^2 - \mu^2)} \\ & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2 \cdot k)}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

O arranjo utilizado é uma identidade ao nível do integrando. Apenas a primeira é divergente e nós a definimos como $I_{log}(m^2)$. As restantes podem ser integradas sem problemas, com isso:

$$I = I_{log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]. \quad (4.114)$$

Agora consideramos a integral I^μ . Repetindo o procedimento, temos:

$$\begin{aligned} I_\mu = & \frac{p_\mu}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - (m^2 - \mu^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k)k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 (k^2 - \mu^2)} \\ & + \frac{p_\mu}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-2p \cdot k + p^2)^2 k_\mu}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - m^2)^2 [(p - k)^2 - \mu^2]}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Resolvendo as integrais e utilizando a relação de consistência entre a integral divergente obtida e $I_{log}(m^2)$ (ver cap.13) ficamos com:

$$I_\mu = \frac{p_\mu}{2} [I_{log}(m^2)] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)].$$

Substituindo na expressão para $\Sigma(p)$ obtemos:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) = & \frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left\{ (\not{p} - 2m)Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \not{p}Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right\} \\ & - \frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left\{ (\not{p} - 2m)[I_{log}(m^2)] - \frac{\not{p}}{2} I_{log}(m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Podemos então definir as partes finita e divergente como:

$$i\Sigma^{fin}(p) = \frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left\{ (\not{p} - 2m)Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - \not{p}Z_1(0, m^2, p^2; m^2) \right\} \quad (4.117)$$

e

$$i\Sigma^{div}(p) = -\frac{2g^2 C_F}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{(\not{p} - 4m)}{2} [I_{log}(m^2)] \right\}. \quad (4.118)$$

De posse destas expressões o restante do procedimento, a renormalização em si, é idêntica aos considerados anteriormente. Sobre o resultado obtido neste método podemos tecer os seguintes comentários:

- i) A parte finita obtida é a mesma que aquela identificada nos métodos Pauli-Villars e dimensional. Aqui entretanto ela surge de um modo natural e direto.
- ii) Foram utilizadas apenas identidades para a obtenção da forma final.
- iii) As integrais divergentes foram mantidas na forma básica $I_{log}(m^2)$. Todo o conteúdo divergente fica mantido neste objeto.
- iv) Não há qualquer ambiguidade ou dependência com possíveis caminhos para a efetivação dos cálculos na identificação dos conteúdos finito e divergente.

Referências Bibliográficas

- [1] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984) .;
- P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
- [2] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
- G.Leibrant Rev. Mod. Phys. 47 (849) 1975;
- [3] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
- [4] J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992);
- [5] G. Arfken, Mathematics Methods for Physicist;
- [6] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [7] W.Pauli and F.Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949);
- [8] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdan (1986);
- M.E. Fisher and D.S. Gaunt, Phys. Rev. 133, A 224 (1964);
- K.G. Wilson and M.E. Fisher Phys. Rev. Lett. 28, 240 (1972);
- K.G. Wilson , Phys. Rev. 07, 2911 (1973);
- K.G. Wilson and J. Kogat, Phys. Rep. 12, 75 (1974);

- t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
C. G. Bollini and J.J. Giambiagi, Phys. Lett. 40B, 566 (1972);
G.M. Cicuta and E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. 4, 329 (1972);
J.F. Askmore, Nuovo Cimento Lett. 4, 289 (1972);
E.R. Speer and M.J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré A14, 1 (1971);
- [9] G.Leibrant Rev. Mod. Phys. 47 (849) 1975;
- [10] Knopp;
- [11] C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980) ;
B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics
Publishing, Amsterdam (1986) ;
- [12] t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
W.A. Bardeen, in Proceedings XVI International Conference on High Energy Physics
(National Accelerator Lab., Battavia, IL)(1972);
M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. B159, 225 (1979);
P. Breitenlohner and D. Maison, Comm. Math. Phys. 52, 11 (1977);
P. Ramond; Field Theory: A modern Primer, Addison-Wesley (1990);
- [13] W. Marciano and H. Pagels, Phys. Rep. 36 C, 137 (1978);
- [14] P. Ramond; Field Theory: A modern Primer, Addison-Wesley (1990) ;

Capítulo 5

Divergências em Teorias Não-Renormalizáveis

5.1 Introdução

Teorias efetivas têm indubitavelmente desempenhado um importante papel no entendimento de vários problemas físicos, em especial a física dos processos hadrônicos de baixas energias [1]. Apesar de muitos sucessos colecionados, pelos referidos modelos efetivos, existe uma importante questão teórica que permanece sem resposta: A convivência consistente com as divergências presentes nas amplitudes físicas em contribuições, no cálculo perturbativo, que envolvam “loops”. Ocorre que, na maioria dos casos, os números quânticos das partículas envolvidas e as simetrias assumidas como relevantes não nos permitem a construção de lagrangianas renormalizáveis. Tais modelos (não-renormalizáveis) sofrem portanto da contaminação por infinitos ou divergências, típicas de soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos, sem ter entretanto, a possibilidade da eliminação destes pela aplicação do programa de renormalização, como é usualmente feito nas teorias fundamentais (renormalizáveis).

O procedimento comum, e a opção mais imediata, para o tratamento deste problema, é a introdução de algum esquema de regularização e incorporá-lo como parte da definição do modelo, já que não pode mais ser removido. Com este procedimento nós tornamos as amplitudes finitas, mas as contaminamos irremediavelmente com comportamentos não-físicos, violações de relações de simetrias, perda da unitariedade, pólos fantasmas e diferentes tipos de ambiguidades. A situação final obtida não pode, de modo algum, ser

considerada satisfatória, pois os métodos de regularização, os quais devem ser (se possível) considerados como ferramentas auxiliares, para as manipulações e cálculos de amplitudes divergentes, influenciam decisivamente nos resultados obtidos de um mesmo modelo físico, ainda que, na mesma aproximação. Em alguns casos duas diferentes formas da mesma amplitude (conectadas por uma identidade matemática) produzem resultados diferentes quando tratadas pela mesma filosofia de regularização.

Na discussão que faremos a seguir (neste capítulo) nós consideraremos as questões dos comportamentos não-físicos, violação de unitariedade e unicidade bem como a dependência dos resultados finais com o método específico de regularização.

Para materializar nossas discussões nos utilizaremos da expressão para uma hipotética auto-energia, a qual contém os ingredientes que necessitamos: uma estrutura simples (um momento externo apenas) composta por integrais divergentes de grau logarítmico até cúbico. Embora nos utilizemos deste exemplo, a situação é completamente geral. Após a construção de um modelo qualquer, e da extração das regras de Feynman, escolhemos um processo de interesse e montamos a amplitude que, no caso da inclusão de “loops”, pode conter integrais divergentes. Para transformar a amplitude em questão em predição de observáveis físicos é necessário, neste ponto, a adoção de uma prescrição ou filosofia, de regularização para as manipulações e cálculos destas quantidades divergentes, de modo a tornar possível a apreciação do conteúdo do modelo. É neste ponto que, de algum modo, a amplitude, ditada pelas regras de Feynman da teoria, é modificada segundo um procedimento específico. São exatamente estas modificações, ou procedimentos de regularização, e suas consequências o alvo de nossas discussões.

A fim de investigarmos os aspectos destacados como de nosso interesse, neste capítulo, evitando superposições desnecessárias, nós tomaremos uma escolha simples para os rótulos dos momentos das linhas internas, geraremos duas formas equivalentes (separadas por uma identidade) em duas situações distintas: massas iguais e massas diferentes. Então orientaremos as discussões por três idéias fundamentais. Exigiremos simplesmente que:

- a) Os resultados finais não contenham comportamentos não-físicos tais como limiares complexos, anômalos ou não, dependentes de algum parâmetro de regularização (“cut off”). Por limiares complexos anômalos nós classificamos aqueles que proporcionam violação de unitariedade.
- b) Os resultados finais devem ser independentes dos passos intermediários dos cálculos (devem ser univocamente determinados).

- c) As previsões físicas não devem depender, de modo algum, da maneira pela qual as integrais divergentes são manipuladas (devem ser independentes do método de regularização).

A primeira exigência nos garante a preservação do conteúdo do modelo, dentro do referencial teórico da Teoria Quântica de Campos. A segunda materializa-se no fato de que o resultado final não dependa das manipulações intermediárias utilizadas antes e depois da introdução da regularização. No caso específico que discutiremos isto significará que qualquer prescrição aplicada a duas expressões diferentes, ligadas por uma identidade, conduzam aos mesmos resultados. A terceira exigência impõe que um método de regularização seja, de fato, uma ferramenta necessária, mas não mais do que isto, no processo de cálculo.

Para propiciar e evidenciar os aspectos que citamos, relacionados aos métodos de regularização, adotaremos um método convencional bastante representativo e conveniente para nossos propósitos; a Regularização Covariante de Pauli-Villars (capítulo 4). Apesar desta escolha particular é fácil verificar que as conclusões qualitativas extraídas são igualmente válidas para outros esquemas utilizados na literatura, tais como “sharp cut off”.

Na seção 2 consideraremos a amplitude protótipo (auto-energia) utilizada nas discussões. Na seção 3 efetuaremos os cálculos considerando as massas envolvidas como iguais. O caso de massas diferentes será considerado na seção 4.

5.2 A Amplitude Protótipo

Consideraremos um exemplo simples de amplitude divergente associada a uma teoria não-renormalizável: uma hipotética auto-energia de um férmion de massa m e spin 1/2 por excitação através de um bóson de massa μ e spin zero, com acoplamento pseudo-vetorial (derivativo) [2], como mostrado na fig. 5.1.

A avaliação do diagrama nos permite escrever:

$$i\Sigma(p) = G^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\not{k}(\not{p} - \not{k} - m)\not{k}}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.1)$$

Aqui G é uma constante que engloba a constante de acoplamento e fatores de simetria interna. A expressão (5.1) pode ainda ser colocada na forma:

$$i\Sigma(p) = -G^2 \left\{ (p + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]} \right\}$$

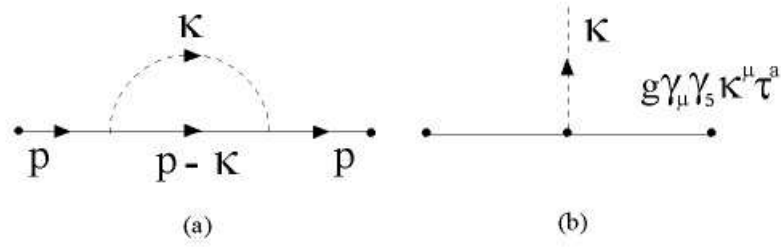


Figura 5.1: a) Auto-energia fermiônica e b) Vértice da interação Férmiion-Bóson.

$$-(p^2 - m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]} \Bigg\}, \quad (5.2)$$

ou ainda, noutra forma mais reduzida:

$$i\Sigma(p) = -G^2 \left\{ (\not{p} + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p - k)^2 - m^2]} \right. \\ \left. + (\not{p} + m)\mu^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]} \right. \\ \left. - (p^2 - m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.3)$$

As expressões obtidas exibem quatro integrais divergentes com divergências quadráticas, lineares e logarítmicas. Nós então as rotulamos através das definições:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]} \\ I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]} \\ I_3 = \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]} \\ I_4 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2]} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Com isso podemos escrever a expressão (5.2) como:

$$i\Sigma(p) = -G^2 \{ (\not{p} + m)I_4 - (p^2 - m^2)I_3 \}, \quad (5.5)$$

e a expressão (5.3) como:

$$i\Sigma(p) = -G^2 \{ (\not{p} + m)I_1 + (\not{p} + m)\mu^2 I_2 - (p^2 - m^2)I_3 \}. \quad (5.6)$$

As estruturas I_1 a I_4 são as que utilizaremos no que se seguirá.

5.3 Massas Iguais

Nesta seção consideraremos a amplitude na situação onde temos $\mu^2 = m^2$. Esta escolha é importante para evitarmos a discussão simultânea de um número excessivo de aspectos técnicos, o que poderia tornar a discussão demasiado confusa. Além disto, muitos problemas de interesse envolvem cálculos de “loops” em modelos efetivos com partículas de massas idênticas, como no caso do modelo NJL [3] ou no setor piônico das realizações não-lineares da simetria quiral [4]. Vamos então efetuar os cálculos dentro das várias possibilidades e extrair dos resultados a orientação para a busca de uma prescrição adequada. Ressaltamos, mais uma vez, que embora os cálculos sejam feitos em Regularização Covariante de Pauli-Villars, por conveniência principalmente analítica, não nos deteremos em aspectos particulares mas sim em aspectos gerais comuns a outros métodos de regularização. Como tal poderíamos ter escolhido regularização através da distribuição Θ , “sharp cut off”, com conclusões igualmente válidas. Além disto, todos os métodos devem concordar entre si quando $\Lambda^2 \rightarrow \infty$.

5.3.1 Regularização Mínima

Vamos então proceder o cálculo da auto-energia, através do cálculo das integrais divergentes. Uma das possibilidades de tornarmos a amplitude, como um todo, regularizada é o da regularização, dentro da regularização covariante (seção 4.6), de cada uma das integrais individualmente. Ou seja, dependendo do grau de divergência introduzimos um fator modificador de acordo com a necessidade (regularização mínima). Assim procedendo, temos que resolver as integrais:

$$\bullet I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 \quad (5.7)$$

$$\bullet I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) \quad (5.8)$$

$$\bullet I_3 = \gamma_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) \quad (5.9)$$

$$\bullet I_4 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2. \quad (5.10)$$

As integrais acima podem ser resolvidas analiticamente. Para facilitar as discussões é interessante escrevermos os resultados como: $I_i = I_i^{fin} + I_i^{div}$. Onde I_i^{fin} é a parte que permanece finita quando $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ e I_i^{div} é aquela que diverge neste limite. Resolvendo encontramos os resultados:

$$\bullet \begin{cases} I_1^{fin} = 0 \\ I_1^{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} [(m^2 - \Lambda^2)^2 Y_0(\Lambda^2, m^2, p^2)] \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\bullet \begin{cases} I_2^{fin} = \frac{i}{(4\pi)^2} [-Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)] \\ I_2^{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} [Z_0(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2)] \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\bullet \begin{cases} I_3^{fin} = \frac{i}{(4\pi)^2} \not{p} [-Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2)] \\ I_3^{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} \not{p} [Z_1(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2)] \end{cases}, \quad (5.13)$$

e

$$\begin{cases} I_4^{fin} = \frac{i}{(4\pi)^2} [-3p^2 Z_2(m^2, m^2, p^2; m^2) + 2p^2 Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2) - 2m^2 Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)] \\ I_4^{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} [3p^2 Z_2(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) - 2p^2 Z_1(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) \\ \quad + (m^2 - \Lambda^2) - p^2(m^2 - \Lambda^2) Y_2(\Lambda^2, m^2, p^2) + 2m^2 Z_0(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2)]. \end{cases} \quad (5.14)$$

Aqui fizemos uso das funções $Y_k(\lambda_1, \lambda_2, p^2; \lambda^2)$ e $Z_k(\lambda_1, \lambda_2, p^2; \lambda^2)$ definidas e estudadas no capítulo 3. A parte finita, como era de se esperar, não contém o parâmetro de regularização Λ^2 .

Os resultados acima mostram uma dependência explícita com os momentos externos do “loop”. É fácil agora perceber que, se queremos manter Λ^2 finito, temos sem dúvida alguns comportamentos físicos indesejáveis. Nossa amplitude deve exibir uma parte complexa quando $p^2 \geq (2m)^2$ uma vez que isto corresponde à situação onde as partículas internas podem estar na camada de massa [5]. Este comportamento é garantido pela presença das funções $Z_k(m^2, m^2, p^2; m^2)$. Esta parte complexa cresce suavemente a partir do limiar. A parte imaginária é importante para a preservação da unitariedade na amplitude. Entretanto nós temos também presente em nossos resultados um limiar complexo não-físico em $p^2 = (m + \Lambda)^2$ o qual evidentemente contribui para a unitariedade e assim modificando o conteúdo físico do modelo original. Isto não pode ser adequadamente interpretado. Em outras palavras o procedimento de regularização é responsável pela introdução de um comportamento não-físico na amplitude calculada. Este limiar complexo ocorre em ambas as funções $Z_k(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2)$ e $Y_k(\Lambda^2, m^2, p^2)$. O que é ainda mais grave, entretanto, é o comportamento das funções $Y_k(\Lambda^2, m^2, p^2)$ (capítulo 3). Estas têm suas

partes imaginárias vindas do infinito no limiar, o que não admite acomodação razoável e é, sem dúvidas, inaceitável.

Nós poderíamos argumentar, neste ponto, que a parte imaginária indesejável surge em valores de p^2 os quais estão além do limite de validade do modelo. Entretanto, a parte real das funções $Y_k(\Lambda^2, m^2, p^2)$ (a qual existe em todos os valores de p^2) está intimamente relacionada à parte complexa e pode inclusive ser construída a partir desta [6]. Significa que estamos dando conteúdo físico a uma função dos momentos, da parte divergente, em pequenos valores de p^2 , que é inaceitável fora desta região. Isto, sem dúvidas, não é razoável e não é o que buscamos como prescrição para teorias não-renormalizáveis onde temos que manter Λ^2 finito. É necessário então descobrir as razões e eliminar estes comportamentos não-físicos e anômalos e ainda garantir regularizabilidade.

Para completar esta seção, apontamos ainda que a regularização mínima não nos garante unicidade, ou seja, os resultados finais dependem dos passos intermediários utilizados no cálculo ou do momento em que a regularização é introduzida.

5.3.2 Regularização Uniforme

Na seção anterior nós regularizamos e calculamos cada uma das integrais separadamente. Como consequência disso nós notamos que não é possível garantir unicidade nos resultados. Isto ocorre porque quando nós regularizamos funções dependentes dos momentos externos termo a termo nós estamos modificando a estrutura dos momentos da amplitude de diferentes modos. Nós então nos questionamos sobre o que ocorreria se regularizássemos toda a amplitude (todas as integrais) através do mesmo fator (aquele que regulariza a integral divergente de maior grau). Isto obviamente garantiria a unicidade dos resultados. O problema é: o que ocorreria com os limiares não-físicos?

Para verificar isto calculamos as integrais:

$$\bullet I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 \quad (5.15)$$

$$\bullet I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 \quad (5.16)$$

$$\bullet I_3 = \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2 \quad (5.17)$$

$$\bullet I_4 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right)^2. \quad (5.18)$$

As integrais I_1 e I_4 são as mesmas da seção anterior e os resultados estão dados nas eqs.(5.11) e (5.14). As outras duas integrais têm partes finitas idênticas aos resultados da seção anterior. As partes divergentes são entretanto diferentes;

$$I_2^{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[Z_0(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) + (\Lambda^2 - m^2)Y_0(\Lambda^2, m^2, p^2) \right] \quad (5.19)$$

e

$$I_3^{div} = \frac{i}{(4\pi)^2} \not{p} \left[Z_1(\Lambda^2, m^2, p^2; m^2) + (\Lambda^2 - m^2)Y_1(\Lambda^2, m^2, p^2) \right]. \quad (5.20)$$

Nós podemos ver imediatamente que as partes divergentes de I_2 e I_3 produziram, com esta regularização, um termo adicional proporcional às funções do tipo $Y_k(\lambda_1, \lambda_2, p^2)$, responsáveis por comportamentos não-físicos anômalos. Isto significa que quando nós temos uma amplitude quadraticamente divergente tais funções indesejáveis aparecerão como consequência da regularização adotada. Nós então temos uma questão crucial neste ponto: Como nós podemos eliminar as funções $Y_k(\lambda_1, \lambda_2, p^2)$ e ao mesmo tempo garantir unicidade? A próxima seção nos oferece uma possível solução.

5.3.3 Regularização Uniforme Multiparamétrica

Nas seções precedentes nós verificamos a presença das funções Y_k (intimamente relacionadas com comportamentos não-físicos anômalos no limiar). A razão para esta presença está no fato de termos nas integrais um pólo duplo no fator de regularização. Existe, portanto, dentro do método de regularização adotado, um modo de evitar isto sem perder unicidade; nós podemos utilizar (seção 4.6):

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} \left(\frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \cdots \cdots \left(\frac{m^2 - \Lambda_n^2}{k^2 - \Lambda_n^2} \right), \quad (5.21)$$

onde $\Lambda_1^2 \neq \Lambda_2^2 \neq \dots \neq \Lambda_n^2$. No nosso caso temos que calcular (com dois parâmetros apenas):

$$\bullet I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p - k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \quad (5.22)$$

$$\bullet I_2 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \quad (5.23)$$

$$\bullet I_3 = \gamma_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right) \quad (5.24)$$

$$\bullet I_4 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} \left(\frac{m^2 - \Lambda_1^2}{k^2 - \Lambda_1^2} \right) \left(\frac{m^2 - \Lambda_2^2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right). \quad (5.25)$$

As partes finitas destas integrais, como esperado, não mudam. As partes divergentes das primeiras três são dadas por:

$$\bullet I_1^{div} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \frac{(m^2 - \Lambda_1^2)(m^2 - \Lambda_2^2)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)} \right\} \times \\ \times \left[Z_0(\Lambda_2^2, m^2, p^2; m^2) - Z_0(\Lambda_1^2, m^2, p^2; m^2) \right] \quad (5.26)$$

$$\bullet I_2^{div} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ Z_0(\Lambda_1^2, m^2, p^2; m^2) \right. \\ \left. - \frac{(m^2 - \Lambda_1^2)}{(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)} \left[Z_0(\Lambda_1^2, m^2, p^2; m^2) - Z_0(\Lambda_2^2, m^2, p^2; m^2) \right] \right\} \quad (5.27)$$

$$\bullet I_3^{div} = \left(\frac{i \not{p}}{(4\pi)^2} \right) \left\{ Z_1(\Lambda_1^2, m^2, p^2; m^2) \right. \\ \left. - \frac{(m^2 - \Lambda_1^2)}{(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)} \left[Z_1(\Lambda_1^2, m^2, p^2; m^2) - Z_1(\Lambda_2^2, m^2, p^2; m^2) \right] \right\}. \quad (5.28)$$

Como nós podemos ver, tanto quanto $\Lambda_1^2 \neq \Lambda_2^2$, o comportamento anômalo indesejável no limiar complexo desaparece. Permanece entretanto o problema relacionado às partes complexas das funções Z_k envolvendo os parâmetros de regularização. A interpretação física usualmente adotada é a de que os fatores de regularização simulam ou parametrizam fatores de forma das partículas, as quais participam das interações presentes na amplitude. Os múltiplos pólos seriam devido a presença de partículas com massas correspondentes aos Λ_i^2 , as quais de fato contribuem para o fator de forma. Portanto as partes imaginárias estariam associadas a momentos onde estas partículas internas poderiam estar na camada de massa. Embora esta formulação apresente alguns atrativos fenomenológicos, ela possui a óbvia desvantagem da superparametrização do problema e a falta de universalidade. Nós mostraremos nas próximas seções como evitar estes problemas.

5.3.4 Eliminação de Comportamentos Não-Físicos

Nas seções anteriores nós identificamos alguns aspectos negativos comuns em métodos de regularização; a introdução de comportamentos não-físicos. A questão desta seção é então como evitar estes problemas e ainda garantir unicidade. A fim de conseguir isto, nós inicialmente chamamos atenção para o fato de que a presença das partes complexas associadas ao parâmetro Λ^2 estão intimamente conectadas ao fato de termos regularizado uma integral dependente dos momentos externos ao “loop”. Em particular a presença das funções Y_k no primeiro método é devido ao fato de que a integral quadraticamente divergente, presente na amplitude, ser uma função do momento externo. Isto sugere fortemente que se nós pudéssemos escrever esta integral como uma soma de termos tais que a parte da integral que permanece com a divergência quadrática não dependa do momento externo estaríamos eliminando a fonte das funções Y_k . Este é o caso, já que podemos escrever, para a integral regularizada:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]}.$$
(5.29)

A primeira integral do lado direito é quadraticamente divergente mas não depende do momento externo p . A segunda, sendo divergente não conterá funções Y_k em regularização mínima. Este resultado mostra que é possível eliminar os comportamentos não-físicos introduzidos diretamente pelo procedimento de regularização. Basta para isso: *Não regularizar integrais dependentes do momento externo*. Vamos então estabelecer neste ponto a primeira regra de procedimento para eliminarmos comportamentos não-físicos e violação de unitariedade:

- *Regra 1* “Integrais dependentes dos momentos externos devem ser escritas como uma soma de integrais divergentes, independentes dos momentos externos, mais integrais finitas. Estas últimas não devem ser regularizadas. Regularização uniforme deve portanto ser descartada como procedimento.”

Vamos então aplicar esta regra às nossas integrais divergentes. Usando apenas identidades podemos escrever:

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{(p^2)}{(k^2 - m^2)^2} \right\} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(p^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3[(p-k)^2 - m^2]} \right\}.$$
(5.30)

Após regularizarmos as integrais divergentes, os cálculos nos fornecem para os três termos, respectivamente:

$$\bullet I_1^{quad} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\Lambda^2 + m^2 + m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \bullet I_1^{log} = & \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (p^2) \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{3}{2} + \frac{2m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} + \left[\frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\} \\ & + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-p^2) \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - 1 + \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\bullet I_1^{fin} = zero. \quad (5.33)$$

Nós então podemos aplicar o mesmo procedimento às outras integrais. Assim:

$$I_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k - p^2)}{(k^2 - m^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (5.34)$$

Temos então, respectivamente:

$$\bullet I_2^{log} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + 1 + \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{m^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right)} \right] \quad (5.35)$$

$$\bullet I_2^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-Z_0(m^2, m^2, p^2)]. \quad (5.36)$$

Para a integral I_3 , por sua vez:

$$I_3 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k) \not{k}}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^2 \not{k}}{(k^2 - m^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (5.37)$$

Onde, respectivamente, teremos:

$$\begin{aligned} \bullet I_3^{log} = & \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \not{p} \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{3}{2} + \frac{2m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} + \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2 \frac{\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)}{\left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\bullet I_3^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \not{p} \left[-Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2) \right]. \quad (5.39)$$

Finalmente, a integral I_4 pode ser escrita como:

$$I_4 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(2p \cdot k)^2 k^2}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{(p^2 k^2)}{(k^2 - m^2)^3} \right\} \\ + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{q^4 k^2}{(k^2 - m^2)^4} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3 k^2}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.40)$$

Calculando obtemos, respectivamente:

$$I_4^{quad} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ -(\Lambda^2 + m^2) - 2m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{2(m^2)^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right\} \quad (5.41)$$

e

$$\bullet I_4^{log} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-p^2) \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{3}{2} - \frac{2m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{(m^2)^2}{\Lambda^4 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\} \\ + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (p^2) \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{11}{6} - \frac{3m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2} + \frac{m^2}{2\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{(m^2)^2}{\Lambda^4 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2} + \frac{3m^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} + \frac{3m^4 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)}{\Lambda^4 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^2} + \frac{(m^2)^3 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)}{\Lambda^6 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^3} \right\} \quad (5.42)$$

$$\bullet I_4^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-m^2 Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) - \frac{p^2}{6} \right]. \quad (5.43)$$

Nas expressões acima nós podemos imediatamente notar que o conteúdo não-físico indesejável foi eliminado completamente. Com isso o próximo passo é exigir unicidade.

5.3.5 Unicidade

A eliminação dos comportamentos não-físicos, introduzidos pela regularização, de amplitudes que contém divergências, pode ser considerado um primeiro e crucial passo para se poder atribuir um significado físico às mesmas amplitudes no contexto de Teoria Quântica de Campos em solução perturbativa. Entretanto, um procedimento que elimine estes problemas, para que possa ser utilizado em predições de observáveis físicos, definidos a partir

da amplitude calculada, necessita ainda ser unívoco. Ou seja, dois caminhos utilizados para efetuarmos os cálculos devem conduzir ao mesmo resultado.

A fim de estudarmos este aspecto nós comparamos os resultados obtidos, para a auto-energia considerada, tomando as eqs.(5.5) e (5.6) e aqueles para as integrais respectivas. É possível notar a existência de pequenas discrepâncias tanto nas partes rotuladas como divergente quanto naquelas finitas. Isto é devido ao fato de, depois da regularização, algumas identidades não serem mantidas. No nosso caso a relação crucial é

$$I_4 = m^2 I_2 + I_1. \quad (5.44)$$

Os resultados da tabela 1a mostram que nossas expressões não são consistentes com a exigência de unicidade.

	$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]}$	$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]}$	$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)[(p-k)^2 - m^2]}$
parte quad.	$[-\Lambda^2 - m^2 - 2m^2 \ln(\frac{m^2}{\Lambda^2})]$	$[-\Lambda^2 + m^2 + m^2 \ln(\frac{m^2}{\Lambda^2})]$	_____
parte log.	$-p^2 [\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) - 3/2] + p^2 [\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) - 11/6]$	$(-p^2) [\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) - 1] + p^2 [\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) - 3/2]$	$m^2 [\ln(\frac{\Lambda^2}{m^2}) - 1]$
parte finita	$-m^2 Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) - p^2/6$	Zero	$m^2 [-Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)]$

Tabela 5.1: Resultados correspondentes, depois da imposição $\Lambda^2 \gg m^2$, omitindo a constante $(i/(4\pi)^2)$.

Uma análise mais cuidadosa poderá nos indicar as possíveis origens destas discrepâncias. A regra que adotamos, para eliminar os comportamentos não-físicos, diz que devemos reescrever os integrandos de tal forma que a dependência com o momento

externo esteja contido em integrais finitas. Estas não devem ser regularizadas. As outras integrais devem então ser regularizadas de acordo com o grau de divergência (regularização mínima). Esta última afirmação pode ser colocada noutras palavras: *não devemos regularizar integrais além do necessário*. Esta regra, a rigor, não foi completamente seguida por nós nas manipulações e cálculos realizadas até aqui. Isto por que algumas das integrais que regularizamos possuem bilineares do momento do “loop” no numerador. Isto quer dizer que podem ainda sofrer uma redução adicional. Nas integrais logaritmicamente divergentes a redução de um bilinear nos permitirá escrevê-la como uma soma de uma integral finita mais uma divergente. Naquelas quadraticamente divergentes esta redução nos leva a uma soma envolvendo duas integrais com graus de divergências diferentes. Sendo assim a regularização que efetuamos regularizou “uniformemente” estas integrais não-reduzidas. Para sermos completamente consistentes com a regra que adotamos devemos ainda eliminar estes termos quadráticos dos numeradores das integrais divergentes. Vamos então verificar isto integral por integral.

Na integral I_1 o termo que precisa ser reduzido é a integral:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3} = p^\alpha p^\beta \int \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (5.45)$$

da qual necessitamos eliminar o termo bilinear do numerador. Para tal notemos que :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k)^2}{(k^2 - m^2)^3} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) &= \frac{ip^2}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - 1 + \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \right. \\ &+ \left[-\frac{1}{2} + \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \right. \\ &\left. \left. + \left[\frac{m^2}{\Lambda^2 \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \right\} \\ &= p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) \\ &+ p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) \\ &= p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^3} \left(\frac{m^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right), \quad (5.46) \end{aligned}$$

o que nos permite identificar a relação entre os integrandos:

$$\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} = g_{\alpha\beta} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^3}. \quad (5.47)$$

Aqui utilizemos o símbolo Λ nas integrais para lembrar que esta relação foi deduzida para integrais regularizadas, ou seja, (tornadas) finitas. O resultado acima é um caso particular de:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4k_\mu k_\nu f(k^2) = g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 f(k^2), \quad (5.48)$$

demonstrável rigorosamente para integrais finitas. Notemos que a eq.(5.47) não depende do método específico de regularização, mas apenas do fato de a função regularizadora ser par em k (o momento do “loop”) e obviamente tornar a integral finita. Com isso a redução pretendida fica:

$$\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} = g_{\alpha\beta} \left[\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \quad (5.49)$$

Na segunda integral do lado direito retiramos o subscrito Λ devido ao fato de a integral ser finita. Este passo é necessário para tornarmos estas manipulações coerentes com a regra que adotamos para a eliminação dos comportamentos não-físicos. Com este resultado a integral I_1 fica:

$$I_1 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{m^2 p^2}{(k^2 - m^2)^3} + \frac{(p^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.50)$$

Após o cálculo das integrais finitas nós obtemos:

$$\begin{cases} I_1^{div} = I^{quad}(m^2) \\ I_1^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{-p^2}{2} \right], \end{cases} \quad (5.51)$$

onde definimos a quantidade:

$$I^{quad}(m^2) = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (5.52)$$

A integral I_2 , que não necessita de redução adicional, fica:

$$\begin{cases} I_2^{div} = I^{log}(m^2) \\ I_2^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)], \end{cases} \quad (5.53)$$

onde definimos a quantidade:

$$I^{log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (5.54)$$

A integral I_3 , por sua vez, pode ser escrita, com a utilização da eq.(5.49), na forma:

$$I_3 = \frac{\not{p}}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{\not{p}}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^2 \not{k}}{(k^2 - m^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (5.55)$$

Portanto teremos:

$$\begin{cases} I_3^{div} = \frac{\not{p}}{2} I^{log}(m^2) \\ I_3^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \not{p} \left[\frac{-1}{4} - Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2) \right]. \end{cases} \quad (5.56)$$

Finalmente, a integral I_4 pode ser colocada na forma:

$$\begin{cases} I_4^{div} = I^{quad}(m^2) + m^2 I^{log}(m^2) \\ I_4^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{-p^2}{2} - m^2 Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) \right]. \end{cases} \quad (5.57)$$

Esta última é o resultado do cálculo de:

$$I_4^{fin} = m^2 p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} + m^4 p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^4} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p^4 k^2}{(k^2 - m^2)^4} + \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3 k^2}{(k^2 - m^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.58)$$

Reunindo os resultados para as integrais I_1 , I_2 e I_4 nós podemos construir outra tabela, para verificar a identidade (5.44), após as manipulações e cálculos realizados nesta seção (tabela 5.2).

Agora nós observamos que a identidade (5.44) é preservada pela manipulações e cálculos realizados. É importante notar que os resultados das integrais agora não mais estão comprometidos com o método de Pauli-Villars. A propriedade que utilizamos para reduzir integrais com bilineares no numerador, integração simétrica, é satisfeita por qualquer regularização pois vale irrestritamente para integrais finitas. Ou seja:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu f(k^2) G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 f(k^2) G_\Lambda(k^2, \Lambda^2), \quad (5.59)$$

	$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}$	$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2-m^2]}$	$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}$
parte quad. div.	$I_{quad}(m^2)$	$I_{quad}(m^2)$	_____
parte log. div.	$m^2 I_{log}(m^2)$	Zero	$m^2 I_{log}(m^2)$
parte finita	$-\frac{i}{(4\pi)^2} [m^2 Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)]$	$\frac{i}{(4\pi)^2} [-\frac{p^2}{2}]$	$\frac{i}{(4\pi)^2} m^2 [-Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)]$

Tabela 5.2: Integrais após completa redução

qualquer que seja a função regularizadora. Com isso a tabela 2 é consequência *apenas* da regra que adotamos na seção anterior e da validade da *integração simétrica em integrais originalmente divergentes tornadas finitas por regularização*. O fato de termos mantido as integrais divergentes, remanescentes após estas operações, sem explicitá-las torna os resultados obtidos válidos qualquer que seja o método de regularização.

Nós podemos então concluir esta seção traduzindo o procedimento adicional adotado na formulação de uma regra, que deve suceder a regra 1 no tratamento de integrais divergentes:

- Regra 2. “As integrais divergentes (independentes do momento externo; regra 1) devem ser reduzidas, pela adequada eliminação de bilineares do momento do “loop” do numerador, até que o conteúdo divergente esteja contido apenas nos objetos básicos $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$ ”.

No enunciado da regra acima, propositadamente, optamos por escrever “pela adequada

eliminação de bilineares do momento do “loop” do numerador” o invés de “pela utilização de integração simétrica”. Deste modo ela torna-se mais geral. Isto reflete o fato de esta propriedade, apesar de válida em qualquer regularização, ser, a rigor, uma propriedade de integrais finitas. A regra 2 seria mantida ainda que isto não fosse válido e tivesse que ser substituído por outro procedimento mais adequado. Finalmente, uma última observação a respeito deste enunciado. A menção dos objetos básicos $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$ restringe (por enquanto) a aplicação a problemas sem a presença de “divergências superpostas” e com grau máximo de divergência cúbico. Uma generalização, para incluir outras situações, obviamente ampliaria o número de objetos divergentes básicos.

5.3.6 Independência de Método Específico de Regularização

Nas seções anteriores inferimos que a eliminação de comportamentos não-físicos e obtenção de unicidade, em manipulações e cálculos envolvendo integrais divergentes, poderia ser obtido pela adoção de duas regras simples. Com isso resta-nos apenas a exigência C, apresentada na introdução, para ser cumprida: obter independência total em relação ao método específico de regularização.

Para chegar a isto nós primeiro notamos que a aplicação das regras 1 e 2 nos fornece um resultado não comprometido com um método específico de regularização. Nós teríamos que lançar mão de um método específico apenas para calcular as quantidades $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$. Isto significa que nós somente necessitamos regularização para parametrizar estes objetos em termos de algum parâmetro Λ^2 de regularização (“cut off”). A questão é então: Todos os métodos de regularização fornecem a mesma parametrização para estes objetos? Se isto fosse verdade nossa investigação já estaria concluída. Entretanto isto só é verdade rigorosamente quando Λ^2 é muito maior que m^2 . Quais métodos fornecem então a parametrização correta? Para chegar a esta resposta devemos encontrar ou impor condições adicionais sobre estes objetos. Nós então observamos que, de fato, existem relações a serem satisfeitas por estes objetos;

$$I^{log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial m^2} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right), \quad (5.60)$$

ou seja:

$$I^{log}(m^2) = \frac{\partial}{\partial m^2} I^{quad}(m^2). \quad (5.61)$$

Ainda;

$$\frac{\partial}{\partial m^2} I^{log}(m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{(k^2 - m^2)^3}. \quad (5.62)$$

Nós podemos então exigir de um eventual método de regularização que satisfaça estas duas relações. Qualquer desses métodos que forneça uma parametrização compatível com estas exigências será igualmente bom. Esta observação serve também para nos revelar que então estes métodos são completamente desnecessários. Isto por que quando lançamos mão deles, para calcular um objeto divergente básico, apenas estamos estabelecendo uma relação um-a-um do valor destes objetos com o valor do parâmetro Λ^2 , para cada valor de m^2 . A escolha do valor de Λ^2 virá invariavelmente de algum ajuste fenomenológico, como é usualmente feito em teorias não-renormalizáveis. Deste ponto de vista, isto torna-se equivalente a ajustar fenomenologicamente o valor dos próprios objetos divergentes básicos, conforme mostra o esquema abaixo:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} \xrightarrow{Reg} f_\alpha(m^2, \Lambda^2) \longrightarrow \text{ajuste fenomenológico}$$

$$\longrightarrow \text{valor de } \Lambda^2 \text{ (m=fixo)} \longrightarrow \text{valor para } \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha},$$

para os casos $\alpha = 1$ e 2 representando as divergências básicas quadráticas e logarítmicas, respectivamente. As parametrizações $f_\alpha(m^2, \Lambda)$ deverão então satisfazer:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2(m^2, \Lambda^2)}{\partial m^2} = f_1(m^2, \Lambda^2) \\ \frac{\partial f_1(m^2, \Lambda^2)}{\partial m^2} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left(\frac{-1}{m^2}\right). \end{cases} \quad (5.63)$$

Parametrizações deste tipo podem ser construídas diretamente sem o uso explícito de qualquer método de regularização e servirão, a rigor, apenas como relações auxiliares para facilitar os eventuais cálculos numéricos computacionais, a fim de obter a melhor escolha dos valores de $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$. Uma parametrização adequada pode ser obtida pelas relações:

$$\begin{cases} I^{quad}(m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left\{ \left[-\Lambda^2 + m^2 + m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] + \text{const.}(m^2) \right\} \\ I^{log}(m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left\{ \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] + \text{const.} \right\}. \end{cases} \quad (5.64)$$

Estas relações fornecem uma relação um-a-um entre o parâmetro Λ^2 e os objetos $I^{quad}(m^2)$ e $I^{log}(m^2)$, obedecendo às eqs.(5.61) e (5.62) e substituem por completo a necessidade da adoção de algum método de regularização.

Nós poderíamos então traduzir numa regra também estas conclusões:

- Regra 3. “As quantidades indefinidas remanescentes, após a aplicação das regras 1 e 2, devem ser especificadas diretamente por algum ajuste fenomenológico. A

atribuição de valores para $I_{log}(m^2)$ e $I_{quad}(m^2)$ deve obedecer às relações $\frac{\partial I_{quad}(m^2)}{\partial m^2} = I_{log}(m^2)$ e $\frac{\partial I_{log}(m^2)}{\partial m^2} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left(\frac{-1}{m^2}\right)$.”

É interessante notar que a adoção desta regra implica em propriedades universais para os objetos $I_{log}(m^2)$ e $I_{quad}(m^2)$, que não dependerão da teoria ou amplitude particular em que ocorrem. Isto pode ser visto definindo a variável adimensional $X = \Lambda^2/m^2$. Então:

$$\begin{cases} (4\pi)^2 i \frac{I_{quad}(m^2)}{m^2} = [X - 1 - \ln(X) + const.] = f_1(X) \\ (4\pi)^2 i I_{log}(m^2) = -\ln(X) + const. = f_2(X) \end{cases} \quad (5.65)$$

Esta constatação deve ter profundas consequências em propriedades físicas de modelos não-renormalizáveis.

Isto completa nossos objetivos no que diz respeito à situação envolvendo massas iguais em amplitudes divergentes.

5.4 Massas Diferentes

Na seção anterior nós consideramos alguns problemas associados a amplitudes físicas, contendo divergências, após a regularização. A fim de eliminarmos os indesejáveis comportamentos não-físicos, violação de unitariedade, falta de unicidade e de tornarmos os resultados finais independentes da regularização específica utilizada, nós culminamos por adotar três regras de procedimento. Estas regras sintetizam nossas conclusões e nos garantem os efeitos desejados; os resultados finais serão livres de comportamentos não-físicos, serão unívocos e não dependerão do método específico de regularização. Isso entretanto foi obtido para uma situação simplificada: as massas das partículas envolvidas foram consideradas idênticas. Devido ao fato de a forma final obtida, após a aplicação das duas primeiras regras, nos levar a mantermos todo o conteúdo divergente nos objetos básicos $I_{log}(m^2)$ e $I_{quad}(m^2)$, que portanto contém a massa das partículas, nós podemos nos questionar sobre a validade do procedimento delineado naquele caso para o tratamento de situações envolvendo partículas com massas diferentes em amplitudes divergentes.

Especificamente, se tivéssemos mantido a amplitude na forma original (eq.(5.1)) as integrais a serem consideradas seriam aquelas das eqs.(5.4). No momento de efetuar as separações necessárias qual das massas nós deveríamos escolher para definir os objetos divergentes básicos? Os resultados dependerão desta escolha? Vamos então investigar esta questão calculando a amplitude, seguindo o procedimento da seção anterior, dentro das duas opções. Para tal consideremos integral por integral.

Inicialmente tomemos a integral I_1 . Nós podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \\
& + (m^2 - \mu^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + p^2 \mu^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(p^2 - m^2 + \mu^2)^2}{(k^2 - \mu^2)^3} - \frac{(p^2 - m^2 + \mu^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - \mu^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.66)
\end{aligned}$$

O cálculo das integrais finitas obtidas nos fornece:

$$\begin{cases} I_1^{quad} = I^{quad}(\mu^2) \\ I_1^{log} = (m^2 - \mu^2) I^{log}(\mu^2) \\ I_1^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\frac{-p^2}{2} + (m^2 - \mu^2) + m^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right], \end{cases} \quad (5.67)$$

onde separamos as partes de acordo com o grau de divergência. A mesma integral foi escrita, na seção anterior, como:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{m^2 p^2}{(k^2 - m^2)^3} + \frac{(p^2)^2}{(k^2 - m^2)^3} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}, \quad (5.68)
\end{aligned}$$

que, após o cálculo, escrevemos como:

$$\begin{cases} I_1^{quad} = I^{quad}(m^2) \\ I_1^{log} = 0 \\ I_1^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\frac{-p^2}{2} \right]. \end{cases} \quad (5.69)$$

Aplicando o mesmo procedimento á integral I_2 , nós primeiro podemos escrever:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (5.70)
\end{aligned}$$

O que nos leva a:

$$\begin{cases} I_2^{div} = I^{log}(\mu^2) \\ I_2^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) [-Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)]. \end{cases} \quad (5.71)$$

Ainda, podemos colocá-la na forma:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + (\mu^2 - m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2 (k^2 - \mu^2)} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(q^2 - 2q \cdot k)}{(k^2 - m^2)(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - m^2]}, \tag{5.72}
\end{aligned}$$

com os correspondentes resultados:

$$\begin{cases} I_2^{log} = I^{log}(m^2) \\ I_2^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \not{p} [-Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]. \end{cases} \tag{5.73}$$

Por sua vez, a integral I_3 fica:

$$\begin{aligned}
I_3 = & \frac{\not{p}}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} \\
& + \frac{\not{p}\mu^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 + m^2)^2 \not{k}}{(k^2 - \mu^2)^3 [(p - k)^2 - m^2]}, \tag{5.74}
\end{aligned}$$

o que fornece:

$$\begin{cases} I_3^{log} = \frac{\not{p}}{2} I^{log}(\mu^2) \\ I_3^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \not{p} \left[\frac{-1}{4} - Z_1(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)\right]. \end{cases} \tag{5.75}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
I_3 = & \frac{\not{p}}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\
& + \frac{\not{p}\mu^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - m^2)^2} + \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k)^2 \not{k}}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - m^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]}. \tag{5.76}
\end{aligned}$$

Isto nos fornece:

$$\begin{cases} I_3^{div} = \frac{\not{p}}{2} I^{log}(m^2) \\ I_3^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \not{p} \left[\frac{-1}{4} - Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)\right]. \end{cases} \tag{5.77}$$

Finalmente, a integral I_4 pode primeiro ser escrita na forma:

$$I_4 = \frac{\not{p}}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)}$$

$$\begin{aligned}
& +m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + \mu^2(p^2 + m^2 - \mu^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \\
& + \mu^4 p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^4} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(p^2 - m^2 + \mu^2)^2 k^2}{(k^2 - \mu^2)^4} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k - m^2 + \mu^2)^3 k^2}{(k^2 - \mu^2)^4 [(p - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (5.78)
\end{aligned}$$

Isto nos leva a:

$$\begin{cases} I_4^{quad} = I^{quad}(\mu^2) \\ I_4^{log} = m^2 I^{log}(\mu^2) \\ I_4^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left\{ -\mu^2 [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)] - [(\mu^2 - m^2) + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)] - \frac{p^2}{2} \right\}. \end{cases} \quad (5.79)$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}
I_4 = & \frac{p}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\
& + \mu^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \mu^2(\mu^2 - m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3} \\
& + \mu^2 p^2 (\mu^2 + p^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^4} \\
& + \mu^2 (m^2 - \mu^2) (m^2 - \mu^2 + p^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3 [k^2 - \mu^2]} \\
& - \mu^2 p^2 (m^2 - \mu^2) (\mu^2 + p^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^4 [k^2 - \mu^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 - 2p \cdot k)^3 k^2}{(k^2 - m^2)^3 (k^2 - \mu^2) [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (5.80)
\end{aligned}$$

Temos assim:

$$\begin{cases} I_4^{quad} = I^{quad}(m^2) \\ I_4^{log} = \mu^2 I^{log}(\mu^2) \\ I_4^{fin} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left\{ -\mu^2 Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \frac{p^2}{2} \right\}. \end{cases} \quad (5.81)$$

Antes de proceder a qualquer análise, nós observamos que quando $\mu^2 = m^2$ os resultados concordam com aqueles da seção anterior, como esperado. Entretanto quando comparamos os resultados obtidos pelos dois caminhos, notamos certas discrepâncias. As

diferenças essenciais estão evidenciados nas relações abaixo:

$$\begin{cases} I_1^{fin}(\mu^2) - I_1^{fin}(m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[(m^2 - \mu^2) + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] \\ I_2^{fin}(\mu^2) - I_2^{fin}(m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] \\ I_3^{fin}(\mu^2) - I_3^{fin}(m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \frac{p}{2} \left[\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] \\ I_4^{fin}(\mu^2) - I_4^{fin}(m^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[(m^2 - \mu^2) + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \mu^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right]. \end{cases} \quad (5.82)$$

Aqui $I_i^{fin}(\mu^2)$ e $I_i^{fin}(m^2)$ representam as partes finitas das integrais indicadas, com a correspondente opção feita para os objetos básicos divergentes. Resulta de uma observação imediata a dependência destes fatores apenas com as massas envolvidas bem como uma certa regularidade nestes. Neste ponto poderíamos ser inclinados a pensar que a aplicação da regra 3, que manda ajustar fenomenologicamente os próprios valores das integrais divergentes básicas, nos levaria a uma ambiguidade, pois as partes definidas como finitas diferem. É necessário observar entretanto que as quantidades (massas) deixadas nos objetos divergentes terminam por desempenhar um papel de escala nas parametrizações destas quantidades. Assim os ajustes não deveriam, em princípio, serem obtidos atribuindo-se valores idênticos a $I_{quad}(m^2)$ e $I_{quad}(\mu^2)$ por exemplo. Os resultados finais devem ser equivalentes o que implica em relações bem estabelecidas entre estas quantidades, já que estas aparentes discrepâncias resultam de um tratamento diferente dado às massas nos dois caminhos. De fato é fácil verificar que, por manipulações algébricas no integrando, podemos estabelecer relações entre os objetos divergentes básicos. Assim:

$$\begin{cases} I^{quad}(m^2) = I^{quad}(\mu^2) - (\mu^2 - m^2) I^{log}(\mu^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[(\mu^2 - m^2) + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] \\ I^{log}(m^2) = I^{log}(\mu^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \end{cases} \quad (5.83)$$

Quando estas identidades são utilizadas elas produzem uma comunicação perfeita entre os dois resultados. Devido à observação de que as quantidades deixadas no interior dos objetos básicos divergentes desempenham papel de escala, as relações acima representam meras transformações de escala. Em outras palavras, quando escolhermos a massa que definirá as quantidades divergentes estamos escolhendo a escala básica para todas as quantidades físicas presentes na amplitude. Como esta escolha é arbitrária isto significa que os resultados finais devem ser independentes desta escala. Segundo esta argumentação a unicidade estará garantida ainda que, no momento da separação das partes introduzíssemos uma escala arbitrária λ^2 . Dos resultados assim obtidos poderíamos efetuar escolhas particulares entre as quais m^2 ou μ^2 . Deste modo o procedimento representado pelas regras que

adotamos além de nos fornecer resultados com a mesma consistência que havíamos obtido no caso com massas iguais nos fornece *automaticamente* invariância de escala. Vamos verificar isto a partir dos resultados obtidos efetuando as transformações:

$$\begin{cases} I(m^2) \longrightarrow I(\lambda^2) \\ I(\mu^2) \longrightarrow I(\lambda^2) \end{cases} . \quad (5.84)$$

Como tal, tomando as eqs.(5.69) e (5.67) para a integral I_1 e utilizando as eqs.(5.83) seremos levados a:

$$\begin{aligned} I_1(m^2) = & I^{quad}(\lambda^2) + (m^2 - \lambda^2)I^{log}(\lambda^2) \\ & + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(m^2 - \lambda^2) + m^2 \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) - \frac{p^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (5.85)$$

que é o mesmo resultado obtido a partir do cálculo direto com a introdução de λ^2 a partir das separações. Isso mostra a consistência necessária.

Podemos facilmente testar os resultados correspondentes às outras integrais. Os resultados podem ser vistos nas tabelas 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6.

	massa μ^2	massa m^2	escala λ^2
parte quad. divergente	$I_{quad}(\mu^2)$	$I_{quad}(m^2)$	$I_{quad}(\lambda^2)$
parte log. divergente	$(m^2 - \mu^2)I_{log}(\mu^2)$	Zero	$(m^2 - \lambda^2)I_{log}(\lambda^2)$
parte finita	$\frac{i}{(4\pi)^2}[-\frac{p^2}{2} + (m^2 - \mu^2)] + \frac{i}{(4\pi)^2}m^2 \ln(\frac{m^2}{\mu^2})$	$\frac{i}{(4\pi)^2}[-\frac{p^2}{2}]$	$\frac{i}{(4\pi)^2}[-\frac{p^2}{2} + (m^2 - \lambda^2)] + \frac{i}{(4\pi)^2}m^2 \ln(\frac{\lambda^2}{m^2})$

Tabela 5.3: Diferentes expressões para a integral I_1 , conforme a escolha da escala.

Os resultados para o cálculo de uma amplitude física, com uma escolha específica de escala, podem ser convertidos naqueles correspondentes a uma outra sem que todo o cálculo tenha que ser efetuado. Basta para isso utilizar as equações de transformação (5.90). Esquemáticamente:

$$I(\lambda_1^2) \rightarrow I(\lambda_2^2) \rightarrow I(\lambda_3^2). \quad (5.86)$$

Obviamente nenhum resultado fisicamente relevante deve depender da escala escolhida. Isto deve ser materializado através dos valores atribuídos às quantidades $I_{quad}(\lambda^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$. Os valores assumidos por estas quantidades devem ser tais que o resultado para a amplitude considerada não dependa do valor de λ^2 . Este é provavelmente o ingrediente físico mais importante para a definição das propriedades físicas razoáveis das quantidades indefinidas das amplitudes.

Quais devem então ser os valores assumidos por estas quantidades para cada valor de λ^2 (arbitrário) para que o conteúdo físico ao dependa de λ^2 ?

	massa μ^2	massa m^2	escala λ^2
parte log. div.	$I_{log}(\mu^2)$	$I_{log}(m^2)$	$I_{log}(\lambda^2)$
parte finita	$\frac{-i}{(4\pi)^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)]$	$\frac{-i}{(4\pi)^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]$	$\frac{-i}{(4\pi)^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)]$

Tabela 5.4: Diferentes expressões para a integral I_2 .

Em primeiro lugar as parametrizações adotadas para $I^{quad}(\lambda^2)$ e $I^{log}(\lambda^2)$ devem ser compatíveis com as equações de transformações de escala, além daquelas exigências que já havíamos feito ao final da seção anterior. É fácil verificar que as parametrizações sugeridas lá:

$$\begin{cases} I_{quad}(\lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[-\Lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) + \text{const.}\lambda^2\right] \\ I_{log}(\lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) + \text{const.}\right], \end{cases} \quad (5.87)$$

preenchem também este requisito. A independência em relação ao valor de λ^2 pode ser facilmente verificada integral por integral pela propriedade:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (5.88)$$

Para que isto seja verdade basta que a regra 3 seja satisfeita pela parametrização utilizada para $I_{log}(\lambda^2)$ e $I_{quad}(\lambda^2)$. Ou seja:

$$\begin{cases} \frac{\partial I_{quad}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} = I_{log}(\lambda^2) \\ \frac{\partial I_{log}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right). \end{cases} \quad (5.89)$$

Para as parametrizações acima elas são satisfeitas por construção. As propriedades que acabamos de discutir servem como critério para a adoção de métodos de regularização se este for o caso. Entretanto, como vimos, dentro das idéias discutidas aqui, eles são completamente dispensáveis.

	massa μ^2	massa m^2	escala λ^2
parte log. div.	$(\not{p}/2)I_{log}(\mu^2)$	$(\not{p}/2)I_{log}(m^2)$	$(\not{p}/2)I_{log}(\lambda^2)$
parte finita	$\frac{-i}{(4\pi)^2}[Z_1(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)]\not{p}$ $-\frac{i}{(4\pi)^2}[\frac{1}{4}]\not{p}$	$\frac{-i}{(4\pi)^2}[Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)]$ $-\frac{i}{(4\pi)^2}[\frac{1}{4}]$	$\frac{-i}{(4\pi)^2}[Z_1(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)]\not{p}$ $-\frac{i}{(4\pi)^2}[\frac{1}{4}]\not{p}$

Tabela 5.5: Diferentes resultados para a integral I_3 .

Para concluir esta discussão, poderíamos sintetizar nossas observações ao longo desta seção enunciando uma regra que nos fornece as respostas às questões levantadas no início.

- Regra 4. “Na presença de massas diferentes, em uma amplitude divergente, qualquer uma das massas pode ser escolhida para a definição das quantidades divergentes básicas ou ainda pode-se optar por uma quantidade (escala) arbitrária λ^2 . Qualquer uma das escolhas poderá ser convertida em outra pelas relações de transformação:

$$\begin{cases} I_{quad}(\lambda_1^2) = I_{quad}(\lambda_2^2) - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)I_{log}(\lambda_2^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1^2 \ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right)] \\ I_{log}(\lambda_1^2) = I_{log}(\lambda_2^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right). \end{cases} \quad (5.90)$$

A amplitude física não dependerá da escolha λ^2 se $I_{quad}(\lambda_1^2)$ e $I_{log}(\lambda_1^2)$ obedecem à regra 3. A quantidade λ^2 desempenhará o papel de escala para todas as quantidades físicas da amplitude.”

Esta regra garante a consistência obtida para o caso de massas iguais agora para massas diferentes e estabelece a importante propriedade de invariância de escala automaticamente.

Para finalizar esta discussão acrescentamos um importante comentário. Na prática acabamos de construir um procedimento representado pelas quatro regras, que se mos-

	massa μ^2	massa m^2	escala λ^2
parte quad. div.	$I_{quad}(\mu^2)$	$I_{quad}(m^2)$	$I_{quad}(\lambda^2)$
parte log. div.	$m^2 I_{log}(\mu^2)$	$\mu^2 I_{log}(m^2)$	$(\mu^2 + m^2 - \lambda^2) I_{log}(\lambda^2)$
parte finita	$\frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \frac{p^2}{2} - (\mu^2 - m^2) \right\} - \mu^2 Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2)$	$\frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -\mu^2 Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \frac{p^2}{2} \right\}$	$\frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) - \frac{p^2}{2} + (m^2 - \lambda^2) \right\} - \mu^2 Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \lambda^2)$

Tabela 5.6: Diferentes expressões para a integral I_4 .

tra capaz de satisfazer as exigências a, b e c colocadas na seção 1. Entretanto, existem exigências adicionais a serem feitas (próximos capítulos) a fim de que um eventual procedimento possa ser considerado completamente satisfatório. Como tal, as relações de simetria existentes entre funções de Green (amplitudes) de uma teoria, consequências diretas das simetrias implementadas na construção da lagrangiana, não podem ser violadas, a despeito do possível caráter divergente. Além disso, quando escolhermos os rótulos para os momentos das linhas internas, de um diagrama contendo “loops”, podemos efetuar várias escolhas compatíveis com as conservações de energia-momentum dos vértices envolvidos. Uma possível dependência com estas escolhas (arbitrárias) tornaria o resultado final ambíguo. Nós devemos submeter nosso procedimento frente a estes testes igualmente decisivos para considerá-lo consistente. Nós veremos então, nos próximos capítulos, que estas exigências imporão uma adicional e importante propriedade, às nossas manipulações, que não pôde ser percebida na discussão realizada aqui.

Referências Bibliográficas

- [1] de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics. North-Holland, Amsterdam (1973);
Adler, S.L. and Dashen, R.F. Current algebra and Application to Particle Physics. Benjamin, New York (1968);
Treiman, S.L. , Jackiw, R. and Gross, D.J. Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
S. Wienberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, (1996) ;
- [2] de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics. North-Holland, Amsterdam (1973) ;
S. Wienberg, Phys. Rev. Lett 19, 1264 (1967);
- [3] Y. Nambu and J. Jona-Lisinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345;
A. Kocic, Phys. Rev. D33 (1985) 1785;
D. Kohana, Phys. Lett. B229 (1989) 9;
T. Hatsuda and T.Kunikiro, Phys. rep. 247 (1994) 221;
J.Bijnens, Phys. Rep. 265 (1996) 369;
S.P. Kevansky, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992);
V.Bernard, A.Blin, B.Hiller, Y.P.Ivanov,A.A.Osipov and U.G.Meissner, Annals of Phys. 249, 499 (1996);
- [4] de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics. North-Holland, Amsterdam (1973) ;
S.Weinberg, Phys.Rev. 166, 1568 (1968);
•S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987);
S.coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. 177, 2239 (1969);

- C.G.Callan Jr, S.coleman, J.Wess and B.Zumino, Phys. Rev. 177, 2247 (1969);
J.Gasser and H. LentWysler, Ann. of Phys. 158, 142 (1984);
- [5] C. Itzykson an J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
R.E.CutKosky, J. Math. Phys. 1, 429 (1960);
- [6] Bernd A. Kniehl, Dispersion relations in Loop Calculations, hep-ph/9607255 (1996);J.
F. Donoghue, Dispersion Relations and Effective Field Theory, hep-ph/9607351 (1996);
G.Barton, Dispersion Techniques in Field theory, Benjamin, NY,1965;
- [7] O.A. Battistel and G. Dallabona (em preparação);

Capítulo 6

Relações de Simetria em Amplitudes Contendo Divergências

6.1 Introdução

A teoria quântica de campos é seguramente o melhor referencial teórico disponível atualmente para o estudo das partículas elementares e suas interações. Os principais ingredientes na conexão entre o aparato teórico e a realidade fenomenológica são as simetrias, através das quais nós introduzimos nosso conhecimento ou nossas hipóteses fundamentais para serem testadas. Mas as consequências da associação TQC + Simetrias somente podem ser apreciadas após uma consistente interpretação das divergências que surgem nas amplitudes físicas, na solução perturbativa da teoria construída; a renormalização. Nós dispomos hoje de uma prescrição razoavelmente consistente, para a verificação das consequências dinâmicas de um conjunto de simetrias, apenas quando a teoria construída é renormalizável. Por outro lado, a própria renormalizabilidade depende crucialmente de que a expansão perturbativa e as manipulações das amplitudes contendo divergências sejam capazes de manter válido o conteúdo de simetria da teoria, materializado através de relações bem definidas ou identidades envolvendo funções de Green e relacionando amplitudes em diferentes ordens de teoria de perturbações.

Não há dúvidas de que as relações de simetria, que são consequências diretas do conteúdo de simetria da lagrangiana, desempenham um papel decisivo para que possamos dar sentido às teorias quânticas de campos, na versão perturbativa dentro do conceito de renormalizabilidade. Isto por que uma completa e total redefinição da teoria, pela ab-

sorção das divergências, somente pode ser obtida se as relações de simetria reproduzirem, em ordens elevadas da teoria de perturbações, apenas um conjunto reduzido e tratável de funções de Green contendo divergências.

A verificação destas identidades, em amplitudes divergentes, sempre foi uma questão delicada já que a utilização de esquemas de regularização obscurecem alguns aspectos que podem ser decisivos. Em alguns casos certas violações de relações de simetria são atribuídas a propriedades intrínsecas das integrais divergentes, como indefinições inerentes ao cálculo, ou a impossibilidade de utilização de esquemas consistentes de regularização. Em geral, entretanto, atribui-se a manutenção das relações de simetria, ou suas violações, aos próprios métodos de regularização utilizados nos cálculos.

Como podemos ver este é um problema auto-consistente com dois aspectos bastante negativos: a dependência com métodos específicos de regularização e a existência de relações de simetria violadas durante os cálculos.

Sobre as regularizações, permanecem dúvidas se estas de fato não alteram ou escondem aspectos importantes. Existe uma ambiguidade natural na definição das partes finita e divergentes já que elas são identificadas em uma soma de termos e pelo menos uma constante permanece indefinida. Ocorre que muitas vezes a integral toda pode estar multiplicada por momentos externos e a ambiguidade na definição de uma constante pode modificar a dependência nos momentos das amplitudes. Outro ponto importante é o fato de, após a regularização, as integrais passarem a ser tratadas como finitas e conseqüentemente propriedades de integrais finitas serem utilizadas em passos intermediários que não se aplicariam às correspondentes integrais divergentes. Um eventual processo de limite, ao final, não remove necessariamente estas diferenças. Existe portanto alguma dependência nos passos intermediários dos cálculos. Não é, por outro lado, razoável que a manutenção ou a verificação das identidades envolvendo amplitudes divergentes dependam de como as integrais divergentes são transformadas em números, ainda que infinitos a rigor. Nós poderíamos esperar, em uma prescrição razoável, que as identidades fossem satisfeitas pelos coeficientes dos objetos divergentes e não pelo modo como são calculados.

A receita para a obtenção das predições físicas da teoria não pode ser feita caso-a-caso pois isto ficaria reduzido a uma pura fenomenologia. Aceitar que um procedimento seja aplicado em certas situações e negar suas conseqüências em outras não é razoável qualquer que seja a justificativa.

Parece existir um único caminho para a solução deste dilema; a construção de uma filosofia consistente para a manipulação e cálculo de amplitudes divergentes que não en-

volva modificações destas em passos intermediários, ou seja, regularização, e que possa ser aplicada sem restrições para assim podermos tratar todas as situações envolvendo divergências em TQC de um modo único.

No capítulo anterior desenvolvemos um estudo geral dos problemas associados à regularizações, especialmente voltado para o caso de teorias efetivas não-renormalizáveis. Fizemos isto guiados por três exigências razoáveis:

- a) Os resultados finais não podem adquirir comportamentos não-físicos tais como limiares complexos associados a parâmetros de regularização.
- b) O resultado final deve ser independente dos passos intermediários, isto é, deve ser unívoco.
- c) As previsões físicas da teoria não podem, de modo algum, depender de como as integrais divergentes são manipuladas (independentes do método específico de regularização).

Ao final chegamos à conclusão de que poderíamos satisfazer estas exigências adotando um conjunto de regras sucessivas razoáveis:

- 1) “Integrais divergentes dependentes dos momentos externos devem ser escritas como uma soma de integrais divergentes independentes dos momentos externos mais integrais finitas. Estas últimas não devem ser afetadas por eventuais regularizações”.
- 2) “As integrais divergentes remanescentes (obtidas pela aplicação da regra 1) devem ser reduzidas, pela adequada eliminação de bilineares do momento do “loop” do numerador, até que o conteúdo divergente esteja na forma de poucos objetos básicos: $I_{log}(m^2)$ e $I_{quad}(m^2)$ no caso discutido”.
- 3) “As quantidades indefinidas remanescentes (após a aplicação das regras 1 e 2) devem ser especificadas diretamente por ajustes fenomenológicos. A atribuição de valores para $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$ devem obedecer relações existentes entre eles, como tal:

$$\frac{\partial I_{quad}(m^2)}{\partial m^2} = I_{log}(m^2)$$

e

$$\frac{\partial I_{log}(m^2)}{\partial m^2} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left(\frac{-1}{m^2} \right).''$$

- 4) “Na presença de massas diferentes em uma amplitude divergente qualquer uma delas pode ser escolhida para a definição das quantidades divergentes básicas ou ainda pode-se optar por uma escala arbitrária λ^2 . Qualquer escolha poderá ser convertida em outra por relações de transformação:

$$\bullet I_{quad}(\lambda_1^2) = I_{quad}(\lambda_2^2) - (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) I_{log}(\lambda_2^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + \lambda_1^2 \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \right]$$

$$\bullet I_{log}(\lambda_1^2) = I_{log}(\lambda_2^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right).$$

A amplitude física não dependerá da escolha λ^2 se $I_{quad}(\lambda^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$ obedecerem à regra 3. A quantidade λ^2 desempenhará o papel de escala para a amplitude.”

Aparentemente estas regras permitem manipulações e cálculos de amplitudes contendo divergências sem a utilização de qualquer método específico de regularização. Os objetos divergentes, onde reside o conteúdo divergente da amplitude original, não necessitam ser calculados em momento algum. Embora tenhamos chegado a estas conclusões tendo como interesse teorias não-renormalizáveis, o procedimento pode ser aplicado sem restrições a teorias renormalizáveis. Isto seria de grande utilidade já que poderíamos eventualmente eliminar a necessidade de regularizações no programa de renormalização. É, entretanto, muito cedo para que esta possibilidade seja levada a sério, pois existem questões relacionadas à manipulação e cálculo de amplitudes divergentes que necessitam ser tratadas consistentemente. Estamos nos referindo às relações de simetria (Identidades de Ward) [1] e às ambiguidades associadas às possíveis escolhas (arbitrárias) para os momentos das linhas internas dos “loops”. Não está necessariamente garantido que as operações efetuadas seguindo as regras 1, 2, 3 e 4 sejam capazes de produzir automaticamente amplitudes calculadas livres de violações de relações de simetria e ambiguidades.

Em particular, na regra 2, necessitamos eliminar adequadamente os bilineares nos momentos do “loop” do numerador. O procedimento que adotamos, suportados por uma regularização, de tomar como válida a operação de integração simétrica não está livre de suspeitas, pois é, a rigor, uma operação demonstrável para integrais finitas.

Neste capítulo nós aplicaremos o procedimento delineado até aqui para a discussão de Identidades de Ward envolvendo amplitudes divergentes. Para tal seguiremos de perto o

material apresentado no capítulo 6 da ref. [2] ao longo de todo este capítulo, exceto pela seção 4.

Nós inicialmente consideramos um exemplo simples de Identidade de Ward, aquela envolvendo uma corrente vetorial e dois campos escalares na teoria para o campo escalar complexo (renormalizável) com uma simetria $U(1)$ local. Posteriormente (seção 3) aplicamos nosso procedimento ao tratamento do conhecido problema das anomalias triangulares, e mostramos que os dois problemas podem ser colocados sob o mesmo ponto de vista. Na seção 4 consideramos o problema da invariância de “gauge” do tensor de polarização do vácuo na QED sob a mesma ótica. As conclusões e discussões podem ser encontradas na seção 5.

6.2 Campo Escalar Complexo

Uma das mais simples teorias renormalizáveis é aquela envolvendo um campo escalar, a teoria $\lambda\phi^4$. A fim de construímos a situação de interesse nós consideramos o caso de campos escalares complexos com uma corrente vetorial conservada associada a uma invariância por transformação de fase global.

6.2.1 Ingredientes

A teoria que queremos é representada pela lagrangiana [2]:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - \mu^2(\phi\phi^*) - \lambda(\phi\phi^*)^2. \quad (6.1)$$

A simplicidade desta teoria renormalizável justifica sua utilização como protótipo em muitas discussões e nós faremos isto.

A lagrangiana dada em (6.1) é invariante por transformações do tipo $U(1)$:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha.T}\phi, \quad (6.2)$$

onde $\alpha \neq \alpha(x)$ é um parâmetro e T o operador, que aqui é um número usual. Esta invariância dá origem a uma corrente vetorial conservada;

$$J_\mu = i[(\partial_\mu\phi^*)\phi - (\partial_\mu\phi)\phi^*]. \quad (6.3)$$

Os campos complexos por sua vez satisfazem às relações canônicas de comutação:

$$[\partial_0 \phi^\dagger(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (6.4)$$

e isto leva aos comutadores envolvendo os campos e as correntes:

$$\begin{aligned} \bullet [J_0(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= i[\partial_0 \phi^\dagger(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)]\phi(\vec{x}, t) \\ &= \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\phi(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\bullet [J_0(\vec{x}, t), \phi^\dagger(\vec{x}', t)] = -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\phi^\dagger(\vec{x}, t). \quad (6.6)$$

Com estes elementos podemos agora considerar o processo envolvendo uma corrente vetorial e dois campos escalares e a relação de simetria correspondente.

6.2.2 Identidade de Ward para a Corrente Vetorial

Consideremos agora a função de Green correspondente ao processo representado pela figura abaixo:

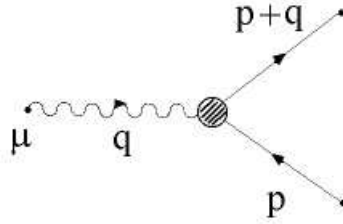


Figura 6.1: Corrente vetorial acoplada a dois campos escalares.

$$G_\mu(p, q) = \int d^4x d^4y e^{(-iq \cdot x - iq \cdot y)} \langle 0 | T(J_\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle. \quad (6.7)$$

Para obter uma relação de simetria, nos utilizamos do fato de a corrente ter uma quadridivergência nula e das manipulações usuais da álgebra de correntes [3];

$$\partial_x^\mu (T(J_\mu(x) O(y))) = T(\partial^\mu J_\mu(x) O(y)) + [J_0(x), O(y)] \delta(x_0 - y_0). \quad (6.8)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
q_\mu G^\mu(p, q) &= -i \int d^4x d^4y e^{(-iq \cdot x - ip \cdot y)} \partial_\mu \langle 0 | T(J_\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle \\
&= -i \int d^4x d^4y e^{(-iq \cdot x - ip \cdot y)} \left\{ \langle 0 | T(\partial_\mu J_\mu(x) \phi(y) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle \right. \\
&\quad + \langle 0 | T([J_0(x), \phi(y)] \delta(x_0 - y_0) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle \\
&\quad \left. + \langle 0 | T([J_0(x), \phi^\dagger(0)] \delta(x_0) \phi(y)) | 0 \rangle \right\}. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

O primeiro termo se anula . Pelo uso das relações de comutação eqs.(6.5) e (6.6) os outros dois termos podem ser simplificados:

$$\begin{aligned}
q_\mu G^\mu(p, q) &= -i \int d^4x d^4y e^{-i(q+p)x} \langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle \\
&\quad + i \int d^4x d^4y e^{-ipy} \langle 0 | T(\phi(0)^\dagger \phi(y)) | 0 \rangle . \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Os dois termos do lado direito são agora identificados como os propagadores do campo escalar [2];

$$\Delta(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle, \tag{6.11}$$

e então podemos escrever:

$$-iq_\mu G^\mu(p, q) = \Delta(p + q) - \Delta(p). \tag{6.12}$$

que é a Identidade de Ward procurada. Ela pode ainda ser reescrita em outra forma:

$$-iq_\mu G^\mu(p, q) = [(p + q)^2 - \mu^2]^{-1} - [p^2 - \mu^2]^{-1}. \tag{6.13}$$

É importante notar que este resultado foi obtido tendo como ingredientes as relações de comutação canônicas para os campos e o fato da corrente vetorial, que representa o conteúdo de simetria da teoria, ser conservada. A identidade deve portanto ser satisfeita em qualquer ordem em teoria de perturbações. Vejamos isto então nos níveis árvore e um “loop”.

Antes de proceder aos cálculos, é conveniente definir , a partir de $G_\mu(p, q)$, outro objeto;

$$\Gamma_\mu(p, q) = [i\Delta(p + q)]^{-1} G_\mu(p, q) [i\Delta(p)]^{-1}, \tag{6.14}$$

onde $[\Delta(p)]^{-1}$ é o inverso do propagador e é dado por:

$$\Delta(p)^{-1} = p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p^2). \quad (6.15)$$

Depois de renormalizado, $\tilde{\Sigma}(p^2)$ é a parte finita (correção) no nível considerado. Com isto a Identidade de Ward toma a forma:

$$iq_\mu \Gamma^\mu(p, q) = [(p+q)^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p+q)] - [p^2 - \mu^2 - \tilde{\Sigma}(p)]. \quad (6.16)$$

Uma observação importante é que, no nível um “loop”, as contribuições $\tilde{\Sigma}(p+q)$ e $\tilde{\Sigma}(p)$ são nulas já que a auto-energia não depende dos momentos externos [4].

6.2.3 Nível Árvore

A primeira contribuição para o processo considerado, na solução perturbativa, vem do nível árvore do acoplamento entre a corrente vetorial com dois campos escalares;

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = J_\mu A^\mu(\phi, \phi^*), \quad (6.17)$$

ou seja:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = iJ_\mu [(\partial_\mu \phi^*)\phi + (\partial_\mu \phi)\phi^*], \quad (6.18)$$

cujos vértice é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{i\delta^3 \mathcal{L}_{\mathcal{I}}}{\delta J_\mu \delta \phi \delta \phi^*} &= i^2 [i(p+q)_\mu + ip_\mu] \\ &= -i(2p+q)_\mu. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Então, a contribuição do diagrama árvore, fica:

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{\acute{a}rv.}(p, q) = iq^\mu [-i(2p+q)_\mu] = 2p \cdot q + q^2 = (p+q)^2 - p^2, \quad (6.20)$$

ou seja:

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{\acute{a}rv.}(p, q) = [(p+q)^2 - \mu^2] - [p^2 - \mu^2]. \quad (6.21)$$

Como estamos interessados no nível um “loop”, este já é o resultado correspondente à Identidade de Ward pois, como já registramos, não há contribuição para a parte finita da

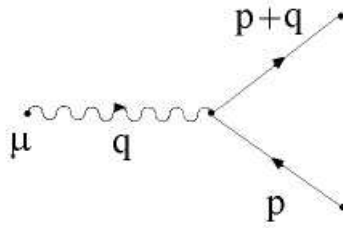


Figura 6.2: Contribuição de nível árvore.

auto-energia neste nível de aproximação. Isto quer dizer que todas as contribuições vindas dos diagramas contendo “loops” devem se cancelar para que a identidade seja mantida.

6.2.4 Nível Um “loop”

Nós agora consideramos as contribuições vindas de diagramas contendo “loops”. Inicialmente aqueles contendo “loops” nas linhas dos campos escalares (auto-energias).

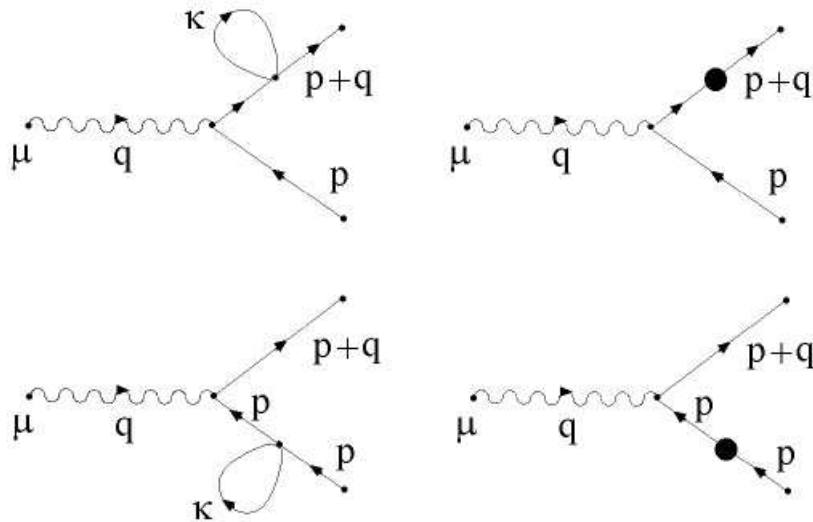


Figura 6.3: Contribuições de nível um “loop” e seus contratermos [4].

Para os dois primeiros diagramas, da figura acima, nós escrevemos:

$$iq^\mu \Gamma_\mu(p, q) = iq^\mu \left\{ (-i)(2p + q)_\mu \frac{i}{[(p + q)^2 - \mu^2]} [\Sigma(p + q) - \Sigma(0)] \right\}, \quad (6.22)$$

onde:

$$-i\Sigma(p+q) = -i\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - \mu^2)}, \quad (6.23)$$

logo temos que:

$$\Sigma(p+q) - \Sigma(0) = \tilde{\Sigma}(p+q) = Zero. \quad (6.24)$$

Como já havíamos adiantado. Isto implica igualmente na anulação das contribuições dos outros dois diagramas da fig.(6.3).

Resta-nos, deste modo, apenas a contribuição do diagrama um “loop” no vértice, representado na fig. 6.4, que é linearmente divergente.

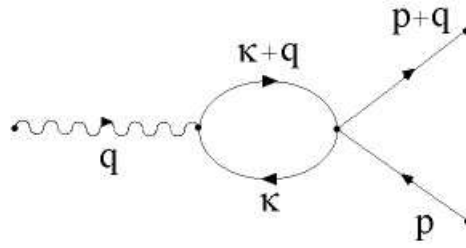


Figura 6.4: Contribuições de nível um “loop” para o vértice da interação.

A avaliação do diagrama nos fornece:

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{1\text{“loop”}}(p, q) = iq^\mu \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (i\lambda) \frac{i}{(k^2 - \mu^2)} (-i)(2k+q)_\mu \frac{i}{[(k+q)^2 - \mu^2]} \right\}, \quad (6.25)$$

ou ainda:

$$iq^\mu \Gamma_\mu^{1\text{“loop”}}(p, q) = -i\lambda \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q + q^2)}{(k^2 - \mu^2)[(p+q)^2 - \mu^2]} \right\}. \quad (6.26)$$

Temos portanto, a primeira vista, a contribuição de duas integrais divergentes: uma linearmente divergente e outra logaritmicamente divergente. Em princípio as integrais têm uma parte finita, função dos momentos externos, e uma parte divergente que deveria ser eliminada por alguma renormalização. Independentemente destes detalhes, a observação importante, que nos interessa diretamente, é o fato de que se a integral:

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot q + q^2)}{(k^2 - \mu^2)[(k+q)^2 - \mu^2]} \quad (6.27)$$

for diferente de zero a relação de simetria será violada. Vamos então calcular a integral I, a fim de verificar isto.

É interessante notar que a integral acima pode ainda ser escrita como:

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+q)^2 - \mu^2]}. \quad (6.28)$$

Poderíamos então ser tentados a efetuar um “shift” na segunda integral, para $k' = k+q$, o que cancelaria a diferença. Entretanto o caráter divergente da integral nos obrigaria a compensar o “shift” por um termo de superfície. A diferença então, por este raciocínio simples, seria não-nula e igual ao termo de superfície.

6.2.5 Manipulações e Cálculos das Integrais de Feynman Divergentes

O fato da integral eq.(6.27) ser divergente, nos impede de calculá-la diretamente. O modo convencional, como sabemos, seria lançar mão de algum procedimento de regularização. Nós, entretanto, vamos adotar neste ponto a filosofia introduzida no capítulo anterior: manipular a expressão utilizando apenas identidades ao nível do integrando na presença implícita de uma eventual regularização;

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q + q^2)}{(k^2 - \mu^2)[(k+q)^2 - \mu^2]} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(2k \cdot q + q^2)}{(k^2 - \mu^2)^2} - \frac{(2k \cdot q + q^2)^2}{(k^2 - \mu^2)^2[(k+q)^2 - \mu^2]} \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q)}{(k^2 - \mu^2)^2} + \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q^2)}{(k^2 - \mu^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q)^2}{(k^2 - \mu^2)^3} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q)q^2}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q^4)}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q + q^2)^3}{(k^2 - \mu^2)^3[(k+q)^2 - \mu^2]}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Nós então observamos que as duas últimas são finitas e podem ser integradas diretamente. O resultado mostra um cancelamento mútuo;

$$- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q^4)}{(k^2 - \mu^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q + q^2)^3}{(k^2 - \mu^2)^3[(k+q)^2 - \mu^2]} = Zero. \quad (6.30)$$

Por sua vez, das integrais remanescentes duas são nulas por simetria; a primeira e a quarta;

$$\bullet 2q_\mu \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_\mu)}{(k^2 - \mu^2)^2} = 0 \quad (6.31)$$

$$\bullet -2q^2 q_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_\mu)}{(k^2 - \mu^2)^3} = 0. \quad (6.32)$$

Isto exige apenas que nossa eventual regularização seja par no momento do “loop”. Com isto restam apenas duas integrais divergentes:

$$\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q + q^2)}{(k^2 - \mu^2)[(k+q)^2 - \mu^2]} = q_\mu q_\nu \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \right\}. \quad (6.33)$$

A primeira já está reduzida à divergência logarítmica básica. A segunda possui um bilinear no momento do “loop” e necessita ser reduzida. Mas o que interessa de fato é que a Identidade de Ward somente será mantida se esta redução for tal que:

$$\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^3} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2}. \quad (6.34)$$

Notemos que esta deve ser uma relação entre integrais divergentes, uma relação puramente matemática, já que até aqui não foi utilizada nenhuma regularização específica. Ela deve ser válida em qualquer esquema adequado de regularização.

Nós temos dois pontos de vista conflitantes para este resultado:

- Regularização Dimensional

Neste caso nós escrevemos a integral em 2ω -dimensões:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{(2k \cdot q + q^2)}{(k^2 - \mu^2)[(k+q)^2 - \mu^2]} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} - \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+q)^2 - \mu^2]}. \quad (6.35)$$

Uma vez que é permitido efetuar “shifts” na integral regularizada (2ω é contínuo e complexo), na segunda do lado direito pode ser feita a transformação: $k' = k + q$ e esta cancela exatamente a primeira, Isto não é surpresa já que a condição que

obtivemos para a satisfação da Identidade de Ward é satisfeita em 2ω -dimensões [5];

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}. \quad (6.36)$$

Assim em Regularização Dimensional obteríamos que a Identidade de Ward seria automaticamente mantida. É importante notar que não é necessário a Regularização Dimensional em si, mas apenas o resultado fornecido pela continuação analítica em ω para a diferença das duas integrais acima.

- Regularizações em Quatro Dimensões

Neste caso nós escreveríamos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 g_{\mu\nu})}{(k^2 - \mu^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\mu^2 g_{\mu\nu})}{(k^2 - \mu^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2), \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde $G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)$ é uma distribuição que torna a integral convergente. Como tal, se utilizássemos o método de Pauli-Villars [6],

$$G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = \left(\frac{\mu^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right). \quad (6.38)$$

Deste modo:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} \right] G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2). \quad (6.39)$$

A integral do lado direito, sendo finita, não dependerá de Λ^2 quando tomarmos $\Lambda^2 \gg \mu^2$ (condição de regularização). Assim em qualquer regularização em quatro dimensões onde $G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)$ for normalizada tal que:

$$G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = 1 \quad \text{para } \Lambda^2 \rightarrow \infty, \quad (6.40)$$

ficaremos com:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{(4k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^3} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} \right] &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (6.41)$$

e obteríamos para a Identidade de Ward:

$$iq_\mu \Gamma_{1-loop}^\mu(p, q) = -i\lambda \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\frac{1}{2} q^2 \right] \right\}, \quad (6.42)$$

que seria então violada. As únicas operações realizadas foram: integração simétrica ($k_\mu k_\nu \rightarrow \frac{k^2 g_{\mu\nu}}{4}$ sob o sinal de integração), e solução de uma integral finita; lado direito da eq.(6.41).

Uma observação adicional muito importante está no fato de a integral original ter grau superficial de divergência linear. Assim se decidíssemos efetuar “shifts” seríamos forçados a introduzir um termo de superfície compensatório [7]. O valor deste termo corresponderia exatamente ao termo de violação obtido acima. Isto pode ser visto diretamente através da identidade:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^2} \right) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} - \frac{(4k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^3} \right], \quad (6.43)$$

o lado esquerdo pode ser convertido em um termo de superfície pelo teorema de Gauss;

$$\Delta S_{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} - \frac{(4k_\mu k_\nu)}{(k^2 - \mu^2)^3} \right], \quad (6.44)$$

o que mostra a equivalência dos dois argumentos: regularização ou termos de superfície.

Deste modo se nós acreditamos que a Teoria Quântica de Campos é capaz de manter válidas as relações de simetria, que são consequências diretas das simetrias implementadas na lagrangiana da teoria, que gera as amplitudes, na expansão perturbativa, devemos acreditar que a relação (6.34) seja válida, já que apenas identidades

foram utilizadas para que esta condição fosse obtida. O resultado necessário é essencialmente matemático e não pode haver dois resultados corretos. A continuação analítica (Regularização Dimensional) nos fornece o resultado consistente. Por outro lado regularizações em quatro dimensões nos levam a uma violação da relação de simetria cujo valor é igual ao termo de superfície envolvido na integral linearmente divergente. Como então podemos entender esta discordância?

Não é difícil de entender por que integrais divergentes regularizadas podem discordar exatamente pelo termo de superfície. Quando tornamos as integrais divergentes finitas, pela regularização, tornam-se permitidas operações válidas para integrais finitas nos passos seguintes, que não necessariamente seriam válidas para a correspondente não-regularizada (divergente). Quando ao final tomamos o limite que removeria a regularização ($\Lambda^2 \rightarrow \infty$) sobram exatamente as diferenças entre as integrais divergentes e regularizadas frente às operações efetuadas; os termos de superfície. Assim ao final o resultado correto é obtido quando retiramos estes termos.

Finalmente, estes resultados nos indicam que a adoção de outros rótulos para os momentos das linhas internas deve modificar apenas o coeficiente da diferença das integrais. Assim se a diferença das integrais for admitida não-nula a amplitude será adicionalmente ambígua. Este problema será detalhadamente estudado nos capítulos posteriores.

6.2.6 Violação da Relação de Simetria

Nós construímos, fundamentados nas relações canônicas de comutação para os campos e no conteúdo de simetria da teoria, para campos escalares complexos interagentes, uma Identidade de Ward. Em seguida calculamos as contribuições dos diagramas árvore e um “loop”. Manipulando algebricamente os integrandos das integrais divergentes, sem a utilização de um método específico de regularização, a condição da manutenção da Identidade de Ward foi colocada na forma de uma diferença de duas integrais logaritmicamente divergentes. A diferença é automaticamente nula no contexto da integração dimensional (contínua e complexa), resultados que formam a base do método de Regularização Dimensional. A mesma diferença é entretanto não-nula e igual ao termo de superfície característico do grau de divergência (superficial) da amplitude original frente a eventuais “shifts”.

A apreciação deste resultado de forma clara e transparente foi possível somente pela

estratégia utilizada por nós que não faz uso explícito de regularizações.

Caso a Regularização Dimensional não pudesse ser utilizada em um tratamento convencional, seríamos levados à conclusão de que a Identidade de Ward é violada. O valor da violação, em uma explicação tradicional, poderia ser atribuído ao caráter ambíguo de uma amplitude (superficialmente) linearmente divergente. A escolha adequada de um parâmetro arbitrário poderia recuperar a Identidade de Ward através da adoção de um “termo de anomalia”. O valor deste termo não depende da massa e estaria presente na teoria correspondente para campos escalares sem massa. Vamos agora considerar um problema cuja explicação tradicional corresponde à discussão acima e tratá-lo sem a utilização de regularizações; as violações de relações de simetria em amplitudes triangulares na eletrodinâmica quântica quiral.

