

**Título: Aspectos do Processo de Medição em  
Mecânica Quântica: Detectores imperfeitos e Efeito  
Zenão Quântico**

Romeu Rossi Júnior (Doutorando),  
Maria Carolina Nemes (Orientadora)

# Resumo

Apresentamos investigações relacionadas ao processo de medição em Mecânica Quântica. Estudamos um modelo teórico de detecções atômicas em montagens experimentais de cavidades de microondas. Tal modelo permite a introdução de imperfeições empíricas na análise de experimentos neste sistema. Duas investigações no contexto de fundamentos do efeito Zenão Quântico são apresentadas. A primeira consiste em propostas experimentais para a observação do efeito em um sistema bipartite. Limites experimentais são explicitados. Na segunda investigação, mostramos que o efeito Zenão Quântico prevalece mesmo quando medições incompletas são consideradas. Por fim, apresentamos, através de dois exemplos, um protocolo para manipulação da evolução temporal em sistemas quânticos com um único subsistema auxiliar.

# Abstract

We investigate some effects related to quantum measurement process. We study a theoretical model for atomic detections in microwave cavity experiments. The model allows for the introduction of empirical imperfections in the analysis of experiments in this system. Two investigations on foundations of Quantum Zeno effect are presented. The first one consists in experimental proposals for the effect observation in a bipartite system. Empirical limitations are made explicit. In the second investigation, we show that the Quantum Zeno effect prevails even if the measurements are not complete. Finally, we present a protocol which allows for the quantum evolution control through a single auxiliary system.

# Agradecimentos

À Carolina, pelo entusiasmo e disposição de enfrentar diversos problema científico, permitindo que seus alunos tenham liberdade na escolha dos temas de pesquisa. Também por criar um ambiente de trabalho sempre agradável, amigável e estimulante.

Ao Arthur, pelas diversas discussões esclarecedoras que contribuíram decisivamente para a minha formação científica.

Ao José Geraldo e ao José Geraldo Jr., por suas contribuições essenciais para a realização deste trabalho.

À Prof. Patrícia e seus alunos do Departamento de Filosofia, pela paciência e disposição ao dialogar com membros de outras áreas do conhecimento.

Aos colegas, funcionários e professores do Icx, pelo ambiente agradável e fértil para o desenvolvimento de pesquisa científica.

Aos amigos e familiares, pelo apoio e pelos momentos de descontração.

Ao meu pai, minha mãe e a Nathália, por todo incentivo, apoio, tranqüilidade e segurança que a nossa convivência me proporcionou.

Nívea, contei com seu carinho em cada linha deste trabalho, em cada linha da minha vida.

Este trabalho foi financiado pelo CNPq.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2 Ferramentas</b>	<b>11</b>
2.1 O modelo Jaynes-Cummings . . . . .	11
2.2 Dedução da Equação Mestra para Dois Osciladores com Temperatura não Nula . . . . .	16
2.2.1 O Hamiltoniano . . . . .	16
2.2.2 A Equação Mestra . . . . .	17
<b>3 Processo de medição em sistemas de cavidades de microondas</b>	<b>23</b>
3.1 Detectores Ineficientes . . . . .	24
3.1.1 Aplicação em Eletrodinâmica quântica de cavidades . . . . .	26
3.2 Detectores que fazem contagens erradas . . . . .	28
3.2.1 Aplicação em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades . . . . .	29
3.2.2 Análise de dados experimentais . . . . .	31
<b>4 Efeito Zenão Quântico em sistema de dois osciladores acoplados</b>	<b>34</b>
4.1 Evolução Livre . . . . .	35
4.2 Medição de níveis atômicos de energia por detectores perfeitos . . . . .	36
4.3 Medição de níveis atômicos de energia por detectores imperfeitos . . . . .	39
4.4 Proposta experimental sem medições intermediárias . . . . .	43
4.4.1 Limites da proposta experimental . . . . .	45

<b>5</b>	<b>Medição incompleta: Conseqüências para O Efeito Zenão Quântico</b>	<b>53</b>
5.1	O Sistemas $S$ e $M$ . . . . .	54
5.1.1	Interação com um medidor . . . . .	55
5.2	Alterações na taxa de transição quântica . . . . .	56
5.3	Seqüência de $N$ medições . . . . .	59
5.3.1	Seqüência de pulsos $2\pi$ . . . . .	59
5.3.2	Efeito Zenão Quântico com medições incompletas . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Controle e Manipulação de Estados</b>	<b>63</b>
6.1	Controle da dinâmica de dois qubits . . . . .	64
6.2	Controle da dinâmica do emaranhamento . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo dos coeficientes <math>\langle a \phi_\eta^e\rangle</math></b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>O cálculo de <math> \psi_N\rangle</math></b>	<b>75</b>
B.1	Determinando o ângulo e o eixo de rotação . . . . .	76
	<b>Bibliografia</b>	<b>78</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em uma correspondência endereçada ao físico americano R. W. Wood, em 1931, Max Planck, um dos fundadores da teoria quântica, refere-se à sua maior contribuição para a ciência, a hipótese da quantização da energia como “um ato de desespero” [1].

A hipótese de M. Planck permitiu a construção de um modelo teórico em concordância com os dados empíricos conhecidos para a radiação de um corpo negro. A celebre frase ilustra, de maneira enfática, a busca por teorias científicas empiricamente adequadas. Diversos fatores influenciam na aceitação de teorias. Fatores pragmáticos como autoridade dos autores, estéticos como simplicidade ou preservação de simetrias, são alguns exemplos. Entretanto, o pilar de sustentação das teorias científicas é certamente o critério de adequação empírica [2].

Um importante e recente exemplo, na história da ciência, que corrobora com tal concepção epistemológica é o desenvolvimento da teoria quântica. Sustentada por rigorosa adequação empírica, a Mecânica Quântica prevaleceu mesmo diante de intensos ataques [3, 4, 5] muitas vezes conduzidos por seus próprios fundadores. As críticas à Mecânica Quântica explicitam o desconforto provocado por previsões que contradizem os princípios mais básicos de nossa formação como observadores de fenômenos naturais ordinários. Muitos conflitos entre o senso comum e as previsões da Mecânica Quântica são provocados pelas interpretações da teoria. Diversas são as interpretações para a teoria quântica [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] e de forma geral elas podem ser caracterizadas pelo estatuto atribuído à ferramenta matemática que descreve o estado quântico.

Dentre elas, a de maior relevância é a Interpretação de Copenhague. Desconsiderando sutis divergências entre a posição filosófica de N. Bohr e W. Heisenberg, podemos considerar que o conjunto de suas observações a respeito da teoria (a Interpretação de Copenhague) blindaram a teoria quântica, dissolvendo conflitos e paradoxos.

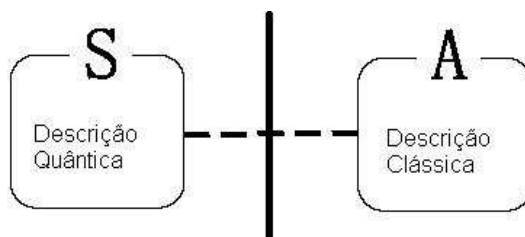
A interpretação de Copenhague está fundada no princípio da complementaridade. Tal princípio enuncia que nossa descrição de fenômenos naturais é dual e complementar,

composta pela descrição clássica (corpúscular) e pela descrição quântica (ondulatória). Deve-se ressaltar que o princípio complementaridade é um princípio epistemológico (pois versa sobre nossa forma de conhecer a os fenômenos) e não ontológico.

Um experimento projetado para a observação de fenômenos quânticos possui 2 estágios, segundo a Interpretação de Copenhague [14]. No primeiro estágio a entidade matemática que representa o estado do sistema quântico de interesse evolui de acordo com a equação de movimento da Mecânica Quântica. Tal evolução é contínua e determinística. Entretanto, no segundo estágio uma alteração descontínua, que se refere ao ato de observação, se faz presente. A teoria quântica possibilita previsões (probabilísticas) para a obtenção de resultados empíricos, mas não pretende apresentar um descrição “real” para a dinâmica do sistema antes da observação. Nas palavras de W. Heisenberg : “a transição do “possível” ao “real” ocorre durante o ato de observação. Se quisermos descrever o que ocorre em um evento atômico, deveremos compreender que o termo ocorre pode somente ser aplicado à observação, e não ao estado de coisas entre duas observações consecutivas.”

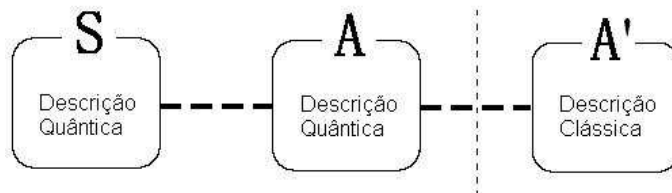
Por reiteradas vezes os autores da Interpretação de Copenhague argumentaram que na comunicação de resultados experimentais a linguagem clássica deve ser empregada [14, 15, 16, 17], pois dados empíricos são manifestações “macroscópicas” em aparatos de medida que possuem complexidade estrutural característica de objetos pertencentes à descrição clássica. Bohr e Heisenberg também advertiram que o emprego de conceitos clássicos (como órbitas eletrônicas e ondas de matéria) na descrição quântica, apesar de satisfatório em alguns casos, deve ser restrito e quando o emprego vago desta linguagem conduzir a dificuldades, devemos considerar o esquema matemático.

Em sua leitura a respeito da Interpretação de Copenhague, J. von Neumann reconhece um problema relacionado à descrição do processo de medição em Mecânica Quântica. Segundo von Neumann, a Interpretação de Copenhague afirma que existe uma fronteira intransponível entre os componentes deste processo, o aparato (pertencente ao campo da descrição clássica) e o sistema (que obedece a descrição quântica).



Em 1932, seu famoso tratado sobre os fundamentos da Mecânica Quântica [18] apresenta uma crítica à posição adotada pela Interpretação de Copenhague diante dos processos de medição. Segundo von Neumann a fronteira imposta pela Interpretação de Copenhague viola um princípio científico básico, princípio de “paralelismo psico-físico” (psycho-

physical parallelism), o qual garante a possibilidade de se descrever a parte objetiva do processo de medição com detalhamento satisfatório, pois este também é um processo físico. Este é o problema da medição para von Neumann. A solução proposta pelo autor é recuar a fronteira e tratar o aparato, o sistema e as interações entre eles através da descrição quântica.



J. von Neumann mostra que é possível uma descrição quântica da evolução unitária do sistema bipartite  $\mathbf{S} + \mathbf{A}$ , onde  $\mathbf{S}$  é o sistema de interesse e  $\mathbf{A}$  o aparato a ser usado no processo de medição, equivalente à evolução unitária do sistema sem o aparato. Onde entendemos por descrições equivalentes aquelas que apresentam as mesmas previsões para os resultados de medições no subsistema de interesse. A corrente de von Neumann nos permite descrever o primeiro estágio da medição (pré-medição) como um processo físico, entretanto, o caráter subjetivo desse processo ainda se faz presente (o processo de uma medição é essencialmente subjetivo) e o elemento de descontinuidade deve ser posicionado em algum ponto da corrente (Fig.2). A ferramenta matemática que representa a alteração descontínua durante o processo de medição é a projeção no subsistema do último componente pertencente à descrição quântica (objetiva) do processo.

O problema e a solução propostos por von Neumann de forma alguma esgotam os pontos problemáticos sobre a descrição do processo de medição em Mecânica Quântica. Novas questões, possíveis soluções e outras abordagens foram apresentadas e atualmente não se pode apontar um posição consensual da comunidade científica a respeito do tema.

Diferentes abordagens e interpretações da teoria quântica apresentam diferentes descrições para o processo de medição. No programa da decoerência [19], a inevitável interação entre o sistema quântico a ser medido com o aparato de medição (e conseqüentemente com o ambiente) é um fator essencial para a descrição do processo de medição. Devido à esta interação o estado global do sistema torna-se emaranhado, portanto o estado reduzido no sistema de interesse assume a forma de mistura estatística completa (clássica). O processo de decoerência induzido pelo ambiente é irreversível e possibilita a transição entre a desconfortável descrição do subsistema, composto pelo sistema quântico e o aparato, como um estado puro emaranhado (pre-medição) para um estado de mistura estatística completa. Entretanto, o programa da decoerência não é capaz de descrever a obtenção de um resultado específico no processo de medição individual.

Outra possível abordagem (modelos estocásticos para o colapso [20]) consiste em modificações fundamentais na evolução temporal prevista pela teoria quântica canônica, tornando esta não unitária. Tal abordagem pretende descrever a emergência de resultados definidos em um processo de medição. As duas abordagens citadas são apenas exemplos dentre muitas outras [12, 10, 11, 13, 21].

Apresentamos neste trabalho contribuições relacionadas ao estudo de processos de medição em Mecânica Quântica. No capítulo 2 ferramentas teóricas são apresentadas. No capítulo 3 um modelo para a medição em montagens experimentais em sistemas de cavidades de microondas. Este sistema é de extrema importância para a física contemporânea pois permite o controle e a investigação de fenômenos quânticos fundamentais [22, 23, 24, 25]. Nosso modelo para o processo de medição neste sistema permite a introdução de imperfeições do aparato de medida na descrição teórica. Investigamos as alterações provocadas por sinais clássicos gerados a partir de detectores imperfeitos em sistemas quânticos, assim como as consequências de tais imperfeições em possíveis realizações experimentais.

Nos capítulos 4 e 5 duas investigações fundamentais relacionadas ao Efeito Zenão Quântico são apresentadas. O Efeito Zenão Quântico, como será explicitado posteriormente, tem sua origem relacionada ao processo de medição em Mecânica Quântica. Primeiramente, apresentamos uma proposta experimental envolvendo um sistema bipartite, onde a inibição de uma transição quântica é alcançada através de interações intermitentes entre uma das partes do sistema bipartite e outro sistema quântico externo. Posteriormente, discutimos a relação entre a eficiência do processo de medição e o Efeito Zenão Quântico.

No capítulo 6 concentramos propostas para aplicação do Efeito Zenão Quântico (e efeito similar) no controle e na manipulação de sistemas quânticos. Interações com um único subsistema auxiliar são capazes de promover o controle na evolução temporal de um sistema quântico.

# Capítulo 2

## Ferramentas

Neste capítulo introdutório apresentamos modelos teóricos que serão aplicados no desenvolvimento de capítulos posteriores. Primeiramente o modelo Jaynes-Cummings, que descreve a interação quântica entre modos de campo eletromagnético e átomos, será apresentado. Uma forma relativamente simples para o hamiltoniano que governa tal dinâmica é obtida a partir do hamiltoniano fundamental que descreve a interação entre radiação e matéria.

Na seção seguinte, apresentamos a dinâmica dissipativa de um sistema composto por dois osciladores acoplados entre si e a um único reservatório com temperatura não nula. Deduzimos a equação mestra que governa tal dinâmica.

### 2.1 O modelo Jaynes-Cummings

O Hamiltoniano que modela o sistema composto por um campo eletromagnético (descrito pelo vetor  $\vec{E}$ ) e um átomo de um elétron tem a forma:

$$H = H_a + H_c + e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (2.1)$$

onde  $H_a$  e  $H_c$  representam a energia do átomo e do campo, respectivamente, e o termo  $e\vec{r} \cdot \vec{E}$  é responsável pela interação entre campo e átomo. O vetor  $\vec{r}$  marca a posição do elétron e  $e$  é a carga do elétron. O campo  $\vec{E}$  é considerado uniforme sobre todo o átomo. Consideramos a aproximação de dipólo para descrever a interação átomo e campo.

A partir da quantização do campo eletromagnético (descrita em diversos livros de Óptica Quântica [26, 27]) e considerando que o átomo está na origem do sistema de coordenadas podemos escrever:

$$H_c = \sum_k \hbar\nu_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.2)$$

$$\vec{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_k \epsilon_k \left( a_k + a_k^\dagger \right), \quad (2.3)$$

onde  $\nu_k$  é a frequência do modo  $k$ ,  $\hat{\epsilon}_k$  é um vetor unitário responsável pela polarização do campo e  $\epsilon_k = (\hbar\nu_k/2\epsilon_0 V)^{1/2}$ .

Os vetores  $\{|i\rangle\}$  formam uma base no subespaço do átomo, e são autovetores de  $H_a$  como autovalor  $E_i$ . Assim podemos escrever:

$$H_a = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| \quad (2.4)$$

$$e\vec{r} = \sum_i |i\rangle\langle i| \vec{r} \sum_j |j\rangle\langle j|, \quad (2.5)$$

Deslocando o ponto zero de energia, definido o operador de transição atômica

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (2.6)$$

e o elemento de matriz:

$$\xi_{ij} = e\langle i|\vec{r}|j\rangle, \quad (2.7)$$

podemos escrever  $H$  como:

$$H = \sum_i E_i \sigma_{ii} + \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \hbar \sum_{i,j} \sum_k G_k^{ij} \sigma_{ij} \left( a_k + a_k^\dagger \right), \quad (2.8)$$

onde:

$$G_k^{ij} = -\frac{\xi_{ij}}{\hat{\epsilon}_k \epsilon_k \hbar}. \quad (2.9)$$

O último termo no lado direito da equação (2.8) representa a interação entre um átomo de diversos níveis e modos do campo eletromagnético. As interações entre átomo e campo que serão tratadas a seguir, são interações entre átomos de dois níveis com um modo de campo. Para tratar desses sistemas específicos, podemos simplificar a forma do hamiltoniano.

Considerando  $\xi_{ij}$  real em um átomo de níveis  $|g\rangle$  (estado fundamental) e  $|e\rangle$  (estado excitado), podemos escrever:

$$G_k = G_k^{ge} = G_k^{eg}. \quad (2.10)$$

Definindo as matrizes:

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (2.11)$$

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \quad (2.12)$$

$$\sigma_- = |g\rangle\langle e|, \quad (2.13)$$

que satisfazem a algebra de spin 1/2 das matrizes de Pauli, ou seja:

$$[\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_z, \quad (2.14)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = 2\sigma_-, \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

Assim, na base dos autovetores de  $\sigma_z$ , as matrizes tem a forma:

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Os vetores  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  são autovetores de  $\sigma_z$ ,

$$\sigma_z|e\rangle = |e\rangle, \quad (2.18)$$

$$\sigma_z|g\rangle = -|g\rangle. \quad (2.19)$$

A aplicação da matriz  $\sigma_+$  no estado  $|g\rangle$  o transforma em  $|e\rangle$  e a aplicação da matriz  $\sigma_-$  no estado  $|e\rangle$  o transforma em  $|g\rangle$ .

Usando estas definições e deslocando o nível mínimo de energia, podemos escrever o hamiltoniano que modela a interação entre um átomo de dois níveis e vários modos de campo eletromagnético como:

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.20)$$

$$H_0 = \sum_k \hbar\nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}\hbar\nu\sigma_z, \quad (2.21)$$

$$H_I = \hbar \sum_k G_k (\sigma_+ + \sigma_-) (a_k + a_k^\dagger). \quad (2.22)$$

Para mostrar de forma explicita a consagrada aproximação de ondas girantes (RWA, sigla em inglês para “Rotating Wave Approximation”), consideremos o hamiltoniano na representação de interação:

$$\tilde{H}_I = e^{iH_0t/\hbar} H_I e^{-iH_0t/\hbar}, \quad (2.23)$$

usando

$$e^{xA} B e^{-xA} = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (2.24)$$

obtemos:

$$\tilde{H}_I = \hbar \sum_k G_k \left( \sigma_+ a_k e^{i(\omega-\nu_k)t} + \sigma_- a_k^\dagger e^{-i(\omega-\nu_k)t} + \sigma_+ a_k^\dagger e^{i(\omega+\nu_k)t} + \sigma_- a_k e^{-i(\omega+\nu_k)t} \right). \quad (2.25)$$

As exponenciais que acompanham os termos  $\sigma_+ a_k^\dagger$  e  $\sigma_- a_k$  ( $e^{\pm i(\omega+\nu_k)t}$ ) em  $\tilde{H}_I$  variam mais rapidamente no tempo do que as exponenciais que acompanham os termos  $\sigma_- a_k^\dagger$  e  $\sigma_+ a_k$  ( $e^{\pm i(\omega-\nu_k)t}$ ), portanto, o efeito médio no tempo dos termos  $\sigma_+ a_k^\dagger$  e  $\sigma_- a_k$  pode ser desprezado. Esta é a aproximação de ondas girantes, um procedimento usual no tratamento da dinâmica aqui estudada. Assim, na representação de Schrödinger o hamiltoniano terá a forma:

$$H = \sum_k \hbar \nu_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + \hbar \sum_k G_k \left( \sigma_+ a_k + \sigma_- a_k^\dagger \right), \quad (2.26)$$

Este é o modelo de Jaynes-Cummings (MJC), que nos permite escrever uma forma simples para a interação entre radiação e matéria. Considerando a interação entre um átomo e apenas um modo do campo, o hamiltoniano assume a forma

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.27)$$

$$H_0 = \hbar \nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z, \quad (2.28)$$

$$H_I = \hbar G (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (2.29)$$

Para calcular a evolução temporal de um vetor de estado pertencente ao sistema composto pelos subsistemas do átomo e do modo de campo, utilizaremos a técnica conhecida como derivação de parâmetros. Para atingir tal objetivo, consideremos novamente o hamiltoniano na representação de interação:

$$\tilde{H}_I = e^{iH_0t/\hbar} H_I e^{-iH_0t/\hbar}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{H}_I = \hbar G (\sigma_+ a e^{i\Delta t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i\Delta t}), \quad (2.31)$$

onde  $\Delta = \omega - \nu$ .

A equação que descreve a evolução temporal do sistema na representação de interação tem a forma:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} = \tilde{H}_I |\psi(t)\rangle_I. \quad (2.32)$$

Podemos escrever o vetor  $|\psi(t)\rangle$  com uma combinação linear de elementos da base formada pelos autovetores de  $H_0$ :  $|e\rangle \otimes |n\rangle = |e, n\rangle$  e  $|g\rangle \otimes |n\rangle = |g, n\rangle$ .

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n (c_{e,n}(t)|e, n\rangle + c_{g,n}(t)|g, n\rangle). \quad (2.33)$$

Aplicando o operador  $\tilde{H}_I$  nos autovetores de  $H_0$

$$\tilde{H}_I |e, n\rangle = \hbar G \sqrt{n+1} e^{-i\Delta t} |g, n+1\rangle, \quad (2.34)$$

$$\tilde{H}_I |g, n\rangle = \hbar G \sqrt{n} e^{i\Delta t} |e, n-1\rangle, \quad (2.35)$$

percebemos que  $\tilde{H}_I$  só provoca transições entre os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  ou entre os estados  $|g, n\rangle$  e  $|e, n-1\rangle$ . Assim podemos trabalhar em cada subespaço bidimensional definido pela base  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ , e escrever equações diferenciais envolvendo os coeficientes  $c_{e,n}$  e  $c_{g,n+1}$ , projetando a equação (2.32) em  $\langle e, n|$  e  $\langle g, n+1|$ .

$$\dot{c}_{e,n}(t) = -iG\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{g,n+1}(t), \quad (2.36)$$

$$\dot{c}_{g,n+1}(t) = -iG\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{e,n}(t). \quad (2.37)$$

As soluções das equações diferenciais acima são:

$$c_{e,n}(t) = \left\{ c_{e,n}(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2iG\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{\frac{i\Delta t}{2}},$$

$$c_{g,n+1}(t) = \left\{ c_{g,n+1}(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2iG\sqrt{n+1}}{\Omega_n} c_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{-\frac{i\Delta t}{2}},$$

onde:

$$\Omega_n = \Delta^2 + 4G(n+1).$$

Portanto, se conhecermos a expansão de um estado  $|\psi(0)\rangle$  na base dos autovetores de  $H_0$ , podemos conhecer a evolução temporal deste vetor através das expressões de  $c_{g,n+1}(t)$  e  $c_{e,n}(t)$ . É interessante destacar que o estado  $|g, 0\rangle$  é um autovetor de  $H$  ( $H = H_0 + H_I$ ), e portanto é um estado estacionário deste sistema.

## 2.2 Dedução da Equação Mestra para Dois Osciladores com Temperatura não Nula

### 2.2.1 O Hamiltoniano

O hamiltoniano que descreve a dinâmica de dois modos de campo eletromagnético,  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$ , acoplados linearmente, na presença de um reservatório em comum tem a forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{int}, \quad (2.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_R, \\ \mathbf{H}_S &= \hbar\omega_a \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \hbar\omega_b \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \hbar g (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a}), \\ \mathbf{H}_R &= \hbar \sum_k \omega_k \mathbf{c}_k^\dagger \mathbf{c}_k, \\ \mathbf{H}_{int} &= \hbar \sum_k \left( \alpha_k \mathbf{c}_k^\dagger \mathbf{a} + \alpha_k^* \mathbf{c}_k \mathbf{a}^\dagger \right) + \hbar \sum_k \left( \beta_k \mathbf{c}_k^\dagger \mathbf{b} + \beta_k^* \mathbf{c}_k \mathbf{b}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Os operadores  $\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a}^\dagger$ ) e  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}^\dagger$ ) são operadores bosônicos de aniquilação (criação) nos modos  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$  respectivamente,  $\mathbf{c}_k$  e  $\mathbf{c}_k^\dagger$  são operadores de criação e aniquilação pertencentes ao conjunto de osciladores que modelam o ambiente. O parâmetro  $g$  é a constante de acoplamento, real e positiva, entre  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$  (se tal acoplamento for descrito por um parâmetro complexo,  $\hbar g (e^{-i\phi} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} + e^{i\phi} \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a})$ , podemos definir o operador  $\mathbf{d} = \mathbf{a}e^{i\phi}$  e seguir com o cálculo). Os coeficientes  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são constantes de acoplamento complexas de cada modo  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$  com o ambiente. Notemos que  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$  estão sujeitos a interação com o mesmo reservatório.

