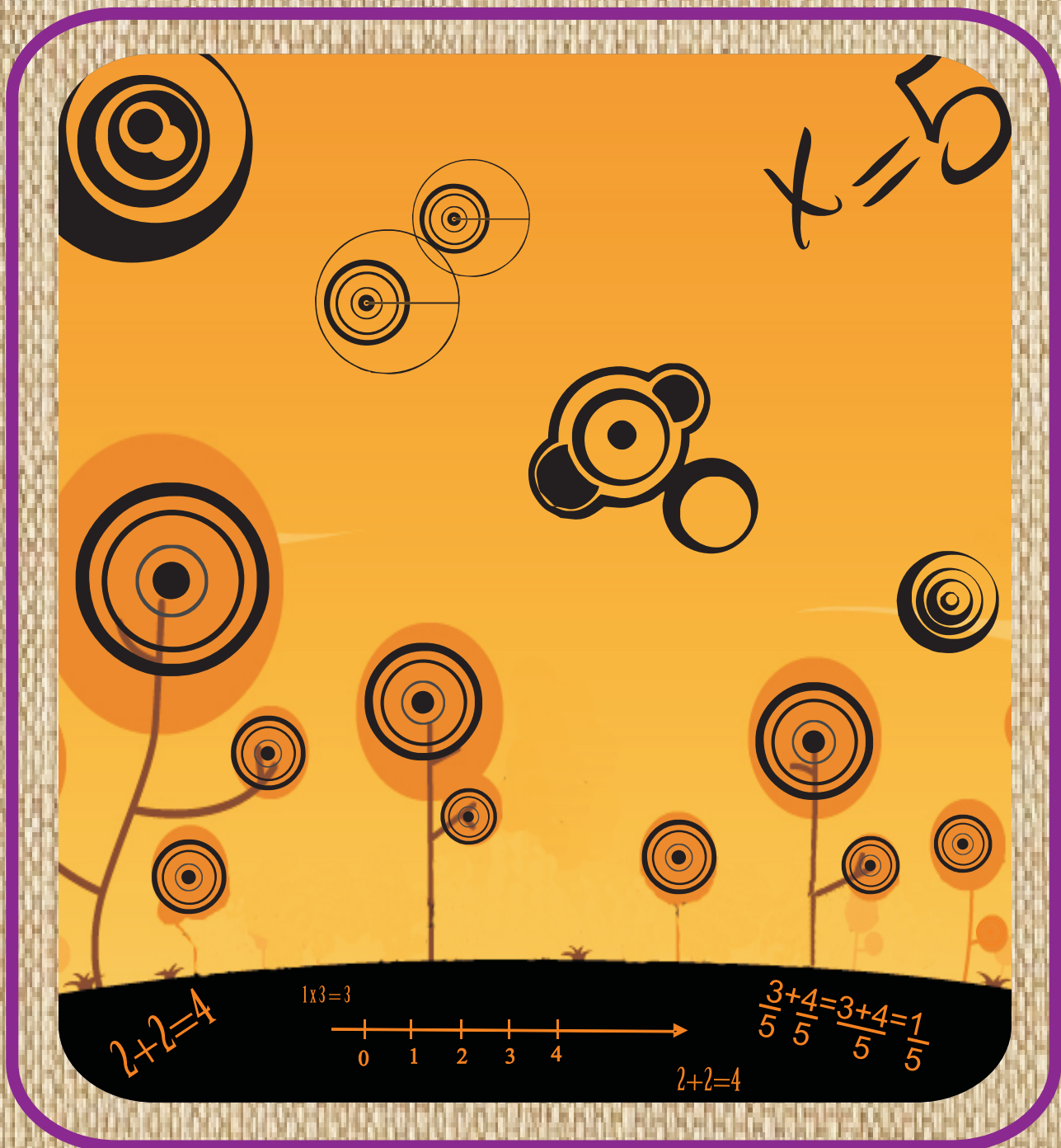


Conteúdos do *Ensino Fundamental*

Números e operações



NÚMEROS E OPERAÇÕES



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Ronaldo Tadeu Pena
Reitor

Heloisa Maria Murgel Starling
Vice-Reitora

Pró-Reitoria de Graduação

Mauro Mendes Braga
Pró-Reitor

Carmela Maria Polito Braga
Pró-Reitora Adjunta

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância


Ione Maria Ferreira de Oliveira
Coordenadora da UAB UFMG

Faculdade de Educação

Antônia Vitória Soares Aranha
Diretora

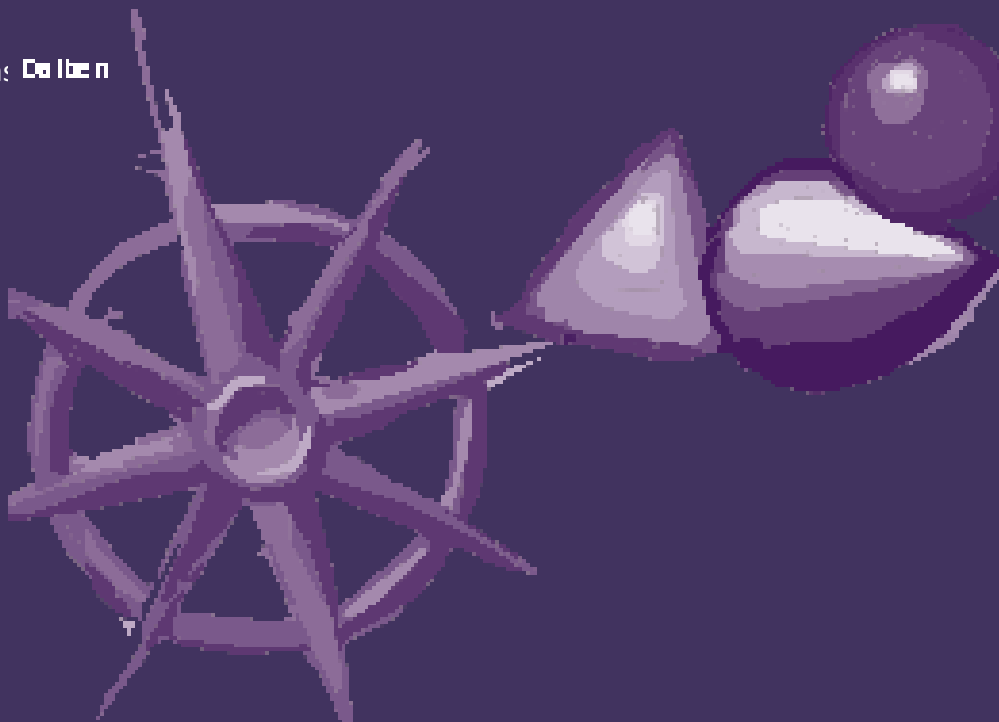
Orlando Gomes de Aguiar Júnior
Vice-Diretor

Curso de Pedagogia UAB-UFMG

Ângela Imaculada Loureiro de Freitas 
Coordenadora Geral

Tânia Margarida Lima Costa
Vice-Coordenadora Geral

Sérgio Dias Cirino
Coordenador do Eixo Integrador



Maria da Penha Lopes

NÚMEROS E OPERAÇÕES

**Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben
Tânia Margarida Lima Costa
(organizadoras)**

**Belo Horizonte
CURSO DE PEDAGOGIA UAB UFMG
FAE/UFMG
2009**

ORGANIZADORAS Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben
Tânia Margarida Lima Costa

ASSESSORA PEDAGÓGICA Elza Vidal de Castro

REVISORA Maria Ribeiro dos Santos

PRODUTOR EDITORIAL Marcos Alves
Projeto Gráfico, Diagramação e Capa

© 2009, Os autores e organizadores

© 2009, Curso de Pedagogia UAB UFMG

Este livro ou parte dele não pode ser reproduzido por qualquer meio sem autorização escrita do editor.

Ficha Catalográfica

L864n Lopes, Maria da Penha.
Números e operações / Maria da Penha Lopes;
Ângela Imaculada Loureiro de Freitas Dalben, Tânia
Margarida Lima Costa (Organizadoras). – Belo Horizonte :
FAE/UFMG, 2009.
44 p.: il. (Conteúdos do ensino fundamental. Números
e Operações)

Obra produzida para o curso de Pedagogia da
Universidade Aberta da UFMG.
ISBN: 978-85-99372-69-2

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de
crianças. I. Dalben, Ângela Imaculada Loureiro de Freitas.
II. Costa, Tânia Margarida Lima. III. Título. IV. Série.

CDD: 372
CDU: 37.018:51

Elaborada pela DITTI – Setor de Tratamento da Informação
Biblioteca Universitária da UFMG

FACULDADE DE EDUCAÇÃO DA UFMG
Curso de Pedagogia UAB UFMG
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 - Belo Horizonte-MG
Tel. 31 3409-7477

NÚMEROS E OPERAÇÕES



AUTORA

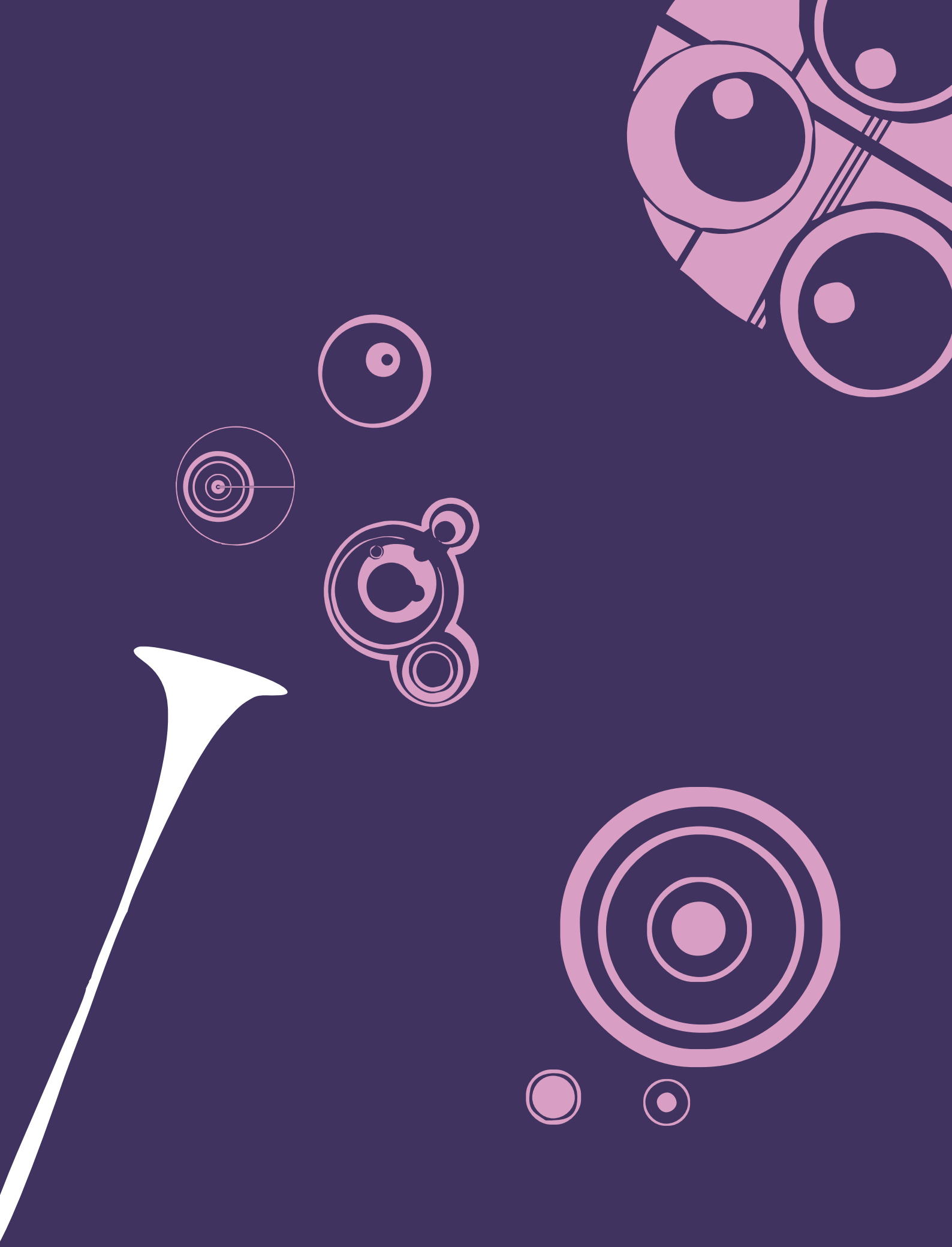
Maria da Penha Lopes

Possui Bacharelado (1961) e Licenciatura (1962) em Matemática pela Faculdade de Filosofia Universidade de Minas Gerais, Mestrado em Matemática (1979) pelo ICEx/UFMG e Doutorado em Educação (2007) pela Faculdade de Educação/UFMG. Professora aposentada do Departamento de Matemática do ICEx/UFMG e atualmente é professora das Faculdades de Pedro Leopoldo. Atua em programas de capacitação de professor de Matemática e tem experiência em pesquisa na área de Educação, com ênfase em Ensino-Aprendizagem de Matemática.