6.3 QED; Pseudo-amplitudes triangulares

Os problemas envolvendo violações de relações de simetria em cálculos perturbativos não são, de modo algum, desconhecidos, ainda que o caso apresentado na seção 1 não costume figurar entre estes. Ao menos uma classe bem estabelecida e conhecida tem um lugar privilegiado nas discussões envolvendo a associação entre renormalização (divergências em TQC) e simetrias; são as conhecidas violações envolvendo amplitudes (superficialmente) linearmente divergentes contendo pseudo-quantidades (a matriz γ_5 [8]). A importância destas questões reside no fato da renormalizabilidade depender crucialmente das relações de simetria entre as funções de Green da teoria. A verificação destas identidades, quando estão envolvidas amplitudes divergentes, é feita no contexto de algum método de regularização. O mais aceito e utilizado destes, a Regularização Dimensional, fica impossibilitado já que não há como construir um objeto equivalente a matriz γ_5 fora da dimensão física $n = 4$ [9]. As razões para o surgimento do termo “anômalo” são comumente atribuídas ao fato de existirem integrais linearmente divergentes no cálculo e que estas possuem uma indefinição inerente [10]. Isto vem da impossibilidade de efetuarmos “shifts” impunemente em integrais que divergem na dimensão física. Para compensar isto devemos incluir um “termo de superfície” ao final do cálculo e é este termo que gera a anomalia no tratamento convencional. Nós trataremos agora o problema das anomalias triangulares sem que nenhum destes ingredientes obscuros e complicados seja necessário: regularização, “shifts”, ambiguidades ou termos de superfície. Vamos utilizar, propositalmente, os mesmos passos da discussão do problema simples considerado na seção

2.

6.3.1 Ingredientes

Consideremos uma teoria contendo um férmion massivo de spin 1/2. Temos então presentes as correntes:

$$\begin{cases} V_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \\ A_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \\ P(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \end{cases} \quad (6.45)$$

onde $\psi(x)$ é o campo de spin 1/2 massivo. Nós temos então que :

$$\begin{cases} \partial^\mu V_\mu(x) = 0 \\ \partial^\mu A_\mu(x) = 2imP(x), \end{cases} \quad (6.46)$$

e ainda o comutador envolvendo as correntes;

$$[V_0(x), A_0(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0. \quad (6.47)$$

Por outro lado com as correntes $V_\mu(x)$, $A_\mu(x)$ e $P(x)$ podemos construir as funções de Green de três pontos:

$$\bullet T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \langle 0|T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)A_\lambda(0))|0 \rangle \quad (6.48)$$

$$\bullet T_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \langle 0|T(V_\mu(x_1)V_\nu(x_2)P_0(0))|0 \rangle. \quad (6.49)$$

Com estes ingredientes e com as técnicas elementares da álgebra de correntes, podemos obter algumas relações de simetria (Identidades de Ward).

6.3.2 Identidades de Ward

Através da utilização das expressões para as divergências das correntes vetorial e axial-vetor mais as relações de comutação entre as correntes e da eq.(6.8) para a divergência do produto ordenado, podemos obter as seguintes Identidades de Ward [11][3]:

$$\bullet k_1^\mu T_{\mu\lambda\nu} = k_2^\nu T_{\mu\lambda\nu} = 0 \quad (6.50)$$

$$\bullet q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu}. \quad (6.51)$$

Estas identidades podem ser utilizadas para o estudo de processos físicos como tal o decaimento de uma partícula pseudo-vetorial em dois fótons ($T_{\lambda\mu\nu}$) ou uma pseudo-escalar em dois fótons ($T_{\mu\nu}$). Vamos então considerar estes processos e calcular as contribuições um “loop” e verificar as Identidades de Ward dentro do nosso tratamento.

Consideremos agora os diagramas um “loop” correspondentes a $T_{\lambda\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. Inicialmente aquele conectando a corrente pseudo-escalar a duas correntes vetoriais, como mostrado na fig. 6.5.

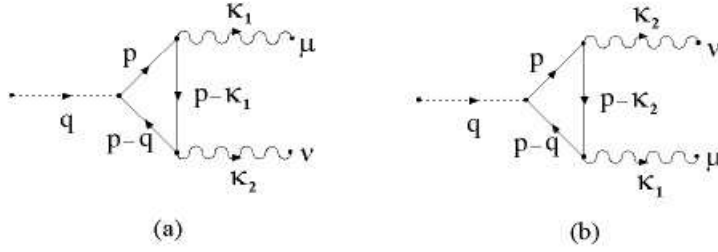


Figura 6.5: Diagramas contribuindo para a amplitude $T_{\mu\nu}$ “direto”, (a) e “cruzado”, (b).

A avaliação dos diagramas nos fornece [2]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p} - \not{q}) - m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p} - \not{k}_1) - m]} \gamma_\mu \right] \right. \\ &+ \left. Tr \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p} - \not{q}) - m]} \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p} - \not{k}_2) - m]} \gamma_\nu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Da mesma forma, aqueles conectando a corrente axial-vetor a duas correntes vetoriais, como mostrado na fig.6.6, nos fornecem:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu} &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-1) \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p} - \not{q}) - m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p} - \not{k}_1) - m]} \gamma_\mu \right] \right. \\ &+ \left. Tr \left[\frac{i}{\not{p} - m} \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p} - \not{q}) - m]} \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p} - \not{k}_2) - m]} \gamma_\nu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Vamos então utilizar estas expressões para $T_{\mu\nu}$ e $T_{\lambda\mu\nu}$ e verificar as Identidades de Ward pretendidas.

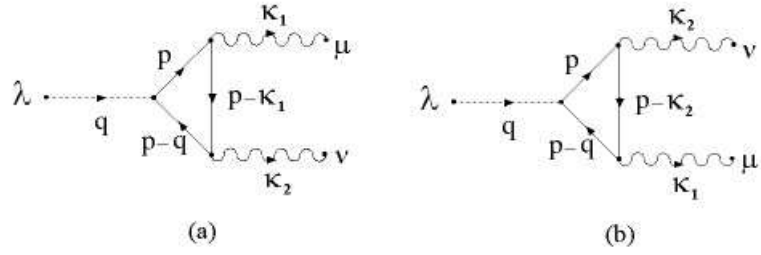


Figura 6.6: Diagramas contribuindo para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}$.

6.3.3 Identidade $q^\lambda T_{\lambda\nu\mu} = 2mT_{\nu\mu}$

Verifiquemos inicialmente a identidade que relaciona as duas amplitudes. Tomando a divergência da corrente axial (contraindo com o momento q^λ) obtemos inicialmente:

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \not{q} \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} \gamma_\mu \right] + Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \not{q} \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] \right\}. \quad (6.54)$$

Uma apropriada e conveniente manipulação é utilizar a relação:

$$q\gamma_5 = \gamma_5(\not{p}-\not{q}-m) + (\not{p}-m)\gamma_5 + 2m\gamma_5, \quad (6.55)$$

no interior do traço, com o que obtemos:

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = (-i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 i \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} \gamma_\mu \right] + Tr \left[i \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} \gamma_\mu \right] + Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 i \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] + Tr \left[i \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] + Tr \left[2m \frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} \gamma_\mu \right] + Tr \left[2m \frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] \right\}. \quad (6.56)$$

Nos dois últimos termos podemos identificar

$$2mT_{\mu\nu}.$$

Com isto podemos escrever a relação:

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu} + I_1^{\mu\nu} + I_2^{\mu\nu} + I_3^{\mu\nu} + I_4^{\mu\nu}, \quad (6.57)$$

onde nós introduzimos as definições:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} \gamma_\mu \right] \right\} \\ I_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] \right\} \\ I_3^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} \gamma_\mu \right] \right\} \\ I_4^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\mu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (6.58)$$

Notemos que $I_1^{\mu\nu}(k_1) = I_2^{\nu\mu}(k_2)$ e $I_3^{\mu\nu}(q, k_1) = I_4^{\nu\mu}(q, k_2)$.

Vamos agora considerar cada uma das integrais acima separadamente. Sabemos que a manutenção da Identidade de Ward depende de a soma das integrais $I_1^{\mu\nu} + I_2^{\mu\nu} + I_3^{\mu\nu} + I_4^{\mu\nu}$ ser identicamente nula. A situação aqui é semelhante àquela, ao final da seção 1.4, que consideramos. Existe um possível “shift” em $I_3^{\mu\nu}$ e $I_4^{\mu\nu}$ de modo a obtermos um cancelamento com $I_1^{\mu\nu}$ e $I_2^{\mu\nu}$. Vamos entretanto manipular e calcular as integrais do modo que fizemos na seção anterior; sem “shifts” ou regularizações.

Manipulação e cálculo de $I_1^{\mu\nu}$ e $I_2^{\mu\nu}$

Consideremos inicialmente a integral $I_1^{\mu\nu}$. Primeiro escrevemos:

$$I_1^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i^2 (\not{p} + m) \gamma_5 \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma_\mu}{(p^2 - m^2)[(p - k_1)^2 - m^2]} \right]. \quad (6.59)$$

O numerador fica então [12]:

$$\begin{aligned} Tr [(\not{p} + m) \gamma_5 \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma_\mu] &= Tr [\not{p} \gamma_5 \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_1) \gamma_\mu + \\ &\quad + \not{p} \gamma_5 \gamma_\nu m \gamma_\mu + m \gamma_5 \gamma_\nu (\not{k}_1) \gamma_\mu + m \gamma_5 \gamma_\nu m \gamma_\mu] \\ &= (-) p_\alpha k_{1\beta} Tr [\gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu] \\ &= p_\alpha k_{1\beta} Tr [\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu] \\ &= 4i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha k_{1\beta}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Com isso a integral I_1 fica:

$$I_1^{\mu\nu} = -4i\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} k_{1\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha}{(p^2 - m^2)[(p - k_1)^2 - m^2]}. \quad (6.61)$$

A integral é linearmente divergente. Nós podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha}{(p^2 - m^2)[(p - k_1)^2 - m^2]} &= \int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{p_\alpha}{(p^2 - m^2)^2} - \frac{p_\alpha(k_1^2 - 2p \cdot k_1)}{(p^2 - m^2)^2[(p - k_1)^2 - m^2]} \right] \\ &= \int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha(2p \cdot k_1 - k_1^2)}{(p^2 - m^2)^3} \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha(k_1^2 - 2p \cdot k_1)^2}{(p^2 - m^2)^3[(p - k_1)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

A segunda integral pode ser calculada diretamente e fornece:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha(k_1^2 - 2p \cdot k_1)^2}{(p^2 - m^2)^3[(p - k_1)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) k_{1\alpha} [(-)Z_1(m^2, m^2, k_1^2; m^2)]. \quad (6.63)$$

Isto claramente nos leva a:

$$4i\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} k_{1\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha}{(p^2 - m^2)[(p - k_1)^2 - m^2]} = 0, \quad (6.64)$$

já que:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} k_{1\beta} k_{1\alpha} = 0. \quad (6.65)$$

Com isso:

$$I_1^{\mu\nu} = I_2^{\mu\nu} = 0. \quad (6.66)$$

Este resultado poderia ter sido adiantado por simples inspeção da expressão de $I_1^{\mu\nu}$ ou $I_2^{\mu\nu}$. A presença da matriz γ_5 gera o tensor totalmente antissimétrico $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ após a tomada do traço. Nas integrais existe apenas um quadri vetor disponível o que torna impossível construir um objeto antissimétrico nos índices contraídos α e β .

Manipulação e Cálculo de $I_3^{\mu\nu}$ e $I_4^{\mu\nu}$

Agora tomemos a integral $I_3^{\mu\nu}$. Inicialmente nós a escrevemos como:

$$I_3^{\mu\nu} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i^2(\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma_5\gamma_\mu(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\nu}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]} \right] \right\}. \quad (6.67)$$

O numerador fica:

$$\begin{aligned} Tr[(\not{p} - \not{k}_1 + m)\gamma_5\gamma_\mu(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\nu] &= Tr[(\not{p} - \not{k}_1)\gamma_5\gamma_\mu(\not{p} - \not{q})\gamma_\nu + (\not{p} - \not{k}_1)\gamma_5\gamma_\mu m\gamma_\nu \\ &\quad + m\gamma_5\gamma_\mu(\not{p} - \not{q})\gamma_\nu + m\gamma_5\gamma_\mu m\gamma_\nu] \\ &= (p - k_1)_\alpha (p - q)_\beta Tr[\gamma_\alpha\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu] \\ &= (-)\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu}(-p_\alpha q_\beta - p_\beta k_{1\alpha} + k_{1\alpha} q_\beta). \end{aligned} \quad (6.68)$$

Portanto ficamos com:

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu} &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\beta}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]} \\ &\quad -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\beta \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]} \\ &\quad +4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\beta k_{1\alpha} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Todas as integrais obtidas são divergentes. Vamos então manipulá-las e calculá-las segundo a estratégia que estamos seguindo.

Inicialmente tomamos aquela logicamente divergente, e a colocamos na forma:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]} &= \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-)(q^2 - 2q \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p-q)^2 - m^2]} \\ &\quad + \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-)(k_1^2 - 2k_1 \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p-k_1)^2 - m^2]} \\ &\quad + \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - 2q \cdot p)(k_1^2 - 2k_1 \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

A primeira é divergente e será mantida nesta forma. As restantes podem ser integradas diretamente fornecendo os resultados:

$$i) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-)(q^2 - 2q \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p - q)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \quad (6.71)$$

$$ii) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-)(k_1^2 - 2k_1 \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p - k_1)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(m^2, m^2, k_1^2; m^2)] \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} iii) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 - 2k_1 \cdot p)(q^2 - 2q \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p - q)^2 - m^2][(p - k_1)^2 - m^2]} &= \\ &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) + Z_0(m^2, m^2, k_1^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, (q - k_1)^2; m^2)]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Com isso obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p - q)^2 - m^2][(p - k_1)^2 - m^2]} &= \\ \int_{\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(m^2, m^2, (q - k_1)^2; m^2)]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Agora repetimos o procedimento para a integral linearmente divergente. Inicialmente reescrevemos como:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\alpha}}{[(p - q)^2 - m^2][(p - k_1)^2 - m^2]} &= \\ = \int_{\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p_{\alpha}}{(p^2 - m^2)^2} - \frac{p_{\alpha}(q^2 - 2q \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2[(p - q)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_{\alpha}(k_1^2 - 2p \cdot k_1)}{(p^2 - m^2)^2[(p - k_1)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_{\alpha}(q^2 - 2q \cdot p)(k_1^2 - 2p \cdot k_1)}{(p^2 - m^2)^2[(p - k_1)^2 - m^2][(p - q)^2 - m^2]} \right\} \\ = \int_{\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(2q \cdot p)p_{\alpha}}{(p^2 - m^2)^3} + \int_{\Lambda} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(2k_1 \cdot p)p_{\alpha}}{(p^2 - m^2)^3} \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\alpha}(q^2 - 2q \cdot p)^2}{(p^2 - m^2)^3[(p - q)^2 - m^2]} \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\alpha}(k_1^2 - 2p \cdot k_1)^2}{(p^2 - m^2)^3[(p - k_1)^2 - m^2]} \end{aligned}$$

$$+ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha (q^2 - 2q \cdot p) (k_1^2 - 2p \cdot k_1)}{(p^2 - m^2)^2 [(p - k_1)^2 - m^2] [(p - q)^2 - m^2]}.$$
(6.75)

As três últimas integrais são finitas e a integração nos fornece os resultados:

$$i) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha (q^2 - 2q \cdot p)^2}{(p^2 - m^2)^3 [(p - q)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) q_\alpha [(-)Z_1(m^2, m^2, q^2; m^2)]$$
(6.76)

$$ii) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha (k_1^2 - 2k_1 \cdot p)^2}{(p^2 - m^2)^3 [(p - k_1)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_1(m^2, m^2, q^2; m^2) k_{1\alpha}].$$
(6.77)

$$iii) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha (k_1^2 - 2k_1 \cdot p) (q^2 - 2q \cdot p)}{(p^2 - m^2)^2 [(p - q)^2 - m^2] [(p - k_1)^2 - m^2]} =$$

$$\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [q_\alpha Z_1(m^2, m^2, q^2; m^2) + k_{1\alpha} Z_1(m^2, m^2, k_1^2; m^2)$$

$$- (q_\alpha + k_{1\alpha}) Z_1(m^2, m^2, (q - k_1)^2; m^2)].$$
(6.78)

Quanto àquelas divergentes nós as manteremos intactas. Assim:

$$\int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha}{[(p - q)^2 - m^2] [(p - k_1)^2 - m^2]} =$$

$$= \left\{ \frac{q_\xi}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\xi p_\alpha}{(p^2 - m^2)^3} + \frac{k_{1\xi}}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\xi p_\alpha}{(p^2 - m^2)^3} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)(q + k_1)_\alpha Z_1(m^2, m^2, (q - k_1)^2; m^2)] \right\}$$
(6.79)

Usando os resultados eq.(6.71) e eq.(6.80), podemos escrever a integral $I_3^{\mu\nu}$ como:

$$I_3^{\mu\nu} = (-)4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} \left\{ \frac{(q_\xi + k_{1\xi})}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\xi p_\beta}{(p^2 - m^2)^3} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{(q_\beta + k_{1\beta})}{2} (-)Z_0(m^2, m^2, (q - k_1)^2; m^2) \right\}$$

$$- 4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q_\beta \left\{ \frac{(q_\xi + k_{1\xi})}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\xi p_\alpha}{(p^2 - m^2)^3} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{(q_\alpha + k_{1\alpha})}{2} (-)Z_0(m^2, m^2, (q - k_1)^2; m^2) \right\}$$

$$+4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}q_{\beta}k_{1\alpha}\left\{\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{(p^2-m^2)^2}+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)(-)Z_0(m^2,m^2,(q-k_1)^2;m^2)\right\}, \quad (6.80)$$

que fica:

$$I_3^{\mu\nu}=4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\left[\frac{q_{\beta}k_{1\xi}g_{\alpha\eta}}{2}+\frac{q_{\xi}k_{1\alpha}g_{\beta\eta}}{2}\right]\left[\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{g_{\xi\eta}}{(p^2-m^2)^2}-\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{4p_{\xi}p_{\eta}}{(p^2-m^2)^3}\right]\right\}. \quad (6.81)$$

Resta-nos agora, para completar os cálculos necessários, o resultado para a integral $I_4^{\mu\nu}$. A partir do resultado acima podemos então escrever:

$$I_4^{\mu\nu}=4i\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\left[\frac{q_{\beta}k_{2\xi}g_{\alpha\eta}}{2}+\frac{q_{\xi}k_{2\alpha}g_{\beta\eta}}{2}\right]\left[\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{g_{\xi\eta}}{(p^2-m^2)^2}-\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{4p_{\xi}p_{\eta}}{(p^2-m^2)^3}\right]. \quad (6.82)$$

Deste modo nós obtemos para a soma das integrais:

$$\begin{aligned} [I_1^{\mu\nu}+I_2^{\mu\nu}+I_3^{\mu\nu}+I_4^{\mu\nu}] &= \\ &4i\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\left[\frac{q_{\beta}(k_{1\xi}-k_{2\xi})g_{\alpha\eta}}{2}+\frac{q_{\xi}(k_{1\alpha}-k_{2\alpha})g_{\beta\eta}}{2}\right]\times \\ &\times\left[\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{g_{\xi\eta}}{(p^2-m^2)^2}-\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{4p_{\xi}p_{\eta}}{(p^2-m^2)^3}\right], \end{aligned} \quad (6.83)$$

que pode ainda ser colocada numa outra forma, com a eliminação de q em favor de k_1 e k_2 , pela utilização da relação entre os momentos externos;

$$q=k_1+k_2,$$

ou seja:

$$\begin{aligned} [I_1^{\mu\nu}+I_2^{\mu\nu}+I_3^{\mu\nu}+I_4^{\mu\nu}] &= \\ &4i\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\left[\frac{(k_{1\beta}+k_{2\beta})(k_{1\xi}-k_{2\xi})g_{\alpha\eta}}{2}+\frac{(k_{1\xi}+k_{2\xi})(k_{1\alpha}-k_{2\alpha})g_{\beta\eta}}{2}\right] \\ &\times\left[\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{g_{\xi\eta}}{(p^2-m^2)^2}-\int_{\Lambda}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{4p_{\xi}p_{\eta}}{(p^2-m^2)^3}\right]. \end{aligned} \quad (6.84)$$

É importante ressaltar a respeito do resultado acima, que foram utilizados apenas identidades ao nível do integrando, para reescrever as integrais, e cálculo de integrais finitas. As integrais divergentes foram mantidas intactas.

Nós agora observamos que a situação aqui é exatamente aquela da seção anterior onde consideramos a Identidade de Ward para a teoria $\lambda\phi^4$. A satisfação da identidade depende apenas da mesma relação entre integrais divergentes. Assim, conforme a discussão efetuada, temos duas opções:

- Integração Dimensional

Neste caso o resultado adotado deve ser aquele da eq.(6.36). A Identidade de Ward é então obtida satisfeita;

$$q_\lambda T^{\lambda\mu\nu} = 2mT^{\mu\nu}. \quad (6.85)$$

- Regularização em quatro dimensões ou termos de superfície

Neste caso o resultado adotado deve ser aquele da eq.(4.1).

Com isso a Identidade de Ward é obtida:

$$q_\lambda T^{\lambda\mu\nu} = 2mT^{\mu\nu} - \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{(4\pi^2)} k_{2\beta} k_{1\alpha}, \quad (6.86)$$

e é, portanto, violada.

Vamos então considerar as outras Identidades de Ward envolvidas.

6.3.4 Identidade $k_{1\mu}T^{\lambda\mu\nu} = k_{2\nu}T^{\lambda\mu\nu} = 0$

A fim de verificar as identidades correspondentes à conservação da corrente vetorial, repetimos o mesmo procedimento da subseção anterior. Inicialmente escrevemos:

$$\begin{aligned} k_{1\mu}T_{\lambda\mu\nu} &= (-)i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} \gamma_\nu \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_1)-m]} k_1 \right] \right. \\ &\quad \left. + Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[(\not{p}-\not{q})-m]} k_1 \frac{i}{[(\not{p}-\not{k}_2)-m]} \gamma_\nu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Então introduzimos no interior do traço a identidade:

$$\begin{aligned} k_1 &= (\not{p}-m) - [(\not{p}-\not{k}_1)-m] \\ &= [(\not{p}-\not{k}_2)-m] - [(\not{p}-\not{q})-m], \end{aligned} \quad (6.88)$$

para ficarmos com:

$$\begin{aligned}
k_{1\mu}T_{\lambda\mu\nu} = & -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[\not{p}-\not{q}]-m} \gamma_\nu i \right] \right. \\
& - Tr \left[i \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[\not{p}-\not{q}]-m} \gamma_\nu \frac{i}{[\not{p}-\not{k}_1]-m} \right] \\
& - Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_\lambda \gamma_5 i \frac{i}{[\not{p}-\not{k}_2]-m} \gamma_\nu \right] \\
& \left. + Tr \left[\frac{i}{\not{p}-m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[\not{p}-\not{q}]-m} i \gamma_\nu \right] \right\}. \tag{6.89}
\end{aligned}$$

A presença da matriz γ_5 , como vimos na secção anterior, faz com que apenas a segunda contribuição seja possivelmente não-nula. Efetuando o cálculo do traço, ficamos com:

$$\begin{aligned}
k_{1\mu}T_{\lambda\mu\nu} = & -4i\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} k_{1\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]} \\
& -4i\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} q_\alpha \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\beta}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]} \\
& +4i\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} q_\alpha k_{1\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-q)^2 - m^2][(p-k_1)^2 - m^2]}. \tag{6.90}
\end{aligned}$$

Introduzindo então os resultados correspondentes para as integrais divergentes, expressões (6.75) e (6.80), obtemos:

$$k_{1\mu}T^{\lambda\mu\nu} = 4i\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} \left[\frac{k_{1\beta}k_{2\xi}g_{\alpha\eta}}{2} + \frac{k_{2\alpha}k_{1\xi}g_{\beta\eta}}{2} \right] \left[\int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(p^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\xi p_\eta}{(p^2 - m^2)^3} \right]. \tag{6.91}$$

Por sua vez a identidade correspondente ao índice ν ficará:

$$k_{2\nu}T^{\lambda\mu\nu} = 4i\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \left[\frac{k_{2\beta}k_{1\xi}g_{\alpha\eta}}{2} + \frac{k_{1\alpha}k_{2\xi}g_{\beta\eta}}{2} \right] \left[\int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(p^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4p_\xi p_\eta}{(p^2 - m^2)^3} \right]. \tag{6.92}$$

Mais uma vez a satisfação ou não das identidades depende da mesma relação entre integrais divergentes fornecendo os resultados:

- Integração Dimensional

Neste caso temos:

$$k_{1\mu}T^{\lambda\mu\nu} = 0,$$

e também:

$$k_{2\nu}T^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

As identidades são satisfeitas assim como nos casos anteriores.

- Regularização em quatro dimensões

Neste caso a diferença entre as duas integrais é igual ao termo de superfície, fornecendo:

$$k_{1\mu}T_{\lambda\mu\nu} = (-)\frac{\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta}}{8\pi^2}k_{1\beta}k_{2\alpha}, \quad (6.93)$$

e também:

$$k_{2\nu}T^{\lambda\mu\nu} = (-)\frac{\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{(8\pi^2)}k_{1\alpha}k_{2\beta}. \quad (6.94)$$

6.3.5 Violação das Relações de Simetria

Na última seção nós efetuamos as manipulações e cálculos necessários a fim de verificar as Identidades de Ward para a amplitude $T^{\lambda\mu\nu}$. Nós utilizamos identidades ao nível do integrando para reescrever as integrais divergentes e efetuamos as integrações dos termos finitos obtidos. As condições finais obtidas deste modo dependem exclusivamente da diferença das duas integrais divergentes que já havíamos encontrado no caso da seção 2. Isto nos permite uma conclusão simples: temos duas possibilidades;

- Integração Dimensional

Adotando o resultado fornecido pela integração dimensional para a diferença de integrais todas as identidades são satisfeitas ;

$$\left\{ \begin{array}{l} q_\lambda T^{\lambda\mu\nu} = 2mT^{\mu\nu} \\ k_{1\mu}T^{\lambda\mu\nu} = 0 \\ k_{2\nu}T^{\lambda\mu\nu} = 0, \end{array} \right. \quad (6.95)$$

e não teremos portanto violação das relações de simetria nas operações efetuadas.

- Regularização em Quatro Dimensões

Neste caso a diferença das duas integrais é obtida não-nula e as identidades são todas violadas:

$$\begin{cases} q_\lambda T^{\lambda\mu\nu} = 2mT^{\mu\nu} - \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{4\pi^2} k_{2\beta} k_{1\alpha} \\ k_{1\mu} T^{\lambda\mu\nu} = (-) \frac{\varepsilon^{\lambda\nu\alpha\beta}}{8\pi^2} k_{1\beta} k_{2\alpha} \\ k_{2\nu} T^{\lambda\mu\nu} = (-) \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}}{8\pi^2} k_{1\alpha} k_{2\beta}. \end{cases} \quad (6.96)$$

Estes resultados são precisamente aqueles obtidos no tratamento convencional das anomalias triangulares pela consideração dos termos de superfície explicitamente [13]. Aqui eles surgem de um modo simples e transparente permitindo uma interpretação clara da origem destes.

Chegamos então a uma situação problemática: o tratamento dado aqui é o mesmo utilizado na seção anterior (apenas identidades até que a condição final seja obtida). Deste modo; ou todas são conservadas, ou todas são violadas. Qualquer que seja a opção temos consequências importantes para este problema. Antes de concluirmos vamos considerar outro problema envolvendo Identidades de Ward em amplitudes divergentes.

6.4 Tensor de Polarização do Vácuo na Q.E.D.

Vamos considerar agora aquele que, historicamente, talvez tenha sido o problema mais importante envolvendo relações de simetria em amplitudes físicas contendo divergências: o tensor de polarização do vácuo na Q.E.D. Este é um problema envolvendo divergências mais severas que aquelas consideradas até aqui. Para verificar a Identidade de Ward, como veremos, teremos que considerar divergências de grau cúbico. A amplitude, por sua vez, tem uma contagem de potências indicando divergência quadrática. A conservação da corrente vetorial (invariância de “gauge”) impõe duas Identidades de Ward que necessitam ser satisfeitas a fim de que a Q.E.D. possa ter uma chance de renormalizabilidade. Dada a importância que a Q.E.D. possui para a própria credibilidade da Teoria Quântica de Campos, qualquer procedimento utilizado para manipular e calcular amplitudes divergentes que não seja compatível com esta teoria fundamental não pode, evidentemente, ser aceito. Uma vez consideradas as nossas análises realizadas até aqui, pela aplicação de um procedimento idêntico para ambos os casos, podemos apenas retirar duas conclusões:

ou todas são satisfeitas ou todas são violadas, pelo mesmo mecanismo. Isto, porém, implicaria na necessidade de repensarmos a situação das anomalias neste contexto. A fim de acrescentarmos mais elementos nesta discussão trataremos o caso do tensor de polarização do vácuo e suas Identidades de Ward. A correspondente função de Green pode ser representada por [14]:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T(V_\mu(x) V_\nu(0)) | 0 \rangle . \quad (6.97)$$

A conservação da corrente vetorial nos fornece as Identidades de Ward:

$$\begin{cases} q_\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0 \\ q_\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0. \end{cases} \quad (6.98)$$

Podemos representar $\Pi_{\mu\nu}$ pelo diagrama de Feynman da fig.6.7, com duas linha fermiônicas e dois acoplamentos vetoriais.

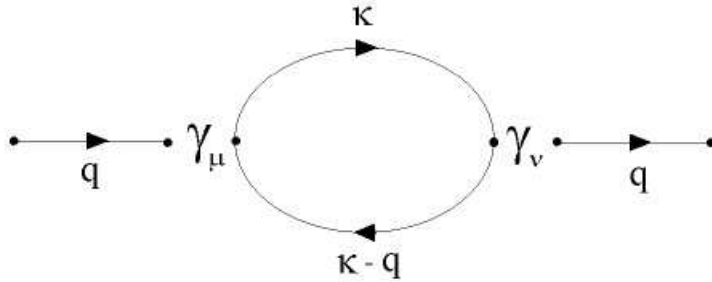


Figura 6.7: Diagrama representando a função de Green da eq.(6.100)

Então podemos escrever:

$$\Pi_{\mu\nu} = (-) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{i}{(\not{k} - m)} \gamma_\nu \frac{i}{[(k - q) - m]} \gamma_\mu \right\} . \quad (6.99)$$

Para verificar as Identidades de Ward, utilizamos os mesmos procedimentos anteriores. Inicialmente para o índice ν ;

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu} = (-) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{i}{(\not{k} - m)} \not{q} \frac{i}{[(k - q) - m]} \gamma_\mu \right\} . \quad (6.100)$$

Então utilizamos a identidade

$$q = [k - m] - [k - q - m], \quad (6.101)$$

no interior do traço, para obter:

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu} = i \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{[(k-q) - m]} \gamma_\mu \right] - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{[k - m]} \gamma_\mu \right] \right\}. \quad (6.102)$$

O cálculo dos traços nos leva a [15]:

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu} = 4i \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k-q)^2 - m^2]} - q_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2 - m^2} \right\}. \quad (6.103)$$

Assim obtivemos uma condição semelhante aos casos anteriores: a Identidade de Ward será mantida se a diferença de duas integrais divergentes for nula identicamente. Novamente poderíamos ser tentados a efetuar um “shift” na variável de integração ($k \rightarrow k' + q$) o que cancelaria de imediato a diferença. Entretanto os graus de divergência envolvidos são diferentes e os termos de superfície compensatórios aos “shifts” forneceriam uma diferença não-nula. Vamos então manipular e calcular as integrais envolvidas segundo a filosofia que adotamos.

Inicialmente podemos reescrever a integral quadraticamente divergente como:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-q)^2 - m^2]} &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &+ q_\alpha q_\beta \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\ &+ \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{q^4}{(k^2 - m^2)^3} \right. \\ &\left. + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-)[q^2 - 2q \cdot k]^3}{(k^2 - m^2)^3 [(q-k)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.104)$$

As duas últimas sendo finitas podem ser integradas diretamente. O resultado mostra um cancelamento exato:

$$\left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{q^4}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-)[q^2 - 2q \cdot k]^3}{(k^2 - m^2)^3 [(q-k)^2 - m^2]} \right\} = 0. \quad (6.105)$$

Quanto às divergentes nós as manteremos intactas.

Tomando agora a integral cubicamente divergente, podemos escrevê-la como:

$$\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k-q)^2 - m^2]} = q_\alpha g_{\mu\beta} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
& +4q_\alpha q_\beta q_\xi \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\alpha\beta} k_\mu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} + \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\alpha k_\xi k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \right\} \\
& + \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{6q^4 q_\nu k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} \right. \\
& \left. + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)[q^2 - 2q \cdot k]^4 k_\mu}{(k^2 - m^2)^4 [(q - k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (6.106)
\end{aligned}$$

Novamente as duas últimas quando integradas mostram um cancelamento mútuo:

$$\left\{ 6q^4 q_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^4} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)[q^2 - 2q \cdot k]^4 k_\mu}{(k^2 - m^2)^4 [(q - k)^2 - m^2]} \right\} = 0. \quad (6.107)$$

A Identidade de Ward pode então ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
q^\nu \Pi_{\mu\nu} &= 4i \left\{ q_\alpha \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\mu}}{(k^2 - m^2)} \right] \right. \\
& + q_\alpha q_\beta q_\mu \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta}}{(k^2 - m^2)^2} \right] \\
& \left. + 4q_\alpha q_\beta q_\xi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\alpha k_\xi k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta} k_\mu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} \right\}. \quad (6.108)
\end{aligned}$$

Nós agora temos, para satisfazer a Identidade de Ward, três relações entre integrais divergentes sendo que uma delas é aquela surgida nas discussões anteriores. Vamos colocá-la sob os dois pontos de vista conflitantes nos casos anteriores:

- Integração Dimensional

Se adotamos a continuação analítica para calcular as integrais divergentes, obtemos as relações [16]:

$$i) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^{\alpha+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} \quad (6.109)$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^{\alpha+2}} = \frac{[g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}]}{4\alpha(\alpha + 1)} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha} \quad (6.110)$$

e portanto teremos que a Identidade de Ward será satisfeita :

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu} = 0. \quad (6.111)$$

O que não é surpreendente pois nós sabemos que a Regularização Dimensional, a qual faz uso destes resultados matemáticos, é consistente neste caso. É importante notar mais uma vez que a adoção destes resultados não significa utilizarmos a regularização em si, que implica na extensão 2ω -dimensional da amplitude como um todo.

- Regularizações e Termos de Superfície

Agora nós questionamos a respeito do resultado que obteríamos, para as diferenças de integrais obtidas, pela aplicação de regularizações em quatro dimensões. Para a primeira diferença;

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^2} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\mu}}{(k^2 - m^2)} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = \\ & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 g_{\alpha\mu}}{2(k^2 - m^2)^2} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\mu}}{(k^2 - m^2)} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \\ & = (-) \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)}{2(k^2 - m^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2 G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)}{(k^2 - m^2)^2} \\ & = (-) \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} I_{quad}(m^2, \Lambda^2) + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} m^2 I_{log}(m^2, \Lambda^2). \end{aligned} \quad (6.112)$$

Onde definimos os objetos:

$$\begin{cases} I_{quad}(\mu^2, \Lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \\ I_{log}(\mu^2, \Lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2). \end{cases} \quad (6.113)$$

Para a segunda diferença, já obtivemos o resultado:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \right\} = \\ & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2 g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2). \end{aligned} \quad (6.114)$$

Para a terceira diferença:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\alpha k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^4} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta} k_\mu k_\xi}{(k^2 - m^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \right\} = \\
& = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2 - m^2)^4} \frac{[g_{\alpha\mu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\xi} + g_{\alpha\xi} g_{\beta\mu}]}{4 \cdot 3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \\
& \quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^3} \frac{[g_{\alpha\beta} g_{\mu\xi}]}{4} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) \\
& = \frac{[g_{\alpha\mu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\xi} + g_{\alpha\xi} g_{\beta\mu}]}{12} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)}{(k^2 - m^2)^2} \right. \\
& \quad \left. + 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^4}{(k^2 - m^2)^4} \right\} \\
& \quad - \frac{[g_{\alpha\beta} g_{\mu\xi}]}{4} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{G_\Lambda(k^2, \Lambda^2)}{(k^2 - m^2)^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} \right\}. \quad (6.115)
\end{aligned}$$

Voltando com os resultados na expressão para a Identidade de Ward:

$$\begin{aligned}
q^\nu \Pi_{\mu\nu} & = \frac{iq_\mu}{2} \left\{ m^2 [I_{log}(m^2, \Lambda^2)] - I_{quad}(m^2, \Lambda^2) \right\} \\
& \quad - iq_\mu q_\alpha q_\beta g_{\alpha\beta} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} \right\} \\
& \quad + \frac{4iq_\alpha q_\beta q_\xi}{12} \left\{ [g_{\alpha\mu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\xi} + g_{\alpha\xi} g_{\beta\mu}] [I_{log}(m^2, \Lambda^2)] \right. \\
& \quad \left. + 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^4}{(k^2 - m^2)^4} \right\} \\
& \quad - iq_\alpha q_\beta q_\xi [g_{\alpha\beta} g_{\mu\xi}] \left\{ I_{log}(m^2, \Lambda^2) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} \right\}. \quad (6.116)
\end{aligned}$$

Isto fornece, após uma pequena álgebra:

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu} = i \frac{q_\mu}{2} \left\{ m^2 [I_{log}(m^2, \Lambda^2)] - I_{quad}(m^2, \Lambda^2) \right\} + iq^2 q_\mu \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^4}{(k^2 - m^2)^4} \right\}, \quad (6.117)$$

que é então violada. Como antes é possível relacionar estes termos de violação aos termos de superfície que deveríamos incluir caso resolvêssemos efetuar um “shift” na eq.(6.108).

6.5 Conclusões

No capítulo anterior nós construímos uma filosofia para manipular e calcular as integrais divergentes em amplitudes físicas capaz de eliminar os inconvenientes comportamentos não-físicos associados a métodos de regularização e também de nos garantir independência do resultado final com os passos intermediários (unicidade). Os passos básicos desta filosofia consistem em manipular as integrais divergentes por identidades ao nível do integrando até que as integrais que contenham a dependência com os momentos externos sejam finitas. Estas devem então ser integradas diretamente. Nas divergentes remanescentes devem ser eliminados os bilineares, no momento de integração, do numerador, através de relações entre as integrais divergentes com o mesmo grau de divergência. Depois deste último passo as divergências da amplitude original ficam contidas em objetos básicos (I_{quad} e I_{log}) divergentes. Este procedimento nos permite evitar por completo o uso de métodos de regularização nas manipulações envolvendo amplitudes divergentes. Em teorias renormalizáveis os próprios objetos básicos são absorvidos nas renormalizações. Em teorias não-renormalizáveis estes devem ser ajustados diretamente aos observáveis físicos ao invés de algum parâmetro de regularização (“cut off”).

Entretanto neste esquema uma pergunta não foi respondida por completo: Quais são as relações adequadas entre integrais divergentes que devem ser usadas (para a redução dos bilineares do momento de integração do numerador)? Isto ficou ainda mais evidente depois de termos considerado relações de simetria impostas às amplitudes mesmo estas contendo divergências, que devem ser mantidas qualquer que seja a estratégia de manipulações e cálculos. Nós consideramos três casos, envolvendo Identidades de Ward, e aplicamos nossa estratégia. O resultado final produzido pelos cálculos e manipulações nos levam a uma conclusão surpreendente mas transparente; Ou todas as Identidades de Ward consideradas são mantidas (incluindo as anomalias e a Q.E.D.) ou todas serão violadas. Isto por que, após as manipulações iniciais, as condições para a manutenção das identidades consideradas dependem apenas de relações entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência. Para estas relações existem dois pontos de vista conflitantes. O primeiro é aquele fornecido pela integração dimensional, que estabelece a validade da relação:

$$\int \frac{d^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)(-Q^2 - H^2)^{\alpha-\omega}}, \quad (6.118)$$

para 2ω contínuo e complexo. Este resultado é utilizado pela filosofia da Regularização

Dimensional para as integrações dos momentos. Dele decorre por exemplo, a relação:

$$\int \frac{d^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^{\alpha+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha} \int \frac{d^{2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - m^2)^\alpha}, \quad (6.119)$$

a qual contribui para a manutenção das relações de simetria. Com isso se consideramos ainda a relação (6.111) válida, todas as relações de simetria são satisfeitas. O segundo ponto de vista é aquele fornecido pela consideração explícita dos termos de superfície envolvidos em possíveis “shifts” nas manipulações envolvendo integrais divergentes ou então pelo caso de regularizações em quatro dimensões, já que são completamente equivalentes. Neste caso todas as Identidades de Ward consideradas são violadas, inclusive aquela da Q.E.D. Os resultados obtidos para as Identidades de Ward associadas às amplitudes triangulares, das famosas anomalias, correspondem precisamente àqueles tradicionalmente atribuídos pelos tratamentos convencionais. Temos como tal para a relação entre integrais divergentes, crucial neste caso:

$$\begin{cases} \Delta S_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \\ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2) - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} G_\Lambda(k^2, \Lambda^2). \end{cases} \quad (6.120)$$

Aqui a equivalência dos dois resultados vem do fato de que:

$$\Delta S_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3} = \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right). \quad (6.121)$$

Isto nos leva à conclusão de que, bastaria adotar as relações fornecidas pela integração dimensional para ter, em princípio, todas as relações de simetria satisfeitas automaticamente. Para manter a possibilidade de consistência da Teoria Quântica de Campos na versão perturbativa devemos descartar procedimentos que não satisfaçam tais condições.

Neste ponto uma observação importante deve ser feita. A afirmação de que o método que utilizamos garantia a unicidade dos resultados foi construída com a utilização de propriedades para as integrais regularizadas que não parecem ser compatíveis com as exigências que encontramos neste capítulo. A questão da unicidade não estaria completamente resolvida.

É necessário, por isso, um pouco mais de cautela. Existe ainda uma questão importante e decisiva associada às amplitudes físicas contendo divergências: a possibilidade da dependência do resultado final em relação a possíveis escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas (ambiguidades). Uma vez que existe uma certa arbitrariedade na

definição destes rótulos, de modo compatível com a conservação de energia e momento. Evidentemente que nenhuma consequência física deve depender desta arbitrariedade, a fim de que a teoria possa ter poder de predição. Por outro lado para garantirmos que o procedimento que estamos construindo possa ser completamente consistente é necessário também que ele não permita amplitudes ambíguas.

No próximo capítulo nós investigaremos este aspecto para avançar na construção de uma prescrição adequada. A discussão terá também a utilidade de acrescentar novos argumentos para o problema das anomalias, uma vez que o argumento de que as amplitudes divergentes são também ambíguas é utilizado decisivamente para justificar a existência delas.

Referências Bibliográficas

- [1] J.C. Ward Phys. Rev. 78, 1824 (1950);
Y. Takahashi, Nuovo Cimento 6, 370 (1957);
J.C. Ward , Proc. Phys. Soc. 64, 54 (1951);
C. Becchi, A. Ronet and R. Stora, Comm. Math. Phys. 42, 127 (1975);
J.C. Taylor, Nucl. Phys. B33, 436 (1971);
A.A. Slavnov, Theor. and Math. Phys. 10, 99 (1972);
O.Piguet and S.P. Sorela, Algebraica Renormalização, Lecture Notes on Physics 28
Springer-Vetlag (1995);

- [2] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford Uni-
versity Press, New York (1984) ;

- [3] Adler, S.L. and Dashen, R.F. Current algebra and Aplication to Particle Physics.
Benjamin, New York (1968);
Treiman, S.L. , Jackiw, R. and Gross, D.J. Lectures on Current Algebra and its Appli-
cations, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics. North-
Holland, Amsterdam (1973);
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford Uni-
versity Press, New York (1984) .
I.S. Gerstein and R.Jackiw, Phys. Rev. 181 1955 (1969);

- [4] S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addisson-Wesley (1990) ;
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford Uni-
versity Press, New York (1984);

- [5] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) (capítulo 3);
 B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986);
 M.E. Fisher and D.S. Gaunt, Phys. Rev. 133, A 224 (1964);
 K.G. Wilson and M.E. Fisher Phys. Rev. Lett. 28, 240 (1972);
 K.G. Wilson , Phys. Rev. 07, 2911 (1973);
 K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. 12, 75 (1974);
 t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
 C. G. Bollini and J.J. Giambiagi, Phys. Lett. 40B, 566 (1972);
 G.M. Cicuta and E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. 4, 329 (1972);
 J.F. Askmore, Nuovo Cimento Lett. 4, 289 (1972);
 E.R. Speer and M.J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré A14, 1 (1971);
- [6] W.Pauli and F.Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949);
 T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984)
- [7] Treiman, S.L. , Jackiw, R. and Gross, D.J. Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
 S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987) (capítulo 12)
 T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984).
 S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, (1996) ;
 K. Huang, Quarks, Leptons and Gauge Fields, World Scientific (1992) ;
 P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
- [8] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984)
 Adler, S.L. Phys. Rev. 177, 2426 (1969);
 Bell, J.s. and Jackiw, R. Nuovo Cimento 60A, 47 (1973);
 Fijikawa, K. Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979);
 Treiman, Jackiw, Tamino and Witten, Corrent Algebra and Anomalias, Princeton Uni-

- versity Press (1985);
 Sutherland, D.G., Nucl. Phys, B2, 433 (1966);
 Veltman, M. Proc. R. Soc. A301, 107 (1967);
 Adler, S.L. Phys. Rev. 184, 1848 (1969);
 K.G. Wilson, Phys. Rev. 125, 1067 (1962).
- [9] t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. B44, 189 (1972);
 W.A. Bardeen, in Proceedings XVI International Conference on High Energy Physics
 (National Accelerator Lab., Battavia, IL)(1972);
 M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. B159, 225 (1979);
 P. Breitenlohner and D. Maison, Comm. Math. Phys. 52, 11 (1977);
 P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addison-Wesley (1990) (capítulo 4);
- [10] Jackiw, R., Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University
 Press, Princeton, New York (1972);
 T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford Uni-
 versity Press, New York (1984)
 P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company
 (1987);
- [11] P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company
 (1987) ;
 S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987) ;
- [12] C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980) ;
 J.Collins, Renormalization, Cambridge University Press, New York (1992);
 B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics
 Publishing, Amsterdam (1986);
- [13] T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford Uni-
 versity Press, New York (1984);
 Bell, J.s. and Jackiw, R. Nuovo Cimento 60A, 47 (1973);
 Treiman, Jackiw, Tamino and Witten, Current Algebra and Anomalies, Princeton Uni-
 versity Press (1985);
- [14] W.Greiner and J.Reinhardt: Quantum Electrodynamics, Springer-Verlag, Heidel-
 berg (1994);

- [15] C. Itzykson and J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics
Publishing, Amsterdam (1986);
- [16] O.A. Battistel, A.L. Mota and M.C. Nemes, Mod. Phys. Lett. A13, 20 (1998);

Capítulo 7

Ambiguidades Associadas às Possíveis Escolhas para os Rótulos dos Momentos em Amplitudes Contendo Divergências

7.1 Introdução

Existem muitos problemas associados à presença de divergências ou infinitos em soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos. Os mais importantes são aqueles que dizem respeito à própria possibilidade de a teoria ser levada a sério na determinação das consequências de um conjunto de simetrias para um processo físico específico: a possibilidade de determiná-lo sem ambiguidades [1]. Este é um problema comum a amplitudes associadas a teorias renormalizáveis e não-renormalizáveis. Assim se as amplitudes, após manipuladas e calculadas segundo alguma prescrição qualquer, não carregarem mais o conteúdo de simetria da teoria original e/ou contiverem ambiguidades, elas seguramente não podem ser levadas a sério [2]. A situação das teorias renormalizáveis, onde é possível a aplicação da Regularização Dimensional, é bastante cômoda [3]. As amplitudes produzidas preservam as simetrias e não contém ambiguidades associadas às possíveis escolhas para os momentos das linhas internas (“loops”). A razão para isto é bastante simples e fácil de entender. Se temos várias escolhas possíveis para rotular os momentos nos “loops”, podemos escrever várias expressões para a amplitude correspondente. Uma pode

ser levada à outra por apropriadas redefinições ou “shifts” na variável de integração. No caso da Regularização Dimensional, ainda que as amplitudes sejam divergentes na dimensão física, é possível efetuar “shifts” impunemente. Sendo assim qualquer escolha dos rótulos leva ao mesmo resultado final. Fora deste cenário o problema relacionado a estas ambiguidades é mais complicado. Em teorias não-renormalizáveis ou naquelas renormalizáveis (por contagem de potências) onde a matriz γ_5 é necessária, nós estamos impedidos de utilizar este método consistente. Neste caso, pelo mesmo raciocínio seguido acima, podemos concluir que as amplitudes serão ambíguas. Isto por que para relacionar duas expressões correspondentes à mesma amplitude física (com rótulos diferentes para os momentos) devemos efetuar “shifts” em integrais divergentes. A compensação para isto, como sabemos, deve ser a introdução dos termos de superfície correspondentes. Assim, duas amplitudes físicas devem diferir, ou seja, são ambíguas, exatamente pelos termos de superfície, aqueles mesmos que podem introduzir violações nas relações de simetria, como vimos no capítulo anterior. Isto nos leva a crer na possibilidade de reduzir o problema da existência de ambiguidades, dentro da estratégia que estamos utilizando, também a relações entre integrais divergentes.

A discussão que realizaremos neste capítulo pode ter importância crucial para vários aspectos de interesse relacionados à presença de divergências em T.Q.C. Se for possível encontrar um conjunto consistente de relações entre integrais divergentes que simultaneamente eliminem as ambiguidades e mantenham as relações de simetria a estratégia que estamos construindo torna-se viável. Seria então possível eliminar regularizações das discussões envolvendo as divergências em T.Q.C., tanto em teorias renormalizáveis quanto naquelas não-renormalizáveis. Adicionalmente poderemos talvez ganhar entendimento a respeito das anomalias.

A fim de materializar nossas discussões inicialmente retomamos a auto-energia utilizada como protótipo, no cap.6, para a discussão dos comportamentos não-físicos e unicidade em teorias não-renormalizáveis. Nós agora entretanto adotaremos rótulos arbitrários para os momentos do “loop”. Então a trataremos de acordo com nossa prescrição. Em seguida repetimos o procedimento para o caso das amplitudes triangulares e para o tensor de polarização do vácuo da Q.E.D.

7.2 A Amplitude Protótipo

Nós então voltamos a considerar a amplitude divergente utilizada como protótipo em nossas discussões no capítulo 6, a fim de discutir o importante problema relacionado às possíveis ambiguidades associadas às escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas dos “loops”. Para isto nós consideramos uma escolha arbitrária para rotular os momentos envolvidos na amplitude em questão, como mostramos na fig.(7.1).

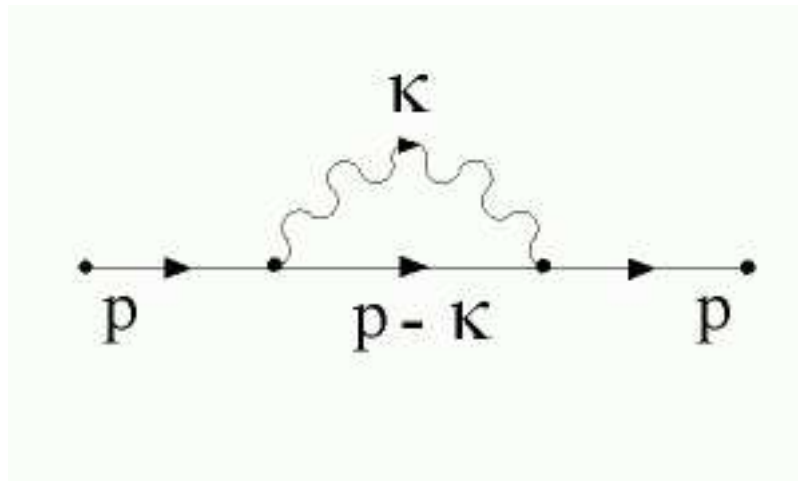


Figura 7.1: Auto-energia fermiônica com rótulos arbitrários.

Nesta figura o parâmetro α representa a arbitrariedade envolvida na escolha, uma vez que qualquer valor de α satisfaz as relações de conservação de energia-momento envolvida nos vértices pertinentes. A possível dependência dos resultados finais, para qualquer que seja o tratamento das divergências em passos intermediários, tornaria sem sentido a discussão envolvendo o conteúdo físico da amplitude. Isto por que seríamos forçados a tomar uma escolha para o valor do parâmetro α . Em amplitudes envolvendo mais do que um momento externo o número de parâmetros arbitrários seria ainda maior (número de momentos externos menos um). Neste ponto nós poderíamos argumentar que princípios gerais, tais como relações de simetria, poderiam ser usados eventualmente para fixar os valores para as arbitrariedades. Isto, entretanto, pode ser facilmente verificado, não nos permite a consistência necessária já que as amplitudes em geral podem possuir um número de relações de simetria diferente daquele das arbitrariedades, como é o caso das anomalias. Sendo assim, a única possibilidade de obtermos consistência é de produzirmos amplitudes livres de ambiguidades automaticamente. Vamos então investigar isto.

A avaliação do diagrama nos fornece inicialmente a expressão:

$$i\Sigma(p) = G^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(\not{k} + \not{k}_1)[\not{k}_2 - \not{k} - m](\not{k} + \not{k}_1)}{[(k + k_1)^2 - \mu^2][(k - k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (7.1)$$

Aqui G engloba a constante de acoplamento e fatores de simetria interna. Por sua vez, para facilitar as manipulações intermediárias, nós introduzimos as definições auxiliares:

$$\begin{cases} k_1 = \alpha p \\ k_2 = (1 - \alpha)p, \end{cases} \quad (7.2)$$

que satisfazem:

$$k_1 + k_2 = p, \quad (7.3)$$

onde p é o momento externo da amplitude. O numerador da amplitude pode ser reorganizado para:

$$\begin{aligned} [(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k}_2 - \not{k} - m)(\not{k} + \not{k}_1)] &= \left\{ (m + \not{k}_1 + \not{k}_2)[(k + k_1)^2 - \mu^2] \right. \\ &\quad + (m + \not{k}_1 + \not{k}_2)[\mu^2] \\ &\quad + \not{k}_1[(k - k_2)^2 - m^2] + \not{k}_1[m^2 - (k_1 + k_2)^2] \\ &\quad \left. + \not{k}[(k - k_2)^2 - m^2] + \not{k}[m^2 - (k_1 + k_2)^2] \right\}. \quad (7.4) \end{aligned}$$

Com isso podemos colocar a amplitude na forma conveniente e adequada para nossos propósitos:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) &= -G^2 \left\{ (m + \not{p}) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k - k_2)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad + \not{k}_1 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - \mu^2]} \\ &\quad + \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{[(k + k_1)^2 - \mu^2]} \\ &\quad + [(m + \not{p})\mu^2 + (m^2 - p^2)\not{k}_1] \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - \mu^2][(k - k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad \left. + (m^2 - p^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{[(k + k_1)^2 - \mu^2][(k - k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (7.5) \end{aligned}$$

Agora, seguindo a prescrição, nós tratamos cada uma das integrais divergentes. Com o auxílio das eqs.(6.75), (6.80), (6.105) e (6.107) teremos:

$$\begin{aligned}
i\Sigma(p) = & -G^2 \left\{ \alpha p_\nu \gamma_\mu \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \right] \right. \\
& - \left[\alpha^3 \not{p} p_\mu p_\nu + (\not{p} + m)(1 - \alpha)^2 p_\mu p_\nu + (p^2 - m^2) \alpha p_\nu \gamma_\mu \right] \times \\
& \times \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \right] \\
& - \alpha^3 \gamma_\mu p_\nu p_\beta p_\xi \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\beta\xi} 4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{8k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^4} \right] \\
& - (p^2 - m^2) \frac{p_\nu \gamma_\mu}{2} \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \right] \\
& + (\not{p} + m) \mu^2 \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + (\not{p} + m) \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \right] \\
& + (\not{p} + m) \mu^2 \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left((-) Z_0(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2) \right) \right] \\
& \left. - (p^2 - m^2) \not{p} \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left((-) Z_1(\mu^2, m^2, p^2; \mu^2) \right) \right] \right\}. \tag{7.6}
\end{aligned}$$

Antes de proceder qualquer análise é importante ressaltar que até aqui todas as passagens são identidades. De imediato, pela simples observação da amplitude obtida, nós percebemos uma forte dependência com o parâmetro arbitrário α . Entretanto uma análise mais cuidadosa nos revela que toda a dependência em α pode ser removida se as seguintes relações entre integrais divergentes forem satisfeitas:

$$\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \tag{7.7}$$

$$\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \tag{7.8}$$

$$p_\mu p_\beta p_\xi \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\beta\xi} 4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} = p_\mu p_\beta p_\xi \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^4}. \tag{7.9}$$

Isto nos permite uma conclusão importante: As integrais acima são divergentes. Assim, qualquer método de regularização ou equivalente que não mantiver estas relações válidas produzirá necessariamente amplitudes ambíguas. Outra implicação desta constatação importante é que se isto deve ser válido para qualquer método de regularização

então elas devem ser independentes destes, o que quer dizer que devem ser justificadas diretamente; ou seja, devem ser vistas como propriedades necessária às integrais divergentes envolvidas.

Neste ponto nos deparamos com a questão crucial: Ou as relações acima são satisfeitas ou a Teoria Quântica de Campos, na versão perturbativa, é intrinsecamente ambígua. Esta constatação nos força a rever os resultados anteriormente adotados onde encontramos relações deste tipo. Em particular na seção 6.4 utilizamos a relação:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} = g_{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} + m^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^3}, \quad (7.10)$$

que foi obtida apoiada numa regularização. As operações utilizadas para obtê-la foram:

- Regularização;
- $k_{\mu}k_{\nu} = \frac{1}{4}k^2 g_{\mu\nu}$ (integração simétrica);
- $k^2 \rightarrow k^2 - \mu^2 + \mu^2$;
- Remoção da regularização.

Assim, quando efetuamos estas operações em amplitudes regularizadas estamos tornando-as ambíguas. É importante notar que as relações identificadas aqui são as mesmas necessárias no capítulo anterior para a manutenção das relações de simetria.

Com a utilização das relações eqs.(7.17)-(7.19), ou seja, a amplitude não-ambígua, fica:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) = -G^2 \left\{ (\not{p} + m)[I_{quad}(m^2)] \right. \\ + \left[(\not{p} + m)\mu^2 - (p^2 - m^2)\frac{\not{p}}{2} \right] [I_{log}(m^2)] \\ + [(\not{p} + m)\mu^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-)[Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] \\ \left. + [(p^2 - m^2)\not{p}] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] \right\}. \quad (7.11) \end{aligned}$$

Onde utilizamos também a relação entre escalas diferentes para os objetos divergentes:

$$I_{log}(m^2) = I_{log}(\mu^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right). \quad (7.12)$$

A amplitude, assim obtida, está livre de comportamentos não-físicos em especial aqueles anômalos (que violam unitariedade). Ela ainda é não-ambígua. O caráter não-renormalizável manifesta-se pela presença de divergências em ordem p^2 e p^3 . Por outro lado, para dar sentido físico à amplitude, basta especificar o valor de $I_{quad}(m^2)$ e de $I_{log}(m^2)$, na fixação da massa física e normalização do campo fermiônico.

Vamos agora considerar um importante caso de amplitude divergente envolvendo simultaneamente ambiguidades e relações de simetria.

7.3 Tensor de Polarização do Vácuo na Q.E.D.

Como na seção anterior vamos reconsiderar os cálculos que fizemos no capítulo 6, para o tensor de polarização da Q.E.D. Agora, entretanto, tomando rótulos arbitrários para as linhas do “loop”, como na fig.(7.2)

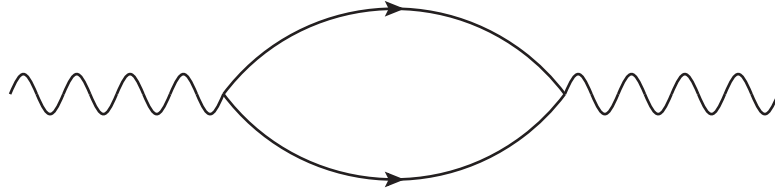


Figura 7.2: Tensor de polarização do vácuo da Q.E.D. com rótulos arbitrários para os momentos das linhas internas.

Aplicando as regras de Feynman ficamos com:

$$\Pi_{\mu\nu} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + \alpha \not{q} - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + (\alpha - 1)\not{q} - m]} \right\}. \quad (7.13)$$

Aqui, como antes, α é um parâmetro arbitrário. Todos os possíveis “shifts” estão incluídos em escolhas para o parâmetro α . Nesta seção consideraremos apenas as Identidades de Ward. O cálculo completo da amplitude $\Pi_{\mu\nu}$ pode ser encontrado na seção (13.6).

Para obter a Identidade de Ward repetimos o procedimento: primeiro contraindo com q_ν :

$$q^\nu \Pi_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + \alpha \not{q} - m]} \not{q} \frac{1}{[k + (\alpha - 1)\not{q} - m]} \right\}. \quad (7.14)$$

Agora inserimos a identidade

$$q = [k + \alpha \not{q} - m] - [k + (\alpha - 1)\not{q} - m], \quad (7.15)$$

no interior do traço, e então obtemos:

$$\begin{aligned} q^\nu \Pi_{\mu\nu} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + (\alpha - 1)\not{q} - m]} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + \alpha \not{q} - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Tomando o traço ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned} q^\nu \Pi_{\mu\nu} &= 4i \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[k + (\alpha - 1)q]^2 - m^2} + (\alpha - 1)q_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k + (\alpha - 1)q]^2 - m^2} \right\} \\ &\quad - 4i \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[k + \alpha q]^2 - m^2} + \alpha q_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k + \alpha q]^2 - m^2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Então introduzimos o tratamento para as integrais divergentes, já consideradas na seção anterior, ficaremos com:

$$\begin{aligned} q^\nu \Pi_{\mu\nu} &= 4i \left\{ q_\xi \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\xi}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\xi}}{(k^2 - m^2)} \right] \right. \\ &\quad + \left[-3\alpha^2 + 3\alpha - 1 \right] q_\xi q_\beta q_\mu \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\beta}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\beta}}{(k^2 - m^2)^2} \right] \\ &\quad \left. + \left[-3\alpha^2 + 3\alpha - 1 \right] 4q_\xi q_\eta q_\beta \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\eta\beta} k_\xi k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\xi k_\beta k_\mu k_\eta}{(k^2 - m^2)^4} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Notemos que, como deveria ser, este resultado concorda com aquele do capítulo anterior ($\alpha = 0$). Neste resultado é importante notar que as diferenças de integrais são as mesmas que já havíamos encontrado no capítulo anterior quando analisamos relações de simetria e no cálculo da amplitude $\Sigma(p)$ na seção anterior (amplitude cubicamente divergente). Deste modo não causa espanto estes dois problemas aparecerem costumeiramente associados: ambiguidades e violação de relações de simetria. O mesmo agente que permite a amplitude ser ambígua também viola a relação de simetria e vice-versa. Por outro lado as relações entre integrais divergentes, fornecida pela integração dimensional, garantem simultaneamente a consistência destes dois aspectos. A questão então é: se optássemos por adotar as relações fornecidas por regularizações em quatro dimensões ou pela consideração dos termos de superfície compensatórios aos “shifts”, seria possível conseguir

uma prescrição para recuperar as Identidades de Ward violadas através da existência de ambiguidades? Primeiro devemos definir a ambiguidade. Uma maneira seria considerar a diferença entre a amplitude calculada para um α qualquer com outro previamente escolhido. Por exemplo:

$$[q^\nu \Pi_{\mu\nu}(\alpha) - q^\nu \Pi_{\mu\nu}(\alpha = 0)] = A_\mu.$$

Mas isto corresponde a uma prescrição extremamente complicada e pouco intuitiva para a interpretação de amplitudes do cálculo perturbativo.

7.4 Pseudo-Amplitudes Triangulares - Identidades de Ward e Ambiguidades

Nós agora vamos reconsiderar o cálculo das Identidades de Ward relativas às amplitudes $T_{\lambda\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. Entretanto adotando agora rótulos arbitrários para os momentos das linhas internas. Isto é feito tomando-se combinações lineares de dois dos momentos externos. Este número é suficiente já que temos três momentos externos e uma relação de conservação de energia-momento. Inicialmente consideremos a amplitude $T_{\mu\nu}$ referente ao gráfico da fig.(7.3).

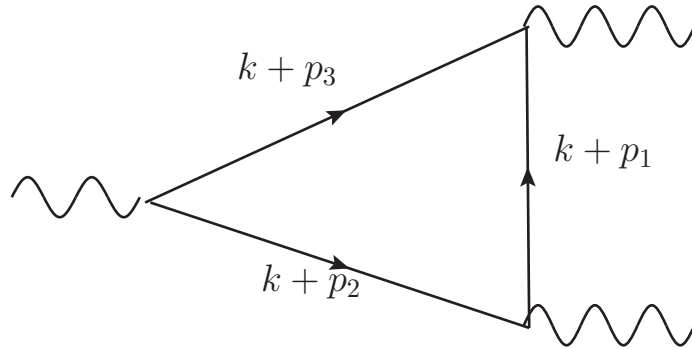


Figura 7.3: Diagrama “direto” para a amplitude $T_{\mu\nu}$, com rótulos arbitrários para as linhas fermiônicas do “loop”.

Nós então escrevemos $T_{\mu\nu}$, para o diagrama direto, como:

$$T_{\mu\nu}^d = (-)i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{i}{[\not{k} + \not{p}_3 - m]} \gamma^5 \frac{i}{[\not{k} + \not{p}_2 - m]} \gamma^\nu \frac{i}{[\not{k} + \not{p}_1 - m]} \gamma^\mu \right\}. \quad (7.19)$$

A contribuição correspondente ao diagrama cruzado é obtida trocando-se $k_1 \rightarrow k_2$ e $\mu \rightarrow \nu$.

Por sua vez para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}$ podemos escrever:

$$T_{\lambda\mu\nu}^d = (-)i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{i}{[k + p'_\beta - m]} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[k + p'_\beta - m]} \gamma_\nu \frac{i}{[k + p'_\alpha - m]} \gamma_\mu \right\}. \quad (7.20)$$

É interessante notar, neste ponto, que $T_{\mu\nu}$ e $T_{\lambda\mu\nu}$ são amplitudes diferentes e correspondentes a processos físicos distintos. Por isso adotamos os parâmetros das combinações lineares (arbitrários) (a, b) e (a', b') . Fizemos isso por que, na hipótese de haver dependência com estes parâmetros, não há, em princípio, razão nenhuma para que o significado (e valor) dos parâmetros arbitrários de uma amplitude física corresponda àquele de outra. Assim se as amplitudes físicas são arbitrárias as relações entre elas são duplamente arbitrárias. De qualquer modo, é sempre possível efetuar um “shift” e passar de um conjunto de parâmetros (rótulos) para outro. O preço disto é evidentemente um termo de superfície. Ou seja, em princípio:

$$T_{\lambda\mu\nu}(a', b') \xrightarrow{\text{“shift”}} T_{\lambda\mu\nu}(a, b) + \Delta S_{\lambda\mu\nu}.$$

Nós não nos aprofundaremos neste aspecto do caráter ambiguidade já que estamos interessados numa condição mais razoável, que é a busca de condições para que as amplitudes físicas não sejam ambíguas, em cujo caso problemas como este ficam sem sentido.

Vamos então considerar as Identidades de Ward de interesse para as amplitudes $T_{\lambda\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. Por simplicidade tomamos $a = a'$ e $b = b'$ na discussão.

Para facilitar as manipulações intermediárias nós introduzimos as definições:

$$\begin{cases} p_1 = ak_2 + bk_1 \\ p_2 = (a - 1)k_2 + bk_1 \\ p_3 = ak_2 + (b + 1)k_1 \end{cases} \quad (7.21)$$

que satisfazem às relações como os momentos externos:

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = k_2 \\ p_3 - p_1 = k_1 \\ p_3 - p_2 = k_1 + k_2 = q. \end{cases} \quad (7.22)$$

7.4.1 Identidade de Ward $q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu}$

Para obter a Identidade de Ward que relaciona as duas amplitudes nós contraímos $T_{\lambda\mu\nu}^d$ com q^λ , ficando com:

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^d = (-)i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{i}{[k + p_\beta - m]} \not{q} \gamma_5 \frac{i}{[k + p_\mu - m]} \gamma_\nu \frac{i}{[k + p_\lambda - m]} \gamma_\mu \right\} \quad (7.23)$$

Então inserimos a identidade

$$q\gamma_5 = [(k + p_\beta) - m]\gamma_5 + \gamma_5[(k + p_\mu) - m] + 2m\gamma_5, \quad (7.24)$$

no interior do traço. Com isso identificamos:

$$\begin{aligned} q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^d &= 2mT_{\mu\nu}^d + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{[k + p_\mu - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + p_\lambda - m]} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \gamma_\nu \frac{1}{[k + p_\lambda - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[k + p_\beta - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Basta então considerar o cálculo das duas integrais envolvidas, denominando-as $I_{\mu\nu}^1$ e $I_{\mu\nu}^2$, respectivamente, teremos:

$$I_{\mu\nu}^1 = 4\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{[p_{1\xi} p_{2\alpha} g_{\beta\eta} + p_{1\beta} p_{2\xi} g_{\alpha\eta}]}{2} \left[\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \quad (7.26)$$

Substituindo os valores de p_1 e p_2 em termos dos momentos externos, ficamos com:

$$I_{\mu\nu}^1 = -4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{b}{2} [k_{1\xi} k_{2\alpha} g_{\beta\eta} + k_{1\beta} k_{2\xi} g_{\alpha\eta}] \left[\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \quad (7.27)$$

O mesmo procedimento nos leva a:

$$I_{\mu\nu}^2 = -4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{a}{2} [k_{1\xi} k_{2\alpha} g_{\beta\eta} + k_{1\beta} k_{2\xi} g_{\alpha\eta}] \left[\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \quad (7.28)$$

Para concluir o cálculo lembramos que a inclusão do diagrama “cruzado” completa a amplitude $T_{\mu\nu}$. Este contribui com termos idênticos a estes que acabamos de calcular. Deste modo ficamos com o resultado:

$$\begin{aligned} q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} &= 2mT_{\mu\nu} + 4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (a - b) [k_{1\xi} k_{2\alpha} g_{\beta\eta} + k_{1\beta} k_{2\xi} g_{\alpha\eta}] \times \\ &\quad \times \left[\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Antes de analisar o resultado acima, vamos considerar as outras Identidades de Ward.

7.4.2 Identidade de Ward $k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu} = 0$

Para esta identidade primeiro contraímos com $k_{1\mu}$ para obter:

$$k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu}^d = (-)i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i}{[k + p_\beta - m]} \gamma_\nu \frac{i}{[k + p_\lambda - m]} k_\lambda' \frac{i}{[k + p_\beta - m]} \gamma_\mu \right\}. \quad (7.30)$$

Então utilizamos a identidade

$$k_\lambda' = [(k + p_\beta) - m] - [(k + p_\lambda) - m] + 2m\gamma_5, \quad (7.31)$$

no interior do traço. Para ficar com:

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu}^d &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + p_\beta - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + p_\beta - m]} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + p_\beta - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[k + p_\lambda - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

As duas integrais obtidas, das quais depende a Identidade de Ward, são semelhantes àquelas consideradas anteriormente. Teremos então:

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu}^d &= 4i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \frac{1-a}{2} [k_{1\xi} k_{2\alpha} g_{\beta\eta} + k_{1\beta} k_{2\xi} g_{\alpha\eta}] \times \\ &\quad \times \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Agora a contribuição do canal cruzado nos levará:

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu}^c &= (-)4i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} [b+1] [k_{2\alpha} k_{1\xi} g_{\beta\eta} + k_{1\beta} k_{2\xi} g_{\alpha\eta}] \times \\ &\quad \times \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Somando as contribuições:

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu} &= (-)4i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \frac{[b+a]}{2} [k_{2\alpha} k_{1\xi} g_{\beta\eta} + k_{1\beta} k_{2\xi} g_{\alpha\eta}] \times \\ &\quad \times \left[\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

7.4.3 Identidade de Ward $k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu} = 0$

Repetindo o procedimento anterior obteremos:

$$\begin{aligned} \bullet k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^d &= (-)4i\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \frac{[b+1]}{2} [k_{2\alpha}k_{1\xi}g_{\beta\eta} + k_{1\beta}k_{2\xi}g_{\alpha\eta}] \times \\ &\times \left[\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \bullet k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu}^c &= (-)4i\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} \frac{[a-b-1]}{2} [k_{2\alpha}k_{1\xi}g_{\beta\eta} + k_{1\beta}k_{2\xi}g_{\alpha\eta}] \times \\ &\times \left[\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Somando as contribuições;

$$\begin{aligned} k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu} &= (-)4i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \frac{[b+a]}{2} [k_{2\alpha}k_{1\xi}g_{\beta\eta} + k_{1\beta}k_{2\xi}g_{\alpha\eta}] \times \\ &\times \left[\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\eta}}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\eta}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Completados agora os cálculos necessários podemos agora analisá-los.

7.4.4 Ambiguidades e Identidades de Ward

As manipulações e cálculos que efetuamos nas três últimas seções nos permitiram obter formas claras para as Identidades de Ward consideradas. Os resultados podem ser ambiguos ou não de acordo com uma relação entre duas integrais logaritmicamente divergentes, a mesma que havíamos encontrado no capítulo anterior como condição necessária e suficiente para a manutenção das relações de simetria envolvidas. Temos portanto dois pontos de vista diferentes para os resultados.

- Integração Dimensional

Neste caso as ambiguidades são eliminadas e as relações de simetria são satisfeitas.

$$\begin{cases} q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu} \\ k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu} = 0 \\ k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu} = 0 \end{cases} \quad (7.39)$$

- Regularizações quadridimensionais ou termos de superfície

Neste caso obtemos:

$$\begin{cases} q^\lambda T_{\lambda\mu\nu} = 2mT_{\mu\nu} - \frac{a-b}{4\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{2\alpha} k_{1\beta} \\ k_1^\mu T_{\lambda\mu\nu} = \frac{a+b}{8\pi^2} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} k_{2\alpha} k_{1\beta} \\ k_2^\nu T_{\lambda\mu\nu} = \frac{a+b}{4\pi^2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} k_{2\alpha} k_{1\beta} \end{cases} \quad (7.40)$$

Onde podemos notar que os valores $a = 0$ e $b = -1$ confirmam os resultados obtidos no capítulo anterior, como deveria. Estes ainda concordam com os resultados tradicionais da literatura do assunto [4].

7.5 Conclusões

Os resultados que obtivemos nos cálculos realizados neste capítulo nos permitem importantes conclusões no que diz respeito às ambiguidades no método ou estratégia que estamos construindo para manipular e calcular amplitudes contendo divergências. Ainda que tenhamos investigado apenas três exemplos específicos de amplitudes, eles cobrem uma classe representativa e variada de problemas; teorias não-renormalizáveis (cubicamente divergente), Eletrodinâmica Quântica (quadraticamente divergente) e Eletrodinâmica Quiral (linearmente divergente).

Para a auto-energia fermiônica associada a uma teoria não-renormalizável a condição necessária e suficiente para a produção de uma amplitude livre de ambiguidades é a satisfação das três condições:

$$\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = g_{\mu\nu} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (7.41)$$

$$\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \quad (7.42)$$

$$\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} = [g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\nu\alpha} g_{\beta\mu}] \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k^2 - m^2)^2]}. \quad (7.43)$$

Por sua vez para a Identidade de Ward relacionada ao tensor de polarização na QED, a eliminação das ambiguidades pode ser feita pelas duas últimas apenas. Há um termo não-ambíguo que viola a Identidade de Ward. Isto quer dizer que não há escolha possível

para a arbitrariedade capaz de reestabelecer a identidade. Entretanto a primeira relação remove o termo problemático, fornecendo o resultado consistente para a QED.

O fato de as relações entre integrais divergentes, obtidas aqui para a eliminação das ambiguidades, serem as mesmas que encontramos para a satisfação de Identidades de Ward, constitui-se na mais importante e promissora conclusão para nossos objetivos. Caso estas relações não fossem as mesmas, não haveria nenhuma chance de consistência para o método que tentamos construir.

As investigações do aspecto ambiguidade completa os ingredientes necessários para a formulação de uma estratégia geral, para manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes, que dispensa o uso explícito de métodos de regularização. Os elementos que necessitamos são: manipulações algébricas ao nível do integrando mais “relações de consistência” entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência. As possíveis consequências desta estratégia podem ser consideradas surpreendentes. Esta avaliação vem do fato de termos obtido, com estes ingredientes simples, a eliminação das ambiguidades e violações das relações de simetria, nas Identidades de Ward associadas às pseudo-amplitudes triangulares, onde tradicionalmente isto não é possível de ser obtido em métodos de regularização. Isto nos serve de alerta. Baseados nisto prosseguiremos investigando tendo na questão da compatibilidade entre as relações de consistência obtidas e a unicidade o ponto principal a ser solucionado.

Nossa expectativa é de que seja possível a construção de uma estratégia simples, porém consistente, para as manipulações necessárias nas amplitudes divergentes. Devido às relações de consistência serem automaticamente satisfeitas em integração dimensional, ingrediente que sustenta a Regularização Dimensional, nós esperamos a mesma consistência deste método onde ele se aplica, entretanto sem as restrições. Por outro lado nós podemos explicar claramente a origem da consistência e das inconsistências dos métodos de regularizações em geral, já que podemos passar do resultado a ser obtido na nossa estratégia para os resultados correspondentes aos métodos tradicionais.

Referências Bibliográficas

- [1] W.A. Bardeen, C.T. Hill and M. Lindner, Phys. Rev. D41; 1647 (1990);
- [2] R.S. Willey, Phys. Rev. D48; 2877 (1993);
- [3] T. Gherghetta, Phys. Rev. D50; 5885 (1994);
- [4] •T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
Adler, S.L. Phys. Rev. 177, 2426 (1969);
Bell, J.S. and Jackiw, R. Nuovo Cimento 60A, 47 (1973);
Fijikawa, K. Phys. Rev. Lett. 42, 1195 (1979);
Treiman, Jackiw, Zumino and Witten, Corrent Algebra and Anomalies, Princeton University Press (1985);
Sutherland, D.G., Nucl. Phys, B2, 433 (1966);
Veltman, M. Proc. R. Soc. A301, 107 (1967);
Adler, S.L. and Bardeen, W.A. Phys. Rev. 182, 1517 (1969);
Bardeen, W.A. Phys. Rev. 184, 1848 (1969);
K.G. Wilson, Phys. Rev. 125, 1067 (1962).

Capítulo 8

Ambiguidades e Relações de Simetria em um Modelo de férmions de Spin $1/2$ livres e de massas iguais

8.1 Introdução

A presença de divergências nas soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos exige a adoção ou construção de estratégias que permitam manipular e calcular as amplitudes decorrentes das regras de Feynman, de modo a tornar possível o estabelecimento do poder de predição destas. Isto requer uma caracterização consistente das partes finitas e divergentes de modo que tais predições possam ser unívocas, isto é, livres de ambiguidades. Além disto os resultados obtidos devem ser identificáveis como determinações das simetrias implementadas na construção da teoria. Isto quer dizer que a estratégia utilizada, para as manipulações e cálculos necessários, não deve permitir ou promover violações de relações de simetria. Estes dois aspectos; ambiguidades e relações de simetria, tornam-se cruciais para que possamos dar sentido aos resultados de cálculos perturbativos. Em outras palavras, se não pudermos determinar as consequências físicas de um conjunto de simetrias, as quais materializam hipóteses para os princípios fundamentais da natureza, de um modo unívoco, estaríamos reduzindo todo o aparato teórico da TQC a uma mera fenomenologia onde caso-a-caso deve ser estudado e ajustado separadamente. Para que possamos obter resultados satisfatórios, unívocos e preservando as simetrias, o modo pelo qual manipulamos e calculamos as amplitudes divergentes não

pode ser qualquer. Não basta tornar as amplitudes finitas por alguma filosofia de regularização. É necessário que as modificações introduzidas, por este eventual método, não terminem por conduzir a ambiguidades e/ou promovam violações de relações de simetria.

Nos capítulos anteriores nós consideramos vários aspectos associados à presença de divergências nas amplitudes físicas. Entre estes investigamos, à luz de uma estratégia capaz de evitar a adoção explícita de métodos de regularização, separadamente, os aspectos: ambiguidades associadas às possíveis escolhas (arbitrárias!) para os momentos das linhas internas e a possibilidade de violações de relações de simetria. Naquelas investigações nos utilizamos de casos particulares, ainda que representativos, e terminamos por concluir que, aparentemente, é possível evitar ambiguidades e violações de relações de simetria através da imposição de certas relações entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência. O que torna atraente e promissor este procedimento é o fato de estas “relações de consistência” obtidas serem as mesmas nos dois aspectos. Em outras palavras, nas amplitudes investigadas, as condições:

$$\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} \quad (8.1)$$

$$\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - \mu^2)^4} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\mu\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\mu}k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\mu\beta}k_{\nu}k_{\alpha}}{(k^2 - \mu^2)^3}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

são necessárias e suficientes para ao mesmo tempo eliminar ambiguidades e evitar violações de relações de simetria. Para chegarmos a estas condições exigimos apenas que a eventual regularização seja par no momento de “loop” e possua um limite de conexão (não modifique integrais finitas no limite $\Lambda^2 \rightarrow \infty$). As condições acima servem como propriedades definidoras de uma regularização consistente. Assim, se elas não forem satisfeitas a regularização deve ser descartada. Por outro lado se estas forem preenchidas não haverá necessidade de explicitá-las em nenhum outro lugar dos resultados. Neste sentido podemos dizer que, se exigimos consistência, podemos dispensar o uso de regularização.

Os resultados das investigações realizadas nos motivam a promover uma investigação simultânea, dos dois aspectos citados, não mais em amplitudes particulares de diferentes

teorias ou modelos, mas em todas as amplitudes problemáticas, sistematicamente, dentro de um modelo onde estas questões desempenham um papel importante, até mesmo do ponto de vista histórico. Estamos nos referindo a um modelo de férmions livres (de spin $1/2$), restrito (neste capítulo) ao caso de massas iguais. Com os ingredientes disponíveis neste modelo podemos construir correntes obedecendo a uma álgebra bem determinada e então, através da quadridivergência destas, relações entre correntes. Estas relações se constituirão em relações de simetria quando construirmos representações integrais para as transformadas de Fourier do produto ordenado destas correntes; Funções de Green de um número qualquer de pontos. Nós estaremos interessados naquelas de um, dois e três pontos, suas relações de simetria e possíveis ambiguidades. A razão para isto está no grau de divergência envolvido (maior que logarítmico) pois, como sabemos, funções de quatro pontos com linhas fermiônicas internas e acoplamentos não-derivativos são, no máximo; logaritmicamente divergentes. Neste caso não teremos a possibilidade de ambiguidades relacionadas às possíveis escolhas para os momentos das linhas internas pois é permitido efetuar “shifts” na variável de integração de modo a tornar todas as escolhas equivalentes. Ressaltamos entretanto que, a rigor, não podemos afirmar que a ausência de ambiguidades garanta a manutenção das relações de simetria [1].

A investigação que efetuaremos neste capítulo segue de perto o trabalho pioneiro de Gerstein e Jackiw [2] no qual, para um modelo destes, foram estudadas Identidades de Ward e ambiguidades para funções de três pontos, sem o cálculo explícito destas. A fim de tornar mais completa a discussão permitindo conclusões mais seguras e abrangentes, nós incluiremos as funções de um e dois pontos, possuidoras dos maiores graus de divergência. Para torná-la imediatamente conclusiva, por outro lado, assumiremos simetria abeliana para os números quânticos internos. Serão consideradas as Identidades de Ward relacionando todas estas amplitudes bem como as possíveis ambiguidades. Este último aspecto estará automaticamente incluído pois executaremos os cálculos tomando sempre escolhas arbitrárias para os momentos das linhas internas.

Na seção 2 apresentaremos o modelo, as correntes e as Identidades de Ward associadas. Na seção 3 resumiremos as conclusões dos capítulos 5,6 e 7 e caracterizaremos uma estratégia para manipulações e cálculos de amplitudes divergentes. Na seção 4 consideraremos a questões das ambiguidades para as funções de um, dois e três pontos. Na seção 5 verificaremos as Identidades de Ward para então concluir na seção 6.

8.2 O Modelo, Correntes e Identidades de Ward

Para as investigações que pretendemos efetuar, nós então consideramos um modelo com férmion de spin 1/2 livre e de massa m . Com isso, tudo o que temos disponível é um campo massivo obedecendo à equação de Dirac. Com este podemos construir correntes [2]:

$$j_i(x) = \bar{\psi}(x)\Gamma_i\psi(x). \quad (8.4)$$

Os operadores Γ_i são matrizes, $\Gamma_i = (1, \gamma_5, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_5)$, caracterizando as densidades:

- Escalar

$$S(x) = \bar{\psi}(x)\hat{1}\psi(x) \quad (8.5)$$

- Pseudo-escalar

$$P(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \quad (8.6)$$

- Vetorial

$$V_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \quad (8.7)$$

- Axial

$$A_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x). \quad (8.8)$$

Além destas teríamos ainda as densidades tensoriais mas nós não as consideraremos aqui [3]. Uma propriedade importante, para nossos propósitos, é o valor da quadridivergência destas correntes:

$$\begin{cases} \partial_\mu V_\mu(x) = 0 \\ \partial_\mu A_\mu(x) = 2mP(x). \end{cases} \quad (8.9)$$

Com as expressões para as correntes, mais o propagador fermiônico:

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (8.10)$$

é possível construir funções de n-pontos. Como tal definimos aquelas de um ponto (fig.(8.1)) como:

$$T^i(l, m) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(\not{k} + \not{l}) - m]} \right\}. \quad (8.11)$$

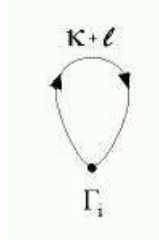


Figura 8.1: Funções de Green de um ponto. O operador $\Gamma = (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5)$ define as funções $T^S(l, m)$, $T^P(l, m)$, $T_\mu^V(l, m)$ e $T_\mu^A(l, m)$ respectivamente. O momento l é arbitrário.

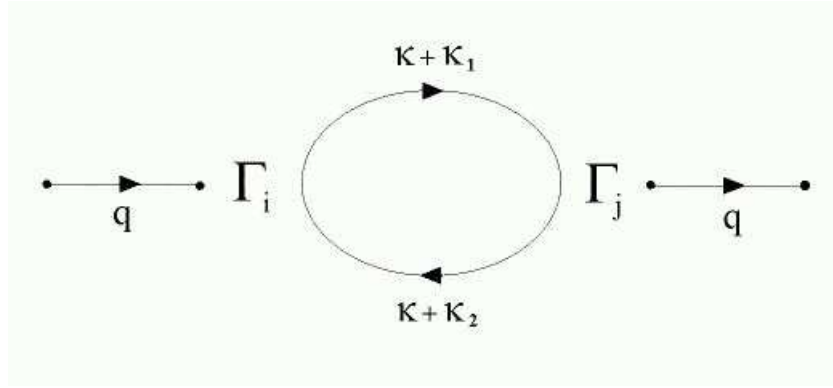


Figura 8.2: Funções de Green de dois pontos com rótulos arbitrários para os momento internos. Com os vértices $(\Gamma_i, \Gamma_j) = (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5)$ definimos as funções $T^{ij}(k_1, m; k_2, m)$ de interesse. A diferença $k_1 - k_2$ é o momento externo q .

As funções de dois pontos (fig.(8.2)), por sua vez:

$$T^{ij}(k_1, m; k_2, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(k + k_1) - m]} \Gamma_j \frac{1}{[(k + k_2) - m]} \right\}. \quad (8.12)$$

As funções de três pontos (fig.(8.3)), definimos por:

$$T^{lij}(k_1, m; k_2, m; k_3, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(k + k_1) - m]} \Gamma_j \frac{1}{[(k + k_2) - m]} \Gamma_l \frac{1}{[(k + k_3) - m]} \right\}, \quad (8.13)$$

e assim por diante. Chamamos atenção neste ponto para a notação adotada, que será muito utilizada daqui para diante.

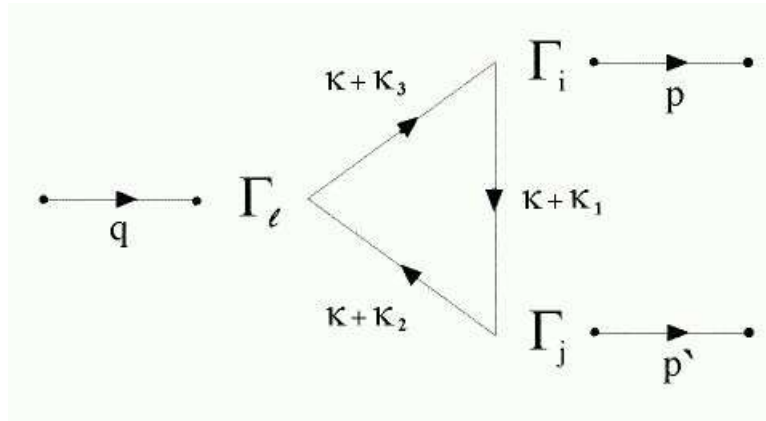


Figura 8.3: Funções de Green de três pontos. Os momentos k_1 , k_2 e k_3 são arbitrários. As diferenças destes estão relacionados aos momentos externos $k_3 - k_1 = p$, $k_1 - k_2 = p'$ e $k_3 - k_2 = q$.