No hamiltoniano (2.39) consideramos o sistema de interesse composto por modos com frequências,  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , bem definidas. Este sistema pode ser empiricamente construído devido ao desenvolvimento tecnológico no campo de eletrodinâmica quântica de cavidades. Os modos podem possuir frequências, polarização e localização espacial distintas.

Os osciladores harmônicos que modelam o ambiente estão acoplados linearmente ao sistema. O efeito líquido desta interação pode ser relacionado a processos que envolvem a aniquilação de um fóton em um modo do sistema e a criação de um fóton em um modo do ambiente e vice-versa. Em cavidades construídas em semicondutores a proximidade entre os modos induz o acoplamento entre eles.

O modelo para dois modos na presença de um reservatório, modelo Caldeira-Leggett estendido, pode ser tratado analiticamente. A adequação empírica deste modelo pode ser observada na comparação entre os resultados teóricos descritos em [28] e os dados experimentais reportados em [29].

### 2.2.2 A Equação Mestra

Com o objetivo de facilitar o tratamento matemático, faremos uma transformação para os modos normais de  $\mathbf{H}_S$ . Tal transformação fica mais evidente se  $\mathbf{H}_S$  é escrito em sua forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_S &= \hbar \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a & g \\ g & \omega_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \\
 &= \hbar \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger & \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix} M^T M \begin{pmatrix} \omega_a & g \\ g & \omega_b \end{pmatrix} M^T M \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \\
 &= \hbar \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\dagger & \mathbf{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \\
 &= \hbar \omega_1 \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_1 + \hbar \omega_2 \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Onde,  $M$  é a matriz de rotação,

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \sin \theta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega_a - \omega_b}{\sqrt{(\omega_a - \omega_b)^2 + 4g^2}} \right)}, \\
 \cos \theta &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\omega_a - \omega_b}{\sqrt{(\omega_a - \omega_b)^2 + 4g^2}} \right)},
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

$\mathbf{a}_1$  e  $\mathbf{a}_2$  são os operadores bosônicos dos modos normais com frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} \omega_a & g \\ g & \omega_b \end{pmatrix} M^T, \\
 \omega_1 &= \frac{(\omega_a + \omega_b) + \sqrt{(\omega_a - \omega_b)^2 + 4g^2}}{2}, \\
 \omega_2 &= \frac{(\omega_a + \omega_b) - \sqrt{(\omega_a - \omega_b)^2 + 4g^2}}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Definindo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

$\mathbf{H}_{int}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{H}_{int} = \hbar \sum_k \left( \alpha_{1k} \mathbf{c}_k^\dagger \mathbf{a}_1 + \alpha_{1k}^* \mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{c}_k \right) + \hbar \sum_k \left( \alpha_{2k} \mathbf{c}_k^\dagger \mathbf{a}_2 + \alpha_{2k}^* \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{c}_k \right). \quad (2.44)$$

A evolução temporal do operador de estado na representação de interação é dada pela equação

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{\mathbf{H}}_{int}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (2.45)$$

onde

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i\mathbf{H}_0 t/\hbar} \rho(t) e^{-i\mathbf{H}_0 t/\hbar}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_{int}(t) = e^{i\mathbf{H}_0 t/\hbar} \mathbf{H}_{int}(t) e^{-i\mathbf{H}_0 t/\hbar}. \quad (2.46)$$

Integrando a equação (2.45) e iterando por duas vezes obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{\mathbf{H}}_{int}(t'), \tilde{\rho}(0)] \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [\tilde{\mathbf{H}}_{int}(t'), [\tilde{\mathbf{H}}_{int}(t''), \tilde{\rho}(0)]] + \mathcal{O}^3(\tilde{\mathbf{H}}_{int}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Podemos desconsiderar os termos de interação de terceira ordem,  $\mathcal{O}^3(\tilde{\mathbf{H}}_{int})$ , devido ao alto fator de qualidade das cavidades.

Se em  $t = 0$  o sistema for preparado no estado  $\rho_S(0)$  e o ambiente estiver em equilíbrio térmico, teremos

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0), \quad (2.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_R(0) &= \frac{1}{Z} \prod_k \exp\left(-\beta \hbar \omega_k \mathbf{c}_k^\dagger \mathbf{c}_k\right), \\ Z &= \prod_k \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \hbar \omega_k n), \quad \beta = (k_B T)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$k_B$  é a constante de Boltzmann,  $T$  é a temperatura,  $Z$  a função de partição, e  $\bar{n}_k$  o número médio de excitações de frequência  $\omega_k$ :

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_k) - 1}. \quad (2.50)$$

Substituindo a equação (2.48) em (2.47) e tomando o traço parcial nos graus de liberdade do ambiente obtemos

$$\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(0) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \begin{array}{l} - \left( \gamma_{ij}(\tau) e^{i(\omega_j - \omega_i)t'} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^\dagger \tilde{\rho}_S(0) \right) \\ + \left( \gamma_{ij}(\tau) e^{i(\omega_j - \omega_i)t'} \mathbf{a}_j^\dagger \tilde{\rho}_S(0) \mathbf{a}_i \right) \\ - \left( \Gamma_{ij}(\tau) e^{i(\omega_j - \omega_i)t'} \tilde{\rho}_S(0) \mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{a}_i \right) \\ + \left( \Gamma_{ij}(\tau) e^{i(\omega_j - \omega_i)t'} \mathbf{a}_i \tilde{\rho}_S(0) \mathbf{a}_j^\dagger \right) \end{array} \right\} + \text{HC}, \quad (2.51)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}(\tau) &= e^{-i\omega_j\tau} \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* \bar{n}_k e^{i\omega_k\tau}, \\ \Gamma_{ij}(\tau) &= e^{-i\omega_j\tau} \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* (\bar{n}_k + 1) e^{i\omega_k\tau}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Utilizamos os estado de Fock no traço e definimos  $\tau = t' - t''$ . Os coeficientes  $\gamma_{ij}(\tau)$  e  $\Gamma_{ij}(\tau)$  decaem rapidamente com o aumento de  $\tau$ , portanto podemos mudar os limites de interação sem provocar grandes alterações no resultado final:

$$\tilde{\rho}_S(t) - \tilde{\rho}_S(0) = \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left( \begin{array}{l} +Z_{ij} \left( \mathbf{a}_i \tilde{\rho}_S(0) \mathbf{a}_j^\dagger - \tilde{\rho}_S(0) \mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{a}_i \right) \\ +z_{ij} \left( \mathbf{a}_j^\dagger \tilde{\rho}_S(0) \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^\dagger \tilde{\rho}_S(0) \right) \end{array} \right) \left( \int_0^t dt' e^{i(\omega_j - \omega_i)t'} \right) \right\} + \text{HC}, \quad (2.53)$$

onde

$$\begin{aligned} z_{ij} &= \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* \bar{n}_k \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau}, \\ Z_{ij} &= \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* (\bar{n}_k + 1) \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_j)\tau}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

e  $\tau_c$  é o tempo no qual  $\gamma_{ij}(\tau)$  e  $\Gamma_{ij}(\tau)$  possuem valores relevantes [30].

Diferenciando os dois lados da equação (2.53) e iterando obtemos

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left( \begin{array}{l} Z_{ij} \mathbf{a}_i \tilde{\rho}_S(t) \mathbf{a}_j^\dagger - Z_{ij} \tilde{\rho}_S(t) \mathbf{a}_j^\dagger \mathbf{a}_i \\ +z_{ij} \mathbf{a}_j^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \mathbf{a}_i - z_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^\dagger \tilde{\rho}_S(t) \end{array} \right) e^{i(\omega_j - \omega_i)t} \right\} + \text{HC}, \quad (2.55)$$

desconsideramos os termos de segunda ordem em  $Z_{ij}$  e  $z_{ij}$ , pois são termos de quarta ordem em  $\tilde{H}_{int}$  (termos de terceira ordem em  $\tilde{H}_{int}$  foram desconsiderados anteriormente na equação (2.47)).

Através da relação,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_S t} \left\{ \frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] + \frac{d}{dt}\rho_S(t) \right\} e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t}, \quad (2.56)$$

podemos escrever a equação mestra na representação de Schrödinger:

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left( \begin{array}{l} Z_{ij}\mathbf{a}_i\rho_S(t)\mathbf{a}_j^\dagger - Z_{ij}\rho_S(t)\mathbf{a}_j^\dagger\mathbf{a}_i \\ + z_{ij}\mathbf{a}_j^\dagger\rho_S(t)\mathbf{a}_i - z_{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j^\dagger\rho_S(t) \end{array} \right) + \text{HC} \right\} - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \rho_S(t)]. \quad (2.57)$$

Definindo

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix},$$

podemos escrever (2.57) na forma matricial,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) \rho_S(t) \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\dagger \\ \mathbf{a}_2^\dagger \end{pmatrix} - \rho_S(t) (\mathbf{a}_1^\dagger \ \mathbf{a}_2^\dagger) \mathbf{Z}^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \\ + (\mathbf{a}_1^\dagger \ \mathbf{a}_2^\dagger) \rho_S(t) \mathbf{z}^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} - (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) \mathbf{z} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\dagger \\ \mathbf{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \rho_S(t) \end{array} \right\} + \text{HC} \\ - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \rho_S(t)].$$

Utilizando as equações (2.41) e (2.42) podemos retornar aos modos originais  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$ :

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a} \ \mathbf{b}) \rho_S(t) \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger \\ \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix} - \rho_S(t) (\mathbf{a}^\dagger \ \mathbf{b}^\dagger) \mathbf{S}^T \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ + (\mathbf{a}^\dagger \ \mathbf{b}^\dagger) \rho_S(t) \mathbf{s}^T \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} - (\mathbf{a} \ \mathbf{b}) \mathbf{s} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^\dagger \\ \mathbf{b}^\dagger \end{pmatrix} \rho_S(t) \end{array} \right\} + \text{HC} \\ - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_S, \rho_S(t)], \quad (2.59)$$

onde

$$\mathbf{s} = \mathbf{M}^T \mathbf{z} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} z_{aa} & z_{ab} \\ z_{ba} & z_{bb} \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}^T \mathbf{Z} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} \\ Z_{ba} & Z_{bb} \end{pmatrix}.$$

As constantes  $z_{aa}$ ,  $z_{ab}$ ,  $z_{ba}$ ,  $z_{bb}$ ,  $Z_{aa}$ ,  $Z_{ab}$ ,  $Z_{ba}$  e  $Z_{bb}$  são os parâmetros relevantes para a descrição macroscópica da ação do ambiente sobre o sistema de interesse e tem a forma:

$$\begin{aligned}
 z_{aa} &= \sum_k \bar{n}_k (\alpha_k \alpha_k^* \eta_k + \alpha_k \beta_k^* \nu_k), & z_{ab} &= \sum_k \bar{n}_k (\alpha_k \alpha_k^* \nu_k + \alpha_k \beta_k^* \mu_k), \\
 z_{ba} &= \sum_k \bar{n}_k (\beta_k \alpha_k^* \eta_k + \beta_k \beta_k^* \nu_k), & z_{bb} &= \sum_k \bar{n}_k (\beta_k \alpha_k^* \nu_k + \beta_k \beta_k^* \mu_k), \\
 Z_{aa} &= \sum_k (\bar{n}_k + 1) (\alpha_k \alpha_k^* \eta_k + \alpha_k \beta_k^* \nu_k), & Z_{ab} &= \sum_k (\bar{n}_k + 1) (\alpha_k \alpha_k^* \nu_k + \alpha_k \beta_k^* \mu_k), \\
 Z_{ba} &= \sum_k (\bar{n}_k + 1) (\beta_k \alpha_k^* \eta_k + \beta_k \beta_k^* \nu_k), & Z_{bb} &= \sum_k (\bar{n}_k + 1) (\beta_k \alpha_k^* \nu_k + \beta_k \beta_k^* \mu_k),
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \eta_k &= \xi_{k1} \cos^2 \theta + \xi_{k2} \sin^2 \theta, \\
 \mu_k &= \xi_{k2} \cos^2 \theta + \xi_{k1} \sin^2 \theta, \\
 \nu_k &= (\xi_{k1} - \xi_{k2}) \sin \theta \cos \theta, \\
 \xi_{ki} &= \int_0^{\tau_c} d\tau e^{i(\omega_k - \omega_i)\tau}.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Devido a forma de  $\xi_{ki}$ , os modos do ambiente que contribuem efetivamente para o acoplamento são aqueles que possuem frequências próximas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

O papel dos coeficientes macroscópicos se torna mais evidente se escrevermos (2.59) na forma

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \mathcal{L} \rho_S(t), \tag{2.63}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & K_{aa} (2\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}^\dagger - \bullet \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \bullet) + K_{bb} (2\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}^\dagger - \bullet \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} - \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} \bullet) & (2.64) \\
 & + K_{ab} (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}^\dagger - \bullet \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} \bullet) + K_{ba} (\mathbf{b} \bullet \mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}^\dagger - \bullet \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} - \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a} \bullet) \\
 & + k_{aa} (2\mathbf{a}^\dagger \bullet \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \bullet - \bullet \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger) + k_{bb} (2\mathbf{b}^\dagger \bullet \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{b}^\dagger \bullet - \bullet \mathbf{b} \mathbf{b}^\dagger) \\
 & + k_{ab} (\mathbf{b}^\dagger \bullet \mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger \bullet \mathbf{b} - \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger \bullet - \bullet \mathbf{b} \mathbf{a}^\dagger) + k_{ba} (\mathbf{a}^\dagger \bullet \mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger \bullet \mathbf{a} - \mathbf{b} \mathbf{a}^\dagger \bullet - \bullet \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger) \\
 & + i \left( \frac{W_{ab} - W_{ba}}{2} \right) (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}^\dagger - \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}^\dagger - \bullet \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} \bullet) \\
 & + i \left( \frac{W_{ba} - W_{ab}}{2} \right) (\mathbf{b} \bullet \mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}^\dagger - \bullet \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a} \bullet) \\
 & + i \left( \frac{w_{ab} - w_{ba}}{2} \right) (\mathbf{b}^\dagger \bullet \mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger \bullet \mathbf{b} - \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger \bullet + \bullet \mathbf{b} \mathbf{a}^\dagger) \\
 & + i \left( \frac{w_{ba} - w_{ab}}{2} \right) (\mathbf{a}^\dagger \bullet \mathbf{b} - \mathbf{b}^\dagger \bullet \mathbf{a} - \mathbf{b} \mathbf{a}^\dagger \bullet + \bullet \mathbf{a} \mathbf{b}^\dagger) \\
 & - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}'_S, \bullet],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}'_S &= \hbar \Omega_a \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \hbar \Omega_b \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \hbar G (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a}) & (2.65) \\
 \Omega_x &= \omega_x + w_{xx} - W_{xx}, \\
 G &= g + \frac{(w_{ab} + w_{ba})}{2} - \frac{(W_{ab} + W_{ba})}{2}, \\
 k_{xy} &= \text{Re}\{z_{xy}\}, & w_{xy} &= \text{Im}\{z_{xy}\}, \\
 K_{xy} &= \text{Re}\{Z_{xy}\}, & W_{xy} &= \text{Im}\{Z_{xy}\},
 \end{aligned}$$

( $x$  e  $y = a$  ou  $b$ ).  $\mathcal{L}$  é o Liouvilliano. Os parâmetros  $K_{aa}$  e  $K_{bb}$  são as constantes de dissipação dos modos  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$ ; os coeficientes  $k_{aa}$  e  $k_{bb}$  são as constantes de difusão para estes modos. Os parâmetros  $K_{ab}$ ,  $K_{ba}$ ,  $k_{ab}$ ,  $k_{ba}$ ,  $i(W_{ab} - W_{ba})/2$  e  $i(w_{ab} - w_{ba})/2$  podem ser relacionados com um canal de comunicação entre os modos  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$ .  $W_{aa}$ ,  $W_{bb}$ ,  $w_{aa}$  e  $w_{bb}$  são responsáveis por alterações nas frequências dos modos; os parâmetros  $(W_{ab} + W_{ba})/2$  e  $(w_{ab} + w_{ba})/2$  alteram o acoplamento unitário entre  $M_{\mathbf{a}}$  e  $M_{\mathbf{b}}$ .

## Capítulo 3

# Processo de medição em sistemas de cavidades de microondas

Interações entre átomos de dois níveis e modos de campo em cavidades com alto fator de qualidade, são usadas na observação experimental de fenômenos fundamentais em mecânica quântica. Em experimentos deste tipo, átomos de Rydberg atravessam montagens constituídas por zonas de Ramsey e cavidades supercondutoras com o objetivo de preparar estados de campo nas cavidades, bem como de investigar suas características. Para atingir tais objetivos os átomos de Rydberg são analisados, ao final de sua trajetória, por detectores de ionização projetados para discriminar níveis atômicos de energia.

Em tais detectores, a presença de um campo elétrico que varia espacialmente permite a identificação de zonas de ionização, que são utilizadas na discriminação dos níveis atômicos de energia. Na primeira zona de ionização o campo estático tem baixa intensidade, portanto átomos ionizados nesta região são identificados com nível de energia mais excitado  $e$ . Entretanto, na segunda zona de ionização o campo estático tem maior intensidade, portanto átomos ionizados nesta região são identificados com nível de energia  $g$ . Devido ao fato de que as zonas de ionização são bem definidas espacialmente, podemos trata-las como detectores  $D_e$  e  $D_g$  posicionados como na figura 3.1.

A informação de que a ionização aconteceu em um dos detectores é fornecida pelas eletro-multiplicadoras, que registram a presença do elétron livre gerado durante o processo de ionização. Entretanto, no modelo apresentado nesta seção, consideramos que a ionização do átomo dentro dos detectores desencadeia um processo que gera inevitavelmente um sinal clássico. Portanto, através deste modelo, concentramos nossa atenção nas imperfeições do processo de medição relacionadas com a descrição quântica da interação entre campo estático e átomos.

A descrição do processo de medição pode ser dividida em duas etapas. Inicialmente uma evolução temporal unitária representando a interação entre o campo estático nos

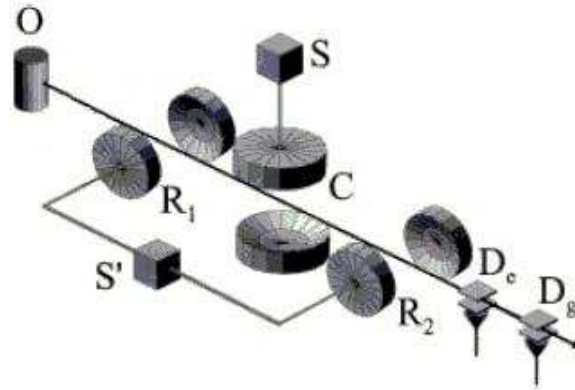


Figura 3.1: Montagem padrão em experimentos de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, onde os átomos preparados em  $O$  cruzam as zonas de Ramsey  $R_1$  e  $R_2$  (alimentadas pela fonte  $S'$ ), a cavidade de alto fator de qualidade  $C$  (alimentada pela fonte  $S$ ) e são analisados pelos detectores  $D_e$  e  $D_g$

detectores e o átomo de dois níveis. Tal evolução acontece até o momento em que um sinal clássico é gerado. Um clique no detector anuncia que a ionização aconteceu, conseqüentemente, a ausência de clique indica que o estado de energia atômico ainda pertence ao subespaço de níveis discretos. O sinal clássico gerado dá início à segunda etapa da evolução do sistema.

Neste trabalho <sup>1</sup> modelamos dois tipos de detectores: detectores ineficientes e detectores que fazem contagens erradas. A forma do hamiltoniano que modela a interação do campo estático com o átomo de dois níveis é específica para cada tipo de detector. Separamos o trabalho em duas seções onde serão discutidos os modelos para cada tipo de detector e exemplos de aplicação. Começemos pelos detectores ineficientes.

### 3.1 Detectores Ineficientes

O hamiltoniano que descreve a interação entre o átomo de dois níveis e o campo eletromagnético no detector ineficiente  $D_e$  tem a forma:

$$H_{1e} = \epsilon_e |e\rangle\langle e| + \epsilon_g |g\rangle\langle g| + \int dk \epsilon_k |k\rangle\langle k| + v_e \int dk (|e\rangle\langle k| + |k\rangle\langle e|). \quad (3.1)$$

O primeiro e o segundo termo no hamiltoniano representam os dois níveis discretos  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , com energias  $\epsilon_e$  e  $\epsilon_g$  (onde  $\epsilon_e > \epsilon_g$ ). O terceiro termo simboliza o espectro contínuo e o último o acoplamento entre o nível discreto  $|e\rangle$  com o contínuo. A intensidade deste

<sup>1</sup>Publicado em [31]

acoplamento é dada pela constante  $v_e$  (que consideramos independente de  $k$ ). O termo de acoplamento é responsável pela ionização do átomo e está intimamente ligado à presença do campo estático no detector.

Podemos definir a eficiência de  $D_e$  como a probabilidade de clique devido a interação do detector com um átomo preparado em  $|e\rangle$ . O cálculo desta probabilidade segue por uma evolução unitária, governada por  $H_{1e}$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_{1e}t/\hbar}|e\rangle = \int d\mu \langle \psi_\mu^e | e \rangle e^{-i\epsilon_\mu^e t/\hbar} |\psi_\mu^e\rangle \quad (3.2)$$

onde  $\{|\psi_\mu^e\rangle\}$  é o conjunto de autovetores de  $H_{1e}$  e  $\epsilon_\mu^e$  são os autovalores correspondentes. Os coeficientes  $\langle \psi_\mu^e | e \rangle$  e  $\langle \psi_\mu^e | k \rangle$  tem a forma [30]:

$$\langle \psi_\mu^e | e \rangle = \frac{1}{\left[1 + \sum_{k'} \left(\frac{v_e}{\epsilon_\mu^e - \epsilon_{k'}}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (3.3)$$

$$\langle \psi_\mu^e | k \rangle = \frac{v_e / (\epsilon_\mu^e - \epsilon_k)}{\left[1 + \sum_{k'} \left(\frac{v_e}{\epsilon_\mu^e - \epsilon_{k'}}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (3.4)$$

Calculando a probabilidade de ionização através da regra de Born obtemos:

$$\begin{aligned} p_e &= \int dk |\langle k | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= \int dk \left| \int d\mu \langle \psi_\mu^e | e \rangle \langle k | \psi_\mu^e \rangle e^{-i\epsilon_\mu^e t/\hbar} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O detector  $D_e$  possui eficiência limitada se  $p_e < 1$ . Em tais detectores, a probabilidade de que um átomo preparado em  $e$  não ser detectado por  $D_e$  pode ser calculada

$$\langle e | \psi(t) \rangle^2 + |\langle g | \psi(t) \rangle|^2 = \left| \sum_\mu e^{-i\epsilon_\mu t/\hbar} |\langle \psi_\mu^e | e \rangle|^2 \right|^2 = 1 - p_e, \quad (3.6)$$

desenvolvendo esta expressão podemos escrever a probabilidade de falha de  $D_e$  como

$$1 - p_i = e^{-\Gamma|t|} \quad (3.7)$$

onde  $\Gamma$  é a taxa de transição entre nível discreto e o continuum, calculada a partir da regra áurea. Esta expressão indica que quanto maior é o intervalo de tempo de interação entre átomo e campo estático menor é a probabilidade de falha do detector.

Através do mesmo procedimento utilizado para a definição de  $p_e$  podemos definir  $p_g$  (eficiência de  $D_g$ ).

### 3.1.1 Aplicação em Eletrodinâmica quântica de cavidades

Como exemplo de aplicação do modelo, estudaremos as interações entre átomo e detectores em um contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades. Suponhamos que no instante imediatamente anterior à interação do átomo com os detectores, o operador de estado do sistema composto por um átomo de dois níveis e um modo de campo em uma cavidade tenha a forma:

$$\rho_{AC}(0) = \rho_{ee}|e\rangle\langle e| + \rho_{eg}|e\rangle\langle g| + \rho_{ge}|g\rangle\langle e| + \rho_{gg}|g\rangle\langle g|. \quad (3.8)$$

Os símbolos  $\rho_{ee}$ ,  $\rho_{eg}$ ,  $\rho_{ge}$  e  $\rho_{gg}$  são operadores no subsistema do campo nas cavidades.

A interação entre átomo e o primeiro detector ( $D_e$ ) pode ser dividida em duas etapas. Primeiramente, uma evolução unitária governada pelo hamiltoniano  $H_{1e}$ , mostrado na equação (3.1), durante o intervalo de tempo  $t_1$ . O operador de estado do sistema átomo-campo na cavidade, após esta etapa, tem a forma

$$\rho_{AC}(t_1) = e^{-iH_{1e}t_1/\hbar}\rho_{AC}(0)e^{iH_{1e}t_1/\hbar}. \quad (3.9)$$

A segunda etapa tem início com a geração de um sinal clássico no tempo  $t_1$ . Se este sinal for um clique em  $D_e$ , saberemos que o átomo foi ionizado neste detector, portanto  $\rho_{AC}(t_1)$  deve ser projetado no subespaço  $\{|k\rangle\}$ . Entretanto, se  $D_e$  não clicar saberemos que o átomo não foi ionizado, assim a projeção deve ser feita no subespaço de níveis discretos  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ . O valor máximo que  $t_1$  pode assumir é  $t'_1$  que representa o tempo necessário para que o átomo atravessasse completamente o detector  $D_e$ . Conseqüentemente, até o instante de tempo  $t'_1$ , um sinal clássico será gerado. Tal informação representa um papel importante na evolução de  $\rho_{AC}$ . Sabemos que antes da interação do átomo com  $D_g$ , o operador de estado  $\rho_{AC}(t_1)$  deverá ser projetado em um subespaço apropriado.