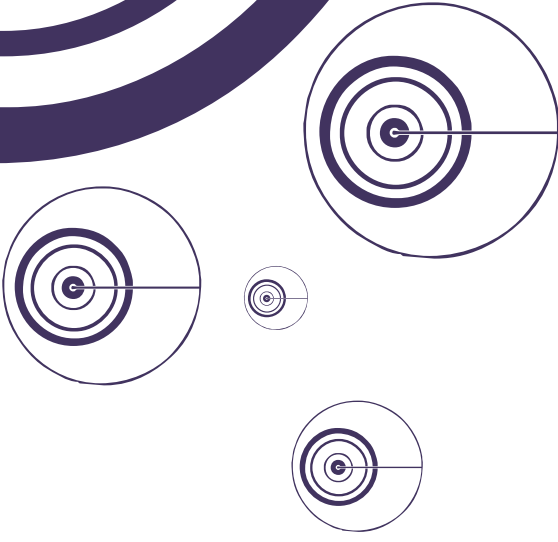
EMENTA

Números Naturais. Sistema de Numeração Decimal. Operações com números naturais. Múltiplos e divisores.



●●●●●● SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1. NÚMEROS NATURAIS OU NÚMEROS PARA CONTAR	10
2. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO	13
3. OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS	17
4. DIVISIBILIDADE	29
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35
ORIENTAÇÃO DE ESTUDO	37
ESTUDO COMPLEMENTAR	42





INTRODUÇÃO

Conhecer os números e operar com eles torna-se imprescindível, nos dias atuais, numa sociedade que se organiza de forma cada vez mais quantificada. Procuramos, portanto, neste texto trabalhar um conteúdo que vai ajudar o professor a ampliar a idéia de número com a qual o aluno chega à escola. De fato, essa ampliação vai ocorrer ao longo da formação escolar do aluno, no momento em que ele opera com os números, em que percebe seu caráter cardinal e ordinal e em que estuda outros campos numéricos. Em todos esses momentos, o aluno estará ampliando o significado que ele atribuía aos números.

Iniciaremos, pois, este estudo com os números naturais e o Sistema de Numeração Decimal e, na seqüência, introduziremos o estudo das operações com os números naturais, insistindo nas idéias envolvidas nessas operações bem como justificando suas técnicas.

1. NÚMEROS NATURAIS OU NÚMEROS PARA CONTAR

A necessidade de avaliar uma quantidade aparece muito cedo no desenvolvimento da humanidade. O homem primitivo já precisava avaliar quanta caça ia encontrar em determinada região para decidir se se iria dirigir para lá ou não. Não possuía ainda o sentido do número como o percebemos hoje, abstrato e independente de sua relação com os objetos concretos que representam. Era mais uma sensação numérica da quantidade de caça. Para Ifrah (1989), a 'faculdade abstrata de contar', processo mental mais evoluído do que a 'sensação numérica', aparece bem depois, com o desenvolvimento da humanidade e está estreitamente ligada a esse desenvolvimento. Por outro lado, a necessidade de registrar uma quantidade surge no momento em que os homens precisaram contar grandes quantidades de objetos.

Assim também, o contato da criança com os números começa muito cedo em um mundo que, cada vez mais, se expressa numericamente por meio de códigos: as ruas de uma cidade são reconhecidas por um Código de Endereçamento Postal (CEP); as linhas de ônibus de Belo Horizonte são identificadas por um número que indica as avenidas pelas quais eles circulam; as mercadorias, em lojas e supermercados, têm códigos que indicam a origem da mercadoria e o tipo dela. E não pára por aí: as casas são numeradas; os telefones têm números; as pessoas são identificadas pelo número de sua carteira de identidade, de seu CPF e de seu título de eleitor; as crianças, quando nascem, recebem um número de registro na sua certidão de nascimento; os alunos, na escola, recebem um número de chamada. Além disso, as agências bancárias são numeradas, as contas dos clientes dos bancos são numeradas e têm uma senha de segurança, geralmente composta de números e letras; as pessoas recebem senhas numéricas nas repartições para serem atendidas por ordem de chegada. Portanto, é importante que esses usos dos números estejam presentes em sala de aula.

Pois bem, antes de a criança entrar para a escola, alguns desses usos dos números lhes são familiares. Dessa forma, sugerimos que este estudo se iniciasse solicitando aos alunos a cópia, por exemplo, o número de sua certidão de nascimento, ou da carteira de identidade dos pais, ou do título de eleitor, ou do CPF, etc. Com esse exercício, as crianças desenhariam os números, mesmo não sabendo lê-los. Saberiam, então, que esses números são usados como códigos, com a função de identificar. Daí, poderemos explicar-lhes que eles têm uma característica diferente dos números naturais, usados para contar e com os quais podemos operar. Assim, as crianças perceberiam que não tem sentido, por exemplo, somar os números das carteiras de identidade de duas pessoas ou os números de duas linhas de ônibus.

Outra forma de trazer esses números de uso social para a sala de aula é pedir que as crianças copiem, em uma agenda, os telefones dos colegas, ou façam uma lista das idades, ou dos pesos ou das alturas deles. Dessa forma, elas verão que esses números indicam medidas e que tem sentido compará-los e operar com eles. Elas saberão, por

exemplo, que uma criança de 6 anos e 3 meses é mais nova do que uma criança de 6 anos e 8 meses e que a diferença das idades é de 5 meses, ou que a mais velha tem 5 meses a mais que a mais nova, ou que essa tem 5 meses a menos que a mais velha. Essas situações podem ser propostas nos problemas que vão introduzir a idéia da adição e da subtração.

Feito isso, poderemos começar um estudo mais sistemático com os números, apresentando a seqüência dos números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., que exprimem o resultado de uma contagem. Incluir o 0 (zero) entre os números naturais, como resultado de uma contagem, pode soar estranho, afinal, historicamente, ele aparece bem depois da necessidade de contar. Primeiramente, ele aparece como símbolo para guardar uma ordem vazia na escrita do número e, mais tarde, ganha o *status* de número. Aqui, neste texto, achamos conveniente incluir o 0 entre os números naturais para apresentá-lo como elemento neutro da adição $6 + 0 = 6$, e para dar sentido à diferença de dois números naturais iguais: $8 - 8 = 0$; $15 - 15 = 0$ etc. (LIMA, 1991).

De modo geral, quando a criança chega à escola, ela já sabe recitar a seqüência dos números naturais até um valor razoavelmente alto e sabe até registrá-la. Incentivada pelo professor, ela poderá chegar cada vez mais longe na seqüência, antes mesmo de ela associar a esses números uma quantidade ou de percebê-los como entes abstratos ou ainda de conhecer a estrutura do Sistema de Numeração Decimal. Desde o início do ano letivo, o professor poderá pedir aos alunos que iniciem, em uma tira de papel, uma seqüência numérica que será aumentada, gradativamente, com o respectivo aumento da tira de papel. Ao mesmo tempo, o professor deve escrever também uma seqüência, em uma tira de papel, correspondente à seqüência do aluno que estivesse mais avançado e colá-la no quadro. Depois, essa tira feita pelo professor deverá ser pregada na parede da sala para ir aumentando, gradativamente, de acordo com os avanços dos alunos. Com essa atividade, será fácil o professor identificar os alunos que apresentem dificuldades com a lei de formação da seqüência numérica, com a contagem ou com o registro dos números. (CARVALHO, 1995). Os alunos, por sua vez, poderão observar as regularidades na escrita dos números 21, 22, 23, ..., 31, 32, 33, ...; observar a seqüência numérica: perceber que 10 é sucessor de 9 ($9 + 1 = 10$), que 20 é sucessor de 19 ($19 + 1 = 20$) e que 30 é sucessor de 29 ($29 + 1 = 30$). Isto é, eles poderão saber que somando um a nove completam uma dezena e acrescentam 1 ao algarismo anterior. Ora, é isso que o aluno vai fazer nas técnicas operatórias ao agrupar ou desfazer uma dezena.

Na seqüência, sugerimos que o aluno observe a diferença entre as quantidades representadas por 13 e por 31 levando-o a perceber a importância do valor posicional dos algarismos, na escrita dos números. É importante que o aluno perceba que uma simples mudança de posição dos algarismos leva à mudança do valor do número. Assim, em 13, temos 1 grupo de 10 (ou uma dezena) e 3 unidades e em 31, temos 3 grupos de 10 (ou três dezenas) e uma unidade. Esse exemplo dará sentido também à diferença entre o *valor absoluto* de um algarismo no número e seu *valor relativo*, quando o aluno for estudar a estrutura do Sistema de Numeração Decimal. Tanto em 13, como em 31, o valor absoluto dos algarismos 1 e 3 são um e três, respectivamente. Já o valor relativo do algarismo em um número é dado pelo número de grupos de dez, cem, mil que eles representam. Em 13, o valor relativo do algarismo 1 é 10 (um grupo de 10) e do algarismo 3 é 3 (três grupos de

uma unidade); em 31, o valor relativo do algarismo 3 é 30 (três grupos de 10) e o valor relativo do algarismo 1 é 1 (um grupo de uma unidade).

Explorada a seqüência dos números naturais, o professor poderá explorar duas características importantes do número: seu aspecto cardinal e seu aspecto ordinal. O número cardinal indica quantos objetos há em uma coleção. O número ordinal, o lugar que o objeto ocupa na coleção: se é o primeiro, o segundo, o terceiro, etc. O professor tem algumas oportunidades de explorar esses dois aspectos dos números, em sua sala de aula. Por exemplo, na entrada, ele poderá pedir aos alunos que formem uma fila. Contando os alunos na fila, ele saberá quantos estão presentes naquele dia e o lugar que cada um ocupa na mesma. Os alunos poderão se organizar em fila, na *ordem crescente* (decrecente) de acordo com suas alturas, ou na ordem crescente (decrecente) conforme suas idades. Desse modo, os alunos aprenderão duas características importantes da seqüência numérica: as relações *ser maior que* e *ser menor que*. Fazendo essas relações, eles desenvolverão seu sentido numérico.

O trabalho com a seqüência numérica levará o aluno a identificar números próximos, outro aspecto importante para ele atribuir significado ao número. Por exemplo, que 14 *está entre* 13 e 15, ou que 13 é o *antecessor* de 14 e 15 é seu *sucessor*. Para Lima *et al.* (1997), a essência da caracterização dos números naturais está na palavra sucessor. De fato, observando a seqüência dos números naturais, identificamos uma Progressão Aritmética, cujo primeiro termo é um e de razão um, isto é, cada termo da sucessão é o anterior mais um e assim podemos escrever todos os números naturais. Esse trabalho com a seqüência numérica propicia, ainda, a percepção de que cada número natural tem um único sucessor e o número 0 (zero) não é sucessor de nenhum número natural. O estudo da seqüência numérica no início da escolarização introduz, informalmente, algumas idéias importantes sobre a estrutura do Sistema de Numeração Decimal que serão retomadas quando do estudo mais sistemático desse sistema.