- O vértice à esquerda foi convencionado como “estado inicial” com momento (“chegando”) externo q e operador de vértice γ_ℓ .
- Os dois outros vértices são “estados finais”, com momentos externos p e p' , e operadores de vértice Γ_i e Γ_j , respectivamente.
- Os índices superiores são associados ao diagrama na ordem que aparecem com respectivos índices inferiores de Lorentz na mesma ordem (quando for o caso). Por exemplo: se $\Gamma_\ell = \gamma_\lambda$; $\Gamma_i = \gamma_\mu \gamma_5$ e $\gamma_j = \gamma_5$ representaríamos por

$$T_{\lambda\mu}^{VAP}(k_1, m; k_2, m; k_3, m). \quad (8.14)$$

- A notação enfatiza os momentos e as massas carregadas pelas linhas internas e é uma denominação para cada diagrama. Isto quer dizer que para o caso de um processo físico envolvendo uma partícula inicial e duas finais, onde devemos construir a amplitude adequadamente simetrizada nos estados finais, será necessário somar diagramas permutados nos estados finais (momentos e vértices). Por exemplo, para o processo $S \rightarrow VV$, definimos a amplitude por:

$$T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = T_{\mu\nu}^{SVV}(k_1, m; k_2, m; k_3, m) + T_{\nu\mu}^{SVV}(l_1, m; l_2, m; l_3, m). \quad (8.15)$$

O primeiro termo representa o “canal direto” (fig.(8.3)) e o segundo o “canal cruzado” (fig.(8.4)). Note que denominamos de k 's os momentos arbitrários para o

diagrama direto e por l 's aqueles para o diagrama cruzado (veja discussão na seção (8.5)). A notação utilizada tem por objetivo enfatizar o aspecto ambiguidade, que desempenhará um papel crucial em nossas discussões.

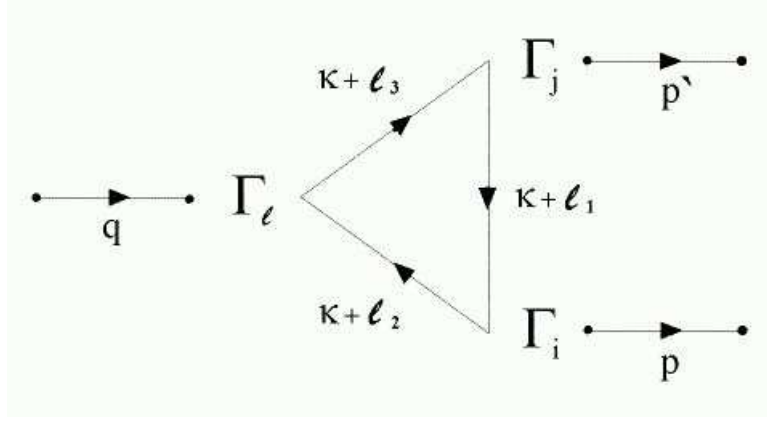


Figura 8.4: Função de Green de três pontos correspondente ao “canal cruzado” do diagrama representado na fig.(8.3).

As funções de n-pontos, que acabamos de definir, podem ser identificadas como representações integrais para as transformadas de Fourier das correntes (8.5) - (8.8), definidas por:

$$\langle j_1(q)j_2(-q) \rangle \equiv \int e^{-ipx} d^4x \langle 0|T(j_1(x)j_2(0))|0 \rangle, \quad (8.16)$$

e também:

$$\langle j_1(p)j_2(p')j_3(q) \rangle \equiv \int e^{-ipx} e^{-ip'y} d^4x d^4y \langle 0|T(j_1(x)j_2(y)j_3(0))|0 \rangle. \quad (8.17)$$

Com estes elementos mais os métodos padrões da álgebra de correntes [4] podemos estabelecer relações entre as funções de n-pontos construídas, ou seja, Identidades de Ward. Para o modelo simples que estamos considerando, tais relações de simetria resumem-se em consequências diretas da conservação da corrente vetorial e da proporcionalidade correta entre o divergente da corrente axial. Isto implica que cada vez que calculamos uma função de n-pontos, onde temos índices de Lorentz associados a vértices vetoriais, a contração com o respectivo momento externo deverá produzir um resultado idênticamente nulo para o correspondente processo físico (simetrização nos estados finais). Por sua vez, quando o índice de Lorentz estiver associado a um vértice axial, a contração com o respectivo momento externo, deverá produzir uma relação de proporcionalidade entre as duas amplitudes físicas idênticas entre si exceto pela troca do vértice axial por um pseudo-escalar.

É importante perceber, e este é o nosso interesse central, que estas relações são exatas e devem ser satisfeitas apesar do evidente caráter divergente das funções até quatro pontos. Quando calculamos tais funções, lançando mão de algum procedimento específico para conviver com tais infinitos, as propriedades acima citadas devem ainda estar presentes nas expressões obtidas. As contrações com os momentos externos devem oferecer expressões identificáveis com outras previamente calculadas dentro da mesma filosofia (divergentes ou não).

Esta breve discussão resume o grande dilema associado a amplitudes contendo divergências; manter todas as propriedades destas *após* terem sido calculadas.

Neste capítulo nós faremos uso daquilo que concluímos nos capítulos anteriores para verificar sob que condições é possível efetuarmos os cálculos das funções de n-pontos (divergentes) e obter resultados consistentes no que diz respeito a ambiguidades e relações de simetria.

As Identidades de Ward que buscamos verificar são:

- *Funções de um ponto:*

$$T_{\mu}^V(l, m) = 0. \quad (8.18)$$

- *Funções de dois pontos:*

$$(k_1 - k_2)^{\mu} T_{\mu}^{VS}(k_1, m; k_2, m) = 0 \quad (8.19)$$

$$(k_1 - k_2)^{\mu} T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_2, m) = 0 \quad (8.20)$$

$$(k_1 - k_2)^{\nu} T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_2, m) = 0 \quad (8.21)$$

$$(k_1 - k_2)^{\mu} T_{\mu}^{AP}(k_1, m; k_2, m) = 2mT^{PP}(k_1, m; k_2, m) \quad (8.22)$$

$$(k_1 - k_2)^{\mu} T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, m; k_2, m) = 2mT_{\nu}^{PV}(k_1, m; k_2, m) \quad (8.23)$$

$$(k_1 - k_2)^{\nu} T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, m; k_2, m) = 0 \quad (8.24)$$

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, m; k_2, m) = 2mT_\nu^{PA}(k_1, m; k_2, m) \quad (8.25)$$

$$(k_1 - k_2)^\mu (k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, m; k_2, m) = (2m)^2 T_\nu^{PP}(k_1, m; k_2, m). \quad (8.26)$$

• *Funções de três pontos:*

$$q^\lambda T_\lambda^{V \rightarrow SS} = 0 \quad (8.27)$$

$$q^\lambda T_\lambda^{V \rightarrow PP} = 0 \quad (8.28)$$

$$q^\lambda T_\lambda^{A \rightarrow SP} = -2mT^{P \rightarrow SP} \quad (8.29)$$

$$p'^\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = 0 \quad (8.30)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} = 2mT_\nu^{S \rightarrow PA} \quad (8.31)$$

$$p'^\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} = 2mT_\mu^{S \rightarrow AP} \quad (8.32)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AV} = 2mT_\nu^{P \rightarrow PV} \quad (8.33)$$

$$p'^\nu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AV} = 0 \quad (8.34)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = 0 \quad (8.35)$$

$$p'^\nu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = 0 \quad (8.36)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AV} = 2mT_\nu^{S \rightarrow PV} \quad (8.37)$$

$$p'^{\nu} T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AV} = 0 \quad (8.38)$$

$$p^{\mu} T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} = 2m T_{\nu}^{P \rightarrow PA} \quad (8.39)$$

$$p'^{\nu} T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} = 2m T_{\mu}^{P \rightarrow AP} \quad (8.40)$$

$$q^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 2m T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} \quad (8.41)$$

$$p^{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0 \quad (8.42)$$

$$p'^{\nu} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 0 \quad (8.43)$$

$$q^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} = 2m T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} \quad (8.44)$$

$$p^{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} = 2m T_{\lambda\nu}^{A \rightarrow PA} \quad (8.45)$$

$$p'^{\nu} T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} = 2m T_{\lambda\mu}^{A \rightarrow PA} \quad (8.46)$$

$$q^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 0 \quad (8.47)$$

$$p^{\mu} T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 0 \quad (8.48)$$

$$p'^{\nu} T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 0 \quad (8.49)$$

$$q^{\lambda} T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow AA} = 0 \quad (8.50)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} = 2m T_{\lambda\nu}^{V\rightarrow PA} \quad (8.51)$$

$$p'^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} = 2m T_{\lambda\mu}^{V\rightarrow AP}. \quad (8.52)$$

Poderíamos igualmente obter um conjunto de relações deste tipo para funções de quatro pontos [5]. Entretanto, devido ao caráter logarítmico das divergências não teríamos a associação “ambiguidades e relações de simetria” como temos nas de um, dois e três pontos, ainda que, por sucessivas contrações, aquelas de quatro pontos associam-se até mesmo com aquelas de um ponto.

8.3 Estratégia para Manipulação e Cálculo de Amplitudes Divergentes

Nas seções seguintes efetuaremos manipulações e cálculos em amplitudes divergentes. O procedimento que utilizaremos será bastante simples (induzido pelos capítulos anteriores):

- Escrever a amplitude, tomar o traço de Dirac e, ao introduzir o sinal de integração, identificar, dentro do conjunto de integrais obtidas, aquelas divergentes.
- Nas integrais divergentes, assumir a presença implícita de uma distribuição regularizadora com as propriedades gerais: par no momento do “loop” e possuindo um limite de conexão (não modificar integrais finitas!).
- Manipular algebricamente os integrandos das integrais divergentes até que a dependência com os momentos externos esteja contida apenas em termos finitos.
- Tomar o limite de conexão nas integrais finitas e proceder a integração, mantendo as integrais divergentes obtidas sem qualquer modificação adicional.

Com este procedimento nós obtemos resultados não comprometidos com regularizações específicas e ainda compatíveis com quaisquer regularizações razoáveis (compatíveis com o segundo item do procedimento acima).

8.4 Ambiguidades

Nesta seção estaremos interessados em investigar o aspecto ambiguidades associadas às possíveis (arbitrárias) escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas dos “loops”. Este aspecto, como já mencionamos, é crucial para a determinação unívoca das amplitudes contendo divergências. Isto se deve ao fato de as relações de conservação de energia-momento não fixarem completamente os momentos das linhas internas. Em cada vértice conectado com um momento externo, tudo o que podemos dizer é que ele é a diferença dos momentos das linhas internas que chegam e saem do referido vértice. Deste modo é possível acrescentar uma quantidade constante, em todas as linhas internas, sem violar qualquer relação de conservação. Uma possível dependência dos resultados finais com esta quantidade arbitrária tornaria as amplitudes físicas igualmente arbitrárias. Além disso, isto implicaria que ao nível da lagrangiana (espaço das coordenadas) estaria sendo destruída a invariância frente as translações no espaço-tempo. Ou seja, estaríamos abrindo mão da homogeneidade do espaço-tempo e, por exemplo, para cada processo físico poderíamos definir uma origem privilegiada para descrever o referido processo. Seria então desejável que um eventual método construído para manipular as amplitudes divergentes pudesse evitar estas ambiguidades consistentemente.

8.4.1 Funções de Green de um Ponto

Nós consideramos inicialmente as funções de Green de um ponto, indicadas pela fig.(8.1). Começamos por calcular a função de um ponto vetorial T_μ^V , que é muito importante e apropriada para ilustrar nosso procedimento. Ela é aquela com maior grau de divergência do modelo: cúbico.

O primeiro passo é escrevê-la em termos do propagador fermiônico e do operador de vértice;

$$T_\mu^V = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{l}) - m} \right\}, \quad (8.53)$$

em seguida tomamos o traço de Dirac para obter:

$$T_\mu^V = 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k+l)^2 - m^2} + l_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+l)^2 - m^2} \right\}. \quad (8.54)$$

Com isso obtivemos duas integrais divergentes com graus cúbico e quadrático. Agora devemos tratar cada uma de acordo com nossa estratégia. Primeiro admitimos a presença de uma função regularizadora implicitamente, adotando um subscrito Λ nas in-

tegrais divergentes. Com isso podemos efetuar manipulações algébricas no integrando reescrevendo-o em uma forma mais adequada para nossos propósitos. Este passo é perfeitamente compatível com qualquer regularização. A integral cubicamente divergente pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{(k+l)^2 - m^2} &= -l_{\nu} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\ &\quad + l_{\nu} l_{\alpha} l_{\beta} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4g_{\alpha\beta}k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{8k_{\alpha}k_{\beta}k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} \right\} \\ &\quad - \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{6l^4 l_{\nu} k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(l^2 + 2l \cdot k)^4 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k+l)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Para obter esta expressão utilizamos apenas identidades ao nível do integrando e o fato de integrandos ímpares no momento do “loop” se anularem. Para este passo qualquer regularização que seja par em k forneceria resultado idêntico. Por fim retiramos o subscrito Λ das duas últimas integrais por serem estas finitas. Nelas removemos a presença da função regularizadora implícita pela utilização do “limite de conexão” desta. Isto quer dizer que no limite do parâmetro de regularização, em que a função regularizadora vai para a unidade, integrais finitas não são modificadas pela presença da regularização. A integração e a tomada deste limite podem perfeitamente ser trocadas de ordem. Com isso nós podemos efetuar a integração dos termos finitos sem restrição. O resultado disto é um cancelamento exato entre as duas integrais. Por sua vez as demais integrais (divergentes) serão mantidas intactas, isto é, sem modificações adicionais.

Consideremos então, para completar o cálculo de T_{μ}^V , a integral quadraticamente divergente. Primeiro colocamos na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+l)^2 - m^2} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &\quad + l_{\mu} l_{\nu} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\ &\quad + \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{l^4}{(k^2 - m^2)^3} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(l^2 + 2l \cdot k)^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k+l)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Pela repetição do procedimento utilizado no caso anterior (os mesmos ingredientes, rigo-rosamente). As duas últimas integrais assim obtidas (finitas) cancelam-se mutuamente.

Reunindo os resultados podemos colocar T_μ^V na forma:

$$T_\mu^V = 4 \left\{ -l_\beta \nabla_{\beta\mu} - \frac{l_\beta l_\alpha l_\nu}{3} \alpha_{\beta\mu\nu} - \frac{l_\alpha l_\beta l_\mu}{3} \Delta_{\beta\alpha} + \frac{l^2 l_\nu}{3} \Delta_{\nu\mu} + l_\mu l_\alpha l_\nu \Delta_{\alpha\nu} \right\}. \quad (8.57)$$

Aqui introduzimos as definições:

$$\bullet_{\alpha\beta\mu\nu} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} - g_{\alpha\beta} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{[(k^2 - m^2)^3]} - g_{\alpha\mu} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\nu}{[(k^2 - m^2)^3]} - g_{\alpha\nu} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\mu}{[(k^2 - m^2)^3]} \quad (8.58)$$

$$\bullet_{\nabla_{\mu\nu}} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \quad (8.59)$$

$$\bullet_{\Delta_{\mu\nu}} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (8.60)$$

Por ora, notemos que todos os termos de T_μ^V dependem do momento arbitrário l com coeficientes que são diferenças de integrais divergentes com o mesmo grau de divergência.

Podemos então passar para a próxima função de um ponto: T^S . Primeiro escrevemos:

$$T^S = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{1}{(k+l) - m} \right\}, \quad (8.61)$$

e então tomamos o traço de Dirac para obter:

$$T^S = 4m \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+l)^2 - m^2}. \quad (8.62)$$

A integral obtida, quadraticamente divergente, já foi desenvolvida. Deste modo temos:

$$T^S = 4m \left\{ I_{quad}(m^2) + l_\beta l_\alpha \Delta_{\beta\alpha} \right\}, \quad (8.63)$$

onde introduzimos a definição:

$$I_{quad}(m^2) = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (8.64)$$

Para completar esta seção nós registramos que as demais funções de um ponto T^P e T_μ^A são identicamente nulas pelas propriedades dos traços envolvendo a matriz γ_5 .

8.4.2 Funções de Green de Dois Pontos

Passemos então ao cálculo de funções de Green de dois pontos representados pela fig.(8.2). Começemos por considerar aquelas mais simples, sem índices de Lorentz. Nós então escrevemos a função de Green escalar-escalar como:

$$T^{SS} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (8.65)$$

O cálculo do traço de Dirac nos leva, após alguma reorganização algébrica, à expressão:

$$T^{SS} = 2 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_1)^2 - m^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_2)^2 - m^2} + [4m^2 - (k_1 - k_2)^2] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (8.66)$$

Para as duas primeiras integrais nós já dispomos dos resultados. Quanto à integral logaritmicamente divergente, nós a reescrevemos como:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_1)^2 - m^2]} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Esta identidade, evidentemente, não é única, mas é conveniente porque mantém a simetria em k_1 e k_2 explícita. As integrais finitas obtidas podem ser facilmente resolvidas, fornecendo:

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_1)^2 - m^2]} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(m^2, m^2, k_1^2; m^2)] \\ \bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} &= \\ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, k_1^2; m^2) + Z_0(m^2, m^2, k_2^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2)] \end{aligned} \quad (8.68)$$

Onde introduzimos as funções de estrutura para integrais de Feynman um “loop”:

$$Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) = \int_0^1 dz z^k \ln \left(\frac{q^2 z(1-z) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)z - \lambda_1^2}{(-\lambda^2)} \right). \quad (8.69)$$

A integral logaritmicamente divergente fica então:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} = \left\{ I_{log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right\}. \quad (8.70)$$

Aqui foi introduzida a divergência básica logarítmica

$$I_{log}(m^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (8.71)$$

A amplitude T^{SS} pode finalmente ser escrita na forma desejada:

$$\begin{aligned} T^{SS} = 4 \left\{ [I_{quad}(m^2)] + \frac{4m^2 - (k_1 - k_2)^2}{2} [I_{log}(m^2)] \right. \\ \left. + \frac{4m^2 - (k_1 - k_2)^2}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right. \\ \left. + \frac{k_{1\alpha} k_{1\beta}}{2} [\Delta_{\alpha\beta}] + \frac{k_{2\rho} k_{2\xi}}{2} [\Delta_{\rho\xi}] \right\}. \quad (8.72) \end{aligned}$$

Notemos que apenas os dois últimos termos são potencialmente ambíguos pois a diferença $(k_1 - k_2)$, que aparece nos termos restantes, é não-ambígua e igual ao momento externo q (fig.(8.2)).

A próxima amplitude a ser calculada é T^{PP} :

$$T^{PP} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma^5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (8.73)$$

que pode ser colocada, após o cálculo do traço, na forma:

$$\begin{aligned} T^{PP} = (-)2 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 - m^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_2)^2 - m^2} \right. \\ \left. - (k_1 - k_2)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (8.74) \end{aligned}$$

Nenhum ingrediente novo é necessário. Assim teremos:

$$\begin{aligned} T^{PP} = 4 \left\{ (-) [I_{quad}(m^2)] + \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} [I_{log}(m^2)] \right. \\ \left. + \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right. \\ \left. - \frac{k_{1\alpha} k_{1\beta}}{2} [\Delta_{\alpha\beta}] - \frac{k_{2\rho} k_{2\xi}}{2} [\Delta_{\rho\xi}] \right\}. \quad (8.75) \end{aligned}$$

Passemos agora para o cálculo de T_μ^{VS} definida por:

$$T_\mu^{VS} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (8.76)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} T_\mu^{VS} = & 4m \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right. \\ & \left. + (k_1 + k_2)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

A integral linearmente divergente, a primeira na expressão acima, ainda não foi tratada. Seguindo nossa estratégia, nós primeiro a reorganizamos para:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} = & (-) \frac{(k_1 + k_2)_\alpha}{2} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 k_\mu}{[(k^2 - m^2)^3][(k + k_1)^2 - m^2]} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)^2 k_\mu}{[(k^2 - m^2)^3][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_\mu}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (8.78)$$

A obtenção do resultado final, neste caso, passa pelo cálculo das integrais finitas. Este cálculo nos leva a:

$$\bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 k_\mu}{[(k^2 - m^2)^3][(k + k_1)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [k_{1\mu}] [Z_1(m^2, m^2, k_1^2; m^2)] \quad (8.79)$$

$$\begin{aligned} \bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k)k_\mu}{[(k^2 - m^2)^2][(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} = \\ = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(-)k_{1\mu} Z_1(m^2, m^2, k_1^2; m^2) - k_{2\mu} Z_1(m^2, m^2, k_2^2; m^2) \right. \\ \left. + (k_1 + k_2)_\mu Z_1(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right]. \end{aligned} \quad (8.80)$$

A integral linearmente divergente fica então:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} = & (-) \frac{(k_1 + k_2)_\alpha}{2} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\alpha}{(k^2 - m^2)^3} \\ & + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{(k_1 + k_2)_\mu}{2} [Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2)], \end{aligned} \quad (8.81)$$

onde, adicionalmente aos resultados eq.(8.79) e eq.(8.80), utilizamos a propriedade:

$$Z_1(m^2, m^2, q^2; m^2) = \frac{Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)}{2}. \quad (8.82)$$

Os resultados eq.(8.70) e eq.(8.81) nos permitem escrever T_μ^{VS} como:

$$T_\mu^{VS} = (-)4m(k_1 + k_2)_\beta [\Delta_{\beta\mu}]. \quad (8.83)$$

Uma observação imediata, a respeito da expressão acima, é que, devido ao caráter ambíguo da soma $(k_1 + k_2)$, T_μ^{VS} pode, em princípio, ser diferente de zero e ambígua.

A próxima função de dois pontos a ser calculada é T_μ^{AP} definida por:

$$T_\mu^{AP} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (8.84)$$

que fica, após o cálculo dos traços envolvidos:

$$T_\mu^{AP} = (-)4m(k_1 - k_2)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (8.85)$$

A utilização do resultado eq.(8.70) nos fornece:

$$T_\mu^{AP} = (-)4m(k_1 - k_2)_\mu \left\{ [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right\}. \quad (8.86)$$

Fica explícito o caráter não-ambíguo de T_μ^{AP} , apesar do grau superficial de divergência ser quadrático.

É interessante notar, a partir das expressões obtidas para as amplitudes T^{SS} , T^{PP} e T_μ^{AP} , a relação:

$$[T^{SS} + T^{PP}] = (-) \frac{2m(k_1 - k_2)_\mu}{(k_1 - k_2)^2} T_\mu^{AP}. \quad (8.87)$$

Prosseguindo, consideramos agora o cálculo de $T_{\mu\nu}^{AV}$, definida por:

$$T_{\mu\nu}^{AV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}, \quad (8.88)$$

que fica:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AV} = & 4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ k_{2\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right. \\ & + k_{1\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\beta}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ & \left. + k_{1\alpha} k_{2\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (8.89) \end{aligned}$$

As integrais obtidas já foram calculadas. A substituição da eq.(8.70) e eq.(8.81) nos leva à expressão:

$$T_{\mu\nu}^{AV} = -4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ \frac{k_{1\xi}k_{2\beta}}{2} [\Delta_{\xi\alpha}] + \frac{k_{2\xi}k_{1\alpha}}{2} [\Delta_{\xi\beta}] \right\}. \quad (8.90)$$

Fica evidente a possibilidade de $T_{\mu\nu}^{AV}$ ser não-nula e ambígua.

Nós agora nos voltamos para a mais interessante das funções de Green de dois pontos do modelo; $T_{\mu\nu}^{VV}$, que nada mais é do que o tensor de polarização do vácuo da QED. Nós a definimos como:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m} \right\}. \quad (8.91)$$

O cálculo do traço nos permite identificar:

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} [T^{PP}], \quad (8.92)$$

onde definimos o tensor:

$$T_{\mu\nu} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu]}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]}. \quad (8.93)$$

Um longo e tedioso cálculo é necessário para, dentro da estratégia que estamos adotando, obter a expressão para a integral quadraticamente divergente que aparece no tensor $T_{\mu\nu}$. O resultado pode ser colocado na forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} = \\ & = \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k^2 - m^2)^2]} \right\} \\ & + \left\{ (-)(k_1^2 + k_2^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k^2 - m^2)^3]} \right. \\ & \quad \left. + (k_{1\xi}k_{1\beta} + k_{2\xi}k_{2\beta} + k_{1\beta}k_{2\xi}) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\xi k_\beta k_\mu k_\nu}{[(k^2 - m^2)^4]} \right\} \\ & + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu [-Z_2(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2)] \right. \\ & \quad \left. + (k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} \left[Z_2(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) - \frac{Z_1(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2)}{4} \right] \right. \\ & \quad \left. + (k_1 + k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu Z_1(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right. \\ & \quad \left. + (k_1 + k_2)_\nu (k_1 - k_2)_\mu Z_1(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right. \\ & \quad \left. - (k_1 + k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\nu Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right\} \end{aligned} \quad (8.94)$$

A utilização deste resultado e da eq.(8.70), eq.(8.81), eq.(8.94) e ainda da propriedade:

$$Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) = -\frac{1}{18} - \frac{m^2}{3q^2} Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) + \frac{Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)}{3}, \quad (8.95)$$

nos permite escrever $T_{\mu\nu}$ na forma:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{4}{3} [(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} - (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu] \times \\ & \times \left\{ I_{log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{2m^2 + (k_1 - k_2)^2}{(k_1 - k_2)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right] \right\} \\ & + 4[\nabla_{\mu\nu}] + 4k_{1\alpha} k_{2\beta} [\alpha\beta\mu\nu - g_{\nu\beta} \Delta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu}] \\ & + (k_1 - k_2)_\alpha (k_1 - k_2)_\beta [\alpha\beta\mu\nu - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \Delta_{\alpha\beta} - \frac{g_{\nu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\mu} - \frac{g_{\mu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\nu}] \\ & - 4 \left[k_{1\alpha} k_{2\beta} + \frac{(k_1 - k_2)_\alpha (k_1 - k_2)_\beta}{2} \right] \Delta_{\alpha\beta} - [T^{PP}] g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

A função $T_{\mu\nu}^{VV}$, após alguma reorganização, fica então:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} = & \frac{4}{3} [(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} - (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu] \times \\ & \times \left\{ [I_{log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + (k_1 - k_2)^2)}{(k_1 - k_2)^2} Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2) \right] \right\} \\ & + 4(\nabla_{\mu\nu}) + 4k_{1\alpha} k_{2\beta} [\alpha\beta\mu\nu - g_{\nu\beta} \Delta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu} - \Delta_{\alpha\beta}] \\ & + (k_1 - k_2)_\alpha (k_1 - k_2)_\beta \left[\alpha\beta\mu\nu - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \Delta_{\mu\nu} - \frac{g_{\nu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\mu} - \frac{g_{\mu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\nu} - \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (8.97)$$

Finalmente a última função de Green de dois pontos a ser calculada é $T_{\mu\nu}^{AA}$. Ela é definida por:

$$T_{\mu\nu}^{AA} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \right\}. \quad (8.98)$$

Após o cálculo do traço podemos identificar a relação:

$$T_{\mu\nu}^{AA} = T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} [T^{SS}], \quad (8.99)$$

e consequentemente:

$$T_{\mu\nu}^{AA} = T_{\mu\nu}^{VV} + 2m \frac{(k_1 - k_2)_\alpha}{(k_1 - k_2)^2} [T_\alpha^{AP}] g_{\mu\nu}. \quad (8.100)$$

Portanto a forma explícita de $T_{\mu\nu}^{AA}$ fica:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AA} = & \frac{4}{3}[(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} - (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu] \times \\
& \times \left\{ [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + (k_1 - k_2)^2)}{(k_1 - k_2)^2} Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2) \right] \right\} \\
& - g_{\mu\nu} 8m^2 \left\{ [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2) \right\} \\
& + 4(\nabla_{\mu\nu}) + 4k_{1\alpha} k_{2\beta} \{ \alpha\beta\mu\nu - g_{\nu\beta} \Delta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu} - \Delta_{\alpha\beta} \} \\
& + (k_1 - k_2)_\alpha (k_1 - k_2)_\beta \left\{ \alpha\beta\mu\nu - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \Delta_{\mu\nu} - \frac{g_{\nu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\mu} - \frac{g_{\mu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \Delta_{\alpha\beta} \right\}. \quad (8.101)
\end{aligned}$$

Isto completa o cálculo das funções de dois pontos uma vez que as restantes: T_μ^{VP} , T^{PS} e T_μ^{AS} são identicamente nulas pelas propriedades dos traços de Dirac envolvendo a presença da matriz γ_5 .

8.4.3 Funções de Green de Três Pontos

A fim de dar prosseguimento à nossa investigação, passemos a nos ocupar, nesta seção, das funções de Green de três pontos, representadas na fig.(8.3). Para a análise que pretendemos não será necessário o cálculo explícito destas funções como fizemos para as funções de um e dois pontos. Para o aspecto ambiguidades necessitamos identificar apenas a parte que dependerá das escolhas arbitrárias dos momentos k_1 , k_2 e k_3 . Para as relações de simetria, como veremos, apenas a forma explícita das funções de um e dois pontos será necessária. Ainda, em virtude da complexidade algébrica listaremos apenas os resultados na forma apropriada para as nossas necessidades imediatas. Nenhum ingrediente além daqueles que introduzimos nas manipulações e cálculos envolvendo as integrais divergentes consideradas será necessário. Para deixar isto mais claro tomaremos um exemplo mais detalhadamente. Para tal selecionamos um caso relativamente simples: T_λ^{VSS} . Nós a definimos por:

$$T_\lambda^{VSS} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}. \quad (8.102)$$

Tomando o traço e promovendo alguma reorganização algébrica, obtemos a expressão:

$$T_\lambda^{VSS} = 2 \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\lambda}{[(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (k_2 + k_3)_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \\
& + (k_3 - k_1)_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \\
& + (k_2 + k_1)_\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\
& + (8m^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 + (k_2 - k_3)^2) \times \\
& \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\lambda}{[k^2 - m^2][(k + k_2 - k_1)^2 - m^2][(k + k_3 - k_1)^2 - m^2]} \\
& + [4m^2 - (k_1 - k_2)^2](k_3 - k_1)_\lambda + [4m^2 - (k_1 - k_3)^2](k_2 - k_1)_\lambda \Big] \times \\
& \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2][(k + k_2 - k_1)^2 - m^2][(k + k_3 - k_1)^2 - m^2]} \Big\} .(8.103)
\end{aligned}$$

Da expressão acima podemos notar que apenas os dois primeiros termos são potencialmente ambíguos. Os restantes são integrais logaritmicamente divergentes ou finitas, ambas com coeficientes não-ambíguos. Nós podemos resolver todas as integrais e obter assim uma expressão analítica para T_λ^{VSS} (ver cap.11). Entretanto, para nossos propósitos imediatos basta escrever isto na forma:

$$T_\lambda^{VSS} = -2(k_2 + k_3)_\xi [\Delta_{\lambda\xi}] + TNA, \quad (8.104)$$

onde TNA significa termos não-ambíguos.

Tendo isto em mente nós listamos as outras funções de três pontos. Primeiro;

$$T_\lambda^{VPP} = 2(k_2 + k_3)_\xi [\Delta_{\lambda\xi}] + TNA. \quad (8.105)$$

Ainda, com um índice de Lorentz apenas, temos:

$$T_\mu^{SAP} = 2(k_1 + k_3)_\xi [\Delta_{\mu\xi}] + TNA. \quad (8.106)$$

Por sua vez:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi}(k_1 + k_2)_\sigma (\Delta_{\xi\sigma}) + TNA, \quad (8.107)$$

e também:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi}(k_1 + k_2)_\sigma (\Delta_{\xi\sigma}) + TNA, \quad (8.108)$$

que mostra uma parte ambígua idêntica àquela de $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$. Estas, entretanto, diferem nos termos não-ambíguos. Por último as mais complexas:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = \left\{ (k_1 + k_2)_\xi \left[-\frac{2}{3}\varepsilon_{\xi\mu\nu\lambda} - \frac{2}{3}g_{\xi\nu}\Delta_{\mu\lambda} - \frac{2}{3}g_{\xi\mu}\Delta_{\nu\lambda} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu} + 2g_{\lambda\mu}\Delta_{\nu\xi} + 2g_{\xi\nu}\Delta_{\lambda\mu} \Big] \\
& + (k_1 + k_3)_\xi \left[-\frac{2}{3}\xi_{\mu\nu\lambda} - \frac{2}{3}g_{\xi\nu}\Delta_{\mu\lambda} - \frac{2}{3}g_{\xi\mu}\Delta_{\nu\lambda} \right. \\
& \left. -\frac{2}{3}g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu} + 2g_{\lambda\nu}\Delta_{\mu\xi} + 2g_{\xi\mu}\Delta_{\lambda\nu} \right] \\
& + (k_2 + k_3)_\xi \left[-\frac{2}{3}\xi_{\mu\nu\lambda} - \frac{2}{3}g_{\xi\nu}\Delta_{\mu\lambda} - \frac{2}{3}g_{\xi\mu}\Delta_{\nu\lambda} \right. \\
& \left. -\frac{2}{3}g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}\Delta_{\lambda\xi} + 2g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu} \right] + TNA \Big\}, \tag{8.109}
\end{aligned}$$

Para completar, a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$ possui a mesma estrutura da parte possivelmente ambígua que $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$, ou seja:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\Big|_{TA} = T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}\Big|_{TA}. \tag{8.110}$$

As outras amplitudes de três pontos não citadas são todas não-ambíguas, ainda que divergentes.

Neste ponto poderíamos considerar todos os resultados obtidos até aqui e fazer uma análise no que diz respeito às ambiguidades. Entretanto, como nos propusemos no início deste estudo, estamos interessados também nas relações de simetria e, nesta altura, nada poderíamos afirmar a respeito das Identidades de Ward pela possível eliminação dos termos ambíguos. Assim, antes de nos dedicarmos à análise dos resultados vamos considerar as Identidades de Ward associadas às amplitudes do modelo.

8.5 Identidades de Ward

Na seção 2 nós introduzimos as relações de simetria a serem satisfeitas entre as amplitudes do modelo sempre que um índice de Lorentz é contraído com o respectivo momento externo (quadrivergência da corrente associada). Nesta seção nós verificaremos sob que condições estas relações são satisfeitas para as amplitudes calculadas. Existem duas maneiras, em princípio equivalentes, de verificarmos a validade das Identidades de Ward para uma certa função de Green. Uma delas envolve o cálculo explícito apenas de funções de Green com um menor número de pontos que aquela que se está investigando, como feito por Gerstein e Jackiw [2]. A outra é simplesmente o cálculo explícito da função de Green e a contração com o momento externo que gera a relação de interesse. Vejamos para as funções de dois pontos, estas duas opções.

Primeiro consideramos a função de dois pontos T_μ^{VS} , definida na eq.(8.76), contraída com o momento externo $(k_1 - k_2)_\mu$:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} (k_1 - k_2) \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \quad (8.111)$$

Agora, antes de calcular o traço, nós utilizamos a identidade

$$(k_1 - k_2) = [k + k_1 - m] - [k + k_2 - m], \quad (8.112)$$

então:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\}. \quad (8.113)$$

Comparando com a eq.(8.61) nós identificamos duas funções de Green de um ponto escalares. A equação acima pode ser representada diagramaticamente, como mostrado na fig.(8.5). É evidente que a corrente vetorial somente será conservada se não houver dependência com os momentos k_1 e k_2 nas funções de um ponto. Entretanto, utilizando o resultado eq.(8.63) para T^S ficamos com:

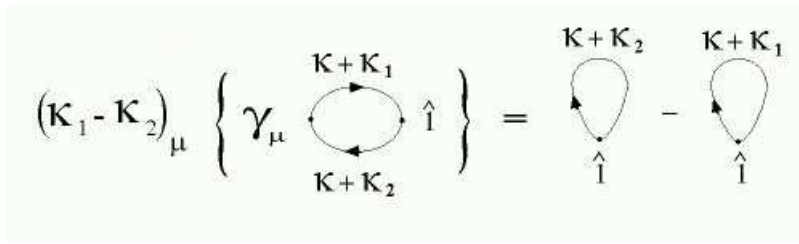


Figura 8.5: Representação diagramática da Identidade de Ward relativa à amplitude T_μ^{VS} .

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = 4m(k_{2\alpha}k_{2\beta} - k_{1\alpha}k_{1\beta})[\Delta_{\alpha\beta}]. \quad (8.114)$$

Aparentemente, no que diz respeito às possíveis escolhas para os valores de k_1 e k_2 , não há como ter $(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = 0$, pois k_1 não pode ser igual a k_2 e muito menos ambos nulos.

Podemos verificar a validade da identidade pela contração de $(k_1 - k_2)_\mu$ com a expressão obtida para T_μ^{VS} , eq.(8.83):

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = -4m(k_1 - k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\beta [\Delta_{\mu\beta}]. \quad (8.115)$$

Passemos agora para a amplitude T_μ^{PA} , definida na eq.(8.84). Primeiro temos:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{PA} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma_5 \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \right\}. \quad (8.116)$$

Agora introduzimos a identidade:

$$(\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma_5 = [\not{k} + \not{k}_1 - m] \gamma_5 + \gamma_5 [\not{k} + \not{k}_2 - m] + 2m \gamma_5, \quad (8.117)$$

no interior do traço, de modo que ficamos com:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{PA} = 2m T^{PP} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \right\} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \right\}. \quad (8.118)$$

Novamente, a identidade, para ser satisfeita, dependerá crucialmente dos valores assumidos pelas funções de um ponto escalar. Agora é exigido que a soma de ambas não dependa de k_1 e k_2 . A representação diagramática neste caso é mostrada na fig.(8.6).

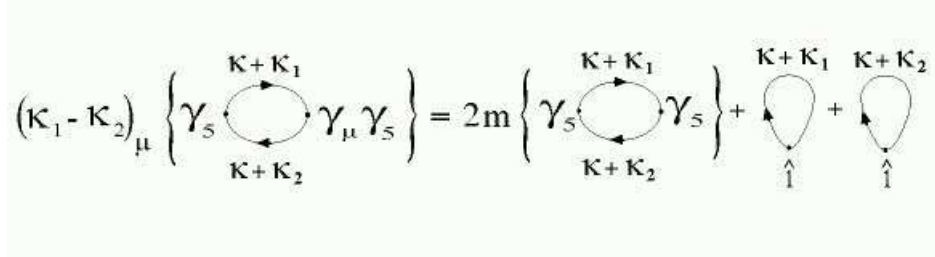


Figura 8.6: Representação diagramática da Identidade de Ward relativa à amplitude T_μ^{PA} .

Substituindo os valores para as funções de um ponto ficamos com:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{PA} = 2m T^{PP} + 2m \left\{ 4I_{quad}(m^2) + 2[k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{2\alpha} k_{2\beta}] \Delta_{\alpha\beta} \right\}. \quad (8.119)$$

Se tomássemos a expressão para T_μ^{PA} , eq.(8.86), contraindo com $(k_1 - k_2)_\mu$, obteríamos:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{PA} = 4m(k_1 - k_2)^2 \left\{ [I_{log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right\}. \quad (8.120)$$

Reorganizando;

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{PA} &= 2m \left\{ -4[I_{quad}(m^2)] + 2(k_1 - k_2)^2 [I_{log}(m^2)] \right. \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (k_1 - k_2)^2 2Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \\
&\quad \left. - 2(k_{1\alpha}k_{1\beta} + k_{2\alpha}k_{2\beta})\Delta_{\alpha\beta} \right\} \\
&\quad + 2m \left\{ 4[I_{quad}(m^2)] + 2(k_{1\alpha}k_{1\beta} + k_{2\alpha}k_{2\beta})\Delta_{\alpha\beta} \right\}, \quad (8.121)
\end{aligned}$$

que concorda com a eq.(8.119). A Identidade de Ward (eq.(8.22)) aparentemente será violada pelos termos ambíguos.

A próxima a ser considerada é a amplitude $T_{\mu\nu}^{AV}$. Aqui temos dois índices de Lorentz, um para uma corrente vetorial e um para uma axial. Repetindo o procedimento anterior obtemos, primeiro para a corrente vetorial:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{AV} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\}. \quad (8.122)
\end{aligned}$$

Identificamos de imediato as funções de um ponto axiais, (fig.(8.1)). Elas são idênticamente nulas pelas propriedades dos traços. Portanto a corrente vetorial é obtida conservada:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{AV} = 0. \quad (8.123)$$

Agora para a corrente axial;

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{AV} &= -2m[T_\nu^{PV}] - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \quad (8.124)
\end{aligned}$$

Novamente temos funções de um ponto axiais (idênticamente nulas), de modo que:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{AV} = -2m[T_\nu^{PV}]. \quad (8.125)$$

Aparentemente o resultado obtido é o desejado pois isto reflete a proporcionalidade correta entre o divergente da corrente axial e a pseudo-escalar. Entretanto, como T_ν^{PV} é idênticamente nula pelas propriedades dos traços isto exige que também $T_{\mu\nu}^{AV}$ seja idênticamente nula. O cálculo direto de $T_{\mu\nu}^{AV}$, eq.(8.90), parece permitir, em princípio, um valor

não-nulo para $T_{\mu\nu}^{AV}$. Ainda, efetuando as contrações na eq.(8.90) obtemos:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{AV} = 0. \quad (8.126)$$

e também:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{AV} = 0. \quad (8.127)$$

Realmente a única possibilidade consistente para isto é que $T_{\mu\nu}^{AV}$ seja identicamente nula. Isto é satisfeito de fato pela eq.(8.90) se para construirmos os momentos arbitrários k_1 e k_2 considerarmos apenas o momento externo q como ingrediente (ignorando a possibilidade de vetores arbitrários constantes). Como tal escolhendo:

$$\begin{cases} k_1 = \alpha q \\ k_2 = (1 - \alpha)q. \end{cases} \quad (8.128)$$

Esta conclusão é ainda mais importante para funções com maior número de pontos (maior número de momentos externos), onde a não restrição das arbitrariedades à combinações lineares de momentos externos (físicos) levaria a um número maior de possibilidades e a propriedades não-físicas para as amplitudes.

Após esta breve discussão, nós voltamos para a função $T_{\mu\nu}^{VV}$. Utilizando a adequada identidade, eq.(8.112), no interior do traço, após a contração, ficamos com:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (8.129)$$

Substituindo o resultado para a função de Green de um ponto vetorial, eq.(8.57), ficaremos com:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{VV} &= 4 \left\{ (-)k_{2\alpha} \nabla_{\alpha\mu} - \frac{k_{2\alpha} k_{2\beta} k_{2\rho}}{3} \alpha\beta\rho\mu \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{2\mu} k_{2\alpha} k_{2\beta}}{3} \Delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} k_2^2 k_{2\rho} \Delta_{\rho\mu} + k_{2\mu} k_{2\alpha} k_{2\beta} \Delta_{\alpha\beta} \right\} \\ &\quad - 4 \left\{ (-)k_{1\alpha} \nabla_{\alpha\mu} - \frac{k_{1\alpha} k_{1\beta} k_{1\rho}}{3} \alpha\beta\rho\mu \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta}}{3} \Delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} k_1^2 k_{1\rho} \Delta_{\rho\mu} + k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta} \Delta_{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (8.130)$$

A conservação da corrente vetorial exige que o lado direito se anule identicamente. Aparentemente isto não pode ser satisfeito com escolhas de valores de k_1 e k_2 . A outra corrente vetorial, associada ao índice μ de $T_{\mu\nu}^{VV}$ leva a conclusões idênticas.

Passemos então para $T_{\mu\nu}^{AA}$. Para esta função de Green temos duas correntes axiais. Isto nos permite relacioná-las às amplitudes T_{μ}^{AP} e T^{PP} por contrações sucessivas com o momento externo. Assim contraindo com $(k_1 - k_2)_{\mu}$ e utilizando a eq.(8.117) no interior do traço, ficamos com:

$$(k_1 - k_2)_{\nu} T_{\mu\nu}^{AA} = -2m[T_{\mu}^{AP}] + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_{\mu} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\}, \quad (8.131)$$

onde identificamos novamente as funções de um ponto vetoriais, fig.(8.78).

$$(K_1 - K_2)_{\nu} \left\{ \gamma_{\mu} \gamma_5 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \gamma_{\nu} \gamma_5 \right\} = 2m \left\{ \gamma_{\mu} \gamma_5 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \gamma_5 \right\} + \begin{array}{c} K+K_1 \\ \circlearrowleft \\ \gamma_{\mu} \end{array} - \begin{array}{c} K+K_2 \\ \circlearrowleft \\ \gamma_{\mu} \end{array}$$

Figura 8.7: Representação diagramática da Identidade de Ward $(k_1 - k_2)_{\nu} T_{\mu\nu}^{AA} = 2m T_{\mu}^{AP}$.

Substituindo os resultados para as funções T_{μ}^V fica:

$$(k_1 - k_2)_{\nu} T_{\mu\nu}^{AA} = 4 \left\{ \begin{aligned} &[-k_{2\beta} \nabla_{\beta\mu} - k_{2\alpha} k_{2\beta} k_{2\nu} \alpha\beta\nu\mu \\ &- \frac{k_{2\mu} k_{2\alpha} k_{2\beta}}{3} \Delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} k_2^2 k_{2\rho} \Delta_{\rho\mu} + k_{2\mu} k_{2\alpha} k_{2\beta} \Delta_{\alpha\beta} \\ &[-k_{1\alpha} \Delta_{\alpha\mu} - k_{1\alpha} k_{1\beta} k_{1\rho} \alpha\beta\rho\mu \\ &- \frac{k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\beta}}{3} \Delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} k_1^2 k_{1\rho} \Delta_{\rho\mu} \end{aligned} \right\} + 2m T_{\mu}^{AP}. \quad (8.132)$$

A manutenção da Identidade de Ward (eq.(8.25)) depende de condições semelhantes àquelas obtidas para a conservação da corrente vetorial em $T_{\mu\nu}^{VV}$.

A mesma identificação poderia ser feita tomando a forma explícita, eq.(8.101) para $T_{\mu\nu}^{AA}$ e então contraindo com $(k_1 - k_2)_\nu$. Isto nos forneceria:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{AA} &= 4 \{ (k_1 - k_2)_\nu [\nabla_{\mu\nu}] \\
&\quad + (k_1 - k_2)_\nu k_{1\alpha} k_{2\beta} [\alpha\beta\nu\mu - g_{\nu\beta} \Delta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu} - g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}] \\
&\quad + (k_1 - k_2)_\alpha (k_1 - k_2)_\beta (k_1 - k_2)_\nu \times \\
&\quad \times \left[\alpha\beta\mu\nu - \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \Delta_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\beta}}{2} \Delta_{\alpha\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \Delta_{\alpha\beta} \right] \} \\
&\quad + 2m T_\mu^{AP}
\end{aligned} \tag{8.133}$$

Nós podemos agora impor uma nova contração, desta vez com $(k_1 - k_2)_\mu$ e verificar a Identidade de Ward da eq.(8.26). fig.(8.8). A utilização do resultado eq.(8.121) obtido para $(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{AP}$ nos mostra, entretanto, que nenhuma condição nova surgiria deste cálculo.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)_\mu (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)_\nu \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \begin{array}{c} \text{K} + \mathbf{K}_1 \\ \circlearrowleft \\ \text{K} + \mathbf{K}_2 \end{array} \gamma_\nu \gamma_5 \right\} &= -(2m)^2 \left\{ \gamma_5 \begin{array}{c} \text{K} + \mathbf{K}_1 \\ \circlearrowleft \\ \text{K} + \mathbf{K}_2 \end{array} \gamma_5 + \begin{array}{c} \text{K} + \mathbf{K}_1 \\ \text{O} \\ \hat{1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{K} + \mathbf{K}_2 \\ \text{O} \\ \hat{1} \end{array} \right\} \\
&\quad + (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)_\mu \left\{ \begin{array}{c} \text{K} + \mathbf{K}_1 \\ \text{O} \\ \gamma_\mu \end{array} + \begin{array}{c} \text{K} + \mathbf{K}_2 \\ \text{O} \\ \gamma_\mu \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Figura 8.8: Representação diagramática para as duas correntes axiais de $T_{\mu\nu}^{AA}$ sucessivamente contraídas com o momento externo.

Passemos agora para as funções de três pontos. Neste caso as investigações não mais serão feitas pelas duas possibilidades, como fizemos no caso das funções de dois pontos. Consideraremos apenas aquele caminho que faz uso do cálculo explícito de funções de dois pontos, pela contração desejada ainda no interior do traço, como feito na ref.[1].

Inicialmente tomemos a amplitude para o processo $V \rightarrow SS$. Para este caso, ilustrado na fig.(8.9), escrevemos na convenção adotada:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} (k_3 - k_2) \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}, \tag{8.134}$$

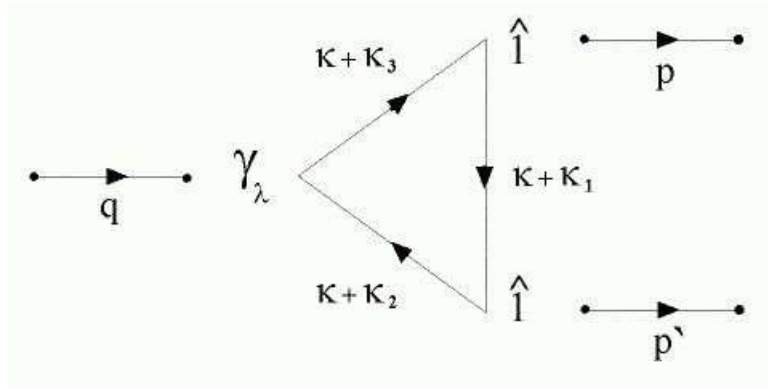


Figura 8.9: Diagrama para o “canal direto” da amplitude T_λ^{VSS} , seguindo a convenção adotada na seção 2.

onde já efetuamos a contração com o momento externo q_λ associado ao vértice com o operador vetorial. Agora podemos utilizar no interior do traço a identidade:

$$(\not{k}_3 - \not{k}_2) = [\not{k} + \not{k}_3 - m] - [\not{k} + \not{k}_2 - m], \quad (8.135)$$

e então reescrever a a eq.(8.134) na forma:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(k_1, m; k_2, m; k_3, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \right\} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3 - m]} \right\}, \quad (8.136)$$

onde podemos identificar os termos com funções de dois pontos escalar-escalar, como indicado na fig.(8.10), ou seja:

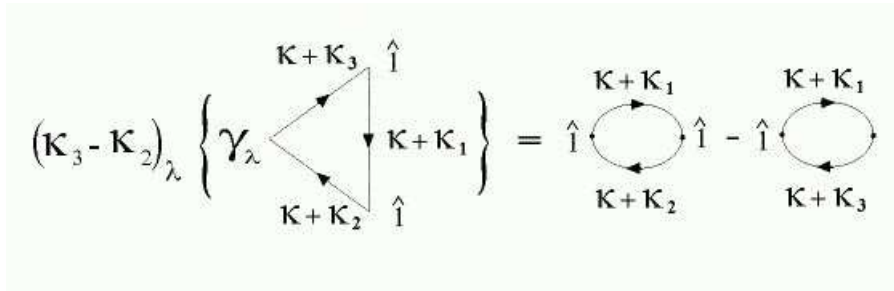


Figura 8.10: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}$.

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(k_1, m; k_2, m; k_3, m) = T^{SS}(k_1, m; k_2, m) - T^{SS}(k_1, m; k_3, m). \quad (8.137)$$

Uma rápida comparação com a expressão obtida para T^{SS} , eq.(8.72), nos revela a presença de termos não-ambíguos dependentes das diferenças $(k_1 - k_2)^2$ e $(k_1 - k_3)^2$ que são, no presente caso, os momentos externos p'^2 e p^2 , respectivamente. Explicitamente:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(k_1, m; k_2, m; k_3, m) &= \\
&= 2 \left\{ (4m^2 - p'^2) \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, p'^2; m^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - (4m^2 - p^2) \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) \right] \right\} \\
&\quad + 2(k_{2\alpha}k_{2\beta} - k_{3\alpha}k_{3\beta})\Delta_{\alpha\beta}. \tag{8.138}
\end{aligned}$$

Para verificar a relação de simetria envolvida, a conservação da corrente vetorial, devemos acrescentar a este resultado aquele correspondente ao “canal cruzado”, ilustrado na fig.(8.11).

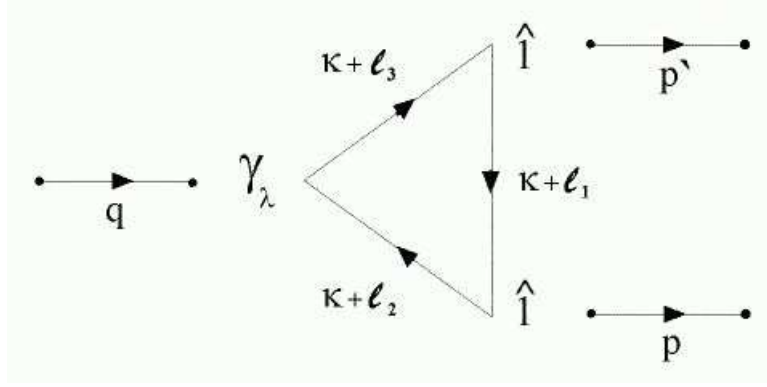


Figura 8.11: Diagrama correspondente ao “canal cruzado” de $T_\lambda^{V \rightarrow SS}$.

Para este podemos escrever:

$$\begin{aligned}
(l_3 - l_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(l_1, m; l_2, m; l_3, m) &= \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + l_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + l_2 - m]} (l_3 - l_2) \frac{1}{[k + l_3 - m]} \right\}, \tag{8.139}
\end{aligned}$$

que fornece;

$$\begin{aligned}
(l_3 - l_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(l_1, m; l_2, m; l_3, m) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + l_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + l_2 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + l_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + l_3 - m]} \right\}. \tag{8.140}
\end{aligned}$$

As expressões eq.(8.136) e eq.(8.140) obtidas para os dois canais, são idênticas exceto por termos rotulados os momentos internos arbitrários por l_1 , l_2 e l_3 . Fizemos isso propositalmente para provocar, neste ponto, uma discussão bastante relevante, enquanto discutimos a respeito das ambiguidades. A questão é: existe alguma razão para que os momentos internos sejam tomados iguais em contribuições de diagramas diferentes? Sendo estes momentos arbitrários tudo o que podemos afirmar a respeito do significado dos $k's$ é o valor das diferenças:

$$\begin{cases} (k_3 - k_1) = p \\ (k_1 - k_2) = p' \\ (k_3 - k_2) = q \end{cases} . \quad (8.141)$$

Sobre os produtos ou soma destes, nada pode ser dito. Os resultados obtidos, eq.(8.72) para a função T^{SS} exibe produtos de $k's$. Quando incluímos o diagrama cruzado as diferenças relacionadas aos momentos externos, mantidos os momentos $k's$ seriam então:

$$\begin{cases} (k_3 - k_1) = p' \\ (k_1 - k_2) = p \\ (k_3 - k_2) = q. \end{cases} \quad (8.142)$$

Tendo em vista a mudança do significado das diferenças entre os momentos k_1 e k_2 e k_1 e k_3 teríamos alguma razão para interpretar os produtos $k_{1\alpha}k_{1\beta}$, $k_{2\alpha}k_{2\beta}$ e $k_{3\alpha}k_{3\beta}$ como tendo significado idêntico para ambos os diagramas? Um vez que nenhum esforço adicional considerável é necessário para incluir também este aspecto na discussão, tomaremos os significados dos termos ambíguos, em princípio, diferentes. Denominaremos por $k's$ os momentos arbitrários para os diagramas diretos e por $l's$ aqueles correspondentes ao diagrama cruzado.

Prosseguindo, substituímos os resultados para as funções de dois pontos envolvidas na eq.(8.140), obtendo:

$$\begin{aligned} (l_3 - l_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(l_1, m; l_2, m; l_3, m) = \\ = 2 \left\{ (4m^2 - p^2) \left[I_{log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) \right] \right. \\ \left. - (4m^2 - p'^2) \left[I_{log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, p'^2; m^2) \right] \right\} \\ + 2(l_{2\alpha}l_{2\beta} - l_{3\alpha}l_{3\beta})\Delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (8.143)$$

Somando então as contribuições eq.(8.138) e eq.(8.143) obtemos para a Identidade de Ward em questão:

$$q_\lambda T_\lambda^{V \rightarrow SS} = 2(k_{2\alpha}k_{2\beta} - k_{3\alpha}k_{3\beta})\Delta_{\alpha\beta} + 2(l_{2\alpha}l_{2\beta} - l_{3\alpha}l_{3\beta})\Delta_{\alpha\beta}. \quad (8.144)$$

Assim, no nosso tratamento, a conservação da corrente vetorial envolvida no processo $V \rightarrow SS$ foi reduzida a uma condição bastante simples completamente ambígua e contendo a diferença $\Delta_{\alpha\beta}$ entre integrais logaritmicamente divergentes.

Nós então passamos para a próxima Identidade de Ward, aquela para a transição $V \rightarrow PP$. Esta contração, que envolve funções de dois pontos pseudo-escalar-pseudo-escalar, está representada na fig.(8.12).

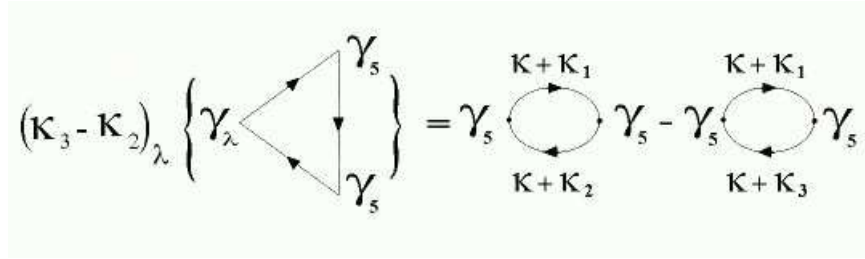


Figura 8.12: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VPP}$.

Substituindo as expressões para as funções de dois pontos envolvidas e somando os dois diagramas obtemos:

$$q_\lambda T_\lambda^{V \rightarrow PP} = 2(k_{3\alpha}k_{3\beta} - k_{2\alpha}k_{2\beta})\Delta_{\alpha\beta} + 2(l_{3\alpha}l_{3\beta} - l_{2\alpha}l_{2\beta})\Delta_{\alpha\beta}. \quad (8.145)$$

Ainda com um índice de Lorentz temos o processo $A \rightarrow SP$, em cujo caso escrevemos:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} (k_3 - k_2) \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}. \quad (8.146)$$

Novamente podemos fazer uso de uma identidade no interior do traço:

$$(k_2 - k_3) \gamma_5 = \gamma_5 [k + k_3 - m] + [k + k_2 - m] \gamma_5 + 2m \gamma_5 \quad (8.147)$$

Com isso reescrevemos a eq.(8.146) na forma:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} &= -2m \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma^5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma^5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right] \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right] \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\gamma^5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma^5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right]. \tag{8.148}
\end{aligned}$$

Aqui é possível identificar a função de três pontos T^{PSP} e as funções de dois pontos T^{PP} e T^{SS} , como indicado diagramaticamente na fig.(8.13), isto é:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} &= -2m T^{PSP}(k_1, m; k_2, m; k_3, m) - T^{PP}(k_1, m; k_2, m) \\
&\quad - T^{SS}(k_1, m; k_3, m). \tag{8.149}
\end{aligned}$$

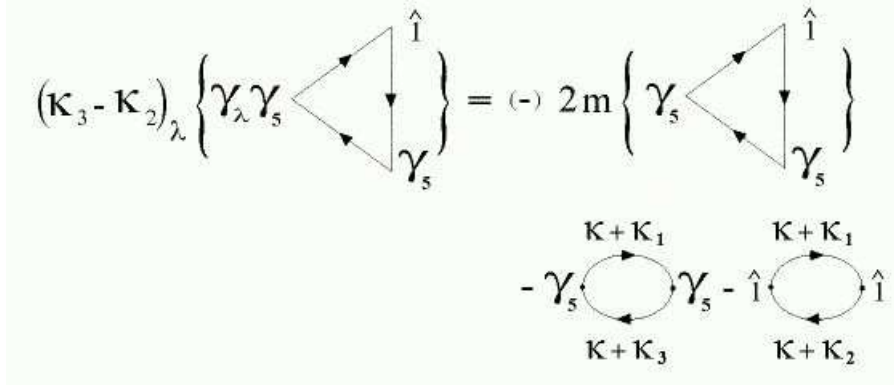


Figura 8.13: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP}$.

Adicionando a contribuição do diagrama cruzado:

$$q_\lambda T_\lambda^{A \rightarrow SP} = -2m [T^{P \rightarrow SP}] - 2(k_{3\alpha} k_{3\beta} - k_{2\alpha} k_{2\beta}) \Delta_{\alpha\beta} - 2(l_{3\alpha} l_{3\beta} - l_{2\alpha} l_{2\beta}) \Delta_{\alpha\beta}. \tag{8.150}$$

Obtivemos, portanto, a correta proporcionalidade entre as correntes axial e pseudo-escalar mais termos potencialmente ambíguos.

Passemos a considerar agora casos com dois índices de Lorentz. De início tomemos o processo $S \rightarrow VV$, para o qual temos duas correntes vetoriais que devem ser conservadas simultaneamente. A contração com o momento externo p_μ fornece:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \tag{8.151}
\end{aligned}$$

As funções de dois pontos envolvidas agora são do tipo T_ν^{VS} , como indicado na fig.(8.14).

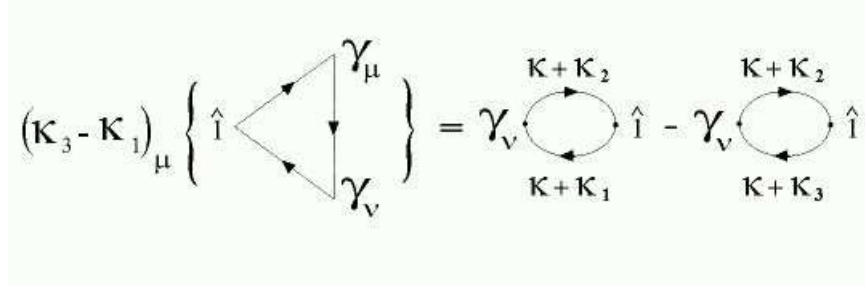


Figura 8.14: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV}$.

Utilizando a eq.(8.83) e incluindo o correspondente diagrama cruzado obtemos:

$$\begin{aligned} p_\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} &= 4m(k_3 - k_1)_\alpha \Delta_{\alpha\nu} + 4m(l_3 - l_1)_\alpha \Delta_{\alpha\nu} \\ &= 4m(p + p')_\alpha \Delta_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (8.152)$$

Da mesma forma obtemos:

$$\begin{aligned} p'_\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} &= 4m(k_1 - k_2)_\alpha \Delta_{\alpha\mu} + 4m(l_1 - l_2)_\alpha \Delta_{\alpha\mu} \\ &= 4m(p + p')_\alpha \Delta_{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (8.153)$$

Para estes dois últimos resultados merece o registro do caráter não-ambíguo. Isto significa que podemos ter violação das relações de simetria, dependendo do valor de $\Delta_{\alpha\mu}$, sem que isto esteja associado a ambiguidades.

Tratemos agora do processo $S \rightarrow AA$. Primeiramente escrevemos:

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SAA} &= 2m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_3 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (8.154)$$

Em cujo resultado identificamos as funções T_ν^{SPA} , $T_\nu^{SV}(k_3, m; k_2, m)$ e $T_\nu^{AP}(k_2, m; k_1, m)$, podendo representá-lo diagramaticamente como na fig.(8.15). Utilizando os resultados eq.(8.83) e eq.(8.86), ficamos com:

$$p_\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} = 2m[T_\nu^{S \rightarrow PA}] - 4m(k_1 + k_3)_\alpha \Delta_{\alpha\nu} - 4m(l_1 + l_3)_\alpha \Delta_{\alpha\nu}. \quad (8.155)$$

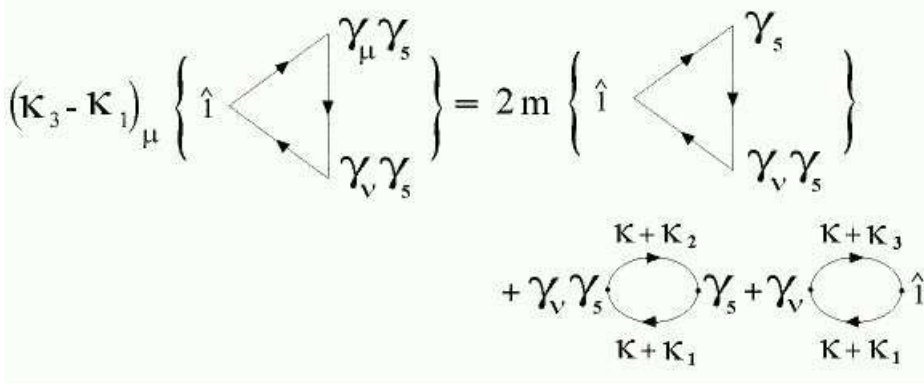


Figura 8.15: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SAA}$.

De modo semelhante para a outra corrente axial:

$$p'_\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} = 2m[T_\mu^{S \rightarrow AP}] - 4m(k_1 + k_2)_\alpha \Delta_{\alpha\mu} - 4m(l_1 + l_2)_\alpha \Delta_{\alpha\mu}. \quad (8.156)$$

Consideremos agora o interessante caso $V \rightarrow AP$. Para o qual obtemos

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VAP} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\}. \quad (8.157)$$

O que mostra que as funções de dois pontos envolvidas são do tipo T_μ^{AP} , como se pode perceber na representação diagramática da fig.(8.16). Apesar do caráter divergente, estas funções são não-ambíguas, como indica a eq.(8.87). A inclusão do diagrama cruzado nos conduz a identidade:

$$q_\lambda T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow AP} = 0. \quad (8.158)$$

Isto mostra que obtemos a corrente vetorial conservada sem nenhuma restrição. Para agora verificarmos a Identidade de Ward relativa à corrente axial fazemos:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{VAP} = 2m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}$$

Figura 8.16: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VAP}$.

$$\begin{aligned}
 & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} \\
 & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_3 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \quad (8.159)
 \end{aligned}$$

Esta nos permite identificar as funções de dois e três pontos envolvidas, como mostrado diagramaticamente na fig.(8.17). Adicionando o diagrama cruzado obtemos finalmente:

Figura 8.17: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{VAP}$.

$$p_\mu T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow AP} = 2m[T_\lambda^{V \rightarrow PP}] - 4m(k_2 + k_3)_\alpha \Delta_{\alpha\lambda} - 4m(l_2 + l_3)_\alpha \Delta_{\alpha\lambda}. \quad (8.160)$$

Resultado novamente expresso em termos das diferenças $\Delta_{\alpha\lambda}$. Consideremos agora a função de Green relativa ao processo $P \rightarrow VV$, que inicialmente escrevemos na forma:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}$$

$$- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \quad (8.161)$$

Neste caso verificamos que as funções de dois pontos envolvidas são do tipo T_μ^{PV} , que fornece uma representação diagramática mostrada na fig.(8.18). Estas funções, como já mencionamos, são identicamente nulas devido às propriedades dos traços envolvendo a matriz γ_5 . Com isso obtemos sem restrições a identidade:

$$p_\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = 0, \quad (8.162)$$

e de modo semelhante:

$$p'_\nu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = 0. \quad (8.163)$$

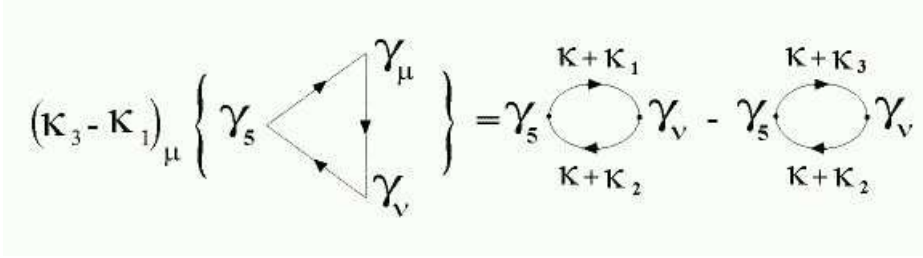


Figura 8.18: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{PVV}$.

De maneira análoga, para o processo $V \rightarrow AS$ verificamos inicialmente a identidade relativa à corrente vetorial;

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VAS} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}. \quad (8.164)$$

As funções de dois pontos envolvidas são do tipo T_μ^{AS} , situação mostrada na fig.(8.19). Uma vez que estas são identicamente nulas, nós temos:

$$q_\lambda T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow AS} = 0. \quad (8.165)$$

Agora, tomando a divergência da corrente axial com o momento externo p_μ ;

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{VAS} = 2m \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}$$

Figura 8.19: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VAS}$.

$$\begin{aligned}
 & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \frac{\hat{1}}{[k + k_2 - m]} \right\} \\
 & + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}. \quad (8.166)
 \end{aligned}$$

Novamente as contribuições das funções de dois pontos, indicadas na fig.(8.20), são nulas, desta forma, com a inclusão do canal cruzado, ficamos com:

$$p_\mu T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow AS} = 2m T_\lambda^{V \rightarrow PS}. \quad (8.167)$$

Figura 8.20: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{VAS}$.

Fornecendo assim a proporcionalidade correta entre as correntes axial e pseudo-escalar.

Com características idênticas, as correntes axiais envolvidas no processo $P \rightarrow AA$ levam imediatamente às relações:

$$\begin{cases} p_\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} = 2m T_\nu^{P \rightarrow PA} \\ p_\nu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} = 2m T_\mu^{P \rightarrow AP}, \end{cases} \quad (8.168)$$

sem quaisquer restrições.

Passemos agora a considerar as funções de três pontos com três índices de Lorentz. Tomemos inicialmente o processo $V \rightarrow VV$, para o qual temos:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}. \quad (8.169)$$

As funções de dois pontos presentes na Identidade de Ward são do tipo $T_{\mu\nu}^{VV}$, como indicado na fig.(8.21). Verificando-se os resultados obtidos para estas (ver eq.(8.97)), notamos funções potencialmente ambíguas. A inclusão da contribuição do canal cruzado e a substituição da eq.(8.97) nos leva a:

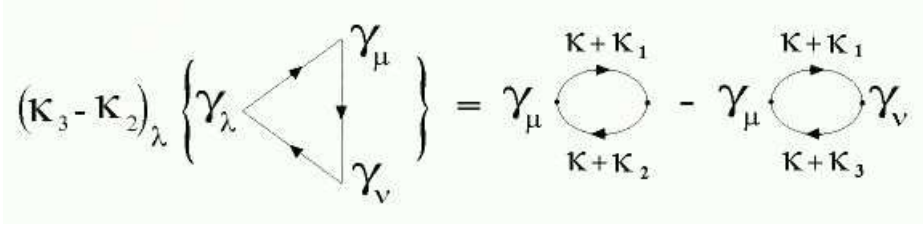


Figura 8.21: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$.

$$q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 4 [k_{1\alpha} (k_2 - k_3)_\beta + l_{1\alpha} (l_2 - l_3)_\beta] [\alpha\beta\mu\nu - g_{\nu\beta} \Delta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\nu} - g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}]. \quad (8.170)$$

De modo análogo, para as outras correntes vetoriais teremos:

$$p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 4 [k_{2\alpha} (k_1 - k_3)_\beta + l_{3\alpha} (l_2 - l_1)_\beta] [\alpha\beta\nu\lambda - g_{\beta\lambda} \Delta_{\alpha\nu} - g_{\nu\beta} \Delta_{\alpha\lambda} - g_{\nu\lambda} \Delta_{\alpha\beta}], \quad (8.171)$$

e também;

$$p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VV} = 4 [k_{3\alpha} (k_2 - k_1)_\beta + l_{2\alpha} (l_1 - l_3)_\beta] [\alpha\beta\mu\lambda - g_{\mu\beta} \Delta_{\alpha\lambda} - g_{\lambda\beta} \Delta_{\alpha\mu} - g_{\alpha\beta} \Delta_{\lambda\mu}]. \quad (8.172)$$

Passemos agora à verificação das Identidades de Ward relativas ao processo $V \rightarrow AA$. Primeiramente tomemos:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAA} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}. \quad (8.173)$$

Em cujo caso identificamos as funções de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AA}$, como indicado diagramaticamente na fig.(8.22). Substituindo os resultados para estas, temos:

$$q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} = 4 [k_{1\alpha}(k_2 - k_3)_\beta + l_{1\alpha}(l_2 - l_3)_\beta] [\alpha\beta\mu\nu - g_{\nu\beta}\Delta_{\alpha\mu} - g_{\mu\beta}\Delta_{\alpha\nu} - g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}]. \quad (8.174)$$

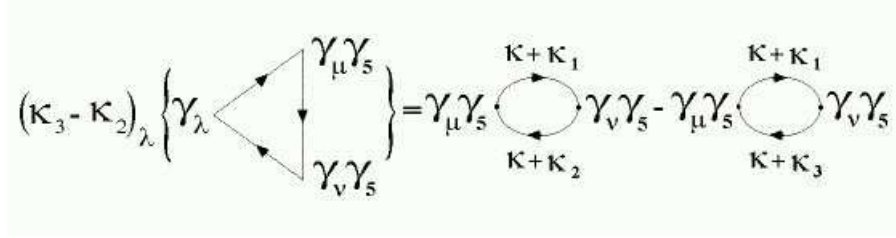


Figura 8.22: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$.

Para a corrente axial associada ao índice μ , temos:

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAA} &= 2m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} \\ &- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}, \end{aligned} \quad (8.175)$$

onde, como indicado na fig.(8.23), as funções envolvidas são as funções $T_{\mu\nu}^{AA}$ e $T_{\mu\nu}^{VV}$. Substituindo as expressões correspondentes e incluindo o diagrama cruzado,obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} &= 2m [T_{\lambda\nu}^{V\rightarrow PA}] + 4 [k_{2\beta}(k_1 - k_3)_\alpha + l_{3\alpha}(l_2 - l_1)_\beta] \times \\ &\times [\alpha\beta\lambda\nu - g_{\nu\beta}\Delta_{\lambda\alpha} - g_{\lambda\beta}\Delta_{\nu\alpha} - g_{\lambda\nu}\Delta_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (8.176)$$

De modo idêntico, a corrente axial associada ao índice ν fornece:

$$\begin{aligned} p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} &= 2m [T_{\lambda\mu}^{V\rightarrow AP}] + 4 [k_{3\alpha}(k_2 - k_1)_\beta + l_{2\beta}(l_1 - l_3)_\alpha] \times \\ &\times [\alpha\beta\lambda\mu - g_{\mu\beta}\Delta_{\lambda\alpha} - g_{\lambda\beta}\Delta_{\mu\alpha} - g_{\lambda\mu}\Delta_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (8.177)$$

Para concluir a análise de *todas* as Identidades de Ward envolvendo funções de um dois e três pontos resta apenas aquelas referentes a $A \rightarrow VV$ e $A \rightarrow AA$. A primeira, que

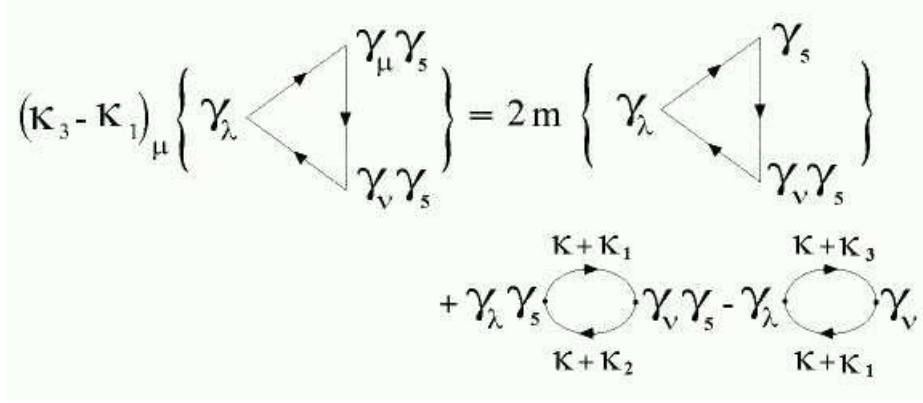


Figura 8.23: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$.

já foi estudada no capítulo anterior, será incluída apenas por completudeza. Primeiramente consideremos a corrente axial associada ao índice λ :

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= -2m \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} \quad (8.178)
\end{aligned}$$

Da expressão acima podemos identificar agora a função de três pontos $T_{\mu\nu}^{PVV}$ e as de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AV}$, situação representada pela fig.(8.24). Substituindo os resultados para as funções de dois pontos e incluindo o diagrama cruzado temos:

$$\begin{aligned}
q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= -2m [T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV}] \\
&\quad + 2i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} [(k_{1\xi} k_{2\beta} + k_{3\xi} k_{1\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (k_{2\xi} k_{1\alpha} + k_{1\xi} k_{3\alpha}) \Delta_{\xi\beta}] \\
&\quad - 2i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} [(l_{3\xi} l_{1\beta} + l_{1\xi} l_{2\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (l_{1\xi} l_{3\alpha} + l_{2\xi} l_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta}]. \quad (8.179)
\end{aligned}$$

Para a corrente vetorial associada ao índice μ , temos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\} \\
&\quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \right\}, \quad (8.180)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_2)_\lambda \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \nearrow \gamma_\mu \\ \searrow \gamma_\nu \end{array} \right\} &= (-) 2m \left\{ \gamma_5 \begin{array}{c} \nearrow \gamma_\mu \\ \searrow \gamma_\nu \end{array} \right\} \\
&+ \gamma_\mu \gamma_5 \begin{array}{c} \circlearrowleft \mathbf{K} + \mathbf{K}_1 \\ \circlearrowright \mathbf{K} + \mathbf{K}_2 \end{array} \gamma_\nu - \gamma_\mu \gamma_5 \begin{array}{c} \circlearrowleft \mathbf{K} + \mathbf{K}_3 \\ \circlearrowright \mathbf{K} + \mathbf{K}_1 \end{array} \gamma_\mu
\end{aligned}$$

Figura 8.24: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$.

onde identificamos as funções de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AV}$, como mostrado na fig.(8.25). Com os resultados anteriores e a inclusão do diagrama cruzado obtemos:

$$\begin{aligned}
p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= \\
&2i\varepsilon_{\lambda\alpha\nu\beta} [k_{2\beta}(k_1 - k_3)_\xi \Delta_{\xi\alpha} + k_{2\xi}(k_1 - k_3)_\alpha \Delta_{\xi\beta}] \\
&+ 2i\varepsilon_{\lambda\alpha\nu\beta} [l_{3\xi}(l_1 - l_2)_\beta \Delta_{\xi\alpha} + l_{3\alpha}(l_1 - l_2)_\xi \Delta_{\xi\beta}]. \tag{8.181}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_1)_\mu \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \nearrow \gamma_\mu \\ \searrow \gamma_\nu \end{array} \right\} &= \gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \circlearrowleft \mathbf{K} + \mathbf{K}_1 \\ \circlearrowright \mathbf{K} + \mathbf{K}_2 \end{array} \gamma_\nu - \gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \circlearrowleft \mathbf{K} + \mathbf{K}_3 \\ \circlearrowright \mathbf{K} + \mathbf{K}_2 \end{array} \gamma_\nu
\end{aligned}$$

Figura 8.25: Representação diagramática para $(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$.

De modo completamente análogo verificamos a identidade associada ao índice ν :

$$\begin{aligned}
p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} &= \\
&2i\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta} [k_{3\xi}(k_2 - k_1)_\beta \Delta_{\xi\beta} + k_{3\alpha}(k_2 - k_1)_\xi \Delta_{\xi\beta}] \\
&+ 2i\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta} [l_{2\beta}(l_1 - l_3)_\xi \Delta_{\xi\alpha} + l_{2\xi}(l_1 - l_3)_\alpha \Delta_{\xi\beta}]. \tag{8.182}
\end{aligned}$$

Por fim tratemos das Identidades de Ward da amplitude $A \rightarrow AA$. Inicialmente

tomemos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= -2m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_\mu \frac{1}{[k + k_1 - m]} \right\} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_3 - m]} \right\}. \tag{8.183}
\end{aligned}$$

Identificamos então a função de três pontos $T_{\mu\nu}^{PAA}$ e as de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AV}$, como indicado na fig.(8.26). Substituindo as expressões para estas amplitudes e incluindo também o diagrama cruzado obtemos:

$$\begin{aligned}
q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} &= -2m T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} \\
&+ 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (k_{2\xi} k_{1\beta} + k_{1\xi} k_{3\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (k_{1\xi} k_{2\alpha} + k_{3\xi} k_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta} \} \\
&- 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (l_{2\xi} l_{1\beta} + l_{1\xi} l_{3\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (l_{1\xi} l_{2\alpha} + l_{3\xi} l_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta} \}. \tag{8.184}
\end{aligned}$$

De modo semelhante;

$$\begin{aligned}
p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} &= 2m T_{\lambda\nu}^{A \rightarrow PA} + 2i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \{ (k_{2\xi} k_{1\beta} + k_{1\xi} k_{3\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (k_{1\xi} k_{2\alpha} + k_{3\xi} k_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta} \} \\
&- 2i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \{ (l_{2\xi} l_{1\beta} + l_{1\xi} l_{3\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (l_{1\xi} l_{2\alpha} + l_{3\xi} l_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta} \}. \tag{8.185}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} &= -2m T_{\lambda\mu}^{A \rightarrow AP} + 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (k_{2\xi} k_{1\beta} + k_{1\xi} k_{3\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (k_{1\xi} k_{2\alpha} + k_{3\xi} k_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta} \} \\
&- 2i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \{ (l_{2\xi} l_{1\beta} + l_{1\xi} l_{3\beta}) \Delta_{\xi\alpha} + (l_{1\xi} l_{2\alpha} + l_{3\xi} l_{1\alpha}) \Delta_{\xi\beta} \}, \tag{8.186}
\end{aligned}$$

o que completa nossos objetivos para este capítulo. Vamos então analisar e discutir os resultados obtidos.

8.6 Conclusões

Para um modelo de férmions de spin 1/2 livres e com massas iguais, definido na seção 2, nós estabelecemos Identidades de Ward a serem satisfeitas pelas funções de Green de um, dois e três pontos. Na seção 4 calculamos explicitamente as funções de um e dois pontos e avaliamos os termos ambíguos para aquelas de três pontos. Na seção 5 consideramos

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_2)_\lambda \left\{ \gamma_\lambda \gamma_5 \begin{array}{c} \nearrow \gamma_\mu \gamma_5 \\ \searrow \gamma_\nu \gamma_5 \end{array} \right\} = (-) 2m \left\{ \gamma_5 \begin{array}{c} \nearrow \gamma_\mu \gamma_5 \\ \searrow \gamma_\nu \gamma_5 \end{array} \right\} \\
& + \gamma_\nu \gamma_5 \begin{array}{c} \text{Clockwise Loop} \\ \text{Momenta: } \mathbf{K} + \mathbf{K}_2, \mathbf{K} + \mathbf{K}_1 \end{array} - \gamma_\mu \gamma_5 \begin{array}{c} \text{Counter-clockwise Loop} \\ \text{Momenta: } \mathbf{K} + \mathbf{K}_1, \mathbf{K} + \mathbf{K}_3 \end{array}
\end{aligned}$$

Figura 8.26: Representação diagramática para $(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$.

as Identidades de Ward que relacionam estas amplitudes cujos graus superficiais de divergência são cúbicos, quadráticos e lineares (um, dois e três pontos, respectivamente) e, portanto, todas potencialmente ambíguas.

Para efetuar os cálculos seguimos uma estratégia simples, no que diz respeito às divergências; ao invés de adotar uma regularização específica, utilizamos apenas propriedades gerais de uma eventual distribuição regularizadora: Ela deve ser par no momento do “loop” e deve possuir um limite de conexão. Nenhuma distribuição que, apesar de tornar finitas as integrais divergentes, deixe de possuir tais propriedades poderia se constituir numa regularização aceitável. Por isso nos resultados que obtivemos ainda estão contidos aqueles correspondentes a regularizações específicas e obtê-las é tarefa extremamente fácil. Isto porque foi possível escrever as partes divergentes, mantidas intactas, em *todas* as amplitudes, em termos de apenas três combinações básicas;

$$\begin{aligned}
\bullet_{\alpha\beta\mu\nu} &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} - g_{\alpha\beta} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{[(k^2 - m^2)^3]} \\
&\quad - g_{\alpha\mu} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\nu}{[(k^2 - m^2)^3]} - g_{\alpha\nu} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\beta k_\mu}{[(k^2 - m^2)^3]} \quad (8.187)
\end{aligned}$$

$$\bullet_{\nabla_{\mu\nu}} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \quad (8.188)$$

$$\bullet_{\Delta_{\mu\nu}} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2}. \quad (8.189)$$

mais aquelas $I_{quad}(m^2)$ e $I_{log}(m^2)$. Com isso se desejamos passar dos nossos resultados para aqueles que seriam obtidos se todos os cálculos tivessem sido feitos numa certa regularização basta *calcular* as integrais divergentes citadas acima com este método e

obteríamos a expressão almejada. Em particular para obtermos os resultados de Gerstein e Jackiw [2] basta calcular os objetos acima fazendo, por exemplo para $\Delta_{\mu\nu}$, no interior da integral;

$$k_\mu k_\nu \longrightarrow k^2 g_{\mu\nu} = [(k^2 - m^2) + m^2]g_{\mu\nu}, \quad (8.190)$$

e portanto:

$$\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left\{ \frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (8.191)$$

e assim por diante para os outros objetos. Este passo corresponde ao cálculo dos termos de superfície, tomando os limites de modo simétrico. É fácil, assim procedendo, obter todos os termos [6] das tabelas I e II da ref.[2].

Por outro lado, para obtermos os resultados correspondentes àqueles da Regularização Dimensional, basta explicitar $I_{log}(m^2)$ e $I_{quad}(m^2)$ na linguagem específica do método e tomar $\Delta_{\alpha\beta}$, $\nabla_{\alpha\beta}$ e $\alpha\beta\mu\nu$ todos nulos.

A tarefa de analisar os resultados com vistas a ambiguidades e relações de simetria é bastante fácil, imediata e completamente transparente. Todas as condições foram colocadas em termos dos objetos $\Delta_{\alpha\beta}$, $\nabla_{\alpha\beta}$ e $\alpha\beta\mu\nu$.

• Ambiguidades

Em todas as amplitudes as dependências com as escolhas arbitrárias dos momentos para as linhas internas aparecem *apenas* como coeficientes das diferenças entre integrais com o mesmo grau de divergência. Com isto a conclusão é imediata: uma distribuição regularizadora (método de regularização) que possua as propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta\mu\nu^{Reg} = 0 \\ \nabla_{\mu\nu}^{Reg} = 0 \\ \Delta_{\mu\nu}^{Reg} = 0, \end{array} \right. \quad (8.192)$$

eliminará *todas* as ambiguidades possíveis envolvidas nos cálculos destas amplitudes, automaticamente. Notemos que isto é condição necessária e suficiente.

De certo modo não é surpresa que as ambiguidades possam ser eliminadas. Isto também poderia ser feito se, ao efetuarmos “shifts”, ignorássemos os termos de superfície correspondentes. Embora isso acabe sendo equivalente, do ponto de vista de uma filosofia de regularização isto é bem mais abrangente. Se afirmássemos apenas que é permitido efetuar “shifts” desapareceriam todos os termos ambíguos e isto não garantiria que todas as Identidades de Ward seriam satisfeitas, como veremos a seguir.

- **Identidades de Ward**

Poderíamos afirmar que a presença de ambiguidades *sempre* pode levar a violações de simetria. Em alguns casos poderíamos efetuar escolhas convenientes de ambiguidades sem exigir que as condições eq.(8.192) sejam satisfeitas. Existem entretanto termos de violação que não são ambíguos. Portanto estariam presentes em qualquer escolha para os momentos das linhas internas e conseqüentemente não seriam eliminados se permitíssemos efetuar “shifts” (desprezando termos de superfície). Este é o caso, por exemplo, de $T_{\mu\nu}^{VV}$ e $T_{\mu\nu}^{AA}$ onde a diferença entre integrais quadraticamente divergentes $\nabla_{\alpha\beta}$ aparece com coeficiente não-ambíguo. Também as funções de três pontos $T_{\mu\nu}^{SVV}$ e $T_{\mu\nu}^{SAA}$ envolvem a diferença $\Delta_{\alpha\beta}$ como condição para que suas Identidades de Ward sejam satisfeitas. A diferença $\Delta_{\mu\nu\alpha\beta}$ apareceria não-ambígua na função de quatro pontos $T_{\mu\nu\lambda\rho}^{VVVV}$ em termos de violação [5].

Nós então poderíamos inverter nossa análise principiando exatamente por estas amplitudes extraindo a conclusão de que, sem considerar ambiguidades, para obtermos tais identidades satisfeitas teríamos como única possibilidade exigir que as relações na eq.(8.192) fossem válidas. Verificaríamos posteriormente que estas condições eliminam simultaneamente as ambiguidades consideradas aqui.

É fácil concluir, qualquer que seja a análise efetuada, que não haverá nenhuma possibilidade de consistência sem que $\alpha_{\beta\mu\nu}$, $\nabla_{\mu\nu}$ e $\Delta_{\mu\nu}$ sejam todos nulos. Estas condições podem ser colocadas na forma de relações entre integrais divergentes (com o mesmo grau de divergência):

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} &= [g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}] I_{quad}(m^2) \\
\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} &= g_{\mu\nu} I_{quad}(m^2) \\
\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} &= g_{\mu\nu} I_{log}(m^2).
\end{aligned} \tag{8.193}$$

Isto reduz, em um método consistente, a variedade de objetos divergentes a apenas dois: $I_{log}(m^2)$ e $I_{quad}(m^2)$, quando as divergências não são de grau superior a cúbico (ao nível um “loop”). A consistência de um eventual método de regularização, segundo nossa análise, vem unicamente das relações que estabelece entre integrais divergentes com o mesmo grau.