Podemos calcular a probabilidade de clique em  $D_e$

$$p_{\text{click}D_e} = \int dk \text{Tr}(|k\rangle\langle k|\rho_{AC}(t_1)) = \int dk \text{Tr}(|k\rangle\langle k|\rho_{ee}e^{-iH_{1e}t_1/\hbar}|e\rangle\langle e|e^{iH_{1e}t_1/\hbar}). \quad (3.10)$$

utilizando a definição (3.5), podemos escrever

$$p_{\text{click}D_e} = p_e \text{Tr}_C(\rho_{ee}), \quad (3.11)$$

onde  $\text{Tr}_C$  é o traço parcial no subespaço do campo na cavidade. A expressão (3.10) pode ser interpretada como o produto entre a eficiência de  $D_e$  ( $p_e$ ) e a probabilidade de clique em um detector perfeito durante investigação do estado  $\rho_{AC}(0)$  ( $\text{Tr}_C(\rho_{ee})$ ).

A probabilidade de  $D_e$  não clicar é:

$$p_{\text{non-click}D_e} = \text{Tr}[ (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \rho_{AC}(t_1) ] = \text{Tr}_C(\rho_{ee}) + \text{Tr}_C(\rho_{gg}) - p_e \text{Tr}_C(\rho_{ee}). \quad (3.12)$$

A partir da normalização de  $\rho_{AC}(0)$ ,  $\text{Tr}_C(\rho_{ee}) + \text{Tr}_C(\rho_{gg}) = 1$ , podemos escrever

$$p_{\text{non-click}D_e} = 1 - p_e \text{Tr}_C(\rho_{ee}). \quad (3.13)$$

Após o não clique em  $D_e$  o estado do sistema átomo-modo de campo na cavidade tem a forma:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{non-click}}(t_1) &= \frac{(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \rho_{AC}(t_1) (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)}{N} \\ &= \frac{\rho_{gg}|g\rangle\langle g| + \rho_{ee}(1 - p_e)|e\rangle\langle e| + (\rho_{eg} e^{i\epsilon_g t_1/\hbar} \int d\mu e^{-i\epsilon_\mu t_1/\hbar} |\langle \psi_\mu | e \rangle|^2 |e\rangle\langle e| + h.c.)}{N}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $N = 1 - p_e \text{Tr}_C \rho_{ee}$ . Notemos que em detectores perfeitos ( $p_e = 1$ ), o operador de estado reduzido do átomo pode ser escrito como  $\rho_{gg}|g\rangle\langle g|$ . Este resultado confirma às expectativas, pois sabemos que, para detectores perfeitos o não clique em  $D_e$  acarretaria na projeção  $|g\rangle\langle g| \rho_{AC}(0) |g\rangle\langle g|$ .

Quando o átomo não é ionizado em  $D_e$ , ele continua sua jornada, sendo submetido à interação com  $D_g$ . Consideremos  $t_2$  como o tempo da interação entre o átomo e o campo eletromagnético em  $D_g$ . A evolução temporal que modela tal dinâmica pode ser descrita por:

$$\rho_{AC}(t_2) = e^{-iH_{1g}(t_2-t_1)\hbar} \rho_{\text{non-click}}(t_1) e^{iH_{1g}(t_2-t_1)\hbar}. \quad (3.15)$$

Assim, a probabilidade de clique em  $D_g$  é

$$p_{\text{click}D_g} = \frac{p_g \text{Tr}_C(\rho_{gg})}{1 - p_e \text{Tr}_C(\rho_{ee})}, \quad (3.16)$$

Notemos que esta probabilidade depende da eficiência do primeiro detector ( $p_e$ ). Examinemos alguns limites: Para  $p_e = 0$ , a situação é equivalente a que o primeiro detector está ausente, portanto o átomo interage apenas com  $D_g$  e a probabilidade de clique é  $p_g \text{Tr}_C(\rho_{gg})$ , como esperado. Se  $p_e = 1$ ,  $D_e$  é um detector perfeito, sabemos que um átomo que atravessa  $D_e$  sem ser detectado é preparado em  $|g\rangle$ , e a probabilidade de clique é igual a eficiência de  $D_g$  ( $p_g$ ). Quando ambos são detectores perfeitos ( $p_e = p_g = 1$ ),  $p_{\text{click}D_g} = 1$  pois o segundo detector não perderia um átomo preparado em  $|g\rangle$ .

Uma análise mais completa de  $p_{\text{click}D_g}$  para diferentes  $\rho_{AC}(0)$  pode ser feita através da Figura 3.2. O comportamento das curvas associadas à  $\text{Tr}_C(\rho_{gg}) = 0.5$  e  $\text{Tr}_C(\rho_{gg}) = 0.01$  reflete o fato de que o não clique em um detector  $D_e$  muito eficiente ( $p_e \approx 1$ ) aumenta a probabilidade  $p_{\text{click}D_g}$ , mesmo quando o átomo é praticamente preparado no estado  $|e\rangle\langle e|$  ( $\text{Tr}_C(\rho_{gg}) = 0.01$ ). Entretanto, se o átomo é praticamente preparado no estado  $|g\rangle\langle g|$  ( $\text{Tr}_C(\rho_{gg}) = 0.99$ ),  $p_e$  não afeta  $p_{\text{click}D_g}$ .

A probabilidade de  $D_g$  não clicar é

$$1 - p_{\text{click}D_g} = \frac{1 - p_e \text{Tr}_C \rho_{ee} - p_g \text{Tr}_C \rho_{gg}}{1 - p_e \text{Tr}_C \rho_{ee}} \quad (3.17)$$

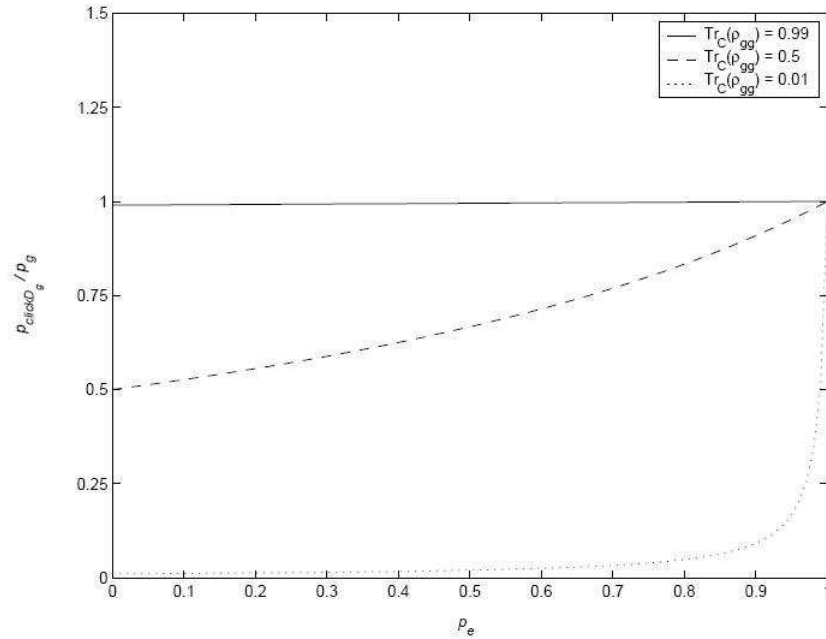


Figura 3.2: Influência da eficiência de  $D_e$  na probabilidade “normalizada” de click em  $D_g$  ( $p_{clickD_g}/p_g$ ), para diferentes valores de  $Tr_C(\rho_{gg})$ . A eficiência de  $D_g$  apenas impõe um limite para o valor máximo de  $p_{clickD_g}$  mas não modifica seu comportamento como função de  $p_e$ .

Quando o átomo atravessa ambos detectores sem ser ionizado, o estado reduzido do campo nas cavidades assume a forma:

$$\rho'_C = \frac{\text{Tr}_A [(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \rho_{AC}(t_2 - t_1) (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)]}{\text{Tr} [(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \rho_{AC}(t_2 - t_1) (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)]}. \quad (3.18)$$

Onde,  $\text{Tr}_A$  é o traço no subsistema de variáveis atômicas. Através da definição (3.5) podemos escrever:

$$\rho'_C = \frac{(1 - p_e)\rho_{ee} + (1 - p_g)\rho_{gg}}{1 - p_e \text{Tr}_C(\rho_{ee}) - p_g \text{Tr}_C(\rho_{gg})}. \quad (3.19)$$

Este resultado está de acordo com [32], onde os autores fazem uso de argumentos estatísticos para escrever a expressão (3.19).

## 3.2 Detectores que fazem contagens erradas

Apresentaremos nesta seção uma extensão do modelo para detectores ineficientes que permite a inclusão de falsas contagens. O hamiltoniano que descreve a interação entre

um átomo de dois níveis e o detector  $D_e$  tem a forma (O hamiltoniano relacionado ao detector  $D_g$  pode ser obtido a partir da substituição do índice  $e$  por  $g$ ):

$$H_{2e} = \epsilon_e |e\rangle\langle e| + \epsilon_g |g\rangle\langle g| + \int dk \epsilon_k |k\rangle\langle k| \quad (3.20)$$

$$+ w_e \int dk (|e\rangle\langle k| + |k\rangle\langle e|) + w_g \int dk (|g\rangle\langle k| + |k\rangle\langle g|),$$

onde  $w_e$  e  $w_g$  são constantes reais. O segundo termo de interação (o último da equação 3.20) permite o acoplamento entre o nível de energia  $|g\rangle$  e o continuum, portanto, este é responsável por detecções erradas. O primeiro termo de acoplamento é responsável por contagens corretas.

Com o objetivo de simplificar a notação, definimos os coeficientes complexos:

$$q_{a,b}^e = \int d\eta e^{-i\epsilon_\eta t/\hbar} \langle \phi_\eta^e | a \rangle \langle b | \phi_\eta^e \rangle, \quad (3.21)$$

onde  $\{|\phi_\eta^e\rangle\}$  e  $\{\epsilon_\eta^e\}$  são, respectivamente, conjuntos de autovalores e autovetores de  $H_{2e}$ . Os índices  $a$  e  $b$  representam autovetores de níveis discretos e do continuum. As formas explícitas para os coeficientes do integrando e discussões relativas à eles estão apresentadas no apêndice A. A notação segue a forma em que: os índices superiores indicam em qual zona de detecção o átomo está atravessando. Os dois índices inferiores,  $a$  e  $b$ , representam, respectivamente, o estado atômico anterior e posterior à interação com os detectores.

Notemos que  $\int dk |q_{e,k}^e|^2$  é a probabilidade de que um átomo preparado em  $|e\rangle$  seja ionizado no detector  $D_e$ , tal probabilidade pode ser interpretada como a eficiência de  $D_e$ . A integral  $\int dk |q_{g,k}^e|^2$  é a probabilidade de um átomo preparado em  $|g\rangle$  ser ionizado em  $D_e$ , e portanto a probabilidade de falsa detecção.

Podemos perceber em (3.20), que a evolução unitária do sistema permite um acoplamento indireto entre os dois níveis discretos. O termo  $|q_{e,g}^e|^2$  é a probabilidade de transição entre os níveis discretos mediada pelo continuum. E  $|q_{e,e}^e|^2$  ( $|q_{g,g}^e|^2$ ) é a probabilidade de que um átomo preparado em  $|e\rangle$  ( $|g\rangle$ ) interaja com o campo eletromagnético em  $D_e$  e permaneça no mesmo nível. Podemos também notar que  $\int dk |q_{e,k}^g|^2$  ( $\int dk |q_{g,k}^g|^2$ ) é a probabilidade de que um átomo preparado em  $|e\rangle$  ( $|g\rangle$ ) ser ionizado em  $D_g$ .

### 3.2.1 Aplicação em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

O processo de interação entre átomo e detectores que fazem contagens erradas, como foi feito para detectores ineficientes, pode ser dividido em duas etapas: primeiramente, uma evolução unitária do operador de estado inicial, governada por  $H_{2e}$  ( $H_{2g}$ ) onde  $H_{2e}$  ( $H_{2g}$ ) tem a forma mostrada na equação (3.20), seguida por uma projeção em um subespaço adequado, representando a informação clássica, clique ou não clique, dos detectores.

Partindo do operador de estado mostrado na equação (3.8), e das definições apresentadas em (3.21), a probabilidade de clique em  $D_e$  pode ser calculada:

$$p_{\text{click}D_e} = \int dk |q_{e,k}^e|^2 \text{Tr}_C(\rho_{ee}) + \int dk |q_{g,k}^e|^2 \text{Tr}_C(\rho_{gg}) + \left( \int dk q_{e,k}^{e*} q_{g,k}^e \text{Tr}_C(\rho_{eg}) + \text{h.c.} \right). \quad (3.22)$$

Esta expressão indica que  $p_{\text{click}D_e}$  é sensível aos termos de interferência ( $\rho_{eg}$ ) e ( $\rho_{ge}$ ). Calculando  $p_{\text{click}D_e}$  para o estado inicial  $\rho_{AC}(0) = \rho_{ee}|e\rangle\langle e| + \rho_{gg}|g\rangle\langle g|$ , obtém-se um valor diferente daquele apresentado em (3.22). Entretanto, tal fato não ocorre se substituirmos os detectores que fazem contagens erradas por detectores perfeitos ou ineficientes. O valor calculado para a probabilidade seria o mesmo para os dois estados iniciais diferentes.

Para comparar as modificações provocadas no estado do campo na cavidade pela interação com os detectores ineficientes e que fazem contagens erradas, calculamos a fidelidade em diferentes operadores de estado. A fidelidade entre operadores de estado  $\rho_A$  e  $\rho_B$  mede o “overlap” entre eles e é dada por

$$F(\rho_A, \rho_B) = \left( \text{Tr} \sqrt{\rho_A^{1/2} \rho_B \rho_A^{1/2}} \right)^2. \quad (3.23)$$

Primeiramente, calculemos a fidelidade entre o operador de estado  $\rho_A^e$  (que descreve o sistema após a ionização atômica no detector  $D_e$  ineficiente), e  $\rho_B^e$  (que descreve o sistema após a ionização atômica no detector  $D_e$  que faz contagens erradas). Por simplicidade, consideremos que o sistema átomo-modo de campo na cavidade tem seu estado inicial (estado imediatamente anterior à interação com os detectores) dado por:

$$\rho_{AC}(0) = \frac{1}{2} (|e, 0\rangle\langle e, 0| + |e, 0\rangle\langle g, 1| + |g, 1\rangle\langle e, 0| + |g, 1\rangle\langle g, 1|). \quad (3.24)$$

Após a evolução unitária e a projeção no subespaço continuum,  $\rho_A^e$  e  $\rho_B^e$  tem a forma:

$$\rho_A^e = |0\rangle\langle 0|, \quad (3.25a)$$

$$\rho_B^e = \frac{\int dk (|q_{e,k}^e|^2 |0\rangle\langle 0| + |q_{g,k}^e|^2 |1\rangle\langle 1| + q_{g,k}^{e*} q_{e,k}^e |1\rangle\langle 0| + q_{e,k}^{e*} q_{g,k}^e |0\rangle\langle 1|)}{\int dk (|q_{e,k}^e|^2 + |q_{g,k}^e|^2)}, \quad (3.25b)$$

e a fidelidade

$$F(\rho_A^e, \rho_B^e) = \frac{\int dk |q_{e,k}^e|^2}{\int dk (|q_{e,k}^e|^2 + |q_{g,k}^e|^2)}. \quad (3.26)$$

Notemos que se a probabilidade de detecções erradas tende a zero, ( $\int dk |q_{g,k}^e|^2 \rightarrow 0$ ), a fidelidade tende a um,  $F(\rho_A^e, \rho_B^e) \rightarrow 1$ , assim  $\rho_A^e$  e  $\rho_B^e$  tornam-se idênticos.

Podemos calcular também a fidelidade entre os operadores de estado  $\rho_A^g$ , que descreve o sistema após a ionização atômica no detector  $D_g$ , e  $\rho_B^g$ , que descreve o sistema

após a ionização atômica no detector  $D_e$  ineficiente. O cálculo segue da seguinte forma. Primeiramente, uma interação entre átomo e o detector  $D_e$ , modelado por uma evolução unitária do estado mostrado na equação (3.24) seguida por uma projeção no subespaço discreto. Finalmente, a interação com o detector  $D_g$ , modelada por uma evolução unitária do operador de estado do sistema após a interação com  $D_e$ , e uma projeção no subespaço do continuum, o que caracteriza o clique em  $D_g$ . Seguindo este procedimento, podemos calcular a fidelidade

$$F(\rho_A^g, \rho_B^g) = \frac{1}{A} \int dk (|q_{g,g}^{e*}|^2 |q_{g,k}^{g*}|^2 + q_{g,g}^{e*} q_{g,e}^e q_{g,k}^{g*} q_{e,k}^g + q_{g,g}^e q_{g,e}^{e*} q_{g,k}^g q_{e,k}^{g*} + |q_{g,e}^e|^2 |q_{e,k}^g|^2) , \quad (3.27)$$

onde

$$A = \int dk (|q_{g,e}^e|^2 |q_{g,k}^g|^2 + q_{g,e}^{e*} q_{e,e}^e q_{g,k}^{g*} q_{e,k}^g + q_{g,e}^e q_{e,e}^{e*} q_{g,k}^g q_{e,k}^{g*} + |q_{e,e}^e|^2 |q_{e,k}^g|^2) + \int dk (|q_{g,g}^e|^2 |q_{g,k}^g|^2 + q_{g,g}^{e*} q_{g,e}^e q_{g,k}^{g*} q_{e,k}^g + q_{g,g}^e q_{g,e}^{e*} q_{g,k}^g q_{e,k}^{g*} + |q_{g,e}^e|^2 |q_{e,k}^g|^2) . \quad (3.28)$$

Como estamos considerando que qualquer transição dos níveis discretos para o continuum gera um sinal clássico, devemos assumir que a probabilidade de acoplamento indireto entre os níveis  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  mediado pelo continuum deve ser nula. Portanto, devemos considerar que  $|q_{g,e}^e|^2 = 0$  e podemos escrever:

$$F(\rho_A^g, \rho_B^g) = \frac{\int dk |q_{g,g}^e|^2 |q_{g,k}^g|^2}{\int dk (|q_{g,g}^e|^2 |q_{g,k}^g|^2 + |q_{e,e}^e|^2 |q_{e,k}^g|^2)} . \quad (3.29)$$

Se a probabilidade de contagens erradas em  $D_g$  tender a zero ( $\int dk |q_{e,k}^g|^2 \rightarrow 0$ ) a fidelidade tenderá a um [ $F(\rho_A^g, \rho_B^g) \rightarrow 1$ ].

### 3.2.2 Análise de dados experimentais

Nesta seção utilizaremos o modelo para detectores que fazem contagens erradas na análise dos dados empíricos reportados em [33]. Um estudo mais completo da dinâmica do sistema, incluindo as interações entre átomos e detectores, permite maior precisão em previsões de dados empíricos. No experimento a ser estudado como modelo [33], o decaimento de um único fóton preparado em uma cavidade de microondas foi monitorado. Neste experimento um par de átomo interage, separadamente, com o modo de campo eletromagnético armazenado na cavidade. O primeiro átomo é preparado no estado  $|e\rangle$  e interage com o modo de campo na cavidade pelo tempo necessário para a realização de um pulso  $\pi$ , transferindo a excitação para o modo de campo na cavidade. Após o intervalo de tempo  $T$ , o segundo átomo, preparado em  $|g\rangle$ , interage com o modo de campo

na cavidade realizando também um pulso  $\pi$ , e portanto absorvendo a excitação emitida pelo primeiro átomo. Os átomos são submetidos à interação com os detectores de ionização. Os resultados das medições dos níveis atômicos de energia, de várias realizações deste procedimento, são registrados para que seja revelada, em função do tempo  $T$ , a probabilidade condicional  $\Pi_{ge} = P_{ge}/(P_{ge} + P_{gg})$  de que o segundo átomo seja medido em  $e$  sabendo-se que o primeiro foi medido em  $g$ . Nesta expressão,  $P_{ge}$  é a probabilidade de detectar o primeiro átomo em  $D_g$  e o segundo em  $D_e$ , e  $P_{gg}$  é a probabilidade de que ambos sejam detectados em  $D_g$ . Sob condições ideais espera-se que a probabilidade condicional  $\Pi_{ge}$  seja igual a um em  $T = 0$ . Entretanto, devido a algumas imperfeições experimentais ressaltadas pelos autores, podemos observar que a curva construída a partir da interpolação de dados empíricos, mostrada na Figura 3.3, apresenta um valor de  $\Pi_{ge} \approx 0.70$  quando  $T = 0$ .

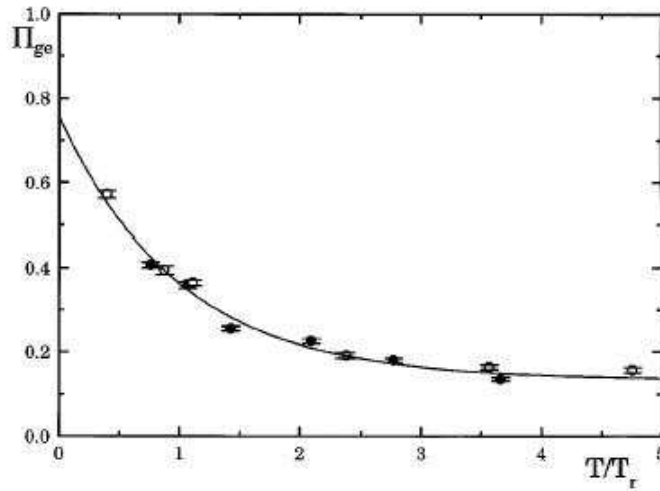


Figura 3.3: Dados empíricos que mostram o decaimento de um fóton armazenado em uma cavidade de microondas. Figura extraída de [33]

Aplicaremos o modelo de detectores que fazem contagens erradas para calcular a probabilidade condicional  $\Pi_{ge}$ . Conforme foi destacado em [33], devido a imperfeições empíricas, o estado do sistema átomo-modo de campo na cavidade após a passagem do primeiro átomo pode ser escrito como:

$$\rho_1 = |\alpha|^2 |g, 1\rangle \langle g, 1| + |\beta|^2 |e, 0\rangle \langle e, 0| + (\gamma |g, 1\rangle \langle e, 0| + \text{h. c.}), \quad (3.30)$$

onde  $|\alpha|^2 = 0.94$  e  $|\beta|^2 = 0.06$ .

Seguindo o modelo de detectores que fazem contagens erradas, a probabilidade do

primeiro átomo ser detectado em  $D_g$  é dada por:

$$p_{\text{click}D_g}^{(1^\circ \text{atom})} = \int dk \text{Tr} (|k\rangle\langle k| e^{-iH_{2e}t_2/\hbar} \rho'_1 e^{iH_{2e}t_2/\hbar}), \quad (3.31)$$

onde

$$\rho'_1 = \frac{1}{N} [(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) e^{-iH_{2e}t_1/\hbar} \rho_1 e^{iH_{2e}t_1/\hbar} (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)]. \quad (3.32)$$

$N$  é a constante de normalização,  $t_1$  é o intervalo de tempo em que o átomo interage com  $D_e$  e  $t_2$  é o intervalo de tempo em que o átomo interage com  $D_g$  (até ser ionizado).

Desenvolvendo a expressão(3.31), usando as definições (3.21) e assumindo que  $|q_{e,g}^e|^2 = |q_{g,e}^e|^2 = 0$  podemos escrever

$$p_{\text{click}D_g}^{(1^\circ \text{atom})} = \frac{|\alpha|^2(1 - \int dk |q_{g,k}^e|^2) \int dk |q_{g,k}^g|^2 + |\beta|^2(1 - \int dk |q_{e,k}^e|^2) \int dk |q_{e,k}^g|^2}{|\alpha|^2(1 - \int dk |q_{g,k}^e|^2) + |\beta|^2(1 - \int dk |q_{e,k}^e|^2)}. \quad (3.33)$$

A detecção do primeiro átomo em  $D_g$  reduz o estado do campo eletromagnético na cavidade para  $|1\rangle$ . Após a passagem do segundo átomo, o estado do sistema átomo-modo de campo na cavidade tem a forma:

$$\rho_2 = |\beta|^2 |g, 1\rangle\langle g, 1| + |\alpha|^2 |e, 0\rangle\langle e, 0| + (\delta |g, 1\rangle\langle e, 0| + \text{h. c.}). \quad (3.34)$$

Através de um procedimento similar ao usado na dedução de (3.33), podemos calcular a probabilidade do segundo átomo ser detectado em  $D_g$  ( $p_{\text{click}D_g}^{(2^\circ \text{atom})}$ ) e em  $D_e$  ( $p_{\text{click}D_e}^{(2^\circ \text{atom})}$ ):

$$p_{\text{click}D_g}^{(2^\circ \text{atom})} = \frac{|\beta|^2(1 - \int dk |q_{g,k}^e|^2) \int dk |q_{g,k}^g|^2 + |\alpha|^2(1 - \int dk |q_{e,k}^e|^2) \int dk |q_{e,k}^g|^2}{|\beta|^2(1 - \int dk |q_{g,k}^e|^2) + |\alpha|^2(1 - \int dk |q_{e,k}^e|^2)}, \quad (3.35)$$

e

$$p_{\text{click}D_e}^{(2^\circ \text{atom})} = |\beta|^2 \int dk |q_{g,k}^e|^2 + |\alpha|^2 \int dk |q_{e,k}^e|^2. \quad (3.36)$$

Em [33], os autores informam os valores das eficiências dos detectores ( $\int dk |q_{e,k}^e|^2 = \int dk |q_{g,k}^g|^2 = 0.35$ ), da probabilidade de contagens erradas em  $D_e$  ( $\int dk |q_{g,k}^e|^2 = 0.13$ ) e em  $D_g$  ( $\int dk |q_{e,k}^g|^2 = 0.1$ ). Portanto, o valor calculado para a probabilidade condicional em  $T = 0$  é

$$\Pi_{ge}(0) = \frac{P_{ge}}{P_{ge} + P_{gg}} = \frac{p_{\text{click}D_g}^{(1^\circ \text{atom})} p_{\text{click}D_e}^{(2^\circ \text{atom})}}{p_{\text{click}D_g}^{(1^\circ \text{atom})} p_{\text{click}D_e}^{(2^\circ \text{atom})} + p_{\text{click}D_g}^{(1^\circ \text{atom})} p_{\text{click}D_g}^{(2^\circ \text{atom})}} = 0.738, \quad (3.37)$$

valor que está razoavelmente próximo ao indicado na curva da figura 3.3.