Uma reta numérica é um recurso a mais para o professor representar a seqüência numérica. Uma reta numérica é um eixo, isto é, uma reta na qual se escolhe um ponto como origem, representado pelo 0 (zero) e uma unidade. A partir da origem e contando as unidades, marcam-se os números naturais no eixo, conforme exemplo a seguir:



Sugerimos que a primeira representação deve ser feita pelo professor: ele marcar os números naturais e introduzir a contagem de dois em dois, cinco em cinco, etc. Continuando, ele poderá representar, na reta numérica, só as dezenas, poderá começar a representar os números a partir de um determinado valor, escrever alguns números, solicitar que o aluno complete os números faltosos.

Ressaltamos, porém, que a compreensão do conceito de número não se esgota com este estudo. Ele será retomado ao longo da escolaridade do aluno, no momento de conhecer outros números e no momento de operar com eles.

2. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Desde cedo, o homem necessitou representar o resultado de uma contagem. Dados históricos nos mostram o longo caminho percorrido pelas diferentes representações dos números. Assim, a necessidade de contar acompanha o próprio desenvolvimento da humanidade em atendimento às necessidades sociais dos homens. Há indícios, por exemplo, de entalhes em ossos supostamente registrando quantidades, desde 20 000 a. C. Os primeiros algarismos de que se tem notícia foram usados pelos sumérios e teriam surgido por volta de 2 700 a. C. Documentos datados de 1 800 a. C. comprovam a existência de um sistema de numeração de base sessenta, conhecida pelos babilônios. (IFRAH, 1989). Essas datas são, evidentemente, aproximadas. Outros símbolos e outros sistemas apareceram em outros lugares e em outros momentos.

Quanto à origem dos nove algarismos significativos de nosso sistema de numeração, consideram-se as inscrições budistas na Índia, no século II a. C.. Não há, no entanto, indícios de que eles fossem regidos pelo princípio posicional. O século VI de nossa era é a época provável do surgimento do zero e de um sistema posicional de escrita dos números, entre os maias. Um documento, datado do ano de 595, traz o registro do uso de nove algarismos derivados das inscrições budistas e do uso de um sistema de numeração decimal com uma estrutura parecida com a nossa. No ano 825 de nossa era, o matemático persa al-Khowârisimî descreve, em seu tratado de aritmética, o sistema de numeração hindu, posicional, fazendo uso de um símbolo para o zero, o que significa que esse sistema já era usado antes dessa data. Certamente, esses algarismos chegaram à Europa trazidos pelos árabes, que invadiram a Península Ibérica no ano de 711, mas só foram difundidos no século XII. Em 1500, as regras atuais de cálculo com esses algarismos foram sedimentadas. (EVES; 1997).

Muito rudimentar, de início, o registro de uma contagem tornou-se mais complexo com a necessidade de contagem de grandes quantidades. Essa necessidade levou ao desenvolvimento dos sistemas de numeração, ou seja, a um conjunto de símbolos e de regras ligando esses símbolos. As regras variam de um sistema a outro, mas até pelo objetivo a que elas se propõem, a idéia básica utilizada por um sistema de numeração é a contagem por agrupamentos. Os agrupamentos de primeira ordem se associam para formar agrupamentos de segunda ordem e assim por diante. Se o número de elementos desses agrupamentos é o mesmo, ele vem a ser a *base* do sistema. (PONTE; SERRAZINA, 2 000).

Em cada sistema, as regras utilizadas para associar os símbolos vão determinar a organização desses símbolos no número e caracterizar o sistema como aditivo, multiplicativo ou de posição. O estudo de diferentes sistemas de numeração torna-se interessante, à medida que observamos as características de cada um e as comparamos com as características do sistema hindo-arábico de numeração decimal, utilizado atualmente. Todos os sistemas indicam vantagens e desvantagens. Interessante a esse respeito é comparar o sistema de numeração egípcio e o romano, com o Sistema de Numeração Decimal (SND) de base 10.

Com efeito, o sistema de numeração egípcio teria sido usado por volta de 3 400 a. C., era um sistema de base 10, aditivo e tinha símbolos para 1, 10,

Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Assim sendo, o número 2 358 se escreveria:



Já os algarismos do sistema de numeração romano são representados por letras (I = 1; V = 5; X = 10; L = 50; C = 100; D = 500 e M = 1 000), independentes umas das outras, justapostas. Os símbolos I, X, C e M podem se repetir apenas três vezes e os outros símbolos não se podem repetir. Um traço horizontal acima de um grupo de algarismos, multiplica o número correspondente por 1 000, dois traços multiplica por 1 000 000, etc.

Assim, a representação dos números 1626 e 1959, seria:

$$\text{MDCXXVI} = 1\ 000 + 500 + 100 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1626$$

$$\text{MCMLIX} = 1\ 000 + (1\ 000 - 100) + 50 + (10 - 1)$$

$$\text{MCMLIX} = 1\ 000 + 900 + 50 + 9 = 1\ 959. \text{ (MENDES, 2003, p. 55)}$$

No Sistema de Numeração Decimal, podemos escrever qualquer número natural utilizando apenas dez símbolos, ou seja, os algarismos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Na escrita de um número, esses algarismos se organizam em ordens: unidades, dezenas e centenas. As ordens vão formar as classes: unidade simples, milhar, milhão, etc. Esses algarismos representam valores diferentes dependendo da ordem que ocupam no número. Eles vão representar os agrupamentos de 10 e os agrupamentos de agrupamentos de 10, isto é, as potências de 10. Assim, temos:

- 1, uma unidade de primeira ordem;
- 10, uma unidade de segunda ordem ou 10 unidades de primeira ordem ou uma dezena;
- 100, uma unidade de terceira ordem ou 10 unidades de segunda ordem ou 10 dezenas ou uma centena;
- 1 000, uma unidade de quarta ordem ou 10 unidades de terceira ordem ou 10 centenas ou 100 dezenas ou uma unidade de milhar; etc.

Combinando esses agrupamentos segundo um princípio aditivo e multiplicativo, podemos escrever, por exemplo, o número 235 — $235 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 5 = 200 + 30 + 5$.

Assim, no Sistema de Numeração Decimal, um número é obtido pela soma dos valores relativos de seus algarismos.

Desse modo, podemos dizer que o sistema egípcio é aditivo num sentido diferente do nosso: o número é obtido pela soma dos valores dos símbolos utilizados. Essa característica do sistema egípcio facilitava, por exemplo, o cálculo da soma de dois números — era só juntar os símbolos de mesma ordem. Dez símbolos iguais eram substituídos por outro correspondente. Com isso, não havia necessidade de um algoritmo para adicionar dois números nem de se fazer a reserva, como na adição no Sistema de Numeração Decimal.

Vejamos como ficaria a soma de 26 com 37, no sistema egípcio e no SND.

$$\begin{array}{r} 26 = \text{IIIIII} \\ 37 = \text{IIIIIIIIII} \\ \hline 26 + 37 = \text{IIIIIIIIII} \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 26 \\ + 37 \\ \hline 63 \end{array}$$

O Sistema de Numeração Romano utilizava um princípio aditivo (num sentido diferente do nosso) e subtrativo que o tornava pouco prático para ser utilizado em contagens ou em processos operatórios. Tal fato nos leva a crer que ele era utilizado para registro. Ele é usado ainda hoje, para indicar os séculos e capítulos de livros, em visores de alguns relógios e para indicar a ordem cronológica de reis e de papas.

Posto isso, a comparação entre os três sistemas de numeração como visto anteriormente tem o objetivo de destacar as vantagens do nosso Sistema de Numeração Decimal-SND. Também conhecido como sistema hindu-arábico, ele utiliza, na sua estrutura, uma base e o valor posicional. É um sistema econômico que usa poucos símbolos na representação dos números, evitando sua repetição como acontece no sistema egípcio. Além disso, no sistema egípcio, as potências de 10 tinham símbolos especiais, até 10^6 , que precisavam ser memorizados, o que não acontece no SND.

Resumindo, as características do Sistema de Numeração Decimal (CENTURIÓN; 2006) são:

- com dez algarismos (símbolos), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, se escrevem todos os números naturais;
- é um sistema de *base dez*, uma vez que utiliza agrupamentos de dez unidades, as potências de 10;
- é *posicional*, no sentido de o mesmo algarismo representar valores diferentes, dependendo da posição que ele ocupa no número. Por exemplo, no número 232, o

primeiro 2 da direita para a esquerda representa duas unidades, enquanto o segundo dois representa duas dezenas ou $2 \times 10^2 = 200$ unidades. Dizemos que 200 é o valor relativo ou valor posicional do segundo 2;

- possui um símbolo, o *zero*, para guardar uma posição vazia. Essa é uma característica importante para um sistema posicional;

- é *multiplicativo*, significando que cada algarismo vale dez vezes o valor que teria se ocupasse a posição à direita dele. Por exemplo, no número 66, o primeiro 6 à direita vale seis unidades, enquanto o segundo seis vale $60 = 6 \times 10$ unidades, ou seja, seu valor relativo é 60;

- é *aditivo*, porque o valor do número é obtido pela adição dos valores relativos de seus algarismos. Por exemplo, podemos dizer que $236 = 200 + 30 + 6$. Escrito dessa forma, dizemos que 236 está decomposto nas suas diversas ordens e dizemos que 236 está decomposto na sua forma polinomial, escrevendo $236 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 6$.

A relação entre as ordens de um número — cada ordem vale dez vezes a ordem anterior —, que se deve ao princípio multiplicativo do nosso sistema de numeração, mantém-se, também, entre as unidades nos Sistemas Decimais de Medidas e, mais concretamente, entre as unidades do sistema monetário. Assim, as situações de troca entre valores — notas de maior valor e de menor valor, notas e moedas —, tão presente no dia-a-dia da criança, pode ser um recurso útil para o aprendizado da estrutura do Sistema de Numeração.

Por outro lado, o princípio multiplicativo da estrutura do SND ilustra naturalmente a multiplicação por 10 e pelas potências de 10. Multiplicar por 10, 100, 1000, significa deslocar cada uma das ordens do número uma, duas ou três posições para a esquerda. Por exemplo:

$$\begin{aligned}235 \times 10 &= 2\,335, \\235 \times 100 &= 23\,500, \\235 \times 1000 &= 235\,000.\end{aligned}$$

A compreensão da estrutura do sistema de numeração não se esgota com este estudo. Esta estrutura de organização deverá ser retomada em outros momentos da escolaridade do aluno. De início, podemos dizer que essa estrutura se mantém quando se escreve uma fração na sua forma decimal, e os algoritmos (técnicas operatórias) das operações são organizados levando-se em conta a estrutura do sistema de numeração. Por conseguinte, a base do sistema de numeração é fato determinante dos critérios de divisibilidade. Se a base do sistema de numeração fosse seis, por exemplo, outro seria o critério de divisibilidade por três.

3. OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

No conjunto dos números naturais definimos as operações fundamentais: a adição e sua inversa a subtração; a multiplicação e sua inversa a divisão. A partir da multiplicação, definimos a potenciação cujas inversas são a radiciação e a logaritmação (estas não serão objeto de estudo neste texto).

Uma *operação* definida no conjunto dos números naturais é uma lei que associa a quaisquer dois números naturais um terceiro número natural. Na seqüência, para indicar qualquer número natural, são usadas letras no lugar dos números.

Adição e multiplicação

A *adição* é uma operação que associa a dois números naturais quaisquer a e b , o número natural $a + b$ a sua soma. Assim, a adição associa aos números 4 e 7 a sua soma $4 + 7 = 11$. Com efeito, já está implícito na definição que a soma de dois números naturais é um número natural. Alguns autores referem-se a esse fato, dizendo que o conjunto dos números naturais é *fechado* em relação à adição.

A *multiplicação* é uma operação que associa a dois números naturais quaisquer a e b , o número natural $a \times b$ o seu produto. Assim, a multiplicação associa aos números 4 e 7 o seu produto $4 \times 7 = 28$. Como na adição, o produto de dois números naturais é um número natural, ou seja, já está implícito nessa definição que o conjunto dos números naturais é *fechado* em relação à multiplicação.

