

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-Graduação em Estatística**

Fernanda Gabriely Batista Mendes

**Processos de Markov Ponderado-Gama e Modelagem de Séries Temporais  
Inteiras Multivariadas via Cópulas**

Belo Horizonte  
2022

Fernanda Gabriely Batista Mendes

**Processos de Markov Ponderado-Gama e Modelagem de Séries Temporais  
Inteiras Multivariadas via Cópulas**

**Versão Final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Estatística.

Orientador: Dr. Wagner Barreto de Souza

Coorientador: Dr. Sokol Ndreca

Belo Horizonte  
2022

Mendes, Fernanda Gabriely Batista.

M538p

Processos de Markov ponderado-gama e modelagem de séries temporais inteiras multivariadas via cópulas [manuscrito] / Fernanda Gabriely Batista Mendes – 2022.  
118 f. il.

Orientador: Wagner Barreto de Souza.

Coorientador: Sokol Ndreca.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f.90-95.

1. Estatística – Teses. 2. Autocorrelação (Estatística) – Teses. 3. Cópulas (Estatística matemática) – Teses. 4. Verossimilhança (Estatística) – Teses. 5. Markov, Processos de – Teses. I. Souza, Wagner Barreto de. II. Ndreca, Sokol. III. Univesidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatísitca. IV. Título.

CDU 519.2(043)



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DA FERNANDA GABRIELY BATISTA MENDES, MATRICULADA, SOB O Nº 2018.657.598, NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 19 DE AGOSTO DE 2022.

Aos 19 dias do mês de AGOSTO de 2022, às 10h00, em reunião pública virtual 76 (conforme orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria PRPG nº 1819) OU na sala <https://kaust.zoom.us/j/99254805910>, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Estatística, para julgar a defesa de tese da aluna FERNANDA GABRIELY BATISTA MENDES, nº matrícula 2018657598, intitulada: "Processos de Markov Ponderado-Gama e Modelagem de Séries Temporais Inteiras Multivariadas via Cópulas", requisito final para obtenção do Grau de doutor em Estatística. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. WAGNER BARRETO DE SOUZA, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação:

Aprovada.

Reprovada com resubmissão do texto em \_\_\_\_ dias.

Reprovada com resubmissão do texto e nova defesa em \_\_\_\_ dias.

Reprovada.

Prof. Wagner Barreto de Souza - Orientador  
(KAUST/Arábia Saudita)

Prof. Sokol Ndreca - Coorientador  
(DEST/UFMG)

Prof. Luiz Koodi Hotta  
(IMECC/UNICAMP)

Rodrigo Bernardo da Silva  
(DEST/UFPB),

Prof. Roger William Câmara Silva  
(DEST/UFMG)

Profa. Gabriela Oliveira  
(Instituto Federal Minas Gerais).

O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 19 de Agosto de 2022.

Observações:

1. No caso de aprovação da tese, a banca pode solicitar modificações a serem feitas na versão final do texto. Neste caso, o texto final deve ser aprovado pelo orientador da tese. O pedido de expedição do diploma do candidato fica condicionado à submissão e aprovação, pelo orientador, da versão final do texto.
2. No caso de reprovação da tese com resubmissão do texto, o candidato deve submeter o novo texto dentro do prazo estipulado pela banca, que deve ser de no máximo 6 (seis) meses. O novo texto deve ser avaliado por todos os membros da banca que então decidirão pela aprovação ou reprovação da tese.
3. No caso de reprovação da tese com resubmissão do texto e nova defesa, o candidato deve submeter o novo texto com a antecedência à nova defesa que o orientador julgar adequada. A nova defesa, mediante todos os membros da banca, deve ser realizada dentro do prazo estipulado pela banca, que deve ser de no máximo 6 (seis) meses. O novo texto deve ser avaliado por todos os membros da banca. Baseada no novo texto e na nova defesa, a banca decidirá pela aprovação ou reprovação da tese.

*Para a minha mãe, Maria Jose.*

# Agradecimentos

A Deus, toda honra, glória e gratidão.

Agradeço aos amores da minha vida: a minha amada irmã Ane, minha mãe Maria Jose e meu marido Diego. Obrigada pelo apoio, amizade, amor e incentivo nas horas mais difíceis. Obrigada por me lembrarem todas as vezes que me senti derrotada que eu era capaz de superar qualquer coisa. Sou muito grata a Deus por tê-los em minha vida. Agradeço também a minha família pelo suporte emocional, em especial aos meus tios, Zilda e Deraldo e a minha amada amiga Suellen por estarem sempre presentes, pelo amor e pelo incentivo.

Expresso minha gratidão aos meus orientadores, professores Wagner Barreto de Souza e Sokol Ndreca. Obrigada pelo apoio e incentivo, que foram essenciais para que eu não desistisse diante dos desafios que surgiram durante o desenvolvimento da tese e dos desafios que a vida nos impôs. Obrigada por estarem sempre disponíveis a me ensinar e por todo conhecimento trocado.

Agradeço aos amigos conquistados no Programa de pós-graduação em Estatística: Jussiane, Guilherme Veloso, Juliana, Gabriela, Guilherme Oliveira, Douglas, Ricardo e Uriel. Obrigada pelas horas de estudo e pelas risadas compartilhadas.

Agradeço aos professores do Departamento de Estatística da UFMG, pela dedicação diária para um ensino de excelência. Agradeço aos funcionários do departamento de Estatística, em especial agradeço Rogeria pelo carinho, acolhimento e orações.

Expresso minha gratidão aos professores do Departamento de Matemática da Unimontes, que foram meus primeiros incentivadores em prosseguir com a minha caminhada acadêmica.

Agradeço a Universidade Federal de Minas Gerais, pelas oportunidades ofertadas. Agradeço a Capes pelo auxílio financeiro durante os quatro anos que fui aluna do programa de Pós-graduação em Estatística. Por fim, agradeço os membros da comissão examinadora, Professores Luiz Koodi Hotta (UNICAMP), Rodrigo Bernardo da Silva (UFPB), Roger William Câmara Silva (UFMG) e Professora Gabriela Oliveira (IFMG), por prontamente aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições.

# Resumo

Neste trabalho propomos a construção de dois modelos para séries temporais, motivados por aplicações do mercado financeiro. A primeira proposta é um processo de Markov para séries contínuas positivas, construído a partir de uma densidade de peso gama, o processo de Markov ponderado-gama (PG). O processo PG é estacionário, reversível no tempo e é definido a partir de sua densidade de transição. Investigamos a classe de distribuições GIG (Generalized Inverse Gaussian) e a distribuição gama como potenciais distribuições marginais para o processo, os quais retornaram vários resultados explícitos. A estimação dos parâmetros dos processos PG-GIG e PG-Ga foi realizada via método de máxima verossimilhança. Para avaliar o método inferencial proposto, realizamos um estudo de simulação Monte Carlo. Adicionalmente, realizamos um estudo empírico, a respeito do ajuste dos processos PG-GIG e PG-Ga aos dados de volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100, da bolsa de valores de Londres. Implementamos um exercício de *pseudo previsão* e avaliamos o desempenho dos processos através de uma análise de resíduos, por meio de envelopes simulados, e verificamos a calibração do modelo com a construção de histogramas PIT (Probability Integral Transform). A segunda proposta é uma classe de modelos para análise de séries temporais inteiras multivariadas, construídos a partir da combinação da metodologia INGARCH (INteger valued Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic) com cópulas. O processo proposto é denotado por processo cópula-INGARCH (CINGARCH). As dinâmicas temporal e contemporânea (dependência cruzada das séries ajustadas ao modelo) são incorporadas ao processo através da metodologia INGARCH. Como potenciais distribuições condicionais, investigamos as distribuições Laplace discreta (LD) e Skellam. A estimação dos parâmetros dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH foi realizada via método de máxima verossimilhança em dois estágios. Para avaliar o método inferencial proposto, realizamos um estudo de simulação Monte Carlo. Ademais, a metodologia proposta foi usada para modelar conjuntamente a variação dos ticks da taxa de câmbio do euro para a libra esterlina (EUR/GBP) e do euro para o dólar americano (EUR/USD). Avaliamos a bondade de ajuste dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH marginalmente através da construção dos histogramas PIT e de envelopes simulados para os resíduos de Pearson.

**Palavras-chave:** Autocorrelação; Cópula; Estimação em Dois-Estágios; INGARCH; Máxima Verossimilhança; Predição; Processos de Markov; Séries Temporais Inteiras.

# Abstract

In this work we propose two models for time series, motivated by financial market applications. First, we propose a Markov process for positive continuous series, driven by a gamma weight density, the weighted-gamma Markov process (PG). The PG process is stationary, time reversible, and is defined from its transition density. We investigated the GIG (Generalized Inverse Gaussian) distribution and the gamma distribution as potential marginal distributions for the process, which returned several explicit results. Parameter estimation of the PG-GIG and PG-Ga processes was performed via the maximum likelihood method. To evaluate the proposed inferential method, we performed a Monte Carlo simulation study. Additionally, we conducted an empirical study, regarding the adjustment of PG-GIG and PG-Ga processes to volatility data from the log-returns of the stocks that make up the FTSE 100 index, of the London Stock Exchange. We implement a *pseudo prediction* exercise and evaluate the performance of the processes through a residuals analysis, by means of simulated envelopes, and verify the model calibration with the construction of PIT (Probability Integral Transform) histograms. The second proposal is a class of models for multivariate whole time series analysis, built by combining the INGARCH (INteger valued Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic) methodology with copulas. The proposed process is denoted as the copula-INGARCH (CINGARCH) process. Temporal and contemporaneous dynamics (cross-dependence of the model-fitted series) are incorporated into the process using the INGARCH methodology. As potential conditional distributions, we investigate the discrete Laplace (LD) and Skellam distributions. Parameter estimation of the LD-CINGARCH and Skellam-CINGARCH processes was performed via the two-steps maximum likelihood method. To evaluate the proposed inferential method, we performed a Monte Carlo simulation study. In addition, the proposed methodology was used to jointly model the change in the exchange rate ticks of the Euro to Pound Sterling (EUR/GBP) and the Euro to US Dollar (EUR/USD). We evaluate the goodness of fit of the LD-CINGARCH and Skellam-CINGARCH processes marginally by constructing PIT histograms and simulated envelopes for the Pearson residuals.

**Keywords:** Autocorrelation; Copula; INGARCH; Integer Time Series; Markov Processes; Maximum Likelihood; Prediction; Two-Steps Estimation.

# Lista de Figuras

2.1	Gráficos da função densidade de probabilidade de distribuições GIG. . . . .	21
2.2	Gráfico da correlação do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1,2,3), em função do parâmetro $\phi$ variando de 0 até 50. . . . .	33
2.3	Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1, 2, 3), com $\phi = 2$ . . . . .	33
2.4	Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1, 2, 3), com $\phi = 5$ . . . . .	33
2.5	Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1, 2, 3), com $\phi = 80$ . . . . .	34
2.6	Gráfico da correlação do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal Ga(2, 3), em função do parâmetro $\phi$ variando de 0 até 50. . . . .	36
2.7	Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal Ga(2, 3), com $\phi = 2$ . . . . .	36
2.8	Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal Ga(2, 3), $\phi = 5$ . . . . .	37
2.9	Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal Ga(2, 3), $\phi = 80$ . . . . .	37
2.10	Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG, $\phi = 5$ , $\beta = 1$ , $\delta = 2$ e $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	43
2.11	Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-Ga, $\phi = 5$ , $a = 2$ e $b = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	43
2.12	Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG, $\phi = 5$ , $\beta = 1, \delta = 2$ e $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	44
2.13	Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga, $\phi = 5$ , $a = 2$ e $b = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	44
2.14	Gráficos da trajetória, ACF e PACF da volatilidade realizada diária, dos log-retornos computados a cada 10 minutos, das ações que compõe o índice FTSE 100 (31/10/2003 a 31/05/2007). . . . .	47

2.15	<i>Pseudo previsão</i> um passo a frente para a volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100. Análise realizada para o período de 27 de setembro de 2005 a 31 de maio de 2007, considerando os processos PG-GIG e PG-Ga. . . . .	49
2.16	Gráficos das funções MSFE e FS para a volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100. Análise realizada para o período de 27 de setembro de 2005 a 31 de maio de 2007, considerando os processos PG-GIG e PG-Ga. . . . .	49
2.17	Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo PG-GIG. . . . .	51
2.18	Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo PG-Ga. . . . .	52
2.19	Histogramas PIT dos processos PG-GIG e PG-Ga ajustados a volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o FTSE 100. . . . .	52
3.1	Trajetória, ACF e PACF da série $X_{1t} \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$ de um processo LD-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana. . . . .	68
3.2	Trajetória, ACF e PACF da série $X_{2t} \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$ de um processo LD-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana. . . . .	69
3.3	Trajetória, ACF e PACF da série $X_{1t} \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$ de um processo Skellam-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana. . . . .	70
3.4	Trajetória, ACF e PACF da série $X_{2t} \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$ de um processo SKELLAM-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana. . . . .	71
3.5	Boxplots das estimativas dos parâmetros do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas e com amostras de tamanhos $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	76
3.6	Histogramas das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas e com amostras de tamanhos $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	77
3.7	Qq-plots das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas e com amostras de tamanhos $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	78
3.8	Trajetória, ACF e PACF da variação dos ticks por minuto da taxa de câmbio EUR/GBP, em 04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h. . . . .	80
3.9	Trajetória, ACF e PACF da variação dos ticks por minuto da taxa de câmbio EUR/USD, em 04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h. . . . .	81
3.10	Histogramas PIT para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e EUR/USD, ajustado ao processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana. . . . .	84

3.11	Histogramas PIT para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e EUR/USD, ajustado ao processo Skellam-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana. . . . .	84
3.12	Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo LD-CINGARCH. . . . .	85
3.13	Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo Skellam-CINGARCH. . . . .	86
A.1	Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG, $\phi = 2$ , $\beta = 1$ , $\delta = 2$ e $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	99
A.2	Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-Ga, $\phi = 2$ , $a = 2$ e $b = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	99
A.3	Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG, $\phi = 2$ , $\beta = 1$ , $\delta = 2$ e $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	100
A.4	Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga, $\phi = 2$ , $a = 2$ e $b = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	101
A.5	Qq-plots das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG, $\phi = 2, 5$ , $\beta = 1$ , $\delta = 2$ e $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	102
A.6	Qq-plots Histograma das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga, $\phi = 2, 5$ , $a = 2$ e $b = 3$ , com amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	103
B.1	Boxplots das estimativas dos parâmetros do do processo Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas e com amostras de tamanhos $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	116
B.2	Histogramas das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas e com amostras de tamanhos $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	117
B.3	Qq-plots das estimativas dos parâmetros do processo Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas e com amostras de tamanhos $n = 500, 1000$ e $5000$ . . . . .	118

# Lista de Tabelas

2.1	Nós da Quadratura de Gauss Laguerre ( $z_i$ ). . . . .	40
2.2	Pesos da Quadratura de Gauss Laguerre ( $w_i$ ). . . . .	40
2.3	Médias empíricas e REQM (em parênteses) das estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros $\phi = 2, 5$ e $\beta = 1, \delta = 2$ e $\gamma = 3$ do processo PG-GIG, para amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas. . . . .	42
2.4	Médias empíricas e REQM (em parênteses) das estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros $\phi = 2, 5$ e $a = 2$ e $b = 3$ do processo PG-Ga, para amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas. . . . .	42
2.5	Probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança para os parâmetros do processo PG-GIG, $\phi = 2, 5, \beta = 1, \delta = 2$ e $\gamma = 3$ , calculadas via hessiana numérica, para amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas. . . . .	45
2.6	Probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança para os parâmetros do processo PG-Ga, $\phi = 2, 5, a = 2$ e $b = 3$ , calculadas via hessiana numérica, para amostras de tamanho $n = 500, 1000$ e $5000$ em um estudo Monte Carlo com $N = 1000$ réplicas. . . . .	45
2.7	Estatísticas descritivas da volatilidade realizada diária, dos log-retornos computados a cada 10 minutos, das ações que compõe o índice FTSE 100 (31/10/2003 a 31/05/2007). . . . .	46
2.8	Estimativas de máxima verossimilhança, erro padrão (obtido via hessiana numérica) e limites inferior e superior do intervalo de confiança para a volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100, ajustados ao processo PG-GIG. . . . .	47
2.9	Estimativas de máxima verossimilhança, erro padrão (obtido via hessiana numérica) e limites inferior e superior do intervalo de confiança para a volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100, ajustados ao processo PG-Ga. . . . .	47
3.1	Médias empíricas e REQM das estimativas de máxima verossimilhança do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana. . . . .	75
3.2	Médias empíricas e REQM das estimativas de máxima verossimilhança do processo Skellam-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana. . . . .	75

---

3.3	Estatísticas descritivas de variação de ticks da taxa de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD (04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h). . . . .	79
3.4	Estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo bivariado CINGARCH com cópula Gaussiana e distribuições condicionais LD e Skellam, aplicadas a variação dos ticks da taxa de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD (04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h). . . . .	82

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Processos de Markov Ponderado-Gama</b>	<b>17</b>
2.1	Introdução . . . . .	17
2.2	Preliminares . . . . .	20
2.3	Processos de Markov ponderado-gama . . . . .	28
2.4	Estimação dos parâmetros . . . . .	37
2.5	Volatilidade realizada do índice FTSE 100 . . . . .	46
2.6	Conclusão . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Modelagem de Séries Temporais Inteiras Multivariadas via Cópulas</b>	<b>54</b>
3.1	Introdução . . . . .	54
3.2	Preliminares . . . . .	57
3.3	Modelos Cópula-INGARCH (CINGARCH) . . . . .	63
3.4	Estimação dos parâmetros . . . . .	71
3.5	Varição dos ticks das taxas de câmbio EUR/GBP e EUR/USD . . . . .	78
3.6	Conclusão . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>88</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>Resultados do processo de Markov ponderado-gama</b>	<b>96</b>
A.1	Densidade de transição do modelo de Markov ponderado-gama . . . . .	96
A.2	Correlação do modelo de Markov ponderado-gama . . . . .	97
A.3	Correlação do modelo de Markov ponderado-gama com marginal $\text{gama}(a, b)$ . . . . .	97
A.4	Boxplots, histogramas e qq-plots das estimativas de máxima verossimilhança do processo de Markov ponderado-gama . . . . .	98
A.5	Código da aplicação proposta, no software R. . . . .	103
<b>B</b>	<b>Resultados do processo CINGARCH</b>	<b>113</b>
B.1	Código para implementar um gerador do processo CINGARCH no software R . . . . .	113
B.2	Boxplots, histogramas e qq-plots do processo Skellam-CINGARCH . . . . .	116

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de modelos para séries temporais tem sido tópico de interesse de muitos pesquisadores nas últimas décadas, em diversas áreas do conhecimento, como ciências médicas (estudo da atividade elétrica cerebral ou batimentos cardíacos por minuto), climatologia (previsão diária de precipitação e temperatura), administração (avaliação do volume de vendas mensais no varejo), entre outras.

Podemos citar, em especial, o mercado financeiro como uma das áreas que motivou estudos de modelos para séries temporais. Dessa forma, em econometria financeira, a modelagem e previsão de dados de volatilidade do retorno financeiro aguçaram o interesse e a necessidade de definir modelos que explicassem bem esses dados, como apresentados nos trabalhos de [Engle \(1982\)](#) e [Bollerslev \(1986\)](#), pioneiros nessa área e que motivaram, nas últimas décadas, várias extensões e aplicações.

Uma vez que estamos lidando com dados indexados pelo tempo, é natural que consideremos séries temporais para modelá-los. Desse modo, o objetivo geral deste trabalho é propor e estudar modelos para séries temporais, motivados por aplicações do mercado financeiro. Para os modelos propostos, apresentamos os métodos de estimação para inferência de cada um deles e as medidas de avaliação de adequação utilizadas no estudo empírico.

A primeira parte deste trabalho será responsável por introduzir o modelo de Markov estacionário ponderado-gama (PG), o qual será induzido pelo ajuste dos dados de volatilidade realizada dos log-retornos do índice FTSE 100 da bolsa de valores de Londres, o qual caracteriza o conjunto das cem ações mais representativas. Por conseguinte, apresentamos um modelo construído a partir de uma densidade de peso gama  $e$ , por meio dessa densidade de peso, introduzimos o histórico da série no modelo e o definimos segundo sua densidade de transição. Dessa forma, agregamos valor ao nosso trabalho ao introduzir uma expressão para a densidade de transição do modelo, uma vez que em muitas construções de processos de Markov para séries temporais não é possível obter expressões ou representações analíticas para a densidade de transição. Ademais, considerando a natureza contínua e não-negativa dos dados, investigamos a classe de distribuições Generalized Inverse Gaussian (GIG) e a distribuição gama como potenciais distribuições marginais do processo, os quais retornaram vários resultados explícitos.

---

Quanto à inferência do modelo, a estimação dos parâmetros foi realizada via método de máxima verossimilhança. Para avaliação do método inferencial proposto, apresentamos um estudo de simulação com avaliação de dois cenários distintos para os valores dos parâmetros em cada marginal considerada, retornando não somente as estimativas de máxima verossimilhança, mas também a raiz quadrada do erro quadrático médio e as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança.

Adicionalmente, realizamos um estudo empírico a respeito do ajuste do modelo aos dados de volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõem o índice FTSE 100. Assim, implementamos um exercício de pseudo previsão e avaliamos o ajuste do modelo aos dados através de uma análise de resíduos, por meio de envelopes simulados, bem como verificamos a calibração do modelo com a construção de histogramas PIT (Probability Integral Transform).

Em alguns contextos, os dados de séries temporais necessitam de uma abordagem multivariada. Nesse sentido, [Şerban et al. \(2007\)](#) ilustram como movimentos em um mercado podem ter um forte impacto em outros mercados, explicando que a dependência entre os mercados pode não ser constante ao longo do tempo.

Em uma segunda abordagem, propomos uma modelagem para o ajuste de dados inteiros, com dependência temporal e que demonstrem a necessidade de modelagem conjunta, considerando uma dependência contemporânea. Construímos uma classe de modelos para análise de séries temporais multivariadas, para modelagem de dados inteiros, combinando a metodologia INGARCH (INteger valued Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic) com cópulas. A dinâmica do modelo é considerada através da variância condicional, dadas as observações passadas, e o processo proposto será denotado por cópula-INGARCH (CINGARCH).

Motivamos a utilização do processo CINGARCH na análise conjunta da variação dos ticks das taxas de câmbio do euro para libra esterlina (EUR/GBP) e do euro para dólar americano (EUR/USD). Em economia, o tamanho do tick (menor variação de preço possível de um título financeiro) tem um grande impacto na estrutura das distribuições de retornos financeiros ([Münnix et al., 2010](#)) e a variação do tick pode ser tratada como uma variável aleatória que recebe valores em  $\mathbb{Z}$  ([Koopman et al., 2017](#)).

Levando em conta a natureza discreta dos dados, consideramos a Laplace discreta e a Skellam como opções para as distribuições condicionais do modelo. A estimação foi realizada segundo o método de máxima verossimilhança em dois estágios. Assim como proposto na primeira abordagem deste trabalho, apresentamos um estudo de simulação e um estudo empírico, onde ajustamos o modelo CINGARCH às variações dos ticks das taxas de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD, avaliando a bondade de ajuste do modelo por meio de envelopes simulados para os resíduos de Pearson e da construção de histogramas PIT.

A seguir apresentaremos a estrutura de organização desta tese de doutorado e

---

faremos uma descrição prévia sobre os principais pontos discutidos em cada capítulo.

## Capítulo 2

Neste capítulo introduzimos o **modelo de Markov estacionário ponderado-gama (PG)** para séries temporais contínuas positivas. Este capítulo é dividido em seis seções e ao longo dele realizamos uma revisão de literatura, destacamos a relevância do modelo proposto neste trabalho e apresentamos conceitos importantes. Em seguida definimos o modelo, apresentamos suas propriedades e um estudo de simulação para avaliação da performance do método de máxima verossimilhança é realizado. A metodologia proposta é utilizada para modelar dados de volatilidade realizada de ações que compõe o índice FTSE 100. Realizamos um exercício de pseudo previsão e avaliamos a bondade de ajuste do modelo através da construção de envelopes simulados para os resíduos de Pearson e histogramas PIT. Concluimos o capítulo com uma seção de discussão dos resultados, destacando os principais pontos debatidos e as propostas futuras seguindo esta linha de pesquisa.

## Capítulo 3

Neste capítulo apresentamos o modelo **cópula-INGARCH (CINGARCH)**, para séries temporais inteiras multivariadas com dinâmica temporal e contemporânea. Ao longo de seis seções, destacamos as principais referências na literatura a respeito da metodologia INGARCH e da construção de modelos usando cópulas. Ademais, apresentamos a relevância do modelo que estamos propondo frente a literatura existente. Definimos o modelo CINGARCH e discutimos sobre as distribuições de probabilidade condicional que serão consideradas. Realizamos um estudo de simulação e obtivemos as estimativas dos parâmetros via método de máxima verossimilhança em dois estágios. Realizamos um estudo empírico onde o modelo CINGARCH é utilizado na modelagem de dados da variação dos ticks das taxas de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD. Para avaliar marginalmente a bondade de ajuste do modelo, realizamos a construção de histogramas PIT e envelopes simulados para os resíduos de Pearson. Concluimos o capítulo destacando os principais pontos do modelo e pesquisas futuras nesta área.