No capítulo seguinte utilizamos o modelo de detectores ineficientes na análise de uma proposta experimental para a observação de efeito Zenão Quântico.

## Capítulo 4

# Efeito Zenão Quântico em sistema de dois osciladores acoplados

O “Paradoxo Quântico de Zenão”, que foi apresentado (de forma matematicamente rigorosa) em 1977 por B. Misra e E. C. G. Sudarshan [34]. Nesta formulação inicial, os autores mostraram um sistema quântico submetido à uma sequência de medições projetivas, tem sua evolução inibida. O caráter paradoxal desta conclusão se torna explícito quando observamos continuamente o rastro de de uma partícula instável e percebemos seu decaimento. Nos primórdios de sua formulação o efeito Zenão Quântico foi associado a dois fatores: decaimento inicialmente quadrático, e postulado de projeção. Posteriormente tais associações foram desfeitas e o efeito ganhou maior generalidade.

Na década de 90, Itano e colaboradores realizaram a primeira observação empírica do efeito [35]. Neste experimento a inibição de transições entre estados quânticos através de freqüentes medições foi observada, e o efeito tornou-se tema de fervorosos debates [36, 37, 38]. O foco principal das discussões era o papel atribuído ao postulado de projeção na descrição do efeito. Novas abordagens foram propostas [36, 37], e a forte associação entre efeito Zenão e postulado da projeção foi rompida.

Atualmente podemos encontrar na literatura um vasto arranjo temático de publicações sobre o efeito, que tratam de possíveis aplicações práticas [39, 40, 41] à discussões teóricas fundamentais [42, 43, 44, 45]. Recentemente a primeira observação empírica de inibição de decaimento por efeito Zenão Quântico foi reportada em [46].

Apresentamos propostas <sup>1</sup> para observação do Efeito Zenão Quântico em um sistema bipartite, onde emaranhamento tem um papel essencial para a obtenção do efeito. Consideramos o sistema físico apresentado na montagem experimental proposta em [48], que consiste em duas cavidades de microondas acopladas por um guia de onda. Duas propostas conceitualmente diferentes são apresentadas. Na primeira, uma excitação inicialmente na

---

<sup>1</sup>Trabalho publicado em [47]

cavidade A pode ser transferida para a cavidade B devido ao acoplamento provocado pelo guia de onda. Um átomo de dois níveis ( $|e\rangle, |g\rangle$ ), ressonante com os modos, que funciona como ponta-de-prova cruza a cavidade B, por um tempo suficiente para absorver completamente uma excitação presente, e é detectado por detectores de ionização. Se o nível de energia atômico detectado for  $|g\rangle$  a transição quântica entre os modos das cavidades não ocorreu. A probabilidade de observarmos  $N$  eventos com apenas cliques em  $D_g$  cresce com  $N$  (para detectores perfeitos).

Na segunda proposta, os átomos ponta-de-prova atravessam a cavidade B mas não são detectados. A mesma probabilidade final é obtida em ambas no caso ideal. Isso se deve ao fato de que a átomo é ressonante com os modos de campo, impossibilitando assim o processo de repopulação, transição de excitação da cavidade B para A, como será detalhado durante o capítulo.

Investigamos também imperfeições experimentais que podem limitar a realização de tais propostas. A dissipação do modo de campo eletromagnético nas cavidades provoca o decaimento exponencial da excitação presente no sistema, apresentamos curvas obtidas a partir de simulações numéricas que mostram a competição entre o decaimento irreversível e a manutenção do estado por Efeito Zenão Quântico. O tratamento teórico da dinâmica dissipativa para o sistema de dois osciladores foi apresentado no capítulo 2.

O aumento do número de medições (interações entre átomos ponta-se-prova e o modo de campo na cavidade B)  $N$  está submetido à diferentes limitações em cada proposta. Na primeira  $N$  é limitado pela ineficiência dos detectores atômicos (a análise de efeitos dissipativos não é necessária nesta proposta pois esta torna-se irrelevante quando comparada às limitações impostas pelo processo de detecção). Na segunda proposta  $N$  é limitado pela dissipação, pois o tempo total de realização do experimento depende de  $N$ .

## 4.1 Evolução Livre

O hamiltoniano que descreve o sistema de dois modos de campo acoplados tem a forma:

$$H_{AB} = \omega a^\dagger a + \omega b^\dagger b + g(a^\dagger b + b^\dagger a), \quad (4.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência de ressonância dos modos e  $g$  a constante de acoplamento entre eles. Modos de campo eletromagnético podem ser armazenados em cavidades supercondutoras, portanto neste trabalho, trataremos do sistema físico específico formado por duas cavidades com alto fator de qualidade acopladas. Não discutiremos aqui as dificuldades técnicas para a realização do acoplamento entre os modos, propostas experimentais baseadas em tal arranjo pode ser encontradas em [48].

Consideremos como estado inicial do campo nas cavidades o operador de estado reduzido:

$$\rho_C(0) = |1_A, 0_B\rangle\langle 1_A, 0_B| = |1, 0\rangle\langle 1, 0|. \quad (4.2)$$

A evolução livre de  $\rho_C(0)$  pelo intervalo de tempo  $T$  resulta em:

$$\rho_C(T) = |c_1(T)|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(T)|^2|0, 1\rangle\langle 0, 1| + (c_1(T)c_2^*(T)|1, 0\rangle\langle 0, 1| + h.c.), \quad (4.3)$$

onde  $c_1(T) = \cos(gT)$  e  $c_2(T) = \sin(gT)$ . O acoplamento entre as cavidades introduz a possibilidade de transição do fóton da cavidade A para a B. Notemos que se  $T = \frac{\pi}{2g}$  o operador de estado final do campo nas cavidades tem a forma  $\rho_C(T) = |0, 1\rangle\langle 0, 1|$ . Como, ao longo deste capítulo, estudaremos a possibilidade de inibição da transição do fóton da cavidade A para a B, a escolha de  $T = \frac{\pi}{2g}$  é bem adequada e será adotada ao longo do texto.

Para verificar se tal transição ocorreu durante o intervalo de tempo  $T$ , podemos medir o número de fótons da cavidade B. Se o valor encontrado por esta medição for zero, sabemos que a transição não ocorreu.

Uma possível estratégia experimental para a realização desta medição é lançar na cavidade B, no tempo  $T$ , um átomo de dois níveis (com frequência de transição ressonante com a frequência do modos nas cavidades) preparado no estado  $|g\rangle\langle g|$ . Como o objetivo desta interação é verificar se a transição do fóton da cavidade A para a B aconteceu, o átomo de dois níveis funciona com ponta de prova. A interação entre o átomo e o modo de campo na cavidade B pode ser descrita pelo modelo Jaynes-Cummings (apresentado no capítulo 2). Consideraremos inicialmente um acoplamento entre o átomo e o modo de campo na cavidade B forte o suficiente para que o tempo necessário para a realização de um pulso  $\pi$  ( $\tau_\pi$ ) seja desprezível (posteriormente desconsideraremos tal aproximação). A interação entre o átomo e o modo de campo na cavidade B resulta em:

$$\rho'(T) = |c_1|^2|1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |c_2|^2|0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1c_2^*|1, 0, g\rangle\langle 0, 0, e| + h.c.) \quad (4.4)$$

Portanto, como o estado do sistema átomo-cavidades é um estado completamente emaranhado, medir o nível atômico de energia corresponde a medir o número de fótons em cada cavidade.

## 4.2 Medição de níveis atômicos de energia por detectores perfeitos

A medição de níveis atômicos de energia é feita por detectores de ionização:  $D_e$  (responsável por ionizar átomos em  $|e\rangle$ ) e  $D_g$  (responsável por ionizar átomos em  $|g\rangle$ ).

Considerando detectores perfeitos, observamos que a probabilidade de que a transição do fóton de A para B não tenha acontecido é igual à probabilidade de click no detector  $D_g$ :

$$p_{clickD_g} = p_{1,0} = |c_1(T)|^2, \quad (4.5)$$

onde  $p_{1,0}$  é a probabilidade de não acontecer a transição do fóton da cavidade A para a B.

Se lançarmos  $N$  átomos separadamente, um a cada intervalo  $\tau_{A,B} = T/N$ , durante o intervalo de tempo  $T$  fixo, podemos monitorar a probabilidade de transição do fóton da cavidade A para a B. Para descrever a evolução temporal do sistema sob tais condições, devemos considerar que uma evolução livre (durante o intervalo de tempo  $\tau_{A,B}$ ) seguida por uma interação entre o átomo e o modo de campo na cavidade B acontece por  $N$  vezes.

Como foi discutido anteriormente, para detectores de ionização perfeitos a detecção do estado atômico de energia é equivalente à detecção do número de fótons em cada cavidade. Em condições idealizadas, podemos imaginar um experimento em que para cada átomo lançado na cavidade B será registrado posteriormente um click em  $D_e$  ou  $D_g$ .

Um click em  $D_e$  confirma que a transição do fóton da cavidade A para a B aconteceu, e deixa o estado reduzido do campo nas cavidades com a forma  $|0, 0\rangle\langle 0, 0|$ , como fica claro no fluxograma <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} & |1, 0\rangle\langle 1, 0| \quad (4.6) \\ & \Downarrow e^{-iH_{AB}\tau_{AB}} \\ & |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 1\rangle\langle 0, 1| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1, 0\rangle\langle 0, 1| + h.c.) \\ & \Downarrow \text{átomo} \\ & |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1, 0, g\rangle\langle 0, 0, e| + h.c.) \\ & \Downarrow D_e \text{click} \\ & |0, 0\rangle\langle 0, 0| \end{aligned}$$

Após um click em  $D_e$  as cavidades ficam vazias, assim, nenhum átomo posteriormente lançado em B apresentará modificações no seu estado de energia. Como os átomos são

---

<sup>2</sup>Grande parte das evoluções temporais que serão discutidas ao longo deste capítulo podem ser divididas em  $N$  passos, sendo cada um deles composto por várias etapas. Para facilitar a descrição de tais evoluções utilizaremos fluxogramas, onde as ações que separam as etapas são representadas por sentenças ou símbolos matemáticos que caracterizam a ação. Para melhor esclarecer a estrutura dos fluxogramas explicitaremos cada etapa do fluxograma (4.6). Primeiramente, entre a primeira e a segunda etapa,  $e^{-iH_{AB}\tau_{AB}}$  simboliza a evolução temporal unitária  $e^{-iH_{AB}\tau_{AB}}|1, 0\rangle\langle 1, 0|e^{iH_{AB}\tau_{AB}}$ . Entre a segunda e a terceira etapa está representada uma interação entre cavidade B e um átomo de dois níveis, como a descrita pela equação (4.4). Finalmente, entre a terceira e quarta está indicada a informação clássica gerada pelo detector  $D_e$ . Os próximos fluxogramas seguem a mesma estrutura de (4.6).

preparados (antes de interagir com a cavidade B) em  $|g\rangle$ , todos serão detectados por  $D_g$ . Portanto, ao registrar um click em  $D_e$  sabemos que todos os clicks posteriores serão em  $D_g$ .

Podemos selecionar as seqüências experimentais que não apresentam clicks em  $D_e$ . Como nesta seção apenas o comportamento de detectores perfeitos é analisado, devemos ressaltar que as seqüências experimentais que não apresentam click em  $D_e$  são constituídas por clicks em  $D_g$  em todos os passos. O primeiro passo da evolução temporal correspondente a tais seqüências está representado no fluxograma abaixo:

$$\begin{aligned}
& |1, 0\rangle\langle 1, 0| & (4.7) \\
& \Downarrow e^{-iH_{AB}\tau_{AB}} \\
& |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 1\rangle\langle 0, 1| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1, 0\rangle\langle 0, 1| + h.c.) \\
& \Downarrow \text{átomo} \\
& |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1, 0, g\rangle\langle 0, 0, e| + h.c.) \\
& \Downarrow D_g \text{click} \\
& |1, 0\rangle\langle 1, 0|
\end{aligned}$$

A probabilidade de  $D_g$  clicar no primeiro passo é igual a  $|c_1(\tau_{AB})|^2$ .

Notemos que a última etapa do fluxograma (4.7) mostra que o operador de estado reduzido do campo nas cavidades foi preparado novamente em  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$ . Portanto, a evolução subsequente do sistema será constituída por  $N$  passos idênticos ao já representado pelo fluxograma (4.7). Assim, a probabilidade de  $D_g$  clicar  $N$  vezes é:

$$p_{clickD_g}^{(N)} = (|c_1(\tau_{AB})|^2)^N. \quad (4.8)$$

Esta probabilidade é igual à probabilidade ( $p_{1,0}^{(N)}$ ) de que não tenha acontecido transição do fóton da cavidade A para a B após o intervalo de tempo  $T$ .

Considerando o limite em que  $N \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{1,0}^{(N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} p_{clickD_g}^{(N)} = 1. \quad (4.9)$$

A medição contínua do número de fótons na cavidade B inibe a possibilidade de transição do fóton da cavidade A para a B. Este é o Efeito Zenão Quântico.

### 4.3 Medição de níveis atômicos de energia por detectores imperfeitos

Fazendo uso do modelo apresentado no capítulo 3, capaz de descrever a interação entre campo ionizador e átomos em detectores de ionização, podemos acrescentar os efeitos da ineficiência intrínseca dos detectores no sistema estudado na seção anterior.

Consideremos primeiramente uma configuração experimental em que apenas  $D_g$  está presente. Portanto, após a interação com o campo na cavidade B, o átomo será submetido a uma interação com  $D_g$ . Esta interação pode ser descrita pelo hamiltoniano:

$$H_g = \epsilon_g |g\rangle\langle g| + \epsilon_e |e\rangle\langle e| + \int dk \epsilon_k |k\rangle\langle k| + v \int dk (|g\rangle\langle k| + |k\rangle\langle g|). \quad (4.10)$$

A interação entre átomos e  $D_g$  acrescenta uma etapa no passo descrito por (4.7), da evolução temporal. Assim:

$$\begin{aligned} & |1, 0\rangle\langle 1, 0| \quad (4.11) \\ & \Downarrow e^{-iH_{AB}\tau_{AB}} \\ & |c_1(\tau_{AB})|^2 |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2 |0, 1\rangle\langle 0, 1| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB}) |1, 0\rangle\langle 0, 1| + h.c.) \\ & \Downarrow \text{átomo} \\ & |c_1(\tau_{AB})|^2 |1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |c_2(\tau_{AB})|^2 |0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB}) |1, 0, g\rangle\langle 0, 0, e| + h.c.) \\ & \Downarrow \text{Int. } D_g \\ & |c_1(\tau_{AB})|^2 |1, 0\rangle\langle 1, 0| \left( \int d\mu \langle \psi_\mu | g \rangle e^{-i\epsilon_\mu t} | \psi_\mu \rangle \right) \left( \int d\mu \langle g | \psi_\mu \rangle e^{i\epsilon_\mu t} \langle \psi_\mu | \right) \\ & + |c_2(\tau_{AB})|^2 |0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB}) |1, 0\rangle \left( \int d\mu \langle \psi_\mu | g \rangle e^{-i\epsilon_\mu t} | \psi_\mu \rangle \right) \langle 0, 0, e| + h.c.) \\ & \Downarrow D_g \text{click} \\ & |1, 0\rangle\langle 1, 0| \end{aligned}$$

A probabilidade de  $D_g$  clicar pode ser calculada:

$$p_{click D_g} = \int dk Tr (|k\rangle\langle k| \rho_g), \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_g &= |c_1|^2 |1, 0\rangle\langle 1, 0| \left( \int d\mu \langle \psi_\mu | g \rangle e^{-i\epsilon_\mu t} |\psi_\mu\rangle \right) \left( \int d\mu \langle g | \psi_\mu \rangle e^{i\epsilon_\mu t} \langle \psi_\mu | \right) \\ &+ |c_2|^2 |0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1 c_2^* |1, 0\rangle \left( \int d\mu \langle \psi_\mu | g \rangle e^{-i\epsilon_\mu t} |\psi_\mu\rangle \right) \langle 0, 0, e| + h.c.) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Através da definição da eficiência de  $D_g$

$$p_g = \int dk \left| \int d\mu \langle \psi_\mu | g \rangle \langle k | \psi_\mu \rangle e^{-i\epsilon_\mu t/\hbar} \right|^2, \quad (4.14)$$

podemos escrever a probabilidade de  $D_g$  clicar no primeiro passo como:

$$p_{click D_g} = (|c_1(\tau_{AB})|^2 p_g). \quad (4.15)$$

Podemos notar que, como no fluxograma (4.7), a última etapa de (4.11) mostra que o operador de estado reduzido do campo nas cavidades foi preparado novamente em  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$ . Assim, todos os passos posteriores serão idênticos e a probabilidade de  $D_g$  clicar  $N$  vezes é:

$$p_{click D_g}^{(N)} = (|c_1(\tau_{AB})|^2 p_g)^N. \quad (4.16)$$

No limite  $N \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{click D_g}^{(N)} = 0. \quad (4.17)$$

A figura 4.1 retrata a probabilidade de clicks consecutivos em  $D_g$  em função do número de interações intermediárias. Cada curva está associada a um valor de eficiência de  $D_g$ . Podemos perceber que para  $p_g = 1$  (detector perfeito) o efeito Zenão (inibição da transição do fóton da cavidade A para a B) pode ser observado. O mesmo não acontece para eficiências menores do que 1. A completa identificação da probabilidade de clicks em  $D_g$  com a probabilidade de não ocorrer a transição do fóton da cavidade A para a B não é possível com detectores ineficientes ( $p_g < 1$ ).

Através da figura 4.1, podemos concluir que fazendo uso deste aparato ineficiente é impossível verificar a permanência do fóton na cavidade A em cada passo, pois a probabilidade de observarmos uma sequência de experimentos com  $N$  clicks em  $D_g$  tende a zero com o aumento do número de átomos.

É importante destacar que não podemos inferir, a partir da figura 4.1, a ausência do efeito Zenão na montagem experimental com detectores ineficientes. A retenção do fóton na cavidade A está relacionada com a interação entre átomos e os modos de campo nas cavidades (como será discutido em detalhes na seção seguinte) e independe das eficiências

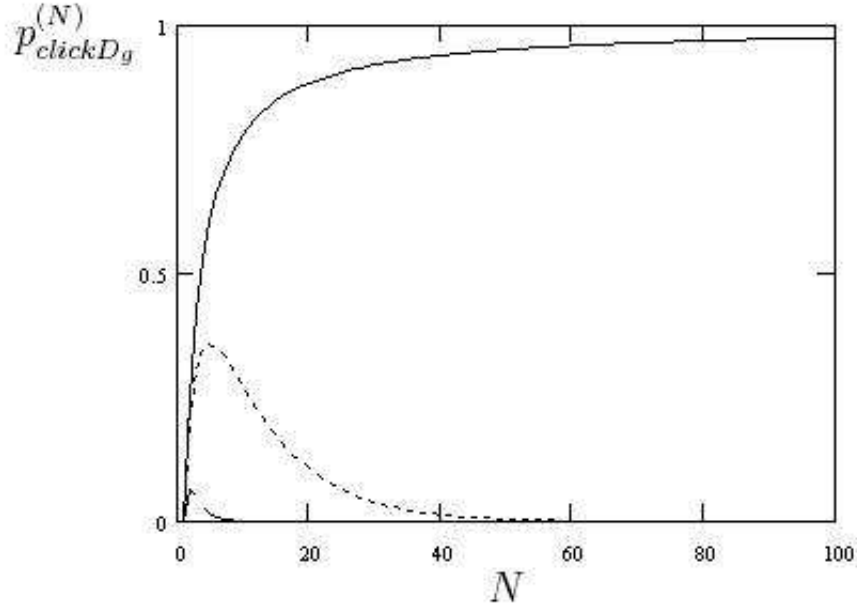


Figura 4.1: As curvas mostram as probabilidades de clicks consecutivos em  $D_g$  em função de  $N$ . Em todas as curvas  $T = \frac{\pi}{2g}$ . Na curva contínua  $p_g = 1$ , na curva pontilhada (intermediária)  $p_g = 0,9$  e na curva tracejada (inferior)  $p_g = 0,5$ .

dos detectores de ionização, que impõem limites à possibilidade de observação do efeito com medições intermediárias.

Podemos buscar uma estratégia alternativa para a observação do efeito Zenão com medições intermediárias, através de uma montagem experimental em que apenas o detector  $D_e$  está presente.

Como foi observado anteriormente, um click em  $D_e$  provoca a redução do estado do campo nas cavidades para  $|0,0\rangle\langle 0,0|$ . Portanto, para observar o efeito Zenão devemos investigar as seqüências de realizações do experimento que não apresentam clicks em  $D_e$ . O primeiro passo desta seqüência pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
 & |1,0\rangle\langle 1,0| \tag{4.18} \\
 & \Downarrow e^{-iH_{AB}\tau_{AB}} \\
 & |c_1(\tau_{AB})|^2|1,0\rangle\langle 1,0| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0,1\rangle\langle 0,1| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1,0\rangle\langle 0,1| + h.c.) \\
 & \Downarrow \text{átomo} \\
 & |c_1(\tau_{AB})|^2|1,0,g\rangle\langle 1,0,g| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0,0,e\rangle\langle 0,0,e| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1,0,g\rangle\langle 0,0,e| + h.c.)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \text{Int. } D_e \\
& |c_2(\tau_{AB})|^2 |0, 0\rangle\langle 0, 0| \left( \int d\mu \langle \psi_\mu | e \rangle e^{-i\epsilon_\mu t} |\psi_\mu\rangle \right) \left( \int d\mu \langle e | \psi_\mu \rangle e^{i\epsilon_\mu t} \langle \psi_\mu | \right) \\
& + |c_1(\tau_{AB})|^2 |1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + (c_2 c_1^* |0, 0\rangle \left( \int d\mu \langle \psi_\mu | e \rangle e^{-i\epsilon_\mu t} |\psi_\mu\rangle \right) \langle 1, 0, g| + h.c.) \\
& \Downarrow D_e \tilde{\text{click}} \\
& \frac{|c_1(\tau_{AB})|^2 |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e) |0, 0\rangle\langle 0, 0|}{|c_1(\tau_{AB})|^2 + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e)}
\end{aligned}$$

Notemos que o estado final do fluxograma (4.18) é um estado de mistura estatística. O passo seguinte da evolução terá como estado inicial esta mistura, e como estado final:

$$\frac{(|c_1(\tau_{AB})|^2)^2 |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e) (1 + |c_1(\tau_{AB})|^2) |0, 0\rangle\langle 0, 0|}{(|c_1(\tau_{AB})|^2)^2 + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e) (1 + |c_1(\tau_{AB})|^2)}. \quad (4.19)$$

Podemos perceber que todos os passos da evolução temporal apresentarão estados finais diferentes, mas todos serão misturas entre  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$  e  $|0, 0\rangle\langle 0, 0|$ . Sabemos que a parte da mistura associada a  $|0, 0\rangle\langle 0, 0|$  não evolui no tempo, portanto, apenas a parte da mistura associada a  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$  é responsável por alterações no estado. As alterações em  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$  são iguais em todos os passos, e podem ser resumidas por:

$$|1, 0\rangle\langle 1, 0| \longrightarrow |c_1(\tau_{AB})|^2 |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e) |0, 0\rangle\langle 0, 0|. \quad (4.20)$$

Portanto, para obter o estado reduzido do campo nas cavidades ( $\rho_C^{(N)}$ ) após o N-ésimo não click em  $D_e$  podemos fazer a substituição (4.20) no estado  $\rho_C^{(N-1)}$  e normalizar. Assim:

$$\rho_C^{(N)} = \frac{(|c_1(\tau_{AB})|^2)^N |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e) (\sum_{k=1}^N |c_1(\tau_{AB})|^{k-1}) |0, 0\rangle\langle 0, 0|}{(|c_1(\tau_{AB})|^2)^N + |c_2(\tau_{AB})|^2 (1 - p_e) (\sum_{k=1}^N |c_1(\tau_{AB})|^{k-1})}. \quad (4.21)$$

A probabilidade de  $D_e$  não clicar em cada passo pode ser calculada por

$$P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(N)} = \int dk T r [ (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \rho_e^{(N)} ], \quad (4.22)$$

onde  $\rho_e^{(N)}$  representa o estado do sistema no N-ésimo passo e na etapa imediatamente posterior a interação do átomo com  $D_e$ . O operador  $\rho_e^{(N)}$  pode ser calculado a partir de  $\rho_C^{(N-1)}$  (estado inicial do N-ésimo passo).