A adição e a multiplicação de números naturais gozam de propriedades, denominadas por Courant y Robbins (1964) *leis fundamentais da aritmética* e por Brumfiel, Eicholz e Shanks (1972) *princípios básicos* da adição e da multiplicação. Essas propriedades vão mostrar como se podem organizar os números em uma adição ou em uma multiplicação sem que o resultado se altere. Esclarecendo melhor:

Se a , b e c são números naturais, então, em

$a + b = b + a$ e $a \times b = b \times a$ temos a propriedade comutativa;
 $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ temos a propriedade associativa;
 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ temos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

É importante observarmos que a adição e a multiplicação são definidas para dois números naturais e que é a propriedade associativa que nos permite somar ou multiplicar três ou mais números naturais. Todas essas propriedades são muito úteis no cálculo mental e no cálculo por estimativas.

Por fim, citaremos outras propriedades da adição e da multiplicação que envolvem os números 0 e 1:

- . 0 é o elemento neutro da adição, isto é, a soma de qualquer número natural com 0 é o próprio número. Se a é um número natural, $a + 0 = 0 + a = a$.
- . 1 é o elemento neutro da multiplicação, isto é, o produto de qualquer número natural por 1 é o próprio número. Se a é um número natural, $a \times 1 = a$.

O produto de qualquer número natural por 0 é 0. Se a é um número natural, $a \times 0 = 0$.

Idéias associadas à adição e à multiplicação

A adição está associada à idéia de reunir, juntar, acrescentar. Tomando como exemplo uma sala de aula composta por 15 meninos e 13 meninas podemos pensar na idéia de juntar se nos interessa saber o total de alunos, ou seja: quantos alunos há na sala? E a resposta se obtém, pela reunião de meninos e meninas, $15 + 13 = 28$ alunos. Podemos, ainda, juntar ou acrescentar, modificando uma situação inicial como no problema: Pedro tem 10 bolinhas de gude e ganhou 7 no jogo; com quantas bolinhas ficou? A resposta é $10 + 7 = 17$ bolinhas.

A multiplicação está associada a diferentes idéias e para os alunos desenvolverem uma melhor compreensão dessa operação, eles deverão estar familiarizados com diferentes idéias como nos lembram Abrantes; Serrazina e Oliveira (1999):

- . a idéia mais comum corresponde à ação de somar parcelas iguais, ou seja, podemos representar uma soma de quatro parcelas iguais a 3 por um produto, isto é, $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$;
- . a multiplicação está associada à idéia de proporcionalidade. Uma situação traduzida por essa idéia poderia ser: um quilo de açúcar custa 3 reais. Quanto custarão 4 quilos? Quatro quilos custarão $4 \times 3 = 12$ reais;
- . outra idéia associada à multiplicação é a combinatória. Exemplo: Maria tem três saias e quatro blusas. De quantas maneiras Maria pode se vestir, usando essas blusas e essas saias? Como Maria pode combinar cada saia com as quatro blusas, temos: $3 \times 4 = 12$ e, assim, Maria pode se vestir de 12 maneiras diferentes. Um diagrama de árvore ilustra a situação. Se S_1, S_2 e S_3 são as três saias e B_1, B_2, B_3 e B_4 são as quatro blusas:

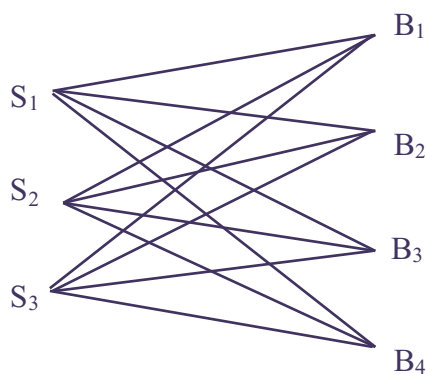


Figura 1. Diferentes formas de combinar três saias e quatro blusas

. uma configuração retangular também se traduz por uma multiplicação. Por exemplo, na sala de Carla, as carteiras estão dispostas em cinco filas, cada uma com seis carteiras. Quantas são as carteiras da sala de Carla? A resposta será dada pelo produto: $5 \times 6 = 30$;

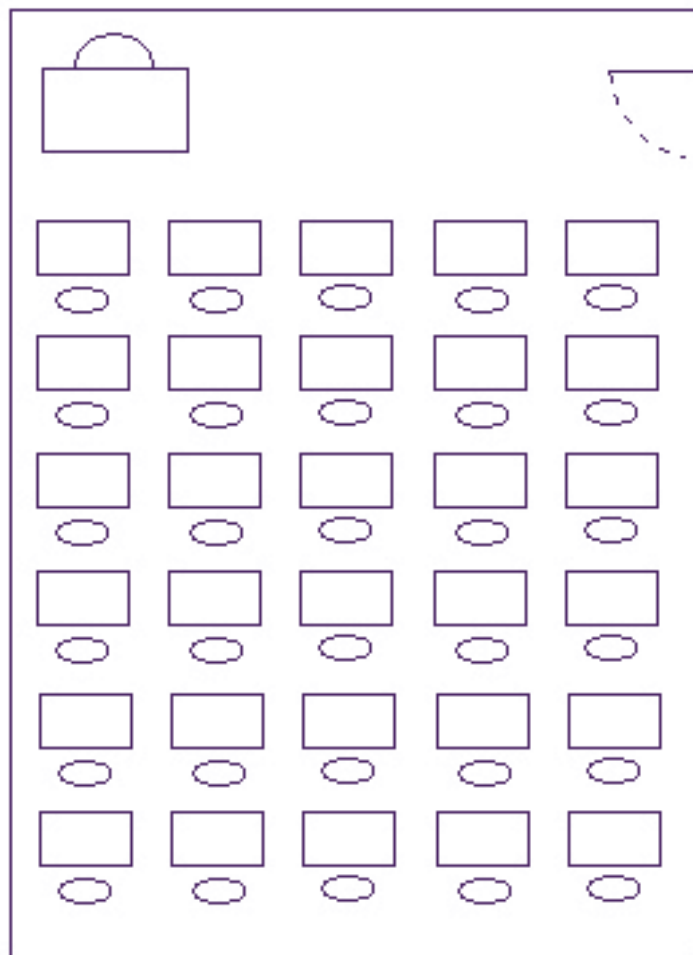


Figura 2. Exemplo de configuração retangular

· outra idéia associada à multiplicação envolve uma comparação. Por exemplo: Celeste recebe 45 reais por dia trabalhado e sua irmã Teresa recebe três vezes mais, trabalhando uma semana. Quanto Teresa recebe por semana? Resposta: Teresa recebe por semana $3 \times 45 = 135$ reais.

Operações inversas da adição e da multiplicação: subtração e divisão exata

Uma operação inversa *desfaz* o que a operação direta *faz*. (IMENES; LELLIS; 1998). Assim, se $6 + 7 = 13$, então $13 - 6 = 7$ e, como a adição é comutativa, temos também que $13 - 7 = 6$. Por isso, dizemos que a subtração é a operação inversa da adição. Da mesma forma, a divisão (exata) é a operação inversa da multiplicação. De fato, se $4 \times 9 = 36$, então $36 \div 4 = 9$ e $36 \div 9 = 4$. Nesse caso, dizemos que 36 é múltiplo de 4 e de 9 ou que 4 e 9 são divisores de 36. Em geral, se a , b e c são números naturais e se $a \times b = c$, dizemos que c é múltiplo de a e

de b , ou que a e b são divisores de c .

Podemos deduzir, então, que relacionar as operações com suas inversas será muito útil para verificar se os cálculos efetuados estão corretos, ou para *tirar a prova* da operação efetuada. Esse procedimento será muito útil também na memorização dos fatos básicos (fatos fundamentais, tabuada) das operações, já que envolve compreensão do aluno. Assim como mostramos nos exemplos acima, em vez de o aluno memorizar três fatos $6 + 7 = 13$, $13 - 6 = 7$, $13 - 7 = 6$ ou $4 \times 9 = 36$, $36 \div 4 = 9$, $36 \div 9 = 4$ ele memorizará apenas um — $6 + 7 = 13$ ou $4 \times 9 = 36$ —, desde que relacione os fatos da adição com os fatos correspondentes da subtração, ou os fatos da multiplicação com os fatos correspondentes da divisão.

Especialmente com relação à subtração, temos: se a e b são números naturais com $a \geq b$, então $a - b$ diferença entre a e b é o número que adicionado a b dá a . Isto é, $(a - b) + b = a$. Nesse caso, o termo a denominamos minuendo e b , subtraendo. Quanto à possibilidade de se efetuar a subtração, no conjunto dos números naturais, se $a < b$, não existe $a - b$ não é número natural. Por exemplo, com relação a $3 - 7$, podemos afirmar que não existe, no conjunto dos números naturais, um número que somado com 7 dê 3 .

O estudo da *divisão*, por sua vez, implica saber que: se a e b são números naturais, com $b \neq 0$, e se a é múltiplo de b , então a divisão (exata) de a por b é o número $a \div b$, quociente de a por b , que multiplicado por b dá a . Isto é, $(a \div b) \times b = a$. Nesse caso a é o dividendo, e b é o divisor. Quanto à possibilidade de se efetuar a divisão (exata), no conjunto dos números naturais, precisamos que a seja múltiplo de b , do contrário o resultado da divisão (exata) não é um número natural, ou seja, a divisão (exata) não é possível no conjunto dos números naturais. Seja, por exemplo calcular $8 \div 5$. Não existe nenhum número natural que, multiplicado por 5 , dê 8 . Essa impossibilidade desaparece na divisão com resto. Numa divisão, o divisor é sempre diferente de 0 , isto é, não existe divisão por 0 , e isso não é só no conjunto dos números naturais. Por outro lado, 0 pode ser dividido por (é múltiplo de) qualquer número natural $n \neq 0$; de fato, $0 \div n = 0$, pois qualquer que seja $n \neq 0$, $0 \times n = 0$.

Temos também que:

- qualquer número natural n pode ser dividido por 1 ou qualquer número natural n é múltiplo de 1 ; de fato, $n \div 1 = n$, pois $n \times 1 = n$;
- qualquer número natural n pode ser dividido por ele mesmo ou é múltiplo dele mesmo; de fato, $n \div n = 1$, pois $1 \times n = n$.

Idéias associadas à subtração e à divisão

Enquanto a adição está associada à ação de *acrescentar* — juntar, ganhar, chegar, etc. —, sua operação inversa, a subtração, está associada à ação de *tirar* — separar, perder, sair, etc. —. Assim, destacamos três idéias principais das situações-problema que envolvem uma subtração. Em nossa opinião, as três devem estar presentes nos problemas propostos aos alunos, para que eles construam o significado da subtração. São elas:

- a idéia de retirar. Por exemplo: Pedrinho tinha 25 figurinhas repetidas e deu 8 para seu colega. Com quantas figurinhas Pedrinho ficou? $25 - 8 = 17$ figurinhas.
- a idéia de completar. Por exemplo: no álbum de Pedrinho cabem 50 figurinhas. Ele já tem 39. Quantas figurinhas faltam para Pedrinho completar seu álbum? $50 - 39 = 11$ figurinhas.
- a idéia de comparar. Por exemplo: Pedrinho já tem 39 figurinhas coladas no seu álbum e Rodrigo tem 27. Quantas figurinhas Pedrinho tem a mais do que Rodrigo? $39 - 27 = 12$ figurinhas.

Das três, a idéia de comparação é a que traz mais dificuldades ao aluno, uma vez que a expressão *tem a mais* sugere uma adição, mas a solução do problema requer uma subtração. Com relação às idéias ligadas à ação de dividir, temos a idéia de partilha e a idéia de medida. A primeira refere-se à ação de dividir igualmente uma quantidade por um número. Por exemplo, a divisão de 20 balas para 5 crianças implica a operação $20 \div 5 = 4$, que é o que cada criança receberá: 4 balas. Essa é a idéia mais comum dos problemas envolvendo uma divisão. Quanto à divisão com a idéia de medida ocorre quando queremos saber quantos grupos podemos formar com uma determinada quantidade. (CENTURIÓN; 2006). Como exemplo podemos citar o seguinte problema: Dona Célia quer embalar 48 bombons em caixas com 12 bombons cada uma. Quantas caixas ela vai encher? $48 \div 12 = 4$ caixas. Nesse caso, queremos saber quantos grupos de 12 bombons cabem em 48 bombons, ou seja, estamos comparando grandezas de mesma natureza, o que caracteriza um problema de medida.