## Capítulo 4

Neste capítulo apresentamos as considerações finais da tese, destacando os principais pontos discutidos a respeito dos modelos e as propostas de pesquisas futuras. As Referências Bibliográficas e o Apêndice, com material complementar, são disponibilizados na sequência.

# Capítulo 2

## Processos de Markov Ponderado-Gama

### 2.1 Introdução

Na teoria e aplicação de processos estocásticos, podemos encontrar uma vasta literatura sobre construções de processos de Markov para séries temporais. É importante estudar modelos cuja estrutura proporcione facilidade ao realizar inferências e satisfaçam importantes propriedades como estacionariedade e reversibilidade no tempo.

Uma forma de fazer construções de processos de Markov para séries temporais é através de modelos autoregressivos de primeira ordem (AR(1)). Um caso particular muito utilizado, é o AR(1) usual  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ :

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

em que  $\{\epsilon_t\}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com média zero, variância  $\sigma^2$ , independentes de  $(X_1, \dots, X_{t-1})$  e  $\rho \in \mathbb{R}$ .

A equação autoregressiva aditiva apresentada em (2.1) motivou diversos trabalhos na literatura, como o processo autoregressivo exponencial (EAR) (Lawrance e Lewis, 1977; Jacobs e Lewis, 1977), o modelo gama AR(1) (Gaver e Lewis, 1980; Lewis, 1983; Lewis et al., 1989), o modelo AR(1) Poisson (McKenzie, 1988) e o modelo AR(1) binomial negativo (Al-Osh e Aly, 1992). Além disso, a distribuição da variável resposta  $X_t$ , pode pertencer à uma classe infinitamente divisível fechada por convolução, como feito em Joe (1996).

Outra metodologia para a construção de modelos de Markov é o modelo INAR (Integer Auto Regressive) de ordem 1. Se a série temporal em estudo sugere uma modelagem discreta, é razoável e mais coerente considerar uma modelagem com marginal discreta para a análise destes dados. Introduzido por McKenzie (1985) e Al-Osh e Alzaid (1987), o modelo INAR(1) é um processo estocástico discreto de valores inteiros não-negativos.

O modelo INAR foi inicialmente estudado com distribuição marginal Poisson e estruturado a partir do operador de redução binomial “o”, definido em Steutel e van Harn

(1978). A partir desta proposta outros trabalhos surgiram, como o modelo INAR(1) com distribuição marginal geométrica (Ristić et al., 2009), Skellam (Freeland, 2010) e Laplace discreta (Barreto-Souza e Bourguignon, 2015). Ademais, a estrutura do operador “o” também pode ser modificada, como o operador binomial negativo (Ristić et al., 2009; Barreto-Souza e Bourguignon, 2015).

Neste trabalho, propomos a construção de um processo de Markov estacionário para séries temporais contínuas positivas, o modelo de Markov estacionário ponderado-gama (PG). Este modelo é definido a partir de sua densidade de transição (ou condicional), com a estrutura de dependência introduzida por uma função densidade de probabilidade contínua e distribuição marginal também contínua.

A construção de processos de Markov a partir da especificação da densidade de transição de  $(X_t|X_{t-1})$  pode ser encontrada nos trabalhos de Pitt et al. (2002), com a distribuição marginal do processo pertencendo à classe infinitamente divisível fechada por convolução de distribuições na família exponencial. Seguindo esta modelagem, Mena e Walker (2005) introduzem uma abordagem não paramétrica para modelar a densidade de transição do modelo, mantendo a densidade estacionária conhecida. Uma generalização do caso não paramétrico com foco no caso discreto é feita por Contreras-Cristán et al. (2009).

Anzarut et al. (2018) propõem um método para a construção de modelos de Markov estritamente estacionários. O processo é baseado em uma transformação do tipo Poisson, que modula a estrutura de dependência do mesmo. A construção permite que o modelo seja, reversível no tempo e estacionário com uma particular distribuição de interesse invariante. Além disso, conforme a escolha da densidade invariante, é possível obter de forma analítica a densidade de transição e a correlação. O modelo é apresentado em tempo discreto e uma extensão em tempo contínuo é feita. Particularmente, a distribuição Generalized inverse Gaussian (GIG) é tomada como distribuição invariante e alguns resultados para este caso particular são apresentados. Para realizar a inferência do modelo, os autores usam abordagem bayesiana. Mais detalhes sobre este modelo serão apresentados na Seção 2.2.

Ainda seguindo a construção de processos de Markov a partir da especificação da densidade de transição, Leisen et al. (2019) apresentam o modelo de Markov em tempo contínuo ponderado-binomial, com distribuição marginal binomial negativa. E Palma e Mena (2021), por sua vez, propõem um processo de Markov em tempo contínuo dual. Em particular, os autores identificam o dual de alguns modelos não conjugados, sendo estes o modelo de fila  $M/M/\infty$  e um processo simples de nascimento, morte e imigração. Esses duais garantem que o cálculo dos operadores preditores possa ser feito por meio de somas finitas.

Como mencionado anteriormente, neste trabalho propomos uma construção de processos de Markov com dependência temporal introduzida a partir de uma densidade

de peso gama. A escolha de uma função contínua para a densidade de peso nos permite uma vantagem significativa em relação às construções citadas, uma vez que passamos a lidar com expressões que envolvem integrais ao invés de séries. Podemos encontrar diversas metodologias na literatura para obter um valor, mesmo que aproximado, para as integrais (destacamos neste trabalho a quadratura de Gauss Laguerre). O modelo apresentado por [Anzarut et al. \(2018\)](#), por exemplo, quando não é possível encontrar um valor exato para a soma da série, tem como solução realizar o truncamento da mesma, feito isso, não conseguimos dimensionar a perda de informação. Estudamos os casos com densidade de peso gama e as densidades GIG e gama são apresentadas como opções para a densidade marginal. Estas escolhas feitas para a marginal levam a expressões fechadas para a densidade de peso e correlação. A expressão para a densidade de transição é simples e de fácil implementação. O modelo é definido em tempo discreto e a estimação dos parâmetros é feita via método de máxima verossimilhança, usando a teoria clássica de inferência. É realizado um estudo de simulação Monte Carlo, onde calculamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros, o erro quadrático médio e a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança.

O modelo proposto neste trabalho é motivado pela modelagem de dados de volatilidade realizada dos log-retornos do índice FTSE 100 (Financial Times and Stock Exchange Group), o qual representa as 100 maiores empresas listadas na Bolsa de Londres. Selecionamos os log-retornos computados a cada 10 minutos, coletados entre 31 de outubro de 2003 e 31 de maio de 2007. A modelagem e previsão de dados de volatilidade têm sido dois dos tópicos mais pesquisados, tanto em aplicações práticas quanto na construção de metodologias, na área de econometria financeira ([Chen et al., 2018](#); [Engle, 1982](#); [Bollerslev, 1986](#)). Sugerimos nosso modelo como uma metodologia alternativa aos modelos presentes na literatura ([Chen et al., 2018](#); [Takahashi et al., 2021](#); [Chen et al., 2021](#)) para trabalhar com esse tipo de dado. Desse modo, implementamos um exercício de pseudo previsão e avaliamos a bondade de ajuste do modelo aos dados através de uma análise de resíduos, por meio de envelopes simulados, assim como a construção de histogramas PIT (Probability Integral Transform).

A seguir, descrevemos a organização deste Capítulo. Na Seção [2.2](#) apresentamos uma breve revisão sobre a teoria de processos de Markov, resultados da distribuição GIG e discutimos a construção do processo de Markov estudado por [Anzarut et al. \(2018\)](#). Na Seção [2.3](#) propomos e definimos o modelo de Markov estacionário ponderado-gama (PG) e estudamos as propriedades do processo para o caso em que a marginal assume as distribuições GIG e gama. Na Seção [2.4](#) é feita a estimação dos parâmetros via método de máxima verossimilhança e os resultados de um estudo de simulação realizado usando o software R são apresentados. Na Seção [2.5](#) o modelo PG é ajustado a um conjunto de dados da volatilidade realizada diária, dos log-retornos computados a cada 10 minutos, das ações que compõe o índice FTSE 100. Na Seção [2.6](#) apresentamos as considerações

finais do capítulo e pontuamos algumas questões a serem estudadas futuramente.

## 2.2 Preliminares

### 2.2.1 Distribuição GIG

Apesar de ter sido introduzida por [Good \(1953\)](#), a distribuição Generalized Inverse Gaussian (GIG) só foi explorada e teve suas propriedades estatísticas estudadas alguns anos depois por [Jørgensen \(1982\)](#).

Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição GIG, com parâmetros  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$  e  $\gamma > 0$ , se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{(\gamma/\delta)^{\frac{\beta}{2}}}{2K_{\beta}(\sqrt{\delta\gamma})} x^{\beta-1} e^{-\frac{1}{2}(\delta x^{-1} + \gamma x)} \quad (x > 0), \quad (2.2)$$

em que  $K_{\beta}(\sqrt{\delta\gamma}) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\delta\gamma}(x+x^{-1})} dx$  é a função Bessel modificada de terceiro tipo com índice  $\beta$  (em ([Abramowitz e Stegun, 1974](#), págs. 374–379) podemos encontrar mais detalhes e outras representações para esta função).

**Propriedade 2.2.1** (*r*-ésimo momento). *Uma variável aleatória  $X$ , com função densidade de probabilidade GIG, dada pela Equação (2.2), tem o seguinte  $r$ -ésimo momento e variância*

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{K_{\beta+r}(\sqrt{\delta\gamma})}{K_{\beta}(\sqrt{\delta\gamma})} \left( \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}} \right)^r$$

e

$$\text{Var}(X) = \frac{\delta}{\gamma} \left( \frac{K_{\beta+2}(\sqrt{\delta\gamma})}{K_{\beta}(\sqrt{\delta\gamma})} - \frac{K_{\beta+1}^2(\sqrt{\delta\gamma})}{K_{\beta}^2(\sqrt{\delta\gamma})} \right).$$

**Propriedade 2.2.2** (Função característica). *A função característica de uma variável aleatória  $X \sim GIG(\beta, \delta, \gamma)$  é dada por*

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = \left( \frac{\delta}{\delta - 2it} \right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{K_{\beta}(\sqrt{(\delta - 2it)\gamma})}{K_{\beta}(\sqrt{\delta\gamma})},$$

para  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $i$  denota a unidade imaginária.

**Propriedade 2.2.3** (Parametrização alternativa). Tomando  $\theta = \sqrt{\delta\gamma}$  e  $\tau = \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$  podemos expressar a distribuição GIG da seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{2\tau^\beta K_\beta(\theta)} x^{\beta-1} e^{-\frac{\theta}{2}\left(\frac{x}{\tau} + \frac{\tau}{x}\right)} \quad (x > 0), \quad (2.3)$$

em que  $\theta$  é o parâmetro de concentração e  $\tau$  é o parâmetro de escala.

**Propriedade 2.2.4** (Casos especiais). Casos em que a distribuição GIG é assumida com  $\delta = 0$  ou  $\gamma = 0$ , são interpretados como casos limites, como pode ser verificado em [Eberlein e Hammerstein \(2004\)](#). Deste modo, a distribuição GIG apresenta como casos particulares a distribuição gama ( $\beta > 0, \delta = 0, \gamma > 0$ ), inversa gama ( $\beta > 0, \delta > 0, \gamma = 0$ ) e inversa Gaussiana ( $\beta = -\frac{1}{2}, \gamma > 0, \delta > 0$ ).

A Figura 2.1 apresenta gráficos da densidade GIG, com  $\beta = 1$  fixado e diferentes valores para os parâmetros  $\delta$  e  $\gamma$ .

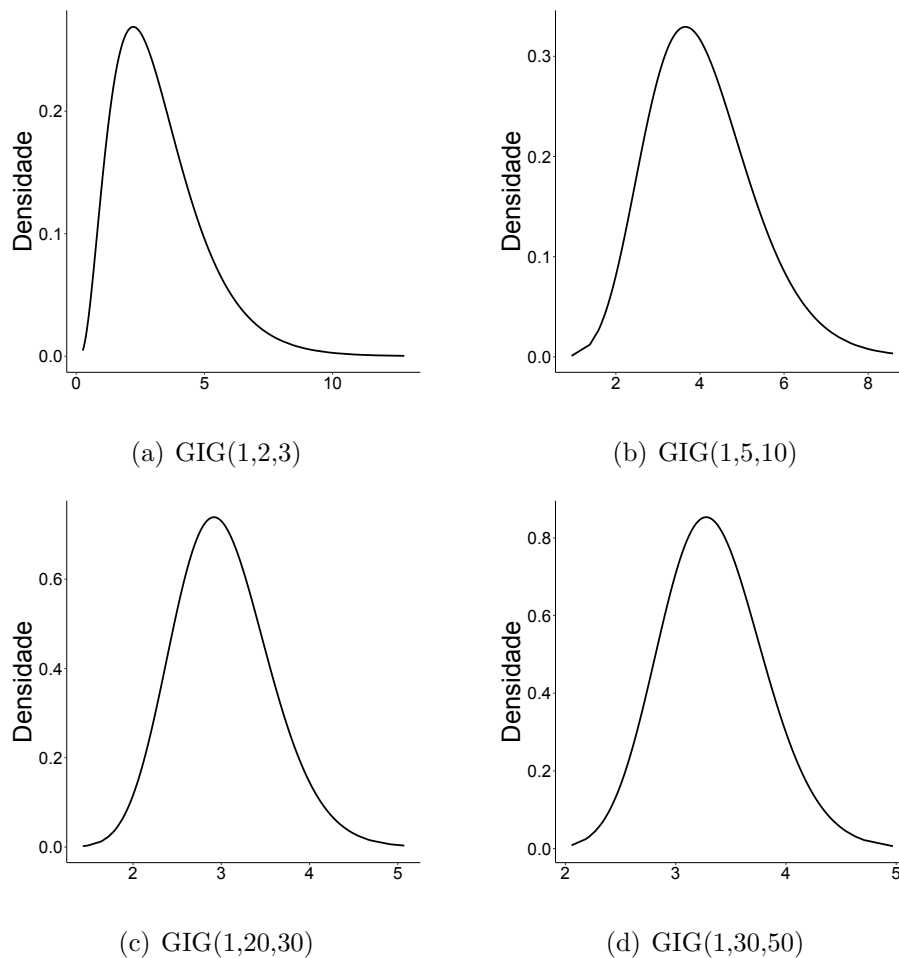


Figura 2.1: Gráficos da função densidade de probabilidade de distribuições GIG.

Podemos encontrar na literatura trabalhos que aplicam a distribuição GIG em situações de diferentes áreas. [Iyengar e Liao \(1997\)](#) realizam um ajuste dos intervalos

interspike para neurônios usando a distribuição GIG e fazem uma comparação com o ajuste log-normal. [Chebana et al. \(2010\)](#) mostram que a classe de distribuições GIG representa uma alternativa potencial às distribuições de valor extremo generalizadas para modelar eventos hidrológicos extremos. No contexto de finanças e econometria, podemos citar o trabalho realizado por [Barndorff-Nielsen e Shephard \(2001\)](#), onde a distribuição GIG é aplicada na construção de modelos estocásticos de volatilidade no tempo contínuo para ativos financeiros.

## 2.2.2 Processos de Markov

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados clássicos da teoria de processos de Markov que usaremos neste trabalho. Estes são retirados principalmente do livro de ([Revuz e Yor, 1999](#), págs. 79–117).

No contexto de probabilidade, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas a um conjunto  $T$ , sendo representada por  $\{X_t\}_{t \in T}$ . Considere um espaço mensurável  $(E, \mathcal{E})$ , onde  $E$  é um conjunto e  $\mathcal{E}$  uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $E$ . A seguir, temos a definição de espaço de estados.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $T$  um conjunto e  $(E, \mathcal{E})$  um espaço mensurável. Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$ , tomando valores em  $(E, \mathcal{E})$ , é uma família de funções mensuráveis  $X_t$ , de um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  para  $(E, \mathcal{E})$ . O espaço  $(E, \mathcal{E})$  é chamado espaço de estados.*

O conjunto  $T$  pode ser entendido como o “tempo”. Os casos usuais, e que serão trabalhados aqui, são  $T = \mathbb{N}^1$  e  $T = \mathbb{R}_+$ . O conjunto  $E$  normalmente será  $\mathbb{R}^d$  ou um subconjunto de Borel de  $\mathbb{R}^d$  e  $\mathcal{E}$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $E$ . Um processo de Markov é um processo estocástico que pode ser entendido como uma versão em tempo contínuo da *Cadeia de Markov*, definido em um conjunto de espaço de estados também contínuo.

Uma importante definição é a de filtração.

**Definição 2.2.2.** *Uma filtração no espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  é uma família crescente  $(\mathcal{F}_t)_{t > 0}$ , de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ . Em outras palavras, para cada  $t$  temos uma sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  e  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  se  $s < t$ . Um espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  dotado de uma filtração  $(\mathcal{F}_t)_{t > 0}$ , é chamado espaço filtrado.*

**Definição 2.2.3.** *Um processo  $\{X_t\}_{t \in T}$  em  $(\Omega, \mathcal{F})$  é adaptado à filtração  $(\mathcal{F}_t)$  se  $X_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável para cada  $t$ .*

---

<sup>1</sup> $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

Seja  $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s, s \leq t)$  a filtração natural de um processo  $\{X_t\}_{t \in T}$ , temos que  $\{X_t\}_{t \in T}$  é adaptado à  $\mathcal{F}_t^0$ , dizemos ainda que a filtração natural é a menor filtração ao qual o processo é adaptado. Ademais, se  $\{X_t\}_{t \in T}$  é adaptado a  $(\mathcal{F}_t)$ , isso significa que  $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t$  para cada  $t$ .

De maneira intuitiva, podemos dizer que um processo  $\{X_t\}_{t \in T}$  com espaço de estados  $(E, \mathcal{E})$  é um processo de Markov se, para fazer uma previsão no momento  $s$  sobre o que acontecerá no futuro, não são necessárias informações anteriores a  $s$ , somente é preciso saber sobre o estado atual  $X_s$ .

Consideremos a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_s^0 = \sigma(X_u, u \leq s)$  o “passado” mínimo de  $X$  no tempo  $s$ . Para  $A \in \mathcal{E}$ , seja  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo, onde para qualquer  $s < t$  existe uma probabilidade de transição  $P_{s,t}$ , tal que,

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s^0) := P_{s,t}(X_s, A). \quad (2.4)$$

Deste modo, para qualquer função  $f$  positiva mensurável com respeito a  $\mathcal{E}$ , temos que  $\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s^0] = P_{s,t}[f(X_s)]$ . Este resultado pode ser comprovado pelos argumentos usuais de monotonicidade e linearidade da esperança matemática. Considerando as definições e os resultados apresentados, para  $s < t < v$ , temos que

$$\begin{aligned} P(X_v \in A | \mathcal{F}_s^0) &= P(X_v \in A | \mathcal{F}_t^0, \mathcal{F}_s^0) \\ &= \mathbb{E}[P_{t,v}(X_t, A) | \mathcal{F}_s^0] \\ &= \int P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,v}(y, A). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pela Equação (2.4), a esperança condicional também deve ser igual a  $P_{s,v}(X_s, A)$ . A partir destes resultados, temos a seguinte definição:

**Definição 2.2.4.** *Uma função de transição em  $(E, \mathcal{E})$  é uma família  $P_{s,t}$ ,  $0 \leq s < t$  de probabilidades de transição em  $(E, \mathcal{E})$  tal que, para  $s < t < v$ :*

$$\int P_{s,t}(x, dy) P_{t,v}(y, A) = P_{s,v}(x, A),$$

para todo  $x \in E$  e  $A \in \mathcal{E}$ . Esta relação é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov. A função de transição é dita ser homogênea se  $P_{s,t}$  depende de  $s$  e  $t$  apenas através da diferença  $t-s$ . Para simplicidade de notação, podemos escrever  $P_t$  para denotar  $P_{0,t}$ , e lê-se a equação de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{s+t}(x, A) = \int P_s(x, dy) P_t(y, A),$$

para todo  $s, t \geq 0$ .

As definições apresentadas motivam a definição de processo de Markov.

**Definição 2.2.5.** *Seja  $\mathcal{G}_t$  uma filtração, o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t), Q)$  é chamado espaço de probabilidade filtrado. Dizemos que  $\{X_t\}_{t \in T}$  é um processo de Markov com respeito a  $\mathcal{G}_t$ , com função de transição  $P_{s,t}$ , se para qualquer função  $f$  positiva mensurável com respeito a  $\mathcal{E}$  e para algum par  $(s, t)$  com  $s < t$ ,*

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{G}_s] = P_{s,t}[f(X_s)].$$

Definido o processo de Markov, seguem as definições de estacionariedade estrita e fraca.

**Definição 2.2.6.** *Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  é estritamente estacionário se  $\forall t_1, \dots, t_n, t \in T$  e  $\forall A_i \in \mathcal{E}$ :*

$$P(X_{t+t_1} \in A_1, \dots, X_{t+t_n} \in A_n) = P(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n).$$

*Ou seja, a distribuição conjunta de  $(X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_n})$  é igual a distribuição conjunta de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  para qualquer incremento  $t$ .*

**Definição 2.2.7.** *Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  é fracamente estacionário se: (i)  $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , para todo  $t \in T$ ; (ii)  $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ , para todo  $t \in T$ ; (iii)  $\gamma(t_1, t_2) = \text{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2})$  é uma função de  $|t_1 - t_2|$ .*

### 2.2.3 Processos de Markov estacionários ponderado-Poisson

Nesta subseção apresentaremos a construção do modelo de Markov estacionário ponderado-Poisson, proposto por [Anzarut et al. \(2018\)](#).

O processo de Markov estacionário ponderado-Poisson é um método para construção de processos de Markov baseado em uma transformação do tipo Poisson que modela a estrutura de dependência do mesmo. O modelo apresentado é estritamente estacionário, reversível no tempo e com uma particular densidade marginal de interesse. Conforme a escolha feita para a densidade marginal, é possível obter de maneira analítica resultados do processo de Markov estacionário ponderado-Poisson, como: esperança, variância, correlação, densidade de transição, entre outros.

O modelo é definido em tempo discreto e em tempo contínuo. São apresentados resultados para os casos particulares com distribuição marginal GIG, para o modelo em tempo discreto, e com distribuição marginal gama, para o modelo em tempo contínuo. Aqui focaremos apenas na construção do modelo em tempo discreto.

A primeira definição é a de densidade de peso que estrutura a dependência na construção do processo de Markov.

**Definição 2.2.8.** *Seja  $f$  uma função de densidade de probabilidade absolutamente contínua com suporte em  $\mathbb{R}_+$ . Para  $\phi > 0$  e  $Y \sim \text{Poisson}(\phi x)$*

$$P(Y = y) = \frac{e^{-\phi x} (\phi x)^y}{y!},$$

onde  $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Definimos a densidade ponderada-Poisson

$$\hat{f}(x; y, \phi) = \frac{x^y e^{-x\phi} f(x)}{\xi(y, \phi)}, \quad (2.6)$$

em que  $\xi$  é a constante de normalização, expressa por

$$\xi(y, \phi) = \int_0^\infty z^y e^{-\phi z} f(z) dz.$$

Com o interesse de estender o conceito de atribuição de probabilidades proporcionais ao tamanho da amostra, Rao (1965) introduz o conceito de *distribuições ponderadas*, onde a probabilidade de seleção de uma unidade é em si uma função da variável em estudo. Este conceito será a base para a construção do modelo proposto por Anzarut et al. (2018).

Considere a densidade ponderada-Poisson com  $Y|X_{t-1} = x_{t-1} \sim \text{Poisson}(\phi x_{t-1})$ . Um processo de Markov  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ , com densidade marginal  $f$ , é definido a partir da seguinte densidade de transição

$$\begin{aligned} f(x_t|x_{t-1}) &:= \sum_{y=0}^{\infty} \hat{f}(x_t; y, \phi) \frac{e^{-\phi x_{t-1}} (\phi x_{t-1})^y}{y!} \\ &= \exp\{-\phi(x_t + x_{t-1})\} f(x_t) \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\phi x_t x_{t-1})^y}{y! \xi(y, \phi)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Os autores mostram que, considerando a densidade de transição em (2.7), a equação de balanço é satisfeita

$$f(x_t|x_{t-1})f(x_{t-1}) = f(x_{t-1}|x_t)f(x_t),$$

para todo  $x_{t-1}, x_t \in \mathbb{R}_+$ . Levando a um processo de Markov reversível no tempo. Ademais, se  $f$  é a densidade marginal do processo de Markov, então as densidades  $f(x_t)$  satisfazem as equações de estados estáveis

$$\int_0^\infty f(x_t|x_{t-1})f(x_{t-1})dx_{t-1} = f(x_t).$$

Portanto, por este resultado, o processo conduzido por (2.7) é estritamente estacionário e  $f$  é sua densidade estacionária.

