

Gustavo Henrique Oliveira Salgado

Métodos Numéricos Para Solução de Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo

Brasil

16 de dezembro de 2015

Gustavo Henrique Oliveira Salgado

Métodos Numéricos Para Solução de Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós - Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

Orientador: Luis Antonio Aguirre

Coorientador: Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes

Brasil

16 de dezembro de 2015

Salgado, Gustavo Henrique Oliveira

Métodos Numéricos Para Solução de Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo/ Gustavo Henrique Oliveira Salgado. – Brasil, 16 de dezembro de 2015-
183 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Luis Antonio Aguirre

Coorientador: Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE.

1. Cálculo de Ordem Não Inteira. 2. Derivada de Caputo. 3. Métodos Numéricos.
4. Estabilidade de Pontos Fixos I. Aguirre, Luis Antonio II. Mendes, Eduardo Mazoni
Andrade Marçal III. Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia IV.
Título.

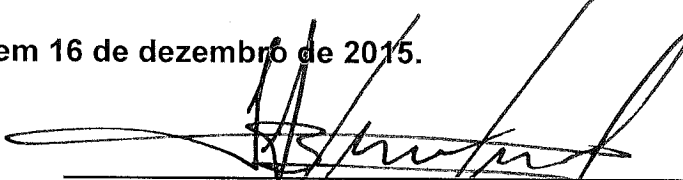
"Métodos Numéricos Para Solução de Equações Diferenciais Segundo A Derivada de Caputo"

Gustavo Henrique Oliveira Salgado

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 16 de dezembro de 2015.

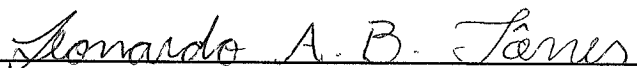
Por:



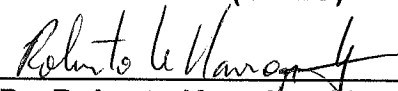
Prof. Dr. Luis Antonio Aguirre
DELT (UFMG) - Orientador



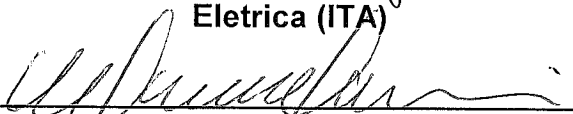
Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes
DELT (UFMG) - Coorientador



Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão
Elétrica (ITA)



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Elétrica (UNESP-IS)



Prof. Dr. Eduardo Nunes Gonçalves
Elétrica (CEFET-MG)

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος,
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὸν Θεόν,
καὶ ὁ λόγος ἦν Θεός.
(Κατὰ Ἰωάννην, α')

Dedico esta tese aos meus pais e à minha amada esposa.

Agradecimentos

Aos meus pais, pela oportunidade da vida e pela educação que me proporcionaram (tanto formal, quanto moral);

À Reny, companheira em todos os momentos nesses últimos anos, proporcionando que a vida seja mais bela e agradável para ser vivida;

A todos os meus familiares que, mesmo à distância, sempre estiveram na torcida emitindo energias positivas;

Aos amigos de sempre: Alan de Paula, Geraldo, Marcelo e Tiago, mostrando que amizades sinceras são eternas;

Aos amigos de graduação/trabalho: Allan Fonseca, João Paulo e Renato (*in memoriam*), pela companhia e alegria do dia a dia;

Ao professor Leonardo Tôrres, pelas ótimas conversas e conselhos;

Ao professor Eduardo Mendes, pela generosidade, disposição e atenção que me foi dada;

Ao professor Luis Aguirre, por ter me acolhido nessa caminhada e ensinando de maneiras variadas, das mais óbvias às mais sutis, como ser um profissional e uma pessoa melhor;

Àqueles que de alguma forma contribuíram nessa caminhada, mas, devido à turva neblina na caixa das memórias, não foram listados de maneira explícita e sintam a falta de lerem seus nomes (mesmo que lendo apenas a lista de agradecimentos).

Muito Obrigado!

*“...Eis meu pobre elefante
pronto para sair
à procura de amigos
num mundo enfastiado
que já não crê nos bichos
e duvida das coisas...”*

(trecho de O Elefante, Carlos Drummond de Andrade)

Resumo

Esta tese se refere ao tema de cálculo de ordem não inteira, e está focada no estudo de métodos numéricos para solução de equações diferenciais e análises de sistemas dinâmicos, segundo a definição do operador derivada de Caputo.

Neste trabalho, é realizada uma breve contextualização histórica sobre o tema, apresentando, em um âmbito geral, desde as primeiras discussões até a década de 1970. Devido ao grande número de trabalhos publicados a partir dessa época, optou-se por realizar uma contextualização voltada para as áreas de métodos numéricos e sistemas dinâmicos entre a década de 1970 e os dias atuais.

É realizada uma exposição introdutória e de caráter analítico para as derivadas de Riemann-Liouville (utilizada na definição de Caputo), de Caputo e de Günwald-Letnikov (utilizada na obtenção de métodos numéricos). Também é realizada uma exposição a respeito da existência e unicidade de equações diferenciais segundo as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo.

Como resultados desta tese são apresentados: i) um contra exemplo para o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais segundo a derivada de Riemann-Liouville encontrada na literatura, e é proposta uma reformulação desse teorema; ii) o método híbrido para solução de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo; iii) o método com memória hereditária concentrada na condição inicial (MHCCI), também utilizado em equações diferenciais segundo a derivada de Caputo, mas no caso do sistema não depender explicitamente do tempo. É realizada uma análise preliminar sobre a estabilidade de pontos fixos em sistemas de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo, utilizando o método MHCCI. Os resultados sugerem uma generalização do método indireto de Lyapunov.

Palavras-chave: Cálculo de ordem não inteira. Cálculo fracionário. Derivada de Riemann-Liouville. Derivada de Caputo. Métodos numéricos. Estabilidade de pontos fixos.

Abstract

This thesis deals with the subject of non-integer order calculus mainly numerical methods for solving differential equations and dynamic systems analysis, according to the definition of the Caputo derivative.

In this work, a brief historical review on the subject will be given in a general covering the period from the first discussion up to the 1970s. Due to the large number of papers published from the 1970s, it was decided to concentrate in a review for the areas of numerical methods and dynamic systems from the 1970s until the present day.

As a theoretical framework, an analytical introductory background of a Riemann-Liouville (used in the definition of Caputo), Caputo and Günwald-Letnikov (used to obtain numerical methods) derivatives will be given. As well as a review on the existence and uniqueness of differential equations for Riemann-Liouville and Caputo derivatives.

The main results of this thesis are: i) a counter example to the theorem of existence and uniqueness for differential equations derived according to the Riemann-Liouville found in the literature, and will propose a reformulation of the theorem; ii) a hybrid method for solving Caputo's differential equations; iii) method with concentrated hereditary memory in the initial condition (MHCCI), also used in Caputo's differential equations, but only in the cases in which the system does not explicitly depend on time. A preliminary analysis of the stability of fixed points for Caputo's differential equations will be shown using the MHCCI method. The results suggest a generalization of the indirect method of Lyapunov.

Keywords: Non-integer calculus. Fractional calculus. Riemann-Liouville derivative. Caputo derivative. Numerical methods. Stability of fixed points.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Região de integração das variáveis τ e ξ	44
Figura 2.2 – Gráfico da função $\Gamma(\alpha)$ para $\alpha \in (-5, 5]$	46
Figura 2.3 – Eixo de Derivação e Integração	53
Figura 2.4 – Interpretação da derivada de Riemann-Liouville	53
Figura 3.1 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)$ com (---) $\alpha = 0,25$, (-- --) $\alpha = 0,50$, (---) $\alpha = 0,75$ e (—) $\alpha = 1,00$	81
Figura 3.2 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)$ com (—) $\alpha = 1,00$, (---) $\alpha = 1,25$, (-- --) $\alpha = 1,50$ e (---) $\alpha = 1,75$	82
Figura 3.3 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ com (---) $\alpha = 0,25$, (-- --) $\alpha = 0,50$, (---) $\alpha = 0,75$ e (—) $\alpha = 1,00$	87
Figura 3.4 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ com (—) $\alpha = 1,00$, (---) $\alpha = 1,25$, (-- --) $\alpha = 1,50$ e (---) $\alpha = 1,75$	87
Figura 4.1 – Solução (—) numérica, utilizando a Equação 4.8 a partir da condição inicial y_0 , e (- · -) analítica para o PVINI 4.6 com $\alpha = 0,5$ $y_0 = 1,0$ e $h = 0,005$. Em (a) é exibido o intervalo $[0,0, 0,5]$ e em (b) uma ampliação em torno da condição inicial, onde ocorre o erro máximo.	113
Figura 4.2 – Solução (—) numérica, utilizando a Equação 4.8 a partir de um conjunto inicial de soluções analíticas, e (- · -) analítica para o PVINI 4.6 com $\alpha = 0,5$ $y_0 = 1,0$ e $h = 0,005$. Em (a) é exibido o intervalo $[0,0, 0,5]$ e em (b) uma ampliação das soluções onde o erro máximo ocorre.	113
Figura 4.3 – Solução (- · -) analítica para o PVINI 4.6 e (—) gráfico obtido das iteradas da Equação 4.8. Em ambos os casos foi utilizado $F(t, y) = -y$, $\alpha = 1,5$, $y_0 = 1,0$, $y_0^{(1)} = 0$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$	114
Figura 4.4 – Tempo de processamento em segundos, t_p , para o método dado pela Equação 3.66 para resolver o PVINI 4.11 no intervalo $[0, t_f]$ com $h =$ 0.005	121
Figura 4.5 – Solução numérica de (4.13) com $\alpha = 0,995$, $a = 0,2$, $b = 0,4$, $c = 5,7$ e condição inicial $\vec{y}_0 = (-0,4218, 0,4458, -0,4583)$	122
Figura 4.6 – Seção de Poincaré utilizada para a construção do diagrama de bifurcação do sistema de Rössler. (a) vista em perspectiva. (b) projeção sobre o plano (y_1, y_2)	123
Figura 4.7 – Diagramas de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. Soluções numéricas foram obtidas utilizando (a) Equação 3.66 e (b) método híbrido com $h = 0,01$ em ambos os casos.	124

Figura 4.8 – Diagramas de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. Soluções numéricas foram obtidas utilizando o método híbrido com (a) $h = 0,005$ e (b) implementado com princípio de <i>short memory</i> com $h = 0,002$	124
Figura 4.9 – Solução numérica de (4.16) com $\alpha = 0,99$, $a = 9,5$, $b = 14$ e condição inicial $\vec{y}_0 = (0,1, 0,1, 0,1)$	125
Figura 4.10 – Projeção sobre o plano (y_1, y_2) da seção de Poincaré utilizada para a construção do diagrama de bifurcação do sistema de Chua.	126
Figura 4.11 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. As soluções numéricas foram obtidas utilizando a Equação 3.66 com $h = 0,01$	127
Figura 4.12 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. As soluções numéricas foram obtidas utilizando o método híbrido com $h = 0,01$	127
Figura 4.13 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. As soluções numéricas foram obtidas utilizando a Equação 3.66 com $h = 0,1$	128
Figura 4.14 – Comparação entre a solução (—) numérica e (- - -) analítica para ${}^CD_0^\alpha y = y - 1$ com $\alpha = 0,5$, $y_0 = 1,0$, $h = 0,01$ e $t \in [0, 10]$	129
Figura 5.1 – Comparação entre a solução (—) numérica e (- - -) analítica para ${}^CD_0^\alpha y = \lambda y$ com $\alpha = 0,5$, $y_0 = 1,0$, $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$ e (a) $t \in [0, 5]$	136
Figura 5.2 – Comparação entre a solução (—) numérica e (- - -) analítica para ${}^CD_0^\alpha y = \lambda y$ com $\alpha = 1,5$, $y_0 = 1,0$, $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$ e (a) $t \in [0, 5]$. Em (b) está apresentado apenas o intervalo $t \in [4,75, 5,00]$ destacando a diferença entre as soluções.	136
Figura 5.3 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas usando a Equação 5.12 e analíticas do PVINI 5.14 para $\lambda = 1$ e (a) $\alpha \in [0,3, 1,8]$. Em (b) é destacado a janela $[1,5, 1,8]$. O incremento utilizado para α foi de $0,001$	137
Figura 5.4 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas, usando a Equação 5.12, e analíticas do PVINI 5.14 em função de α para $\lambda = 1$, (a) $h = 0,005$ e (b) $h = 0,001$	138
Figura 5.5 – Soluções (—) numéricas e (- - -) analíticas para ${}^CD_0^\alpha y = \lambda y$ com $y_0 = 1,0$, $\lambda = -1,0$, $h = 0,01$ e $\alpha = 0,5$. (a) As soluções no intervalo $[0, 5]$ são indistinguíveis visualmente e (b) o erro pode ser observado para as soluções no intervalo $[0,00, 0,04]$, onde ocorre o erro máximo, e (●) representa a solução numérica obtida.	138

Figura 5.6 – Soluções (—) numéricas e (- · -) analíticas para ${}^C D_0^\alpha y = \lambda y$ com $y_0 = 1,0$, $\lambda = -1,0$, $h = 0,01$ e $\alpha = 1,5$. (a) As soluções no intervalo $[0, 5]$ são indistinguíveis visualmente e (b) o erro pode ser observado para as soluções no intervalo $[1,44, 1,50]$, onde ocorre o erro máximo, e (●) representa a solução numérica obtida.	139
Figura 5.7 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas, usando a Equação 5.12, e analíticas do PVINI 5.14 em função de α para $\lambda = -1$ e $h = 0,01$. Foi considerado um incremento em α de 0,001 para gerar essa figura.	140
Figura 5.8 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas, usando a Equação 5.12, e analíticas do PVINI 5.14 em função de α para $\lambda = -1$, (a) $h = 0,005$ e (b) $h = 0,001$	140
Figura 5.9 – (●) Soluções numéricas utilizando a Equação 5.12 e (- · -) analíticas do PVINI 5.14 para (a) $h = 10^{-3}$ e $t \in [0, 0,02]$, e para (b) $h = 2,5 \times 10^{-5}$ e $t \in [0, 0,0005]$	141
Figura 5.10 – (●) Soluções numéricas utilizando a Equação 3.66 e (- · -) analíticas do PVINI 5.14 para (a) $h = 10^{-3}$ e $t \in [0, 0,02]$, e para (b) $h = 2,5 \times 10^{-5}$ e $t \in [0, 0,0005]$	141
Figura 5.11 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira (4.13) utilizando a discretização dada pela Equação 5.15. Nesse caso, foi considerado a ordem de derivação como parâmetro de bifurcação para $\alpha \in [0,970, 1,005]$ e variação do parâmetro $\Delta\alpha = 0,0001$	142
Figura 5.12 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira (4.16) utilizando a discretização dada pela Equação 5.15. Nesse caso, foi considerado a ordem de derivação como parâmetro de bifurcação para $\alpha \in [0,96, 1,02]$ e variação do parâmetro $\Delta\alpha = 0,0001$	143
Figura 6.1 – Órbita atratora para o sistema de van der Pol de ordem não inteira para $\alpha = 0,9$ e condição inicial $(0,1, 0,1)$	152
Figura 6.2 – Diagrama de bifurcação para o sistema de van der Pol de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,2]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,667$	153
Figura 6.3 – Órbita atratora para o sistema (6.8) de ordem não inteira para $\alpha = 0,9$ (a) a partir da condição inicial $(0,40, 1,64)$ e (b) com o transiente removido.	154
Figura 6.4 – Diagrama de bifurcação para o sistema (6.8) segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,2]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,689$	154

- Figura 6.5 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,0]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,9401$. . . 156
- Figura 6.6 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,0]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,953$. . . 157
- Figura 6.7 – Diagrama representativo para os valores de (λ, α) em que as iteradas $|A^i \vec{v}|$ convergem para zero no caso em que $h = 0,001$ e $|\lambda| = 1$. A região em negrito acima da semi-reta $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2$ e abaixo de $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2$ representa os valores (λ, α) em que há convergência. O incremento em λ foi de 0,01 e em α de 0,001. 162
- Figura 6.8 – Diagrama representativo para os valores de (λ, α) em que as iteradas $|A^i \vec{v}|$ convergem para zero nos casos: (a) $h = 0,01$ com incremento em λ de 0,01 e (b) $h = 0,1$ com incremento em λ de 0,02. Em ambos os casos considerou-se $|\lambda| = 1$ e incremento em α de 0,01. 163
- Figura 6.9 – Diagrama representativo para os valores de (λ, α) em que as iteradas $|A^i \vec{v}|$ convergem para zero nos casos: (a) $h = 0,01$ e (b) $h = 0,05$, ambos com $|\lambda| = 2$. O incremento em λ foi de 0,02 e em α de 0,01. 163

Lista de tabelas

Tabela 4.1 – Erro absoluto máximo e médio entre as soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 para $t \in [0, 0,5]$, $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $h = 0,005$ e a partir da condição inicial $y_0 = 1$	112
Tabela 4.2 – Erro absoluto máximo e médio entre as soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 para $t \in [0, 0,5]$, $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $h = 0,005$ e a partir de um conjunto de soluções analíticas correspondente a 10% dos pontos do intervalo discretizado.	112
Tabela 4.3 – Erro absoluto máximo e médio entre as soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 para $t \in [0, 0,5]$, $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $h = 0,005$ e a partir de um conjunto de soluções analíticas correspondente a 10% dos pontos do intervalo discretizado.	114
Tabela 4.4 – Relação entre o valor $ c_m^\alpha y_0 $ e o erro obtido na iteração $m+1$ da solução analítica do PVINI 4.6, para $\lambda = -1$, com a solução numérica utilizando Equação 4.8 a partir do conjunto $\{y_0, \dots, y_m\}$	115
Tabela 4.5 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	119
Tabela 4.6 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	119
Tabela 4.7 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	119
Tabela 4.8 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	119

Tabela 4.9 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,001$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	120
Tabela 4.10–Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,001$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	120
Tabela 4.11–Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,001$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	120
Tabela 4.12–Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,001$ e $t \in [0, 5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.	120
Tabela 5.1 – Erro numérico entre a solução obtida utilizando (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$, $t \in [0, 5]$ e $\alpha \in [0,3, 1,0]$	137
Tabela 5.2 – Erro numérico entre a solução obtida utilizando (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$, $t \in [0, 5]$ e $\alpha \in [1,1, 1,8]$	137
Tabela 5.3 – Erro numérico entre a solução obtida utilizando (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = -1,0$, $h = 0,001$, $t \in [0, 5]$ e $\alpha \in [0,3, 1,0]$	139
Tabela 5.4 – Erro numérico entre a solução obtida via a discretização (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = -1,0$, $h = 0,01$, $t \in [0, 10]$ e $\alpha \in [1,1, 1,8]$	139
Tabela A.1–Referências utilizadas em cada um dos teoremas, proposições, corolários e lemas apresentados na Parte II - Referenciais Teóricos - Capítulo 2.	181
Tabela A.2–Referências utilizadas em cada um dos teoremas, proposições, corolários e lemas apresentados na Parte II - Referenciais Teóricos - Capítulo 3.	182

Lista de abreviaturas e siglas

EDONI	Equação diferencial de ordem não inteira
PVINI	Problema de valor inicial de ordem não inteira
<i>q.t.p.</i>	quase todo ponto
MHCCI	método memória hereditária concentrada na condição inicial

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não nulos
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos números inteiros não positivos
$\mathbb{Z}_-^*$	Conjunto dos números inteiros negativos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\Gamma(\cdot)$	Função Gama de Eüler
I_a^α	Operador Integral de Riemann-Liouville de ordem α
$C^n[a, b]$	Espaço das funções com n derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$
$L_1[a, b]$	Espaço das funções módulo integráveis no intervalo $[a, b]$
${}^{RL}D_a^\alpha$	Operador Derivada de Riemann-Liouville de ordem α
$\lceil \cdot \rceil$	Função menor inteiro maior ou igual a
$\lfloor \cdot \rfloor$	Função maior inteiro menor ou igual a
${}^CD_a^\alpha$	Operador Derivada de Caputo de ordem α
${}^{GL}D_a^\alpha$	Operador Derivada de Grünwald-Letnikov de ordem α
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana em espaços $\mathbb{R}^n$
$\ \cdot \ _\infty$	Norma do máximo
$\binom{\alpha}{k}$	Coefficiente binomial generalizado
$E_{\alpha, \beta}(\cdot)$	Função de Mittag-Leffler a dois parâmetros
j	O número complexo tal que $j^2 = -1$
$\Re(\cdot)$	Parte real de um número complexo
$\arg(\cdot)$	Argumento de um número complexo em relação ao eixo real

Sumário

Introdução	29
I DO INÍCIO AO ESTADO ATUAL	33
1 BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA . .	35
1.1 Dos primeiros passos ao início da década de 1970	35
1.2 Métodos numéricos	37
1.3 Aplicações em sistemas dinâmicos	39
II REFERENCIAIS TEÓRICOS	41
2 CONCEITOS BÁSICOS	43
2.1 A Integral Iterada de Cauchy	43
2.2 O Operador Integral de Riemann-Liouville	47
2.3 O Operador Derivada de Riemann-Liouville	52
2.4 O Operador Derivada de Caputo	60
2.5 O Operador Derivada de Grünwald-Letnikov	68
3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM NÃO INTEIRA	71
3.1 Funções de Mittag-Leffler	71
3.2 Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Riemann-Liouville	73
3.3 Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo	82
3.4 A Transformada de Laplace como Método para Solução de Equações Diferenciais Lineares Segundo a Derivada de Caputo	87
3.5 Sistemas de Equações Diferenciais de Ordem não Inteira Segundo a Derivada de Caputo	90
3.6 Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais	97
3.6.1 Soluções Numéricas Baseadas no Operador de Grünwald-Letnikov	97
3.6.2 Soluções Numéricas Baseadas em Representações Integrais	102

III	RESULTADOS	107
4	UM MÉTODO HÍBRIDO PARA SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE PVINIS SEGUNDO CAPUTO	109
4.1	Relação entre os PVINIs de Caputo e de Riemann-Liouville	109
4.2	Conjunto de Condições Iniciais Obtidas Analiticamente	111
4.3	Método Híbrido	116
4.4	Resultados Numéricos Utilizando o Método Híbrido	117
4.4.1	Exemplo 1	118
4.4.2	Exemplo 2	122
4.5	Sobre o Método Híbrido Não Preservar Pontos Fixos	128
4.6	Conclusão do Capítulo	130
5	O MÉTODO DE MEMÓRIA HEREDITÁRIA CONCENTRADA NA CONDIÇÃO INICIAL	131
5.1	Discretização com Memória Hereditária Concentrada na Condição Inicial	131
5.2	Resultados Numéricos Utilizando o Método MHCCI	135
5.3	Comportamento Local em Torno dos Pontos Fixos do Sistema Dinâmico Discreto Obtido pela Discretização MHCCI	143
5.4	Conclusão do Capítulo	148
6	ESTUDO PRELIMINAR SOBRE A ESTABILIDADE EM TORNO DE PONTOS FIXOS	149
6.1	Estabilidade em Torno de Pontos Fixos: Ordem Inteira <i>versus</i> Ordem Não Inteira	149
6.2	Exemplos	151
6.3	Estabilidade em Torno de Pontos Fixos para Funções Discretas Obtidas pelo Método MHCCI	159
6.4	Conclusão do Capítulo	164
7	CONCLUSÃO	165
7.1	Conclusões	165
7.2	Perspectivas Futuras	167
	Referências	169

APÊNDICES	179
APÊNDICE A – RELAÇÃO DAS CITAÇÕES DOS TEOREMAS UTILIZADOS EM REFERENCIAIS TEÓRICOS	. 181
APÊNDICE B – PUBLICAÇÃO SOBRE O MÉTODO HÍBRIDO PARA UM PVINI SEGUNDO CAPUTO	 183

Introdução

O cálculo de ordem não inteira é uma generalização do cálculo diferencial e integral, geralmente estudado no início da graduação de cursos na área de ciências exatas e da terra. Embora sua origem remonte à época das ideias propostas no final do século XVII por Leibniz e Newton, seu desenvolvimento e suas aplicações se deram de maneira mais vagarosa, devido a uma dificuldade em elaborar definições equivalentes e à dificuldade em aplicar o conceito em fenômenos da natureza. Nas últimas quatro décadas, o interesse por esse tema se intensificou. Alguns fenômenos físicos, que não eram bem explicados por modelos baseados no cálculo tradicional, têm sido modelados por derivadas e integrais de ordem não inteira, apresentando resultados melhores. A curiosidade por esse tema, ainda pouco difundido em cursos de graduação e pós-graduação e com um grande número recente de estudos e publicações, despertou o interesse do estudo para este trabalho de tese.

Embora neste texto seja denominado cálculo de ordem não inteira, esse tema também é conhecido como cálculo fracionário (do inglês: “*fractional calculus*”). A opção por utilizar o nome “cálculo de ordem não inteira” tem por finalidade distinguir o emprego das definições utilizadas no cálculo diferencial e integral tradicional (de ordem inteira) das utilizadas nas generalizações, que vão além das ordens dadas apenas por números racionais. Além disso, mesmo sendo considerado uma generalização do cálculo tradicional, e equivalente quando são utilizados valores inteiros nas definições, o de ordem não inteira possui características particulares. Algumas delas, tal como o efeito de memória heritária, serão discutidas ao longo deste texto.

Uma definição unificada para o cálculo de ordem não inteira ainda é discutida na literatura. Devido a isso, a escolha da definição depende do tipo de aplicação e do problema abordado; para modelos que utilizem equações diferenciais ordinárias, as definições de Riemann-Liouville e de Caputo são as mais utilizadas; para modelos com equações diferenciais parciais, a definição de Riesz é mais utilizada (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). Nos últimos anos, uma abordagem para a integral de Riemann-Liouville dada como saída de um sistema difusivo vem sendo bastante utilizada, principalmente quando se pretende mostrar estabilidade de alguns sistemas (MONTSENY, 1998).

Devido ao fato da maioria das aplicações e modelos utilizando sistemas de ordem não inteira empregarem equações diferenciais e, como no caso de ordem inteira, obter soluções analíticas de forma explícita não é possível em sua grande maioria, métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas são frequentemente utilizados. Nesse sentido, ainda são relativamente poucos os métodos encontrados na literatura e, além de dependerem da definição utilizada, suas implementações são de computação intensiva,

devido à característica de memória hereditária.

Neste texto, será realizada uma exposição introdutória, porém analítica, sobre as derivadas e equações diferenciais utilizando as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, além de discutir questões relacionadas com métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias utilizando a derivada de Caputo.

Objetivos da Tese

O objetivo do tema desta tese de doutorado é propor e analisar dois métodos numéricos, chamados de método híbrido e método MHCCI, para solução de sistemas de equações diferenciais de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo.

Para tanto, será realizada uma exposição introdutória e de caráter analítico sobre as definições de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov, de forma que o texto esteja autocontido e propiciando a compreensão dos fundamentos sem a necessidade constante de bibliografias adicionais. Embora o objetivo principal seja apresentar métodos numéricos no contexto da derivada de Caputo, será utilizada uma abordagem em que os principais resultados para a derivada de Caputo são obtidos como consequência da derivada de Riemann-Liouville que, embora não seja equivalente à de Caputo, serão relacionadas para uma determinada classe de funções. Como os métodos numéricos empregam a derivada de Grünwald-Letnikov, que é equivalente à de Riemann-Liouville na mesma classe de funções em que essa se relaciona com a de Caputo, será realizada uma exposição sobre essa derivada e o método numérico obtido por meio dela. Devido ao fato de os métodos propostos serem empregados para obter soluções numéricas de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo, também é objetivo realizar uma exposição sobre existência e unicidade de soluções de equações diferenciais para as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, também em caráter analítico. Nesse sentido, destaca-se uma relevante observação sobre a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de equações diferenciais segundo Riemann-Liouville encontrado na literatura, Observação 3.2.2, e ilustra-se, no Exemplo 3.2.1, um caso em que a versão encontrada na literatura não é válida.

Para os métodos ora propostos é objetivo compará-los: i) com a solução analítica de equação diferenciais lineares e ii) com o método mais frequentemente utilizado em simulações numéricas para a derivada de Caputo. Além disso, verificar que os métodos numéricos propostos são de menor intensidade computacional.

Para o método MHCCI, também é objetivo realizar uma análise do comportamento dinâmico em torno dos pontos fixos das funções discretas obtidas por esse método. Além disso, utilizar esse método para ilustrar evidências de que a estabilidade de pontos fixos de sistemas de ordem não inteira e não lineares correspondem à estabilidade de seus respectivos sistemas linearizados.

Embora equações diferenciais de ordem não inteira possam ser utilizadas para modelar certos fenômenos físicos, não é objetivo desta tese apresentar exemplos de sistemas reais que podem ser modelados por sistemas de ordem não inteira. Exemplos de aplicações de sistemas de ordem não inteira para modelar alguns fenômenos físicos podem ser encontrados nas referências ([PODLUBNY, 1998](#)), ([HILFER, 2000](#)), ([SABATIER; AGRAWAL; MACHADO, 2007](#)), ([DAS, 2008](#)), ([CAPONETTO et al., 2010](#)), ([MAINARDI, 2010](#)), ([TARASOV, 2011](#)) e ([SHENG; CHEN; QIU, 2012](#)).

Recursos Utilizados

Para a escrita desta tese, utilizou-se o programa de diagramação de textos $\text{\TeX}$ com macros $\text{\LaTeX}$ e classe `abntex2` (suíte criada para atender as normas para elaboração de trabalhos acadêmicos da ABNT). Para a geração das figuras, utilizou-se o programa Gnuplot, exceto nas Figuras 01, 02 e 03, em que utilizou-se o editor de gráficos LaTeXDraw. Para as implementações das rotinas e geração dos dados, utilizou-se o compilador em fortran GFortran, do projeto GNU Fortran.

Apresentação do Texto

Este texto está dividido em três partes.

Na Parte I (Do Início ao Estado Atual), encontra-se uma contextualização histórica sobre cálculo de ordem não inteira, abordando os principais destaques desse tema a partir das discussões entre Leibniz e L'Hospital em 1695 até os meados da década de 1970. Para o período a partir da década de 1970, são apresentados os principais desenvolvimentos a respeito de métodos numéricos e análises de sistemas dinâmicos.

Na Parte II (Referenciais Teóricos), encontram-se os fundamentos teóricos, utilizados como fundamentação para o tema da tese, divididos em dois capítulos. No [Capítulo 2](#), os operadores de Riemann-Liouville, de Caputo e de Grünwald-Letnikov serão definidos e as principais propriedades e relações entre essas definições serão apresentadas. No [Capítulo 3](#), encontram-se as funções de Mittag-Leffler, os teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais de ordem não inteira segundo as definições de Riemann-Liouville e de Caputo, soluções de equações lineares utilizando a Transformada de Laplace e um estudo para sistemas de equações diferenciais para a derivada de Caputo. Salienta-se a preocupação por apresentar, de maneira detalhada e que as ideias ficassem claras para o leitor, as demonstrações dos teoremas, proposições, lemas e corolários contidos nesses dois capítulos. Observa-se, porém, que as referências utilizadas para os resultados ora apresentados não foram listadas ao longo do texto. No entanto, no Apêndice [A](#) encontram-se as Tabelas [A.1](#) e [A.2](#), em que cada resultado contido nesses dois capítulos é referenciado

de acordo as respectivas bibliografias utilizadas.

Uma vez que se objetivou realizar uma exposição de caráter analítico, a leitura da Parte II pode ser tediosa para um leitor familiarizado nesse tema, ou no caso de se considerar o entendimento das demonstrações desnecessários para uma primeira leitura. No primeiro caso, sugere-se passar para os resultados dessa tese, exceto pela Observação 3.2.2 e Exemplo 3.2.1, e, no segundo, sugere-se evitar as demonstrações. Destaca-se, ainda, que cada item da fundamentação teórica utilizado na Parte III (Resultados) foi devidamente referenciado, destacando-se a página em que o item é encontrado para facilitar encontrar a referência no texto.

Na Parte III (Resultados), encontram-se os resultados, divididos em três capítulos, e a conclusão desta tese. No Capítulo 4, o método híbrido para soluções de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo é proposto. Além disso, é realizada uma análise comparativa para os casos em que é possível obter a solução analítica e com o método mais frequentemente utilizado na literatura para essa derivada. No Capítulo 5, é apresentada uma versão da derivada de Riemann-Liouville equivalente à derivada de Caputo e utilizada para propor o método MHCCI, empregado para obter soluções de equações diferenciais que não dependem explicitamente do tempo segundo a derivada de Caputo. Nesse caso, também é realizada uma análise comparativa com os casos em que é possível obter a solução analítica. Além disso, realizou-se um estudo preliminar para estabilidade de pontos fixos para a família de funções discretas obtidas a partir desse método. No Capítulo 6, o método MHCCI é utilizado para ilustrar casos em que a estabilidade de pontos fixos de sistemas de equações diferenciais não lineares se equivale à estabilidade dos respectivos sistemas linearizados. Além disso, é realizado um estudo numérico, complementar ao apresentado na seção 5.3, em que são encontradas condições para regiões de estabilidade de funções discretas obtidas a partir do método MHCCI. Esse capítulo também é utilizado como forma de direcionar trabalhos futuros nesse tema. No Capítulo 7, encontram-se as conclusões da tese e direcionamentos para trabalhos futuros.

Esta tese é finalizada com a lista de referências bibliográficas utilizadas e com dois apêndices: no Apêndice A encontra-se um detalhamento das referências utilizadas nos resultados apresentados na Parte II e no Apêndice B é exibida a folha de rosto do artigo publicado sobre o método híbrido.

Parte I

Do Início ao Estado Atual

1 Breve História do Cálculo de Ordem não Inteira

1.1 Dos primeiros passos ao início da década de 1970

O início do cálculo de ordem não inteira, ou fracionário, tem sua história contada a partir de uma sucessão de trocas de cartas entre L'Hospital (1661-1704) e Leibniz (1646-1716) em 1695. Em uma dessas, L'Hospital pergunta a Leibniz qual seria o significado de se tomar $n = 1/2$ na notação $d^n f/dt^n$ para a n -ésima derivada de uma função $f(t)$, proposta pelo segundo. Embora Leibniz não tivesse uma resposta clara, chegando a indicar que essa substituição poderia acarretar algum tipo de paradoxo dessa notação, afirmou que tais questões seriam discutidas no futuro, podendo ocasionar possíveis aplicações. Ainda em 1695, Leibniz mencionou, em uma carta a Johann Bernoulli (1667-1748), sobre derivadas de “ordens mais gerais”, discutidas previamente com L'Hospital. Em 1697, Leibniz, em correspondência enviada a Wallis (1616-1703), levantou questões a respeito do produto infinito para π , proposto por esse, mencionando que poderia ser utilizado o cálculo diferencial para determinar os resultados. O que se nota de interessante nesse caso, é o fato de Leibniz utilizar a notação $d^{1/2}f$ na referida correspondência (ROSS, 1975).

A partir dessas ideias, vários matemáticos tais como Eüler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) e Laplace (1749-1827), entre outros, trabalharam com conceitos para a manipulação algébrica do cálculo de ordem não inteira (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). Contudo, apenas em 1819 ocorreu a primeira menção sobre o assunto em um texto matemático (MILLER; ROSS, 1993). Em “*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*”, S. F. Lacroix (1765-1843) substituiu o fatorial na fórmula para a n -ésima derivada da função $y = x^m$, $m \geq n$, pela função $\Gamma(\cdot)$, que generaliza a função fatorial para o conjunto dos números complexos diferentes dos inteiros menores ou iguais a zero ($\mathbb{C} - \mathbb{Z}_+$), e obteve

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

Como exemplo das possibilidades em se utilizar a função $\Gamma(\cdot)$, Lacroix substituiu $m = 1$ e $n = 1/2$, obtendo

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$

que é equivalente ao resultado obtido utilizando as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo.

Pode-se dizer que as primeiras aplicações do cálculo de ordem não inteira para solução de problemas foram iniciadas por Abel (1802-1829) ao tentar obter uma solução

para o problema da tautócrona. Na verdade, Abel não solucionou o problema no sentido de derivadas de ordem não inteira, mas as soluções obtidas são equivalentes às obtidas usando derivada de ordem $1/2$. Nesse sentido, Abel obteve uma série de resultados para a “meia” derivada (MILLER; ROSS, 1993).

Liouville (1809-1882) foi o primeiro matemático a tentar formalizar o conceito de derivadas de ordem não inteira. Entre 1832 e 1837, Liouville publicou uma série de documentos sobre o tema em que é exposta, de forma rigorosa, uma estrutura para o cálculo de ordem não inteira, além da aplicação para solução de algumas equações diferenciais lineares (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). Em 1847, Riemann (1826-1866) obteve resultados semelhantes aos de Liouville. Esses resultados foram publicados postumamente em 1876, na forma de uma compilação de trabalhos realizados por Riemann. Em ambas definições foi utilizado o conceito de funções complementares, que tornava complicado o estudo das derivadas de ordem não inteira segundo Cayley (1821-1895) (CAYLEY, 1880).

As definições de Liouville e Riemann motivaram uma intensa busca por esclarecimentos por parte de outros matemáticos tais como Holmgren (1822–1885), Grünwald (1838–1920), Letnikov (1837–1888) e Laurent (1841-1908), entre outros. Holmgren se destaca pelo fato de ter publicado entre os anos de 1865 e 1866 os primeiros trabalhos utilizando uma variação da definição formalizada por Liouville, mas abandonando as funções complementares. Grünwald, em 1867, e Letnikov, em 1868, propuseram, de forma independente, uma definição baseada em diferenças divididas para derivadas de ordem não inteira. Embora o primeiro se ateu a uma elaboração formal para o conceito partindo da definição proposta, o segundo mostrou a equivalência com a definição dada por Liouville sem o uso das funções complementares. Esse trabalho foi o primeiro a obter operadores equivalentes partindo de definições distintas (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). Apenas a partir do trabalho sobre operadores generalizados, publicado por Laurent em 1884, que foi possível reformular as definições de Riemann e Liouville. Laurent aplicou a forma integral de Cauchy (1789-1857) para obter a reformulação atualmente utilizada para os operadores derivação e integração de Riemman-Liouville (MILLER; ROSS, 1993).

O cálculo operacional de Heaviside (1850-1925), desenvolvido para resolver alguns tipos de problemas na teoria sobre eletromagnetismo, é de considerável importância para as derivadas de ordem não inteira no contexto de aplicações. A ideia dessas derivadas foram utilizadas por ele para o estudo do potencial e em linhas de transmissão na última década do século XIX (OLIVEIRA, 2010). Contudo, devido à falta de rigor matemático atribuída a Heaviside, seus trabalhos não tiveram a devida projeção na área, à época de suas publicações (OLDHAM; SPAINER, 1974).

Segundo Miller e Ross (1993), o período entre 1900 e 1970 foi modesto em termos do volume de publicações de trabalhos para o cálculo de ordem não inteira se comparado ao período entre 1970 e 1993. Nesse período, destacam-se, diretamente, os trabalhos de

Weyl (1885-1955), que propôs uma definição apropriada para funções periódicas (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993), e de Riez (1886-1969) que desenvolveu uma teoria voltada para funções de várias variáveis com a finalidade de obter solução de problemas em equações diferenciais parciais (OLDHAM; SPAINER, 1974). Indiretamente, destacam-se os trabalhos de Mittag-Leffler (1846-1927), publicados no início do século XX, sobre funções generalizadas, que eram utilizadas à época como contra exemplos para comportamento assintótico de séries de funções complexas (ERDELYI, 1955). A classe de funções propostas nesses trabalhos são nomeadas, atualmente, como funções de Mittag-Leffler, e são amplamente utilizadas para obter soluções de equações diferenciais lineares de ordem não inteira.

O trabalho de Caputo (1927 - atual) publicado em 1969 e intitulado “*Elasticità e Dissipazione*” deve ser destacado. Nesse trabalho, Caputo propôs uma derivada de ordem não inteira utilizando o operador integral de Riemann-Liouville de uma forma diferente à da definição da derivada de Riemann-Liouville, e aplicou sua definição para soluções de problemas na área de viscoelasticidade (OLIVEIRA, 2010). Embora tenha sido mais tardiamente proposta, tal definição se tornou amplamente utilizada para modelagem de sistemas físicos devido à forma para as condições iniciais em problemas de valores iniciais de equações diferenciais que, diferentemente da abordagem utilizando a derivada de Riemann-Liouville, são dadas em termos de derivadas de ordem inteira.

Em 1974, ocorreu o primeiro congresso internacional sobre o cálculo de ordem não inteira, no estado de *Connecticut*, USA. Segundo Miller e Ross (1993), esse congresso proporcionou o início do forte desenvolvimento bibliográfico nessa área a partir dessa data. Desde então, várias áreas das ciências aplicadas, tais como a área de Fluidos, Reologia, Transporte Difusivo, Eletricidade, Redes Neurais, Probabilidade e Estatística, Teoria do Controle, Viscoelasticidade, Eletroquímica e corrosão, Físico Química, Processamento de Sinais, entre outras, possuem aplicações do cálculo de ordem não inteira (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

1.2 Métodos numéricos

Os primeiros métodos numéricos utilizados no cálculo de derivadas de ordem não inteira foram obtidos a partir da definição do operador de Grünwald-Letnikov. Esses métodos também têm sido utilizados para obter aproximações de derivadas e soluções de equações diferenciais de ordem não inteira para a derivada de Riemann-Liouville, nos casos em que existe a equivalência dessa definição com a de Grünwald-Letnikov. Para a integral de Riemann-Liouville, as aproximações são obtidas a partir da discretização da integral de convolução utilizada na definição desse operador (OLDHAM; SPAINER, 1974). Em (LUBICH, 1986), é apresentado o primeiro trabalho sistemático voltado para análise de

erro desses métodos. Embora aplicáveis, esses métodos demandam recursos computacionais que não eram facilmente disponíveis até meados da década de 1990. Por isso, as aplicações numéricas eram restritas a conjuntos contendo poucos pontos discretos. Essa demanda decorre, principalmente, do fato dos operadores de ordem não inteira dependerem da memória hereditária do sistema ([WESTERLUND, 1991](#)).

Uma forma de obter métodos numéricos menos intensivos computacionalmente para os operadores derivação e integração de Riemann-Liouville, proporcionando obter resultados mais rapidamente, é por meio de aproximações de sistemas de ordem não inteira por sistemas inteiros de alta ordem ([CHAREF et al., 1992](#); [DORCAK, 1994](#)). Baseada na transformada de Laplace da integral de Riemann-Liouville, essa aproximação é realizada pela estimação de parâmetros de sistemas de alta ordem que possuem resposta em frequência semelhantes à do sistema original. Em áreas tais como modelagem e identificação de sistemas lineares essa abordagem é frequentemente utilizada ([JACYNTHO et al., 2015](#); [BADRI; TAVAZOEI, 2015](#); [RAJASEKHAR; JATOTH; ABRAHAM, 2014](#); [GALVÃO et al., 2013](#)). Contudo, a utilização desse método não é aconselhável em certas aplicações, como no caso de análise de sistemas dinâmicos que apresentam comportamentos caóticos ([TAVAZOEI; HAERI, 2007](#)).

Para soluções de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo, [Diethelm \(1997\)](#) propôs um método que utiliza aproximações por quadraturas da forma integral dessas soluções, que é escrita em termos da integral de Riemann-Liouville. O método foi melhorado pela aplicação de um algoritmo preditor-corretor ([DIETHELM; FORD; FREED, 2002](#)) e, em sequência, um detalhamento sobre a análise de erro desse método foi realizada ([DIETHELM; FORD; FREED, 2004](#)). Utilizando a mesma ideia dessa discretização, novas aproximações foram obtidas de forma a melhorar o erro de truncamento local ([LI; CHEN; YE, 2011](#); [CAO; XU, 2013](#)). Os algoritmos obtidos a partir da forma integral demandam maior tempo computacional ao se comparar com o obtido a partir da derivada de Grünwald-Letnikov. Além disso, o tempo computacional desses algoritmos aumenta à medida que o erro de truncamento local diminui, devido ao aumento do número de operações por iteração.

Dentre outras discretizações encontradas, destacam-se as que utilizam aproximações por polinômios de Legendre ([SAADATMANDI; DEHGHAN, 2010](#); [KAZEM; ABBASBANDY; KUMAR, 2013](#)) e por *splines* ([LAKESTANI; DEHGHAN; IRANDOUST-PAKCHIN, 2012](#); [AL-RABTAH; MOMANI; RAMADAN, 2012](#)), que se baseiam no conceito de bases para espaços de funções em conjunto com a forma integral para soluções de equações diferenciais de ordem não inteira.

1.3 Aplicações em sistemas dinâmicos

Simulações numéricas na área de sistemas dinâmicos caóticos foram evitadas até meados da década de 1990 devido às dificuldades computacionais. O primeiro trabalho em que são apresentados resultados a respeito de dinâmica caótica deve-se a [Hartley, Lorenzo e Qammer \(1995\)](#). Nesse trabalho, as simulações numéricas são realizadas a partir de aproximações por sistemas de alta ordem com comportamento semelhantes no domínio da frequência, como no caso citado na seção anterior.

Na área de controle de sistemas dinâmicos foram desenvolvidos os métodos de controle de ordem não inteira $PI^\lambda D^\mu$ ([PODLUBNY; DORCAK; KOSTIAL, 1997](#)) e o controle CRONE (*Contrôle Robuste d'Ordre Non Entier*) ([OUSTALOUP; SABATIER; MOREAU, 1998](#)). O primeiro permite uma liberdade maior na escolha dos parâmetros relativos à ordem de derivação e integração com a finalidade de atingir o objetivo de controle. O segundo modela fenômenos que possuem comportamentos intermediários entre duas derivadas de ordem inteira.

Na análise da estabilidade de pontos fixos de sistemas lineares destaca-se o trabalho de [Matignon \(1998\)](#), em que são apresentados critérios de estabilidade utilizando a estabilidade das funções de Mittag-Leffler ([ERDELYI, 1955](#)), além de conceitos como BIBO (“*bounded-input, bounded-output*”) estabilidade.

Com o avanço dos processadores digitais nas últimas duas décadas, a aplicação dos algoritmos numéricos listados na [seção 1.2](#) vem sendo realizada com mais frequência para o estudo de comportamento dinâmico caótico. Observa-se que, na grande maioria dos trabalhos, são utilizadas as definições de Riemann-Liouville e de Caputo. Além disso, o estudo é geralmente realizado por meio de análises de diagramas de bifurcação, sendo que, em alguns casos, é considerada a ordem de derivação do sistema como parâmetro de bifurcação. Com respeito ao tipo de discretização utilizada, nota-se a preferência pelos métodos:

- via discretização de Grünwald-Letnikov ([NIMMO; EVANS, 1999](#)), ([AHMAD, 2005](#)), ([PETRÁŠ, 2008](#)), ([PETRÁŠ, 2009](#)), ([ZHANG et al., 2009](#)), ([DATSKO; GAFIY-CHUK, 2011](#)), ([LETELLIER; AGUIRRE, 2013](#)), ([TENG et al., 2014](#));
- via aproximação no domínio da frequência por sistemas de alta ordem ([AHMAD; SPROTT, 2003](#)), ([BARBOSA et al., 2004](#)), ([GAO; YU, 2005](#)), ([LI; CHEN, 2004](#)), ([GE; JHUANG, 2007](#)), ([GE; ZHANG, 2007](#)), ([LU, 2005](#)), ([XIN; JUE-BANG, 2005](#)), ([LU, 2006](#)), ([BARBOSA et al., 2007](#)), ([LI; LIAO; LUO, 2012](#)), ([JIA; CHEN; QI, 2014](#));
- via aproximações por quadraturas da forma integral ([SHEU et al., 2007](#)), ([LI;](#)

DENG, 2007), (YU; LI, 2008), (DENG; LI, 2008), (TAVAZOEI et al., 2009), (ABD-ELOUAHAB; HAMRI; WANG, 2010), (SUN; WANG; SPROTT, 2010), (YUAN; YANG, 2012), (ABD-ELOUAHAB; HAMRI; WANG, 2012), (BHALEKAR, 2013), (FAIEGHI; DELAVARI, 2012), (LIU; HONG; YANG, 2014), (TIAN; YU; WANG, 2014).

Uma versão do método direto Lyapunov para o cálculo de ordem não inteira, ferramenta bastante utilizada para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos de ordem inteira, foi proposta por Li, Chen e Podlubny (2009). A versão para o caso de ordem não inteira, embora teoricamente factível, é relativamente mais complicada de ser aplicada devido às propriedades da derivada de ordem não inteira para o produto e composição de funções. Nesse sentido, trabalhos que apresentam casos possíveis de se aplicar essa generalização são frequentemente relatados (TRIGEASSOU et al., 2011; AGUILA-CAMACHO; DUARTE-MERMOUD; GALLEGOS, 2014; DUARTE-MERMOUD et al., 2015). Apesar da generalização do método direto de Lyapunov para o caso de ordem não inteira ter sido demonstrada, resultados relativamente mais simples de serem aplicados, tal como a estabilidade de pontos fixos de sistemas não lineares utilizando linearização (LI; ZHANG, 2011), ainda estão em aberto.