Há ainda a divisão não exata.

Divisão não exata ou divisão com resto

Em todos os exemplos analisados, as divisões eram exatas ou sem resto. Entretanto, nos dois exemplos dados, poderiam sobrar balas ou bombons. Poderíamos querer dividir 23 balas para as 5 crianças de modo que cada uma recebesse o mesmo número de balas e sobriam 3 balas, ou Dona Célia poderia querer embalar 50 bombons em caixas com 12 bombons e sobriam 2. Essas situações caracterizam uma divisão não exata ou divisão com resto. Nesses casos, escrevemos:

$$23 = 5 \times 4 + 3 \qquad \text{e} \qquad 50 = 12 \times 4 + 2$$

Em geral, se D é o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto, em uma divisão não exata, temos:

$$d = d \times q + r \text{ com } r < d$$

Daí:

- ao dividir 8 por 5, obtemos $q = 1$ e $r = 3$. De fato, $8 = 5 \times 1 + 3$;
- ao dividir 7 por 10, obtemos $q = 0$ e $r = 7$. De fato, $7 = 10 \times 0 + 7$.

Quando $r = 0$, temos que $d = d \times q$. Ou seja, a divisão exata é um caso particular da divisão não exata (com resto).

Assim:

- ao dividir 12 por 3, obtemos $q = 4$ e $r = 0$. De fato, $12 = 3 \times 4 + 0$ ou $12 = 3 \times 4$;
- ao dividir 0 por qualquer número natural $n \neq 0$, obtemos $q = 0$ e $r = 0$. De fato, $0 = n \times 0 + 0$ ou $0 = n \times 0$;
- ao dividir qualquer número natural n por 1, obtemos $q = n$ e $r = 0$. De fato, $n = 1 \times n + 0$ ou $n = 1 \times n$;
- ao dividir qualquer número natural $n \neq 0$ por ele mesmo, obtemos $q = 1$ e $r = 0$. De fato, $n = n \times 1$.

Técnicas operatórias

A técnica operatória de uma operação é a seqüência de ações efetuadas para se chegar ao seu resultado. (CARVALHO; 1995). Enquanto os problemas sobre as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão envolvem números pequenos, os alunos vão resolvê-los utilizando suas próprias estratégias de cálculo. Entretanto, quando os problemas envolvem números grandes, os alunos terão necessidade de utilizar técnicas operatórias (ou algoritmos ou contas) convencionais.

A organização dos algoritmos das operações fundamentais está estreitamente relacionada à estrutura do Sistema de Numeração Decimal e às propriedades das operações. De fato, quando operamos com os números naturais, buscamos quantas unidades, dezenas, centenas, etc. tem o resultado da operação. Justificar os algoritmos das operações é, portanto, mais um momento para aprofundarmos a compreensão da estrutura do nosso Sistema de Numeração.

A decomposição dos números nas suas diferentes ordens sugere-nos a organização do algoritmo (conta) da adição ou da subtração. Assim, para justificar o algoritmo da adição ou da subtração, escrevemos:

$$\begin{array}{l} 231 + 48 = (200 + 30 + 1) + (40 + 8) \\ \quad = 200 + (30 + 40) + (1 + 8) \\ \quad = 200 + 70 + 9 \\ \quad = 279 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 231 \\ + \quad 48 \\ \hline 279 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 148 - 25 = (100 + 40 + 8) - (20 + 5) \\ \quad = (100 + 40 + 8) - 20 - 5 \\ \quad = 100 + (40 - 20) + (8 - 5) \\ \quad = 100 + 20 + 3 \\ \quad = 123 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 148 \\ - \quad 25 \\ \hline 123 \end{array}$$

Usando a decomposição dos números, o professor explica também, a adição com *reserva* (vai um, vão dois, ... vão nove) e a subtração com *reagrupamento* (pedir emprestado).

Vejamos estes exemplos:

$$\begin{array}{r}
 235 + 48 = (200 + 30 + 5) + (40 + 8) \\
 = 200 + (30 + 40) + (5 + 8) \\
 = 200 + (30 + 40) + 13 \\
 = 200 + (30 + 40) + (10 + 3) \\
 = 200 + (30 + 40 + 10) + 3 \\
 = 200 + 80 + 3 \\
 = 283
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 235 \\
 + \underline{48} \\
 283
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 145 - 28 = (100 + 40 + 5) - (20 + 8) \\
 = 100 + (40 - 20) + (5 - 8) \\
 = 100 + (40 - 10 - 20) + 10 + (5 - 8) \\
 = 100 + (30 - 20) + (15 - 8) \\
 = 100 + 10 + 7 \\
 = 117
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 315 \\
 145 \\
 - \underline{28} \\
 117
 \end{array}$$

Com essa decomposição dos números, o professor, entendendo como o algoritmo se organiza, poderá identificar um repertório básico de fatos numéricos que serão utilizados nas adições e subtrações. (BRASIL; 1997). Esses fatos básicos tanto podem ser os fatos fundamentais (tabuada: $5 + 8 = 13$, $15 - 8$, etc.) como fatos do tipo: $10 + 5 = 15$; ou do tipo, se $4 + 3 = 7$, então $40 + 30 = 70$, $400 + 300 = 700$, etc.

Para os alunos, o professor poderá utilizar, como recurso didático para justificar os algoritmos da adição e da subtração, o Quadro Posicional-QP (antigo Quadro Valor de Lugar-QVL, também conhecido como sapateira ou quadro de pregas).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL; 1997) justificam também uma técnica operatória muito utilizada para subtrair dois números naturais: a subtração por compensação que se efetua *de baixo para cima*. Ela se baseia na propriedade da invariância da diferença de dois números — somando-se o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo, a diferença não se altera. Assim, em $145 - 28$, somamos 10 aos dois termos da subtração:

$$\begin{array}{r}
 145 - 28 = (100 + 40 + 5) - (20 + 8) \\
 = (100 + 40 + 10 + 5) - (10 + 20 + 8) \\
 = (100 + 40) - 30 + (15 - 8) \\
 = 100 + (40 - 30) + 7 \\
 = 100 + 10 + 7 \\
 = 117
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 145 \\
 - \underline{28} \\
 117
 \end{array}$$

Chamamos a esse processo de subtração por compensação (*de baixo para cima*), porque, ao fazer a conta, buscamos o que falta ao subtraendo para completar o minuendo. Por exemplo, fazendo oito para 15 dá 7 e vai 1; 1 mais 2 dá 3, para 4 dá 1; e desce o 1 das centenas. Alguns professores consideram esse processo de cálculo mais fácil de ensinar

aos alunos, mas sua justificativa é mais difícil de explicar do que o processo anterior.

Para justificar o algoritmo da multiplicação, utilizamos a decomposição dos números e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Assim, 131×5 fica:

$$\begin{aligned}
 131 \times 5 &= (100 + 30 + 1) \times 5 \\
 &= 100 \times 5 + 30 \times 5 + 1 \times 5 \\
 &= 500 + 150 + 5 \\
 &= 500 + 100 + 50 + 5 \\
 &= 600 + 50 + 5 \\
 &= 655
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 135 \\
 \times 5 \\
 \hline
 5 \quad 5 \times 1 \\
 150 \quad 5 \times 30 \\
 \underline{500} \quad 5 \times 100 \\
 655
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 274 \times 28 &= (200 + 70 + 4) \times (20 + 8) \\
 &= (200 + 70 + 4) \times 20 + (200 + 70 + 4) \times 8 \\
 &= (200 + 20 + 70 \times 20 + 4 \times 20 + (200 \times 8 + 70 \times 8 + 4 \times 8)) \\
 &= (4000 + 1400 + 80) + (1600 + 560 + 32) \\
 &= 5480 + 2192 \\
 &= 7672
 \end{aligned}$$

No dispositivo prático, essas somas parciais aparecem como:

$$\begin{array}{r}
 274 \\
 \times 28 \\
 \hline
 2192 \quad 8 \times 274 \\
 \underline{5480} \quad 20 \times 274 \\
 7672
 \end{array}$$

Na prática, o 0 da segunda parcela da conta — $5480 = 20 \times 274$ — não é colocado e o $8 = 2 \times 4$ é escrito embaixo do algarismo das dezenas, ficando vago o lugar das unidades.

Para explicar o algoritmo da divisão, começaremos dividindo, por exemplo, 639 (dividendo) por 3 (divisor). Temos que:

$$639 \div 3 = (600 + 30 + 9) \div 3 = 600 \div 3 + 30 \div 3 + 9 \div 3 = 200 + 10 + 3 = 213.$$

No dispositivo prático ficaria:

	Pelo processo longo:		Pelo processo curto:
	$639 \overline{) 3}$		$63 \overline{) 3}$
$(2 \times 3 = 6)$	$\underline{-6}$	213	03 213
		03	09
$(1 \times 3 = 3)$	$\underline{-3}$	09	0
		0	
$(3 \times 3 = 9)$	$\underline{-9}$		
	0		

Mas, se fosse $582 \div 4$, teríamos:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 (1 \times 4 = 4) \quad \underline{-4} \\
 (4 \times 4 = 16) \quad \underline{-16} \\
 (5 \times 4 = 20) \quad \underline{-20} \\
 \quad \quad \quad 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 582 \overline{) 4} \\
 \underline{145} \\
 18 \\
 \underline{22} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Resta-nos tratar do caso em que não podemos dividir o algarismo da maior ordem do dividendo pelo divisor. Por exemplo, dividir 1385 por 7. Vamos ilustrar somente o processo curto. Como não podemos dividir 1 milhar por 7, o que significa que o quociente dessa divisão não vai ter a ordem unidade de milhar, dividimos 13 centenas por 7 e continuamos operando como anteriormente.

$$\begin{array}{r}
 13'85 \overline{) 7} \\
 \underline{68} \quad 197 \\
 55 \\
 \underline{6}
 \end{array}$$

Observar e explicar como se organizam os algoritmos das operações, nos leva a retomar, em outro contexto, alguns fatos relativos à estrutura do Sistema de Numeração Decimal, já estudados. São eles: a composição e decomposição de um número nas suas diferentes ordens e o cálculo das dezenas, centenas, milhares, etc. que compõem um número. Por exemplo: $1385 = 1000 + 300 + 80 + 5$; o número 1385 tem 13 centenas ou 138 dezenas.

A operação de potenciação nos possibilitará outra forma de representar a decomposição de um número natural, usando as potências de 10. É o que veremos no próximo tópico.

Potenciação

Dizemos que a área de um quadrado é dada pelo *quadrado* do lado e escrevemos $A = 1^2$ ou $A = 1 \times 1$, significando que, para achar a área de um quadrado, multiplicamos o lado do quadrado por ele mesmo. Do mesmo modo, dizemos que o volume do cubo é dado pelo *cubo* de sua aresta e escrevemos $V = a^3$ ou $V = a \times a \times a$, significando que, para achar o volume do cubo, multiplicamos a aresta do cubo por ela mesma, três vezes. Vêm daí os nomes especiais que são dados a essas potências: quadrado de cinco, $5^2 = 5 \times 5$, ou cubo de sete, $7^3 = 7 \times 7 \times 7$.

Em geral, se a e n são números naturais, com $n \geq 2$, a n -ésima potência de a é o produto de n fatores iguais a a , $a^n = a \times a \times \dots \times a$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$, para $a \neq 0$ e $a^1 = a$.

A potenciação goza das seguintes propriedades que são facilmente verificadas com o uso da definição apresentada acima e das propriedades da multiplicação.

Se a , b e n são números naturais, então:

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

A primeira dessas propriedades se demonstra usando a definição de potência: em a^n , temos n fatores iguais a a , em a^m , temos m fatores iguais a a . Logo, em $a^n \times a^m$, temos $n + m$ fatores iguais a a e $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Para demonstrar a segunda, lembramos que, por definição, em $(a \times b)^n$, temos n fatores iguais a $a \times b$, isto é, $(a \times b)^n = (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b)$. Usando a propriedade associativa e a propriedade comutativa, algumas vezes, juntamos os n fatores iguais a a e os n fatores iguais a b . Assim, $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

Demonstramos a terceira propriedade, lembrando que, por definição, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times \dots \times a^m$, n fatores iguais a a^m . Portanto, usando a primeira propriedade, podemos escrever que $(a^m)^n = a^m \times a^m \times \dots \times a^m = a^{m+m+\dots+m} = a^{n \times m}$, pois somamos n parcelas iguais a m .