A probabilidade de  $N$  não clicks consecutivos pode ser escrita como o produto:

$$P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(N)} = P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(1)} \cdot P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(2)} \cdot P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(3)} \cdots P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(N)} = \prod_{k=1}^N P_{\tilde{\text{click}}D_e}^{(k)}. \quad (4.23)$$

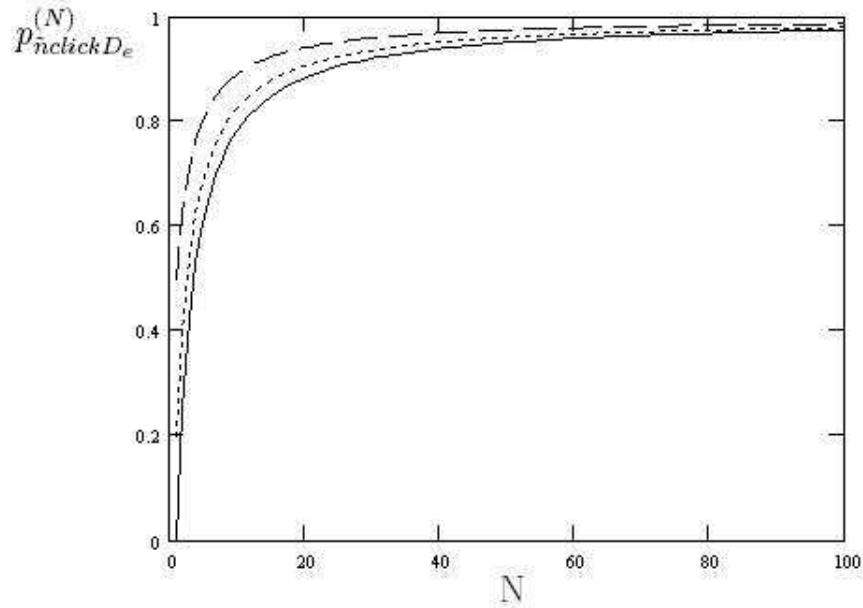


Figura 4.2: As curvas mostram as probabilidades de não cliques consecutivos em  $D_e$  em função de  $N$ . Em todas as curvas  $T = \frac{\pi}{2g}$ . Na curva contínua  $p_g = 1$ , na curva pontilhada (intermediária)  $p_g = 0,8$  e na curva tracejada  $p_g = 0,5$ .

Na figura 4.2 podemos observar curvas da probabilidade de não cliques em  $D_e$ . Cada curva corresponde a um valor de  $p_e$ . Notemos que todas as curvas tendem a 1 quando  $N \rightarrow \infty$ , e que quanto mais ineficiente é o detector mais rapidamente a curva correspondente a ele tende a 1.

A constatação empírica de que com o aumento do número de átomos, no intervalo  $T$ , aumenta a probabilidade de serem observadas seqüências sem cliques em  $D_e$ , deve ser considerada como um indício de que o efeito de retenção do fóton na cavidade A esta presente. No entanto o objetivo de verificar, em todos os  $N$  passos, se a transição do fóton da cavidade A para a B ocorreu não pode ser alcançado completamente com detectores ineficientes.

## 4.4 Proposta experimental sem medições intermediárias

As propostas experimentais descritas nas seções anteriores, tem como objetivo monitorar, através de  $N$  medições intermediárias, a ocorrência da transição do fóton da cavidade A para a B. Por isso descrevemos evoluções temporais em seqüências experimentais selecionadas, que exibiam um determinado padrão de resposta dos detectores. Estudamos seqüências experimentais com cliques consecutivos em  $D_g$  e também seqüências experimen-

tais com não clicks consecutivos em  $D_e$ .

S. Pascazio e M. Namiki em [37] propõem uma abordagem dinâmica do efeito Zenão e mostram o papel essencial da “decomposição espectral generalizada”. Os autores argumentam que o efeito Zenão Quântico acontece mesmo na ausência de medições intermediárias, o que explica as observações empíricas reportadas em [35]. No sistema composto por duas cavidades, a decomposição espectral é provocada pela interação entre o modo de campo eletromagnético na cavidade B e os átomos de dois níveis usados como pontas de prova. Portanto, o sinal clássico gerado pelos detectores de ionização em cada passo da evolução (medições intermediárias) é um requisito dispensável para a retenção do fóton na cavidade A.

Nesta seção apresentaremos uma nova proposta experimental, que não envolve medições intermediárias, para a investigação do efeito Zenão Quântico.

Esta proposta difere das anteriores em apenas dois aspectos. Os átomos de dois níveis que são lançados, um a cada intervalo de tempo  $\tau = T/N$ , na cavidade B não serão registrados por detectores de ionização como foi proposto anteriormente. Portanto, os átomos que eram responsáveis pelas medições intermediárias serão utilizados nesta montagem apenas para provocar interações periódicas com o modo de campo na cavidade B. Após  $N$  interações um átomo será lançado na cavidade A e analisado pelo detector  $D_e$ .

O primeiro passo da evolução temporal do sistema pode ser representado pelo fluxograma:

$$\begin{aligned}
& |1, 0\rangle\langle 1, 0| & (4.24) \\
& \Downarrow e^{-iH_{AB}\tau_{AB}} \\
& |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 1\rangle\langle 0, 1| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1, 0\rangle\langle 0, 1| + h.c.) \\
& \Downarrow \text{átomo} \\
& |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + (c_1(\tau_{AB})c_2^*(\tau_{AB})|1, 0, g\rangle\langle 0, 0, e| + h.c.) \\
& \Downarrow Tr_A \\
& |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 0\rangle\langle 0, 0|
\end{aligned}$$

Os átomos intermediários não serão analisados por detectores. Assim na última etapa de cada passo intermediário da evolução estará presente o traço no subsistema dos átomos, representado no fluxograma por  $Tr_A$ . Tal operação modela a falta de informação a respeito do estado de energia atômico, e corresponde à situação experimental em que os detectores de ionização estão desligados.

Para calcular os passos subsequentes da evolução devemos observar que apenas a parte  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$  do estado final evolui, que esta evolução é idêntica à evolução descrita no primeiro passo e pode ser resumida por:

$$|1, 0\rangle\langle 1, 0| \longrightarrow |c_1(\tau_{AB})|^2|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2|0, 0\rangle\langle 0, 0|. \quad (4.25)$$

Assim, podemos escrever o operador de estado do campo nas cavidades ao final do  $N$ -ésimo passo fazendo a substituição (4.25) no estado final do passo  $N - 1$ .

O estado final do campo nas cavidades após a interação com  $N$  átomos tem a forma:

$$(|c_1(\tau_{AB})|^2)^N|1, 0\rangle\langle 1, 0| + |c_2(\tau_{AB})|^2 \sum_{k=1}^N (|c_1(\tau_{AB})|^2)^{k-1}|0, 0\rangle\langle 0, 0|. \quad (4.26)$$

A probabilidade da transição do fóton da cavidade A para a B não ter acontecido é,

$$p_{1,0}^{(N)} = (|c_1(\tau_{AB})|^2)^N, \quad (4.27)$$

e no limite  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{1,0}^{(N)} = 1, \quad (4.28)$$

o que caracteriza o efeito Zenão.

A medição desta probabilidade pode ser feita por um átomo (ponta de prova) preparado em  $|g\rangle$  e lançado na cavidade A imediatamente após a interação entre o  $N$ -ésimo átomo e o modo de campo na cavidade B. O nível de energia do átomo lançado na cavidade A será medido por detectores de ionização.

O operador de estado reduzido do campo nas cavidades após a interação do átomo ponta de prova com o modo de campo na cavidade A pode ser escrito como:

$$(|c_1(\tau_{AB})|^2)^N|0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| + |c_2(\tau_{AB})|^2 \sum_{k=1}^N (|c_1(\tau_{AB})|^2)^{k-1}|0, 0, g\rangle\langle 0, 0, g|. \quad (4.29)$$

Portanto, um click em  $D_e$  indica que a transição do fóton da cavidade A para a B não aconteceu.

#### 4.4.1 Limites da proposta experimental

A observação do efeito Zenão, através da proposta experimental descrita na seção anterior, pode ser feita pela análise da relação entre a probabilidade de clicks em  $D_e$  e o número de átomos  $N$ . A obtenção de dados empíricos que permitem o estudo de tal relação está, contudo, sujeita a inúmeras limitações experimentais. Nesta seção, analisaremos os efeitos provocados por três possíveis limitações: eficiência de  $D_e$ , decaimento nas cavidades e o valor não nulo do tempo de interação entre átomos e modo do campo na cavidade B.

Os efeitos provocados pela ineficiência dos detectores de ionização foram discutidos nas propostas experimentais apresentadas em seções anteriores. Como em tais propostas o número de átomos medidos é relativamente grande, a ineficiência dos detectores impõe severas limitações experimentais. Entretanto, nas propostas apresentadas nesta seção apenas o último átomo lançado, que interage com o modo de campo na cavidade A, é objeto de investigação do detector. Assim, a probabilidade de click em  $D_e$  em função da eficiência ( $p_e$ ) e do número de átomos  $N$  tem a forma:

$$p_{D_{e}click} = p_e(|c_1|^2)^N. \quad (4.30)$$

Observemos que a ineficiência de  $D_e$  não provoca danos significativos na obtenção de dados, mas apenas um desvio em relação à curva  $p_{1,0}^{(N)} \times N$ .

Para analisar o impacto provocado pelo decaimento dos modos de campo das cavidades na obtenção de dados empíricos, consideremos que as cavidades estão acopladas ao ambiente durante o tempo total de realização de uma medida. Definiremos o tempo total de realização de uma medida ( $T'$ ) da seguinte forma:

$$T' = T + N\tau_\pi \quad (4.31)$$

Podemos perceber que na definição de  $T'$  estamos desconsiderando a aproximação feita no início do capítulo, sobre o tempo relativo ao pulso  $\pi(\tau_\pi)$  ser nulo, pois  $N\tau_\pi$  representa a soma dos intervalos de tempo de cada interação.

Para melhor compreender a inadequação do uso de tal aproximação na descrição da dinâmica dissipativa, notemos primeiramente que o valor da frequência de Rabi  $\Omega$ , que define a duração de um pulso  $\pi$  ( $\tau_\pi$ ), está intimamente ligado a características intrínsecas dos átomos utilizados no experimento. Para átomos de rubídio o pulso  $\pi$  assume aproximadamente o valor de  $\tau_\pi \simeq 10^{-5}s$ . O aumento do número de átomos que interagem com o modo de campo na cavidade B fará com que o tempo  $N\tau_\pi$  torne-se significativo, portanto devemos tratar a interação dos átomos com a cavidade B como não instantânea e dissipativa.

O objetivo da proposta experimental é verificar a inibição da probabilidade de transição do fóton da cavidade A para a B provocada por interações intermediárias. Nesta proposta os átomos são elementos responsáveis por tais interações. Devemos ressaltar que o tempo  $T$  é fixo e igual a  $\frac{\pi}{2g}$  como foi sugerido no início deste capítulo. Para restringir o tempo total de interação entre as cavidades a  $T$ , devemos supor que durante a passagem dos átomos as cavidades estarão desacopladas.

A figura 4.3 ilustra a evolução temporal do sistema dividida em vários passos. O número de passos é definido pelo número de átomos  $N$  que cruzam a cavidade B. Cada passo é formado por uma evolução livre, em que as cavidades estão acopladas entre si, durante o intervalo de tempo  $\tau_{AB} = T/N$  (representada na figura pelas faixas claras), e

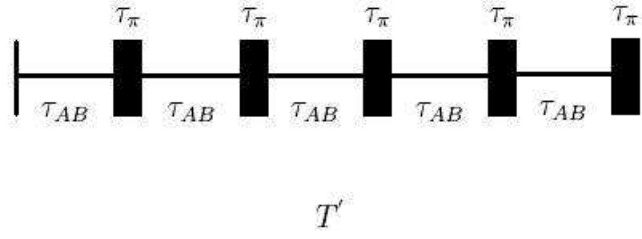


Figura 4.3: Representação esquemática da divisão do intervalo de tempo  $T'$  em cinco evoluções livres por intervalos de tempo iguais a  $\tau_{AB}$  e cinco interações entre átomos e o modo na cavidade B durante  $\tau_\pi$ .

uma interação entre o átomo e a cavidade B durante o intervalo de tempo  $\tau_\pi$  (representada pelas faixas escuras) em que as cavidades estão desacopladas. Portanto devemos acrescentar um elemento na montagem experimental que seja capaz de interromper o acoplamento entre as cavidades durante a passagem dos átomos. Consideremos tal dispositivo eficiente o bastante para que a interação entre as cavidades seja completamente interrompida por um intervalo de tempo exatamente igual a  $\tau_\pi$ . As cavidades estão sujeitas aos efeitos dissipativos do ambiente durante todo o processo.

Para incluir as limitações experimentais discutidas nesta seção, reformularemos a evolução temporal composta pelos passos ilustrados no fluxograma (4.24). Com o objetivo de esclarecer tais alterações, discutiremos em seções separadas as dinâmicas dissipativas que acontecem durante os intervalos de tempo  $\tau_{AB}$  (evolução livre) e  $\tau_\pi$  (interação com o átomo).

### Evolução livre

No capítulo 2 apresentamos uma descrição possível para a dinâmica dissipativa de dois modos de campo eletromagnéticos acoplados. A equação mestra que governa esta dinâmica foi deduzida em sua forma mais geral. Apresentaremos aqui apenas a evolução temporal do estado  $|1, 0\rangle\langle 1, 0|$  submetido a interação com um reservatório de temperatura nula.

$$e^{\mathcal{L}_1 t} |1, 0\rangle\langle 1, 0| = (f_1(t)|1, 0\rangle + l_2(t)|0, 1\rangle)(h.c.) + (1 - |f_1(t)|^2 - |l_2(t)|^2)|0, 0\rangle\langle 0, 0|, \quad (4.32)$$

onde o índice em  $\mathcal{L}_1$  será utilizado para distinguir entre o Liouvilliano de evolução livre e o que será apresentado posteriormente. Considerando o caso particular em que os coeficientes de dissipação cruzada são nulos e as cavidades são idênticas podemos escrever a probabilidade de um fóton ser encontrado na cavidade A no tempo  $t$  como:

$$|f_1(t)|^2 = e^{-2kt} \cos^2(gt). \quad (4.33)$$

### Interação com o átomo

Durante a passagem do átomo de dois níveis pela cavidade B as cavidades estão desacopladas entre si. Portanto, ao longo do intervalo de tempo correspondente à esta passagem, as evoluções temporais dos modos serão independentes.

O modo de campo na cavidade A evolui sob a ação dissipativa de um reservatório com temperatura nula. O Liouvilliano que descreve esta evolução tem a forma:

$$\mathcal{L}_{2A} = k (2\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}^\dagger - \bullet \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \bullet) + i\omega [\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \bullet], \quad (4.34)$$

O subsistema composto pelo modo de campo na cavidade B e um átomo de dois níveis evolui de acordo com o modelo Jaynes-Cummings dissipativo. O Liouvilliano associado à esta evolução pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_{2B} = -i\frac{\Omega}{2} [\mathbf{b}^\dagger \sigma_- + \mathbf{b} \sigma_+, \bullet] + k (2\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}^\dagger - \bullet \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} - \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} \bullet), \quad (4.35)$$

onde  $\Omega$  é a frequência de Rabi e  $\sigma_- = \sigma_+^\dagger = |g\rangle\langle e|$ .

O Liouvilliano que descreve a evolução do sistema total durante a passagem do átomo de dois níveis pela cavidade B tem a forma:

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{2A} + \mathcal{L}_{2B} \quad (4.36)$$

A equação (4.32) fornece o operador de estado do subsistema composto pelos modos nas duas cavidade após a evolução livre por um tempo  $t$ . Fixando  $t = \tau_{AB}$ , podemos escrever o estado inicial do sistema ( $S$ ) composto pelos modos nas cavidades e o átomo de dois níveis (preparado em  $g$ ) como:

$$\begin{aligned} \rho_S(\tau_{AB}) &= |f_1(\tau_{AB})|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes |0, g\rangle\langle 0, g| + |l_2(\tau_{AB})|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |1, g\rangle\langle 1, g| \\ &+ (1 - |f_1(\tau_{AB})|^2 - |l_2(\tau_{AB})|^2) |0\rangle\langle 0| \otimes |0, g\rangle\langle 0, g| \\ &+ (f_1(\tau_{AB})l_2^*(\tau_{AB}) |1\rangle\langle 0| \otimes |0, g\rangle\langle 1, g| + h.c.). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Escrevemos cada parcela do operador de estado na forma fatorada para facilitar a aplicação do super-operador que comanda a evolução temporal independente dos modos. Tal evolução temporal tem a forma:

$$\begin{aligned} \rho_S(\tau_\pi + \tau_{AB}) &= e^{\mathcal{L}_2 \tau_\pi} \rho_S(\tau_{AB}) = e^{\mathcal{L}_{2A} \tau_\pi} e^{\mathcal{L}_{2B} \tau_\pi} \rho_S(\tau_{AB}). \\ &= |f_1(\tau_{AB})|^2 e^{\mathcal{L}_{2A} \tau_\pi} |1\rangle\langle 1| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B} \tau_\pi} |0, g\rangle\langle 0, g| \\ &+ |l_2(\tau_{AB})|^2 e^{\mathcal{L}_{2A} \tau_\pi} |0\rangle\langle 0| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B} \tau_\pi} |1, g\rangle\langle 1, g| \\ &+ (1 - |f_1(\tau_{AB})|^2 - |l_2(\tau_{AB})|^2) e^{\mathcal{L}_{2A} \tau_\pi} |0\rangle\langle 0| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B} \tau_\pi} |0, g\rangle\langle 0, g| \\ &+ (f_1(\tau_{AB})l_2^*(\tau_{AB}) e^{\mathcal{L}_{2A} \tau_\pi} |1\rangle\langle 0| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B} \tau_\pi} |0, g\rangle\langle 1, g| + h.c.). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Em contexto não dissipativo, o pulso  $\pi$  está associado ao tempo de interação necessário para que a excitação no campo seja completamente transferida para o átomo. Como estamos estudando a dinâmica dada pelo modelo Jaynes-Cummings dissipativo, tal condição torna-se inatingível. Portanto definiremos o tempo  $\tau_\pi$  como o tempo necessário para que uma excitação no modo de campo que interage com o átomo seja totalmente transferida para o átomo ou para o ambiente. Este tempo depende dos valores da constante de decaimento ( $k$ ) e da frequência de Rabi ( $\Omega$ ):

$$\tau_\pi = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 - k^2}} \arccos\left(\frac{2k^2 - \Omega^2}{\Omega^2}\right) \quad (4.39)$$

Fixando o valor de  $\tau_\pi$ , podemos calcular a evolução de cada parcela em (4.38):

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{L}_{2A}\tau_\pi} |1\rangle\langle 1| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B}\tau_\pi} |0, g\rangle\langle 0, g| &= [e^{-2k\tau_\pi} |1\rangle\langle 1| + (1 - e^{-2k\tau_\pi}) |0\rangle\langle 0|] \otimes |0, g\rangle\langle 0, g|, \\ e^{\mathcal{L}_{2A}\tau_\pi} |0\rangle\langle 0| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B}\tau_\pi} |1, g\rangle\langle 1, g| &= |0\rangle\langle 0| \otimes [e^{-k\tau_\pi} |0, e\rangle\langle 0, e| + (1 - e^{-k\tau_\pi}) |0, g\rangle\langle 0, g|], \\ e^{\mathcal{L}_{2A}\tau_\pi} |0\rangle\langle 0| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B}\tau_\pi} |0, g\rangle\langle 0, g| &= |0\rangle\langle 0| \otimes |0, g\rangle\langle 0, g|, \\ e^{\mathcal{L}_{2A}\tau_\pi} |1\rangle\langle 0| \otimes e^{\mathcal{L}_{2B}\tau_\pi} |0, g\rangle\langle 1, g| &= 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

o resultado da aplicação do super-operador  $e^{\mathcal{L}_{2B}\tau_\pi}$  no subespaço composto por um modo de campo e um átomo de dois níveis, foram obtidos a partir da solução da equação mestra desenvolvida na referência [49].

O operador de estado do sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \rho_S(\tau_\pi + \tau_{AB}) &= |f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi} |1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |l_2(\tau_{AB})|^2 e^{-k\tau_\pi} |0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| \\ &+ (1 - |f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi} - |l_2(\tau_{AB})|^2 e^{-k\tau_\pi}) |0, 0, g\rangle\langle 0, 0, g| \end{aligned}$$

### A evolução dissipativa

A partir das etapas mostradas nas duas seções anteriores, o primeiro passo da evolução temporal reformulada pode ser representado pelo fluxograma:

$$\begin{aligned} &|1, 0\rangle\langle 1, 0| \quad (4.41) \\ &\Downarrow e^{\mathcal{L}_{1\tau_{AB}}} \\ &(f_1(\tau_{AB})|1, 0\rangle + l_2(\tau_{AB})|0, 1\rangle)(h.c.) + (1 - |f_1(\tau_{AB})|^2 - |l_2(\tau_{AB})|^2) |0, 0\rangle\langle 0, 0| \\ &\Downarrow e^{\mathcal{L}_{2\tau_\pi}} \\ &|f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi} |1, 0, g\rangle\langle 1, 0, g| + |l_2(\tau_{AB})|^2 e^{-k\tau_\pi} |0, 0, e\rangle\langle 0, 0, e| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1 - |f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi} - |l_2(\tau_{AB})|^2 e^{-k\tau_\pi}) |0, 0, g\rangle \langle 0, 0, g| \\
& \quad \Downarrow Tr_A \\
& |f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi} |1, 0\rangle \langle 1, 0| + (1 - |f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi}) |0, 0\rangle \langle 0, 0|.
\end{aligned}$$

Observando o estado final do primeiro passo, podemos notar que a parte da mistura associada à  $|0, 0\rangle \langle 0, 0|$  não evolui. Portanto, cada passo será composto apenas pela evolução de  $|1, 0\rangle \langle 1, 0|$ . Assim, seguindo a evolução temporal, a probabilidade do fóton permanecer na cavidade A após  $N$  passos tem a forma:

$$p_{1,0}^{(N)} = (|f_1(\tau_{AB})|^2 e^{-2k\tau_\pi})^N, \quad (4.42)$$

a partir da equação (4.33) obtemos

$$\begin{aligned}
p_{1,0}^{(N)} &= e^{-2kN\tau_{AB}} (\cos^2(g\tau_{AB}))^N e^{-2kN\tau_\pi}, \\
&= e^{-2kT} \left( \cos^2\left(\frac{gT}{N}\right) \right)^N e^{-2kN\tau_\pi} = e^{-2kT'} \left( \cos^2\left(\frac{gT}{N}\right) \right)^N.
\end{aligned} \quad (4.43)$$

A equação (4.43) nos permite comparar o efeito provocado pelas  $N$  interações intermediárias em dois tipos de dependência temporal da probabilidade de permanência do estado inicial. A dependência exponencial em  $t$  da probabilidade de permanência do estado inicial não sofre alterações devido a interações intermediárias. Entretanto, uma dependência do tipo senoidal é sensível às interações intermediárias. Na equação (4.43) o termo  $e^{-2kT'}$  representa a probabilidade do fóton não decair para o ambiente, enquanto o termo  $(\cos^2(\frac{gT}{N}))^N$  é a probabilidade do fóton não sofrer transição para a cavidade B. O aumento de  $N$  é capaz de suprimir a probabilidade de transição do fóton da cavidade A para a B, mas não provoca alterações no decaimento exponencial.

Analisemos a equação que representa o valor a ser medido experimentalmente nesta proposta, a probabilidade de click no detector  $D_e$  (que investiga o estado de energia de um átomo que cruza a cavidade A no tempo  $T'$ ) submetida às alterações provocadas pelas limitações empíricas aqui discutidas:

$$p_{D_e \text{click}}^{(N)} = p_e e^{-2kT'} \left( \cos^2\left(\frac{gT}{N}\right) \right)^N. \quad (4.44)$$

Podemos concluir que a ineficiência do detector e o decaimento dos modos nas cavidades interferem basicamente da mesma forma na observação empírica do efeito Zenão. Ambos são responsáveis pela multiplicação de termos indesejáveis ( $p_e$  e  $e^{-2kT}$ ) que provocam a discrepância entre a curva da probabilidade de click em  $D_e$  e a curva idealizada para a observação do efeito Zenão.

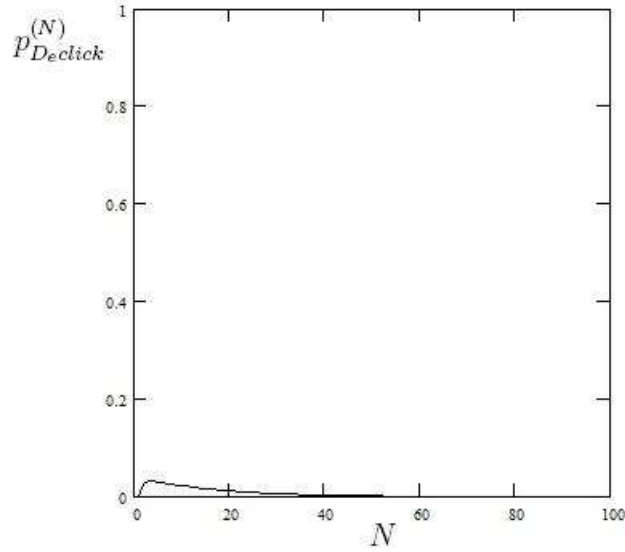


Figura 4.4: Simulação numérica de  $p_{D_{e click}}^{(N)} \times N$  com  $g = 10^3 s^{-1}$  e  $k = 10^3 s^{-1}$ .