Parte II

Referenciais Teóricos

2 Conceitos Básicos

As principais ideias e conceitos do cálculo de ordem não inteira são realizados a partir da generalização de derivadas e integrais de ordem inteira para valores não inteiros. Dentre as definições mais difundidas na literatura encontram-se as dos operadores integração de Riemann-Liouville e derivação de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov. Os operadores de Riemann-Liouville e de Caputo são baseados em uma expressão fechada para a n -ésima integral iterada de uma função $f(t)$, devida a Cauchy (MILLER; ROSS, 1993). O operador derivação de Grünwald-Letnikov é baseado na generalização do quociente para a derivada de ordem n de uma função $f(t)$.

Neste capítulo, serão apresentadas as definições dos referidos operadores e as principais propriedades para determinar a integral e as derivadas de ordem não inteira na classe das funções analíticas. Além disso, será visto que os operadores derivação de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e Caputo podem ser relacionados para uma determinada classe de funções, podendo ser equivalentes em certos casos.

2.1 A Integral Iterada de Cauchy

Para uma função f definida em um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e integrável segundo Riemann, o operador I_a^1 será definido

$$I_a^1 f(t) := \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

para $t \in [a, b]$. A integral iterada de uma função f é obtida a partir do operador I_a^1 e por meio da relação de recorrência

$$I_a^n f(t) := I_a^1(I_a^{n-1} f(t)), \quad (2.2)$$

em que $n \in \mathbb{N}^*$. O seguinte Lema é devido a Cauchy e mostra como se obter uma forma fechada para o cálculo de (2.2).

Lema 2.1.1 *Se $f(t)$ é integrável segundo Riemann no intervalo $[a, b]$, então*

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

em que $t \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado pode ser obtido por indução em n em conjunto com o fato da integral de uma função integrável também ser integrável. Para $n = 1$ obtém-se

$$I_a^1 f(t) = \frac{1}{(1-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{1-1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Supondo por indução que a Equação 2.3 seja verdadeira para $n = k - 1$ tem-se que

$$\begin{aligned} I_a^k f(t) &= I_a^1 \left(I_a^{k-1} f(t) \right) \\ &= \int_a^t \left[\frac{1}{((k-1)-1)!} \int_a^\tau (\tau - \xi)^{(k-1)-1} f(\xi) d\xi \right] d\tau, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que $\tau \in [a, t]$ e $\xi \in [a, \tau]$. O fato das funções $(\tau - \xi)^{k-2}$ e $f(\xi)$ serem integráveis segundo Riemann no domínio de (2.5) implica que a ordem de integração pode ser trocada pelo Teorema de Fubini (SPIVAK, 1971). A região de integração de (2.5) está apresentada na Figura 2.1 e pode ser reescrita por $\tau \in [\xi, t]$ e $\xi \in [a, t]$.

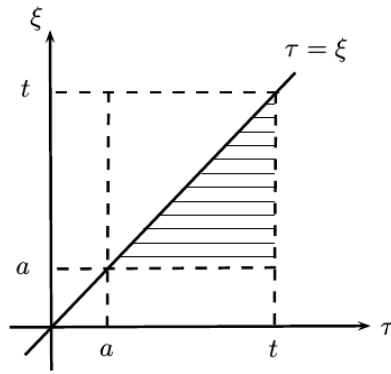


Figura 2.1 – Região de integração das variáveis τ e ξ .

A partir da Equação 2.5, obtém-se

$$\begin{aligned} I_a^k f(t) &= \frac{1}{(k-2)!} \int_a^t \int_\xi^t (\tau - \xi)^{k-2} f(\xi) d\tau d\xi \\ &= \frac{1}{(k-2)!} \int_a^t f(\xi) \left[\int_\xi^t (\tau - \xi)^{k-2} d\tau \right] d\xi \\ &= \frac{1}{(k-2)!} \int_a^t f(\xi) \left[\frac{(\tau - \xi)^{k-1}}{k-1} \right]_\xi^t d\xi \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t - \xi)^{k-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

e o resultado segue ao renomear a variável ξ para τ em (2.6). ■

Lema 2.1.2 *Seja $\frac{d^n g(t)}{dt^n}$ a derivada n -ésima de uma função $g(t)$. Então, para uma função contínua $f(t)$*

$$\frac{d^n}{dt^n} (I_a^n f(t)) = f(t). \quad (2.7)$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $\frac{d}{dt} I_a^1 f(t) = f(t)$. Supondo que o resultado seja verdadeiro para $n = k - 1$, segue por indução que

$$\frac{d^k}{dt^k} (I_a^k f(t)) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left[\frac{d}{dt} (I_a^1 I_a^{k-1} f(t)) \right] = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} [I_a^{k-1} f(t)] = f(t).$$

■

A expressão fechada para I_a^n pode ser estendida para definir um operador I_a^α em que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Observa-se que para realizar tal extensão é necessário utilizar a função Gama de Eüler, que generaliza o conceito do fatorial de um número natural. Além disso, é preciso investigar sob que condições a função $(t - \tau)^{\alpha-1} f(t)$ possui integral convergente no intervalo $[a, t] \subset [a, b]$.

Definição 2.1.1 A função $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (2.8)$$

é chamada de função Gama de Eüler. ▲

A seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 2013, p. 148), mostra que a função $\Gamma(\alpha)$ está bem definida para $\alpha > 0$.

Proposição 2.1.3 Para todo $\alpha > 0$, a integral $\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ é convergente. ■

A proposição a seguir mostra que a função $\Gamma(\alpha)$ goza de uma importante propriedade do fatorial de um número natural.

Proposição 2.1.4 Sob as condições da Proposição 2.1.3, tem-se que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (2.9)$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = -t^\alpha e^{-t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

■

A partir da proposição acima é possível verificar que a função $\Gamma(\alpha)$ é exatamente o fatorial do número $(\alpha - 1) \in \mathbb{N}$. De fato, para $\alpha = 1$ tem-se que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1. \quad (2.10)$$

Logo, pela igualdade (2.9),

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2,$$

e segue por indução que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a Proposição 2.1.4 caracteriza a função $\Gamma(\cdot)$ como uma generalização do fatorial de um número real positivo.

A função $\Gamma(\cdot)$ pode ter seu domínio estendido para o conjunto $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$, (NETO, 1993, p. 367). Uma maneira de determinar a imagem da função $\Gamma(\cdot)$ no subconjunto dos números negativos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$ é aplicar a Proposição 2.1.4, que também é válida nesse caso. Isso pode ser realizado da seguinte maneira:

- se $-1 < \alpha < 0$, então $\alpha + 1 > 0$ e $\Gamma(\alpha + 1)$ pode ser avaliada de acordo com a Definição 2.1.1 e, nesse caso, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ o que implica em

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha};$$

- se $-2 < \alpha < -1$, então $\alpha + 2 > 0$ e, novamente, obtém-se $\Gamma(\alpha + 2) = (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1)$ o que implica, do item anterior, em

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)}.$$

Por indução, demonstra-se a

Proposição 2.1.5 *Seja $k \in \mathbb{N}^*$. Se $-k < \alpha < -k + 1$, então $\Gamma(\alpha)$ pode ser obtida por*

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1)}. \quad (2.11)$$

■

A Figura 2.2 exibe o gráfico da função $\Gamma(\alpha)$ para $\alpha \in (-5, 5]$.

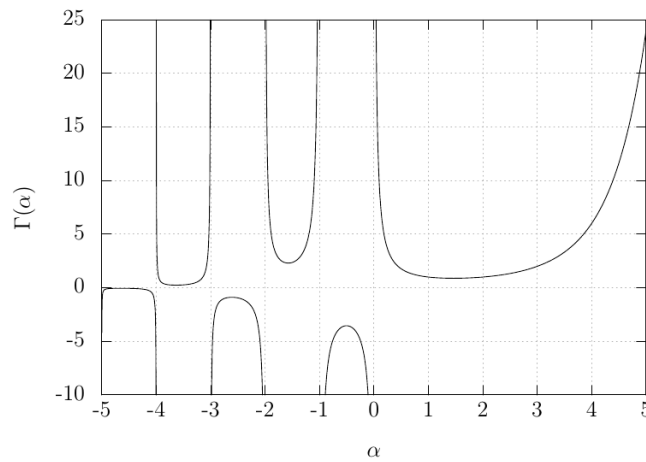


Figura 2.2 – Gráfico da função $\Gamma(\alpha)$ para $\alpha \in (-5, 5]$.

Uma condição suficiente para que a integral em (2.3) exista ao substituir n por um número real positivo é dada pela

Proposição 2.1.6 Se $f(t)$ for diferenciável no intervalo $[a, b]$ e $\alpha > 0$, então a integral

$$\int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

é convergente para todo $t \in [a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO: Integrando por partes obtém-se

$$\begin{aligned} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau &= -\frac{f(\tau)(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_a^t + \int_a^t \frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} f'(\tau) d\tau \\ &= \frac{f(a)(t - a)^\alpha}{\alpha} + \int_a^t \frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha} f'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Uma vez que $(t - \tau)^\alpha$ é contínua em $[a, b]$, tem-se que $(t - \tau)^\alpha f'(\tau)$ é integrável. ■

A expressão em (2.12) conjuntamente com a função $\Gamma(\cdot)$ são de fundamental importância para a definição do operador integral de Riemann-Liouville que, por sua vez, é utilizado na definição dos operadores derivada de Riemann-Liouville e de Caputo.

2.2 O Operador Integral de Riemann-Liouville

O operador integração de ordem não inteira de Riemann-Liouville é definido em sequência.

Definição 2.2.1 Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e $f(t)$ uma função definida em $[a, b]$. O operador definido por

$$I_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

para $a \leq t \leq b$ é chamado de **Operador Integral de Ordem α de Riemann-Liouville** nos casos em que a integral for convergente. ▲

Na definição anterior foi considerado $\alpha > 0$. A seguinte proposição mostra uma importante propriedade do operador $I_a^\alpha(\cdot)$ quando α tende a zero pela direita.

Proposição 2.2.1 Seja $f \in C^1[a, b]$. Então, para todo $t \in [a, b]$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_a^\alpha f(t) = f(t). \quad (2.14)$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_a^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(-\frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} f(\tau) \Big|_a^t + \int_a^t \frac{(t - \tau)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} f'(\tau) d\tau \right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(a) + \int_a^t \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) f'(\tau) d\tau \\
&= f(a) + \int_a^t f'(\tau) d\tau \\
&= f(a) + (f(t) - f(a)) = f(t),
\end{aligned}$$

em que na segunda igualdade foi utilizada integração por partes. ■

Observação 2.2.1 A Proposição 2.2.1 permite estender a Definição 2.2.1 para $\alpha = 0$ como sendo o operador identidade, ou seja,

$$I_a^0 f(t) = f(t). \quad (2.15)$$

◀

Observação 2.2.2 Embora provou-se na Proposição 2.1.6 que a integral em (2.12) converge na classe de funções diferenciáveis, é possível mostrar que ela também converge se $f \in L_1[a, b]$ com $I_a^\alpha f \in L_1[a, b]$ (DIETHELM, 2010, p. 13). ◀

O teorema que será enunciado em sequência apresenta a propriedade de concatenação do operador integração de Riemann-Liouville em relação à ordem do operador.

Teorema 2.2.2 Sejam $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $f \in L_1[a, b]$. Então,

$$I_a^{\alpha_1} I_a^{\alpha_2} f(t) = I_a^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t) \quad (2.16)$$

em quase todo ponto (q.t.p.) no intervalo $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO: Aplicando a definição da integral de Riemann-Liouville, obtém-se

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha_1} I_a^{\alpha_2} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha_1-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_a^\tau (\tau - \xi)^{\alpha_2-1} f(\xi) d\xi \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \int_a^\tau (t - \tau)^{\alpha_1-1} (\tau - \xi)^{\alpha_2-1} f(\xi) d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini chega-se a

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha_1} I_a^{\alpha_2} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t f(\xi) \left(\int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha_1-1} (\tau-\xi)^{\alpha_2-1} d\tau \right) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha_1-1} (\tau-\xi)^{\alpha_2-1} f(\xi) d\tau d\xi \\
&\stackrel{(!)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t f(\xi) \left(\int_0^1 (t-\xi)^{\alpha_1+\alpha_2-1} (1-u)^{\alpha_1-1} u^{\alpha_2-1} du \right) d\xi \\
&\stackrel{(!!)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^t \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} (t-\xi)^{\alpha_1+\alpha_2-1} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha_1+\alpha_2-1} f(\xi) d\xi \\
&= I_a^{\alpha_1+\alpha_2} f(t).
\end{aligned}$$

Na igualdade (!) foi utilizada a mudança de variável $\tau = \xi + u(t-\xi)$ e em (!!) foi utilizada a igualdade

$$\int_0^1 (t-u)^{\alpha_1-1} u^{\alpha_2-1} du = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} t^{\alpha_1+\alpha_2} \quad (2.17)$$

avaliada em $t = 1$. A Equação 2.17 pode ser obtida por meio da transformada de Laplace da convolução entre as funções t^{α_1-1} e t^{α_2-1} (BOYCE; DIPRIMA, 2010). ■

Corolário 2.2.3 *Sob as condições do Teorema 2.2.2 tem-se que*

$$I_a^{\alpha_1} I_a^{\alpha_2} f(t) = I_a^{\alpha_2} I_a^{\alpha_1} f(t). \quad (2.18)$$

■

Portanto, o operador $I_a^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$, $\alpha \geq 0$, é comutativo com respeito à concatenação.

A seguinte proposição é uma aplicação da integral de Riemann-Liouville para funções $f(t) = (t-a)^\beta$. A propriedade que será obtida generaliza a propriedade da integração de ordem um (I_a^1) para uma função potência $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $t > a$, e será utilizada para calcular a integral de Riemann-Liouville em funções analíticas.

Proposição 2.2.4 *Seja $\alpha \geq 0$ e $\beta > -1$, então*

$$I_a^\alpha \left((t-a)^\beta \right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \quad (2.19)$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $\alpha = 0$, então o operador I_a^0 é a identidade e o resultado segue. Se $\alpha > 0$, então

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} u^\beta (t-a)^\beta (t-a) du \\
 &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}.
 \end{aligned}$$

Em (*) foi utilizada a mudança de coordenadas $\tau = a + u(t-a)$ e em (**) a Equação 2.17. ■

Corolário 2.2.5 *Seja $\alpha > 0$. Se $\beta \leq -1$, então $I_a^\alpha \left((t-a)^\beta \right)$ não existe.*

DEMONSTRAÇÃO: Supondo por absurdo que a integral de Riemann-Liouville seja convergente, chega-se a

$$\begin{aligned}
 I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \\
 &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\epsilon (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du + \int_\epsilon^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \right)
 \end{aligned}$$

para todo $\epsilon \in (0, 1)$. As funções $(1-u)^{\alpha-1}$ e u^β são positivas em $(0, 1)$ e a primeira é contínua e positiva no intervalo $(0, \epsilon)$. Seja m o valor mínimo de $(1-u)^{\alpha-1}$ em $(0, \epsilon)$. Logo,

$$\int_0^\epsilon (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \geq m \int_0^\epsilon u^\beta du = \begin{cases} m \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1} \Big|_a^\epsilon = +\infty, & \text{se } \beta < -1, \\ m \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln u \Big|_a^\epsilon = +\infty, & \text{se } \beta = -1. \end{cases}$$

Isso contradiz a suposição da integral de Riemann-Liouville ser convergente. ■

Embora provou-se na Proposição 2.2.4 que para as funções $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta > -1$ e $t > a$, a integral de Riemann-Liouville possui uma expressão fechada, obter expressões fechadas para esse operador aplicado em funções mais gerais não é, geralmente, uma tarefa simples. Contudo, para a classe das funções analíticas será possível escrever a integral de Riemann-Liouville em termos de uma série convergente a partir do seguinte teorema e de seu respectivo corolário.

Teorema 2.2.6 *Sejam $\alpha > 0$ e $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas em $[a, b]$. Então,*

$$\left(I_a^{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (t) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} I_a^{\alpha} f_k \right) (t) \quad (2.20)$$

Em particular, $(I_a^{\alpha} f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente convergente.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de funções tal que $f_k \rightarrow f$. Uma vez que f é contínua tem-se que

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f_k(t) - I_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f_k(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (f_k(\tau) - f(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |I_a^{\alpha} f_k(t) - I_a^{\alpha} f(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f_k(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f_k(\tau) - f(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \|f_k - f\|_{\infty} d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|f_k - f\|_{\infty} (t - a)^{\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_k - f\|_{\infty} (b - a)^{\alpha}, \end{aligned}$$

que converge para zero quando $k \rightarrow \infty$, uniformemente, para todo $t \in [a, b]$. ■

Corolário 2.2.7 *Seja $\alpha > 0$ e f uma função analítica em $(a - h, a + h)$ para algum $h > 0$. Então,*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k + 1 + \alpha)} (t - a)^{k+\alpha} \quad (2.21)$$

para $a \leq t < a + h$, em que $f^{(k)}(a) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=a}$. Em particular, $I_a^{\alpha} f(t)$ é analítica em $(a, a + h)$.

DEMONSTRAÇÃO: Uma vez que $f(t)$ é analítica em $(a - h, a + h)$, então

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k.$$

Fixado t , a sequência

$$f_i(t) = \sum_{k=0}^i \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

converge para $f(t)$. Então,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^i \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{f^{(k)}(a)}{k! \Gamma(\alpha)} \left(\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^k d\tau \right) \\ &= \sum_{k=0}^i \frac{f^{(k)}(a)}{k! \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (t-a)^{\alpha+k} \right), \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue pela Proposição 2.2.4. Portanto,

$$I_a^\alpha f_i(t) = \sum_{k=0}^i \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (t-a)^{\alpha+k}.$$

Pela Proposição 2.2.6, tem-se que

$$I_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (t-a)^{\alpha+k}.$$

A analiticidade é garantida devido a convergência uniforme em $(a, a+h)$. ■

Observação 2.2.3 *Ao aplicar a integral de Riemann-Liouville em uma função analítica é obtida uma função que depende explicitamente de $\Gamma(\cdot)$, conforme Equação 2.21. Uma classe de funções especiais escrita em termos de série que utilizam a função $\Gamma(\cdot)$, conhecida como as funções de Mittag-Leffler (ERDELYI, 1955), será apresentada na seção 3.1. Tais funções cumprem papel importante no estudo de soluções de equações diferenciais de ordem não inteira.* ◀

A integral de Riemann-Liouville bem como as propriedades apresentadas serão utilizadas para definição e obtenção de propriedades das derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo nas seções que se seguem.

2.3 O Operador Derivada de Riemann-Liouville

A derivada de Riemann-Liouville é um operador que realiza a derivada de ordem não inteira de uma função e é definida por

Definição 2.3.1 *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $f(t)$ definida em $[a, b]$. O operador definido por*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) := \frac{d^n (I_a^{n-\alpha} f(t))}{dt^n} \quad (2.22)$$

é chamado de **Operador Derivada de Ordem α de Riemann-Liouville**, desde de que a derivada de ordem n exista. $\blacktriangle$

Na definição acima $\lceil \alpha \rceil$ representa o menor inteiro maior ou igual a α , ou seja, $n = \lceil \alpha \rceil$ é tal que $n \in \mathbb{Z}$ e $n - 1 < \alpha \leq n$. No caso de não existirem dúvidas a respeito da ordem do operador definido acima, esse será chamado apenas de derivada de Riemann-Liouville.

Observação 2.3.1 Se $\alpha \in \mathbb{N}$ na Definição 2.3.1, então a derivada de Riemann-Liouville é equivalente a uma derivação inteira de ordem α , pois $I_a^{n-\alpha} = I_a^0$. $\blacktriangleleft$

Observação 2.3.2 A integral $I_a^{n-\alpha} f(t)$, $n = \lceil \alpha \rceil$, produz o efeito de memória hereditária na derivada de Riemann-Liouville, pois carrega toda a informação da integral da função $\frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} f(\tau)$ no intervalo $[a, t]$. Em particular, o limite inferior do intervalo é dito **extremo inicial** da derivada de Riemann-Liouville. $\blacktriangleleft$

A derivação de ordem não inteira pode ser interpretada como um deslocamento não inteiro na ordem de derivação para derivadas inteiras. As Figuras 2.3 e 2.4 apresentam um esquema para essa ideia.

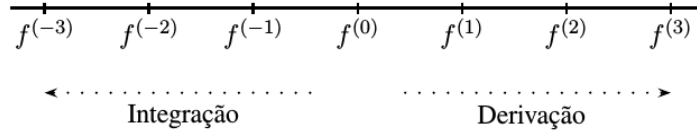


Figura 2.3 – Eixo de Derivação e Integração de Riemann-Liouville. O sentido positivo do eixo representa a derivada de Riemann-Liouville, enquanto que o sentido negativo a integral de Riemann-Liouville.

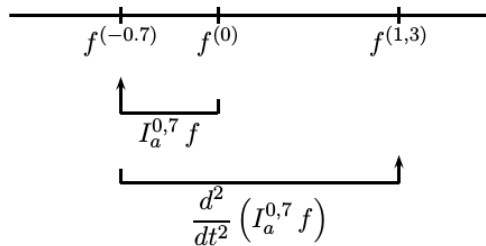


Figura 2.4 – Interpretação da derivada de Riemann-Liouville. Derivar uma função segundo o operador de Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 1,3$ é equivalente a aplicar a integral de Riemann-Liouville de ordem $0,7$, seguido de uma derivada de ordem 2 .

O seguinte teorema fornece condições suficientes para que uma função f possua derivada de Riemann-Liouville para $\alpha \in (0,1)$ em quase todo ponto de um intervalo $[a, b]$.

Teorema 2.3.1 *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $g \in L_1[a, b]$ tal que*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(\tau) d\tau. \quad (2.23)$$

Então a derivada de Riemann-Liouville da função $f(t)$ existe q.t.p. em $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO: Para os pontos $t \in [a, b]$ tais que a integral em (2.23) exista, tem-se que $f'(t) = g(t)$. Para esses pontos

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^t \int_a^\tau (t-\tau)^{-\alpha} g(s) ds d\tau \right) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini para trocar a ordem de integração, obtém-se

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^t \int_s^t (t-\tau)^{-\alpha} g(s) d\tau ds \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^t \frac{g(s)(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(f(a)(t-a)^{-\alpha} + \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{g(s)(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(f(a)(t-a)^{-\alpha} + \int_a^t g(s)(t-s)^{-\alpha} ds \right) \\ &= \frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + I_a^{1-\alpha} g(t). \end{aligned}$$

Em (*) foi aplicado a derivada da convolução entre duas funções. A última igualdade segue da Observação 2.2.2. ■

Proposição 2.3.2 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $\gamma = \alpha - n + 1$. Se a derivada de Riemann-Liouville de ordem α da função $f(t)$ existe em $[a, b]$, então*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left({}^{RL}D_a^\gamma f(t) \right). \quad (2.24)$$

DEMONSTRAÇÃO: De fato,

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-\alpha} f(t) \right) \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-(n-1+\gamma)} f(t) \right) \\
 &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{d}{dt} I_a^{1-\gamma} f(t) \right) \\
 &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left({}^{RL}D_a^\gamma f(t) \right).
 \end{aligned}$$

■

Observação 2.3.3 Como $n - 1 < \alpha \leq n$, então $\gamma \in (0,1]$. Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, então γ é dita a parte não inteira de α . Logo, a derivada de Riemann-Liouville de ordem α pode ser interpretada como a derivada de Riemann-Liouville de ordem igual a parte não inteira de α seguido de uma derivada inteira de ordem $n - 1$, em que $n = \lceil \alpha \rceil$. ◀

O operador derivada de ordem não inteira de Riemann-Liouville não satisfaz a propriedade de concatenação em relação à ordem de derivação considerando as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.2 para a integral de Riemann-Liouville. Contudo, é possível obter a concatenação para o operador derivada para o caso em que a função f satisfaça as hipóteses do seguinte teorema.

Teorema 2.3.3 Sejam α_1, α_2 não negativos, $\phi \in L_1[a, b]$ e $f = I_a^{\alpha_1+\alpha_2} \phi$. Então,

$${}^{RL}D_a^{\alpha_1} {}^{RL}D_a^{\alpha_2} f(t) = {}^{RL}D_a^{\alpha_1+\alpha_2} f(t). \quad (2.25)$$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $n_1 = \lceil \alpha_1 \rceil$, $n_2 = \lceil \alpha_2 \rceil$ e $n_3 = \lceil \alpha_1 + \alpha_2 \rceil$. Então, para uma versão do Lema 2.1.2 para espaços $L_1[a, b]$ e pelo Teorema 2.2.2,

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^{\alpha_1} {}^{RL}D_a^{\alpha_2} f(t) &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_a^{n_1-\alpha_1} \left[\frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} \left(I_a^{n_2-\alpha_2} I_a^{\alpha_1+\alpha_2} \phi(t) \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_a^{n_1-\alpha_1} \left[\frac{d^{n_2}}{dt^{n_2}} (I_a^{n_2} I_a^{\alpha_1} \phi(t)) \right] \right\} \\
 &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \left\{ I_a^{n_1-\alpha_1} [I_a^{\alpha_1} \phi(t)] \right\} \\
 &= \frac{d^{n_1}}{dt^{n_1}} \{ I_a^{n_1} \phi(t) \} \\
 &= \phi(t),
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^{\alpha_1+\alpha_2} f(t) &= \frac{d^{n_3}}{dt^{n_3}} \left[I_a^{n_3-\alpha_1-\alpha_2} \left(I_a^{\alpha_1+\alpha_2} \phi(t) \right) \right] \\
 &= \frac{d^{n_3}}{dt^{n_3}} [I_a^{n_3} \phi(t)] \\
 &= \phi(t).
 \end{aligned}$$

■

Nos Exemplos 2.3.1 e 2.3.2 será evidenciado que o resultado do teorema anterior não é válido sem a hipótese $f = I_a^{\alpha_1+\alpha_2} \phi$ para alguma $\phi \in L_1[a,b]$. Antes, será enunciada a seguinte proposição que auxiliará nos exemplos e que é uma aplicação da Proposição 2.2.4.

Proposição 2.3.4 *Seja $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta > -1$, $\alpha > 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Então,*

$${}^{RL}D_a^\alpha \left((t-a)^\beta \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N}^* \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (2.26)$$

DEMONSTRAÇÃO: A partir da Proposição 2.2.4 tem-se que

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-\alpha} f(t) \right) \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{n-\alpha+\beta} \right) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dt^n} \left((t-a)^{n-\alpha+\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Se $\alpha - \beta \in \mathbb{N}^*$, então $(t-a)^{n-\alpha+\beta}$ será um polinômio de grau $n - (\alpha - \beta)$. Portanto,

$$\frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n-\alpha+\beta} = 0.$$

Por outro lado, se $\alpha - \beta \notin \mathbb{N}^*$, então

$$\begin{aligned}
 {}^{RL}D_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.3.1 *Seja $f(t) = t^{-1/2}$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Então, pela Proposição 2.3.4,*

$${}^{RL}D_0^{1/2} f(t) = {}^{RL}D_0^{1/2} (t^{-1/2}) = 0.$$

Logo, ${}^{RL}D_0^{\alpha_1} \left({}^{RL}D_0^{\alpha_2} f(t) \right) = {}^{RL}D_0^{1/2} (0) = 0$. Contudo,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f(t) = {}^{RL}D_0^1 \left(t^{-1/2} \right) = -\frac{t^{-3/2}}{2}.$$

Nesse caso, não existe $\phi \in L_1[0, h]$, $h > 0$, tal que $f = I_0^1 \phi$. De fato, como $f'(t) = -\frac{t^{-3/2}}{2}$ para $t > 0$ tem-se que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^h -\frac{t^{-3/2}}{2} dt \rightarrow -\infty.$$

Portanto, $-\frac{t^{-3/2}}{2} \notin L_1[0, h]$. Assim,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1} {}^{RL}D_0^{\alpha_2} \left(t^{-1/2} \right) \neq {}^{RL}D_0^{\alpha_1+\alpha_2} \left(t^{-1/2} \right).$$

►

Exemplo 2.3.2 Sejam $f(t) = t^{1/2}$, $\alpha_1 = 1/2$ e $\alpha_2 = 3/2$. Então,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1} f(t) = {}^{RL}D_0^{1/2} \left(t^{1/2} \right) = \Gamma(3/2) \quad e \quad {}^{RL}D_0^{\alpha_2} f(t) = {}^{RL}D_0^{3/2} \left(t^{1/2} \right) = 0.$$

Logo, ${}^{RL}D_0^{\alpha_1} {}^{RL}D_0^{\alpha_2} \left(t^{1/2} \right) = {}^{RL}D_0^{\alpha_1} (0) = 0$. Contudo,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_2} {}^{RL}D_0^{\alpha_1} f(t) = {}^{RL}D_0^{3/2} (\Gamma(3/2)) = {}^{RL}D_0^{3/2} (\Gamma(3/2)t^0) = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)} t^{-3/2} = -\frac{t^{-3/2}}{4}.$$

Além disso,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f(t) = {}^{RL}D_0^2 \left(t^{1/2} \right) = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)} t^{-3/2} = -\frac{t^{-3/2}}{4}.$$

Portanto,

$${}^{RL}D_0^{\alpha_1} {}^{RL}D_0^{\alpha_2} f(t) \neq {}^{RL}D_0^{\alpha_2} {}^{RL}D_0^{\alpha_1} f(t) = {}^{RL}D_0^{\alpha_1+\alpha_2} f(t).$$

►

Nos exemplos anteriores a soma das ordens de derivação era igual a 1 (um). O seguinte exemplo ilustra o caso em que a soma das ordens de derivação é maior que 1 e a Proposição 2.3.2 é verificada, mas não é válida a propriedade comutativa.

Exemplo 2.3.3 Sejam $f(t) = c$, $c \in \mathbb{R}^*$, $\alpha_1 = 1$ e $0 < \alpha_2 < 1$. Então,

$${}^{RL}D_0^{1+\alpha_2} (c) = {}^{RL}D_0^1 \left({}^{RL}D_0^{\alpha_2} (c) \right) = \frac{c t^{-1-\alpha_2}}{\Gamma(-\alpha_2)},$$

enquanto que

$${}^{RL}D_0^{\alpha_2} \left({}^{RL}D_0^1 (c) \right) = {}^{RL}D_0^{\alpha_2} (0) = 0.$$

►

Uma propriedade importante da derivada de ordem inteira é a linearidade com respeito à soma de funções. A derivada de Riemann-Liouville também é um operador linear, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.3.5 *Sejam f_1 e f_2 definidas em $[a, b]$ tais que ${}^{RL}D_a^\alpha f_1$ e ${}^{RL}D_a^\alpha f_2$ existam em $[a, b]$. Então, para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, a derivada ${}^{RL}D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe em $[a, b]$ e*

$${}^{RL}D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}^{RL}D_a^\alpha f_1 + c_2 {}^{RL}D_a^\alpha f_2. \quad (2.27)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n = \lceil \alpha \rceil$. Pela linearidade da integral, tem-se que

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-\alpha} (c_1 f_1 + c_2 f_2) \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(c_1 I_a^{n-\alpha} f_1 + c_2 I_a^{n-\alpha} f_2 \right) \\ &= c_1 {}^{RL}D_a^\alpha f_1 + c_2 {}^{RL}D_a^\alpha f_2. \end{aligned}$$

■

Um análogo ao Teorema 2.2.6 para o operador ${}^{RL}D_a^\alpha$ será enunciado a seguir e sua demonstração pode ser encontrada em (DIETHELM, 2010, p. 31).

Teorema 2.3.6 *Seja $\alpha > 0$ e (f_k) uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas em $[a, b]$. Se ${}^{RL}D_a^\alpha f_k$ existe para todo $k \in \mathbb{N}$ e converge uniformemente em $[a + \epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$ com $a + \epsilon < b$, então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left({}^{RL}D_a^\alpha f_k \right) (t) = {}^{RL}D_a^\alpha \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (t). \quad (2.28)$$

para todo $t \in (a, b]$.

■

O Corolário 2.3.7 é uma aplicação direta do teorema anterior e da Proposição 2.3.5 para funções analíticas.

Corolário 2.3.7 *Seja f uma função analítica em $(a - h, a + h)$ para algum $h > 0$. Se $\alpha > 0$ com $\alpha \notin \mathbb{N}$, então*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad (2.29)$$

para $a < t < a + h$. Em particular, ${}^{RL}D_a^\alpha f(t)$ é analítica em $(a, a + h)$.

■

Uma regra importante no contexto de derivadas de ordem inteiras é a regra de Leibniz, ou regra do produto. Essa regra pode ser generalizada para as derivadas inteiras de ordem superior pela seguinte proposição.

Proposição 2.3.8 (Regra de Leibniz) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f, g \in C^n[a, b]$, então*

$$\frac{d^n}{dt^n}(f \cdot g)(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}f}{dt^{n-k}} \cdot \frac{d^k g}{dt^k}, \quad (2.30)$$

$$\text{em que } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue por indução aplicada na ordem de derivação n . ■

A regra de Leibniz pode ser generalizada para a derivada de ordem não inteira de Riemann-Liouville na classe das funções analíticas como enuncia o seguinte teorema e cuja demonstração pode ser encontrada em (PODLUBNY, 1998, p. 96).

Teorema 2.3.9 *Sejam $\alpha > 0$ e as funções f e g analíticas em $[a, b]$. Então,*

$${}^{RL}D_a^\alpha (fg)(t) = \sum_{k=0}^m \binom{\alpha}{k} {}^{RL}D_a^{\alpha-k} f(t) {}^{RL}D_a^k g(t) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} I_a^{k-\alpha} f(t) {}^{RL}D_a^k g(t), \quad (2.31)$$

em que $m \in \mathbb{N}$ com $m \leq \alpha < m+1$ ($m = \lfloor \alpha \rfloor$). ■

Observação 2.3.4 *No teorema anterior $\binom{\alpha}{k}$ é chamado de **Coeficiente Binomial Generalizado** e é dado por*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (2.32)$$

em que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$ e $k \in \mathbb{N}$. Em particular, se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha < k$, então a Equação 2.32 se anula. ◀

Essa seção será finalizada com as propriedades que mostram em que condições os operadores integração e derivação de Riemann-Liouville são operações inversas.

Teorema 2.3.10 *Seja $\alpha > 0$. Se $f \in L_1[a, b]$, então*

$${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t). \quad (2.33)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n = \lceil \alpha \rceil$. Então

$${}^{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} [I_a^{n-\alpha} (I_a^\alpha f(t))] = \frac{d^n}{dt^n} [I_a^n f(t)] = f(t). \quad \blacksquare$$

O teorema acima mostra que a derivada de Riemann-Liouville é uma inversa à esquerda do operador integral. Sob as mesmas condições, não é possível mostrar que o operador derivada é uma inversa à direita do operador integral, mas é possível obter a seguinte relação cuja demonstração será omitida (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 45).

Teorema 2.3.11 *Seja $\alpha > 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se $f \in L_1[a, b]$, então*

$$I_a^\alpha \left({}^{RL}D_a^\alpha f(t) \right) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \left(I_a^{n-\alpha} f(t) \right) \right]_{t=a^+}, \quad (2.34)$$

em que $t = a^+$ representa o limite $t \rightarrow a^+$. ■

Observação 2.3.5 *A expressão entre colchetes de (2.34) pode ser reescrita por $I_a^{1-\alpha} f(t)$ se $0 < \alpha \leq 1$ e por*

$$\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \left(I_a^{n-\alpha} f(t) \right) = \begin{cases} {}^{RL}D_a^{\alpha-k} f(t), & \text{se } k = 1, \dots, n-1, \\ I_a^{n-\alpha} f(t), & \text{se } k = n, \end{cases} \quad (2.35)$$

se $\alpha > 1$, pois $n - \alpha = (n - k) - (\alpha - k)$. ◀

Essa seção será encerrada mostrando em que caso a derivada de Riemann-Liouville é uma inversa à direita da integral homônima.

Teorema 2.3.12 *Sejam $\alpha > 0$ e $f(t) = I_a^\alpha \phi(t)$ em que $\phi \in L_1[a, b]$. Então,*

$$I_a^\alpha \left({}^{RL}D_a^\alpha f(t) \right) = f(t). \quad (2.36)$$

DEMONSTRAÇÃO: De fato,

$$I_a^\alpha \left({}^{RL}D_a^\alpha f(t) \right) = I_a^\alpha \left({}^{RL}D_a^\alpha I_a^\alpha \phi(t) \right) = I_a^\alpha \phi(t) = f(t). \quad \blacksquare$$

2.4 O Operador Derivada de Caputo

A derivada de Caputo distingue-se da derivada de Riemann-Liouville em relação à ordem em que os operadores integração de ordem não inteira e a derivada de ordem inteira são aplicados. Essa diferença gera consequências significativas tanto no resultado da derivada de algumas funções quanto no contexto das aplicações em fenômenos físicos (PODLUBNY, 1998). Nesta seção, será abordada a definição do operador derivada de Caputo, algumas das principais propriedades e sua relação com o operador derivada de Riemann-Liouville.

Definição 2.4.1 *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $f(t)$ tal que $\frac{d^n f}{dt^n} \in L_1[a, b]$. O operador definido por*

$${}^CD_a^\alpha f(t) := I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \quad (2.37)$$

é chamado de Operador Derivada de Ordem α de Caputo. ▲

Observação 2.4.1 Se $\alpha \in \mathbb{N}$, então a derivada de Caputo é equivalente a uma derivação inteira de ordem α , assim como ocorre na derivada de Riemann-Liouville. ◀

Quando estiver claro a ordem de derivação do operador da Definição 2.4.1, esse será chamado, simplesmente, de derivada de Caputo. Assim como na derivada de Riemann-Liouville, o operador $I_a^{n-\alpha}$, $n = \lceil \alpha \rceil$, é responsável pelo efeito de memória hereditária para a derivada de Caputo e o limite inferior do intervalo $[a, t]$ é dito **extremo inicial** da derivada de Caputo.

A derivada de Caputo é linear em relação à soma de funções e produto por escalar como mostra a

Proposição 2.4.1 Sejam f_1 e f_2 definidas em $[a, b]$ tais que ${}^C D_a^\alpha f_1$ e ${}^C D_a^\alpha f_2$ existam em $[a, b]$. Então, para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, a derivada ${}^C D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe em $[a, b]$ e

$${}^C D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 {}^C D_a^\alpha f_1 + c_2 {}^C D_a^\alpha f_2. \quad (2.38)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n = \lceil \alpha \rceil$. Pela linearidade da derivada e da integral de Riemann-Liouville, tem-se que

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} (c_1 f_1 + c_2 f_2) \right) \\ &= I_a^{n-\alpha} \left(c_1 \frac{d^n f_1}{dt^n} + c_2 \frac{d^n f_2}{dt^n} \right) \\ &= c_1 I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f_1}{dt^n} \right) + c_2 I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f_2}{dt^n} \right) \\ &= c_1 {}^C D_a^\alpha f_1 + c_2 {}^C D_a^\alpha f_2. \end{aligned}$$

■

O seguinte teorema realiza a conexão entre as definições da derivada de Riemann-Liouville (Definição 2.3.1) e a derivada de Caputo e exhibe que esses dois operadores não produzem o mesmo resultado em todos os casos em que seja possível aplicar tais operadores.

Teorema 2.4.2 Sejam $\alpha \geq 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se para f existe $g \in L_1[a, b]$ tal que

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^t g(\tau) d\tau, \quad (2.39)$$

q.t.p. em $[a, b]$, então

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha \left(f(t) - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}(t) \right), \quad (2.40)$$

em que $\mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}(t)$ denota o polinômio de Taylor de grau $n-1$ da função f em torno do ponto $t = a$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\alpha \in \mathbb{N}$, então ambos os membros de (2.40) da igualdade serão a derivada $\frac{d^n f}{dt^n}$. Pela linearidade da derivada e pelo fato do grau de $\mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}(t)$ ser $n-1$, o resultado segue. Se $\alpha \notin \mathbb{N}$, tem-se que $n > \alpha$ e

$${}^{RL}D_a^\alpha \left(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} \right) (t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-\alpha} \left(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} \right) (t) \right).$$

A integral de Riemann-Liouville na equação acima pode ser reescrita por

$$\begin{aligned} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} \right) (\tau) d\tau &= \\ &= -(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1})(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_a^t + \\ &\quad + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left(\frac{d \left(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} \right) (\tau)}{d\tau} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Uma vez que a primeira parcela se anula, obtém-se

$$I_a^{n-\alpha} (f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}) (t) = I_a^{n-\alpha+1} \left(\frac{d(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1})(t)}{dt} \right).$$

Repetindo esse processo n vezes, chega-se em

$$\begin{aligned} I_a^{n-\alpha} (f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}) (t) &= I_a^{2n-\alpha} \left(\frac{d^n (f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1})(t)}{dt^n} \right) \\ &= I_a^n I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \\ &= I_a^n \left({}^C D_a^\alpha f(t) \right), \end{aligned}$$

pois $\frac{d^n (\mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1})(t)}{dt^n} = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha \left(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} \right) (t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^{n-\alpha} \left(f - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} \right) (t) \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I_a^n \left({}^C D_a^\alpha f(t) \right) \right) \\ &= {}^C D_a^\alpha f(t). \end{aligned}$$

■

Observação 2.4.2 Aplicando a Proposição 2.3.4 na Equação 2.40, obtém-se

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL}D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (2.41)$$

◀

Os resultados obtidos para a derivada de Riemann-Liouville podem ser estendidos, a partir do Teorema 2.4.2, para a derivada de Caputo considerando a classe de funções que possuem derivadas contínuas até ordem $\lceil \alpha \rceil - 1$ em torno de $t = a$. O seguinte corolário mostra quando esses dois operadores serão equivalentes.

Corolário 2.4.3 ${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t)$ se, e somente se, $f(t)$ satisfaz a Equação 2.39 com $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. ■

A seguinte proposição mostra como obter a derivada de Caputo de ordem α para funções $f(t) = (t - a)^\beta$ com $\beta > \lceil \alpha \rceil - 1$.

Proposição 2.4.4 Seja $f(t) = (t - a)^\beta$. Então,

$${}^C D_a^\alpha \left((t - a)^\beta \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}, & \text{se } \beta > n - 1, \end{cases} \quad (2.42)$$

em que $n = \lceil \alpha \rceil$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\beta \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ então a derivada de ordem n anula $f(t) = (t - a)^\beta$ e o resultado segue do fato que $I_a^{n-\alpha}(0) = 0$. Se $\beta > n - 1$, então

$$f^{(n-1)}(t) = \beta(\beta - 1) \cdots (\beta - n + 2)(t - a)^{\beta - n + 1},$$

que é integrável em $[a, +\infty)$. Além disso, $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Logo, pelo Corolário 2.4.3, tem-se que

$${}^C D_a^\alpha \left((t - a)^\beta \right) = {}^{RL} D_a^\alpha \left((t - a)^\beta \right)$$

e o resultado segue da Proposição 2.3.4. ■

Observação 2.4.3 Na Proposição 2.3.4 foi considerado $\beta > -1$, enquanto que na Proposição 2.4.4 tem-se $\beta > \lceil \alpha \rceil - 1$. A diferença entre essas proposições deve-se ao fato da integral de Riemann-Liouville de funções potência ser convergente apenas para expoente maior que -1 conforme Proposição 2.2.4 e Corolário 2.2.5. Nesse caso, a potência do termo $\frac{d^n(t - a)^\beta}{dt^n}$ será maior que -1 sempre que $\beta > n - 1$. ◀

Assim como para a derivada e a integral de Riemann-Liouville, obter expressões fechadas para uma dada função que não seja da forma $(t - a)^\beta$ pode ser extremamente complicado ou mesmo não existir. O Teorema 2.4.2 fornece que se $f(t)$ é analítica então é possível obter a derivada de Caputo em termos de uma série.

Corolário 2.4.5 *Seja f uma função analítica em $(a - h, a + h)$ para algum $h > 0$. Se $\alpha > 0$ com $n = \lceil \alpha \rceil$, então*

$${}^C D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha}, \quad (2.43)$$

para $a < t < a + h$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $f(t)$ é analítica em $(a - h, a + h)$, então satisfaz (2.40) e, pelo Teorema 2.4.2, tem-se que

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(t) &= {}^{RL} D_a^\alpha \left(f(t) - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}(t) \right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

■

A fórmula da derivada do produto de duas funções também pode ser obtida para a derivada de Caputo a partir do Teorema 2.3.9 e será apresentada para o caso $0 < \alpha < 1$.

Teorema 2.4.6 *Sejam $\alpha \in (0, 1)$ e f, g funções analíticas em $[a, b]$. Então,*

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (fg)(t) &= \left({}^C D_a^\alpha f(t) \right) g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} I_a^{k-\alpha} f(t) {}^C D_a^k g(t) + \\ &\quad + \frac{f(a)(g(t) - g(a))}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (fg)(t) &= {}^{RL} D_a^\alpha (f(t)g(t) - f(a)g(a)) \\ &= \left({}^{RL} D_a^\alpha f(t) \right) g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} I_a^{k-\alpha} f(t) {}^{RL} D_a^k g(t) - \frac{f(a)g(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $f(a)g(t) {}^{RL} D_a^\alpha (1) = \frac{f(a)g(t)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}$ na equação acima, obtém-se

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha (fg)(t) &= \left({}^{RL} D_a^\alpha [f(t) - f(a)] \right) g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} I_a^{k-\alpha} f(t) {}^{RL} D_a^k g(t) + \\ &\quad + \frac{f(a)(g(t) - g(a))}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha} \\ &= \left({}^C D_a^\alpha f(t) \right) g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} I_a^{k-\alpha} f(t) {}^C D_a^k g(t) + \\ &\quad + \frac{f(a)(g(t) - g(a))}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

■

Procedendo de maneira análoga à demonstração acima, é possível obter a derivada de Caputo do produto entre duas funções para qualquer valor de $\alpha > 1$.

A derivada de Caputo ao ser aplicada à esquerda da integral de Riemann-Liouville de uma função contínua, ambas de mesma ordem, possui propriedade de aplicação inversa. O seguinte teorema mostra essa relação.

Teorema 2.4.7 *Se $f(t)$ é contínua e $\alpha \geq 0$, então*

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t). \quad (2.45)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\phi(t) = I_a^\alpha f(t)$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Então,

$$\frac{d^k \phi(t)}{dt^k} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - k)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1-k} f(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Portanto, a função $\phi(t)$ possui $(n-1)$ derivadas nulas em $t = a$. Logo, pelo Corolário 2.4.3 e pelo Teorema 2.3.10,

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = {}^C D_a^\alpha \phi(t) = {}^{RL} D_a^\alpha \phi(t) = {}^{RL} D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

■

A concatenação contrária ao exposto no Teorema 2.4.7 está relacionada com a integral iterada de ordem n aplicada à n -ésima derivada de $f(t)$.

Teorema 2.4.8 *Sejam $\alpha \geq 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se a derivada de Caputo de $f(t)$ existe, então*

$$I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^n \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right). \quad (2.46)$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue da definição da derivada de Caputo e do Teorema 2.2.2 que

$$I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = I_a^n \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right).$$

■

Observação 2.4.4 *A Fórmula de Taylor de uma função $f(t)$ que possui n derivadas no ponto $t = a$ é dada por*

$$f(t) = \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1} + R_{n-1}(t), \quad (2.47)$$

em que $R_{n-1}(t)$ é o resto da série de Taylor de $f(t)$. Uma das fórmulas para o resto de Taylor é dada por

$$R_{n-1}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} \left(\frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} \right) d\tau, \quad (2.48)$$

e pode ser obtida por indução em n . Claramente, $R_{n-1}(t)$ é a mesma expressão do membro da direita de (2.46). ◀

A partir do Teorema 2.4.8 e da observação acima é possível concluir o seguinte corolário para a **Fórmula de Taylor com resto** $I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t)$.

Corolário 2.4.9 *Sejam $\alpha \geq 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se para f existe $g \in L_1[a, b]$ tal que*

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(a) + \int_a^t g(\tau) d\tau,$$

q.t.p. em $[a, b]$, então

$$f(t) = \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}(t) + I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t). \quad (2.49)$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela hipótese, $f(t)$ possui n derivadas no ponto $t = a$ e a derivada de Caputo de ordem α de $f(t)$ existe. O resultado segue aplicando o Teorema 2.4.8 na fórmula de Taylor com resto integral dada nas Equações 2.47 e 2.48. ■

Observação 2.4.5 *Como aplicação do Corolário 2.4.9, tem-se que a integral de Riemann-Liouville não é uma inversa à esquerda da derivada de Caputo, em geral, e vale*

$$I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha f(t) = f(t) - \mathcal{T}_{(f,a)}^{n-1}(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \quad (2.50)$$

◀

A seguir serão apresentadas algumas propriedades sobre a concatenação do operador de Caputo.

Teorema 2.4.10 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $f \in C^n[a, b]$. Então, dado $\beta \in (0, 1)$ com $\alpha + \beta \in [n-1, n]$,*

$${}^C D_a^\beta ({}^C D_a^\alpha f(t)) = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.51)$$

O seguinte lema será utilizado na demonstração do teorema acima.