Neste ponto nos deparamos com conclusões importantes e, até certo ponto, surpreendentes. Seguindo o método de análise de Gerstein e Jackiw, historicamente utilizado para estabelecer as violações de relações de simetria, encontramos um conjunto de condições que permitem todas as relações, analisadas deste modo, serem satisfeitas.

Estas condições eliminam a possibilidade de ambiguidades, levam a Identidades de Ward satisfeitas e permitem conectar os resultados com aqueles da R.D., nos casos onde este método se aplica. Assim, seguindo a estratégia da ref.[2] para analisar as relações de simetria, porém tratando as divergências de acordo com a nossa prescrição, obteremos formas finais onde é possível um mapeamento com os resultados ou da R.D. ou de Gerstein e Jackiw, mas não ambos com a mesma interpretação. Isto nos deixa duas opções profundamente distintas; se adotarmos a interpretação que nos dá o ponto de vista dos termos de superfície podemos estabelecer as anomalias como o faz Jackiw, mas contaminamos as amplitudes físicas com ambiguidades e estaremos admitindo abrir mão da invariância translacional, a mais básicas das simetrias do espaço-tempo. Se, por outro lado, adotamos a interpretação que nos fornece os resultados da R.D. [6], para todas as amplitudes, teremos todas as relações de simetria satisfeitas, inclusive aquelas anômalas. Em outras palavras, o método utilizado por Gerstein e Jackiw, para estabelecer a existência das anomalias, pode ser utilizado para mostrar exatamente o oposto. Visto de outro modo, é necessário primeiro violar uma simetria fundamental para posteriormente poder “acertar” o valor das anomalias.

O que buscamos é uma regra única para tratar todas as amplitudes divergentes em TQC. Por isso não podemos aceitar tratar as amplitudes anômalas de um ponto de vista que leva a flagrantes inconsistências para outras amplitudes que, por isso, devem ser tratadas pela R.D. Estas constatações não nos permitem afirmar que as anomalias não existem. Elas indicam, por outro lado, que o modo tradicional utilizado para estabelecê-las não é sustentável. As anomalias devem emergir com os valores e interpretações corretas em cálculos livres de inconsistências. Sobre isto voltaremos a discutir no capítulo 12, após uma análise mais profunda das relações de consistência, condições que abriram a possibilidade para este tipo de análise. Antes porém vamos ampliar as investigações para situações mais complexas, como é o caso onde os férmions internos ao “loop” carregam massas diferentes.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel, O.L. Battistel, A.H. Blin, B. Hiller and M.C. Nemes (submetido para publicação);
O.A. Battistel, O.L. Battistel, A.H. Blin, B. Hiller and M.C. Nemes (XVIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 1998);
- [2] I.S. Gerstein and R. Jackiw, Phys. Rev. 181 1955 (1969);
- [3] G. Dallabona and O.A. Battistel, Densidades tensoriais num modelo de férmions de spin 1/2 livres de massas iguais: Ambiguidades e Relações de simetria, (trabalho em andamento);
- [4] Adler, S.L. and Dashen, R.F. Current algebra and Application to Particle Physics. Benjamin, New York (1968);
Treiman, S.B. , Jackiw, R. and Gross, D.J. Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
de Alfaro, V., Fubini, S, Furlan, G. and Rossetti, C., Current in Hadron Physics. North-Holland, Amsterdam (1973);
- [5] O.A. Battistel and O.L. Battistel, Sistematização para o cálculo de funções de 4 pontos, (trabalho em andamento);
- [6] O.A. Battistel and O.L. Battistel (trabalho submetido a publicação);

Capítulo 9

Ambiguidades e relações de simetria em um modelo de Férmions de spin $1/2$ livres com massas diferentes

9.1 Introdução

Existe uma variedade razoável de situações a serem enfrentadas, no que diz respeito à presença de divergências em soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos. Cada uma delas relaciona-se à fenomenologia específica associada à teoria construída. Como tal, podemos ter a presença de partículas todas com massas não-nulas e iguais ou diferentes. Podemos ainda ter uma ou todas as partículas com massas nulas. Cada uma destas situações possui peculiaridades que implicam em problemas específicos a serem considerados nas manipulações e cálculos envolvendo divergências. Um tratamento que se mostre consistente para uma situação específica não necessariamente o será noutra. É necessário que cada caso seja considerado e fique demonstrada a consistência em todos eles para que possamos dar crédito a uma eventual filosofia destinada a permitir manuseabilidade às amplitudes físicas contaminadas pelas divergências, típicas do cálculo perturbativo.

No capítulo anterior consideramos um modelo com apenas um tipo de férmion de spin $1/2$ massivo. Lá utilizamos uma estratégia para a reorganização do integrando das integrais divergentes, deixando os termos dependentes dos momentos externos em termos finitos. Naqueles divergentes obtidos aparece a massa fermiônica. A análise que fizemos permite a definição de uma estratégia consistente fundamentada em um pequeno conjunto

de condições envolvendo as integrais divergentes obtidas e portanto a massa do férmion. O momento é então de nos questionarmos a respeito da possibilidade de tratar um modelo ou teoria em que ocorre a presença de massas diferentes nas amplitudes, dentro da mesma estratégia [1]. Neste caso algumas questões surgem de imediato: Qual das massas deve ser escolhida para a definição das quantidades divergentes? Qual o papel especial desempenhado pela massa eventualmente escolhida para esta função? Além disso, podemos esperar novos tipos de ambiguidades ou condições a serem satisfeitas pelas manipulações necessárias a fim de obtermos amplitudes consistentes, não-ambíguas e satisfazendo as Identidades de Ward?

Neste capítulo nos deparamos com questões as quais não precisamos considerar no capítulo anterior e veremos que tratar problemas com massas diferentes é muito mais restritivo.

O principal aspecto novo envolvido está relacionado ao fato de a quantidade mantida como definidora das quantidades divergentes desempenhar o papel de escala para todas as quantidades físicas envolvidas na amplitude física. Como esta escolha é arbitrária surgirão dois importantes ingredientes: ambiguidades de escala e invariância de escala.

Seguiremos aqui os mesmos passos do capítulo anterior.

9.2 O modelo, correntes e Identidades de Ward

Consideramos agora um modelo composto por férmions de spin 1/2 porém com massas diferentes. Os campos obedecerão portanto, individualmente, a equação de Dirac. Por sua vez as correntes;

$$j_i(x) = \bar{\psi}_a(x)\Gamma_i\psi_b(x), \quad (9.1)$$

podem envolver campos com massas diferentes. Com isso as modificações nas propriedades do modelo serão na quadridivergência das correntes vetorial e axial, agora dadas por:

$$\begin{cases} \partial_\mu V_\mu(x) = (m_b - m_a)S(x) \\ \partial_\mu A_\mu(x) = (m_b + m_a)P(x), \end{cases} \quad (9.2)$$

e nos propagadores fermiônicos que carregarão massas diferentes;

$$iS_F(p, m_a) = \frac{i}{\not{p} - m_a}. \quad (9.3)$$

Com estes ingredientes nós definimos as funções de um ponto;

$$T^i(l, m_1) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(\not{k} + \not{l}) - m_1]} \right\}, \quad (9.4)$$

as funções de dois pontos;

$$T^{ij}(k_1, m_1; k_2, m_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m_1]} \Gamma_j \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m_2]} \right\}, \quad (9.5)$$

as funções de três pontos;

$$T^{lij}(k_1, m_1; k_2, m_2; k_3, m_3) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \Gamma_i \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_1) - m_1]} \Gamma_j \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_2) - m_2]} \Gamma_l \frac{1}{[(\not{k} + \not{k}_3) - m_3]} \right\} \quad (9.6)$$

e assim por diante.

Precisamos deixar claro que são campos fermiônicos diferindo entre si apenas pelo fato de carregarem massas diferentes. Não há números quânticos internos e os operadores associados à geração das correntes axial e vetor são números usuais (simetrias $U_A(1)$ e $U_V(1)$) que portanto comutam entre si. As situações envolvendo simetrias menos triviais (não-abelianas) serão consideradas em outra oportunidade [2].

As Identidade de Ward são agora um pouco diferentes e por isso vamos expô-las todas novamente:

- *Funções de um ponto:*

$$T_\mu^V(k_1, m_1) = 0. \quad (9.7)$$

- *Funções de dois pontos:*

$$(k_1 - k_2)^\mu T_\mu^{VS}(k_1, m_1; k_2, m_2) = (m_1 - m_2) T^{SS}(k_1, m_1; k_2, m_2) + T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) \quad (9.8)$$

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m_1; k_2, m_2) = (m_1 - m_2) T_\nu^{VS}(k_1, m_1; k_2, m_2) \quad (9.9)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_2, m) = (m_1 - m_2) T_\mu^{VS}(k_1, m_1; k_2, m_2) \quad (9.10)$$

$$(k_1 - k_2)^\mu T_\mu^{AP}(k_1, m_1; k_2, m_2) = -(m_1 + m_2) T^{PP}(k_1, m_1; k_2, m_2) - T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) \quad (9.11)$$

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, m_1; k_2, m_2) = -(m_1 + m_2) T_\nu^{PV}(k_1, m_1; k_2, m_2) \quad (9.12)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, m_1; k_2, m_2) = (m_1 - m_2) T_\mu^{AS}(k_1, m_1; k_2, m_2) \quad (9.13)$$

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, m_1; k_2, m_2) = (m_1 + m_2) T_\nu^{PA}(k_1, m_1; k_2, m_2) \quad (9.14)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AA}(k_1, m_1; k_2, m_2) = (m_1 + m_2) T_\mu^{AP}(k_1, m_1; k_2, m_2). \quad (9.15)$$

• *Funções de três pontos:*

$$q^\lambda T_\lambda^{V \rightarrow SS} = (m_3 - m_2) T^{S \rightarrow SS} \quad (9.16)$$

$$q^\lambda T_\lambda^{V \rightarrow PP} = (m_3 - m_2) T^{P \rightarrow PP} \quad (9.17)$$

$$q^\lambda T_\lambda^{A \rightarrow SP} = -(m_2 + m_3) T^{P \rightarrow SP} \quad (9.18)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = (m_3 - m_1) T_\nu^{S \rightarrow SV} \quad (9.19)$$

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow VV} = (m_2 - m_1) T_\mu^{S \rightarrow VS} \quad (9.20)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} = (m_1 + m_3) T_\nu^{S \rightarrow PA} \quad (9.21)$$

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} = (m_1 + m_2) T_\mu^{S \rightarrow AP} \quad (9.22)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AV} = (m_1 + m_3) T_\nu^{P \rightarrow PV} \quad (9.23)$$

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AV} = (m_2 - m_1) T_\mu^{P \rightarrow AS} \quad (9.24)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV} = (m_3 - m_1) T_\nu^{P\rightarrow SV} \quad (9.25)$$

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV} = (m_2 - m_1) T_\mu^{P\rightarrow VS} \quad (9.26)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{S\rightarrow AV} = (m_1 + m_2) T_\nu^{S\rightarrow PV} \quad (9.27)$$

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{S\rightarrow AV} = (m_2 - m_1) T_\mu^{S\rightarrow AS} \quad (9.28)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}^{P\rightarrow AA} = (m_1 + m_3) T_\nu^{P\rightarrow PA} \quad (9.29)$$

$$p^\nu T_{\mu\nu}^{P\rightarrow AA} = (m_1 + m_2) T_\mu^{P\rightarrow AP} \quad (9.30)$$

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = (m_3 + m_1) T_{\mu\nu}^{P\rightarrow VV} \quad (9.31)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = (m_1 - m_3) T_{\lambda\nu}^{A\rightarrow SV} \quad (9.32)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow VV} = (m_2 - m_1) T_{\lambda\mu}^{A\rightarrow VS} \quad (9.33)$$

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow AA} = (m_2 + m_3) T_{\mu\nu}^{P\rightarrow AA} \quad (9.34)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow AA} = (m_1 + m_3) T_{\lambda\nu}^{A\rightarrow PA} \quad (9.35)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A\rightarrow AA} = (m_1 + m_2) T_{\lambda\mu}^{A\rightarrow PA} \quad (9.36)$$

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV} = (m_3 - m_2) T_{\mu\nu}^{S\rightarrow VV} \quad (9.37)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV} = (m_3 - m_1) T_{\lambda\nu}^{V\rightarrow SV} \quad (9.38)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow VV} = (m_2 - m_1) T_{\lambda\mu}^{V\rightarrow VS} \quad (9.39)$$

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} = (m_3 - m_2) T_{\mu\nu}^{S\rightarrow AA} \quad (9.40)$$

$$p^\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} = (m_1 + m_3) T_{\lambda\nu}^{V\rightarrow PA} \quad (9.41)$$

$$p^\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V\rightarrow AA} = (m_2 + m_1) T_{\lambda\mu}^{V\rightarrow AP}. \quad (9.42)$$

Notemos agora a maior restritividade imposta pelas relações acima. Todas as funções relacionam-se através das Identidades de Ward. Vamos então analisar a questão das ambiguidades dentro da mesma estratégia adotada anteriormente.

9.3 Ambiguidades

Ao efetuarmos as manipulações, dentro da nossa estratégia, encontraremos agora outro tipo de ambiguidade, que se manifesta naturalmente em problemas com massas diferentes, mas que, a rigor, estaria presente em todos aqueles envolvendo amplitudes divergentes. Este tipo de ambiguidade tem origem na arbitrariedade existente na separação das partes finitas e divergentes. No nosso tratamento isto se manifestará na escolha das identidades utilizadas na separação da parte dependente dos momentos externos. Se podemos escolher qualquer uma das massas para deixar nos termos divergentes podemos utilizar uma massa arbitrária. A possibilidade da dependência com essa massa arbitrária na amplitude como um todo representa um novo tipo de ambiguidade. Devido ao fato de esta quantidade desempenhar o papel de escala para a amplitude física nós denominaremos isso de “ambiguidade de escala”. A eliminação deste novo tipo de ambiguidade se dará através da exigência da importante propriedade de invariância de escala para amplitudes físicas que somente será satisfeita se for obtida válida integral-por-integral.

9.3.1 Funções de um ponto

Iniciemos agora, por conveniência, pela função escalar;

$$T^S(k_1, m_j) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_j} \right\}, \quad (9.43)$$

para o qual o traço de Dirac fornece:

$$T^S(k_1, m_j) = 4m_j \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_1)^2 - m_j^2}. \quad (9.44)$$

Até este ponto não notamos nenhuma diferença em relação ao caso de massas iguais. No próximo passo adotamos implicitamente uma distribuição regularizadora e realizamos as manipulações de modo a obter a expressão na forma desejada: dependência no momento k_1 apenas em integrais finitas. As integrais divergentes serão escritas em termos da massa m_j . A questão é então qual das massas escolher para caracterizar os termos divergentes em um modelo, onde outras amplitudes divergentes possivelmente relacionadas a esta por Identidades de Ward, podem ter massas diferentes. Neste problema está escondido um dos mais importantes ingredientes para amplitudes físicas divergentes, principalmente no caso de massas diferentes: a invariância de escala. Para verificar isto assumimos a escolha da massa m_j , a mesma presente no propagador da função de um ponto. Neste caso ficaríamos com o resultado obtido no capítulo anterior:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_1)^2 - m_j^2} = I_{quad}(m_j^2) + k_{1\beta} k_{1\alpha} \Delta_{\beta\alpha}(m_j^2), \quad (9.45)$$

onde mantivemos a mesma notação para as quantidades definidas anteriormente. Alternativamente poderíamos reescrever o integrando na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_1)^2 - m_j^2} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \\ &\quad - (\lambda^2 - m_j^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\ &\quad + k_{1\mu} k_{1\nu} \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} \right\} \\ &\quad + \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 - m_j^2 + \lambda^2)^2}{(k^2 - \lambda^2)^3} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_j^2)^3}{(k^2 - \lambda^2)^3 [(k + k_1)^2 - m_j^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Aqui a quantidade λ^2 pode ser uma das outras massas da teoria ou mesmo uma quantidade arbitrária. Evidentemente que, devido a esse caráter arbitrário de λ^2 , nenhum

significado razoável deve ser atribuído a eventuais resultados para as integrais do lado direito que levem a uma dependência com esta quantidade. Ele deve ser ainda idêntico àquele da eq.(9.45) pois trata-se da mesma integral. Para verificar estas possibilidades primeiro resolvemos as integrais finitas e reorganizamos. Assim:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 - m_j^2} = I_{quad}(\lambda^2) + (m_j^2 - \lambda^2)I_{log}(\lambda^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[m_j^2 - \lambda^2 + m_j^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_j^2}\right) \right] + k_{1\alpha}k_{1\beta}\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2). \quad (9.47)$$

O termo entre chaves nada mais é do que $I_{quad}(m_j^2)$ em consequência da relação algébrica:

$$I_{quad}(\lambda_1^2) = I_{quad}(\lambda_2^2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)I_{log}(\lambda_2^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right) \right]. \quad (9.48)$$

É importante notar que esta propriedade, embora seja consequência de simples manipulações algébricas, significa uma exigência sobre uma regularização com a pretensão de ser consistente. Portanto ficamos com

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k+k_1)^2 - m_j^2} = I_{quad}(m_j^2) + k_{1\alpha}k_{2\beta}\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2). \quad (9.49)$$

Comparando esta expressão com a eq.(9.45) obtida para mesma integral nos damos conta de outro tipo de ambiguidade existente nestas manipulações. Se a diferença entre integrais divergentes $\Delta_{\alpha\beta}$ for dependente do parâmetro λ^2 , que foi escolhido para caracterizá-las, em uma eventual regularização adotada, então os dois resultados, para a mesma integral, não poderão ser iguais. Nós denominamos este tipo de ambiguidade de “ambiguidade de escala”, como ficará mais claro a seguir. Não há menção a respeito disto na literatura. Por ora para a pergunta “qual das massas da teoria manteremos em integrais divergentes?”, adotaremos a resposta: *qualquer uma ou até mesmo uma massa arbitrária* λ^2 . Nenhuma consequência física deverá depender desta escolha e uma específica poderá, a qualquer momento, ser convertida na outra, se necessário ou conveniente. Possíveis ambiguidades existentes entre os caminhos deverão estar contidas apenas em termos dependentes das diferenças entre integrais divergentes $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$, $\nabla_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ e $\alpha_{\beta\mu\nu}(\lambda^2)$, como veremos nos cálculos posteriores.

A função de um ponto $T_\mu^V(k_1, m_j)$ será então dada por:

$$T_\mu^V(k_1, m_j) = 4 \left\{ -k_{1\beta} \nabla_{\beta\mu}(\lambda^2) - \frac{k_{1\beta} k_{1\alpha} k_{1\nu}}{3} \alpha_{\beta\mu\nu}(\lambda^2) - \frac{k_{1\alpha} k_{1\beta} k_{1\mu}}{3} \Delta_{\beta\alpha}(\lambda^2) + \frac{k_1^2 k_{1\nu}}{3} \Delta_{\nu\mu}(\lambda^2) + k_{1\mu} k_{1\alpha} k_{1\nu} \Delta_{\alpha\nu}(\lambda^2) \right\}. \quad (9.50)$$

Nesta expressão fica clara a existência de dois tipos de ambiguidades associadas a duas possíveis escolhas arbitrárias. Admitir qualquer valor para as quantidades $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$, $\nabla_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ e $\alpha_{\beta\mu\nu}(\lambda^2)$ diferente de zero significa contaminar uma amplitude com ambas. Prosseguiremos as investigações em busca de novos elementos.

9.3.2 Funções de dois pontos

Consideremos novamente o cálculo das funções de dois pontos agora com massas diferentes para os propagadores das linhas internas. Tomemos a amplitude T^{SS} agora dada por:

$$T^{SS}(k_1, m_1; k_2, m_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \hat{1} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \right\}. \quad (9.51)$$

É importante notar que rotulamos a massa do propagador com momento $k + k_i$ por m_i . Para não tornar muito densa a notação, quando não for relevante ou não representar risco de confusão, simplificaremos a denominação para, neste caso, apenas T^{SS} . Assim:

$$T^{SS} = 2 \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_1)^2 - m_1^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k + k_2)^2 - m_2^2} + [(m_1 + m_2)^2 - (k_1 - k_2)^2] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \right\}. \quad (9.52)$$

As integrais quadraticamente divergentes já foram consideradas anteriormente, a integral logaritmicamente divergente, por sua vez, se apresenta como um exemplo importante para nos aprofundarmos um pouco mais na discussão sobre a “invariância de escala”.

Escolhamos inicialmente a massa m_1 para ser deixada nas integrais divergentes. Uma identidade conveniente é a seguinte:

$$\int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)^2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)}{[(k^2 - m_1^2)^2][(k + k_1)^2 - m_1^2]}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m_1^2 - m_2^2)}{[(k^2 - m_1^2)^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m_1^2 - m_2^2)}{[(k^2 - m_1^2)^2][(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]}. \quad (9.53)
\end{aligned}$$

A solução das integrais finitas nos leva ao resultado:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} = I_{log}(m_1^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2). \quad (9.54)$$

De onde é importante notar que a massa m_1 , que aparece no objeto básico divergente, também aparece como escala na função Z_0 obtida. Uma outra possibilidade de efetuar este cálculo seria adotar uma escala arbitrária λ^2 , ou seja, utilizando a identidade:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)}{[(k^2 - \lambda^2)^2][(k + k_1)^2 - m_1^2]} \\
& - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2)}{[(k^2 - \lambda^2)^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k + \lambda^2 - m_1^2)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + \lambda^2 - m_2^2)}{[(k^2 - \lambda^2)^2][(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]}. \quad (9.55)
\end{aligned}$$

As integrais finitas podem ser calculadas e neste caso fornecem:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} = I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; \lambda^2). \quad (9.56)$$

Desta vez o parâmetro arbitrário λ^2 é que desempenha a função de escala na função Z_0 obtida. O resultado na eq.(9.54) pode ser agora visto como uma escolha particular $\lambda^2 = m_1^2$ na eq.(9.56). Entretanto, se escolhermos na eq.(9.56), $\lambda^2 = m_2^2$ os resultados serão idênticos? Para verificar isto basta utilizar o relação (algébrica) entre objetos básicos logarítmicos;

$$I_{log}(\lambda_1^2) = I_{log}(\lambda_2^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right), \quad (9.57)$$

e a propriedade de escala das funções Z_k ;

$$Z_k(m_1^2, m_2^2, q^2; \lambda_1^2) = Z_k(m_1^2, m_2^2, q^2; \lambda_2^2) + \frac{1}{(k + 1)} \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right), \quad (9.58)$$

com isso podemos converter o a eq.(9.54) numa expressão que corresponde à escolha m_2^2 como escala. Explicitamente;

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]} &= \\
&= I_{log}(m_1^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \\
&= I_{log}(m_2^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_2^2) + \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right\} \\
&= I_{log}(m_2^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_2^2), \tag{9.59}
\end{aligned}$$

de onde fica claro o papel de escala desempenhado pela quantidade mantida como definidora dos objetos básicos divergentes. Isto se repetirá em integrais mais complexas algebricamente. Para todas valerá a invariância de escala representada por;

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda^2} = 0, \tag{9.60}$$

se os objetos $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$, $\nabla_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ e $\alpha_{\beta\mu\nu}(\lambda^2)$ forem garantidamente nulos (para a parte não-ambígua das integrais). Esta propriedade, *invariância de escala* é fundamental para atribuímos significado físico consistente às amplitudes contendo divergências. Não se trata apenas de mais um tipo de ambiguidade. É importante notar que a eq.(9.60) não significa que estamos derivando uma integral divergente, mas sim a solução destas devidamente tornadas finitas pela distribuição regularizadora, qualquer que seja a forma que venhamos obter.

Tendo isto em mente, colecionamos os resultados e podemos assim escrever:

$$\begin{aligned}
T^{SS} &= 2 \left\{ I_{quad}(m_1^2) + I_{quad}(m_2^2) \right. \\
&\quad \left. + [(m_1 + m_2)^2 - (k_1 - k_2)^2] \left[I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad + 2k_{1\alpha}k_{1\beta}[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)] + 2k_{2\rho}k_{2\xi}[\Delta_{\rho\xi}(\lambda^2)]. \tag{9.61}
\end{aligned}$$

Para a amplitude T^{PP} , com os mesmos ingredientes, obtemos

$$\begin{aligned}
T^{PP} &= -2 \left\{ I_{quad}(m_1^2) + I_{quad}(m_2^2) \right. \\
&\quad \left. + [(m_1 - m_2)^2 - (k_1 - k_2)^2] \left[I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; \lambda^2) \right] \right\} \\
&\quad - 2k_{1\alpha}k_{1\beta}[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)] - 2k_{2\rho}k_{2\xi}[\Delta_{\rho\xi}(\lambda^2)]. \tag{9.62}
\end{aligned}$$

Aqui devemos acrescentar que não há nada de especial nas escolhas efetuadas para escrevermos T^{SS} e T^{PP} . Os termos $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ são os únicos que apresentam ambiguidades de escala e isto não há como evitar.

Prosseguindo podemos calcular a função T_μ^{VS} , que após o traço de Dirac fica na forma:

$$T_\mu^{VS} = 4 \left\{ (m_2 - m_1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]} + (m_2k_{1\mu} + m_1k_{2\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]} \right\}, \quad (9.63)$$

para a qual ainda precisamos tratar a integral linearmente divergente. Primeiramente nós a manipulamos e a reescrevemos como:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]} &= -\frac{(k_1+k_2)_\alpha}{2} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m_1^2)^3} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)^2 k_\mu}{[(k^2 - m_1^2)^3][(k+k_1)^2 - m_1^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m_1^2 - m_2^2)^2 k_\mu}{[(k^2 - m_1^2)^3][(k+k_2)^2 - m_2^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2 + 2k_1 \cdot k)(k_2^2 + 2k_2 \cdot k + m_1^2 - m_2^2) k_\mu}{[(k^2 - m_1^2)^2][(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]}, \end{aligned} \quad (9.64)$$

onde, calculando as integrais finitas, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]} &= -\frac{(k_1+k_2)_\alpha}{2} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\mu}{(k^2 - m_1^2)^3} \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(k_1 - k_2)_\mu Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right. \\ &\left. + k_{1\mu} Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Este resultado, mais a eq.(9.56) nos permite escrever, depois de algum rearranjo:

$$\begin{aligned} T_\mu^{VS} &= 4(k_1 - k_2)_\mu \left\{ \frac{m_2 - m_1}{2} I_{log}(m_1^2) + \right. \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-(m_1 + m_2) Z_1(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right. \\ &+ \left. m_1 Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \left. \right\} \\ &- 2(m_1 + m_2)(k_1 + k_2)_\beta [\Delta_{\beta\mu}(\lambda^2)]. \end{aligned} \quad (9.66)$$

É interessante notar que os termos não-ambíguos desaparecem na situação $m_1 = m_2$ como seria exigido pela conservação da corrente vetorial.

Nenhum ingrediente novo é necessário para o cálculo de T_μ^{PA} . Assim:

$$\begin{aligned}
T_\mu^{PA} = & -4(k_1 - k_2)_\mu \left\{ \frac{m_1 + m_2}{2} I_{\log}(m_1^2) + \right. \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(m_1 - m_2) Z_1(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right. \\
& - \left. m_1 Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \left. \right\} \\
& + 2(m_2 - m_1)(k_1 + k_2)_\beta [\Delta_{\beta\mu}(\lambda^2)]. \tag{9.67}
\end{aligned}$$

De onde se verifica o caráter não-ambíguo no caso de massas iguais, como deveria ser.

De modo análogo a função de dois pontos com dois índices de Lorentz $T_{\mu\nu}^{AV}$ pode ser encontrada;

$$T_{\mu\nu}^{AV} = -4i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ \frac{k_{1\xi}k_{2\beta}}{2} [\Delta_{\xi\alpha}(\lambda^2)] + \frac{k_{2\xi}k_{1\alpha}}{2} [\Delta_{\xi\beta}(\lambda^2)] \right\}, \tag{9.68}$$

e é completamente ambígua.

A função de dois pontos $T_{\mu\nu}^{VV}$ ainda admite, após a tomada do traço de Dirac a relação com T^{PP} ;

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}[T^{PP}], \tag{9.69}$$

onde:

$$T_{\mu\nu} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[(k + k_1)_\mu(k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu(k + k_2)_\mu]}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]}. \tag{9.70}$$

Uma vez que já obtivemos a expressão de T^{PP} , resta apenas calcular $T_{\mu\nu}$. Para isto precisamos ainda da integral quadraticamente divergente, que escrevemos na forma:

$$\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} = I_{\mu\nu}^{quad} + I_{\mu\nu}^{log} + I_{\mu\nu}^{fin}, \tag{9.71}$$

onde representamos:

$$\bullet I_{\mu\nu}^{quad} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_1^2)^2}, \tag{9.72}$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_{\mu\nu}^{log} = & -\frac{(k_1^2 + k_2^2 + m_1^2 - m_2^2)}{4} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_1^2)^3} \\
& + \frac{(k_{2\alpha}k_{2\beta} + k_{1\alpha}k_{1\beta} + k_{1\alpha}k_{2\beta})}{4} \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_1^2)^4} \tag{9.73}
\end{aligned}$$

$$\tag{9.74}$$

Com este resultado mais eq.(9.56) e eq.(9.65) podemos completar o cálculo de $T_{\mu\nu}$. Assim escrevemos:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = & \frac{4i}{(4\pi)^2} \left\{ 2 \left[(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} - (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu \right] \times \right. \\
& \left[Z_2(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) - Z_1(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \\
& + g_{\mu\nu} \left[(k_1 - k_2)^2 + m_1^2 - m_2^2 \right] \times \\
& \left. \left[Z_0(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) - Z_1(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \right\} \\
& + 4 \left\{ g_{\mu\nu} [I_{quad}(m_1^2)] - \left[\frac{(k_1 - k_2)^2}{6} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2} \right] g_{\mu\nu} I_{log}(m_1^2) \right. \\
& \left. - \frac{(k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu}{3} I_{log}(m_1^2) \right\} + \varphi_{\mu\nu}, \tag{9.75}
\end{aligned}$$

onde definimos:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu\nu} = & \frac{k_{2\alpha} k_{2\beta} + k_{1\alpha} k_{1\beta} + k_{1\alpha} k_{2\beta}}{3} \left\{ \alpha\beta\mu\nu(\lambda^2) + g_{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) \right. \\
& \left. + g_{\alpha\mu} \Delta_{\beta\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\mu\beta}(\lambda^2) \right\} \\
& - \frac{(k_1 + k_2)_\mu (k_1 + k_2)_\alpha}{2} \Delta_{\alpha\nu}(\lambda^2) + \\
& - \frac{(k_1 + k_2)_\nu (k_1 + k_2)_\beta}{2} \Delta_{\beta\mu}(\lambda^2) + \\
& + \nabla_{\mu\nu}(\lambda^2) - \frac{(k_1^2 + k_2^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2} \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2). \tag{9.76}
\end{aligned}$$

Utilizando então a eq.(9.62) e eq.(9.75) nós obtemos para a função $T_{\mu\nu}^{VV}$, depois de alguma reorganização:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} = & \Theta_{\mu\nu} - \frac{4i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{[(k_1 - k_2)^2 + m_1^2 - m_2^2]}{2(k_1 - k_2)^2} \left[m_1^2 - m_2^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right] \right. \\
& \left. - \frac{(m_1 - m_2)^2 [(k_1 - k_2)^2 - (m_1 + m_2)^2]}{2(k_1 - k_2)^2} Z_0(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right\} g_{\mu\nu} \\
& + 4 \left\{ \frac{[I_{quad}(m_1^2)] - [I_{quad}(m_2^2)]}{2} - m_1(m_1 - m_2) [I_{log}(m_1^2)] \right\} g_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}, \tag{9.77}
\end{aligned}$$

onde introduzimos a definição:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{4i}{(4\pi)^2} \left\{ 2 \left[(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} - (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \left[Z_2(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) - Z_1(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \} \\ & + \frac{4[(k_1 - k_2)^2 g_{\mu\nu} - (k_1 - k_2)_\mu (k_1 - k_2)_\nu]}{3} [I_{\log}(m_1^2)], \end{aligned} \quad (9.78)$$

e também:

$$\phi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - 2k_{1\alpha} k_{1\beta} \Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2) - 2k_{2\alpha} k_{2\beta} \Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2). \quad (9.79)$$

Para colocar $T_{\mu\nu}^{VV}$ na forma da eq.(9.77) nós adicionalmente utilizamos a relação entre as funções Z_k :

$$\begin{aligned} Z_1(m_1^2, m_2^2; q^2; m_1^2) &= Z_0(m_1^2, m_2^2, q^2; m_1^2) \left[\frac{q^2 + m_1^2 - m_2^2}{2q^2} \right] \\ &+ \frac{1}{2q^2} \left[m_1^2 - m_2^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.80)$$

Com os mesmos ingredientes podemos determinar a função de dois pontos $T_{\mu\nu}^{AA}$. Esta após o cálculo do traço pode ser relacionada a T^{SS} por:

$$T_{\mu\nu}^{AA} = T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T^{SS}, \quad (9.81)$$

deste modo com os resultados anteriores obtemos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{AA} &= \Theta_{\mu\nu} \\ &+ \frac{4i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{[(k_1 - k_2)^2 - (m_1 - m_2)^2](m_1 + m_2)^2}{2(k_1 - k_2)} Z_0(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right\} g_{\mu\nu} \\ &- \frac{4[(k_1 - k_2) - (m_1 - m_2)^2](m_1 + m_2)^2}{2(k_1 - k_2)^2} [I_{\log}(m_1^2)] g_{\mu\nu} \\ &+ \frac{4(m_1^2 - m_2^2)}{2(k_1 - k_2)^2} [I_{quad}(m_1^2) - I_{quad}(m_2^2)] g_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Com este cálculo completamos as funções de dois pontos não-nulas (pelas propriedades dos traços de Dirac).

9.3.3 Funções de três pontos

Os cálculos envolvendo funções de Green de três pontos, com os propagadores internos carregando massas diferentes, seguem rigorosamente os mesmos passos. Neste caso, entretanto, o papel da escala arbitrária, que pode ser introduzida no momento da reorganização dos integrandos, torna-se crucial [2]. Para nossos interesses imediatos, como

fizemos no capítulo anterior, será suficiente isolarmos os termos possivelmente ambíguos, isto é, aqueles que apresentam dependência com as escolhas para os momentos k_1 , k_2 e k_3 .

A fim de colocar os resultados na forma adequada, após o cálculo dos traços, nós manipulamos as integrais divergentes de modo a deixar as partes independentes dos momentos externos em termos da escala arbitrária λ^2 . Separamos então aqueles termos que dependem apenas das diferenças dos momentos internos. Uma importante característica, que não ficará evidente aqui, é a propriedade dos termos não-ambíguos obtidos:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} \{TNA\} = 0, \quad (9.83)$$

que expressa a invariância de escala oferecida pelo nosso tratamento.

A forma dos resultados para a parte ambígua serão essencialmente as mesmas obtidas para o caso de massas iguais, exceto pela presença da escala arbitrária λ^2 . Nós listamos aqui, por completeza, as expressões. São elas:

$$\bullet T_{\lambda}^{VSS} = -2(k_2 + k_3)_{\xi} [\Delta_{\lambda\xi}(\lambda^2)] + TNA, \quad (9.84)$$

$$\bullet T_{\lambda}^{VPP} = 2(k_2 + k_3)_{\xi} [\Delta_{\lambda\xi}(\lambda^2)] + TNA \quad (9.85)$$

$$\bullet T_{\mu}^{SAP} = 2(k_1 + k_3)_{\xi} [\Delta_{\mu\xi}(\lambda^2)] + TNA \quad (9.86)$$

$$\bullet T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi} (k_1 + k_2)_{\sigma} [\Delta_{\xi\sigma}(\lambda^2)] + TNA \quad (9.87)$$

$$\bullet T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2\varepsilon_{\lambda\mu\nu\xi} (k_1 + k_2)_{\sigma} [\Delta_{\xi\sigma}(\lambda^2)] + TNA \quad (9.88)$$

$$\begin{aligned} \bullet T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = & \left\{ (k_1 + k_2)_{\xi} \left[-\frac{2}{3\xi\mu\nu\lambda} (\lambda^2) - \frac{2}{3}g_{\xi\nu}\Delta_{\mu\lambda}(\lambda^2) - \frac{2}{3}g_{\xi\mu}\Delta_{\nu\lambda}(\lambda^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{3}g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + 2g_{\lambda\mu}\Delta_{\nu\xi}(\lambda^2) + 2g_{\xi\nu}\Delta_{\lambda\mu}(\lambda^2) \right] \right. \\ & + (k_1 + k_3)_{\xi} \left[-\frac{2}{3\xi\mu\nu\lambda} (\lambda^2) - \frac{2}{3}g_{\xi\nu}\Delta_{\mu\lambda}(\lambda^2) - \frac{2}{3}g_{\xi\mu}\Delta_{\nu\lambda}(\lambda^2) \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{3}g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + 2g_{\lambda\nu}\Delta_{\mu\xi}(\lambda^2) + 2g_{\xi\mu}\Delta_{\lambda\nu}(\lambda^2) \right] \right. \\ & \left. + (k_2 + k_3)_{\xi} \left[-\frac{2}{3\xi\mu\nu\lambda} (\lambda^2) - \frac{2}{3}g_{\xi\nu}\Delta_{\mu\lambda}(\lambda^2) - \frac{2}{3}g_{\xi\mu}\Delta_{\nu\lambda}(\lambda^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{3}g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + 2g_{\mu\nu}\Delta_{\lambda\xi}(\lambda^2) + 2g_{\xi\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) \right] + TNA \right\}. \quad (9.89) \end{aligned}$$

As partes ambíguas de $T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$ são idênticas as da função $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$.

Antes de proceder qualquer análise do aspecto ambiguidade, em separado, vamos considerar as Identidades de Ward.

9.4 Identidades de Ward

A verificação das relações de simetria que envolvem as funções de Green de um, dois e três pontos, com massas diferentes para os férmions das linhas internas, torna-se menos trivial. Isto se deve fato de, neste caso, nenhuma das correntes axial e vetorial serem conservadas. Deste modo os vínculos sobre as amplitudes tornam-se mais restritivos pois existirão relações precisas entre todas as amplitudes do modelo. Uma eventual convivência com algum tipo de ambiguidade fica enormemente dificultada.

Uma vez que dispomos de formas explícitas para as funções de um dois e três pontos, obtidas na seção anterior, nós podemos verificar as Identidades de Ward contraindo a expressão com o momento externo e comparando o resultado obtido com aquele ditado pela álgebra de correntes do modelo. Para as funções de três pontos nos utilizaremos de contrações ainda no interior do traço, como fizemos no capítulo anterior, mais as formas explícitas para as funções de dois pontos. Apesar de o procedimento ser o mesmo daquele utilizado para o caso de massas iguais, veremos que o trabalho a ser feito não representa uma mera extensão das conclusões retiradas daquele estudo. Novos ingredientes surgem associadas a presença de massas diferentes.

Começemos por considerar a função de dois pontos T_μ^{VS} . Após a contração como o momento externo, antes do cálculo do traço, ficamos com:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m_1]} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m_2]} \right\}. \quad (9.90)$$

Então introduzimos a identidade :

$$(\not{k}_1 - \not{k}_2) = [\not{k} + \not{k}_1 - m_1] - [\not{k} + \not{k}_2 - m_2] + (m_1 - m_2), \quad (9.91)$$

para ficar com:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} &= (m_1 - m_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m_1]} \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m_2]} \right\} \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m_2]} \right\} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_1 - m_1]} \right\}, \end{aligned} \quad (9.92)$$

onde podemos identificar a relação :

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS}(k_1, m_1; k_2, m_2) = (m_1 - m_2) T^{SS}(k_1, m_1; k_2, m_2) + T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1), \quad (9.93)$$

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[\gamma_\mu \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \hat{1} \right] = \begin{array}{c} k+k_1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \hat{1} \end{array} - \begin{array}{c} k+k_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \hat{1} \end{array} + 2m \left[\hat{1} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \hat{1} \right]$$

Figura 9.1: Representação diagramática da Identidade de Ward relativa à amplitude T_μ^{VS} .

que representamos diagramaticamente na fig.(9.1).

Esta relação deve ser mantida válida quando efetuamos os cálculos das quatro amplitudes envolvidas. Notemos que não há outro modo de verificar a identidade senão pelo cálculo das amplitudes. Ainda é interessante notar que a identidade pode ser mantida admitindo-se a presença de ambiguidades em ambos os lados. Esta, entretanto, não é a única onde estas amplitudes aparecem, e as restrições sobre as ambiguidades vêm do conjunto total de relações de simetria. Em outras palavras, é possível satisfazer eventualmente algumas relações de simetria envolvendo certas amplitudes ambíguas mas é uma tarefa difícil satisfazer todas as relações simultaneamente.

Como nós dispomos das expressões para T_μ^{VS} , T^{SS} e T^S , vamos substituir todas e comparar a validade da identidade pra as expressões calculadas. Contraindo a eq.(9.66) com $(k_1 - k_2)_\mu$, temos

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} &= 4(k_1 - k_2)^2 \left\{ \frac{m_2 - m_1}{2} [I_{\log}(m_1^2)] \right. \\ &\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-(m_1 + m_2) Z_1(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right. \\ &\quad \left. \left. + m_1 Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \right\} \\ &\quad - 2(m_1 + m_2)(k_1 + k_2)_\nu (k_1 - k_2)_\mu \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (9.94)$$

Comparando esta expressão com a que seria obtida pela substituição das expressões correspondentes ao lado direito da eq.(9.93), notemos que, na expressão acima, não temos a presença de divergências quadráticas, aparentemente necessárias para a identidade ser satisfeita. Além disso, em T^{SS} aparece apenas a função Z_0 ao passo que acima aparecem Z_1 e Z_0 . Na verdade estas duas observações estão ligadas de um modo surpreendente. Uma rápida consulta à eq.(9.80), onde aparece a relação entre as funções Z_1 e Z_0 nos

mostra:

$$2(k_1 - k_2)^2 Z_1(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) - [(k_1 - k_2)^2 + m_1^2 - m_2^2] Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \\ = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[m_1^2 - m_2^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right] \quad (9.95)$$

Por outro lado, olhando para a relação entre divergências quadráticas, eq.(9.48), verificamos que

$$I_{quad}(m_1^2) - I_{quad}(m_2^2) + (m_2^2 - m_1^2) I_{log}(m_2^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[m_2^2 - m_1^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right]. \quad (9.96)$$

Ambas as relações são exatas ainda que a eq.(9.96) envolva divergências. Notemos que os termos entre chaves no lado direito das eqs.(9.95) e (9.96) são idênticos. Substituindo então a relação entre Z_1 e Z_0 e utilizando as relações de escala eq.(9.96) e eq.(9.57), podemos escrever a eq.(9.94) para T_μ^{VS} na forma:

$$T_\mu^{VS} = \frac{(k_1 - k_2)_\mu (m_1 - m_2)}{(k_1 - k_2)^2} \left\{ 2I_{quad}(m_1^2) + 2I_{quad}(m_2^2) \right. \\ \left. + 2[(m_1 + m_2)^2 - (k_1 - k_2)^2] [I_{log}(m_1^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2)] \right\} \\ + \frac{(k_1 - k_2)_\mu}{(k_1 - k_2)^2} \left\{ -4m_1 I_{quad}(m_1^2) + 4m_2 I_{quad}(m_2^2) \right\} \\ - 2(m_1 + m_2)(k_1 + k_2)_\nu \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2). \quad (9.97)$$

Agora se tornou possível identificar os termos não-ambíguos de T^{SS} e T^S . Assim, sem os termos ambíguos a identidade eq.(9.8) seria imediatamente satisfeita. Podemos nos questionar se ela seria igualmente satisfeita pelas amplitudes calculadas incluindo as ambiguidades. Para isto nós adicionamos à eq.(9.97) os termos ambíguos necessários para obtermos T^{SS} como dado pela eq.(9.61) e do mesmo modo para aquelas de T^S . Então teremos:

$$T_\mu^{VS} = \frac{(k_1 - k_2)_\mu}{(k_1 - k_2)^2} \left[(m_1 - m_2) T^{SS} + T^S(k^2, m_2) - T^S(k^1, m_1) \right] \\ + \frac{(k_1 - k_2)_\mu}{(k_1 - k_2)^2} \left[(m_1 + m_2)(k_{1\alpha} k_{1\beta} - k_{2\alpha} k_{2\beta}) \Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2) \right] \\ - 2(m_1 + m_2)(k_1 + k_2)_\mu \Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2). \quad (9.98)$$

Assim:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS} = (m_1 - m_2)T^{SS} + T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1) + 2(m_1 + m_2)(k_{1\alpha}k_{1\beta} - k_{2\alpha}k_{2\beta})\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2). \quad (9.99)$$

Mostrando a possibilidade da manutenção de relações de simetria entre amplitudes mesmo estas sendo ambíguas. Para isto basta apenas que $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ seja simétrico em α e β .

A identidade analisada será então satisfeita pelo nosso cálculo. Este fato é consequência de relações, até certo ponto, surpreendentes. Um termo finito que envolve apenas massas de partículas vindo da redução de Z_1 para Z_0 relaciona-se de modo “mágico” à diferença de integrais divergentes básicas quadráticas mais uma divergência logarítmica. Esta relação é exata e *crucial* para obtermos válida a Identidade de Ward. Isto mostra de maneira inequívoca que uma filosofia de regularização consistente deve acrescentar em suas propriedades as relações de escala entre integrais básicas divergentes. Se tivéssemos utilizado uma forma explícita de regularização a observação feita acima seria praticamente impossível de ser percebida. A violação destas relações é, em geral, a causa do fracasso de métodos tradicionais no tratamento de problemas com massas diferentes.

Prosseguindo tomamos a função de Green T_ν^{AP} . Neste caso a contração com o momento externo fornece:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_\nu^{AP}(k_1, m_1; k_2, m_2) = -(m_1 + m_2)T^{PP}(k_1, m_1; k_2, m_2) - T^S(k_2, m_2) - T^S(k_1, m_1), \quad (9.100)$$

Aqui utilizamos no interior do traço a identidade:

$$(\not{k}_2 - \not{k}_1)\gamma_5 = [\not{k} + \not{k}_2 - m_2]\gamma_5 + \gamma_5[\not{k} + \not{k}_1 - m_1] + (m_1 + m_2)\gamma_5. \quad (9.101)$$

Uma inspeção nas expressões por nós obtidas para T_ν^{AP} , (eq.(9.67)), T^{PP} , (eq.(9.62)) e T^S , parece, de novo, negar esta possibilidade. Entretanto, como acabamos de fazer, reduzindo Z_1 para Z_0 e utilizando as relações de escala eq.(9.96) e eq.(9.57), podemos colocar T_ν^{AP} na forma:

$$\begin{aligned} T_\nu^{AP} &= \frac{(k_1 - k_2)_\nu}{(k_1 - k_2)^2} \left\{ -4m_2 I_{quad}(m_2^2) - 4m_1 I_{quad}(m_1^2) \right\} \\ &\quad - \frac{(k_1 - k_2)_\nu}{(k_1 - k_2)^2} (m_1 + m_2) \left\{ -2I_{quad}(m_1^2) - 2I_{quad}(m_2^2) \right. \\ &\quad \left. - 2[(m_1 - m_2)^2 - (k_1 - k_2)^2] \left[I_{log}(m_1^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \right\} \\ &\quad + 2(k_{1\alpha}k_{1\beta} + k_{2\alpha}k_{2\beta})\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (9.102)$$

Nesta expressão é imediato verificar a validade da relação correta, eq.(9.11), entre as amplitudes envolvidas, no que diz respeito à parte não-ambígua destas.

Agora consideremos o caso de $T_{\mu\nu}^{AV}$. Para esta primeiro tomemos o divergente da corrente axial:

$$(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{AV} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} (k_1 - k_2) \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \gamma_\nu \right\}. \quad (9.103)$$

utilizando a identidade (9.101), fica:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{AV} &= -(m_1 + m_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} \right\} \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} \right\} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \right\} \end{aligned} \quad (9.104)$$

Na expressão identificamos as funções T_ν^{PV} , $T_\nu^A(k_1, m_1)$ e $T_\nu^A(k_2, m_2)$ indicadas na fig.(9.3), todas identicamente nulas. Deste modo:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, m_1; k_2, m_2) = 0, \quad (9.105)$$

de modo inequívoco. Por sua vez, para a corrente vetorial, manipulações análogas nos levarão à relação:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AV}(k_1, m_1) = (m_2 - m_1) T_\nu^{AS} + T_\nu^A(k_1, m_1) + T_\nu^A(k_2, m_2). \quad (9.106)$$

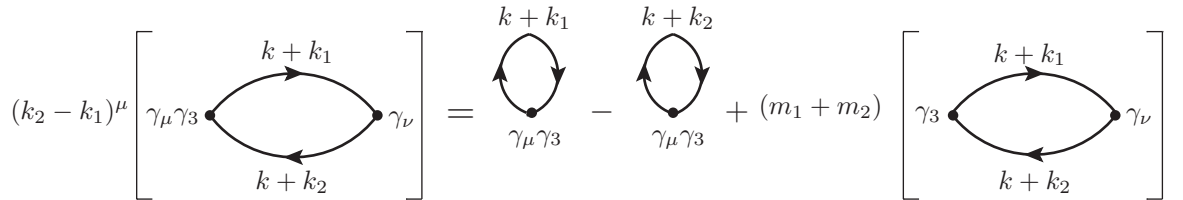


Figura 9.2: Representação diagramática da Identidade de Ward $(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{AV}$.

Novamente todas as funções envolvidas são identicamente nulas, resultando em:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AV} = 0. \quad (9.107)$$

Deste modo temos, aparentemente, duas correntes conservadas. Isto pode ser confirmado pela utilização da expressão (9.68) obtida para $T_{\mu\nu}^{AV}$. As contrações resultam nulas

em virtude da presença do tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ já contraído com k_1 e k_2 . Assim se esta função de dois pontos for diferente de zero ela possuirá duas correntes conservadas, contrariando o modelo que estamos utilizando para estabelecê-la. Não há opção razoável exceto $T_{\mu\nu}^{AV} = 0$, o que é automaticamente satisfeito se $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ for obtido nulo.

Prosseguindo tomemos a função $T_{\mu\nu}^{VV}$. Para esta temos:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m_1) = (m_1 - m_2)T_\nu^{VS} + T_\nu^V(k_1, m_1) + T_\nu^V(k_2, m_2). \quad (9.108)$$

Desta expressão é possível extrair as condições para que esta identidade seja satisfeita. São as mesmas necessárias para que $T_\nu^V(l, m) = 0$. Por outro lado se utilizamos a forma explícita obtida eq.(9.77), que após a utilização das relações de escala (9.57) e (9.96), bem como algumas reorganizações, pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{VV} = & \Theta_{\mu\nu} + (m_1 - m_2) \frac{g_{\mu\nu}}{(k_1 - k_2)^2} (m_1 - m_2) \left\{ 2I_{quad}(m_1^2) + 2I_{quad}(m_2^2) \right. \\ & \left. + 2 \left[(m_1 - m_2)^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] \left[I_{log}(m_1^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m_1^2, m_2^2; (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \right] \right\} \\ & + (m_1 - m_2) \frac{g_{\mu\nu}}{(k_1 - k_2)^2} \left\{ 4m^2 [I_{quad}(m_2^2)] - 4[I_{quad}(m_1^2)] \right\} + \phi_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (9.109)$$

poderemos notar que a Identidade de Ward será satisfeita na ausência de $\phi_{\mu\nu}$. É bom chamar a atenção para o fato de que nem todos os termos que aparecem em $\phi_{\mu\nu}$ são ambíguos. Portanto eventuais escolhas para k_1 e k_2 não são capazes de remover todos os termos de violação.

Finalmente, a última função de dois pontos que resta a ser analisada. Trata-se de $T_{\mu\nu}^{AA}$, para a qual a contração com $(k_1 - k_2)_\mu$ nos permite escrever:

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AA} = (m_1 + m_2)T_\nu^{AP} + T_\nu^V(k_2, m_2) - T_\nu^V(k_1, m_1). \quad (9.110)$$

Como no caso anterior a relação correta para o divergente da corrente axial dependerá das condições necessárias para que $T_\nu^V(l, m)$ seja obtida identicamente nula. Por outro lado a forma explícita por nós obtida, eq.(9.82), nos mostra que, mais uma vez, as Identidades de Ward dependerão dos valores das quantidades $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$, $\nabla_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ e $\alpha_{\beta\mu\nu}(\lambda^2)$.

Como uma última observação, a respeito destas funções de dois pontos, nós registramos ainda que existem relações algébricas entre elas, tais como:

$$T_{\mu\nu}^{VV} - T_{\mu\nu}^{AA} = g_{\mu\nu} [T^{SS} + T^{PP}] \quad (9.111)$$

que também devem ser satisfeitas pelas expressões calculadas por um eventual método. As condições para isto devem ser obviamente as mesmas.

Nós então nos voltamos para as funções de três pontos. Para este caso faremos a verificação das Identidades de Ward apenas com o cálculo explícito de funções de dois pontos como feito por Gerstein e Jackiw [3] e seguido por nós no capítulo anterior. Principiemos por considerar o processo $V \rightarrow SS$. Utilizando a definição (6) e contraindo com $(k_3 - k_2)_\lambda$ ficamos com:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS} &= (m_3 - m_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m_3]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \right\} \\
&+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} \right\} \\
&- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m_3]} \right\}, \tag{9.112}
\end{aligned}$$

onde utilizamos, no interior do traço, a identidade:

$$(k_3 - k_2) = (k + k_3 - m_3) - (k + k_2 - m_2) + (m_3 - m_2) \tag{9.113}$$

Na expressão obtida é fácil identificar as funções de três e dois pontos $T^{SSS}(k_1, m_1; k_2, m_2; k_3, m_3)$, $T^{SS}(k_1, m_1; k_2, m_2)$ e $T^{SS}(k_1, m_1; k_3, m_3)$, indicadas na fig.(9.4). Substituindo então os resultados para as funções de dois pontos, eq.(9.61), e incluindo a contribuição do diagrama cruzado, ficamos com:

$$\begin{aligned}
q_\lambda T_\lambda^{V \rightarrow SS} &= (m_3 - m_2)[T^{S \rightarrow SS}] + 2(k_{2\alpha} k_{2\beta} - k_{3\alpha} k_{3\beta})[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)] \\
&+ 2(l_{2\alpha} l_{2\beta} - l_{3\alpha} l_{3\beta})[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)]. \tag{9.114}
\end{aligned}$$

Tomemos agora a amplitude $V \rightarrow PP$. Repetindo o procedimento anterior, teremos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{V \rightarrow PP} &= (m_3 - m_2)[T^{S \rightarrow PP}] + 2(k_{3\alpha} k_{3\beta} - k_{2\alpha} k_{2\beta})[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)] \\
&+ 2(l_{3\alpha} l_{3\beta} - l_{2\alpha} l_{2\beta})[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)], \tag{9.115}
\end{aligned}$$

com representação diagramática dada na fig.(9.5).

Prosseguindo consideramos agora a amplitude T_λ^{ASP} . Então;

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} &= -(m_2 + m_3) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^5 \frac{1}{[k + k_3 - m_3]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \gamma^5 \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} \right\} \\
&- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma^5 \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \gamma^5 \frac{1}{[k + k_2 - m_2]} \right\} \\
&- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{1} \frac{1}{[k + k_1 - m_1]} \hat{1} \frac{1}{[k + k_3 - m_3]} \right\}, \tag{9.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^\lambda \left[\begin{array}{c} \gamma_\lambda \\ \begin{array}{ccc} & \bullet & \hat{1} \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \\ & \nwarrow_{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \end{array} \end{array} \right] = \hat{1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \end{array} - \hat{1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \end{array} \\
+ (m_3 - m_2) \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \bullet & \hat{1} \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \hat{1} & & \bullet \\ & \nwarrow_{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \end{array} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Figura 9.3: Representação diagramática de $(k_3 - k_2)^\lambda T_\lambda^{VSS}$.

$$\begin{aligned}
q^\lambda \left[\begin{array}{c} \gamma_\lambda \\ \begin{array}{ccc} & \bullet & \gamma_5 \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \\ & \nwarrow_{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \end{array} \end{array} \right] = \gamma_5 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \end{array} - \gamma_5 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \bullet & \bullet \\ & \nearrow^{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \\ \bullet & & \bullet \end{array} \end{array} \\
+ (m_3 - m_2) \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \bullet & \gamma_5 \\ & \nearrow^{k+k_3} & \downarrow^{k+k_1} \\ \hat{1} & & \bullet \\ & \nwarrow_{k+k_2} & \downarrow^{k+k_1} \end{array} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Figura 9.4: Representação diagramática de $(k_3 - k_2)^\lambda T_\lambda^{VPP}$.

onde utilizamos, no interior do traço, a identidade:

$$(\not{k}_2 - \not{k}_3)\gamma_5 = (\not{k} + \not{k}_2 - m_2)\gamma_5 + \gamma_5(\not{k} + \not{k}_3 - m_3) + (m_2 + m_3)\gamma_5. \quad (9.117)$$

Na expressão obtida identificamos $T^{PSP}(k_1, m_1; k_2, m_2; k_3, m_3)$, $T^{PP}(k_1, m_1; k_2, m_2)$ e

$T^{SS}(k_1, m_1; k_3, m_3)$. Substituindo os resultados para as funções de dois pontos e incluindo o diagrama cruzado ficamos com:

$$q_\lambda T_\lambda^{A \rightarrow SP} = (-)(m_2 + m_3)[T^{P \rightarrow SP}] - 2(k_{3\alpha}k_{3\beta} - k_{2\alpha}k_{2\beta})[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)] - 2(l_{3\alpha}l_{3\beta} - l_{2\alpha}l_{2\beta})[\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)] \quad (9.118)$$

Neste ponto poderíamos nos ocupar da análise de todas as outras funções de três pontos para o modelo e de suas correspondentes Identidades de Ward, (listadas na seção 2 deste capítulo) como fizemos no capítulo anterior. Uma vez que, do ponto de vista da análise que estamos utilizando [3], apenas o cálculo de funções de dois pontos torna-se necessário, e todas já foram apresentadas com suas respectivas Identidades de Ward, o estudo das relações de simetria para as funções de três pontos restantes nenhuma condição nova revelará. Ao final teremos a mesma conclusão já retirada no capítulo anterior. Exigidas as condições de consistência todos os termos ambíguos serão eliminados e todas as relações de simetria podem ser satisfeitas para as funções de três pontos.

9.5 Conclusões

Utilizamos a estratégia de Gerstein e Jackiw [3], para investigar a associação entre ambiguidades decorrentes da arbitrariedade existente na rotulação dos momentos das linhas internas do “loop” e possíveis violações de relações de simetria, agora para o caso de massas diferentes. A maior restritividade imposta pelas Identidades de Ward, serve como um teste mais rigoroso para a estratégia adotada no capítulo 9, onde tratamos o mesmo modelo porém restrito ao caso de massas iguais. Todas as amplitudes agora estarão relacionadas entre si por Identidades de Ward, diferentemente do caso anterior onde algumas não sofrem destas restrições. Isto nos permitiu identificar um outro tipo de ambiguidade a qual denominamos “ambiguidade de escala”. A origem deste tipo de ambiguidade está na arbitrariedade existente na escolha das identidades utilizadas para a separação das partes dependentes dos momentos externos (finitas) e aquelas potencialmente divergentes. Foi possível perceber claramente que a quantidade mantida nos objetos básicos divergentes I_{log} e I_{quad} desempenha o papel de escala para todas as quantidades físicas da amplitude correspondente. Deste modo podemos estabelecer claramente condições para a eliminação dos termos ambíguos de escala pela exigência de que as amplitudes correspondentes sejam invariantes de escala. Isto implicará que uma eventual regularização

consistente possua as propriedades:

$${}^{Reg}_{\alpha\beta\mu\nu}(\lambda^2) = \Delta_{\alpha\beta}{}^{Reg}(\lambda^2) = \Delta_{\alpha\beta}{}^{Reg}(\lambda^2) = 0, \quad (9.119)$$

e ainda mantenha válidas as relações de escala;

- $I_{quad}(\lambda_1^2) = I_{quad}(\lambda_2^2) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)I_{log}(\lambda_1^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)]$
- $I_{log}(\lambda_1^2) = I_{log}(\lambda_2^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\right]$.

As relações acima, que não passam de meras relações algébricas, são cruciais para que possamos dar significado físico às amplitudes contendo divergências, especialmente no caso de existirem massas diferentes. Quanto às condições (9.120), que eliminam as ambiguidades de escala, nada mais são do que uma reafirmação das relações de consistência, já bem discutidas por nós anteriormente. Isto serve para estabelecer, de modo definitivo, que a convivência com as ambiguidades associadas às escolhas para os rótulos das linhas internas isto é, sem exigir (9.120), é insustentável já que por sucessivas aplicações de identidades poderíamos tornar as amplitudes dependentes de um número arbitrário de parâmetros cujos coeficientes estariam ainda contaminados por tais ambiguidades. Eventuais escolhas para os momentos arbitrários não tornariam a amplitude univocamente definida. A partir deste ponto então nós assumimos definitivamente como inaceitáveis métodos ou estratégias de análises aplicados a qualquer problema físico envolvendo amplitudes divergentes, que não incorporem as condições (9.120), ou seja, que admitam a possibilidade de ambiguidades. A exigência de (9.120) simultaneamente evita a sobrevivência de termos ambíguos de escala e por escolhas dos momentos das linha internas do “loop”.

Quanto às Identidades de Ward, temos as condições (9.120) como necessárias pois ainda que os termos de violações possam ser livres de ambiguidades associadas aos momentos das linhas internas eles não o serão de ambiguidades de escala. Em outras palavras, nas análises que fizemos no capítulo anterior encontramos amplitudes onde podíamos ter violações de relações de simetria através de termos que envolviam apenas momentos externos. Dissemos na ocasião que estes termos eram não ambíguos. Segundo nossa análise atual, entretanto, eles ainda podem ser ambíguos de escala. Portanto todos os termos de violações são, em última análise, ambíguos, por um motivo, por outro ou por ambos.

A mais importante e surpreendente conclusão deste capítulo, que adiciona uma nova condição às condições de consistência, é a “comunicação” que deve ser estabelecida entre as partes finitas representadas pelas funções Z_k e aquelas divergentes representadas pelos objetos I_{log} e I_{quad} , materializada pelas relações:

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[2q^2 Z_1(m_1^2, m_2^2, q^2; m^2) - (q^2 + m_1^2 - m_2^2) Z_0(m_1^2, m_2^2, q^2; m_1^2) \right] \\
& = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[m_1^2 - m_2^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{9.120}$$

$$\bullet \left[I_{quad}(m_1^2) - I_{quad}(m_2^2) + (m_2^2 - m_1^2) I_{log}(m_2^2) \right] = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[m_2^2 - m_1^2 + m_2^2 \ln \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right] \tag{9.121}$$

envolvendo divergências quadráticas, e ainda as relações:

$$\bullet \left[Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_1^2) - Z_k(m_1^2, m_2^2, q^2; \lambda_2^2) \right] = \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \tag{9.122}$$

$$\bullet I_{log}(\lambda_1^2) - I_{log}(\lambda_2^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \tag{9.123}$$

envolvendo divergências logarítmicas.

A equação (9.122) é uma propriedade simples das funções Z'_k s que se fazem presentes em amplitudes vindas de termos finitos. A expressão eq.(9.123) é uma relação de escala para objetos básicos quadraticamente divergentes e vem de termos divergentes. A necessária e precisa (exata) comunicação entre eles, para que as Identidade de Ward sejam satisfeitas, nos mostra que o conceito usual de partes finitas e divergentes precisa ser re-visto. Certas operações, sempre presentes em tratamentos convencionais que fazem uso de formas explícitas de regularizações, tais como expansão e limites, tornam inviável a observação ou a manutenção das propriedades eqs.(9.122) - (9.125). De algum modo as divergências, representadas aqui por I_{log} e I_{quad} guardam propriedades algébricas típicas de objetos finitos. Isto termina por conferir aos termos divergentes propriedades bem definidas e essenciais às amplitudes físicas. Termos finitos, que podem a primeira vista ser desprezados em uma eventual comparação com outros divergentes, fazem parte do conteúdo físico das amplitudes e não podem ser descartados neste contexto. Tais procedimentos são praticamente impossíveis de serem vislumbrados no contexto de métodos de regularização onde o significado dos termos divergentes e finitos é completamente estanque. Mais uma vez nossas conclusões favorecem um melhor entendimento das razões do sucesso da R.D., o único dos métodos de regularização onde esta conceituação é um pouco flexível. Segundo nossa análise não há qualquer liberdade na construção de esquemas de

renormalização que não esteja restrita àquelas permitidas pela escolha da escala que caracterizará os objetos básicos divergentes. Em última instância, isto implica que não pode haver qualquer dependência com o método de regularização no esquema de renormalização pois toda e qualquer que houver terá origem em ambiguidades ou na violação de propriedades essenciais aos objetos divergentes com vistas à manutenção do conteúdo físico das amplitudes. O que acabamos de estabelecer tem impacto direto e imediato na definição dos coeficientes das equações do Grupo de Renormalização [4]. O cálculo através da nossa estratégia é exato e, satisfeitas as propriedades gerais que estabelecemos, será independente do método específico de regularização.

Pode, a primeira vista, parecer surpreendente que tenhamos que exigir propriedades algébricas das quantidades divergentes básicas. Entretanto se lembrarmos que no processo de renormalização estas quantidades terminam definindo quantidades físicas poderíamos chegar à conclusão de que não poderia ser diferente.

Por fim, além destas novas e importantes conclusões permanece válida aquela principal retirada do capítulo anterior: o método de análise da ref.[3] para as relações de simetria, não é sustentável pois permite identificarmos um conjunto de condições que levam exatamente à conclusão oposta daquelas estabelecidas pelos autores: todas as relações de simetria podem ser satisfeitas, e as anomalias não podem ser justificadas naquele tratamento.

Depois destas importantes conclusões resta-nos apenas a questão da compatibilidade das relações de consistência com a unicidade dos cálculos. É desta discussão, que nos ocuparemos nos próximos capítulos, que entenderemos como é possível acomodar as anomalias consistentemente em nosso esquema.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel and M.C. Nemes, Phys. Rev., D59, 055010 (1999);
- [2] O.A. Battistel, O.L. Battistel and M.C. Nemes, (XVIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 1998);
O.A. Battistel, O.L. Battistel, (Simetria SU(3) num modelo de Férmions livres e massas diferentes: Ambiguidades e Relações de Simetria e Aplicação ao Modelo NJL versão SU(3).) (trabalho em andamento);
- [3] I.S. Gerstein and R.Jackiw, Phys. Rev. 181 1955 (1969);
- [4] A. Brizola, O.A. Battistel, M. Sampaio e M.C. Nemes (submetido para publicação);
A. de Oliveira Brizola, tese de mestrado UFMG (1998);

Capítulo 10

Relações entre Integrais Divergentes

10.1 Introdução

Nos capítulos precedentes nós desenvolvemos investigações envolvendo amplitudes divergentes, sem entretanto explicitar um método de regularização. Ao invés disto admitimos a presença implícita de uma distribuição regularizadora com propriedades bastante gerais, essenciais para uma tal função. A vantagem desta estratégia foi permitir a identificação de certas relações entre integrais divergentes que terminam por desempenhar um papel crucial no que diz respeito ao possível caráter ambíguo das amplitudes bem como na preservação das simetrias da teoria.

Tendo em vistas a importância que as “relações de consistência” adquiriram, neste capítulo, nós nos dedicaremos a um estudo mais detalhado destas e consideraremos o ponto de vista dos principais métodos de regularização a respeito [1].

Ao final das discussões retiraremos importantes conclusões que se tornarão cruciais para nossas pretensões. Isto porque, neste ponto, viabilizar qualquer procedimento consistente, para manipulações e cálculos de amplitudes divergentes, passa necessariamente pelo entendimento das relações entre integrais divergentes que denominamos “relações de consistência”.

10.2 Relações entre integrais de Feynman.

A fim de tentarmos entender os resultados obtidos, torna-se crucial estudarmos as relações entre integrais de Feynman, principalmente entre aquelas divergentes, em termos das quais

escrevemos nossas “relações de consistência”. Estas, necessárias e suficientes, até aqui, para eliminar ambiguidades e evitar violações de relações de simetria.

Nós começamos por retomar os resultados principais do capítulo 4 onde discutimos o cálculo de integrais de Feynman. Naquela oportunidade argumentamos que seria suficiente estabelecer o resultado para a forma geral:

$$I(2\omega, \alpha, q) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 + 2q \cdot k - H^2]^\alpha} \quad (10.1)$$

onde 2ω é a dimensão do espaço dos momentos, inteiro e real assim como α . Por sua vez q é o momento externo (ou uma combinação destes) e H^2 é a parte independente dos momentos de integração que conterá formas invariantes dos momentos externos bem como eventualmente massas. A partir do resultado obtido para a eq.(10.1) os outros resultados necessários para integrais de Feynman, que ocorrem em cálculos de amplitudes físicas envolvendo “loops”, podem ser obtidos por derivações em ambos os lados em relação ao momento q , como foi mostrado no capítulo 4.

O primeiro passo, que efetuamos, foi um “shift” na variável de integração:

$$k' = k + q$$

Com isso o denominador adquire a forma:

$$k^2 + 2k \cdot q - H^2 \rightarrow k'^2 - (q^2 + H^2),$$

então após alguns passos intermediários teremos

$$I(2\omega, \alpha, q) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}. \quad (10.2)$$

De posse deste resultado estabelecemos outras formas de interesse eqs.(4.41) - (4.49). Nós as reescrevemos para a discussão que faremos, no ponto $q=0$. Teremos então:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha - \omega}} \quad (10.3)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha - \omega - 1}} \quad (10.4)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{\omega \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha - \omega - 1}} \quad (10.5)$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{4} [g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}] \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha - \omega - 2}} \quad (10.6)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2 k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{(\omega + 1)}{2} g_{\beta\xi} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha - \omega - 2}} \quad (10.7)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^4}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \omega(\omega + 1) \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha - \omega - 2}}. \quad (10.8)$$

As integrais (10.4) - (10.8) foram obtidas a partir da primeira e, por isso, a comparação dos resultados nos permite identificar relações destas integrais com aquela. Como tal, consideremos a integral (10.4). Nós a reescrevemos com auxílio das propriedades da função $\Gamma(x)$;

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega} \right) \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha - 1) (-\mu^2)^{\alpha - \omega - 1}}. \quad (10.9)$$

Fazendo $\alpha' = \alpha - 1$ obtemos:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha'+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha'} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha'}}. \quad (10.10)$$

Seguindo o mesmo procedimento identificamos outras relações:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} = \left(\frac{\omega}{\alpha} \right) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \quad (10.11)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+2}} = \frac{[g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}]}{4\alpha(\alpha + 1)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \quad (10.12)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2 k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+2}} = \frac{\omega + 1}{2\alpha(\alpha + 1)} g_{\xi\beta} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \quad (10.13)$$

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^4}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+2}} = \frac{\omega(\omega + 1)}{\alpha(\alpha + 1)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}. \quad (10.14)$$

É importante notar que os resultados (10.10) - (10.14) representam relações entre os resultados das integrais. Ou seja, para observá-las foi necessário primeiro calculá-las. Em situações onde estes resultados não podem ser estabelecidos, em princípio, nada podemos afirmar nem estender, por indução, para valores de 2ω e α não contemplados pela validade do cálculo efetuado para $I(2\omega, \alpha, q)$.

Observações adicionais revelam ainda propriedades gerais das integrais consideradas. Como tal integração simétrica com dois índices:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \left(\frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \right) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}. \quad (10.15)$$

Por sua vez, com quatro índices:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \frac{[g_{\mu\nu}g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta}g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi}g_{\nu\beta}]}{4\omega(\omega + 1)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^4}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}. \quad (10.16)$$

Estas propriedades são bastante gerais e podem ser estabelecidas por considerações diretas sobre os índices de Lorentz e dimensionalidade ao invés da comparação entre os resultados das integrais.

Outros resultados interessantes, para nossos propósitos, surgem quando eliminamos fatores quadráticos, no momento de integração, do numerador por manipulações algébricas. Como tal;

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2 + \mu^2 - \mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} \\ &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} + \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

A validade das operações acima pode ser testada pela substituição dos resultados para as integrais. O lado direito, respectivamente, fica:

$$\left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-\mu^2)^{\alpha-\omega}} + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\mu^2 \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha + 1) (-\mu^2)^{\alpha-\omega-1}} \right\}. \quad (10.18)$$

Reorganizando e definindo $\alpha' = \alpha - 1$ fica:

$$\left[1 - \frac{(\alpha' - \omega)}{\alpha'} \right] \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\Gamma(\alpha' - \omega)}{\Gamma(\alpha') (-\mu^2)^{\alpha'-\omega}} \right\}. \quad (10.19)$$

O termo entre chaves pode ser identificado com a integral correspondente. Assim isto pode ser escrito como:

$$\frac{\omega}{\alpha'} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha'}}, \quad (10.20)$$

que por sua vez, eq.(10.11), é igual a:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.21)$$

Neste cálculo simples podemos ver a consistência das operações de integração dimensional e manipulações algébricas no integrando. Estas operações, por outro lado podem ser usadas para gerar uma aparente inconsistência: Se ambas são válidas temos, por exemplo, o quadro abaixo:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}$$

$$\begin{array}{l} \text{Integração dimensional} \quad \text{Integração simétrica+manip. algébricas} \\ \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \quad \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} + \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} \end{array}$$

Comparando os dois resultados somos levados a:

$$\frac{(\omega - \alpha)}{2\alpha\omega} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \frac{1}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.22)$$

Assim, olhando para esta expressão, podemos ser tentados a caracterizar uma inconsistência. Isto porque tomando $\alpha = \omega$ o lado esquerdo pode se anular (a menos que a integral tenha um pólo em $\alpha = \omega$) ao passo que o lado direito é claramente diferente de zero. Isto sugere que as duas operações efetuadas para construir relações entre as integrais, não podem ser simultaneamente válidas.

Na verdade esta “inconsistência” é ainda duvidosa pois os resultados não valem para a situação $\alpha \leq \omega$. A presença das funções $\Gamma_E(x)$, a função gama de Euler, limita a validade dos resultados para $\alpha > \omega$. Esta constatação é importante pois as relações entre integrais que precisamos estão exatamente na condição $\alpha \leq \omega$ ou seja; integrais divergentes. De certa forma toda a problemática relacionada às manipulações e cálculos de amplitudes físicas contendo divergências reside na solução deste dilema. Vejamos isto com detalhes.

Para obtermos relações entre integrais divergentes devemos antes torná-las finitas para depois calculá-las. Assim, das investigações que realizamos, a consistência desejada exigiria que as integrais regularizadas mantivessem válido o lado esquerdo da tabela:

$$\int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}. \quad (10.23)$$

Por sua vez o lado direito nos levaria a:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} \\ &+ \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^3}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Ambos os resultados defeririam por uma constante. Se a relação (10.23) puder ser mantida por alguma regularização teríamos amplitudes sem ambiguidades e relações de simetria satisfeitas. A expressão (10.24) uma vez válida negaria isto. As duas aparentemente

não podem ser válidas simultaneamente no contexto de regularizações quadridimensionais. Outro aspecto importante que deve ser notado é que ambas levam a valores diferentes para o valor a momento externo nulo das integrais correspondentes. Em suma, se exigimos válida a relação (10.23) que nos leva a consistência almejada, então as operações:

$$\begin{aligned} k_\mu k_\nu f(k^2) &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} k^2 f(k^2) \\ &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} (k^2 - \mu^2 + \mu^2) f(k^2), \end{aligned} \quad (10.25)$$

não devem ser feitas impunemente em integrais divergentes, sob pena de introduzirmos termos geradores de ambiguidades e violações de relações de simetria bem como modificarmos o valor a momento nulo das amplitudes.

Este tipo de situação se repetirá cada vez que tivermos bilineares no numerador de uma integral divergente. Como tal com o produto de quatro momentos de integração seríamos levados aos seguintes resultados para a integral:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta k_\xi}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+2}}$$

- Integração dimensional;

$$\frac{[g_{\mu\nu}g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta}g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi}g_{\nu\beta}]}{4\alpha(\alpha+1)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}.$$

- Integração simétrica + manipulações algébricas;

$$\begin{aligned} &\frac{[g_{\mu\nu}g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta}g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi}g_{\nu\beta}]}{4\omega(\omega+1)} \left\{ \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{2\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} + \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^4}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+2}} \right\}. \end{aligned}$$

Quando tratadas por alguma regularização as duas expressões, válidas simultaneamente em integrais para $\alpha > \omega$, levarão a resultados conflitantes para $\alpha \leq \omega$. Mais uma vez, exigir a validade do lado esquerdo da tabela, no contexto de regularizações, implica em não permitir válidas as operações que levam ao lado direito.

De um modo ou de outro todos os métodos de regularização ou prescrições para manipulações a cálculos de integrais divergentes têm seus defeitos e virtudes decididos pela maneira com que convivem com este problema. Nenhum estará livre de inconvenientes. Na possibilidade de dar uma interpretação consistente para os cálculos, apesar deste problema, reside a utilidade da expansão perturbativa diagramática.

A questão neste ponto é então; se decidirmos por manter válidas as “relações de consistência” qual deve ser o procedimento a ser seguido nos cálculos de modo a mantermos coerência com esta opção? Em outras palavras, como caracterizar e avaliar corretamente as reduções de bilineares do momento do “loop” no numerador?

Na próxima seção nós daremos uma caracterização para estes termos, no contexto de regularizações quadridimensionais.

10.3 Regularizações e Termos de superfície

Na seção anterior nós retomamos resultados da integração dimensional (ω inteiro e real). Estes foram utilizados para produzir relações entre integrais de Feynman. Isto foi feito pela comparação dos resultados obtidos para as integrais após estas terem sido calculadas explicitamente. Além disto foram verificadas propriedades gerais deste tipo de integrais como tal, integração simétrica e manipulações algébricas no integrando. Todos os resultados obtidos são consistentes entre si. Entretanto tais resultados produzidos estão limitados a valores de α e ω tais que $\alpha > \omega$. A extensão da validade dos resultados para $\alpha \leq \omega$ no contexto de regularizações quadridimensionais, aponta para a inconsistência [2].

A razão imediata para esta inconsistência vem do fato de, no primeiro passo ter sido efetuado, em busca da solução para a integral básica eq.(10.1), um “shift” no momento de integração. Deste modo para estendermos a validade para $\alpha \leq \omega$ devemos incluir compensações a esta operação que, como sabemos, não pode ser feita impunemente em integrais divergentes. Uma vez que façamos esta compensação esperamos obter as relações corretas entre as integrais, removendo as aparentes inconsistências.

Nós podemos avaliar estes termos, no contexto da discussão que efetuamos na seção anterior, de um modo bastante simples. Começamos por considerar a identidade:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\partial}{\partial k_\mu} (k_\mu f(k)) = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} 2\omega f(k) + \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu \left(\frac{\partial f(k)}{\partial k_\mu} \right). \quad (10.26)$$

O termo do lado esquerdo, através do teorema de Gauss, pode ser convertido num “termo de superfície”. Evidentemente que seu valor dependerá do comportamento assintótico de $f(k)$. Se $f(k)$ cai rapidamente para grandes valores de k então ele é nulo. Este é o caso quando as integrais do lado direito forem convergentes mas não o será para o caso de as integrais divergirem. Nós podemos utilizar a idéia acima como um modo simples para gerar relações entre integrais de nosso interesse.

Assim, inicialmente tomamos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \right) = 2\omega \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} - 2\alpha \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}, \quad (10.27)$$

a qual colocamos na forma:

$$2\alpha \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} + \Delta S = 2\omega \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}. \quad (10.28)$$

A relação acima é uma identidade válida, em princípio, para quaisquer valores de α e ω . Neste ponto se queremos prosseguir e produzir relações entre integrais divergentes devemos tomar auxílio de alguma distribuição regularizadora, no mesmo espírito que fizemos até aqui. Neste caso fazemos $k^2 = k^2 - \mu^2 + \mu^2$ no numerador para obter:

$$(\alpha - \omega) \int_\Lambda \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = -\alpha \int_\Lambda \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} - (\Delta S)_\Lambda. \quad (10.29)$$

Na expressão acima temos três situações distintas:

1. $\alpha > \omega$.

Neste caso as integrais serão finitas e nós retiramos o subscrito Λ e ΔS será nulo. O resultado é aquele da integração dimensional.

2. $\alpha = \omega$.

Neste caso a integral (regularizada) estará multiplicada por $(\alpha - \omega)$. Por não possuir pólo em $\alpha = \omega$, o lado esquerdo da eq.(10.29) se anulará. O termo de superfície não poderá ser nulo e deverá valer:

$$\frac{(\Delta S)_\Lambda}{2\alpha} = - \int_\Lambda \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.30)$$

3. $\alpha < \omega$.

Para este caso teremos ΔS não-nulo e valendo:

$$\frac{(\Delta S)_\Lambda}{2\alpha} = - \left\{ \frac{(\alpha - \omega)}{\alpha} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} + \int_\Lambda \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} \right\}. \quad (10.31)$$

Antes de prosseguir e obter novos resultados podemos nos questionar da utilidade destes que obtivemos. Eles servem para auxiliar a “reduzir” um fator k^2 no numerador de uma integral relacionando integrais divergentes.

Nós então escrevemos:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} = \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} + \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} + \left(\frac{\Delta S}{2\alpha} \right)_{\Lambda}. \quad (10.32)$$

Se queremos a situação $\alpha = \omega$ substituímos o valor do termo de superfície correspondente para obter:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\omega+1}} = \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\omega}}, \quad (10.33)$$

de onde retiramos o caso particular $\alpha = \omega = 2$ (dimensão física):

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^3} = \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}. \quad (10.34)$$

A relação obtida é aquela que nos leva a resultados consistentes. A redução ao objeto básico $I_{\log}(\mu^2)$ é agora correta, concordando com o correspondente resultado da integração dimensional.

Se por outro lado queremos a situação $\alpha + 1 = \omega$ substituímos o valor do termo de superfície eq.(10.31) na expressão eq.(10.32) para obter:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\omega}} = \left(\frac{\omega}{\omega - 1} \right) \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\omega-1}} \quad (10.35)$$

de onde retiramos o caso particular ;

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^2} = 2 \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)}, \quad (10.36)$$

reduzindo então a integral corretamente ao objeto básico $I_{quad}(\mu^2)$.

Este procedimento pode ser utilizado para obter os termos de superfície para outras relações entre integrais. Como tal ;

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\partial}{\partial k_{\nu}} \left(\frac{k_{\mu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} \right) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} - 2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}, \quad (10.37)$$

ou seja:

$$2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} + \Delta S_{\mu\nu} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.38)$$

O próximo passo é tomar auxílio numa distribuição regularizadora e então utilizar integração simétrica e manipulações algébricas no integrando;

$$k_\mu k_\nu \rightarrow \frac{1}{2\omega} k^2 g_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{2\omega} (k^2 - \mu^2 + \mu^2) g_{\mu\nu}. \quad (10.39)$$

Assim ficamos com:

$$\left[\frac{(\alpha - \omega)}{2\omega} g_{\mu\nu} \right] \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} + (\Delta S_{\mu\nu})_\Lambda = -\frac{\alpha}{\omega} g_{\mu\nu} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.40)$$

Temos então as três situações:

1. $\alpha > \omega$.

Eliminamos o subscrito Λ , tendo $\Delta S_{\mu\nu} = 0$.

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}. \quad (10.41)$$

para qualquer α e ω .

2. $\alpha = \omega$.

Neste caso:

$$\Delta S_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\omega+1}}. \quad (10.42)$$

3. $\alpha + 1 = \omega$.

Para esta situação tem-se:

$$\Delta S_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \left\{ \frac{(\omega - 1)}{\omega} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^\omega} - \frac{1}{\omega} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\omega-1}} \right\}. \quad (10.43)$$

Isto então nos conduzirá para o caso de reduções de bilineares por este caminho;

• $\alpha > \omega$.

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \quad (10.44)$$

• $\alpha = \omega$

$$\int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^\omega} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \quad (10.45)$$

- $\alpha + 1 = \omega$

$$\int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\omega}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2(\omega - 1)} \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}}. \quad (10.46)$$

Para o caso particular $\omega = 2$, ficamos com;

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} \quad (10.47)$$

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)}. \quad (10.48)$$

Elas são agora consistentes com aqueles eq.(10.34) e eq.(10.36) pela contração $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\mu} = 4$, e compatíveis com os resultados da integração dimensional.

Finalmente para completar as relações que necessitamos, consideremos a integral quadrilinear em k . Para esta temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \left(\frac{k_{\mu} k_{\beta} k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} \right) &= g_{\mu\nu} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\beta} k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} \\ &+ g_{\mu\beta} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\xi} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} \\ &+ g_{\mu\xi} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\beta} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} \\ &- 2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu} k_{\nu} k_{\beta} k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}, \end{aligned} \quad (10.49)$$

tomando auxílio numa distribuição fazemos:

$$k_{\mu} k_{\nu} k_{\beta} k_{\xi} \rightarrow k^4 \frac{[g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}]}{4\omega(\omega + 1)}, \quad (10.50)$$

e então:

$$k^4 \rightarrow (k^2 - \mu^2 + \mu^2) k^2,$$

para ficar com:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\omega} \left[\frac{\alpha}{(\omega + 1)} - 1 \right] [g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}] \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha}} + (\Delta S_{\mu\nu\xi\beta})_{\Lambda} \\ &= \frac{-2\alpha}{4\omega(\omega + 1)} [g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}] \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2 k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Portanto para $\alpha = \omega + 1$ o termo de superfície deve valer:

$$(\Delta S_{\mu\nu\xi\beta})_{\Lambda} = -\frac{[g_{\mu\nu}g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta}g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi}g_{\nu\beta}]}{2\omega} \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2 k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.52)$$

Com isso a redução de um bilinear por integração simétrica e manipulações algébricas nos leva a:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\nu}k_{\mu}k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^{\omega+2}} &= \frac{g_{\mu\nu}}{2(\omega + 1)} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^{\omega+1}} \\ &+ \frac{g_{\mu\beta}}{2(\omega + 1)} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\xi}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\omega+1}} \\ &+ \frac{g_{\mu\xi}}{2(\omega + 1)} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^{\omega+1}}. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Particularmente para $\omega = 2$ podemos escrever as expressões:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\nu}k_{\mu}k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^4} &= \frac{g_{\mu\nu}}{6} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &+ \frac{g_{\mu\beta}}{6} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\xi}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &+ \frac{g_{\mu\xi}}{6} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\beta}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3}, \end{aligned} \quad (10.54)$$

ou ainda:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\nu}k_{\mu}k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^4} = \frac{[g_{\mu\nu}g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta}g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi}g_{\nu\beta}]}{4.3.2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^3}, \quad (10.55)$$

ou então :

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\nu}k_{\mu}k_{\beta}k_{\xi}}{(k^2 - \mu^2)^4} = \frac{[g_{\mu\nu}g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta}g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi}g_{\nu\beta}]}{4.3.2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}. \quad (10.56)$$

Temos portanto a confirmação das relações de consistência obtidas nas investigações realizadas.

Neste ponto é importante que acrescentemos alguns comentários sobre o que fizemos nesta seção.

Uma vez que percebemos, na seção anterior, que nem todas as propriedades válidas para integrais finitas poderiam ser extendidas para aquelas divergentes, sob pena de inconsistência, nós avaliamos quais as correções que deveriam ser feitas nas relações entre

integrais divergentes, no contexto de regularizações quadridimensionais. Fizemos isto considerando relações gerais entre as integrais de nosso interesse envolvendo “termos de superfície”. Após o tratamento adequado percebemos que as “relações de consistência” emergem naturalmente, ou seja, os termos que resultam em violações de relações de simetria e/ou ambiguidades são eliminados. Segundo esta análise, qualquer método de regularização pode levar aos resultados corretos, contrariando as consequências usuais destes métodos. Isto porque remove-se assim o principal erro cometido no processo de regularização. Nós podemos entender isto de um modo bastante simples. Ocorre que, quando a integral divergente é modificada pela introdução da regularização, basicamente introduzimos um fator na integral para o qual existe um “limite de conexão”, isto é, um limite onde este fator torna-se a unidade. A partir deste ponto, trocamos a ordem deste limite com a integração e passamos a efetuar operações válidas estritamente para integrais finitas. Estas, como vimos, não são todas simultaneamente válidas para as correspondentes divergentes. Nós poderíamos imaginar que, ao final, ao tomarmos o “limite de conexão”, estas diferenças fossem removidas. É exatamente este ponto que termina por comprometer os resultados pois isto não é necessariamente verdade. Ocorre que entre estes termos existem sempre integrais que são finitas e independem da regularização utilizada e portanto do limite tomado. A rigor podemos garantir apenas a saturação, ou seja, o termo dominante. A função dos momentos externos, por outro lado, que é separada de início no nosso procedimento, é também bem definida (até por razões de unitariedade). Entre estes dois termos podemos ter uma série de potências nos momentos externos com coeficientes finitos ou divergentes (com grau menor que o dominante). Estes podem depender do modo específico como os cálculos foram feitos. É entretanto necessário, em muitos problemas, tais como ambiguidades e relações de simetria, que estes sejam univocamente definidos, ainda que não o necessitem ser em todos, como por exemplo em renormalização de certas teorias simples. Com esta discussão nós respondemos uma questão crucial que é o da validade das relações de consistência, independente do método específico de regularização desde que com a apropriada interpretação. Em seguida consideramos outros pontos de vista para as mesmas relações entre integrais divergentes.

10.4 O Método de Pauli-Villars

É bastante oportuno, neste ponto, questionarmos a respeito do sucesso do método de Pauli-Villars na QED [2]. Como vimos, estudando o tensor de polarização do vácuo,

é necessário para um tal método que este satisfaça às relações de consistência. Então podemos ter alguma semelhança entre este método e o que fizemos na seção anterior.