**Definição 2.2.9.** *O processo de Markov, conduzido pela densidade de transição (2.7) e com a densidade estacionária  $f$ , é denominado processo de Markov estacionário ponderado-Poisson.*

A seguir, são apresentados alguns resultados do processo de Markov estacionário ponderado-Poisson. O  $r$ -ésimo momento condicional do processo é dado por

$$\mathbb{E}(X_t^r | X_{t-1} = x_{t-1}) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\xi(y+r, \phi) e^{-\phi x_{t-1}} (\phi x_{t-1})^y}{\xi(y, \phi) y!}.$$

Se  $f$  admite o segundo momento, a autocorrelação pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\xi(y+1, \phi)^2 \phi^y}{\xi(y, \phi) y!} - \mu^2 \right), \end{aligned}$$

em que  $\mu$  e  $\sigma^2$  são, respectivamente, a média e a variância da densidade marginal do processo  $f$ . De acordo com a escolha da densidade marginal  $f$ , é possível obter de maneira analítica expressões para a autocorrelação, por exemplo, se  $f$  é uma densidade gama<sup>2</sup> com parâmetros  $a > 0$  e  $b > 0$ , então a correlação se reduz a  $\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\phi}{\phi+b}$ . Dessa forma, parte da correlação do modelo é induzida pela escolha da densidade marginal  $f$  e a outra parte pelo parâmetro  $\phi$ .

Como caso particular, [Anzarut et al. \(2018\)](#) consideram a densidade marginal do processo  $f$  pertencendo a classe de distribuições GIG, com parametrização dada pela Equação (2.2). A partir da Definição 2.2.9, considerando a distribuição marginal  $\text{GIG}(\beta, \delta^2, \gamma^2)$ , os resultados do processo de Markov estacionário ponderado-Poisson podem ser obtidos.

A constante de normalização  $\xi(y; \phi)$  é expressa por

$$\xi(y, \phi) = \frac{\delta^y \gamma^\beta K_{\beta+y}(\delta \sqrt{\gamma^2 + 2\phi})}{(\gamma^2 + 2\phi)^{\frac{\beta+y}{2}} K_\beta(\delta \gamma)}.$$

A distribuição ponderada-Poisson, gerada por uma densidade marginal GIG, também será GIG com parâmetros  $b+y$ ,  $\delta^2$  e  $(\gamma^2 + 2\phi)$

$$\hat{f}(x; y, \phi) = \frac{((\gamma^2 + 2\phi)/\delta^2)^{\frac{\beta+y}{2}}}{2K_{\beta+y}(\delta \sqrt{\gamma^2 + 2\phi})} x^{y+\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + (\gamma^2 + 2\phi)x) \right\}.$$

Deste resultado, a densidade de transição é obtida

$$\begin{aligned} f(x_t | x_{t-1}) &= \sum_{y=0}^{\infty} \left\{ \frac{((\gamma^2 + 2\phi)/\delta^2)^{\frac{\beta+y}{2}}}{2K_{\beta+y}(\delta \sqrt{\gamma^2 + 2\phi})} x_t^{y+\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\delta^2 x_t^{-1} + (\gamma^2 + 2\phi)x_t) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{e^{-\phi x_{t-1}} (\phi x_{t-1})^y}{y!} \right\} \\ &= x_t^{\beta-1} \exp \left\{ -\phi(x_t + x_{t-1}) - \frac{1}{2}(\delta^2 x_t^{-1} + \gamma^2 x_t) \right\} \\ &\quad \times \sum_{y=0}^{\infty} \frac{((\gamma^2 + 2\phi)/\delta^2)^{\frac{\beta+y}{2}} (x_{t-1} x_t \phi)^y}{2K_{\beta+y}(\delta \sqrt{\gamma^2 + 2\phi}) y!}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Consideramos a densidade gama com a seguinte parametrização:  $f(x) = \frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)}$ .

A esperança condicional do processo de Markov estacionário ponderado-Poisson, com densidade marginal GIG, é dada por:

$$\mathbb{E}(X_t|X_{t-1}) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + 2\phi}} \frac{K_{\beta+y+1}(\delta\sqrt{\gamma^2 + 2\phi})}{K_{\beta+y}(\delta\sqrt{\gamma^2 + 2\phi})} \frac{e^{-x_{t-1}\phi} (x_{t-1}\phi)^y}{y!}. \quad (2.8)$$

Estes resultados também podem ser obtidos para os casos particulares da distribuição GIG.

- a) *Processo de Markov estacionário ponderado-Poisson com distribuição marginal Inversa Gaussiana*: Para  $\beta = -\frac{1}{2}$ , obtemos a distribuição Inversa Gaussiana, ou seja,  $\text{IG}(\delta, \gamma) = \text{GIG}(-1/2, \delta, \gamma)$ . A constante de normalização do processo de Markov, neste caso, é expressa por

$$\xi(y, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\delta\gamma} \delta^{y+\frac{1}{2}} (\sqrt{\gamma^2 + 2\phi})^{\frac{1}{2}-y} K_{y-\frac{1}{2}}(\delta\sqrt{\gamma^2 + 2\phi}).$$

Este resultado leva a um processo com a seguinte densidade de transição

$$f(x_t|x_{t-1}) = \exp \left\{ -\phi(x_{t-1} + x_t) - \frac{1}{2}(\delta^2 x_t^{-1} + \gamma^2 x_t) \right\} \\ \times x_t^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + 2\phi}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\phi\delta^{-1}x_{t-1}x_t\sqrt{\gamma^2 + 2\phi})^y}{y! 2K_{y-\frac{1}{2}}(\delta\sqrt{\gamma^2 + 2\phi})}.$$

- b) *Processo de Markov estacionário ponderado-Poisson com distribuição marginal Inversa gama*: Para  $\gamma = 0$  uma variável aleatória GIG se reduz a distribuição inversa gama, isto é,  $\text{GIG}(-\beta, \delta^2, 0) = \text{IGa}(a, b)$  com  $a = -\beta$ ,  $b = \frac{\delta^2}{2}$ . A constante de normalização é dada por

$$\xi(y, \phi) = 2 \frac{b^{\frac{a+y}{2}} \phi^{\frac{a-y}{2}}}{\Gamma(a)} K_{y-a}(2\sqrt{b\phi}).$$

A densidade de transição do processo de Markov, para este caso, tem a seguinte expressão

$$f(x_t|x_{t-1}) = x_t^{-(a+1)} \exp \left\{ -\phi(x_t + x_{t-1}) - \frac{b}{x_t} \right\} \left( \frac{b}{\phi} \right)^{\frac{a}{2}} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\left( \phi x_{t-1} x_t \sqrt{\frac{\phi}{b}} \right)^y}{y! 2K_{y-a}(2\sqrt{b\phi})}.$$

- c) *Processo de Markov estacionário ponderado-Poisson com distribuição marginal gama*: Para  $\delta = 0$ , a distribuição  $\text{GIG}(\beta, 0, \gamma^2)$  é equivalente a distribuição gama com parâmetros  $a = \beta$  e  $b = \gamma^2/2$ ,  $\text{Ga}(a, b)$ . A constante de normalização do processo fica expressa por

$$\xi(y, \phi) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+y)}{(b+\phi)^{y+a}}.$$

A densidade de transição do processo é dada por

$$f(x_t|x_{t-1}) = \frac{\exp\{\phi(x_t + x_{t-1}) + bx_t\}}{(\phi + b)^{-(a+1)/2} \phi^{(a-1)/2}} \left( \sqrt{\frac{x_t}{x_{t-1}}} \right)^{a-1} I_{a-1}(2\sqrt{x_{t-1}x_t\phi(\phi + b)}),$$

em que  $I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$  é a função de Bessel modificada do primeiro tipo (mais detalhes sobre esta função podem ser verificados em (Abramowitz e Stegun, 1974, págs. 374–378)).

## 2.3 Processos de Markov ponderado-gama

Nesta seção propomos a construção de um processo de Markov estacionário a partir de uma densidade de peso gama e o definimos segundo sua densidade de transição. Consideramos um processo em tempo discreto, além disso investigamos a classe de distribuições GIG e a distribuição gama como potenciais marginais do processo.

Antes de definir nosso processo, definiremos a densidade de peso gama, considerando  $X$  uma variável aleatória não-negativa, com função densidade de probabilidade  $f$  e  $Y|X = x \sim \text{Ga}(\phi, x)$ , com  $\phi > 0$ .

**Definição 2.3.1.** *Seja  $f$  uma função densidade de probabilidade absolutamente contínua, com suporte em  $\mathbb{R}_+$ . Para  $\phi > 0$  e  $y > 0$ , a densidade de peso gama é definida:*

$$\begin{aligned} \hat{f}(x; y, \phi) &= \frac{\frac{x^\phi}{\Gamma(\phi)} e^{-xy} y^{\phi-1} f(x)}{\int_0^\infty \frac{x^\phi}{\Gamma(\phi)} e^{-xy} y^{\phi-1} f(x) dx} \\ &= \frac{x^\phi e^{-xy} f(x)}{\eta(y, \phi)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que a constante de normalização,  $\eta$ , é dada por

$$\eta(y, \phi) = \int_0^\infty x^\phi e^{-xy} f(x) dx. \quad (2.10)$$

**Propriedade 2.3.1** ( $r$ -ésimo momento de um variável aleatória com densidade de peso gama). *Seja  $X|Y = y$  uma variável aleatória, com função densidade de probabilidade dada pela Equação (2.9), seu  $r$ -ésimo momento é dado por*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^r|Y = y) &= \int_0^\infty x^r \frac{x^\phi e^{-xy} f(x)}{\eta(y, \phi)} dx \\ &= \frac{\eta(y, r + \phi)}{\eta(y, \phi)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

**Propriedade 2.3.2** (Transformada de Laplace de um variável aleatória com densidade de peso gama). *Seja  $X|Y = y$  uma variável aleatória, com função densidade de probabilidade dada pela Equação (2.9), a transformada de Laplace é dada por*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\lambda X}|Y = y) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{x^{\phi} e^{-xy} f(x)}{\eta(y, \phi)} dx \\ &= \frac{\eta(y + \lambda, \phi)}{\eta(y, \phi)}.\end{aligned}$$

A partir da Definição 2.3.1, podemos construir um processo de Markov  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  com função densidade de probabilidade marginal  $f$ .

**Proposição 2.3.1.** *Considere  $Y|X_{t-1} = x_{t-1}$  com função densidade de probabilidade  $Ga(\phi, x_{t-1})$  e  $X_t|Y = y$  com função densidade de probabilidade  $\hat{f}$ . A densidade de transição (ou densidade condicional) do processo de Markov  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  é dada por:*

$$\begin{aligned}f(x_t|x_{t-1}) &= \int_0^{\infty} \hat{f}(x_t; y, \phi) \frac{x_{t-1}^{\phi} y^{\phi-1} e^{x_{t-1}y}}{\Gamma(\phi)} dy \\ &= \frac{(x_t x_{t-1})^{\phi} f(x_t)}{\Gamma(\phi)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} dy.\end{aligned}\quad (2.12)$$

*Demonstração.* Apêndice A.1. □

O parâmetro de taxa da distribuição gama no processo de Markov foi fixado, pois este apresenta problema de falta de identificabilidade no modelo.

**Proposição 2.3.2.** *O processo de Markov com densidade de transição dada na Equação (2.12) é estacionário, com densidade estacionária  $f$ .*

*Demonstração.* Esta proposição pode ser verificada integrando a distribuição conjunta de  $X_t$  e  $X_{t-1}$  em relação a  $X_{t-1}$

$$\begin{aligned}& \int_0^{\infty} f(x_{t-1}) \frac{(x_t x_{t-1})^{\phi} f(x_t)}{\Gamma(\phi)} \left( \int_0^{\infty} \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} dy \right) dx_{t-1} \\ \stackrel{\text{Teo.deFubini}}{=} & f(x_t) \int_0^{\infty} \frac{(x_t)^{\phi} e^{-yx_t} y^{\phi-1}}{\Gamma(\phi)} \underbrace{\left( \int_0^{\infty} \frac{(x_{t-1})^{\phi} e^{-yx_{t-1}}}{\eta(y, \phi)} f(x_{t-1}) dx_{t-1} \right)}_{=1} dy \\ = & f(x_t) \int_0^{\infty} \frac{(x_t)^{\phi} e^{-yx_t} y^{\phi-1}}{\Gamma(\phi)} dy = f(x_t).\end{aligned}\quad (2.13)$$

□

**Proposição 2.3.3.** *O processo de Markov com densidade de transição dada na Equação (2.12) é reversível no tempo.*

*Demonstração.* Podemos verificar que a equação de balanço é satisfeita

$$\begin{aligned}
f(x_t|x_{t-1})f(x_{t-1}) &= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi f(x_t)}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} dy f(x_{t-1}) \\
&= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi f(x_{t-1})}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} dy f(x_t) \\
&= f(x_{t-1}|x_t) f(x_t).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Deste modo, para todo  $x_{t-1}$  e  $x_t \in \mathbb{R}_+$ , o processo de Markov com densidade de transição dada pela Equação (2.12) é reversível no tempo.  $\square$

**Definição 2.3.2.** O processo de Markov estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  com densidade estacionária  $f$  e densidade de transição (2.12) é denominado processo de Markov ponderado-gama. Denotaremos esse processo pela sigla PG.

**Proposição 2.3.4.** A partir dos resultados (2.11) e (2.12) o  $r$ -ésimo momento do processo PG pode ser obtido por

$$\mathbb{E}(X_t^r | X_{t-1} = x_{t-1}) = \frac{x_{t-1}^\phi}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{\eta(y, \phi + r) y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{\eta(y, \phi)} dy. \tag{2.15}$$

*Demonstração.* Para  $r = 1, 2, \dots$ , o momento de ordem  $r$  do processo PG é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t^r | X_{t-1} = x_{t-1}) &= \int_0^\infty x_t^r f(x_t | x_{t-1}) dx_t \\
&= \int_0^\infty x_t^r \int_0^\infty \hat{f}(x_t; y, \phi) \frac{x_{t-1}^\phi y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{\Gamma(\phi)} dy dx_t \\
&= \int_0^\infty \frac{x_{t-1}^\phi y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{\Gamma(\phi) \eta(y, \phi)} \int_0^\infty x_t^{\phi+r} e^{-x_t y} f(x_t) dx_t dy \\
&= \frac{x_{t-1}^\phi}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{\eta(y, \phi + r) y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{\eta(y, \phi)} dy.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$\square$

Condicionada a existência do segundo momento, a correlação do processo PG pode ser obtida através da seguinte expressão

$$\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1} \eta^2(y, \phi + 1)}{\eta(y, \phi)} dy - \mu^2 \right), \tag{2.17}$$

onde  $\mu$  e  $\sigma^2$  representam a média e a variância da distribuição marginal, respectivamente. Os detalhes deste resultado podem ser verificados no Apêndice A.2.

### 2.3.1 Processos de Markov ponderado-gama GIG

Nesta subseção, serão apresentados os resultados do processo de Markov ponderado-gama com a densidade marginal pertencendo a classe de distribuições GIG, PG-GIG.

Considere  $f$  uma função densidade de probabilidade  $\text{GIG}(\beta, \delta, \gamma)$ . A constante de normalização do processo de Markov ponderado-gama pode ser obtida identificando o núcleo de uma distribuição GIG

$$\begin{aligned}
\eta(y, \phi) &= \int_0^\infty x^\phi e^{-xy} \frac{1}{(\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} 2K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} x^{\beta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x^{-1} + \gamma x)\right\} dx. \\
&= \frac{(\delta/(\gamma + 2y))^{\frac{\beta+\phi}{2}} 2K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})}{(\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} 2K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} \\
&\quad \int_0^\infty \frac{x^{\phi+\beta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x^{-1} + (\gamma + 2y)x)\right\}}{(\delta/(\gamma + 2y))^{\frac{\beta+\phi}{2}} 2K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dx. \\
&= \frac{(\delta/(\gamma + 2y))^{\frac{\beta+\phi}{2}} K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})}{(\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Desse modo, pela Equação (2.18), a densidade de peso gama,  $\hat{f}$ , pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x; y, \phi) &= \frac{x^\phi e^{-xy} \frac{1}{(\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} x^{\beta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x^{-1} + \gamma x)\right\}}{\frac{(\delta/(\gamma+2y))^{\frac{\beta+\phi}{2}} K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma+2y)})}{(\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})}} \\
&= \frac{x^{\phi+\beta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x^{-1} + (\gamma + 2y)x)\right\}}{(\delta/(\gamma + 2y))^{\frac{\beta+\phi}{2}} K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Note que, a Expressão (2.19) para a densidade de peso é uma função densidade de probabilidade  $\text{GIG}(x; \phi + \beta, \delta, \gamma + 2y)$ . Desta forma, pode-se obter a densidade de transição do processo de Markov no tempo  $t$

$$\begin{aligned}
f(x_t|x_{t-1}) &= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi x_t^{\beta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x_t^{-1} + \gamma x_t)\right\}}{\Gamma(\phi) (\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\frac{(\delta/(\gamma+2y))^{\frac{\beta+\phi}{2}} K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma+2y)})}{(\delta/\gamma)^{\frac{\beta}{2}} K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})}} dy \\
&= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi x_t^{\beta-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x_t^{-1} + \gamma x_t)\right\}}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{(\gamma + 2y)^{\frac{\phi+\beta}{2}} e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\delta^{\frac{\phi+\beta}{2}} 2K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy.
\end{aligned}$$

Em particular, considerando a distribuição GIG para a marginal do processo, do

resultado dado na Equação (2.15) podemos determinar a esperança condicional

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t|X_{t-1}) &= \int_0^\infty \frac{\eta(y, \phi + 1)x_{t-1}^\phi y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{\eta(y, \phi)\Gamma(\phi)} dy \\ &= \frac{x_{t-1}^\phi \delta^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{(\gamma + 2y)^{\frac{1}{2}}} \frac{K_{\beta+\phi+1}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})}{K_{\beta+\phi}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy.\end{aligned}\quad (2.20)$$

A correlação do processo é então dada por

$$\begin{aligned}\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \left( \frac{\gamma^{\beta/2} \delta^{\frac{\phi}{2}+1}}{\Gamma(\phi) K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} \int_0^\infty \frac{K_{\phi+\beta+1}^2(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)}) y^{\phi-1}}{(\gamma + 2y)^{\frac{\phi+\beta}{2}+1} K_{\phi+\beta}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta K_{\beta+1}^2(\sqrt{\delta\gamma})}{\gamma K_\beta^2(\sqrt{\delta\gamma})} \right) \frac{\gamma}{\delta} \left[ \frac{K_{\beta+2}(\sqrt{\delta\gamma})}{K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} - \frac{K_{\beta+1}^2(\sqrt{\delta\gamma})}{K_\beta^2(\sqrt{\delta\gamma})} \right]^{-1} \\ &= \frac{\gamma^{\frac{\beta}{2}+1} \delta^{\frac{\phi}{2}} K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})}{\Gamma(\phi) (K_\beta(\sqrt{\delta\gamma}) K_{\beta+2}(\sqrt{\delta\gamma}) - K_{\beta+1}^2(\sqrt{\delta\gamma}))} \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{K_{\phi+\beta+1}^2(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)}) y^{\phi-1}}{(\gamma + 2y)^{\frac{\phi+\beta}{2}+1} K_{\phi+\beta}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy \\ &\quad - \frac{K_{\beta+1}^2(\sqrt{\delta\gamma})}{K_{\beta+2}(\sqrt{\delta\gamma}) K_\beta(\sqrt{\delta\gamma}) - K_{\beta+1}^2(\sqrt{\delta\gamma})}\end{aligned}\quad (2.21)$$

O resultado apresentado na Expressão (2.21) foi interpretado através dos gráficos apresentados nas figuras Figuras 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5. Realizamos um estudo de sensibilidade, para avaliar como a correlação do processo se comporta em função dos diferentes valores para o parâmetro  $\phi$ , Figura 2.2. Esta análise é importante pois, o parâmetro  $\phi$  é oriundo da distribuição que introduz o histórico da série no modelo. O gráfico da correlação do processo PG com densidade marginal GIG(1, 2, 3) em função do parâmetro  $\phi \in (0, 50]$  apresentado, indica que conforme o valor de  $\phi$  aumenta, mais forte é a correlação entre  $X_t$  e  $X_{t-1}$ .

As Figuras 2.3, 2.4 e 2.5, por sua vez, apresentam os gráficos da trajetória, de autocorrelação (ACF) e de autocorrelação parcial (PACF) de um modelo de Markov ponderado-gama também com densidade marginal GIG(1, 2, 3), para os casos  $\phi = 2, 5$  e 80, respectivamente, em amostras de tamanho 200. Os gráficos da ACF sugerem um decaimento exponencial conforme o valor de  $\phi$  aumenta. Este comportamento fica evidente em especial para  $\phi = 80$ . Pelos gráficos de trajetória do processo e da ACF, pode-se considerar que, definida a distribuição marginal  $f$  e seus parâmetros, a dependência no modelo é dirigida pelo parâmetro  $\phi$ , de modo que, aumentando o valor de  $\phi$ , mais uma vez, mais forte fica a correlação.

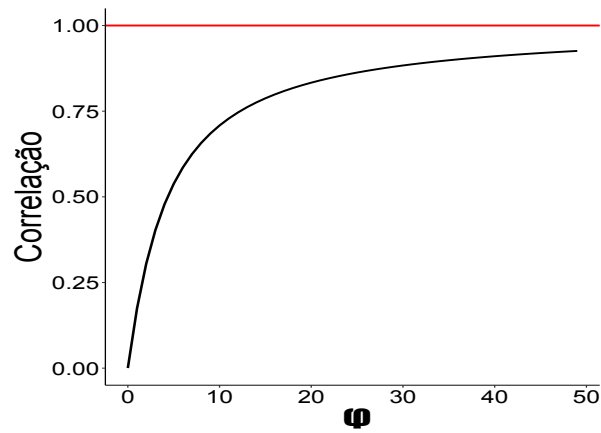


Figura 2.2: Gráfico da correlação do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1,2,3), em função do parâmetro  $\phi$  variando de 0 até 50.

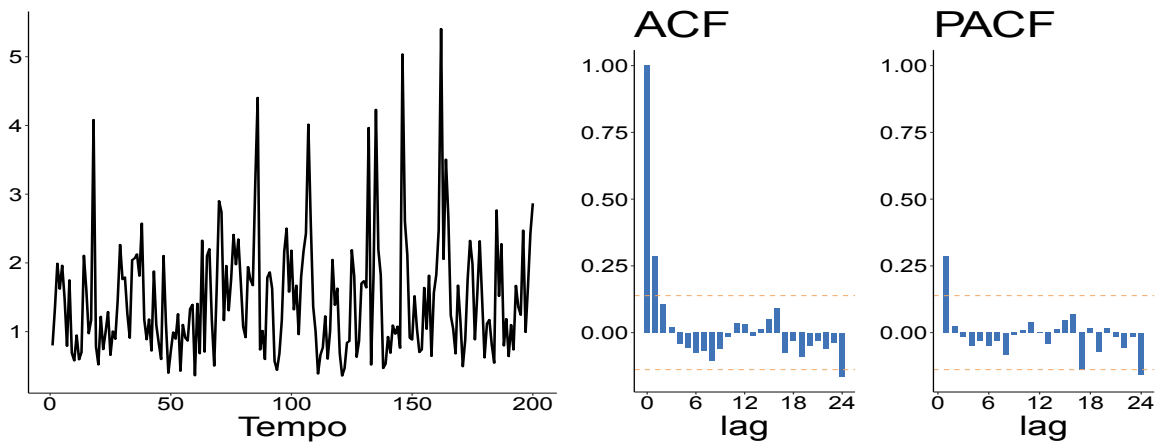


Figura 2.3: Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1, 2, 3), com  $\phi = 2$ .

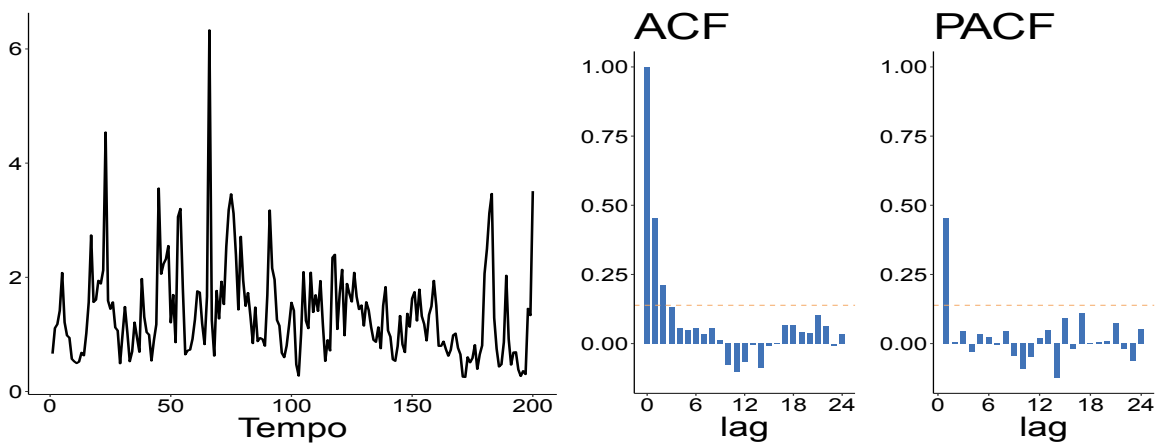


Figura 2.4: Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal GIG(1, 2, 3), com  $\phi = 5$ .