Lema 2.4.11 *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se $f \in C^n[a, b]$, então ${}^C D_a^\alpha f(a) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Por definição ${}^C D_a^\alpha f(t) = I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right)$. Como $I_a^{n-\alpha}$ se anula em $t = a$ para uma função contínua e $f \in C^n[a, b]$, o resultado segue. ■

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.4.10: Pelo Lema 2.4.11 e pelo Corolário 2.4.3, tem-se que

$${}^C D_a^\beta ({}^C D_a^\alpha f(t)) = {}^{RL} D_a^\beta ({}^C D_a^\alpha f(t)) = {}^{RL} D_a^\beta \left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \right).$$

Se $\alpha + \beta = n$, então $\beta = n - \alpha$ e

$${}^C D_a^\beta ({}^C D_a^\alpha f(t)) = {}^{RL} D_a^\beta \left(I_a^\beta \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \right) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = {}^C D_a^n f(t) = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Se $\alpha + \beta \notin \mathbb{N}$, então $\lceil \alpha + \beta \rceil = n$ e

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\beta \left({}^C D_a^\alpha f(t) \right) &= {}^{RL} D_a^\beta \left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(I_a^{1-\beta} \left(I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \right) \right) \\ &= I_a^{n-(\alpha+\beta)} \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) \\ &= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

■

Corolário 2.4.12 *O operador de Caputo é comutativo se $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\alpha + \beta \in (0, 1]$ e $f(t)$ é diferenciável.*

■

Proposição 2.4.13 *Seja $0 < \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N}$ e $f \in C^{k+1}[a, b]$. Então,*

$${}^C D_a^\alpha \left({}^C D_a^k f(t) \right) = {}^C D_a^{\alpha+k} f(t). \quad (2.52)$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $0 < \alpha < 1$ e $k \in \mathbb{N}$, então $\lceil \alpha + k \rceil = k + 1$. Portanto, $\lceil \alpha + k \rceil - (\alpha + k) = 1 - \alpha$ e

$${}^C D_a^\alpha \left({}^C D_a^k f(t) \right) = {}^C D_a^\alpha \left(\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right) = I_a^{1-\alpha} \left(\frac{d^{k+1} f(t)}{dt^{k+1}} \right) = I_a^{\lceil \alpha + k \rceil - (\alpha + k)} \left(\frac{d^{k+1} f(t)}{dt^{k+1}} \right).$$

A última igualdade é a definição de ${}^C D_a^{\alpha+k} f(t)$.

■

Para finalizar essa seção, serão apresentados dois exemplos que evidenciam a necessidade das hipóteses do Teorema 2.4.10.

Exemplo 2.4.1 *A derivada de Caputo de ordem $\alpha = 0,8$ de $f(t) = t$ é dada por ${}^C D_0^{0,8}(t) = \frac{t^{0,2}}{\Gamma(1,2)}$. Portanto,*

$${}^C D_0^{0,8} \left({}^C D_0^{0,8}(t) \right) = {}^C D_0^{0,8} \left(\frac{t^{0,2}}{\Gamma(1,2)} \right) = \frac{t^{-0,6}}{\Gamma(0,4)}.$$

Contudo, ${}^C D_0^{1,6}(t) = 0$. Nesse caso, $\lceil 0,8 \rceil = 1$ e $1,6 \notin [0, 1]$.

►

Exemplo 2.4.2 *A derivada de Caputo de ordem $\alpha = 0,3$ de $f(t) = t^{0,3}$ é dada por ${}^C D_0^{0,3}(t^{0,3}) = \Gamma(1,3)$. Portanto,*

$${}^C D_0^{0,3} \left({}^C D_0^{0,3}(t^{0,3}) \right) = {}^C D_0^{0,3} (\Gamma(1,3)) = 0.$$

Contudo, ${}^C D_0^{0,6}(t^{0,3}) = \frac{\Gamma(1,3)}{\Gamma(0,7)} t^{-0,3}$. Nesse caso, $t^{0,3} \notin C^1[0, b]$, para nenhum $b > 0$.

►

2.5 O Operador Derivada de Grünwald-Letnikov

O operador de Grünwald-Letnikov é obtido a partir da generalização da derivada de ordem n dada por

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (2.53)$$

em que $f(t)$ é uma função n vezes diferenciável em $t \in [a, b]$ ¹. A Equação 2.53 pode ser obtida por indução em n a partir da relação de recorrência

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} \right). \quad (2.54)$$

Por definição, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ se anula sempre que $k > n$ e

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh). \quad (2.55)$$

Para valores diferentes de zero de h , essa substituição acarreta no fato da função $f(t)$ ter que ser definida no intervalo $(t - nh, t + nh)$. Contudo, para valores próximos a zero de h tem-se $(t - nh, t + nh) \subset [a, b]$. Logo, a expressão à direita em (2.55) pode ser utilizada no lugar do somatório da Equação 2.53.

A derivada de Grünwald-Letnikov é obtida a partir da substituição da ordem n por uma ordem $\alpha > 0$ em (2.53) considerando-se a série no lugar do somatório. Nesse caso, será utilizado o coeficiente binomial generalizado (Observação 2.3.4, p. 59) para obter a definição dessa derivada. Diferente do que acontece em ordem inteira, o coeficiente binomial generalizado não se anula para valores de $k > \alpha$ no caso de $\alpha \notin \mathbb{N}$. Com a finalidade de obter uma definição que possa ser relacionada com as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo serão consideradas apenas funções definidas em intervalos limitados inferiormente (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993).

A derivada de Grünwald-Letnikov é definida em sequência.

Definição 2.5.1 *Sejam $\alpha > 0$ e $f(t)$ definida em $[a, b]$. O operador definido por*

$${}^G L D_a^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(h_N)^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh_N), \quad (2.56)$$

em que $h_N = (t - a)/N$, é chamado de **Operador Derivação de Ordem α de Grünwald-Letnikov** nos casos em que o limite existir. ▲

¹ Nos extremos dos intervalos são consideradas apenas as derivadas laterais.

Observação 2.5.1 *Devido ao fato de $k \leq N$, tem-se que $t - kh_N \geq t - Nh_N = a$. Portanto, a derivada de Grünwald-Letnikov de $f(t)$ depende dos valores da função no intervalo $(a, t]$. Isso também evidencia a característica de memória hereditária presente nessa definição.* ◀

A derivada de Grünwald-Letnikov e de Riemann-Liouville são equivalentes na classe das funções com derivadas contínuas até ordem $\lceil \alpha \rceil$ conforme o seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em (PODLUBNY, 1998, p. 63).

Teorema 2.5.1 *Seja $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $f(t) \in C^n[a, b]$. Então, para $t \in (a, b]$,*

$${}^{GL}D_a^\alpha f(t) = {}^{RL}D_a^\alpha f(t). \quad (2.57)$$

■

Em particular, o teorema afirma que o limite em (2.5.1) é convergente se $f(t) \in C^n[a, b]$. Devido a essa equivalência, todas as propriedades obtidas na seção 2.3 serão válidas para a derivada de Grünwald-Letnikov ao adaptar as hipóteses convenientemente. Além disso, a derivada de Caputo pode ser relacionada com a derivada de Grünwald-Letnikov pelo Teorema 2.4.2, sempre que $f(t) \in C^n[a, b]$.

A importância desse operador está relacionada com a obtenção de métodos numéricos para a derivação e soluções de equações diferenciais de ordem não inteira para os operadores derivação de Caputo e Riemann-Liouville como será visto nos capítulos subsequentes.

3 Equações Diferenciais de Ordem Não Inteira

Equações diferenciais de ordem não inteira¹ possuem aplicações em diversas áreas da ciência segundo [Kilbas, Srivastava e Trujillo \(2006\)](#). Os primeiros trabalhos no contexto das aplicações das derivadas de ordem não inteira devem-se a Abel, relacionados ao problema da tautócrona, e a Heaviside que publicou uma série de trabalhos no final do século XIX em que se introduziu a ideia de derivadas de ordem não inteira em aplicações voltadas ao estudo do potencial e em linhas de transmissão ([DEBNATH, 2004](#)). Embora Abel e Heaviside tenham exibido algumas aplicações na solução de problemas, não é encontrado um grande número de aplicações envolvendo tais conceitos antes da década de 1970 ([MILLER; ROSS, 1993](#)). A partir dessa década é possível encontrar uma grande quantidade de aplicações em várias áreas da ciência, em particular para sistemas tais que dependem de toda a memória dos eventos passados, também denominado de sistemas com memória hereditária, para predizer o futuro ([WESTERLUND, 1991](#)).

Neste capítulo serão enunciados os teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais segundo os operadores de Riemann-Liouville e de Caputo e os principais métodos numéricos para as discretizações. Antes de apresentar os referidos teoremas, serão apresentadas as funções de Mittag-Leffler que possuem propriedades análogas a da função exponencial no contexto de equações diferenciais de ordem um.

3.1 Funções de Mittag-Leffler

As funções apresentadas nesta seção cumprem um papel importante no contexto de equações diferenciais de ordem não inteira. Elas são definidas por séries de potências que dependem da função $\Gamma(\cdot)$, definida na [seção 2.1](#), e foram propostas² inicialmente por [Mittag-Leffler \(1903\)](#) e estendidas posteriormente por [Agarwal \(1953\)](#). As funções de Mittag-Leffler fornecem exemplos e contra-exemplos para o crescimento e outras propriedades para funções inteiras de ordem finita ([ERDELYI, 1955](#)).

Definição 3.1.1 *A função de Mittag-Leffler a dois parâmetros é definida por*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (3.1)$$

¹ O termo utilizado em inglês é *fractional differential equations* (FDE). Embora seja possível definir equações diferenciais para qualquer $\alpha > 0$, esse nome é mantido devido aos primeiros textos sobre esse tema que utilizavam a expressão *fractional* no lugar de *non-integer*.

² Nos trabalhos realizados por Mittag-Leffler eram consideradas apenas $E_{\alpha,1}(z)$.

para $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. ▲

Segundo Erdelyi (1955), a função $E_{\alpha,\beta}(z)$ é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. No seguinte exemplo é apresentado alguns casos particulares da função $E_{\alpha,\beta}(z)$.

Exemplo 3.1.1

$$\begin{aligned} a) \quad E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z; \\ b) \quad E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}; \\ c) \quad E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z); \\ d) \quad E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \end{aligned}$$

►

O comportamento assintótico de $E_{\alpha,\beta}(z)$ quando $z \rightarrow \infty$ é enunciado no Teorema 3.1.1. Como será observado, esse comportamento está relacionado com o argumento de z e com o valor de α . Uma demonstração pode ser encontrada em (ERDELYI, 1955, p. 210).

Teorema 3.1.1 *Sejam $0 < \alpha < 2$ e $\beta > 0$. A função de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$ possui o seguinte comportamento quando $|z| \rightarrow +\infty$:*

$$\begin{aligned} (i) \quad E_{\alpha,\beta}(z) &\rightarrow 0, \text{ se } |\arg(z)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \\ (ii) \quad E_{\alpha,\beta}(z) &\rightarrow \infty, \text{ se } |\arg(z)| < \alpha \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

em que $\arg(z)$ representa o argumento do número complexo z em relação ao eixo real. ■

A seguinte proposição garante que a função $E_{\alpha,1}(z)$ é limitada para $|\arg(z)| = \alpha \frac{\pi}{2}$. (DIETHELM, 2010, p. 71).

Proposição 3.1.2 *Seja $0 < \alpha < 2$. Se $|\arg(z)| = \alpha \frac{\pi}{2}$, então*

$$|E_{\alpha,1}(z)| < M, \tag{3.2}$$

para algum $M > 0$ quando $|z| \rightarrow +\infty$. ■

Nas seções que se seguem, serão discutidos os conceitos de equações diferenciais de ordem não inteira e problemas de valores iniciais, segundo os operadores de Riemann-Liouville e de Caputo, com respeito às condições de existência e unicidade de soluções. Também será visto que as soluções de equações diferenciais lineares de ordem não inteira são dadas em termos da função de Mittag-Leffler.

3.2 Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Riemann-Liouville

Uma equação diferencial de ordem não inteira (EDONI) de termo único³ segundo o operador derivada de Riemann-Liouville (Definição 2.3.1) é uma equação dada por

$${}^{RL}D_a^\alpha y = F(t, y), \quad (3.3)$$

em que $F(t, y)$ é uma função dada e $\alpha > 0$. Uma solução da Equação 3.3 no intervalo $(a, T]$, $T > a$, é dada por uma função $y = \varphi(t)$ cuja igualdade é verificada para todo $t \in (a, T]$.

Observação 3.2.1 Neste texto, será considerado apenas o operador ${}^{RL}D_a^\alpha(\cdot)$ com $a = 0$. Os resultados apresentados nessa seção podem ser estendidos para outros valores de a de forma análoga. ◀

Definição 3.2.1 Um problema de Cauchy para uma EDONI segundo a derivada de Riemann-Liouville é dada pela equação

$${}^{RL}D_0^\alpha y = F(t, y), \quad (3.4)$$

com o seguinte conjunto de condições iniciais

$$\begin{cases} I_0^{n-\alpha} y(t) \Big|_{t=0^+} = b_n, \\ {}^{RL}D_0^{\alpha-k} y(t) \Big|_{t=0^+} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

em que $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $b_1, \dots, b_n$ são constantes dadas e $t = 0^+$ representa o limite $t \rightarrow 0^+$. ▲

A Equação 3.4 em conjunto com as condições iniciais em (3.5) formam um **Problema de Valor Inicial de Ordem não Inteira** (PVINI) segundo o operador derivada de Riemann-Liouville.

O motivo de se escolher as condições iniciais da forma apresentada na Definição 3.2.1 está relacionado com os teoremas apresentados em sequência.

³ Uma EDONI de múltiplos termos é definida por ${}^{RL}D_a^\alpha y = F(t, y, {}^{RL}D_a^{\alpha_1} y, \dots, {}^{RL}D_a^{\alpha_n} y)$ com $\alpha_i < \alpha$, $i = 1, \dots, n$.

Teorema 3.2.1 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $y \in C(0, h]$ e $F(t, y(t)) \in L_1[0, h]$, com $h > 0$. A função $y(t)$ é solução do PVINI (3.4)-(3.5) se, e somente se, $y(t)$ satisfaz*

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + I_0^\alpha F(t, y(t)). \quad (3.6)$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $y(t)$ é solução do PVINI (3.4)-(3.5), então, aplicando o Teorema 2.3.11, obtém-se a representação da Equação 3.6. Se $y(t)$ satisfaz a Equação 3.6, então

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^\alpha y &= {}^{RL}D_0^\alpha \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + I_0^\alpha F(t, y(t)) \right) \\ &= {}^{RL}D_0^\alpha \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \right) + {}^{RL}D_0^\alpha (I_0^\alpha F(t, y(t))) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k {}^{RL}D_0^\alpha (t^{\alpha-k})}{\Gamma(\alpha-k+1)} + {}^{RL}D_0^\alpha (I_0^\alpha F(t, y(t))). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.3.4, tem-se que ${}^{RL}D_0^\alpha (t^{\alpha-k}) = 0$ para $k = 1, \dots, n$. Pelo Teorema 2.3.10, tem-se que ${}^{RL}D_0^\alpha (I_0^\alpha F(t, y(t))) = F(t, y(t))$. Portanto, $y(t)$ satisfaz (3.4). Resta verificar que $y(t)$ satisfaz o conjunto de condições iniciais (3.5). Aplicando ${}^{RL}D_0^{\alpha-\ell}(\cdot)$, $\ell = 1, \dots, n-1$, em (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} y(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} (t^{\alpha-k})}{\Gamma(\alpha-k+1)} + {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} (I_0^\alpha F(t, y(t))) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} (t^{\alpha-k})}{\Gamma(\alpha-k+1)} + {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} (I_0^\alpha F(t, y(t))) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} (t^{\alpha-k})}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{d^{\lceil \alpha-\ell \rceil}}{dt^{\lceil \alpha-\ell \rceil}} I_0^{\lceil \alpha-\ell \rceil - (\alpha-\ell)} (I_0^\alpha F(t, y(t))) \\ &\stackrel{(**)}{=} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k t^{\ell-k}}{\Gamma(\ell-k+1)} + \frac{d^{\lceil \alpha-\ell \rceil}}{dt^{\lceil \alpha-\ell \rceil}} I_0^{\lceil \alpha-\ell \rceil + \ell} (F(t, y(t))) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k t^{\ell-k}}{\Gamma(\ell-k+1)} + \frac{d^{\lceil \alpha-\ell \rceil}}{dt^{\lceil \alpha-\ell \rceil}} I_0^{\lceil \alpha-\ell \rceil} (I_0^\ell F(t, y(t))) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{b_k t^{\ell-k}}{(\ell-k)!} + I_0^\ell F(t, y(t)). \end{aligned}$$

Em (*) foi utilizado que ${}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} (t^{\alpha-k}) = 0$ se $\alpha - \ell - (\alpha - k) = k - \ell \in \mathbb{N}^*$ e em (**) foi utilizada a Proposição 2.3.4. Pela continuidade de $I_0^\ell F(t, y(t))$ tem-se que ${}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} y(0) = b_\ell$, $\ell = 1, \dots, n-1$. Finalmente, aplicando $I_0^{n-\alpha}$ em (3.6), obtém-se, da Proposição 2.2.4 e do

Teorema 2.2.2, que

$$\begin{aligned} I_0^{n-\alpha} y(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k I_0^{n-\alpha} (t^{\alpha-k})}{\Gamma(\alpha-k+1)} + I_0^{n-\alpha} (I_0^\alpha F(t, y(t))) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(n-k+1)} + I_0^n F(t, y(t)), \end{aligned}$$

o que implica em $I_0^{n-\alpha} y(0) = b_n$. ■

O seguinte teorema mostra em que condições um PVINI dado por (3.4)-(3.5), com $b_n = 0$, possui única solução contínua em um intervalo $[0, h]$, $h > 0$.

Teorema 3.2.2 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $\mathcal{R}$ o conjunto definido por*

$$\mathcal{R} = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } 0 \leq t \leq h \text{ e } \left| t^{n-\alpha} y(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| \leq K \right\},$$

com

$$\frac{M h^n}{\Gamma(\alpha+1)} \leq K,$$

em que K , h e M são constantes. Se $F(t, y)$ for contínua e limitada em $\mathcal{R}$, com $\sup_{(t,y) \in \mathcal{R}} |F(t, y)| = M$, e satisfizer a condição de Lipschitz com respeito a variável y , i.e.,

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|,$$

para algum $A > 0$, então o PVINI dado por (3.4)-(3.5), com $b_n = 0$, possui uma única solução contínua em $[0, h]$.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado será obtido utilizando o método das aproximações sucessivas. Sejam

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \quad (3.7)$$

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + I_0^\alpha F(t, y_{i-1}(t)), \quad (3.8)$$

em que $i \in \mathbb{N}^*$.

Primeiramente, será demonstrado que o conjunto $\mathcal{R}$ é não vazio. De fato,

$$\left| t^{n-\alpha} y_0(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| = 0 \leq K.$$

Além disso, é necessário mostrar que todas as funções dadas pela Equação 3.8 também pertencem ao conjunto $\mathcal{R}$. Seja y_1 definida por (3.8). Como y_0 é contínua, tem-se que

$F(t, y_0(t))$ é contínua e limitada, então

$$\begin{aligned}
\left| t^{n-\alpha} y_1(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| &= \left| t^{n-\alpha} I_0^\alpha F(t, y_0(t)) \right| \\
&\leq t^{n-\alpha} |I_0^\alpha F(t, y_0(t))| \\
&= t^{n-\alpha} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, y_0(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq t^{n-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |F(\tau, y_0(\tau))| d\tau \\
&\leq t^{n-\alpha} \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&= t^{n-\alpha} \frac{M t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
&\leq \frac{M h^n}{\Gamma(\alpha + 1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, (t, y_1) também pertence ao conjunto $\mathcal{R}$. Segue por indução em i que $y_i(t)$ são funções contínuas e que $(t, y_i(t)) \in \mathcal{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Aplicando indução em i , mostra-se que as funções $y_i(t)$ satisfazem

$$|y_i(t) - y_{i-1}(t)| \leq \frac{M A^{i-1} h^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}.$$

Para $i = 1$, tem-se que

$$|y_1(t) - y_0(t)| = |I_0^\alpha F(t, y_0(t))| \leq \frac{M t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq \frac{M h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

e, para $i = 2$, que

$$\begin{aligned}
|y_2(t) - y_1(t)| &= |I_0^\alpha F(t, y_1(t)) - I_0^\alpha F(t, y_0(t))| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} [F(\tau, y_1(\tau)) - F(\tau, y_0(\tau))] d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |F(\tau, y_1(\tau)) - F(\tau, y_0(\tau))| d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} A |y_1(\tau) - y_0(\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \frac{M \tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M A}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\alpha d\tau \\
&\leq \frac{M A t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
&\leq \frac{M A h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},
\end{aligned}$$

em que a penúltima desigualdade segue pela Equação 2.17 utilizada na demonstração do Teorema 2.2.2. Supondo que o resultado seja verdadeiro para $i-1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
|y_i(t) - y_{i-1}(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |F(\tau, y_{i-1}(\tau)) - F(\tau, y_{i-2}(\tau))| d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} A |y_{i-1}(\tau) - y_{i-2}(\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \frac{A^{i-2} M \tau^{(i-1)\alpha}}{\Gamma((i-1)\alpha+1)} d\tau \\
&\leq \frac{A^{i-1} M h^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

A expressão obtida na última desigualdade é o termo geral da série convergente em $\mathbb{C}$ que determina a função $\frac{M E_{\alpha,1}(z)}{A}$ avaliada em $z = A h^\alpha$. Portanto,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{M}{A} \frac{A^i h^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} = 0$$

e $y_i(t)$ é uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente em $[0, h]$.

Se $y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i(t)$, então $y(t)$ é contínua em $[0, h]$, satisfaz a Equação 3.6 e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| t^{n-\alpha} y_i(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| = \left| t^{n-\alpha} y(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right|,$$

o que implica em $(t, y(t)) \in \mathcal{R}$.

Para finalizar, será demonstrado que a solução é única. Se existir uma outra solução do PVINI (3.4)-(3.5), $\tilde{y}(t)$, que também seja contínua em $[0, h]$ e $(t, \tilde{y}(t)) \in \mathcal{R}$, então

$$y(t) - \tilde{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [F(\tau, y(\tau)) - F(\tau, \tilde{y}(\tau))] d\tau,$$

o que implica em $y(0) - \tilde{y}(0) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
|y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} A |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{A \epsilon t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

em que $|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \epsilon$ para $t \in [0, h]$. Utilizando a estimativa anterior de forma recursiva i vezes, obtém-se

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \frac{\epsilon A^i h^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}.$$

Tomando o limite $i \rightarrow \infty$, tem-se que $|y(t) - \tilde{y}(t)| \rightarrow 0$, pois $\frac{\epsilon A^i h^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}$ é um termo da série convergente de $\epsilon E_{\alpha,1}(Ah^\alpha)$. ■

Observação 3.2.2 O Teorema 3.2.2 não é o mais geral possível, pois foi considerado $b_n = 0$, em que $n = \lceil \alpha \rceil$. Na literatura, e.g., (SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993; PODLUBNY, 1998; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; DIETHELM, 2010), encontram-se várias demonstrações similares como a apresentada acima considerando b_n qualquer, que é a forma mais geral da Equação 3.6, e o conjunto

$$\tilde{\mathcal{R}} = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } 0 < t \leq h \text{ e } \left| t^{n-\alpha} y(t) - \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{n-k}}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq K \right\}.$$

Além disso, é considerada a sequência de funções dadas por

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)}, \quad (3.9)$$

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + I_0^\alpha F(t, y_{i-1}(t)), \quad (3.10)$$

ou seja, $k = 1, \dots, n$. Ao tentar demonstrar que $(t, y_i(t))$ pertencem ao conjunto $\tilde{\mathcal{R}}$ para b_n qualquer, esses autores cometem um equívoco no passo de indução. Embora $y_0(t)$, definida em (3.9), é tal que $(t, y_0(t)) \in \tilde{\mathcal{R}}$, essa função não é escrita em termos da relação de recorrência (3.10). Portanto, ao iniciar o passo de indução a partir de $y_0(t)$ não se verifica que as funções dadas pela Equação 3.8 satisfazem $(t, y_i(t)) \in \tilde{\mathcal{R}}$. Além disso, $y_0(t)$ não é contínua em $t = 0$ para $b_n \neq 0$, o que pode implicar em $(t, y_1(t))$ não pertencer ao conjunto $\tilde{\mathcal{R}}$ dependendo de $F(t, y)$, como será ilustrado no Exemplo 3.2.1. Na verdade, ao verificar a validade da Equação 3.10 como o primeiro passo na demonstração por indução, deve-se começar de $y_1(t)$, como feito na demonstração do Teorema 3.2.2. ◀

O seguinte exemplo mostra que, dependendo da função $F(t, y)$, não é possível obter $y_1(t)$ tal que $(t, y_1) \in \tilde{\mathcal{R}}$, como discutido na observação acima.

Exemplo 3.2.1 Seja o seguinte PVINI

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^{0,3} y = y^2, \\ b_1 = a, \end{cases}$$

com $a \in \mathbb{R}^*$. A função $F(t, y) = y^2$ é contínua e Lipschitz. Além disso, é limitada em qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Procedendo como na demonstração do Teorema 3.2.2,

as funções $y_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, são dadas por

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{a t^{-0,7}}{\Gamma(0,3)}, \\ y_i(t) &= \frac{a t^{-0,7}}{\Gamma(0,3)} + I_0^\alpha y_{i-1}^2(t). \end{aligned}$$

Considerando o conjunto $\tilde{\mathcal{R}}$ no lugar de $\mathcal{R}$, tem-se que $(t, y_0(t)) \in \tilde{\mathcal{R}}$. Contudo,

$$\begin{aligned} \left| t^{0,7} y_1(t) - \frac{a}{\Gamma(0,3)} \right| &= \left| t^{0,7} I_0^{0,3} \left(\frac{a t^{-0,7}}{\Gamma(0,3)} \right)^2 \right| \\ &= \left| t^{0,7} I_0^{0,3} \frac{a^2 t^{-1,4}}{(\Gamma(0,3))^2} \right| \\ &= t^{0,7} \left| \frac{1}{\Gamma(0,3)} \int_0^t (t-\tau)^{-0,7} \frac{a^2 \tau^{-1,4}}{(\Gamma(0,3))^2} d\tau \right| \\ &= \frac{a^2 t^{0,7}}{(\Gamma(0,3))^3} \left| \int_0^t (t-\tau)^{-0,7} \tau^{-1,4} d\tau \right|. \end{aligned}$$

A integral na última igualdade é divergente pelo Corolário 2.2.5, e $(t, y_1(t)) \notin \tilde{\mathcal{R}}$. Além disso, a mesma equação mostra que $|y_1(t) - y_0(t)|$ também diverge. ►

Observação 3.2.3 Se o PVINI (3.4)-(3.5) for tal que $F(t, y) = g(t)$ com $g \in C[0, h]$, então, pelos Teoremas 2.3.10 e 3.2.1, a solução é dada por

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau.$$

◀

Observação 3.2.4 Em particular, se (3.4) for autônoma, $\alpha \in (0, 1)$ e $b_1 = 0$, tem-se que a solução do PVINI é a função identicamente nula. ◀

O papel análogo da função exponencial, estudada nas soluções de equações diferenciais de ordem inteira lineares, é dado por uma função escrita em termos da função de Mittag-Leffler (Definição 3.1.1) para o caso de ordem não inteira. A seguinte proposição mostra a solução em termos dessa função para a EDONI linear ${}^{RL}D_0^\alpha y = \lambda y$.

Proposição 3.2.3 A função dada por

$$y(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha) \tag{3.11}$$

é solução da equação ${}^{RL}D_0^\alpha y = \lambda y$ para $\alpha > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, pela Definição 3.1.1 e pelo Corolário 2.3.7, tem-se que

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^\alpha \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \right) &= {}^{RL}D_0^\alpha \left(t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} {}^{RL}D_0^\alpha \left(t^{\alpha k + \alpha - 1} \right) \\
&= \frac{{}^{RL}D_0^\alpha (t^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} {}^{RL}D_0^\alpha \left(t^{\alpha k + \alpha - 1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \frac{\Gamma(\alpha k + \alpha)}{\Gamma(\alpha k)} t^{\alpha k - 1} \\
&= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{\alpha(k-1) + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha k)} \\
&= \lambda t^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha k)} \\
&= \lambda t^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^{k-1}}{\Gamma(\alpha(k-1) + \alpha)} \\
&= \lambda t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \\
&= \lambda \left(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \right).
\end{aligned}$$

■

Observação 3.2.5 *Pela linearidade da derivada de Riemann-Liouville, tem-se que*

$$y(t) = c t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)$$

também é solução da EDONI ${}^{RL}D_0^\alpha y = \lambda y$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

◀

Observação 3.2.6 *Embora provou-se o teorema de existência e unicidade para o caso em que $b_n = 0$, o teorema pode ser demonstrado para EDONIs lineares aplicando o método das aproximações sucessivas, considerando o conjunto $\tilde{\mathcal{R}}$ (Observação 3.2.2) com $0 < \alpha < 1$, mesmo para $b_1 \neq 0$. Nesse caso, tem-se que*

$$I_0^{1-\alpha} \left(c t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \right) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} t^{\alpha k},$$

o que implica na condição inicial $b_1 = c$.

◀

Considerando $\alpha \geq 1$ e aplicando o Corolário 2.3.7 para obter as derivadas ${}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} y(t)$, em que $y(t)$ é dada por (3.11), tem-se

$${}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \ell)} t^{\alpha k + \ell - 1}, \quad \text{para } \ell = 1, \dots, n-1,$$

em que $n = \lceil \alpha \rceil$. Além disso, $I_0^{n-\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + n)} t^{\alpha k + n - 1}$. Assim, a função $y(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} I_0^{n-\alpha} y(t) \Big|_{t=0^+} = 0, \\ {}^{RL}D_0^{\alpha-1} y(t) \Big|_{t=0^+} = 1, \\ {}^{RL}D_0^{\alpha-\ell} y(t) \Big|_{t=0^+} = 0, \quad \ell = 2, \dots, n-1, \text{ se } \alpha > 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Logo, pelo Teorema 3.2.2, a função $y(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)$ é a única solução do PVINI dado pela equação ${}^{RL}D_0^\alpha y = \lambda y$ com condições iniciais (3.12).

Observação 3.2.7 Substituindo a segunda linha de (3.12) por ${}^{RL}D_0^{\alpha-1} y(t) \Big|_{t=0^+} = b_1 \in \mathbb{R}$, então a solução de ${}^{RL}D_0^\alpha y = \lambda y$ para $\alpha \geq 1$ é dada por

$$y(t) = b_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha).$$

◀

Gráficos de $y(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)$ para $t \in [0, 3]$, $\lambda = 1$ e diferentes valores de α estão apresentados nas Figuras 3.1 e 3.2. Observa-se que a exponencial e^t , caso $\alpha = 1$, divide o plano em duas regiões: para valores de $\alpha < 1$, os gráficos ocorrem acima de e^t e são descontínuas, enquanto que os gráficos para valores de $\alpha > 1$ são contínuas e ocorrem abaixo.

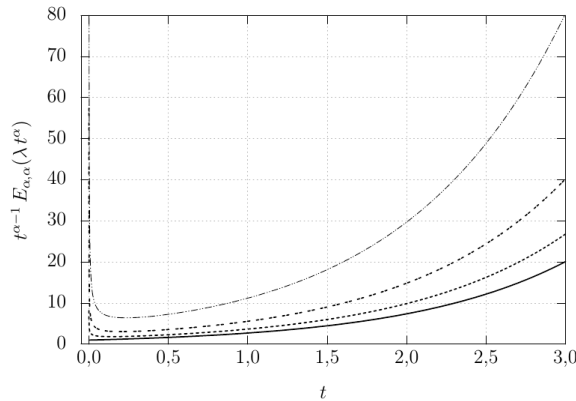


Figura 3.1 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)$ com (---) $\alpha = 0,25$, (- - -) $\alpha = 0,50$, (- - -) $\alpha = 0,75$ e (—) $\alpha = 1,00$.

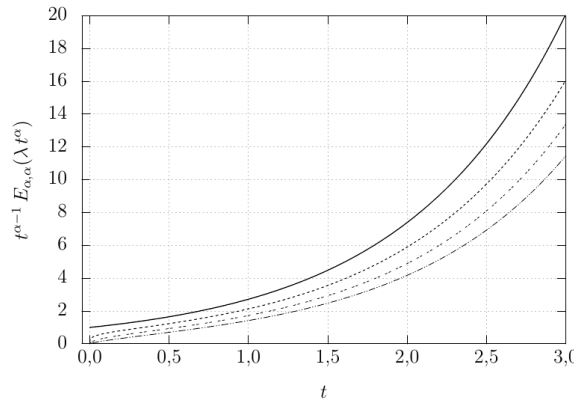


Figura 3.2 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)$ com (—) $\alpha = 1,00$, (---) $\alpha = 1,25$, (— · —) $\alpha = 1,50$ e (— · · —) $\alpha = 1,75$.

Como pôde ser observado, as condições iniciais de um PVINI dado por (3.4)-(3.5) são dependentes de derivadas de ordens não inteiras, mesmo no caso em que é válido o Teorema 3.2.2. Em Heymans e Podlubny (2006) encontra-se uma série de exemplos no estudo de problemas relacionados a viscoelasticidade em que interpretações físicas para tais condições iniciais são encontradas. Contudo, tal trabalho não apresenta uma maneira sistemática para obter tais interpretações em sistemas mais gerais. De forma geral, tais condições iniciais não possuem um significado claro no que se refere a aplicações ou modelagem de fenômenos físicos. Devido a esta dificuldade, equações diferenciais segundo o operador de Riemann-Liouville são pouco utilizadas para estudar fenômenos que envolvem derivadas de ordem não inteira.

Na seguinte seção será definido o PVINI segundo o operador derivada de Caputo. Diferente do que acontece para a derivada de Riemann-Liouville, as condições iniciais necessárias para se resolver um PVINI segundo Caputo dependem de derivadas de ordem inteira. Além disso, é possível garantir a existência e unicidade de soluções de forma mais geral do que as apresentadas nesta seção.

3.3 Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo

O problema de Cauchy segundo a derivada de Caputo é definido por

Definição 3.3.1 Um PVINI segundo a derivada de Caputo é dado por

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = F(t, y), \\ \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0^+} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.13)$$

em que $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e as constantes $y_0^{(k)}$ são dadas. ▲

Um PVINI segundo a derivada de Caputo é equivalente à solução de uma equação integral, de forma similar ao que ocorre com um PVINI para a derivada de Riemann-Liouville (Teorema 3.2.1), e é apresentada a seguir.

Teorema 3.3.1 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $y \in C[0, h]$, com $h > 0$. A função $y(t)$ é solução do PVINI (3.13) se, e somente se, $y(t)$ satisfaz*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (3.14)$$

DEMONSTRAÇÃO: Se $y(t)$ é solução do PVINI 3.13, então pelo Corolário 2.4.9 tem-se que

$$I_0^\alpha F(t, y(t)) = I_0^\alpha {}^C D_0^\alpha y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}.$$

Se $y(t)$ é solução da Equação 3.14, então, aplicando a Proposição 2.4.4 e o Teorema 2.4.7, tem-se que

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha y(t) &= {}^C D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, y(\tau)) d\tau \right) \\ &= {}^C D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \right) + {}^C D_0^\alpha I_0^\alpha F(t, y(t)) \\ &= F(t, y(t)). \end{aligned}$$

■

O teorema anterior pode ser utilizado como uma justificativa para a formulação do problema de Cauchy dado no sistema (3.13), em que as condições iniciais são dadas em termos de derivadas de ordem inteira. Devido ao fato de essas condições iniciais possuírem significado físico conhecido, a derivada de Caputo é mais difundida em aplicações que envolvam modelagens com sistemas de ordem não inteira para condições iniciais não identicamente nulas⁴ (DIETHELM et al., 2005).

O seguinte teorema mostra condições necessárias para um PVINI segundo a derivada de Caputo ter uma única solução.

⁴ Condições iniciais identicamente nulas também são chamadas de condições homogêneas.

Teorema 3.3.2 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $\mathcal{C}$ o conjunto definido por*

$$\mathcal{C} = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } 0 \leq t \leq h \text{ e } \left| y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \right| \leq K \right\},$$

com

$$\frac{M h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq K,$$

em que K , h e M são constantes. Se $F(t, y)$ for contínua e limitada em $\mathcal{C}$, com $\sup_{(t,y) \in \mathcal{C}} |F(t, y)| = M$, e satisfizer a condição de Lipschitz com respeito a variável y , i.e.,

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|,$$

para algum $A > 0$, então o PVINI dado por (3.13) possui uma única solução contínua para $t \in [0, h]$.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é obtido pelo método das aproximações sucessivas a partir das funções

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}, \\ y_i(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + I_0^\alpha F(t, y_{i-1}(t)), \end{aligned}$$

em que $i \in \mathbb{N}^*$, e segue de maneira análoga à demonstração do Teorema 3.2.2 fazendo as devidas adaptações para o conjunto $\mathcal{C}$. ■

A solução geral de um PVINI linear segundo a derivada de Caputo é apresentada no seguinte teorema.

Teorema 3.3.3 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g(t)$ uma função diferenciável no intervalo $(0, h)$, contínua em $[0, h]$, com $h > 0$. Então a solução do PVINI*

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = \lambda y + g(t), \\ \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0^+} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.15)$$

é dada por

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) \right] g(\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

DEMONSTRAÇÃO: De maneira análoga à demonstração do Teorema 3.3.2, tem-se que

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}, \\ y_i(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + I_0^\alpha (\lambda y_{i-1}(t) + g(t)). \end{aligned}$$

A função $y_1(t)$ pode ser reescrita por

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + I_0^\alpha (\lambda y_0(t) + g(t)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + I_0^\alpha g(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^1 \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + I_0^\alpha g(t).
 \end{aligned}$$

Supondo como hipótese de indução que

$$y_i = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + \sum_{\ell=0}^{i-1} \lambda^\ell I_0^{\alpha(\ell+1)} g(t),$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 y_{i+1}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + I_0^\alpha (\lambda y_i(t) + g(t)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + \lambda I_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + \sum_{\ell=0}^{i-1} \lambda^\ell I_0^{\alpha(\ell+1)} g(t) \right) + \\
 &\quad + I_0^\alpha g(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + \lambda I_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) \right) + \\
 &\quad + \lambda I_0^\alpha \left(\sum_{\ell=0}^{i-1} \lambda^\ell I_0^{\alpha(\ell+1)} g(t) \right) + I_0^\alpha g(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^{i+1} \frac{\lambda^{\ell+1} t^{\alpha(\ell+1)+k}}{\Gamma(\alpha(\ell+1)+k+1)} \right) + \\
 &\quad + \left(\sum_{\ell=0}^{i-1} \lambda^{\ell+1} I_0^{\alpha(\ell+2)} g(t) \right) + I_0^\alpha g(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^{i+1} \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + \sum_{\ell=0}^i \lambda^\ell I_0^{\alpha(\ell+1)} g(t).
 \end{aligned}$$

Como $\lambda y + g(t)$ é contínua e Lipschitz na variável y , tem-se que existe uma única solução para o PVINI em (3.15) e

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + \sum_{\ell=0}^{i-1} \lambda^\ell I_0^{\alpha(\ell+1)} g(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + \\
 &\quad + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i-1} \frac{\lambda^\ell}{\Gamma(\alpha(\ell+1))} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha(\ell+1)-1} g(\tau) d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \left(t^k \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell}}{\Gamma(\alpha\ell+k+1)} \right) + \\
 &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i-1} \frac{\lambda^\ell (t-\tau)^{\alpha\ell}}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha)} \right) g(\tau) d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) \right] g(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

■

Corolário 3.3.4 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = \lambda y \\ \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0^+} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.17)$$

é dada por

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha). \quad (3.18)$$

■

Observação 3.3.1 *Se no corolário anterior $0 < \alpha < 1$, então a solução do PVINI 3.17 é dada por*

$$y(t) = y_0^{(0)} E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha). \quad (3.19)$$

Se $\alpha > 1$ e $y_0^{(k)} = 0$ para $k > 0$, então a solução do PVINI 3.17 também será dada por (3.19). A função $E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ cumpre o papel análogo de $f(t) = e^t$ no contexto de derivadas de ordem inteira. ◀

As Figuras 3.3 e 3.4 apresentam alguns gráficos de $E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $t \in [0,3]$, $\lambda = 1$ e diferentes valores de α .

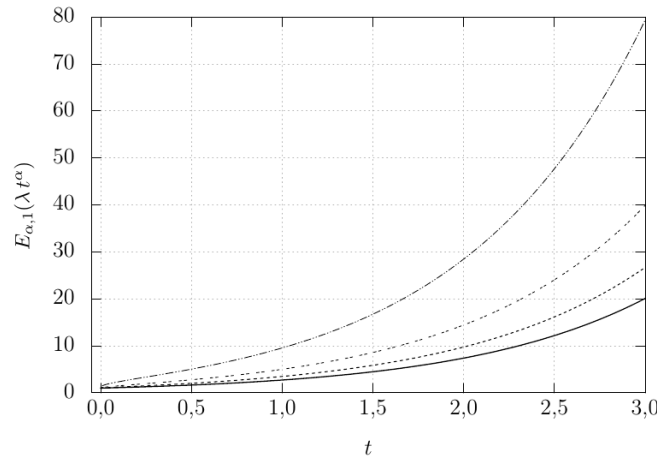


Figura 3.3 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ com (---) $\alpha = 0,25$, (---) $\alpha = 0,50$, (---) $\alpha = 0,75$ e (—) $\alpha = 1,00$.

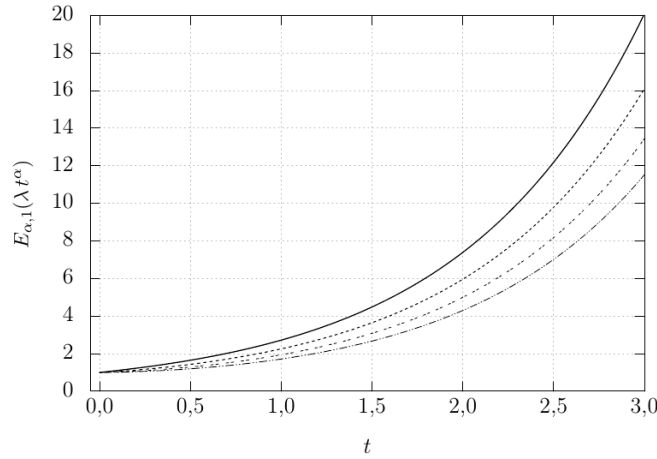


Figura 3.4 – Gráficos das funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ com (—) $\alpha = 1,00$, (---) $\alpha = 1,25$, (---) $\alpha = 1,50$ e (---) $\alpha = 1,75$.

Na seguinte seção será introduzida a Transformada de Laplace para obter soluções para um PVINI na forma de (3.15). Além disso, será visto como aplicar essa transformada nas funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)$ com $\beta = \alpha$ ou $\beta = 1$.

3.4 A Transformada de Laplace como Método para Solução de Equações Diferenciais Lineares Segundo a Derivada de Caputo

A derivada de Caputo para $a = 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$ pode ser reescrita em termos da convolução entre a derivada n -ésima de uma função $y(t)$ e a função $t^{n-\alpha-1}$ da seguinte maneira

$${}^C D_0^\alpha y(t) = \frac{(t^{n-\alpha-1}) * y^{(n)}(t)}{\Gamma(n-\alpha)}, \quad (3.20)$$

em que $(f * g)(t)$ representa a convolução entre as funções $f(t)$ e $g(t)$ (BOYCE; DIPRIMA, 2010, p. 187). Nesse sentido, a Transformada de Laplace da derivada de Caputo é obtida pela propriedade da transformada da convolução entre a função $t^{n-\alpha-1}$, que para $n - \alpha - 1 > -1$ a transformada é dada por

$$\mathcal{L}\{t^{n-\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}}, \quad (3.21)$$

e a função $y^{(n)}(t)$.

Teorema 3.4.1 *Seja $y(t)$ uma função definida em $\mathbb{R}_+$ e diferenciável até ordem $n-1$ em $t = 0^+$. Se a Transformada de Laplace de $y(t)$, denotada por $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, existe para $s \geq c \in \mathbb{R}$, então, dado $\alpha > 0$ e $s > \max\{0, c\}$,*

$$\mathcal{L}\{ {}^C D_0^\alpha y(t) \} = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0). \quad (3.22)$$

DEMONSTRAÇÃO: Escrevendo a derivada de Caputo na forma (3.20) e aplicando a Transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^C D_0^\alpha y(t) \} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}\{ (t^{n-\alpha-1}) * y^{(n)}(t) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \mathcal{L}\{ t^{n-\alpha-1} \} \mathcal{L}\{ y^{(n)}(t) \} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} \right) \left(s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{(k)}(0) \right) \\ &= s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0). \end{aligned}$$

■

Corolário 3.4.2 *Se $y(t)$ tiver condições iniciais nulas até ordem $n-1$, então*

$$\mathcal{L}\{ {}^C D_0^\alpha y(t) \} = s^\alpha Y(s). \quad (3.23)$$

■

A Transformada de Laplace também pode ser obtida para a integral e a derivada de Riemann-Liouville, por meio de representações análogas a da Equação 3.20 para esses operadores, aplicando a propriedade da convolução entre funções.

Teorema 3.4.3 *Seja $y(t)$ uma função definida em $\mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ exista para $s \geq c \in \mathbb{R}$. Se $\alpha > 0$, com $n = \lceil \alpha \rceil$, então para $s > \max\{0, c\}$*

$$(i) \quad \mathcal{L}\{I_0^\alpha y(t)\} = \frac{1}{s^\alpha} Y(s),$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}\left\{{}^{RL}D_0^\alpha y(t)\right\} = s^\alpha Y(s) - s^{n-1} I_0^{n-\alpha} y(t) \Big|_{t=0^+} - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k-1} {}^{RL}D_0^{\alpha-n+k} y(t) \Big|_{t=0^+},$$

desde que a integral e as derivadas de ordem não inteira existam em $t = 0^+$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue diretamente da aplicação da transformada da convolução e das Definições 2.2.1 e 2.3.1. ■

Para se obter as soluções do problema de valor inicial (3.17) usando o método da Transformada de Laplace é necessário determinar a transformada de (3.18).

Proposição 3.4.4 *Se $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $|s^\alpha| > |\lambda|$, então*

$$\mathcal{L}\left\{t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha)\right\} = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda}. \quad (3.24)$$

DEMONSTRAÇÃO: A função $y(t) = t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)}.$$

Uma vez que $\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $p > -1$, tem-se, para cada $i \geq 0$, que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)}\right\} &= \sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} \mathcal{L}\{t^{\alpha\ell+k}\} \\ &= \sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)}{s^{\alpha\ell+k+1}} \\ &= \sum_{\ell=0}^i \frac{\lambda^\ell}{s^{\alpha\ell+k+1}} \\ &= \sum_{\ell=0}^i \frac{1}{s^{k+1}} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^\ell. \end{aligned}$$

A equação acima é uma progressão geométrica de razão λ/s^α . Portanto,

$$\mathcal{L}\left\{t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha)\right\} = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda}.$$

■

A seguinte proposição refere-se à Transformada de Laplace da função em (3.11) que, como visto no Teorema 3.3.3, faz parte da expressão para a solução do PVINI linear (3.15).

Proposição 3.4.5 Se $\alpha \geq 0$ e $|s^\alpha| > |\lambda|$, então

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \right\} = \frac{1}{s^\alpha - \lambda}. \quad (3.25)$$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é análoga à da Proposição 3.4.4. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell t^{\alpha\ell+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha)} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha)} \mathcal{L} \left\{ t^{\alpha\ell+\alpha-1} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha} \right)^\ell \\ &= \frac{1}{s^\alpha - \lambda}, \end{aligned}$$

se $|s^\alpha| > |\lambda|$. ■

Essa seção será finalizada mostrando que o problema de valor inicial dado em (3.15) pode ser resolvido de maneira análoga ao do caso de equações de ordem inteira pela aplicação da Transformada de Laplace, desde que a Transformada de Laplace da função $g(t)$ exista.

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os membros de (3.15) chega-se a

$$s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y_0^{(k)} = \lambda Y(s) + G(s), \quad (3.26)$$

e, isolando $Y(s)$, obtém-se

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s^\alpha - \lambda} + \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha - \lambda}. \quad (3.27)$$

A Transformada Inversa de Laplace (BOYCE; DIPRIMA, 2010, p. 171) aplicada a ambos os membros da Equação 3.27, utilizando as Proposições 3.4.4 e 3.4.5, fornece a solução

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) \right] g(\tau) d\tau,$$

que é a mesma equação obtida no Teorema 3.3.3.

3.5 Sistemas de Equações Diferenciais de Ordem não Inteira Segundo a Derivada de Caputo

Nesta seção, o conceito de um PVINI será estendido para sistemas de equações diferenciais de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo e em que condições esses

sistemas terão uma única solução. Além disso, será visto como obter soluções no caso de sistemas lineares, cujos coeficientes não dependem explicitamente do tempo.