As figuras 4.4 e 4.5 mostram curvas de  $p_{D_{e click}}^{(N)} \times N$  construídas a partir de simulações numéricas com valores diferentes de  $k$ . Notemos que na figura 4.4  $p_{D_{e click}}^{(N)}$  tende a zero para pequenos valores de  $N$ , entretanto, o mesmo não acontece na figura 4.5.

Os gráficos mostram uma competição entre o efeito zenão quântico e os efeitos dissipativos do ambiente. O aumento do número de átomos  $N$  contribui para a retenção do fóton na cavidade A (efeito zenão quântico) e portanto para que  $p_{D_{e click}}^{(N)} \rightarrow 1$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Entretanto, o aumento do número de átomos também contribui para o aumento no tempo de exposição dos modos de campo ao ambiente e portanto para que  $p_{D_{e click}}^{(N)} \rightarrow 0$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Na figura 4.4 o valor da constante de decaimento das cavidades  $k = 10^3 s^{-1}$  permite que os efeitos dissipativos prevaleçam. Entretanto, na figura 4.5 o valor de  $k = 10 s^{-1}$  inibe os efeitos de dissipação, assim podemos observar o efeito Zenão quântico por um intervalo maior do eixo  $N$ . A construção de cavidades com a constante de dissipação  $k = 10 s^{-1}$  foi reportada recentemente em [24, 50].

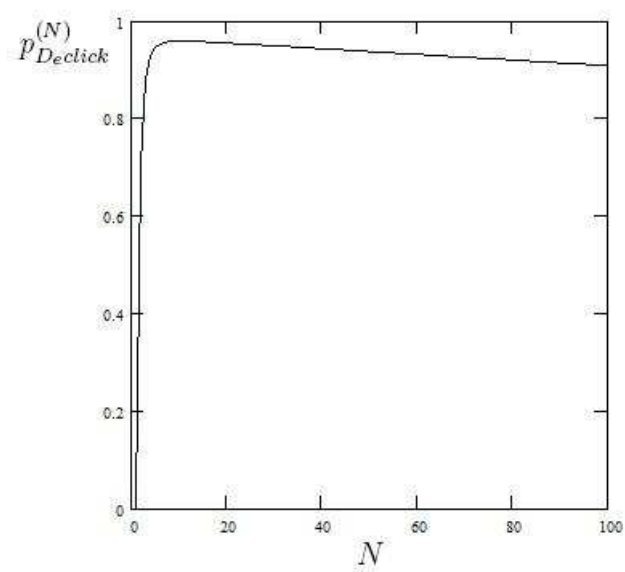


Figura 4.5: Simulação numérica de  $p_{Declick}^{(N)} \times N$  com  $g = 10^3 s^{-1}$  e  $k = 10 s^{-1}$ .

## Capítulo 5

# Medição incompleta: Conseqüências para O Efeito Zenão Quântico

Neste capítulo apresentamos um estudo <sup>1</sup> sobre alterações na evolução temporal de um sistema quântico provocadas por interações com subsistemas auxiliares. Investigamos a possibilidade de ocorrência do Efeito Zenão Quântico em sistemas que interagem, mas não se correlacionam completamente com os medidores. Vamos nos referir a este processo como medição incompleta, pois o estado do medidor após a interação não apresenta informação conclusiva sobre o estado do sistema.

Apresentamos também a possibilidade de controle da dinâmica de um sistema quântico através de interações que não correlacionam o subsistema de interesse com os auxiliares, mas provoca a retenção do estado inicial de forma mais eficiente do que o tradicional Efeito Zenão Quântico.

Conduzimos nossa análise baseados na abordagem dinâmica do Efeito Zenão Quântico [37], onde a correlação entre um sistema quântico  $S$  e  $N$  medidores provocam a inibição de transições quânticas. Estudos nesta linha consideram correlações perfeitas entre  $S$  e medidores (medição completa), o que pode ser um fator restritivo, experimentalmente, em alguns sistemas.

Na investigação sobre as modificações no Efeito Zenão Quântico provocadas pela generalização na intensidade das correlações entre sistema e medidores (medições incompletas), apresentamos avaliações dos efeitos provocados pelas medições incompletas sobre a taxa de transição quântica, bem como um estudo comparativo de gráficos, que explicitam a dependência da probabilidade de não ocorrer a transição quântica pelo número de medições intermediárias, obtidos a partir de simulações numéricas com diferentes valores para a intensidade de correlação entre  $S$  e  $M$ .

Através de tais análises, concluímos que o aumento no número de medidas  $N$  ofusca

---

<sup>1</sup>Publicado em [51]

o papel da intensidade das correlações entre  $S$  e medidores na inibição de transições quânticas. Portanto, o efeito Zenão Quântico pode ser observado mesmo quando as correlações são muito pequenas.

Para evitar complicações desnecessárias, seguiremos a análise representando  $S$  como um sistema de dois níveis. Os  $N$  medidores, que provocam as alterações na dinâmica de  $S$ , também serão representados por sistemas de dois níveis. Os modelos que descrevem o sistema  $S$  e os medidores são apresentados na seção seguinte.

## 5.1 O Sistemas $S$ e $M$

Consideremos o sistema  $S$  composto por dois q-bits ( $S_a$  e  $S_b$ ). Os q-bits interagem entre si, o hamiltoniano que descreve esta interação tem a forma:

$$H_S = \epsilon_a |1_a\rangle\langle 1_a| + \epsilon_b |1_b\rangle\langle 1_b| + \hbar G(\sigma_-^a \sigma_+^b + \sigma_+^a \sigma_-^b), \quad (5.1)$$

onde  $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$ ,  $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$ ,  $G$  é o coeficiente de acoplamento e  $\epsilon_a$  ( $\epsilon_b$ ) o autovalor do hamiltoniano livre de  $S_a$  ( $S_b$ ).

Consideremos como medidores um conjunto de sistemas de dois níveis (com estados representados por  $|1_M^{(k)}\rangle$  e  $|0_M^{(k)}\rangle$ ), que interage com  $S_b$  identificando se este se encontra no estado  $|1_b\rangle$  ou  $|0_b\rangle$ . Por simplicidade seguiremos a análise supondo que a medição seja instantânea, portanto o hamiltoniano que descreve tal processo tem a forma:

$$H_{SM}^{(k)}(t) = I_a \otimes g \hbar \delta(t - t_m^{(k)}) (\sigma_+^b |0_M^{(k)}\rangle\langle 1_M^{(k)}| + \sigma_-^b |1_M^{(k)}\rangle\langle 0_M^{(k)}|), \quad (5.2)$$

$$= I_a \otimes g \hbar \delta(t - t_m^{(k)}) \Gamma^{(k)}. \quad (5.3)$$

A função delta limita a interação ao instante  $t_m^{(k)}$ ,  $g$  é o coeficiente de interação,  $I_a$  representa a matriz identidade no subsistema  $S_a$ . Concluiremos a seguir que o valor do coeficiente  $g$  está associado à completude da medição.

O hamiltoniano total, que governa a dinâmica do sistema ( $S + M$ ), pode ser escrito como

$$H(t) = H_S + H_M + \sum_{k=1}^N H_{SM}^{(k)}(t), \quad (5.4)$$

onde  $H_M$  é o hamiltoniano livre no subsistema do medidor

$$H_M = \sum_{k=1}^N \left( \lambda_1^{(k)} |1_M^{(k)}\rangle\langle 1_M^{(k)}| + \lambda_0^{(k)} |0_M^{(k)}\rangle\langle 0_M^{(k)}| \right), \quad (5.5)$$

sendo  $\lambda_1^{(k)}$  ( $\lambda_0^{(k)}$ ) a energia correspondente ao auto-estado  $|1_M^{(k)}\rangle$  ( $|0_M^{(k)}\rangle$ ).

A evolução do estado inicial do sistema ( $S + M$ ) será dividida em  $N$  passos, e cada passo dividido em duas etapas. Na primeira, os modos interagem livres da ação dos medidores, e o operador que governa esta evolução tem a forma:

$$U_S(t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}(H_S + H_M)t\right), \quad (5.6)$$

a primeira etapa da evolução é idêntica em todos os passos.

Na segunda etapa, um medidor interage com  $S_b$ , e o operador unitário responsável pela evolução, no  $k$ -ésimo passo, é dado por

$$U_M^{(k)}(t_m^{(k)} - \epsilon, t_m^{(k)} + \epsilon) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_{t_m^{(k)} - \epsilon}^{t_m^{(k)} + \epsilon} (H_S + H_M + \sum_{k=1}^N H_{SM}^{(k)}(t)) dt\right), \quad (5.7)$$

$$= \exp\left(\frac{-i}{\hbar}(H_S + H_M)2\epsilon - ig\Gamma^{(k)}\right), \quad (5.8)$$

no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos  $U_M^{(k)}(t_m^{(k)} - \epsilon, t_m^{(k)} + \epsilon) = \exp(-ig\Gamma^{(k)})$ .

Observemos que  $\Gamma^{(k)}$  respeita as seguintes propriedades:  $(\Gamma^{(k)})^n = \Gamma^{(k)}$  quando  $n$  é um número ímpar, e  $(\Gamma^{(k)})^n = I$  quando  $n$  é um número par. Portanto, a partir da expansão de  $U_M^{(k)}(t_m^{(k)} - \epsilon, t_m^{(k)} + \epsilon)$  em série podemos escrever o operador unitário de uma forma mais simples:

$$U_M^{(k)}(t_m^{(k)} - \epsilon, t_m^{(k)} + \epsilon) = \exp(-ig\Gamma^{(k)}) = I \cos(g) - i \sin(g)\Gamma^{(k)} \quad (5.9)$$

A evolução temporal completa do sistema será composta por uma sucessão de operadores unitários, apresentados nas equações (5.6 e 5.9), dispostos da seguinte forma:

$$|\psi(T)\rangle = (U_M^{(N)}U_S)\dots(U_M^{(k)}U_S)(U_M^{(k-1)}U_S)\dots(U_M^{(1)}U_S)|\psi(0)\rangle. \quad (5.10)$$

### 5.1.1 Interação com um medidor

Consideremos  $|\psi(0)\rangle = |1, 0\rangle|0_M\rangle$  como estado inicial do sistema ( $S + M$ ), onde  $|0_M\rangle = \bigotimes_{k=1}^N |0_M^k\rangle$ . Na primeira etapa o estado evolui da seguinte forma

$$|\psi(t_m^{(1)})\rangle = U_S(t_m^{(1)})|\psi(0)\rangle = (\alpha(t_m^{(1)})|1, 0\rangle - i\beta(t_m^{(1)})|0, 1\rangle) |0_M\rangle, \quad (5.11)$$

onde  $\alpha(t) = \cos(Gt)$  e  $\beta(t) = \sin(Gt)$ . Devemos ressaltar que a transição quântica a ser alterada pela interação com o medidor é a troca de excitações:  $|1, 0\rangle \rightarrow |0, 1\rangle$ .

Na segunda etapa, o subsistema  $S$  interage com um dos medidores (como estamos analisando apenas um passo da evolução completa, omitimos os estados dos medidores que não interagem com  $S$  neste passo):

$$U_M^{(1)}|\psi(t_m^{(1)})\rangle = (\alpha(t_m^{(1)})|1, 0\rangle - i\beta(t_m^{(1)})\cos(g)|0, 1\rangle)|0_M^{(1)}\rangle - \beta(t_m^{(1)})\sin(g)|0, 0\rangle|1_M^{(1)}\rangle. \quad (5.12)$$

Informações sobre a ocorrência da transição quântica ( $|1, 0\rangle \rightarrow |0, 1\rangle$ ) é obtida indiretamente através da análise do estado final do medidor. Se  $g = \frac{k\pi}{2}$  (onde  $k = 1, 2, 3, \dots$ ), a medição é completa, o estado do medidor é  $|1_M^{(1)}\rangle$  se a transição ocorreu e  $|0_M^{(1)}\rangle$  se não. Entretanto, se  $g = \pi$ , o sistema não se correlaciona com o medidor, portanto este não carrega informação alguma sobre a ocorrência da transição quântica. Outros valores de  $g$  criam configurações intermediárias (medições incompletas), informações não conclusivas são obtidas através dos medidores.

Concluimos que o valor de  $|\cos(g)|$  quantifica a completude da informação disponível no estado do medidor. Para  $|\cos(g)| = 0$  a informação é completa, quanto maior o valor de  $|\cos(g)|$  menor a informação disponível, que atinge um valor nulo quando  $|\cos(g)| = 1$ .

## 5.2 Alterações na taxa de transição quântica

Investigaremos nesta seção as alterações na taxa de transição quântica provocadas pela interação descrita na equação (5.12).

Uma abordagem para o Efeito Zenão Quântico que toma como objeto de investigação a alteração da taxa de transição quântica de  $S$  provocada pela interação com outro subsistema  $M$  foi apresentada em [52, 53]. Os autores mostram que no instante imediatamente posterior a uma medição completa (interação que correlaciona completamente sistema e medidor), a taxa de transição quântica do sistema se anula. Desta forma uma série de medições completas impede o crescimento de  $\frac{dP_{in}}{dt}$ , e conseqüentemente, o da probabilidade de transição quântica. Investigamos, nesta seção, os efeitos de medições incompletas e interações que não correlacionam  $S$  e  $M$  sob a taxa de transição quântica.

Primeiramente calculemos o valor desta taxa em um intervalo onde não acontecem interações com os medidores

$$T^{(0)}(t) = \frac{dP_{1,0}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \langle \psi(0) | U_S^\dagger(t) (|1, 0\rangle \langle 1, 0| \otimes I_M) U_S(t) | \psi(0) \rangle \right] \quad (5.13)$$

$$= -2G\alpha(t)\beta(t), \quad (5.14)$$

observemos que a taxa possui valor nulo quando  $t = 0$  e que com o tempo seu valor torna-se não nulo, permitindo que os vetores de estado do sistema  $S$  evoluam.

Calculemos o valor da taxa em um instante imediatamente posterior a uma interação com o subsistema  $M$ . Para este fim, consideremos o vetor de estado no instante  $t_m^{(1)} + t$ , onde  $t_m^{(1)}$  (como definido anteriormente) é o instante em que ocorre a primeira interação com  $M$  e  $t$  um intervalo de tempo posterior a esta interação, em que o sistema evolui livremente.

$$\begin{aligned} |\psi(t_m^{(1)} + t)\rangle &= \left( U_S(t) U_M^{(1)} U_S(t_m^{(1)}) \right) |1, 0\rangle |0_M\rangle \\ &= \left( \alpha(t_m^{(1)}) \alpha(t) - \beta(t_m^{(1)}) \beta(t) \cos(g) \right) |1, 0\rangle |0_M^{(1)}\rangle \\ &\quad - i \left( \alpha(t_m^{(1)}) \beta(t) - \beta(t_m^{(1)}) \alpha(t) \cos(g) \right) |0, 1\rangle |0_M^{(1)}\rangle \\ &\quad - \beta(t_m^{(1)}) \sin(g) |0, 0\rangle |1_M^{(1)}\rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Calculemos a taxa de transição quântica em função da variável  $t$  e tomemos o limite  $t \rightarrow 0$ :

$$T^{(1)}(t_m^{(1)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dP_{1,0}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \langle \psi(t_m^{(1)} + t) | (|1, 0\rangle \langle 1, 0| \otimes I_M) | \psi(t_m^{(1)} + t) \rangle \right) \quad (5.16)$$

$$= -2G \alpha(t_m^{(1)}) \beta(t_m^{(1)}) \cos(g). \quad (5.17)$$

Obtemos assim, o valor da taxa de transição quântica no instante imediatamente posterior a uma interação entre  $S$  e  $M$ .

Diferentes alterações na taxa de transição quântica serão obtidas para diferentes valores do coeficiente de acoplamento  $g$ . Como a função  $\cos(g)$  é periódica, vamos nos restringir a análise da equação (5.17) ao intervalo  $0 \leq g \leq \pi$ .

Quando  $g = 0$  não há interação, podemos observar que  $T^{(0)}(t) = T^{(1)}(t)$ .

No intervalo de  $0 < g < \frac{\pi}{2}$  observamos uma redução no módulo da taxa de transição  $|T^{(0)}(t_m^{(1)})| > |T^{(1)}(t_m^{(1)})|$ , entretanto a interação com  $M$  não provoca inversão de “sinal” na derivada (taxa de transição quântica).

Quando  $g = \frac{\pi}{2}$  (medição perfeita) a taxa de transição quântica é nula no instante imediatamente posterior à interação com  $M$ ,  $T^{(1)}(t_m^{(1)}) = 0$  (efeito Zenão Quântico tradicional).

Se  $\frac{\pi}{2} < g < \pi$ , observamos a redução no módulo da taxa de transição  $|T^{(0)}(t_m^{(1)})| > |T^{(1)}(t_m^{(1)})|$  e a inversão de “sinal” na derivada. Sabemos que o sinal da derivada determina os intervalos onde a função  $P_{1,0}(t)$  é crescente ou decrescente. Portanto, neste intervalo, após a interação com  $M$  a função  $P_{1,0}(t)$  inverte seu comportamento, evoluindo no “sentido” contrário ao da transição quântica. Notemos que tais interações não emaranham completamente os subsistemas  $S$  e  $M$  (como em  $g = \frac{\pi}{2}$ ), entretanto, elas inibem a transição quântica de maneira mais eficiente do que o efeito Zenão tradicional.

Para  $g = \pi$ , observamos apenas a inversão no “sinal” da derivada, sem alterações em seu valor absoluto. No jargão de óptica quântica esta interação recebe o nome de pulso  $2\pi$ .

Na figura 5.1, podemos observar curvas da probabilidade  $P_{1,0}^{(1)}$  em função do tempo para diferentes valores de  $g$ . O intervalo de tempo considerado é dividido por uma interação com  $M$ , que acontece no instante  $t_m^{(1)} = 0,5$ . A curva 1 representa a probabilidade de permanência no estado inicial sem a intervenção de medidores. Observemos que todas as curvas se afastam dela, explicitando o fato de que qualquer interação ( $g \neq 0$ ) provoca inibição da transição quântica.

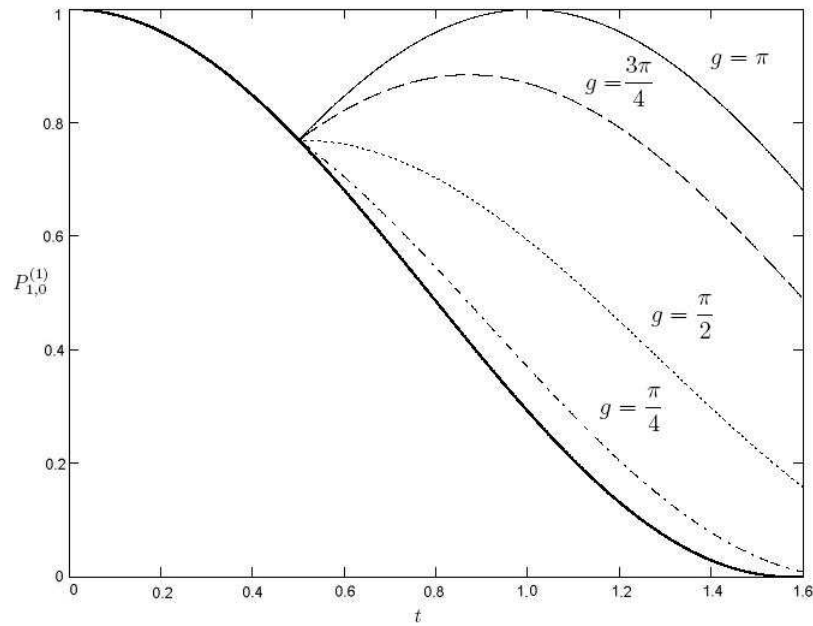


Figura 5.1: Curvas da probabilidade  $P_{1,0}^{(1)}$  em função do tempo para diferentes valores de  $g$ .

A inibição mais significativa é provocada pela interação com  $g = \pi$  (pulso  $\pi$ ), que inverte o sinal da derivada sem alterar seu valor absoluto. Após algumas manipulações algébricas, podemos escrever a taxa de transição quântica como:

$$T^{(1)}(t_m^{(1)} + t, g = \pi) = \sin(2t_m^{(1)} - 2t). \quad (5.18)$$

A taxa é positiva ( $T^{(1)}(t_m^{(1)} + t, g = \pi) > 0$ ) durante o período em que o tempo de evolução posterior à interação com  $M$  é menor do que o tempo de evolução anterior à interação com  $M$  ( $t_m^{(1)} > t$ ). Portanto, a probabilidade de permanência no estado inicial é uma função crescente neste intervalo. Para os valores  $\frac{\pi}{2} < g < \pi$  o tempo em que a função

$P_{1,0}(t)$  é crescente é menor, por isso a inibição da transição quântica é mais acentuada quando  $g = \pi$ .

## 5.3 Seqüência de $N$ medições

Voltemos nossa atenção para a investigação dos efeitos provocados por uma seqüência de  $N$  interações entre  $S$  e  $M$  na evolução temporal de  $S$ , para diferentes valores de  $g$ .

Dividiremos nossa análise em duas partes. Primeiramente consideremos as interações que não correlacionam os subsistemas  $S$  e  $M$ , mas provocam alterações acentuadas na evolução de  $S$  ( $g = \pi$ ). Posteriormente discutiremos a possibilidade de ocorrência do Efeito Zenão Quântico com medições incompletas. Concluiremos que o aumento no número de interações ( $N$ ) contribui para a redução do módulo da taxa de transição quântica, permitindo que o comportamento da probabilidade de permanência no estado inicial após  $N$  medições incompletas e após  $N$  medições completas aproxime-se quando  $N$  cresce, tornado-se idênticos quando  $N \rightarrow \infty$ .

### 5.3.1 Seqüência de pulsos $2\pi$

Uma forma de controle da dinâmica de  $S$  arquitetada a partir de uma seqüência de pulsos  $2\pi$  (interações com  $g = \pi$ ). Devemos enfatizar que não seria adequado caracterizar tal tipo de controle como Efeito Zenão Quântico, pois este tradicionalmente refere-se à inibição de transições (ou decaimento) provocada por medições. O processo descrito nesta seção não provoca correlação alguma entre os subsistemas  $S$  e  $M$ , tão pouco alterações no módulo da taxa de transição quântica.

As alterações provocadas por uma seqüência de  $N$  pulsos  $2\pi$  em um intervalo  $T = N\tau$ , onde  $\tau$  é o período em que  $S$  evolui livre de interações com  $M$ , dependem da paridade de  $N$ . Pois, ao fim de cada interação entre  $S$  e  $M$  uma inversão no “sinal” da derivada  $\frac{dP_{1,0}}{dt}$  é provocada, alternando o comportamento da função  $P_{1,0}(t)$  entre crescente e decrescente.

Se  $N$  é um número par:

$$\prod_{k=1}^N (U_M^k U_S) |1, 0\rangle |0_M\rangle = |1, 0\rangle |0_M\rangle, \quad (5.19)$$

e se  $N$  é um número ímpar

$$\prod_{k=1}^N (U_M^k U_S) |1, 0\rangle |0_M\rangle = (\alpha(\tau)|1, 0\rangle + \beta(\tau)|0, 1\rangle) |0_M\rangle, \quad (5.20)$$

O controle da dinâmica pode ser arquitetado a partir das equações (5.19) e (5.20). Observemos que a inibição da transição quântica provocada por uma seqüência de pulsos

$2\pi$  é mais eficiente do que o tradicional Efeito Zenão Quântico, como é explicitado na figura 5.2.

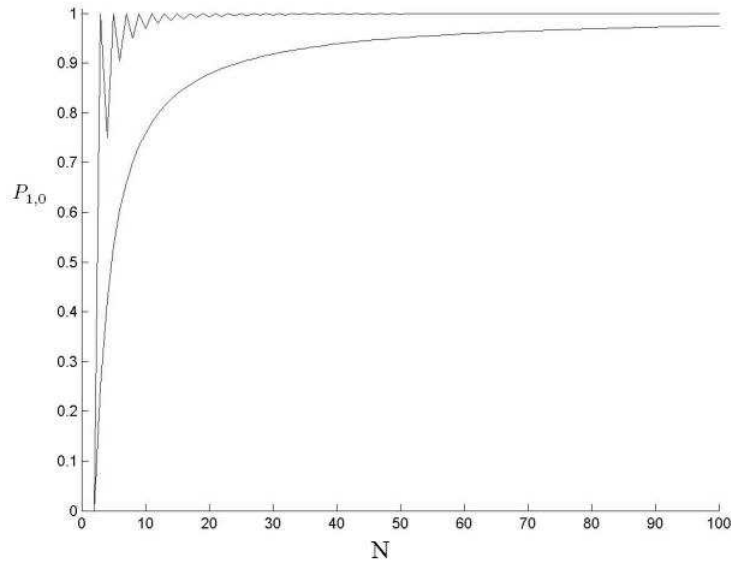


Figura 5.2: Gráfico da probabilidade de  $P_{1,0} \times N$  para  $g = \pi$  (curva superior),  $g = \frac{\pi}{2}$  (curva inferior) e  $T = \frac{\pi}{2g}$ .

A presença de oscilações na curva superior é devida ao comportamento alternado de  $P_{1,0}(t)$  entre crescente e decrescente após cada interação  $S - M$ . Quando  $N \rightarrow \infty$  as oscilações se reduzem pois o vetor de estado (5.20) torna-se próximo de (5.19).