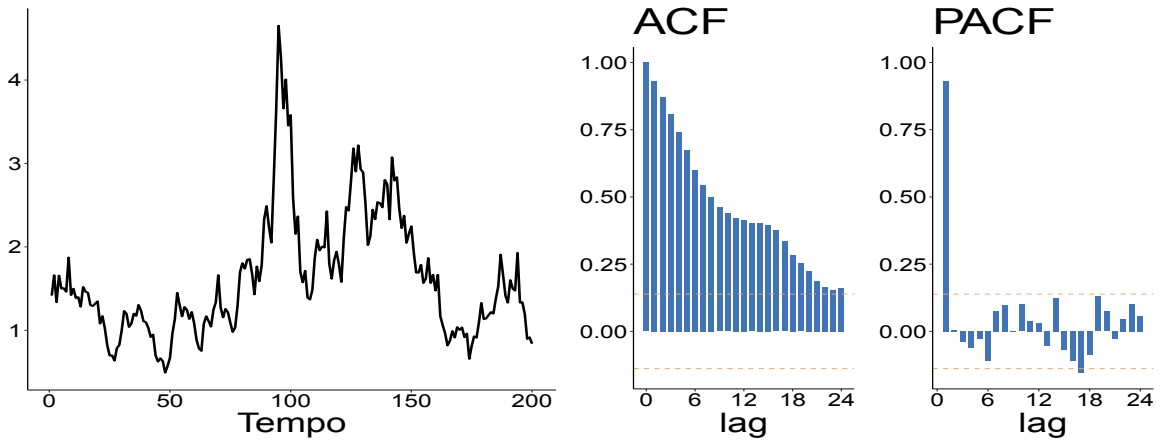


Figura 2.5: Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal  $GIG(1, 2, 3)$ , com  $\phi = 80$ .

Como já citado, a distribuição GIG tem como casos particulares outras distribuições conhecidas, obtidas de acordo com a escolha feita para os valores dos parâmetros. Destacaremos aqui, quantidades de interesse do processo de Markov ponderado-gama para os casos particulares da distribuição GIG.

- a) *Processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal Inversa Gaussiana (IG)*: A constante de normalização do processo PG com distribuição  $IG(\delta, \gamma) = GIG(-1/2, \delta, \gamma)$ , é expressa por

$$\eta(y, \phi) = \frac{\delta^{\phi/2} (1/(\gamma + 2y))^{1/2(\phi - \frac{1}{2})} K_{\phi - \frac{1}{2}}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})}{\gamma^{\frac{1}{4}} K_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\delta\gamma})}.$$

Para a densidade de transição, temos a seguinte expressão

$$f(x_t | x_{t-1}) = \frac{(x_t x_{t-1})^{\phi} x_t^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta x_t^{-1} + \gamma x_t)\right\}}{\Gamma(\phi)} \times \int_0^{\infty} \frac{e^{-y(x_t + x_{t-1})} y^{\phi-1} (\gamma + 2y)^{1/2(\phi - \frac{1}{2})}}{\delta^{1/2(\phi - \frac{1}{2})} 2K_{\phi - \frac{1}{2}}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy.$$

- b) *Processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal Inversa gama (IGa)*: A constante de normalização do processo PG com distribuição marginal  $IGa(a, b) = GIG(-\beta, 0, \gamma)$ , em que  $a = -\beta$  e  $b = \frac{\gamma^2}{2}$ , é dada por

$$\begin{aligned} \eta(y, \phi) &= \int_0^{\infty} x^{\phi} e^{-xy} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(a+1)} e^{-b/x} dx \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-xy} x^{-(a-\phi+1)} e^{-b/x} dx. \\ &= \frac{b^{\frac{\phi+a}{2}} K_{\phi-a}(2\sqrt{yb})}{\Gamma(a) y^{\frac{\phi-a}{2}}}. \end{aligned}$$

Para a densidade de transição, temos o seguinte resultado

$$f(x_t|x_{t-1}) = \frac{(x_t x_{t-1})^\phi f(x_t) \Gamma(a)}{\Gamma(\phi) b^{\frac{\phi+a}{2}}} \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1} y^{\frac{\phi-a}{2}}}{K_{\phi-a}(2\sqrt{yb})} dy.$$

- c) A distribuição gama é um dos casos particulares da distribuição GIG. Investigaremos o processo PG com a distribuição marginal gama na Subseção 2.3.2.

### 2.3.2 Processo de Markov ponderado-gama gama

Nesta subseção, serão apresentados os resultados do processo de Markov ponderado-gama com a densidade marginal gama, PG-Ga.

Considere  $f$  uma função densidade de probabilidade gama( $a, b$ ). A constante de normalização do processo de Markov ponderado-gama pode ser obtida identificando o núcleo de uma distribuição gama

$$\begin{aligned} \eta(y, \phi) &= \int_0^\infty x^\phi e^{-xy} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx. \\ &= \frac{b^a \Gamma(\phi + a)}{\Gamma(a) (b + y)^{\phi+a}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pelo resultado apresentado na Equação (2.22), a densidade de peso é dada por

$$\hat{f}(x_t; y, \phi) = \frac{(b + y)^{\phi+a}}{\Gamma(\phi + a)} x^{\phi+a-1} e^{-(b+y)x}. \quad (2.23)$$

Perceba que, quando a densidade marginal do processo é gama, a densidade de peso também é gama, neste caso, como verificado na Expressão (2.23),  $\text{Ga}(\phi + a, b + y)$ . Deste modo, a densidade de transição é obtida pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(x_t|x_{t-1}) &= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi b^a x_t^{a-1} e^{-bx_t}}{\Gamma(\phi) \Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\left( \frac{b^a \Gamma(\phi+a)}{\Gamma(a) (b+y)^{\phi+a}} \right)} dy \\ &= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi x_t^{a-1} e^{-bx_t}}{\Gamma(\phi) \Gamma(\phi + a)} \int_0^\infty e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1} (b + y)^{\phi+a} dy. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Deste modo, considerando a densidade de peso gama dada pela Expressão (2.23) e a densidade de transição dada pela Expressão (2.24), podemos determinar a esperança condicional do processo PG-Ga

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t|X_{t-1}) &= \int_0^\infty \frac{\eta(y, \phi + 1) x_{t-1}^\phi y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{\eta(y, \phi) \Gamma(\phi)} dy \\ &= \frac{x_{t-1}^\phi \Gamma(\phi + a + 1)}{\Gamma(\phi) \Gamma(\phi + a)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1} e^{-x_{t-1}y}}{(b + y)} dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A função de correlação do processo PG-Ga apresenta forma fechada e é dada por

$$\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \frac{\phi}{\phi + a + 1}. \quad (2.26)$$

Detalhes deste cálculo podem ser verificados no Apêndice A.3. A Equação (2.26) evidencia que a dependência do processo é determinada pelo parâmetro  $\phi$  e pelo parâmetro de forma da distribuição marginal gama. Observe que, fixado o parâmetro  $a$  e tomando  $\phi$  tendendo a infinito, a correlação tende a 1.

Realizamos um estudo de sensibilidade para a correlação do processo PG com densidade marginal  $\text{Ga}(2, 3)$ , em relação ao parâmetro  $\phi$ . O resultado é apresentado na Figura 2.6 e corrobora o resultado obtido na Equação (2.26). Avaliamos a correlação do PG-Ga também através dos gráficos da ACF e PACF, apresentados nas Figuras 2.7, 2.8 e 2.9, que apresentam também a trajetória do processo. As séries apresentam comportamento estacionário, com decaimento exponencial na ACF e pico significativo no primeiro lag da PACF, sugerindo que um modelo autoregressivo de primeira ordem pode ser adequado para ajustá-las.

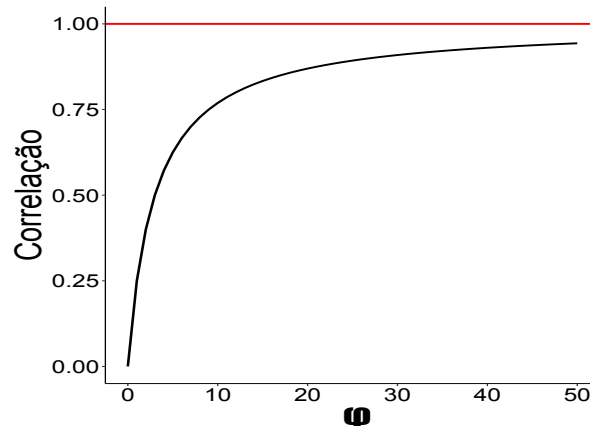


Figura 2.6: Gráfico da correlação do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal  $\text{Ga}(2, 3)$ , em função do parâmetro  $\phi$  variando de 0 até 50.

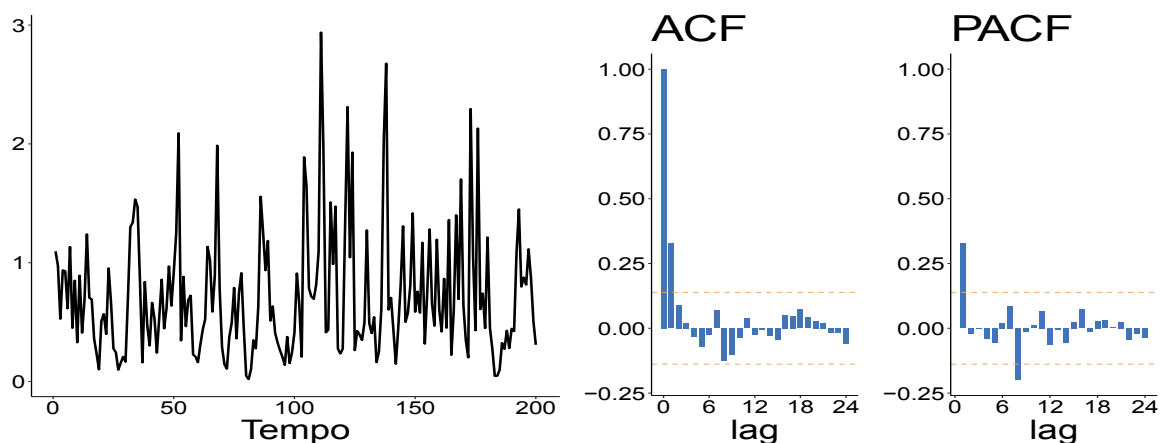


Figura 2.7: Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal  $\text{Ga}(2, 3)$ , com  $\phi = 2$ .

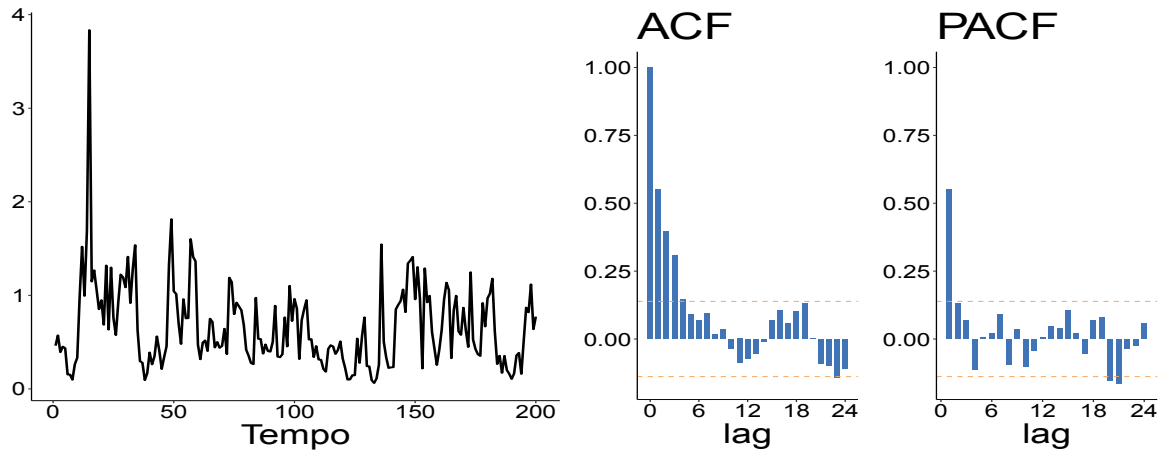


Figura 2.8: Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal  $\text{Ga}(2, 3)$ ,  $\phi = 5$ .

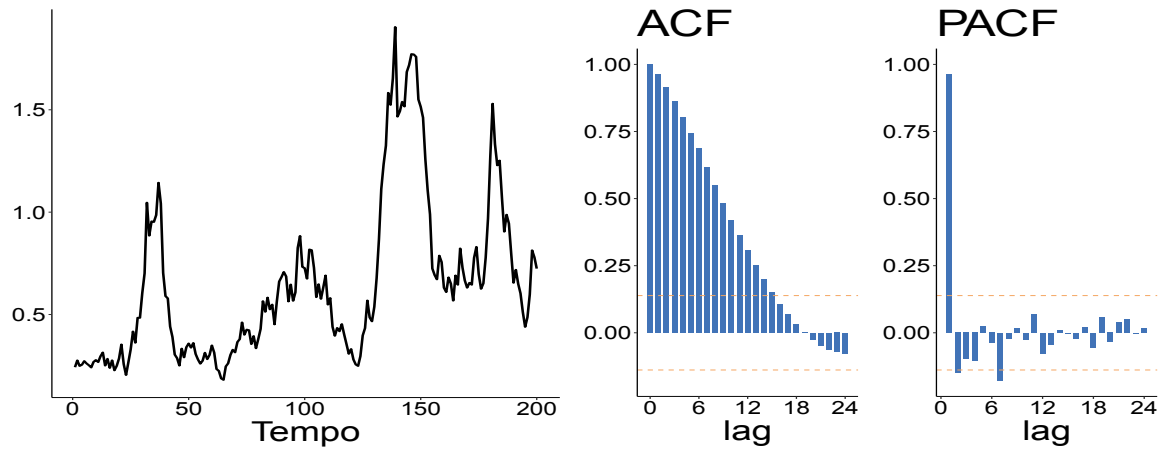


Figura 2.9: Trajetória de tamanho 200, ACF e PACF do processo de Markov ponderado-gama com distribuição marginal  $\text{Ga}(2, 3)$ ,  $\phi = 80$ .

## 2.4 Estimação dos parâmetros

Nesta seção serão apresentados os resultados para a estimação via método de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo de Markov ponderado-gama, para os casos com densidade marginal  $\text{GIG}(\beta, \delta, \gamma)$  e densidade marginal  $\text{Ga}(a, b)$ . O cálculo das funções de verossimilhança foi realizado fazendo-se o produto das densidades condicionais.

Sejam  $\theta_1 = (\phi, \beta, \delta, \gamma)$ ,  $\theta_2 = (\phi, a, b)$  os vetores completos de parâmetros das densidades marginais GIG e gama, respectivamente, e  $x_1, \dots, x_n$  a trajetória observada

do processo. A função de verossimilhança do PG-GIG e do PG-Ga são dadas por

$$\begin{aligned}
L(\theta_1) &= \frac{\prod_{i=2}^n \{x_i^{\phi+\beta-1} x_{i-1}^\phi\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (\delta x_i^{-1} + \gamma x_i) \right\}}{\Gamma^{n-1}(\phi) \delta^{(n-1)(\phi+\beta)/2}} \\
&\times \prod_{i=2}^n \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (\gamma + 2y)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy \\
&\times \frac{1}{(\delta/\gamma)^{\beta/2} 2K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})} x_1^{\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\delta x_1^{-1} + \gamma x_1) \right\} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L(\theta_2) &= \frac{\prod_{i=2}^n \{x_i^{\phi+a-1} x_{i-1}^\phi\} \exp \left\{ -b \sum_{i=2}^n (x_i) \right\}}{\Gamma^{n-1}(\phi) \Gamma^{n-1}(\phi + a)} \\
&\times \prod_{i=2}^n \int_0^\infty e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (b + y)^{\phi+a} dy \\
&\times \frac{b^a}{\Gamma(a)} x_1^{a-1} e^{-bx_1}. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

As funções de log-verossimilhança so obtidas aplicando o logaritmo nas Expressões (2.27) e (2.28)

$$\begin{aligned}
l(\theta_1) &= \sum_{i=2}^n \left[ (\phi + \beta - 1) \log(x_i) + \phi \log(x_{i-1}) \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (\delta x_i^{-1} + \gamma x_i) - \\
&(n-1) \log(\Gamma(\phi)) - \frac{(n-1)(\phi + \beta)}{2} \log(\delta) + \frac{\beta}{2} \log(\gamma) + \\
&\sum_{i=2}^n \log \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (\gamma + 2y)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy - \frac{\beta}{2} \log(\delta) - \log(2) - \\
&\log(K_\beta(\sqrt{\delta\gamma})) + (\beta - 1) \log(x_1) - \frac{1}{2} (\delta x_1^{-1} + \gamma x_1) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
l(\theta_2) &= \sum_{i=2}^n [(\phi + a - 1) \log(x_i) + \phi \log(x_{i-1})] - b \sum_{i=2}^n x_i - (n-1) \log(\Gamma(\phi)) - \\
&(n-1) \log(\Gamma(\phi + a)) + \sum_{i=2}^n \log \int_0^\infty e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (b + y)^{\phi+a} dy + \\
&a \log(b) - \log(\Gamma(a)) + (a-1) \log x_1 - bx_1. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

O próximo passo  a maximização das funções de log-verossimilhança. Devemos maximizar a Funo (2.29) em relação aos parâmetros  $\phi$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  e a Funo (2.30) em relação aos parâmetros  $\phi$ ,  $a$  e  $b$ . Métodos iterativos serão necessários para a maximização destas funes e uma quadratura numérica será utilizada para resolver as seguintes integrais que compõe as funes de log-verossimilhança

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (\gamma + 2y)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta}(\sqrt{\delta(\gamma + 2y)})} dy \quad (2.31)$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (b+y)^{\phi+a} dy. \quad (2.32)$$

[Kahaner et al. \(1989\)](#) fornecem maneiras para se fazer aproximações da solução de integrais via quadraturas numéricas. Deste modo, devemos buscar uma quadratura que se proponha a fornecer aproximações para as integrais das funções que estamos trabalhando, no nosso caso seria uma função do tipo  $\exp\{-x\}f(x)$ . Dentre as quadraturas numéricas disponíveis, a adequada para este problema é a Quadratura de Gauss Laguerre. Os autores afirmam que certas funções geralmente aparecem como parte do integrando em intervalos infinitos, e destacam que dois casos comuns são as funções:  $\exp\{-x\}$  e  $\exp\{-x^2\}$ . Denotando estas funções por  $q(x)$ , o método apresentado pelos autores envolve a seguinte técnica:

$$\int_c^d q(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n.$$

Os limites  $c$ ,  $d$  podem ser finitos ou infinitos. Os pontos  $x_k$  são chamados nós da quadratura, enquanto  $w_k$  são os pesos da quadratura associados aos nós e  $R_n$  denota o resto (para mais detalhes veja [\(Kahaner et al., 1989, pág. 166\)](#)).

Foi realizada uma mudança de variável nas integrais dadas pelas Expressões [\(2.31\)](#) e [\(2.32\)](#), para que pudéssemos usar a Quadratura de Gauss Laguerre

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (\gamma+2y)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta}(\sqrt{\delta(\gamma+2y)})} dy = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} \left(\frac{z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi-1} \left(\gamma + \frac{2z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta} \left(\sqrt{\delta \left(\gamma + \frac{2z}{x_i+x_{i-1}}\right)}\right) (x_i + x_{i-1})} dz$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-y(x_i+x_{i-1})} y^{\phi-1} (b+y)^{\phi+a} dy = \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi-1} \left(b + \frac{z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi+a} dz. \quad (2.33)$$

Deste modo, as aproximações para as integrais podem ser expressas por

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{\left(\frac{z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi-1} \left(\gamma + \frac{2z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta} \left(\sqrt{\delta \left(\gamma + \frac{2z}{x_i+x_{i-1}}\right)}\right) (x_i + x_{i-1})} dz \\ & \approx \sum_{k=1}^{17} w_k \frac{\left(\frac{z_k}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi-1} \left(\gamma + \frac{2z_k}{x_i+x_{i-1}}\right)^{(\phi+\beta)/2}}{2K_{\phi+\beta} \left(\sqrt{\delta \left(\gamma + \frac{2z_k}{x_i+x_{i-1}}\right)}\right) (x_i + x_{i-1})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi-1} \left(b + \frac{z}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi+a} dz \\ & \approx \sum_{k=1}^{17} w_k \left(\frac{z_k}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi-1} \left(b + \frac{z_k}{x_i+x_{i-1}}\right)^{\phi+a} \frac{1}{x_i + x_{i-1}}. \end{aligned}$$

No software R foi usada a função `gaussLaguerre` do pacote `pracma` para obtermos os pesos e nós da Quadratura de Gauss Laguerre. A escolha da quantidade de nós e pesos deve ser feita com cuidado, uma quantidade pequena pode ocasionar a perda de informações e uma quantidade grande pode apresentar nós cujos pesos são próximos de zero e que conseqüentemente, não agregam informação ao cálculo. Optamos por usar 17 nós e pesos, como sugerido em [Kahaner et al. \(1989\)](#), os quais são apresentados nas Tabelas 2.1 e 2.2 respectivamente.

Tabela 2.1: Nós da Quadratura de Gauss Laguerre ( $z_i$ ).

0,08263821	0,43615032	1,07517658	2,00519353	3,23425612	4,77351351
6,63782921	8,84668551	11,42552932	14,40782304	17,83828473	21,77826826
26,31531781	31,58177168	37,79609384	45,37571653	55,38975179	

Tabela 2.2: Pesos da Quadratura de Gauss Laguerre ( $w_i$ ).

$1,953322e^{-01}$	$3,203754e^{-01}$	$2,673297e^{-01}$	$1,451299e^{-01}$	$5,443694e^{-02}$	$1,435730e^{-02}$
$2,662825e^{-03}$	$3,436797e^{-04}$	$3,027552e^{-05}$	$1,768515e^{-06}$	$6,576273e^{-08}$	$1,469731e^{-09}$
$1,816910e^{-11}$	$1,095401e^{-13}$	$2,617374e^{-16}$	$1,672936e^{-19}$	$1,065626e^{-23}$	

### 2.4.1 Estudo de Simulação

Para avaliar o método de estimação proposto para o processo de Markov ponderado-gama realizamos um estudo de simulação Monte Carlo. No software R foi gerada em cada réplica Monte Carlo uma amostra de tamanho  $n$ . As funções de log-verossimilhança, dadas pelas Equações (2.29) e (2.30), foram maximizadas através do comando `Optim` com o método `Nelder-Mead`. O comando `Optim` exige que se forneça valores iniciais para os parâmetros, o valor um foi usado como valor inicial para os parâmetros  $\phi$ ,  $a$  e  $b$ , para os demais parâmetros,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ , oriundos da distribuição GIG, foram usadas como valores iniciais as estimativas de máxima verossimilhança obtidas pela função `gigFit` do pacote `GeneralizedHyperbolic`. Esta função encontra as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de uma distribuição GIG.

Sob as seguintes configurações para os parâmetros:  $\phi = 2$ ,  $\phi = 5$  e  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$  da distribuição GIG, e  $a = 2$  e  $b = 3$  da distribuição gama, foram realizadas simulações Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e amostras de tamanhos  $n = 500$ ,  $1000$  e  $5000$ .

Iniciamos a análise do estudo de simulação pelas Tabelas 2.3 e 2.4, que apresentam as médias empíricas e a raiz quadrada do Erro Quadrático Médio (REQM) das estimativas

de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG e do processo PG-Ga, respectivamente.

Os resultados apresentados nas Tabelas 2.3 e 2.4 evidenciam um baixo viés e REQM em todas as configurações de parâmetros e tamanhos de amostras ( $n = 500, 1000$  e  $5000$ ) consideradas, para o processo PG-GIG e para o processo PG-Ga.

O bom comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do processo PG-GIG,  $(\phi, \beta, \delta, \gamma)^\top = (5, 1, 2, 3)^\top$ , e do processo PG-Ga,  $(\phi, a, b)^\top = (5, 2, 3)^\top$ , respectivamente, é corroborado através das Figuras 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13.

As Figuras 2.10 e 2.11 apresentam os boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG e do processo PG-Ga, respectivamente, para os tamanhos de amostras  $n = 500, 1000$  e  $5000$ . Os boxplots para os cenários considerados indicam baixo viés e baixa dispersão das estimativas de máxima verossimilhança para todos os tamanhos de amostras considerados.

Realizamos uma padronização das estimativas de máxima verossimilhança do tipo média-desvio padrão e construímos os histogramas destas estimativas padronizadas. As Figuras 2.12 e 2.13 apresentam os histogramas das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG e do processo PG-Ga, para os tamanhos de amostras  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , com a curva da densidade. Esta análise revela uma boa aproximação normal, em especial quando o tamanho da amostra aumenta.