Um sistema de equações diferenciais de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo é dado pelo conjunto de equações

$$\begin{cases} {}^C D_0^{\alpha_1} y_1 = F_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ {}^C D_0^{\alpha_2} y_2 = F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \\ \vdots \\ {}^C D_0^{\alpha_m} y_m = F_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \end{cases} \quad (3.28)$$

em que $\alpha_l > 0$ e $F_l : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ com $l = 1, \dots, m$.

Um PVINI para sistemas de equações é dado pelo sistema (3.28) munido do conjunto de condições iniciais

$$\left. \frac{d^{k_l} y_l(t)}{dt^{k_l}} \right|_{t=0^+} = y_{0,l}^{(k_l)}, \quad k_l = 0, \dots, [\alpha_l] - 1, \quad l = 1, \dots, m. \quad (3.29)$$

O sistema (3.28) é dito **comensurável** se $\alpha_l = \alpha$ para todo $l = 1, \dots, m$. Caso contrário ele é dito **incomensurável**.

O seguinte teorema mostra em que condições um PVINI comensurável (3.28)-(3.29) possui única solução.

Teorema 3.5.1 *Sejam $\alpha > 0$, $n = [\alpha]$ e $\mathcal{C}_m$ o conjunto definido por*

$$\mathcal{C}_m = \left\{ (t, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \text{ tal que } 0 \leq t \leq h \text{ e } \left| y_l(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{0,l}^{(k)} t^k}{k!} \right| \leq K, \quad l = 1, \dots, m \right\},$$

com

$$\frac{M h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq K,$$

em que K , h e M são constantes. Se as funções $F_l(t, y_1, \dots, y_m)$ forem contínuas e limitadas em $\mathcal{C}_m$, com $\sup_{(t, y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{C}_m} |F_l(t, y_1, \dots, y_m)| \leq M$ e satisfizerem a condição

$$|F_l(t, y_1, \dots, y_m) - F_l(t, z_1, \dots, z_m)| \leq A \sum_{l=1}^m |y_l - z_l|$$

para algum $A > 0$ e $l = 1, \dots, m$, então um PVINI comensurável dado por (3.28)-(3.29) possui uma única solução contínua para $t \in [0, h]$.

Na demonstração desse teorema é utilizada a versão generalizada do Teorema 3.3.1, cuja demonstração pode ser obtida de forma análoga, para as funções $y_l(t)$ satisfazendo o PVINI (3.28)-(3.29) no caso comensurável e é dada por

$$y_l(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{0,l}^{(k)} t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} F_l(\tau, y_1(\tau), \dots, y_m(\tau)) d\tau, \quad l = 1, \dots, m, \quad (3.30)$$

em que $n = \lceil \alpha \rceil$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.5.1: Definindo as funções

$$\begin{aligned} (y_l(t))_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{0,l}^{(k)} t^k}{k!}, \\ (y_l(t))_i &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{0,l}^{(k)} t^k}{k!} + I_0^\alpha F_l(\tau, (y_1(t))_{i-1}, \dots, (y_m(t))_{i-1}), \end{aligned}$$

em que $i \in \mathbb{N}^*$, $l = 1, \dots, m$, e aplicando o método das aproximações sucessivas, tem-se que o resultado segue de maneira análoga às demonstrações dos Teoremas 3.2.2 e 3.3.2. ■

Observação 3.5.1 Embora apenas a versão comensurável esteja sendo abordada, é possível obter um análogo do Teorema 3.5.1 para o caso incommensurável, adaptando a definição do conjunto $\mathcal{C}_m$ e a Equação 3.30. ◀

Observação 3.5.2 O teorema de existência e unicidade para sistemas de equações diferenciais segundo o operador de Caputo não pode ser estendido para o operador de Riemann-Liouville em sua totalidade, pois a mesma limitação do Teorema 3.2.2 será encontrada. ◀

Se o sistema (3.28) for comensurável, então o PVINI formado com as condições iniciais (3.29) será denotado por

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha \vec{y} = \vec{F}(t, \vec{y}), \\ \left. \frac{d^k \vec{y}}{dt^k} \right|_{t=0^+} = \vec{y}_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

em que $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\vec{F}(t, \vec{y}) = (F_1(t, \vec{y}), \dots, F_m(t, \vec{y}))$ e ${}^C D_0^\alpha \vec{y}$ é definido como sendo a derivada de Caputo coordenada a coordenada de $\vec{y}$.

Observação 3.5.3 Pela equivalência das normas euclidiana, do máximo e da soma em espaços vetoriais (LIMA, 2015), tem-se que

$$|F_l(t, y_1, \dots, y_m) - F_l(t, z_1, \dots, z_m)| \leq A \sum_{l=1}^m |y_l - z_l|$$

para algum $A > 0$ e $l = 1, \dots, m$ é equivalente à função $\vec{F}(t, \vec{y})$ ser Lipschitz para alguma constante L dependendo de A . Assim, o Teorema 3.5.1 pode ser reescrito com hipóteses equivalentes para uma versão vetorial utilizando a representação (3.31). ◀

Um conceito comumente utilizado em sistemas de equações diferenciais autônomos de ordem inteira é o de ponto fixo. O conceito de ponto fixo pode ser estendido para um sistema dado por (3.31), no caso em que a função $\vec{F}(t, y)$ não depende explicitamente do tempo⁵, ou seja, $\vec{F}(t, \vec{y}) = \vec{F}(\vec{y})$.

Definição 3.5.1 Um ponto $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^m$ é dito um **ponto fixo** da EDONI ${}^C D_0^\alpha \vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$ se a solução do respectivo PVINI considerando $\vec{y}(0) = \vec{y}^*$ é a função constante $\vec{y}(t) = \vec{y}^*$. ▲

Proposição 3.5.2 Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $\vec{F}(\vec{y})$ uma função lipschitziana. Se um ponto $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^m$ é tal que $\vec{F}(\vec{y}^*) = \vec{0}$, então a solução do PVINI dado por

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha \vec{y} = \vec{F}(\vec{y}), \\ \vec{y}_0^{(0)} = \vec{y}^*, \\ \vec{y}_0^{(k)} = 0, k = 1, \dots, n-1, \text{ se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (3.32)$$

é a função constante $\vec{y}(t) = \vec{y}^*$.

DEMONSTRAÇÃO: A função constante $\vec{y}(t) = \vec{y}^*$ satisfaz as condições iniciais do PVINI dada por (3.32). Além disso, como a derivada de Caputo de uma constante é zero, tem-se que o vetor $\vec{y}^*$ satisfaz ambos os membros da EDONI em (3.32). Logo, pelo Teorema 3.5.1, tem-se que $\vec{y}(t) = \vec{y}^*$ é a única solução desse PVINI. ■

Observação 3.5.4 O conceito de ponto fixo ou um análogo da Proposição 3.5.2 para a derivada de Riemann-Liouville não pode ser obtido, pois a derivada de Riemann-Liouville de uma constante não nula é diferente de zero se $\alpha \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N}^*$ (Proposição 2.3.4). ◀

Corolário 3.5.3 Se $0 < \alpha \leq 1$, então $\vec{y}^*$ é ponto fixo de ${}^C D_0^\alpha \vec{y} = \vec{F}(\vec{y})$ se, e somente se, $\vec{F}(\vec{y}^*) = \vec{0}$. ■

Como exemplos de sistemas de equações diferenciais de ordem não inteira, destacam-se os lineares, comensuráveis e cujos coeficientes não dependem explicitamente do tempo,

⁵ Evita-se chamar um sistema (3.28) em que $\vec{F}(t, y)$ não depende explicitamente do tempo de autônomo, ou de invariante no tempo, devido à dependência da memória hereditária contida em todo o intervalo $[0, t)$ para determinar a solução em $y(t)$.

dados pela forma

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m, \\ {}^C D_0^\alpha y_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_m, \\ &\vdots \\ {}^C D_0^\alpha y_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mm}y_m, \end{cases} \quad (3.33)$$

em que $\alpha > 0$ e $a_{lp} \in \mathbb{R}$ para $l, p = 1, \dots, m$.

Como será visto adiante, as soluções do sistema acima podem ser obtidas explicitamente em termos das funções de Mittag-Leffler. Além disso, no caso da matriz dos coeficientes não for singular, tais sistemas possuem a origem como o único candidato a ponto fixo e o comportamento dinâmico em torno desse ponto poderá ser avaliado a partir do comportamento assintótico das funções de Mittag-Leffler (Teorema 3.1.1).

O sistema (3.33) pode ser reescrito na forma matricial

$${}^C D_0^\alpha \vec{y} = A\vec{y}, \quad (3.34)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Uma vez que a aplicação linear $A\vec{y}$ é lipschitziana e limitada para qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{R}^m$, tem-se que, para um determinado conjunto de condições iniciais como em (3.29), o sistema (3.34) possui uma única solução, conforme Teorema 3.5.1.

Para mostrar que as soluções de (3.34) podem ser obtidas explicitamente, será realizado um procedimento análogo ao realizado para exponenciais de matrizes (DOERING; LOPES, 2012) para funções de Mittag-Leffler.

Definição 3.5.2 *Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. A função de Mittag-Leffler da matriz A é dada por*

$$E_{\alpha, \beta}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (3.35)$$

▲

Proposição 3.5.4 *Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, então a série que define $E_{\alpha, \beta}(A)$ é convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: Utilizando a norma de matrizes dada por

$$\|A\| = \sup_{\|\vec{y}\| \leq 1} \|A\vec{y}\|,$$

obtem-se

$$\|E_{\alpha, \beta}(A)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha, \beta}(\|A\|).$$

Uma vez que $E_{\alpha,\beta}(z)$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$, tem-se que a função de Mittag-Leffler de uma matriz também é convergente. ■

A partir da Definição 3.5.2 é possível definir a aplicação $t \mapsto E_{\alpha,\beta}(At^\alpha)$ que determina um caminho no espaço $\mathbb{R}^{m \times m}$. Para $\Phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, em que $\Phi(t) = [\phi_{lp}(t)]_{m \times m}$ é uma matriz quadrada $m \times m$ para cada $t \in \mathbb{R}$, a derivada de Caputo de $\Phi(t)$ é definida coordenada a coordenada por

$${}^C D_0^\alpha \Phi(t) = [{}^C D_0^\alpha \phi_{lp}(t)]_{m \times m}. \quad (3.36)$$

O seguinte teorema mostra a forma que uma função matricial deve ter para satisfazer a EDONI linear ${}^C D_0^\alpha \Phi(t) = A\Phi(t)$.

Teorema 3.5.5 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e as funções matriciais dadas por*

$$\Phi_k(t) = t^k E_{\alpha,k+1}(A t^\alpha), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.37)$$

Então, ${}^C D_0^\alpha \Phi_k(t) = A\Phi_k(t)$.

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é análoga a do Teorema 3.2.3, mas aplicando a derivada de Caputo no lugar de Riemann-Liouville em cada termo da série. ■

O seguinte teorema mostra quais são as soluções de um PVINI linear e cuja matriz do sistema seja constante.

Teorema 3.5.6 *Sejam $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Então a solução do PVINI*

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha \vec{y} = A\vec{y}, \\ \left. \frac{d^k \vec{y}}{dt^k} \right|_{t=0^+} = \vec{y}_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (3.38)$$

é dada por

$$\vec{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\alpha,k+1}(A t^\alpha) \vec{y}_0^{(k)}. \quad (3.39)$$

DEMONSTRAÇÃO: O resultado segue pelo Teorema 3.5.5 ao aplicar a derivada de Caputo nas colunas das funções $\Phi_i(t)$. ■

Se a matriz A for diagonalizável, ou seja, $A = TDT^{-1}$ com D diagonal, então

$$\Phi_k(t) = T(t^k E_{\alpha,k+1}(D t^\alpha))T^{-1}, \quad (3.40)$$

com $t^k E_{\alpha,k+1}(D t^\alpha)$ diagonal. Dessa forma, as soluções de cada uma das coordenadas do sistema (3.38) serão fornecidas por combinações lineares das funções $t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda_l t^\alpha)$, em que λ_l são autovalores de A , $l = 1, \dots, m$.

No caso em que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ possuir autovalores complexos também é possível obter soluções puramente reais, assim como para sistemas de ordem inteira. Sejam λ e $\bar{\lambda}$ um par de autovalores complexos conjugados de A e $\vec{w}$, $\bar{\vec{w}}$ seus respectivos autovetores. Nesse caso, as funções

$$t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) \vec{w}, \quad (3.41)$$

$$t^k E_{\alpha, k+1}(\bar{\lambda} t^\alpha) \bar{\vec{w}}, \quad (3.42)$$

satisfazem a equação ${}^C D_0^\alpha \vec{y} = A \vec{y}$ para $k = 0, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1$. Contudo, essas funções não são reais. Escrevendo $\lambda = a + jb$ e sua respectiva forma polar $\lambda = \rho(\cos\theta + j \sin\theta)$, obtém-se

$$\begin{aligned} t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a + jb)^\ell t^{\alpha\ell + \alpha - 1}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell (\cos(\ell\theta) + j \sin(\ell\theta)) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \cos(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} + j \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \sin(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Denotando cada série da última equação por

$$\begin{cases} \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \cos(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)}, \\ \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \sin(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)}, \end{cases} \quad (3.44)$$

tem-se que

$$t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) = \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) + j \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha). \quad (3.45)$$

Analogamente,

$$t^k E_{\alpha, k+1}(\bar{\lambda} t^\alpha) = \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) - j \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha). \quad (3.46)$$

A derivada de ordem α da função $\varepsilon_1^k(\lambda, t)$ é tal que

$$\begin{aligned} {}^C D_0^\alpha \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) &= {}^C D_0^\alpha \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \cos(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\rho^\ell \cos(\ell\theta) t^{\alpha\ell - \alpha + k}}{\Gamma(\alpha\ell - \alpha + k + 1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\rho^\ell [\cos\theta \cos((\ell-1)\theta) - \sin\theta \sin((\ell-1)\theta)] t^{\alpha(\ell-1) + k}}{\Gamma(\alpha(\ell-1) + k + 1)} \\ &= \rho \cos\theta \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \cos(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} - \rho \sin\theta \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\rho^\ell \sin(\ell\theta) t^{\alpha\ell + k}}{\Gamma(\alpha\ell + k + 1)} \\ &= a \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) - b \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha). \end{aligned}$$

Analogamente,

$${}^CD_0^\alpha \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha) = b\varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) + a\varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha).$$

Então, para $\vec{w} = \vec{u} + j\vec{v}$, as funções vetoriais

$$\vec{y}_1(t) = \frac{t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) \vec{w} + t^k E_{\alpha, k+1}(\bar{\lambda} t^\alpha) \bar{\vec{w}}}{2} = \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) \vec{u} - \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha) \vec{v}, \quad (3.47)$$

$$\vec{y}_2(t) = \frac{t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) \vec{w} - t^k E_{\alpha, k+1}(\bar{\lambda} t^\alpha) \bar{\vec{w}}}{2j} = \varepsilon_2^k(\lambda, t^\alpha) \vec{u} + \varepsilon_1^k(\lambda, t^\alpha) \vec{v}, \quad (3.48)$$

são soluções reais de ${}^CD_0^\alpha \vec{y} = A\vec{y}$.

Essa seção será finalizada apresentando o critério de estabilidade do ponto fixo do sistema (3.38) (MATIGNON, 1998), que pode ser obtido pela aplicação do Teorema 3.1.1.

Teorema 3.5.7 *Seja $0 < \alpha < 2$ e A uma matriz $m \times m$ real. Se a matriz A for diagonalizável no conjunto das matrizes complexas e se*

$$|\arg(\lambda_l)| > \alpha \frac{\pi}{2}, l = 1, \dots, m, \quad (3.49)$$

em que λ_l são os autovalores de A , então as soluções do sistema (3.38) convergem para a origem do sistema de coordenadas. ■

Ainda do Teorema 3.1.1, se ao menos um dos autovalores satisfaz $|\arg(\lambda_l)| < \alpha \frac{\pi}{2}$, então a solução do PVINI (3.38) é ilimitada. Se a condição (3.49) for substituída por $|\arg(\lambda_l)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, l = 1, \dots, m$, e a igualdade for verificada para algum l , então, pela Proposição 3.1.2, a solução de (3.38) é limitada.

3.6 Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais

Dentre os métodos para se determinar soluções numéricas de equações diferenciais de ordem não inteira segundo os operadores de Riemann-Liouville e de Caputo destacam-se os obtidos a partir da definição do Operador de Grünwald-Letnikov (seção 2.5) e das formas integrais, dadas pelas Equações 3.6 e 3.14, para soluções de um PVINI. Nesta seção, pretende-se apresentar os referidos métodos destacando a estimativa do erro local para as aproximações.

3.6.1 Soluções Numéricas Baseadas no Operador de Grünwald-Letnikov

A partir da Definição 2.5.1, uma aproximação para derivada ${}^{GL}D_a^\alpha y(t)$, em um ponto $t > a$, pode ser dada dividindo o intervalo $(a, t]$ em uma malha de N pontos, $N > [\alpha]$, dada por $t_i = a + ih$, em que $h = \frac{(t-a)}{N}$. Assim,

$${}^{GL}D_a^\alpha y(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N c_k^\alpha y(t - kh). \quad (3.50)$$

em que $c_k^\alpha = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$. Uma forma de obter os coeficientes c_k^α de forma recursiva é dada pela

Proposição 3.6.1 *Os coeficientes c_k^α em (3.50) podem ser obtidos de forma recursiva por*

$$\begin{cases} c_0^\alpha = 1, \\ c_k^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) c_{k-1}^\alpha, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.51)$$

DEMONSTRAÇÃO: Reescrevendo o coeficiente binomial generalizado em função de $\Gamma(\cdot)$ (Observação 2.3.4)

$$c_k^\alpha = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - k + 1) \Gamma(k + 1)},$$

tem-se que $c_0^\alpha = 1$. Fazendo o quociente $\frac{c_k^\alpha}{c_{k-1}^\alpha}$ para $k \geq 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{c_k^\alpha}{c_{k-1}^\alpha} &= \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - k + 1) \Gamma(k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha - (k - 1) + 1) \Gamma((k - 1) + 1)}{(-1)^{k-1} \Gamma(\alpha + 1)} \\ &= - \frac{(\alpha - k + 1) \Gamma(\alpha - k + 1) \Gamma(k)}{k \Gamma(k) \Gamma(\alpha - k + 1)} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right). \end{aligned}$$

■

Utilizar os coeficientes dados pela Proposição 3.6.1 possui a vantagem de não realizar os cálculos da função $\Gamma(\cdot)$ para encontrar c_k^α .

Observação 3.6.1 *No caso em que $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $c_k^\alpha = 0$ para $k = \alpha + 1$ implicando em todos os c_k^α serem nulos a partir de $k = \alpha + 1$. Nesse caso, a expressão do lado direito de (3.50) é equivalente a uma discretização de Euler de ordem inteira igual a α .* ◀

Os coeficientes c_k^α também podem ser obtidos a partir da expansão em série de Taylor da função complexa $(1 + z)^\alpha$ em torno de $z = 0$. A partir dessa expansão é possível obter algumas propriedades a respeito desses coeficientes que serão utilizados para o estudo do comportamento de uma discretização proposta no Capítulo 5.

Proposição 3.6.2 *Seja $\alpha > 0$ e $z \in \mathbb{C}$, então*

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad (3.52)$$

para todo $|z| < 1$.

DEMONSTRAÇÃO: A série de Taylor da função $(1+z)^\alpha$ em torno de $z=0$ é dada por

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Fazendo $f(z) = (1+z)^\alpha$, tem-se

$$- f(z) = (1+z)^\alpha, \text{ então } a_0 = 1,$$

$$- f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \text{ então } a_1 = \alpha,$$

$$- f''(z) = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, \text{ então } a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

e, para um termo $k=i$, chega-se a

$$f^{(i)}(z) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)(1+z)^{\alpha-i} = \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-i+1) a_k z^{k-i},$$

$$\text{o que implica em } a_i = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i(i-1)(i-2)\cdots 2 \cdot 1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-i+1)\Gamma(i+1)} = \binom{\alpha}{i}.$$

Para mostrar o raio de convergência da série, será aplicado o teste da razão nos termos $a_k x^k$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha+1) z^{k+1}}{\Gamma(\alpha-(k+1)+1)\Gamma((k+1)+1)} \frac{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+1)x^k} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-k)(k+1)\Gamma(k+1)} z \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha-k)}{(k+1)} \right| |z| \\ &= |z|. \end{aligned}$$

e a série de Taylor de $(1+z)^\alpha$ em torno de $z=0$ converge sempre que $|z| < 1$. ■

A seguinte proposição mostra que o intervalo de convergência da série de Taylor (3.52) é, na verdade, a bola fechada $|z| \leq 1$, se $\alpha > 0$.

Proposição 3.6.3 *Se $|z| = 1$, então a série de Taylor (3.52) é convergente.*

DEMONSTRAÇÃO: A partir da Proposição 3.6.1, tem-se que

$$\left| \binom{\alpha}{k} \right| = \prod_{i=1}^k \left| 1 - \frac{\alpha+1}{i} \right|,$$

e, pela desigualdade entre as médias geométrica e aritmética (LIMA, 2015, p. 173), que

$$\begin{aligned}
 \left| \binom{\alpha}{k} \right|^2 &= \prod_{i=1}^k \left| 1 - \frac{\alpha+1}{i} \right|^2 \\
 &\leq \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| 1 - \frac{\alpha+1}{i} \right|^2 \right)^k \\
 &= \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(1 - 2\frac{\alpha+1}{i} + \frac{(\alpha+1)^2}{i^2} \right) \right)^k \\
 &= \left(1 + \frac{1}{k} \left(-2(\alpha+1) \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + (\alpha+1)^2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \right) \right)^k \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \left(1 + \frac{1}{k} \left(-2(\alpha+1) \ln(k) + 2(\alpha+1)^2 \right) \right)^k \\
 &\stackrel{(**)}{\leq} \exp \left(-2(\alpha+1) \ln(k) + 2(\alpha+1)^2 \right) \\
 &= \frac{e^{2(\alpha+1)^2}}{k^{2(\alpha+1)}}.
 \end{aligned}$$

Na desigualdade (*) foi utilizado que $\ln(k) \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$ e $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \leq 2$ e na desigualdade (**) foi utilizado que $(1 + a/k)^k \leq e^a$ se $1 + a/k \geq 0$. Portanto, a série $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{k} \right|$ é absolutamente convergente, pelo critério da comparação com a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{(\alpha+1)^2}}{k^{(\alpha+1)}}$, que é convergente para $\alpha > 0$. Dessa forma, a função

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k,$$

converge se $|z| = 1$. ■

Corolário 3.6.4 Os termos c_k^α , dados na Proposição 3.6.1, satisfazem

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^\alpha = 0. \quad (3.53)$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (1-1)^\alpha = 0. \quad \blacksquare$$

Observação 3.6.2 Do Corolário 3.6.4 tem-se que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha = -1$, pois $c_0^\alpha = 1$ para todo $\alpha > 0$. ◀

Os operadores derivada de Grünwald-Letnikov e de Riemann-Liouville são equivalentes para a classe de funções contínuas até ordem $n = \lceil \alpha \rceil$, conforme o Teorema 2.5.1. Portanto, a partir da expressão (3.50), será possível obter soluções numéricas para EDONIs segundo a derivada de Riemann-Liouville. Assim, para a equação diferencial

$${}^{RL}D_a^\alpha y = F(t, y), \quad (3.54)$$

e uma vez que ${}^{RL}D_a^\alpha y = {}^{GL}D_a^\alpha y$, tem-se, para $t > a$, que

$$\begin{aligned} F(t, y(t)) &\approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N c_k^\alpha y(t - kh) \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \left(y(t) + \sum_{k=1}^N c_k^\alpha y(t - kh) \right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

com $N \geq \lceil \alpha \rceil$, ou seja,

$$y(t) \approx h^\alpha F(t, y(t)) - \sum_{k=1}^N c_k^\alpha y(t - kh). \quad (3.56)$$

A aproximação em (3.56) será utilizada para determinar soluções numéricas de uma EDONI em uma malha de pontos equidistantes do intervalo $(a, b]$, $b > a$. Nessa expressão, a aproximação da solução depende do valor da função no ponto que se deseja obter. Para contornar esse problema é possível utilizar a informação da imagem do ponto imediatamente anterior ao que se deseja aproximar. Assim, para $h = (b - a)/N$, $t_i = a + i h$ e chamando y_i a aproximação de $y(t_i)$, o algoritmo para determinar as aproximações em uma malha de pontos de um PVINI dada pela equação (3.54) com condição inicial $y(a) = y_0$ é dada de forma recursiva por

$$y_i = h^\alpha F(t_{i-1}, y_{i-1}) - \sum_{k=1}^i c_k^\alpha y_{i-k}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.57)$$

Observação 3.6.3 Embora a Equação 3.57 possa ser utilizada para obter soluções numéricas de um PVINI segundo a derivada de Riemann-Liouville, deve ser destacada a dificuldade em relacionar as condições iniciais dada por (3.5) em termos da condição inicial $y(a) = y_0$ ou de um conjunto de condições iniciais $\{y_0, y_1, \dots, y_\ell\}$ a partir do qual as demais soluções y_i , $i > \ell$, serão obtidas. Diferente de um PVINI segundo Riemann-Liouville, a Equação 3.57 não pode ser aplicada diretamente para um PVINI segundo Caputo (Equação 3.13) devido ao fato de esse operador não ser equivalente ao operador de Grünwald-Letnikov, a menos de condições iniciais nulas. Para condições iniciais não nulas, embora dependentes de derivadas de ordens inteiras, a dificuldade em obter um conjunto de condições iniciais a partir de (3.13) ainda persiste. Uma forma de obter soluções numéricas para um PVINI segundo Caputo utilizando a Equação 3.57 será mostrada no Capítulo 4.

Proposição 3.6.5 [*Lubich (1986)*] O método descrito por (3.57) fornece uma aproximação de ordem $\mathcal{O}(h)$. ■

A discretização obtida pelo método numérico descrito na Equação 3.57 preserva a característica que sistemas de ordem não inteira apresentam com respeito à memória hereditária. Em cada iteração dessa discretização toda a informação obtida até a iteração anterior é utilizada, como pode ser observado a partir dos índices no somatório dessa equação. Assim, a memória hereditária apresentada nesse método implica que o número de operações aumenta em cada iteração ao se determinar as soluções numéricas y_i . Para simulações envolvendo poucos pontos na malha $[a, t]$, o aumento dessas operações praticamente não altera o tempo computacional final. Porém, ao utilizar um número grande de pontos na malha ou para obter as soluções em pontos $t \gg a$, o efeito de memória hereditária resulta em um alto custo de tempo computacional.

Uma maneira de limitar o aumento do número de iterações em simulações longas, dependendo de algumas características da função $y(t)$, é dado pelo princípio de *short memory* (*PODLUBNY, 1998*). Esse princípio se baseia no fato de que, para valores de $t \gg a$,

$${}^{RL}D_a^\alpha y(t) \approx {}^{RL}D_{t-L}^\alpha y(t), \quad (3.58)$$

para um determinado L , tal que $t > a + L$ e $|y(t)| < M$ com $t \in [a, b]$. A aproximação em (3.58) pode ser provada a partir da desigualdade

$$\epsilon = \left| {}^{RL}D_a^\alpha y(t) - {}^{RL}D_{t-L}^\alpha y(t) \right| \leq \frac{M L^{-\alpha}}{|\Gamma(1 - \alpha)|} \quad (3.59)$$

que fornece a seguinte cota para L dependendo do erro ϵ

$$L \leq \left(\frac{M}{\epsilon |\Gamma(1 - \alpha)|} \right)^{1/\alpha}. \quad (3.60)$$

O princípio de *short memory* pode ser interpretado da seguinte forma: a memória hereditária do intervalo $[t - L, t]$ é mais relevante que a memória do intervalo $[a, t - L]$, para uma função limitada e um determinado L satisfazendo (3.60), para se obter a derivada de Riemann-Liouville de $y(t)$ no intervalo $[a, t]$. Uma exposição detalhada sobre esse princípio é encontrada em (*PODLUBNY, 1998*, p. 203).

3.6.2 Soluções Numéricas Baseadas em Representações Integrais

Aproximações numéricas para a solução $y(t)$ de um PVINI segundo a derivada de Caputo, como dado em (3.13), podem ser obtidas a partir da Equação 3.14, que fornece a representação em termos da integral de Riemann-Liouville para $y(t)$, utilizando aproximações por quadraturas dessa forma integral e foi proposta por *Diethelm (1997)*.

O método é obtido a partir de uma malha discreta de pontos equidistantes t_i em um intervalo $[0, t]$, $t > 0$, em que $t_i = ih$, $h = t/N$, $i = 0, \dots, N$ e $N + 1$ é o número de pontos na malha. A partir dessa malha, os valores da integral dada na Equação 3.14 podem ser aproximados por

$$\int_0^{t_{i+1}} (t_{i+1} - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, y(\tau)) d\tau \approx \sum_{\ell=0}^i \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_{i+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{F}_{\ell+1}(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad (3.61)$$

em que $\tilde{F}_{\ell+1}(t, y(t))$ é determinada pela interpolação linear de $F(t, y(t))$ em cada subintervalo $[t_\ell, t_{\ell+1}]$.

Cada parcela da soma à direita de (3.61) pode ser calculada analiticamente no respectivo subintervalo $[t_\ell, t_{\ell+1}]$, obtendo-se

$$\sum_{\ell=0}^i \int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} (t_{i+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{F}_{\ell+1}(\tau, y(\tau)) d\tau = \sum_{\ell=0}^{i+1} a_{\ell, i+1} F(t_\ell, y(t_\ell)), \quad (3.62)$$

em que

$$a_{\ell, i+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (i^{\alpha+1} - (i-\alpha)(i+1)^\alpha), & \text{se } \ell = 0, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((i-\ell+2)^{\alpha+1} + (i-\ell)^{\alpha+1} - 2(i-\ell+1)^{\alpha+1}), & \text{se } 1 \leq \ell \leq i, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{se } \ell = i+1. \end{cases} \quad (3.63)$$

Chamando de y_i a aproximação de $y(t_i)$, o algoritmo para determinar as soluções numéricas na malha discreta do intervalo $[0, t]$ para um PVINI (3.13) é dada de forma iterativa por

$$y_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t_{i+1}^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\ell=0}^{i+1} a_{\ell, i+1} F(t_\ell, y_\ell). \quad (3.64)$$

Como na $i + 1$ -ésima iteração o valor y_{i+1} não é conhecido, tem-se que não é possível avaliar a Equação 3.64 diretamente em $k = i + 1$. Uma maneira de utilizar essa equação é por meio da aproximação dada por

$$y_{i+1} \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t_{i+1}^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{\ell=0}^i a_{\ell, i+1} F(t_\ell, y_\ell) \right) + \frac{a_{i+1, i+1} F(t_i, y_i)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.65)$$

Essa situação pode ser contornada nos casos em que é possível explicitar $y(t_{i+1})$ em $F(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$, ou utilizando um algoritmo para determinar raízes de equações de forma a obter o valor y_{i+1} em (3.64) implicitamente (BURDEN; FAIRES, 2008). Uma outra maneira é por meio da obtenção de um método preditor corretor baseado em Adams-Bashforth (BURDEN; FAIRES, 2008). Nesse caso, a precisão pode ser melhorada, mas em

detrimento de obter um algoritmo que realiza uma quantidade maior de operações por iteração. O método preditor corretor é dado por

$$y_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t_{i+1}^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{\ell=0}^i a_{\ell,i+1} F(t_\ell, y_\ell) \right) + \frac{a_{i+1,i+1} F(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.66)$$

em que

$$\tilde{y}_{i+1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{y_0^{(\ell)}}{\ell!} t_{i+1}^\ell + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{k=0}^i b_{k,i+1} F(t_k, y_k) \right), \quad (3.67)$$

com

$$b_{k,i+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((i+1-k)^\alpha - (i-k)^\alpha), \quad (3.68)$$

(DIETHELM, 2010).

Proposição 3.6.6 (Diethelm, Ford e Freed (2004)) *A análise do erro para as soluções numéricas obtidas pelas Equações 3.66, 3.67 e 3.68 é dada por*

$$\max |y(t_i) - y_i| = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{\alpha+1}) & \text{se } \alpha \leq 1, \\ \mathcal{O}(h^2) & \text{se } \alpha \geq 1, \end{cases} \quad (3.69)$$

para valores de t_k próximos a $t = 0$. ■

Observação 3.6.4 *A aproximação para a integral em (3.61) também pode ser utilizada para a obtenção de um método baseado na representação integral (3.6) da solução $y(t)$ de um PVINI segundo a derivada de Riemann-Liouville, obtendo*

$$y_{i+1} = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t_{i+1}^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\ell=0}^{i+1} a_{\ell,i+1} F(t_\ell, y_\ell), \quad (3.70)$$

em que b_k são as condições iniciais em (3.5) e os coeficientes $a_{\ell,i+1}$ são dados por (3.63). Aqui, deve-se tomar o cuidado que o teorema de existência e unicidade não é válido para $b_n \neq 0$ (Observação 3.2.2), em geral. ◀

O método descrito pela Equação 3.65, preserva a característica de memória hereditária para a derivada de Caputo, assim como o método descrito em (3.57) para a derivada de Riemann-Liouville. Isso pode ser observado pelo fato de que em cada iteração é calculada uma aproximação para a integral à direita de (3.61) a partir de $t = 0$, o que também gera um alto custo computacional em simulações envolvendo um grande número de pontos na malha $[0, t]$. Diferentemente do que acontece para os coeficientes c_k^α (Equação 3.57), os coeficientes $a_{\ell,i}$ são recalculados em cada iteração. Isso produz um custo computacional ainda maior que o do método descrito na subseção 3.6.1. Contudo, o método dado pela Equação 3.57 não pode ser aplicado diretamente para obter soluções numéricas de um PVINI mais geral segundo Caputo. Assim, na necessidade de longas simulações numéricas, em que seja aceitável um erro de aproximação de ordem $\mathcal{O}(h)$, utilizar uma variação do

método dado pela Equação 3.57 para solucionar um PVINI segundo Caputo, apresenta-se como uma alternativa na redução do custo computacional. No Capítulo 4, será apresentado um método que utiliza as Equações 3.66, 3.67 e 3.68 em conjunto com a Equação 3.57 para obter soluções numéricas para um PVINI segundo Caputo, implicando em uma redução do custo computacional.

Parte III

Resultados

4 Um Método Híbrido para Soluções Numéricas de PVINIs Segundo Caputo

Este capítulo tem por objetivo apresentar um método numérico para a solução de um PVINI segundo a derivada de Caputo, com condições iniciais não necessariamente nulas e que utilize a discretização baseada na definição da derivada de Grünwald-Letnikov, como descrito por [Salgado e Aguirre \(2016\)](#). Como observado na [seção 3.6](#), a discretização dada pela Equação 3.57 (Observação 3.6.3, p. 101) não pode ser utilizada para obter soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo no caso de condições iniciais não nulas, devido à não equivalência desse operador com o de Grünwald-Letnikov. Contudo, como será visto, é possível utilizar a discretização dada pela Equação 3.57 para obter soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo, considerando um conjunto de condições iniciais quaisquer, a partir de um conjunto discreto de soluções previamente obtidas.

O presente capítulo será exposto da seguinte maneira: na [seção 4.2](#) será apresentada uma maneira de aplicar a Equação 3.57 a partir de um conjunto de soluções analíticas, utilizando o conceito de memória hereditária, para resolver um PVINI linear segundo Caputo. Nas seções 4.3 e 4.4, o método híbrido será apresentado em forma de um algoritmo e comparado com o método dado pela Equação 3.66. Na [seção 4.6](#) é apresentada uma conclusão para o capítulo.

4.1 Relação entre os PVINIs de Caputo e de Riemann-Liouville

A relação entre as derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo (Teorema 2.4.2, p. 61) pode ser utilizada para estabelecer uma conexão entre um PVINI segundo Caputo e uma EDONI segundo a derivada de Riemann-Liouville, como apresentado na seguinte proposição.

Proposição 4.1.1 *Sejam $\alpha > 0$ e $n = \lceil \alpha \rceil$. Se $y(t)$ é solução do PVINI*

$$\begin{cases} {}^CD_0^\alpha y = F(t, y), \\ \left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=0^+} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (4.1)$$

então $y(t)$ satisfaz a equação

$${}^{RL}D_0^\alpha y = F(t, y) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (4.2)$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue diretamente do Teorema 2.4.2. ■

A Proposição 4.1.1 não estabelece uma relação entre as condições iniciais do PVINI 4.1 com as condições iniciais de um PVINI segundo a derivada de Riemann-Liouville. A partir das formas integrais das soluções para PVINIs segundo Riemann-Liouville (Teorema 3.2.1, p. 74) e Caputo (Teorema 3.3.1, p. 83) e da Proposição 4.1.1 é possível obter uma relação entre as condições iniciais desses PVINIs.

Proposição 4.1.2 *Seja $y(t)$ a solução do PVINI dado em (4.1) com $y_0^{(k)} = 0$ para $k \leq n - 2$. Então $y(t)$ é solução do PVINI segundo Riemann-Liouville dado por*

$$\begin{cases} {}^{RL}D_0^\alpha y = F(t, y) + \frac{y_0^{(n-1)} t^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-1-\alpha)}, \\ I_0^{n-\alpha} y(t) \Big|_{t=0^+} = 0, \\ {}^{RL}D_0^{\alpha-k} y(t) \Big|_{t=0^+} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{se } \alpha > 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.1.1 tem-se a que solução $y(t)$ do PVINI 4.1 satisfaz a EDONI dada pela primeira linha de (4.3). Além disso, para as condições iniciais $y_0^{(k)} = 0$, $k \leq n - 2$, $y(t)$ pode ser escrita por

$$y(t) = \frac{y_0^{(n-1)} t^{n-1}}{(n-1)!} + I_0^\alpha F(t, y(t)).$$

De forma análoga, a solução de um PVINI segundo Riemann-Liouville dado pela primeira linha da Equação 4.3 com condições iniciais b_k , $k = 1, \dots, n$, pode ser expressa por

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + I_0^\alpha {}^{RL}D_0^\alpha \left(\frac{y_0^{(n-1)} t^{n-1}}{(n-1)!} \right) + I_0^\alpha F(t, y(t)).$$

A partir das Proposições 2.2.4 e 2.3.4, tem-se que

$$I_0^\alpha ({}^{RL}D_0^\alpha t^{n-1}) = t^{n-1},$$

e $y(t)$ pode ser reescrita por

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + I_0^\alpha F(t, y(t)) + \frac{y_0^{(n-1)} t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (4.4)$$

Portanto,

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + y(t), \quad (4.5)$$

o que implica que $b_k = 0$ para $k = 1, \dots, n$. ■

Embora a proposição anterior seja restritiva com respeito às condições iniciais do PVINI 4.1, uma forma mais geral para essas condições iniciais não é possível de ser obtida

devido ao fato de a integral de Riemann-Liouville $I_0^\alpha(t^\beta)$ ser divergente para $\beta \leq -1$ (Corolário 2.2.5, p. 50). Para $\alpha \in (0, 1)$, um PVINI segundo Caputo depende apenas da condição inicial $y_0^{(0)}$ e a Proposição 4.1.2 mostra como obter um PVINI equivalente segundo Riemann-Liouville. Nesse caso, o algoritmo dado de forma recursiva pela Equação 3.57 pode ser empregado para obter soluções numéricas do PVINI 4.3, pois o valor da função em $t = 0$ é conhecido e as condições iniciais em relação à derivada de Riemann-Liouville são nulas.

A equivalência descrita pela Proposição 4.1.2 permite, ao menos em teoria, que o método dado pela Equação 3.57 seja utilizado para obter soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo no caso em que $\alpha \in (0, 1)$. Contudo, observa-se experimentalmente que o algoritmo dado pela Equação 3.57 apresenta um erro relativamente grande quando comparado com a ordem do passo de discretização, h , para soluções próximas da condição inicial. Além disso, para $\alpha > 1$, a Proposição 4.1.2 não pode ser aplicada para uma condição inicial não nula de um PVINI segundo Caputo, o que inviabiliza a aplicação da Equação 3.57 para obter-se soluções numéricas nesses casos.

Na seguinte seção será proposta uma maneira de contornar os problemas em relacionar as condições iniciais de um PVINI segundo Caputo, no formato da Equação 4.2, com as condições para iniciar o método dado pela Equação 3.57 a partir de um conjunto de soluções obtidas previamente.

4.2 Conjunto de Condições Iniciais Obtidas Analiticamente

Nessa seção, o conhecimento da solução analítica do PVINI

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = \lambda y, \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 0, \dots, n-1, \text{ com } n = \lceil \alpha \rceil, \end{cases} \quad (4.6)$$

(Corolário 3.3.4, p. 86) será utilizado para obter um conjunto prévio de soluções no intervalo $[0, \tilde{t}]$, $\tilde{t} > 0$. A partir desse conjunto, as soluções numéricas no intervalo $(\tilde{t}, t]$, $t > \tilde{t}$, desse PVINI serão obtidas empregando o método dado pela Equação 3.57 na EDONI equivalente

$${}^{RL} D_0^\alpha y = \lambda y + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (4.7)$$

Observação 4.2.1 *A motivação para obter esse conjunto de condições iniciais está relacionada com a memória hereditária que sistemas de ordem não inteira apresentam, pois, para se conhecer o valor de $y(t)$ em um determinado $t > 0$, toda a informação da função no intervalo $[0, t)$ deve ser utilizada. Essa característica que os sistemas de ordem não inteira contínuos apresentam também é observada nos métodos para obter soluções numéricas (seção 3.6, p. 102).* ◀

A discretização da Equação 4.7 utilizando a Equação 3.57 para obtenção de soluções numéricas do PVINI 4.6 é dada por

$$y_{i+1} = h^\alpha \left(\lambda y_i + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t_{i+1}^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \right) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1}, \quad (4.8)$$

em que y_{i+1} representa a aproximação da solução $y(t_{i+1})$.

A Equação 4.8 foi utilizada para obter soluções numéricas do PVINI 4.6 no intervalo $[0, 0,5]$ com $h = 0,005$ considerando $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $\lambda = \pm 1$ e condição inicial $y_0^{(0)} = y_0 = 1$ ($y_0^{(1)} = 0$ para $\alpha > 1$). O método foi aplicado de duas maneiras em cada um dos casos: (a) a partir da condição inicial e (b) a partir de um conjunto de soluções analíticas correspondente a 10% dos pontos discretos do intervalo. Os erros entre as soluções numérica e analítica indicando o valor da iteração em que ocorre o erro máximo estão sumarizados na Tabela 4.1 para o caso (a) e na Tabela 4.2 para o caso (b).

Tabela 4.1 – Erro absoluto máximo e médio entre as soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 para $t \in [0, 0,5]$, $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $h = 0,005$ e a partir da condição inicial $y_0 = 1$.

	α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\lambda = 1$	$ y_i - y(t_i) _{\text{méd}}$	0,0331	0,0089	0,0201	0,00254	0,00241	0,0167	0,0057	0,0009
	$ y_i - y(t_i) _{\text{máx}}$	0,0654	0,0390	0,0498	0,0442	0,0327	0,0186	0,0060	0,0021
	$i_{\text{máx}}$	101	2	2	2	3	4	8	101
$\lambda = -1$	$ y_i - y(t_i) _{\text{méd}}$	0,0046	0,0074	0,0100	0,0119	0,0120	0,0093	0,0037	0,0005
	$ y_i - y(t_i) _{\text{máx}}$	0,0546	0,0727	0,0685	0,0543	0,0363	0,0199	0,0063	0,0008
	$i_{\text{máx}}$	2	2	2	2	2	3	5	101

Tabela 4.2 – Erro absoluto máximo e médio entre as soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 para $t \in [0, 0,5]$, $\alpha \in [0,3, 1,0]$, $h = 0,005$ e a partir de um conjunto de soluções analíticas correspondente a 10% dos pontos do intervalo discretizado.

	α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\lambda = 1$	$ y_i - y(t_i) _{\text{méd}}$	0,0311	0,0119	0,0047	0,0021	0,0011	0,0008	0,0008	0,0007
	$ y_i - y(t_i) _{\text{máx}}$	0,0635	0,0276	0,0127	0,0062	0,0034	0,0025	0,0023	0,0019
	$i_{\text{máx}}$	101	101	101	101	101	101	101	101
$\lambda = -1$	$ y_i - y(t_i) _{\text{méd}}$	0,0011	0,0012	0,0012	0,0010	0,0006	0,0002	0,0003	0,0004
	$ y_i - y(t_i) _{\text{máx}}$	0,0035	0,0033	0,0028	0,0021	0,0014	0,0006	0,0006	0,0007
	$i_{\text{máx}}$	11	14	15	17	19	20	101	101

Os erros apresentados para o caso em que se considerou apenas a condição inicial, y_0 , foram maiores que os apresentados utilizando um conjunto de condições iniciais obtidos da solução analítica, exceto para o caso $\alpha = 0,4$ e $\lambda = 1$. A Figura 4.1 apresenta os gráficos das soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 com $\alpha = 0,5$ e $\lambda = 1$ considerando apenas a condição inicial y_0 na Equação 4.8 para soluções numéricas. Em (b) é apresentado uma ampliação em torno da condição inicial, onde ocorre o erro máximo .

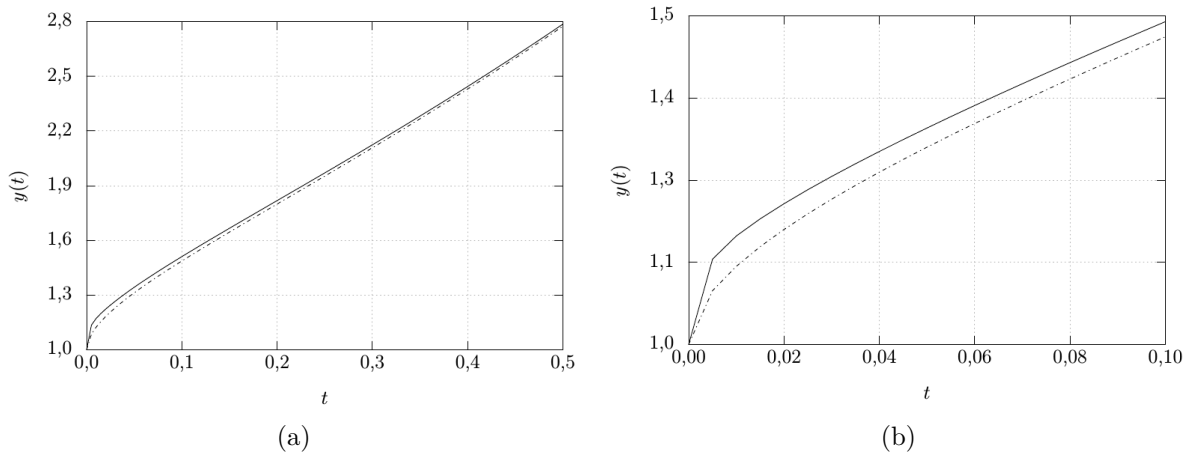


Figura 4.1 – Solução (—) numérica, utilizando a Equação 4.8 a partir da condição inicial y_0 , e (- - -) analítica para o PVINI 4.6 com $\alpha = 0,5$, $y_0 = 1,0$ e $h = 0,005$. Em (a) é exibido o intervalo $[0,0, 0,5]$ e em (b) uma ampliação em torno da condição inicial, onde ocorre o erro máximo.

A Figura 4.2 apresenta as gráficos das soluções numérica e analítica para os mesmos parâmetros utilizados na Figura 4.1, mas considerando um conjunto inicial de soluções analíticas correspondendo a 10% dos pontos no intervalo discretizado na Equação 4.8.

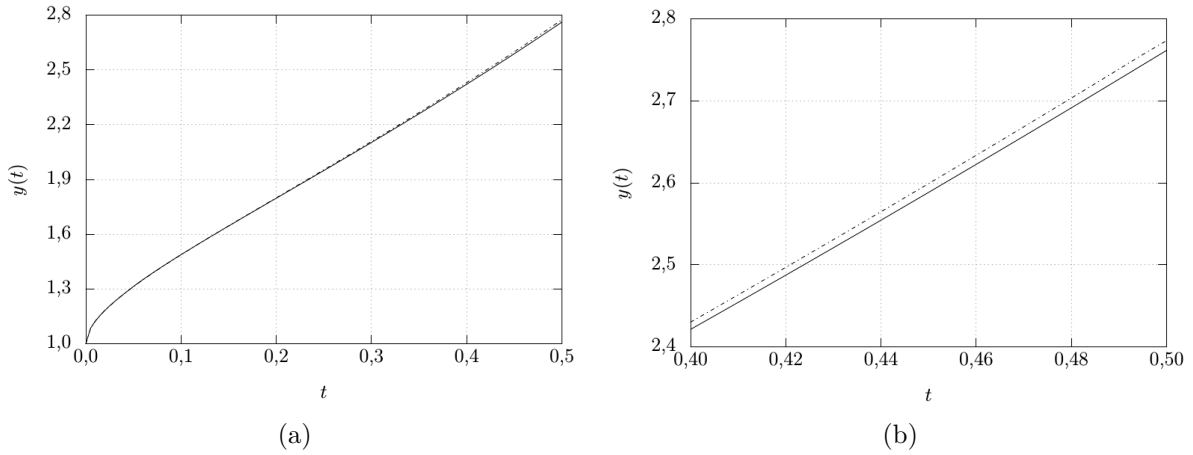


Figura 4.2 – Solução (—) numérica, utilizando a Equação 4.8 a partir de um conjunto inicial de soluções analíticas, e (- - -) analítica para o PVINI 4.6 com $\alpha = 0,5$, $y_0 = 1,0$ e $h = 0,005$. Em (a) é exibido o intervalo $[0,0, 0,5]$ e em (b) uma ampliação das soluções onde o erro máximo ocorre.