A fim de verificar isto notemos que a forma geral das integrais que necessitamos discutir são:

$$(I, I_{\mu\nu}, I_{\mu\nu\alpha\beta} \dots) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu k_\nu, k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta \dots)}{(k^2 - m^2)^\alpha}. \quad (10.57)$$

Neste caso é imediato utilizar o método de Pauli-Villars. Basta fazer:

$$I(m) \longrightarrow \sum_{i=0} a_i I(\Lambda_i), \quad (10.58)$$

onde $a_0 = 1$ e $\Lambda_0 = m$. Os restantes Λ_i são parâmetros de regularização e os a_i 's são coeficientes escolhidos de modo a obtermos uma superposição tal que o resultado desejado torna-se possível. O limite de conexão é alcançado fazendo $\lim \Lambda_i \rightarrow \infty$. A consistência virá na forma de condições a serem impostas sobre os a_i 's e Λ_i 's.

Consideremos isto na primeira relação de consistência. Ela fica:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} = \\ & = \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 - \Lambda_i^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} \right\} \\ & = \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda_i^2}{(k^2 - \Lambda_i^2)^3} \right\} \\ & = \sum_{i=0} a_i \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Para satisfazer a relação é necessário escolher os a_i 's tais que:

$$\sum_{i=0} a_i = 0. \quad (10.60)$$

Uma destas escolhas possíveis poderia ser $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = -2$.

Quanto àquela envolvendo divergências quadráticas:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)} \right\} = \\ & = \sum_{i=0} a_i \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (k^2 - \Lambda_i^2 + \Lambda_i^2)}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Lambda_i^2)} \right\} \\ & = (-) \frac{g_{\mu\nu}}{2} \sum_{i=0} a_i \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)^2}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Agora, além da condição eq.(10.60) encontramos também:

$$\sum_{i=0} a_i \Lambda_i^2 = 0. \quad (10.62)$$

Para a última obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\alpha}k_{\beta}k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} - [g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \right\} = \\ & = [g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] \sum_{i=0} a_i \left\{ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{5}{6} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

E novamente apenas a condição eq.(10.60) é necessária.

Como podemos ver, ao invés de gerar apenas um termo indesejável, geramos uma soma destes de modo a cancelar o resultado. Na prática isto é muito semelhante àquilo que fizemos na seção anterior.

Uma questão oportuna é obter uma forma explícita para uma regularização de Pauli-Villars satisfazendo às condições eq.(10.60) e eq.(10.62). Poderemos assim entender as implicações destas condições. Para tal tomemos a integral quadraticamente divergente, com três termos na soma (2 regularizadores):

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} &= \sum_{i=0} a_i \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Lambda_i^2)} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{a_0}{k^2 - \Lambda_0^2} + \frac{a_1}{k^2 - \Lambda_1^2} + \frac{a_2}{k^2 - \Lambda_2^2} \right\} \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ k^4(a_0 + a_1 + a_2) \right. \\ &\quad \left. - k^2[a_0(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) + a_1(\Lambda_0^2 + \Lambda_2^2) + a_2(\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2)] \right. \\ &\quad \left. + a_0\Lambda_1^2\Lambda_2^2 + a_1\Lambda_0^2\Lambda_2^2 + a_2\Lambda_1^2\Lambda_0^2 \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(k^2 - \Lambda_0^2)(k^2 - \Lambda_1^2)(k^2 - \Lambda_2^2)}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

A condição $\sum a_i = 0$ aparece a fim de zerar o termo k^4 ao passo que aquela $\sum_i a_i \Lambda_i^2 = 0$ é necessária para zerar o coeficiente de k^2 . Se isto não fosse verdade a integral não estaria regularizada. A solução (única) para os a 's é então:

- $a_0 = 1$
- $a_1 = \frac{-(\mu^2 - \Lambda_1^2)}{(\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2)}$

- $a_2 = \frac{-(\mu^2 - \Lambda_2^2)}{(\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)}$.

Com isso teríamos a expressão:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \longrightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \frac{(\mu^2 - \Lambda_1^2)(\mu^2 - \Lambda_2^2)}{(k_2^2 - \Lambda_1^2)(k_2^2 - \Lambda_2^2)}. \quad (10.65)$$

É interessante perceber que as condições impostas, eq.(10.60) e eq.(10.62) são necessárias para garantir regularizabilidade qualquer que seja o número de termos a'_i s. O menor número de termos para regularizar uma integral logicamente divergente é 1, por isso apenas a condição eq.(10.60) aparece. Para aquelas quadráticas, por outro lado, este número é 2, resultando nas condições eq.(10.60) e eq.(10.62). Uma vez garantida a regularizabilidade um número maior de termos permitirá cancelar os fatores indesejáveis gerando outros semelhantes. Passemos então para o ponto de vista da R.D.

10.5 Dimensão Contínua e Complexa (Regularização Dimensional)

As bases matemáticas para a construção do método da dimensão contínua e complexa, que foram discutidas brevemente no capítulo 3, residem no conceito de continuação analítica. O passo inicial consiste em estabelecer a validade do resultado:

$$I(2\omega, \alpha, q) = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 + 2q \cdot k - H^2]^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha) (-q^2 - H^2)^{\alpha - \omega}}, \quad (10.66)$$

para as situações onde se encontram as integrais que seriam divergentes na dimensão física ($\alpha \leq \omega$). Isto é feito admitindo-se que $I(2\omega, \alpha, q)$ é uma função analítica da variável ω , contínua e complexa. No lado direito a função Γ_E de Euler é então substituída pela sua continuação analítica (em $\alpha \leq \omega$) a função Γ_W de Weierstrass. As eventuais divergências aparecerão como pólos em valores específicos de ω . O aspecto importante é que uma vez estabelecido o resultado eq.(10.66) acima podemos utilizá-lo para produzir relações entre integrais sem nenhuma preocupação com a divergência das integrais. Em outras palavras, todas as operações de integração dimensional, integração simétrica e manipulações algébricas no integrando deverão ser válidas simultaneamente. Não fará sentido falar em termos de superfície. Com isso as relações entre integrais

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} = \frac{g_{\mu\nu}}{2\alpha} \int_{\Lambda} \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}, \quad (10.67)$$

e

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\nu k_\mu k_\beta k_\xi}{(k^2 - \mu^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}}{4\alpha(\alpha + 1)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha}, \quad (10.68)$$

são imediatas.

É importante notar que estas relações não representam uma simples indução da validade dos resultados para $\alpha > \omega$. Com a continuação analítica nós estabelecemos a validade do resultado eq.(10.66). Com este calculamos outras integrais e então comparando os resultados observamos as relações entre elas através do resultado calculado destas. A partir das expressões eq.(10.67) e eq.(10.68) acima podemos extrair os casos particulares $\alpha = \omega = 2$;

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^3} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}, \quad (10.69)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu k_\beta k_\xi}{(k^2 - \mu^2)^4} &= \frac{g_{\mu\nu}}{6} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\beta k_\xi}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &+ \frac{g_{\mu\beta}}{6} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\xi k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &+ \frac{g_{\mu\xi}}{6} \int_\Lambda \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\beta k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &= \frac{[g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}]}{4.3.2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2}, \end{aligned} \quad (10.70)$$

ou ainda para $\alpha + 1 = \omega = 2$;

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)}. \quad (10.71)$$

As relações eq.(10.69), eq.(10.70) e eq.(10.71) acima devem ser encaradas como representações para as respectivas expansões ao redor de $\omega = 2$. Assim as relações de consistência são, de certa forma, muito diretas no método da dimensão contínua.

Isto termina por justificar a consistência do método, tanto na preservação de simetrias quanto na eliminação de ambiguidades, nas situações onde se aplica.

É ainda interessante considerar a questão da consistência entre as operações de integração dimensional, integração simétrica e manipulações algébricas no integrando quando $\alpha < \omega$. Uma vez que não dispomos dos termos de superfície a consistência deve se dar de outro modo.

Para verificar isto retomamos a relação :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} \right) &= 2\omega \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} - 2\alpha \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}} \\ &= \Delta S. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Assim tomando $\Delta S = 0$ e fazendo $k^2 - \mu^2 + \mu^2 = k^2$ no integrando ficamos com:

$$(\alpha - \omega) \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.73)$$

Como ω é uma variável contínua a complexa podemos escrever a relação acima na forma:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(\alpha - \omega)} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+1}}. \quad (10.74)$$

Notemos que não há nada de inconsistente pois agora as integrais poderão ter pólos. Em particular a relação acima para $\alpha = \omega$ indica que a integral da esquerda possui um pólo simples em $\alpha = \omega$. A multiplicação da integral da esquerda pelo fator $\alpha - \omega$ agora não produz um zero como no caso das integrais regularizadas no espaço dos momentos. O lado direito de eq.(10.74) representa a continuação analítica do lado esquerdo em situações onde este não possa ser definido pela simples escolha do valor para ω ($\omega = 2$ por exemplo).

Notemos que estas manipulações sempre podem ser utilizadas para produzir relações entre integrais divergentes na dimensão de interesse com outras finitas nesta. O lado direito possui uma contagem de potência mais favorável do que o lado esquerdo em duas unidades. Este já seria o caso da integral eq.(10.74) para $\alpha = 2$ (divergência logarítmica) pois a do lado direito é convergente. O caráter divergente está presente no fator $(\omega - 2)^{-1}$. Para o caso de divergências quadráticas podemos repetir a operação acima para produzir:

$$\int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^\alpha} = \frac{\alpha\mu^2}{(\alpha - \omega)} \left\{ \frac{(\alpha + 1)\mu^2}{[\omega - (\alpha + 1)]} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\mu^2}{(k^2 - \mu^2)^{\alpha+2}} \right\}. \quad (10.75)$$

Notemos então a presença de pólos para $\alpha = \omega$ e para $\alpha + 1 = \omega$, como deveria ser. Isto significa que a integral a esquerda diverge em dimensões $2\omega = (4, 2)$ para $\alpha = 1$. A consistência necessária é fornecida pela interpretação destas relações no contexto da continuação analítica. O procedimento pode ser utilizado para construir relações entre integrais quaisquer, divergentes ou não.

Uma observação importante deve ainda ser feita. Trata-se das integrais que desempenham papel de “termos de superfície” nas relações entre integrais que divergem na dimensão física. Neste contexto todas elas se anulam. Portanto é possível produzir resultados diferindo por tais termos dependendo da ordem das operações para o limite $\omega = 2$ [3]. Na seção seguinte voltaremos a este problema com exemplos específicos.

10.6 Regras de Feynman e divergências

Nas seções anteriores pudemos perceber que, na busca por uma estratégia consistente para manipulações e cálculos de amplitudes divergentes, somos levados a reavaliar alguns procedimentos utilizados até aqui. Isto porque se desejamos impor, como parte da estratégia, as relações de consistência, devemos ser coerentes com estas. Então, como acabamos de ver, certas operações algébricas envolvendo integrais divergentes devem ser efetuadas cuidadosamente. A questão do momento é então saber se será possível manter as relações de simetria satisfeitas quando reavaliarmos os cálculos levando em conta estas incompatibilidades. A razão para esta preocupação se deve ao fato de, nas investigações realizadas, das quais brotaram as relações entre integrais divergentes como necessárias e suficientes, em alguns cálculos eliminamos fatores quadráticos no momento de integração com a utilização de manipulações algébricas envolvendo integrais com diferentes graus de divergência. Estas, as mesmas que agora concluímos não devem ser feitas impunemente.

Vamos então nesta seção tentar elucidar esta questão retomando alguns cálculos efetuados nos capítulos 9 e 10. Começamos pela amplitude T^{PP} , onde encontramos após o cálculo dos traços de Dirac:

$$T^{PP} = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{k^2 + k \cdot k_1 + k \cdot k_2 + k_1 \cdot k_2 - m^2}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (10.76)$$

Sem nenhuma manipulação algébrica deveríamos então escrever:

$$\begin{aligned} T^{PP} = & 4 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right. \\ & + (k_1 + k_2)_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\ & \left. + (k_1 \cdot k_2 - m^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (10.77) \end{aligned}$$

Apenas a primeira das integrais é motivo para nossas preocupações. Nós podemos resolvê-la de dois modos distintos. Primeiramente consideremos a solução via operações algébricas envolvendo relações entre integrais com diferentes graus de divergência. Assim nós fazemos a substituição:

$$\begin{aligned} k^2 = & \frac{1}{2} [(k + k_1)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [(k + k_2)^2 - m^2] + \\ & + \frac{1}{2} [2m^2 - (k_1^2 + k_2^2)] - [(k_1 + k_2) \cdot k]. \end{aligned}$$

Isto nos leva a relação:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2-m^2]} \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_2)^2-m^2]} \\
&+ \frac{[2m^2-k_1^2-k_2^2]}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \\
&- (k_1+k_2)_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]}. \tag{10.78}
\end{aligned}$$

É importante observar que estas operações são válidas tanto no contexto de regularizações quadridimensionais quanto em 2ω -dimensões. O próximo passo é a solução das integrais. Estas já foram consideradas (ver eqs.(8.56), (8.70) e (8.81) capítulo 8) e nós então ficamos com :

$$I = I_{quad}(m^2) + [k_1 \cdot k_2 + m^2] \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1+k_2)^2; m^2) \right\}. \tag{10.79}$$

Por outro lado poderíamos ter reescrito o integrando para ficar com :

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k+k_1)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2-m^2]^2} \\
&+ \left\{ - (k_1^2+k_2^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2-m^2]^3} \right. \\
&+ (k_{1\xi}k_{2\beta} + k_{1\xi}k_{1\beta} + k_{2\xi}k_{2\beta}) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k^2k_\xi k_\beta}{[k^2-m^2]^4} \left. \right\} \\
&+ \left\{ [(k_1^2)^2 + (k_2^2)^2] \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2-m^2]^4} \right. \\
&+ (k_1^2k_2^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2-m^2]^4} \\
&- \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 [k_1^2 + 2k \cdot k_1]^3}{[k^2-m^2]^4 [(k+k_1)^2-m^2]} \\
&- \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 [k_2^2 + 2k \cdot k_2]^3}{[k^2-m^2]^4 [(k+k_2)^2-m^2]} \\
&- \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 [k_2^2 + 2k \cdot k_2]^2 [k_1^2 + 2k \cdot k_1]}{[k^2-m^2]^4 [(k+k_2)^2-m^2]} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$- \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 [k_2^2 + 2k \cdot k_2] [k_1^2 + 2k \cdot k_1]^2}{[k^2 - m^2]^3 [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_1)^2 - m^2]} \Bigg\}. \quad (10.80)$$

Resolvendo as integrais finitas, utilizando as relações de consistência e propriedades das funções Z 's envolvidas, escrevemos isto na forma:

$$I = 2I_{quad}(m^2) + [k_1 \cdot k_2] I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\frac{(k_1 - k_2) 2}{6} - (m^2 + k_1 \cdot k_2) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right]. \quad (10.81)$$

Devemos acrescentar que o resultado acima vale para 2ω dimensões pois apenas operações algébricas foram efetuadas mais integração de termos finitos.

É fácil perceber que existem discrepâncias nos resultados eq.(10.79) e eq.(10.81). A questão parece ser definitiva para regularizações quadridimensionais mas não o seria para 2ω dimensões. Isto porque estando em 2ω dimensões poderíamos utilizar algumas identidades entre integrais e converter um dos resultados noutro. Trata-se daquelas integrais que são “termos de superfície” em 4 dimensões. Como tal poderíamos, antes de voltar para $2\omega = 4$, fazer:

$$\begin{aligned} 2I_{quad}(m^2) &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{2}{[k^2 - m^2]} \\ &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^2} \\ &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2 - m^2 + m^2}{[k^2 - m^2]^2} \\ &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 - m^2]} + m^2 \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \\ &= I_{quad}(m^2) + m^2 I_{\log}(m^2). \end{aligned} \quad (10.82)$$

Do mesmo modo temos:

$$\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 2} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{[k^2 - m^2]^3}. \quad (10.83)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^3} &= \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \\ &\quad + \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{[k^2 - m^2]^3}, \end{aligned} \quad (10.84)$$

portanto:

$$\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{\omega \rightarrow 2} \left[-\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} + \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^3} \right]. \quad (10.85)$$

Entretanto, substituindo o resultado para as integrais, o lado direito se cancela idênticamente.

De modo completamente semelhante :

$$\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right) = \lim_{\omega \rightarrow 2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^4}{[k^2 - m^2]^4}. \quad (10.86)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^4}{[k^2 - m^2]^4} &= \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^4}{[k^2 - m^2]^4} - 2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^3} \\ &\quad + \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}, \end{aligned} \quad (10.87)$$

mas novamente ao substituirmos os resultados para as integrais do lado direito encontramos um cancelamento total. É então possível passar do resultado eq.(10.79) para aquele eq.(10.81).

Neste ponto temos aparentemente dois resultados para a mesma integral, dependendo do caminho utilizado para calculá-la. Como já havíamos notado nas seções anteriores eles diferirão por integrais que podem ser interpretadas como termos de superfície em relações entre integrais divergentes.

Se estamos buscando um procedimento que nos leve a resultados consistentes temos que utilizar argumentos físicos para decidir o que deve ser feito.

No caso específico que estamos considerando, sabemos que a amplitude está relacionada aquela T_μ^{AP} por uma Identidade de Ward. Esta última amplitude não sofre dos problemas que T^{PP} pois não há bilineares do momento do “loop” no numerador. O cálculo dos traços nos fornecerá assim;

$$T_\mu^{AP} = 4m(k_2 - k_1)_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right\}. \quad (10.88)$$

Resolvendo, escrevemos de um modo conveniente para enfatizar a Identidade de Ward (eq. 9.102):

$$(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{AP} = 2m \left\{ 4[I_{quad}(m^2) - \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} I_{log}(m^2)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2 \right) \Big\} \\
& + 4mI_{quad}(m^2) + 4mI_{quad}(m^2) \tag{10.89}
\end{aligned}$$

Portanto apenas o resultado eq.(10.79) para a integral quadraticamente divergente leva ao resultado correto; aquele que envolve manipulações algébricas no integrando.

Outra função de dois pontos onde ocorre a presença de um fator k^2 no cálculo dos traços é aquela T^{SS} . Com massas iguais não podemos relacioná-la a outras amplitudes de dois pontos. Tomemos então o caso de massas diferentes. Após o cálculo dos traços temos:

$$T^{SS}(k_1, m_1; k_2, m_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{4(k^2 + k \cdot k_1 + k \cdot k_2 + k_1 \cdot k_2 + m_1 m_2)}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \right\}. \tag{10.90}$$

A integral quadraticamente divergente pode agora ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} &= \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2]} \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_2)^2 - m_2^2]} \\
&- (k_1 + k_2)_{\alpha} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\alpha}}{[(k + k_2)^2 - m_1^2][(k + k_1)^2 - m_2^2]} \\
&- (k_1^2 + k_2^2 - m_1^2 - m_2^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_2)^2 - m_1^2][(k + k_1)^2 - m_2^2]}, \tag{10.91}
\end{aligned}$$

ou também na forma análoga a expressão (10.80), por separação direta.

Podemos então resolver as integrais finitas, utilizar as relações de consistência naquelas divergentes e propriedades das funções Z 's para ter os resultados desejados .

Como no caso anteriormente considerado, notamos discrepâncias na comparação dos resultados. A fim de decidir pelo caminho correto, invocamos a Identidade de Ward que relaciona T^{SS} com aquela T_{μ}^{VS} . Esta após o cálculo dos traços fica:

$$\begin{aligned}
T_{\mu}^{VS}(k_1, m_1; k_2, m_2) &= 4 \left\{ (m_2 - m_1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \right. \\
&+ (m_2 k_{1\mu} + m_1 k_{2\mu}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} \Big\}. \tag{10.92}
\end{aligned}$$

Portanto, as dúvidas encontradas no cálculo de T^{SS} não afetam a T_μ^{VS} . A solução das integrais nos leva a:

$$\begin{aligned}
T_\mu^{VS} &= 4(k_1 - k_2)_\mu \left\{ \frac{(m_2 - m_1)}{2} I_{\log}(m_1^2) \right. \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(m_2 + m_1) Z_1(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2) \\
&\quad \left. + m_1 Z_0(m_1^2, m_2^2, (k_1 - k_2)^2; m_1^2)] \right\}. \tag{10.93}
\end{aligned}$$

Apenas a substituição do resultado eq.(10.91) para a integral quadraticamente divergente leva a satisfação da Identidade de Ward obtida pela contração $(k_1 - k_2)_\mu T_\mu^{VS}$.

Dos dois casos considerados, no contexto de regularizações quadridimensionais, não dispomos de nenhum argumento para modificar T_μ^{VS} ou T_μ^{AP} . Então a decisão recai sobre as expressões de T^{SS} e T^{PP} que levam ao resultado consistente. Antes, entretanto, de tornar definitivas estas conclusões devemos considerar outro tipo de bilineares do momento do “loop”, aqueles na forma tensorial $k_\nu k_\mu$. Eles surgem, como vimos, nas funções $T_{\mu\nu}^{VV}$ ou $T_{\mu\nu}^{AA}$. Primeiro retomamos a expressão para $T_{\mu\nu}^{VV}$ imediatamente após o cálculo dos traços:

$$T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m_1; k_2, m_2) = 4 \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_2)_\mu (k + k_1)_\nu]}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]} + g_{\mu\nu} [T^{PP}] \right\}. \tag{10.94}$$

A integral “problemática” é então:

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{[(k + k_1)^2 - m_1^2][(k + k_2)^2 - m_2^2]}. \tag{10.95}$$

Uma das maneiras de expressá-la é através do cálculo direto, como fizemos na seção 3 do capítulo 9, ou seja, por separação direta seguida da utilização das relações de consistência e de propriedades das funções Z 's .

Outra maneira é a de considerar a estrutura de Lorentz e escrever a estrutura geral:

$$I_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} a + k_{1\mu} k_{1\nu} b + k_{2\mu} k_{2\nu} c + (k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{2\mu} k_{1\nu}) d \tag{10.96}$$

e então gerar um conjunto de equações por contrações com vetores k_1 e k_2 bem como com $g_{\mu\nu}$. O que nos interessa diretamente é a integral obtida pela contração com $g_{\mu\nu}$;

$$g_{\mu\nu} I_{\mu\nu} = 4a + k_1^2 b + k_2^2 c + (2k_1 \cdot k_2) d, \tag{10.97}$$

ou seja:

$$g_{\mu\nu}I_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[(k+k_1)^2 - m_1^2][(k+k_2)^2 - m_2^2]}. \quad (10.98)$$

E então surge a pergunta: Como resolver a integral acima? Devemos optar pela expressão eq.(10.91) ou por aquela correspondente a separação direta? O surpreendente é que, neste caso, se procedermos como fizemos para obter a eq.(10.91), para reescrever esta integral em termos de outras, com a prévia identificação dos termos proporcionais a $g_{\mu\nu}$ com T^{PP} , seríamos levados a violar a invariância de “gauge” (conservação da corrente vetorial). Por outro lado se utilizarmos o tratamento direto da integral, teremos o resultado desejado; Invariância de “gauge” e valor correto a momento nulo (ver capítulo 13). Situação semelhante ocorre com a amplitude $T_{\mu\nu}^{AA}$ e suas Identidades de Ward.

Resumindo nossas constatações; fatores k^2 devem ser eliminados por manipulações algébricas que cancelam denominadores. Fatores $k_\mu k_\nu$ devem ser tratadas diretamente na solução das integrais correspondentes com a utilização das relações de consistência. Como acomodar estas duas situações aparentemente conflitantes? Devemos entender estes resultados de modo a ser possível enunciar uma regra única e obter a partir dela todos os resultados de modo consistente. Poderíamos, neste ponto, prosseguir investigando, na mesma linha de raciocínio, e incluir outras amplitudes sem entretanto alterar nosso quadro.

O que se observa é que parecem existir dois momentos diferentes no que diz respeito às propriedades matemáticas das amplitudes divergentes no cálculo perturbativo. Um primeiro onde devemos efetuar manipulações algébricas de modo a, por cancelamento de propagadores, eliminar fatores k^2 do numerador. Outro que envolve bilineares na forma $k_\mu k_\nu$ onde as operações $k_\mu k_\nu = k^2 g_{\mu\nu} = (k^2 - \mu^2 + \mu^2) g_{\mu\nu}$ não deve ser o procedimento. Como interpretar isto é o nosso problema no momento.

Uma possível solução está na reinterpretação das regras de Feynman para amplitudes envolvendo “loops”. Estas devem ser encaradas como uma sequência de passos numa ordem bem definida, quando se trata de amplitudes divergentes. A última destas é a introdução do sinal de integração. Sendo assim uma vez identificado o diagrama, escrevemos a expressão, com vértices e propagadores, calculamos os traços necessários e efetuamos operações algébricas possíveis, inclusive com cancelamento de denominadores, obtendo então uma combinação de termos “irreduzíveis” onde todos os fatores k^2 estejam ausentes. Neste ponto introduzimos o sinal de integração e fazemos valer as propriedades das integrais divergentes e as relações de consistência.

É ainda interessante notar que, segundo esta interpretação, nós necessitamos introduzir regularizações apenas posteriormente ao sinal de integração. Com isso as nossas manipulações, feitas para separar a parte dependente dos momentos externos, podem ser encaradas como operações perfeitamente lícitas. Em outras palavras equivale a adotar para os propagadores uma representação adequada para propósitos posteriores:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]} &= \frac{1}{[k^2 - \mu^2]} - \frac{(p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)}{[k^2 - \mu^2]^2} + \frac{(p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)^2}{[k^2 - \mu^2]^3} + \dots \\
&= \frac{1}{[k^2 - \mu^2]} + \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^j (p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)^j}{[k^2 - \mu^2]^{j+1}} \\
&\quad + \frac{(-1)^N (p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)^{N+1}}{[k^2 - \mu^2]^{N+1} [(p-k)^2 - m^2]}. \tag{10.99}
\end{aligned}$$

Nós então não estaríamos efetuando operações em integrais divergentes uma vez que o sinal de integração não teria ainda sido introduzido.

Esta interpretação relaciona-se diretamente à origem das indefinições matemáticas associadas aos infinitos que é o produto de distribuições tomadas no mesmo ponto.

Poderíamos encarar os diagramas “loops” como diagramas árvores em que alguns momentos são tomados iguais ao final da avaliação do diagrama pela aplicação das regras de Feynman. Uma parte das operações estaria livre dos problemas relacionados com integrais divergentes.

Esta interpretação é bastante atraente porque acomodaria todos os resultados que obtivemos para as funções de dois pontos. Além disto abre a possibilidade de obtermos uma explicação razoável para o fato de todas as funções de três pontos terem suas Identidades de Ward satisfeitas, inclusive as anômalas. É bom lembrar que para verificar estas identidades, efetuamos contrações no interior do traço e introduzimos manipulações algébricas para cancelar propagadores. Segundo esta interpretação, que acabamos de propor, estas operações podem não ser compatíveis com a sequência de passos corretos. Em outras palavras para verificar Identidades de Ward em funções de três pontos é necessário calculá-las primeiro para então efetuar as contrações com os momentos externos especialmente aquelas que possuem integrais do tipo tensorial $k_\mu k_\nu$ e $k_\mu k_\nu k_\lambda$. Não é por coincidência que as amplitudes anômalas encontram-se entre estas situações. Nos próximos capítulos vamos nos dedicar à verificação destas especulações.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel, A.L. Mota and M.C. Nemes, Mod. Phys. Lett. A13, 20 (1998);
- [2] O.A. Battistel : Pauli-Villars e Regularizações Quadridimensionais; Ambiguidades, Relações de Simetria e outras questões relacionadas (em preparação);
- [3] O.A. Battistel , Ambiguidades em cálculos com Regularização Dimensional, (em preparação);

Capítulo 11

Férmions de spin $1/2$ livres de massa iguais: Funções de três pontos e suas Identidades de Ward-I.

11.1 Introdução

Um dos modelos mais ricos e interessantes, no que diz respeito à presença de divergências nas amplitudes físicas, é aquele que envolve nas linhas intermediárias apenas férmions. Nós discutimos, no capítulo 8, dentro de uma estratégia que evita uso explícito de regularização, os aspectos: ambiguidades associadas às escolhas para as denominações dos momentos das linhas internas e possibilidade de violações das relações de simetria para este modelo. Naquela ocasião calculamos explicitamente apenas funções de Green de um e dois pontos. A verificação das Identidades de Ward para as funções de três pontos foi feita de modo indireto; efetuamos contrações com os momentos externos, ainda no interior do traço, e com o uso de identidades convenientes, reduzimos o problema ao cálculo explícito de funções de dois pontos. Desta análise emergiram as relações de consistência como necessárias e suficientes para que todas as ambiguidades fossem eliminadas, o que não se constitui numa completa surpresa. A mais surpreendente conclusão retirada destas investigações refere-se à possibilidade de satisfazer todas as relações de simetria inclusive aquelas das amplitudes anômalas [1]. Este fato, confirmado e estendido no capítulo 9 para o caso de massas diferentes [2], nos motivou a estudar, no capítulo 10, as relações entre integrais divergentes que denominamos: “relações de consistência ” [3]. Após isto,

terminamos por concluir que se desejamos impor válidas estas relações deveríamos rever alguns procedimentos que havíamos utilizado no cálculo de funções de dois pontos. Esta revisão nos ofereceu a possibilidade de acomodar as constatações feitas até aqui, numa interpretação bastante interessante da aplicação das regras de Feynman, quando as amplitudes correspondentes tornam-se divergentes. Dentro desta interpretação as funções de um e dois pontos têm as propriedades desejadas, são livres de ambiguidades e satisfazem as relações de simetria. Entretanto as conclusões que havíamos retirado para as funções de três pontos perdem, em parte, a validade pois as identidades utilizadas naquele método de análise podem ser conflitantes com as condições de consistência que devemos impor. Visto isto torna-se necessário refazermos esta análise agora, entretanto, incorporando nossas últimas conclusões. Para tal é preciso calcularmos explicitamente as funções de três pontos e então efetuar as contrações com os momentos externos para verificar a validade das Identidades de Ward pertinentes [4].

Neste capítulo nós nos dedicamos ao cálculo explícito das funções de três pontos e à verificação das correspondentes relações de simetria para o modelo considerado no capítulo 8: Férmions de spin $1/2$ livres e de massas iguais. Ao mesmo tempo que nos ocuparemos destes objetivos chamamos a atenção para a sistematização adotada para expressar as amplitudes bem como para a estrutura matemática que introduziremos. Esta linguagem permitirá uma análise bastante simplificada e parece ser a mais natural e adequada para este tipo de problema. Sem esta organização seria extremamente tedioso, e talvez não conclusivo, estudar os aspectos que nos propomos aqui.

11.2 Funções de um e dois pontos.

Muito embora neste capítulo estejamos interessados na verificação das identidades pertinentes às funções de três pontos, a partir cálculo explícito destas, é interessante iniciarmos passando a limpo as expressões para as funções de um e dois pontos, obtidas no capítulo 8, condicionadas entretanto às conclusões do capítulo 10.

Isto quer dizer que adotaremos daqui para diante, como expressões para funções de dois pontos, aquelas não-ambíguas e satisfazendo todas as relações de simetria que são obtidas pela adoção do procedimento específico contido nas conclusões do capítulo 10. A adoção deste ponto de vista é necessário porque ao verificarmos as relações de simetria, amplitude-por-amplitude, será bastante útil e elucidativo identificarmos certas estruturas surgidas, após as contrações, com funções de dois pontos e eventualmente de um ponto quando

efetuarmos mais que uma destas contrações numa mesma amplitude de três pontos. Sendo assim escrevemos, primeiro para as funções de um ponto, não-nulas pelas propriedades dos traços:

$$\bullet T_\mu^V = 0 \quad (11.1)$$

$$\bullet T^S = 4m [I_{quad}(m^2)]. \quad (11.2)$$

Agora, para as funções de dois pontos, ficaremos com as expressões,

$$\begin{aligned} \bullet T^{SS} = 4 & \left\{ [I_{quad}(m^2)] + \frac{[4m^2 - q^2]}{2} [I_{\log}(m^2)] \right. \\ & \left. + \frac{[4m^2 - q^2]}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \right\} \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \bullet T^{PP} = 4 & \left\{ [-I_{quad}(m^2)] + \frac{q^2}{2} [I_{\log}(m^2)] \right. \\ & \left. + \frac{q^2}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \right\} \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\bullet T_\mu^V = 0 \quad (11.5)$$

$$\bullet T_\mu^{AP} = -4mq_\mu \left\{ [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \right\} \quad (11.6)$$

$$\bullet T_{\mu\nu}^{AV} = 0 \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} \bullet T_{\mu\nu}^{VV} = \frac{4}{3} & [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \left\{ [I_{\log}(m^2)] \right. \\ & \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[1/3 + \left(\frac{2m^2 + q^2}{q^2} \right) Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} \bullet T_{\mu\nu}^{AA} = \frac{4}{3} & [q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \left\{ [I_{\log}(m^2)] \right. \\ & \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[1/3 + \left(\frac{2m^2 + q^2}{q^2} \right) Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right\} \\ & + (2m) g_{\mu\nu} \left\{ -4m \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

As definições e convenções utilizadas para estabelecer estas expressões são aquelas do capítulo 8. Pode ser verificado facilmente que as funções acima explicitadas obedecem as Identidades de Ward pertinentes a elas. As condições de consistência foram utilizadas.

11.3 Funções de três pontos

Nesta seção nos ocuparemos do cálculo explícito das funções de três pontos. Faremos isto utilizando as mesmas convenções e definições do capítulo 8. Princípios pelo cálculo daquelas mais simples, isto é, sem índices de Lorentz.

11.3.1 Cálculo de T^{SSS}

Deste modo inicialmente definimos o “núcleo ” da amplitude T^{SSS} como:

$$t^{SSS} = tr \left\{ 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}. \quad (11.10)$$

O cálculo do traço de Dirac nos proporciona a expressão:

$$t^{SSS} = 4m \left\{ \frac{(k + k_1) \cdot (k + k_2) + (k + k_2) \cdot (k + k_3) + (k + k_1) \cdot (k + k_3) + m^2}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \right\}. \quad (11.11)$$

Agora, no espírito da interpretação que adotamos, devemos utilizar a identidade:

$$\begin{aligned} (k + k_i) \cdot (k + k_j) &= \frac{1}{2} [(k + k_i)^2 - m^2] + \frac{1}{2} [(k + k_j)^2 - m^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} [2m^2 - (k_i - k_j)^2]. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Após efetuar as simplificações possíveis introduzimos o sinal de integração. Então ficaremos com a expressão:

$$\begin{aligned} T^{SSS} &= 4m \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \\ &\quad + \frac{1}{2} [8m^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2] \times \\ &\quad \left. \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \right\}. \quad (11.13) \end{aligned}$$

Neste ponto tratamos cada uma das integrais de acordo com nossa estratégia. A integral logaritmicamente divergente, tratada na seção (4) do capítulo (8), fornecerá:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_i)^2 - m^2][(k+k_j)^2 - m^2]} = [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) [Z_0(m^2, m^2, (k_i - k_j)^2; m^2)]$$

Aquela finita, por sua vez, identificamos, após a parametrização de Feynman e integração no momento k , com a função ξ_{00} introduzida no capítulo 3;

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \xi_{00} \quad (11.14)$$

Substituindo então as expressões para as integrais, podemos colocar T^{SSS} na forma:

$$\begin{aligned} T^{SSS} = 4m \left\{ 3 [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) [Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2)] \right. \\ + Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2; m^2) \\ + Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \\ \left. + [8m^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \xi_{00} \right\}. \quad (11.15) \end{aligned}$$

A expressão obtida para T^{SSS} está inteiramente escrita em termos das estruturas adotadas na nossa sistematização.

11.3.2 Cálculo de T^{SPP} .

Para o cálculo de T^{SPP} primeiro definimos:

$$t^{SPP} = tr \left\{ 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \right\}. \quad (11.16)$$

Então, calculando o traço teremos:

$$t^{SPP} = 4m \left\{ \frac{-(k+k_1) \cdot (k+k_2) + (k+k_2) \cdot (k+k_3) - (k+k_1) \cdot (k+k_3) + m^2}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\}. \quad (11.17)$$

Em seguida, utilizamos as identidades (8), introduzimos o sinal de integração e substituímos os resultados (10) e (11) para as integrais. Ficamos então com:

$$T^{SPP} = -4m \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{[(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2]}{2} \xi_{00} \right\}. \quad (11.18)$$

Com estes mesmos vértices como ingredientes temos as permutações: T^{PSP} e T^{PPS} . Para estas obteremos:

$$\bullet T^{PSP} = -4m \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{[(k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2]}{2} \xi_{00} \right\} \quad (11.19)$$

$$\bullet T^{PPS} = -4m \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{[(k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2]}{2} \xi_{00} \right\}. \quad (11.20)$$

Estas formas serão bastante úteis em cálculos futuros, em virtude da sistematização que adotamos. As restantes combinações possíveis dos vértices S e P, que geram funções de três pontos sem índices de Lorentz, T^{PSS} e T^{PPP} , envolvem número ímpar de matrizes γ_5 as quais trataremos no próximo capítulo. Estas, adiantamos, são identicamente nulas pelas propriedades dos traços de Dirac.

11.3.3 Cálculo de T^{VSS} .

Para o cálculo da amplitude de T_λ^{VSS} primeiro definimos:

$$t^{VSS} = tr \left\{ 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}. \quad (11.21)$$

O cálculo do traço nos fornece:

$$\begin{aligned}
t_\lambda^{VSS} &= 4 \left\{ (k+k_1) \cdot (k+k_2) (k+k_3)_\lambda \right. \\
&\quad + (k+k_1) \cdot (k+k_3) (k+k_2)_\lambda \\
&\quad - (k+k_2) \cdot (k+k_3) (k+k_1)_\lambda \\
&\quad \left. + m^2 [(k+k_3)_\lambda + (k+k_2)_\lambda + (k+k_1)_\lambda] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (11.22)
\end{aligned}$$

Inserindo adequadamente as identidades (8) e introduzindo o sinal de integração, teremos a expressão:

$$\begin{aligned}
T_\lambda^{VSS} &= 2 \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\lambda}{[(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \right. \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2+k_3)_\lambda}{[(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3-k_1)_\lambda}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2-k_1)_\lambda}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_3-k_2)^2 (k+k_1)_\lambda}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[4m^2 - (k_3-k_1)^2] (k+k_2)_\lambda}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad \left. + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[4m^2 - (k_1-k_2)^2] (k+k_3)_\lambda}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \right\}. \quad (11.23)
\end{aligned}$$

Na expressão obtida aparecem duas novas integrais. Primeiro consideramos a integral linearmente divergente. Ela foi tratada na seção (4) do capítulo 8 e com a utilização da relação de consistência adequada mais a relação entre as funções $Z_1(m^2, m^2, p^2; m^2)$ e $Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)$ (capítulo 3) ficará:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+k_i)^2 - m^2] [(k+k_j)^2 - m^2]} = -\frac{(k_i+k_j)_\mu}{2} \left\{ [I_{\log}(m^2)] \right\}$$

$$- \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[Z_0 \left(m^2, m^2, (k_i - k_j)^2; m^2 \right) \right]. \quad (11.24)$$

Por sua vez, para a integral finita obteremos:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2][(k + k_3)^2 - m^2]} \\ &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-(k_2 - k_1)_\mu \xi_{01} - (k_3 - k_1)_\mu \xi_{10} - k_{1\mu} \xi_{00} \right], \end{aligned} \quad (11.25)$$

onde introduzimos as funções $\xi_{nm}(m^2, p^2, m^2; q^2; m^2)$ (capítulo 3):

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{01} &= \left\{ \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[-Z_0 \left(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2 \right) \right] \right. \\ &+ \frac{1}{2p^2} \left[Z_0 \left(m^2, m^2, q^2; m^2 \right) \right] \\ &+ \left. \frac{p \cdot q}{2p^2 q^2} \left[-Z_0 \left(m^2, m^2, p^2; m^2 \right) \right] + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2} [\xi_{00}] \right\} \end{aligned} \quad (11.26)$$

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{10} &= \left\{ \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 - (p \cdot q)^2} \right\} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} \left[-Z_0 \left(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2 \right) \right] \right. \\ &+ \frac{1}{2q^2} \left[Z_0 \left(m^2, m^2, p^2; m^2 \right) \right] \\ &+ \left. \frac{p \cdot q}{2p^2 q^2} \left[-Z_0 \left(m^2, m^2, q^2; m^2 \right) \right] + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2} [\xi_{00}] \right\}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Com isso expressamos T_λ^{VSS} na forma:

$$\begin{aligned} T_\lambda^{VSS} &= 2(k_3 - k_1)_\lambda \left\{ \left[I_{\log}(m^2) \right] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2 \right) \right. \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] \xi_{00} \\ &+ \left[8m^2 + (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{10}) \left. \right\} \\ &+ 2(k_2 - k_1)_\lambda \left\{ \left[I_{\log}(m^2) \right] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2 \right) \right. \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{00} \\ &+ \left. \left[8m^2 + (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{01}) \right\}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

•Identidade de Ward

O índice vetorial carregado pela amplitude que acabamos de calcular nos permite verificar a primeira Identidade de Ward, para tal contraímos T_λ^{VSS} com o momento correspondente $q_\lambda = (k_3 - k_2)_\lambda = (k_3 - k_1)_\lambda + (k_1 - k_2)_\lambda$. Então, num primeiro passo teremos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS} &= 2 \left[(k_1 - k_3)^2 + (k_1 - k_2) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left\{ \left[I_{\log}(m^2) \right] \right. \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2 \right) \\
&\quad + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] \xi_{00} \right\} \\
&\quad + 2 \left[- (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_2) \cdot (k_3 - k_1) \right] \left\{ \left[I_{\log}(m^2) \right] \right. \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2 \right) \\
&\quad + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{00} \right\} \\
&\quad + 2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[8m^2 + (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_3 - k_1)^2 \right] \times \\
&\quad \times \left\{ \left[(k_1 - k_3)^2 + (k_1 - k_2) \cdot (k_1 - k_3) \right] (-\xi_{10}) \right. \\
&\quad \left. \left[(k_1 - k_2)^2 + (k_1 - k_2) \cdot (k_3 - k_1) \right] (\xi_{01}) \right\}. \tag{11.29}
\end{aligned}$$

No último termo podemos fazer uso das propriedades das funções ξ_{10} e ξ_{01} (capítulo 3):

$$\begin{aligned}
\bullet (k_3 - k_1)^2 \xi_{10} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01} &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2 \right) \right. \\
&\quad + Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2 \right) \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)^2 \xi_{00} \right\}, \tag{11.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_2 - k_1)^2 \xi_{01} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{10} &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2 \right) \right. \\
&\quad + Z_0 \left(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2 \right) \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1)^2 \xi_{00} \right\}. \tag{11.31}
\end{aligned}$$

Depois de algumas manipulações algébricas e introduzindo alguns termos convenientemente podemos escrever tudo na forma:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS} &= 4 \left\{ \frac{[(k_1 - k_3)^2 - 4m^2]}{2} [I_{\log}(m^2)] - I_{quad}(m^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{[(k_1 - k_3)^2 - 4m^2]}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2, m^2)] \right\} \\
&\quad - 4 \left\{ \frac{[(k_1 - k_2)^2 - 4m^2]}{2} [I_{\log}(m^2)] - I_{quad}(m^2) \right. \\
&\quad \left. \frac{[(k_1 - k_2)^2 - 4m^2]}{2} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2, m^2)] \right\}, \quad (11.32)
\end{aligned}$$

ou seja, identificando os termos obtidos com funções de dois pontos, eq (1), obtivemos:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VSS}(m, k_1; m, k_2; m, k_3) = T^{SS}(m, k_1; m, k_2) - T^{SS}(m, k_1; m, k_3). \quad (11.33)$$

relação esta representada diagramaticamente na fig.(8.11).

O resultado obtido é aquele desejado pois a inclusão do diagrama cruzado nos leva a:

$$q_\lambda T_\lambda^{V \rightarrow SS} = 0, \quad (11.34)$$

exibindo assim a propriedade correta, consequência da conservação da corrente vetorial. Nossa prescrição mostrou-se, deste modo, bem sucedida no primeiro teste.

Para facilitar cálculos futuros é também importante explicitarmos as permutações obtidas, dentro da nossa convenção, com os mesmos vértices. Assim temos;

$$\begin{aligned}
T_\mu^{SVS} &= 2(k_3 - k_1)_\mu \left\{ [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \right. \\
&\quad \left. + [8m^2 + (k_1 - k_3)^2 - (k_3 - k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{10}) \right\} \\
&\quad + 2(k_1 - k_2)_\mu \left\{ 2 [I_{\log}(m^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (k_1 - k_3)^2 \xi_{00} \\
& + \left[8m^2 + (k_1 + k_3)^2 - (k_2 + k_3)^2 - (k_1 + k_2)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{01} \Big\}. \quad (11.35)
\end{aligned}$$

Ainda que esta expressão seja apenas uma mera permutação de T_λ^{VSS} é interessante verificarmos a contração com $(k_3 - k_1)_\mu$. Com a utilização das identidades (29) e (30) envolvendo as funções ξ_{mn} ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\mu T_\mu^{SVS} &= 2 \left\{ \left[(k_3 - k_2)^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] I_{\log}(m^2) \right. \\
& \quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_3 - k_2)^2 \right] Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \\
& \quad \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right\}. \quad (11.36)
\end{aligned}$$

Reorganizando e observando a expressão (1) para a função de dois pontos T^{SS} veremos que acabamos de obter a relação:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_\mu^{SVS}(m, k_1; m, k_2; m, k_3) = T^{SS}(m, k_1; m, k_2) - T^{SS}(m, k_2; m, k_3). \quad (11.37)$$

Prosseguindo temos ainda outra permutação:

$$\begin{aligned}
T_\nu^{SSV} &= 2(k_1 - k_3)_\nu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \right. \\
& \quad + Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \Big] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-(k_1 - k_2)^2 \right] \xi_{00} \\
& \quad \left. + \left[8m^2 + (k_2 - k_1)^2 - (k_3 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{10} \right\} \\
& + 2(k_2 - k_1)_\nu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
& \quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{00} \\
& \quad \left. + \left[8m^2 + (k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 + k_3)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{01}) \right\} \quad (11.38)
\end{aligned}$$

A contração com o momento $(k_1 - k_2)_\nu$ fornecerá:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_\nu^{SSV} &= 2 \left\{ [(k_1 - k_3)^2 - (k_3 - k_2)^2] I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_3 - k_1)^2] Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \\
&\quad \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_3 - k_2)^2] Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \right\} \quad (11.39)
\end{aligned}$$

Novamente, após uma rápida observação, identificamos a relação:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_\nu^{SSV}(m, k_1; m, k_2; m, k_3) = T^{SS}(m, k_2; m, k_3) - T^{SS}(m, k_1; m, k_3). \quad (11.40)$$

Deste resultado e daquele (36) é imediato verificar que:

$$p'_\nu T_\nu^{S \rightarrow SV} = p_\mu T_\mu^{S \rightarrow VS} = 0, \quad (11.41)$$

como deveria ser.

11.3.4 Cálculo de T_λ^{VPP} .

Com os mesmos ingredientes utilizados na seção anterior podemos determinar T_λ^{VPP} . Para isto primeiro definimos:

$$t_\lambda^{VPP} = tr \left\{ \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}, \quad (11.42)$$

que nos leva a:

$$\begin{aligned}
t_\lambda^{VPP} &= -4 \{ (k + k_1) \cdot (k + k_2) (k + k_3)_\lambda \\
&\quad + (k + k_1) \cdot (k + k_3) (k + k_2)_\lambda \\
&\quad - (k + k_2) \cdot (k + k_3) (k + k_1)_\lambda \\
&\quad - m^2 [(k + k_3)_\lambda + (k + k_2)_\lambda - (k + k_1)_\lambda] \} \\
&\quad \times \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]}. \quad (11.43)
\end{aligned}$$

Então, utilizando as identidades (8), introduzindo o sinal de integração e substituindo os resultados para as integrais obtidas teremos a expressão:

$$\begin{aligned}
T_\lambda^{VPP} = & -2(k_3 - k_1)_\lambda \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\
& + \left. [(k_3 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{10}) \right\} \\
& -2(k_2 - k_1)_\lambda \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right. \\
& - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (k_1 - k_3)^2 \xi_{00} \\
& + \left. [(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3) - (k_1 - k_2)^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{01}) \right\} \quad (11.44)
\end{aligned}$$

- Identidade de Ward.

Ao índice vetorial carregado pela amplitude T_λ^{VPP} esta associada uma Identidade de Ward. Para verificá-la contraímos com $(k_3 - k_2)_\lambda$ a expressão acima. Após a utilização das propriedades (29) e (30) das funções ξ_{nm} ficaremos com:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VPP} = & -4 \left\{ I_{quad}(m^2) - \frac{(k_2 - k_1)^2}{2} I_{\log}(m^2) + \right. \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{(k_2 - k_1)^2}{2} \right] Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \left. \right\} \\
& +4 \left\{ I_{quad}(m^2) - \frac{(k_3 - k_1)^2}{2} I_{\log}(m^2) \right. \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{(k_3 - k_1)^2}{2} \right] Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \left. \right\} \quad (11.45)
\end{aligned}$$

onde acrescentamos alguns termos convenientemente para poder identificar as respectivas funções de dois pontos, expressão (2). Assim obtivemos :

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{VPP}(m, k_1; m, k_2; m, k_3) = T^{PP}(m, k_1; m, k_2) - T^{PP}(m, k_1; m, k_3). \quad (11.46)$$

representada diagramaticamente na fig.(8.13).

Do resultado acima torna-se evidente que teremos para a amplitude correspondente ao processo $V \rightarrow PP$:

$$q_\lambda T_\lambda^{V \rightarrow PP} = 0, \quad (11.47)$$

como deveria ser.

É interessante também registramos as formas explícitas para as permutações possíveis envolvendo estes mesmos vértices, já que faremos uso destas em sistematizações futuras.

Primeiro:

$$\begin{aligned}
T_\nu^{PPV} = & -2(k_1 - k_3)_\nu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \\
& + Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2)] \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\
& + \left. [(k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{10} \right\} \\
& -2(k_2 - k_1)_\nu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right. \\
& - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (k_1 - k_3)^2 \xi_{00} \\
& + \left. [(k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3) - (k_1 - k_3)^2] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{01}) \right\} \quad (11.48)
\end{aligned}$$

que, contraindo com $(k_1 - k_2)_\nu$, fornecerá:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_\nu^{PPV} = & -2 \left\{ (k_3 - k_1)^2 \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right] \right. \\
& \left. - (k_3 - k_2)^2 \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \right] \right\} \quad (11.49)
\end{aligned}$$

ou seja:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_\nu^{PPV} = T^{PP}(m, k_2; m, k_3) - T^{PP}(m, k_1; m, k_3). \quad (11.50)$$

Por sua vez teremos:

$$T_\mu^{PVP} = -2(k_1 - k_2)_\mu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + Z_0 \left(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2 \right) \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[- (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{00} \\
& + \left[(k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{01} \Big\} \\
& - 2 (k_3 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2 \right) \right. \\
& - \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (k_1 - k_2)^2 \xi_{00} \right. \\
& + \left. \left[(k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3) - (k_1 - k_2)^2 \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) (-\xi_{10}) \right\}, \tag{11.51}
\end{aligned}$$

que, contraindo com $(k_3 - k_1)_\mu$, permite identificar a relação:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_\mu^{PVP} = T^{PP}(m, k_1; m, k_3) - T^{PP}(m, k_2; m, k_3). \tag{11.52}$$

Torna-se imediato observar, dos resultados (49) e (51) que:

$$p_\mu T_\mu^{P \rightarrow VP} = p'_\nu T_\nu^{P \rightarrow PV} = 0, \tag{11.53}$$

como deveria ser.

11.3.5 Cálculo de T_λ^{ASP} .

Com um índice de Lorentz, e um número par de matrizes γ_5 , temos ainda a combinação de vértices ASP.

Para explicitar estas formas começamos por definir:

$$t^{ASP} = tr \left\{ 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}. \tag{11.54}$$

O cálculo deste traço nos leva à expressão:

$$\begin{aligned}
t_\lambda^{ASP} & = 4 \{ (k + k_1) \cdot (k + k_2) (k + k_3)_\lambda \\
& + (k + k_1) \cdot (k + k_3) (k + k_2)_\lambda \\
& - (k - k_2) \cdot (k - k_3) (k - k_1)_\lambda \\
& + m^2 [(k + k_2)_\lambda - (k + k_1)_\lambda - (k + k_3)_\lambda] \} \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{\left[(k+k_1)^2 - m^2\right] \left[(k+k_2)^2 - m^2\right] \left[(k+k_3)^2 - m^2\right]}. \quad (11.55)$$

Neste ponto devemos utilizar as identidades (8) e então, após a reorganização possível, introduzir o sinal de integração e os correspondentes valores para as integrais obtidas, para ficar com a expressão:

$$\begin{aligned} T_\lambda^{ASP} = & 2(k_3 - k_1)_\lambda \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2)] \right. \\ & + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\ & + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] (-\xi_{10}) \right\} \\ & + 2(k_2 - k_1)_\lambda \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right. \\ & - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{00} + \\ & + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] (-\xi_{01}) \right\}. \quad (11.56) \end{aligned}$$

• Identidade de Ward

Ao índice λ associado à corrente axial, temos uma Identidade de Ward, consequência da proporcionalidade existente entre o divergente desta corrente com aquela pseudo-escalar no modelo. Para verificá-la contraímos a forma acima com o momento externo relativo ao vértice onde se encontra o operador axial-vetor. Então teremos:

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} = & [(k_3 - k_1)^2 - (k_2 - k_1)^2] 2I_{\log}(m^2) \\ & + 2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_3 - k_1)^2] Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \\ & - 2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_1)^2] Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \\ & - 2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ 4m^2 [(k_2 - k_1)^2 + (k_1 - k_2) \cdot (k_3 - k_1)] \xi_{00} \right\}. \quad (11.57) \end{aligned}$$

Isto pode ser reorganizado para:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} &= 4 \left\{ \frac{[(k_1 - k_3)^2]}{2} \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right] \right\} \\
&\quad - 4 \left\{ \frac{[(k_1 - k_2)^2]}{2} \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right] \right\} \\
&\quad + 2m(4m) \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{[(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2]}{2} \xi_{00} \right\} \\
&\quad - 8m^2 \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2) \right\}, \tag{11.58}
\end{aligned}$$

que observando a expressão (18) bem como aquelas (1) e (2) permite-nos identificar isto com a relação entre amplitudes:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{ASP} = -(2m) [T^{PSP}] - T^{PP}(m, k_1; m, k_2) - T^{SS}(m, k_1; m, k_3), \tag{11.59}$$

Agora, para a permutação dos vértices do “estado final”, T_λ^{APS} teremos a expressão:

$$\begin{aligned}
T_\lambda^{APS} &= -2(k_3 - k_1)_\lambda \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] (-\xi_{10}) + \right\} \\
&\quad - 2(k_2 - k_1)_\lambda \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_3)^2] \xi_{00} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] (-\xi_{01}) \right\}. \tag{11.60}
\end{aligned}$$

- Identidade de Ward

A contração com $(k_3 - k_2)_\lambda$ permite-nos identificar a relação entre funções de três e dois pontos:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_\lambda^{APS} = - (2m) [T^{PPS}] - T^{PP} (m, k_1; m, k_3) - T^{SS} (m, k_1; m, k_2), \quad (11.61)$$

Dos resultados (60) e (62), é agora fácil perceber que obtivemos:

$$q_\lambda T_\lambda^{A \rightarrow PS} = - (2m) [T^{P \rightarrow PS}], \quad (11.62)$$

que é a proporcionalidade correta entre o divergente da corrente axial e a corrente pseudo-escalar.

Antes de encerrar esta seção é interessante listarmos as formas explícitas para as outras permutações envolvendo os mesmos vértices. Assim temos:

$$\begin{aligned} T_\mu^{PAS} &= 2(k_3 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2)] \right. \\ &\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\ &\quad + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] (-\xi_{10}) \right\} \\ &\quad + 2(k_1 - k_2)_\mu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2)] \right. \\ &\quad + Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \\ &\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{00} \\ &\quad + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{01} \right\}. \end{aligned} \quad (11.63)$$

Desta expressão extraímos a propriedade:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_\mu^{PAS} = (2m) [T^{PPS}] + T^{PP} (m, k_2; m, k_3) + T^{SS} (m, k_1; m, k_2). \quad (11.64)$$

Por sua vez:

$$T_\nu^{PSA} = -2(k_1 - k_3)_\nu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2)] \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2 \right) \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_2)^2 \right] \xi_{00} \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{10} \left. \vphantom{\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)} \right\} \\
& - 2(k_2 - k_1)_\nu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2 \right) \right. \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[4m^2 - (k_1 - k_3)^2 \right] \xi_{00} \\
& \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 \right] (-\xi_{01}) \right\}, \quad (11.65)
\end{aligned}$$

da qual decorre:

$$(k_1 - k_2)_\lambda T_\lambda^{PSA} = (2m) [T^{PSP}] + T^{PP}(m, k_2; m, k_3) + T^{SS}(m, k_1; m, k_3). \quad (11.66)$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
T_\mu^{SAP} & = -2(k_3 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2)] \right. \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\
& \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] (-\xi_{10}) \right\} \\
& - 2(k_1 - k_2)_\mu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2)] \right. \\
& + Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{00} \\
& \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2] (\xi_{01}) \right\}, \quad (11.67)
\end{aligned}$$

do que verificamos:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_\mu^{SAP} = (2m) [T^{SPP}] + T^{PP}(m, k_1; m, k_2) + T^{SS}(m, k_2; m, k_3). \quad (11.68)$$

Finalmente, a última das permutações:

$$\begin{aligned}
T_\nu^{SPA} &= 2(k_1 - k_3)_\nu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \right. \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2; m^2) \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{10} \right\} \\
&\quad + 2(k_2 - k_1)_\nu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_3)^2] \xi_{00} \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2] (-\xi_{01}) \right\}, \quad (11.70)
\end{aligned}$$

a qual tem a propriedade:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_\nu^{SPA} = (2m) [T^{SPP}] + T^{PP}(m, k_1; m, k_3) + T^{SS}(m, k_2; m, k_3). \quad (11.71)$$

Com isso completamos o cálculo e a verificação das Identidades de Ward para as funções de três pontos com apenas um índice de Lorentz (e um número par de matrizes γ_5). Toda as Identidades verificadas, dentro da interpretação e prescrição que estamos seguindo, foram obtidas, sem dúvidas, satisfeitas. Vamos então para os casos mais interessantes, aquelas com mais do que um índice de Lorentz.

11.3.6 Cálculo de $T_{\mu\nu}^{SVV}$.

O cálculo explícito da amplitude $T_{\mu\nu}^{SVV}$ [5] é uma excelente oportunidade para introduzirmos a linguagem adequada para tratar aquelas com dois índices de Lorentz bem como para discutirmos o principal aspecto envolvido na discussão deste e do próximo capítulo. Isto se deve ao fato de que, neste caso, a integral logicamente divergente com um fator bilinear tensorial $k_\mu k_\nu$ se fazer presente. Vamos verificar as implicações disto com detalhes.

Começamos pela definição:

$$t_{\mu\nu}^{SVV} = tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m} 1 \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3 - m} \right\}. \quad (11.72)$$

O simples cálculo do traço nos leva a escrever:

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{SVV} &= 4m \{ (k + k_1)_\mu (k + k_2)_\nu + (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\mu \\ &\quad + (k + k_1)_\mu (k + k_3)_\nu - (k + k_1)_\nu (k + k_3)_\mu \\ &\quad + (k + k_2)_\mu (k + k_3)_\nu - (k + k_2)_\nu (k + k_3)_\mu \} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[(k + k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]} \\ &\quad + g_{\mu\nu} t^{SPP}. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Aqui identificamos os termos proporcionais a $g_{\mu\nu}$ com aqueles da função de três pontos t^{SPP} . Automaticamente assumimos para estes termos os procedimentos utilizados na ocasião onde realizamos estes cálculos. Para os termos restantes notamos o surgimento de certas estruturas que tornam justificável as definições, após a introdução do sinal de integração;

$$T_{ij\pm}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[(k + k_i)_\mu (k + k_j)_\nu \pm (k + k_i)_\nu (k + k_j)_\mu \right]}{\left[(k + k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]}. \quad (11.74)$$

Na ocorrência do sinal positivo, na definição acima, como é o caso da amplitude $T_{\mu\nu}^{SVV}$, temos que calcular a integral na forma genérica:

$$I_{\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2) \left[(k + p)^2 - m^2 \right] \left[(k + q)^2 - m^2 \right]} \quad (11.75)$$

Para prosseguir os cálculos das amplitudes precisamos desta solução. Por isso fazemos uma pausa para uma discussão detalhada deste problema.

• A Integral $I_{\mu\nu}$

Para chegarmos à solução de $I_{\mu\nu}$, em termos das estruturas que adotamos, temos dois caminhos possíveis.

O primeiro é aquele que envolve a solução pela separação, dentro da nossa estratégia, diretamente efetuada na integral $I_{\mu\nu}$ acima. Neste caso o primeiro passo é escrever $I_{\mu\nu}$ na forma:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 + 2k \cdot q) k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2k \cdot p) k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^3 \left((k+p)^2 - m^2 \right) \left((k+q)^2 - m^2 \right)}. \tag{11.76}
\end{aligned}$$

Na primeira fazemos então uso da relação de consistência adequada. As outras duas (finitas) integramos, para obter então:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left[I_{\log}(m^2) \right] \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu}}{2} [\eta_{00}] + p_\mu p_\nu [\xi_{02}] + q_\mu q_\nu [\xi_{20}] \right. \\
&\quad \left. + p_\mu q_\nu [\xi_{11}] + q_\mu p_\nu [\xi_{11}] \right\}, \tag{11.77}
\end{aligned}$$

onde aparecem as funções:

$$\begin{aligned}
\bullet \eta_{00} &= \frac{1}{2} Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2, m^2) - (1/2 + m^2 \xi_{00}) + \frac{q^2}{2} \xi_{10} + \frac{p^2}{2} \xi_{01} \\
\bullet \xi_{20} &= \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{p \cdot q}{4p^2 q^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right. \\
&\quad + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2q^2} (\xi_{10}) - \frac{1}{2q^2} \left[\frac{1}{2} + m^2 \xi_{00} \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{4q^2} [q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01})] \right\}; \tag{11.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{02} &= \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{p \cdot q}{4p^2 q^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, p^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2} (\xi_{01}) - \frac{1}{2p^2} [m^2 \xi_{00}] \right\} \tag{11.79}
\end{aligned}$$

Para as funções ξ_{11} temos duas representações, primeiro:

$$\bullet \xi_{11} = \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ -\frac{1}{4q^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2) \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2q^2} (\xi_{01}) + \frac{p \cdot q}{2p^2q^2} \left[\frac{1}{2} + m^2\xi_{00} \right] \\
& - \frac{p \cdot q}{4p^2q^2} \left[q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01}) \right] \Bigg\}, \tag{11.80}
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{11} = & \frac{p^2q^2}{[p^2q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ -\frac{1}{4p^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right. \\
& + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2} (\xi_{10}) + \frac{p \cdot q}{2p^2q^2} \left[\frac{1}{2} + m^2\xi_{00} \right] \\
& \left. - \frac{p \cdot q}{4p^2q^2} \left[q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01}) \right] \right\}. \tag{11.81}
\end{aligned}$$

Para a verificação das Identidades de Ward é extremamente útil utilizarmos as propriedades (cap.3):

$$\begin{aligned}
\bullet q^2\xi_{11} + p \cdot q\xi_{02} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{-Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2)}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)}{2} + q^2\xi_{01} \right\} \tag{11.82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet q^2\xi_{20} + p \cdot q\xi_{11} = & \frac{1}{2} \left\{ - \left[\frac{1}{2} + m^2\xi_{00} \right] \right. \\
& \left. + \frac{p^2}{2}\xi_{01} + \frac{3q^2}{2}\xi_{10} \right\} \tag{11.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet p^2\xi_{02} + p \cdot q\xi_{11} = & \frac{1}{2} \left\{ - \left[\frac{1}{2} + m^2\xi_{00} \right] \right. \\
& \left. + \frac{q^2}{2}\xi_{10} + \frac{3p^2}{2}\xi_{01} \right\} \tag{11.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet p^2\xi_{11} + p \cdot q\xi_{20} = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2}Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) + p^2\xi_{10} \right\}. \tag{11.85}
\end{aligned}$$

Com o resultado para a integral $I_{\mu\nu}$, mais as propriedades listadas acima, poderíamos completar a cálculo de $T_{\mu\nu}^{SVV}$ e verificar a validade das Identidades de Ward correspondentes. Entretanto é interessante considerar antes disto outra forma de resolver a integral $I_{\mu\nu}$.

A segunda forma de resolver a integral $I_{\mu\nu}$ é primeiro considerar a estrutura de Lorentz da eventual solução, que, neste caso, pode ser escrita na forma geral:

$$I_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}B_0 + p_\mu p_\nu B_1 + q_\mu q_\nu B_2 + p_\mu q_\nu B_3 + q_\mu p_\nu B_4. \quad (11.86)$$

Então, a fim de obter os valores para os invariantes B 's efetuamos contrações em ambos os lados gerando um conjunto de equações. A primeira pode ser:

$$g_{\mu\nu}I_{\mu\nu} = 4B_0 + p^2 B_1 + q^2 B_2 + (p \cdot q) B_3 + (p \cdot q) B_4. \quad (11.87)$$

Depois podemos fazer:

$$q_\mu p_\nu I_{\mu\nu} = (p \cdot q) B_0 + p^2 (p \cdot q) B_1 + (p \cdot q) q^2 B_2 + (p \cdot q)^2 B_3 + p^2 q^2 B_4. \quad (11.88)$$

Também:

$$p_\mu q_\nu I_{\mu\nu} = (p \cdot q) B_0 + p^2 (p \cdot q) B_1 + (p \cdot q) q^2 B_2 + (p \cdot q)^2 B_4 + p^2 q^2 B_3. \quad (11.89)$$

Por sua vez:

$$p_\mu p_\nu I_{\mu\nu} = p^2 B_0 + (p^2)^2 B_1 + (p \cdot q)^2 B_2 + p^2 (p \cdot q) B_3 + p^2 (p \cdot q) B_4. \quad (11.90)$$

E, finalmente:

$$q_\mu q_\nu I_{\mu\nu} = q^2 B_0 + (p \cdot q)^2 B_1 + (q^2)^2 B_2 + (p \cdot q) q^2 B_3 + (p \cdot q) q^2 B_4. \quad (11.91)$$

O sistema de equações assim obtido pode ser resolvido de modo a fornecer os invariantes B 's em termos das integrais do lado esquerdo. Como tal teremos:

$$B_0 = \frac{g_{\mu\nu}I_{\mu\nu}}{4} + \frac{p \cdot q}{2 [p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ (q_\mu p_\nu I_{\mu\nu}) + (p_\mu q_\nu I_{\mu\nu}) - \frac{p^2}{p \cdot q} (q_\mu q_\nu I_{\mu\nu}) - \frac{q^2}{p \cdot q} (p_\mu p_\nu I_{\mu\nu}) \right\}, \quad (11.92)$$

e combinações análogas para os outros B 's.

O que nos interessa diretamente, no momento, é o modo pelo qual resolvemos as integrais obtidas. Tomando por exemplo a integral $g_{\mu\nu}I_{\mu\nu}$, poderíamos fazer:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}I_{\mu\nu} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + m^2 - m^2}{(k^2 - m^2) \left((k+p)^2 - m^2 \right) \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \\
&= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(k+p)^2 - m^2 \right] \left[(k+q)^2 - m^2 \right]} \\
&\quad + m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2] \left((k+p)^2 - m^2 \right) \left[(k+q)^2 - m^2 \right]}, \quad (11.93)
\end{aligned}$$

e então resolver de acordo com nossa estratégia. Deste modo obteríamos:

$$g_{\mu\nu}I_{\mu\nu} = I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ Z_0 \left(m^2, m^2, (p-q)^2 \right) - m^2 \xi_{00} \right\}. \quad (11.94)$$

Seguindo este raciocínio a integral $p_{\mu}q_{\nu}I_{\mu\nu}$ poderia ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
p_{\mu}q_{\nu}I_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{q \cdot k}{(k^2 - m^2) \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q \cdot k) p^2}{(k^2 - m^2) \left((k+p)^2 - m^2 \right) \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{q \cdot k}{\left((k+p)^2 - m^2 \right) \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \quad (11.95)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a identidade:

$$q \cdot k = \frac{1}{2} \left[\left((k+p)^2 - m^2 \right) - \left(k^2 - m^2 \right) - p^2 \right]. \quad (11.96)$$

Então, tratamos as integrais obtidas no lado direito de (96) utilizando as relações de consistência. O resultado pode ser facilmente colocado em termos das funções Z' s e ξ' s;

$$\begin{aligned}
p_{\mu}q_{\nu}I_{\mu\nu} &= \frac{p \cdot q}{4} \left[I_{\log}(m^2) \right] \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{p^2}{4} Z_0 \left(m^2, m^2, p^2; m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{q^2}{4} Z_0 \left(m^2, m^2, q^2; m^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(p^2 + q^2 + p \cdot q)}{4} Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) \\
& + \frac{q^2 p^2}{4} (\xi_{00}) \Big\}, \tag{11.97}
\end{aligned}$$

e assim por diante para todas as outras integrais. Após um longo e tedioso cálculo e sucessivas reorganizações podemos colocar os B's nas formas:

$$\begin{aligned}
\bullet B_0 &= \frac{1}{4} [I_{\log}(m^2)] + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2} Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) \right. \\
& \quad \left. - [m^2 \xi_{00}] + \frac{q^2}{2} (\xi_{10}) + \frac{p^2}{2} (\xi_{01}) \right\} \tag{11.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet B_1 &= \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{p \cdot q}{4 p^2 q^2} [Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \right. \\
& \quad + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2 q^2} (\xi_{10}) + \frac{1}{2 q^2} [m^2 \xi_{00}] \\
& \quad \left. - \frac{1}{4 q^2} [q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01})] \right\} \tag{11.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet B_2 &= \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{p \cdot q}{4 p^2 q^2} [Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)] \right. \\
& \quad + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2 p^2} (\xi_{01}) - \frac{1}{2 p^2} [m^2 \xi_{00}] \\
& \quad \left. + \frac{1}{4 p^2} [q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01})] \right\} \tag{11.100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet B_3 &= \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ -\frac{1}{4 q^2} [Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, p^2; m^2)] \right. \\
& \quad + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2 q^2} (\xi_{01}) + \frac{p \cdot q}{2 p^2 q^2} [m^2 \xi_{00}] \\
& \quad \left. - \frac{p \cdot q}{4 p^2 q^2} [q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01})] \right\} \tag{11.101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet B_4 &= \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ -\frac{1}{4 q^2} [Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) - Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \right. \\
& \quad + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2 p^2} (\xi_{10}) + \frac{p \cdot q}{2 p^2 q^2} [m^2 \xi_{00}] \\
& \quad \left. - \frac{p \cdot q}{4 p^2 q^2} [q^2 (\xi_{10}) + p^2 (\xi_{01})] \right\}. \tag{11.102}
\end{aligned}$$

Para verificação das Identidades de Ward, com esta solução para a integral $I_{\mu\nu}$ é muito útil conhecermos algumas propriedades dos B's tais como:

$$\bullet q^2 B_2 + p \cdot q B_4 = \frac{1}{2} \left\{ -m^2 \xi_{00} + \frac{p^2}{2} \xi_{01} + \frac{3q^2}{2} \xi_{10} \right\} \quad (11.103)$$

$$\bullet q^2 B_3 + p \cdot q B_1 = \frac{1}{2} \left\{ -Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2) + Z_0(m^2, m^2, p^2) + q^2 \xi_{00} \right\} \quad (11.104)$$

$$\bullet p^2 B_3 + p \cdot q B_2 = \frac{1}{4} \left\{ -Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2) + Z_0(m^2, m^2, q^2) + 2p^2 \xi_{10} \right\} \quad (11.105)$$

$$\bullet p^2 B_1 + p \cdot q B_3 = \frac{1}{2} \left\{ -m^2 \xi_{00} + \frac{q^2}{2} + \frac{3p^2}{2} \xi_{01} \right\} \quad (11.106)$$

Assim como no caso da primeira solução, basta estes ingredientes para explicitar a solução de $T_{\mu\nu}^{SVV}$ e verificar a validade das Identidades de Ward.

Antes de partir para as verificações em separado para as duas soluções, nós observamos as expressões obtidas e ao compará-las notamos pequenas, mas significativas discrepâncias nos termos que compõem a solução para $I_{\mu\nu}$. O aspecto interessante desta comparação é que podemos tratar os dois casos simultaneamente, definindo um novo conjunto de invariantes:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \{ \text{termo } g_{\mu\nu}; B_0 \} \\ \varphi_1 &= \{ \xi_{02}; B_1 \} \\ \varphi_2 &= \{ \xi_{20}; B_2 \} \\ \varphi_3 &= \{ \xi_{11}; B_3 \} \\ \varphi_4 &= \{ \xi_{11}; B_4 \}, \end{aligned}$$

onde, por exemplo, o termo φ_0 pode ser escrito, já na linguagem específica dos nossos momentos internos, como:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{4} I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\Delta\varphi + m^2 \xi_{00}) + \frac{(k_1 - k_2)^2}{2} \xi_{01} + \frac{(k_1 - k_3)^2}{2} \xi_{10} \right] \right\}. \quad (11.107) \end{aligned}$$

As propriedades destes objetos, com vistas a Identidades de Ward, ficam:

$$\bullet (k_3 - k_1)^2 \varphi_3 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_1 = \frac{1}{4} \left\{ -Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2 \right) \\
& + 2 (k_3 - k_1)^2 \xi_{01} \} \quad (11.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_3 - k_1)^2 \varphi_2 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_4 &= \frac{1}{2} \left\{ - \left[\Delta\varphi + m^2 \xi_{00} \right] \right. \\
& \left. + \frac{(k_2 - k_1)^2}{2} \xi_{01} + \frac{3(k_3 - k_1)^2}{2} \xi_{10} \right\} \quad (11.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_2 - k_1)^2 \varphi_1 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left\{ - \left[\Delta\varphi + m^2 \xi_{00} \right] \right. \\
& \left. + \frac{(k_3 - k_1)^2}{2} \xi_{10} + \frac{3(k_2 - k_1)^2}{2} \xi_{01} \right\} \quad (11.110)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_2 - k_1)^2 \varphi_4 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_2 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} Z_0 \left(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2 \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} Z_0 \left(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2 \right) \\
& \left. + (k_2 - k_1)^2 \xi_{10} \right\}. \quad (11.111)
\end{aligned}$$

Notemos que tomando:

i) $\Delta\varphi = 0$, temos a solução em termos dos B's;

ii) $\Delta\varphi = 1/2$ teremos a solução em termos das funções $\xi's$.

É importante, neste ponto, que percebamos o fato de nenhuma das duas soluções, apesar de levarem a formas diferentes para a integral, e portanto para as amplitudes correspondentes, poderem ser consideradas incorretas. Somente a análise das consequências destas escolhas é que revelará qual delas nos fornecerá resultados consistentes, e nós esperamos poder decidir qual dos procedimentos deve ser adotado.

É hora então de voltar para o cálculo da amplitude $T_{\mu\nu}^{SVV}$. Para tal o primeiro passo é calcular os objetos $T_{ij\pm}^{\mu\nu}$, que introduzimos para tornar sistematizado os cálculos posteriores, em termos dos objetos $\varphi's$. Isto é feito de modo bastante direto com a utilização da solução obtida para a integral $I_{\mu\nu}$. Assim temos:

$$\bullet I_{13-}^{\mu\nu} = \left[(k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu - (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-\xi_{01}] \quad (11.112)$$

$$\bullet I_{12-}^{\mu\nu} = \left[(k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu - (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu \right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-\xi_{10}] \quad (11.113)$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_{32-}^{\mu\nu} &= \left[(k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu - (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu \right] \times \\
&\quad \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - \xi_{10} - \xi_{01}] \quad (11.114)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet J_{13+}^{\mu\nu} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ g_{\mu\nu} [2\varphi_0] \right. \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [2\varphi_2 - 2\xi_{10}] \\
&\quad + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [2\varphi_1] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu [2\varphi_3 - \xi_{01}] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [2\varphi_4 - \xi_{01}] \right\} \tag{11.115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet J_{12+}^{\mu\nu} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ g_{\mu\nu} [2\varphi_0] \right. \\
&\quad + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [2\varphi_1 - 2\xi_{01}] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [2\varphi_2] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu [2\varphi_3 - \xi_{10}] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [2\varphi_4 - \xi_{10}] \right\} \tag{11.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet J_{32+}^{\mu\nu} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ g_{\mu\nu} [2\varphi_0] \right. \\
&\quad + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [2\varphi_1 - 2\xi_{01}] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [2\varphi_2 - 2\xi_{10}] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu [2\varphi_3 + \xi_{00} - \xi_{10} - \xi_{01}] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu [2\varphi_4 + \xi_{00} - \xi_{10} - \xi_{01}] \right\}. \tag{11.117}
\end{aligned}$$

Com estas expressões estamos prontos para explicitar não apenas $T_{\mu\nu}^{SVV}$ mas todas as funções de três pontos com dois índices de Lorentz (e um número par de matrizes γ_5), como veremos posteriormente.

Voltando para a expressão (74) para $T_{\mu\nu}^{SVV}$ e inserindo os valores de $I_{12-}^{\mu\nu}$, $I_{13+}^{\mu\nu}$, $I_{32-}^{\mu\nu}$, fica:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{SVV} &= 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [4\varphi_1 - 2\xi_{01}] \right. \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [4\varphi_2 - 2\xi_{10}] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu [4\varphi_3 - \xi_{00}] \\
&\quad \left. (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [4\varphi_4 + \xi_{00} - 2\xi_{01} - 2\xi_{10}] \right\} \\
&\quad + 4mg_{\mu\nu} [4\varphi_0] + g_{\mu\nu} [T^{SPP}]. \tag{11.118}
\end{aligned}$$

- Identidades de Ward

Verifiquemos primeiro a identidade relativa ao índice ν . Contraindo com $(k_1 - k_2)_\nu$ e reorganizando:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} &= \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_3 - k_1)_\mu \left\{ -4 \left[(k_2 - k_1)^2 \varphi_4 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_2 \right] \right. \\
&\quad + 2 \left[(k_2 - k_1)^2 \xi_{01} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{10} \right] \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1)^2 (2\xi_{10} - \xi_{00}) \right\} \\
&\quad + \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_2 - k_1)_\mu \left\{ -4 \left[(k_2 - k_1)^2 \varphi_1 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_3 \right] \right. \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) (\xi_{00}) \right. \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1)^2 (2\xi_{01}) \right\} \\
&\quad + 4m (k_1 - k_2)_\mu [4\varphi_0] \\
&\quad + (k_1 - k_2)_\mu [T^{SPP}]
\end{aligned} \tag{11.119}$$

O próximo passo, e a reorganização acima foi proposital, é a utilização das propriedades (109) e (112). Após este procedimento e alguma álgebra, ficamos com a expressão:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} &= \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_2 - k_1)_\mu \left\{ -I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0 \left(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) (\xi_{00}) \right\}
\end{aligned} \tag{11.120}$$

$$- (k_2 - k_1)_\mu [T^{SPP}] \tag{11.121}$$

Uma rápida consulta no valor de T^{SPP} , expressão (17), nos revela que obtivemos;

$$(k_2 - k_1)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} = 0. \tag{11.122}$$

Cabe, de imediato, mencionar que este resultado não depende da escolha para $\Delta\varphi$, ou seja, ambas as soluções para a integral $I_{\mu\nu}$ levam ao mesmo valor para a contração com o momento $(k_1 - k_2)_\nu$. Outro aspecto importante é que isto reforça a interpretação que levou à forma (17) para T^{SPP} , de tal modo que o resultado nulo obtido, crucial para

a Identidade de Ward ser obtida satisfeita, poderia não ocorrer fosse outra a prescrição adotada.

Para verificar a outra propriedade da amplitude $T_{\mu\nu}^{SVV}$, contraímos com o momento $(k_3 - k_1)_\mu$. Então temos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SVV} &= \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_3 - k_1)_\nu \left\{ 4 \left[(k_3 - k_1)^2 \varphi_2 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_4 \right] \right. \\
&\quad + (k_3 - k_1)^2 (-2\xi_{10}) \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) (-\xi_{00}) \right\} \\
&\quad + \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_3 - k_1)_\nu \left\{ 4 \left[(k_2 - k_1)^2 \varphi_3 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_1 \right] \right. \\
&\quad - 2 \left[(k_3 - k_1)^2 \xi_{10} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01} \right] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)^2 (\xi_{00} - 2\xi_{01}) \right\} \\
&\quad + 4m (k_3 - k_1)_\nu [4\varphi_0] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\nu [T^{SPP}]
\end{aligned} \tag{11.123}$$

Utilizando as propriedades (109) e (112) a forma explícita de T^{SPP} , ficamos com:

$$(k_3 - k_1)_\nu T_{\mu\nu}^{SVV} = 0. \tag{11.124}$$

Deste modo as duas correntes vetoriais são obtidas conservadas em cada diagrama, individualmente, que contribui para o processo $S \rightarrow VV$. Isto serve para mostrar que as Identidades de Ward não fixam completamente as amplitudes físicas. As duas expressões obtidas para $\Delta\varphi = 0$ e $\Delta\varphi = 1/2$,diferirão em seu comportamento a momentos externos nulos mas ambas satisfazem as relações de simetria. Sobre isto voltaremos a falar posteriormente.

É também interessante considerar as outras combinações dos vértices SVV. Como tal

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{VVS} &= 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\lambda - (k + k_1)_\lambda (k + k_2)_\mu \right] \right. \\
&\quad + \left[(k + k_1)_\mu (k + k_3)_\lambda + (k + k_1)_\mu (k + k_3)_\mu \right] \\
&\quad \left. + \left[(k + k_2)_\mu (k + k_3)_\lambda + (k + k_2)_\lambda (k + k_3)_\mu \right] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[(k + k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]}
\end{aligned}$$

$$+g_{\mu\nu} [T^{PPS}]. \quad (11.125)$$

Para colocá-la na forma resolvida, inserimos os valores de $T_{12-}^{\lambda\mu}, T_{13+}^{\lambda\mu}, T_{23+}^{\lambda\mu}$. Isto nos fornece:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu}^{VVS} = & 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda [4\varphi_1 - 2\xi_{01}] \right. \\ & + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\lambda [4\varphi_2 - 2\xi_{10}] \\ & + (k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\mu [4\varphi_3 - 2\xi_{01} + \xi_{00}] \\ & + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda [4\varphi_4 + \xi_{00} - 2\xi_{01} - 2\xi_{10}] \left. \right\} \\ & + 4mg_{\lambda\mu} [4\varphi_0] + g_{\lambda\mu} [T^{PPS}]. \end{aligned} \quad (11.126)$$

A contração com $(k_3 - k_1)_\mu$, com os mesmos procedimentos seguidos no caso $T_{\mu\nu}^{SVV}$, fornecerá:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{VVS} = 0, \quad (11.127)$$

e por sua vez:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VVS} = 0. \quad (11.128)$$

A outra permutação possível será dada por:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\nu}^{VSV} = & 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k + k_1)_\nu (k + k_2)_\lambda + (k + k_1)_\lambda (k + k_2)_\nu] \right. \\ & + [(k + k_1)_\nu (k + k_3)_\lambda - (k + k_1)_\lambda (k + k_3)_\nu] \\ & + [(k + k_2)_\nu (k + k_3)_\lambda + (k + k_2)_\lambda (k + k_3)_\nu] \left. \right\} \times \\ & \times \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \\ & + g_{\lambda\nu} [T^{PSP}]. \end{aligned} \quad (11.129)$$

Substituindo os valores para os termos $T_{12+}^{\mu\nu}, T_{13-}^{\mu\nu}, T_{23+}^{\mu\nu}$, obtemos a expressão final para a amplitude considerada, a qual possui as propriedades:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\nu}^{VSV} = (k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\nu}^{VSV} = 0. \quad (11.130)$$

Os resultados (130) mais aqueles (187) e (128) nos permitem verificar que:

$$\bullet p_\mu T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow VS} = 0 \quad (11.131)$$

$$\bullet p'_\nu T_{\lambda\nu}^{V \rightarrow SV} = 0 \quad (11.132)$$

$$\bullet q_\lambda T_{\lambda\nu}^{V \rightarrow VS} = q_\lambda T_{\lambda\nu}^{V \rightarrow SV} = 0. \quad (11.133)$$

E assim possuindo as propriedades corretas, exigidas pela conservação da corrente vetorial.

11.3.7 Cálculo de $T_{\mu\nu}^{SAA}$

Agora procedemos de modo a investigar a amplitude $T_{\mu\nu}^{SAA}$. Após os primeiros passos teremos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{SAA} &= 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu] \right. \\ &\quad + [(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\mu] \\ &\quad \left. + [(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu - (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu] \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\ &\quad - g_{\mu\nu} [T^{SSSS}], \end{aligned} \quad (11.134)$$

onde identificamos os termos proporcionais a $g_{\mu\nu}$ com aqueles obtido por acasião do cálculo de T^{SSSS} .

Substituindo os resultados para $T_{12+}^{\mu\nu}$, $T_{13+}^{\mu\nu}$ e $T_{23-}^{\mu\nu}$ ficamos com:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{SAA} &= 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [4\varphi_1 - 2\xi_{01}] \right. \\ &\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [4\varphi_2 - 2\xi_{10}] \\ &\quad + (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu [4\varphi_3 - 2\xi_{01} - 2\xi_{10} + \xi_{00}] \\ &\quad \left. (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [4\varphi_4 + \xi_{00}] \right\} \\ &\quad + 4m g_{\mu\nu} [4\varphi_0] - g_{\mu\nu} [T^{SSSS}]. \end{aligned} \quad (11.135)$$

- Identidades de Ward

Primeiro verificamos a contração com $(k_3 - k_1)_\mu$:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SAA} &= \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_3 - k_1)_\nu \left\{ 4 \left[(k_3 - k_1)^2 \varphi_2 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_4 \right] \right. \\
&\quad - 2 \left[(k_3 - k_1)^2 \xi_{10} + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01} \right] \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{00} - 2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{10} \right\} \\
&\quad + \frac{4mi}{(4\pi)^2} (k_2 - k_1)_\nu \left\{ 4 \left[(k_3 - k_1)^2 \varphi_3 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \varphi_1 \right] \right. \\
&\quad - 2 (k_3 - k_1)^2 \xi_{10} - 2 (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \xi_{01} \left. \right\} \\
&\quad + 4m (k_3 - k_1)_\nu [4\varphi_0] - (k_3 - k_1)_\nu [T^{SSS}]. \tag{11.136}
\end{aligned}$$

Então utilizamos as propriedades (109) e (112) e substituímos a expressão para T^{SSS} , eq(14), e teremos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SAA} &= 4m (k_1 - k_3)_\nu \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2)] \right. \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2; m^2) \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{10} \right\} \\
&\quad + 4m (k_2 - k_1)_\nu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_3)^2] \xi_{00} \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_3)^2 + (k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2] \xi_{01} \right\} \\
&\quad - 4m (k_2 - k_1)_\nu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right\} \tag{11.137}
\end{aligned}$$

Isto nada mais é do que:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{SAA} = (2m) [T_\nu^{SPA}] + T_\nu^{AP}(m, k_2; m, k_1) + T_\nu^{SV}(m, k_2; m, k_3). \tag{11.138}$$

onde foram consideradas as expressões (3), (4) e (71) para esta identificação. A relação está representada diagramaticamente na fig.(8.16).

A outra propriedade de $T_{\mu\nu}^{SAA}$ é verificada contraindo (135) com $(k_1 - k_2)_\nu$. Isto nos fornecerá, após algumas manipulações:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\mu T_{\mu\nu}^{SAA} &= 2m [-2(k_3 - k_1)_\mu] \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2)] \right. \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [-(k_1 - k_2)^2] \xi_{00} \\
&\quad + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_2 - k_3)^2 + (k_1 - k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{10} \right\} \\
&\quad + 2m [-2(k_1 - k_2)_\mu] \left\{ 2I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
&\quad - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2; m^2) \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [4m^2 - (k_1 - k_3)^2] \xi_{00} \\
&\quad + \left. \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(k_1 - k_3)^2 - (k_1 - k_2)^2 - (k_2 - k_3)^2] \xi_{01} \right\} \\
&\quad + 4m (k_3 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right\} \quad (11.139)
\end{aligned}$$

Com o auxílio das expressões (3), (4) e (68) isto pode ser identificado com a relação:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{SAA} = (2m) [T_\mu^{SAP}] + T_\mu^{AP}(m, k_1; m, k_3) + T_\mu^{SV}(m, k_2; m, k_3). \quad (11.140)$$

Dos resultados (138) e (140) podemos facilmente inferir que:

$$\begin{aligned}
\bullet p_\mu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} &= 2m [T_\nu^{S \rightarrow PA}] \\
\bullet p'_\nu T_{\mu\nu}^{S \rightarrow AA} &= 2m [T_\mu^{S \rightarrow AP}]. \quad (11.141)
\end{aligned}$$

Os resultados acima fornecem as relações esperadas entra as divergências das correntes axiais e aquelas pseudo-escalares.

Mais uma vez notemos que as Identidades de Ward são satisfeitas pelas duas formas possíveis para amplitude $T_{\mu\nu}^{SAA}$ correspondente às duas soluções de $I_{\mu\nu}$. Ainda, as identidades verificadas servem igualmente como testes para a prescrição adotada para o cálculo das amplitudes T^{SSS} , T_{μ}^{SAP} e T_{ν}^{SPA} .