### 5.3.2 Efeito Zenão Quântico com medições incompletas

Com o objetivo de comparar as alterações provocadas na taxa de transição quântica pelo aumento do número de interações entre  $S$  e  $M$  em um intervalo de tempo, consideremos o intervalo  $T$ , dividido como na figura 5.3.

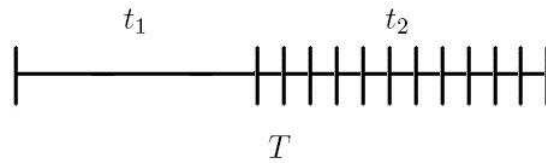


Figura 5.3: Representação esquemática da divisão do intervalo de tempo  $T$  em  $t_1$  intervalo de evolução livre de  $S$ , e  $t_2$  intervalo dividido por  $N$  interações entre  $S$  e  $M$ .

No intervalo de tempo  $t_1$  o sistema  $S$  evolui livre de interações com  $M$ , entretanto, no intervalo  $t_2$  uma série de  $N$  medições é realizada.

Quando  $N \rightarrow \infty$  os intervalos entre as medições tendem a zero. Portanto, esta dinâmica torna-se semelhante a uma em que  $N$  medições consecutivas são realizadas em  $t_2$ . A taxa de transição quântica após  $N$  medições consecutivas em  $t_2$  pode ser escrita como<sup>2</sup>:

$$\frac{dP_{1,0}^{(N)}}{dt} = -2\alpha(t_1)\beta(t_1)\cos^N(g) \quad (5.21)$$

Quando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{dP_{1,0}^{(N)}}{dt} \rightarrow 0$ . Assim, para um número muito grande de medições, a incompletude de cada medida é um fator irrelevante na inibição da transição quântica. O Efeito Zenão Quântico independe da intensidade das correlações entre  $S$  e  $M$ , a taxa de transição quântica se anula quando  $N \rightarrow \infty$ , contanto que  $|\cos(g)| \neq 1$ .

Para estender nossa análise sobre o Efeito Zenão Quântico a um número finito de medições incompletas, consideremos os gráficos obtidos a partir de simulações numéricas apresentados na figura 5.4. As curvas mostram a probabilidade de permanência no estado inicial como função de  $N$ , para três valores de  $g$ .

Em uma seqüência de medições incompletas, com o valor do coeficiente  $g$  entre  $\frac{\pi}{2} < g < \pi$ , dois fatores contribuem para a manutenção do estado inicial de  $S$ : a inversão do sinal da derivada e a redução de seu valor absoluto.

Analisemos com mais detalhes esta questão. No instante inicial o estado foi preparado em  $|1,0\rangle$ , como estamos investigando a possibilidade de inibição da transição  $|1,0\rangle \rightarrow |0,1\rangle$ , no intervalo de tempo de nosso interesse, a probabilidade de permanência no estado inicial é uma função decrescente no tempo se nenhuma interação entre  $S$  e  $M$  acontecer. Após a primeira medida (com  $\frac{\pi}{2} < g < \pi$ ), a curva  $P_{1,0} \times t$  inverte seu comportamento e torna-se crescente (devido à troca de sinal da derivada), mas com o módulo da taxa reduzido. Após a segunda medição, a curva  $P_{1,0} \times t$  volta a ser decrescente com o módulo da taxa de variação no tempo ainda mais reduzido. A evolução temporal do sistema continua este comportamento com o aumento do número de medições. A oscilação entre o comportamento crescente e decrescente da curva  $P_{1,0} \times t$  (devido à troca de sinal da derivada), bem como as reduções sucessivas no módulo da taxa de transição, contribuem para a inibição da transição quântica.

Em seqüências de medições com  $0 < g < \frac{\pi}{2}$  apenas a redução do módulo da taxa de transição quântica contribui para a retenção do estado inicial. Este é o motivo pelo na figura 5.4, a curva superior ( $\cos(g) = -0,5$ ) apresenta crescimento mais acentuado do que as curvas intermediária e inferior. Na curva intermediária a medição é completa (Efeito Zenão Quântico tradicional) a taxa de transição quântica se anula a cada interação com

---

<sup>2</sup>A taxa  $\frac{dP_{1,0}^{(N)}}{dt}(t=0)$  foi calculada a partir da probabilidade  $P_{1,0}^{(N)} = \langle \psi(t_1 + t_2 + t) | (|1,0\rangle\langle 1,0| \otimes I_M) | \psi(t_1 + t_2 + t) \rangle$ .

$M$ . Na curva inferior ( $\cos(g) = 0,5$ ) as interações provocam apenas a redução da taxa de transição quântica. Quando  $N \rightarrow \infty$  as três curvas mostram o mesmo comportamento.

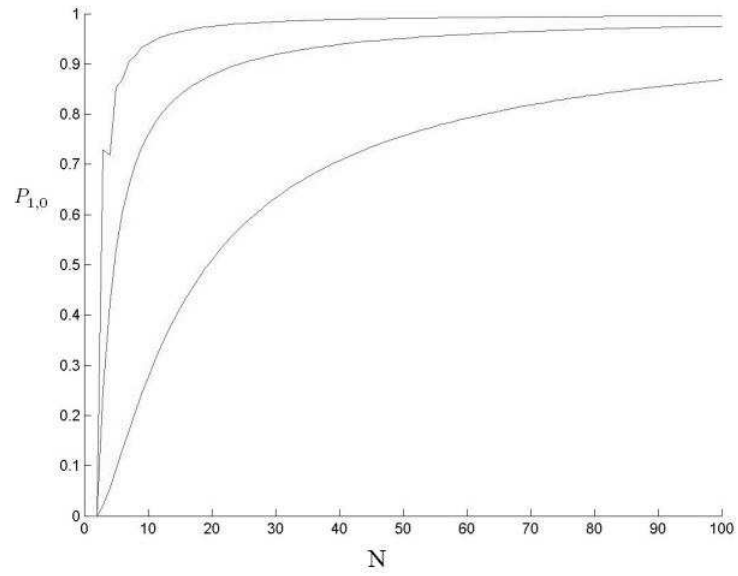


Figura 5.4: Gráfico  $P_{1,0} \times N$  para valores de  $g = \frac{3\pi}{4}$  (curva superior),  $g = \frac{\pi}{2}$  (curva intermediária) e  $g = \frac{\pi}{4}$  (curva inferior).

# Capítulo 6

## Controle e Manipulação de Estados

Protocolos para controle e manipulação de estados quânticos são essenciais para o desenvolvimento da teoria de informação quântica. Investigações desta natureza podem fornecer ferramentas para evitar processo de decoerência e conduzir evoluções quânticas de forma desejável. Controle por Efeito Zenão Quântico [54, 40, 55], “Super Zeno Effect” [56], acoplamento contínuo [39, 57], controle “Bang-Bang” [58, 59] são alguns exemplos de tais estratégias.

Apresentamos nesta seção uma possibilidade de controle de estados quânticos quânticos através de interações sucessivas com um único subsistema auxiliar. Tais interações são descritas por operações unitárias, que ocorrem durante um intervalo de tempo finito e podem inibir ou paralisar a evolução temporal do sistema de interesse.

Apresentamos a estratégia de controle baseados em dois exemplos. No primeiro, o sistema de interesse é composto por 2 q-bits ( $S_b$  e  $S_c$ ) acoplados por um hamiltoniano de troca e que compartilham uma excitação. Um terceiro sistema de dois níveis ( $S_a$ ) é o subsistema auxiliar responsável pelo controle. Interações entre  $S_b$  e  $S_a$  são intercaladas na evolução temporal do sistema de interesse e provocam o controle desta dinâmica. O número de tais interações, assim como seu tempo de acoplamento são parâmetros que permitem diferentes formas de controle.

No segundo exemplo mostramos o controle da dinâmica do emaranhamento apresentada em [60] através de interações com um único subsistema auxiliar. Na dinâmica descrita em [60], dois átomos inicialmente emaranhados são submetidos à evoluções temporais distintas. Um deles interage com um modo de campo eletromagnético aprisionado em uma cavidade e o outro evolui livre de interações. A dinâmica é não dissipativa e o emaranhamento inicial sofre oscilações ao longo do tempo. A introdução de um subsistema auxiliar, que interage com o átomo na cavidade, permite o controle da dinâmica do emaranhamento. Uma implementação empírica para este processo pode ser realizada através da montagem descrita em [29], onde um átomo de dois níveis interage com dois

modos de campo eletromagnético abrigados na mesma cavidade de microondas. O átomo de dois níveis e um dos modos abrigados na cavidade ( $M_a$ ) formam o sistema  $S$ . O segundo modo  $S_b$  representa o subsistema auxiliar  $S_A$ .

## 6.1 Controle da dinâmica de dois qubits

Consideremos o sistema global composto por 2 sistemas de dois níveis ( $S_b - S_c$ ) acoplados, que constituem o sistema de interesse, e outro sistema de dois níveis ( $S_a$ ) que representa o subsistema auxiliar. O hamiltoniano que descreve a evolução temporal livre de  $S_b - S_c$  é dado por:

$$H_{bc} = \epsilon_a |1_a\rangle\langle 1_a| + \epsilon_b |1_b\rangle\langle 1_b| + \epsilon_c |1_c\rangle\langle 1_c| + I_a \otimes \hbar G_{bc} (\sigma_-^b \sigma_+^c + \sigma_+^b \sigma_-^c), \quad (6.1)$$

onde  $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$ ,  $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$ ,  $G_{bc}$  é o coeficiente de acoplamento,  $I_a$  é a matriz identidade do subsistema  $S_a$ . Os coeficientes  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_b$  e  $\epsilon_c$  são os autovalores do hamiltoniano livre de  $S_a$ ,  $S_b$  e  $S_c$ .

O acoplamento entre subsistema auxiliar ( $S_a$ ) e  $S_b$  é representado pelo hamiltoniano

$$H_{ab} = \epsilon_a |1_a\rangle\langle 1_a| + \epsilon_b |1_b\rangle\langle 1_b| + \epsilon_c |1_c\rangle\langle 1_c| + \hbar G_{ab} (\sigma_-^a \sigma_+^b + \sigma_+^a \sigma_-^b) \otimes I_c, \quad (6.2)$$

onde  $I_c$  é a matriz identidade do subsistema  $S_c$  e  $G_{ab}$  o coeficiente de acoplamento entre  $S_a$  e  $S_b$ .

Consideremos que  $S_a - S_b - S_c$  compartilham uma excitação. Os operadores  $H_{bc}$  e  $H_{ab}$  mantêm constante o número de excitações, portanto podemos representar de forma matricial no subespaço de uma excitação os operadores unitários de evolução temporal.

$$\hat{\mathbf{U}}_{bc}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -i \sin \theta \\ 0 & -i \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

e

$$\hat{\mathbf{U}}_{ab}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -i \sin \phi & 0 \\ -i \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

Onde  $\theta = G_{bc} t_{bc}$  e  $\phi = G_{ab} t_{ab}$ , sendo  $t_{bc}$  ( $t_{ab}$ ) o tempo de interação entre os subsistema  $S_b$  e  $S_c$  ( $S_a$  e  $S_b$ ).

O controle da dinâmica do subsistema de interesse ( $S_b - S_c$ ) é exercido por evoluções unitárias ( $\hat{\mathbf{U}}_{ab}$ ), intercaladas ao longo do intervalo de evolução livre em  $S_b - S_c$ . O número de intervenções e o período de duração de cada uma são parâmetros importantes que

especificam o controle. A forma geral para o vetor de estado do sistema global submetido à tal controle é dada por:

$$|\psi_N\rangle = \left( \hat{\mathbf{U}}_{ab}(\phi) \hat{\mathbf{U}}_{bc}(\theta) \right)^N |\psi(0)\rangle, \quad (6.5)$$

onde a evolução temporal de  $S_b - S_c$  foi dividida por  $N$  interações com o subsistema auxiliar. No apêndice B calculamos o vetor de estado  $|\psi_N\rangle$  para um estado inicial arbitrário. Consideremos aqui o estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |0_a\rangle |0_b, 1_c\rangle$  que sofre uma transição quântica quando submetido à evolução temporal  $\hat{\mathbf{U}}_{bc}(\frac{\pi}{2}) |\psi(0)\rangle = |0_a\rangle |1_b, 0_c\rangle$ . Para inibir esta transição quântica podemos intercalar interações unitárias com o subsistema auxiliar ao longo do tempo de evolução livre do sistema  $S_b - S_c$ .

Como discutido no apêndice B, tais operações unitárias podem ser mapeadas em  $R^3$ . Assim podemos representar a sequência de  $N$  interações com o subsistema auxiliar como:

$$\vec{r}_N = \left[ \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1\left(-\frac{\pi}{2N}\right) \right]^N \vec{r}(0) = \begin{bmatrix} ac(1 - \cos N\varphi) + b \operatorname{sen} N\varphi \\ bc(1 - \cos N\varphi) - a \operatorname{sen} N\varphi \\ (1 - c^2) \cos N\varphi + c^2 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

onde  $\phi \neq 2\pi$  e  $\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tomando o limite  $N \rightarrow \infty$  obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vec{r}_N = \vec{r}(0). \quad (6.7)$$

pois  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$  e  $c \rightarrow 1$ .

Para introduzir uma interpretação geométrica deste efeito consideremos um vetor  $\vec{r}$  no espaço euclidiano. Na dinâmica estudada, as rotações  $\mathbf{R}_1(-\theta)$  em torno do eixo  $Ox$  acontecem no sentido horário. Portanto quando  $\vec{r}$  possui componente  $y$  positiva, as rotações  $\mathbf{R}_1(-\theta)$  reduzem sua projeção em  $z$ , entretanto, quando  $\vec{r}$  possui componente  $y$  negativa  $\mathbf{R}_1(-\theta)$  farão o oposto, tendendo a compensar a redução anterior. As rotações  $\mathbf{R}_3(\phi)$  deslocam o vetor entre os subespaços onde a componente  $y$  é positiva e onde ela é negativa. Assim, quando analisamos a dinâmica de  $\vec{r}$  intercalada por rotações  $\mathbf{R}_3(\phi)$  observamos que a redução da componente  $z$ , provocado por  $\mathbf{R}_1(-\theta)$  quando  $y > 0$ , é compensado pelo aumento da mesma componente, através de  $\mathbf{R}_1(-\theta)$ , quando  $y < 0$ . Escolhendo o ângulo das rotações  $\mathbf{R}_3(\phi)$  e o número de intervenções  $N$  é possível conservar a componente  $z$  de  $\vec{r}$  ou ate mesmo paralisar o vetor  $\vec{r}$ .

Para o vetor de estado inicial  $|\psi(0)\rangle = |0_a\rangle |0_b, 1_c\rangle$  que corresponde ao vetor  $\vec{r}(0) = (0, 0, 1)$  a probabilidade de permanência no estado inicial é dada por

$$P_{001} = |(\vec{r}_N)^T \cdot \vec{r}(0)|^2. \quad (6.8)$$

A estrutura dos hamiltonianos ( $H_{bc}$  e  $H_{ab}$ ) permitem a manutenção do vetor de estado no subespaço  $\{|1_a, 0_b, 0_c\rangle, -i|0_a, 1_b, 0_c\rangle, |0_a, 0_b, 1_c\rangle\}$  e conseqüentemente a interpretação geométrica apresentada. Entretanto, o controle de estado quântico por interações com um subsistema auxiliar não é restrito à sistemas que respeitam tais condições.

Em termos gerais, podemos afirmar que tal efeito ocorre quando o acumulo de interações com o mesmo subsistema auxiliar provocam mudança de sinal e redução no módulo da taxa de transição quântica. Na Fig.2 observamos o comportamento da função  $\frac{dP_{001}}{dt}$  para o sistema  $S_a - S_b - S_c$ . A oscilação da taxa  $\frac{dP_{001}}{dt}$  provoca oscilação no comportamento de  $P_{001}$  (crescente-decrescente).

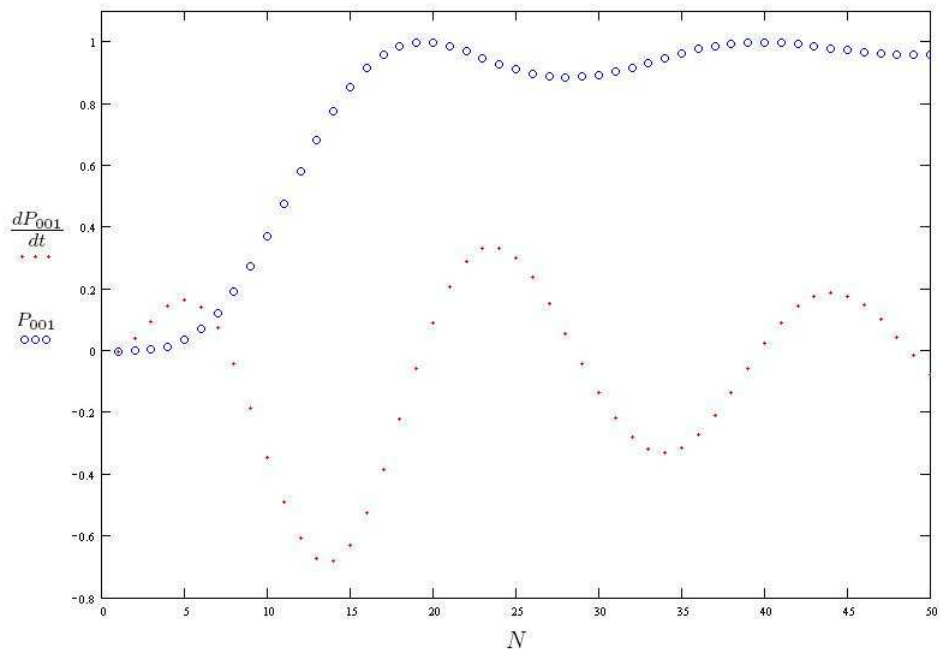


Figura 6.1: Probabilidade  $P_{001}(t)$  e taxa de transição quântica  $\frac{dP_{001}}{dt}(t)$  para valores de  $\phi = \frac{\pi}{10}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2N}$

Embora este efeito de retenção do estado inicial provocado pelo limite  $N \rightarrow \infty$  seja semelhante ao Efeito Zenão Quântico, não podemos identifica-lo como tal. No Efeito Zenão Quântico descrito em [37], o sistema de interesse interage com  $N$  subsistemas auxiliares (ponta de prova) e após cada interação a informação completa sobre a ocorrência da transição quântica torna-se disponível na ponta de prova. Este fato implica no cancelamento da taxa de transição quântica após cada interação[52, 53]. As interações com as pontas de prova são caracterizadas como medições (ou pré-medições). O efeito líquido

de  $N$  interações entre *um sistema auxiliar* e o subsistema de interesse não se caracteriza como processo de medição, conseqüentemente a taxa de transição quântica não é necessariamente nula ao fim de cada interação com o subsistema auxiliar (como pode ser observado na Fig.6.1).

Outra divergência entre os dois efeitos é o fato de que na dinâmica apresentada nesta seção as transições do tipo  $|1_a\rangle|0_b, 0_c\rangle \rightarrow |0_a\rangle|0_b, 1_c\rangle$  são intermediárias por  $S_b$ , *i.e.*, como apenas um subsistema auxiliar ( $S_a$ ) interage  $N$  vezes com o sistema de interesse, a excitação presente em  $S_a$  pode retornar ao subsistema  $S_c$  fazendo com que a probabilidade  $P_{001}$  seja maior do que a observada no Efeito Zenão Quântico. Tal comparação é mostrada na Fig.6.2.

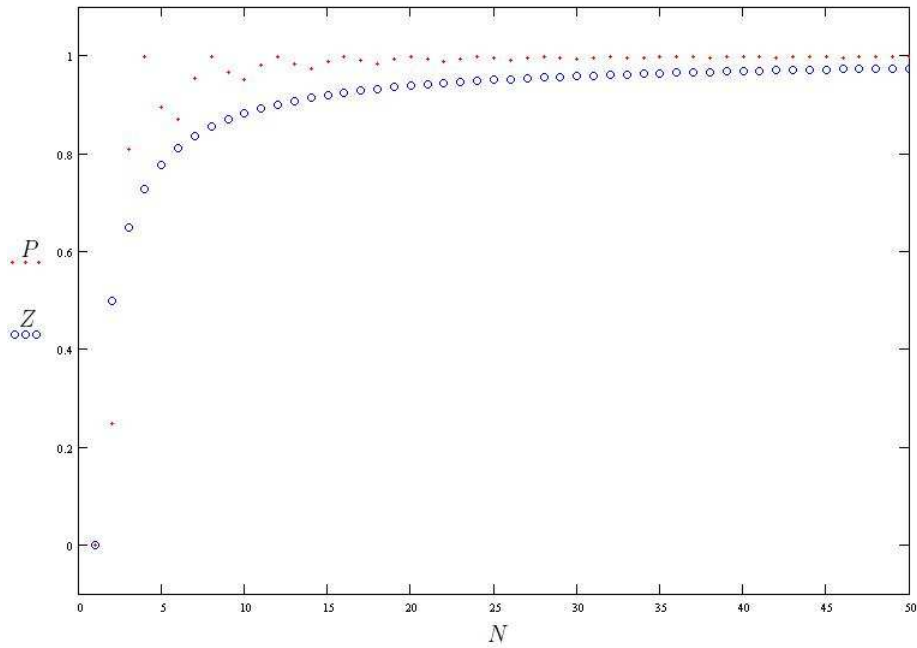


Figura 6.2:  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2N}$ ,  $Z(n) = \cos^N(\frac{\pi}{2N})$  efeito Zenão,  $P(n) = P_{001}$

## 6.2 Controle da dinâmica do emaranhamento

Consideremos o sistema composto por dois átomos separados espacialmente, sendo um deles isolado (átomo  $B$ ) e o outro (átomo  $A$ ) acoplado a um modo de campo eletromagnético ( $M_1$ ), como descrito em [60]. Se inicialmente existe emaranhamento entre o átomo  $B$  e o átomo  $A$  (ou  $M_1$ ) este varia ao longo do tempo, mesmo que os subsistemas emaranhados não estejam acoplados. A dinâmica do emaranhamento deve-se ao acoplamento

entre átomo  $A$  e  $M_1$ . Nesta seção propomos o controle desta dinâmica de emaranhamento através de interações sucessivas com um único subsistema auxiliar.

Na apresentação da dinâmica livre de controle consideremos o estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = |g_a\rangle (\alpha|1_1, g_b\rangle + \beta|0_1, e_b\rangle), \quad (6.9)$$

onde o modo  $M_1$  e o átomo  $B$  estão emaranhados. Os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  definem a intensidade do emaranhamento presente no sistema.

A dinâmica do emaranhamento ocorre devido ao acoplamento entre o átomo  $A$  e o modo  $M_1$ , que pode ser descrito pelo modelo Jaynes-Cummings (apresentado no capítulo 2). Após a evolução temporal o vetor de estado do sistema tem a forma

$$|\psi(t)\rangle = \alpha (\cos(gt)|g_a\rangle|1_1, g_b\rangle - i \sin(gt)|e_a\rangle|0_1, g_b\rangle) + \beta|0_1, e_b\rangle, \quad (6.10)$$

onde  $g$  é o coeficiente de acoplamento entre o átomo  $A$  e o modo  $M_1$ . Consideramos que a frequência relacionada à transição atômica dos átomos  $A$  e  $B$  é ressonante com a frequência do modo  $M_1$ . Notemos que em  $t = \frac{\pi}{2}$  ocorre a inversão de emaranhamento, o emaranhamento presente inicialmente no subsistema  $M_1$ -átomo  $B$  é completamente transferido para o subsistema átomo  $A$ -átomo  $B$ .

Para quantificar o emaranhamento e analisar sua evolução temporal escrevemos a concorrência, definida em [61], entre o modo  $M_1$  e o átomo  $B$

$$C_{M_1, B}(t) = 2|\alpha\beta \cos(gt)| \quad (6.11)$$

O cálculo completo da concorrência para dois sistemas de dois níveis é mostrado em [60]. A concorrência oscila ao longo do tempo assumindo valores nulos quando  $gt = \frac{k\pi}{2}$ , onde  $k$  é um número ímpar.

Podemos controlar a dinâmica do emaranhamento através de  $N$  interações com um subsistema auxiliar. Para isso consideremos que a cavidade que abriga o modo  $M_1$  seja capaz de abrigar dois modos ortogonais ( $M_1$  e  $M_2$ ). Uma realização empírica que utiliza cavidade de microondas capaz de abrigar dois modos ortogonais foi reportada em [29].

Os modos possuem frequências distintas ( $\omega_1 - \omega_2 = \delta$ ). A diferença entre os níveis de energia atômico pode ser controlada por efeito Stark. A dessintonia entre os modos é tal que permite ao átomo  $A$ , quando acoplado à  $M_1$  ( $M_2$ ), não interagir com  $M_2$  ( $M_1$ ). Portanto é possível controlar o tempo de acoplamento entre o átomo  $A$  e os modos  $M_1$  e  $M_2$ .

Uma sequência de interações entre átomo  $A$  e  $M_2$ , intercalada na evolução temporal representada em (6.9) e (6.10), será responsável pelo controle da dinâmica do emaranhamento entre átomo  $b$  e  $M_1$ . A evolução global do sistema será composta de  $N$  passos cada qual com duas etapas. Na primeira etapa o átomo  $A$  estará acoplado ao modo

$M_1$  (cada primeira etapa é uma fração da evolução apresentada em (6.9) e (6.10)) e na segunda etapa estará acoplado a  $M_2$  (a segunda etapa é a responsável pelo controle da dinâmica).