Para $\alpha > 1$, as soluções numéricas obtidas a partir da Equação 4.8, considerando apenas a condição inicial y_0 , apresentam comportamento distinto das respectivas soluções analíticas e não representam aproximações numéricas para essas soluções, como ilustra a Figura 4.3 para o caso em que $\alpha = 1,5$, $\lambda = -1$, $y_0 = 1$, $y_0^{(1)} = 0$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$. Contudo, ao se tomar um conjunto de soluções analíticas, da mesma forma que empregado para o caso $0 < \alpha \leq 1$, as soluções numéricas obtidas apresentam boas aproximações no restante dos pontos do intervalo discretizado. Na Tabela 4.3 estão sumarizados os valores dos erros obtidos entre as soluções numérica, a partir de um conjunto de soluções analíticas

correspondendo a 10% dos pontos discretos do intervalo, e analítica no intervalo $[0, 0,5]$ com $h = 0,005$, considerando $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $\lambda = \pm 1$.

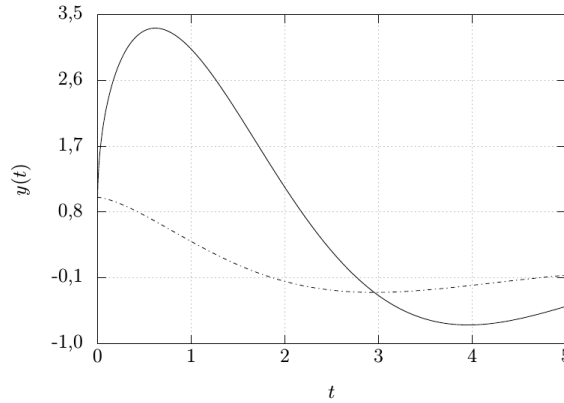


Figura 4.3 – Solução (- -) analítica para o PVINI 4.6 e (—) gráfico obtido das iteradas da Equação 4.8. Em ambos os casos foi utilizado $F(t, y) = -y$, $\alpha = 1,5$, $y_0 = 1,0$, $y_0^{(1)} = 0$, $h = 0,005$ e $t \in [0, 5]$.

Tabela 4.3 – Erro absoluto máximo e médio entre as soluções numérica e analítica do PVINI 4.6 para $t \in [0, 0,5]$, $\alpha \in [1,1, 1,8]$, $h = 0,005$ e a partir de um conjunto de soluções analíticas correspondente a 10% dos pontos do intervalo discretizado.

α		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\lambda = 1$	$ y_i - y(t_i) _{\text{méd}}$	0,0002	0,0019	0,0049	0,0091	0,0141	0,0190	0,0224	0,0222
	$ y_i - y(t_i) _{\text{máx}}$	0,0004	0,0029	0,0085	0,0167	0,0271	0,0382	0,0470	0,0486
	$i_{\text{máx}}$	101	101	101	101	101	101	101	101
$\lambda = -1$	$ y_i - y(t_i) _{\text{méd}}$	0,0001	0,0015	0,0040	0,0078	0,0125	0,0173	0,0209	0,0210
	$ y_i - y(t_i) _{\text{máx}}$	0,0024	0,0019	0,0058	0,0124	0,0215	0,0319	0,0409	0,0437
	$i_{\text{máx}}$	29	71	101	101	101	101	101	101

Isso evidencia que obter soluções numéricas do PVINI 4.6 utilizando a Equação 4.8 a partir de um conjunto prévio de soluções pode resultar em aproximações das soluções em comparação ao mesmo procedimento considerando apenas a condição inicial, no caso de $\alpha > 1$.

Nos casos apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.3, utilizou-se 10% do total de pontos do intervalo discretizado. Uma forma de escolher o número de pontos do conjunto prévio de soluções analíticas para iniciar a Equação 4.8 pode ser realizada por um critério que relaciona a ordem do erro (Proposição 3.6.5, p. 102) com a memória hereditária dessa equação. Devido ao fato de a memória hereditária depender dos coeficientes c_k^α e desses convergirem para zero (Corolário 3.6.4, p. 100), o critério pode ser dado por

$$|c_m^\alpha y_0| \leq h, \quad (4.9)$$

e, dessa forma, $c_m^\alpha y_0 \sim \mathcal{O}(h)$. Os pontos $y_0, \dots, y_m$ são tomados de forma a compor o conjunto de condições iniciais para iniciar a Equação 4.8. Esse conjunto pode ser

interpretado como a quantidade de memória necessária para atingir uma precisão da mesma ordem do passo de discretização, h .

Para ilustrar esse critério, conjuntos de soluções iniciais $\{y_0, \dots, y_m\}$ para o PVINI 4.6 foram obtidos considerando os casos: $\alpha = 0,5$ ou $\alpha = 1,5$; $y_0 = 1,0$ ou $y_0 = 50,0$; $h = 0,005$ ou $h = 0,001$; $\lambda = -1$. Nesses casos, o erro entre y_{m+1} e $y(t_{m+1})$ pode ser determinado e comparado com $|c_m^\alpha y_0|$. Os resultados estão sumarizados na Tabela 4.4 e, para cada terna (α, y_0, h) , são apresentadas duas comparações entre o erro $|y_{m+1} - y(t_{m+1})|$ e o valor $|c_m^\alpha y_0|$. Primeiro, o conjunto $\{y_0, \dots, y_m\}$ é obtido para o primeiro valor de m para o qual $|y_{m+1} - y(t_{m+1})| \leq h$. Em seguida, o valor de m é obtido ao observar $|c_m^\alpha y_0| \leq h$ pela primeira vez.

Tabela 4.4 – Relação entre o valor $|c_m^\alpha y_0|$ e o erro obtido na iteração $m + 1$ da solução analítica do PVINI 4.6, para $\lambda = -1$, com a solução numérica utilizando Equação 4.8 a partir do conjunto $\{y_0, \dots, y_m\}$.

y_0	h	$\alpha = 0,5$			$\alpha = 1,5$		
		m	$ c_m^\alpha y_0 $	$ y_{m+1} - y(t_{m+1}) $	m	$ c_m^\alpha y_0 $	$ y_{m+1} - y(t_{m+1}) $
1,0	0,005	6	0,0205	$4,4 \times 10^{-3}$	4	0,0234	$3,8 \times 10^{-3}$
1,0	0,005	15	0,0050	$9,0 \times 10^{-4}$	7	0,0044	$8,8 \times 10^{-4}$
1,0	0,001	17	0,0010	$4,1 \times 10^{-3}$	4	0,0234	$3,8 \times 10^{-3}$
1,0	0,001	45	0,0009	$2,0 \times 10^{-4}$	13	0,0008	$1,8 \times 10^{-4}$
50,0	0,005	45	0,0471	$4,9 \times 10^{-3}$	17	0,0199	$4,6 \times 10^{-3}$
50,0	0,005	200	0,0050	$5,0 \times 10^{-4}$	29	0,0050	$1,2 \times 10^{-3}$
50,0	0,001	154	0,0074	$9,9 \times 10^{-4}$	32	0,0038	$9,3 \times 10^{-4}$
50,0	0,001	585	0,0009	$2,4 \times 10^{-5}$	55	0,0010	$2,4 \times 10^{-4}$

O tamanho do conjunto de condições iniciais, dado pelo valor de m , e do erro $|y_{m+1} - y(t_{m+1})|$ dependem dos valores de y_0 , h e α utilizados. Observa-se que $|y_{m+1} - y(t_{m+1})| < h$ em cada um dos casos em que a condição $|c_m^\alpha y_0| \leq h$ foi verificada. Ou seja, utilizando esse critério, o erro entre a solução numérica e analítica é da ordem do erro apresentado pelo método dado pela Equação 4.8. Isso sugere que o critério (4.9) possa ser empregado para determinar o tamanho de um conjunto de condições iniciais a partir do qual soluções numéricas serão obtidas utilizando (3.57). Para tanto, é necessário que seja possível obter esse conjunto de condições iniciais de forma analítica, como nos casos apresentados, ou que esses dados estejam disponíveis de alguma outra forma. Lamentavelmente, não é possível obter parte da solução analítica em casos mais gerais e uma forma mais prática para a obtenção desses dados deve ser investigada.

Na seguinte seção será apresentada uma maneira para obter um conjunto de condições iniciais a partir do qual a Equação 3.57 será empregada para obtenção de soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo.

4.3 Método Híbrido

Nesta seção, a ideia de utilizar um conjunto de condições iniciais para iniciar o método dado pela Equação 3.57 será aplicada para obter soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo dado por (4.1). O conjunto de condições iniciais será obtido a partir do método descrito na subseção 3.6.2, enquanto que o método descrito na subseção 3.6.1 será implementado na EDONI equivalente dada pela Equação 4.2.

O método híbrido para a solução numérica de um PVINI 4.1 no intervalo $[0, t_f]$ é determinado pelo seguinte algoritmo.

Algoritmo - Método Híbrido

ENTRADA tempo final t_f ; número de pontos na malha N ; número natural $m \leq N$; ordem de derivação α ; condições iniciais $y_0^{(k)}$, $k = 0, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1$.

SAÍDA aproximação y_i para a solução $y(t)$ do PVINI 4.1 nos pontos t_i , $i = 1, \dots, N$.

1: **faça** $h \leftarrow t_f / (N - 1)$; $y_0 = y_0^{(0)}$; $t_0 = 0$;

2: **para** $i \leftarrow 0$ **até** $m - 1$ **faça**

$$t_{i+1} = t_i + ih,$$

$$y_{i+1} = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \frac{y_0^{(k)} t_{i+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{\ell=0}^i a_{\ell, i+1} F(t_\ell, y_\ell) \right) + \frac{a_{i+1, i+1} F(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{\Gamma(\alpha)},$$

em que $a_{\ell, i+1}$ é dado em (3.63) e $\tilde{y}_{i+1}$ é dado em (3.67)-(3.68);

3: **fim para**

4: Obtenha o conjunto $\mathcal{C} = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$ de condições iniciais;

5: **se** $m = N$ **então**

6: PARE. As aproximações numéricas são dadas pelos elementos do conjunto $\mathcal{C}$.

7: **senão**

8: **para** $i \leftarrow m$ **até** N **faça**

$$t_{i+1} = t_i + ih,$$

$$y_{i+1} = h^\alpha \left(F(t_i, y_i) + \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \frac{y_0^{(k)} t_{i+1}^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \right) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1},$$

em que c_k^α é dado por (3.51);

9: **fim para**

10: Obtenha o conjunto $\mathcal{R} = \{y_m, \dots, y_N\}$;

11: **fim se**

12: PARE. As aproximações numéricas são dadas pelos elementos do conjunto $\mathcal{C} \cup \mathcal{R}$.

O algoritmo descrito acima é, em um certo sentido, híbrido, pois combina a característica do método descrito pelas Equações 3.65, 3.66 e 3.67 (passo 2), em relação ao erro de discretização em torno da condição inicial, para determinar o conjunto $\mathcal{C}$ com a característica do método dado pela Equação 3.57 (passo 8), que realiza menos operações por iteração em relação ao primeiro, para determinar o conjunto $\mathcal{R}$.

A característica da equação no passo 8 é significativamente importante em simulações numéricas de um PVINI, pois o efeito da memória hereditária presente nos métodos numéricos implica um tempo computacional muito longo se comparado com os métodos existentes em sistemas de ordem inteira (DAS, 2008). Portanto, qualquer melhoria na complexidade numérica causa um grande efeito no tempo de processamento final do método. Por esse motivo, deve-se evitar a escolha de $m = N$ no método híbrido quando N for muito grande, pois, nesse caso, todo o conjunto de soluções $\{y_0, \dots, y_N\}$ será obtido utilizando apenas o passo 2 que possui complexidade computacional muito maior que a equação no passo 8. Por outro lado, embora a equação no passo 8 seja mais rápida, essa não pode ser usada para obter soluções numéricas para um conjunto qualquer de condições iniciais do PVINI 4.1.

Uma maneira de determinar o tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, que cumpre o papel da memória requerida para implementar a equação no passo 8, no caso de ser conhecido uma parte da solução analítica foi discutida na seção 4.2. Nesse caso, um critério análogo ao apresentado em (4.9) pode ser utilizado considerando a ordem do erro do método empregado no passo 2 (Proposição 3.6.6, p. 104). Assim, o número de elementos do conjunto $\mathcal{C}$, m , pode ser escolhido de forma que

$$|c_m^\alpha y_0| < \begin{cases} h^{1+\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ h^2, & \text{se } \alpha \geq 1, \end{cases} \quad (4.10)$$

ou seja, de forma que $|c_m^\alpha y_0|$ tenha a mesma ordem de erro da discretização dada por (3.66).

O desempenho do método proposto com respeito ao erro nas aproximações numéricas e à redução do tempo computacional será investigado a seguir.

4.4 Resultados Numéricos Utilizando o Método Híbrido

O objetivo desta seção é comparar as soluções numéricas obtidas com o método da seção anterior com as obtidas utilizando o método descrito na subseção 3.6.2 em termos de precisão, robustez e tempo de processamento. Essas comparações serão realizadas por meio de dois exemplos numéricos. No primeiro exemplo, soluções numéricas do PVINI 4.6 serão comparadas com a respectiva solução analítica para ambos os métodos. Nesse caso, pretende-se comparar a precisão com a solução analítica e o tempo de processamento. No segundo exemplo, diagramas de bifurcação para sistemas de equações diferenciais de

ordem não inteira segundo a derivada de Caputo serão obtidos utilizando os dois métodos, considerando a ordem de derivação como parâmetro de bifurcação. A análise de diagramas de bifurcação é um problema típico em dinâmica não linear (JIA; CHEN; QI, 2014; JUN et al., 2014; LIU; HONG; YANG, 2014; TENG et al., 2014; AGARWAL; EL-SAYED; SALMAN, 2013; LETELLIER; AGUIRRE, 2013; ABD-ELOUAHAB; HAMRI; WANG, 2012; YUAN; YANG, 2012; BARBOSA et al., 2007; GE; JHUANG, 2007; GE; ZHANG, 2007; NIMMO; EVANS, 1999; SUN; WANG; SPROTT, 2010; ZHANG et al., 2009; HARTLEY; LORENZO; QAMMER, 1995) e demanda um longo tempo de processamento.

Os algoritmos foram implementados usando o compilador GNU Fortran 95. Para o tempo de processamento foi utilizado a sub-rotina CPU_TIME. O processador utilizado para obter as simulações apresentadas nessa seção é um Intel® Core™ i5-3570 @ 3.40GHz $\times 4$.

4.4.1 Exemplo 1

Seja o PVINI linear dado por

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = \lambda y, \\ y(0) = y_0, \\ y^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, n-1, \text{ se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (4.11)$$

em que $n = \lceil \alpha \rceil$. A solução analítica do PVINI acima é dada pela função de Mittag-Leffler (Observação 3.3.1, p. 86)

$$y(t) = y_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha). \quad (4.12)$$

O método descrito na subseção 3.6.2 e o método híbrido foram implementados para obter soluções numéricas do PVINI 4.11 no intervalo $[0, 5]^1$ considerando as ternas (α, λ, h) para $\alpha \in [0, 3, 1, 8]$, $\lambda = \pm 1$, $h = 0,005$ e $h = 0,001$. Para o método híbrido considerou-se o valor de m , que determina o tamanho do conjunto $\mathcal{C} = \{y_0, \dots, y_{m-1}\}$, utilizando o critério dado por (4.10). Em cada caso, utilizou-se $y_0 = 1$. As relações entre os erros e o tempo de processamento estão sumarizados nas Tabelas 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, para $h = 0,005$.

¹ O tamanho para o intervalo de simulação foi escolhido de forma que o tempo computacional entre os métodos pudesse ser representativo, diferentemente do apresentado na seção 4.2 em que se considerou apenas o erro da aproximação.

Tabela 4.5 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3,1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,005$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$4,65 \times 10^1$	$2,25 \times 10^1$	$1,19 \times 10^0$	$7,10 \times 10^0$	$4,67 \times 10^0$	$3,26 \times 10^0$	$2,37 \times 10^0$	$1,83 \times 10^0$
	tempo (s)	0,0027	0,0031	0,0032	0,0032	0,0031	0,0028	0,0024	0,0017
	m	65	79	87	89	86	77	59	2
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$2,10 \times 10^2$	$5,33 \times 10^1$	$1,24 \times 10^1$	$2,86 \times 10^0$	$0,66 \times 10^0$	$0,15 \times 10^0$	$0,29 \times 10^{-1}$	$0,31 \times 10^{-2}$
	tempo (s)	0,1775	0,1773	0,1829	0,1775	0,1779	0,1781	0,1783	0,0907

Tabela 4.6 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1,1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,005$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$1,26 \times 10^0$	$0,91 \times 10^0$	$0,64 \times 10^0$	$4,10 \times 10^{-1}$	$2,00 \times 10^{-1}$	$2,56 \times 10^{-2}$	$2,49 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	tempo (s)	0,0023	0,0025	0,0024	0,0023	0,0024	0,0022	0,0020	0,0020
	m	54	61	61	56	50	44	37	31
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$2,17 \times 10^{-3}$	$2,82 \times 10^{-3}$	$2,60 \times 10^{-3}$	$2,30 \times 10^{-3}$	$2,03 \times 10^{-3}$	$1,83 \times 10^{-3}$	$1,66 \times 10^{-3}$	$1,53 \times 10^{-3}$
	tempo (s)	0,1777	0,1782	0,1784	0,1779	0,1811	0,1786	0,1777	0,1776

Tabela 4.7 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3,1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,005$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$22,78 \times 10^{-3}$	$8,67 \times 10^{-3}$	$8,03 \times 10^{-3}$	$5,18 \times 10^{-3}$	$2,76 \times 10^{-3}$	$1,23 \times 10^{-3}$	$0,60 \times 10^{-3}$	$0,91 \times 10^{-3}$
	tempo (s)	0,0028	0,0030	0,0032	0,0032	0,0031	0,0029	0,0024	0,0019
	m	65	79	87	89	86	77	59	2
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$22,78 \times 10^{-3}$	$8,67 \times 10^{-3}$	$8,03 \times 10^{-3}$	$5,18 \times 10^{-3}$	$2,76 \times 10^{-3}$	$1,23 \times 10^{-3}$	$0,40 \times 10^{-3}$	$0,02 \times 10^{-4}$
	tempo (s)	0,1784	0,1775	0,1835	0,1777	0,1778	0,1778	0,1779	0,0906

Tabela 4.8 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1,1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,005$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$0,71 \times 10^{-3}$	$0,63 \times 10^{-3}$	$0,50 \times 10^{-3}$	$0,45 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-3}$	$2,58 \times 10^{-3}$	$4,78 \times 10^{-3}$	$7,42 \times 10^{-3}$
	tempo (s)	0,0024	0,0023	0,0023	0,0024	0,0023	0,0020	0,0019	0,0020
	m	54	61	61	56	50	44	37	31
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$0,15 \times 10^{-3}$	$0,19 \times 10^{-3}$	$0,17 \times 10^{-3}$	$0,13 \times 10^{-3}$	$0,10 \times 10^{-3}$	$0,07 \times 10^{-3}$	$0,05 \times 10^{-3}$	$0,03 \times 10^{-3}$
	tempo (s)	0,1778	0,1778	0,1779	0,1777	0,1814	0,1783	0,1781	0,1776

Nas Tabelas 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 estão os valores obtidos para $h = 0,001$.

Tabela 4.9 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3,1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,001$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$1,40 \times 10^1$	$0,51 \times 10^1$	$2,44 \times 10^0$	$1,43 \times 10^0$	$0,94 \times 10^0$	$0,66 \times 10^0$	$0,48 \times 10^0$	$0,37 \times 10^0$
	tempo (s)	0,0596	0,0679	0,0752	0,0750	0,0725	0,0660	0,0554	0,0405
	m	325	392	431	442	426	380	290	2
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$1,03 \times 10^2$	$1,66 \times 10^1$	$0,27 \times 10^1$	$0,44 \times 10^0$	$0,73 \times 10^{-1}$	$1,20 \times 10^{-2}$	$1,78 \times 10^{-3}$	$1,24 \times 10^{-4}$
	tempo (s)	4,4439	4,4932	4,5988	4,4661	4,4800	4,4800	4,4704	2,2536

Tabela 4.10 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1,1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = 1$, $h = 0,001$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$2,56 \times 10^{-1}$	$1,83 \times 10^{-1}$	$1,25 \times 10^{-1}$	$0,71 \times 10^{-1}$	$0,11 \times 10^{-1}$	$0,65 \times 10^{-1}$	$1,69 \times 10^{-1}$	$3,16 \times 10^{-1}$
	tempo (s)	0,0515	0,0537	0,0510	0,0488	0,0465	0,0464	0,0432	0,0422
	m	245	261	242	212	179	148	120	93
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$1,07 \times 10^{-4}$	$1,18 \times 10^{-4}$	$1,04 \times 10^{-4}$	$0,90 \times 10^{-4}$	$0,80 \times 10^{-4}$	$0,73 \times 10^{-4}$	$0,66 \times 10^{-4}$	$0,61 \times 10^{-4}$
	tempo (s)	4,4701	4,4943	4,4691	4,4517	4,5130	4,4653	4,4664	4,4726

Tabela 4.11 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [0,3,1,0]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,001$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$9,96 \times 10^{-3}$	$6,83 \times 10^{-3}$	$4,30 \times 10^{-3}$	$2,16 \times 10^{-3}$	$0,94 \times 10^{-3}$	$0,35 \times 10^{-3}$	$0,12 \times 10^{-3}$	$0,18 \times 10^{-3}$
	tempo (s)	0,0595	0,0678	0,0743	0,0750	0,0724	0,0661	0,0553	0,0406
	m	325	392	431	442	426	380	290	2
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$9,96 \times 10^{-3}$	$6,83 \times 10^{-3}$	$4,30 \times 10^{-3}$	$2,16 \times 10^{-3}$	$0,94 \times 10^{-3}$	$0,35 \times 10^{-3}$	$0,94 \times 10^{-4}$	$0,61 \times 10^{-7}$
	tempo (s)	4,4033	4,3956	4,5255	4,3928	4,3967	4,3940	4,3923	2,2410

Tabela 4.12 – Erro obtido entre a solução analítica do PVINI 4.11 e os métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 para $\alpha \in [1,1,1,8]$, $y_0 = 1$, $\lambda = -1$, $h = 0,001$ e $t \in [0,5]$. O tempo de processamento dos métodos é destacado em cada caso. O tamanho do conjunto $\mathcal{C}$, m , é apresentado no caso do método híbrido.

	α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
Híbrido	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$0,14 \times 10^{-3}$	$0,13 \times 10^{-3}$	$0,09 \times 10^{-3}$	$0,19 \times 10^{-3}$	$0,52 \times 10^{-3}$	$1,13 \times 10^{-3}$	$2,23 \times 10^{-3}$	$4,07 \times 10^{-3}$
	tempo (s)	0,0511	0,0529	0,0509	0,0488	0,0463	0,0445	0,0432	0,0422
	m	245	261	242	212	179	148	120	93
Eq. 3.66	$\ y_i - y(t_i)\ _{\max}$	$2,61 \times 10^{-5}$	$2,69 \times 10^{-5}$	$2,06 \times 10^{-5}$	$1,39 \times 10^{-5}$	$0,87 \times 10^{-5}$	$0,52 \times 10^{-5}$	$0,30 \times 10^{-5}$	$0,17 \times 10^{-5}$
	tempo (s)	4,3999	4,3934	4,4008	4,4022	4,4789	4,3984	4,3957	4,3933

Observa-se que os erros entre as soluções analíticas e as soluções numéricas obtidas a partir dos métodos híbrido e o dado pela Equação 3.66 são relativamente grandes em comparação com a ordem do passo, h , para $\lambda = 1$. O valor do erro obtido nesses casos é devido à relação entre o rápido crescimento da função $E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ e a ordem do erro para as aproximações.

Para $\lambda = -1$, o erro entre as soluções numéricas e analíticas permanecem em torno da ordem do passo h , para ambos os métodos. Nesse caso, a solução para o PVINI é limitada, o que implica um erro menor que para o caso $\lambda = 1$. Destaca-se que o erro do método híbrido para o conjunto $\mathcal{R}$ é da ordem do passo de discretização, $\mathcal{O}(h)$, que é a mesma ordem do erro do método dado pela Equação 3.57 utilizada no passo 8 do método. Por isso, e pelo fato de o conjunto $\mathcal{R}$ corresponder a mais de 80% das soluções numéricas utilizando o método híbrido, o erro obtido nesse método é maior que ao utilizar apenas a Equação 3.66 nos casos apresentados.

No entanto, o tempo computacional utilizando apenas a Equação 3.66 é aproximadamente 70 (setenta) vezes maior que utilizando o método híbrido. Além disso, o tempo computacional para esses métodos não é linear em relação ao tempo final do intervalo para um determinado valor de passo, h , fixado, devido ao efeito da memória hereditária presente nesses métodos. Na Figura 4.4 é apresentado o tempo de processamento *versus* o tempo final do intervalo simulado para o PVINI 4.11 utilizando a Equação 3.66 para $h = 0,005$. O tempo de simulação nesse caso é uma função crescente e não linear. Utilizando o método híbrido, o tempo de processamento para todo o intervalo $[0, 15]$, com $h = 0,005$, é em torno de 0,064s.

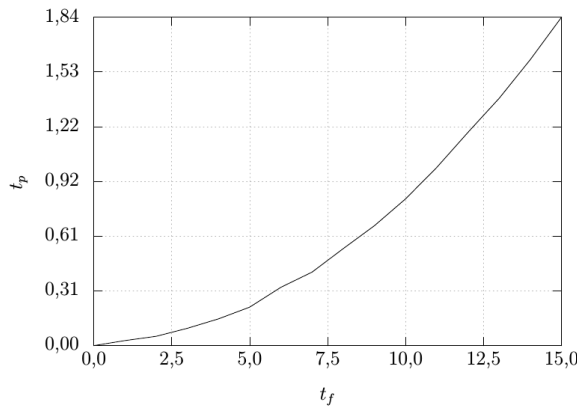


Figura 4.4 – Tempo de processamento em segundos, t_p , para o método dado pela Equação 3.66 para resolver o PVINI 4.11 no intervalo $[0, t_f]$ com $h = 0.005$.

Neste exemplo, o intervalo simulado é relativamente curto se comparado com outros tipos de aplicações, tais como obter soluções para construção de diagramas de bifurcação de sistemas dinâmicos não lineares. Assim, para casos em que os intervalos de simulação são curtos, sugere-se optar pelo método dado pela Equação 3.66 ao método híbrido para obter soluções numéricas de um PVINI 4.1, devido à ordem do erro desses métodos.

No seguinte exemplo, esses métodos serão empregados para obter diagramas de bifurcação para sistemas que, aparentemente, apresentam comportamento caóticos para a derivada de Caputo.

4.4.2 Exemplo 2

Investigar os efeitos da ordem de derivação no comportamento dinâmico em sistemas não lineares é um problema recorrente em sistemas dinâmicos de ordem não inteira. Uma maneira de investigar esses efeitos é por meio da análise de diagramas de bifurcação em que α é escolhido como parâmetro de bifurcação. Esses diagramas também podem ser utilizados como uma ferramenta de comparação para algoritmos numéricos e de modelos matemáticos, pois pequenas mudanças no regime dinâmico são perceptíveis em tais diagramas (AGUIRRE; BILLINGS, 1994; AGUIRRE; FURTADO; TÔRRES, 2006). Além disso, os procedimentos necessários para obter diagramas de bifurcação exigem que sejam empregados intensivos recursos computacionais, mesmo nos casos de sistemas que não possuem característica de memória hereditária.

O sistema de ordem não inteira

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y_1 &= -(y_2 + y_3), \\ {}^C D_0^\alpha y_2 &= y_1 + a y_2, \\ {}^C D_0^\alpha y_3 &= b + (y_1 - c)y_3, \end{cases} \quad (4.13)$$

com $\alpha = 1$ é conhecido como sistema de Rössler (RÖSSLER, 1976). Para $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, esse sistema é chamado de *sistema de Rössler de Ordem não inteira*. A Figura 4.5 apresenta soluções numéricas do sistema em (4.13) obtidas utilizando o método híbrido para $\alpha = 0,995$, $a = 0,2$, $b = 0,4$ e $c = 5,7$.

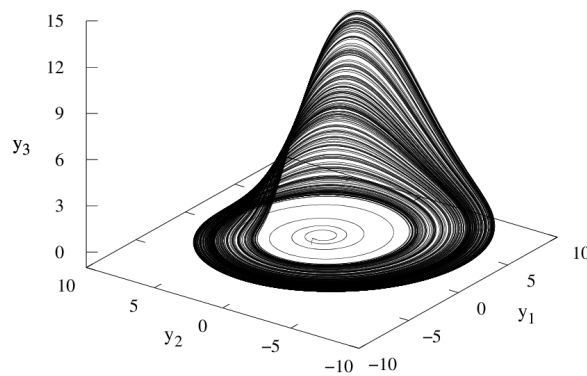


Figura 4.5 – Solução numérica de (4.13) com $\alpha = 0,995$, $a = 0,2$, $b = 0,4$, $c = 5,7$ e condição inicial $\vec{y}_0 = (-0,4218, 0,4458, -0,4583)$.

A construção do diagrama de bifurcação do sistema Rössler de ordem não inteira será realizada pela utilização de seções de Poincaré (FIELDER-FERRARA; PRADO, 1994). Devido ao fato de o fluxo desse sistema circular em torno da reta que é perpendicular ao plano $y_3 = 0$ e passa pelo ponto fixo $\vec{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$, que está próximo da origem cujas coordenadas são dadas por $y_1^* = (c - \sqrt{c^2 - 4ab})/2$, $y_2^* = -y_1^*/a$ e $y_3^* = y_1^*/a$, a seção de Poincaré a ser usada é dada pelo semi-plano

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 = 0 \text{ e } y_2 < 0\}, \quad (4.14)$$

como ilustra a Figura 4.6.

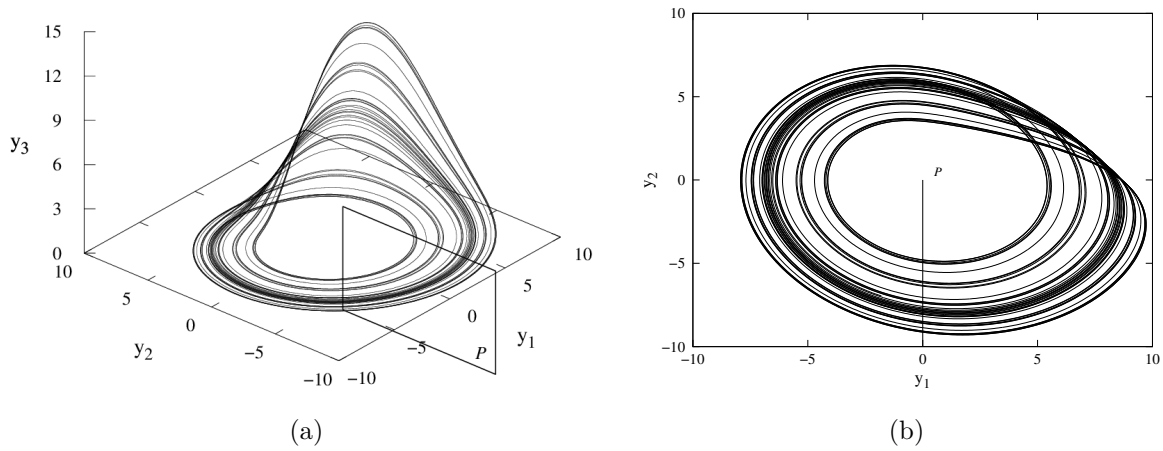


Figura 4.6 – Seção de Poincaré utilizada para a construção do diagrama de bifurcação do sistema de Rössler. (a) vista em perspectiva. (b) projeção sobre o plano (y_1, y_2) .

Para cada valor de α , um total de 500 interseções com semi-plano $\mathcal{P}$ serão obtidas. Dessas, apenas as últimas 100 serão utilizadas para a construção do diagrama. Além disso, a condição inicial $\vec{y}_0$ será tomada pela distribuição uniforme

$$\|\vec{y}_0 - \vec{y}^*\|_\infty < 0,5, \quad (4.15)$$

para cada α . No caso em que $\alpha > 1$, será considerado $\vec{y}_0' = (0, 0, 0)$.

Diagramas de bifurcação foram assim obtidos utilizando a Equação 3.66 e o método híbrido para $\alpha \in [0,9700, 1,0050]$, com incremento $\Delta\alpha = 0,0001$ e com os seguintes valores dos parâmetros do sistema: $a = 0,2$, $b = 0,4$, $c = 5,7$. No método híbrido, considerou-se o número de pontos do conjunto $\mathcal{C}$ no passo 2 a partir da condição inicial até a 5ª (quinta) interseção com o semi-plano $\mathcal{P}$ ², enquanto que para os demais pontos utilizou-se o passo 8. Na Figura 4.7 são apresentados dois diagramas utilizando esses métodos para o passo de discretização $h = 0,01$. O tempo de computação utilizando a Equação 3.66 (Figura 4.7-a) foi de 26 dias, 13 horas e 59 minutos. Para o método híbrido (Figura 4.7-b), o tempo total foi de 2 dias, 8 horas e 12 minutos.

² Nesse caso, o número de interseções com a seção foi escolhido de forma empírica. Contudo, o critério dado por (4.10) foi verificado em cada caso.

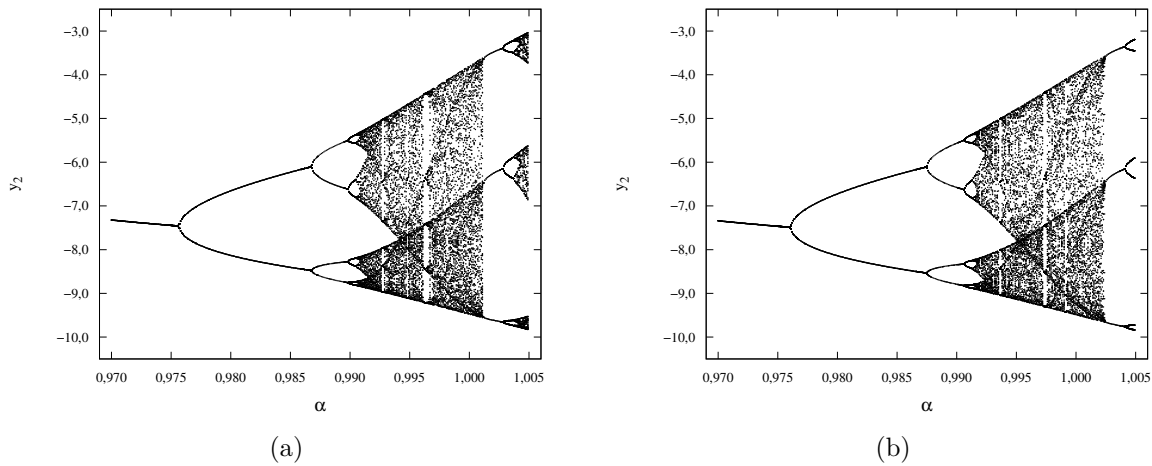


Figura 4.7 – Diagramas de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. Soluções numéricas foram obtidas utilizando (a) Equação 3.66 e (b) método híbrido com $h = 0,01$ em ambos os casos.

Observa-se, no entanto, que ocorre um deslocamento no eixo correspondente ao parâmetro de bifurcação no diagrama obtido utilizando o método híbrido em comparação com o obtido utilizando a Equação 3.66. Esse deslocamento, que é comum mesmo em métodos utilizados em sistemas de ordem inteira (MENDES; LETELLIER, 2004), pode ser explicado pela ordem do erro em cada método.

Outros diagramas de bifurcação para o sistema de Rössler foram obtidos utilizando o método híbrido com a redução do valor do passo de discretização. Na Figura 4.8-a é apresentado um diagrama para $h = 0,005$. Nesse caso, o tempo total foi de 10 dias, 21 horas e 54 minutos. Como esperado, o deslocamento é reduzido se comparado com a Figura 4.7-b. Para $h = 0,002$, o digrama de bifurcação obtido apresentou um deslocamento não significativo se comparado com a Figura 4.7-a. Contudo, o tempo computacional supera, nesse caso, o tempo computacional utilizando o método (3.66).

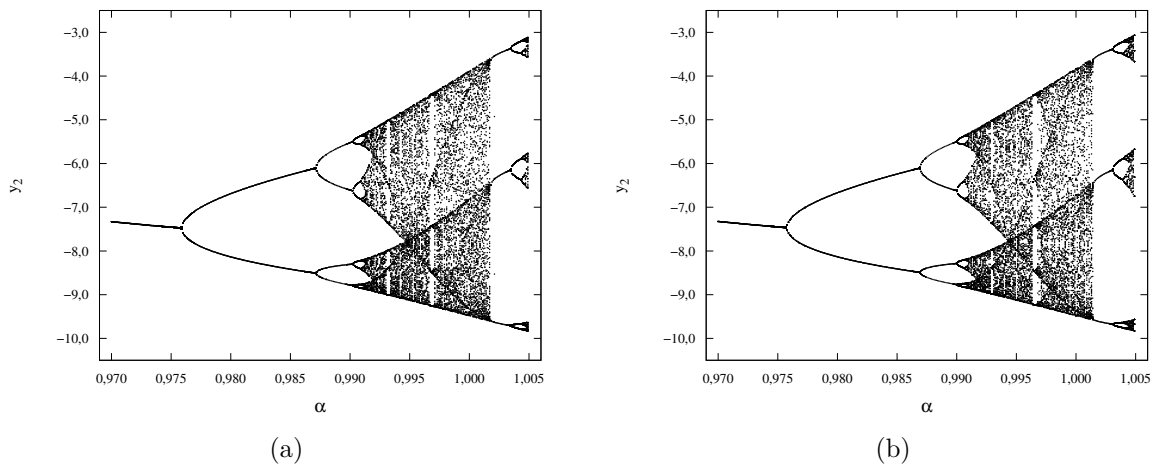


Figura 4.8 – Diagramas de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. Soluções numéricas foram obtidas utilizando o método híbrido com (a) $h = 0,005$ e (b) implementado com princípio de short memory com $h = 0,002$.

O princípio de *short memory* (Equações 3.58 e 3.60, p. 102) pode ser usado no passo 8 do método híbrido para reduzir o tempo de processamento. Esse princípio foi aplicado com $\epsilon = 0,001$ e $h = 0,002$ para a obtenção do diagrama de bifurcação exibido na Figura 4.8-b. O tempo de processamento nesse caso foi de 18 dias, 1 hora e 20 minutos. Os resultados obtidos dessa forma são comparáveis com os obtidos utilizando a Equação 3.66. Um aspecto importante, que pode ser observado nas Figuras 4.7 e 4.8, é o fato de não ser detectado comportamentos dinâmicos discrepantes, a não ser o deslocamento ao longo do eixo do parâmetro de bifurcação, utilizando esses dois métodos.

Neste exemplo, diagramas de bifurcação também foram obtidos para o sistema

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y_1 &= a \left[y_2 - \left(\frac{y_1^3}{16} - \frac{y_1}{6} \right) \right], \\ {}^C D_0^\alpha y_2 &= y_1 - y_2 + y_3, \\ {}^C D_0^\alpha y_3 &= -by_2, \end{cases} \quad (4.16)$$

que, para $\alpha = 1$, é uma variação do sistema de Chua em que a não linearidade é realizada por uma função cúbica e apresenta regime caótico para os parâmetros $a = 9,5$ e $b = 14$ (HIRSCH; SMALE; DEVANEY, 2004). Para $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, esse sistema será dito *sistema de Chua polinomial de ordem não inteira*.

Soluções numéricas para o sistema acima estão apresentadas na Figura 4.9 para $\alpha = 0,99$.

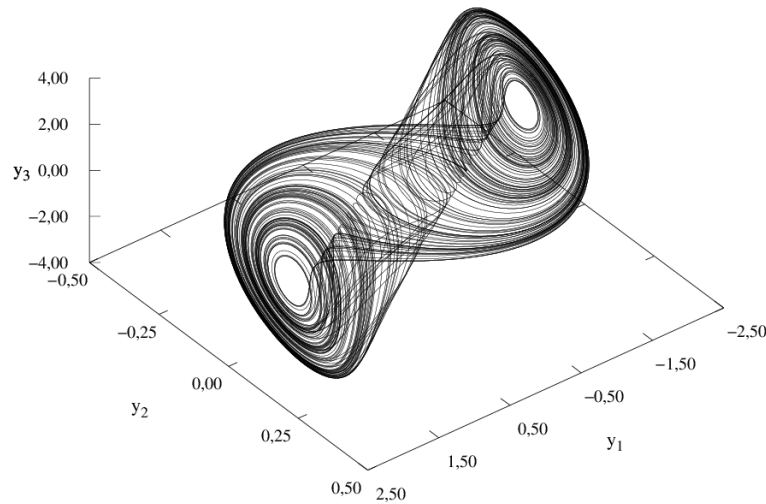


Figura 4.9 – Solução numérica de (4.16) com $\alpha = 0,99$, $a = 9,5$, $b = 14$ e condição inicial $\vec{y}_0 = (0,1,0,1,0,1)$.

Devido ao fato de as soluções desse sistema realizarem uma circulação dupla em torno de duas retas que passam pelos pontos fixos $\vec{y}_1^* = (2\sqrt{6}/3, 0, -2\sqrt{6}/3)$ e $\vec{y}_2^* = (-2\sqrt{6}/3, 0, 2\sqrt{6}/3)$ e são perpendiculares ao plano $y_3 = 0$, a seção de Poincaré

utilizada nesse caso será dada por $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, em que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são os semi-planos

$$\mathcal{P}_1 \equiv \left\{ (y_1, y_2, y_3) \mid y_2 = \frac{\sqrt{6}y_1 - 4}{10} \text{ e } y_2 < 0 \right\}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{P}_2 \equiv \left\{ (y_1, y_2, y_3) \mid y_2 = \frac{\sqrt{6}y_1 + 4}{10} \text{ e } y_2 > 0 \right\}. \quad (4.18)$$

A projeção de $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ sobre o plano (y_1, y_2) está ilustrada na [Figura 4.10](#).

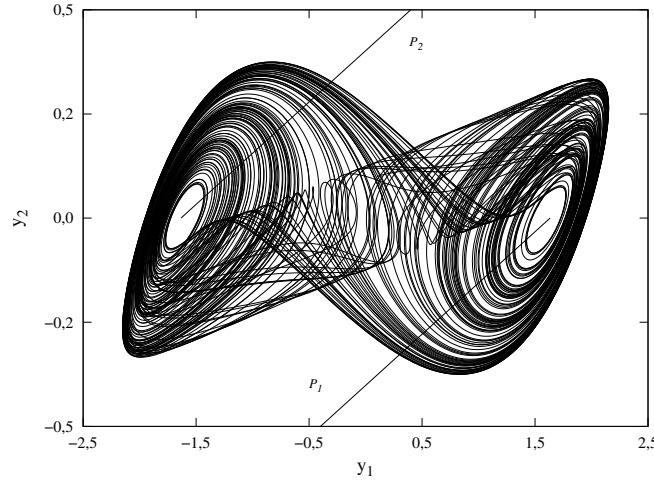


Figura 4.10 – Projeção sobre o plano (y_1, y_2) da seção de Poincaré utilizada para a construção do diagrama de bifurcação do sistema de Chua.

Para a construção dos diagramas de bifurcação para o sistema de Chua polinomial de ordem não inteira, será considerado o mesmo número de interseções na seção de Poincaré utilizado para construção dos diagramas para o sistema de Rössler, mas, nesse caso, com a seção $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. A condição inicial utilizada para cada α será tomada satisfazendo a condição uniforme

$$\|\vec{y}_0\|_\infty < 0,1, \quad (4.19)$$

ou seja, em torno do terceiro ponto fixo desse sistema, $(0, 0, 0)$. Além disso, $\vec{y}'_0 = (0, 0, 0)$ no caso em que $\alpha > 1$.

Dois diagramas de bifurcação foram obtidos. O primeiro, ilustrado na [Figura 4.11](#), utilizando a Equação 3.66 e o segundo utilizando o método híbrido, [Figura 4.12](#). Em ambos os casos utilizou-se $\alpha \in [0,9600, 1,0200]$ com incremento $\Delta\alpha = 0,0001$ e $h = 0,01$. Os parâmetros do sistema foram fixados em $a = 9,5$ e $b = 14$. Para o método híbrido, considerou-se o conjunto $\mathcal{C}$ da mesma maneira que o utilizado no sistema de Rössler de ordem não inteira.

O digrama da [Figura 4.11](#) foi obtido após 20 dias, 18 horas e 43 minutos, enquanto que o apresentado na [Figura 4.12](#) após 1 dia, 12 horas e 36 minutos. Os diagramas obtidos por esses métodos apresentam os mesmos regimes dinâmicos. Observa-se, no entanto, que

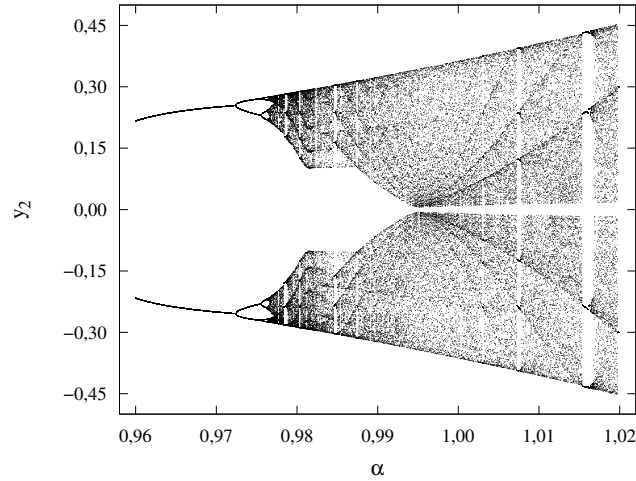


Figura 4.11 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. As soluções numéricas foram obtidas utilizando a Equação 3.66 com $h = 0,01$.

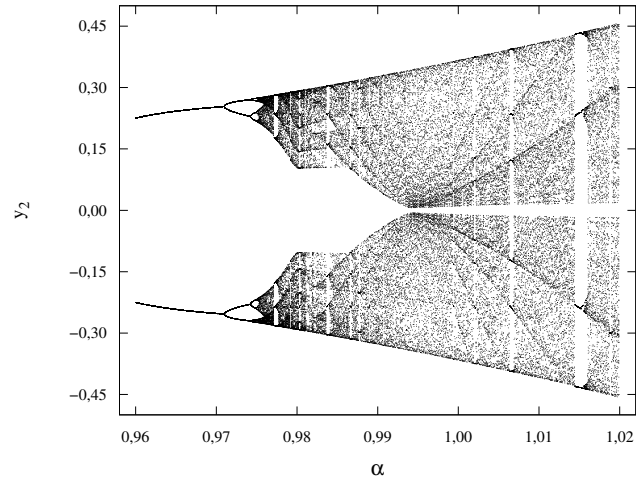


Figura 4.12 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. As soluções numéricas foram obtidas utilizando o método híbrido com $h = 0,01$.

também ocorre um deslocamento entre esses diagramas em relação ao eixo do parâmetro de bifurcação, porém menor que o obtido para o sistemas de Rössler com $h = 0,01$.

Uma tentativa de melhorar o desempenho de velocidade do método em (3.66) pelo aumento do passo de discretização h não se mostrou viável, ao menos para o caso do sistema de Rössler. Na Figura 4.13 é apresentado um diagrama bifurcação com $h = 0,1$ para $\alpha \in [0,9700, 0,9950]$ e $\Delta\alpha = 0,0001$. O diagrama foi obtido utilizando a seção de Poincaré dada em (4.14) e o mesmo número de interseções utilizado anteriormente, mas apresenta diferenças significativas se comparado à Figura 4.7-a. Para o valor de passo $h = 0,05$, o aspecto dissipativo exibido na Figura 4.13 também é observado. Dessa forma, construir um diagrama de bifurcação utilizando a Equação 3.66 com valores de passo $h = 0,1$ ou $h = 0,05$ mostrou-se inapropriado, o que reforça o uso do método híbrido para obter soluções numéricas de PVINIs segundo Caputo em casos que se faz necessário um

alto número de iterações.