Antes de encerrar esta seção registramos ainda as outras permutações envolvendo os mesmos vértices. Então:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{AAS} &= 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_2)_{\mu}(k+k_3)_{\lambda} + (k+k_2)_{\lambda}(k+k_3)_{\mu}] \right. \\
&\quad + [(k+k_1)_{\lambda}(k+k_2)_{\mu} - (k+k_1)_{\mu}(k+k_2)_{\lambda}] \\
&\quad \left. + [(k+k_1)_{\mu}(k+k_3)_{\lambda} + (k+k_1)_{\lambda}(k+k_3)_{\mu}] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad - g_{\lambda\mu} [T^{SSS}].
\end{aligned} \tag{11.142}$$

Substituindo os valores para os termos $T_{21-}^{\lambda\mu}$, $T_{13+}^{\lambda\mu}$, $T_{23+}^{\lambda\mu}$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{AAS} &= 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_{\mu}(k_2 - k_1)_{\lambda} [4\varphi_1 - 2\xi_{01}] \right. \\
&\quad + (k_3 - k_1)_{\mu}(k_3 - k_1)_{\lambda} [4\varphi_2 - 4\xi_{10}] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_{\lambda}(k_2 - k_1)_{\mu} [4\varphi_3 - 2\xi_{01} - 2\xi_{10} + \xi_{00}] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_{\mu}(k_2 - k_1)_{\lambda} [4\varphi_4 + \xi_{00} - 2\xi_{01}] \right\} \\
&\quad + 4m (g_{\mu\nu} [4\varphi_0]) - g_{\lambda\mu} [T^{SSS}],
\end{aligned} \tag{11.143}$$

Os procedimentos que seguimos nos casos anteriores nos levam à relação:

$$(k_3 - k_1)_{\mu} T_{\lambda\mu}^{AAS} = (2m) [T_{\lambda}^{APS}] + T_{\lambda}^{AP}(m, k_3; m, k_2) + T_{\lambda}^{VS}(m, k_1; m, k_2). \tag{11.144}$$

De modo análogo também temos :

$$(k_3 - k_2)_{\lambda} T_{\lambda\mu}^{AAS} = (-2m) [T_{\mu}^{PAS}] + T_{\mu}^{AP}(m, k_3; m, k_1) + T_{\mu}^{VS}(m, k_2; m, k_1). \tag{11.145}$$

A outra permutação a ser considerada é a função $T_{\lambda\nu}^{ASA}$. Ela é dada inicialmente por:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\nu}^{ASA} &= 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\nu + (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\lambda] \right. \\
&\quad + [(k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\lambda] \\
&\quad \left. + [(k+k_1)_\lambda (k+k_3)_\nu - (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\lambda] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
&\quad - g_{\lambda\nu} [T^{SSS}]. \tag{11.146}
\end{aligned}$$

Os valores das estruturas $T_{12+}^{\lambda\nu}$, $T_{13-}^{\lambda\nu}$ e $T_{23+}^{\lambda\nu}$, quando substituídos na expressão acima, nos levarão a:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\nu}^{ASA} &= 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu [4\varphi_1 - 4\xi_{01}] \right. \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu [4\varphi_2 - 2\xi_{10}] \\
&\quad + (k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu [4\varphi_3 - 2\xi_{10} + \xi_{00}] \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\mu [4\varphi_4 + \xi_{00} - 2\xi_{01} - 2\xi_{10}] \right\} \\
&\quad + 4m (g_{\mu\nu} [4\varphi_0]) - g_{\mu\nu} [T^{SSS}]. \tag{11.147}
\end{aligned}$$

Da expressão acima, é então fácil verificar que:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\nu}^{ASA} = 2m [T_\lambda^{ASP}] + T_\lambda^{AP}(m, k_3; m, k_2) + T_\lambda^{VS}(m, k_1; m, k_3), \tag{11.148}$$

e também:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\nu}^{ASA} = (-2m) [T_\nu^{PSA}] + T_\nu^{AP}(m, k_1; m, k_2) + T_\nu^{VS}(m, k_1; m, k_3). \tag{11.149}$$

Dos resultados (144), (145), (148) e (149) decorrem as propriedades :

$$q_\lambda T_{\lambda\mu}^{A \rightarrow AS} = q_\lambda T_{\lambda\nu}^{A \rightarrow SA} = 0 \tag{11.150}$$

$$p_\mu T_{\lambda\mu}^{A \rightarrow AS} = p'_\nu T_{\lambda\nu}^{A \rightarrow SA} = 0, \tag{11.151}$$

forneendo portanto as corretas identidades de Ward para as respectivas amplitudes físicas.

11.3.8 Cálculo de $T_{\mu\nu}^{VAP}$.

Passemos então para um tipo também interessante de amplitude de três pontos e dois índices de Lorentz, aquela $T_{\mu\nu}^{VAP}$. Isto porque temos nesta amplitude duas Identidades de Ward a serem satisfeitas, uma associada à corrente vetorial e outra à corrente axial. Começamos pela expressão decorrente do cálculo do traço:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{VAP} = & -4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\lambda - (k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\mu] \right. \\
& + [(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\lambda + (k+k_1)_\lambda (k+k_3)_\mu] \\
& \left. - [(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\lambda + (k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\mu] \right\} \times \\
& \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
& + g_{\lambda\mu} [T^{PSP}]. \tag{11.152}
\end{aligned}$$

O próximo passo é utilizar as expressões (114), (115) e (118) para os objetos $T_{12-}^{\lambda\mu}$, $T_{13+}^{\lambda\mu}$ e $T_{23+}^{\lambda\mu}$. Então obtemos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{VAP} = & 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda [-2\xi_{01}] \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\lambda [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda [\xi_{00}] \left. \right\} \\
& + g_{\lambda\mu} [T^{PSP}]. \tag{11.153}
\end{aligned}$$

A amplitude $T_{\lambda\mu}^{VAP}$ não é portanto afetada pela presença da integral $I_{\mu\nu}$, motivo das nossas dúvidas imediatas. A verificação das Identidades de Ward envolverá apenas propriedades das funções ξ_{10} e ξ_{01} .

- Identidades de Ward

Para o índice associado à corrente vetorial, contraímos com $(k_3 - k_2)_\lambda$ e após a utilização das propriedades (29) e (30) teremos:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VAP} = & -4m (k_3 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2)] \right\} \\
& + 4m (k_2 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_1)^2; m^2) \right\} \tag{11.154}
\end{aligned}$$

ou seja:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{VAP} = T_\mu^{AP}(m, k_3; m, k_2) + T_\mu^{AP}(m, k_3; m, k_1), \quad (11.155)$$

Relação representada diagramaticamente na fig.(8.17). Para o índice associado à corrente axial é possível identificar:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{VAP} = 2m [T_\lambda^{VPP}] + T_\lambda^{AP}(m, k_1; m, k_2) + T_\lambda^{VS}(m, k_2; m, k_3), \quad (11.156)$$

relação esta representada diagramaticamente na figura (8.18).

Explicitamos também $T_{\lambda\nu}^{VPA}$, para a qual inicialmente temos:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\nu}^{VPA} &= 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_1)_\nu (k+k_2)_\lambda + (k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\nu] \right. \\ &\quad + [(k+k_1)_\nu (k+k_3)_\lambda - (k+k_1)_\lambda (k+k_3)_\nu] \\ &\quad \left. - [(k+k_2)_\nu (k+k_3)_\lambda + (k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\nu] \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\ &\quad - g_{\lambda\nu} [T^{PPS}]. \end{aligned} \quad (11.157)$$

Substituindo $T_{12+}^{\lambda\nu}$, $T_{13-}^{\lambda\nu}$ e $T_{23+}^{\lambda\nu}$, teremos:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\nu}^{VPA} &= 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_3 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu [2\xi_{10}] \right. \\ &\quad + (k_3 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu [-\xi_{00} - 2\xi_{01}] \\ &\quad \left. + (k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu [-\xi_{00}] \right\} \\ &\quad - g_{\lambda\nu} [T^{PPS}]. \end{aligned} \quad (11.158)$$

A contração da expressão acima com $(k_3 - k_2)_\lambda$ fornecerá a relação:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\nu}^{VPA} = -T_\nu^{AP}(m, k_1; m, k_2) - T_\nu^{AP}(m, k_3; m, k_1). \quad (11.159)$$

Por sua vez:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\nu}^{VAP} = 2m [T_\lambda^{VPP}] - T_\lambda^{AP}(m, k_3; m, k_1) - T_\lambda^{VS}(m, k_3; m, k_2) \quad (11.160)$$

Então das relações (155), (156), (159) e (160) podemos facilmente perceber que:

$$\bullet q_\lambda T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow AP} = 0 \quad (11.161)$$

$$\bullet p_\mu T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow AP} = 2m [T_\lambda^{V \rightarrow PP}]. \quad (11.162)$$

As amplitudes calculadas possuem assim as propriedades corretas. Prosseguindo, explicitamos, para utilização futura,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{PAV} = & -4m \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu] \right. \\ & - [(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\mu] \\ & \left. + [(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu - (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu] \right\} \times \\ & \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\ & - g_{\mu\nu} [T^{PSP}]. \end{aligned} \quad (11.163)$$

Os correspondentes valores dos objetos $T_{12+}^{\mu\nu}$, $T_{13+}^{\mu\nu}$ e $T_{32-}^{\mu\nu}$, substituídos nos levam a:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{PAV} = & -4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [2\xi_{10}] \right. \\ & + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [-2\xi_{01}] \\ & + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \\ & \left. - (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\mu [\xi_{00} + 2\xi_{11}] \right\} \\ & - g_{\mu\nu} [T^{PSP}]. \end{aligned} \quad (11.164)$$

Daí temos a relação:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{PAV} = T_\mu^{AP}(m, k_3; m, k_1) - T_\mu^{AP}(m, k_3; m, k_2). \quad (11.165)$$

Por sua vez:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{PAV} = 2m [T_\nu^{PPV}] + T_\nu^{AP}(m, k_1; m, k_2) + T_\nu^{AP}(m, k_3; m, k_1). \quad (11.166)$$

A próxima função, construída com os mesmos vértices é:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{PVA} = & -4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu] \right. \\
& - [(k+k_1)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\mu] \\
& \left. - [(k+k_2)_\mu (k+k_3)_\nu + (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\mu] \right\} \times \\
& \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
& + g_{\mu\nu} [T^{PPS}]. \tag{11.167}
\end{aligned}$$

Em termos das estruturas que adotamos:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{PVA} = & -4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [2\xi_{10}] \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [-2\xi_{01}] \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu [-\xi_{00} + 2\xi_{01}] \\
& \left. + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \right\} \\
& + g_{\mu\nu} [T^{PPS}]. \tag{11.168}
\end{aligned}$$

Daí temos a relação:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\mu\nu}^{PVA} = T_\nu^{AP}(m, k_1; m, k_2) + T_\nu^{AP}(m, k_3; m, k_2). \tag{11.169}$$

e também:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\mu\nu}^{PVA} = 2m [T_\mu^{PVP}] + T_\mu^{AP}(m, k_2; m, k_3) + T_\mu^{VS}(m, k_1; m, k_3). \tag{11.170}$$

Também temos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\nu}^{APV} = & 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\lambda] \right. \\
& + [(k+k_1)_\lambda (k+k_3)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_3)_\lambda] \\
& \left. - [(k+k_2)_\lambda (k+k_3)_\nu + (k+k_2)_\nu (k+k_3)_\lambda] \right\} \times \\
& \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2] [(k+k_2)^2 - m^2] [(k+k_3)^2 - m^2]} \\
& + g_{\mu\nu} [T^{SPP}]. \tag{11.171}
\end{aligned}$$

Em termos das estruturas que adotamos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\nu}^{APV} = & 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_3 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu [2\xi_{10}] \right. \\
& + (k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu [-\xi_{00} + 2\xi_{01}] \\
& + (k_2 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu [-\xi_{00}] \left. \right\} \\
& + g_{\lambda\nu} [T^{SPP}].
\end{aligned} \tag{11.172}$$

Esta possui a propriedade:

$$(k_1 - k_2)_\lambda T_{\lambda\nu}^{APV} = T_\lambda^{AP}(m, k_3; m, k_2) + T_\lambda^{AP}(m, k_1; m, k_3). \tag{11.173}$$

Por sua vez:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\nu}^{APV} = -2m [T_\nu^{PPV}] + T_\nu^{AP}(m, k_1; m, k_3) + T_\nu^{VS}(m, k_1; m, k_2). \tag{11.174}$$

Finalmente temos a permutação AVP:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{AVP} = & 4m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ [(k + k_1)_\mu (k + k_2)_\lambda - (k + k_1)_\lambda (k + k_2)_\mu] \right. \\
& - [(k + k_1)_\mu (k + k_3)_\lambda + (k + k_1)_\lambda (k + k_3)_\mu] \\
& + [(k + k_2)_\mu (k + k_3)_\lambda + (k + k_2)_\lambda (k + k_3)_\mu] \left. \right\} \times \\
& \times \frac{1}{[(k + k_1)^2 - m^2] [(k + k_2)^2 - m^2] [(k + k_3)^2 - m^2]} \\
& - g_{\lambda\mu} [T^{SPP}],
\end{aligned} \tag{11.175}$$

com a forma explícita:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{AVP} = & 4m \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda [-2\xi_{01}] \right. \\
& + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\lambda [\xi_{00}] \\
& + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \left. \right\} \\
& - g_{\lambda\mu} [T^{SPP}],
\end{aligned} \tag{11.176}$$

e com a propriedade:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu}^{AVP} = T_\lambda^{AP}(m, k_1; m, k_2) - T_\lambda^{AP}(m, k_3; m, k_2). \quad (11.177)$$

Por sua vez:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu}^{AVP} = -2m [T_\mu^{PVP}] + T_\mu^{AP}(m, k_1; m, k_2) + T_\mu^{SV}(m, k_1; m, k_3). \quad (11.178)$$

Das relações obtidas é fácil ver que todas as Identidades de Ward pertinentes são satisfeitas.

Nesta seção o trabalho foi facilitado pelo cancelamento da integral $I_{\mu\nu}$ onde reside nossa dúvida atual. Entretanto a investigação foi proveitosa porque pôde confirmar a prescrição utilizada para calcularmos aquelas amplitudes com bilineares escalares no numerador. Como pudemos ver pela sistematização adotada, as amplitudes se relacionam de várias maneiras fazendo com que restrições impostas nos garantam, cada vez mais, confiança nas escolhas até agora feitas.

Sobre as duas soluções para a integral $I_{\mu\nu}$, não foi ainda possível concluir qual destas corresponde à opção consistente. Antes de nos aprofundarmos neste aspecto vamos concluir nossa análise através do estudo das funções de três pontos com três índices de Lorentz.

11.3.9 Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$.

Nós agora passamos a considerar o cálculo de funções de três pontos com três índices de Lorentz e um número par de matrizes γ_5 [6]. Os cálculos passam a ser de uma considerável complexidade algébrica. Chamamos a atenção entretanto para a sistematização que introduzimos, sem a qual a tarefa que nos propomos seria praticamente inviável. Nós começamos por expressar, após o cálculo dos traços, $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ na forma:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = 4T_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu} [T_\lambda^{VPP}] + g_{\mu\lambda} [T_\nu^{PPV}] + g_{\lambda\nu} [T_\mu^{PVP}], \quad (11.179)$$

onde introduzimos a definição:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu} = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (k+k_3)_\lambda (k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_3)_\lambda (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \right. \\ & + (k+k_3)_\mu (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\lambda + (k+k_3)_\mu (k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\nu \\ & \left. + (k+k_3)_\nu (k+k_1)_\mu (k+k_2)_\lambda - (k+k_3)_\nu (k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\mu \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{\left[(k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_3)^2 - m^2 \right]} \quad (11.180)$$

Na expressão (179) aparecem três funções de três pontos com um índice de Lorentz, previamente calculadas. A identificação foi feita após o cálculo dos traços e absorve aqui o procedimento utilizado para explicitá-las por ocasião dos cálculos.

Para completar o cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ e verificar suas Identidades de Ward necessitamos discutir um novo e importante problema: O cálculo da integral com o termo tensorial $k_\mu k_\nu k_\lambda$ no numerador da integral linearmente divergente com três denominadores. Na expressão para $T_{\lambda\mu\nu}$, esta integral aparece em termos dos momentos k_1 , k_2 e k_3 . Uma discussão direta desta, portanto, seria demasiado longa. O ponto principal envolvido neste cálculo pode, por outro lado, ser esclarecido numa discussão bem mais simples.

- A Integral $I_{\lambda\mu\nu}$.

Nosso problema é então calcular a integral, na forma genérica,

$$I_{\lambda\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu k_\lambda}{(k^2 - m^2) \left((k+p)^2 - m^2 \right) \left((k+q)^2 - m^2 \right)}. \quad (11.181)$$

A primeira possibilidade é, como fizemos no caso da integral $I_{\mu\nu}$, a de resolver diretamente a integral acima, separando as partes divergentes de modo a esta não mais depender dos momentos externos. Então utilizar as relações de consistência, nas integrais divergentes obtidas, e proceder a integração daquelas finitas. Para fazer isto, um primeiro passo conveniente é escrever $I_{\lambda\mu\nu}$ na forma:

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu\nu} &= -2(p+q)_\xi \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu k_\lambda k_\xi}{(k^2 - m^2)^4} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 + 2k \cdot q)^2 k_\nu k_\mu k_\lambda}{(k^2 - m^2)^4 \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2k \cdot p) (q^2 + 2k \cdot q) k_\nu k_\mu k_\lambda}{(k^2 - m^2)^4 \left((k+q)^2 - m^2 \right)} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2k \cdot p)^2 k_\nu k_\mu k_\lambda}{(k^2 - m^2)^3 \left((k+p)^2 - m^2 \right) \left((k+q)^2 - m^2 \right)}. \end{aligned} \quad (11.182)$$

A expressão acima não é a única que serve aos nossos propósitos mas é, provavelmente, a de maior simplicidade algébrica. Com a solução das integrais finitas e a utilização da adequada relação de consistência teremos:

$$\begin{aligned}
I_{\lambda\mu\nu} = & -\frac{1}{12} [p_\mu g_{\lambda\nu} + p_\lambda g_{\nu\mu} + p_\nu g_{\mu\lambda}] I_{\log}(m^2) \\
& -\frac{1}{12} [q_\mu g_{\lambda\nu} + q_\lambda g_{\nu\mu} + q_\nu g_{\mu\lambda}] I_{\log}(m^2) \\
& + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{1}{2} \left\{ [p_\mu g_{\lambda\nu} + p_\lambda g_{\nu\mu} + p_\nu g_{\mu\lambda}] \eta_{01} \right. \\
& \quad \left. + [q_\mu g_{\lambda\nu} + q_\lambda g_{\nu\mu} + q_\nu g_{\mu\lambda}] \eta_{10} \right\} \\
& - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ p_\mu p_\nu p_\lambda [\xi_{03}] \right. \\
& \quad \left. + q_\mu q_\nu q_\lambda [\xi_{30}] \right. \\
& \quad \left. + [p_\mu p_\nu q_\lambda + p_\mu p_\lambda q_\nu + p_\lambda p_\nu q_\mu] [\xi_{12}] \right. \\
& \quad \left. + [q_\mu q_\nu p_\lambda + q_\mu q_\lambda p_\nu + q_\lambda q_\nu p_\mu] [\xi_{21}] \right\}.
\end{aligned} \tag{11.183}$$

As funções que aparecem acima têm as seguintes formas explícitas (capítulo 3):

$$\begin{aligned}
\bullet \eta_{01} = & -\frac{1}{12} [I_{\log}(m^2)] \\
& + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{3} \right) \left\{ \frac{1}{4} Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2) - \left[\frac{1}{6} + m^2 \xi_{01} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{q^2}{2} (\xi_{11}) + \frac{p^2}{2} (\xi_{02}) \right\}
\end{aligned} \tag{11.184}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \eta_{10} = & -\frac{1}{12} [I_{\log}(m^2)] \\
& + \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{3} \right) \left\{ \frac{1}{4} Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2) - \left[\frac{1}{6} + m^2 \xi_{10} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{q^2}{2} (\xi_{20}) + \frac{p^2}{2} (\xi_{11}) \right\}
\end{aligned} \tag{11.185}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{30} = & \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2 p^2 q^2} [-Z_2(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2)] \right. \\
& + \frac{1}{6 q^2} [Z_0(m^2, (p-q)^2; m^2)] + \frac{p \cdot q}{2 p^2 q^2} [-Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2)] \\
& \left. + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2 q^2} [\xi_{20}] - \frac{2}{3 q^2} \left[\frac{1}{6} + m^2 \xi_{10} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3q^2} [q^2 (\xi_{20}) + p^2 (\xi_{11})] \} \quad (11.186)$$

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{03} = & \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [-Z_2(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2)] \right. \\ & + \frac{1}{6p^2} [Z_0(m^2, (p - q)^2; m^2)] + \frac{p \cdot q}{2p^2 q^2} [-Z_2(m^2, m^2, p^2; m^2)] \\ & + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2} [\xi_{02}] - \frac{2}{3p^2} \left[\frac{1}{6} + m^2 \xi_{01} \right] \\ & \left. + \frac{1}{3p^2} [p^2 (\xi_{02}) + q^2 (\xi_{11})] \right\} \quad (11.187) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{21} = & \frac{p^2 q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [-Z_2(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2)] \right. \\ & + \frac{p \cdot q}{6p^2 q^2} [-Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2)] + \frac{1}{2p^2} [Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2)] \\ & + \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2} [\xi_{20}] + \frac{2(p \cdot q)}{3p^2 q^2} \left[\frac{1}{6} + m^2 \xi_{10} \right] \\ & \left. + \frac{p \cdot q}{3p^2 q^2} [p^2 (\xi_{11}) + q^2 (\xi_{20})] \right\} \quad (11.188) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{12} = & \frac{p^2 \cdot q^2}{[p^2 q^2 - (p \cdot q)^2]} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot q)}{2p^2 q^2} [-Z_2(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2)] \right. \\ & + \frac{1}{2q^2} [Z_2(m^2, m^2, p^2; m^2)] - \frac{p \cdot q}{6p^2 q^2} [Z_0(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2)] \\ & + \frac{(q^2 - p \cdot q)}{2q^2} [\xi_{02}] + \frac{2(p \cdot q)}{3p^2 q^2} \left[\frac{1}{6} + m^2 \xi_{01} \right] \\ & \left. - \frac{p \cdot q}{3p^2 q^2} [p^2 \xi_{02} + q^2 \xi_{11}] \right\}. \quad (11.189) \end{aligned}$$

Estas funções possuem importantes propriedades que são bastante úteis para a verificação das Identidades de Ward. Elas são:

$$\begin{aligned} \bullet q^2 \xi_{30} + p \cdot q \xi_{21} &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_2(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) \right. \\ & \quad \left. + 2\eta_{10} + q^2 \xi_{20} \right\} \\ \bullet q^2 \xi_{12} + p \cdot q \xi_{03} &= \frac{1}{2} \left\{ 2Z_1(m^2, m^2, (p - q)^2; m^2) \right. \end{aligned} \quad (11.190)$$

$$\begin{aligned} & -Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\ & -Z_2(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) + q^2 \xi_{02} \} \end{aligned} \quad (11.191)$$

$$\begin{aligned} \bullet q^2 \xi_{21} + p \cdot q \xi_{12} &= \frac{1}{2} \left\{ Z_2(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \right. \\ & -Z_1(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\ & \left. + \eta_{01} + q^2 \xi_{11} \right\} \end{aligned} \quad (11.192)$$

$$\begin{aligned} \bullet p^2 \xi_{21} + p \cdot q \xi_{30} &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) \right. \\ & \left. -Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) + p^2 \xi_{20} \right\} \end{aligned} \quad (11.193)$$

$$\begin{aligned} \bullet p^2 \xi_{03} + p \cdot q \xi_{12} &= \frac{1}{2} \left\{ 2Z_1(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \right. \\ & -Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\ & \left. -Z_2(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) + 2\eta_{01} + p^2 \xi_{02} \right\} \end{aligned} \quad (11.194)$$

$$\begin{aligned} \bullet p^2 \xi_{12} + p \cdot q \xi_{21} &= \frac{1}{2} \left\{ Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) \right. \\ & -Z_1(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\ & \left. -Z_1(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) + \eta_{10} + p^2 \xi_{11} \right\}. \end{aligned} \quad (11.195)$$

Nestas expressões e naquelas (184) - (189), é interessante perceber que todos os resultados podem ser reduzidos a funções Z' s e ξ_{00} por sucessivas utilizações das relações entre as funções ξ' s.

A segunda maneira de resolver a integral $I_{\lambda\mu\nu}$ é começar por considerar a forma geral da solução;

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu\nu} &= [p_\mu g_{\lambda\nu} + p_\lambda g_{\nu\mu} + p_\nu g_{\mu\lambda}] C_0 \\ &+ [q_\mu g_{\lambda\nu} + q_\lambda g_{\nu\mu} + q_\nu g_{\mu\lambda}] C_1 \\ &[p_\mu p_\nu p_\lambda] C_2 + [q_\mu q_\nu q_\lambda] C_3 \\ &+ [p_\mu p_\nu q_\lambda + p_\mu p_\lambda q_\nu + p_\lambda p_\nu q_\mu] C_4 \\ &+ [q_\mu q_\nu q_\lambda + q_\mu q_\lambda p_\nu + q_\lambda q_\nu p_\mu] C_5. \end{aligned} \quad (11.196)$$

Para determinar os invariantes C'^s , procedemos do mesmo modo como fizemos no tratamento da integral $I_{\mu\nu}$; contraímos com os momentos p'^s , q'^s e com matrizes g'^s até gerar um conjunto de seis equações. Os C'^s serão escritos como combinações de seis integrais. Estas possuirão uma estrutura trilinear no momento do “loop” no numerador. Algumas identidades podem ser utilizadas para manipular tais integrais. Um exemplo

disto pode ser a contração $g_{\mu\nu}I_{\lambda\mu\nu}$ que nos fornecerá;

$$g_{\mu\nu}I_{\lambda\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_{\lambda}}{(k^2 - m^2)[(p+k)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]}. \quad (11.197)$$

Então escrevemos no numerador $k^2 = k^2 - m^2 + m^2$ e teremos:

$$g_{\mu\nu}I_{\lambda\mu\nu} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\lambda}}{[(k+p)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} + m^2 \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\lambda}}{(k^2 - m^2)[(p+k)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]}. \quad (11.198)$$

A seguir procedemos, a fim de resolver integrais obtidas, com a prescrição que adotamos. Ao completarmos os cálculos, após algumas manipulações, podemos colocar a solução numa forma bastante elucidativa. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \bullet C_0 &= -\frac{1}{12}I_{\log}(m^2) \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{1}{3} \left\{ Z_0(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \right. \\ &- Z_1(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \\ &\left. + \frac{q^2}{3}\eta_{11} + \frac{p^2}{3}\xi_{02} - \frac{2}{3}m^2\xi_{01} \right\} \end{aligned} \quad (11.199)$$

$$\begin{aligned} \bullet C_1 &= -\frac{1}{12}I_{\log}(m^2) \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3}Z_1(m^2, m^2, (p-q)^2; m^2) \right. \\ &\left. - \frac{2}{3}m^2\xi_{10} + \frac{q^2}{3}\eta_{20} + \frac{p^2}{3}\xi_{11} \right\}, \end{aligned} \quad (11.200)$$

e expressões apropriadas para os outros invariantes C^{us} . O que nos interessa é identificar eventuais diferenças entre os dois procedimentos. Uma vez obtidas formas como aquelas acima é muito fácil comparar as duas soluções e escrever uma forma única que contenha ambas, tal como foi feito no caso $I_{\mu\nu}$.

O resultado final pode ser colocado numa forma, voltando para os momentos k_1, k_2 e k_3 :

$$I_{\lambda\mu\nu} = [(k_2 - k_1)_{\mu}g_{\lambda\nu} + (k_2 - k_1)_{\lambda}g_{\nu\mu} + (k_2 - k_1)_{\nu}g_{\mu\lambda}] Q_0$$

$$\begin{aligned}
& + [(k_3 - k_1)_\mu g_{\lambda\nu} + (k_3 - k_1)_\lambda g_{\nu\mu} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\mu\lambda}] Q_1 \\
& + [(k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda] Q_2 + [(k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda] Q_3 \\
& + [(k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu \\
& \quad + (k_2 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\mu] Q_4 \\
& + [(k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\lambda + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\lambda (k_2 - k_1)_\nu \\
& \quad + (k_3 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu (k_2 - k_1)_\mu] Q_5.
\end{aligned} \tag{11.201}$$

As duas formas explícitas dos Q^s poderão ser escritas de um modo simplificado com o auxílio das definições:

$$\begin{aligned}
\bullet Q_{01} &= \frac{1}{3} \left[Z_0(m^2, m^2, (k_0 - k_3)^2; m^2) - Z_1(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right] \\
& \quad + \frac{(k_3 - k_1)^2}{3} \xi_{11} + \frac{(k_2 - k_1)^2}{3} \xi_{02} - \frac{2}{3} [\Delta Q + m^2 \xi_{01}]
\end{aligned} \tag{11.202}$$

$$\begin{aligned}
\bullet Q_{10} &= Z_1(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) + \frac{(k_3 - k_1)^2}{3} \xi_{20} \\
& \quad + \frac{(k_2 - k_1)^2}{3} \xi_{11} - \frac{2}{3} [\Delta Q + m^2 \xi_{10}].
\end{aligned} \tag{11.203}$$

Então teremos, por exemplo:

$$\bullet Q_0 = -\frac{1}{12} I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{Q_{01}}{2} \right] \tag{11.204}$$

$$\bullet Q_1 = -\frac{1}{12} I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{Q_{10}}{2} \right]. \tag{11.205}$$

Como podemos notar, isto significa trocar η_{10} e η_{01} na solução em termos dos ξ^s pelos objetos Q_{10} e Q_{01} respectivamente. As propriedades necessárias para a verificação das Identidades de Ward, nosso interesse mais imediato, ficarão:

$$\begin{aligned}
\bullet (k_3 - k_1)^2 Q_3 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) Q_5 &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_2(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
& \quad \left. + 2Q_{10} + (k_3 - k_1)^2 \xi_{20} \right\}
\end{aligned} \tag{11.206}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_3 - k_1)^2 Q_4 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) Q_2 &= \frac{1}{2} \left\{ 2Z_1(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\
& \quad - Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \\
& \quad \left. - Z_2(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$+(k_3 - k_1)^2 \xi_{02} \} \quad (11.207)$$

$$\begin{aligned} \bullet(k_3 - k_1)^2 Q_5 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) Q_4 &= \frac{1}{2} \left\{ Z_2(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\ &\quad - Z_1(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \\ &\quad \left. + Q_{01} + (k_3 - k_1)^2 \xi_{11} \right\} \quad (11.208) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet(k_2 - k_1)^2 Q_5 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) Q_3 &= \frac{1}{2} \left\{ Z_2(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \\ &\quad - Z_2(m^2, m^2, (k_3 - k_2)^2; m^2) \\ &\quad \left. + (k_2 - k_1)^2 \xi_{20} \right\} \quad (11.209) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet(k_2 - k_1)^2 Q_2 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) Q_4 &= \frac{1}{2} \left\{ 2Z_1(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \right. \\ &\quad - Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \\ &\quad - Z_2(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \\ &\quad \left. + 2Q_{01} + (k_3 - k_1)^2 \xi_{02} \right\} \quad (11.210) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet(k_2 - k_1)^2 Q_4 + (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) Q_5 &= \frac{1}{2} \left\{ Z_2(m^2, m^2, (k_3 - k_1)^2; m^2) \right. \\ &\quad - Z_1(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2; m^2) \\ &\quad \left. + Q_{10} + (k_2 - k_1)^2 \xi_{11} \right\}. \quad (11.211) \end{aligned}$$

Nas propriedades acima e em todas as expressões correspondentes aos Q^s teremos as associações:

$$\begin{cases} \Delta Q = 0, & \text{solução em termos dos } C^s, \\ \Delta Q = \frac{1}{6}, & \text{solução em termos dos } \xi^s, \end{cases} \quad (11.212)$$

Com isso completamos a solução da integral $I_{\lambda\mu\nu}$ e então podemos explicitar o resultado para o termo $T_{\lambda\mu\nu}$ da amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$. Podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu} &= 4I_{\lambda\mu\nu} \\ &\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ [(k_3 - k_1)_\mu g_{\lambda\nu} + (k_2 - k_1)_\lambda g_{\mu\nu} \right. \\ &\quad + (k_2 - k_1)_\nu g_{\mu\lambda} + (k_3 - k_1)_\lambda g_{\mu\nu}] 2\varphi_0 \\ &\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda [4\varphi_1] \\ &\quad + (k_3 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda [4\varphi_2] \\ &\quad + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda [2(\varphi_1 + \varphi_3 - \xi_{01})] \\ &\quad + (k_2 - k_1)_\mu (k_2 - k_1)_\lambda (k_3 - k_1)_\nu [2\varphi_3] \\ &\quad \left. + (k_2 - k_1)_\mu (k_3 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\lambda [2\varphi_3] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(k_3 - k_1)_\mu(k_2 - k_1)_\nu(k_3 - k_1)_\lambda[2\varphi_3 + 2\varphi_2 + 2\varphi_4 - 2\xi_{10}] \\
& +(k_3 - k_1)_\mu(k_3 - k_1)_\nu(k_2 - k_1)_\lambda[4\varphi_4 + 2\varphi_1 - 2\xi_{10}] \\
& +(k_3 - k_1)_\mu(k_2 - k_1)_\nu(k_2 - k_1)_\lambda[4\varphi_4 + 2\varphi_1 - 2\xi_{01}], \quad (11.213)
\end{aligned}$$

Da expressão acima podemos perceber que os dois caminhos possíveis para a solução das integrais $I_{\mu\nu}$ e $I_{\lambda\mu\nu}$ nos deixam com diferentes expressões para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$. As diferenças se materializam na presença de ΔQ e $\Delta\varphi$. Entretanto para verificarmos as Identidades de Ward efetuamos contrações com os momentos $(k_3 - k_2)_\lambda$, $(k_3 - k_1)_\mu$ e $(k_1 - k_2)_\nu$. Ao fazermos isto podemos utilizar as propriedades (206) - (211) no termo vindo de $I_{\lambda\mu\nu}$. É fácil perceber que o resultado disto não dependerá de ΔQ . Além disto, nos outros termos, aqueles contendo os φ'^s , podemos utilizar as propriedades (109) - (112) e mais uma vez o resultado será independente de $\Delta\varphi$. Finalmente, a utilização das propriedades (29) - (30) mais as duas formas explícitas das funções de três pontos T_λ^{VPP} , T_ν^{PPV} e T_μ^{PVP} nos mostrará um cancelamento total das funções ξ'^s restando apenas funções Z'^s . Uma breve reorganização nos permitirá identificar funções de dois pontos $T_{\mu\nu}^{VV}$, $T_{\mu\lambda}^{VV}$ e $T_{\lambda\nu}^{VV}$ de acordo com a contração efetuada. Desta forma teremos, por exemplo:

$$(k_3 - k_2)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_2, m) - T_{\mu\nu}^{VV}(k_1, m; k_3, m), \quad (11.214)$$

e expressões análogas para as outras contrações.

Em suma, apesar de podermos gerar diferentes expressões para $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$, de acordo com as soluções das integrais, o que discutimos detalhadamente, as Identidades de Ward correspondentes estarão todas satisfeitas. Mais uma vez percebemos que as relações de simetria não fixam completamente as amplitudes. É entretanto interessante o modo simples que fomos capazes de equacionar isto em amplitudes divergentes.

11.3.10 Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$

Após o esforço feito na seção anterior seremos compensados nesta ao calcular $T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$. Isto pode ser visto, após o cálculo dos traços, onde podemos identificar estruturas conhecidas:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VAA} = 4T_{\lambda\mu\nu} - g_{\mu\nu}[T_\lambda^{VSS}] + g_{\mu\lambda}[T_\nu^{PSA}] - g_{\nu\lambda}[T_\mu^{PAS}] \quad (11.215)$$

Nenhum cálculo novo é necessário para determinarmos esta amplitude. Quanto às Identidades de Ward, um longo cálculo utilizando os mesmos procedimentos, nos revelarão que os resultados não dependerão de ΔQ ou $\Delta\varphi$. O mesmo valerá para as permutações

envolvendo os vértices VAA , como tal:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVA} = 4T_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu}[T_{\lambda}^{APS}] + g_{\nu\lambda}[T_{\mu}^{SVS}] - g_{\mu\lambda}[T_{\nu}^{SPA}], \quad (11.216)$$

e também:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AAV} = 4T_{\lambda\mu\nu} - g_{\mu\nu}[T_{\lambda}^{ASP}] - g_{\mu\lambda}[T_{\nu}^{SSV}] + g_{\nu\lambda}[T_{\mu}^{SAP}]. \quad (11.217)$$

As expressões obtidas envolvem funções de três pontos previamente calculadas. Isto serve como justificativa para termos apresentado todas as permutações envolvendo cada conjunto de operadores de vértices, nas seções anteriores.

Com isto completamos o que havíamos delimitado como objetivo para este capítulo. Passemos então para as amplitudes com número ímpar de matrizes γ_5 , após o que poderemos analisar os resultados de um modo bastante abrangente.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel, O.L. Battistel, (submetido para publicação);
- [2] O.A. Battistel and M.C. Nemes, Phys. Rev., D59, 055010 (1999);
- [3] O.A. Battistel, A.L. Mota and M.C. Nemes, Mod. Phys. Lett. A13, 20 (1998);
- [4] O.A. Battistel , Funções de três pontos para um modelo de férmions livres: Ambiguidades e Relações de Simetria (em preparação);
- [5] O.A. Battistel, O.L. Battistel, A. Scarpelli, A.H. Blin, B. Hiller, A. Motta , L.N. Manzoni and M.C. Nemes (submetido para publicação);
- [6] O.A. Battistel, processos $V \rightarrow AA$ e $V \rightarrow VV$ via férmions de spin 1/2 casos SU(2) e SU(3) (trabalho em andamento);

Capítulo 12

Férmions de Spin 1/2 livres e de massas iguais: Funções de três pontos e suas Identidades de Ward II - Pseudo-Amplitudes (Anomalias).

12.1 Introdução

No capítulo anterior investigamos as funções de três pontos e suas Identidades de Ward para aqueles casos com um número par de matrizes γ_5 . Nós agora faremos o mesmo tipo de investigações porém com as pseudo-amplitudes triangulares. Estas últimas possuem associadas a elas aspectos importantes e específicos. Ao passo que aqueles que investigamos no capítulo 11 devem obrigatoriamente ter suas relações de simetria satisfeitas, aqueles que investigaremos neste são tidas como impossibilitadas de terem as suas Identidades de Ward simultaneamente satisfeitas. No capítulo 8 fizemos uma análise, baseada apenas no conhecimento de funções de dois pontos e utilização de identidades no interior do traço, que nos levou a concluir pela possibilidade de satisfazer todas as relações de simetria inclusive as anômalas. A discussão feita no capítulo 10, por outro lado, nos obrigou a reconsiderar estes procedimentos exigindo o cálculo explícito das funções de três pontos. Nosso principal objeto de investigação passa a ser então o tratamento de integrais divergentes com bilineares na forma tensorial. Isto porque dentro do procedimento que estamos tentando construir, aparentemente, existem dois caminhos possíveis para que a

solução possa ser obtida.

Torna-se necessário então decidir qual das duas soluções leva a resultados consistentes. As consequências destas formas diferentes para as propriedades das amplitudes físicas é que devem nos orientar nesta escolha. Uma análise detalhada das relações de simetria daquelas amplitudes de três pontos com um número par de matrizes γ_5 revelou-se insuficiente já que nos mostrou todas as Identidades de Ward satisfeitas para ambas as soluções. Ainda que seja um fato sabido que as relações de simetria não fixam completamente a forma das amplitudes, o modo simples pelo qual equacionamos este aspecto para as amplitudes tratadas é bastante elucidativo. Isto porque a dúvida que ainda persiste nas nossas investigações, a rigor, estaria presente num tratamento com base na Regularização Dimensional, já que todas as passagens efetuadas para obtermos nossos resultados seriam igualmente válidas neste método. Esta dúvida deve ser removida com base na inclusão de novos elementos nessa discussão. A discussão das pseudo-amplitudes de três pontos, em separado, é conveniente porque pode servir para esta finalidade. Nossa expectativa é poder retirar da análise das pseudo-amplitudes os elementos necessários para decidir por um dos caminhos e possivelmente usar isto para enunciar uma regra geral.

Uma das soluções poderá satisfazer as Identidades de Ward mas dificilmente as duas o farão. Por outro lado se uma das soluções satisfizer as relações de simetria ela poderá comprometer o comportamento de baixa energia das amplitudes físicas e vice-versa.

12.2 Funções de um e dois pontos.

Nós começamos por registrar que devido às propriedades dos traços de Dirac as funções de um ponto T_μ^A e T^P são identicamente nulas. Aquelas de dois pontos, por sua vez, T^{SP} e T_μ^{VP} também o são por razões idênticas. $T_{\mu\nu}^{AV}$ entretanto, é nula em consequência de uma relação de consistência entre integrais logaritmicamente divergentes.

12.3 Funções de três pontos.

No que diz respeito às pseudo-amplitudes de três pontos, aquelas sem índices de Lorentz e com um índice serão todas nulas devido às propriedades dos traços de Dirac. As primeiras não-nulas serão aquelas com dois índices de Lorentz. Vamos então calculá-las explicitamente.

12.3.1 Cálculo de $T_{\mu\nu}^{PVV}$.

Para esta amplitude, dentro das convenções e procedimentos que estamos seguindo, primeiro escrevemos:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{PVV} &= 4im\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (k+k_1)_\alpha (k+k_2)_\beta - (k+k_1)_\alpha (k+k_3)_\beta \right. \\
&\quad \left. + (k+k_2)_\alpha (k+k_3)_\beta \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[(k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_3)^2 - m^2 \right]}. \tag{12.1}
\end{aligned}$$

A antissimetria total de $\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}$ nos deixa apenas com:

$$T_{\mu\nu}^{PVV} = 4im\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{00} \right]. \tag{12.2}$$

Disto é evidente que:

$$p_\mu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = p'_\nu T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} = 0. \tag{12.3}$$

Por sua vez a permutação $T_{\lambda\mu}^{VVP}$ fica:

$$T_{\lambda\mu}^{VVP} = 4im\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} (k_3 - k_1)_\beta (k_2 - k_1)_\alpha \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{00} \right]. \tag{12.4}$$

A outra terá a forma:

$$T_{\lambda\nu}^{VPV} = 4im\varepsilon_{\mu\nu\beta\lambda} (k_3 - k_1)_\beta (k_2 - k_1)_\alpha \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{00} \right]. \tag{12.5}$$

Passemos então para outra combinação de vértices.

12.3.2 Cálculo de $T_{\lambda\mu}^{VAS}$.

Para este caso após os primeiros passos teremos:

$$\begin{aligned}
T_{\lambda\mu}^{VAS} &= -4im\varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ - (k+k_1)_\alpha (k+k_2)_\beta + (k+k_1)_\alpha (k+k_3)_\beta \right. \\
&\quad \left. + (k+k_2)_\alpha (k+k_3)_\beta \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\left[(k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k+k_3)^2 - m^2 \right]}. \tag{12.6}
\end{aligned}$$

Considerando as propriedades de $\varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta}$ ficaremos com:

$$T_{\lambda\mu}^{VAS} = -4im\varepsilon_{\mu\alpha\lambda\beta} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{10} - 2\xi_{01}] \right]. \quad (12.7)$$

A contração da expressão acima com os momentos externos $(k_3 - k_1)_\mu$ e $(k_3 - k_2)_\lambda$ nos oferece um resultado identicamente nulo, refletindo a conservação da corrente vetorial e o fato de T_μ^{VPS} ser igual a zero.

De modo semelhante podemos estabelecer que :

$$T_{\lambda\nu}^{VSA} = -4im\varepsilon_{\alpha\nu\beta\lambda} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \right], \quad (12.8)$$

e também:

$$T_{\lambda\mu}^{AVS} = 4im\varepsilon_{\mu\nu\beta\lambda} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{01}] \right]. \quad (12.9)$$

Ainda:

$$T_{\lambda\nu}^{ASV} = 4im\varepsilon_{\alpha\nu\beta\lambda} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00}] \right], \quad (12.10)$$

e:

$$T_{\mu\nu}^{SVA} = -4im\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{01}] \right]. \quad (12.11)$$

Por fim;

$$T_{\mu\nu}^{SAV} = 4im\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\beta \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \right]. \quad (12.12)$$

Podemos então nos ocupar de outro caso.

12.3.3 Cálculo de $T_{\mu\nu}^{PAA}$.

Após calcular o traço podemos escrever:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{PAA} &= 4im\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ (k + k_1)_\alpha (k + k_2)_\beta - (k + k_1)_\alpha (k + k_3)_\beta \right. \\ &\quad \left. - (k + k_2)_\alpha (k + k_3)_\beta \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\left[(k + k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Em seguida;

$$T_{\mu\nu}^{PAA} = -4im\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} (k_3 - k_1)_\beta (k_2 - k_1)_\alpha \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{10} - 2\xi_{01}] \right]. \quad (12.14)$$

Novamente as contrações com os momentos externos fornecem resultados nulos, refletindo o fato de T_μ^{PAP} e T_ν^{PPA} serem iguais a zero.

A permutação $T_{\lambda\nu}^{APA}$, por sua vez, é igual a:

$$T_{\lambda\nu}^{APA} = 4im\varepsilon_{\alpha\nu\beta\lambda} (k_3 - k_1)_\beta (k_2 - k_1)_\alpha \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{01}] \right]. \quad (12.15)$$

De modo idêntico teremos:

$$T_{\lambda\mu}^{AAP} = 4im\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} (k_3 - k_1)_\beta (k_2 - k_1)_\alpha \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00} - 2\xi_{10}] \right]. \quad (12.16)$$

Com esta concluímos aquelas amplitudes de três pontos com dois índices de Lorentz. Vamos então agora tratar dos casos mais interessantes.

12.3.4 Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$.

Para esta amplitude o cálculo do traço nos permite escrever:

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = & -4i \left\{ \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k + k_1)_\mu (k + k_2)_\beta (k + k_3)_\xi \right. \\ & + \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k + k_1)_\nu (k + k_2)_\beta (k + k_3)_\xi \\ & + \varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} (k + k_1)_\alpha (k + k_2)_\beta (k + k_3)_\lambda \\ & + \varepsilon_{\mu\alpha\nu\xi} (k + k_1)_\alpha (k + k_3)_\xi (k + k_2)_\lambda \\ & - g_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\xi} (k + k_1)_\alpha (k + k_3)_\xi (k + k_2)_\beta \\ & - \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k + k_1)_\alpha (k + k_3)_\xi \cdot (k + k_2)_\beta \\ & - m^2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} (k + k_2)_\alpha - m^2 \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k + k_1)_\alpha \\ & \left. + m^2 \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha} (k + k_3)_\alpha \right\} \times \\ & \times \frac{1}{\left[(k + k_1)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_2)^2 - m^2 \right] \left[(k + k_3)^2 - m^2 \right]}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Neste ponto é conveniente a introdução das definições gerais:

$$\bullet F_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k + k_1)_\mu (k + k_2)_\beta (k + k_3)_\xi \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\xi \\
& +\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta} (k+k_1)_\alpha (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\lambda \\
& +\varepsilon_{\mu\alpha\nu\xi} (k+k_1)_\alpha (k+k_3)_\xi (k+k_2)_\lambda \} \times \\
& \times \frac{1}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \quad (12.18)
\end{aligned}$$

$$\bullet P_{\lambda\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\xi} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha (k+k_2)_\beta (k+k_3)_\xi}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (12.19)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{\lambda\mu\nu} = & \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{2} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha}{[(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_1)^2 - m^2]} \right. \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \\
& + [2m^2 - (k_2 - k_3)^2] \times \\
& \left. \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+k_1)_\alpha}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]} \right\} \quad (12.20)
\end{aligned}$$

Neste último eliminamos o fator quadrático do numerador. O termo restante, específico desta amplitude, denominamos:

$$\bullet M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -m^2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{(k+k_2)_\alpha - (k+k_1)_\alpha + (k+k_3)_\alpha\}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (12.21)$$

Em termos destes, a amplitude que estamos calculando fica:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 4i \left\{ -F_{\lambda\mu\nu} + N_{\lambda\mu\nu} + M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} + P_{\lambda\mu\nu} \right\}. \quad (12.22)$$

Afim de explicitar a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$, bem como estudar as suas Identidades de Ward, devemos então calcular e escrever, em termos das estruturas que adotamos, os objetos da expressão acima.

Primeiro nós consideremos o termo $P_{\lambda\mu\nu}$. Notemos de início que a antissimetria total de $\varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi}$ nos deixa o integrando reduzido a poucos termos;

$$\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\xi} (k + k_1)_\alpha (k + k_2)_\beta (k + k_3)_\xi = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\xi} [k_\alpha k_{2\beta} k_{3\xi} + k_\beta k_{1\beta} k_{3\xi} + k_\xi k_{2\beta} k_{1\alpha} + k_{1\alpha} k_{2\beta} k_{3\xi}]. \quad (12.23)$$

Então:

$$P_{\lambda\mu\nu} = g_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\xi} \left\{ k_{1\alpha} k_{2\beta} [I_\xi] + k_{2\beta} k_{3\xi} [I_\alpha] + k_{3\xi} k_{1\alpha} [I_\beta] + k_{1\alpha} k_{2\beta} k_{3\xi} [I] \right\}. \quad (12.24)$$

Substituindo os resultados para as integrais, ou seja:

$$\begin{aligned} \bullet I_\alpha &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha \xi_{01} + (k_3 - k_1)_\alpha \xi_{10} + k_{1\alpha} \xi_{00} \right\} \\ \bullet I &= \frac{i}{(4\pi)^2} \xi_{00}, \end{aligned} \quad (12.25)$$

obtemos um cancelamento exato entre os termos. Assim:

$$P_{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (12.26)$$

Para o próximo termo, $N_{\lambda\mu\nu}$, basta substituímos as expressões (11.10) e (11.23) para as integrais. Com isso:

$$\begin{aligned} N_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_1 - k_2)_\alpha \left\{ I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} [2m^2 - (k_3 - k_2)^2] (2\xi_{01}) \right\} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_3 - k_1)_\alpha \left\{ I_{\log}(m^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2; m^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} [2m^2 - (k_3 - k_2)^2] (2\xi_{10}) \right\} \end{aligned} \quad (12.27)$$

Para estudarmos as Identidades de Ward é importante estabelecermos as contrações com os momentos externos. Deste modo teremos:

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)_\lambda N_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_1 - k_2)_\alpha (k_3 - k_1)_\lambda \left\{ 2I_{\log}(m^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{(4\pi)^2} [Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2; m^2) + Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2; m^2)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} [2m^2 - (k_3 - k_2)^2] (2\xi_{01} + 2\xi_{10}) \right\}. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Por sua vez:

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_1)_\mu N_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_1 - k_2)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu \left\{ I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2); m^2 \right] \\
&\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[2m^2 - (k_3 - k_2)^2 \right] (2\xi_{01}) \right\}, \tag{12.29}
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_2)_\nu N_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}}{4} (k_1 - k_2)_\nu (k_3 - k_1)_\alpha \left\{ I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2); m^2 \right] \\
&\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[2m^2 - (k_3 - k_2)^2 \right] (2\xi_{10}) \right\}. \tag{12.30}
\end{aligned}$$

Agora, para o termo $F_{\lambda\mu\nu}$, será necessária a expressão para a integral $I_{\mu\nu}$. Após um longo e tedioso cálculo poderemos escrevê-lo na forma:

$$\begin{aligned}
F_{\lambda\mu\nu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} [(k_2 - k_1)_\mu (\varphi_1 + \varphi_3 - \xi_{01}) + \right. \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_\mu (\varphi_2 + \varphi_4 - \xi_{10})] \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} [(k_2 - k_1)_\nu (\varphi_1 + \varphi_3 - \xi_{01}) \right. \\
&\quad \left. + (k_3 - k_1)_\nu (\varphi_2 + \varphi_4 - \xi_{10})] \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} [(k_3 - k_1)_\lambda (\varphi_3 - \varphi_2 + \xi_{10}) \right. \\
&\quad \left. + (k_2 - k_1)_\lambda (\varphi_1 - \varphi_4 - \xi_{01})] \right\} \\
&\quad - \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi}}{4} \left\{ ((k_3 - k_1)_\xi + (k_2 - k_1)_\xi) \varphi_0 \right\}. \tag{12.31}
\end{aligned}$$

Fazendo uso das propriedades dos termos φ 's, estabelecidos no capítulo 11, teremos os resultados úteis:

$$\begin{aligned}
\bullet (k_3 - k_1)_\mu F_{\lambda\mu\nu} &= -\frac{\varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi}}{4} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad + \frac{i}{(4\pi)^2} \left[Z_0(m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2) - 2Z_0(m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2) \right. \\
&\quad - 4(k_1 - k_3)^2 \xi_{10} - 2(k_1 - k_2)^2 \xi_{01} \\
&\quad - 2(k_1 - k_3)^2 \xi_{01} + 2(k_1 - k_3)^2 \xi_{00} \\
&\quad \left. \left. + 4(\Delta\varphi + m^2 \xi_{00}) \right\}. \tag{12.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_1 - k_2)_\nu F_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi}}{4} \left((k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \right) \left\{ I_{\log} (m^2) \right. \\
&+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0 (m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2) - 2Z_0 (m^2, m^2, (k_2 - k_3)^2)] \\
&+ 2(k_1 - k_2)^2 \xi_{10} - 4(k_1 - k_2)^2 \xi_{01} \\
&- 2(k_1 - k_3)^2 \xi_{10} + 2(k_1 - k_2)^2 \xi_{00} \\
&\left. + 4(\Delta\varphi + m^2 \xi_{00}) \right\}. \tag{12.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet (k_3 - k_2)_\lambda F_{\lambda\mu\nu} &= -\frac{\varepsilon_{\mu\beta\nu\xi}}{4} \left((k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \right) \left\{ 2I_{\log} (m^2) \right. \\
&- \frac{i}{(4\pi)^2} [Z_0 (m^2, m^2, (k_1 - k_2)^2) + Z_0 (m^2, m^2, (k_1 - k_3)^2)] \\
&\left. + 2(k_2 - k_3)^2 (\xi_{01} + \xi_{10}) \right\}. \tag{12.34}
\end{aligned}$$

Estas propriedades mais aquelas para o objeto $N_{\lambda\mu\nu}$ podem ainda ser combinados para simplificar ainda mais as manipulações futuras. Primeiro:

$$(k_3 - k_1)_\mu (F_{\lambda\mu\nu} - N_{\lambda\mu\nu}) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ m^2 (\xi_{01}) - (\Delta\varphi + m^2 \xi_{00}) \right\}, \tag{12.35}$$

depois:

$$(k_1 - k_2)_\nu (F_{\lambda\mu\nu} - N_{\lambda\mu\nu}) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ -m^2 (\xi_{10}) + (\Delta\varphi + m^2 \xi_{00}) \right\}, \tag{12.36}$$

e ainda:

$$(k_3 - k_2)_\lambda (F_{\lambda\mu\nu} - N_{\lambda\mu\nu}) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_3 - k_1)_\xi (k_2 - k_1)_\beta \left\{ m^2 (\xi_{10} + \xi_{01}) \right\}. \tag{12.37}$$

Para completar os cálculos necessários resta o objeto $M_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$. Substituindo os resultados para as integrais, teremos:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha [\xi_{00} - \xi_{01}] + (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{00} - \xi_{10}) \right\}. \tag{12.38}$$

As contrações com os momentos externos são facilmente obtidas. Assim;

$$(k_1 - k_2)_\nu M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{00} + \xi_{10}), \tag{12.39}$$

também:

$$(k_3 - k_1)_\mu M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu [\xi_{00} - \xi_{01}], \quad (12.40)$$

e por fim:

$$(k_3 - k_2)_\lambda M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\lambda (2\xi_{00} - \xi_{10} - \xi_{01}). \quad (12.41)$$

Para termos uma forma explícita para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AVV}$ basta somarmos os termos eq.(12.26), eq.(12.27), eq.(12.31) e eq.(12.38). Quanto às Identidades de Ward, combinando eq.(12.35) e eq.(12.40) temos:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -4i \left\{ (k_3 - k_1)_\mu (F_{\lambda\mu\nu} - N_{\lambda\mu\nu}) - (k_3 - k_1)_\mu M_{\lambda\mu\nu}^{AVV} \right\}, \quad (12.42)$$

ou seja:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = 4m^2 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi]. \quad (12.43)$$

Por sua vez:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -4m^2 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi], \quad (12.44)$$

e, finalmente :

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -8m^2 \left\{ \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\xi_{00}] \right\}. \quad (12.45)$$

Comparando com a expressão eq.(11.2):

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AVV} = -2m \left\{ T_{\mu\nu}^{PVV} \right\}. \quad (12.46)$$

As Identidades de Ward são obtidas quando acrescentamos o resultado correspondente ao “canal cruzado”. Assim temos

$$\bullet p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = 8m^2 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} p'_\beta p_\xi [\Delta\varphi] \quad (12.47)$$

$$\bullet p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = -8m^2 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} p'_\beta p_\xi [\Delta\varphi] \quad (12.48)$$

$$\bullet q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow VV} = -2m \left\{ T_{\mu\nu}^{P \rightarrow VV} \right\} \quad (12.49)$$

As três últimas expressões nos revelam, pela primeira vez, que duas delas dependem crucialmente do modo pela qual a integral $I_{\mu\nu}$ é calculada. É bom lembrar que ambas as escolhas para $\Delta\varphi$ conduzem a amplitudes não-ambíguas. Entretanto apenas a escolha $\Delta\varphi = 0$ leva à satisfação de todas as relações de simetria.

Antes de procedermos para análises mais detalhadas consideremos as outras amplitudes de nosso interesse.

O cálculo da amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VAV}$ primeiro nos mostra a relação:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 4i \left\{ -F_{\lambda\mu\nu} + N_{\lambda\mu\nu} + M_{\lambda\mu\nu}^{VAV} + P_{\lambda\mu\nu} \right\}, \quad (12.50)$$

onde $M_{\lambda\mu\nu}^{VAV}$ é dado por:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = -m^2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{(k+k_2)_\alpha - (k+k_1)_\alpha - (k+k_3)_\alpha\}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (12.51)$$

Substituindo os resultados para as integrais fica:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha [\xi_{00} + \xi_{01}] + (k_3 - k_1)_\alpha (-\xi_{00} + \xi_{10}) \right\}. \quad (12.52)$$

As contrações com os momentos externos podem ser facilmente estabelecidas. Primeiro:

$$(k_3 - k_1)_\mu M_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_1 - k_2)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu [\xi_{00} + \xi_{01}], \quad (12.53)$$

também:

$$(k_1 - k_2)_\nu M_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_1 - k_2)_\nu (k_3 - k_1)_\alpha (-\xi_{00} + \xi_{10}), \quad (12.54)$$

e por fim:

$$(k_3 - k_2)_\lambda M_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_1 - k_2)_\lambda (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{10} + \xi_{01}). \quad (12.55)$$

A outra permutação, com estes mesmos operadores de vértices, é a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VVA}$. Esta, de início, pode ser colocada na forma:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 4i \left\{ -F_{\lambda\mu\nu} + N_{\lambda\mu\nu} + M_{\lambda\mu\nu}^{VVA} + P_{\lambda\mu\nu} \right\}. \quad (12.56)$$

Nesta expressão $M_{\lambda\mu\nu}^{VVA}$ é dado por:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = m^2 \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{(k+k_3)_\alpha - (k+k_2)_\alpha - (k+k_1)_\alpha\}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}. \quad (12.57)$$

Explicitando isto teremos:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \left\{ (k_2 - k_1)_\alpha [-\xi_{00} + \xi_{01}] + (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{00} + \xi_{10}) \right\}. \quad (12.58)$$

As contrações com os momentos externos é facilmente obtida. Primeiro;

$$(k_3 - k_1)_\mu M_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\mu [-\xi_{00} + \xi_{01}], \quad (12.59)$$

também:

$$(k_1 - k_2)_\nu M_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_2 - k_1)_\nu (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{00} + \xi_{10}), \quad (12.60)$$

e por fim:

$$(k_3 - k_2)_\lambda M_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\xi} (k_1 - k_2)_\xi (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{10} + \xi_{01}). \quad (12.61)$$

Agora, com vistas a verificação de Identidades de Ward, podemos estabelecer algumas relações importantes. Primeiro, utilizando eq.(12.35) e eq.(12.59) teremos para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VVA}$:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 4m^2 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_1 - k_2)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi]. \quad (12.62)$$

Depois, a partir de eq.(12.39) e eq.(12.60):

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = -4m^2 \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [2m^2 \xi_{00} + \Delta\varphi], \quad (12.63)$$

que nada mais é do que:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} &= 2m [T_{\lambda\mu}^{VVP}] \\ &+ 4\varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi]. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Por fim a propriedade:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVA} = 0. \quad (12.65)$$

Para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VAV}$ teremos:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 4\varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [2m^2\xi_{00} + \Delta\varphi], \quad (12.66)$$

ou seja, comparando com a expressão eq.(12.5):

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} &= 2m [T_{\lambda\nu}^{VPV}] \\ &+ 4\varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi]. \end{aligned} \quad (12.67)$$

Ainda;

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 4\varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi], \quad (12.68)$$

e por fim:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VAV} = 0. \quad (12.69)$$

As Identidades de Ward ficarão então:

$$\begin{aligned} \bullet p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VA} &= 8 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} p'_\beta p_\xi [\Delta\varphi] \\ \bullet p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VA} &= 2m [T_{\lambda\mu}^{V \rightarrow VP}] \\ &- 8 \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} p'_\beta p_\xi [\Delta\varphi] \\ \bullet q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{V \rightarrow VA} &= 0. \end{aligned} \quad (12.70)$$

Novamente obtivemos uma dependência com o caminho de cálculo representado pelo fator $\Delta\varphi$. É importante notar que agora existe a possibilidade da violação de uma relação de simetria relacionada à corrente vetorial e de uma relação com à corrente axial. Podemos agora considerar a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$, a única que ainda resta para ser investigada.

12.3.5 Cálculo de $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$.

Para completarmos o cálculo de todas as funções de três pontos resta aquela para a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{AAA}$. Repetindo os primeiros passos utilizados na seção anterior, podemos escrever a relação:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 4i \left\{ -F_{\lambda\mu\nu} + N_{\lambda\mu\nu} + M_{\lambda\mu\nu}^{AAA} + P_{\lambda\mu\nu} \right\}, \quad (12.71)$$

onde:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = m^2 \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\{(k+k_2)_\alpha + (k+k_1)_\alpha + (k+k_3)_\alpha\}}{[(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_2)^2 - m^2][(k+k_3)^2 - m^2]}, \quad (12.72)$$

cujos cálculos nos leva à expressão:

$$M_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} m^2 \{(k_2 - k_1)_\alpha [\xi_{00} - 3\xi_{01}] + (k_3 - k_1)_\alpha (\xi_{00} - 3\xi_{10})\}. \quad (12.73)$$

As propriedades do objeto acima podem ser facilmente estabelecidas. Como tal:

$$(k_3 - k_1)_\mu M_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} (k_2 - k_1)_\alpha (k_3 - k_1)_\xi [m^2 (\xi_{00} - 3\xi_{01})], \quad (12.74)$$

também:

$$(k_1 - k_2)_\nu M_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\xi} (k_1 - k_2)_\xi (k_3 - k_1)_\alpha [m^2 (\xi_{00} - 3\xi_{10})], \quad (12.75)$$

e por fim:

$$(k_3 - k_2)_\lambda M_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\alpha\nu\xi} (k_2 - k_1)_\xi (k_3 - k_1)_\alpha [m^2 (\xi_{00} - 3\xi_{01}) + m^2 (\xi_{00} - 3\xi_{10})]. \quad (12.76)$$

Então utilizando eq.(12.35) e eq.(12.74) obteremos:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) 4\varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [m^2 (2\xi_{00} - 4\xi_{01}) + \Delta\varphi], \quad (12.77)$$

ou seja, comparando com eq.(12.15), obtivemos:

$$(k_3 - k_1)_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2m \{T_{\lambda\nu}^{APA}\} + \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) 4\varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi]. \quad (12.78)$$

Por sua vez, a partir de eq.(12.36) e eq.(12.75) ficamos com:

$$(k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 4 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [m^2 (-2\xi_{00} + 4\xi_{10}) - \Delta\varphi], \quad (12.79)$$

que comparando com eq.(12.16) nos revela a relação:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} &= 2m [T_{\lambda\mu}^{AAP}] \\ &\quad - 4 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi [\Delta\varphi] \end{aligned} \quad (12.80)$$

Aquela contração com $(k_3 - k_2)_\lambda$, utilizando eq.(12.37) e eq.(12.76), ficará:

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = \left(\frac{4i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\nu\xi} (k_2 - k_1)_\beta (k_3 - k_1)_\xi \left[2m^2 \xi_{00} - 4m^2 \xi_{10} - 4m^2 \xi_{01} \right], \quad (12.81)$$

ou seja, comparando com eq.(12.14), obtivemos

$$(k_3 - k_2)_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{AAA} = 2m \left[T_{\mu\nu}^{PAA} \right]. \quad (12.82)$$

Para completar nossa tarefa, colocamos os últimos resultados na forma de identidades de Ward. Assim:

$$\begin{aligned} \bullet p_\mu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} &= 2m \left[T_{\lambda\nu}^{A \rightarrow AP} \right] + & (12.83) \\ &+ 8 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\nu\beta\lambda\xi} p'_\beta p_\xi [\Delta\varphi] \\ \bullet p'_\nu T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} &= 2m \left[T_{\lambda\mu}^{A \rightarrow AP} \right] \\ &- 8 \left(\frac{i^2}{(4\pi)^2} \right) \varepsilon_{\mu\beta\lambda\xi} p'_\beta p_\xi [\Delta\varphi] \\ \bullet q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{A \rightarrow AA} &= 2m \left[T_{\mu\nu}^{P \rightarrow AA} \right]. & (12.84) \end{aligned}$$

Isto conclui os cálculos das funções de três pontos e suas Identidade de Ward. Restamos agora a tarefa de analisar os resultados aqui obtidos.

12.4 Conclusões e Discussões

A associação entre ambiguidades e violações de relações de simetria tem nas pseudo-amplitudes triangulares uma importância destacada. O fenômeno das anomalias representa um tópico importante em T.Q.C. Para estas amplitudes é um fato sabido e aceito que todas as Identidades de Ward não podem ser satisfeitas simultaneamente. O modo tradicional de estabelecer e justificar as violações de relações de simetria nestas amplitudes passa pela argumentação do caráter ambíguo devido à contagem de potências apresentar um grau superficial de divergência linear [1]. Deste modo, na impossibilidade de efetuarmos “shifts” no momento de integração, na presença de tais divergências, estas são admitidas ambíguas, que implica aceitarmos a perda da homogeneidade do espaço-tempo. No capítulo 8 nós refizemos uma investigação a respeito deste problema, seguindo uma das mais tradicionais referências da literatura deste assunto, porém tratando as integrais

divergentes de um modo alternativo, que contém aqueles resultados como uma interpretação particular. Naquela ocasião terminamos por concluir exatamente o contrário, ou seja, pela possibilidade de, ao exigir certas propriedades para uma eventual regularização, as relações de consistência, satisfazer todas as relações de simetria e simultaneamente evitarmos a presença de ambiguidades [2]. Do ponto de vista da investigação de Gerstein e Jackiw [3] tais conclusões poderiam indicar que nosso procedimento teria a propriedade de evitar as anomalias. Do nosso, entretanto, isso poderia indicar incompatibilidades entre as operações utilizadas no modo de análise da ref.[3] e as relações de consistência. Este tipo de preocupação foi confirmada nos estudos do capítulo 10 onde verificamos que algumas propriedades algébricas de integrais divergentes não podem valer simultaneamente às relações de consistência. Isto nos forçou a rever nossos procedimentos de cálculos em amplitudes com termos bilineares, do momento do “loop”, no numerador. Para os termos escalares induzimos a eliminação antes da introdução do sinal de integração. Para aquelas tensoriais as operações realizadas estarão necessariamente sob o sinal de integração e isto nos recomenda cuidados. Como parte disto mostramos no capítulo 11 que é possível gerarmos duas formas de solução. Estas corresponderão a expressões diferentes para as amplitudes mas não necessariamente levarão a violações das relações de simetria correspondentes como verificamos em todas as amplitudes investigadas no capítulo 11. Neste capítulo, entretanto, foi possível obter relações de simetria que dependem crucialmente do modo como estas integrais são calculadas. Uma das soluções leva a todas as Identidades de Ward satisfeitas, aquelas correspondentes a $\Delta\varphi = 0$, ao passo que outra leva a violações [4]. Chegamos então ao problema do momento: como interpretar estes resultados?

Primeiro é preciso ressaltar que ambas as soluções estão livres de ambiguidades associadas às escolhas dos momentos das linhas internas. A segunda observação importante é que tomando a solução para a qual $\Delta\varphi = 1/2$ obteremos exatamente os valores aceitos como corretos para os termos de violações nas amplitudes anômalas [5]. Isto nos mostra, de modo inequívoco, que a origem das anomalias não está associada ao caráter ambíguo. Nós não necessitamos de interpretações particulares para estabelecermos estes valores. Ao adotarmos a solução correspondente a $\Delta\varphi = 1/2$, em todos os lugares onde a integral $I_{\mu\nu}$ se fizer presente, teremos não apenas o valor desejado para os termos de violação mas todas as relações de simetria satisfeitas nas outras amplitudes dentro de um único tratamento que, é bom lembrar, é perfeitamente mapeável nos resultados da R.D. onde eles estão disponíveis. Assim se tomamos as anomalias, como um compromisso de alguma prescrição consistente, o que acabamos de obter deve ser considerado um incrível sucesso:

elas emergem naturalmente do nosso tratamento sem que tenhamos que, para obtê-las, violar uma simetria ainda mais básica: a homogeneidade do espaço-tempo.

Por outro lado dispomos da solução correspondente ao valor $\Delta\varphi = 0$ que nos permite satisfazer todas as Identidades de Ward. Estaríamos então eliminando as violações de relações de simetria da T.Q.C. e poderíamos ser tentados a ver isto como um fato extremamente positivo. Esta solução nos mostra que é possível construir amplitudes AVV e AAA satisfazendo todas as Identidade de Ward, o que aparentemente contraria uma concepção muito frequente de que a natureza das anomalias está na impossibilidade de ter isto realizado. Neste ponto de vista enquadra-se a análise de Gerstein e Jackiw e quase toda a literatura posterior. Como tal, praticamente a totalidade dos livros de T.Q.C. fazem uso deste tipo de abordagem para estabelecer o fenômeno das anomalias. A afirmação de que não é possível evitar as violações constitui-se erro absolutamente grosseiro. Para perceber a natureza correta das anomalias [6] é necessário considerar a forma explícita das funções de três pontos AVV e AAA ou em última instância a solução da integral $I_{\mu\nu}$:

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2) [(k - q)^2 - m^2] [(k - p)^2 - m^2]}. \quad (12.85)$$

O valor desta integral, a momentos externos nulos, é dado por:

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (12.86)$$

que, de acordo com a apropriada relação de consistência, deve ser igual a:

$$I_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} [I_{\log}(m^2)]. \quad (12.87)$$

A solução desta integral, por outro lado, foi escrita, no capítulo 11 como:

$$I_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [\varphi_0] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [p_\mu p_\nu \varphi_1 + q_\mu q_\nu \varphi_2 + p_\mu q_\nu \varphi_3 + q_\mu p_\nu \varphi_4]. \quad (12.88)$$

O valor disto a momento externo nulo fica:

$$I_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} [I_{\log}(m^2)] \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\Delta\varphi - \frac{1}{2} \right]. \quad (12.89)$$

Da expressão acima podemos ver claramente que o valor $\Delta\varphi = 0$, que nos forneceria todas as Identidades de Ward satisfeitas, introduziria um erro no valor da integral a momento nulo. O valor $1/2$, por outro lado, leva à violação das relações de simetria nas amplitudes anômalas, mas fornece o comportamento de baixas energias esperado [4]. Mais uma vez ressaltamos que as amplitudes não mais podem ser ambíguas pois exigimos as relações de consistência. O valor do termo de violação obtido é aquele bem conhecido [3]. Para o tratamento convencional ele é o termo de superfície e vem da integral divergente. No nosso tratamento ele é o valor em zero da integral e vem da parte finita.

A interpretação obtida em nosso tratamento fornece um ponto de vista claro e direto para o paradoxo de Sutherland [7], cuja essência está em afirmar a impossibilidade de, simultaneamente, ter as relações de simetria satisfeitas bem como o comportamento esperado em baixas energias.

Para finalizar, ressaltamos que o ponto de vista estabelecido, para a natureza das anomalias triangulares, surgiu de um tratamento universal, ou seja, de um procedimento aplicável a todos os tipos de amplitudes, com um único conjunto de regras, sem restrições de qualquer natureza. A última questão que buscávamos esclarecer para a definição deste procedimento unívoco, que inclui as relações de consistência, pode ser considerada satisfatoriamente esclarecida; Os estudos das funções de três pontos confirma a interpretação construída no capítulo 10. Assim teremos: Identidades de Ward satisfeitas, amplitudes livres de ambiguidades, unicidade e adequada descrição das anomalias. Nos próximos capítulos nós aplicaremos este procedimento no tratamento de duas novas situações; na presença de partícula de massa nula (QED) e ao nível dois “loops” ($\lambda\phi^4$).

Referências Bibliográficas

- [1] Jackiw, R. Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, New York (1972);
S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
T.P. Cheng and L.F. Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, New York (1984);
S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, (1996);
K. Huang, Quarks, Leptons and Gauge Fields, World Scientific (1992);
P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987) ;
- [2] O.A. Battistel, O.L. Battistel, (submetido para publicação);
- [3] I.S. Gerstein and R.Jackiw, Phys. Rev. 181 1955 (1969);
- [4] G. Dallabona, Tese de Mestrado UFMG (1998);
- [5] O.A. Battistel, G. Dallabona, B. Hiller and M.C. Nemes (submetido para publicação);
- [6] O.A. Battistel , Anomalias Triangulares em Regularização Implícita (em preparação);
- [7] Sutherland D.G. Nucl. Phys. B2, 433 (1966)
Veltman, M. Proc. R. Soc. A301, 107 (1967);

Capítulo 13

A Eletrodinâmica Quântica; Divergências Infravermelhas

13.1 Introdução

Nos estudos realizados até aqui, investigamos o aspecto divergência em amplitudes físicas vindas de soluções perturbativas de TQC. Isto foi feito de modo a buscar construir um procedimento consistente para as manipulações e cálculos envolvendo tais divergências. As regras para uma possível estratégia foram construídas de acordo com a necessidade de evitar comportamentos não-físicos, violações de unitariedade, ambiguidades e, por fim, garantir que as relações de simetria fossem preservadas. Qualquer um destes aspectos compromete decisivamente a possibilidade de utilização deste tipo de solução para TQC's na predição de observáveis físicos. Os testes efetuados em variadas situações nos dão confiança suficiente de que as regras estabelecidas constituem um procedimento consistente. A vantagem sobre aqueles tradicionais, reside no fato de não ser necessário explicitar (calcular) as integrais divergentes. Estamos livres de limites e expansões, operações sobre as quais não temos usualmente total controle.

A necessidade da adoção de alguma forma explícita de regularização foi completamente eliminada. As propriedades, que identificamos como essenciais às integrais divergentes, servem como critério para a caracterização de procedimentos de regularização [1]. Por outro lado, o que brota simultaneamente é que se alguma regularização satisfizer tais critérios ela se tornará desnecessária.

Neste capítulo nós faremos uma discussão dos aspectos relacionados às divergências na

QED, sob o ponto de vista da estratégia induzida nas investigações realizadas. Nossa motivação é dupla: Primeiramente devido à importância da QED para a credibilidade deste tipo de teoria e solução, ou seja, no contexto da renormalização, nenhum procedimento que deixe de exibir completa consistência no tratamento da QED tem chance de ser aceito ou aplicado em qualquer outra teoria ou modelo. Neste sentido esta primeira motivação deve ser encarada como um teste. Por outro lado, é bom lembrar, na QED temos a presença de uma partícula de massa zero. Isto remete-nos à cena questões específicas que, a rigor, não discutimos ainda; a possível presença de divergências infravermelhas simultaneamente às ultravioletas. Para cumprir estes dois objetivos, faremos uma discussão completa e detalhada ressaltando sempre que oportuno os aspectos relacionados a cada um deles.

Nós então começaremos por retomar brevemente a teoria em si e as propriedades de simetria das amplitudes ao nível um “loop”. Em seguida resumiremos o procedimento incluindo as conclusões retiradas nos capítulos anteriores, e então efetuaremos os cálculos amplitude por amplitude. A renormalização e o resumo das principais conclusões fecham este capítulo.

13.2 A teoria

A Eletrodinâmica Quântica, uma teoria de “gauge” abeliana com simetria $U(1)$, é representada pela lagrangiana [2]:

$$L = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\Psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \Psi + e\bar{\Psi} (\gamma_\mu A_\mu) \Psi \quad (13.1)$$

O primeiro termo representa a parte livre de um campo vetorial sem massa; o segundo é o termo de fixação de “gauge”, exigido pela quantização; o terceiro é a parte livre do campo de spin 1/2 de massa m e o último é o termo de acoplamento entre campo do fóton e o campo do elétron, compatível com a invariância de “gauge” e renormalizabilidade simultaneamente. As regras de Feynman são compostas pelos seguintes ingredientes:

1. Propagador do elétron

$$iS_F(p)_{\alpha\beta} = \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta}, \quad (13.2)$$

2. Propagador do fóton;

$$iD_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (13.3)$$

3. Vértice da interação;

$$(-ie\gamma_\mu)_{\alpha\beta}. \quad (13.4)$$

A teoria possui então cinco parâmetros:

1. A massa do elétron;
2. A constante de acoplamento;
3. A normalização do campo do fóton;
4. A normalização do campo do elétron;
5. O parâmetro de fixação de “gauge” ξ .

Obviamente nenhuma consequência dinâmica deve estar associada ao parâmetro ξ . Também as normalizações dos campos não são relevantes na determinação de observáveis físicos, pois quando eles são definidos, a partir das amplitudes, existem envolvidas normalizações específicas. Os primeiros dois, a massa do elétron e a constante de acoplamento, por sua vez, correspondem a parâmetros físicos de fato, desde que eles determinam outros observáveis físicos.

Nós agora podemos considerar a construção das amplitudes a partir das regras de Feynman, identificando aquelas divergentes.

13.3 Amplitudes divergentes básicas e relações de simetria.

A aplicação das regras de Feynman para a Q.E.D, permite-nos a construção das amplitudes correspondentes aos processos físicos pertinentes (capítulo 2). Isto nos leva a imediata identificação dos diagramas para os quais a contagem das potências revela a possibilidade de divergências. O conteúdo de simetria da teoria estabelece relações entre diagramas as quais devem ser satisfeitas qualquer que seja o método utilizado nas manipulações e cálculos. As amplitudes relevantes são:

1. Diagrama “tadpole”

A amplitude fermiônica de um ponto deve ser identicamente nula pois possui um número ímpar de índices vetoriais (acoplamento com um número ímpar de fótons externos). Isto é ditado pelo teorema de Furry [3]. Por outro lado a conservação da corrente vetorial (invariância de “gauge”) exige que a contração com o momento do fóton externo também se anule; uma Identidade de Ward:

$$q^\mu T_\mu = 0. \quad (13.5)$$

2. A auto-energia do Fóton.

A excitação de um par elétron-pósitron, $\Pi_{\mu\nu}(q)$ deve satisfazer às Identidades de Ward:

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0, \quad (13.6)$$

como exigido pela invariância de “gauge”.

3. A auto-Energia do elétron.

Esta amplitude esta relacionada a correção de vértice pela Identidade de Ward:

$$\frac{q^\mu \Lambda_\mu(p, p')}{e} = \Sigma(p) - \Sigma(p'), \quad (13.7)$$

onde $\Lambda_\mu(p, p')$ é a correção de vértice e $\Sigma(p)$ a auto-energia do elétron.

4. Processo de três fótons.

O processo correspondente ao diagrama triangular deve se anular identicamente, isto é:

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(p, p') + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(p', p) = 0. \quad (13.8)$$

Além disto ele deve satisfazer às Identidades de Ward:

$$\begin{cases} q^\lambda [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}] = 0 \\ p^\mu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}] = 0 \\ p'^\nu [T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}] = 0, \end{cases} \quad (13.9)$$

onde $T_{\mu\nu\lambda}$ é a amplitude correspondente ao diagrama e q , p e p' são os momentos externos, sendo q o inicial e p e p' os finais.

5. Processo de quatro fótons.

As possíveis divergências do diagrama correspondente ao espalhamento fóton-fóton

devem se cancelar, desde que é impossível construir um apropriado contratermo na lagrangiana original, sem destruir a renormalizabilidade. Além disto temos Identidades de Ward tais como:

$$p^\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu\eta}^{VVVV} + T_{\lambda\mu\eta\nu}^{VVVV} + T_{\lambda\nu\mu\eta}^{VVVV} + T_{\lambda\nu\eta\mu}^{VVVV} + T_{\lambda\eta\mu\nu}^{VVVV} + T_{\lambda\eta\nu\mu}^{VVVV} \right] = 0, \quad (13.10)$$

e assim por diante. Aqui $T_{\mu\nu\lambda\eta}^{VVVV}(p, p', q, q')$ é a amplitude correspondente ao diagrama e q, q', p e p' são os momentos externos.

Nós consideraremos cada uma das amplitudes e suas correspondentes Identidades de Ward para ilustrar a aplicação do método proposto.

13.4 O método de manipulações e cálculo de amplitudes contendo divergências.

O procedimento ou estratégia que adotaremos para as manipulações necessárias envolvendo as amplitudes divergentes, pode-se dizer, está fundamentado numa filosofia muito simples; não modificar as amplitudes, fornecidas diretamente pelas regras de Feynman, em nenhum passo intermediário como é usualmente feito em métodos de regularização tradicionais. Dito de outro modo, não assumir consequências específicas de métodos de regularização na determinação de uma amplitude física. Para tal, assumimos apenas a presença implícita de uma distribuição regularizadora da qual exigimos propriedades bastante gerais. A partir disto nos utilizamos de identidades, ao nível do integrando, para obter uma expressão adequada onde a parte dependente dos momentos externos esteja contida apenas em integrais finitas. Estas identidades poderiam ser expansões em Taylor como na teoria BPHZ [4]. Nós entretanto utilizamos momentos arbitrários na rotulação das linhas internas. Estes não possuem significado físico algum isoladamente e isto dificulta a interpretação por este ponto de vista.

A implementação matemática da prescrição que adotaremos, no que diz respeito à QED, pode ser colocada na forma de alguns passos a serem seguidos:

1. Depois de construir a amplitude, como ditada pelas regras de Feynman, tomar os traços de Dirac necessários e efetuar as operações envolvendo as matrizes γ . Então, por manipulações algébricas eliminar todos os fatores quadráticos no momento do “loop” via cancelamento de denominadores. Introduzir o sinal de integração e identificar as integrais divergentes obtidas .

2. Tomar cada uma das integrais divergentes individualmente e manipulá-las através de identidades ao nível do integrando a fim de obter uma soma de termos tais que as partes que dependem dos momentos externos sejam finitas. As outras serão integrais puramente divergentes. Estas manipulações são autorizadas pela adoção da distribuição regularizadora de modo implícito ou por, antes da introdução do sinal de integração, termos adotado uma representação adequada para os propagadores (eq.(10.103)).
3. As integrais finitas devem ser integradas sem restrições (limite de conexão).
4. As integrais divergentes remanescentes devem ser reduzidas às duas formas divergentes básicas:

$$\bullet I_{quad}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \quad (13.11)$$

$$\bullet I_{log}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}, \quad (13.12)$$

com a utilização de relações apropriadas entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência: as relações de consistência. É importante notar que apenas relações entre integrais divergentes são necessárias, não sendo o cálculo em si destas. Estas relações podem ser facilmente obtidas no contexto de integração dimensional (capítulo 10). Neste ponto o método difere do BPHZ.

A presença de duas massas diferentes na amplitude divergente nos oferece opções de escolha para manter nos objetos básicos divergentes; qualquer uma das massas ou uma escala arbitrária λ^2 . Estes objetos são entretanto relacionados através das relações:

$$\bullet I_{quad}(m^2) = I_{quad}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\lambda^2 - m^2 + m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right] \quad (13.13)$$

$$\bullet I_{log}(m^2) = I_{log}(\lambda^2) - \frac{i}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right), \quad (13.14)$$

onde m é uma das massas e λ^2 é um parâmetro arbitrário. Ele representará a escala de renormalização quando for o caso, ou uma massa da teoria se conveniente.

Expressando o conteúdo divergente nestas formas básicas temos a vantagem imediata de evitar expansões, limites ou outras operações duvidosas. As operações envolvidas são apenas manipulações algébricas, removendo assim qualquer ambiguidade do resultado

final. Estas manipulações são ainda especialmente úteis na verificação de Identidades de Ward ou limites de simetria, desde que são exatas.

No resultado final obtido pela presente prescrição é possível estabelecer uma conexão com outros procedimentos tais como Regularização Dimensional. A vantagem básica reside em uma formulação muito mais simples e intuitiva a qual não recorre a elementos estranhos tais como parâmetros de expansão artificiais. Isto seguramente constitui-se no maior apelo conceitual.

13.5 O Diagrama “Tadpole”

É muito instrutivo para os nossos propósitos, considerar inicialmente a função de um ponto fermiônica. Além de ser a mais simples é aquela com maior grau de divergência: cúbica. Com isso os ingredientes necessários para o tratamento, em termos de integrais divergentes, formam um conjunto amplo.

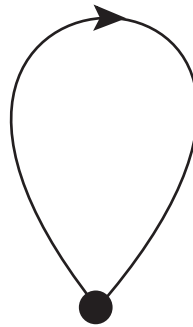


Figura 13.1: Função de Green de um ponto fermiônica.

Aplicando as regras de Feynman nós escrevemos:

$$t_\mu = (-e)Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[(\not{k} + \alpha \not{q}) - m]} \right\}. \quad (13.15)$$

Aqui α é um parâmetro arbitrário e q é o momento externo (do fóton que se acopla a T_μ). Reorganizando a eq.(13.15), teremos:

$$t_\mu = -eTr \left\{ \frac{\gamma_\mu [\not{k} + \alpha \not{q} + m]}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} \right\}. \quad (13.16)$$

Tomando o traço fica:

$$t_\mu = -4e \left\{ \frac{k_\mu}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} + \alpha q_\mu \frac{1}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} \right\}. \quad (13.17)$$

Para completar as operações estabelecidas, no passo número 1 da prescrição que estamos seguindo, basta introduzir o sinal de integração:

$$T_\mu = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} t_\mu, \quad (13.18)$$

e em seguida tratar cada uma das integrais divergentes, por identidades, de modo a escrevê-las como uma soma de termos tais que aqueles que dependem do momento externo sejam finitos. A integral cubicamente divergente pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} &= (-)\alpha q_\nu \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} \\ &+ 4\alpha^3 q_\nu q_\xi q_\beta \left\{ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\xi\beta} k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu k_\xi k_\beta}{(k^2 - m^2)^4} \right\} \\ &- 6\alpha^5 q^4 q_\nu \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\mu}{(k^2 - m^2)^4} \\ &+ \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-)[(\alpha q)^2 + 2\alpha q \cdot k]^4 k_\mu}{(k^2 - m^2)^4 [(k + \alpha q)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Da expressão acima retiramos apenas os termos ímpares. O subscrito Λ pode ser retirado devido ao caráter finito das duas últimas integrais (limite de conexão).

O próximo passo é então proceder a integração das integrais finitas obtidas. Ao fazermos isto percebemos um cancelamento exato entre as duas últimas integrais.

Em seguida, devemos reduzir as integrais tensoriais obtidas aos objetos básicos através das relações de consistência. Isto significa utilizarmos as relações:

$$\bullet \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^2} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \quad (13.20)$$

$$\bullet \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \quad (13.21)$$

$$\bullet \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu k_\beta k_\xi}{(k^2 - m^2)^4} = \frac{1}{24} [g_{\mu\nu} g_{\beta\xi} + g_{\mu\beta} g_{\nu\xi} + g_{\mu\xi} g_{\nu\beta}] \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (13.22)$$

com isto, as duas integrais logaritmicamente divergentes também se cancelam, restando, pela utilização da eq.(13.20):

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} = (-)\alpha p_{\mu} [I_{quad}(m^2)], \quad (13.23)$$

que assim assumiu a forma desejada.

Agora consideremos a integral quadraticamente divergente. Inicialmente ela pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)} \\ &+ q_{\mu} q_{\nu} \alpha^2 \left\{ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu} k_{\nu}}{[(k^2 - m^2)^3]} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \right\} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\alpha q)^4}{(k^2 - m^2)^3} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)[(\alpha q)^2 + 2\alpha q \cdot k]^3}{(k^2 - m^2)^3 [(k + \alpha q)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Devemos então proceder a integração dos termos finitos. Novamente é obtido um cancelamento mútuo das duas integrais. As integrais logaritmicamente divergentes, em consequência da eq.(13.21), também se cancelam. Restando então, o resultado na forma desejada:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} = [I_{quad}(m^2)] \quad (13.25)$$

De posse destes resultados, eq.(13.23) e eq.(13.25), nós os substituímos na expressão para T_{μ} , eq.(13.18):

$$T_{\mu} = -4e \left\{ (-)\alpha q_{\mu} [I_{quad}(m^2)] \right\} + 4\alpha q_{\mu} \left\{ I_{quad}(m^2) \right\}. \quad (13.26)$$

Portanto:

$$T_{\mu} = zero! \quad (13.27)$$

Como deveria ser. A outra propriedade necessária da amplitude T_{μ} a Identidade de Ward correspondente à conservação da corrente vetorial, $q^{\mu} T_{\mu} = 0$, decorre de imediato da eq.(13.27), ou seja:

$$q^{\mu} T_{\mu} = -4e \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{q \cdot k}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} + \alpha q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k + \alpha q)^2 - m^2]} \right\}, \quad (13.28)$$

será evidentemente nula.