Na definição da potenciação, separam-se os casos a^0 e a^1 , por ser estranho ter um produto de 0 fatores ou um produto de 1 fator. Convenciona-se que $a^0 = 1$, para $a \neq 0$ e que $a^1 = a$, para que se mantenham as propriedades da potenciação. De fato, se a e n são números naturais e $a \neq 0$, temos que $a^n = a^{n+0} = a^n \times a^0$, para que se mantenha a igualdade, devemos ter $a^0 = 1$. Do mesmo modo, $a^n = a^{1 \times n} = (a^1)^n$ e para que se mantenha a igualdade, devemos ter $a^1 = a$.

Vejam algumas aplicações das propriedades acima. As potências de 10 são usadas para abreviar a escrita de números muito grandes. Por exemplo, podemos escrever 12×10^5 em vez de 1 200 000. Para multiplicar esse número por 5 000, escrevemos $12 \times 10^5 \times 5 \times 10^3 = 12 \times 5 \times 10^5 \times 10^3 = 60 \times 10^8 = 6000000000$. Ou seja, para multiplicar um número por uma potência de 10, basta acrescentar à direita do número, um número de zeros igual ao expoente. Por exemplo: $15 \times 1000 = 15 \times 10^3 = 15000$.

Na composição e decomposição dos números naturais nas suas diferentes ordens, podemos representar 1 573 na sua *forma polinomial* por: $1573 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10 + 3$. Usaremos esse fato e as propriedades da potenciação para representar o número 157 300, na sua forma polinomial.

Temos que: $1573 \times 100 = 1573 \times 10^2 = (1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10 + 3) \times 10^2$.

Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, podemos escrever:

$$1573 \times 100 = 1 \times 10^3 \times 10^2 + 5 \times 10^2 \times 10^2 + 7 \times 10 \times 10^2 + 3 \times 10^2.$$

E usando a primeira propriedade da potenciação, temos:

$$1573 \times 100 = 1 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 = 157\,300.$$

Cálculo mental e estimativas

O exercício de cálculo mental presente em sala de aula, de um modo geral, está ligado à memorização dos fatos básicos relativos às operações. Aqui estamos chamando de *cálculo mental* às estratégias não-convencionais de cálculo que o aluno utiliza para resolver determinado problema. (PARRA; 1996).

É difícil prever a variedade dessas estratégias utilizadas pelos alunos uma vez que elas mudam de uns para outros e vão depender do grau de familiaridade de cada aluno com o conhecimento matemático. Justamente aí reside a importância dessa estratégia de cálculo e a necessidade de ela ser incentivada em sala de aula.

Ao exercitar o cálculo mental em sala de aula, o aluno deixa transparecer como está pensando. É o momento de o professor incentivar a busca de estratégias pessoais de cálculo e promover a interação entre as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos. Assim, os alunos poderão comparar os cálculos realizados pelos colegas. Por exemplo, o cálculo de

$$76 - 32 = (70 - 30) + (6 - 2) = 40 + 4 = 44$$

poderá também ser realizado pelo colega, da seguinte forma:

$$76 - 10 \quad 66 - 10 \quad 56 - 10 \quad 46 - 2 = 44$$

Daí, eles poderão discutir o porquê do mesmo resultado. Dessa forma, o professor estará ampliando as possibilidades de interação dos alunos com o cálculo numérico. (PARRA; 1996).

Outro aspecto importante dos cálculos mentais se liga às situações do dia-a-dia. Por exemplo, é necessário que o aluno tenha competência para avaliar um resultado aproximado de gastos efetuados em um supermercado, para receber troco, para programar o dinheiro que deverá ser retirado do banco para fazer pagamentos, etc. Ou seja, competência para fazer estimativas. Nos cálculos desenvolvidos na escola, fazer estimativas tem o objetivo de verificar e controlar os resultados obtidos nas contagens, nas medidas ou nas operações, avaliando a sua adequação e plausibilidade. (BRASIL; 1997). Outro objetivo seria facilitar o cálculo mental.

Em diversas situações do dia-a-dia e em práticas escolares que exigem aproximações e estimativas, os alunos fazem uso da composição e decomposição de números, das propriedades das operações e de noções de medidas, como nos seguintes exemplos:

Pedro tem R\$ 2,20 para merendar e avalia o que pode comprar na cantina, analisando os valores dos itens anunciados:

Pastel.....	R\$ 0,80
Empada	R\$ 1,00
Coxinha	R\$ 1,00
Refresco (copo)	R\$ 0,70
Refri (copo)	R\$ 1,10

Então, o que Pedro pode comprar?

· Tenho R\$ 10,00 para pedir pão e leite na padaria. O leite custa R\$ 1,80 a caixa e o pãozinho custa R\$ 0,30 a unidade. A padaria cobra uma taxa de entrega de R\$ 2,00.

Quantos pãezinhos e quantas caixas de leite posso comprar?

· Para somar $125 + 78 + 15 + 12$, Marta faz $(125 + 15) + (78 + 12) = 140 + 90 = 230$.

Já Leandro pensou em $(120 + 70 + 10 + 10) + (5 + 8 + 5 + 2) = 210 + 20 = 230$. Outros poderão desenvolver outras estratégias.

· O ladrilho 15 x 15 está custando, na loja, R\$ 12,99 o metro quadrado. Quanto vou pagar por 20 metros quadrados?

Concluindo, queremos ressaltar, aqui, que é importante fornecer aos alunos, ao longo de sua escolaridade, a oportunidade de desenvolver o cálculo mental e as estimativas. Para tal, eles vão utilizar recursos próprios de solução, desenvolvendo sua criatividade e sua relação com os números e com as operações. O cálculo mental e as aproximações e estimativas vão prepará-los para o aprendizado dos processos canônicos de cálculo que são mais gerais e aplicáveis a um número mais abrangente de problemas.

4. DIVISIBILIDADE

Os critérios de divisibilidade estão intimamente relacionados à estrutura de nosso sistema de numeração. Desenvolver, portanto, esse estudo terá não só o objetivo de ampliar o conhecimento das relações numéricas, mas também o de melhorar o aprendizado da estrutura do Sistema de Numeração Decimal.

Ao abordar a possibilidade de efetuar a divisão exata no conjunto dos números naturais, referimo-nos aos múltiplos e divisores de um número natural. Vamos retomá-los aqui, para falar sobre os critérios de divisibilidade.

Múltiplos e divisores

Em toda multiplicação, o produto é múltiplo de cada um dos fatores e cada um dos fatores é divisor do produto. Dizemos também que o produto é divisível por cada um dos fatores. Assim, 12 é múltiplo de 2, de 3, de 4 e de 6 porque $12 = 2 \times 6$ e $12 = 3 \times 4$ ou 12 é divisível por 2, 3, 4 e 6 e 2, 3 e 4 são divisores de 12. Dizemos ainda que 2 divide 12 e escrevemos $2|12$; 3 divide 12 e escrevemos $3|12$; 4 divide 12 e escrevemos $4|12$ e 6 divide 12 e escrevemos $6|12$.

Em decorrência dessas afirmações, podemos dizer que:

- 0 é múltiplo de qualquer número natural a uma vez que todo número natural multiplicado por 0 dá 0. Isto é, se a é um número natural, $0 = a \times a$;
- todo número natural a é múltiplo dele mesmo uma vez que o produto de todo número natural por 1 dá o próprio número. Isto é, se a é um número natural, $a = 1 \times a$;
- dessa segunda afirmação, concluímos que todo número natural a é divisor dele mesmo e que 1 é divisor de qualquer número natural a .

As justificativas para os critérios de divisibilidade, apóiam-se nas seguintes propriedades relativas aos divisores de um número natural:

- Se um número é divisor de um dos fatores de uma multiplicação, então ele é divisor do produto.

Seja por exemplo: $60 = 4 \times 15$, 3 é divisor de 15, logo 3 é divisor de 60. De fato, podemos escrever que $60 = 4 \times 3 \times 5$.

- Se um número é divisor de todas as parcelas de uma adição, então ele é divisor da soma.

Seja por exemplo: $24 = 18 + 6$; 3 é divisor de 18 e de 6. Logo, podemos escrever que $24 = 3 \times 6 + 3 \times 2 = 3(6 + 2)$ e 3 é divisor de 24.

- Se uma adição tem duas parcelas e se um número divide a soma e uma das parcelas, então ele divide a outra parcela.

Seja a adição: $45 = 30 + 15$. Temos que 5 é divisor de 45 e de 30, então 5 é divisor de 15. De fato: $15 = 45 - 30 = 5(9 - 6)$ e 5 é divisor de 15.

Números primos e compostos

Números primos são os números naturais, maiores que 1, que só têm dois divisores 1 e ele mesmo. Os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. são números primos. Se um número natural não é primo, ele é composto. 15 é um número composto, ele tem quatro divisores, a saber 1, 3, 5 e 15.

Segundo Imenes & Lellis (1998), o nome *primo* vem do latim e significa primeiro, certamente uma alusão ao fato de que com os números primos podemos formar todos os outros números naturais, por multiplicação. O que nos garante isso é o Teorema Fundamental da Aritmética, segundo o qual, todo número natural $n > 2$, ou é primo ou pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores. De fato, o que o teorema está dizendo é que todo número natural pode ser decomposto em fatores primos. Como 36 é um número composto, podemos escrevê-lo como um produto de fatores primos, ou seja, $36 = 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$. Dizemos também que o número 36 está fatorado. Simplificando a notação, escrevemos $36 = 2^2 \times 3^2$.

Números pares e ímpares

Como os únicos restos possíveis da divisão de um número natural por 2 são 0 e 1, podemos separar o conjunto dos números naturais em dois grandes blocos: os números que deixam resto 0 quando divididos por 2, também denominados números pares e os números que deixam resto 1 quando divididos por 2, chamados números ímpares.

- São números pares: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, etc. Os números pares podem ser escrito na forma $2n$, com n natural qualquer, indicando que todo número par é o dobro de algum número natural.
- São números ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, etc. Os números ímpares podem ser escritos na forma $2n + 1$, com n natural qualquer.

Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum

Relacionado ao estudo de múltiplos e divisores, aparecem dois conceitos que serão muito importantes no estudo dos Números Racionais: o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números naturais.

Para simplificar uma fração, precisamos dividir o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número. Esse número será, portanto, um fator comum ou um divisor comum do numerador e do denominador. Por exemplo: na fração $\frac{6}{8}$, 2 é divisor comum de 6 e 8, ou é um fator comum de 6 e 8. Assim, podemos substituir essa fração por outra, de termos mais simples, dividindo 6 por 2 e 8 por 2: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Para somar duas frações de denominadores diferentes, devemos substituir as frações, por duas outras equivalentes e de mesmo denominador. Esse denominador comum será um múltiplo comum dos denominadores das frações dadas. Assim, para somar as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, procedemos da seguinte forma: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$; 12 é um múltiplo comum de 4 e 3.

Com efeito, o estudo das frações, demanda o conhecimento do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum de dois números naturais.

Para obtermos o máximo divisor comum de dois números naturais, por exemplo 18 e 24 devemos proceder da seguinte maneira:

- divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 e 18;
- divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24;
- divisores comuns: 1, 2, 3 e 6;
- maior divisor comum: 6. Dizemos que o máximo divisor comum de 18 e 24 é 6 e escrevemos $m.d.c.(18, 24) = 6$. Observamos que os outros divisores comuns de 18 e 24, 1, 2, e 3 são divisores de 6.