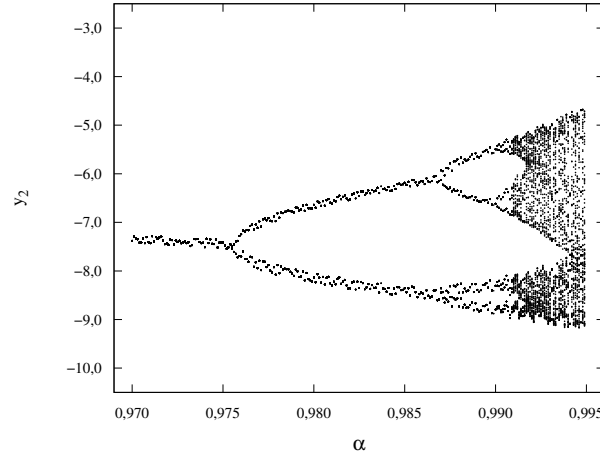


Figura 4.13 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. As soluções numéricas foram obtidas utilizando a Equação 3.66 com $h = 0,1$.

4.5 Sobre o Método Híbrido Não Preservar Pontos Fixos

Os exemplos apresentados na seção anterior mostram a viabilidade do método híbrido para obter soluções numéricas de um PVINI segundo a derivada de Caputo. Contudo, para PVINIs em que a função $\vec{F}(t, \vec{y})$ não depende explicitamente do tempo, ou seja, $\vec{F}(t, \vec{y}) = \vec{F}(\vec{y})$, as soluções a partir de condições iniciais que zeram $\vec{F}(\vec{y})$ não são mantidas constantes pelo método híbrido.

Para ilustrar esse fato, será considerado o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = F(y), \\ y(0) = y_0, \\ y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1, \text{ se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (4.20)$$

em que $F(y)$ é contínua e lipschitziana.

As aproximações numéricas de (4.20) no intervalo $(0, t]$ podem ser obtidas pelo passo 8 do método híbrido dado pela equação

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= h^\alpha \left(F(y_i) + \frac{y_0 t_{i+1}^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1} \\ &= \frac{y_0}{(i+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + h^\alpha F(y_i) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que para $t_i = ih$, a partir de um conjunto de condições iniciais $\{y_0, \dots, y_j\}$, para $\alpha \notin \mathbb{N}$. Contudo, essa equação é inapropriada no caso de soluções constantes não nulas do

PVINI 4.20. De fato, pela Proposição 3.5.2 a solução a partir de uma condição inicial y_0 , tal que $F(y_0) = 0$, é a solução constante $y(t) \equiv y_0$. Mas, se $y_0 \neq 0$, tem-se que

$$y_1 = \frac{y_0}{\Gamma(1-\alpha)} - c_1^\alpha y_0 = y_0 \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \alpha \right) \neq y_0. \quad (4.22)$$

Mesmo no caso de um conjunto de condições iniciais de valores constantes $\{y_0, y_0, \dots, y_0\}$ com $F(y_0) = 0$, tem-se que

$$y_{i+1} = \frac{y_0}{(i+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - y_0 \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \neq y_0. \quad (4.23)$$

Portanto, a solução numérica a partir da discretização em (4.21) não será equivalente à solução do sistema contínuo no passo $i+1$ e, dependendo da função $F(y)$, as soluções obtidas a partir desse passo poderão divergir para infinito enquanto que a solução do sistema contínuo se manterá constante. O seguinte exemplo ilustra a situação em que a solução numérica diverge da solução constante.

Exemplo 4.5.1 Seja ${}^C D_0^{0,5} y = y - 1$ e $y_0 = 1$. A função $y(t) = 1$ é solução desse PVINI. Logo, pelo teorema de existência e unicidade (Teorema 3.3.2) essa é a única solução. A Figura 4.14 exibe a solução analítica e a solução numérica obtida utilizando o método híbrido. ►

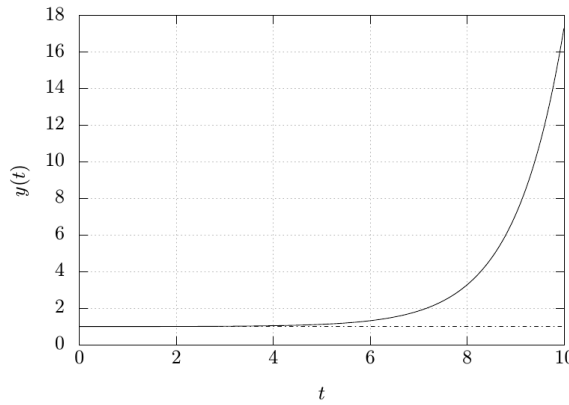


Figura 4.14 – Comparação entre a solução (—) numérica e (---) analítica para ${}^C D_0^\alpha y = y - 1$ com $\alpha = 0,5$, $y_0 = 1,0$, $h = 0,01$ e $t \in [0, 10]$.

A partir da definição de pontos fixos para um PVINI segundo Caputo (Definição 3.5.1, p. 93), é possível dizer que a discretização dada por (4.21) não preserva os pontos fixos não nulos do sistema contínuo (4.20). O fato dessa discretização não preservar os pontos fixos do respectivo sistema contínuo está relacionada com a substituição da série na definição da derivada de Grünwald-Letnikov pelo somatório em (4.21) (Equação 3.50). Nesse aspecto, o método híbrido não se equivale ao método dado pela Equação 3.66 (Capítulo 3, p. 104), obtido a partir da representação integral (3.14), pois esse método

preserva os pontos fixos de um PVINI dado por (4.20). Nesse sentido, o método híbrido pode ser adaptado com a restrição do segundo passo ser mantido, no caso de $F(y_0) = 0$ e do conjunto $\mathcal{C}$ ser um conjunto de valores constantes, contornando o problema de preservar os pontos fixos.

No Capítulo 5, um método baseado em uma variação da Equação 4.21 será proposto com a finalidade de se obter soluções numéricas que coincidam com as soluções constantes do respectivo sistema contínuo para o caso em que a função $F(t, y)$ não dependa explicitamente do tempo.

4.6 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo foi apresentado o método híbrido, que é implementado utilizando os métodos dados pelas Equações 3.57 e 3.66, aplicando o conceito de memória hereditária presente em sistemas com derivadas de ordem não inteira. Diferentemente do método (3.66), o método (3.57) não pode ser aplicado diretamente para obter soluções de um PVINI segundo Caputo para qualquer conjunto de condições iniciais. Contudo, o primeiro realiza um número muito maior de operações por iteração, o que resulta em longos tempos de processamento quando se é requerido um grande número de soluções, tornando-o, nesses casos, inviável. Por outro lado, o erro de truncamento local do método (3.66) é menor que o do método híbrido considerando as aproximações obtidas no conjunto $\mathcal{R}$.

Nos exemplos de diagramas de bifurcação estudados, o método híbrido foi em média 12 vezes mais rápido que utilizando a Equação 3.66 para o mesmo passo de discretização. Nesse sentido, o método híbrido pode ser empregado como uma alternativa para obter soluções de um PVINI segundo Caputo, sendo mais apropriado em simulações em que seja necessário realizar um grande número de iterações e uma precisão maior que $\mathcal{O}(h)$ não seja requerida, como no caso da construção de diagramas de bifurcação.

5 O Método de Memória Hereditária Concentrada na Condição Inicial

Neste capítulo, um método baseado na definição da derivada de Grünwald-Letnikov será proposto. Esse método será aplicado para obter soluções numéricas em um caso particular para as condições iniciais de um PVINI segundo Caputo, utilizado no estudo de sistemas dinâmicos de ordem não inteira. De forma equivalente ao método híbrido, o método proposto utilizará o conceito de memória hereditária aplicado à discretização dada pela Equação 3.57. Mas, diferente do primeiro que utiliza a memória inicial a partir da discretização dada pela Equação 3.66, a memória será obtida a partir dos coeficientes c_k^α de (3.57) e da condição inicial do PVINI. Como será visto, o sistema dinâmico discreto obtido pelo método proposto terá os mesmos pontos fixos do respectivo PVINI segundo Caputo para o caso em que a função $\vec{F}(t, \vec{y})$ não dependa explicitamente do tempo. Além da proposição do método, será realizada uma análise com respeito à estabilidade em torno de seus pontos fixos, caso eles existam.

Esse capítulo será apresentado da seguinte maneira: na seção 5.1, serão introduzidos alguns conceitos para a proposição do método, além de sua apresentação. Na seção 5.2, encontram-se os resultados numéricos obtidos pela utilização do método. Na seção 5.3, será realizada uma análise para estabilidade dos pontos fixos de sistemas discretos que são obtidos a partir do método apresentado na seção 5.1. O capítulo é finalizado com uma conclusão na seção 5.4.

5.1 Discretização com Memória Hereditária Concentrada na Condição Inicial

O método que será descrito nesta seção é baseado no operador de Riemann-Liouville em que o extremo inicial tende a menos infinito (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) e será definido em sequência.

Definição 5.1.1 *O operador derivada de Riemann-Liouville de ordem α , $\alpha > 0$, com extremo inicial no $-\infty$ é definido por*

$${}^{RL}D_{-\infty}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\lim_{c \rightarrow -\infty} I_c^{n-\alpha} f(t) \right), \quad (5.1)$$

em que $n = \lceil \alpha \rceil$, no caso em que a integral de Riemann-Liouville seja convergente. ▲

A seguinte proposição relaciona a Definição 5.1.1 com a derivada de Caputo ${}^CD_a^\alpha f(t)$, para $t > a$, e $f(t)$ constante no intervalo no intervalo $(-\infty, a)$ com $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \dots, [\alpha] - 1$.

Proposição 5.1.1 *Sejam $\alpha > 0$, $n = [\alpha]$ e $f(t)$ dada por*

$$f(t) = \begin{cases} \hat{f}(a), & \text{se } t < a, \\ \hat{f}(t), & \text{se } t \geq a, \end{cases} \quad (5.2)$$

em que $\hat{f}(t)$ é uma função satisfazendo $\hat{f}^{(n)}(t) \in L_1[a, t]$ e $\hat{f}^{(k)}(a) = 0$, $k = 1, \dots, [\alpha] - 1$. Então,

$${}^{RL}D_{-\infty}^\alpha (f(t) - f(a)) = {}^CD_a^\alpha f(t). \quad (5.3)$$

Observação 5.1.1 *Embora a hipótese com respeito às derivadas de $\hat{f}(t)$ em $t = a^+$ seja restritiva, ela é equivalente às utilizadas em sistemas dinâmicos de ordem não inteira dados por PVINIs segundo Caputo que não dependem explicitamente do tempo. O que se pretende com o método proposto é preservar os pontos fixos do respectivo sistema contínuo. Se $y_0^{(k)} \neq 0$ para algum $k = 1, \dots, [\alpha] - 1$, então, pela Equação 3.14 (p. 83), um PVINI segundo Caputo que não depende explicitamente do tempo não possui soluções constantes $y(t) = y_0$. ◀*

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição de $f(t)$, tem-se que $I_c^{n-\alpha} f(t)$ existe para todo $c \in (-\infty, t)$. Aplicando integração por partes em $I_c^{n-\alpha} f(t)$, com $c < a$, obtém-se

$$\begin{aligned} I_c^{n-\alpha} f(t) &= -\frac{(f(\tau) - f(a))(t - \tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \Big|_c^t + \int_c^t \frac{(t - \tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} f'(\tau) d\tau \\ &\stackrel{(!)}{=} \int_c^a \frac{(t - \tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} f'(\tau) d\tau + \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} f'(\tau) d\tau \\ &\stackrel{(!!)}{=} \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \hat{f}'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Em (!) foi utilizado que $f(c) = f(a)$ para todo $c < a$ e em (!!) que $f'(t) = 0$ para $t < a$ e que $\hat{f}(t) = f(t)$ para $t > a$. Dessa forma,

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} I_c^{n-\alpha} f(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \hat{f}'(\tau) d\tau.$$

O restante da demonstração segue de forma análoga aos passos da demonstração do Teorema 2.4.2, p. 61. ■

A Proposição 5.1.1 em conjunto com a discretização de Grünwald-Letnikov (3.57) serão utilizadas para descrever um método que gera aproximações numéricas da solução

de um PVINI segundo Caputo dado por

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = F(y), \\ y(0) = y_0, \\ y^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, [\alpha] - 1, \text{ se } \alpha > 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Esse PVINI não é o mais geral possível devido ao fato de $F(y)$ não depender explicitamente do tempo e das restrições nas condições iniciais. Contudo, no estudo de sistemas dinâmicos de ordem não inteira, é frequente a utilização de funções que não dependem explicitamente do tempo (ABD-ELOUAHAB; HAMRI; WANG, 2012; AGARWAL; EL-SAYED; SALMAN, 2013; BARBOSA et al., 2007; GE; JHUANG, 2007; GE; ZHANG, 2007; HARTLEY; LORENZO; QAMMER, 1995; JIA; CHEN; QI, 2014; JUN et al., 2014; LETELLIER; AGUIRRE, 2013; LIU; HONG; YANG, 2014; NIMMO; EVANS, 1999; SUN; WANG; SPROTT, 2010; TENG et al., 2014; YUAN; YANG, 2012; ZHANG et al., 2009). Além disso, se as soluções do PVINI 5.4 são limitadas, a substituição de alguma das condições por $\vec{y}^{(k)}(0) \neq \vec{0}$ implicará, a partir da representação integral da solução de (5.4) (Equação 3.30, p. 92), que as soluções passarão a ser ilimitadas. Nesse caso, o sistema dinâmico não inteiro terá dinâmica trivial, ou seja, as soluções irão divergir para o infinito.

Assim, seja $\hat{y}(t)$ a solução de (5.4). Então, $\hat{y}(t)$ satisfaz as condições iniciais desse PVINI, e a função auxiliar $y(t)$, definida de maneira análoga a apresentada em (5.2), é tal que

$${}^{RL}D_{-\infty}^\alpha (y(t) - y(0)) = {}^C D_0^\alpha y(t) = F(y(t)). \quad (5.5)$$

Por outro lado, para cada $n_0 \in \mathbb{Z}_-$, tem-se que $\lim_{c \rightarrow -\infty} I_c^\alpha (y(t) - y(0)) = I_{n_0}^\alpha (y(t) - y(0))$ e

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_{-\infty}^\alpha (y(t) - y(0)) &= {}^{RL}D_{n_0}^\alpha (y(t) - y(0)) \\ &= {}^{RL}D_{n_0}^\alpha y(t) - \frac{y(0)(t - n_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

ao aplicar a Proposição 2.3.4 (p. 56) na última igualdade.

Portanto, para $t \geq 0$,

$${}^{RL}D_{n_0}^\alpha y(t) = F(y) + \frac{y(0)(t - n_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (5.7)$$

Aplicando¹ a aproximação numérica de Grünwald-Letnikov (Equação 3.57) em ${}^{RL}D_{n_0}^\alpha y(t)$ para uma malha de N pontos igualmente espaçados no intervalo $[n_0, t]$, obtém-se, de forma

¹ Formalmente, a equivalência entre as derivadas de Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov em um intervalo $[a, b]$ só é válida para funções pertencentes a $C^n[a, b]$ (Proposição 2.5.1, p. 69). Contudo, é possível usar a discretização para obter aproximações mesmo no caso da função $y(t)$, pois não se objetiva passar o limite quando $h \rightarrow 0$ nessa discretização.

análoga à Equação 4.21 (p. 128),

$$y_{\ell+1} = h^\alpha F(y_\ell) - \frac{y_0}{(\ell+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{k=1}^{\ell+1} c_k^\alpha y_{\ell-k+1}, \quad (5.8)$$

em que $h = (t - n_0)/N$, y_ℓ é a aproximação de $y(t_\ell)$ e $t_\ell = n_0 + \ell h$. Observa-se que o número de pontos na malha $[n_0, t]$ pode ser escolhido em função do passo de discretização, h , de forma que exista $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 + \tilde{\ell}h = 0$, mas com a penalidade de não existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n_0 + nh$. Embora a igualdade possa não ser atingida, tem-se que existem $h \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 + nh \leq t < n_0 + (n+1)h$ em que $n_0 + nh$ esteja tão próximo a t , quando se queira. Assim, para $t_\ell \geq 0$, é possível escrever $t_\ell = t_{\tilde{\ell}+i}$, $i \geq 0$, e a Equação 5.8 pode ser reescrita por

$$\begin{aligned} y_{\tilde{\ell}+i+1} &= h^\alpha F(y_{\tilde{\ell}+i}) - \frac{y_0}{(\tilde{\ell}+i+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{k=1}^{\tilde{\ell}+i+1} c_k^\alpha y_{\tilde{\ell}+i-k+1} \\ &= h^\alpha F(y_{\tilde{\ell}+i}) - \frac{y_0}{(\tilde{\ell}+i+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{\tilde{\ell}+i-k+1} - \sum_{k=i+2}^{\tilde{\ell}+i+1} c_k^\alpha y_{\tilde{\ell}+i-k+1} \\ &= h^\alpha F(y_{\tilde{\ell}+i}) - \frac{y_0}{(\tilde{\ell}+i+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{\tilde{\ell}+i-k+1} - \sum_{k=i+2}^{\tilde{\ell}+i+1} c_k^\alpha y_0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

pois, para $k \geq i+2$, $\tilde{\ell}+i-k+1 \leq \tilde{\ell}$, ou seja, $t_{\tilde{\ell}+i-k+1} < 0$ o que implica em $y_{\tilde{\ell}+i-k+1} = y_0$ pela definição da função $y(t)$. Renomeando $y_{\tilde{\ell}+i}$ por $\hat{y}_i$ para $i \geq 0$, obtém-se

$$\hat{y}_{i+1} = h^\alpha F(\hat{y}_i) - \frac{\hat{y}_0}{(\tilde{\ell}+i+1)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \hat{y}_{i-k+1} - \sum_{k=i+2}^{\tilde{\ell}+i+1} c_k^\alpha \hat{y}_0, \quad (5.10)$$

que são as aproximações numéricas da solução $\hat{y}(t)$ do PVINI 5.4 considerando o extremo inicial n_0 . Tomando o limite $n_0 \rightarrow -\infty$, tem-se que $\tilde{\ell} \rightarrow +\infty$ e a seguinte equação é obtida

$$\hat{y}_{i+1} = h^\alpha F(\hat{y}_i) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \hat{y}_{i-k+1} - \sum_{k=i+2}^{\infty} c_k^\alpha \hat{y}_0. \quad (5.11)$$

O fato de que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha = -1$ (Observação 3.6.2, p. 100) implica que a série em (5.11) é convergente e pode ser substituída por um somatório finito, obtendo-se

$$y_{i+1} = h^\alpha F(y_i) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1} - y_0 \left(-1 - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \right), \quad (5.12)$$

pela substituição $\hat{y}_i = y_i$, uma vez que as funções $y(t)$ e $\hat{y}(t)$ se coincidem para $t \geq 0$.

A Equação 5.12 será utilizada para obter soluções numéricas para o PVINI segundo Caputo (5.4) e goza da propriedade de preservar os pontos fixos desse sistema, caso eles existam.

Proposição 5.1.2 *Seja y^* um ponto fixo do PVINI 5.4. Então, as soluções numéricas obtidas a partir da discretização dada pela Equação 5.12 são dadas por $y_i = y^*$ para todo $i \geq 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, fazendo $y_0 = y^*$, tem-se que

$$y_1 = h^\alpha F(y_0) - c_1^\alpha y_0 - y_0 (-1 - c_1^\alpha) = y_0.$$

Por indução, segue que

$$y_{i+1} = h^\alpha F(y_0) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_0 - y_0 \left(-1 - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \right) = y_0,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. ■

A Equação 5.12 será dita discretização com **memória hereditária concentrada na condição inicial** (MHCCI), devido ao termo

$$\sum_{k=i+2}^{\infty} c_k^\alpha y_0 = y_0 \left(-1 - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \right), \quad (5.13)$$

que representa a memória hereditária no intervalo $(-\infty, 0)$ para a representação do PVINI 5.4 utilizando a derivada de Riemann-Liouville (Equação 5.5).

5.2 Resultados Numéricos Utilizando o Método MHCCI

Para validar a Equação 5.12 como um método para obter soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo dado por (5.4), serão realizados procedimentos análogos aos utilizados para validar o método híbrido. Assim, soluções analíticas do PVINI

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y = \lambda y, \\ y(0) = 1, \\ y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, [\alpha] - 1, \text{ se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (5.14)$$

serão comparadas com soluções numéricas obtidas a partir de (5.12) para diferentes valores de α . Além disso, será realizada uma comparação entre diagramas de bifurcação para os sistemas de Rössler (4.13) e de Chua polinomial (4.16) de ordem não inteira com os apresentados no Capítulo 4.

Soluções Numéricas e Analíticas do PVINI linear ${}^C D_0^\alpha y = \lambda y$

O fato de a solução do PVINI 5.14 ser dada por $y(t) = y_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ (Corolário 3.3.4, p. 86), fornece a possibilidade de comparar essas soluções com as obtidas numericamente

a partir de (5.12). Essas soluções serão comparadas no intervalo $[0, 5]$ considerando $y_0 = 1$, $\alpha \in (0, 2)$ e $\lambda = \pm 1$ para o PVINI 5.14 e, para cada um desses valores, diferentes valores do passo de discretização h .

Para $\lambda = 1$, tem-se que as soluções desse PVINI são funções estritamente crescentes com aspecto típico ao apresentado nas Figuras 5.1 e 5.2. Na Figura 5.1 foi considerado $\alpha = 0,5$ e $h = 0,01$ e o erro entre as soluções analíticas e numéricas é percebido visualmente.

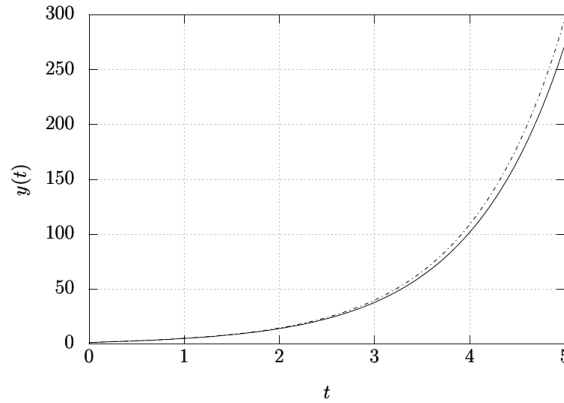


Figura 5.1 – Comparação entre a solução (—) numérica e (---) analítica para ${}^C D_0^\alpha y = \lambda y$ com $\alpha = 0,5$, $y_0 = 1,0$, $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$ e (a) $t \in [0, 5]$.

Na Figura 5.2 foi utilizado $\alpha = 1,5$ e a diferença entre as soluções numérica e analítica é visível no intervalo $[4,75, 5,00]$ em destaque.

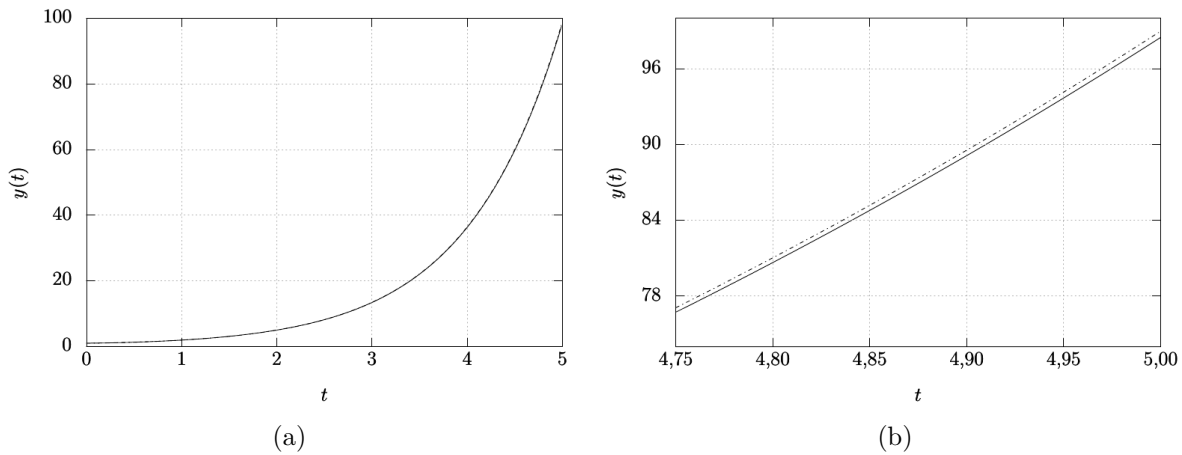


Figura 5.2 – Comparação entre a solução (—) numérica e (---) analítica para ${}^C D_0^\alpha y = \lambda y$ com $\alpha = 1,5$, $y_0 = 1,0$, $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$ e (a) $t \in [0, 5]$. Em (b) está apresentado apenas o intervalo $t \in [4,75, 5,00]$ destacando a diferença entre as soluções.

Nas Tabelas 5.1 e 5.2 estão apresentados o erro absoluto máximo considerando $h = 0,01$ e $\alpha \in [0, 3, 1, 8]$, em que α foi variado a cada 0,1. Nessas tabelas, $i_{\text{máx}}$ representa o valor da iteração em que o erro máximo ocorre. Observa-se que o erro absoluto máximo ocorre no extremo superior do intervalo $[0, 5]$.

Tabela 5.1 – Erro numérico entre a solução obtida utilizando (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$, $t \in [0, 5]$ e $\alpha \in [0,3, 1,0]$.

α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\max(y_i - y(t_i))$	72,42	40,00	23,68	15,31	10,35	7,19	5,10	3,64
$i_{\max}$	501	501	501	501	501	501	501	501

Tabela 5.2 – Erro numérico entre a solução obtida utilizando (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = 1,0$, $h = 0,01$, $t \in [0, 5]$ e $\alpha \in [1,1, 1,8]$.

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\max(y_i - y(t_i))$	2,60	1,84	1,26	0,83	0,50	0,23	0,03	0,13
$i_{\max}$	501	501	501	501	501	501	501	501

A Figura 5.3 apresenta o erro absoluto máximo em função de α no intervalo $[0,3, 1,8]$ considerando uma variação de 0,001 no seu incremento para o passo de discretização $h = 0,01$. Observa-se que o erro decresce no intervalo $[0,30, 1,71)$ e cresce no intervalo $[1,71, 1,80]$.

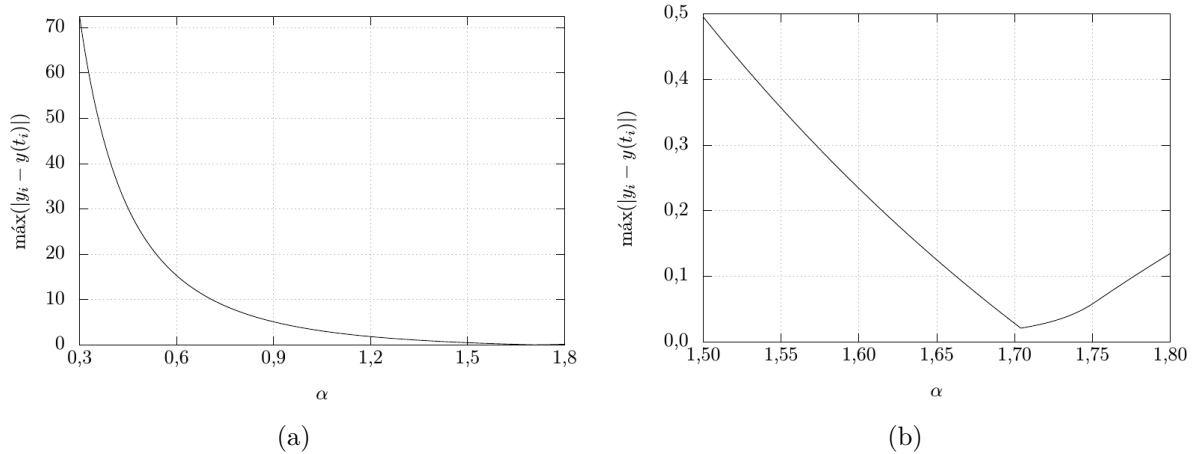


Figura 5.3 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas usando a Equação 5.12 e analíticas do PVINI 5.14 para $\lambda = 1$ e (a) $\alpha \in [0,3, 1,8]$. Em (b) é destacado a janela $[1,5, 1,8]$. O incremento utilizado para α foi de 0,001.

Para $h = 0,005$ o valor do erro máximo entre as soluções numérica e analítica diminui em comparação com $h = 0,01$. O mesmo acontece ao variar de $h = 0,005$ para $h = 0,001$, como pode ser observado pela Figura 5.4. Isso sugere que o erro diminui com a diminuição do valor do passo de discretização. Observa-se, porém, que o erro absoluto máximo encontrado em cada caso não é da mesma ordem do passo de discretização h utilizado e esse erro depende de valores de α e de h . Isso pode ser explicado devido ao erro de truncamento local do método baseado em Grünwald-Letnikov (Proposição 3.6.5) ser acumulado em cada iteração e devido à relação entre o crescimento da função $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ no intervalo $[0, t]$ em comparação com o tamanho do intervalo. Além

disso, para $\lambda > 0$, quanto menor o valor de α mais rapidamente a função cresce, o que explica a relação inversamente proporcional entre o erro máximo e os valores de α . Em particular, para $\alpha = 1,0$, a solução é $y(t) = e^t$ e o método dado pela Equação 5.12 é igual ao método de Eüler, que possui erro de truncamento local na ordem do passo h , (BURDEN; FAIRES, 2008).

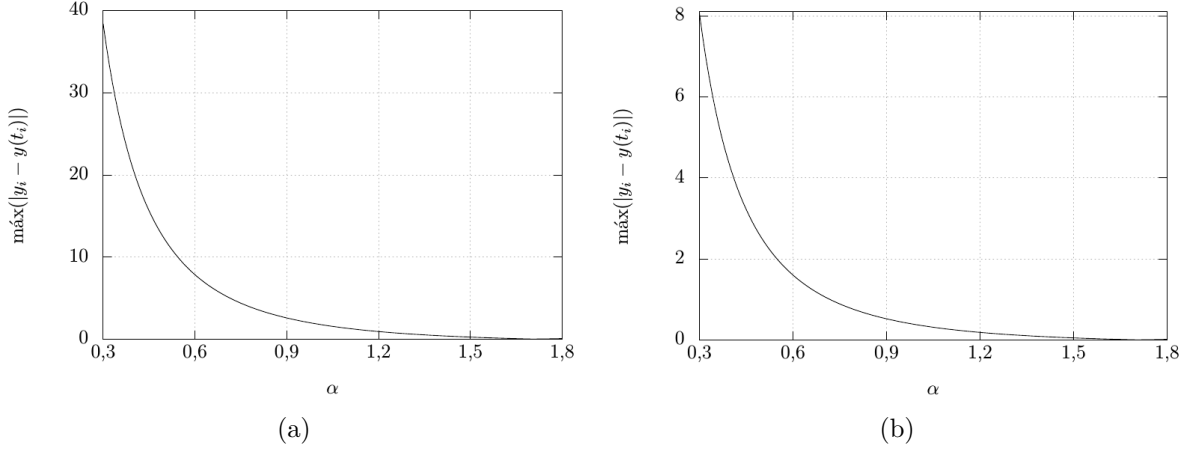


Figura 5.4 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas, usando a Equação 5.12, e analíticas do PVINI 5.14 em função de α para $\lambda = 1$, (a) $h = 0,005$ e (b) $h = 0,001$.

No caso em que $\lambda = -1$, a função $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ é limitada e tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$, conforme Teorema 3.5.7. Para $0 < \alpha \leq 1$ a função é estritamente decrescente e para $1 < \alpha \leq 2$ a função oscila em torno de $y = 0$. Nas Figuras 5.5 e 5.6 estão apresentados as soluções numéricas e analíticas para $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 1,5$, respectivamente. Observa-se que o erro entre as soluções não é perceptível visualmente no intervalo $[0, 5]$. Em cada caso, foi destacado o subintervalo onde ocorre o erro máximo de forma a poder visualizar a diferença entre essas as soluções.

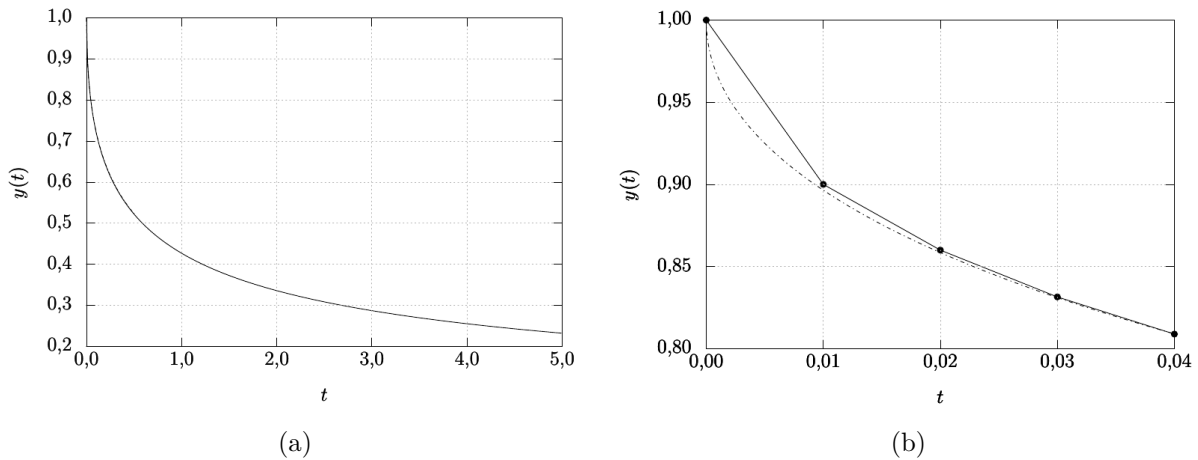


Figura 5.5 – Soluções (—) numéricas e (---) analíticas para ${}^C D_0^\alpha y = \lambda y$ com $y_0 = 1,0$, $\lambda = -1,0$, $h = 0,01$ e $\alpha = 0,5$. (a) As soluções no intervalo $[0, 5]$ são indistinguíveis visualmente e (b) o erro pode ser observado para as soluções no intervalo $[0,00, 0,04]$, onde ocorre o erro máximo, e (•) representa a solução numérica obtida.

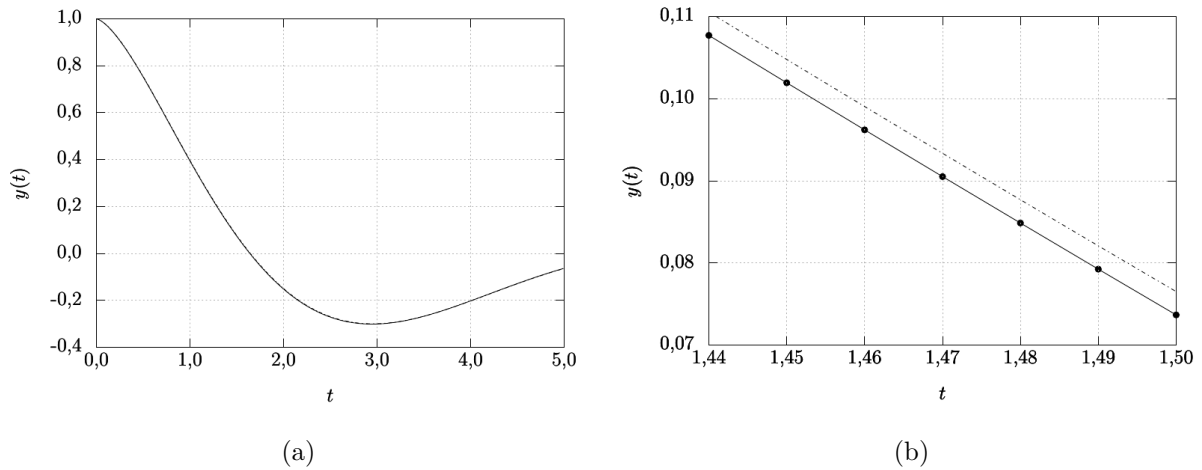


Figura 5.6 – Soluções (—) numéricas e (---) analíticas para ${}^C D_0^\alpha y = \lambda y$ com $y_0 = 1,0$, $\lambda = -1,0$, $h = 0,01$ e $\alpha = 1,5$. (a) As soluções no intervalo $[0, 5]$ são indistinguíveis visualmente e (b) o erro pode ser observado para as soluções no intervalo $[1,44, 1,50]$, onde ocorre o erro máximo, e (●) representa a solução numérica obtida.

Nas Tabelas 5.3 e 5.4 estão apresentados os valores obtidos para o erro absoluto máximo que o método apresenta em relação à solução analítica, para $h = 0,01$, e o valor da iteração em que esse erro ocorre, $i_{\text{máx}}$. Na Figura 5.7, o erro máximo em função de α no intervalo $[0,3, 1,8]$ foi obtido variando α a cada 0,001. Diferente do caso em que $\lambda = 1$, para $\lambda = -1$ o erro máximo não ocorre no último ponto do intervalo. Além disso, o erro entre as soluções numérica e analíticas são da ordem do passo de discretização, o que pode ser explicado devido ao fato de as soluções serem limitadas. Para $h = 0,005$ e $h = 0,001$ o erro se mantém na ordem do passo como apresentam a Figura 5.8.

Tabela 5.3 – Erro numérico entre a solução obtida utilizando (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = -1,0$, $h = 0,001$, $t \in [0, 5]$ e $\alpha \in [0,3, 1,0]$.

α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\max(y_i - y(t_i))$	$2,84 \times 10^{-2}$	$3,61 \times 10^{-3}$	$3,54 \times 10^{-3}$	$4,05 \times 10^{-3}$	$2,76 \times 10^{-3}$	$6,15 \times 10^{-3}$	$4,12 \times 10^{-2}$	$1,85 \times 10^{-3}$
$i_{\text{máx}}$	2	2	2	2	2	102	102	101

Tabela 5.4 – Erro numérico entre a solução obtida via a discretização (5.12) e $y(t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ para $\lambda = -1,0$, $h = 0,01$, $t \in [0, 10]$ e $\alpha \in [1,1, 1,8]$.

α	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\max(y_i - y(t_i))$	$2,02 \times 10^{-3}$	$2,20 \times 10^{-3}$	$2,40 \times 10^{-3}$	$2,61 \times 10^{-3}$	$2,84 \times 10^{-3}$	$3,12 \times 10^{-3}$	$3,47 \times 10^{-3}$	$3,88 \times 10^{-3}$
$i_{\text{máx}}$	115	128	138	144	147	146	146	148

Observa-se, das Figuras 5.7 e 5.8-a, que, para valores de α menores que 0,4, o erro máximo tem uma variação maior que em relação ao restante do intervalo. Isso pode ser explicado pela inclinação da função $y(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ para valores de t próximos a zero (Figura 5.5). Para valores de α próximos a zero o erro aumenta, pois a variação em $y(t)$ nas

proximidades de $t = 0$, $t > 0$, aumenta à medida que α diminui. Nesse caso, diminuindo o tamanho do passo de discretização, observa-se uma melhora nas aproximações em torno de $t = 0$, $t > 0$.

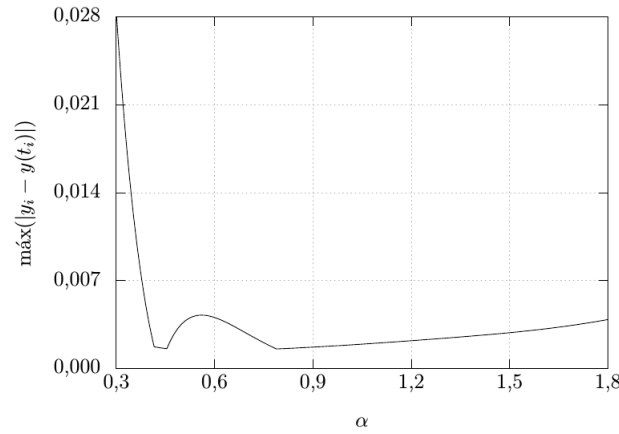


Figura 5.7 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas, usando a Equação 5.12, e analíticas do PVINI 5.14 em função de α para $\lambda = -1$ e $h = 0,01$. Foi considerado um incremento em α de 0,001 para gerar essa figura.

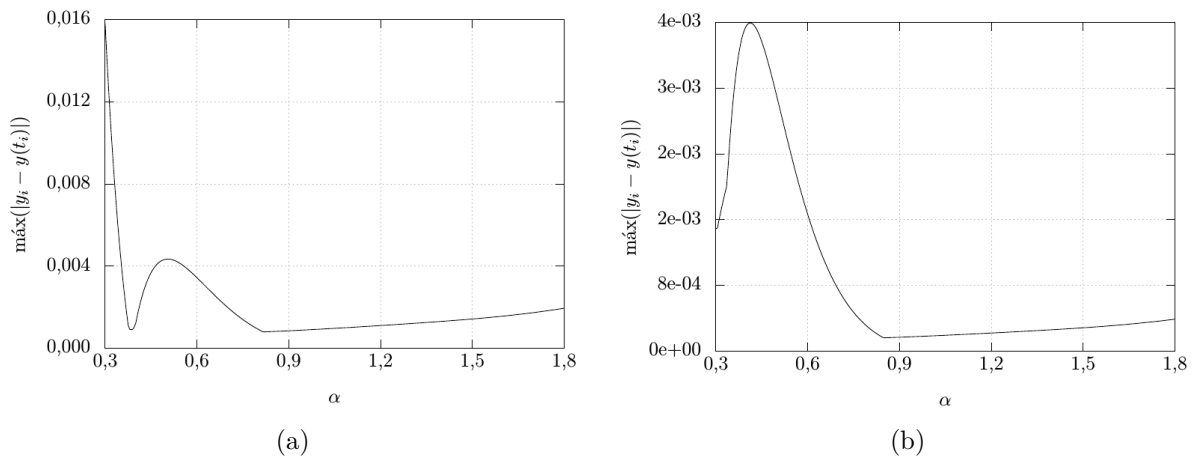


Figura 5.8 – Erro absoluto máximo entre as soluções numéricas, usando a Equação 5.12, e analíticas do PVINI 5.14 em função de α para $\lambda = -1$, (a) $h = 0,005$ e (b) $h = 0,001$.

Para ilustrar o efeito descrito no parágrafo anterior, considerou-se o caso em que $\alpha = 0,05$, como exibe a Figura 5.9. Em (a), foi considerado $t \in [0, 0,02]$ e $h = 10^{-3}$. As soluções numéricas oscilam em torno da analítica nas aproximações iniciais, mas estabilizam-se a partir de $t \approx 0,016$, o que corresponde a $4/5$ do intervalo. Em (b), foi escolhido $t \in [0, 0,0005]$ e $h = 2,5 \times 10^{-5}$ de forma que o número de pontos da discretização seja o mesmo que em (a). O efeito de oscilação nas aproximações iniciais ainda ocorre, mas com amplitude menor. Além disso, a oscilação estabiliza em $t \approx 0,0003$, o que corresponde a $3/5$ do intervalo.

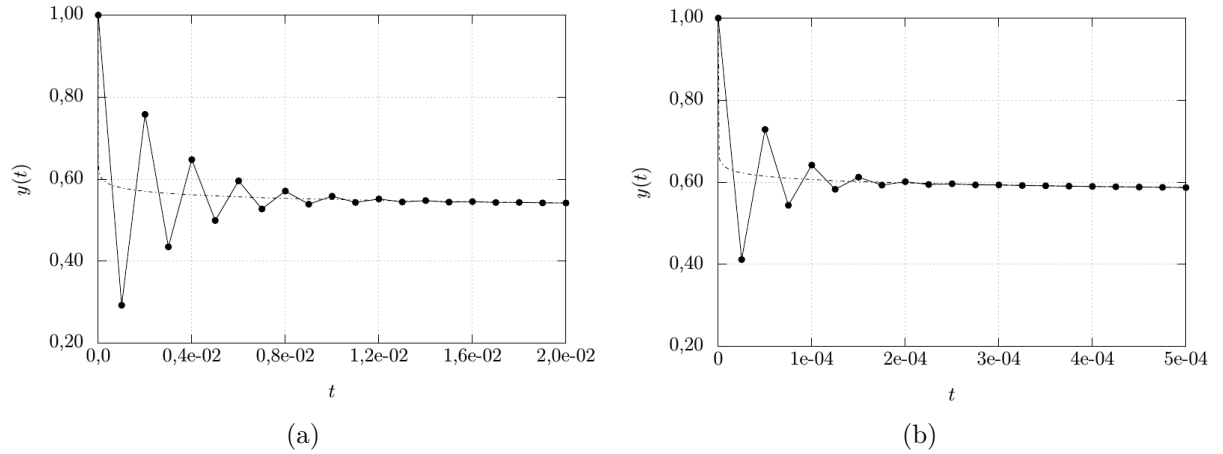


Figura 5.9 – (–•–) Soluções numéricas utilizando a Equação 5.12 e (---) analíticas do PVINI 5.14 para (a) $h = 10^{-3}$ e $t \in [0, 0,02]$, e para (b) $h = 2,5 \times 10^{-5}$ e $t \in [0, 0,0005]$.

Embora as soluções obtidas com a Equação 5.12 apresentem um erro relativamente grande em comparação com a ordem do passo, as soluções obtidas têm a característica de estabilizarem em torno da solução analítica. Essa característica não é observada utilizando a discretização dada pela Equação 3.66 (Capítulo 3, p. 104) para $\alpha = 0,05$ e está ilustrado na Figura 5.10, em que foram consideradas as mesmas condições que as utilizadas na Figura 5.9. Além disso, as soluções numéricas obtidas utilizando a Equação 3.66 não apresentam boas aproximações da analítica para os mesmos valores de h utilizados. Observa-se que, a Equação (3.66) é utilizada para obter-se o conjunto de condições iniciais para o método híbrido. Portanto, o método híbrido apresentará os mesmos aspectos da Figura 5.10 para valores próximos a $t = 0$, $t > 0$.

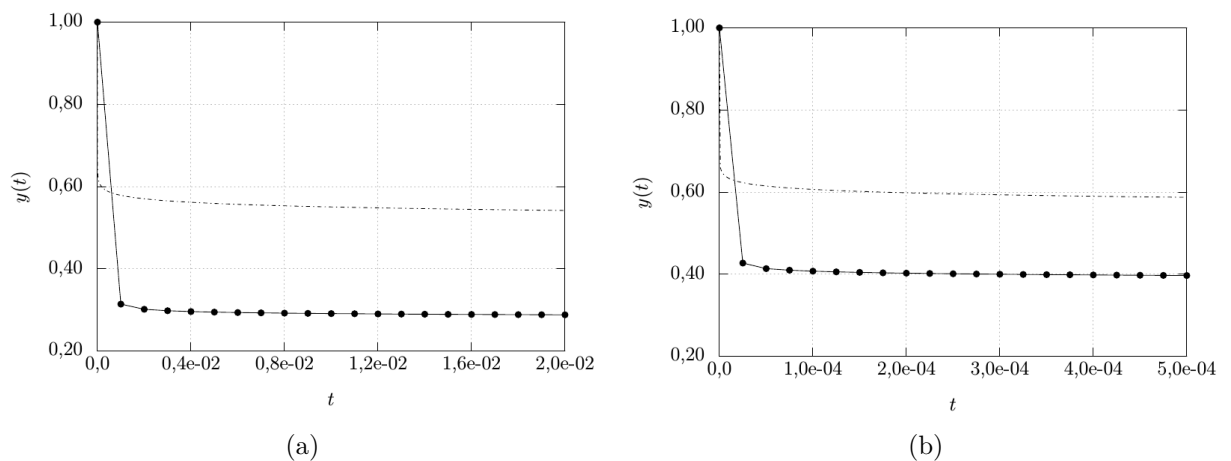


Figura 5.10 – (–•–) Soluções numéricas utilizando a Equação 3.66 e (---) analíticas do PVINI 5.14 para (a) $h = 10^{-3}$ e $t \in [0, 0,02]$, e para (b) $h = 2,5 \times 10^{-5}$ e $t \in [0, 0,0005]$.

A seguir, serão apresentados diagramas de bifurcação para os sistemas de Rössler e de Chua polinomial utilizando a forma vetorial da Equação 5.12, que pode ser obtida de maneira análoga para sistemas de equações diferenciais de ordem não inteira comensuráveis.

Diagramas de Bifurcação para os Sistemas de Rössler e de Chua

O método MHCCI foi aplicado em uma versão vetorial para a obtenção de diagramas de bifurcação para o sistema de Rössler (4.13), apresentado na Figura 5.11, e de Chua polinomial (4.16), Figura 5.12. Em ambos os casos, utilizou-se o passo de discretização $h = 0,01$ e a ordem de derivação, α , como parâmetro de bifurcação com incremento $\Delta\alpha = 0,0001$.

Para o sistema de Rössler de ordem não inteira considerou-se $\alpha \in [0,9700, 1,0050]$ e os parâmetros foram fixados em $a = 0,2$, $b = 0,4$ e $c = 5,7$. O diagrama foi construído a partir das interseções das soluções numéricas com a seção de Poincaré dada em (4.14).