Na primeira etapa a evolução do sistema é governada pelo hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\omega_1 |e_a\rangle\langle e_a| + \hbar\omega_1 |e_b\rangle\langle e_b| + \hbar g(\sigma_a^+ a_1 + \sigma_a^- a_1^\dagger), \\ &= H'_1 + \hbar\omega_1 |e_b\rangle\langle e_b| \end{aligned} \quad (6.12)$$

e na segunda etapa pelo hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_2 &= \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 + \hbar\omega_2 |e_a\rangle\langle e_a| + \hbar\omega_1 |e_b\rangle\langle e_b| + \hbar g(i\sigma_a^+ a_2 - i\sigma_a^- a_2^\dagger), \\ &= H'_2 + \hbar\omega_1 |e_b\rangle\langle e_b| \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde  $\sigma_k^+ = |e_k\rangle\langle g_k|$ ,  $\sigma_k^- = |g_k\rangle\langle e_k|$  ( $k = a, b$ ).  $H'_1$  e  $H'_2$  atuam apenas no subsistema composto pelo átomo A, modo  $M_1$  e modo  $M_2$ . Notemos que o coeficiente de acoplamento na segunda etapa (em  $H_2$ ) é um imaginário puro, isso se deve à polarização ortogonal dos modos.

Os operadores unitários de evolução temporal para a primeira e segunda etapa são:

$$e^{-iH_{1(2)}t/\hbar} = e^{-iH'_{1(2)}t/\hbar} e^{-i\omega_1 |e_b\rangle\langle e_b| t}. \quad (6.14)$$

Escritos na base  $\{|0_1, g_a, 1_1\rangle, |0_1, e_a, 0_1\rangle, |1_1, g_a, 0_1\rangle\}$  os operadores  $e^{-iH'_1 t/\hbar}$  e  $e^{-iH'_2 t/\hbar}$  tem a forma:

$$e^{-iH'_1 t_1/\hbar} = e^{-i\omega_1 t_1} \begin{bmatrix} e^{i\delta t_1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(gt_1) & -i \operatorname{sen}(gt_1) \\ 0 & -i \operatorname{sen}(gt_1) & \cos(gt_1) \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$e^{-iH'_2 t_2/\hbar} = e^{-i\omega_2 t_2} \begin{bmatrix} \cos(gt_2) & -\operatorname{sen}(gt_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(gt_2) & \cos(gt_2) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta t_2} \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

A evolução temporal total é dada por:

$$|\psi_N\rangle = \left( e^{-iH'_2 t_2/\hbar} e^{-iH'_1 t_1/\hbar} \right)^N |\psi(0)\rangle, \quad (6.17)$$

o vetor de estado inicial completo do sistema é dado por

$$|\psi(0)\rangle = |g_a\rangle (\alpha |1_1, g_b\rangle + \beta |0_1, e_b\rangle) |0_2\rangle, \quad (6.18)$$

onde o modo  $M_2$  (subsistema auxiliar) foi preparado no vácuo.

Após  $N$  passos o tempo de interação entre o átomo  $A$  e o modo  $M_1$  é  $T = Nt_1$ . Suponhamos que  $T = Nt_1 = \frac{\pi}{2g}$  (como foi feito Fig.6.3), quando não há interferência do subsistema auxiliar na dinâmica a concorrência entre o modo  $M_1$  e o átomo  $B$  é nula, pois o emaranhamento é completamente transferido para o subsistema átomo  $A$ -átomo  $B$ . Entretanto, com a intervenção do subsistema auxiliar a dinâmica de emaranhamento é inibida, *i.e.* o aumento do número de interações intermediárias com o subsistema auxiliar permite a manutenção do valor inicial da concorrência, ainda que o tempo total de interação do sistema (átomo  $A$ , átomo  $B$  e modo  $M_1$ ) seja  $T = Nt_1 = \frac{\pi}{2g}$  (tempo em que ocorre a inversão de emaranhamento), como pode ser observado na simulação numérica apresentada em Fig.6.3.

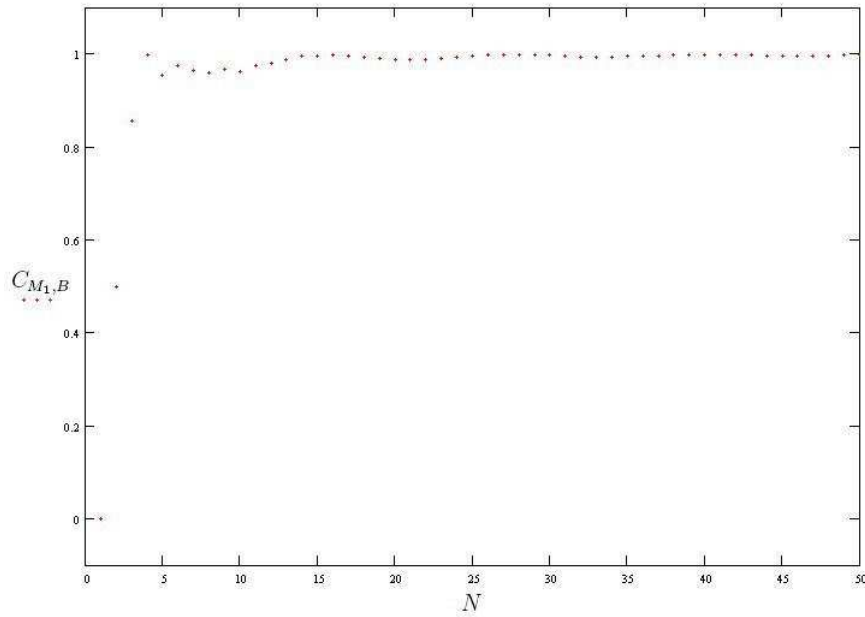


Figura 6.3:  $\delta = 8 \times 10^5$ ,  $g = 1.5 \times 10^4$   $gt_2 = \frac{\pi}{2}$ .

# Capítulo 7

## Conclusões

Os efeitos provocados pelo processo de medição em Mecânica Quântica interligam os trabalhos aqui apresentados. As interações entre os sistemas quânticos e os aparatos de medida são extremamente relevantes para a dinâmica do sistema e responsáveis por inusitados efeitos, como o efeito Zenão Quântico.

No capítulo 3 apresentamos um modelo dinâmico para o processo de detecção de níveis de energia atômicos por detectores de ionização. No contexto de eletrodinâmica de cavidades, calculamos o estado reduzido que representa o modo de campo, e analisamos a influência da geração de sinais clássicos, provocados pelos detectores, na dinâmica destes estados reduzidos.

A análise do processo de medição nos permite introduzir naturalmente realísticas dos detectores no estudo de experimentos em cavidades de microondas. Em trabalhos futuros, podemos aplicar este modelo na avaliação de possíveis implementações empíricas em eletrodinâmica quântica de cavidades, como o esquema de proteção de estados quânticos em cavidades apresentado em [62]. Neste trabalho os autores apresentam duas propostas. A primeira para controle em cavidades ópticas, onde o campo eletromagnético na cavidade é monitorado por um fotodetector, assim sempre que a cavidade perde um fóton o fotodetector inicia um processo de reposição através de um átomo (preparado adequadamente) que é injetado na cavidade. O segundo esquema apresentado tem como objetivo a proteção de estados quânticos em cavidades de microondas. Segundo os autores, não existem fotodetectores suficientemente eficientes para monitorar continuamente um campo eletromagnético com frequência de microondas. Assim, o número de fótons do modo de campo é indiretamente medido através da interação com um átomo de dois níveis que será analisado por detectores de ionização. Nesta montagem tais detectores estão ligados a uma fonte de átomos, que serão lançados para suprir as perdas de fótons na cavidade. Os autores apresentam uma descrição detalhada do esquema de proteção, e fazem considerações a respeito das conseqüências do uso de detectores ineficientes. Entretanto,

sabemos que a possibilidade de contagens erradas é um fator relevante na análise deste processo de medição. Portanto, acreditamos que fazendo uso de um modelo capaz de introduzir a possibilidade de contagens erradas (modelo descrito na seção 3.2), poderemos fazer previsões precisas sobre a eficácia deste esquema de proteção de estados quânticos.

Um segunda possível aplicação direta do modelo pode ser feita no esquema apresentado em [63] foi apresentada uma estratégia para a geração de uma porta C-NOT em uma montagem de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. Um estado de superposição par (ímpar) de estados coerentes criado na cavidade representa o qbit 0 (1). Uma montagem, semelhante a de [62], é proposta para garantir a escolha exata do qbit criado na cavidade. Acreditamos que os efeitos provocados pelas imperfeições dos detectores podem ser explicitados com o uso do modelo descrito na seção 3.

No Capítulo 4 apresentamos um proposta para observação do efeito Zenão Quântico em um sistema bipartite. O cenário físico para a implementação de tal proposta é o de cavidades de microondas. Nesta proposta o discrepante comportamento das evoluções temporais unitária e dissipativa diante de medições frequentes torna-se explícito. A evolução unitária é inibida, enquanto a evolução dissipativa não sofre alterações.

O capítulo 5 é dedicado à uma investigação sobre os fundamentos do efeito Zenão Quântico. O efeito sempre esteve relacionado de certa forma ao processo de medição, apresentamos neste capítulo um estudo sobre as conseqüências para o efeito Zenão Quântico de medições incompletas. Concluimos que o efeito prevalece e curiosamente torna-se ainda mais evidente em alguns para algumas medições incompletas.

O controle da evolução temporal em um sistema quântico é o tema do capítulo 6. Apresentamos um protocolo para o controle da dinâmica de um estado através de um único subsistema auxiliar. As diferenças entre tal protocolo e o efeito Zenão Quântico são discutidas. Duas propostas para a aplicação do protocolo são investigadas.

# Apêndice A

## Cálculo dos coeficientes $\langle a | \phi_\eta^e \rangle$

Para calcular os coeficientes presentes no integrando da equação (3.21), comecemos com a equação de autovalores para  $H_{2e}$ :

$$H_{2e}|\phi_\eta^e\rangle = [H_{e(0)} + H_{2e(I)} + H_{2e(II)}] |\phi_\eta^e\rangle = \epsilon_\eta^e |\phi_\eta^e\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde  $|\phi_\eta^e\rangle$  e  $\epsilon_\eta^e$  são, respectivamente, autovalores e autovetores do hamiltoniano  $H_{2e}$ ,  $H_{e(0)} = \epsilon_e |e\rangle\langle e| + \epsilon_g |g\rangle\langle g| + \int dk \epsilon_k |k\rangle\langle k|$ ,  $H_{2e(I)} = w_e \int dk (|e\rangle\langle k| + |k\rangle\langle e|)$  e  $H_{2e(II)} = w_g \int dk (|g\rangle\langle k| + |k\rangle\langle g|)$ .

Projetando a equação (A.1) em  $|k\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle k | H_{2e} | \phi_\eta^e \rangle &= \langle k | H_{e(0)} | \phi_\eta^e \rangle + \langle k | H_{2e(I)} | \phi_\eta^e \rangle + \langle k | H_{2e(II)} | \phi_\eta^e \rangle \\ &= \epsilon_k \langle k | \phi_\eta^e \rangle + w_e \langle e | \phi_\eta^e \rangle + w_g \langle g | \phi_\eta^e \rangle = \epsilon_\eta^e \langle k | \phi_\eta^e \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Fazendo o mesmo com os estados discretos  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle g | H_{2e} | \phi_\eta^e \rangle &= \langle g | H_{e(0)} | \phi_\eta^e \rangle + \langle g | H_{2e(I)} | \phi_\eta^e \rangle + \langle g | H_{2e(II)} | \phi_\eta^e \rangle \\ &= \epsilon_g \langle g | \phi_\eta^e \rangle + w_g \int dk \langle k | \phi_\eta^e \rangle = \epsilon_\eta^e \langle g | \phi_\eta^e \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.3a})$$

$$\begin{aligned} \langle e | H_{2e} | \phi_\eta^e \rangle &= \langle e | H_{e(0)} | \phi_\eta^e \rangle + \langle e | H_{2e(I)} | \phi_\eta^e \rangle + \langle e | H_{2e(II)} | \phi_\eta^e \rangle \\ &= \epsilon_e \langle e | \phi_\eta^e \rangle + w_e \int dk \langle k | \phi_\eta^e \rangle = \epsilon_\eta^e \langle e | \phi_\eta^e \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.3b})$$

Da normalização dos autovetores obtemos a expressão

$$|\langle g | \phi_\eta^e \rangle|^2 + |\langle e | \phi_\eta^e \rangle|^2 + \int dk |\langle k | \phi_\eta^e \rangle|^2 = 1. \quad (\text{A.4})$$

Definindo como energia fundamental  $\epsilon_g = 0$ , e usando as equações (A.3a) e (A.3b) podemos escrever

$$\langle e | \phi_\eta^e \rangle = \frac{\epsilon_\eta^e w_e}{w_g (\epsilon_\eta^e - \epsilon_e)} \langle g | \phi_\eta^e \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Através da equação (A.2), obtemos

$$\langle k | \phi_\eta^e \rangle = \frac{1}{\epsilon_\eta^e - \epsilon_k} \left( w_g + \frac{\epsilon_\eta^e w_e^2}{w_g(\epsilon_\eta^e - \epsilon_e)} \right) \langle g | \phi_\eta^e \rangle, \quad (\text{A.6})$$

e finalmente, fazendo uso da condição de normalização, obtemos

$$\langle g | \phi_\eta^e \rangle = \left\{ \frac{1}{1 + \left[ \frac{\epsilon_\eta^e w_e}{w_g(\epsilon_\eta^e - \epsilon_e)} \right]^2 + \left[ w_g + \frac{\epsilon_\eta^e w_e^2}{w_g(\epsilon_\eta^e - \epsilon_e)} \right]^2 \int dk \left( \frac{1}{\epsilon_\eta^e - \epsilon_k} \right)^2} \right\}^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Portanto, as equações (A.5), (A.6) e (A.7) nos fornecem formas explícitas para os coeficientes da equação (3.21).

# Apêndice B

## O cálculo de $|\psi_N\rangle$

Com o objetivo de calcular  $|\psi_N\rangle$  consideremos a ação das matrizes unitárias  $\hat{U}_{ab}(\phi)\hat{U}_{bc}(\theta)$  em um vetor  $|\xi\rangle$  escrito na base  $\{|1_a, 0_b, 0_c\rangle, -i|0_a, 1_b, 0_c\rangle, |0_a, 0_b, 1_c\rangle\}$ .

$$\hat{U}_{ab}(\phi)\hat{U}_{bc}(\theta)|\xi\rangle = \hat{U}_{ab}(\phi)\hat{U}_{bc}(\theta) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \cos \phi - (\xi_2 \cos \theta + \xi_3 \sin \theta) \cos \phi \\ \xi_1 \sin \phi + (\xi_2 \cos \theta + \xi_3 \sin \theta) \cos \phi \\ \xi_3 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Esta ação pode ser mapeada em uma rotação no espaço euclidiano real, escolhendo convenientemente as matrizes de rotação e exigindo que as componentes  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  de  $|\xi\rangle$  sejam reais.

Definindo as matrizes

$$\mathbf{R}_1(\varphi) \equiv \mathbf{R}(\hat{e}_1, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{R}_3(\varphi) \equiv \mathbf{R}(\hat{e}_3, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

e o vetor

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

podemos notar que ação das matrizes  $\mathbf{R}_1(-\theta)$  e  $\mathbf{R}_3(\phi)$ , nesta ordem, sobre  $\vec{r}$  produz o mesmo efeito sobre suas componentes que a ação das matrizes unitárias  $\hat{U}_{bc}(\theta)$  e  $\hat{U}_{ab}(\phi)$

sobre as componentes do vetor  $|\xi\rangle$ , *i.e.*,

$$\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta) \vec{r} = \begin{bmatrix} \xi_1 \cos \phi - (\xi_2 \cos \theta + \xi_3 \sin \theta) \sin \phi \\ \xi_1 \sin \phi + (\xi_2 \cos \theta + \xi_3 \sin \theta) \cos \phi \\ \xi_3 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

A matriz ortogonal  $\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta) = \mathbf{R}(\hat{n}, \varphi) = \exp(\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}), \quad (\text{B.6})$$

onde  $\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}$  é o gerador de rotações em torno do eixo definido pelo vetor unitário  $\hat{n} = a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3$ ,  $\varphi$  é o ângulo de rotação em torno de  $\hat{n}$ ,  $\vec{\mathbf{J}} = \hat{e}_1 \mathbf{J}_1 + \hat{e}_2 \mathbf{J}_2 + \hat{e}_3 \mathbf{J}_3$ , sendo  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_2$  e  $\mathbf{J}_3$  os geradores de rotações em torno dos eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente. Estas matrizes são [64]

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Para calcular a ação de  $(\hat{\mathbf{U}}_{ab}(\phi) \hat{\mathbf{U}}_{bc}(\theta))^N$  sobre o vetor de estado  $|\psi_0\rangle$ , faremos uso do mapeamento do operador  $\hat{\mathbf{U}}_{ab}(\phi) \hat{\mathbf{U}}_{bc}(\theta)$  na matriz ortogonal  $\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta)$  e da identidade:

$$[\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta)]^N = \left[ \exp(\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}) \right]^N = \exp(N \varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}). \quad (\text{B.8})$$

Determinando o eixo ( $\hat{n}$ ) e o ângulo ( $\varphi$ ) encontraremos a matriz  $[\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta)]^N$ .

## B.1 Determinando o ângulo e o eixo de rotação

Explicitamente,

$$\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} = \varphi \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Após alguma álgebra, obtemos,

$$\left( \varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right)^{2n} = \varphi^{2n} (-1)^{n+1} \left( \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right)^2, \quad \left( \varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right)^{2n+1} = \varphi^{2n+1} (-1)^n \left( \varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right), \quad (\text{B.9})$$

o que nos permite escrever

$$\exp(\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}) = \mathbf{1} + (1 - \cos \varphi) \left( \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right)^2 + \sin \varphi \left( \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}} \right). \quad (\text{B.10})$$

Com um pouco mais de álgebra, obtemos a seguinte expressão para  $(\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}})^2$ :

$$(\hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}})^2 = \begin{bmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & bc \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Reunimos estes resultados na expressão

$$\exp(\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}) = \begin{bmatrix} (1 - a^2) \cos \varphi + a^2 & ab(1 - \cos \varphi) - c \sin \varphi & ac(1 - \cos \varphi) + b \sin \varphi \\ ab(1 - \cos \varphi) + c \sin \varphi & (1 - b^2) \cos \varphi + b^2 & bc(1 - \cos \varphi) - a \sin \varphi \\ ac(1 - \cos \varphi) - b \sin \varphi & bc(1 - \cos \varphi) + a \sin \varphi & (1 - c^2) \cos \varphi + c^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Comparando (B.11) com o produto

$$\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

obtemos as seguintes expressões para  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  e as componentes de  $\hat{n}$ :

$$\sin \varphi = 2 \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (\text{B.13a})$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \phi + \cos \theta + \cos \phi \cos \theta - 1}{2} \quad (\text{B.13b})$$

$$a = -\frac{\sin \theta (\cos \phi + 1)}{4 \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \quad (\text{B.14a})$$

$$b = -\frac{\sin \phi \sin \theta}{4 \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \quad (\text{B.14b})$$

$$c = \frac{\sin \phi (\cos \theta + 1)}{4 \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \quad (\text{B.14c})$$

Este resultado permite o cálculo de  $[\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta)]^N$ . De fato, temos,

$$[\mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_1(-\theta)]^N = \left[ \exp(\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}) \right]^N = \exp(N\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}}). \quad (\text{B.15})$$

A exponencial  $\exp(N\varphi \hat{n} \cdot \vec{\mathbf{J}})$  terá a forma da matriz na Eq. (B.11), exceto pela substituição de  $\varphi$  por  $N\varphi$ . As componentes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , assim como  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$  são dados pelas equações (B.13) e (B.14).

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Hermann, *The Genesis of Quantum Theory*. Cambridge: MIT Press, 1971.
- [2] B. C. V. Fraassen, *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press, 1980.
- [3] E. Schrödinger *Naturwissenschaften*, vol. 23, p. 844, 1935.
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen *Phys. Rev.*, vol. 47, p. 777, 1935.
- [5] N. Bohr and et. al., *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. Cambridge: Cambridge University Press, 1949.
- [6] N. Bohr *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici Como*, vol. 2, p. 565, 1927.
- [7] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [8] R. Omnès, *The Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [9] F. J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variables Theories*. Oxford: Pergamon Press, 1973.
- [10] D. Bohm *Phys. Rev.*, vol. 85, p. 166, 1952.
- [11] I. Hugh Everett *Reviews of Modern Physics*, vol. 29, p. 454, 1957.
- [12] L. E. Ballentine *Rev. Mod. Phys.*, vol. 42, p. 358, 1970.
- [13] P. Mittelstaedt, *The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [14] W. Heisenberg, *Física e filosofia*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1987.
- [15] N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*. New York: Wiley, 1963.

- [16] N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*. New York: Wiley, 1963.
- [17] N. Bohr *Dialectica*, vol. 34, p. 312, 1948.
- [18] J. von Neumann, *Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer Verlag, 1932.
- [19] W. H. Zurek *Phys. Rev. D*, vol. 26, p. 1862, 1982.
- [20] B. M. Garraway and P. L. Knight *Phys. Rev. A*, vol. 50, p. 2548, 1994.
- [21] D. Home, *Conceptual Foundations of Quantum Physics*. New York: Plenum Press, 1997.
- [22] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche *Nature*, vol. 400, p. 239, 1999.
- [23] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, p. 4887, 1996.
- [24] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. D. and U. B. Hoff, M. Brune, J. Raimond, and S. Haroche *Nature*, vol. 446, p. 297, 2007.
- [25] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, p. 5193, 1992.
- [26] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [27] J. Frenkel, *Quantum Statistical Properties of Radiation*. New York: Wiley, 1973.
- [28] A. R. B. de Magalhães and M. C. Nemes *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 053825, 2004.
- [29] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 050301, 2001.
- [30] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. New York: Wiley, 1992.
- [31] R. Rossi, M. C. Nemes, and J. G. P. de Faria *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 063819, 2007.
- [32] H. Briegel, B. Englert, N. Sterpi, and H. Walther *Physical Review A*, vol. 49, p. 2962, 1994.

- [33] X. Maître, E. Hagley, G. Nogues, C. Wunderlich, P. Goy, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 769, 1997.
- [34] B. Misra and E. G. Sudarshan *J. Math. Phys.*, vol. 18, p. 765, 1977.
- [35] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland *Physical Review A*, vol. 41, p. 2295, 1990.
- [36] L. E. Ballentine *Physical Review A*, vol. 43, p. 5165, 1991.
- [37] S. Pascazio and M. Namiki *Physical Review A*, vol. 50, p. 50, 1994.
- [38] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland *Physical Review A*, vol. 43, p. 5168, 1991.
- [39] P. Facchi and S. Pascazio *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 080401, 2002.
- [40] J. D. Franson, B. C. Jacobs, and T. B. Pittman *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 062302, 2004.
- [41] P. Facchi, S. Tasaki, S. Pascazio, H. Nakazato, A. Tokuse, and D. A. Lidar *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 022302, 2005.
- [42] K. Koshino *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 034104, 2005.
- [43] J. Ruseckas and B. Kaulakys *Phys. Rev. A*, vol. 69, p. 032104, 2004.
- [44] J. Ruseckas *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 012105, 2002.
- [45] B. Kaulakys and V. Gontis *Phys. Rev. A*, vol. 56, p. 1131, 1997.
- [46] M.C.Fischer, B.Gutierrez-Medina, and M.G.Raizen *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 040402, 2001.
- [47] R. Rossi, A. R. de Magalhães, and M. C. Nemes *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 012107, 2008.
- [48] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 1964, 1997.
- [49] J. G. P. de Faria, *Aspectos do Entrelaçamento em Sistemas Quânticos Abertos*. PhD thesis, UFMG, 2001.
- [50] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, M. B. S. Osnaghi, J. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin *Applied Physics Letters*, vol. 90, p. 164101, 2007.

- [51] R. Rossi, A. R. de Magalhães, and M. C. Nemes *Phys. Rev. A*, vol. 78, p. 042111, 2008.
- [52] A. F. R. de Toledo Piza and M. C. Nemes *Physics Letters A*, vol. 290, p. 6, 2001.
- [53] A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica*. São Paulo: EDUSP, 2003.
- [54] Y. P. Huang and M. G. Moore *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 062332, 2008.
- [55] S. Maniscalco, F. Francica, R. L. Zaffino, N. L. Gullo, and F. Plastina *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 090503, 2008.
- [56] D. Dhar, L. K. Grover, and S. M. Roy *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 100405, 2006.
- [57] A. Beige, D. Braun, B. Tregenna, and P. L. Knight *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 1762, 2000.
- [58] L. Viola and S. Lloyd *Phys. Rev. A*, vol. 58, p. 2733, 1998.
- [59] D. Rossini, P. Facchi, R. Fazio, G. Florio, D. A. Lidar, S. Pascazio, F. Plastina, and P. Zanardi *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 052112, 2008.
- [60] Z.-J. Li, J.-Q. Li, Y.-H. Jin, and Y.-H. Nie *J. Phys. B*, vol. 40, p. 3401, 2007.
- [61] S. Hill and W. K. Wootters *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, p. 5022, 1997.
- [62] D. Vitali, P. Tombesi, and G. J. Milburn *Phys. Rev. A*, vol. 57, p. 4930, 1998.
- [63] M. C. de Oliveira and W. J. Munro *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 042309, 2000.
- [64] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley et Sons, 1998.