Podemos também calcular o máximo divisor comum de dois números, decompondo-os em fatores primos. Por exemplo, para os números 18 e 24, procedemos da seguinte maneira: primeiro fatoramos os dois números: $18 = 2 \times 3^2$ e $24 = 2^3 \times 3$; daí escolhemos os fatores comuns, com os menores expoentes; temos que o $m.d.c.(18, 24) = 2 \times 3$. Por que só os fatores comuns? Por que com os menores expoentes? Porque o número assim formado será um divisor comum dos dois números e será o maior possível, nessas condições.

Já para calcularmos o mínimo múltiplo comum de dois números naturais, por exemplo dos números 12 e 15, devemos seguir os seguintes passos:

Para os números 12 e 15, temos:

- múltiplos de 12: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...;
- múltiplos de 15: 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...;
- múltiplos comuns: 0, 60, 120, ...;
- menor múltiplo comum maior que 0: 60. Dizemos que o Mínimo Múltiplo Comum de 12 e 15 é 60 e escrevemos $m.m.c.(12, 15) = 60$. Observamos que todos os outros múltiplos comuns de 12 e 15 são múltiplos de 60.

Para calcular o Mínimo Múltiplo Comum de 12 e 15, pelo processo da decomposição dos números em fatores primos, procedemos da seguinte maneira: fatoramos os dois números, $12 = 2^2 \times 3$ e $15 = 3 \times 5$; tomamos todos os fatores com os maiores expoentes. Assim, temos o $m.m.c.(12, 15) = 2^2 \times 3 \times 5$. Por que todos os fatores? Por que com os maiores expoentes? Porque o número assim formado será um múltiplo comum dos números 12 e 15, e será o menor possível, nessas condições.

Critérios de divisibilidade

Os critérios de divisibilidade são regras práticas que nos permitem saber se um número é divisível por outro, sem que seja necessário efetuar a divisão. (IMENES; LELLIS; 1998). Conhecer os critérios de divisibilidade nos economizará tempo no momento de reconhecer os divisores de um número, por exemplo, para simplificar uma fração. Outro aspecto que torna importante o estudo dos critérios de divisibilidade é sua estreita ligação com a estrutura do Sistema de Numeração Decimal. Com isso, queremos dizer que, para justificar esses critérios, devemos decompor os números nas suas diversas ordens. Cada um desses critérios se apresenta como uma proposição e pode ser demonstrado¹.

Posto isto, eis alguns critérios de divisibilidade de alguns números, acompanhados de suas justificativas. Em todos os critérios, entenda-se que estamos nos referindo a números naturais.

a) Critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10

- Um número é divisível por 2 se terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8; ou, um número é divisível por 2 se o algarismo das unidades for um número par; ou ainda, um número é divisível por 2, se o algarismo das unidades for um número divisível por 2.
- Um número é divisível por 5 se terminar em 0 e 5; ou, um número é divisível por 5 se o algarismo das unidades for um número divisível por 5.
- Um número é divisível por 10 se terminar em 0; ou um número é divisível por 10 se o algarismo das unidades for 0.

Não é por acaso que o critério de divisibilidade por 2, 5 e 10 é o mesmo. A explicação está no fato de 2 e 5 serem divisores de 10.

Para ornar essa idéia mais clara, tomemos o número 1 572 e mostremos que ele é divisível por 2. Assim, temos que:

$$1572 = 1 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 2;$$

$1\ 572 = 10(1 \times 100 + 5 \times 10 + 7) + 2$, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Como escrevemos acima, 1 572 é a soma de duas parcelas em que a primeira $10(1 \times 100 + 5 \times 10 + 7)$ é divisível por 2 (o fator 10 é divisível por 2) e a segunda 2, também é divisível por 2. Logo, 1 572 é divisível por 2.

A decomposição do número 1 572 nos mostra que 1 572 não é divisível por 5. De fato, apesar de a primeira parcela $10(1 \times 100 + 5 \times 10 + 7)$ ser divisível por 5 (o fator 10 é divisível por 5), a segunda parcela 2 não é divisível por 5.

A mesma afirmação serve para justificar que 1 572 não é divisível por 10.

¹ Não incluiremos neste texto as demonstrações formais, mas daremos uma justificativa para todos eles. Apesar de todos serem bastante conhecidos, nem sempre eles são justificados nem são associados à estrutura do SND.

Já o número 36 725 é divisível por 5, mas não é divisível por 2 e não é divisível por 10. De fato,

$$36\ 725 = 3 \times 10\ 000 + 6 \times 1\ 000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 5 = 10(3 \times 1\ 000 + 6 \times 100 + 7 \times 10 + 2) + 5$$

O número 2 380 é divisível por 10. De fato, podemos decompor 2 380 em duas parcelas, todas as duas divisíveis por 10. Assim, temos:

$$\begin{aligned}2\ 380 &= 2\ 000 + 300 + 80 + 0 = 2 \times 1\ 000 + 3 \times 100 + 8 \times 10 + 0 \\2\ 380 &= 10(2 \times 100 + 3 \times 10 + 8) + 0\end{aligned}$$

Como 2 e 5 são divisores de 10, temos que as duas parcelas são também divisíveis por 2 e 5. Assim, o número 2 380 é também divisível por 2 e por 5.

b) Critérios de divisibilidade por 4 (2^2), 25 (5^2) e 100 (10^2)

Não é usual encontrar critérios de divisibilidade por 4, 25 e 100. Mas, como eles se justificam como os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10, merecem ser descritos aqui.

- Um número é divisível por 4 se os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 4.
- Um número é divisível por 25 se os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 25.
- Um número é divisível por 100 se os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 100. Melhor dizendo: um número é divisível por 100 se ele terminar em 00.

A forma de justificar esses critérios é a mesma apresentada anteriormente, com os devidos ajustes.

Assim sendo, o número 32 675, por exemplo, é divisível por 25, porque ele termina em 75, que é divisível por 25. De fato, temos que:

$$\begin{aligned}32\ 675 &= 3 \times 10\ 000 + 2 \times 1\ 000 + 6 \times 100 + 7 \times 10 + 5 \\32\ 675 &= 100(3 \times 100 + 2 \times 10 + 6) + 75\end{aligned}$$

E 32 675 é a soma de duas parcelas $100(3 \times 100 + 2 \times 10 + 6) + 75$ e 75. 25 divide a primeira parcela porque é divisor de 100 e divide a segunda porque é divisor de 75, logo 25 divide 32 675. Dizemos, também, que 32 675 é divisível por 25.

32 675 não é divisível por 4 porque 75 não é divisível por 4. 32 675 não é divisível por 100 porque 75 não é divisível por 100.

Esse critério se estende às potências de 8 (2^3), 125 (5^3) e 1 000 (10^3) e se justifica da mesma forma que os critérios anteriores, com os devidos ajustes.

c) Critérios de divisibilidade por 9 e por 3

- Um número é divisível por 9 se a soma de algarismos der um número divisível por 9.
- Um número é divisível por 3 se a soma de algarismos der um número divisível por 3.

A justificativa desses critérios também se baseia na estrutura de nosso sistema de numeração. Tomando, como exemplo, o número 2 457, podemos dizer que ele é múltiplo de 9. De fato, podemos escrever:

$$2\ 457 = 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 7 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

E como $10 = 9 + 1$, escrevemos:

$2\ 457 = 2(9 + 1)^3 + 4 \times (9 + 1)^2 + 5(9 + 1) + 7$ e, desenvolvendo o cubo e o quadrado da soma, temos:

$$2\ 457 = 2 \times (9^3 + 3 \times 9^2 \times 1 + 3 \times 9 \times 1^2 + 1^3) + 4 \times (9^2 + 2 \times 9 \times 1 + 1^2) + 5 \times (9 + 1) + 7$$

$$2\ 457 = 2 \times 9^3 + 2 \times 3 \times 9^2 + 4 \times 9^2 + 2 \times 3 \times 9 + 4 \times 2 \times 9 + 5 \times 9 + 2 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 7$$

$$2\ 457 = 9(2 \times 9^2 + 2 \times 3 \times 9 + 4 \times 9 + 2 \times 3 + 4 \times 2 + 5) + 2 + 4 + 5 + 7$$

Assim, 2 457 é a soma de duas parcelas tais que a primeira é um número múltiplo de 9, $9(2 \times 9^2 + 2 \times 3 \times 9 + 4 \times 9 + 2 \times 3 + 4 \times 2 + 5)$ e a segunda é a soma dos algarismos do número $2 + 4 + 5 + 7 = 18$, que é um múltiplo de 9. Logo, 2 457 é múltiplo de 9.

Essa justificativa serve também para o critério de divisibilidade por 3 uma vez que 3 é divisor de 9 e, portanto, é divisor da primeira parcela da soma acima. Portanto, se a soma dos algarismos do número for divisível por 3, o número também será divisível por 3. Evidentemente, todo número divisível por 9 é divisível por 3. Assim, temos que 2 457 é também divisível por 3.

Afinal, podemos dizer que todos os critérios de divisibilidade se baseiam no fato de o nosso sistema de numeração ter base 10. Em um sistema de numeração com uma base diferente de 10, esses critérios seriam diferentes.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ministério da Educação-Departamento da Educação Básica/Portugal. *A Matemática na Educação Básica*. ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I (Elab.). Lisboa: Colibri – Artes Gráficas, 1999.

BRUMFIEL, Charles; EICHOLZ, Robert; SHANKS, Merrill. *Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1972.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9ª ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

CARVALHO, Dione Lucchesi. *Metodologia do Ensino da Matemática*. 2ª edição. São Paulo: Cortez. 1995.

CENTURIÓN, Marília. Conteúdo e Metodologia da Matemática: Números e Operações. *Série Didática – Classes de Magistério*. 2ª ed. São Paulo, SP: Scipione, 2006.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *Qué es la Matemática?* 4ª ed. Madrid: Aguilar, 1964.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 2ª ed. Campinas, SP: UNICAMP, 1997.

IFRAH, Georges. *Os números: história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

IMENES, Luiz Márcio, LELLIS, Marcelo. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998.

LIMA *et al.* A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1. *Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras Histórias. *Coleção do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

MENDES, Iran Abreu. Antropologia dos números: Significado Social, Histórico e Cultural. In Sérgio Nobre (Org.) *Coleção História da Matemática para Professores (Prepint)*. Rio Claro, SP: SBHM, 2003.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PARRA, Cecília. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.) *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PONTE, João Pedro; SERRAZINA, Maria de Lurdes. *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.



ORIENTAÇÃO DE ESTUDO

ATIVIDADE 1

Citar cinco fatos e/ou situações do cotidiano que envolvem os números.

ATIVIDADE 2

Escreva nos parênteses, 1 se o número aparece na frase com a função de quantificar e 2 se ele aparece com a função de ordenar.

- () O prédio em que eu moro tem doze andares.
- () Na garagem do prédio podemos estacionar quinze carros.
- () Meu apartamento fica no quinto andar.
- () O prédio tem quatro apartamentos por andar.
- () No décimo andar mora um casal de idosos.
- () No primeiro andar fica o salão de festas do prédio.

ATIVIDADE 3

Considere o número natural 4 703.

- a) Qual o algarismo que ocupa a ordem das centenas? Dê seu valor relativo no número e seu valor absoluto.
- b) Qual é o nome da ordem ocupada pelo algarismo 4?
- c) Quantas unidades simples tem esse número? Quantas dezenas? Quantas centenas?
- d) Escreva a decomposição desse número nas suas diferentes ordens, de duas maneiras diferentes.

ATIVIDADE 4

Complete as lacunas, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, de modo a tornar as igualdades verdadeiras:

- a) $3 \times (7 + 5) = \underline{\quad} + \underline{\quad}$
- b) $9 \times (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = 9 \times 4 + 9 \times 6$
- c) $10 \times (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = \underline{\quad} \times 2 + \underline{\quad} \times 8$
- d) $(\underline{\quad} + \underline{\quad}) \times 5 = 7 \times \underline{\quad} + 11 \times \underline{\quad}$

ATIVIDADE 5

Explique como você poderia usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para resolver as seguintes multiplicações mentalmente.

- a) $53 \times 4 =$
- b) $120 \times 6 =$

ATIVIDADE 6

A soma de dois números é 852 e o quociente do maior pelo menor é 11. Quais são os números?