Padrões análogos foram observados para os cenários  $(\phi, \beta, \delta, \gamma)^\top = (2, 1, 2, 3)^\top$ , do processo PG-GIG, e  $(\phi, a, b)^\top = (2, 2, 3)^\top$ , do processo PG-Ga. Disponibilizamos também os qq-plots das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG e PG-Ga, para as duas configurações consideradas. Estes resultados estão disponíveis no Apêndice A.4.

Adicionalmente, analisamos a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança obtidos a partir da hessiana numérica. Realizamos um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , para as duas configurações de parâmetros consideradas, para os processos PG-GIG e PG-Ga. As probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança, aos níveis de confiança 90%, 95% e 99%, calculados via hessiana numérica estão dispostas nas Tabelas 2.5 e 2.6. Os resultados obtidos evidenciam um bom comportamento do estimador de máxima verossimilhança, uma vez que a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança se aproximam dos níveis de confiança considerados, conforme o tamanho da amostra aumenta. Além disso, o desempenho já se mostra satisfatório para amostras de tamanho  $n = 500$  para todos os cenários estudados.

Para as configurações de parâmetros consideradas, concluímos que o estimador de máxima verossimilhança funcionou bem no estudo de simulação realizado.

Tabela 2.3: Médias empíricas e REQM (em parênteses) das estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\phi = 2, 5$  e  $\beta = 1, \delta = 2$  e  $\gamma = 3$  do processo PG-GIG, para amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$  em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas.

Parâmetros	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 5000$
$\phi = 2$	1,965 (0,333)	1,974 (0,233)	1,992 (0,102)
$\beta = 1$	0,931 (0,739)	0,993 (0,517)	0,998 (0,226)
$\delta = 2$	2,109 (0,716)	2,032 (0,506)	2,014 (0,220)
$\gamma = 3$	2,975 (0,601)	3,013 (0,418)	2,993 (0,183)
$\phi = 5$	4,957 (0,504)	4,995 (0,349)	5,003 (0,164)
$\beta = 1$	0,928 (0,834)	0,974 (0,569)	0,998 (0,257)
$\delta = 2$	2,145 (0,859)	2,069 (0,569)	2,007 (0,257)
$\gamma = 3$	2,998 (0,659)	3,013 (0,466)	3,002 (0,205)

Tabela 2.4: Médias empíricas e REQM (em parênteses) das estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\phi = 2, 5$  e  $a = 2$  e  $b = 3$  do processo PG-Ga, para amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$  em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas.

Parâmetros	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 5000$
$\phi = 2$	1,981 (0,250)	1,982 (0,173)	1,994 (0,079)
$a = 2$	2,032 (0,200)	2,015 (0,137)	2,002 (0,060)
$b = 3$	3,053 (0,271)	3,023 (0,192)	3,003 (0,081)
$\phi = 5$	4,980 (0,440)	4,988 (0,306)	5,005 (0,138)
$a = 2$	2,060 (0,277)	2,027 (0,192)	2,002 (0,085)
$b = 3$	3,089 (0,356)	3,042 (0,249)	3,006 (0,108)

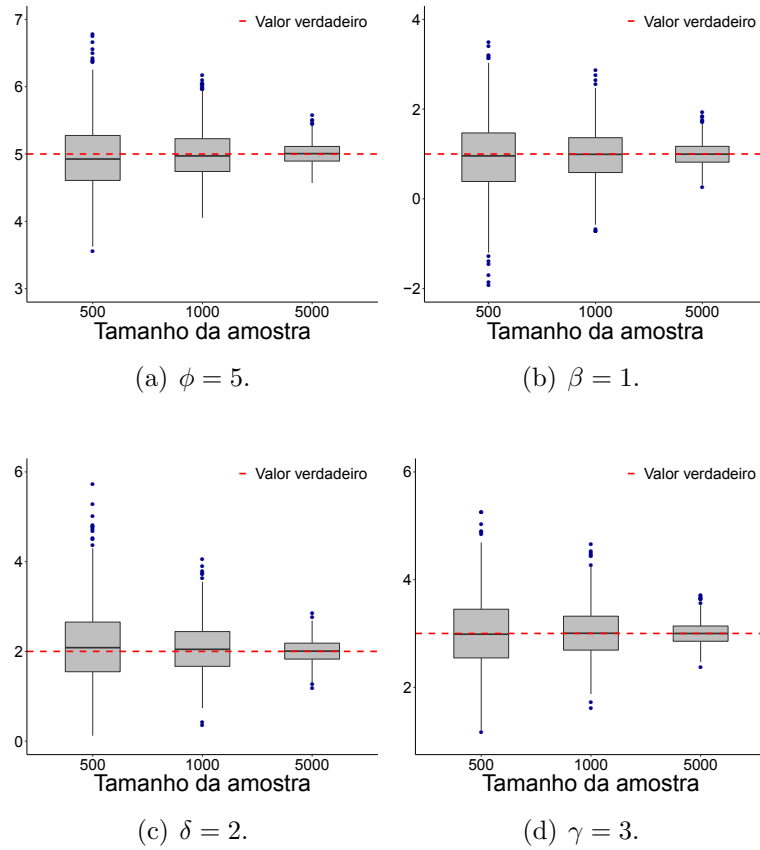


Figura 2.10: Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

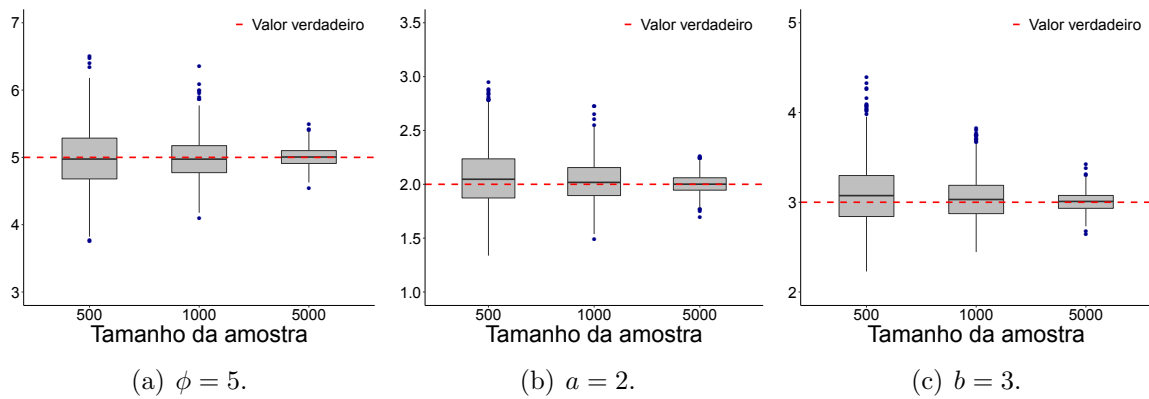


Figura 2.11: Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 5$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

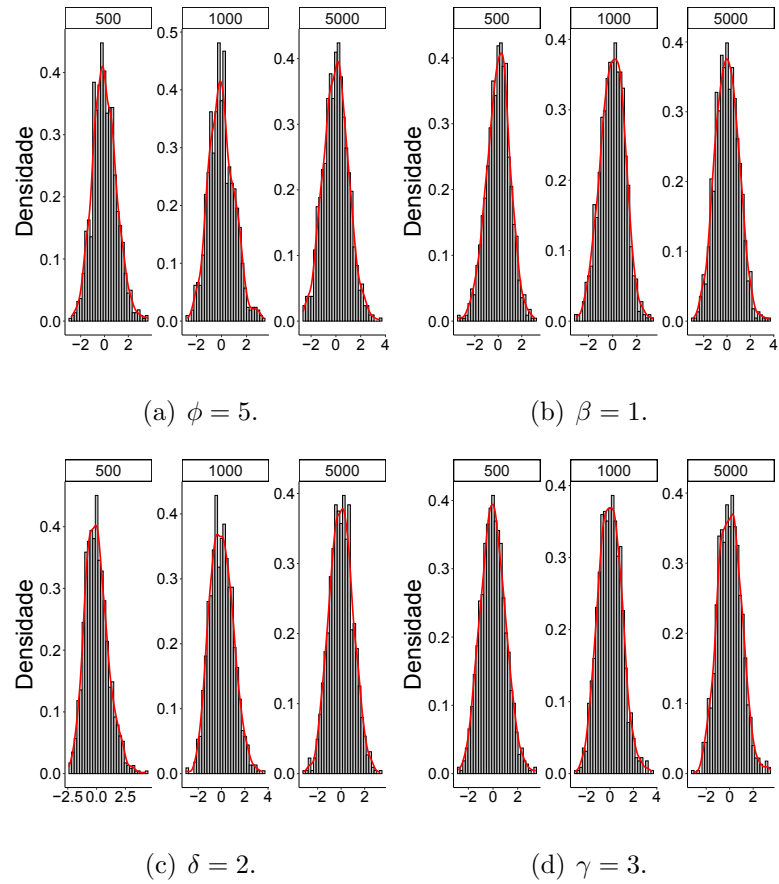


Figura 2.12: Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

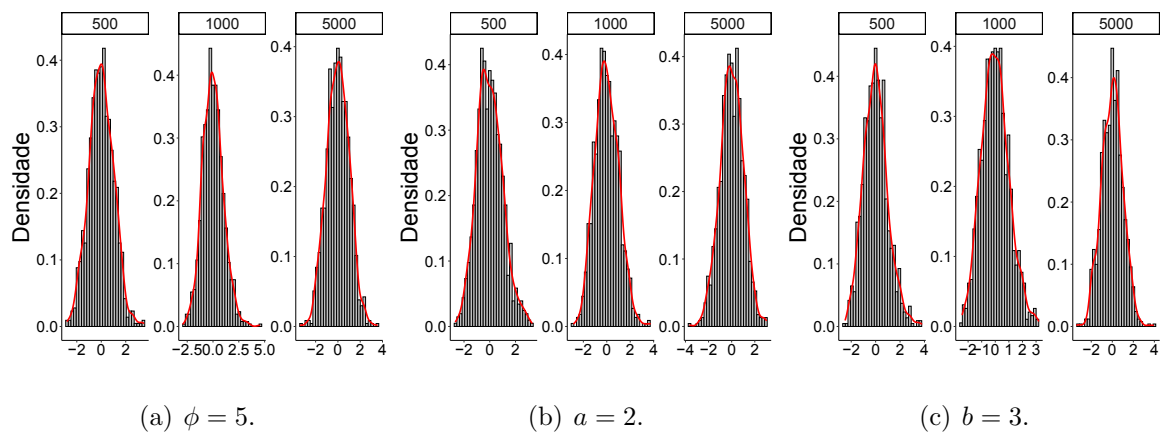


Figura 2.13: Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 5$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

Tabela 2.5: Probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança para os parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2, 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , calculadas via hessiana numérica, para amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$  em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas.

	IC( $\cdot$ , 10%)	IC( $\cdot$ , 5%)	IC( $\cdot$ , 1%)	IC( $\cdot$ , 10%)	IC( $\cdot$ , 5%)	IC( $\cdot$ , 1%)
	$\phi = 2$			$\phi = 5$		
$n = 500$	0,881	0,935	0,978	0,891	0,946	0,984
$n = 1000$	0,895	0,943	0,977	0,916	0,952	0,992
$n = 5000$	0,889	0,938	0,990	0,892	0,940	0,987
	$\beta = 1$			$\beta = 1$		
$n = 500$	0,889	0,945	0,984	0,902	0,943	0,988
$n = 1000$	0,904	0,946	0,987	0,914	0,958	0,991
$n = 5000$	0,905	0,954	0,992	0,916	0,951	0,991
	$\delta = 2$			$\delta = 2$		
$n = 500$	0,896	0,940	0,985	0,890	0,941	0,987
$n = 1000$	0,906	0,949	0,987	0,910	0,964	0,993
$n = 5000$	0,905	0,954	0,988	0,910	0,956	0,990
	$\gamma = 3$			$\gamma = 3$		
$n = 500$	0,896	0,937	0,985	0,907	0,949	0,988
$n = 1000$	0,892	0,954	0,986	0,907	0,950	0,990
$n = 5000$	0,908	0,949	0,991	0,915	0,956	0,991

Tabela 2.6: Probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança para os parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 2, 5$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , calculadas via hessiana numérica, para amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$  em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas.

	IC( $\cdot$ , 10%)	IC( $\cdot$ , 5%)	IC( $\cdot$ , 1%)	IC( $\cdot$ , 10%)	IC( $\cdot$ , 5%)	IC( $\cdot$ , 1%)
	$\phi = 2$			$\phi = 5$		
$n = 500$	0,888	0,934	0,982	0,898	0,938	0,985
$n = 1000$	0,889	0,943	0,986	0,905	0,949	0,986
$n = 5000$	0,874	0,939	0,988	0,900	0,953	0,991
	$a = 2$			$a = 2$		
$n = 500$	0,901	0,944	0,990	0,891	0,942	0,989
$n = 1000$	0,908	0,960	0,993	0,901	0,958	0,993
$n = 5000$	0,901	0,956	0,991	0,900	0,944	0,988
	$b = 3$			$b = 3$		
$n = 500$	0,896	0,948	0,986	0,898	0,941	0,987
$n = 1000$	0,893	0,955	0,987	0,910	0,964	0,993
$n = 5000$	0,911	0,953	0,991	0,895	0,944	0,990

## 2.5 Volatilidade realizada do índice FTSE 100

A disponibilidade de dados de alta frequência no mercado financeiro motivou, nas últimas décadas, o interesse em estudos de modelos estatísticos para o ajuste destes dados (Engle, 1982; Bollerslev, 1986; Andersen et al., 2003; Corsi et al., 2008; Chen et al., 2018; Takahashi et al., 2021; Chen et al., 2021). Calculada a partir de retornos de alta frequência de ativos financeiros (computados em períodos de tempo determinados), a volatilidade realizada mede a dispersão destes retornos e, através dela, é possível realizar previsões da oscilação futura do ativo financeiro.

Nesta seção, motivamos o processo de Markov ponderado-gama através de uma aplicação empírica baseada nos dados da volatilidade realizada dos log-retornos do índice FTSE 100 (Financial Times and Stock Exchange Group), o qual representa as 100 maiores empresas listadas na Bolsa de Londres.

Disponíveis em Heber et al. (2020), os dados selecionados consistem em 939 observações da volatilidade realizada diária, dos log-retornos computados a cada 10 minutos, do índice FTSE 100. A amostra abrange o período de 31 de outubro de 2003 a 31 de maio de 2007.

Os dados selecionados foram, primeiramente, tratados. Neste conjunto 38 observações são faltantes e há um valor discrepante dos demais (este valor é consequência de um fato isolado que aconteceu na Inglaterra). A abordagem escolhida consiste em excluir os dados faltantes, uma vez que, estas observações são referentes a datas que correspondem a finais de semana ou feriados na Inglaterra. Em seguida, o valor discrepante foi substituído por um valor faltante (NA) e foi imputado usando o pacote `mice` do software R. Culminando em uma série com 901 observações. A Tabela 2.7 apresenta as estatísticas descritivas da série após o tratamento.

Tabela 2.7: Estatísticas descritivas da volatilidade realizada diária, dos log-retornos computados a cada 10 minutos, das ações que compõe o índice FTSE 100 (31/10/2003 a 31/05/2007).

$n$	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio padrão
901	$3,091e^{-6}$	$2,501e^{-4}$	$2,598e^{-5}$	$2,003e^{-5}$	$2,397e^{-5}$

Os gráficos da trajetória, autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF) da volatilidade realizada são exibidos na Figura 2.14. O gráfico da ACF parece apresentar um decaimento exponencial e o gráfico da PACF apresenta picos significativos nos primeiros lags, em particular no primeiro lag. Dado o comportamento estacionário e o suporte positivo da volatilidade realizada, percebido no gráfico da trajetória, parece razoável considerar os processos PG-GIG ou PG-Ga para realizar o ajuste da série.

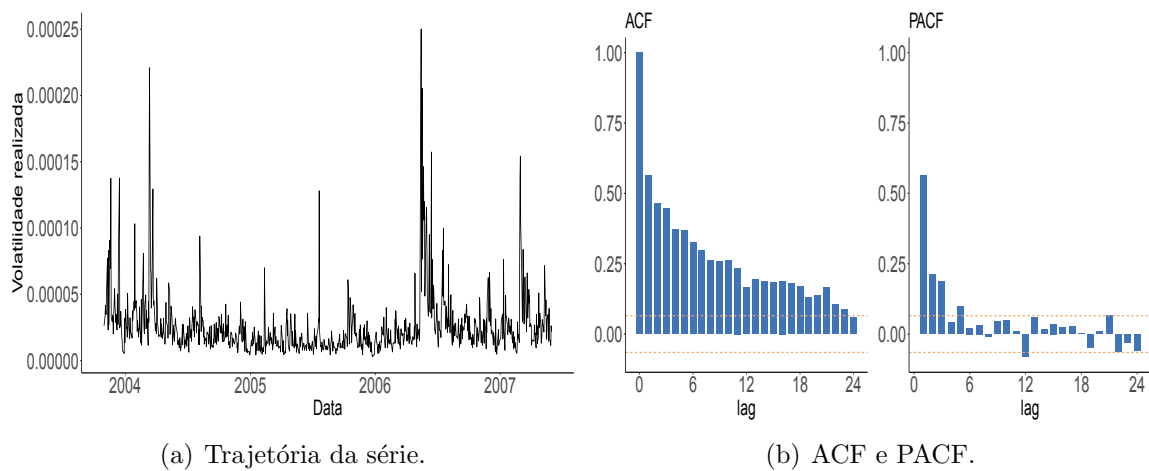


Figura 2.14: Gráficos da trajetória, ACF e PACF da volatilidade realizada diária, dos log-retornos computados a cada 10 minutos, das ações que compõe o índice FTSE 100 (31/10/2003 a 31/05/2007).

Os métodos de estimação propostos para os processos PG-GIG e PG-Ga foram implementados à volatilidade realizada multiplicada por  $10^3$ . As Tabelas 2.8 e 2.9 exibem as estimativas de máxima verossimilhança, erro padrão (obtido via hessiana numérica) e o intervalo de confiança ao nível de confiança de 95%, para os parâmetros dos processos PG-GIG e PG-Ga, respectivamente.

Tabela 2.8: Estimativas de máxima verossimilhança, erro padrão (obtido via hessiana numérica) e limites inferior e superior do intervalo de confiança para a volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100, ajustados ao processo PG-GIG.

Parâmetros	Estimativas	ep	95% IC
$\hat{\phi}$	4,082	0,293	(3,507, 4,67)
$\hat{\beta}$	-2,007	0,366	(-2,725, -1,289)
$\hat{\delta}$	0,074	0,008	(0,058, 0,091)
$\hat{\gamma}$	17,677	10,827	(0,000, 38,897)

Tabela 2.9: Estimativas de máxima verossimilhança, erro padrão (obtido via hessiana numérica) e limites inferior e superior do intervalo de confiança para a volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100, ajustados ao processo PG-Ga.

Parâmetros	Estimativas	ep	95% IC
$\hat{\phi}$	4,929	0,308	(4,325, 5,532)
$\hat{a}$	1,424	0,177	(1,078, 1,771)
$\hat{b}$	55,134	5,653	(44,053, 66,214)

Na Subseção 2.5.1 discutiremos as metodologias adotadas para realizar a análise de desempenho dos processos PG-GIG e PG-Ga.

### 2.5.1 Avaliação de desempenho dos processos de Markov ponderado-gama

Nesta subsecção, avaliaremos o desempenho dos processos PG-GIG e PG-Ga, através de um exercício de *pseudo previsão*, análise dos resíduos de Pearson por meio de envelopes simulados e construção de histogramas PIT (Probability Integral Transform).

Inicialmente, realizaremos um exercício de *pseudo previsão*, como feito em [Agosto et al. \(2016\)](#). Este método consiste em dividir a amostra, de tamanho  $n$ , em duas partes. A primeira parte com tamanho  $n_0$ ,  $\{x_{t-1} : t = 1, \dots, n_0\}$ , é usada para a estimação inicial do modelo e as observações restantes, de tamanho  $n - n_0$ ,  $\{x_{t-1} : t = n_0 + 1, \dots, n\}$  serão usadas para o exercício de previsão.

Dado  $\hat{\theta}_t$ , o vetor de estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG, calculamos a previsão um passo à frente correspondente de  $x_{t+1}$ ,  $\hat{x}_{t+1|t} = \mathbb{E}(X_{t+1}|X_t, \hat{\theta}_t)$ , usando apenas as informações até o tempo  $t$ . Este exercício é repetido para  $t = n_0 + 1, \dots, n$ , fornecendo, assim, uma série temporal de estimadores,  $\{\hat{\theta}_t : t = n_0, \dots, n\}$ , e as previsões correspondentes,  $\{\hat{x}_{t+1|t} : t = n_0, \dots, n\}$ . Este procedimento imita o que um previsor obteria ao começar a fazer as previsões no tempo  $n_0$  e atualiza as estimativas de máxima verossimilhança e previsões conforme mais dados chegam.

Dado o caminho de previsão  $\hat{x}_{t+1|t}$ , avaliamos o desempenho dos processos PG-GIG e PG-Ga por meio de duas funções de perda de previsão padrão. A primeira função é o erro de previsão médio quadrático (MSFE<sup>3</sup>),

$$MSFE_t = \frac{1}{t - n_0} \sum_{s=n_0}^n (x_{s+1} - \hat{x}_{s+1|s})^2, \quad t = n_0 + 1, \dots, n, \quad (2.34)$$

e a segunda função é a pontuação média (logarítmica) da previsão (FS<sup>4</sup>)

$$FS_t = \frac{1}{t - n_0} \sum_{s=n_0}^n (x_{s+1} \log(\hat{x}_{s+1|s}) - \hat{x}_{s+1|s}), \quad t = n_0 + 1, \dots, n. \quad (2.35)$$

Para o exercício de *pseudo previsão*, os dados da volatilidade realizada dos log-retornos do índice FTSE 100 foram divididos em duas partes. A primeira parte com tamanho  $n_0 = 500$ ,  $\{x_{t-1} : t = 1, \dots, 500\}$ , que correspondem ao período de 31 de outubro de 2003 a 26 de outubro de 2005, foram usadas para a estimação inicial do modelo. As observações restantes, de tamanho 401,  $\{x_{t-1} : t = 501, \dots, 901\}$ , que correspondem ao período de 27 de outubro de 2005 a 31 de maio de 2007, foram usadas para o exercício de previsão.

<sup>3</sup>Mean-Square Forecasting Error;

<sup>4</sup>Forecasting Score.

A Figura 2.15 apresenta os gráficos dos valores preditos, para os processos PG-GIG e PG-Ga, através do exercício de *pseudo previsão* e os valores verdadeiros das observações. Nesta figura, não é possível realizar uma comparação entre os dois processos, porém pode-se perceber que apresentam um comportamento coerente ao longo do exercício de *pseudo previsão*, comparando os valores preditos e os valores observados. Através dos gráficos das funções MSFE e FS, Figura 2.16, podemos comparar o desempenho dos processos PG-GIG e PG-Ga. Em geral, os valores obtidos através das duas funções são próximos a zero, como esperado. Em particular, o gráfico da função FS não capta diferença significativa entre o desempenho dos dois processos, por outro lado, gráfico da função MSFE indica que o processo PG-GIG apresenta um desempenho superior ao processo PG-Ga no início do exercício e um desempenho inferior ao processo PG-Ga no final do exercício.

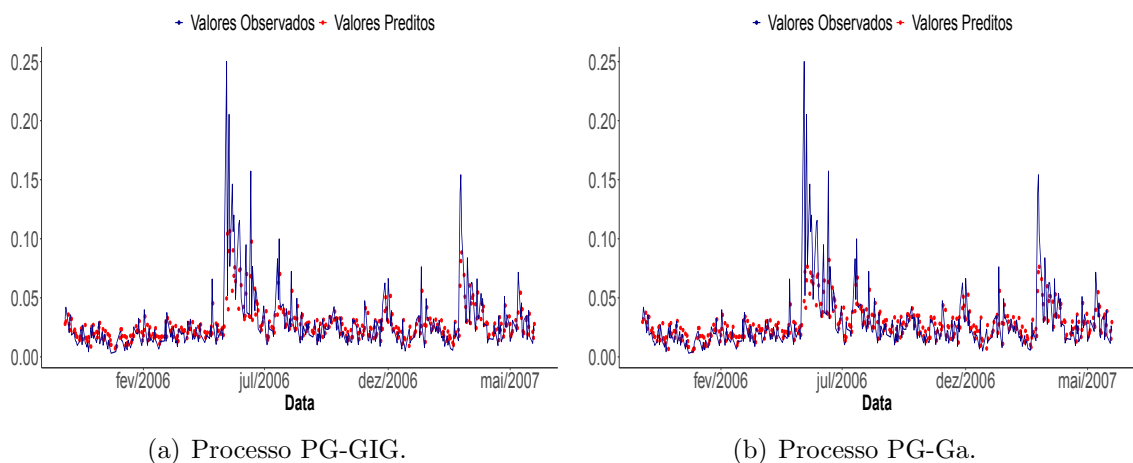


Figura 2.15: *Pseudo previsão* um passo a frente para a volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100. Análise realizada para o período de 27 de setembro de 2005 a 31 de maio de 2007, considerando os processos PG-GIG e PG-Ga.