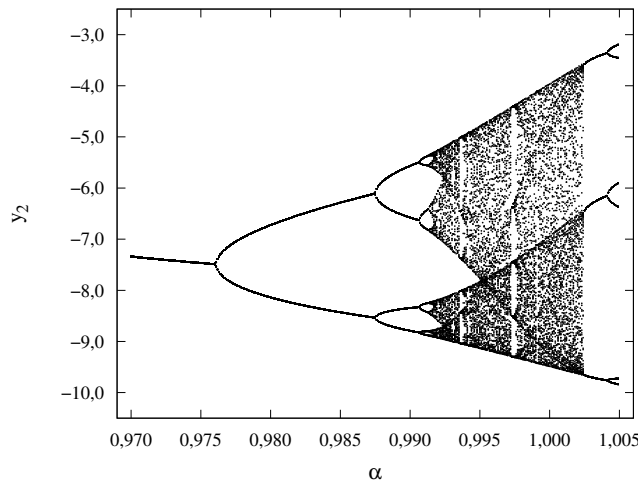


Figura 5.11 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira (4.13) utilizando a discretização dada pela Equação 5.15. Nesse caso, foi considerado a ordem de derivação como parâmetro de bifurcação para $\alpha \in [0,970, 1,005]$ e variação do parâmetro $\Delta\alpha = 0,0001$.

Para o sistema de Chua polinomial de ordem não inteira considerou-se $\alpha \in [0,9600, 1,0200]$ e os parâmetros foram fixados em $a = 9,5$ e $b = 14$. O diagrama foi construído a partir das interseções das soluções numéricas com a seção de Poincaré $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ dadas em (4.17) e (4.18).

Observa-se que foram consideradas as mesmas condições para os respectivos diagramas de bifurcação dos sistemas de Rössler (Figura 4.7-b, p. 124) e de Chua polinomial (Figura 4.12, p. 127) obtidos pelo método híbrido (Capítulo 4). Em ambos os casos, não se observou comportamentos dinâmicos distintos. Além disso, o tempo de processamento equivaleu-se com o respectivo tempo de processamento utilizando o método híbrido. Isso mostra que o método MHCCI pode ser utilizado para obter soluções numéricas para PVINIs segundo Caputo, além de possuir tempo de processamento equivalente ao do método híbrido.

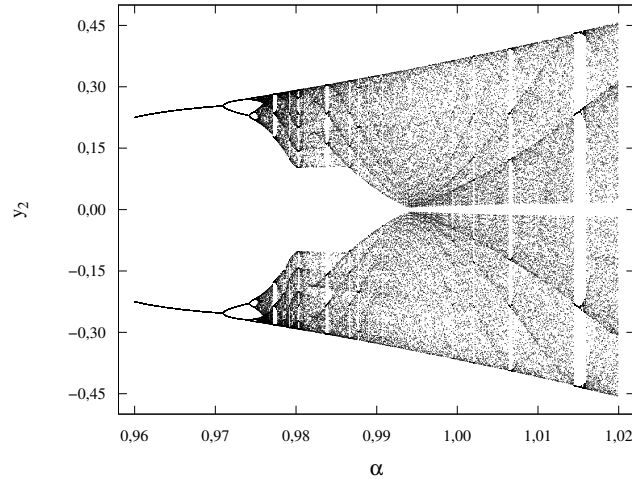


Figura 5.12 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira (4.16) utilizando a discretização dada pela Equação 5.15. Nesse caso, foi considerado a ordem de derivação como parâmetro de bifurcação para $\alpha \in [0,96, 1,02]$ e variação do parâmetro $\Delta\alpha = 0,0001$.

Na seguinte seção, será realizado um estudo preliminar a respeito da estabilidade de pontos fixos de uma função discreta na forma da Equação 5.12.

5.3 Comportamento Local em Torno dos Pontos Fixos do Sistema Dinâmico Discreto Obtido pela Discretização MHCCI

Nessa seção, serão verificadas sob que condições os pontos fixos do sistema discreto dado pela Equação 5.11, ou de seu equivalente (5.12), apresentam comportamento localmente estável. As análises aqui apresentadas terão importância para a comparação entre as soluções numéricas e analíticas do PVINI 5.4.

Sejam $\alpha > 0$, $h > 0$ e $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$. O conceito de órbita a partir de um ponto y_0 para uma função dada pela discretização

$$y_{i+1} = h^\alpha F(y_i) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1} - \sum_{k=i+2}^{\infty} c_k^\alpha y_0, \quad (5.15)$$

em que $c_0^\alpha = 1$ e $c_k^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) c_{k-1}^\alpha$, $k > 1$, é análoga ao de sistemas dinâmicos discretos (MONTEIRO, 2011), apenas observando que para se obter a iterada y_{i+1} é necessário conhecer todas as iteradas anteriores $\{y_i, y_{i-1}, \dots, y_0\}$. O ponto y_0 também será dito **condição inicial** para sua órbita. Uma condição inicial y_0 será um **ponto fixo** para a Equação 5.15 se sua órbita é constante e igual y_0 .

A seguinte proposição mostra a condição necessária e suficiente para que uma condição inicial seja um ponto fixo de (5.15).

² O motivo de se tomar $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ao invés de $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está relacionado com o fato de poder estender a análise para o caso de sistemas de equações lineares com autovalores complexos.

Proposição 5.3.1 *Uma condição inicial y_0 é um ponto fixo de uma função dada por (5.15) se, e somente se, $F(y_0) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja y_0 um ponto fixo. Então para todo $i \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_0 = h^\alpha F(y_0) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_0 - \sum_{k=i+2}^{\infty} c_k^\alpha y_0 \\
 &= h^\alpha F(y_0) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha y_0 \\
 &= h^\alpha F(y_0) - y_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha \\
 &\stackrel{(*)}{=} h^\alpha F(y_0) + y_0,
 \end{aligned}$$

o que implica $F(y_0) = 0$. Em (*) foi utilizado o Corolário 3.6.4 (p. 100). Para $F(y_0) = 0$, o resultado segue da Proposição 5.1.2. ■

Um ponto fixo y^* de (5.15) é dito **estável** (no sentido de Lyapunov) se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda condição inicial y_0 no domínio de $F(\cdot)$ satisfazendo $|y_0 - y^*| < \delta$ implicar que $|y_i - y^*| < \epsilon$ para todo $i \geq 0$. Se, além disso, vale $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y^*$, então y^* é dito um ponto fixo **localmente assintoticamente estável**. O seguinte teorema mostra condições suficientes para que um ponto fixo de uma função dada pela Equação 5.15 seja estável.

Teorema 5.3.2 *Seja y^* um ponto fixo de uma função dada pela Equação 5.15 para $\alpha \in (0, 2)$. Se $F(y)$ possui derivada contínua em torno de y^* e $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < 1 - |1 - \alpha|$, então y^* é um ponto fixo estável.*

Na demonstração desse teorema será utilizado o seguinte lema.

Lema 5.3.3 *Seja $\alpha \in (0, 2)$. Então,*

$$\sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha| = |1 - \alpha|. \quad (5.16)$$

DEMONSTRAÇÃO: Para verificar a Equação 5.16, observa-se que:

- a) Se $\alpha \in (0, 1)$, então $\left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) > 0$ para todo $k \geq 2$ e segue da relação de recorrência de c_k^α (Proposição 3.6.1, p. 98) que $c_k^\alpha < 0$ se $k \geq 2$. Portanto, $c_k^\alpha = -|c_k^\alpha|$;
- b) Se $\alpha = 1$, então $c_k^\alpha = 0$ para todo $k \geq 2$;

c) Se $\alpha \in (1, 2)$, então $c_2^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{2}\right)(-\alpha) > 0$ e como $\left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) > 0$ para todo $k \geq 3$ tem-se que $c_k^\alpha > 0$ se $k \geq 2$.

Finalmente, da igualdade $\sum_{k=2}^{\infty} c_k^\alpha = -1 + \alpha$ e dos itens acima,

$$|1 - \alpha| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k^\alpha \right| = \sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha|.$$

■

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.3.2: Seja y^* um ponto fixo. Se $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < 1 - |1 - \alpha|$, então existe $M > 0$ tal que $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < M < 1 - |1 - \alpha|$. O fato de $F(\cdot)$ ter derivada contínua em torno de y^* implica que é possível escolher $\delta > 0$ de forma que $|h^\alpha F'(y) + \alpha| < M$ sempre que $|y - y^*| < \delta$. Logo, pelo Teorema da Desigualdade do Valor Médio (LIMA, 2015),

$$|h^\alpha F(y) + \alpha y - (h^\alpha F(y^*) + \alpha y^*)| < M|y - y^*|.$$

Dessa forma, fazendo $y_0 = y$, tem-se

$$\begin{aligned} |y_1 - y^*| &= \left| \left(h^\alpha F(y_0) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha y_0 \right) - y^* \right| \\ &= \left| \left(h^\alpha F(y_0) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha y_0 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^\alpha y^* \right| \\ &= \left| h^\alpha F(y_0) - c_1^\alpha (y_0 - y^*) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k^\alpha (y_0 - y^*) \right| \\ &\leq |h^\alpha F(y_0) + \alpha y_0 - (h^\alpha F(y^*) + \alpha y^*)| + \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k^\alpha (y_0 - y^*) \right|, \end{aligned}$$

pois $c_1^\alpha = -\alpha$ e $F(y^*) = 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} |y_1 - y^*| &\leq |h^\alpha F(y_0) + \alpha y_0 - (h^\alpha F(y^*) + \alpha y^*)| + \sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha| |y_0 - y^*| \\ &\leq M |y_0 - y^*| + \sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha| |y_0 - y^*| \\ &< M \delta + \sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha| \delta \\ &= (M + |1 - \alpha|) \delta < \delta. \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue do Lema 5.3.3. Supondo que $|y_k - y^*| < \delta$ seja válido para $k = 0, \dots, i$, então, para $i + 1$,

$$\begin{aligned}
 |y_{i+1} - y^*| &\leq |h^\alpha F(y_i) + \alpha y_i - (h^\alpha F(y^*) + \alpha y^*)| + \sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha| |y_{i-k+1} - y^*| \\
 &\leq M |y_i - y^*| + \sum_{k=2}^{i+1} |c_k^\alpha| |y_{i-k+1} - y^*| + \sum_{k=i+2}^{\infty} |c_k^\alpha| |y_0 - y^*| \\
 &< M\delta + \sum_{k=2}^{i+1} |c_k^\alpha| \delta + \sum_{k=i+2}^{\infty} |c_k^\alpha| \delta \\
 &= M\delta + \sum_{k=2}^{\infty} |c_k^\alpha| \delta < \delta.
 \end{aligned}$$

Segue por indução que $|y_i - y^*| < \delta$ é válido para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, dado $\epsilon \geq \delta$, condições iniciais satisfazendo $|y_0 - y^*| < \delta$ implicarão em $|y_i - y^*| < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para $\delta > \epsilon$, condições iniciais satisfazendo $|y_0 - y^*| < \epsilon$ implicarão em $|y_i - y^*| < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, y^* é um ponto fixo estável. ■

No teorema acima, a hipótese $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < 1 - |1 - \alpha|$ é equivalente a $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < \alpha$, para $\alpha \in (0, 1]$. A seguinte proposição garante que se a parte real de $F'(y^*)$ for negativa, em que y^* é um ponto fixo, então é possível encontrar $h > 0$ tal que, para uma função dada pela Equação 5.15, seja garantida a estabilidade em torno desse ponto fixo.

Proposição 5.3.4 *Se $\alpha \in (0, 1]$ e $\Re(F'(y^*)) < 0$, então existe $h > 0$ tal que*

$$|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < \alpha. \quad (5.17)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F'(y^*) = \lambda + \mu j$, em que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 |h^\alpha F'(y^*) + \alpha|^2 &= (h^\alpha \lambda + \alpha)^2 + (h^\alpha \mu)^2 \\
 &= h^{2\alpha}(\lambda^2 + \mu^2) + 2h^\alpha \lambda \alpha + \alpha^2 < \alpha^2,
 \end{aligned}$$

para $\alpha \in (0, 1]$, o que implica em $h^\alpha(\lambda^2 + \mu^2) + 2\lambda\alpha < 0$. Como $\lambda < 0$, então

$$h^\alpha(\lambda^2 + \mu^2) < -2\lambda\alpha = 2|\lambda|\alpha \implies h^\alpha < \frac{2|\lambda|\alpha}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Assim, para todo h satisfazendo

$$h < \left(\frac{2|\lambda|\alpha}{\lambda^2 + \mu^2} \right)^{1/\alpha},$$

a desigualdade $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < \alpha$ também será satisfeita. ■

Observação 5.3.1 A partir da demonstração da proposição anterior, se $\Re(F'(y^*)) \geq 0$, então a desigualdade $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < \alpha$ não será satisfeita. ◀

Para $\alpha \in (1, 2)$, tem-se que $1 - |1 - \alpha| = 2 - \alpha$. Isso implica que satisfazer a desigualdade $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < 2 - \alpha$ é equivalente a

$$h^{2\alpha}(\lambda^2 + \mu^2) + 2h^\alpha\lambda\alpha + 4(\alpha - 1) < 0, \quad (5.18)$$

em que $F'(y^*) = \lambda + \mu j$. A condição para h^α satisfazer a equação acima é dada por

$$\frac{-\lambda\alpha - \sqrt{(\lambda\alpha)^2 - 4(\lambda^2 + \mu^2)(\alpha - 1)}}{\lambda^2 + \mu^2} < h^\alpha < \frac{-\lambda\alpha + \sqrt{(\lambda\alpha)^2 - 4(\lambda^2 + \mu^2)(\alpha - 1)}}{\lambda^2 + \mu^2},$$

o que implica em $\lambda < 0$, pois $h > 0$. Isso mostra a seguinte proposição.

Proposição 5.3.5 Se $\Re(F'(y^*)) < 0$ e $[\Re(F'(y^*))\alpha]^2 - 4|F'(y^*)|^2(\alpha - 1) > 0$, então existe $h > 0$ tal que $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < 2 - \alpha$. ■

Observação 5.3.2 A partir do caso particular em que $\lambda \in [-1, 0)$ e $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, tem-se que $\lambda^2\alpha^2 - 4(\alpha - 1) > 0$ sempre que $1 < \alpha < \frac{2 - 2\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda^2}$. Além disso, $\frac{2 - 2\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda^2} \leq 2$ para $|\lambda| \leq 1$. Isso mostra que, para $\alpha \in (1, 2)$, pode não ser possível encontrar $h > 0$ tal que $|h^\alpha F'(y^*) + \alpha| < 2 - \alpha$ dependendo do valor de $F'(y^*)$, mesmo que esse tenha parte real negativa. ◀

O seguinte resultado segue do Teorema 5.3.2 e das Proposições 5.3.4 e 5.18.

Corolário 5.3.6 Seja y^* um ponto fixo do PVINI 5.4. Se $F(y)$ possui derivada contínua em torno de y^* , $\Re(F'(y^*)) < 0$ e

- $h < \left(\frac{2|\Re(F'(y^*))|\alpha}{|F'(y^*)|^2} \right)^{1/\alpha}$, para $0 < \alpha \leq 1$, ou
- $|h^\alpha (F'(y^*))^2 + \alpha\Re(F'(y^*))| < \sqrt{[\Re(F'(y^*))\alpha]^2 - 4(F'(y^*))^2(\alpha - 1)}$, para $1 < \alpha < 2$,

então y^* é um ponto fixo estável para uma função dada pela discretização MHCCI (Equação 5.15). ■

Para $\Re(F'(y^*)) \geq 0$, a discretização MHCCI não implica na instabilidade do ponto fixo y^* , como ocorre no caso de ordem inteira, ao menos por simulações computacionais. Na verdade, é possível observar, computacionalmente, que a estabilidade assintótica em torno de um ponto fixo y^* da Equação 5.15 satisfaz as mesmas condições do Teorema 3.1.1 para valores pequenos do passo de discretização, h . Essa situação será abordada na seção 6.3.

Ainda não foi possível obter um resultado geral sobre o comportamento dinâmico das iteradas obtidas a partir da Equação 5.15 envolvendo a derivada de $h^\alpha F(\cdot)$. Além disso, observa-se na literatura, que as investigações a respeito da estabilidade de sistemas discretos de ordem não inteira baseados na definição de Grünwald-Letnikov ainda são objetos de estudo, destacando-se o caso de sistemas lineares (DZIELIŃSKI; SIEROCIUK, 2008; CHEN, 2011; ABU-SARIS; AL-MDALLAL, 2013; ČERMÁK; KISELA; NECHVÁTAL, 2013; ČERMÁK; GYÖRY; NECHVÁTAL, 2015). Contudo, estudos sobre casos não lineares ainda são pouco encontrados.

5.4 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo, foi proposto um método para determinar soluções numéricas de um PVINI dado por (5.4), que não depende explicitamente do tempo, com respeito à derivada de Caputo. Como observado, o método possui a característica de considerar a contribuição de todos os coeficientes c_k^α dados pela Proposição 3.6.1 e não apenas uma parte como na discretização dada pela Equação 3.57. Assim, em uma determinada iterada y_i , os coeficientes c_k^α para $k > i$ foram utilizados para compor a memória hereditária concentrada na condição inicial, que não era utilizada na discretização baseada no operador de Grünwald-Letnikov, e motivo pelo qual nomeia o método. Diferentemente da discretização dada pela Equação 3.57, o método MHCCI preserva todos os pontos fixos do sistema contínuo equivalente.

O método MHCCI foi utilizado para obter soluções numéricas para PVINIs lineares na forma do sistema (5.14) e resultou em aproximações numéricas comparáveis no caso em que $\lambda > 0$ e com precisão na ordem do passo de discretização, h , para $\lambda < 1$. Além disso, também foi comparado com o método dado pela Equação 3.66 para determinar diagramas de bifurcação para os sistemas de Chua e Rössler. Em ambos os casos os métodos apresentam aspectos similares e exibem, de forma qualitativa, os mesmos comportamentos dinâmicos dos sistemas utilizados.

Finalmente, foi possível mostrar condições para que um ponto fixo de uma função discreta dada pela Equação 5.15 (método MHCCI) seja estável, no caso em que $\alpha \in (0, 2)$.

6 Estudo Preliminar Sobre a Estabilidade em Torno de Pontos Fixos

Neste capítulo, serão descritos alguns problemas ainda em aberto no cálculo de ordem não inteira com respeito a estabilidade de pontos fixos de sistemas não lineares contínuos e suas discretizações. Nesse sentido, o teorema conhecido como método indireto de Lyapunov¹ para o caso de ordem inteira, será enunciado. Além disso, as principais propriedades utilizadas para sua demonstração serão destacadas, tendo como objetivo ilustrar as dificuldades que são encontradas ao tentar replicar essas demonstrações para o caso de ordem não inteira.

Embora uma generalização para o caso de ordem não inteira do referido teorema ainda não tenha sido demonstrada, objetiva-se ilustrar, baseado em evidências numéricas, a existência para os análogos do método indireto de Lyapunov para sistemas de ordem não inteira no caso contínuo e discreto.

6.1 Estabilidade em Torno de Pontos Fixos: Ordem Inteira *versus* Ordem Não Inteira

Em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, o comportamento local em torno dos pontos fixos pode ser determinado de forma qualitativa pela análise dos autovalores da matriz jacobiana do sistema avaliada no ponto fixo, no caso desses autovalores terem parte real não nula², conforme o seguinte teorema.

Teorema 6.1.1 *Seja $\vec{y}^*$ um ponto fixo da equação $\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y})$ em que F é uma função continuamente diferenciável em torno de uma vizinhança do ponto fixo. Se*

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}=\vec{y}^*} \quad (6.1)$$

e $\Re(\lambda) < 0$ para todos os autovalores λ de A , então o ponto fixo $\vec{y}^$ é localmente assintoticamente estável.* ■

Esse resultado, também conhecido como método indireto de Lyapunov³ (KHALIL, 2002), fornece uma maneira prática de compreender o comportamento em torno dos pontos

¹ Esse resultado foi proposto por A. Lyapunov (1857-1918) e publicado em 1892 pela sociedade matemática de Kharkov (LYAPUNOV, 1907, p. 291)

² Nesse caso, o ponto fixo também é dito um ponto fixo hiperbólico.

³ O método indireto de Lyapunov também garante que se $\Re(\lambda) > 0$ para algum dos autovalores, λ , de A , então o sistema é instável em torno do ponto fixo $\vec{y}^*$.

fixos, pois obter os autovalores de matrizes, ou apenas determinar o sinal da parte real desses, é uma tarefa relativamente simples se comparado a obter soluções analíticas de equações diferenciais não lineares, em geral.

O Teorema 6.1.1 é comumente aplicado expandindo $F(\vec{y})$ em termos da série de Taylor até primeira ordem, da seguinte forma

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y}) = F(\vec{y}^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}=\vec{y}^*} (\vec{y} - \vec{y}^*) + \mathcal{O}_2(\vec{y} - \vec{y}^*) \approx A(\vec{y} - \vec{y}^*), \quad (6.2)$$

em que $\mathcal{O}_2(\cdot)$ representa termos de ordem maior ou igual a dois na expansão, e conclui-se que o sistema é localmente assintoticamente estável em torno de $\vec{y}^*$ se o sistema linear

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (6.3)$$

dado por uma translação no sistema coordenadas que leva o ponto fixo $\vec{y}^*$ para a origem, for assintoticamente estável. O sistema linear dado pela Equação 6.3 é dito uma linearização, em torno do ponto fixo $\vec{y}^*$, para o sistema $\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y})$.

Um aspecto interessante em sistemas de ordem não inteira é o fato de que o comportamento em torno da origem de PVINIs lineares e comensuráveis é dado pela relação entre a ordem do sistema e o argumento máximo dos autovalores de sua matriz (Teorema 3.5.7, p. 97). Devido ao fato de o cálculo de ordem não inteira ser, em um certo sentido, uma generalização do caso de ordem inteira é natural tentar verificar se o resultado do Teorema 6.1.1 possui um análogo para o caso de ordem não inteira. No caso de uma generalização, a derivada de ordem um deveria ser substituída por uma derivada de Caputo de ordem α , ${}^C D_0^\alpha \vec{y} = F(\vec{y})$, e os autovalores da parte linear de $F(\vec{y})$ satisfazerem a condição $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$ para a estabilidade local em torno do ponto fixo. Para a derivada de Caputo, uma mudança de coordenadas no sistema linearizado que leva um ponto fixo $\vec{y}^*$ para a origem do sistemas de coordenadas é possível, pois a derivada de Caputo de uma constante é zero⁴.

Nos trabalhos apresentados por Tavazoei et al. (2009) e Abd-elouahab, Hamri e Wang (2010), encontram-se proposições para uma extensão do Teorema 6.1.1 no caso de ordem não inteira. Contudo, ao analisar as demonstrações, nota-se que o resultado proposto não é demonstrado. Ambos trabalhos utilizam a expressão em (6.2) para justificar que o comportamento das soluções do sistema não linear em torno do ponto fixo podem ser analisadas pelas soluções da Equação 6.3. Portanto, os referidos autores utilizam uma consequência do teorema para demonstrá-lo, o que é, na verdade, um equívoco.

Demonstrações do Teorema 6.1.1 podem ser encontradas em Doering e Lopes (2012, p. 188) e Baumeister e Leitão (2014, p. 81). No primeiro, é utilizado que a norma do fluxo

⁴ Observa-se que tal procedimento aplicado para a derivada de Riemann-Liouville conduz a um sistema que depende explicitamente do tempo, pois essa derivada aplicada a uma constante não resulta em zero. Por esse motivo, evita-se uma extensão da referida generalização para a derivada de Riemann-Liouville.

da equação $\frac{d\vec{y}}{dt} = F(\vec{y})$, a partir de uma condição inicial pertencente a uma determinada vizinhança em torno do ponto fixo $\vec{y}^*$, é uma função de Lyapunov se todos os autovalores de $\left. \frac{\partial F}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}=\vec{y}^*}$ tiverem parte real negativa. No segundo, é utilizado a propriedade da função exponencial $e^{a+b} = e^a e^b$ em conjunto com o Lema da desigualdade de Gronwall. Uma tentativa de reproduzir essas demonstrações no caso de sistemas de ordem não inteira não se mostraram viáveis. No primeiro caso, devido às propriedades da derivada de ordem não inteira do produto e da composta de funções e, no segundo caso, pois as funções de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}(z)$, $\alpha \neq 1$, não satisfazem as mesmas propriedades da função exponencial ($\alpha = 1$).

Pelos mesmos motivos citados anteriormente, a aplicação de uma generalização do método direto de Lyapunov para sistemas de ordem não inteira (LI; CHEN; PODLUBNY, 2009; LI; CHEN; PODLUBNY, 2010) não se mostrou possível no caso geral em sistemas que não dependem explicitamente do tempo. Em [Aguila-Camacho, Duarte-Mermoud e Gallegos \(2014\)](#), a desigualdade

$$\frac{1}{2} {}^C D_0^\alpha y^2(t) \leq y(t) {}^C D_0^\alpha y(t) \quad (6.4)$$

é utilizada para propor uma função de Lyapunov em que a estabilidade em torno do ponto fixo é garantida para a condição $y F(y) < 0$. A desigualdade em (6.4) também é utilizada para estudar a estabilidade em sistemas lineares de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo, aplicando o método direto de Lyapunov no caso de ordem não inteira (DUARTE-MERMOUD et al., 2015). Contudo, observa-se que não é obtido o resultado geral que relaciona os argumentos dos autovalores da matriz do sistema e a ordem de derivação, α , como critério para a estabilidade da origem do sistema de coordenadas (Teorema 3.5.7, p. 97).

Uma generalização do primeiro método de Lyapunov para sistemas não lineares de ordem não inteira, segundo a derivada de Caputo, relacionando os argumentos dos autovalores do sistema linearizado em torno do ponto fixo com a ordem de derivação do sistema, é um problema que permanece em aberto. No entanto, observa-se, computacionalmente, que a estabilidade em torno dos pontos fixos para esses sistemas atendem ao que seria o resultado desse teorema e que não foi encontrado nenhum exemplo que indique o contrário. Na seguinte seção, serão ilustrados alguns exemplos de sistemas não lineares em que a estabilidade em torno do ponto fixo é verificada para a condição $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$ utilizando o método MHCCI ([Capítulo 5](#)).

6.2 Exemplos

Nesta seção, o método MHCCI será aplicado para obter diagramas de bifurcação para sistemas de ordem não inteira, não lineares, segundo a derivada de Caputo. Em cada

caso, a ordem de derivação do sistema será tomada como parâmetro de bifurcação. Dessa forma, o valor do parâmetro de bifurcação para o qual o ponto fixo perde a estabilidade será comparado com a ordem de derivação em que a origem do respectivo sistema linearizado, avaliado no ponto fixo, perde a estabilidade.

Exemplo 6.2.1 *O sistema dado por*

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y_1 &= y_2, \\ {}^C D_0^\alpha y_2 &= -\mu(y_1^2 - 1)y_2 - y_1, \end{cases} \quad (6.5)$$

é dito sistema de van der Pol de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo e se equivale ao sistema de van der Pol (POL; MARK, 1928) para $\alpha = 1$. O ponto fixo desse sistema é dado por $\vec{y}^* = (0, 0)$ para qualquer valor do parâmetro μ . Para $\alpha = 1$ e $\mu = 1$ esse sistema apresenta um órbita periódica atratora em torno do ponto fixo (MONTEIRO, 2011). A Figura 6.1 exibe soluções numéricas para o sistema (6.5) para $\alpha = 0,9$. Nesse caso, é possível observar que as soluções se aproximam de um órbita atratora.

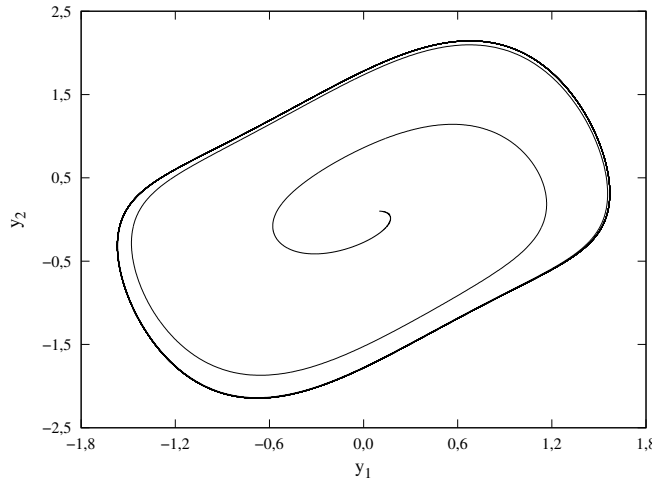


Figura 6.1 – Órbita atratora para o sistema de van der Pol de ordem não inteira para $\alpha = 0,9$ e condição inicial $(0,1, 0,1)$.

A Figura 6.2 apresenta um diagrama de bifurcação considerando $\mu = 1$ e $\alpha \in [0,5, 1,2]$ com incremento $\Delta\alpha = 0,001$. O diagrama foi obtido a partir da interseção das órbitas com a seção de Poincaré dada pelo semi-eixo $y_1 \leq 0$ e $y_2 = 0$. Observa-se do diagrama que o ponto fixo é estável para $0,500 \leq \alpha < 0,667$, representado por valores de α antes da linha vertical na figura. Em $\alpha \approx 0,667$ ocorre uma bifurcação em que o ponto fixo perde a estabilidade e há o surgimento de uma órbita periódica atratora⁵.

⁵ Evitou-se chamar de bifurcação do tipo Hopf, pois, no caso de ordem inteira, essa bifurcação está associada à existência de autovalores puramente complexos e conjugados da matriz do respectivo sistema linearizado, avaliado no ponto fixo (FIELDER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 377).

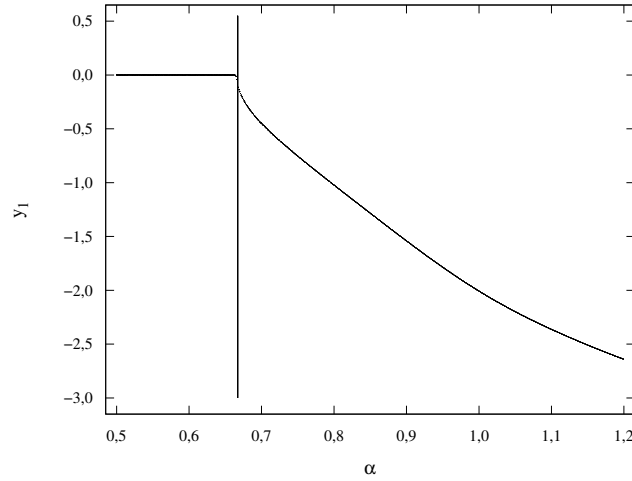


Figura 6.2 – Diagrama de bifurcação para o sistema de van der Pol de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,2]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,667$.

O sistema linearizado de ordem não inteira em torno do ponto fixo $\vec{y}^*$, obtido de (6.5), é dado por

$$\begin{bmatrix} {}^C D_0^\alpha y_1 \\ {}^C D_0^\alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Para $\mu = 1$, os autovalores de (6.6) são dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 0,500 + 0,866j, \\ \lambda_2 &\approx 0,500 - 0,866j, \end{aligned} \quad (6.7)$$

e obtém-se que $|\arg(\lambda_i)| \approx 1,0472 \text{ rad}$, $i = 1, 2$. Aplicando o critério de estabilidade dado pela desigualdade em (3.49) (p. 97), tem-se que o ponto fixo do sistema linearizado é estável sempre que $\alpha < 0,667$. ►

Exemplo 6.2.2 O sistema dado pelas equações

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y_1 &= y_1^2 y_2 - y_1 + b, \\ {}^C D_0^\alpha y_2 &= -y_1^2 y_2 + a, \end{cases} \quad (6.8)$$

apresenta órbitas periódicas atratoras em torno do ponto fixo para $\alpha = 1,0$ e os seguintes valores dos parâmetros: $a = 0,5$ e $b = 0,05$ (SCHNAKENBERG, 1979). Devido a esse fato, os parâmetros a e b serão fixados nesses valores. A Figura 6.3 exibe soluções numéricas para esse sistema considerando $\alpha = 0,9$. O formato da órbita atratora é similar para o caso $\alpha = 1,0$.

O ponto fixo do sistema (6.8) é dado por $\vec{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ em que $y_1^* = a + b$ e $y_2^* = a/(a+b)^2$ e, para a escolha dos parâmetros a e b , tem-se que $\vec{y}^* \approx (0,55000, 1,65289)$. A Figura 6.4 apresenta um diagrama de bifurcação considerando $\alpha \in [0,5, 1,2]$ com

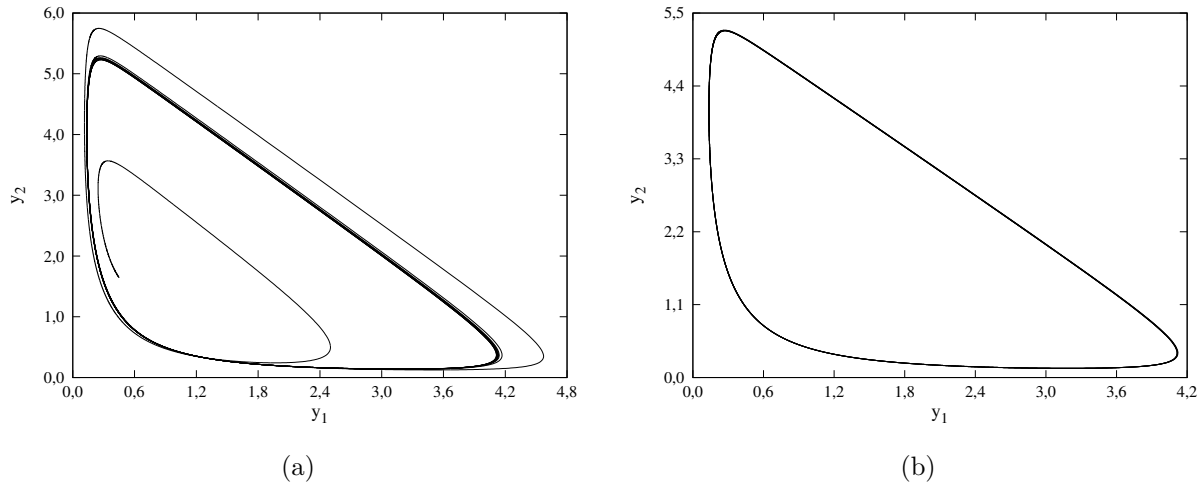


Figura 6.3 – Órbita atratora para o sistema (6.8) de ordem não inteira para $\alpha = 0,9$ (a) a partir da condição inicial $(0,40, 1,64)$ e (b) com o transiente removido.

incremento $\Delta\alpha = 0,001$. O diagrama foi obtido a partir da interseção das órbitas com a seção de Poincaré dada pela semi-reta $y_1 = y_1^*$ e $y_2 \leq y_1^*$.

Observa-se do diagrama que o ponto fixo é estável para $0,500 \leq \alpha < 0,689$, representado por valores de α antes da linha vertical na figura. Em $\alpha \approx 0,6894$ ocorre a mesma bifurcação do Exemplo 6.2.1.

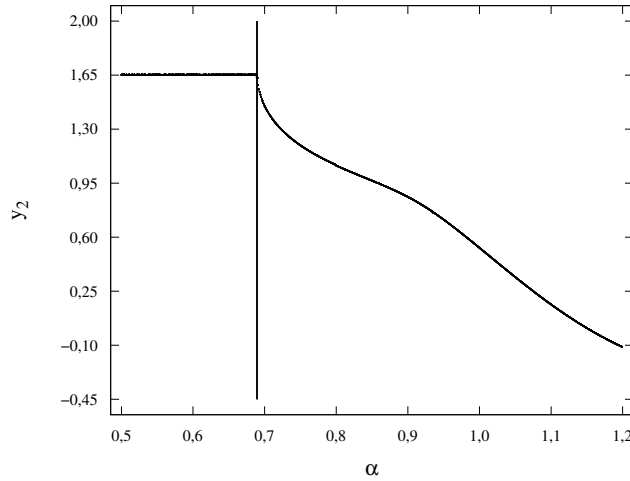


Figura 6.4 – Diagrama de bifurcação para o sistema (6.8) segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,2]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,689$.

O sistema obtido pela linearização de (6.8) ao avaliar a matriz jacobiana no ponto fixo é dado por

$$\begin{bmatrix} {}^C D_0^\alpha y_1 \\ {}^C D_0^\alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1^* y_2^* - 1 & (y_1^*)^2 \\ -2y_1^* y_2^* & -(y_1^*)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Os autovalores para a matriz do sistema (6.9) são dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\approx 0,2578 + 0,4858j, \\ \lambda_2 &\approx 0,2578 - 0,4858j.\end{aligned}\tag{6.10}$$

O critério de estabilidade para sistemas lineares fornece que o ponto fixo é estável sempre que $\alpha < 0,6894$. ►

Nos exemplos que se seguem, os sistemas de Rössler e de Chua, utilizados nas seções 4.4 e 5.2, serão novamente empregados para a comparação da estabilidade em torno dos pontos fixos, obtidos computacionalmente, com a estabilidade dos respectivos sistemas linearizados.

Exemplo 6.2.3 O sistema de Rössler de ordem não inteira dado pelas equações

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y_1 &= -(y_2 + y_3), \\ {}^C D_0^\alpha y_2 &= y_1 + a y_2, \\ {}^C D_0^\alpha y_3 &= b + (y_1 - c)y_3, \end{cases}\tag{6.11}$$

com parâmetros a , b e c , possui os seguintes pontos fixos

$$\vec{y}_1^* = (y_{11}^*, y_{12}^*, y_{13}^*) = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right),\tag{6.12}$$

$$\vec{y}_2^* = (y_{21}^*, y_{22}^*, y_{23}^*) = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).\tag{6.13}$$

Para os valores dos parâmetros fixados em $a = 0,2$, $b = 0,4$ e $c = 5,7$, como nas seções 4.4 e 5.2, obtém-se

$$\vec{y}_1^* \approx (0,01407, -0,07035, 0,07035),\tag{6.14}$$

$$\vec{y}_2^* \approx (5,68593, -28,42965, 28,42965).\tag{6.15}$$

A Figura 6.5 apresenta o diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler considerando $\alpha \in [0,5, 1,0]$ e obtido a partir da interseção das órbitas com a seção de Poincaré dada pelo semi-plano $\mathcal{P}$ definido em (4.14), p. 123. Nesse caso, utilizou-se o incremento $\Delta\alpha = 0,001$ em todo o intervalo, exceto para $0,93900 \leq \alpha \leq 0,94099$ em que utilizou-se $\Delta\alpha = 0,00001$. Optou-se por alterar do valor do incremento para descrever melhor a bifurcação nesse intervalo, que não é devidamente observada com $\Delta\alpha = 0,001$.

Observa-se que as órbitas se aproximam do ponto fixo $\vec{y}_1^*$ para $0,5 \leq \alpha < 0,940$, representado por valores de α antes da linha vertical na figura. Além disso, para esse mesmo intervalo nenhuma das órbitas tendem ao ponto fixo $\vec{y}_2^*$. Em $\alpha \approx 0,941$ ocorre

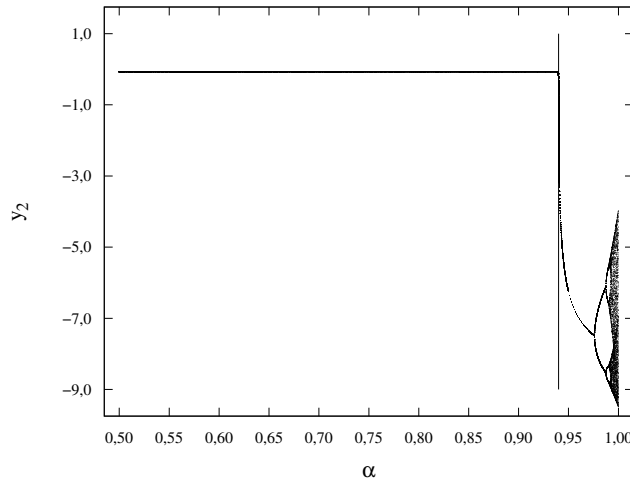


Figura 6.5 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,0]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,9401$.

uma bifurcação em que o ponto fixo perde a estabilidade e há o surgimento de uma órbita atratora de período um.

O sistema linear obtido a partir da matriz jacobiana do sistema (4.13) avaliada nos pontos fixos é dada por

$$\begin{bmatrix} {}^c D_0^\alpha y_1 \\ {}^c D_0^\alpha y_2 \\ {}^c D_0^\alpha y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ y_{i3}^* & 0 & y_{i1}^* - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

em que $i = 1, 2$. Os autovalores da matriz do sistema (6.16), considerando os valores dos parâmetros ora fixados, são dados por

$$\lambda_{11} \approx 0,0940 + 0,9954j, \quad \lambda_{12} \approx 0,0940 - 0,9954j \quad e \quad \lambda_{13} \approx -5,6739 \quad (6.17)$$

para o ponto fixo $\vec{y}_1^*$ e

$$\lambda_{21} \approx -0,0034 + 5,4248j, \quad \lambda_{22} \approx -0,0034 - 5,4248j \quad e \quad \lambda_{23} \approx 0,1927 \quad (6.18)$$

para o ponto fixo $\vec{y}_2^*$.

A partir do critério de estabilidade dado por (3.49), tem-se que o ponto fixo $\vec{y}_1^*$ do sistema (6.16) é estável sempre que $\alpha < 0,9401$. O mesmo critério fornece que o ponto fixo $\vec{y}_2^*$ é instável para todo valor positivo de α . ►

Exemplo 6.2.4 O sistema de Chua polinomial de ordem não inteira, dado pelas equações

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha y_1 &= a \left[y_2 - \left(\frac{y_1^3}{16} - \frac{y_1}{6} \right) \right], \\ {}^c D_0^\alpha y_2 &= y_1 - y_2 + y_3, \\ {}^c D_0^\alpha y_3 &= -by_2, \end{cases} \quad (6.19)$$

em que a e b são parâmetros do sistema, possui os seguintes pontos fixos

$$\vec{y}_1^* = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \approx (-1,63299, 0,000000, 1,63299), \quad (6.20)$$

$$\vec{y}_2^* = (0, 0, 0), \quad (6.21)$$

$$\vec{y}_3^* = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0, -\frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \approx (1,63299, 0,000000, -1,63299). \quad (6.22)$$

para quaisquer valores dos parâmetros.

A [Figura 6.6](#) apresenta o diagrama de bifurcação para o sistema de Chua considerando os parâmetros fixados em $a = 9,5$ e $b = 14$, como nas seções [4.4](#) e [5.2](#), e $\alpha \in [0,5, 1,0]$. Esse diagrama foi obtido a partir da interseção das órbitas com a seção de Poincaré dada pelos semi-planos $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ definidos em [\(4.17\)](#) e [\(4.18\)](#), respectivamente (p. [126](#)). Diferente das [Figuras 4.11](#), [4.12](#) e [5.12](#), considerou-se a variável y_1 na seção de Poincaré ao invés da variável y_2 , pois as coordenadas y_2 dos pontos fixos do sistema de Chua possuem o mesmo valor. Para o parâmetro de bifurcação, α , utilizou-se o incremento $\Delta\alpha = 0,001$ em todo o intervalo, exceto para $0,95300 \leq \alpha \leq 0,95499$ em que utilizou-se $\Delta\alpha = 0,00001$. Novamente, optou-se por alterar do valor do incremento para descrever de forma mais adequada a bifurcação nesse intervalo.

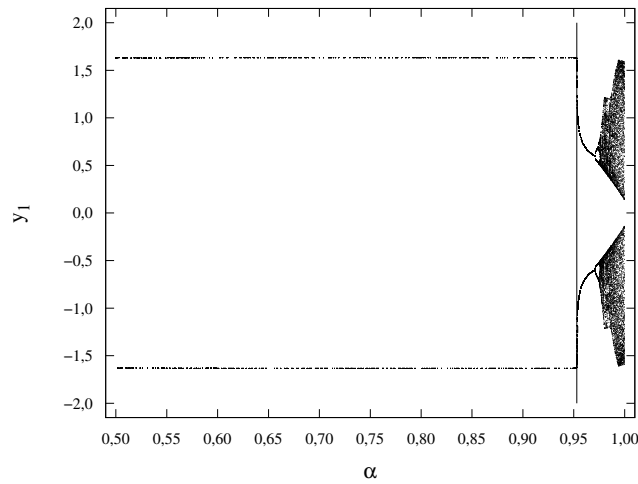


Figura 6.6 – Diagrama de bifurcação para o sistema de Chua de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo com parâmetro de bifurcação α , $\alpha \in [0,5, 1,0]$. As soluções numéricas foram obtidas utilizando MHCCI com $h = 0,01$. A linha a vertical na figura representa o valor $\alpha = 0,953$.

Observa-se que as órbitas se aproximam dos pontos fixos $\vec{y}_1^*$ e $\vec{y}_3^*$ para $0,5 \leq \alpha < 0,954$, representado por valores de α antes da linha vertical na figura. Além disso, para esse mesmo intervalo nenhuma das órbitas tendem ao ponto fixo $\vec{y}_2^*$. Em $\alpha \approx 0,953$ ocorre uma bifurcação na qual cada um dos pontos fixos $\vec{y}_1^*$ e $\vec{y}_3^*$ perde a estabilidade e há o surgimento de órbitas atratoras de período um em torno de cada um desses pontos fixos.

O sistema linear obtido a partir da matriz jacobiana do sistema (4.13) avaliada nos pontos fixos é dada por

$$\begin{bmatrix} {}^cD_0^\alpha y_1 \\ {}^cD_0^\alpha y_2 \\ {}^cD_0^\alpha y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \left(\frac{3(y_{i1}^*)^2}{16} - \frac{1}{6} \right) & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

em que y_{i1}^* representa a primeira coordenada dos pontos fixos $\vec{y}_i^*$, $i = 1, 2, 3$. Os autovalores da matriz do sistema (6.23), considerando os valores dos parâmetros ora fixados, são dados por

$$\lambda_1^1 \approx 0,2151 + 3,0981j, \quad \lambda_2^1 \approx 0,2151 - 3,0981j \quad e \quad \lambda_3^1 \approx -4,5969 \quad (6.24)$$

para os pontos fixos $\vec{y}_1^*$ e $\vec{y}_3^*$, e

$$\lambda_1^2 \approx -1,0315 + 2,7041j, \quad \lambda_2^2 \approx -1,0315 - 2,7041j \quad e \quad \lambda_3^2 \approx 2,6464 \quad (6.25)$$

para o ponto fixo $\vec{y}_2^*$.

Pelo critério de estabilidade dado por (3.49), tem-se que os pontos fixos $\vec{y}_1^*$ e $\vec{y}_3^*$ do sistema (6.23) são estáveis sempre que $\alpha < 0,9558$. O mesmo critério fornece que o ponto fixo $\vec{y}_2^*$ é instável para todo valor positivo de α .

Nesse exemplo, a bifurcação apresentada na Figura 6.6 ocorreu um pouco antes do critério de estabilidade apresentado pelo sistema linearizado. ►

Obviamente, ao se tratar de observações numéricas, as soluções assintóticas não são avaliadas, mas apenas situações em que o número total das iterações é relativamente grande se comparado à memória do sistema. Assim, para avaliar se um ponto fixo é atrator, foram considerados conjuntos em torno desses pontos em que as órbitas deveriam permanecer satisfazendo as seguintes condições:

- 1- a distância máxima entre dois pontos consecutivos da órbita era menor que h^3 ; ⁶
- 2- a distância máxima em relação a quaisquer dos pontos fixos fosse menor que $h/10$.

Valores menores que os utilizados não se mostraram viáveis devido ao aumento do tempo computacional. As condições iniciais utilizadas nos sistemas, para cada valor do parâmetro α , foram tomadas de forma aleatória e em pontos que não pertenciam ao conjunto descrito na condição 2.

Observa-se, no entanto, que a estabilidade local em torno dos pontos fixos dos sistemas ora estudados pode ser estimada pela estabilidade dos respectivos sistemas linearizados. Embora a estimativa obtida pelo sistema linearizado de Chua polinomial apresentou

⁶ Essa condição é baseada no fato de que toda sequência convergente é de Cauchy (LIMA, 2013).

um certo erro em comparação com os diagramas de bifurcação, uma generalização do método indireto de Lyapunov (Teorema 6.1.1) para o caso de sistemas de ordem não inteira pode ser possível. O desvio na bifurcação apresentado entre a simulação numérica para o sistema de Chua polinomial e o valor obtido pela linearização é esperado, devido à ordem de aproximação do método. Esses desvios também foram observados, de forma semelhante, entre os diagramas de bifurcação obtidos na seção 4.4 utilizando o método híbrido e o método dado pela Equação 3.66.

Contudo, como discutido na seção 6.1, uma demonstração para a referida generalização ainda não foi obtida na literatura, de forma que o problema ainda continua em aberto.

6.3 Estabilidade em Torno de Pontos Fixos para Funções Discretas Obtidas pelo Método MHCCI

Na seção 5.3, foram apresentadas algumas condições para que uma função discreta da forma

$$y_{i+1} = h^\alpha F(y_i) - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha y_{i-k+1} - y_0 \left(-1 - \sum_{k=1}^{i+1} c_k^\alpha \right), \quad (6.26)$$

obtida ao se empregar o método MHCCI para soluções de um PVINI na forma (5.4), seja estável em torno de um ponto fixo, y^* , dependendo de $h^\alpha F'(y^*)$ e α , no caso em que $\alpha \in (0, 2)$ (Teorema 5.3.2, p. 144). Contudo, ainda não foi possível provar sob que condições os pontos fixos da Equação 6.26 sejam localmente assintoticamente estáveis.