ATIVIDADE 7

Para pagar uma dívida, uma pessoa oferece uma caneta e uma lapiseira que valem juntas 40 reais. Caso ela ofereça só a lapiseira, ela deve acrescentar 4 reais para pagar a dívida. Se ela oferecer só a caneta, então era ela que deve receber 4 reais. Qual é o valor de cada objeto e de quanto é a dívida?

ATIVIDADE 8

Brincando sério com adivinhações: vamos propor uma adivinhação. Vamos primeiramente resolvê-la (letra a) e depois, você deverá justificá-la (letra b).

a) Pense em um número de dois algarismos e chame-o de a ($a = 23$). Multiplique o algarismo das dezenas por 5 [$2 \times 5 = 10$]. Some com 7 e dobre o resultado [$2(2 \times 5 + 7)$]. Agora some o algarismo das unidades [$(2 \times 10 + 14) + 3 = (20 + 3) + 14 = 23 + 14 = b$] e chame esse resultado de b . Qual foi o número pensado? (Observe que o número pensado $23 = b - 14$, isto é, o número pensado será sempre o resultado obtido, menos 14)

b) Justifique a adivinhação acima, para um número qualquer a de dois algarismos.

Pense em um número de dois algarismos e chame-o de a . Multiplique o algarismo das dezenas por 5. Some com 7 e dobre o resultado. Agora some o algarismo das unidades e chame esse resultado de b . Qual foi o número pensado?

(Sugestão: chame o número pensado de a e escreva-o como $a = 10d + u$, no qual d é o algarismo das dezenas e u é o algarismo das unidades)

ATIVIDADE 9

a) Calcule o mdc de 24 e 18.

b) Calcule o mmc de 24 e 18.

c) Verifique que $[\text{mdc}(24, 18)] \times [\text{mmc}(24, 18)] = 24 \times 18$. Analisando a decomposição de 24 e 18 em seus fatores primos, justifique esse resultado.

ATIVIDADE 10

a) Decomponha o número 3 465 em fatores primos. O número 3 465 é múltiplo de 11? Justifique.

b) Qual é o critério de divisibilidade por 11?

c) Sem efetuar a divisão, imite a justificativa do critério de divisibilidade por 9, que está no texto, para mostrar que o número 3 465 é divisível por 11.

(Aqui, você vai fazer $10 = 11 - 1$ e lembrar que $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$).

RESPOSTAS

ATIVIDADE 1

Resposta pessoal e variada. Por exemplo: a numeração das linhas de ônibus (com o significado de identificar); número da carteira de identidade (idem); número do CPF (idem); CEP (com o significado de codificar); código de barra dos produtos (idem); etc.

ATIVIDADE 2

A seqüência de números é: 1, 1, 2, 1, 2. 2.

ATIVIDADE 3

a) Algarismo que ocupa a ordem das centenas: 7. Valor relativo: 700. Valor absoluto: 7.

b) Ordem das unidades de milhar.

c) 4 703 unidades simples. 470 dezenas. 47 centenas.

d) As respostas podem ser duas das seguintes:

$$4\ 703 = 4 \text{ unidades de milhar } 7 \text{ centenas e } 3 \text{ unidades ou } 4\ 703 = 4\ 000 + 700 + 3;$$

$$4\ 703 = 47 \text{ centenas e } 3 \text{ unidades ou } 4\ 703 = 4\ 700 + 3;$$

$$4\ 703 = 470 \text{ dezenas e } 3 \text{ unidades ou } 4\ 703;$$

$$\text{Ou ainda: } 4703 = 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3; \quad 4703 = 47 \times 10^2 + 3; \quad 4703 = 470 \times 10 + 3$$

ATIVIDADE 4

$$\text{a) } 3 \times (7 + 5) = 21 + 35$$

$$\text{b) } 9 \times (4 + 6) = 9 \times 4 + 9 \times 6$$

$$\text{c) } 10 \times (2 + 8) = 10 \times 2 + 10 \times 8$$

$$\text{d) } (7 + 11) \times 5 = 7 \times 5 + 11 \times 5$$

ATIVIDADE 5

$$\text{a) } 53 \times 4 = (50 + 3) \times 4 = 50 \times 4 + 3 \times 4 = 200 + 12 = 212$$

$$\text{b) } 120 \times 6 = (100 + 20) \times 6 = 100 \times 6 + 20 \times 6 = 600 + 120 = 720$$

ATIVIDADE 6

Se o quociente do maior pelo menor é 11, o número 852 contém 12 vezes o menor número; $852 \div 12 = 71$ e os números são 71 e $71 \times 11 = 781$.

ATIVIDADE 7

A diferença de preços da caneta para a lapiseira é de 8 reais; o preço da lapiseira é $(40 - 8) \div 2 = 16$. Logo a caneta custa $16 + 8 = 24$ reais. A dívida é de 40 reais.

ATIVIDADE 8

a) Pense em um número de dois algarismos e chame-o de a ($a = 23$). Multiplique o algarismo das dezenas por 5. Some com 7 e dobre o resultado [$2(2 \times 5 + 7)$]. Agora some o algarismo das unidades [$(2 \times 10 + 14) + 3 = (20 + 3) + 14 = 23 + 14 = b$] e chame esse resultado de b . Qual foi o número pensado? (Observe que o número pensado $23 = b - 14$, isto é, o número pensado será sempre o resultado obtido, menos 14)

b) Justifique a adivinhação acima, para um número qualquer a de dois algarismos. Pense em um número de dois algarismos e chame-o de a . Multiplique o algarismo das dezenas por 5. Some com 7 e dobre o resultado. Agora some o algarismo das unidades e chame esse resultado de b . Qual foi o número pensado?

(Sugestão: chame o número pensado de a e escreva-o como $a = 10d + u$, no qual d é o algarismo das dezenas e u é o algarismo das unidades)

Temos que: $a = 10d + u$; $b = 2 \times (5d + 7) + u$; $b = 10d + 14 + u$; $b = (10d + u) + 14$;
 $b = a + 14$ e o número pensado é $a = b - 14$, qualquer que seja o resultado b .

ATIVIDADE 9

a) Fatorando 24 e 18, temos que: $24 = 2^3 \times 3$ e $18 = 2 \times 3^2$; logo $\text{mdc}(24, 18) = 2 \times 3$

b) $\text{mmc}(24, 18) = 2^3 \times 3^2 = 72$.

c) Para calcular o máximo divisor comum de 24 e 18, escrevemos os fatores comuns de 24 e 18, com os menores expoentes: $2 \times 3 = 6$; para calcular o mínimo múltiplo comum de 24 e 18, escrevemos os divisores comuns com os maiores expoentes: $2^3 \times 3^2 = 72$. Portanto $[\text{mdc}(24, 18)] \times [\text{mmc}(24, 18)] = (2 \times 3) \times (2^3 \times 3^2) = (2^3 \times 3) \times (2 \times 3^2) = 24 \times 18$.

ATIVIDADE 10

a) $3465 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$ e 3465 é múltiplo de 11.

b) Um número é divisível por 11, se a soma de seus algarismos de ordem ímpar (primeira, terceira, quinta, etc.) menos a soma de seus algarismos de ordem par (segunda, quarta, sexta, etc.) dá um número divisível por 11.

Para o número 3465, temos que $(5 + 4) - (6 + 3) = 0 - 0 = 0$, que é divisível por 11.

c) (Aqui, você vai fazer $10 = 11 - 1$ e lembrar que $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$).

Temos que: $3465 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 \times 6 \times 10 + 5$, fazendo $10 = 11 - 1$,

$$3465 = 3 \times (11 - 1)^3 + 4 \times (11 - 1)^2 + 6 \times (11 - 1) + 5$$

$$3465 = 3 \times (11^3 - 3 \times 11^2 \times 1 + 3 \times 11 \times 1^2 - 1^3) + 4 \times (11^2 - 2 \times 11 \times 1 + 1^2) + 6 \times (11 - 1) + 5$$

$$3465 = 3 \times 11^3 - 9 \times 11^2 + 9 \times 11 - 3 + 4 \times 11^2 - 8 \times 11 + 4 + 6 \times 11 - 6 + 5$$

$$3465 = [11(3 \times 11^2 - 9 \times 11 + 9 + 4 \times 11 - 8 + 6)] + [(5 + 4) - (6 + 3)]$$

Observamos que a primeira parcela dessa adição é divisível por 11, logo o número 3465 será divisível por 11, pois a segunda parcela, dessa adição, $(5 + 4) - (6 + 3) = 0$, é divisível por 11.

ESTUDO COMPLEMENTAR



CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9ª ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

Texto de leitura recomendada aos professores que desejam ampliar seu universo matemático. O contexto histórico dá um sentido aos conceitos fundamentais da Matemática: desenvolvimento lógico e desenvolvimento histórico se completam. Os problemas próprios da Matemática estão presentes e são estudados como tais. Mas, as necessidades sociais que os criaram também são lembrados.

O conteúdo abordado vai muito além daquele normalmente estudado nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Entretanto, o tratamento dado ao estudo dos Números Naturais e dos Números Racionais é primorosa, brindando o leitor com a maneira como esses números foram elaborados e rompendo com uma apresentação da Matemática pronta e acabada. É um livro, no dizer do autor, de cultura geral. Eu acrescentaria, de cultura matemática geral.

Texto, bastante antigo, a primeira edição data de 1941, foi reeditado recentemente acrescido de comentários de outros matemáticos, sobre o autor e sobre a obra.

CENTURIÓN, Marília. *Conteúdo e Metodologia da Matemática: Números e Operações. Série Didática – Classes de Magistério*. 2ª ed. São Paulo, SP: Scipione, 2006.

Como o nome indica, a autora aborda, não só, o conteúdo de Matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental, como também, dá orientações valiosas sobre a metodologia desse ensino. É, portanto, uma obra indicada para os futuros professores desse nível de ensino e professores em formação continuada.

O livro explora a História da Matemática, como auxiliar na construção e ampliação dos conceitos que aborda para uma melhor compreensão das ideias matemáticas. Há, também, sugestão para o uso de diferentes materiais didáticos em sala de aula.

No último capítulo, a autora aponta para uma ampliação do campo numérico normalmente estudado nas séries iniciais, com uma rápida menção aos números negativos e irracionais. Finalizando, ela reúne “Alguns fatos importantes da história dos números”.

IFRAH, Georges. *Os números: história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

Um texto bastante completo sobre o surgimento e a evolução dos números e de sua escrita, desde a pré-história e sobre alguns modos de calcular. Uma história fascinante e bastante completa sobre os números. Na parte que relata o surgimento do zero, o autor enfatiza toda a importância dessa descoberta e do sistema de numeração posicional. No final, o livro traz um paralelo entre a cronologia da escrita e a história da notação numérica.

IMENES, Luiz Márcio, LELLIS, Marcelo. *Microdicionário de Matemática*. São Paulo: Scipione, 1998.

É, de fato, um dicionário dos conceitos e termos matemáticos do Ensino Fundamental. Como tal é um livro para consulta. Micro, por ser pequeno e fácil de carregar.

ISBN 978-85-99372-69-2



O Curso de Pedagogia UAB UFMG proposto pela Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais visa à formação inicial de professores para a Educação Infantil e os quatro anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de um curso a distância, com momentos presenciais, desenvolvido pela UFMG em parceria com prefeituras de municípios onde foram criados os Pólos Municipais de Apoio Presencial, nos moldes definidos no Edital SEED/MEC no 1/2005, de 16 de dezembro de 2005.

O curso de Pedagogia UAB UFMG tem como referência o curso Veredas – Formação Superior de Professores, oferecido a professores da 1ª à 4ª série do ensino fundamental, em exercício nas redes públicas de Minas Gerais. O curso foi considerado, por educadores e entidades educacionais de renome, como inovador, tanto na concepção de formação de professores quanto na organização e dinâmica de gestão.

O Curso de Pedagogia UAB UFMG foi organizado na forma de um curso de graduação plena, distribuído em oito módulos, com duração prevista de quatro anos. Habilita para o exercício do magistério na educação infantil e nos quatro primeiros anos do ensino fundamental, de acordo com os requisitos contemporâneos para os profissionais da área de educação e as determinações legais vigentes no Brasil.