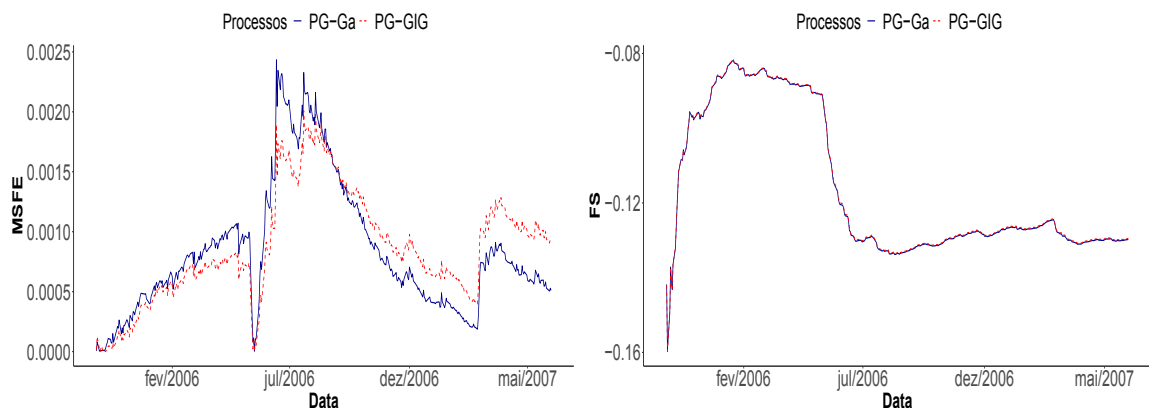


Figura 2.16: Gráficos das funções MSFE e FS para a volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100. Análise realizada para o período de 27 de setembro de 2005 a 31 de maio de 2007, considerando os processos PG-GIG e PG-Ga.

O segundo método para a avaliação do ajuste dos processos PG-GIG e PG-Ga será a análise dos resíduos de Pearson, por meio de envelopes simulados.

O resíduo de Pearson tem a seguinte expressão:

$$r_i = \frac{x_i - \hat{x}_i}{\hat{s}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.36)$$

onde  $\hat{x}_i = \widehat{\mathbb{E}}(X_i | X_{i-1} = x_{i-1})$  e  $\hat{s}_i^2 = \widehat{Var}(X_i | X_{i-1} = x_{i-1})$  representam, respectivamente, os valores preditos e a variância condicional do modelo. Estes resultados podem ser obtidos pelas Expressões (2.25) e (2.15).

O resíduo de Pearson tem distribuição fortemente assimétrica para modelos não-normais e, considerando este fato, devemos usar um procedimento para verificar a adequação dos processos. Realizaremos a construção de um envelope simulado a partir de gráficos quantil-quantil normais dos resíduos de Pearson, de modo a lidar com esta falta de normalidade (Barreto-Souza e Simas, 2016). Os resíduos fora do envelope podem indicar que, ou o modelo é inadequado para o conjunto de dados ou são outliers.

Considerando as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros dos processos PG-GIG e PG-Ga,  $\hat{\theta}_1 = (\hat{\phi}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\gamma})^\top$  e  $\hat{\theta}_2 = (\hat{\phi}, \hat{a}, \hat{b})^\top$ , apresentadas nas Tabelas 2.8 e 2.9, a construção dos envelopes simulados para os resíduos Pearson é detalhada no Algoritmo 1.

Para o banco de dados aqui considerado, temos um tamanho de amostra  $n = 901$  e realizamos um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas. As Figuras 2.17 e 2.18 apresentam o envelope simulado para os resíduos de Pearson *versus* os quantis teóricos da distribuição normal padrão com bandas construídas usando os percentis 2,5% e 97,5% dos resíduos de Pearson,  $\tilde{r}_i$ , obtidos em cada réplica Monte Carlo e através dos valores mínimo e máximo de  $\tilde{r}_i$ .

Analisando as Figuras 2.17 e 2.18, o ajuste parece ser adequado ao processo PG-GIG, uma vez que os envelopes acomodam melhor os resíduos comparado ao processo com marginal gama. O processo com marginal GIG apresenta 90% dos resíduos de Pearson verdadeiros dentro do envelope construído usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$  e 99% dos resíduos de Pearson verdadeiros dentro do envelope construído usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$ . O modelo com marginal gama apresenta 70% dos resíduos de Pearson verdadeiros dentro do envelope construído usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$  e 96% dos resíduos de Pearson verdadeiros dentro do envelope construído usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$ .

**Algoritmo 1:** Envelope simulado para os resíduos de Pearson:

- 1) Considerando o banco de dados, de tamanho  $n$ , encontre as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do processo PG. Para cada observação  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , compute  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{s}_i^2$  e o resíduo de Pearson  $r_i$ ;
- 2) Gere  $n$  observações do processo PG,  $\tilde{X}_t | \tilde{Y}, \tilde{X}_{t-1}$ , considerando as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros obtidas no passo anterior.
- 3) Obtenha as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do processo PG, a partir da amostra gerada no passo 2;
- 4) Compute o resíduo de Pearson  $\tilde{r}_i$  usando  $\tilde{X}_t | (\tilde{Y}, \tilde{X}_{t-1})$  e a Equação (2.36);
- 5) Repita os passos 2 à 4  $N$  vezes (obtendo  $N$  resíduos  $\tilde{r}_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, N$ );
- 6) Para cada  $j$ , ordene os  $n$  resíduos  $\tilde{r}_{ij}$  em ordem não-decrescente, obtendo os resíduos ordenados  $\tilde{r}_{(i)j}$ ;
- 7) Usaremos as duas abordagens:
  - I) Para  $i$ , obtenha o valor máximo e o valor mínimo dos resíduos ordenados  $\tilde{r}_{(i)j}$  sobre  $j$ :  

$$\tilde{r}_i^m = \min_j \tilde{r}_{(i)j} \text{ e } \tilde{r}_i^M = \max_j \tilde{r}_{(i)j};$$
  - II) Para  $i$ , obtenha os percentis 2,5% e 97,5% para os resíduos ordenados  $\tilde{r}_{(i)j}$  sobre  $j$ ,  $\tilde{r}_i^{2,5\%}$  e  $\tilde{r}_i^{97,5\%}$ , respectivamente.
- 8) Os limites inferior e superior para cada resíduo do processo PG original  $r_i$  são dados por:
  - I)  $\tilde{r}_i^m$  e  $\tilde{r}_i^M$ , respectivamente;
  - II)  $\tilde{r}_i^{2,5\%}$  e  $\tilde{r}_i^{97,5\%}$ , respectivamente.

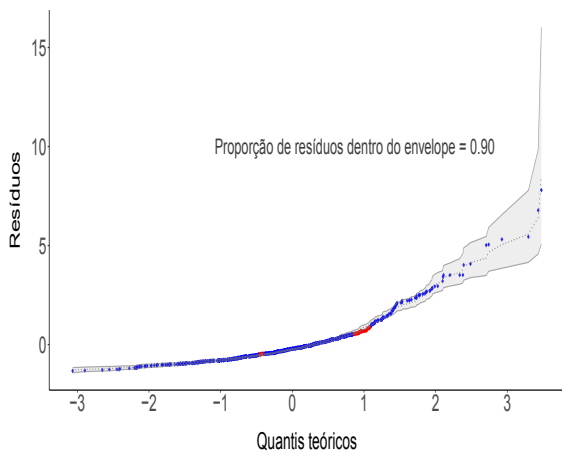
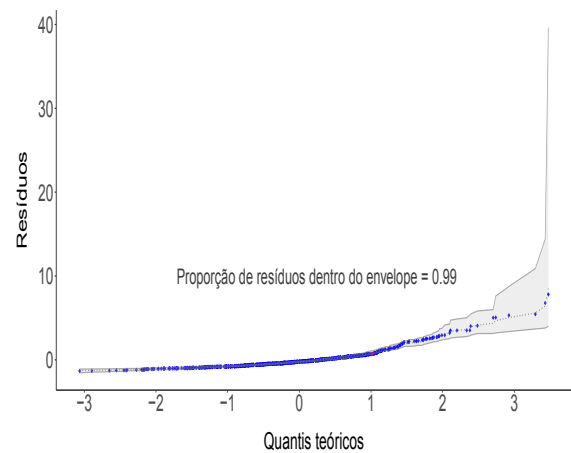
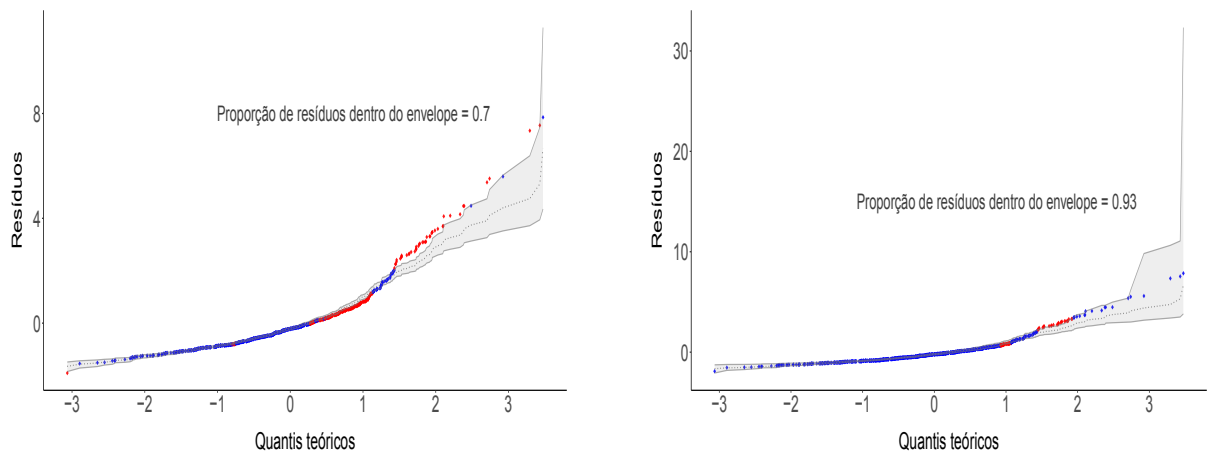
(a) Envelope com bandas construídas usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$ .(b) Envelope com bandas construídas usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$ .

Figura 2.17: Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo PG-GIG.



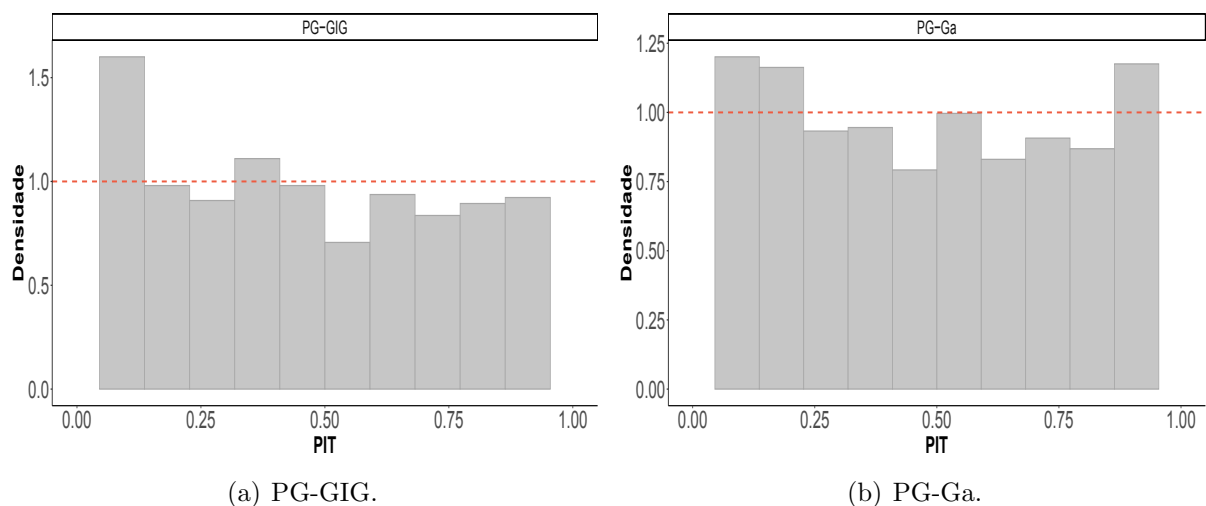
(a) Envelope com bandas construídas usando o os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$ .

(b) Envelope com bandas construídas usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$ .

Figura 2.18: Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo PG-Ga.

Por fim, apresentamos a análise de desempenho dos processos PG-GIG e PG-Ga, realizada através da verificação da calibração dos processos por meio da construção de histogramas PIT.

O histograma PIT é usado como uma ferramenta de diagnóstico, de modo que, desvios da uniformidade sugerem motivos para falhas de previsão e deficiências do modelo (Dawid, 1984). Ele avalia o valor que a função de distribuição acumulada preditiva atinge na observação. Se a distribuição preditiva for contínua, espera-se que o PIT tenha uma distribuição uniforme padrão.



(a) PG-GIG.

(b) PG-Ga.

Figura 2.19: Histogramas PIT dos processos PG-GIG e PG-Ga ajustados a volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o FTSE 100.

Os histogramas PIT para a aplicação considerada neste trabalho são apresentados na Figura 2.19. Podemos observar que o processo de Markov ponderado-gama fornece um

ajuste apropriado para os dados, tanto para marginal GIG quanto para a marginal gama, uma vez que os histogramas tem distribuição quase uniforme.

De maneira geral, podemos concluir que o processo de Markov ponderado-gama, com distribuições marginais GIG ou gama, é adequado para realizar o ajuste da volatilidade realizada diária dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos a construção de um novo processo de Markov para séries temporais contínuas, positivas e com dependência temporal de primeira ordem, o processo de Markov ponderado-gama.

O processo proposto é reversível no tempo e tem distribuição estacionária  $f$ , onde  $f$  é a distribuição marginal do modelo. Marginais gama ou GIG levaram a um processo de Markov ponderado-gama com expressões fechadas para a densidade de peso e o caso gama retornou expressão fechada para a correlação. A estimação dos parâmetros foi realizada via método de máxima verossimilhança. Para avaliação do método inferencial proposto, um estudo de simulação foi apresentado com avaliação de dois cenários distintos para os valores dos parâmetros em cada marginal considerada, retornando não apenas as estimativas de máxima verossimilhança, como também a raiz quadrada do erro quadrático médio e as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança.

Foi realizado um estudo empírico a respeito do ajuste do modelo aos dados de volatilidade realizada, dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100. Os processos PG-GIG e PG-Ga foram considerados para o ajuste dos dados. Avaliamos o ajuste do modelo aos dados através de um exercício de *pseudo previsão*, da análise dos resíduos de Pearson, por meio de envelopes simulados, e da calibração dos modelos através da construção de histogramas PIT. As análises realizadas indicaram que os processos PG-GIG e PG-Ga tiveram desempenho satisfatório. Ressaltamos o desempenho superior do processo PG-GIG indicado pela análise dos resíduos de Pearson.

Para trabalhos futuros, pretendemos estudar a construção de um processo de Markov com densidade de peso contínua em tempo contínuo. A escolha da densidade de peso é ponto fundamental para o funcionamento do processo. Desse modo, devemos considerar funções de densidade de probabilidade com parâmetros que possibilitem que a equação de Chapman-Komolgorov seja satisfeita. Outro ponto que temos interesse em investigar é a construção de modelos multivariados seguindo esta estrutura.

## Capítulo 3

# Modelagem de Séries Temporais Inteiras Multivariadas via Cópulas

### 3.1 Introdução

Em alguns contextos, os dados de séries temporais necessitam de uma abordagem multivariada. Por exemplo, a modelagem conjunta para as taxas de câmbio em relação a uma moeda ou retornos de ações, a avaliação de elementos como ponto de condensação da água, velocidade do vento e porcentagem de cobertura das nuvens para realizar a previsão de temperatura, entre outros.

Na segunda parte deste trabalho, propomos uma modelagem para o ajuste de dados inteiros, com dependência temporal e que demonstram a necessidade de uma modelagem conjunta com dependência contemporânea. A dependência contemporânea se refere a dependência de cada série em relação ao histórico das outras séries consideradas na modelagem. Deste modo, para trabalhar com dados que apresentem estas características, realizamos a construção de uma classe de modelos para análise de séries temporais multivariadas, para modelagem de dados inteiros, combinando a metodologia INGARCH (Integer valued Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedastic) com cópulas. A dinâmica do modelo é considerada através da variância condicional, dadas as observações passadas.

No contexto de estatística multivariada, a cópula é uma forma eficiente de se realizar a construção de modelos. A facilidade em se construir modelos multivariados a partir de cópulas, motivou vários estudos na área de economia. O trabalho realizado por Patton (2006) foi pioneiro na construção de modelos para séries temporais através de cópulas com distribuições condicionais, dadas as observações passadas. Outras propostas para a construção de modelos multivariados para séries temporais surgiram na literatura, como o modelo multivariado para séries temporais com cópula t-Student proposto por Şerban et al. (2007), o modelo para clusters de séries temporais financeiras estudado por

Onorati e Liseo (2022), o modelo de cópula de videira<sup>1</sup> para séries temporais construído por Acar et al. (2019), entre outros.

Construções de modelos multivariados para séries temporais inteiras usando cópulas são encontrados em menor número na literatura. Destacaremos as construções disponíveis a seguir.

Um modelo de cópula bivariada com marginais discretas é explorado por Smith e Khaled (2012). Diante da dificuldade em se realizar a maximização direta da função de log-verossimilhança, os autores realizam um aumento da verossimilhança<sup>2</sup> com variáveis latentes contínuas e realizam a inferência usando a posteriori aumentada resultante.

Usando o argumento de extensão continuada proposto por Denuit e Lambert (2005), Heinen e Rengifo (2007) apresentam um modelo multivariado para séries temporais de contagem através da teoria de cópulas. O modelo com distribuições condicionais discretas, dadas as observações passadas, proposto por eles é autoregressivo e a distribuição condicional é Poisson-dupla.

Koopman et al. (2018) apresentam um modelo multivariado para cópulas com distribuições condicionais discretas e ilustram o caso bivariado com marginais Skellam. A especificação da dinâmica temporal é realizada considerando a abordagem “score-driven” (Creal et al., 2011, 2013; Harvey, 2013). Mais detalhes desta construção serão apresentados na Subseção 3.2.1.

A metodologia que propomos neste trabalho acomoda a dinâmica de dependência temporal e dependência contemporânea na cópula, através da metodologia INGARCH. A metodologia INGARCH surgiu com o objetivo de modelar dados de contagem e é um análogo para dados discretos do modelo GARCH( $p, q$ ) de Bollerslev (1986).

Autores como Heinen (2003), Ferland et al. (2006) e Fokianos et al. (2009) realizaram estudos pioneiros nesta área explorando o modelo INGARCH com distribuição Poisson. Construções considerando outras distribuições para o modelo INGARCH podem ser encontradas na literatura, como o modelo INGARCH binomial negativo (Zhu, 2010), o modelo INGARCH com a Poisson misturada (Christou e Fokianos, 2015; Silva e Barreto-Souza, 2019), entre outros. Além disso, Fokianos (2011) introduziu um modelo INGARCH log-linear e Fokianos e Tjøstheim (2012) introduziram um modelo INGARCH não-linear para séries temporais de contagem.

Para as versões multivariadas da metodologia INGARCH podemos destacar o trabalho realizado em Liu (2012) que formula um modelo INGARCH bivariado (BINGARCH) Poisson. Lee et al. (2018) focam no modelo BINGARCH proposto por Liu (2012) para desenvolver o teste CUSUM que detecta a mudança de parâmetro em mo-

<sup>1</sup>Uma cópula de videira, também conhecida como cópulas de pares, é uma sequência de cópulas bivariadas.

<sup>2</sup>Para  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ , com função de distribuição  $F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m))$ , ( $C$  é a função de distribuição da cópula), o aumento da verossimilhança é realizado considerando a distribuição conjunta de  $(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ , onde  $\mathbf{U}$  é um vetor de variáveis latentes uniformemente distribuídas no intervalo  $[0, 1]$ .

delos autoregressivos bivariados Poisson. Cui e Zhu (2018) também propõem um modelo INGARCH bivariado, porém baseado na distribuição Poisson bivariada de Lakshminarayana et al. (1999). Um novo modelo INGARCH condicional Poisson bivariado é estudado por Piancastelli et al. (2022). O modelo proposto por estes autores é matematicamente tratável e tem como destaque em relação aos modelos presentes na literatura sua capacidade de capturar uma ampla gama de correlações contemporâneas negativas e positivas.

Para a construção que propomos neste trabalho, consideramos também a metodologia INGARCH para dados inteiros. Como referências, tomamos os processos Skellam-GARCH de primeira ordem estudados por Alomani et al. (2018) e Doukhan et al. (2021).

A principal contribuição desta pesquisa é o desenvolvimento de um novo modelo que avalia conjuntamente séries temporais inteiras, através da metodologia INGARCH e cópulas, com a implementação do modelo e estimação de seus parâmetros realizadas de forma simples. Uma outra contribuição do nosso trabalho é considerar como opção para a distribuição condicional do modelo, além da distribuição Skellam, a distribuição Laplace discreta. Esta trouxe ganhos no que diz respeito a qualidade de ajuste do modelo no estudo empírico e apresentou ganhos computacionais, quando comparada a distribuição Skellam.

No modelo proposto, a estimação foi realizada via método de máxima verossimilhança em dois estágios usando a teoria clássica de inferência. Foi realizado, também um estudo empírico, onde modelamos conjuntamente a variação dos ticks da taxa de câmbio entre o euro e a libra esterlina (EUR/GBP), e entre o euro e o dólar (EUR/USD).

A organização deste capítulo é descrita a seguir. Na Seção 3.2 apresentamos definições básicas da teoria de cópulas e da metodologia INGARCH para a construção do modelo proposto neste trabalho. Na Seção 3.3 introduzimos os modelos cópula-INGARCH (CINGARCH), considerando as distribuições condicionais Laplace discreta e Skellam. A Seção 3.4 é voltada à estimação dos parâmetros do modelo via método de máxima verossimilhança em dois estágios e a um estudo de simulação Monte Carlo realizado para avaliação do método inferencial proposto. Na Seção 3.5 o modelo CINGARCH é usado para modelar conjuntamente a variação dos ticks das taxas de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD. A Seção 3.6 é dedicada às conclusões do capítulo e aos pontos de pesquisas futuras.

## 3.2 Preliminares

Nesta seção apresentaremos as definições de cópula e processo INGARCH, que são as ferramentas utilizadas na construção do segundo modelo proposto neste trabalho. Listaremos algumas cópulas e citaremos referências importantes no estudo de modelos para dados inteiros.

### 3.2.1 Cópula - Definições básicas

Seja  $\mathbb{I}$  o intervalo  $[0, 1]$ . O produto cartesiano de  $d$  cópias do intervalo  $\mathbb{I}$  será denotado por  $\mathbb{I}^d$ . A seguir, apresentamos a definição de cópulas usando como base o livro de [Durante e Sempi \(2015\)](#).

**Definição 3.2.1.** *Seja  $d \geq 2$ . Uma cópula  $d$ -dimensional ( $d$ -cópula) é uma função de distribuição de probabilidade  $d$ -dimensional concentrada em  $\mathbb{I}^d$  cujas marginais univariadas são uniformemente distribuídas no intervalo  $\mathbb{I}$ .*

**Definição 3.2.2.** *Considere um retângulo  $A$  em  $\mathbb{R}^d$ . Seja  $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que a função  $H$  é  $d$ -crescente se o volume  $V_H$  de todo retângulo  $]a, b]$  é positivo, ou seja,  $V_H(]a, b]) \geq 0$ .*

Essa propriedade  $d$ -crescente também é conhecida como propriedade monótona. No caso unidimensional, com  $d = 1$ , uma função 1-crescente é uma função crescente.

Uma cópula  $C$  pode ser entendida como a função de distribuição de probabilidade acumulada de um vetor aleatório uniforme  $\mathbf{U}$ .

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $C : \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{I}$  uma função. Diremos que  $C$  é uma cópula  $d$ -dimensional se, e somente se, as condições a seguir forem satisfeitas:*

- i)  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$  se  $u_j = 0$  para pelo menos um índice  $j \in \{1, \dots, d\}$ ;*
- ii) Quando todos os argumentos de  $C$  são iguais a 1, exceto para o  $j$ -ésimo, então*

$$C(1, 1, \dots, u_j, 1, \dots, 1) = u_j.$$

- iii)  $C$  é  $d$ -crescente.*

O conceito de processo estocástico foi anteriormente apresentado neste trabalho. Agora estamos interessados em modelos estocásticos multivariados construídos a partir de

cópuas, com uma estrutura de dependência temporal, que podem ser descritos a partir de um vetor aleatório  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ , definido em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e assumindo valores em  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ). O Teorema de [Sklar \(1959\)](#) é peça fundamental na construção destes modelos, uma vez que ele permite que conectemos as funções de probabilidade de qualquer vetor aleatório através de uma cópula. [Durante e Sempi \(2015\)](#) comentam que, através do Teorema de Sklar, as cópuas passaram a ocupar uma posição relevante na Teoria das Probabilidades e Estatística.