Para que estes resultados tenham sido obtidos desempenham um papel crucial as relações de consistência. Os outros passos; operações algébricas ao nível do integrando e retirada dos termos ímpares são bastante gerais e válidas em qualquer regularização razoável. É importante que notemos que, sem as relações de consistência, o resultado poderia, para T_μ , ser ambíguo e não-nulo e a invariância de “gauge” seria conseqüentemente violada. Por fim nada mencionamos a respeito do papel da escala arbitrária nas operações realizadas. Se tivéssemos, nas identidades utilizadas para a separação de termos, introduzido uma escala arbitrária λ^2 o resultado identicamente nulo dependeria ainda da validade das relações de escala; eq.(13.13) e eq.(13.14) .

13.6 A Auto-Energia do Fóton (Tensor de Polarização)

Vamos agora considerar a contribuição de um “loop” para a auto-energia do fóton, o diagrama denominado tensor de polarização, fig.13.2.

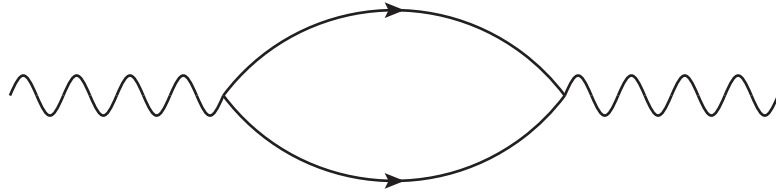


Figura 13.2: Função de Green fermiônica de dois pontos.

Aplicando as regras de Feynman a amplitude ficamos então com:

$$P_{\mu\nu} = -e^2 Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[k + \alpha \not{q} - m]} \gamma_\nu \frac{1}{[k + (\alpha - 1)\not{q} - m]} \right\}. \quad (13.29)$$

A fim de explicitá-la, primeiro reescrevemos isto como:

$$P_{\mu\nu} = -e^2 Tr \left\{ \frac{\gamma_\mu [k + \not{p} + m] \gamma_\nu [k + \not{p}' + m]}{[(k + p)^2 - m^2][(k + p')^2 - m^2]} \right\}, \quad (13.30)$$

onde introduzimos as definições

$$\begin{cases} p = \alpha q \\ p' = (\alpha - 1) q, \end{cases} \quad (13.31)$$

tal que a única combinação com significado físico é $p - p' = q$. O cálculo do traço nos fornece:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\mu(\not{k} + \not{p} + m)\gamma_\nu(\not{k} + \not{p}' + m)] &= 4\{2k_\mu k_\nu + k_\mu(p'_\nu + p_\nu) \\ &\quad + k_\nu(p'_\mu + p_\mu) + p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu\} \\ &\quad - 4g_{\mu\nu} \{k^2 + p \cdot k + p' \cdot k + p \cdot p' - m^2\}. \end{aligned} \quad (13.32)$$

No termo proporcional a $g_{\mu\nu}$ identificamos um fator quadrático escalar no momento de integração. A fim de eliminá-lo reescrevemos aquele termo pela combinação dos denominadores envolvidos, ou seja:

$$\begin{aligned} [k^2 + p \cdot k + p' \cdot k + p \cdot p' - m^2] &= \frac{1}{2} [(k+p)^2 - m^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(k+p')^2 - m^2] \\ &\quad - \frac{[p-p']^2}{2}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Com isso podemos introduzir o sinal de integração e assim escrever a função de dois pontos em termos de integrais de Feynman, neste caso, todas divergentes. Isto nos fornecerá:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} &= 4(-e^2) \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \right. \\ &\quad + (p'_\nu + p_\nu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \\ &\quad + (p'_\mu + p_\mu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \\ &\quad \left. + (p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \right\} \\ &\quad - 2g_{\mu\nu} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} \right. \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p')^2 - m^2]} \\ &\quad \left. - (p-p')^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \right\} \end{aligned} \quad (13.34)$$

O próximo passo então é tratar cada uma das integrais divergentes obtidas de acordo com a prescrição. Inicialmente tomemos aquela logaritmicamente divergente. Ela fica:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} = \left\{ [I_{log}(m^2)] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(m^2, m^2, q^2)] \right\}, \quad (13.35)$$

onde utilizamos o resultado eq.(8.70). Por sua vez a integral linearmente divergente fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \\ &= -\frac{(p'_{\mu} + p_{\mu})}{2} \left\{ I_{log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(m^2, m^2, (p-p')^2; m^2) \right\}, \end{aligned} \quad (13.36)$$

onde utilizamos a eq.(11.24).

Agora devemos considerar a integral quadraticamente divergente. O passo inicial é reescrevê-la de tal modo que a parte dependente dos momentos esteja em integrais finitas. Esquematizado isto na forma:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{[(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} = \left(I_{\mu\nu}^{div} \right)_{quad} + \left(I_{\mu\nu}^{div} \right)_{log} + \left(I_{\mu\nu}^{fin} \right), \quad (13.37)$$

onde:

$$\bullet \left(I_{\mu\nu}^{div} \right)_{quad} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^2} \quad (13.38)$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(I_{\mu\nu}^{div} \right)_{log} &= (-)(p^2 + p'^2) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^3} \\ &+ (p_{\xi}p_{\beta} + p'_{\xi}p'_{\beta} + p'_{\xi}p_{\beta}) \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}k_{\xi}k_{\beta}}{(k^2 - m^2)^4} \end{aligned} \quad (13.39)$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(I_{\mu\nu}^{fin} \right) &= (p^4 + p'^4 + p^2p'^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 + 2p \cdot k)^3 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k+p)^2 - m^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p'^2 + 2p' \cdot k)^3 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k+p')^2 - m^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 + 2p \cdot k)^2 (p'^2 + 2p' \cdot k) k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k+p)^2 - m^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 + 2p \cdot k) (p'^2 + 2p' \cdot k)^2 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k+p')^2 - m^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k)^2 (p'^2 + 2p' \cdot k)^2 k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - m^2)^4 [(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (13.40)$$

Nas integrais divergentes, utilizamos as relações de consistência eq.(13.20), eq.(13.21) e eq.(13.22), para ficarmos com:

$$\bullet \left(I_{\mu\nu}^{div} \right)_{quad} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[I_{quad}(m^2) \right] \quad (13.41)$$

$$\bullet \left(I_{\mu\nu}^{div} \right)_{log} = \left\{ -\frac{q^2}{12} g_{\mu\nu} + \alpha(\alpha-1) q_\mu q_\nu + \frac{q_\mu q_\nu}{3} \right\} I_{log}(m^2) \quad (13.42)$$

Quanto às integrais finitas, resolvidas sem problemas, nos levarão a expressão:

$$\begin{aligned} \bullet \left(I_{\mu\nu}^{fin} \right) &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ -[Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2)] q_\mu q_\nu \right. \\ &\quad - \left[\frac{Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)}{4} - Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] q^2 g_{\mu\nu} \\ &\quad + \alpha q_\mu [q_\nu Z_1(m^2, m^2, q^2; m^2)] + \alpha q_\nu [q_\mu Z_1(m^2, m^2, q^2; m^2)] \\ &\quad \left. + \alpha^2 q_\mu q_\nu [(-)Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] \right\} \end{aligned} \quad (13.43)$$

Reunindo então os resultados eq.(13.35), eq.(13.36), eq.(13.41), eq.(13.42) e eq.(13.43), substituindo-os na expressão para $\Pi_{\mu\nu}$, eq.(13.34), ficamos com:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} &= \left(\frac{8i(-e^2)}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \left[(-)Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) + \frac{Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)}{2} \right] q_\mu q_\nu \right. \\ &\quad \left. + \left[Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) - \frac{Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)}{4} \right] q^2 g_{\mu\nu} \right\} \\ &\quad + 4g_{\mu\nu} [I_{quad}(m^2)] - 4 \left[\frac{q^2}{6} g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{3} \right] I_{log}(m^2) \\ &\quad - 2g_{\mu\nu} \left\{ 2I_{quad}(m^2) + q^2 [I_{log}(m^2)] + \frac{i q^2}{(4\pi)^2} Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (13.44)$$

A forma acima, mantida de propósito para este fim, mostra a composição dos termos de modo a produzir um cancelamento para a parte quadraticamente divergente e uma forma invariante de “gauge” para a parte logaritmicamente divergente. Para simplificar ainda mais, consideramos a relação entre funções Z_k^s ;

$$Z_2(m^2, m^2, q^2; m^2) = -\frac{1}{18} - \frac{m^2}{3q^2} [Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)] + \frac{[Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)]}{3}. \quad (13.45)$$

Então finalmente podemos escrever $\Pi_{\mu\nu}$ na forma:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} = & \frac{4}{3}(-e^2)[q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \left\{ [I_{\log}(m^2)] \right. \\ & \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Este é um resultado muito importante para a Q.E.D. Nele podemos verificar de imediato as Identidades de Ward:

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu} = q^\nu \Pi_{\mu\nu} = 0, \quad (13.47)$$

que representam a invariância de “gauge” do tensor de polarização após os cálculos e manipulações. A divergência quadrática cancelou-se automaticamente. Além disto, ao expandirmos $Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2)$, para pequenos valores de q^2 :

$$Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \simeq (-) \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{q^2}{m^2} \right) + \frac{1}{60} \left(\frac{q^2}{m^2} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (13.48)$$

teremos para a parte finita:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{3} + \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} Z_0(m^2, m^2, q^2; m^2) \right] & \simeq \left[(-) \frac{(2m^2 + q^2)}{q^2} \left(\frac{q^2}{6m^2} + \frac{q^4}{60m^4} + \dots \right) + \frac{1}{3} \right] \\ & = -\frac{1}{5} \left[\frac{q^2}{m^2} \right]. \end{aligned} \quad (13.49)$$

O tensor de polarização, neste regime, torna-se:

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{4}{3}(-e^2)[q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu] \left\{ I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{1}{5} \left[\frac{q^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (13.50)$$

de onde podemos ver que a parte finita tem o comportamento correto para a correção ao propagador de uma partícula sem massa; ela se anula para $q^2 = 0$. Além disto o coeficiente do termos q^2 corresponde àquele de Uehling [5]. Historicamente a obtenção do tensor de polarização invariante de “gauge” e não-ambíguo sempre foi um dos problemas mais cruciais envolvendo regularizações. A estratégia utilizada é capaz de fornecer todas as características desejadas automaticamente.

Antes de passarmos para outra amplitude divergente é interessante considerarmos a verificação das Identidades de Ward relativas ao tensor de polarização do modo indireto, aquele que envolve apenas o cálculo da função de um ponto T_μ . Para isto primeiro

escrevemos:

$$q^\nu P_{\mu\nu} = (-e^2) Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \alpha \not{q} - m]} \not{q} \frac{1}{[\not{k} + (\alpha - 1)\not{q} - m]} \right\}, \quad (13.51)$$

depois inserimos no interior do traço a identidade:

$$\not{q} = [\not{k} + \alpha \not{q} - m] - [\not{k} + (\alpha - 1)\not{q} - m]. \quad (13.52)$$

Isto nos levará então à expressão:

$$\begin{aligned} q^\nu \Pi_{\mu\nu} &= (-e^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + (\alpha - 1)\not{q} - m]} \right\} \\ &\quad - (-e^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[\not{k} + \alpha \not{q} - m]} \right\}. \end{aligned} \quad (13.53)$$

As duas integrais correspondem exatamente a funções de um ponto com momentos $p = (\alpha - 1)q$ e $p' = \alpha q$, carregados pelos propagadores fermiônicos (ver fig.13.3). Nós já efetuamos o cálculo destas amplitudes e as obtivemos identicamente nulas. Portanto as manipulações e relações utilizadas naqueles cálculos são as mesmas que terminam por garantir as propriedades desejadas do cálculo de $\Pi_{\mu\nu}$.

$$(k_2 - k_1)^\mu \left[\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{k+k_1} \text{---} \\ \text{---} \xleftarrow{k+k_2} \text{---} \end{array} \right] = 0$$

Figura 13.3: Função de Green fermiônica de dois pontos.

13.7 Auto-Energia do Elétron

O diagrama de auto-energia do elétron, por excitação de um fóton, nos permite discutir um aspecto importante relacionado a divergências em amplitudes físicas, que são aquelas infravermelhas, associadas à presença de partículas de massa zero. Para fazer isto partimos da expressão fornecida pela aplicação das regras de Feynman;

$$\sigma(p) = (-e^2) \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{[\not{p}' - \not{k} - m]} \gamma_\nu \right\} \left\{ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(k+p)^\mu (k+p)^\nu}{(k+p)^2} \right\} \frac{1}{(k+p)^2}, \quad (13.54)$$

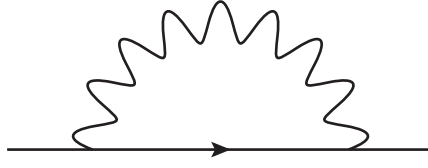


Figura 13.4: A auto-energia do elétron por excitação de um fóton

onde introduzimos os momentos auxiliares:

$$\begin{cases} p = \alpha q \\ p' = (1 - \alpha)q, \end{cases} \quad (13.55)$$

tal que a única combinação com significado físico, o momento do elétron, é dada por:

$$p + p' = q. \quad (13.56)$$

Para evoluir tomamos auxílio na relação:

$$[\gamma_\mu(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu] = \{(-)2(\not{q} - 2m) + 2\not{k} + 2\alpha\not{q}\}, \quad (13.57)$$

e também em:

$$\begin{aligned} (\not{k} + \not{p})[\not{p}' - \not{k} + m](\not{k} + \not{p}) &= m[(k+p)^2 - (k+p')^2](-\not{k} + \not{p}') \\ &\quad + [2(p' - k) \cdot (p + k)](\not{k} + \not{p}). \end{aligned} \quad (13.58)$$

O termo acima mostra a presença de um fator quadrático no momento a ser integrado. Para eliminá-lo fazemos uso da identidade:

$$[2(p' - k) \cdot (p + k)] = \{[(p + p')^2 - m^2] - [(p + k)^2] - [(k - p')^2 - m^2]\} \quad (13.59)$$

O resultado eq.(13.58) pode então ser reorganizado para:

$$\begin{aligned} \{(\not{k} + \not{p})[\not{p}' - \not{k} + m](\not{k} + \not{p})\} &= (m - \not{q})[(p + k)^2] + (q^2 - m^2)(\not{k} + \not{p}) \\ &\quad - (\not{k} + \not{p})[(k - p')^2 - m^2]. \end{aligned} \quad (13.60)$$

A substituição da eq.(13.57) e eq.(13.60) na expressão para a auto-energia fica, após a introdução do sinal de integração:

$$\frac{\Sigma(p)}{(-e^2)} = (-)2(\not{p}' - 2m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2][(p'-k)^2 - m^2]}$$

$$\begin{aligned}
& +2\gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+p)^2 - \mu^2][(p'-k)^2 - m^2]} \\
& +(\xi - 1) \left\{ (m - \not{p}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2][(p'-k)^2 - m^2]} \right. \\
& +(-)\not{p} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2]^2} \\
& -\gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+p)^2 - \mu^2]^2} \\
& + (q^2 - m^2)\not{p} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2]^2[(p'-k)^2 - m^2]} \\
& \left. + (q^2 - m^2)\gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(k+p)^2 - \mu^2]^2[(p'-k)^2 - m^2]} \right\}. \quad (13.61)
\end{aligned}$$

Nas integrais acima, como é feito convencionalmente, onde aparece o propagador do fóton, introduzimos uma massa fictícia μ^2 . Isto é feito para evitar a discussão simultânea de divergências ultravioletas e infravermelhas, que é uma questão problemática para todos os métodos convencionais de regularização, inclusive Regularização Dimensional [6]. Ao final devemos tomar $\mu^2 \rightarrow 0$. Eventuais divergências infravermelhas poderão se manifestar em formas divergentes neste limite como por exemplo $\ln(\mu^2)$. No método que estamos utilizando este problema é evitado automaticamente e naturalmente, pois as integrais contendo divergências ultravioletas não conterão divergências infravermelhas e vice-versa como veremos adiante.

A expressão eq.(13.61) para a auto-energia corresponde ao primeiro passo; escrever a amplitude como uma soma de integrais divergentes (ou não). O próximo passo é tratar cada uma delas de acordo com a prescrição. No caso atual temos, em relação aos cálculos já efetuados, a situação nova de massas diferentes presentes nas integrais divergentes. É preciso então escolher, nas separações, uma escala para caracterizar as divergências básicas (e conseqüentemente as partes finitas). Uma solução, algebricamente simplificadora, é escolher a massa do elétron como escala já que a do fóton terá que ser eliminada ao final e adotar uma escala arbitrária λ^2 tornaria os cálculos desnecessariamente complicados. De qualquer modo, para passos intermediários, qualquer escolha é igualmente boa.

Nós iniciamos com a integral logaritmicamente divergente do primeiro termo;

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2][(k-p)^2 - m^2]} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-m^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)}{(k^2 - m^2)^2 [(k+p)^2 - \mu^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p'^2 - 2p' \cdot k)}{(k^2 - m^2) [(k+p)^2 - \mu^2] [(k-p')^2 - m^2]}. \quad (13.62)
\end{aligned}$$

Notemos na expressão acima a separação das divergências ultravioletas e infravermelhas. Procedendo a integração dos termos finitos obtemos:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2] [(k-p')^2 - m^2]} = \left\{ I_{log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)Z_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)] \right\}. \quad (13.63)$$

Prosseguindo, aplicamos o mesmo procedimento para a integral linearmente divergente:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(k+p)^2 - \mu^2] [(k-p')^2 - m^2]} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p' \cdot k)k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} - \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(2p \cdot k)k_{\mu}}{(k^2 - m^2)} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3 [(p+k)^2 - \mu^2]} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p'^2 - 2p' \cdot k)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3 [(p'+k)^2 - m^2]} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p'^2 - 2p' \cdot k)(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)k_{\mu}}{(k^2 - m^2) [(p+k)^2 - \mu^2] [(p'-k)^2 - m^2]}. \quad (13.64)
\end{aligned}$$

As duas primeiras podem ser reduzidas a $I_{log}(m^2)$ com a utilização da relação de consistência eq.(13.21):

$$\frac{(p' - p)_{\alpha}}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\alpha}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} = \frac{(-)q_{\mu}}{2} (2\alpha - 1) I_{log}(m^2). \quad (13.65)$$

As integrais finitas, por sua vez, podem ser integradas sem problemas. Com isso a integral linearmente divergente pode ser escrita na forma desejada:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(p+k)^2 - \mu^2] [(p'-k)^2 - m^2]} &= \frac{(1 - 2\alpha)}{2} q_{\mu} [I_{log}(m^2)] \\
&+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\alpha q_{\mu} Z_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)] + \\
&+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(-)q_{\mu} Z_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)]. \quad (13.66)
\end{aligned}$$

Passemos para as integrais do segundo termo da auto-energia, aquele dependente do parâmetro de “gauge”. Primeiro consideramos:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 - \mu^2]^2} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-)2(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)}{(k^2 - m^2)^2[(p+k)^2 - \mu^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2}{(k^2 - m^2)^2[(p+k)^2 - \mu^2]^2}. \quad (13.67)
\end{aligned}$$

O resultado acima poderia ser facilmente antecipado. É interessante obtê-lo resolvendo as integrais finitas. Assim:

$$\bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)}{(k^2 - m^2)^2[(p+k)^2 - \mu^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(m^2, \mu^2, p^2; m^2)] \quad (13.68)$$

$$\bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2}{(k^2 - m^2)^2[(p+k)^2 - \mu^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[2Z_0(m^2, \mu^2, p^2; m^2) + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (13.69)$$

A substituição destes resultados nos levará a:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 - \mu^2]^2} & = \left\{ I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\} \\
& = [I_{\log}(\mu^2)]. \quad (13.70)
\end{aligned}$$

Visto isoladamente, teríamos neste termo uma divergência infravermelha.

Agora, a integral linearmente divergente, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(p+k)^2 - \mu^2]^2} & = (-)p_{\alpha} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\alpha}k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3[(p+k)^2 - \mu^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2[(p+k)^2 - \mu^2]^2}. \quad (13.71)
\end{aligned}$$

O cálculo das integrais finitas nos fornecerá:

$$\bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^3[(p+k)^2 - \mu^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [p_{\mu} Z_1(m^2, \mu^2, p^2; m^2)] \quad (13.72)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 + 2p \cdot k - \mu^2 + m^2)^2 k_{\mu}}{(k^2 - m^2)^2[(p+k)^2 - \mu^2]^2} & = \\
& \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(-)2p_{\mu} Z_1(m^2, \mu^2, p^2; m^2) + \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right]. \quad (13.73)
\end{aligned}$$

Com a relação de consistência eq.(13.21), ficaremos com:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(p+k)^2 - \mu^2]^2} &= \left\{ (-)p_{\mu} \left[I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right\} \\
&= (-)p_{\mu} [I_{\log}(\mu^2)]. \tag{13.74}
\end{aligned}$$

E, novamente, como era esperado, teríamos divergência infravermelha.

Para completar basta agora considerarmos as duas últimas integrais de eq.(13.61), ambas finitas. A primeira fica:

$$\bullet \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 - \mu^2]^2 [(p'-k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(-) \frac{Y_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right] \tag{13.75}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}}{[(p+k)^2 - \mu^2]^2 [(p'-k)^2 - m^2]} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ q_{\mu} \left[(-) \frac{Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + p_{\mu} \left[\frac{Y_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right] \right\}. \tag{13.76}
\end{aligned}$$

Reunindo eq.(13.63), eq.(13.66), eq.(13.70), eq.(13.74), eq.(13.75) e eq.(13.76) e substituindo em eq.(13.61), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma(p)}{(ie)^2} &= \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (\not{q} - 2m) Z_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. - \not{q} [Z_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)] \right\} \\
&\quad - (\not{q} - 4m) \left\{ I_{\log}(m^2) \right\} \\
&\quad + (\xi - 1) \left\{ (m - \not{q}) I_{\log}(m^2) \right. \\
&\quad \left. - (m - \not{q}) \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(\mu^2, m^2, q^2; m^2) \right. \\
&\quad \left. - (q^2 - m^2) \not{q} \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right\}. \tag{13.77}
\end{aligned}$$

Finalmente, para obter o resultado desejado, nós necessitamos eliminar a massa fictícia introduzida, no início dos cálculos, para o fóton. Isto é feito, na linguagem que adotamos, tomando as expressões correspondentes para as funções $Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2)$, desenvolvidas na capítulo 3 para estes propósitos. Ou seja, basta trocar:

$$\begin{cases} Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \longrightarrow Z_k(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \\ Y_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2) \longrightarrow Y_k(0, \lambda_2^2, q^2; \lambda^2). \end{cases} \tag{13.78}$$

As funções correspondentes são bem comportadas nesta situação (cap. 3) e isto quer dizer que, pelo menos para esta amplitude, as divergências infravermelhas não afetam a Q.E.D.

Um aspecto adicional interessante é a presença do termo:

$$\left\{ (q^2 - m^2) \not{q} \frac{Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)}{m^2} \right\}. \quad (13.79)$$

Como sabemos a função $Y_1(\mu^2, m^2, q^2; m^2)$ não está definida no ponto $q^2 = (m + \mu)^2$. O coeficiente se anula para $q^2 = m^2$. Assim qualquer valor de μ^2 diferente de zero promoverá um comportamento não-físico com violação de unitariedade (parte imaginária infinita). A amplitude é consistente com a teoria original, onde o fóton tem massa nula. Um tratamento de amplitudes contendo divergências não tem apenas o aspecto divergência ultravioleta como preocupação.

13.8 Correção de Vértice.

Prosseguindo o tratamento das amplitudes básicas divergentes, nós tomamos a correção de vértice, fig.(13.5).

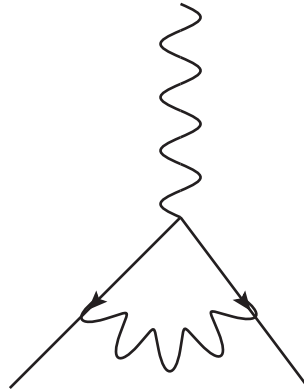


Figura 13.5: A correção de vértice.

A aplicação das regras de Feynman nos leva a escrever: Aqui, como fizemos nos casos anteriores, podemos utilizar momentos arbitrários:

$$\lambda^\mu(p, p') = (-ie^3) \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[k + k_3 - m]} \gamma^\mu \frac{1}{[k + k_2 - m]} \gamma_\lambda \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{[(k+k_1)^2]} + (\xi - 1) \frac{(k+k_1)_\mu (k+k_1)_\nu}{(k+k_1)^2} \right\}. \quad (13.80)$$

$$\begin{cases} k_1 = \alpha p + \beta p' \\ k_2 = (1 - \alpha) p - \beta p' \\ k_3 = -\alpha p + (1 - \beta) p'. \end{cases} \quad (13.81)$$

Estes satisfazem às relações:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = p \\ k_1 + k_3 = p' \\ k_3 - k_2 = q. \end{cases} \quad (13.82)$$

Os parâmetros α e β representam as arbitrariedades envolvidas nas escolhas dos momentos das linhas internas.

A amplitude $\lambda^\mu(p, p')$ tem contagem de potências, para o momento a ser integrado, que indica a presença de divergências no máximo logarítmicas. Sendo assim justifica-se um “shift” impune de modo a eliminar α e β . Com isto teremos uma simplificação imediata e podemos reorganizar para:

$$\lambda^\mu(p, p') = \lambda_1^\mu(p, p') + (\xi - 1)\lambda_2^\mu(p, p'), \quad (13.83)$$

onde definimos:

$$\bullet \lambda_1^\mu(p, p') = (-e^3) \frac{1}{k^2} Tr \left\{ \frac{\gamma_\nu [\not{p}' - \not{k} + m] \gamma_\mu [\not{p} - \not{k} + m] \gamma^\nu}{[(k-p')^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right\} \quad (13.84)$$

$$\bullet \lambda_2^\mu(p, p') = (-e^3) \frac{1}{[k^2]^2} Tr \left\{ \frac{\not{k} [\not{p}' - \not{k} + m] \gamma_\mu [\not{k} - \not{p} + m] \not{k}}{[(k-p')^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right\}. \quad (13.85)$$

Progrediremos nos nossos cálculos primeiro considerado λ_1^μ . Nós começamos por reescrevê-lo, de um modo mais conveniente, fazendo:

$$\begin{aligned} [\gamma_\nu [\not{p}' - \not{k} + m] \gamma_\mu [\not{p} - \not{k} + m] \gamma^\nu] &= \left\{ 2k^2 \gamma_\mu - 2m^2 \gamma_\mu - 4\not{k} k_\mu + \right. \\ &\quad \left. - 4m (2k_\mu - p'_\mu - p_\mu) \right. \\ &\quad \left. + 2 [\not{k} \gamma_\mu \not{p}' + \not{p} \gamma_\mu \not{k} - \not{p} \gamma_\mu \not{p}'] \right\}. \end{aligned} \quad (13.86)$$

Nestes termos identificamos um fator quadrático, que devemos eliminar, para então obter:

$$\frac{\Lambda_1^\mu(p, p')}{(-ie^3)} = \left\{ 2\gamma_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -4\gamma_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\mu}{[k^2][(p-k)^2 - m^2]^2[(p'-k)^2 - m^2]} \\
& + [2\gamma_\alpha \gamma_\mu p'^\mu + 2p'\gamma_\mu \gamma_\alpha - 8mg_{\mu\alpha}] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[k^2][(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} \\
& - [2p'\gamma_\mu p'^\mu + 2m^2 \gamma_\mu p'^\mu - 4m(p+p')_\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2][(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} \Big\} \quad (13.87)
\end{aligned}$$

Uma rápida inspeção nos revela que apenas as duas primeiras possuem divergências e necessitam ser tratadas sob o ponto de vista da nossa estratégia. As outras podem ser integradas sem restrições. Nós então introduzimos, como antes, uma massa μ^2 para o fóton a fim de evitar as divergências infravermelhas e providenciamos as soluções.

A primeira integral que consideramos é a última de eq.(13.87), a qual fica:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\xi_{00}]. \quad (13.88)$$

A notação introduzida, muito conveniente para integrais com três propagadores, vem da definição geral:

$$\xi_{nm}(\mu^2, p'^2; m^2; p^2; m^2) = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{z^n y^m dy}{Q(y, z)}, \quad (13.89)$$

com:

$$\begin{aligned}
Q(y, z) &= p'^2 y(1-y) + p^2 z(1-z) - 2p \cdot p' yz \\
&+ (\mu^2 - m^2) y + (\mu^2 - m^2) z - \mu^2. \quad (13.90)
\end{aligned}$$

As funções ξ_{nm} podem ser reduzidas a funções $Z_k(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$, $Z_k(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)$, $Z_k(m^2, m^2, (p-p')^2; m^2)$ e ξ_{00} por adequadas manipulações. Ainda que ξ_{00} possa ser escrita em termos de funções Z_k , com valores negativos para o índice k , nós a manteremos como estrutura básica no que se seguirá para evitar complexidade algébrica desnecessária.

A outra integral finita fica:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[k^2 - \mu^2][(p-k)^2 - m^2][(p'-k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [p_\alpha \xi_{10} + p'_\alpha \xi_{01}], \quad (13.91)$$

onde temos as formas explícitas:

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{01} &= \frac{p^2 p'^2}{[p^2 p'^2 - (p \cdot p')^2]} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot p')}{2p^2 p'^2} [-Z_0(m^2, m^2, (p-p')^2; m^2)] \right. \\
&+ \frac{1}{2p'^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] - \frac{p \cdot p'}{2p^2 p'^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)] \\
&+ \left. \left[\frac{(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2p'^2} - \frac{(p \cdot p')(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2 p'^2} \right] \right\} \quad (13.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{10} = & \frac{p^2 p'^2}{[p^2 p'^2 - (p \cdot p')^2]} \left\{ \frac{(p'^2 - p \cdot p')}{2p^2 p'^2} [-Z_0(m^2, m^2, (p-p')^2; m^2)] \right. \\
& + \frac{1}{2p^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)] - \frac{p \cdot p'}{2p^2 p'^2} [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] \\
& \left. + \left[\frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot p')(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2 p'^2} \right] \right\} \quad (13.93)
\end{aligned}$$

Esta decomposição é importante pois torna imediata a retirada da massa μ^2 ao final dos cálculos, permite uma sistematização total dos resultados e ainda facilita enormemente a verificação das eventuais Identidades de Ward.

Agora consideramos a integral divergente com três propagadores. Nós a colocamos na forma:

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2) [(k-p)^2 - m^2] [(k-p')^2 - m^2]} = \\
= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} \\
- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3 [(p-k)^2 - m^2]} \\
- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p'^2 - 2p' \cdot k + \mu^2 + m^2)^2 k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p'-k)^2 - m^2] [(p-k)^2 - \mu^2]} \quad (13.94)
\end{aligned}$$

A parte divergente pode ser colocada na forma:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} = \frac{g_{\mu\nu}}{4} \left\{ I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right\}, \quad (13.95)$$

onde utilizamos a adequada relação de consistência e em seguida a relação de escala eq.(13.14) para evitarmos problemas no limite $\mu^2 \rightarrow 0$. A primeira das integrais finitas de eq.(13.94), pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2) k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3 [(p-k)^2 - \mu^2]} = & \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right. \\
& - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \\
& \left. + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2} \left[\frac{Y_2(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right] \right\}. \quad (13.96)
\end{aligned}$$

Na expressão acima os fatores logarítmicos apareceram como consequência da mudança de escala de μ^2 para m^2 pois a escolha feita na separação eq.(13.94) faz com que a mesma

escala adotada para a parte divergente surja naturalmente na parte finita. Isso se repetirá na outra integral finita de eq.(13.94):

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(p'^2 - 2p' \cdot k + \mu^2 - m^2)k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p' - k)^2 - m^2] [(p - k)^2 - \mu^2]} \\
&= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \right. \\
&\quad - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \\
&\quad \left. - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[\frac{Y_2(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right] \right\} \\
&\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ p'_\mu p'_\nu [\xi_{02}] + p_\mu p_\nu [\xi_{20}] \right. \\
&\quad \left. + (p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu) [\xi_{11}] - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [\eta_{00}] \right\}. \tag{13.97}
\end{aligned}$$

Em termos das estruturas básicas adotadas,

$$\begin{aligned}
\bullet \eta_{00} &= \left[\frac{Z_0(m^2, m^2, (p - p')^2; m^2)}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} + \mu^2 \xi_{00} \right] \\
&\quad + \frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{10} + \frac{(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{01}. \tag{13.98}
\end{aligned}$$

Para ξ_{11} temos duas expressões;

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{11} &= \frac{p^2 p'^2}{[p^2 p'^2 - (p \cdot p')^2]} \left\{ \frac{(p'^2 - p \cdot p')}{2p^2 p'^2} \left[-Z_1(m^2, m^2, (p - p')^2; m^2) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2p^2} \left[Z_1(\mu^2, m^2, p'^2; m^2) \right] - \frac{p \cdot p'}{p^2 p'^2} [\eta_{00}] \\
&\quad \left. + \left[\frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot p')(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2 p'^2} \right] \xi_{01} \right\} \tag{13.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \xi_{11} &= \frac{p^2 p'^2}{[p^2 p'^2 - (p \cdot p')^2]} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot p')}{2p^2 p'^2} \left[-Z_1(m^2, m^2, (p - p')^2; m^2) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2p'^2} \left[Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2) \right] - \frac{p \cdot p'}{p^2 p'^2} [\eta_{00}] \\
&\quad \left. + \left[\frac{(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2p'^2} - \frac{(p \cdot p')(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2 p'^2} \right] \xi_{10} \right\}. \tag{13.100}
\end{aligned}$$

Agora, para a função ξ_{20} , teremos:

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{20} = & \frac{p^2 p'^2}{[p^2 p'^2 - (p \cdot p')^2]} \left\{ \frac{(p'^2 - p \cdot p')}{2p^2 p'^2} [-Z_1(m^2, m^2, (p - p')^2; m^2)] \right. \\ & - \frac{p \cdot p'}{2p^2 p'^2} [Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] + \frac{1}{2p^2} [\eta_{00}] \\ & \left. + \left[\frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2} - \frac{(p \cdot p')(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2 p'^2} \right] \xi_{10} \right\}, \end{aligned} \quad (13.101)$$

e finalmente:

$$\begin{aligned} \bullet \xi_{02} = & \frac{p^2 p'^2}{[p^2 p'^2 - (p \cdot p')^2]} \left\{ \frac{(p^2 - p \cdot p')}{2p^2 p'^2} [-Z_1(m^2, m^2, (p - p')^2; m^2)] \right. \\ & + \frac{(p \cdot p')}{2p'^2 p^2} [-Z_1(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)] + \frac{1}{2p'^2} [\eta_{00}] \\ & \left. + \left[\frac{(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2p'^2} - \frac{p \cdot p'(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2p^2 p'^2} \right] (\xi_{10}) \right\}. \end{aligned} \quad (13.102)$$

Reunindo os resultados eq.(13.95), eq.(13.96) e eq.(13.97) teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - \mu^2]} = & \frac{g_{\mu\nu}}{4} [I_{\log}(m^2)] \\ & + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ p_{\mu} p_{\nu} [\xi_{20}] + p'_{\mu} p'_{\nu} [\xi_{02}] \right. \\ & \left. + (p_{\mu} p'_{\nu} + p'_{\mu} p_{\nu}) [\xi_{11}] - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [\eta_{00}] \right\}. \end{aligned} \quad (13.103)$$

O resultado desejado, uma expressão para $\Lambda_1^{\mu}(p, p')$, é então obtido substituindo: eq.(13.88), eq.(13.35), eq.(13.91), e eq.(13.103) na eq.(13.87):

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_1^{\mu}(p, p')}{(-e)^3} = & \gamma_{\mu} [I_{\log}(m^2)] + \\ & + \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \gamma_{\mu} \eta_{00} - \gamma_{\mu} Z_0(m^2, m^2, (p - p')^2; m^2) + \right. \\ & - 2\not{p} p_{\mu} \xi_{20} - 2\not{p}' p'_{\mu} \xi_{02} - 2\not{p} p'_{\mu} \xi_{11} - 2\not{p}' p_{\mu} \xi_{11} + \\ & + (\not{p} \gamma_{\mu} \not{p} + \not{p} \gamma_{\mu} \not{p}' - 4m p_{\mu}) \xi_{10} + \\ & + (\not{p}' \gamma_{\mu} \not{p}' + \not{p}' \gamma_{\mu} \not{p} - 4m p'_{\mu}) \xi_{01} + \\ & \left. + (2m(p + p')_{\mu} - \not{p} \gamma_{\mu} \not{p}' - m^2 \gamma_{\mu}) \xi_{00} \right\} \end{aligned} \quad (13.104)$$

Agora nos voltamos para o termo de gauge $\lambda_2^\mu(p, p')$. O primeiro passo é reorganizar o numerador para a forma:

$$\begin{aligned}
\{k(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma_\mu[(\not{p}' - \not{k} + m)\not{k}]\} &= \{[(p-k)^2 - m^2][(k-p')^2 - m^2]\gamma_\mu \\
&+ [(k-p')^2 - m^2][\gamma_\mu \not{k}(\not{p}' - m)] \\
&+ [(p-k)^2 - m^2][(\not{p}' - m)\not{k}\gamma_\mu] \\
&- [(p'-k)^2 - m^2][(p^2 - m^2)\gamma_\mu] \\
&- [(p-k)^2 - m^2][(p'^2 - m^2)\gamma_\mu] \\
&+ (p^2 - m^2)[-(\not{p}' - m)\not{k}\gamma_\mu] \\
&+ (p'^2 - m^2)[-\gamma_\mu \not{k}(\not{p}' - m)] \\
&+ (p^2 - m^2)(p'^2 - m^2)\gamma_\mu \\
&+ 2k_\mu(\not{p}' - m)\not{k}(\not{p}' - m) \\
&- [k^2][(\not{p}' - m)\gamma_\mu(\not{p}' - m)]\}. \tag{13.105}
\end{aligned}$$

Esta reorganização, ao voltar para eq.(13.85), feitos os devidos cancelamentos, permite-nos, ao colocar o sinal de integração, ter o termo Λ_2^μ em termos de integrais. Explicitamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\Lambda_2^\mu(p, p')}{-e^3} &= \left\{ \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2]^2} \right. \\
&- [(p'^2 - m^2)\gamma_\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2]^2[(p' - k)^2 - m^2]} + \\
&- [(p^2 - m^2)\gamma_\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2]^2[(p - k)^2 - m^2]} + \\
&+ [(\not{p}' - m)\gamma_\alpha\gamma_\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[k^2]^2[(p' - k)^2 - m^2]} \\
&+ [\gamma_\mu\gamma_\alpha(\not{p}' - m)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[k^2]^2[(p - k)^2 - m^2]} \\
&- [(\not{p}' - m)\gamma_\mu(\not{p}' - m)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2][p - k]^2[(p' - k)^2 - m^2]} \\
&- [(p^2 - m^2)(\not{p}' - m)\gamma_\alpha\gamma_\mu + (p'^2 - m^2)\gamma_\mu\gamma_\alpha(\not{p}' - m)] X \\
&X \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha}{[k^2]^2[(p - k)^2 - m^2][(p' - k)^2 - m^2]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [2(p' - m)\gamma_\alpha(p' - m)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\mu}{[k^2]^2 [(p - k)^2 - m^2][(p' - k)^2 - m^2]} \\
& + [(p^2 - m^2)(p'^2 - m^2)\gamma_\mu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2]^2 [(p - k)^2 - m^2][(p' - k)^2 - m^2]} \quad (13.106)
\end{aligned}$$

Para solucionar as integrais, introduzimos, como de costume, uma massa fictícia para o fóton. Apenas a primeira será divergente e nós a escrevemos como:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} = I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right), \quad (13.107)$$

onde introduzimos a relação de escala eq.(13.14).

Agora as integrais finitas. A primeira que aparece na expressão para Λ_2^μ , ao ser integrada, admite a forma:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\frac{Y_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} \right]. \quad (13.108)$$

O segundo tipo de integral, por sua vez, fica:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p - k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \frac{-Y_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)}{m^2} p_\alpha \right\}. \quad (13.109)$$

A terceira forma que, apareceu no cálculo de $\Lambda_1^\mu(p, p')$, pode ser identificada com $\xi_{00}(\mu^2, p'^2, m^2, p^2, m^2)$.

As três últimas restantes são integrais com quatro denominadores. São casos particulares das funções ξ_{nml} definidas no capítulo 3. Elas podem facilmente ser escritas em termos de derivadas das funções ξ_{nm} . Como tal, a mais simples delas fica:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]} & = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [\sigma_{00}] \\
& = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \xi_{00}. \quad (13.110)
\end{aligned}$$

Aqui, introduzimos as estruturas [7]:

$$\sigma_{nm} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{z^n y^m (1 - y - z) dy}{[Q(y, z)]^2}, \quad (13.111)$$

que podem ser relacionados às ξ_{nm} por:

$$\sigma_{nm} = \frac{\partial}{\partial \mu^2} (\xi_{nm}). \quad (13.112)$$

Então, dando o mesmo tratamento às outras duas integrais teremos:

$$\bullet \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p' - k)^2 - m^2] [(p - k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \{p'_\mu [\sigma_{01}] + p_\mu [\sigma_{10}]\} \quad (13.113)$$

$$\bullet \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^2 [(p' - k)^2 - m^2] [(p - k)^2 - m^2]} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \{p'_\mu p'_\nu [\sigma_{20}] + p_\mu p_\nu [\sigma_{02}] + (p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu) [\sigma_{11}] - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[\frac{\partial \eta_{00}}{\partial \mu^2} \right]\}. \quad (13.114)$$

É interessante notar que, para uma forma explícita das funções σ_{nm} basta considerar as relações entre as funções Y'^s e as derivadas de funções Z'^s . Deste modo todas estas serão escritas em termos de funções Z'^s , Y'^s , ξ_{00} e σ_{00} . De posse destes resultados podemos explicitar $\Lambda_2^\mu(p, p')$. Ela fica:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_2^\mu(p, p')}{(-e)^3} &= \gamma_\mu \left[I_{\log}(m^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] + \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(p' - m) \gamma_\mu (p - m) (-\xi_{00}) \right] + \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \{ (p^2 - m^2) \gamma_\mu [Z_0(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] + \\ &+ (p'^2 - m^2) \gamma_\mu [Z_0(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)] + \\ &+ (p' - m) p' \gamma_\mu [-Z_1(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)] + \\ &+ \gamma_\mu p (p - m) [-Z_1(\mu^2, m^2, p^2; m^2)] + \\ &- (p^2 - m^2) (p' - m) p' \gamma_\mu [\xi_{10}] + \\ &- (p'^2 - m^2) \gamma_\mu p' (p - m) [\xi_{01}] + \\ &+ (p'^2 - m^2) (p^2 - m^2) \gamma_\mu [\xi_{00}] + \\ &+ 2 (p' - m) p' (p - m) p'_\mu [\xi_{02}] + \\ &+ 2 (p' - m) p (p - m) p_\mu [\xi_{20}] + \\ &+ 2 (p' - m) p (p - m) p'_\mu [\xi_{11}] + \\ &+ 2 (p' - m) p' (p - m) p_\mu [\xi_{11}] + \end{aligned}$$

$$- (\not{p}' - m) \gamma_\mu (\not{p} - m) [\eta_{00}] \}. (13.115)$$

A forma acima é bastante conveniente por ser compacta e permitir a utilização de estruturas bem conhecidas. Entretanto, esta, assim como aquela (13.104) para $\Lambda_1^\mu(p, p')$, não é a forma final pois é necessário tomar o limite $\mu^2 \rightarrow 0$. Este limite é um aspecto bastante interessante da expressão para a função de vértice. Na expressão para $\Lambda_1^\mu(p, p')$ não aparece explicitamente nenhuma divergência infravermelha. As funções básicas são bem comportadas neste limite. Já o caso de $\Lambda_2^\mu(p, p')$ é mais complicado. Na expressão (13.115) aparece o termo $\ln(\mu^2)$ vindo da mudança de escala para a divergência ultravioleta. Assim, a menos que os outros termos, no processo de $\lim \mu^2 \rightarrow 0$, apresentem infinitos deste tipo teremos a contaminação da QED por divergências infravermelhas [8]. Relacionado a este limite temos ainda importantes observações a serem feitas.

Por razões de unitariedade nós devemos ter partes imaginárias para:

$$\begin{cases} p^2 = (m + \mu)^2 \\ p'^2 = (m + \mu)^2 \\ q^2 = (2m)^2. \end{cases} \quad (13.116)$$

Estas situações referem-se a momentos da partícula externa que chega ao vértice ser tal que as duas linhas internas conectadas correspondem a partículas na camada de massa (partículas reais!).

Estas partes imaginárias estão, de fato, presentes nas funções $Z_k(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$, $Z_k(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)$ e $Z_k(m^2, m^2, (p' - p)^2; m^2)$. Tais funções, como sabemos, são contínuas em todos os pontos, são bem comportadas para o limite $\mu^2 \rightarrow 0$ e possuem valor bem definido para momento nulo. Entretanto a derivada destas funções não esta definida nos pontos onde surgem as partes imaginárias.

A expressão para Λ^μ possui funções $Y_k(\mu^2, m^2, p^2; m^2)$, $Y_k(\mu^2, m^2, p'^2; m^2)$ e $Y_k(m^2, m^2, (p' - p)^2; m^2)$. Estas também possuem partes imaginárias a partir dos pontos indicados na eq.(13.116). Entretanto por serem estas derivadas das funções Z 's elas não estarão definidas nestes pontos. A simples presença destas funções comprometeria a unitariedade. Uma observação cuidadosa nos mostra que os coeficientes destas funções, em todos os casos, se anulará nestes pontos problemáticos, quando fizermos $\mu^2 \rightarrow 0$. Isto quer dizer que regularizadores infravermelhos, quaisquer que sejam, devem ser retirados. Além disto regularizações ultravioletas, não podem, de modo algum comprometer o comportamentos das amplitudes nestes pontos.

Outra situação física muito importante diz respeito aos limites “softs”, ou seja, mo-

mentos externos nulos. Nestas situações, quando um dos momentos é nulo, dois dos propagadores tornam-se idênticos e estas integrais com três propagadores adquirem pólos duplos. A consequência disto é o surgimento de funções do tipo Y_k . Este fato presente na estrutura básica ξ_{00} :

$$\begin{aligned}
&\bullet \text{Para } p = 0 \quad (p' = q) \\
&\quad \xi_{00} = \frac{-Y_0(\mu^2, m^2, p'^2)}{m^2} \\
&\bullet \text{Para } p' = 0 \quad (p = q) \\
&\quad \xi_{00} = \frac{-Y_0(\mu^2, m^2, p^2)}{m^2} \\
&\bullet \text{Para } q = 0 \quad (p' = q) \\
&\quad \xi_{00} = \frac{-Y_0(\mu^2, m^2, p'^2)}{\mu^2}.
\end{aligned}$$

Estas funções são problemáticas nos pontos correspondentes ao limiar complexo. O mesmo vale para σ_{00} . No termo $\Lambda_2^\mu(p, p')$ os coeficientes das integrais se anulam nas situações problemáticas quando $\mu^2 \rightarrow 0$. No termo $\Lambda_1^\mu(p, p')$ isto ocorre pela combinação de vários termos, garantindo também o comportamento fisicamente razoável para a amplitude física no contexto da expansão perturbativa.

Nós agora podemos nos dedicar a outro aspecto crucial associado a $\Lambda^\mu(p, p')$ que é a Identidade de Ward [9]. Ela diz respeito à contração do momento carregado pelo fóton externo com $\Lambda^\mu(p, p')$. A propriedade exigida então para a correção de vértice pode ser estabelecida fazendo inicialmente:

$$\begin{aligned}
q_\mu \lambda^\mu(p, p') &= -e^3 \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_3 - m]} \not{q} \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \gamma_\lambda \right\} \\
&X \left\{ \frac{g^{\mu\nu}}{[(k + k_1)^2]} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right\}. \quad (13.117)
\end{aligned}$$

Então utilizamos a identidade:

$$\not{q} = (\not{k} + \not{k}_3 - m) - (\not{k} + \not{k}_2 - m), \quad (13.118)$$

para assim obter:

$$q_\mu \lambda^\mu(p, p') = -e^3 \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[\not{k} + \not{k}_2 - m]} \gamma_\lambda \right\} \left\{ \frac{g^{\lambda\nu}}{[(k + k_1)^2]} + (\xi - 1) \frac{(k + k_1)_\lambda (k + k_1)_\nu}{[(k + k_1)^2]^2} \right\}$$

$$+e^3 \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{[k+k_3-m]} \gamma_\lambda \right\} \left\{ \frac{g^{\lambda\nu}}{[(k+k_1)^2]} + (\xi-1) \frac{(k+k_1)_\lambda (k+k_1)_\nu}{[(k+k_1)^2]^2} \right\} \quad (13.119)$$

A introdução do sinal de integração nos leva a identificar de imediato:

$$q_\mu \Lambda^\mu(p, p') = e [\Sigma(p) - \Sigma(p')], \quad (13.120)$$

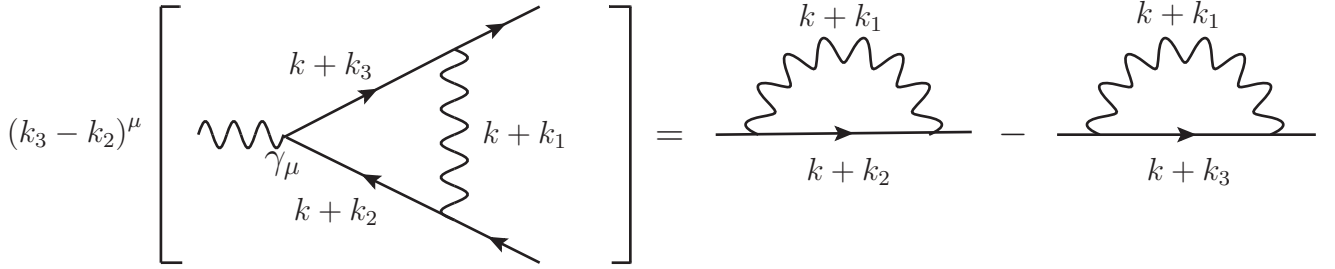


Figura 13.6: Representação diagramática para a eq.(13.120).

Notemos a adoção de momentos arbitrários para a correção de vértice apesar do grau de divergência logarítmica. Ocorre que as auto-energias associadas tem contagem de potências linearmente divergentes, portanto, não livres de ambiguidades associadas aos rótulos das linhas internas.

A manutenção da Identidade de Ward eq.(13.120) é importante para as propriedades da interação elétron-fóton e é necessária para que o conteúdo de simetria esteja presente nas correções um “loop”.

A questão que emerge de imediato é se, de fato, a forma explícita determinada para $\Lambda^\mu(p, p')$ satisfaz esta relação de simetria. A resposta para esta pergunta não é óbvia e somente poderá ser respondida com base na verificação direta.

A fim de verificar isto primeiro tomamos a forma explícita de Λ_1^μ , eq. (13.104) e contraímos com $(p-p')_\mu$. Após alguma reorganização inicial podemos escrever o resultado disto na forma:

$$\begin{aligned} (p-p')_\mu \frac{\Lambda_1^\mu(p, p')}{(-e)^3} &= (\not{p} - \not{p}') I_{\log}(m^2) + \\ &+ \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) (\not{p} - \not{p}') \left[\eta_{00} - m^2 \xi_{00} - Z_0(m^2, m^2, (p-p'); m^2) \right] + \\ &+ \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (p^2 - p'^2) \not{p} \xi_{10} + (p^2 - p'^2) \not{p}' \xi_{01} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \left[\not{p} p'^2 - p^2 \not{p}' + 2m(p+p') \cdot (p-p') \right] \xi_{00} \right\} + \\
& + \left(\frac{4i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (2m - \not{p}) \left[(p \cdot p') \xi_{10} + p'^2 \xi_{01} \right] + \right. \\
& \quad \left. - (2m - \not{p}') \left[p^2 \xi_{10} + (p \cdot p') \xi_{01} \right] \right\} + \\
& - \left(\frac{4i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ \not{p} \left[p^2 \xi_{20} + (p \cdot p') \xi_{11} \right] - \not{p}' \left[(p \cdot p') \xi_{20} + p'^2 \xi_{11} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \not{p}' \left[p^2 \xi_{11} + (p \cdot p') \xi_{02} \right] - \not{p}' \left[(p \cdot p') \xi_{11} + p'^2 \xi_{02} \right] \right\} \quad (13.121)
\end{aligned}$$

Nos dois últimos organizamos os termos a fim de poder utilizar as propriedades das funções ξ' s, introduzidas no capítulo 3. para o caso que estamos tratando elas ficam:

$$\begin{aligned}
\bullet \left[(p \cdot p') \xi_{10} + p'^2 \xi_{01} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0(m^2, m^2, (p-p'); m^2) + Z_0(\mu^2, m^2, p'^2; m^2) + \right. \\
& \quad \left. + (p'^2 + \mu^2 - m^2) \xi_{00} \right\} \quad (13.122)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left[p^2 \xi_{10} + (p \cdot p') \xi_{01} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_0(m^2, m^2, (p-p'); m^2) + Z_0(\mu^2, m^2, p'^2; m^2) + \right. \\
& \quad \left. + (p^2 + \mu^2 - m^2) \xi_{00} \right\} \quad (13.123)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left[p^2 \xi_{20} + (p \cdot p') \xi_{11} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{1}{2} + \mu^2 \xi_{00} \right) + \frac{(p'^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{01} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{2} (p^2 + \mu^2 - m^2) \xi_{10} \right\} \quad (13.124)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left[p'^2 \xi_{11} + (p \cdot p') \xi_{20} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_1(m^2, m^2, (p-p'); m^2) + Z_1(\mu^2, m^2, p'^2; m^2) + \right. \\
& \quad \left. + (p'^2 + \mu^2 - m^2) \xi_{10} \right\} \quad (13.125)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left[p^2 \xi_{11} + (p \cdot p') \xi_{02} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ -Z_1(m^2, m^2, (p-p'); m^2) + Z_1(\mu^2, m^2, p'^2; m^2) + \right. \\
& \quad \left. + (p^2 + \mu^2 - m^2) \xi_{01} \right\} \quad (13.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \left[p'^2 \xi_{02} + (p \cdot p') \xi_{11} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{1}{2} + \mu^2 \xi_{00} \right) + \frac{(p^2 + \mu^2 - m^2)}{2} \xi_{10} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{2} (p'^2 + \mu^2 - m^2) \xi_{01} \right\} \quad (13.127)
\end{aligned}$$

A substituição destes resultados nos oferece um cancelamento total das funções ξ' s (livres de coeficientes μ^2). O resultado final pode ser escrito:

$$\begin{aligned}
(p-p')_\mu \frac{\Lambda_1^\mu(p,p')}{(-e)^3} &= (\not{p}-\not{p}') I_{\log}(m^2) + \\
&+ \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (2m-\not{p}) [Z_0(0,m^2,p^2;m^2)] + \right. \\
&\quad - (2m-\not{p}') [Z_0(0,m^2,p'^2;m^2)] + \\
&\quad + \not{p} [Z_1(0,m^2,p^2;m^2)] + \\
&\quad \left. - \not{p}' [Z_1(0,m^2,p'^2;m^2)] \right\} \tag{13.128}
\end{aligned}$$

É fácil então, consultando a expressão (13.77) para a auto-energia, ver que $\Lambda_1^\mu(p,p')$ contribui corretamente para a satisfação da Identidade de Ward. Basta para tal acrescentar e subtrair o termo $4mI_{\log}(m^2)$.

Quanto ao termo $\Lambda_2^\mu(p,p')$ a utilização, após a contração com $(p-p')_\mu$, das propriedades (13.122)-(13.127), nos mostrará igualmente a relação desejada [7]. Esta verificação explícita somente pode ser feita de um modo relativamente simples devido à utilização das funções ξ e suas propriedades. Sem esta sistematização perceber as simplificações envolvidas seria um tanto complicado.

13.9 Interação de três fótons.

Nós agora consideramos o diagrama com três fótons externos. Ele parece introduzir, via expansão perturbativa, a interação de três fótons, o que sabemos, não permitida pela teoria, representada pela lagrangiana da Q.E.D. É crucial portanto obter um resultado final nulo para um eventual “decaimento” envolvendo três fótons. A simetrização, devido a partículas externas idênticas, nos dá um total de seis diagramas sendo três pares onde um é fixo e outros trocados entre si. Basta portanto considerar, para nossos propósitos, apenas um destes pares, já que os outros podem ser obtidos por simples permutações de momentos e índices.

Para obtermos resultados consistentes devemos mostrar que a soma dos diagramas par-a-par se cancelam identicamente, como determinado pelo teorema de Furry. Então deveremos ter:

$$\left\{ T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(p,p') + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(p,p') \right\} = 0 \tag{13.129}$$

Nós entao devemos calcular explicitamente os diagramas. O cálculo do traço para o diagrama “direto” nos fornece:

$$\begin{aligned}
t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = & 4\left\{ (k+k_3)_\lambda (k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_3)_\lambda (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \right. \\
& + (k+k_3)_\mu (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\lambda + (k+k_3)_\mu (k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\nu \\
& \left. - (k+k_3)_\nu (k+k_1)_\lambda (k+k_2)_\mu + (k+k_3)_\nu (k+k_1)_\mu (k+k_2)_\lambda \right\} \\
& + 4g_{\mu\nu} \left\{ - \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] (k+k_3)_\lambda \right. \\
& - \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] (k+k_2)_\lambda \\
& \left. + \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] (k+k_1)_\lambda \right\} \\
& + 4g_{\mu\lambda} \left\{ \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] (k+k_3)_\nu \right. \\
& - \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] (k+k_2)_\nu \\
& \left. - \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] (k+k_1)_\nu \right\} \\
& + 4g_{\lambda\nu} \left\{ - \left[(k+k_1) \cdot (k+k_2) - m^2 \right] (k+k_3)_\mu \right. \\
& + \left[(k+k_1) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] (k+k_2)_\mu \\
& \left. - \left[(k+k_2) \cdot (k+k_3) - m^2 \right] (k+k_1)_\mu \right\}
\end{aligned} \tag{13.130}$$

Esta expressão nós escrevemos como:

$$t_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = 4t_{\lambda\mu\nu} + g_{\mu\nu} [t_{\lambda}^{VPP}] + g_{\mu\lambda} [t_{\nu}^{PPV}] + g_{\lambda\nu} [t_{\nu}^{PVP}] \tag{13.131}$$

A notação adotada indica que os termos que compõem $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ podem ser identificadas com outras funções de três pontos. Esta não fazem parte da Q.E.D e aqui nada representam além de um agrupamento conveniente de termos. Seguindo nossa filosofia podemos explicitar cada uma delas (capítulo 11). Para a verificação que desejamos, entretanto, basta perceber que;

$$\cdot T_{\lambda}^{VPP}(q; p, p') = -T_{\lambda}^{VPP}(q; p', p) \tag{13.132}$$

$$\cdot T_{\mu}^{PVP}(q; p, p') = -T_{\mu}^{PVP}(q; p', p) \tag{13.133}$$

$$\cdot T_{\nu}^{PPV}(q; p, p') = -T_{\nu}^{PPV}(q; p', p). \tag{13.134}$$

O que pode ser percebido dos termos explícitos (11.44), (11.48) e (11.51). A consulta à forma explícita de $T_{\lambda\mu\nu}$ fornecida no capítulo 11 também nos revela que

$$T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q; p, p') = -T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q; p', p). \tag{13.135}$$

Todos estes resultados juntos nos fornecem aquele desejado, eq.(11.213), pois o lado direito das últimas quatro equações correspondem ao diagrama “cruzado” do processo $V \rightarrow VV$, diagrama 13.8(b). Aqui é importante ressaltar que tais verificações foram obtidas a partir das respectivas formas explícitas. Estas determinadas segundo o procedimento delineado na seção 4.

Identidades de Ward

O diagrama $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ carrega três índices de Lorentz associados a correntes vetoriais conservadas no processo $V \rightarrow VV$ [9]. O cancelamento obtido para a soma dos diagramas “direto” e “cruzado”, torna a verificação das Identidades de Ward uma tarefa óbvia uma vez que devemos ter, por exemplo:

$$q_\lambda \left[T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q; p, p') + T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q; p', p) \right] = 0. \quad (13.136)$$

É interessante, entretanto, a verificação desta propriedade pela contração de cada um dos diagramas, separadamente [10]. O resultado pode ser decomposto convenientemente em termos de funções de dois pontos; O tensor de polarização do vácuo. Teremos por exemplo:

$$q_\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(q; p, p') = \Pi_{\mu\nu}(p') - \Pi_{\mu\nu}(p), \quad (13.137)$$

para o diagrama direto, e

$$q_\lambda T_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(q; p, p') = \Pi_{\mu\nu}(p) - \Pi_{\mu\nu}(p'), \quad (13.138)$$

para o cruzado.

Os relações acima podem ser obtidas a partir de formas explícitas para os diagramas. Elas envolvem as funções ξ_{nm} para $m+n=3$, e suas respectivas propriedades, (capítulo 11), introduzidas no capítulo 3. A obtenção destes resultados, deste modo é, por isso, longo e tedioso, mas serve para demonstrar a consistência da prescrição utilizada como procedimento em situações mais complicadas. Tais relações, neste contexto, parecem triviais. Entretanto, estas mesmas envolvendo simetrias não-abelianas passam a ter importância crucial.

13.9.1 Processo de quatro fótons.

Para completar o tratamento das amplitudes divergentes, ao nível um “loop”, da QED, é ainda necessário considerar o processo envolvendo quatro fótons externos. O caráter

divergente de grau logarítmico elimina automaticamente da discussão a questão das ambiguidades. Um cálculo explícito destes diagramas envolve as funções ξ_{nlm} definidas no capítulo 3, para $n+l+m=3,2,1$ e 0. Ainda assim a verificação das Identidades de Ward, tais como a equação (13.10), depende crucialmente da satisfação da relação de consistência (13.22). Outro aspecto importante refere-se a um possível cancelamento das divergências permitindo assim a renormalizabilidade da teoria a nível “loop” de aproximação. Nós não nos dedicaremos aqui a termos explícitos deste cálculo pela complexidade algébrica. Este estudo será apresentado noutra local [11]. Registramos estes comentários apenas por completeza.

13.9.2 Renormalização

Nas seções anteriores consideraremos os diagramas, ao nível um “loop”, divergentes para a QED. Das potencialmente divergentes restam, de fato, três apenas; o tensor de polarização, a auto-energia do elétron e a correção de vértice. Com os resultados obtidos podemos agora proceder a renormalização da QED ao nível um “loop” [12]. Para tal é interessante começarmos reescrevendo os resultados obtidos numa forma conveniente.

Tensor de Polarização.

Para esta amplitude, a partir da equação (13.46), escrevemos a forma:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) \quad (13.139)$$

onde:

$$\Pi(q^2) = -\frac{4}{3}e^2 [I_{\log}(m^2)] + \Pi^{fin}(q^2). \quad (13.140)$$

A parte finita definida acima, é bom lembrar, possui a propriedade:

$$\Pi^{fin}(q^2) = 0. \quad (13.141)$$

Auto-energia do elétron.

Primeiro reorganizamos convenientemente a expressão obtida para $\Sigma(p)$, eq (13.77);

$$\frac{\Sigma(p)}{(-e^2)} = [(4m - \not{p}) + (\xi - 1)(m - \not{p})] I_{\log}(m^2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \{ (\not{p} - 2m) Z_0(0, m^2, 0; m^2) - \not{p} Z_0(0, m^2, 0; m^2) \} + \\
& + (\xi - 1) \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left\{ (\not{p} - m) Z_0(0, m^2, 0; m^2) + \not{p} (m^2 - p^2) \frac{Y_1(0, m^2, 0; m^2)}{m^2} \right\} + \\
& + \left(\frac{2i}{(4\pi)^2} \right) \{ (\not{p} - 2m) [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)] + \\
& \quad - \not{p} [Z_1(0, m^2, p^2; m^2) - Z_1(0, m^2, 0; m^2)] \} + \\
& + (\xi - 1) \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \{ (\not{p} - m) [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)] + \\
& \quad + \not{p} (m^2 - p^2) \left[\frac{Y_1(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} - \frac{Y_1(0, m^2, 0; m^2)}{m^2} \right] \} \quad (13.142)
\end{aligned}$$

Agora colocamos isto na forma:

$$\frac{\Sigma(p)}{-e^2} = A(p^2) + \not{p} B(p^2), \quad (13.143)$$

onde então identificamos:

$$\begin{aligned}
A(p^2) & = (3 + \xi) m \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] + \\
& \quad - (3 + \xi) m [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)]. \quad (13.144)
\end{aligned}$$

O primeiro termo contém a divergência ultravioleta. O segundo, que é finito, possui a propriedade $A(p^2 = 0) = 0$.

Por sua vez:

$$\begin{aligned}
B(p^2) & = -\xi [I_{\log}(m^2)] + \\
& \quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [(\xi + 1) Z_1(0, m^2, p^2; m^2) - Z_1(0, m^2, 0; m^2)] + \\
& \quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \{ (\xi + 1) [Z_0(0, m^2, p^2; m^2) - Z_0(0, m^2, 0; m^2)] + \\
& \quad \quad - 2 [Z_1(0, m^2, p^2; m^2) - Z_1(0, m^2, 0; m^2)] + \\
& \quad + (\xi - 1) (m^2 - p^2) \left[\frac{Y_1(0, m^2, p^2; m^2)}{m^2} - \frac{Y_1(0, m^2, 0; m^2)}{m^2} \right] \} \quad (13.145)
\end{aligned}$$

O termo entre chaves (finito!) tem a propriedade $B(p^2 = 0) = 0$.

Com a organização efetuada, a parte finita adquire a propriedade:

$$\begin{cases} \Sigma(p) |_{p=0} = 0 \\ \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p} |_{p=0} = 0. \end{cases} \quad (13.146)$$

Correção de vértice

Seguindo o mesmo procedimento escrevemos a expressão para a função de vértice na forma:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(p, p') &= \xi \gamma_\mu [I_{\log}(m^2)] + \Lambda_\mu^{fin}(0, 0) + \\ &+ [\Lambda_\mu^{fin}(p, p') - \Lambda_\mu^{fin}(0, 0)] \end{aligned} \quad (13.147)$$

onde $\Lambda_\mu^{fin}(0, 0)$ é o valor de $\Lambda_\mu(p, p')$ tomado a momentos $p = p' = 0$, excluídos os termos $I_{\log}(m^2)$.

O próximo passo é a construção dos contratermos necessários para que os termos divergentes sejam removidos na parametrização da teoria. É fácil perceber que precisaremos de quatro destes termos.

Para que possamos eliminar a divergência e obter o comportamento correto para o propagador do fóton corrigido ao nível um “loop” temos que obter uma contribuição de ordem perturbativa e^2 porém de topologia árvore. O resultado disto deverá dar uma contribuição adicional ao tensor de polarização de valor:

$$\Delta \Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left[\frac{4}{3} e^2 [I_{\log}(m^2)] \right]. \quad (13.148)$$

É fácil perceber que isto implica em acrescentar o contratermo

$$\Delta \mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\mu - \partial_\nu A_\nu)^2 \left[\frac{4}{3} e^2 [I_{\log}(m^2)] \right] \quad (13.149)$$

à lagrangiana da QED.

As divergências da auto-energia do elétron necessitam de dois contratermos para serem removidos. O resultado destes termos, de ordem e^2 porém de topologia árvore, deve dar uma contribuição adicional,

$$\Delta A(p^2) = -e^2 (3 + \xi) m \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right], \quad (13.150)$$

para $A(p^2)$. É fácil perceber que ele tem a estrutura funcional do termo de massa. Assim para obter esta contribuição devemos acrescentar o contratermo:

$$\Delta\mathcal{L}_2 = (\bar{\Psi}\Psi) m \left\{ e^2 (3 + \xi) \left[I_{\log}(m^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(0, m^2, 0; m^2) \right] \right\}, \quad (13.151)$$

à lagrangiana. Por outro lado afim de obtermos um cancelamento dos termos incômodos de $B(p^2)$ devemos gerar uma contribuição adicional

$$\Delta B(p^2) = -e^2 \left\{ \xi \left[I_{\log}(m^2) \right] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[(\xi + 1) Z_0(0, m^2, 0; m^2) - Z_1(0, m^2, 0; m^2) \right] \right\}, \quad (13.152)$$

à série perturbativa em ordem e^2 . Isto pode ser obtido pela adição do contratermo:

$$\Delta\mathcal{L}_3 = -(\bar{\Psi}i\partial\Psi) \left[e^2 \xi I_{\log}(m^2) - \left(\frac{e^2 i}{(4\pi)^2} \right) \left[(\xi + 1) Z_0(0, m^2, 0; m^2) - 2Z_1(0, m^2, 0; m^2) \right] \right] \quad (13.153)$$

à lagrangiana.

Por fim, necessitamos remover a divergência da correção de vértice. Será necessário gerar uma contribuição adicional de ordem e^3 e de nível árvore, igual a:

$$\Delta\Lambda_\mu(p, p') = e^3 \gamma_\mu \left[-\xi I_{\log}(m^2) + \Lambda_\mu^{fin}(0, 0) \right]. \quad (13.154)$$

Isto será obtido adição do contratermo

$$\Delta\mathcal{L}_4 = (\bar{\Psi}i\gamma_\mu\Psi A_\mu) \left[\xi \left[I_{\log}(m^2) \right] - \Lambda_\mu^{fin}(0, 0) \right] \quad (13.155)$$

à lagrangiana.

Com a lagrangiana formada pelos termos (13.1) mais os quatro contratermos que acabamos de construir a teoria fornecerá amplitudes ao nível “loop” finitas e com as propriedades desejadas.

É importante perceber que, ao acrescentarmos os contratermos, não estamos fazendo nada além de utilizar a liberdade de escolhermos livremente os coeficientes dos termos da

lagrangiana, de modo a conectá-las com observáveis físicos, a cada ordem perturbativa calculada.

Isto pode ser visto de um modo transparente se nós partimos da Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\mu^0 - \partial_\nu A_\nu^0)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\mu A_\mu^0}{\xi^0} \right)^2 - \bar{\Psi}^0 (i\cancel{\partial} - m) \Psi^0 - e_0 (\bar{\Psi}^0 \gamma_\mu \Psi^0) A_\mu^0,$$

e então fazemos a substituição:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu^0 = \sqrt{Z_A} A_\mu \\ \Psi^0 = \sqrt{Z_\Psi} \Psi \\ e_0 = Z_e e \\ m_0 = Z_m m \\ (\xi^0)^{-1} = Z_\lambda \xi^{-1}. \end{array} \right. \quad (13.156)$$

As quantidades $A_\mu^0, \Psi^0, e_0, m_0, (\xi^0)^{-1}$ são aquelas denominadas nuas. As outras $(A_\mu, \Psi, e, m, (\xi)^{-1})$ são as renormalizadas em alguma ordem perturbativa. É evidente que na ordem mais baixa $Z_A = Z_4 = Z_e = Z_m = Z_\lambda = 1$ e assim não há distinção entre estes objetos.

As substituições acima nos leva a reescrever a lagrangiana na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\mu - \partial_\nu A_\nu)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_\mu A_\mu}{\xi} \right)^2 - \bar{\Psi} (i\cancel{\partial} - m) \Psi - ie (A_\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) + \\ & -\frac{1}{4} (Z_A - 1) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (Z_\lambda^2 Z_A - 1) \frac{(\partial_\mu A_\mu)^2}{\xi^2} + \\ & - (Z_\Psi - 1) \bar{\Psi} (i\cancel{\partial}) \Psi + m (Z_m Z_\Psi - 1) \Psi \Psi - ie (Z_e Z_\Psi Z_A^{1/2} - 1) A_\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi. \end{aligned} \quad (13.157)$$

A lagrangiana original reapareceu juntamente com outros termos. Estes últimos são, pelo menos, de ordem e^2 o que justifica, ao nível árvore, serem desconsiderados. Eles entretanto podem desempenhar o papel dos contratérmos que descobrimos necessários no cálculo perturbativo. Estas redefinições por outro lado descrevem de um modo simples como é possível eliminar os infinitos no contexto do cálculo perturbativo na definição adequada dos parâmetros físicos, ou seja na reparametrização, em cada ordem perturbativa. Uma observação nos cálculos que realizamos nos permite determinar os valores para os parâmetros Z 's.

Podemos ver que as partes que divergem não são os únicos fatores envolvidos nesta reparametrização. fatores finitos também eventualmente necessitam fazer parte da definição

dos parâmetros de renormalização a fim de que as quantidades físicas sejam identificadas a partir de propriedades das amplitudes perturbativas. A escolha que fizemos foi baseada numa definição dos parâmetros físicos, um para cada termo na lagrangiana, feita a momentos nulos. Notemos que não há ambiguidades provenientes do método de cálculo utilizado para a determinação das amplitudes. As arbitrariedades envolvidas em métodos que fazem uso de limites, expansões, etc., estão todas contidas na escala utilizada para caracterizar os objetos divergentes. O resultado, dentro das regras que caracterizam o procedimento, é unívoco. Outro aspecto que deve ser ressaltado é a imediata conexão com os resultados de outros métodos (consistentes). Por exemplo para termos os resultados da Regularização Dimensional basta fazermos:

$$\left[I_{\log}(m^2) \right] = \left[I_{\log}(\lambda^2) \right] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) \quad (13.158)$$

e explicitarmos a integral logarítmica básica. A forma com que os resultados foram obtidos, por outro lado, são mais imediatos e transparentes. Em nenhum momento tivemos que descartar quaisquer termos em processos de limite como usualmente é feito em outros métodos, o que leva necessariamente a ambiguidades como vimos.

13.9.3 Conclusão

O conjunto de regras que adotamos como procedimento para manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes induzidos nas investigações realizadas nos capítulos anteriores, foi aplicado na discussão da QED ao nível um “loop”. Duas razões nos servem de motivação: A importância da QED como TQC em solução perturbativa, pelo seu sucesso na descrição de observáveis e a presença de uma partícula de massa nula o que nos permite discutir a questão das divergências infravermelhas simultaneamente áquelas ultravioletas. As amplitudes obtidas têm automaticamente as propriedades desejadas, isto é, livres das ambiguidades usuais e satisfazem as Identidades de Ward pertinentes a elas. A presença de divergências infravermelhas pode ser discutida adequadamente com a utilização das propriedades de escala dos objetos divergentes básicos. O “limite de conexão” do infravermelho, ou seja, a retirada da massa do bóson de “gauge”, termina sendo uma propriedade das funções básicas Z'_k s e suas derivadas Y'_k s. Os limites de conexão ultravioleta e infravermelho não ocorre simultaneamente, não havendo objetos

indefinidos no limite infravermelho como é o caso de $I_{quad}(\mu^2)$ no limite $\mu^2 \rightarrow 0$, na RD [6].

Um aspecto não menos importante está na sistematização que construímos para estes tipos de cálculos, representados pelas funções definidas no capítulo 3 e suas propriedades.

É possível explicitar e verificar as propriedades das amplitudes, incluindo Identidades de Ward de modo simples. Isto permite que estas operações possam ser feitas sem qualquer simplificação cinemática tal como colocar as partículas externas na camada de massa. Nossos resultados são absolutamente gerais e permitem a apreciação de propriedades relativas às partes imaginárias de modo bastante direto, tudo em termos de propriedades pertinentes estudadas das funções Z'_k s. Não há resultados disponíveis com tais características na literatura consultada.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel, A.L. Mota and M.C. Nemes, *Mod. Phys. Lett. A*13, 20 (1998);
- [2] Ver Capítulo 2;
A.Akhiezer and V.B.Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Interscience, New York (1965);
J.M. Jauch and F.Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer. Verslag Berlin (1976);
G.Kallen, *Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1972);
V.B.Berestetskii, E.M.Lifshitz and L.P.Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory*, Pergamon Press, Oxford (1971);
C.Nash, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press, New York (1978);
C. Itzykson and J.B. Zuber; *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York (1980);
P. Ramond; *Field Theory: A modern Primer* Addison-Wesley (1990);
S.Pokorski: *Gauge Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
J.D.Bjorken and S.D.Drell; *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill, New York (1965);
J.Schwinger, *Quantum Electrodynamics*, Dover, New York (1958);
- [3] Furry;
B. de Witt and J. Smith, *Field Theory in Particle Physics*, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986);
- [4] N.N.Bogolubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantised Fields*, Wiley-Interscience (1959);
- [5] E.A.Uehling, *Phys.Rev.* 48, 55 (1935);
W.Greiner and J.Reinhardt: *Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, Heidelberg (1994);

- P.H. Frampton, Gauge Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);
B.E.Lantrup, A.Peterman and E.de Rafael, Phys. Rep. 3C, 193 (1972);
- [6] G.Leibrant Rev. Mod. Phys. 47 (849) 1975;
R. Gastmans and R. Mensdermans, Nucl. Phys. B105,454 (1973);
R. Gastmans , J. Verwaest and R. Mensdermans, Nucl. Phys. B105,454 (1976);
W. Marciano and A.Sirlin Nucl. Phys. B88, 86 (1975);
- [7] O.A. Battistel and O.L. Battistel, Sistematização para o cálculo de funções de quatro pontos, (em preparação);
O.A. Battistel , Cálculo completo e sistematização para a função de vértice da QED, (em andamento);
S. Gobira, Tese de Mestrado, UFMG (1997);
S. Gobira, O.A. Battistel and M.C.Nemes, (submetido para publicação) (1999);
- [8] Furry;
B. de Witt and J. Smith, Field Theory in Particle Physics, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam (1986);
- [9] O.A. Battistel, processos $V \rightarrow AA$ e $V \rightarrow VV$ via férmions de spin 1/2 casos SU(2) e SU(3) (trabalho em andamento);
- [10] O.A. Battistel and O.L. Battistel, Sistematização para o cálculo de funções de quatro pontos, (em preparação);
- [11] O.A. Battistel , Regularização Implícita e Renormalização da QED ao Nível um “loop”;
A. Scarpelli, O.A. Battistel and M.C. Nemes, Brazilian Journal of Physics, 28, 161-168 (1998);
A. Scarpelli, Tese de Mestrado, UFMG (1997);

Capítulo 14

A Teoria $\lambda\phi^4$ ao Nível Dois “loops” e o Problema das Divergências Superpostas

14.1 Introdução

Nas discussões realizadas até aqui nós consideramos muitos aspectos relacionados às contribuições envolvendo “loops” no cálculo perturbativo. A necessidade da reinterpretação dos parâmetros presentes na lagrangiana, em cada ordem perturbativa, foi marcadamente destacada. Esta reparametrização tem como fator complicador a presença de divergências nas amplitudes físicas. Isto nos obriga à adoção de procedimentos intermediários de manipulações e cálculos das amplitudes contendo divergências com vistas aos propósitos da reparametrização. Tais procedimentos, os métodos de regularização, foram o principal alvo de nossas discussões e nós concluímos pela possibilidade de manipular e calcular amplitudes contendo divergências de um modo consistente sem a utilização explícita de métodos de regularização, ou seja, sem que integrais divergentes sejam efetivamente calculadas. Segundo esta análise é possível substituir o uso de regularizações adotando um procedimento específico que fundamenta-se no uso de identidades ao nível dos integrandos a fim de se obter uma soma de termos, divergentes e finitos, onde a parte que depende dos momentos externos esteja contida naqueles finitos. Estes não devem ser afetados pelas eventuais regularizações, ou seja, devem ser calculadas sem restrições. Naqueles termos divergentes obtidos, a fim de se obter resultados aceitáveis, deve ser exigido que sejam

satisfeitas relações tais como:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)}, \quad (14.1)$$

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2}, \quad (14.2)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{24k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - \mu^2)^4} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} g_{\alpha\beta} \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\beta}}{[(k^2 - \mu^2)^3]} g_{\alpha\nu} \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\beta}k_{\nu}}{[(k^2 - \mu^2)^3]} g_{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Estas “relações de consistência” entre integrais divergentes se mostram suficientes para, ao mesmo tempo, eliminar ambiguidades associadas às arbitrariedades envolvidas nas escolhas dos momentos das linhas internas dos “loops”, ambiguidades de escala, bem como evitar violações de relações de simetria. A imposição das relações acima tem como consequência a eliminação da necessidade da adoção explícita de um método de regularização. Isto se deve ao fato de, após utilizá-las, todo o conteúdo divergente das amplitudes apresentar-se na forma de objetos básicos, que para as divergências consideradas até aqui, no máximo cúbicas ao nível 1 “loop”, ficam:

$$\begin{cases} I_{quad}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \\ I_{log}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}. \end{cases} \quad (14.4)$$

O parâmetro λ^2 , mantido no interior dos objetos divergentes básicos, desempenha um papel de escala para todas as quantidades físicas presentes nas amplitudes (massas e momentos externos). A escolha do parâmetro λ^2 é arbitrária e isto “absorve” toda a indefinição envolvida na especificação das partes finita e divergente. Esta liberdade implica na necessidade de independência das amplitudes físicas em relação ao parâmetro λ^2 (invariância de escala). Assim uma escolha de λ^2 pode ser convertida em outra pelas relações de escala:

$$\begin{cases} I_{quad}(\mu^2) = I_{quad}(\lambda^2) - (\lambda^2 - \mu^2) I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[(\lambda^2 - \mu^2) + \mu^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)\right] \\ I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right). \end{cases} \quad (14.5)$$

Estas propriedades são necessárias para que as amplitudes físicas possuam a propriedade de invariância de escala. A independência em relação a λ^2 pode ser verificada para cada integral divergente:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (14.6)$$

A validade disto implica (ou exige) a manutenção das propriedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_{quad}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} = I_{log}(\lambda^2) \\ \frac{\partial I_{log}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right). \end{array} \right. \quad (14.7)$$

As consequências destas conclusões podem servir a dois propósitos diferentes no que diz respeito aos métodos de regularização. A primeira delas é a imposição de condições ou testes de consistência para estes métodos. Em outras palavras, se quisermos ter uma chance de que o método forneça resultados satisfatórios, quando aplicado no tratamento de amplitudes físicas, ele deve satisfazer as exigências (14.1), (14.2) e (14.3). Por outro lado estes critérios servem para classificar os métodos existentes e explicar as eventuais razões dos sucessos ou insucessos destes. A segunda consequência é a própria eliminação dos métodos de regularização das discussões envolvendo amplitudes divergentes, uma vez que apenas estas propriedades gerais são necessárias e a forma explícita para as quantidades divergentes presentes nas amplitudes não tem nenhuma implicação adicional. Em teorias renormalizáveis os próprios objetos básicos divergentes podem ser usados nas reparametrizações. Nos casos de teorias não-renormalizáveis os ajustes fenomenológicos necessários podem se feitos diretamente por valores atribuídos às quantidades $I_{log}(\lambda^2)$ e $I_{quad}(\lambda^2)$. Este processo pode ser facilitado pela adoção de parametrizações gerais em termos de um parâmetro λ^2 que, a rigor, poderia ser considerada a única utilidade de um eventual método de regularização. Uma parametrização aceitável (talvez única) poderia ser:

$$\left\{ \begin{array}{l} I^{quad}(\lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[-\Lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) + \beta_0 \lambda^2 + \delta_0\right] \\ I^{log}(\lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right) + \beta_0\right], \end{array} \right. \quad (14.8)$$

já que satisfazem às condições (14.1), (14.2), (14.3) e (14.7).

Após os testes já efetuados podemos concluir pela ampla consistência do procedimento. Isso, entretanto, dentro das limitações das investigações realizadas: divergências no máximo cúbicas e ao nível um “loop”. Ainda que não exista nenhum argumento razoável para se acreditar na inaplicabilidade desta filosofia fora deste contexto, ingredientes novos devem aparecer e se somar àqueles que já surgiram. Como tal, para grau de divergência

superior a cúbico novas relações entre integrais divergentes (relações de consistência) devem se tornar necessárias. Por outro lado, ao nível dois “loops”, nós podemos esperar o surgimento de novos objetos básicos divergentes relacionados à presença de divergências superpostas. Esta possibilidade vem do fato de, neste caso, ser necessário efetuar duas integrações nos momentos que nem sempre se apresentam em produto de integrações envolvendo ambos os momentos separadamente. O grau de divergência está associado às duas integrações coletivamente.

A questão a ser discutida neste capítulo diz respeito à possibilidade de estender a filosofia construída para o tratamento de problemas envolvendo dois “loops” com a presença de divergências superpostas. A fim de verificar alguns aspectos de interesse faremos uso da teoria $\lambda\phi^4$ ao nível 2“loops” a qual será tratada dentro da filosofia construída nos capítulos anteriores.

Nos restringiremos à busca dos objetos básicos divergentes, suas relações e possíveis relações de escala. Questões como ambiguidades associadas às escolhas para os momentos das linhas internas, ambiguidades de escala e relações de simetria serão deixadas para discussões posteriores devido à complexidade algébrica envolvida nos cálculos. A resposta para as questões de interesse mantidas é de grande utilidade para discussões mais amplas envolvendo, por exemplo, férmions com massas diferentes.

Na seção 2 consideraremos a teoria em si, representada pela lagrangiana e suas regras de Feynman e faremos uma análise elementar das relações de contagem de potências para os diagramas da teoria em solução perturbativa. Na seção 3 consideraremos a teoria em nível árvore e a interpretação dos parâmetros físicos da teoria. Na seção 4 tomaremos contribuições ao nível 1“loop” e discutiremos a reparametrização da teoria. Na seção 5 evoluímos para o nível 2“loops” identificando então o surgimento das divergências superpostas que serão tratadas em separado na seção 6. De posse destes estudos nós discutimos a reparametrização ao nível 2“loops”, seção 7, na seção 8 discutimos parametrizações gerais para as divergências superpostas básicas, na seção 9 consideramos brevemente o aspecto ambiguidade e, finalmente, na seção 10 concluímos.

14.2 A Teoria $\lambda\phi^4$ em Nível Árvore de Aproximação

Uma vez obtidas as regras de Feynman para a teoria $\lambda\phi^4$ (capítulo 2), nós podemos utilizá-las para a determinação dos processos físicos de interesse, pertinentes a teoria, dentro de um nível de aproximação previamente determinado. O caminho natural é tomar inici-

almente a menor ordem possível e estudar as consequências da solução perturbativa para estes processos físicos. Neste caso os dois processos físicos de interesse são a propagação da partícula escalar interagente (auto-energia), caracterizado por dois escalares externos, e o espalhamento elástico de dois escalares, caracterizado por 4 escalares externos, e nós tomamos o nível árvore. Com isso temos apenas uma contribuição possível para o espalhamento elástico e uma para o propagador, como indicado na figs.14.1 e 14.2.

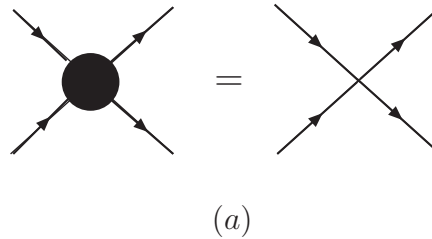


Figura 14.1: Representação da solução perturbativa em ordem mais baixa para o espalhamento elástico de dois escalares.

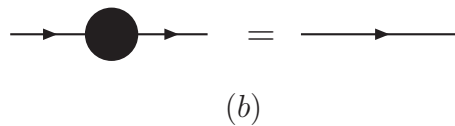


Figura 14.2: Representação da solução perturbativa em ordem mais baixa para a auto-energia do escalar.

A amplitude para o espalhamento, resultado da avaliação do diagrama (fig.(14.2)), fica:

$$\Gamma^{árvore}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -i\lambda_0. \quad (14.9)$$

A inexistência de fatores de simetria é justificada pela presença do fator $(4!)^{-1}$ no termo de interação.

A contribuição calculada, única nesta ordem, possui a importante característica de ser independente dos momentos externos. Deste modo é possível a utilização de qualquer ponto cinemático neste espalhamento para a definição da constante de acoplamento λ , o que é necessária para o poder de predição da teoria. Uma escolha bastante conveniente, para partículas de massas iguais, é aquela correspondente a todos os invariantes externos

do espalhamento de dois corpos tomados nulos (ver próxima seção):

$$\Gamma^{\text{árvore}}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \Gamma^{\text{árvore}}(s, u, t), \quad (14.10)$$

e então definimos:

$$\Gamma(s, u, t)|_{s=t=u=0} = \Gamma(0, 0, 0) = -i\lambda. \quad (14.11)$$

Isto nos obriga a identificar o parâmetro λ_0 da lagrangiana como sendo o parâmetro físico constante de acoplamento, no nível árvore de aproximação da solução perturbativa da teoria:

$$\lambda_0 = \lambda = \text{constantedeacoplamento}. \quad (14.12)$$

Por sua vez a propagação da partícula escalar, nesta ordem de aproximação, leva ao propagador:

$$iS_F(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 + i\epsilon}, \quad (14.13)$$

que coincide com o propagador livre da partícula. Neste caso somos obrigados a identificar a parâmetro μ_0 da lagrangiana como sendo a massa da partícula:

$$\mu_0 = \mu = \text{massadapartícula}. \quad (14.14)$$

Ainda deve ser notado que o coeficiente da p^2 , a unidade, implica na manutenção da normalização correspondente no espaço de configuração.

Esta discussão simples serve para nos mostrar a essência do cálculo perturbativo. A expansão é feita no parâmetro λ_0 , mas os observáveis físicos são coeficientes dos termos da lagrangiana, ou seja, coeficientes de potências dos momentos. Devemos então identificar o coeficiente de p^2 , no propagador corrigido perturbativamente, como sendo a massa da partícula e o valor da amplitude $\Gamma(s, u, t)$ em $s = u = t = 0$ como sendo a constante de acoplamento física entre as partículas. Este trabalho, de identificação dos parâmetros físicos, terá que ser feito a cada ordem de aproximação já que, em princípio, cada diagrama novo incluído poderá ter uma estrutura nos momentos contendo todas as potências. Esta observação é a essência da reparametrização ou renormalização que dá sentido físico a soluções perturbativas de teorias quânticas de campos. Vamos ver isto para os níveis um “loop” e dois “loops”.