Observa-se, porém, que a estabilidade atribuída aos sistemas contínuos apresentada nos exemplos da seção 6.2 foi, na verdade, obtida por formas vetoriais do método MHCCI. Nesse sentido, esses exemplos sugerem que a estabilidade assintótica em torno de pontos fixos de um sistema dado pela Equação 6.26 está relacionada com a estabilidade de sistemas contínuos lineares de ordem não inteira.

Embora não se tenha provado uma versão mais geral para o Teorema 5.3.2, relacionando a posição de $h^\alpha F'(y^*)$ com a região no plano complexo determinada por $\alpha\pi/2$, é possível constatar numericamente, que, para determinados valores do passo de discretização h , a região de estabilidade dos pontos fixos de uma sistema na forma de (6.26) depende da relação

$$|\arg(F'(y^*))| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (6.27)$$

tal como no caso de sistemas contínuos lineares de ordem não inteira.

Uma maneira de constatar que a estabilidade da Equação 6.26 está relacionada com a desigualdade em (6.27) é por meio da representação matricial para a iterada y_{i+1}

dada por

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1^\alpha & -c_2^\alpha & \cdots & -c_i^\alpha & -\mathcal{M} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h^\alpha F(y_i) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

em que $\mathcal{M} = \sum_{k=i+1}^{\infty} c_k^\alpha$. Observa-se que a primeira coordenada do vetor à esquerda de (6.28) é equivalente ao membro da direita da Equação 5.15. Além disso, iniciando essa representação a partir de uma condição inicial vetorial $\vec{y}_0 = [y_0, y_0, \dots, y_0]^T$ e iterando-a i vezes, o vetor obtido é equivalente ao vetor formado pelo conjunto das i primeiras soluções de (6.26) a partir de y_0 , incluindo y_0 . Em particular, um vetor constante $\vec{y}^* = (y^*, y^*, \dots, y^*)$ de $(i+1)$ coordenadas é um ponto fixo dessa representação se, e somente se, $F(y^*) = 0$.

Para valores de i maiores que a ordem desse sistema essa representação deixa de ser equivalente à Equação 6.26. Contudo, devido ao fato de computadores digitais possuírem memória limitada, um procedimento baseado na representação matricial para constatar que a estabilidade está relacionada com a desigualdade em (6.27), aplicando propriedades sobre estabilidade de sistemas dinâmicos discretos (MONTEIRO, 2011), pode ser utilizada desde que a ordem do sistema esteja próxima do limite da memória do computador.

A estabilidade em torno de um ponto fixo $\vec{y}^*$ pode ser obtida a partir da análise dos autovalores da matriz jacobiana do membro da direita da Equação 6.28 e avaliada no ponto fixo. A matriz jacobiana é dada por

$$\begin{bmatrix} -c_1^\alpha + h^\alpha F'(y^*) & -c_2^\alpha & \cdots & -c_i^\alpha & -\mathcal{M} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Se todos os autovalores de (6.29) estiverem estritamente contidos no círculo unitário do plano complexo, então a estabilidade em torno do ponto fixo é garantida. Em contrapartida, se existir ao menos um autovalor fora do círculo unitário, o ponto fixo é instável (MONTEIRO, 2011). Os autovalores são as raízes do polinômio característico da matriz em (6.29) dado por

$$p(r) = r^{n+1} + [c_1^\alpha - h^\alpha F'(y^*)] r^n + c_2^\alpha r^{n-1} + \cdots + c_n^\alpha r^1 + \mathcal{M}, \quad (6.30)$$

em que $n+1$ é a dimensão do sistema (6.28).

Para localizar a posição das raízes desse polinômio em função de $F'(y^*)$, h e de α , tentou-se utilizar alguns métodos tais como o dado pelo Teorema de Rouché (NETO, 1993), os Círculos de Gershgorin (GOLUB; LOAN, 1996) e o método de Schür-Cohn ou de Jury (PROAKIS, 2006). Contudo, não foi possível obter uma relação analítica entre esses parâmetros com esses métodos.

Assim, partiu-se para uma investigação numérica para tentar estabelecer uma relação entre a posição dos autovalores de uma matriz dada por (6.29) em função de $F'(y^*)$, h e de α . Uma vez que obter autovalores de matrizes de dimensões muito grandes é um processo computacionalmente intenso e devido ao fato de apenas a informação do maior autovalor em módulo ser relevante nesse caso, optou-se pela aplicação do método de Arnoldi (GOLUB; LOAN, 1996). Além disso, como pretende-se realizar esse processo para várias matrizes, o método de Arnoldi apresenta ser mais apropriado, pois possui uma menor intensidade computacional.

Para uma dada matriz A , o método de Arnoldi é baseado no cálculo da sequência

$$(A^i \vec{v})_{i=0}^{\infty} = \{\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots, A^n\vec{v}, \dots\} \quad (6.31)$$

a partir de um vetor $\vec{v}$ de norma unitária. Claramente, se o maior autovalor em módulo tiver norma maior que um, a sequência $(A^i \vec{v})_{i=0}^{\infty}$ é divergente. Se o maior autovalor em módulo tiver norma menor que um, a sequência $(A^i \vec{v})_{i=0}^{\infty}$ converge para o vetor nulo.

O método de Arnoldi é utilizado para verificar se, para uma dada terna (h, λ, α) , as iteradas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -c_1^\alpha + h^\alpha \lambda & -c_2^\alpha & \cdots & -c_i^\alpha & -\mathcal{M} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

aplicada a um vetor inicial de norma um, em que $h > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in (0, 1)$, são convergentes ou divergentes. Observa-se que λ representa o valor de $F'(y^*)$.

A Figura 6.7 ilustra os resultados do método de Arnoldi aplicado para $h = 0,001$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(\lambda) \leq \frac{\pi}{2}$ com $|\lambda| = 1$, $\alpha \in (0,005, 1,000)$ e $\vec{v} = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$. A figura foi gerada considerando um número total de iterações limitado a 10^5 e utilizando o seguinte critério:

- As coordenadas $(\alpha, \arg(\lambda))$ são registradas sempre que $\|(A^i - A^{i-1})\vec{v}\|_\infty < 10^{-5}$ ou se for atingido o número total de iterações;
- As coordenadas $(\alpha, \arg(\lambda))$ são fixadas em $(0, 0)$ sempre que $\|(A^i - A^{i-1})\vec{v}\|_\infty > 10^5$.

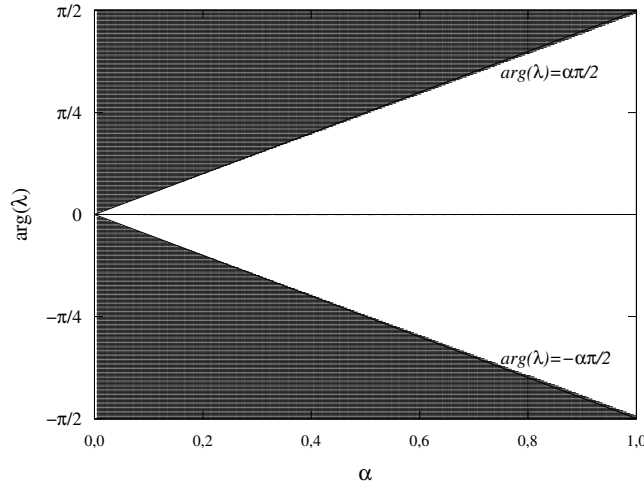


Figura 6.7 – Diagrama representativo para os valores de (λ, α) em que as iteradas $|A^i \vec{v}|$ convergem para zero no caso em que $h = 0,001$ e $|\lambda| = 1$. A região em branco acima da semi-reta $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2$ e abaixo de $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2$ representa os valores (λ, α) em que há convergência. O incremento em λ foi de $0,01$ e em α de $0,001$.

Observa-se que o método atende à condição $\|(A^i - A^{i-1})\vec{v}\|_\infty < 10^{-5}$ para valores de (λ, α) abaixo da semi-reta $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2 - 0,01$ e acima de $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2 + 0,01$, em que $0,01$ é o valor de incremento em λ utilizado. Para valores de (λ, α) em torno das regiões dadas por $\alpha\pi/2 - 0,01 \leq |\arg(\lambda)| \leq \alpha\pi/2 + 0,01$, o método atinge o número total de iterações. Para valores de (λ, α) acima de $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2 + 0,01$ e abaixo de $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2 - 0,01$, o método atende à condição $\|(A^i - A^{i-1})\vec{v}\|_\infty > 10^5$. Isso constata que os autovalores da matriz A , definida por (6.32) e avaliada nos pontos da Figura 6.7, possuem norma:

- menor que um, abaixo de $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2 - 0,01$ e acima de $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2 + 0,01$;
- maior que um, acima de $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2 + 0,01$ e abaixo de $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2 - 0,01$.

Portanto, para sistemas não lineares dados pela Equação 6.28 com $h = 0,001$, cuja função $F(\cdot)$ possui derivada $F'(y^*) = \lambda$ e $|\lambda| = 1$, a estabilidade em torno do ponto fixo y^* corresponderá à estabilidade descrita na Figura 6.7. Observa-se que essa figura também corresponde ao critério de estabilidade para sistemas contínuos lineares de ordem não inteira (Teorema 3.5.7, p. 97), como era de se esperar a partir dos exemplos ilustrados na seção 6.2.

Esse critério foi utilizado para outros valores de h . Na Figura 6.8-a é ilustrado o caso em que $h = 0,01$. Os pontos na região acima da semi-reta $\arg(\lambda) = \alpha\pi/2$ e abaixo de $\arg(\lambda) = -\alpha\pi/2$ representam os valores (λ, α) em que há convergência e o critério correspondeu ao da Figura 6.7. Na Figura 6.8-b é ilustrado o caso em que $h = 0,1$. Observa-se que há um pequeno recuo na região de estabilidade representado pelas faixas entre as

retas dadas por $\arg(\lambda) = \pm\alpha\pi/2$ e a região hachurada. Isso se deve a uma relação entre os valores de h e $|\lambda|$ escolhidos.

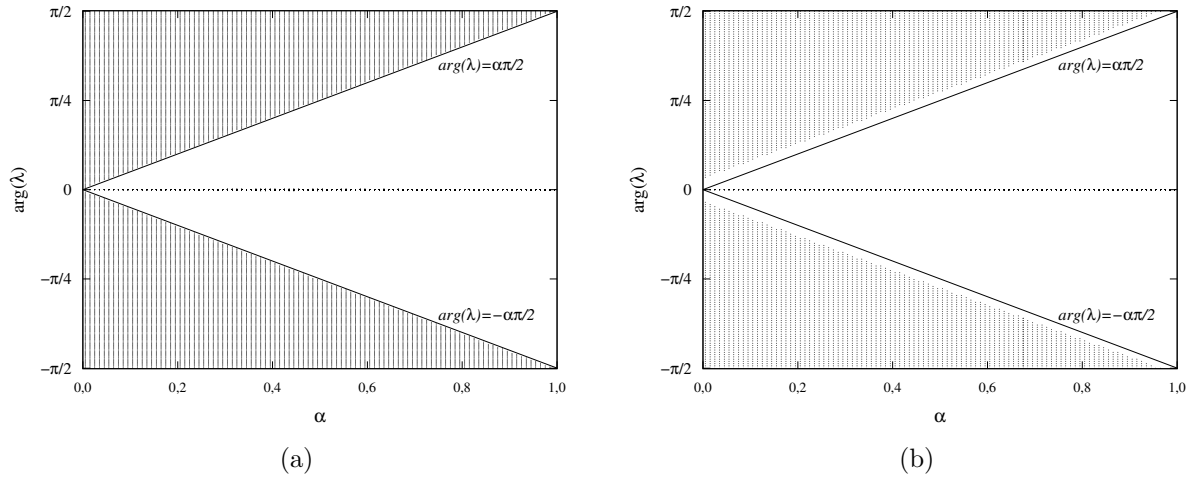


Figura 6.8 – Diagrama representativo para os valores de (λ, α) em que as iteradas $|A^i \vec{v}|$ convergem para zero nos casos: (a) $h = 0,01$ com incremento em λ de 0,01 e (b) $h = 0,1$ com incremento em λ de 0,02. Em ambos os casos considerou-se $|\lambda| = 1$ e incremento em α de 0,01.

Observa-se que, na demonstração do Teorema 5.3.4, uma relação entre h , λ e α foi estabelecida. Embora o caso do referido teorema seja válido para $\Re(\lambda) < 0$, ele fornece um indício de que uma relação entre esses parâmetros deva ser considerada também para os casos ora apresentados.

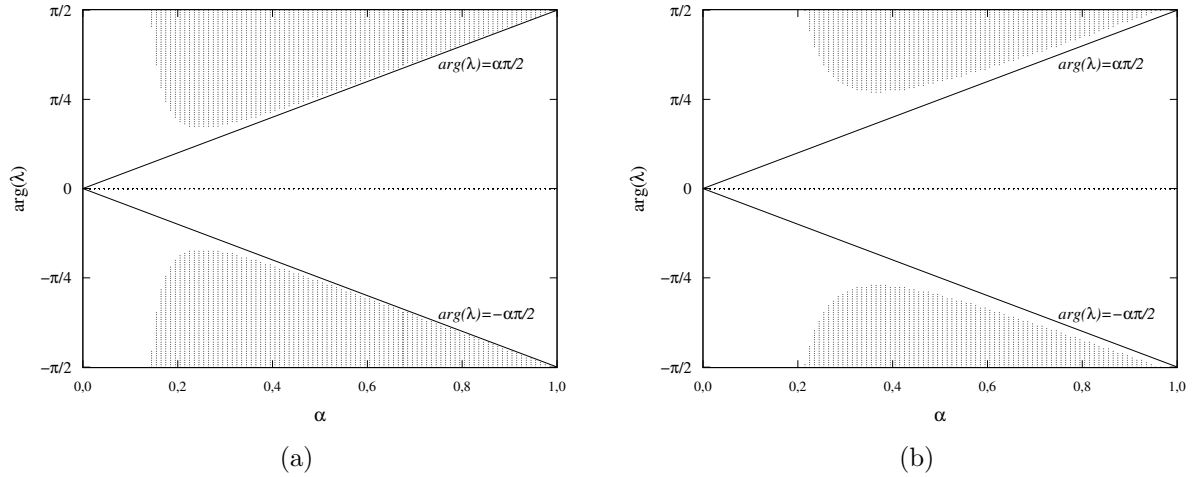


Figura 6.9 – Diagrama representativo para os valores de (λ, α) em que as iteradas $|A^i \vec{v}|$ convergem para zero nos casos: (a) $h = 0,01$ e (b) $h = 0,05$, ambos com $|\lambda| = 2$. O incremento em λ foi de 0,02 e em α de 0,01.

Na Figura 6.9 utilizou-se (a) $h = 0,01$, (b) $h = 0,05$ e $|\lambda| = 2$. Observa-se que a região de estabilidade possui aspecto distinto aos apresentados anteriormente e diminui com o aumento de h . Tomando $h = 0,001$ o aspecto é o mesmo apresentado nas Figuras 6.7 e 6.8-a. Isso evidencia que um critério de estabilidade para sistemas dados pela Equação 6.28 utilizando a derivada (6.29) deve relacionar os valores h , $F'(y^*)$ e α . Embora não se

tenha provado um teorema geral para estabilidade de pontos fixos de funções discretas na forma da Equações 6.26 na seção 5.3, destaca-se que a metodologia utilizada nesta seção pode ser empregada para determinar cotas superiores de valores do passo de discretização, h , em simulações numéricas utilizando o método MHCCI.

Como no caso de sistemas contínuos, a análise de estabilidade de sistemas não lineares de ordem não inteira discretos, utilizando a linearização do sistema em torno do ponto fixo, é uma problema que continua em aberto.

6.4 Conclusão do Capítulo

Neste capítulo, foi realizado um estudo preliminar sobre a estabilidade de pontos fixos para sistemas contínuos não lineares de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo e para funções discretas dadas na forma do método MHCCI.

Para o caso de sistemas contínuos, foram apresentados alguns exemplos que indiquem que o método indireto de Lyapunov pode ser estendido para equações diferenciais de ordem não inteira. Ou seja, a estabilidade de pontos fixos de um sistema contínuo não linear e de ordem não inteira pode ser determinada pela estabilidade de seu respectivo sistema linearizado. Além disso, salienta-se que não foram encontrados exemplos que indiquem que esse resultado não seja válido. Embora os exemplos ilustrem a possibilidade de esse resultado ser verdadeiro, ainda não foi possível obter uma demonstração, mesmo que seja encontrado na literatura autores que aleguem o contrário (TAVAZOEI et al., 2009; ABD-ELOUAHAB; HAMRI; WANG, 2010).

Devido ao fato de os resultados desses exemplos terem sido obtidos pelo método MHCCI, e de não ter sido provado um teorema geral para estabilidade de funções discretas obtidas por esse método no Capítulo 5, optou-se por fazer uma investigação numérica a respeito da estabilidade desse tipo de funções discretas. Para a referida investigação, utilizou-se o critério de estabilidade para funções discretas em conjunto com o método de Arnoldi para analisar, numericamente, a estabilidade dessas funções a partir de uma representação matricial. A metodologia utilizada apontou para o critério de estabilidade de sistemas contínuos e lineares de ordem não inteira, como esperado. Como produto, destaca-se que essa metodologia pode ser empregada para determinar cotas superiores para o valor do passo de discretização, h , para simulações numéricas de sistema de ordem não inteira contínuos segundo a derivada de Caputo, utilizando o método MHCCI. Contudo, uma demonstração para um teorema sobre a estabilidade de pontos fixos para esse caso também não foi obtida.

7 Conclusões e Perspectivas Futuras

7.1 Conclusões

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre métodos numéricos para a derivada de Caputo, uma das definições utilizadas no cálculo de ordem não inteira. Dois métodos numéricos foram propostos para essa derivada. Além disso, realizou-se um estudo preliminar sobre estabilidade de pontos fixos de sistemas de ordem não inteira não lineares.

No [Capítulo 3](#), foi observada a existência de um problema na demonstração encontrada na literatura ([SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993](#); [PODLUBNY, 1998](#); [DIETHELM, 2010](#)) do teorema de existência e unicidade de equações diferenciais de ordem não inteira segundo o operador de Riemann-Liouville, ilustrando um caso em que o teorema não é válido. Além disso, foi demonstrada uma versão menos geral para esse teorema, corrigindo o referido problema. Nesse sentido, aplicar a derivada de Riemann-Liouville na modelagem de fenômenos físicos é restritiva devido às hipóteses do teorema de existência e unicidade, além da dificuldade em relação a obter interpretações físicas para as condições iniciais de um problema de valor inicial. Assim, conclui-se que, no caso de se empregar derivadas de ordem não inteira para obter modelos matemáticos de fenômenos físicos, a derivada de Caputo é mais apropriada.

No [Capítulo 4](#), foi apresentado o método híbrido, que utiliza os métodos dados pela Equação [3.57](#), p. [101](#), e pela Equação [3.66](#), p. [104](#), para obter soluções numéricas de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo. O método híbrido foi comparado com aquele dado pela Equação [3.66](#) e verificou-se ser mais apropriado em simulações em que seja necessário realizar um grande número de iterações. Contudo, para simulações com poucos pontos no intervalo simulado, o método híbrido deve ser preterido em relação ao dado pela Equação [3.66](#), devido ao erro de truncamento local desse ser menor que o daquele.

No [Capítulo 5](#), foi proposto o método MHCCI (memória hereditária concentrada na condição inicial) para determinar soluções numéricas de um PVINI segundo Caputo e que não depende explicitamente do tempo. Diferentemente da discretização dada pela Equação [3.57](#), esse método utiliza toda a informação proveniente dos coeficientes c_k^α dados pela Proposição [3.6.1](#). Além disso, diferentemente do método híbrido, uma discretização obtida por esse método preserva todos os pontos fixos do respectivo sistema contínuo. As soluções obtidas utilizando esse método são comparáveis com as obtidas utilizando o método híbrido para valores da ordem de integração no intervalo $[0,4, 2,0]$. Para valores da ordem de derivação no intervalo $(0,0, 0,4)$ o método MHCCI mostrou ser mais apropriado

que o método dado pela Equação 3.66 e, por consequência, que o método híbrido. A partir do método MHCCI, foi possível mostrar condições para que um ponto fixo de uma função discreta, obtida pela aplicação desse método, seja estável no caso em que $\alpha \in (0, 2)$.

No Capítulo 6, foi realizado um estudo preliminar sobre a estabilidade de pontos fixos para sistemas contínuos não lineares de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo e para funções discretas obtidas a partir do método MHCCI. Apresentou-se exemplos numéricos em que a estabilidade de pontos fixos de sistemas não lineares foi comparada com a estabilidade da origem do respectivo sistema linearizado, avaliado no ponto fixo, a partir do critério dado pelo Teorema 3.5.7. Observou-se, em cada exemplo, que a estabilidade do ponto fixo do sistema não linear e sua respectiva linearização são comparáveis. Isso indica a possibilidade de uma generalização do método indireto de Lyapunov, também conhecido como Teorema de Lyapunov-Perron (DOERING; LOPES, 2012), para o caso de equações diferenciais de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo. Para funções discretas obtidas a partir do método MHCCI foi realizado um procedimento aplicado à forma matricial desse método e baseado na análise de estabilidade de pontos fixos de funções discretas em conjunto com o método de Arnoldi (GOLUB; LOAN, 1996). O procedimento utilizado apontou para o critério de estabilidade de sistemas contínuos e lineares de ordem não inteira, como esperado. Como produto, conclui-se que esse procedimento pode ser empregado para determinar cotas superiores para o valor do passo de discretização, h , para simulações numéricas de sistemas contínuos de ordem não inteira segundo a derivada de Caputo, utilizando o método MHCCI.

7.2 Perspectivas Futuras

Uma vez que a maior parte das contribuições desta tese se refere a métodos numéricos para solução de equações diferenciais segundo a derivada de Caputo, entende-se como uma linha de continuação dos trabalhos investigar outras formas de discretização para equações diferenciais que sejam de menor intensidade computacional e/ou que o erro de truncamento local possa ser diminuído.

Embora neste trabalho focou-se nas derivadas de Riemann-Liouville e de Caputo, é premente a investigação detalhada de outras definições com o objetivo de buscar, se possível, uma definição para o cálculo de ordem não inteira que seja unificada.

O [Capítulo 6](#) é de extrema importância para as perspectivas futuras devido aos exemplos que apontam na direção de uma generalização do método indireto de Lyapunov para sistemas de ordem não inteira. Obviamente, outros teoremas na área de sistema dinâmicos, tal como o de Hartman-Grobman ([MONTEIRO, 2011](#)), podem ser estudados para uma possível generalização.

Além disso, questões relativas à obtenção de modelos matemáticos para fenômenos físicos, identificação de sistemas e estimação de parâmetros são áreas férteis para a realização de trabalhos futuros.

Referências

- ABD-ELOUAHAB, M. S.; HAMRI, N.-E.; WANG, J. Chaos control of a fractional-order financial system. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2010, p. 18, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 40, 150 e 164.
- ABD-ELOUAHAB, M. S.; HAMRI, N.-E.; WANG, J. Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system. *Nonlinear Dynamics*, Springer Netherlands, v. 69, n. 1-2, p. 275–284, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 40, 118 e 133.
- ABU-SARIS, R.; AL-MDALLAL, Q. On the asymptotic stability of linear system of fractional-order difference equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 16, n. 3, p. 613–629, 2013. Citado na página 148.
- AGARWAL, R.; EL-SAYED, A.; SALMAN, S. Fractional-order Chua's system: discretization, bifurcation and chaos. *Advances in Difference Equations*, SpringerOpen Journal, v. 2013, n. 1, p. 320, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 118 e 133.
- AGARWAL, R. P. A propos d'une note de m. pierre humbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 236, p. 2031–2032, 1953. Citado na página 71.
- AGUILA-CAMACHO, N.; DUARTE-MERMOUD, M. A.; GALLEGOS, J. A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 19, n. 9, p. 2951 – 2957, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 151.
- AGUIRRE, L. A.; BILLINGS, S. A. Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, v. 4, n. 1, p. 109–125, 1994. Citado na página 122.
- AGUIRRE, L. A.; FURTADO, E. C.; TÔRRES, L. A. B. Evaluation of dynamical models: Dissipative synchronization and other techniques. *PHYSICAL REVIEW E*, v. 74, n. 066203, 2006. Citado na página 122.
- AHMAD, W. M. Hyperchaos in fractional order nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 26, n. 5, p. 1459 – 1465, 2005. Citado na página 39.
- AHMAD, W. M.; SPROTT, J. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 16, n. 2, p. 339 – 351, 2003. Citado na página 39.
- AL-RABTAH, A.; MOMANI, S.; RAMADAN, M. A. Solving linear and nonlinear fractional differential equations using spline functions. *Abstract and Applied Analysis*, v. 2012, p. 9, 2012. Citado na página 38.
- BADRI, V.; TAVAZOEI, M. Fractional order control of thermal systems: achievability of frequency-domain requirements. *Nonlinear Dynamics*, v. 80, n. 4, p. 1773–1783, 2015. Citado na página 38.
- BARBOSA, R. et al. Dynamics of the fractional-order van der pol oscillator. In: *Computational Cybernetics, 2004. ICCC 2004. Second IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 373–378. Citado na página 39.

- BARBOSA, R. S. et al. Analysis of the van der Pol oscillator containing derivatives of fractional order. *Journal of Vibration and Control*, v. 13, n. 9-10, p. 1291–1301, 2007. Citado 3 vezes nas páginas [39](#), [118](#) e [133](#).
- BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 399 p. (Projeto Euclides). Citado na página [150](#).
- BHALEKAR, S. Dynamics analysis of fractional order yu-wang system. *Central European Journal of Physics*, v. 11, n. 10, p. 1514–1522, 2013. Citado na página [40](#).
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10ª. ed. São Paulo: grupo editorial LTC, 2010. 624 p. Citado 3 vezes nas páginas [49](#), [88](#) e [90](#).
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. 8ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. 736 p. Citado 2 vezes nas páginas [103](#) e [138](#).
- CAO, J.; XU, C. A high order schema for the numerical solution of the fractional ordinary differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 238, p. 154 – 168, 2013. Citado na página [38](#).
- CAPONETTO, R. et al. *Fractional Order Systems: Modeling and control applications*. London: World Scientific Publishing Company, 2010. 200 p. (World Scientific Series in Nonlinear Science, Series A, v. 72). Citado na página [31](#).
- CAYLEY, A. Note on riemann's paper "versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation" werke pp. 331–344. *Mathematische Annalen*, Springer-Verlag, v. 16, n. 1, p. 81–82, 1880. Citado na página [36](#).
- ČERMÁK, J.; GYÖRY, I.; NECHVÁTAL, L. On explicit stability conditions for a linear fractional difference system. *Applied Mathematics and Computation*, v. 18, n. 3, p. 651–672, 2015. Citado na página [148](#).
- ČERMÁK, J.; KISELA, T.; NECHVÁTAL, L. Stability regions for linear fractional differential systems and their discretizations. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, n. 12, p. 7012 – 7022, 2013. Citado na página [148](#).
- CHAREF, A. et al. Fractal system as represented by singularity function. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 37, n. 9, p. 1465 – 1470, 1992. Citado na página [38](#).
- CHEN, F. Fixed points and asymptotic stability of nonlinear fractional difference equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, n. 39, p. 1 – 18, 2011. Citado na página [148](#).
- DAS, S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. 1. ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 240 p. Citado 2 vezes nas páginas [31](#) e [117](#).
- DATSKO, B.; GAFIYCHUK, V. Chaotic dynamics in bonhoffer–van der pol fractional reaction–diffusion system. *Signal Processing*, v. 91, n. 3, p. 452 – 460, 2011. Advances in Fractional Signals and Systems. Citado na página [39](#).

DEBNATH, L. A brief historical introduction to fractional calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 35, n. 4, p. 487–501, 2004. Citado na página 71.

DENG, W.; LI, C. The evolution of chaotic dynamics for fractional unified system. *Physics Letters A*, v. 372, n. 4, p. 401 – 407, 2008. Citado na página 40.

DIETHELM, K. Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 17, n. 3, p. 479–493, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 102.

DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2010. 247 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 2004). Citado 8 vezes nas páginas 48, 58, 72, 78, 104, 165, 181 e 182.

DIETHELM, K.; FORD, N.; FREED, A. Detailed error analysis for a fractional adams method. *Numerical Algorithms*, v. 36, n. 1, p. 31–52, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 104.

DIETHELM, K. et al. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 6–8, p. 743 – 773, 2005. Citado na página 83.

DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, v. 29, n. 1-4, p. 3–22, 2002. Citado na página 38.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 5ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 416 p. (Coleção Matemática Universitária, v. 1). Citado 3 vezes nas páginas 94, 150 e 166.

DORCAK, L. Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems. *arXiv.org*, p. 15, 1994. Acessado em 04 de Dez 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/math/0204108>>. Citado na página 38.

DUARTE-MERMOUD, M. A. et al. Using general quadratic lyapunov functions to prove lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 22, n. 1–3, p. 650 – 659, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 151.

DZIELIŃSKI, A.; SIEROCIUK, D. Stability of discrete fractional order state-space systems. *Journal of Vibration and Control*, v. 14, n. 9-10, p. 1543–1556, 2008. Citado na página 148.

ERDELYI, A. *Higher Transcendental Functions*. New York: McGraw-Hill, 1955. 308 p. (Bateman Manuscript Project Staff, v. 3). Citado 5 vezes nas páginas 37, 39, 52, 71 e 72.

FAIEGHI, M. R.; DELAVARI, H. Chaos in fractional-order genesio–tesi system and its synchronization. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 17, n. 2, p. 731 – 741, 2012. Citado na página 40.

FIELDER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. *Caos: uma introdução*. São Paulo: Edgard Blucher, 1994. 416 p. Citado 2 vezes nas páginas 123 e 152.

GALVÃO, R. et al. Fractional order modeling of large three-dimensional rc networks. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, v. 60, n. 3, p. 624–637, 2013. Citado na página 38.

GAO, X.; YU, J. Chaos in the fractional order periodically forced complex duffing's oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 24, n. 4, p. 1097 – 1104, 2005. Citado na página 39.

GE, Z.-M.; JHUANG, W.-R. Chaos, control and synchronization of a fractional order rotational mechanical system with a centrifugal governor. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 33, n. 1, p. 270 – 289, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.

GE, Z.-M.; ZHANG, A.-R. Chaos in a modified van der pol system and in its fractional order systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 32, n. 5, p. 1791 – 1822, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. van V. *Matrix Computations*. 3rd. ed. [S.l.]: Johns Hopkins University Press, 1996. 728 p. (Johns Hopkins Studies in Mathematical Sciences, v. 1). Citado 2 vezes nas páginas 161 e 166.

HARTLEY, T.; LORENZO, C.; QAMMER, H. K. Chaos in a fractional order chua's system. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, v. 42, n. 8, p. 485–490, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.

HEYMANS, N.; PODLUBNY, I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with riemann-liouville fractional derivatives. *Rheologica Acta*, v. 45, n. 5, p. 765–771, 2006. Citado na página 82.

HILFER, R. *Applications Of Fractional Calculus In Physics*. London: World Scientific Co. Pte. Ltd., 2000. 472 p. Citado na página 31.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. San Diego: Elsevier Academic Press, INC., 2004. 432 p. (Pure and Applied Mathematics, v. 60). Citado na página 125.

JACYNTHO, L. et al. Identification of fractional-order transfer functions using a step excitation. *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, v. 62, n. 9, p. 896–900, 2015. Citado na página 38.

JIA, H.; CHEN, Z.; QI, G. Chaotic characteristics analysis and circuit implementation for a fractional-order system. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, v. 61, n. 3, p. 845–853, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.

JUN, D. et al. Dynamic behavior analysis of fractional-order Hindmarsh-Rose neuronal model. *Cognitive Neurodynamics*, v. 8, n. 2, p. 167–175, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 118 e 133.

KAZEM, S.; ABBASBANDY, S.; KUMAR, S. Fractional-order legendre functions for solving fractional-order differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 7, p. 5498 – 5510, 2013. Citado na página 38.

KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. Upper Saddle River: Prentice hall, 2002. 750 p. Citado na página 149.

KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier B. V., 2006. 539 p. (North-Holland Mathematics Studies, v. 204). Citado 5 vezes nas páginas 29, 37, 71, 78 e 131.

LAKESTANI, M.; DEHGHAN, M.; IRANDOUST-PAKCHIN, S. The construction of operational matrix of fractional derivatives using b-spline functions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 17, n. 3, p. 1149 – 1162, 2012. Citado na página 38.

LETELLIER, C.; AGUIRRE, L. A. Dynamical analysis of fractional-order Rössler and modified Lorenz systems. *Physics Letters A*, v. 377, n. 28-30, p. 1707–1719, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.

LI, C.; CHEN, A.; YE, J. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 9, p. 3352 – 3368, 2011. Citado na página 38.

LI, C.; CHEN, G. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 341, n. 0, p. 55 – 61, 2004. Citado na página 39.

LI, C.; DENG, W. Remarks on fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, v. 187, n. 2, p. 777 – 784, 2007. Citado na página 40.

LI, C.; ZHANG, F. A survey on the stability of fractional differential equations. *The European Physical Journal Special Topics*, v. 193, n. 1, p. 27–47, 2011. Citado na página 40.

LI, H.; LIAO, X.; LUO, M. A novel non-equilibrium fractional-order chaotic system and its complete synchronization by circuit implementation. *Nonlinear Dynamics*, v. 68, n. 1-2, p. 137–149, 2012. Citado na página 39.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Mittag-leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, v. 45, n. 8, p. 1965 – 1969, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 151.

LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 59, n. 5, p. 1810 – 1821, 2010. Citado na página 151.

LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável real*. 12^a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 198 p. (Coleção Matemática Universitária, v. 1). Citado 4 vezes nas páginas 45, 158, 181 e 182.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11^a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 547 p. (Projeto Euclides, v. 2). Citado 3 vezes nas páginas 92, 100 e 145.

LIU, X.; HONG, L.; YANG, L. Fractional-order complex T system: bifurcations, chaos control, and synchronization. *Nonlinear Dynamics*, v. 75, n. 3, p. 589–602, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 40, 118 e 133.

LU, J. G. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order arneodo's systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 26, n. 4, p. 1125 – 1133, 2005. Citado na página 39.

- LU, J. G. Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization. *Physics Letters A*, v. 354, n. 4, p. 305 – 311, 2006. Citado na página 39.
- LUBICH, C. Discretized fractional calculus. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 17, n. 3, p. 704–719, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 102.
- LYAPUNOV, A. Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, Université Paul Sabatier, v. 9, p. 203–474, 1907. Citado na página 149.
- MAINARDI, F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An introduction to mathematical models*. Singapore: Imperial College Press, 2010. 368 p. Citado na página 31.
- MATIGNON, D. Stability properties for generalized fractional differential systems. *Esaim: Proceedings*, v. 5, n. 3, p. 145–158, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 97.
- MENDES, E.; LETELLIER, C. Displacement in the parameter space versus spurious solution of discretization with large time step. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 37, n. 4, p. 1203, 2004. Citado na página 124.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons, 1993. 384 p. Citado 5 vezes nas páginas 35, 36, 37, 43 e 71.
- MITTAG-LEFFLER, G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 137, p. 554 – 558, 1903. Citado na página 71.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 3ª. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. 670 p. Citado 4 vezes nas páginas 143, 152, 160 e 167.
- MONTSENY, G. Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. *ESAIM: Proc.*, v. 5, p. 159–175, 1998. Citado na página 29.
- NETO, A. L. *Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. 465 p. (Projeto Euclides). Citado 3 vezes nas páginas 46, 161 e 182.
- NIMMO, S.; EVANS, A. K. The effects of continuously varying the fractional differential order of chaotic nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 10, n. 7, p. 1111 – 1118, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.
- OLDHAM, K. B.; SPAINER, J. *The Fractional Calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. San Diego: Academic Press, INC., 1974. 234 p. (Mathematics in Science and Engineering, v. 111). Citado 3 vezes nas páginas 36, 37 e 181.
- OLIVEIRA, H. S. *Introdução ao cálculo de Ordem Arbitrária*. 2010. 131 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- OUSTALOUP, A.; SABATIER, J.; MOREAU, X. From fractal robustness to the crone approach. *ESAIM: Proceeding*, v. 5, p. 177–192, 1998. Citado na página 39.

- PETRÁŠ, I. A note on the fractional-order chua's system. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 38, n. 1, p. 140 – 147, 2008. Citado na página 39.
- PETRÁŠ, I. Chaos in the fractional-order volta's system: modeling and simulation. *Nonlinear Dynamics*, v. 57, n. 1-2, p. 157–170, 2009. Citado na página 39.
- PETRÁŠ, I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Beijin: Higher Education Press an Springer, 2011. 218 p. (Nonlinear Physical Science). Citado na página 182.
- PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. 1st. ed. San Diego: Academic Press, 1998. 340 p. (Mathematics in Science and Engineering, v. 198). Citado 9 vezes nas páginas 31, 59, 60, 69, 78, 102, 165, 181 e 182.
- PODLUBNY, I.; DORCAK, L.; KOSTIAL, I. *On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic Systems and $PI^l D^u$ -controllers*. Kosice, Slovak Republic: Proc. of the 36th IEEE CDC San Diego, Ca., 1997. 4985 - 4990 p. Citado na página 39.
- POL, B. van der; MARK, J. van der. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Philosophical Magazine, Series 7*, v. 6, n. 38, p. 763–775, november 1928. Citado na página 152.
- PROAKIS, J. G. *Digital Signal Processing: Princples, algorithms and applications*. 4th. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2006. 1004 p. Citado na página 161.
- RAJASEKHAR, A.; JATOTH, R. K.; ABRAHAM, A. Design of intelligent pid/piλdμ speed controller for chopper fed {DC} motor drive using opposition based artificial bee colony algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 29, p. 13 – 32, 2014. Citado na página 38.
- ROSS, B. *Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the international conference held at the university of new haven, june 1974*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1975. 386 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 457). Citado na página 35.
- RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. Citado na página 122.
- SAADATMANDI, A.; DEHGHAN, M. A new operational matrix for solving fractional-order differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 59, n. 3, p. 1326 – 1336, 2010. Citado na página 38.
- SABATIER, J.; AGRAWAL, O. P.; MACHADO, J. A. T. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical developments and applications in physics and engineering*. 2007. ed. Netherlands: Springer, 2007. 552 p. Citado na página 31.
- SALGADO, G. H. O.; AGUIRRE, L. A. A hybrid algorithm for Caputo fractional differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 33, p. 133 – 140, 2016. Citado na página 109.
- SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, P. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and applications*. 1st. ed. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p. Citado 8 vezes nas páginas 35, 36, 37, 59, 68, 78, 165 e 182.

- SCHNAKENBERG, J. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *Journal of Theoretical Biology*, v. 81, n. 3, p. 389 – 400, 1979. Citado na página 153.
- SHENG, H.; CHEN, Y.; QIU, T. *Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing: Techniques and applications*. 1st. ed. London: Springer, 2012. 295 p. (Signals and Communication Technology). Citado na página 31.
- SHEU, L.-J. et al. Chaos in a new system with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 31, n. 5, p. 1203 – 1212, 2007. Citado na página 39.
- SPIVAK, M. *Calculus on manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., 1971. 160 p. Citado na página 44.
- SUN, K.; WANG, X.; SPOTT, J. C. Bifurcations and chaos in fractional-order simplified Lorenz system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 20, n. 04, p. 1209–1219, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 40, 118 e 133.
- TARASOV, V. E. *Fractional Dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. 2011. ed. Beijin: Springer, 2011. 505 p. (Nonlinear Physical Science). Citado na página 31.
- TAVAZOEI, M.; HAERI, M. Unreliability of frequency-domain approximation in recognising chaos in fractional-order systems. *Signal Processing, IET*, v. 1, n. 4, p. 171–181, 2007. Citado na página 38.
- TAVAZOEI, M. S. et al. More details on analysis of fractional-order van der pol oscillator. *Journal of Vibration and Control*, v. 15, n. 06, p. 803–819, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 40, 150 e 164.
- TENG, L. et al. Chaotic behavior in fractional-order memristor-based simplest chaotic circuit using fourth degree polynomial. *Nonlinear Dynamics*, v. 77, n. 1-2, p. 231–241, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 39, 118 e 133.
- TIAN, J.; YU, Y.; WANG, H. Stability and bifurcation of two kinds of three-dimensional fractional Lotka-Volterra systems. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2014, n. 1, p. 8, 2014. Citado na página 40.
- TRIGEASSOU, J. C. et al. A lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Process.*, v. 91, n. 3, p. 437–445, 2011. Citado na página 40.
- WESTERLUND, S. Dead matter has memory! *Physica Scripta*, v. 43, n. 2, p. 174–179, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 71.
- XIN, G.; JUE-BANG, Y. Chaos and chaotic control in a fractional-order electronic oscillator. *Chinese Physics*, v. 14, n. 5, p. 908, 2005. Citado na página 39.
- YU, Y.; LI, H.-X. The synchronization of fractional-order rössler hyperchaotic systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 387, n. 5–6, p. 1393 – 1403, 2008. Citado na página 40.
- YUAN, L.-G.; YANG, Q.-G. Parameter identification and synchronization of fractional-order chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 17, n. 1, p. 305 – 316, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 40, 118 e 133.

ZHANG, W. et al. Chaos in a fractional-order rössler system. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 42, n. 3, p. 1684 – 1691, 2009. Citado 3 vezes nas páginas [39](#), [118](#) e [133](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Relação das citações dos teoremas utilizados em Referenciais Teóricos

Tabela A.1 – Referências utilizadas em cada um dos teoremas, proposições, corolários e lemas apresentados na Parte II - Referenciais Teóricos - *Capítulo 2*.

Item no texto	Referência
Lema 2.1.1	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 37), (DIETHELM, 2010, p. 8)
Lema 2.1.2	(DIETHELM, 2010, p. 8)
Proposição 2.1.3	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 16), (PODLUBNY, 1998, p. 1), (DIETHELM, 2010, p. 9)
Proposição 2.1.4	(PODLUBNY, 1998, p. 2), (DIETHELM, 2010, p. 9)
Proposição 2.1.5	(PODLUBNY, 1998, p. 6)
Proposição 2.1.6	(DIETHELM, 2010, p. 10)
Proposição 2.2.1	(PODLUBNY, 1998, p. 65)
Teorema 2.2.2	(PODLUBNY, 1998, p. 67), (DIETHELM, 2010, p. 14)
Corolário 2.2.3	(DIETHELM, 2010, p. 14)
Proposição 2.2.4	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 65), (DIETHELM, 2010, p. 20)
Corolário 2.2.5	(LIMA, 2013)
Teorema 2.2.6	(DIETHELM, 2010, p. 21)
Corolário 2.2.7	(PODLUBNY, 1998, p. 100), (DIETHELM, 2010, p. 21)
Teorema 2.3.1	(DIETHELM, 2010, p. 27)
Proposição 2.3.2	(PODLUBNY, 1998, p.71)
Teorema 2.3.3	(PODLUBNY, 1998, p. 74), (DIETHELM, 2010, p. 29)
Proposição 2.3.4	(PODLUBNY, 1998, p.72), (DIETHELM, 2010, p. 28)
Proposição 2.3.5	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 69), (PODLUBNY, 1998, p.90), (DIETHELM, 2010, p. 32)
Teorema 2.3.6	(DIETHELM, 2010, p. 31)
Corolário 2.3.7	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 70), (PODLUBNY, 1998, p. 100), (DIETHELM, 2010, p. 31)
Proposição 2.3.8	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 76), (PODLUBNY, 1998, p.91), (DIETHELM, 2010, p. 32)
Teorema 2.3.9	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 77), (PODLUBNY, 1998, p.96), (DIETHELM, 2010, p. 33)
Teorema 2.3.10	(PODLUBNY, 1998, p.69), (DIETHELM, 2010, p. 30)
Teorema 2.3.11	(PODLUBNY, 1998, p.70), (DIETHELM, 2010, p. 39)
Teorema 2.3.12	(DIETHELM, 2010, p. 39)
Proposição 2.4.1	(DIETHELM, 2010, p. 58)
Teorema 2.4.2	(DIETHELM, 2010, p. 50)
Corolário 2.4.3	(DIETHELM, 2010, p. 53)
Proposição 2.4.4	(DIETHELM, 2010, p. 49)
Corolário 2.4.5	(OLDHAM; SPAINER, 1974, p. 70), (PODLUBNY, 1998, p. 100), (DIETHELM, 2010, p. 31)
Teorema 2.4.6	(DIETHELM, 2010, p. 59)
Teorema 2.4.7	(DIETHELM, 2010, p. 53)
Teorema 2.4.8	(DIETHELM, 2010, p. 54)
Corolário 2.4.9	(DIETHELM, 2010, p. 54)
Teorema 2.4.10	(DIETHELM, 2010, p. 56)
Lema 2.4.11	(DIETHELM, 2010, p. 53)
Corolário 2.4.12	(DIETHELM, 2010, p. 56)
Proposição 2.4.13	(DIETHELM, 2010, p. 57)
Teorema 2.5.1	(PODLUBNY, 1998, p. 62)

Tabela A.2 – Referências utilizadas em cada um dos teoremas, proposições, corolários e lemas apresentados na Parte II - Referenciais Teóricos - *Capítulo 3*.

Item no texto	Referência
Teorema 3.1.1	(PODLUBNY, 1998, p. 29), (DIETHELM, 2010, p. 71)
Proposição 3.1.2	(PODLUBNY, 1998, p. 29), (DIETHELM, 2010, p. 71)
Teorema 3.2.1	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 44), (PODLUBNY, 1998, p. 128), (DIETHELM, 2010, p. 78)
Teorema 3.2.2	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 830), (PODLUBNY, 1998, p. 126), (DIETHELM, 2010, p. 80)
Proposição 3.2.3	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 835), (PODLUBNY, 1998, p. 131)
Teorema 3.3.1	(DIETHELM, 2010, p. 86)
Teorema 3.3.2	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 830), (PODLUBNY, 1998, p. 126), (DIETHELM, 2010, p. 86)
Teorema 3.3.3	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 836), (DIETHELM, 2010, p. 135)
Corolário 3.3.4	(DIETHELM, 2010, p. 101)
Teorema 3.4.1	(PODLUBNY, 1998, p. 106), (DIETHELM, 2010, p. 134)
Corolário 3.4.2	(PODLUBNY, 1998, p. 106), (DIETHELM, 2010, p. 134)
Teorema 3.4.3	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 140), (PODLUBNY, 1998, p. 104), (PETRÁŠ, 2011, p. 14)
Proposição 3.4.4	(PODLUBNY, 1998, p. 21), (PETRÁŠ, 2011, p. 45)
Proposição 3.4.5	(PODLUBNY, 1998, p. 21), (PETRÁŠ, 2011, p. 45)
Teorema 3.5.1	(SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993, p. 831)
Proposição 3.5.2	(PETRÁŠ, 2011, p. 47)
Corolário 3.5.3	(PETRÁŠ, 2011, p. 47)
Proposição 3.5.4	(PETRÁŠ, 2011, p. 46)
Teorema 3.5.5	(PETRÁŠ, 2011, p. 46)
Teorema 3.5.6	(PETRÁŠ, 2011, p. 46)
Teorema 3.5.7	(PETRÁŠ, 2011, p. 64)
Proposição 3.6.1	(PODLUBNY, 1998, p. 208), (PETRÁŠ, 2011, p. 19)
Proposição 3.6.2	(NETO, 1993)
Proposição 3.6.3	(LIMA, 2013)
Corolário 3.6.4	(LIMA, 2013)
Proposição 3.6.5	(PODLUBNY, 1998, p. 204)
Proposição 3.6.6	(DIETHELM, 2010, p. 205)

APÊNDICE B – Publicação Sobre o Método Híbrido para um PVINI segundo Caputo

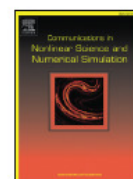
Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 33 (2016) 133–140



Contents lists available at ScienceDirect

Commun Nonlinear Sci Numer Simulat

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cnsns



A hybrid algorithm for Caputo fractional differential equations



G.H.O. Salgado^{a,b,*}, L.A. Aguirre^a

^a Graduate Program in Electrical Engineering, Federal University of Minas Gerais, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG, Brazil

^b Federal University of Itajubá - Advanced Campus of Itabira, Irmã Ivone Drumond 200 - Distrito Industrial II, Itabira, MG, 35903-087 Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 February 2015

Revised 10 August 2015

Accepted 29 August 2015

Available online 4 September 2015

Keywords:

Fractional differential equations

Caputo definition

Riemann–Liouville definition

Numerical methods

ABSTRACT

This paper is concerned with the numerical solution of fractional initial value problems (FIVP) in sense of Caputo's definition for dynamical systems. Unlike for integer-order derivatives that have a single definition, there is more than one definition of non integer-order derivatives and the solution of an FIVP is definition-dependent. In this paper, the chief differences of the main definitions of fractional derivatives are revisited and a numerical algorithm to solve an FIVP for Caputo derivative is proposed. The main advantages of the algorithm are twofold: it can be initialized with integer-order derivatives, and it is faster than the corresponding standard algorithm. The performance of the proposed algorithm is illustrated with examples which suggest that it requires about half the computation time to achieve the same accuracy than the standard algorithm.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.