Sejam  $F_1, \dots, F_d$  funções de distribuições de probabilidade univariadas. Um modelo multivariado adequado pode ser construído a partir do seguinte resultado.

**Proposição 3.2.1.** *Considere as funções de distribuição de probabilidade univariadas  $F_1, \dots, F_d$  e seja  $C$  qualquer  $d$ -cópula. A função  $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{I}$  é definida, para todo ponto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , como*

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (3.1)$$

*é uma função de probabilidade  $d$ -dimensional com funções de distribuição de probabilidades marginais dadas por  $F_1, \dots, F_d$ .*

Esta proposição garante uma flexibilidade para a construção da distribuição conjunta, podemos escolher cada marginal pertencendo à famílias de distribuições diferentes e então, podemos escolher uma cópula (qualquer cópula) para conectar as marginais em um modelo comum.

**Teorema 3.2.2** (Teorema de [Sklar \(1959\)](#)). *Sejam  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  um vetor aleatório em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $H(\mathbf{x}) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$  a função de distribuição de probabilidade conjunta de  $\mathbf{X}$  e  $F_j(x_j) = \mathbb{P}(X_j \leq x_j)$ , em que  $j = 1, \dots, d$ , as funções de distribuição de probabilidade marginais. Então, existe uma  $d$ -cópula  $C = C_{\mathbf{X}}$ , tal que, para todo ponto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$*

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

*Se as marginais são contínuas, então a cópula  $C$  é definida de forma única.*

Algumas cópuas se destacam devido a sua importância em algumas áreas e por serem usadas para construir uma família de cópuas através da mudança de variáveis. Entre elas podemos citar a cópula Gaussiana, a cópula  $t$  e a cópula Arquimediana, as quais são discutidas a seguir.

- 1) **Cópula Normal ou Gaussiana:** Através da distribuição normal multivariada, uma família de cópuas pode ser obtida. Considere o vetor  $\mathbf{x}$ . Uma  $d$ -cópula Gaussiana, ou normal, é expressa por:

$$C_{\Sigma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{[2\pi \det(\Sigma)]^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right] dx_1 \cdots dx_d,$$

em que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,d} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d,1} & \rho_{d,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de correlação que parametriza a cópula,  $\rho \in (-1, 1)$  e  $\Phi^{-1}(\cdot)$  denota a inversa da função de distribuição acumulada da normal padrão. Para o caso bivariado a cópula é dada por

$$C_{\rho}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)} \right) dy dx$$

onde  $\rho$  é o parâmetro da cópula que representa a correlação.

- 2) **Cópula t de Student:** A cópula t de Student é definida a partir da distribuição t de Student multivariada e é dada por

$$C_{\Sigma, \nu}(\mathbf{u}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^d |\Sigma|}} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_d)} \left[ 1 + \frac{\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}}{\nu} \right]^{-\frac{\nu+d}{2}} dx_d \cdots dx_1,$$

em que  $\Sigma$  é a matriz de correlações,  $\nu > 1$  representa os graus de liberdade da distribuição t e  $t_{\nu}^{-1}(x)$  denota a inversa da função de distribuição acumulada de uma distribuição t de Student com média zero. A cópula t de Student converge para a cópula Gaussiana quando  $\nu \rightarrow \infty$ .

- 3) **Cópulas Arquimedianas:** Uma cópula Arquimediana com função geradora  $\varphi(x)$  é definida por

$$C(\mathbf{u}) = \varphi(\varphi^{-1}(u_1) + \cdots + \varphi^{-1}(u_d)).$$

Qualquer função pode ser a função geradora de uma cópula Arquimediana, desde que os seguintes critérios sejam satisfeitos:

- i)  $\varphi(0) = 1$ ;
- ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \infty$ ;
- iii)  $\frac{d\varphi}{dx} < 0$ ;
- iv)  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} > 0$ .

A teoria apresentada para a construção de modelos estocásticos multivariados apresentada nesta subseção, motivou a construção de modelos multivariados para séries temporais a partir de cópulas. O modelo estudado por [Koopman et al. \(2018\)](#) é referência importante para a construção que realizaremos neste capítulo. Estes autores fornecem uma metodologia para modelagem de séries temporais inteiras multivariadas, onde a dinâmica temporal é acomodada através de uma estrutura “score-driven” ([Creal et al., 2011, 2013; Harvey, 2013](#)). Considerando um vetor  $d$ -dimensional de valores inteiros  $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{dt})^\top \in \mathbb{Z}$  com distribuições condicionais  $F_i(y_{it}|\mathcal{L}_{t-1}, \theta_{it})$  para  $i = 1, \dots, d$  e  $t = 1, \dots, T$ , onde  $\mathcal{L}_t = \{y_t, y_{t-1}, \dots\}$  é a informação até o tempo  $t$  e  $\theta_{it}$  é um vetor de parâmetros variável no tempo para a  $i$ -ésima distribuição condicional. [Koopman et al. \(2018\)](#) caracterizam a estrutura de dependência em  $y_t$  por uma função cópula condicional  $d$ -dimensional

$$C[F_1(y_{1t}|\mathcal{L}_{t-1}, \theta_{1t}), \dots, F_d(y_{dt}|\mathcal{L}_{t-1}, \theta_{dt}); \theta^{(c)}],$$

em que  $\theta^{(c)}$ , a ser definido, é o parâmetro que define a cópula. Uma distribuição conveniente para a proposta dos autores é a Skellam com função massa de probabilidade

$$P(Y_{it} = y_{it}; \mu_{it}, \sigma_{it}^2) = \exp(-\sigma_{it}^2) \left( \frac{\mu_{it} + \sigma_{it}^2}{\sigma_{it}^2 - \mu_{it}} \right)^{y_{it}/2} I_{y_{it}} \left( \sqrt{\sigma_{it}^4 - \mu_{it}^2} \right),$$

com  $y_{it} \in \mathbb{Z}$ , parâmetro de locação  $\mu_{it}$ , parâmetro de escala  $\sigma_{it}^2$ , com  $\sigma_{it}^4 - \mu_{it}^2 > 0$  e  $I_{y_{it}}(\cdot)$  denota a função Bessel de primeiro tipo de ordem  $y_{it}$ . Os autores consideram  $\mu_{it}$  igual a zero para fins de aplicação. Para o parâmetro  $\sigma_{it}^2$ , é considerada a dinâmica score-driven, com  $\theta_{it} = \log(\sigma_{it}^2)$  dado por:

$$\theta_{it} = \omega_i + \beta_i \theta_{i(t-1)} + \alpha_i \nabla_{i(t-1)},$$

e

$$\nabla_{i(t-1)} = y_{it} - \sigma_{it}^2 + \frac{\sigma_{it}^2 I_{y_{it}+1}(\sigma_{it}^2)}{I_{y_{it}}(\sigma_{it}^2)},$$

em que  $\omega$ ,  $\beta$  e  $\alpha$  são vetores de coeficientes fixados. Os autores assumem ainda uma cópula Gaussiana com matriz de correlação dada por

$$R_t = \rho_t I_d + (1 - \rho_t) J_d,$$

onde  $I_d$  e  $J \in \mathbb{R}^{d \times d}$  denotam a matriz identidade e unitária, respectivamente. O parâmetro de equicorrelação com dependência temporal é dado por

$$\rho_t = 0.5 \left( 1 - \frac{1}{d-1} \right) + 0.5 \left( 1 + \frac{1}{d-1} \right) \tanh(\theta_t^{(c)}),$$

$$\theta_{it}^{(c)} = \omega^{(c)} + \beta^{(c)} \theta_{i(t-1)}^{(c)} + \alpha^{(c)} \nabla_{i(t-1)}^{(c)},$$

$$\nabla_{i(t-1)} = 0.25 \left(1 + \frac{1}{d-1}\right) [1 - \tanh(\theta_{t-1}^{(c)})^2] [\sum (V_t) - \text{tr}(V_{t-1})],$$

$$V_{t-1} = R_{t-1}^{-1} x_{t-1} x'_{t-1} R_{t-1}^{-1} - R_{t-1}^{-1},$$

$$x'_{t-1} = [\Phi^{-1}(u_{1(t-1)}^*), \dots, u_{d(t-1)}^*]$$

e

$$u_{i(t-1)}^* = [F_i(y_{i(t-1)}; \theta_{i(t-1)}) + F_i(y_{i(t-1)-1}; \theta_{i(t-1)})]/2,$$

em que  $\text{tr}(\cdot)$  é o traço da matriz e  $\tanh(\cdot)$  é a função tangente hiperbólica.

O modelo proposto por [Koopman et al. \(2018\)](#) apresenta resultados satisfatórios nos estudos de simulação e no estudo empírico. O modelo é aplicado a variações de preço das ações negociadas na bolsa de valores de Nova York (NYSE), porém tem estrutura complicada e não apresenta dependência contemporânea em suas distribuições condicionais. Na Seção [3.3](#), definimos um modelo que se propõe a cobrir estes pontos.

### 3.2.2 Modelos INGARCH

A ocorrência natural de séries temporais de valores inteiros em áreas como epidemiologia, finanças, esportes e outras, motivou o estudo de modelos que lidassem com estes dados. Autores como [Heinen \(2003\)](#), [Ferland et al. \(2006\)](#) e [Fokianos et al. \(2009\)](#) realizaram estudos pioneiros dedicados a explorar a modelagem para dados inteiros não-negativos. [Ferland et al. \(2006\)](#) apresentam uma definição para os processos INGARCH baseados na distribuição Poisson.

**Definição 3.2.3.** *Um processo INGARCH( $p, q$ ) é definido como um processo de valores inteiros não-negativos  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , tal que*

$$\begin{cases} X_t | \mathcal{L}_{t-1} \sim \text{Poisson}(\lambda_t), \forall t \in \mathbb{Z}, \\ \lambda_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \lambda_{t-j} \end{cases}$$

onde  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, p$ ,  $\beta_j \geq 0$ , para  $j = 1, \dots, q$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$ <sup>3</sup> e  $\mathcal{L}_{t-1}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ . Este processo é denotado por  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{INGARCH}(p, q)$ .

---

<sup>3</sup> $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \dots\}$ .

Seguindo esta construção, a média condicional  $\lambda_t$ , que também é a variância condicional, depende dos valores passados da série e também de seus próprios valores passados.

Neste trabalho voltamos nossa atenção à metodologia INGARCH multivariada. Como citado anteriormente, [Liu \(2012\)](#), [Lee et al. \(2018\)](#), [Cui e Zhu \(2018\)](#) e [Piancastelli et al. \(2022\)](#) são algumas das contribuições referentes a extensão multivariada dos processos INGARCH. Destacamos as construções realizadas por [Liu \(2012\)](#), que define um processo INGARCH Poisson bivariado (BINGARCH), definido da seguinte forma:

**Definição 3.2.4.** *Seja  $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t})^\top$  observações bivariadas no tempo  $t$ , onde  $\{\mathbf{Y}_{1t}\}_{t \geq 1}$  e  $\{\mathbf{Y}_{2t}\}_{t \geq 1}$  são duas séries temporais inteiras não-negativas. O modelo INGARCH Poisson bivariado (BINGARCH) de ordem  $(1, 1)$  é definido:*

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t | \mathcal{L}_{t-1} &\sim BP(\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \phi), \\ \lambda_t = (\lambda_{1t}, \lambda_{2t})^\top &= \delta + \mathbf{A}\lambda_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_{t-1}, \end{aligned}$$

em que  $\mathcal{L}_{t-1} = \sigma(\mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}_1, \lambda_{1t}, \lambda_{2t})$ ,  $\phi > 0$ ,  $\delta = (\delta_1, \delta_2)^\top \in \mathbb{R}_+^2$  e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes  $2 \times 2$  com entradas/parâmetros não-negativas.

A notação  $\mathbf{Y}_t | \mathcal{L}_{t-1} \sim BP(\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \phi)$  representa a distribuição Poisson bivariada, cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} P(Y_{1t} = m, Y_{2t} = n | \mathcal{L}_{t-1}) &= e^{-(\lambda_{1t} + \lambda_{2t} - \phi)} \frac{(\lambda_{1t} - \phi)^m (\lambda_{2t} - \phi)^n}{m! n!} \\ &\times \sum_{s=0}^{\min\{m, n\}} \binom{m}{s} \binom{n}{s} s! \left( \frac{\phi}{(\lambda_{1t} - \phi)(\lambda_{2t} - \phi)} \right)^s, \end{aligned}$$

em que  $\phi \in [0, \min\{\lambda_{1t}, \lambda_{2t}\}]$ .

Em nossa construção, combinamos esta metodologia INGARCH multivariada e os modelos INGARCH para dados inteiros. Para isso, levamos em conta também a proposta realizada por [Doukhan et al. \(2021\)](#), que consideram processos com uma estrutura do tipo GARCH. Em contraste com os artigos mencionados acima, os autores exploram o caso onde as variáveis de valores inteiros podem atingir valores não-negativos e negativos. Em particular, eles consideram as variáveis com distribuição Skellam e focam principalmente em propriedades estocásticas, como existência e unicidade de uma distribuição estacionária e a regularidade absoluta de processos GARCH de valor inteiro. A definição do modelo INGARCH em  $\mathbb{Z}$  definido por [Doukhan et al. \(2021\)](#) é apresentada a seguir.

**Definição 3.2.5.** *Considere  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+^*}$  um processo pertencendo a uma classe de valores inteiros, definido em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ . Para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , um processo INGARCH em  $\mathbb{Z}$  é definido por*

$$\begin{cases} X_t | \mathcal{L}_{t-1} \sim Q_{\nu_t}, \\ \nu_t = f(X_{t-1}^2, \dots, X_{t-p}^2, \nu_{t-1}, \dots, \nu_{t-q}), \end{cases} \quad (3.2)$$

em que  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{L}_s = \sigma(X_s, \nu_s, X_{s-1}, \nu_{s-1}, \dots)$  denota a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias até o tempo  $s$ . A função  $f$  é definida em  $\mathbb{N}^p \times V^q$ , assumindo valores em algum conjunto  $V \subseteq [0, \infty)$ .

O parâmetro  $\nu_t$  representa o segundo momento condicional de  $X_t$ . Deste modo, a família de distribuições  $(Q_\nu)_{\nu \in V}$  em  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$  é parametrizada como

$$\int x^2 dQ_\nu(x) = \nu, \forall \nu \in V.$$

A próxima seção apresenta o modelo proposto neste trabalho, construído a partir dos conceitos apresentados até aqui.

### 3.3 Modelos Cópula-INGARCH (CINGARCH)

Nesta seção apresentaremos a construção de um modelo multivariado para séries temporais inteiras combinando a metodologia INGARCH e cópulas.

Para a construção do modelo tomamos um vetor  $d$ -dimensional de valores inteiros  $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{dt}) \in \mathbb{Z}^d$  e as distribuições condicionais em seu histórico e condicionais no histórico das outras séries consideradas,  $F_i(x_{it} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{it})$ , para  $i = 1, 2, \dots, d$  e  $t \in \mathbb{N}$ . A componente  $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_1)$  carrega o histórico da série até o tempo  $t$  e o vetor de parâmetros  $\theta_{it}$ , para a  $i$ -ésima observação, é tempo-variável.

A partir destes elementos, podemos caracterizar uma função cópula condicional  $d$ -dimensional com uma estrutura de dependência em  $\mathbf{x}_t$ :

$$F_{\theta_t^{(c)}}(\mathbf{x}_t) = C[F_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}), F_2(x_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}), \dots, F_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{dt}) | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_t^{(c)}] \quad (3.3)$$

em que  $\theta_t^{(c)}$  é o vetor de parâmetros que define a cópula  $C$ .

**Definição 3.3.1.** *Seja  $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{dt})^\top$ , com  $t \in \mathbb{N}$  e  $\{X_{it}\}_{t \in \mathbb{N}}$  processos estocásticos pertencendo a uma classe de valores inteiros, definidos em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Considere  $F_{\theta_t^{(c)}}(\mathbf{x}_t)$  dada pela Expressão (3.3). Para  $j = 1, \dots, d$  e  $i = 1, 2, \dots, d$ , um processo cópula-INGARCH (CINGARCH) é definido assumindo*

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_t^{(c)} \sim F_{\theta_t^{(c)}}, \\ \theta_{it} = \omega_i + \sum_{j=1}^d \beta_{ij} \log(|X_{j(t-1)}| + 1) + \alpha_i \theta_{i(t-1)}, \\ \theta_t^{(c)} = \omega_0 + \sum_{j=1}^d \beta_{0j} X_{j(t-1)} + \alpha_0 \theta_{t-1}^{(c)}, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $\omega$ ,  $\beta$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  são vetores de coeficientes com dimensões apropriadas e  $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_1)$  denota a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias até o tempo  $t$ .

O modelo multivariado log-linear, apresentado na Definição 3.3.1, conta com o termo  $\log(|X_{j(t-1)}| + 1)$  para incluir o histórico do vetor  $\mathbf{X}_t$  na equação autoregressiva para  $\theta_{it}$ . Assim como considerado em Fokianos (2011), adotamos o termo  $\log(|X_{j(t-1)}| + 1)$  para garantir a estabilidade do modelo, evitando um crescimento exponencialmente.

A construção de modelos multivariados para séries temporais inteiras usando cópulas é de grande relevância em situações práticas. No entanto, este tipo de construção enfrenta limitações teóricas. O Teorema de Sklar garante a unicidade da cópula quando as distribuições marginais são contínuas, quanto ao caso discreto isso já não acontece. Neste caso, a cópula é determinada pelo produto cartesiano dos conjuntos Imagem ( $Im$ ) das distribuições condicionais  $F_i$  da cópula,  $Im(F_1) \times \dots \times Im(F_d)$ . Koopman et al. (2018) promovem uma discussão acerca deste ponto, destacando que cópulas com marginais discretas são relevantes em estudos empíricos, apesar de não apresentarem unicidade. Os autores justificam ainda que podemos lidar com esta complicação de forma parcimoniosa, ao escolher uma cópula paramétrica para a construção do modelo proposto.

Como explicitado na Definição 3.3.1, combinamos a teoria de cópula e a metodologia INGARCH, para a construção de uma classe de modelos multivariados para séries temporais de valores inteiros. Comparado à metodologia proposta por Koopman et al. (2018) que conta com uma dinâmica temporal score-driven, o modelo proposto aqui apresenta dinâmica mais simples e considera nas distribuições condicionais além da dependência temporal, a dependência contemporânea.

Neste trabalho consideramos dois casos para a distribuição condicional da cópula, sendo eles a distribuição Laplace discreta (LD) e a distribuição Skellam. Uma breve discussão a respeito destas distribuições é apresentada a seguir.

Nossa primeira proposta para as distribuições condicionais do processo CINGARCH é a versão discreta para a distribuição contínua Laplace, proposta por Kozubowski e Inusah (2006). Esta distribuição apresenta forma fechada para a função de probabilidade, função de distribuição acumulada, média e variância. Seja  $Z$  uma variável aleatória discreta seguindo uma distribuição Laplace discreta com parâmetros  $p \in (0, 1)$  e  $q \in (0, 1)$ . Então  $Z$  tem funções de probabilidade e distribuição dadas por:

$$p(z; p, q) = P(Z = z) = \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq} \begin{cases} p^z, & z = 0, 1, 2, \dots, \\ q^{|z|}, & z = 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

e

$$F(z; p, q) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 1 - \frac{(1-q)p^{[z]+1}}{1-pq}, & \text{se } z \geq 0, \\ \frac{(1-p)q^{[z]}}{1-pq}, & \text{se } z < 0, \end{cases}$$

onde  $[\cdot]$  representa o maior inteiro.

**Propriedade 3.3.1** (Distribuição Laplace discreta simétrica). *Quando  $p = q = \phi$  temos a função de distribuição LD simétrica, que tem função de probabilidade e função de*

distribuição de probabilidade dadas por

$$p_Z(z; \phi) = P(Z = z) = \frac{1 - \phi}{1 + \phi} \phi^{|z|}, \quad z \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (3.5)$$

e

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 1 - \frac{\phi^{\lfloor z \rfloor + 1}}{1 + \phi}, & \text{se } z \geq 0, \\ \frac{\phi^{\lfloor z \rfloor}}{1 + \phi}, & \text{se } z < 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

**Propriedade 3.3.2** (Distribuição geométrica). Quando  $p$  ou  $q$  converge para zero, temos dois casos especiais:  $Z \sim LD(p, 0)$  com  $p \in (0, 1)$  é uma distribuição geométrica com a função de probabilidade

$$p(z; p, 0) = P(Z = z) = (1 - p)p^z, \quad z = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

enquanto  $Z \sim LD(0, q)$  com  $q \in (0, 1)$  é uma distribuição geométrica nos inteiros não-positivos com o função de probabilidade

$$p(z; 0, q) = P(Z = z) = (1 - q)q^{-z}, \quad z = 0, -1, -2, -3, \dots$$

**Propriedade 3.3.3.** Se  $p$  e  $q$  forem ambos zero, a distribuição Laplace discreta é degenerada em zero.

**Propriedade 3.3.4.** No caso simétrico, onde  $p = q = \phi$ ,

$$Z \stackrel{d}{=} X_1 - X_2$$

em que as  $X_i$ 's são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição geométrica e função de probabilidade  $g(z) = (1 - u)^{z-1}u$ ,  $z = 1, \dots$ , com  $u = 1 - \phi$ .

**Propriedade 3.3.5** ( $r$ -ésimo momento). O  $r$ -ésimo momento de uma variável aleatória  $Z \sim LD(p, q)$  é dado por

$$\mathbb{E}(Z^r) = \sum_{z=1}^r S(r, z) \frac{z! p^z}{(1 - p)^{z+1}},$$

onde

$$S(r, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{z-1} (-1)^i \binom{z}{i} (z - i)^r$$

é o número de Stirling de segundo tipo. Para o caso simétrico,  $\mathbb{E}(Z) = 0$  e  $\text{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = 2\phi/(1 - \phi)^2$ .

Para mais detalhes sobre a distribuição Laplace discreta, veja [Kozubowski e Inusah \(2006\)](#).

A segunda proposta para as distribuições condicionais do processo CINGARCH é uma distribuição obtida a partir da diferença entre duas variáveis aleatórias com distribuição Poisson, a distribuição Skellam (Skellam, 1946; Alzaid e Omaid, 2010). Considere  $(X, Y)$  um par de variáveis aleatórias que podem ser escritas como  $X = W_1 + W_3$  e  $Y = W_2 + W_3$ , em que  $W_1 \sim Poisson(\lambda_1)$  e  $W_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ ,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$ , são independentes e considere  $W_3$  seguindo qualquer distribuição, a função de probabilidade de  $K = X - Y$  será

$$P(K = k) = e^{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

em que

$$I_y(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^y \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{x^2}{4} \right)^z}{z!(y+z)!}$$

é a função Bessel modificada de primeiro tipo e denotamos  $K \sim Skellam(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Sejam  $K_1 \sim Skellam(\lambda_1, \lambda_2)$  e  $K_2 \sim Skellam(\lambda_3, \lambda_4)$  variáveis aleatórias independentes, a seguir apresentaremos algumas propriedades da distribuição Skellam.

**Propriedade 3.3.6** (Função geradora de momentos). *A função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição Skellam é dada por*

$$M_{K_1}(t) = \exp [ -(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} ].$$

*Deste modo, a esperança e a variância de  $K_1$  são:  $\mathbb{E}(K_1) = \lambda_1 - \lambda_2$  e  $Var(K_1) = \lambda_1 + \lambda_2$ . Em particular, quando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\mathbb{E}(K_1) = 0$  e  $Var(K_1) = 2\lambda$ .*

**Propriedade 3.3.7** (Distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Skellam). *A soma ou diferença entre variáveis aleatórias Skellam é também Skellam, ou seja  $K_1 + K_2 \sim Skellam(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_4)$  e  $K_1 - K_2 \sim Skellam(\lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3)$ .*

**Propriedade 3.3.8.** *Existe uma simetria na distribuição Skellam, de modo que  $P(K = k; \theta_1, \theta_2) = P(K = -k; \theta_2, \theta_1)$ .*

Para mais detalhes sobre a distribuição Skellam, veja Alzaid e Omaid (2010).

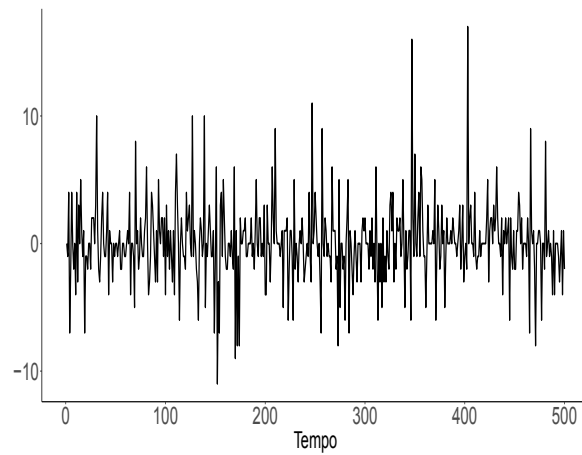
Apesar do processo CINGARCH apresentar uma estrutura complicada de se obter quantidades de interesse de forma explícita, como a função de autocorrelação, podemos facilmente implementar um gerador do processo (Apêndice B.1), em que é possível avaliar numericamente tais quantidades.