14.3 Nível um “loop” de Aproximação

Se nós agora especificamos como nível de aproximação, para os processos de interesse, aquele que inclui a contribuição de diagramas contendo um “loop”, nós temos outras

contribuições para ambos os processos; como mostrado na figs.14.3 e 14.4.

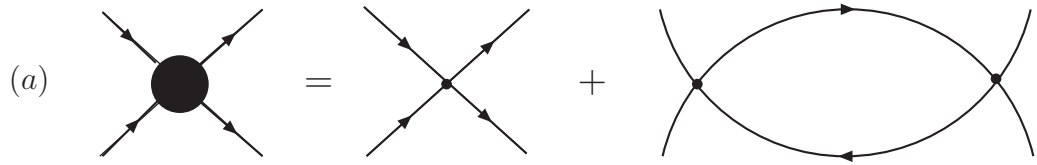


Figura 14.3: Contribuições até um “loop” para o espalhamento elástico, (a).



Figura 14.4: Contribuições até um “loop” para a auto-energia (b).

Vamos então avaliar estas contribuições e então interpretar os resultados, no que diz respeito aos parâmetros físicos.

14.3.1 Auto-Energia ao Nível um “loop”

A contribuição para a auto-energia ao nível um “loop” vem do diagrama “tadpole”, representado na fig.14.5.

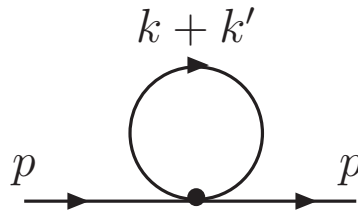


Figura 14.5: Diagrama “tadpole” para a auto-energia do escalar.

Fazendo uso das regras de Feynman podemos escrever:

$$-i\Sigma_1(p) = \left(\frac{-i\lambda}{2}\right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(k+k')^2 - \mu^2]}. \quad (14.15)$$

Na expressão acima k' representa a arbitrariedade envolvida na escolha para o rótulo do momento da linha interna. Um fator de simetria $1/2$ foi incluído. O próximo passo é manipular e calcular a integral obtida a fim de colocá-la na forma de integrais divergentes, conforme a estratégia que estamos adotando. Isto já foi feito seção (9.3.1) e nós simplesmente transcrevemos o resultado:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(k+k')^2 - \mu^2]} = I_{quad}(\lambda^2) - (\lambda^2 - \mu^2)I_{log}(\lambda^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\lambda^2 - \mu^2 + \mu^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right) \right]. \quad (14.16)$$

O resultado acima exibe a importante propriedade de não depender do momento arbitrário k' . Ele está escrito em termos da escala arbitrária λ^2 e é possível com isso apreciar a liberdade existente na caracterização do conteúdo de uma integral divergente. Podemos escolher λ^2 de modo a obtermos uma parte finita. Entretanto, qualquer método consistente utilizado para eventualmente expressar $I_{quad}(\lambda^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$ deve fornecer um resultado independente de λ^2 . Isto é garantido, na nossa linguagem, pela relação de escala entre divergências básicas quadráticas:

$$I_{quad}(\mu^2) = I_{quad}(\lambda^2) - (\lambda^2 - \mu^2)I_{log}(\lambda^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\lambda^2 - \mu^2 + \mu^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right) \right], \quad (14.17)$$

ou seja, calcular o lado direito ou o esquerdo da equação acima deve levar ao mesmo resultado se o método for consistente. Poderíamos parametrizar $I_{quad}(\lambda^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$ da forma:

$$\begin{cases} I_{quad}(\lambda^2, \Lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[-\Lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) + \beta_0 \lambda^2 + \delta_0 \right] \\ I_{log}(\lambda^2, \Lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right) + \beta_0 \right]. \end{cases} \quad (14.18)$$

A substituição destas expressões em (14.17) nos revelará a alegada consistência. Ficamos então com:

$$-i\Sigma_1(p) = \left(\frac{\lambda_0}{2}\right) [I_{quad}(\mu^2)]. \quad (14.19)$$

14.3.2 Espalhamento Elástico ao Nível um “loop”

Nós agora consideramos a contribuição de segunda ordem para o espalhamento elástico de dois escalares, que vem do diagrama “peixe”, mostrado na fig.14.6.

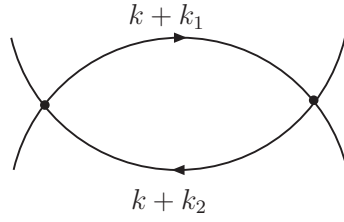


Figura 14.6: Diagrama “peixe” para o espalhamento de escalares.

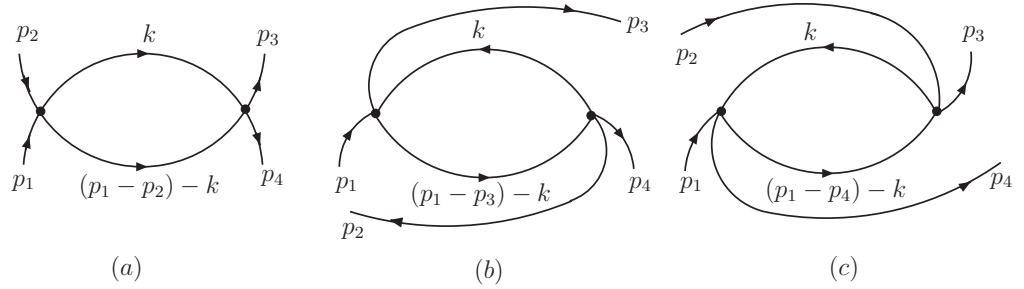


Figura 14.7: Diagrama “peixe” para o espalhamento de escalares.

As escolhas arbitrárias k_1 e k_2 nada possuem de relevante neste caso, devido ao caráter logarítmico da divergência. Além disto nós temos três permutações diferentes envolvendo as linhas internas e externas; os canais s , u e t , indicados na fig.14.7.

Utilizando as regras de Feynman obtemos:

$$\Gamma(p) = \left(\frac{(-i\lambda_0)^2}{2} \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i^2}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - \mu^2]}, \quad (14.20)$$

para $p^2 = s, u, t$. O cálculo da integral nos fornece seção (8.4.2):

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(p - k)^2 - \mu^2]} = \left\{ I_{\log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, p^2; \lambda^2)] \right\}. \quad (14.21)$$

Com isso a contribuição para os três canais somados fica:

$$\begin{aligned} \Gamma^{1-loop}(s, u, t) = & \frac{\lambda_0^2}{2} \left\{ [I_{\log}(\lambda_1^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, s; \lambda_1^2)] \right. \\ & + [I_{\log}(\lambda_2^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, u; \lambda_2^2)] \\ & \left. + [I_{\log}(\lambda_3^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, t; \lambda_3^2)] \right\}. \quad (14.22) \end{aligned}$$

Mais uma vez notemos a arbitrariedade existente em cada integral divergente, na definição das partes divergente e finita. Notemos entretanto que:

$$Z_0(\mu^2, \mu^2, 0; \lambda_1^2) = \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_1^2} \right). \quad (14.23)$$

Por isso é interessante reorganizar a expressão para:

$$\begin{aligned} \Gamma^{1-loop}(s, u, t) = & \frac{\lambda_0^2}{2} \left\{ \left[I_{log}(\lambda_1^2) \right] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_1^2} \right) \right] \\ & - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[Z_0(\mu^2, \mu^2, s; \lambda_1^2) - \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_1^2} \right) \right] \\ & + \left[I_{log}(\lambda_2^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_2^2} \right) \right] \\ & - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[Z_0(\mu^2, \mu^2, u; \lambda_2^2) - \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_2^2} \right) \right] \\ & + \left[I_{log}(\lambda_3^2) \right] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_3^2} \right) \right] \\ & - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[Z_0(\mu^2, \mu^2, t; \lambda_1^2) - \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_3^2} \right) \right] \left. \right\}. \quad (14.24) \end{aligned}$$

Com esta reorganização poderíamos definir as partes finita e divergente convenientemente para que a parte finita seja nula em $s = u = t = 0$. Nós entretanto notamos que, das propriedades das funções $Z_k(\mu^2, \mu^2, p^2; \lambda^2)$, temos que:

$$Z_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \lambda^2) + \ln \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) = Z_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \mu^2), \quad (14.25)$$

e das relações de escala:

$$I_{log}(\lambda_1^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda_1^2} \right) = I_{log}(\mu^2). \quad (14.26)$$

Então podemos escrever a forma simples:

$$\begin{aligned} \Gamma^{um-loop''}(s, u, t) = & \frac{\lambda_0^2}{2} \left\{ 3I_{log}(\mu^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(\mu^2, \mu^2, s; \mu^2) \right. \\ & - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(\mu^2, \mu^2, u; \mu^2) \\ & \left. - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) Z_0(\mu^2, \mu^2, t; \mu^2) \right\}. \quad (14.27) \end{aligned}$$

De onde temos:

$$\Gamma^{um\text{“loop”}}(0, 0, 0) = \frac{\lambda_0^2}{2} [3I_{log}(\mu^2)]. \quad (14.28)$$

Esta discussão serve para mostrar os modos diferentes de expressar os resultados relativos ao cálculo de integrais divergentes. A existência de uma ambiguidade na definição das partes finita e divergente é apenas aparente. Em nosso tratamento estas escolhas são todas equivalentes e representam apenas a liberdade de adotar uma escala de modo arbitrário. Nenhuma consequência física decorre destas diferentes escolhas possíveis pois nossos resultados exibem explicitamente invariância de escala e unicidade. É importante notar que isto é consequência das relações de consistência entre integrais divergentes sem o que haveria, claramente, ambiguidades presentes nos resultados.

14.3.3 Renormalização ao Nível um “loop”

Reunindo os resultados árvore e um “loop” para o espalhamento de dois escalares, obtemos para o ponto cinemático $s = u = t = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(0, 0, 0) &= \Gamma^{tree}(0, 0, 0) + \Gamma^{1-loop}(0, 0, 0) \\ &= -i\lambda_0 + \frac{3i\lambda_0^2}{2} \left(\frac{I_{log}(\mu^2)}{i} \right), \end{aligned} \quad (14.29)$$

ou seja:

$$\Gamma(0, 0, 0) = -i\lambda_0 \left\{ 1 + \frac{3i\lambda_0 I_{log}(\mu^2)}{2} \right\}. \quad (14.30)$$

Uma vez que definimos a constante de acoplamento física pela relação:

$$\Gamma(0, 0, 0) = -i\lambda_{física}, \quad (14.31)$$

devemos identificar:

$$\lambda_{física} = \lambda_0 \left\{ 1 + \frac{3i\lambda_0 I_{log}(\mu^2)}{2} \right\}. \quad (14.32)$$

A dificuldade em aceitar esta identificação está no fato de, a rigor, $I_{log}(\mu^2)$ ser uma quantidade divergente. Um modo de acomodar isto está na introdução de um “contratermo” na lagrangiana de modo a cancelar o termo incômodo obtido. Assim no coeficiente de ϕ^4 , que é em princípio arbitrário, introduzimos a modificação :

$$\lambda_0 \phi^4 \longrightarrow \left(\lambda_0 - \frac{3i\lambda_0^2 I_{log}(\mu^2)}{2} \right) \phi^4 = \lambda^{ren.} \phi^4, \quad (14.33)$$

que equivale a acrescentar na expansão perturbativa a contribuição de outro diagrama de ordem λ_0^2 , porém de nível árvore, com valor igual a:

$$= -i \left[\frac{3i\lambda_0^2 I_{log}(\mu^2)}{2} \right]. \quad (14.34)$$

O fator 3/2 deve ser entendido como sendo um fator 1/2 para cada uma das funções de Green de dois pontos caracterizando os canais s , u e t .

É importante perceber que o diagrama de contratermo é topologicamente de nível árvore porém perturbativamente é de ordem λ_0^2 . Por isso quando calculamos até ordem λ_0 (nível árvore apenas) esta contribuição, no espírito perturbativo, não foi incluída. As contribuições de ordem superior ao cálculo um “loop”, entretanto, não podem dispensar este termo. Ao proceder deste modo estamos fazendo apenas uso da liberdade disponível de escolher livremente o coeficiente de ϕ^4 na lagrangiana. Isto se deve ao fato de, ao construirmos a lagrangiana, na implementação das simetrias consideradas relevantes, apenas fica definida a forma funcional do termo, ϕ^4 neste caso, e não o coeficiente, que é uma constante qualquer, cuja identificação deverá ser feita fenomenologicamente. Em resumo a reparametrização ao nível um “loop” implica em acrescentarmos um diagrama árvore na mesma ordem que aqueles de um “loop”, como mostrado na fig.14.8.

Segundo esta reinterpretção da expansão perturbativa, *em ordens superiores a esta, cada vez que um diagrama contiver uma subestrutura topologicamente equivalente a estas, deve ser adicionado o seu correspondente diagrama de contratermo*. Este procedimento deve “remover” os termos divergentes da expressão final para a amplitude. Na possibilidade de “reduzir” diagramas de ordem superior, progressivamente, em topologias divergentes de ordem inferior reside a idéia da renormalização.

Nós agora nos voltamos para a propagação da partícula escalar interagente. A inclusão de contribuições de auto-energia nos permite somar a série, no espírito perturbativo, e colocar o propagador corrigido na forma:

$$iS_F(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu_0^2 - \Sigma(p)}, \quad (14.35)$$

onde $\Sigma(p)$ é a auto-energia na aproximação considerada. No nosso caso obtivemos:

$$-i\Sigma(p) = \frac{\lambda_0}{2} I_{quad}(\mu^2). \quad (14.36)$$

Do que podemos ver que o coeficiente de $(p^2)^0$ foi modificado pela correção perturbativa. Por sua vez aquele de $(p^2)^1$ não o foi. Seguindo o raciocínio perturbativo, a massa física

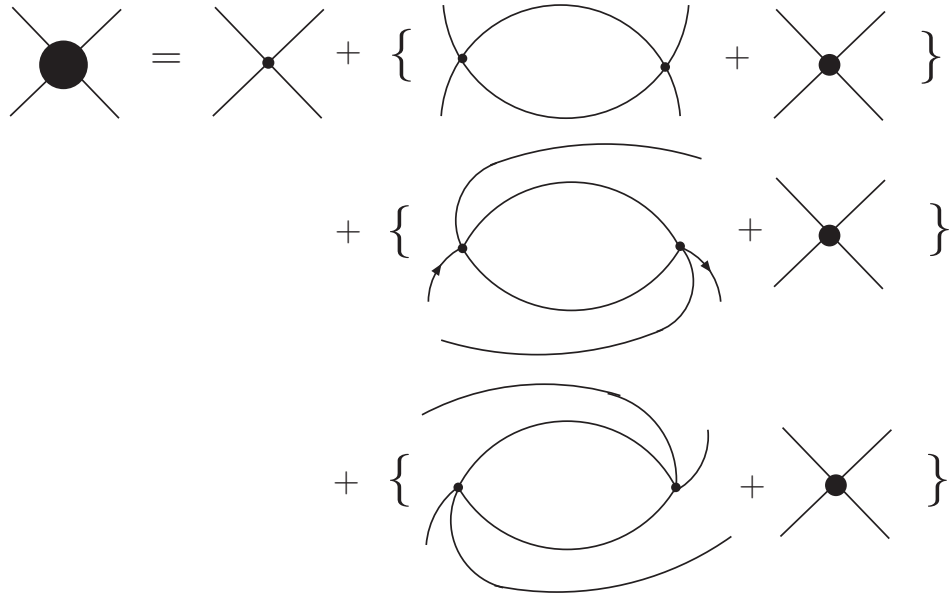


Figura 14.8: Diagramas Contribuindo para a amplitude de espalhamento de duas partículas esclares em ordem λ_0^2 , incluindo os diagramas de contratermos.

da partícula deve ser identificada, neste nível de aproximação, com:

$$\mu_{fis}^2 = \mu_0^2 + \frac{i\lambda_0}{2} I_{quad}(\mu_0^2). \quad (14.37)$$

Novamente isto envolve uma quantidade divergente. Nós por outro lado podemos fazer uso da liberdade de redefinir os coeficientes dos termos da lagrangiana. Fazendo então :

$$\mu_0^2 \longrightarrow \mu_0^2 - \frac{i\lambda_0}{2} I_{quad}(\mu_0^2), \quad (14.38)$$

estaremos incluindo um diagrama árvore na série perturbativa que define o propagador (inverso) da partícula interagente; o contratermo de massa, mostrado na fig.(14.8). Este é da mesma ordem que aquele de um “loop” e a escolha adequada do seu valor, a escolha acima, elimina a incômoda divergência.

Esta redefinição implica na inclusão obrigatória, em diagramas de ordem superior, do contratermo toda vez que a topologia do diagrama “tadpole” estiver presente. Vamos verificar isto ao considerar, a seguir, o nível dois “loops”.

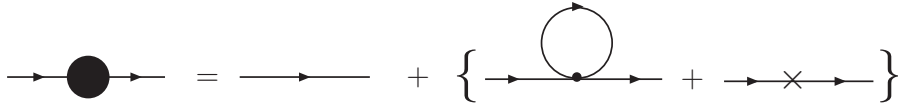


Figura 14.9: Diagramas Contribuindo para a propagação da partícula escalar interagente, incluindo aquele de contratermo de massa.

14.4 Nível dois “loops” de Aproximação

Consideremos agora as contribuições, para os processos que estamos considerando, incluindo diagramas de dois “loops”, como nas figs.14.10 e 14.11, e posteriormente a análise da reparametrização.

Vamos então considerar cada um dos diagramas individualmente no que diz respeito ao cálculo e à identificação dos diagramas de contratermos. Posteriormente reuniremos os resultados para a reparametrização em si.

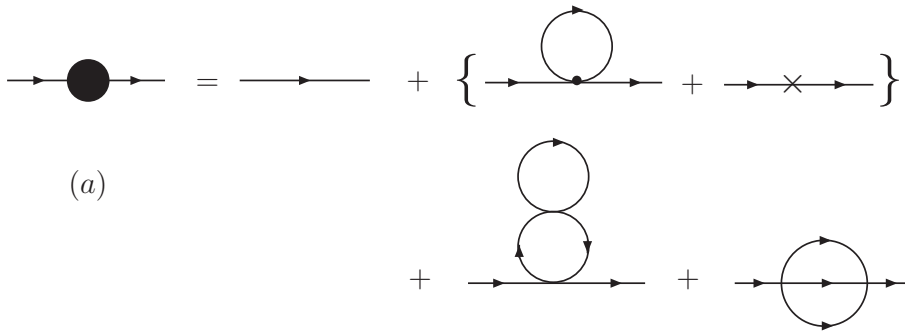


Figura 14.10: Representação diagramática da expansão perturbativa ao nível dois “loops” para a propagação da partícula interagente.

14.4.1 Auto Energia ao Nível dois “loops”

Inicialmente consideremos a diagrama “double scoop”¹, mostrado na fig.14.12.

A utilização das regras de Feynman nos fornece:

$$-i\Sigma_{21}(p) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i^2i}{[(k+k')^2 - \mu^2][(l+l')^2 - \mu^2]}. \quad (14.39)$$

¹“double scoop”.....

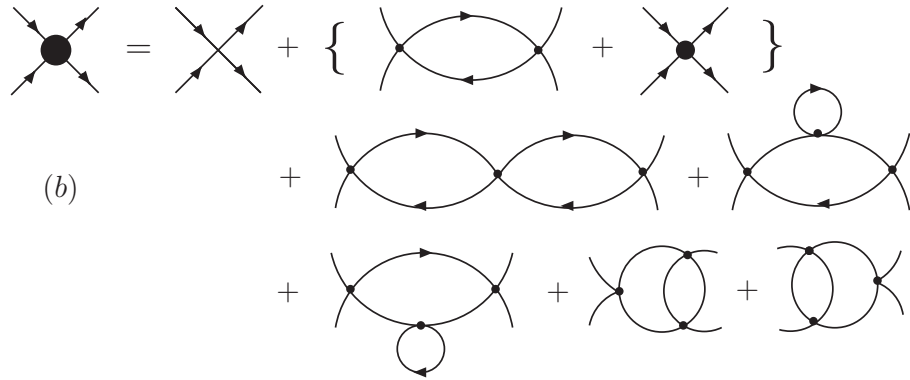


Figura 14.11: Representação diagramática da expansão perturbativa ao nível dois “loops” para o espalhamento elástico.

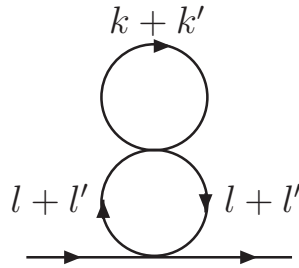


Figura 14.12: Diagrama “double scoop” de dois “loops” para a auto-energia.

Após as manipulações e cálculos necessários podemos escrever isto como:

$$-i\Sigma_{21}(p) = \frac{(i\lambda_0^2)}{4} [I_{log}(\mu^2)][I_{quad}(\mu^2)]. \quad (14.40)$$

Nós agora nos questionamos a respeito das consequências da renormalização efetuada no nível um “loop” sobre o diagrama “double scoop”. Em outras palavras quais as subestruturas um “loop” que possui o diagrama de dois “loops” considerado, e conseqüentemente quais os diagramas de contratermos associados. A fig.(14.11) mostra a existência de subestruturas de um e dois pontos do nível um “loop” que foram redefinidos na reparametrização. Com isso devemos incluir os correspondentes diagramas de contratermos mostrados na fig.14.13.

Notemos que o diagrama da fig.14.12b adquire topologia “tadpole” e isto induz um novo diagrama de contratermo, tipicamente de dois “loops”, como na fig.14.13. Aplicando

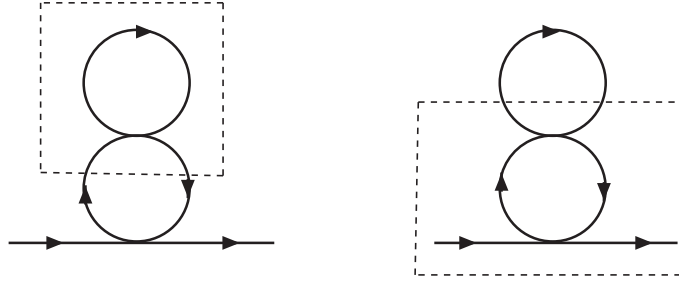


Figura 14.13: Subestruturas de um “loop” no diagrama “double scoop” indicando a presença de contratermos.

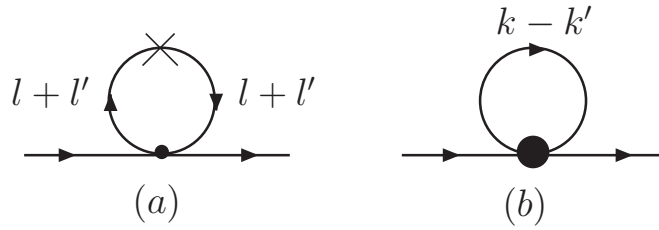


Figura 14.14: Diagramas de contratermos um “loop” induzidos pela identificação de respectivas subestruturas na fig.(14.11).

as regras de Feynman obtemos, para o diagrama da fig.14.12a:

$$-i\Sigma_{22}(p) = \left\{ \frac{-i\lambda_0}{2} [I_{quad}(\mu^2)] \right\} \frac{(-i\lambda_0)}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i^2}{[(l+l')^2 - \mu^2]}, \quad (14.41)$$

que fica então:

$$-i\Sigma_{22}(p) = \frac{-i\lambda_0^2}{4} [I_{quad}(\mu^2)][I_{log}(\mu^2)]. \quad (14.42)$$

Por sua vez o diagrama da fig.(14.11.b) nos fornece:

$$-i\Sigma_{23}(p) = \left\{ \frac{-i\lambda_0^2}{2} [I_{log}(\mu^2)] \right\} \frac{(-i)}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(k+k')^2 - \mu^2]}, \quad (14.43)$$

ou então:

$$-i\Sigma_{23}(p) = \frac{-i\lambda_0^2}{4} [I_{quad}(\mu^2)][I_{log}(\mu^2)]. \quad (14.44)$$

A inclusão da contribuição do diagrama de contratermo de nível árvore (em ordem λ_0^2), fig.(14.13.b), gera um fator adicional, cuja avaliação fornece:

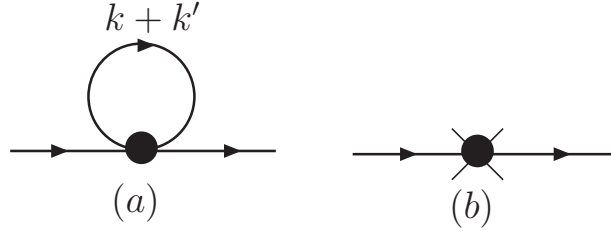


Figura 14.15: Diagrama de contratermo com topologia um “loop”, (a), e seu correspondente contratermo, (b).

$$-i\Sigma_{24}(p) = \left\{ \frac{i\lambda_0^2}{2} [I_{log}(\mu^2)] \right\} \frac{1}{2} [I_{quad}(\mu^2)], \quad (14.45)$$

ou seja:

$$-i\Sigma_{24}(p) = \frac{-i\lambda_0^2}{4} [I_{log}(\mu^2)][I_{quad}(\mu^2)]. \quad (14.46)$$

Uma análise imediata nos revela o importante resultado:

$$-i [\Sigma_{21} + \Sigma_{22} + \Sigma_{23} + \Sigma_{24}] = 0. \quad (14.47)$$

Isto não é em todo surpreendente uma vez que a contribuição, do diagrama “double scoop”, não depende do momento externo e gera um fator puramente divergente. A própria definição de contratermo implica no cancelamento total desta contribuição. Restamos então o diagrama de dois “loops” da fig.(14.14), denominado “setting sun”.

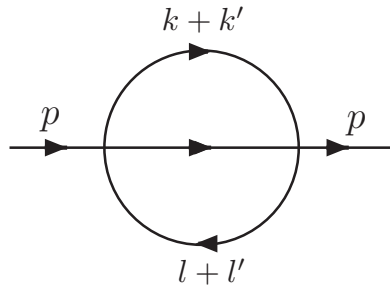


Figura 14.16: Diagrama “setting sun”, com rótulos arbitrários para as linhas internas.

Utilizando as regras de Feynman podemos escrever:

$$-i\Sigma_{25}(p) = \frac{(-i\lambda_0)^2}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i^3}{[(k+k')^2 - \mu^2][(l+l')^2 - \mu^2][(k+k'+p-l+l')^2 - \mu^2]} \quad (14.48)$$

De imediato podemos observar que as duas integrações não podem ser escritas, de modo algum, como o produto de duas integrais que envolvam separadamente os momentos k e l de integração. Nós então nos deparamos com um problema ainda não tratado à luz da prescrição que estamos adotando. Esta integral discutiremos em detalhes na seção (14.5) e depois retomaremos os resultados para a análise de reparametrização na seção (14.6). Por ora podemos nos questionar a respeito dos diagramas de contratermos induzidos pela possíveis subestruturas de topologia um “loop” divergente. É facilmente identificável a existência de duas destas estruturas superpostas. Por sua vez os respectivos contratermos possuem topologia “tadpole” induzindo novos contratermos, estes tipicamente de dois “loops” (árvores de ordem λ_0^2), fig.(14.15). A soma das contribuições dos diagramas das figs.(14.15.b) e (14.15.c), os quais já consideramos, oferecem um cancelamento mútuo. Assim as divergências do diagrama “setting sun” caracterizarão contratermos de dois “loops”.

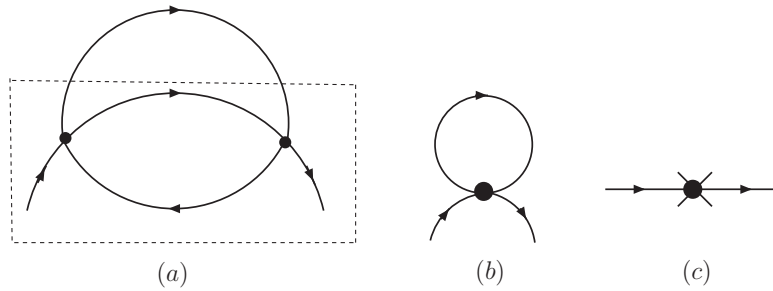


Figura 14.17: Subestrutura com topologia um “loop” divergente e correspondentes contratermos um “loop” (b) e árvore (c) no diagrama “setting sun” . Outro conjunto equivalente pode ser obtido por reflexão no eixo horizontal.

Passemos agora para o espalhamento elástico onde identificaremos outra estrutura semelhante à integral (14.48) porém com grau logarítmico de divergência.

14.4.2 Espalhamento Elástico ao Nível Dois “loops”

Consideremos então as contribuições de diagramas de ordem λ_0^3 , que incluem aqueles de dois “loops”. Primeiro tomemos o diagrama da fig.(14.16).

Aplicando as regras de Feynman podemos escrever:

$$\Gamma_{21}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \quad (14.49)$$

$$\times \frac{i^4}{[(k+k')^2 - \mu^2]\{[q - (k+k')]^2 - \mu^2\}[(l+l')^2 - \mu^2]\{[q - (l+l')]^2 - \mu^2\}}.$$

De onde podemos ver que as integrais podem ser escritas como o produto de duas integrações envolvendo os momentos k e l separadamente. Além disso as duas integrais são logaritmicamente divergentes o que nos permite efetuar “shifts” e eliminar os momentos arbitrários k' e l' . Assim teremos:

$$\Gamma_{21}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(q-k)^2 - \mu^2]} \right\}^2. \quad (14.50)$$

Logo, podemos escrever:

$$\Gamma_{21}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \lambda^2)] \right\}^2, \quad (14.51)$$

para $q^2 = s, u, t$. Nós então nos questionamos a respeito das subestruturas um “loop” e seus correspondentes diagramas de contratermos. É fácil perceber estas funções de dois pontos, com topologia um “loop” divergente, como mostrado na fig.(14.17). Por sua vez os diagramas de contratermos também se reduzem a topologia um “loop” divergentes e têm seus próprios contratermos, como mostrados na fig.(14.18).

Notemos novamente a necessidade da inclusão dos contratermos árvore aos diagramas um “loop” que são contratermos daqueles de dois “loops”. Isto é necessário para que nenhum diagrama, com topologia de uma ordem onde já foi feita a renormalização, introduza novas divergências. Novos contratermos devem ser introduzidos a cada ordem perturbativa mas estes não podem ter origem em diagramas cuja topologia já sofreu renormalização.

O cálculo dos diagramas da fig.(14.18) somados fornecem:

$$\Gamma_{22}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ 2I_{log}(\lambda^2) - \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \lambda^2)] \right\}^2, \quad (14.52)$$

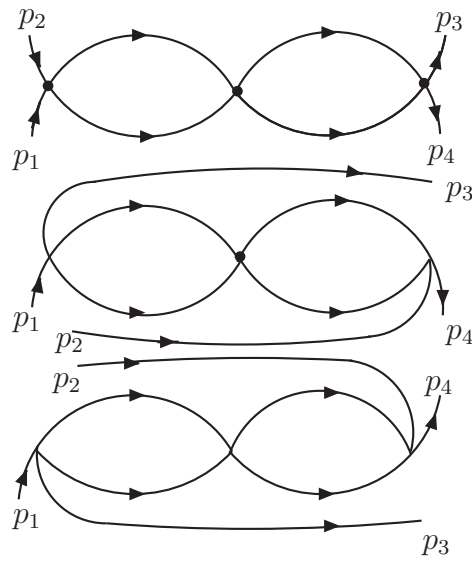


Figura 14.18: Diagramas contribuindo para o espalhamento elástico de dois escalares em ordem λ_0^3 nos canais s (a); u (b) e t (c).

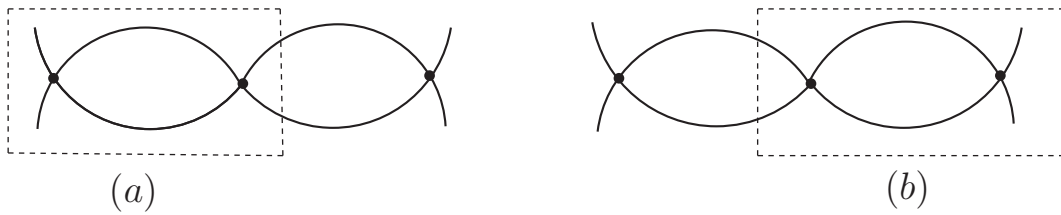


Figura 14.19: Subestruturas um “loop” no diagrama de dois “loops”.

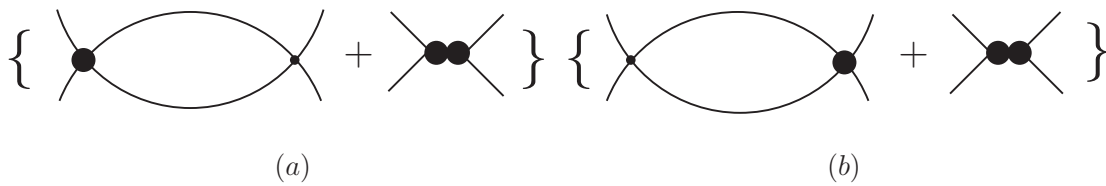


Figura 14.20: Diagramas de contratermos respectivos às subestruturas identificadas nos diagramas da fig.(14.17) e seus correspondentes contratermos.

tal que a soma das contribuições Γ_{21} e Γ_{22} nos canais s, u, t fornecem:

$$(\Gamma_{21} + \Gamma_{22})_{s,u,t} = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ [I_{\log}(\lambda^2)]^2 + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 [Z_0^2(\mu^2, \mu^2, s; \lambda^2)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ [I_{log}(\lambda^2)]^2 + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 [Z_0^2(\mu^2, \mu^2, u; \lambda^2)] \right\} \\
& + \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ [I_{log}(\lambda^2)]^2 + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 [Z_0^2(\mu^2, \mu^2, t; \lambda^2)] \right\}. \quad (14.53)
\end{aligned}$$

Nesta expressão observamos o cancelamento dos termos com divergências dependentes dos momentos externos. Consideremos agora a contribuição do diagrama com correção de auto-energia nas linhas internas, com mostrado na fig.(14.19). Aplicando as regras de Feynman obtemos:

$$\Gamma_{23}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{[(k+k')^2 - \mu^2]} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i^3}{[(l+l')^2 - \mu^2] \{ [q - (l+l')]^2 - \mu^2 \}}, \quad (14.54)$$

o que escrevemos como:

$$\Gamma_{23}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} [I_{quad}(\mu^2)] \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{Y_0(\mu^2, \mu^2, q^2, \lambda^2)}{\lambda^2} \right]. \quad (14.55)$$

O próximo passo é identificar os diagramas de contratermos através das subestruturas um “loop” divergentes contidas no diagrama.

É fácil identificar o diagrama “tadpole” na fig.(14.20) e avaliar a contribuição do diagrama de contratermo. Esta proporciona um cancelamento exato entre o diagrama dois “loops”:

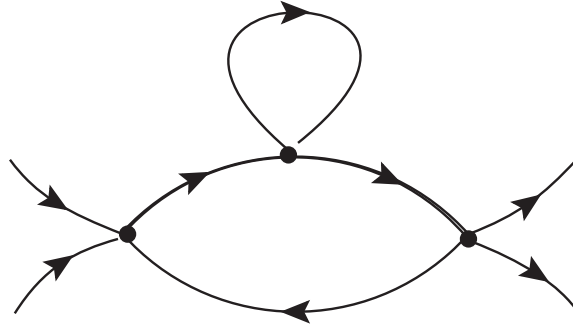


Figura 14.21: Diagrama dois “loops” contribuindo para o espalhamento elástico com correção de auto-energia em linha interna.

$$\Gamma_{24}(q^2) = -\Gamma_{23}(q^2). \quad (14.56)$$

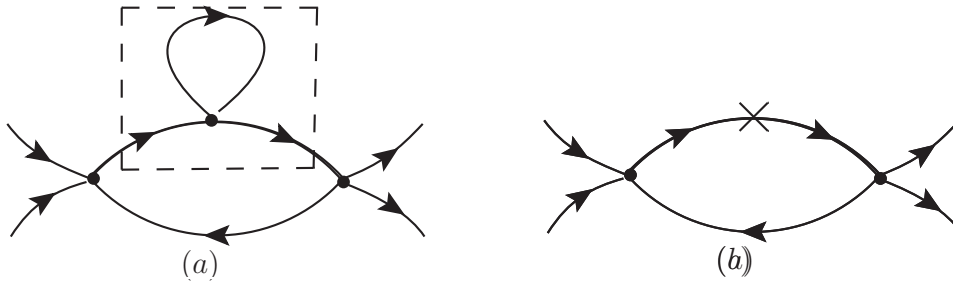


Figura 14.22: Subestruturas um “loop” e diagrama de contratermo associado.

Deste modo todos os canais (s, u, t) , mais o diagrama obtido deste pela reflexão no eixo horizontal, não oferecem contribuições ao espalhamento elástico pois são eliminados pela renormalização efetuada no nível 1 “loop”. Este cancelamento total é de grande importância pois a dependência deste nos momentos externos é representada pela função $Y_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \lambda^2)$ que, como sabemos, possui um comportamento indesejável em $q^2 = (4\mu^2)$ comprometendo a unitariedade. Em teorias não-renormalizáveis onde as divergências não podem ser eliminadas, em princípio, isto oferece uma situação problemática. Adotar um valor para $I_{quad}(\lambda^2)$ diferente de zero implica na manutenção deste comportamento nas amplitudes físicas.

Consideremos então a última das topologias de dois “loops” no espalhamento elástico, indicado na fig.(14.21). A utilização das regras de Feynman nos permite escrever:

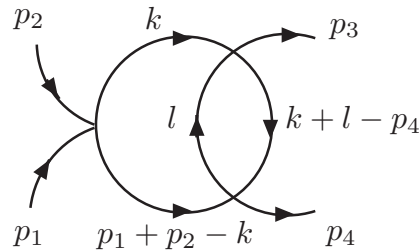


Figura 14.23: Diagrama contribuindo para o espalhamento elástico de dois escalares contendo divergências não separáveis em produto.

$$\Gamma_{25}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i^4}{(k^2 - \mu^2)[(q - k)^2 - \mu^2](l^2 - \mu^2)[(k + l - p_4)^2 - \mu^2]}, \quad (14.57)$$

onde já levamos em conta o grau de divergência envolvido eliminando a necessidade de adoção de rótulos arbitrários para os momentos das linhas internas.

A integral em $\Gamma_{25}(q^2)$ não pode ser escrita como o produto de integrais nos momentos k e l separadamente. Nós a estudaremos na seção 14.6. Por ora consideremos a possibilidade de diagramas de contratermos. A identificação de uma estrutura um “loop” divergente induz a presença do correspondente contratermo, que, por sua vez, também se apresenta como uma topologia um “loop” divergente trazendo consigo o próprio contratermo, como mostrado na fig.(14.22).

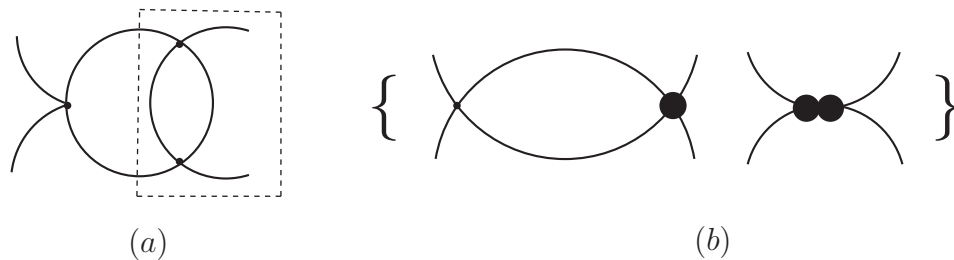


Figura 14.24: Subestrutura um “loop” no diagrama de dois “loops”, a) e diagrama de contratermo associado e seu próprio contratermo, b).

O cálculo das contribuições dos diagrama da fig.(14.22.b) nos fornece para a soma dos dois:

$$\Gamma_{26}(q^2) = \frac{(-i\lambda_0)^3}{4} \left\{ [I_{log}(\lambda^2)] \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \mu^2)] \right\}. \quad (14.58)$$

A fim de completar a análise ao nível dois “loops” vamos então estudar as integrais associadas aos diagramas com divergências superpostas.

14.5 Divergências Superpostas

Ao estudarmos diagramas com dois “loops”, portanto duas integrais, nos deparamos com integrais divergentes que não podem ser escritas como o produto de integrações envolvendo apenas um dos momentos separadamente. Sendo assim, dentro da estratégia que adotamos, o conteúdo divergente não pode ser colocado apenas em termos dos objetos $I_{log}(\lambda^2)$ e $I_{quad}(\lambda^2)$. Devemos então investigar a possibilidade de aplicar o procedimento nesta situação e buscar os novos objetos básicos divergentes que representarão este tipo

de divergência, as relações entre eles e suas relações de escala. Princípios por aquela de menor grau de divergência.

14.5.1 Divergência Logarítmica

Consideremos então a integral:

$$I(q, p) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(q - k)^2 - \mu^2](l^2 - \mu^2)[(k + l - p)^2 - \mu^2]}, \quad (14.59)$$

que é a forma geral obtida por ocasião do cálculo do diagrama da seção anterior. Para tratá-la, dentro da filosofia introduzida nos capítulos anteriores, nós inicialmente admitimos a presença implícita de uma distribuição regularizadora e então manipulamos algebricamente o integrando até que as integrais dependentes dos momentos externos p e q sejam finitas, podendo assim dispensar a presença da regularização. As demais (divergentes) permanecerão sem alterações exceto pela redução de bilineares nos momentos dos “loops” do numerador, através das relações de consistência identificadas nos estudos anteriores.

A integral possui uma divergência de grau logarítmico e nós inicialmente a reorganizamos para:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)[(q - k)^2 - \mu^2](l^2 - \mu^2)[(k + l - p)^2 - \mu^2]} \\ &= \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2[(k + l)^2 - \mu^2](l^2 - \mu^2)} \\ & \quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - 2q \cdot k)}{(k^2 - \mu^2)^2(l^2 - \mu^2)[(k + l)^2 - \mu^2][(q - k)^2 - \mu^2]} \\ & \quad - \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{[p^2 - 2p \cdot (k + l)]}{(k^2 - \mu^2)^2(l^2 - \mu^2)[(k + l)^2 - \mu^2][(k + l - p)^2 - \mu^2]} \\ & \quad + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - 2q \cdot k)[p^2 - 2p \cdot (k + l)]}{(k^2 - \mu^2)^2(l^2 - \mu^2)[(q - k)^2 - \mu^2][(k + l)^2 - \mu^2][(k + l - p)^2 - \mu^2]} \end{aligned}$$

Na reorganização acima já retiramos o índice Λ das últimas integrais devido à constatação de que as integrais obtidas são finitas em ambas as integrações k e l . A primeira das integrais, obtidas nessa manipulação, não possui dependência nos momentos externos e nós a definimos como o objeto básico divergente para divergências logarítmicas superpostas:

$$I_{log}^{ov}(\mu^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2[(k + l)^2 - \mu^2](k^2 - \mu^2)}. \quad (14.60)$$

A segunda das integrais ainda possui uma integração divergente e pode ser reorganizada:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(-)(q^2 - 2q \cdot k)}{(k^2 - \mu^2)^2 (l^2 - \mu^2) [(k+l)^2 - \mu^2] [(q-k)^2 - \mu^2]} \\
&= \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-)(q^2 - 2q \cdot k)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(q-k)^2 - \mu^2]} \\
& \quad + \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - 2q \cdot k)(k^2 - 2k \cdot l)}{(k^2 - \mu^2)^2 [(k+l)^2 - \mu^2] (l^2 - \mu^2)^2 [(q-k)^2 - \mu^2]}. \quad (14.61)
\end{aligned}$$

Apenas a primeira contém divergência e se apresenta de uma forma bastante conveniente pois o conteúdo divergente está apenas na primeira integração (momento l) e na forma de um objeto divergente conhecido. Reunindo os resultados escrevemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2) [(q-k)^2 - \mu^2] (l^2 - \mu^2) [(k+l-p)^2 - \mu^2]} \\
&= I_{log}^{ov}(\mu^2) - [I_{log}(\lambda^2)] \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \right) [Z_0(\mu^2, \mu^2, q^2; \mu^2)] \\
& \quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(-)[p^2 - 2p \cdot (k+l)]}{(k^2 - \mu^2)^2 (l^2 - \mu^2) [(k+l)^2 - \mu^2] [(k+l-p)^2 - \mu^2]} \\
& + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - 2q \cdot k)[k^2 - 2k \cdot l]}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)^2 [(q-k)^2 - \mu^2] [(k+l)^2 - \mu^2]} \\
& + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 - 2q \cdot k)[p^2 - 2p \cdot (k+l)]}{(k^2 - \mu^2)^2 (l^2 - \mu^2) [(q-k)^2 - \mu^2] [(k+l)^2 - \mu^2] [(k+l-p)^2 - \mu^2]}
\end{aligned}$$

As integrais finitas obtidas possuem a importante propriedade de se anularem quanto $q^2 = p^2 = 0$. A primeira integral obtida é típica da correção ao nível dois “loops” e se constituirá num novo contratérmo, necessário para a renormalização ao nível dois “loops”. A segunda corresponderá ao contratérmo devido à topologia um “loop” divergente contida no diagrama de dois “loops”. Antes de discutir possíveis propriedades do objeto básico divergente identificado, $I_{log}^{ov}(\mu^2)$, vamos considerar aquela integral quadraticamente divergente com estrutura similar a esta, de divergências superpostas.

14.5.2 Divergência Quadrática

Consideremos agora a integral:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2) [(p+l-k)^2 - \mu^2]}, \quad (14.62)$$

que foi obtida por ocasião do cálculo do diagrama “setting sun”. Aqui fizemos k' e l' nulos o que representa uma escolha específica para os rótulos dos momentos das linhas internas. Fazemos isso para evitar, por ora, complicações desnecessárias. Posteriormente argumentaremos que, de fato, as dependências com os momentos arbitrários k' e l' são removidas pelas relações de consistência entre integrais divergentes, do mesmo modo que nos problemas anteriormente tratados.

A integral acima é divergente e nós, no primeiro passo, assumiremos a presença implícita de uma distribuição regularizadora. Em seguida efetuaremos as manipulações algébricas ao nível do integrando para colocar a integral na forma desejada.

Após algumas manipulações podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(p + l - k)^2 - \mu^2]} \\
= & \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]} \\
& + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(-)2(l - k) \cdot p}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^2} \\
& + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(-)p^2}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^2} \\
& + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{[2(l - k) \cdot p]^2}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^3} \\
& + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{[p^2 + 4(l - k) \cdot p]p^2}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^3} \\
& + \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(-)[p^2 + 2(l - k) \cdot p]^3}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^3[(p + l - k)^2 - \mu^2]}. \quad (14.63)
\end{aligned}$$

As integrais foram colocadas em ordem decrescente no grau de divergência. As últimas são finitas e por isso não carregam mais o índice Λ no sinal de integração, indicando a remoção da regularização implícita.

Nós agora analisamos os resultados obtidos. Primeiro identificamos a presença da integral quadraticamente divergente independente do momento externo. Nós a definimos como o objeto básico divergente:

$$I_{quad}^{ov}(\mu^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]}. \quad (14.64)$$

A segunda observação é que a integral de grau linear de divergência se anula por ser ímpar

tanto em k quanto em l :

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(-)2(l-k) \cdot p}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]} = 0. \quad (14.65)$$

Neste passo exigimos apenas da possível regularização, que a distribuição seja par nos momentos dos “loops”. Se isto não fosse verdade não haveria nenhuma chance de consistência. No presente caso o propagador da partícula escalar ganharia um termo ímpar no momento p , contrariando todos os princípios de invariância associados à equação de onda relativística da partícula escalar.

A próxima observação revela a presença de duas integrais logicamente divergentes. Uma delas possui bilineares dos momentos dos “loops” e necessitará de uma “redução”. Assim primeiro notamos que a mais simples delas é idêntica aquela que definimos na seção anterior como $I_{log}^{ov}(\mu^2)$;

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(-)p^2}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]^2} = (-)p^2 I_{log}^{ov}(\mu^2). \quad (14.66)$$

Por sua vez, considerando a segunda das integrais logicamente divergentes obteremos o resultado, após algumas manipulações:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(l-k)_{\mu}(l-k)_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]^3} \\ &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} [I_{log}^{ov}(\mu^2)] - \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{g_{\mu\nu}}{8} [I_{log}(\mu^2)] \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \frac{g_{\mu\nu}}{8} \left\{ -\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{dz}{[z(1-z) - 1]} - \int_0^1 dz \frac{\ln[z(1-z)]}{[z(1-z) - 1]^2} \right\}, \end{aligned} \quad (14.67)$$

Para obtê-lo utilizamos apenas a presença implícita da distribuição regularizadora (par nos momentos do “loop”), integrações em integrais finitas e a relação de consistência entre integrais divergentes:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \mu^2)^3} = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2}. \quad (14.68)$$

Notemos com isso o cancelamento da divergência logarítmica superposta restando apenas uma divergência do tipo $I_{log}(\mu^2)$ proporcional a p^2 . Teremos portanto contribuição para a renormalização da constante do campo devido ao diagrama “setting sun”. Reunindo estes resultados todos podemos escrever a integral eq.(14.64) na forma:

$$\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(p+l-k)^2 - \mu^2]}$$

$$= I_{quad}^{ov}(\mu^2) - \frac{p^2}{2} \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) I_{log}(\mu^2) + \eta_1 \right] + I_{fin}(p^2). \quad (14.69)$$

Aqui definimos:

$$\eta_1 = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left[\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{dz}{[z(1-z) - 1]} + \int_0^1 dz \frac{\ln[z(1-z)]}{[z(1-z) - 1]^2} \right], \quad (14.70)$$

e também:

$$I_{fin}(p^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(p^2)^2}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]^3} \\ + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(-)[p^2 + 2(l-k) \cdot p]^3}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]^3[(p+l-k)^2 - \mu^2]}.$$

É importante que notemos as propriedades:

$$\begin{cases} I_{fin}(p^2 = 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial I_{fin}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0} = 0, \end{cases} \quad (14.71)$$

bastante úteis para a definição das quantidades físicas associadas ao propagador da partícula escalar, na aproximação perturbativa incluindo contribuições de diagramas com dois “loops”.

De posse destas informações nós retornaremos à discussão da renormalização ao nível dois “loops” para posteriormente estudar as propriedades dos objetos básicos $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ e $I_{log}^{ov}(\mu^2)$ definidos nesta seção.

14.6 Renormalização ao Nível dois “loops”

Nós agora colecionamos todos os resultados obtidos a fim de discutir a reparametrização da teoria ao nível dois “loops”. Primeiro tomamos as correções ao propagador da partícula escalar. Os diagramas “double sloop” e “setting sun” foram considerados sendo que o primeiro acabou cancelado pelos contratermos como esperado. Assim as contribuições vêm de fato do diagrama “setting sun”. O termo proporcional a $(p^2)^0$ foi obtido divergente e proporcional a $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ ao passo que aquele proporcional a $(p^2)^1$ é da forma $aI_{log}^{ov}(\mu^2) + b$. A manutenção da identificação do termo proporcional a $(p^2)^0$ como sendo a massa física da partícula exige a introdução de um novo contratermo de massa de valor:

$$\left[\frac{\lambda_0^2}{6} I_{quad}^{ov}(\mu^2) \right] \phi^2. \quad (14.72)$$

Por sua vez o coeficiente de p^2 , a constante de normalização do campo escalar (uma distribuição no espaço das coordenadas) exige o contratermo:

$$\frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2} \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{I_{log}(\mu^2)}{2} + \eta_1 \right]. \quad (14.73)$$

A representação das contribuições e seus contratermos está mostrada diagramaticamente na fig.(14.23).

Por sua vez as contribuições de dois “loops” para o espalhamento elástico modificam o valor em $s = u = t = 0$ da amplitude, levando a uma nova parametrização. O caráter divergente destas contribuições pode ser removido com a introdução de novos contratermos. Como tal os diagramas da fig.(14.18) induzem contratermos da forma:

$$-\frac{i\lambda_0^3}{4} [I_{log}(\mu^2)]^2 \frac{\phi^4}{4!}. \quad (14.74)$$

Aquele da fig.(14.22), por sua vez, induz:

$$-\frac{i\lambda_0^3}{4} [I_{log}^{ov}(\mu^2)] \frac{\phi^4}{4!}. \quad (14.75)$$

A representação diagramática completa está mostrada na fig.(14.24). Os resultados obtidos com o tratamento através da estratégia que estamos utilizando, no que diz respeito à renormalização, mostra-se consistente. É possível identificarmos os contratermos correspondentes às partes divergentes e expressá-las em termos de quantidades básicas divergentes sem que estas tenham sido, de fato, calculadas. Conseguimos com isso evitar métodos de regularização específicos.

Podemos colocar nossas conclusões na linguagem da lagrangiana da teoria. Após as manipulações e cálculos podemos escrever:

$$\mathcal{L}^{ren} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}^{c.t.}, \quad (14.76)$$

onde \mathcal{L}_0 é a lagrangiana original;

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4, \quad (14.77)$$

e a lagrangiana dos contratermos é dados por:

$$\mathcal{L}^{c.t.} = \frac{1}{2} A \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} \mu_0^2 B \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 C \phi_0^4. \quad (14.78)$$

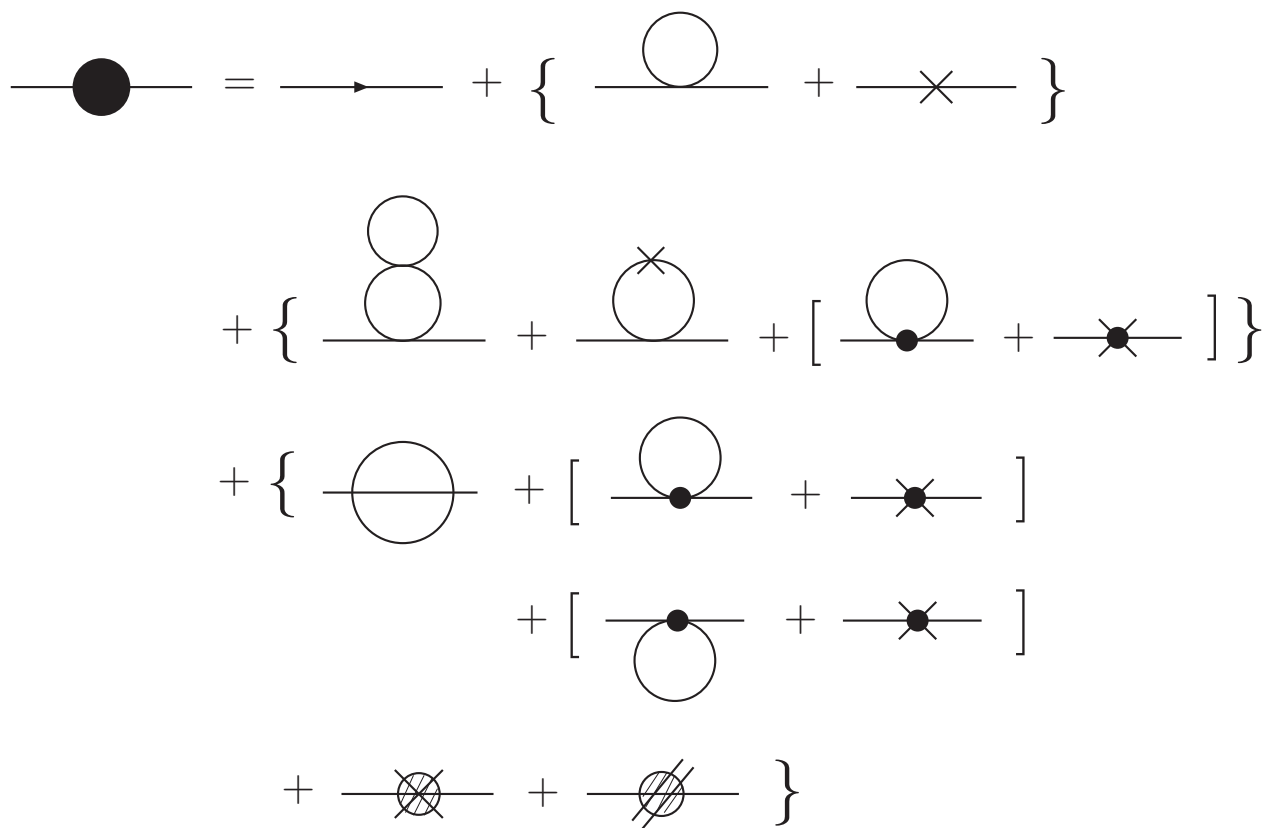


Figura 14.25: Todos os diagramas contribuindo para a auto-energia do escalar até dois “loops”. Os diagramas e seus respectivos contratermos foram agrupados entre chaves e colchetes para ressaltar as suas origens.

A lagrangiana renormalizada é então obtida em termos de novos parâmetros e campos:

$$\mathcal{L}^{ren} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad (14.79)$$

onde:

$$\phi \equiv (1 + A)^{1/2} \phi_0 \equiv Z_\phi^{1/2} \phi_0, \quad (14.80)$$

$$\mu^2 = \frac{(1 + B)}{(1 + A)} \mu_0^2 = \mu_0^2 (1 + B) Z_\phi^{-1}, \quad (14.81)$$

e

$$\lambda^2 = \frac{(1 + C)}{(1 + A)^2} = \lambda_0^2 (1 + C) Z_\phi^{-2}. \quad (14.82)$$

Nossos cálculos forneceram:

$$A = \left[\left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \frac{I_{log}(\mu_0^2)}{2} + \frac{\eta_1}{2} \right] \frac{\lambda_0^2}{6} \quad (14.83)$$

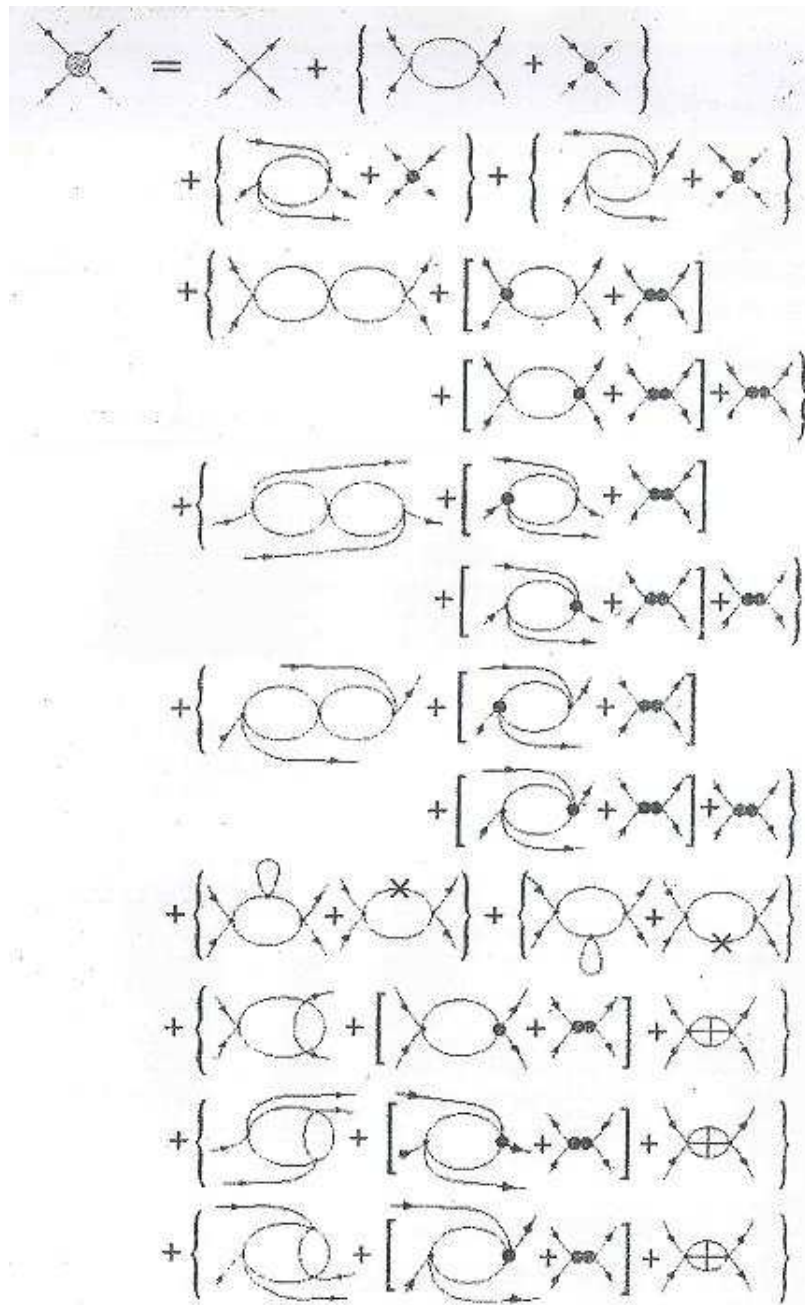


Figura 14.26: Todos os diagramas contribuindo para o espalhamento elástico de dois escalares até dois “loops”. Os diagramas e seus respectivos contratermos foram agrupados para ressaltar as suas origens.

$$B = -\frac{i\lambda_0}{2}[I_{quad}(\mu_0^2)] - \frac{\lambda_0^2}{6}[I_{quad}^{ov}(\mu_0^2)] \quad (14.84)$$

$$C = -\frac{3i\lambda_0}{2}[I_{log}(\mu_0^2)] - \frac{3\lambda_0^2}{4}[I_{log}(\mu_0^2)]^2 - \frac{3\lambda_0^2}{4}[I_{log}^{ov}(\mu_0^2)]. \quad (14.85)$$

Com este procedimento é possível absorver as divergências surgidas no cálculo perturbativo até esta ordem [1]. Nós podemos estabelecer contato com aqueles métodos de regularização expressando as quantidades divergentes remanescentes no método específico. Entretanto isto implicaria apenas em substituir as formas básicas divergentes por outras parametrizações sem nenhuma implicação adicional [2]. Tendo em vista o sucesso obtido na renormalização da teoria $\lambda\phi^4$, na presença deste tipo de divergência, nós então estudaremos detalhadamente estes objetos.

14.7 Relações Entre Divergências Básicas Superpostas

Nos cálculos efetuados com vistas a renormalização da teoria $\lambda\phi^4$ ao nível dois “loops” nós identificamos dois novos objetos básicos divergentes: $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ e $I_{log}^{ov}(\mu^2)$. Nesta seção nós estudaremos mais detalhadamente estes objetos investigando relações entre eles, relações de escala e parametrizações gerais para estes objetos, do mesmo modo que fizemos para aqueles objetos $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ e $I_{log}^{ov}(\mu^2)$ surgidos nos diagramas um “loop”.

Inicialmente consideramos a derivada em relação à escala μ^2 de $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{quad}^{ov}(\mu^2)}{d\mu^2} &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]} \\ &+ \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)^2[(l-k)^2 - \mu^2]} \\ &\int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l-k)^2 - \mu^2]^2}. \end{aligned} \quad (14.86)$$

As três integrais obtidas, logicamente divergentes, podem ser identificadas como iguais após a parametrização de Feynman no momento de integração da integral convergente. Isto mostra a existência de três variedades de integrais $I_{log}^{ov}(\mu^2)$. Assim a relação procurada é:

$$\frac{dI_{quad}^{ov}(\mu^2)}{d\mu^2} = 3I_{log}^{ov}(\mu^2). \quad (14.87)$$

Por sua vez a derivada de $I_{log}^{ov}(\mu^2)$, fica:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{log}^{ov}(\mu^2)}{d\mu^2} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^2(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^2} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)^2[(l - k)^2 - \mu^2]^2} \\ &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2}{(k^2 - \mu^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2]^3}. \end{aligned} \quad (14.88)$$

Nas integrais obtidas retiramos o índice Λ das integrais devido ao caráter finito destas. Cada uma das integrais finitas obtidas pode ser calculada diretamente. Após algumas manipulações obtemos para a soma do lado direito a relação:

$$\frac{dI_{log}^{ov}(\mu^2)}{d\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}[\eta_2], \quad (14.89)$$

onde definimos:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left\{ \int_0^1 \frac{(1-z)dz}{[z(1-z)][z(1-z)-1]} \right. \\ &- \int_0^1 \frac{z(1-z)dz}{[z(1-z)][z(1-z)-1]} \\ &- \int_0^1 \frac{(1-z)\ln[z(1-z)]dz}{[z(1-z)-1]^2} \\ &\left. + \int_0^1 \frac{z(1-z)\ln[z(1-z)]dz}{[z(1-z)-1]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (14.90)$$

As relações obtidas são semelhantes em estrutura àquelas para $I_{quad}(\mu^2)$ e $I_{log}(\mu^2)$, como era esperado.

Consideremos agora as relações de escala, isto é, as relações entre $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ e $I_{log}^{ov}(\mu^2)$ com objetos $I_{quad}^{ov}(\lambda^2)$ e $I_{log}^{ov}(\lambda^2)$. Após algumas manipulações somos levados a:

$$I_{quad}^{ov}(\mu^2) = I_{quad}^{ov}(\lambda^2) + (\mu^2 - \lambda^2)3I_{log}^{ov}(\lambda^2) + (\mu^2 - \lambda^2)^2 f_1(\mu^2, \lambda^2), \quad (14.91)$$

onde $f_1(\mu^2, \lambda^2)$ é uma soma de integrais finitas dada por:

$$\begin{aligned} f_1(\mu^2, \lambda^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(l^2 - \lambda^2)[(l - k)^2 - \lambda^2]^2[(l - k)^2 - \mu^2]} \\ &+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(l^2 - \lambda^2)^2[l^2 - \mu^2][(l - k)^2 - \lambda^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \lambda^2)(k^2 - \mu^2)^2(k^2 - \lambda^2)^2[(l - k)^2 - \lambda^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(l^2 - \lambda^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2][(l - k)^2 - \lambda^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \lambda^2)(k^2 - \lambda^2)(k^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \mu^2][(l - k)^2 - \lambda^2]} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(k^2 - \mu^2)(l^2 - \lambda^2)(l^2 - \mu^2)[(l - k)^2 - \lambda^2]}.
\end{aligned}$$

A soluç~ao das integrais pode ser colocada na forma:

$$f_1(\mu^2, \lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left\{ 3\eta_2 \frac{[(\lambda^2 - \mu^2) + \mu^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} \right)]}{(\mu^2 - \lambda^2)^2} \right\}. \quad (14.92)$$

Aqui é interessante notar que $f_1(\mu^2, \lambda^2)$, devido à necessidade de independência em λ^2 de eq.(14.91), deve satisfazer:

$$(\mu^2 - \lambda^2) \frac{\partial f_1(\mu^2, \lambda^2)}{\partial \lambda^2} - 2f_1(\mu^2, \lambda^2) + \frac{3\eta_2}{\lambda^2} = 0 \quad (14.93)$$

que é satisfeita, como deveria, pela expressão eq.(14.92) acima obtida para $f_1(\mu^2, \lambda^2)$. Agora consideremos a relação de escala entre integrais logaritmicamente divergentes. Após algumas manipulações podemos escrever:

$$I_{log}^{ov}(\mu^2) = I_{log}^{ov}(\lambda^2) + (\mu^2 - \lambda^2) f_2(\mu^2, \lambda^2), \quad (14.94)$$

onde $f_2(\mu^2, \lambda^2)$ é uma soma de integrais finitas dada por:

$$\begin{aligned}
f_2(\mu^2, \lambda^2) & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)(k^2 - \lambda^2)(l^2 - \mu^2)[(k - l)^2 - \mu^2]^2} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \mu^2)(k^2 - \lambda^2)(l^2 - \lambda^2)[(k - l)^2 - \mu^2]^2} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \lambda^2)(k^2 - \lambda^2)[(k - l)^2 - \lambda^2][(k - l)^2 - \mu^2]^2} \\
& + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \lambda^2)(k^2 - \lambda^2)[(k - l)^2 - \lambda^2]^2[(k - l)^2 - \mu^2]}.
\end{aligned}$$

A soluç~ao destas integrais pode ser colocada na forma:

$$f_2(\mu^2, \lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \frac{\eta_2}{(\mu^2 - \lambda^2)} \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} \right). \quad (14.95)$$

Notemos que a independência em relação a λ^2 de eq.(14.94) leva $f_2(\mu^2, \lambda^2)$ a satisfazer a equação:

$$(\mu^2 - \lambda^2) \frac{\partial f_2(\mu^2, \lambda^2)}{\partial \lambda^2} - f_2(\mu^2, \lambda^2) + \frac{\eta_2}{\lambda^2} = 0, \quad (14.96)$$

que é satisfeita pela relação eq.(14.95) acima para $f_2(\mu^2, \lambda^2)$.

14.8 Parametrizações para Divergências Básicas Superpostas

Nas seções anteriores nós conseguimos identificar dois objetos básicos que caracterizam o conteúdo divergente, em integrais vindas de diagramas de dois “loops”, que não podem ser escritas como o produto de integrais em cada momento de integração separadamente. Estas integrais são, a rigor, números. A estrutura obtida em termos de objetos básicos divergentes e integrais finitas é suficiente para considerarmos a renormalização da teoria ao nível dois “loops”. Entretanto se quizessemos estabelecer contato entre nossos resultados e um método consistente de regularização ou parametrizar estes objetos em termos de algum Λ , como fizemos no caso das divergências básicas $I_{quad}(\mu^2)$ e $I_{log}(\mu^2)$, quais deveriam ser as expressões correspondentes?

Para responder esta pergunta notemos que, do ponto de vista de um método de regularização consistente (que satisfaça às relações de consistência) as únicas integrais ainda necessárias de serem calculadas após as manipulações efetuadas são $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ e $I_{log}^{ov}(\mu^2)$. Isto significa obter:

$$I_{quad}^{ov}(\mu^2, \Lambda^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)[(k-l)^2 - \mu^2]} G(k^2, l^2, \Lambda^2). \quad (14.97)$$

Aqui $G(k^2, l^2, \Lambda^2)$ é uma distribuição que caracteriza o método específico de regularização e substitui o índice Λ utilizado nas integrais divergentes até aqui. De modo equivalente também devemos calcular:

$$I_{log}^{ov}(\mu^2, \Lambda^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)[(k-l)^2 - \mu^2]^2} G(k^2, l^2, \Lambda^2). \quad (14.98)$$

Os resultados somente serão consistentes se as expressões para estas integrais satisfizerem às relações entre elas;

$$\frac{\partial I_{quad}^{ov}(\mu^2, \Lambda^2)}{\partial \mu^2} = 3I_{log}^{ov}(\mu^2, \Lambda^2) \quad (14.99)$$

$$\frac{\partial I_{log}^v(\mu^2, \Lambda^2)}{\partial \mu^2} = \frac{1}{\mu^2} [\eta_2], \quad (14.100)$$

e também as relações de escala:

$$I_{log}^{ov}(\mu^2, \Lambda^2) = I_{log}^{ov}(\lambda^2, \Lambda^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 [\eta_2] \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) \quad (14.101)$$

$$I_{quad}^{ov}(\mu^2, \Lambda^2) = I_{quad}^{ov}(\lambda^2, \Lambda^2) + 3(\mu^2 - \lambda^2) [I_{log}^{ov}(\lambda^2, \Lambda^2)] + \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left\{ 3\eta_2 [\lambda^2 - \mu^2 + \mu^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} \right)] \right\}$$

Em princípio, quaisquer formas atribuídas para $I_{quad}^{ov}(\mu^2)$ e $I_{log}^{ov}(\mu^2)$, obtidas a partir de um método de regularização ou não, que satisfaçam estas exigências, serão igualmente satisfatórias. Por outro lado não satisfazê-las implica em algum tipo de ambiguidade nos resultados.

Do mesmo modo que fizemos quando consideramos os objetos $I_{quad}(\mu^2)$ e $I_{log}(\mu^2)$ podemos investigar e construir uma parametrização geral sem recorrer a um método de regularização. O resultado disto pode ser escrito na forma:

$$I_{log}(\mu^2, \Lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left\{ \eta_2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) + \beta \right\} \quad (14.103)$$

$$I_{quad}(\mu^2, \Lambda^2) = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left\{ \pm \Lambda^2 + 3(\beta - \eta_2) \mu^2 + 3\eta_2 \mu^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) + \delta \right\}. \quad (14.104)$$

Aqui β e δ são constantes (independentes de μ^2 e Λ^2). Notemos que as constantes livres β e δ não são coeficientes de quantidades divergentes ($\Lambda^2 \rightarrow \infty$). η_2 , por sua vez, é bom lembrar, é um número bem determinado; eq.(14.90). É fácil verificar que as relações acima satisfazem às condições eq.(14.99) e eq.(14.100).

É ainda interessante notar que, levando em consideração as parametrizações estabelecidas para $I_{quad}(\mu^2)$ e $I_{log}(\mu^2)$, é possível estabelecer relações entre os objetos parametrizados o que poderia facilitar enormemente eventuais ajustes fenomenológicos em teorias efetivas não-renormalizáveis.

14.9 Ambiguidades e relações de simetria

Nas discussões promovidas até aqui, uma importante questão ainda não foi considerada. Estamos nos referindo às ambiguidades associadas às possíveis escolhas (arbitrárias) para os rótulos dos momentos das linhas internas dos “loops”. No caso de divergências

logarítmicas onde é possível efetuar “shifts”, também no caso de divergências superpostas, qualquer escolha leva ao mesmo resultado. Nós podemos verificar isto diretamente na integral eq.(14.57), vinda do diagrama da fig.(14.21), porém escrevendo com rótulos arbitrários; $k \rightarrow k + k'$ e $l \rightarrow l + l'$. Serão obtidas três integrais finitas e duas contendo divergências. Entretanto o grau de divergência envolvido nas subintegrações não supera o logaritmo permitindo os “shifts” e assim eliminando a presença dos momentos arbitrários k' e l' .

A mesma questão relativa à divergência quadrática não é tão imediata. Nós necessitamos mostrar que apenas como consequência das relações de consistência entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência, as possíveis dependências com os momentos arbitrários são automaticamente eliminadas. A fim de investigar isto devemos então reconsiderar a integral associada ao diagrama “setting sun”, fig.(14.14). agora com a adoção de rótulos gerais. A repetição das operações nos leva a um conjunto de seis integrais análogas àquelas da eq.(14.63), sendo: duas finitas, duas logaritmicamente divergentes, uma linearmente divergente e uma quadraticamente divergente. Apenas para estas duas últimas não podemos eliminar de imediato os momentos k' e l' . Entretanto cada uma delas poderá ser tratada, com o uso de apropriadas identidades, até que tenhamos: as duas integrações finitas, uma finita e uma divergente fatorizadas em produto ou duas integrações divergentes. É fácil perceber que eventuais multilinearidades em qualquer dos momentos de integração aparecerão nas mesmas formas que as bem conhecidas relações de consistência, quer em produto com outra finita ou com outra divergente. A utilização das relações de consistência servirá para reduzir todas as formas divergentes aos objetos $I_{quad}^{ov}(\lambda^2)$, $I_{log}^{ov}(\lambda^2)$, $I_{quad}(\lambda^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$. Estas reduções eliminarão as possíveis dependências com os momentos arbitrários k' e l' como ocorre com as amplitudes um “loop”. Assim não necessitamos, como se poderia pensar, de relações de consistência associadas a duas integrações coletivamente, mas apenas (as mesmas) para cada subintegração separadamente. Dito de outro modo, as relações entre integrais divergentes, materializadas pelas relações de consistência, se aplicam a cada integração separadamente qualquer que seja o número destas (“n-loops”) e são suficientes para eliminar as possíveis ambiguidades decorrentes das arbitrariedades envolvidas nas escolhas dos momentos das linhas internas dos diagramas, e igualmente para aquelas de escala. Quanto às relações de simetria, envolvendo amplitudes ao nível 2 “loop”, trata-se de uma questão menos trivial já que não envolverão apenas as relações de consistência mas também as comunicações existentes entre as funções de estrutura para partes finitas, típicas de dois “loops”, com objetos

básicos divergentes $I_{quad}^{ov}(\lambda^2)$, $I_{log}^{ov}(\lambda^2)$, $I_{quad}(\lambda^2)$ e $I_{log}(\lambda^2)$. Definir e estudar tais funções, estabelecer suas propriedades de escala para então conectá-las com tais partes divergentes é um problema de interesse imediato. Os elementos que dispomos apontam para uma extensão completamente análoga àquelas relações que construímos entre as funções Z'^s e as divergências básicas I_{quad} e I_{log} (capítulo 9).

Com isto completamos os objetivos estabelecidos para este capítulo: verificar a aplicabilidade do procedimento ao nível dois “loops”. Vamos então ao resumo e principais conclusões obtidas.

14.10 Conclusões

Neste capítulo nos propomos a responder sobre a aplicabilidade do procedimento para manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes, induzido nas investigações anteriores, para o nível de aproximação de soluções perturbativas que incluam diagramas com dois “loops”. Como “pano de fundo” utilizamos a renormalização da teoria $\lambda\phi^4$ neste nível, o que fizemos com detalhes.

Como era esperado, surgiram dois novos objetos divergentes básicos $I_{quad}^{ov}(\lambda^2)$ e $I_{log}^{ov}(\lambda^2)$ que são divergências que associam os dois momentos de integração de modo não redutível a um produto de duas separadamente.

A renormalização é feita de um modo claro e transparente sem as imprecisões dos limites e expansões características dos tratamentos tradicionais [3]. Como acontecia ao nível um “loop”, não é necessário, neste processo, a cálculo explícito de nenhuma integral divergente. Igualmente, parametrizações gerais em termos de um parâmetro Λ^2 são possíveis. Estas são úteis em tratamentos de amplitudes de teorias não-renormalizáveis, onde algum ajuste fenomenológico é necessário. A construção destas parametrizações tem como guia as propriedades de escala destes objetos, tal como para aquelas do caso um “loop”.

Quanto às relações de consistência apenas aquelas surgidas nos estudos anteriores são necessárias, uma vez que o grau de divergência envolvido não supera o cúbico e as partículas externas são escalares, para evitar ambiguidades associadas às arbitrariedades existentes na escolha dos momentos das linhas internas dos diagramas, bem como aquelas de escala. Por fim, para as Identidades de Ward, o que não foi necessário considerar para a renormalização da teoria $\lambda\phi^4$, nós esperamos ter que acrescentar outros ingredientes àqueles introduzidos aqui. Trata-se das funções de estrutura, análogas às $Z'_k{}^s$, típicas de

diagramas dois “loops”, suas propriedades de escala e relações de recorrência. Isto porque, como aconteceu no caso um “loop”, devem existir relações bem determinadas vindas destas propriedades que estabelecem comunicação com os objetos básicos divergentes, através das relações de escala destas quantidades. Nada, entretanto, indica que estes passos não possam ser efetuados para que o tratamento de problemas ao nível dois “loops”, em qualquer teoria ou modelo, possa ser completado com o êxito desejado.

Referências Bibliográficas

- [1] O.A. Battistel(em preparação);
- [2] A. Brizola, O.A. Battistel, M. Sampaio e M.C. Nemes (submetido para publicação);
- [3] S.Pokorski: Gauge Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
(capítulo 4)
C. Itzykson an J.B. Zuber; Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980)
(capítulo 13);
P. Ramond; Field Theory: A modern Primer Addisson-Wesley (1990) (capítulo 4);

Capítulo 15

Considerações Finais

Ao longo de todo o trabalho, fizemos investigações detalhadas a respeito da presença de divergências em soluções perturbativas de TQC's e dos problemas a isso relacionados. A cada inconveniente surgido tentamos encontrar um procedimento capaz de evitá-lo. Nossa esperança sempre foi vislumbrar um conjunto de regras para transformar as indefinições matemáticas, devidas às integrais divergentes, em quantidades manuseáveis de tal modo que o conteúdo físico das teorias e modelos pudesse ser apreciado consistentemente, na solução perturbativa, apesar dos infinitos. Nossa preocupação inicial era dar sentido às amplitudes físicas associadas a teorias não-renormalizáveis. Então começamos nossos estudos exatamente tomando uma amplitude destas e exigindo inicialmente: a eliminação dos típicos comportamentos não-físicos introduzidos por regularizações, unicidade nos cálculos e independência do método específico de regularização (cap.5). Em seguida exigimos que as relações de simetria não fossem violadas (cap.6) e que não houvessem ambiguidades associadas às arbitrariedades existentes nas escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas dos "loops" (cap.7). Um conjunto de procedimentos aliados a certas relações entre integrais divergentes se mostraram capazes de equacionar os problemas discutidos de modo adequado. A partir daí as "relações de consistência" dominaram a cena e nós nos ocupamos, basicamente, do entendimento destas propriedades, das consequências da imposição destas relações e da adequação de um conjunto de regras a estas exigências. Ao final de quase todos os capítulos podem ser encontradas conclusões e discussões e nós não vamos transportá-las para este. É interessante entretanto resumir nossas conclusões formulando um conjunto de regras ou passos a serem seguidos para as manipulações e cálculos em amplitudes contendo divergências, que forneceram resultados consistentes em todas as situações investigadas.

1. Construir a amplitude, como ditado pelas regras de Feynman, tomando traços de Dirac e operações com matrizes γ , se for o caso. Então por manipulações algébricas eliminar todos os fatores quadráticos, nos momentos não restritos pelas relações de conservação de momento e energia dos vértices, por cancelamento de denominadores.
2. Introduzir os sinais de integração correspondentes a cada momento não restrito e identificar as integrais divergentes.

A definição destes passos, nesta sequência, é necessária devido a incompatibilidade existente entre as operações do passo 1, se feitas sob o sinal de integração, e as relações de consistência (cap.10).

3. Tomar cada uma das integrais divergentes, individualmente, e manipulá-las através de identidades ao nível do integrando a fim de obter uma soma de termos tais que as partes que dependem dos momentos externos estejam em integrais finitas. As restantes (divergentes) terão eventualmente como coeficientes potências dos momentos externos.

Estas manipulações podem ser justificadas de dois modos distintos porém equivalentes. O primeiro é a adoção de uma distribuição regularizadora, implicitamente, par em todos os momentos de integração e possuindo um limite de conexão definido;

$$\lim_{\Lambda^3 \rightarrow \infty} G_\Lambda(k^2, \dots, \Lambda^2) = 1. \quad (15.1)$$

O segundo modo é adotar, já no passo 1, a representação para os propagadores:

$$\frac{1}{[(p-k)^2 - m^2]} = \frac{1}{[k^2 - \mu^2]} + \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^j (p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)^j}{(k^2 - \mu^2)^{j+1}} + \frac{(-1)^N (p^2 - 2p \cdot k + \mu^2 - m^2)^{N+1}}{(k^2 - \mu^2)^{N+1} (p-k)^2 - m^2} \quad (15.2)$$

escolhendo N de modo a ter a forma exigida pelo passo 3. A vantagem desta opção é que necessitaríamos de propriedades específicas para integrais divergentes, ou regularização, apenas no passo 5.

4. As integrais finitas, identificadas no passo 3, devem ser resolvidas sem restrições.

Esta operação, se feita sob a adoção de regularização implícita, implica em tomar o limite de conexão.

Em teorias não renormalizáveis, onde os parâmetros de regularização são em geral interpretados como “cut off”, esta regra implica em estabelecer um conceito adequado para que tais parâmetros possam ser identificados como tal. Os valores atribuídos a eles devem ser tais que o efeito da regularização sobre a parte finita deva ser desprezível.

5. As integrais divergentes remanescentes devem ser reduzidas às formas básicas com a utilização das apropriadas relações entre integrais divergentes com o mesmo grau de divergência (as relações de consistência).

As relações de consistência são aquelas entre integrais divergentes obtidas diretamente a partir de integração dimensional (cap.10). Para teorias fundamentais, onde as divergências são no máximo cúbicas, elas se resumem às relações:

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^2} &= \frac{g_{\mu\nu}}{2} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \\
\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 - \lambda^2)^3} &= \frac{g_{\mu\nu}}{4} \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2} \\
\bullet \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\alpha}k_{\beta}}{(k^2 - \lambda^2)^4} &= \frac{1}{24} [g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}] \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}
\end{aligned} \tag{15.3}$$

Quanto aos objetos divergentes básicos, a variedade dependerá do nível de aproximação. Ao nível “loop”, com divergências no máximo cúbicas, tudo se reduzirá a:

$$\begin{aligned}
\bullet I_{quad}(\lambda^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \\
\bullet I_{log}(\lambda^2) &= \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}
\end{aligned} \tag{15.4}$$

comos mostram as relações de consistência acima. Ao incluirmos contribuições ao nível “loop” aparecerão mais dois destes objetos:

$$\bullet I_{quad}^{ov}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)(l^2 - \lambda^2) [(k-l)^2 - \lambda^2]}$$

$$\bullet I_{\log}^{ov}(\lambda^2) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2 (l^2 - \lambda^2) [(k-l)^2 - \lambda^2]} \quad (15.5)$$

conforme pudermos verificar no capítulo 14.

As quantidades divergentes básicas devem obedecer a precisas relações de escala. Para aqueles que acabamos de citar são:

$$\begin{aligned} \bullet I_{quad}(m^2) &= I_{quad}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m^2) I_{\log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[\lambda^2 - m^2 + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right] \\ \bullet I_{\log}(m^2) &= I_{\log}(\lambda^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \\ \bullet I_{quad}^{ov}(m^2) &= I_{quad}^{ov}(\lambda^2) + (m^2 - \lambda^2) 3I_{\log}^{ov}(\lambda^2) + \\ &\quad + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)^2 \left\{ 3\eta_2 \left[\lambda^2 - m^2 + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \right] \right\} \\ \bullet I_{\log}^{ov}(m^2) &= I_{\log}^{ov}(\lambda^2) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)^2 \eta_2 \ln\left(\frac{m^2}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (15.6)$$

onde η_2 é uma constante bem determinada (eq. 14.93).

As propriedades acima estabelecem relações adicionais:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial I_{quad}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} &= I_{\log}(\lambda^2) \\ \bullet \frac{\partial I_{\log}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left(\frac{-1}{2}\right) \\ \bullet \frac{\partial I_{quad}^{ov}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} &= 3I_{\log}^{ov}(\lambda^2) \\ \bullet \frac{\partial I_{\log}^{ov}(\lambda^2)}{\partial \lambda^2} &= \frac{1}{\mu^2} [\eta_2] \end{aligned} \quad (15.7)$$

$$(15.8)$$

Para efeito de renormalização apenas a redução aos objetos básicos e as propriedades de escala são necessárias. Para teorias não renormalizáveis, entretanto, as últimas propriedades servem para fixar de modo único as formas gerais para parametrizações dos

objetos:

$$\begin{aligned}
\bullet I_{quad}(\Lambda^2, \lambda^2) &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\Lambda^2 + \lambda^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \right) + \beta_0 \lambda^2 + \delta_0 \right] \\
\bullet I_{log}(\Lambda^2, \lambda^2) &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \right) + \beta_0 \right] \\
\bullet I_{log}^{ov}(\Lambda^2, \lambda^2) &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[-\eta_2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \right) + \beta \right] \\
\bullet I_{quad}^{ov}(\Lambda^2, \lambda^2) &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right)^2 \left[-\Lambda^2 + 3(\beta - \eta_2) \lambda^2 - 3\eta_2 \lambda^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \right) + \delta \right]
\end{aligned}
\tag{15.9}$$

Aqui β_0, δ_0, β e δ são constantes. Estas parametrizações substituem por completo a necessidade de alguma forma explícita de regularizações. O valor ajustado fenomenologicamente de Λ^2 , das expressões acima, poderá eventualmente ser interpretado como o usual “cut off”.

É importante ressaltar que as propriedades de escala não são apenas relações algébricas entre as quantidades envolvidas. Elas estabelecem de modo exato a comunicação entre as partes divergentes e finitas, essenciais para as propriedades físicas das amplitudes. Como tal, para divergências logarítmicas:

$$\begin{aligned}
\bullet Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_1^2) - Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) &= \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \\
\bullet I_{log}(\lambda_1^2) - I_{log}(\lambda_2^2) &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right).
\end{aligned}
\tag{15.10}$$

Por sua vez, para divergências quadráticas:

$$\begin{aligned}
\bullet \left[2q^2 Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_2^2) - (q^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) Z_k(\lambda_1^2, \lambda_2^2, q^2; \lambda_1^2) \right] &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \right] \\
\bullet \left[I_{log}(\lambda_1^2) - I_{log}(\lambda_2^2) - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \ln \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right) \right] &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \left[\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \ln \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{15.11}$$

Disto podemos ver que não resta qualquer liberdade na definição de uma amplitude física ainda que contendo divergências, e não há possibilidade nenhuma de dependência com o método específico de regularização desde que ele seja consistente, ou seja, permita satisfazer as propriedades exigidas para as integrais divergentes neste passo.

Em vista do sucesso obtido na construção desta técnica, manifestado pelos testes até aqui realizados, torna-se possível estudar uma grande variedade de problemas. Alguns destes, cujos resultados estão disponíveis por outros métodos, podem ser tratados com vantagens qualitativas importantes. Outros podem ser estudados a fim de se obter resultados quantitativos consistentes não vislumbrados até então pelo tratamentos usuais. Uma parte disto vem sendo realizada através de colaborações com o grupo de física de partículas e Campos da UFMG e outros. Em alguns casos os resultados já estão disponíveis de um modo total ou parcial, em processo de publicação ou em fase de preparação. Muitos ainda em andamento. Grande parte destes possíveis trabalhos foram citados, sempre que a oportunidade permitiu, ao longo do trabalho. A observação mais importante e alentadora, entretanto, é que, até o momento, nenhum problema estudado revelou qualquer inconsistência que torne o procedimento inválido ou forneça resultados piores daqueles usualmente utilizados. Em outras palavras, qualquer limitação que eventualmente ainda resta afeta igualmente os melhores métodos disponíveis na literatura.