As Figuras 3.1 e 3.3, apresentam as trajetórias, ACF e PACF de um processo CINGARCH bidimensional com cópula Gaussiana e matriz de correlação dada por (Koopman et al., 2018):

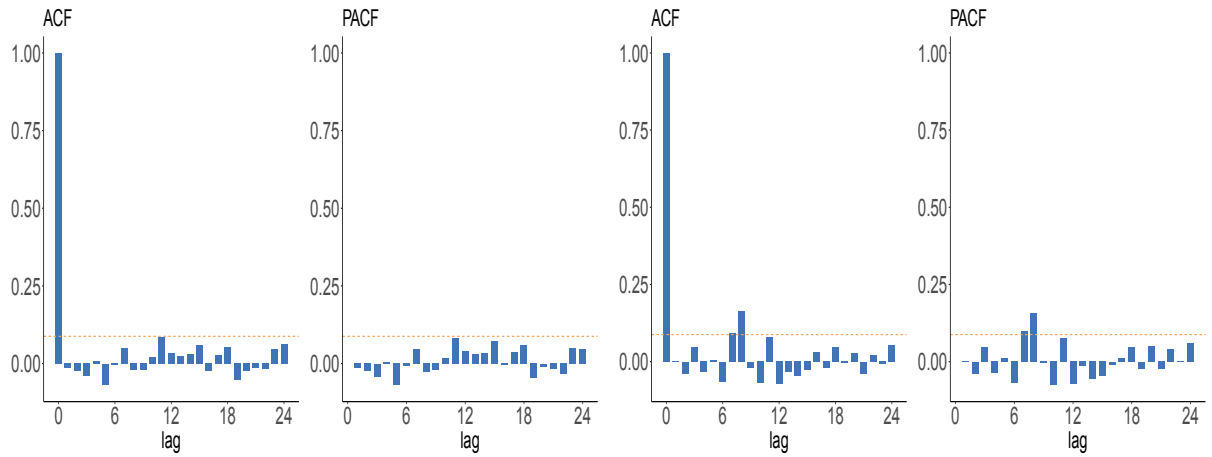
$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho_t \\ \rho_t & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $\rho_t = \tanh(\theta_t^{(c)})$ . Para o processo LD-CINGARCH, Figura 3.1, consideramos  $X_{it} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{it} \sim LD(\phi_i)$ , em que  $\phi_i = \frac{\exp(\theta_{it})}{1 + \exp(\theta_{it})}$ , para  $i = 1, 2$ . Já para o processo Skellam-CINGARCH, Figura 3.3, consideramos  $X_{it} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{it} \sim Skellam(\lambda_i)$ , em que  $\lambda_i = \exp(\theta_{it})$ , para  $i = 1, 2$ .

Tomamos séries com tamanho  $n = 500$  e com a seguinte configuração para os parâmetros do modelo:  $\omega_1 = 0,5$ ,  $\beta_{11} = 0,2$ ,  $\beta_{12} = -0,3$ ,  $\alpha_1 = 0,1$ ,  $\omega_2 = 0,5$ ,  $\beta_{21} = 0,1$ ,  $\beta_{22} = -0,4$ ,  $\alpha_2 = 0,2$ ,  $\omega_0 = 0,5$ ,  $\beta_{01} = 0,1$ ,  $\beta_{02} = 0,2$  e  $\alpha_0 = 0,3$ . Algumas características do modelo proposto são evidenciadas nas Figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4, que apresentam os gráficos das trajetórias, ACF e PACF das séries originais e ACF e PACF da séries ao quadrado dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH, respectivamente. Perceba que as trajetórias se concentram em torno do valor zero. Além disso, pela definição, o processo CINGARCH está relacionado ao segundo momento, uma vez que a média das distribuições condicionais é zero. Desse modo, os gráficos da ACF e PACF da série original não apresentam correlações significativas, enquanto que, ao tomarmos as séries ao quadrado pode se perceber o surgimento de autocorrelações significantes.

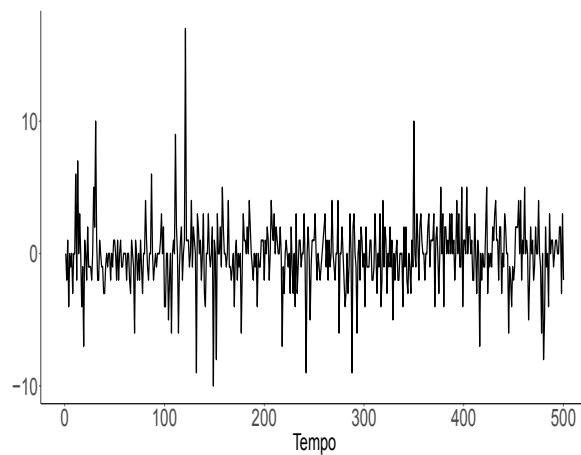


(a) Trajetória da série  $X_{1t}|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$  de um processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.

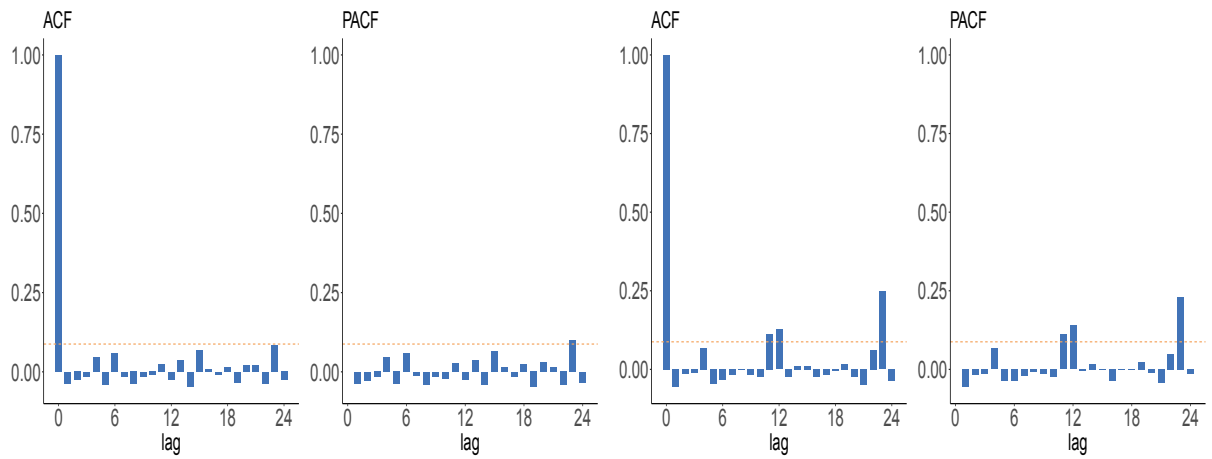


(b) Gráficos da ACF e PACF de  $X_{1t}|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$  e ACF e PACF de  $X_{1t}^2|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$ .

Figura 3.1: Trajetória, ACF e PACF da série  $X_{1t}|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$  de um processo LD-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana.

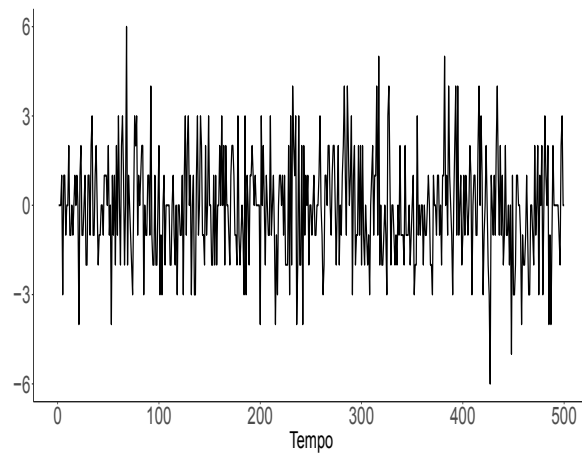


(a) Trajetória da série  $X_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$  de um processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.

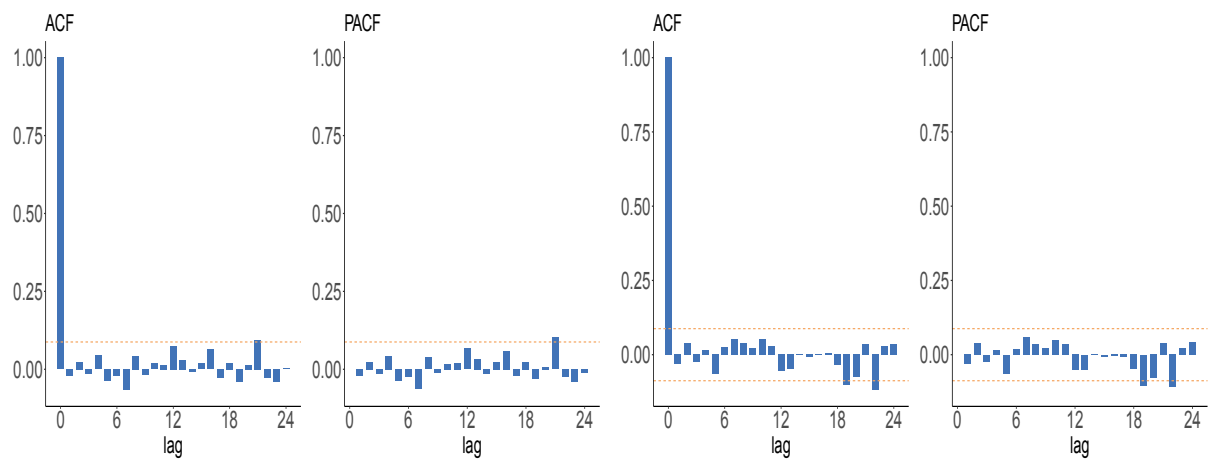


(b) Gráficos da ACF e PACF de  $X_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$  e ACF e PACF de  $X_{2t}^2 | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$ .

Figura 3.2: Trajetória, ACF e PACF da série  $X_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$  de um processo LD-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana.

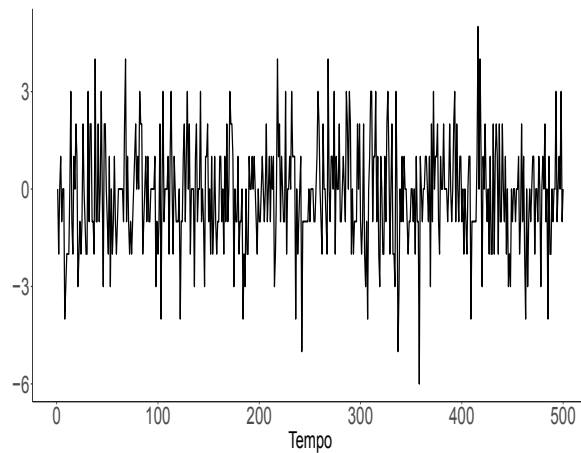


(a) Trajetória da série  $X_{1t}|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$  de um processo Skellam-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.

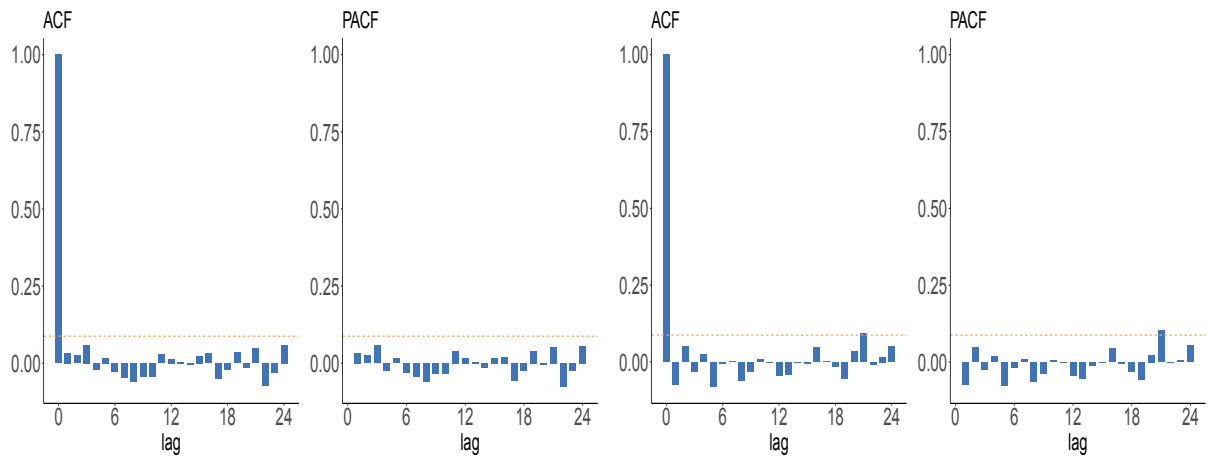


(b) Gráficos da ACF e PACF de  $X_{1t}|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$  e ACF e PACF de  $X_{1t}^2|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$ .

Figura 3.3: Trajetória, ACF e PACF da série  $X_{1t}|\mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}$  de um processo Skellam-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana.



(a) Trajetória da série  $X_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$  de um processo SKELLAM-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.



(b) Gráficos da ACF e PACF de  $X_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$  e ACF e PACF de  $X_{2t}^2 | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$ .

Figura 3.4: Trajetória, ACF e PACF da série  $X_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{2t}$  de um processo SKELLAM-CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana.

### 3.4 Estimação dos parâmetros

Para a estimação dos parâmetros do processo CINGARCH, será utilizado o método de máxima verossimilhança em dois estágios. [Ko e Hjort \(2019\)](#) elaboraram um trabalho formalizando o método de estimativa de máxima verossimilhança em dois estágios para realizar inferência, em que, tanto as marginais quanto a cópula têm formas paramétricas. Este método, geralmente chamado de função de inferência para marginais, é usado como uma alternativa atraente à estratégia de estimativa de máxima verossimilhança total. Os autores mostram que o estimador de máxima verossimilhança em dois estágios é consis-

tente e demonstram a normalidade assintótica do vetor completo de estimadores, com a matriz de covariância assintótica dada de forma explícita.

O estimador de máxima verossimilhança em dois estágios funciona como descrito a seguir.

- **Estágio 1:** Seja  $\theta_{it} = \omega_i + \sum_{j=1}^d \beta_{ij} \log(|X_{j(t-1)}| + 1) + \alpha_i \theta_{i(t-1)}$ ,  $i = 1, \dots, d$  e  $f_j$  a função de probabilidade marginal de  $X_{jt}$ , para  $j = 1, \dots, t$ . Obtenha  $\tilde{\theta}_i = (\tilde{\omega}_i, \tilde{\beta}_{i1}, \dots, \tilde{\beta}_{id}, \tilde{\alpha}_i)^\top$ , o estimador de máxima verossimilhança das distribuições condicionais, através da maximização de  $l_{f_j}$  com respeito a  $(\omega_i, \beta_{i1}, \dots, \beta_{id}, \alpha_i)^\top$ , em que

$$l_{f_j} = \sum_{t=1}^n \log [f_j(x_{jt} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{it})].$$

- **Estágio 2:** Com as estimativas  $\tilde{\theta}_i = (\tilde{\omega}_i, \tilde{\beta}_{i1}, \dots, \tilde{\beta}_{id}, \tilde{\alpha}_i)^\top$  do Estágio 1, obtenha:

$$l_c(\tilde{\theta}_{it}, \theta_t^{(c)}) = \sum_{t=1}^n \{ \log [f_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \tilde{\theta}_1)] + \dots + \log [f_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \tilde{\theta}_d)] + \log [c(F_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \tilde{\theta}_1), \dots, F_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \tilde{\theta}_d), \theta_t^{(c)})] \},$$

em que,  $\theta_t^{(c)} = \omega_0 + \sum_{j=1}^d \beta_{0j} X_{j(t-1)} + \alpha_0 \theta_{t-1}^{(c)}$  e a função de densidade de probabilidade da cópula é representada por  $c(F_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{1t}), \dots, F_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{dt}), \theta_t^{(c)})$ . Então  $\tilde{\theta}^{(c)} = (\tilde{\omega}_0, \tilde{\beta}_{01}, \dots, \tilde{\beta}_{0d}, \tilde{\alpha}_0)^\top$  são obtidos através da maximização de  $l(\tilde{\theta}_i, \theta_t^{(c)})$  com respeito a  $(\omega_0, \beta_{01}, \dots, \beta_{0d}, \alpha_0)^\top$ .

A estimativa de máxima verossimilhança em dois estágios,  $(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_d, \tilde{\theta}^{(c)})^\top$ , satisfaz:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_1} l_{f_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_d} l_{f_d}, \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}^{(c)}} l_c \right) = (0, \dots, 0, 0).$$

A função de log-verossimilhança da cópula,  $l_c$ , será calculada considerando a estrutura de dependência da cópula apresentado na Expressão (3.3) e a contribuição de cada observação no tempo  $t$ . Sejam  $X_{1t} = x_{1t}, X_{2t} = x_{2t}, \dots$  e  $X_{dt} = x_{dt}$ , as observações no tempo  $t$ . Segundo Lee (1983) podemos escrever

$$P(X_{1t} \leq x_{1t}, X_{2t} \leq x_{2t}, \dots, X_{dt} \leq x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}) = B[\Phi^{-1}(F_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)})), \Phi^{-1}(F_2(x_{2t} | \mathcal{F}_{(t-1)})), \dots, \Phi^{-1}(F_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)})), R_t],$$

em que  $B(\cdot, \cdot, R)$  é a função de distribuição normal acumulada multivariada com vetor de médias zero e matriz de correlação  $R$ . A contribuição de probabilidade da observação no

tempo  $t$  é:

$$\begin{aligned}
L_t(\theta) &= P(X_{1t} = x_{1t}, \dots, X_{dt} = x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}) \\
&= P(X_{1t} \leq x_{1t}, \dots, X_{dt} \leq x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}) - P(X_{1t} \leq x_{1t} - 1, \dots, X_{dt} \leq x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}) - \\
&\quad P(X_{1t} \leq x_{1t}, \dots, X_{dt} \leq x_{dt} - 1 | \mathcal{F}_{(t-1)}) + \\
&\quad P(X_{1t} \leq x_{1t} - 1, \dots, X_{dt} \leq x_{dt} - 1 | \mathcal{F}_{(t-1)}) \\
&= B(\Phi^{-1}(F_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)})), \dots, \Phi^{-1}(F_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)})), R_t) - \\
&\quad B(\Phi^{-1}(F_1(x_{1t} - 1 | \mathcal{F}_{(t-1)})), \dots, \Phi^{-1}(F_d(x_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)})), R_t) - \\
&\quad B(\Phi^{-1}(F_1(x_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)})), \dots, \Phi^{-1}(F_d(x_{dt} - 1 | \mathcal{F}_{(t-1)})), R_t) + \\
&\quad B(\Phi^{-1}(F_1(x_{1t} - 1 | \mathcal{F}_{(t-1)})), \dots, \Phi^{-1}(F_d(x_{dt} - 1 | \mathcal{F}_{(t-1)})), R_t). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

### 3.4.1 Estudo de simulação

Para avaliar o método inferencial proposto para o processo CINGARCH, realizamos um estudo de simulação Monte Carlo. No estudo de simulação consideramos a cópula Gaussiana. Trabalhamos com o algoritmo apresentado em [Barbiero e Ferrari \(2017\)](#) para gerar um vetor aleatório discreto a partir de uma cópula Gaussiana, o descrevemos a seguir.

Sejam  $\{X_{1t}, \dots, X_{dt}\}_{t \in \mathbb{N}}$ , processos estocásticos cujas funções de distribuição acumulada condicionais são  $F_1(X_{1t} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_1), \dots, F_d(X_{dt} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_d)$ . Unidos por uma cópula Gaussiana com matriz de correlação  $R$ , o esquema descrito abaixo pode ser seguido.

---

#### Algoritmo 2:

---

- 1) Gere uma amostra  $w_1, \dots, w_d$  de  $W \sim N(0, R)$ , em que  $W$  denota a distribuição normal padrão  $d$ -variada com matriz de correlação  $R$ .
  - 2) Compute  $u = (u_1, \dots, u_d) = (\Phi(w_1), \dots, \Phi(w_d))$ , em que  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada normal padrão univariada.
  - 3) Então, obtenha  $x = (x_1, \dots, x_k) = (F_1^{-1}(u_1), \dots, F_k^{-1}(u_k))$ , uma amostra aleatória de uma cópula Gaussiana.
- 

Estudaremos dois cenários no exercício de simulação para os parâmetros do processo bivariado CINGARCH com cópula Gaussiana, considerando o caso simétrico para as distribuições condicionais. Para o primeiro cenário, as distribuições condicionais serão Laplace discreta, de modo que  $X_{it} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{it} \sim LD(\phi_i)$ , em que  $\phi_i = \frac{\exp(\theta_{it})}{1 + \exp(\theta_{it})}$ . No segundo cenário consideramos as distribuições condicionais Skellam, com  $X_{it} | \mathcal{F}_{(t-1)}, \theta_{it}$

$\sim \text{Skellam}(\lambda_i)$ , em que  $\lambda_i = \exp(\theta_{it})$ , para  $i = 1, 2$ . Sob estas condições, o parâmetro  $\theta_{it}$  terá dinâmica dada por

$$\theta_{it} = \omega_i + \beta_{i1} \log(|X_{1(t-1)}| + 1) + \beta_{i2} \log(|X_{2(t-1)}| + 1) + \alpha_i \theta_{i(t-1)},$$

em que  $\omega$ ,  $\beta$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ .

Para o modelo bivariado CINGARCH com cópula Gaussiana, como feito em [Koopman et al. \(2018\)](#), a matriz de correlação é dada por

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho_t \\ \rho_t & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $\rho_t = \tanh(\theta_t^{(c)})$ , com  $\theta_t^{(c)}$  dado por

$$\theta_t^{(c)} = \omega_0 + \beta_{01} X_{1(t-1)} + \beta_{02} X_{2(t-1)} + \alpha_0 \theta_{t-1}^{(c)}.$$

No software R, realizamos a estimacão dos parâmetros do processo CINGARCH através do método de estimacão em dois estágios. No primeiro estágio, calculamos as estimativas para os parâmetros das distribues condicionais. No segundo estágio, aplicamos as estimativas obtidas na função de log-verossimilhança da cópula, com a contribuição de cada observação dada pela Equação (3.7). A maximização das funes foi realizada através do comando `Optim` com o método `BFGS`. Como valores iniciais para o método, consideramos o valor zero para todos os parâmetros.

Sob a seguinte configuração para os parâmetros:  $\omega_1 = 0, 5$ ,  $\beta_{11} = 0, 2$ ,  $\beta_{12} = -0, 3$ ,  $\alpha_1 = 0, 1$ ,  $\omega_2 = 0, 5$ ,  $\beta_{21} = 0, 1$ ,  $\beta_{22} = -0, 4$ ,  $\alpha_2 = 0, 2$ ,  $\omega_0 = 0, 5$ ,  $\beta_{01} = 0, 1$ ,  $\beta_{02} = 0, 2$  e  $\alpha_0 = 0, 3$ , foram realizadas simulações Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

Iniciamos a análise do estudo de simulação pelas Tabelas 3.1 e 3.2, que apresentam as médias empíricas e a raiz quadrada do Erro Quadrático Médio (REQM) das estimativas de máxima verossimilhança em dois estágios, dos parâmetros dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH, respectivamente.

Os resultados apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2 indicam que as estimativas de máxima verossimilhança para os dois modelos são consistentes e o REQM  baixo para todos os tamanhos de amostras ( $n = 500, 1000$  e  $5000$ ) e configuração de parâmetros considerados, para os processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH.

Para avaliar os estimadores de máxima verossimilhança em dois estágios, para o processo LD-CINGARCH, analisamos também os boxplots das estimativas, Figura 3.5. Estes, confirmam os resultados apresentados na Tabela 3.1, já que indicaram baixo viés e baixa dispersão das estimativas de máxima verossimilhança em dois estágios, para todos os tamanhos de amostras considerados.

Realizamos uma padronização nas estimativas dos parâmetros do tipo média-desvio padrão e construímos os histogramas e qq-plots das estimativas padronizadas dos

parâmetros do processo LD-CINGARCH, Figuras 3.6 e 3.7. A análise destes gráficos evidenciou uma boa aproximação normal, em especial quando o tamanho da amostra aumenta.

Adicionalmente, disponibilizamos os gráficos dos boxplots, histogramas e qq-plots, para o processo bivariado Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana no Apêndice B.2. Os resultados apresentados tem interpretações análogas ao caso Laplace discreta.

Para a configuração de parâmetros consideradas, concluímos que o estimador de máxima verossimilhança em dois estágios funcionou bem no estudo de simulação realizado para os processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH bidimensionais com cópula Gaussiana.

Tabela 3.1: Médias empíricas e REQM das estimativas de máxima verossimilhança do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.

Parâmetros	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 5000$
$\omega_1 = 0, 5$	0, 520 (0, 737)	0, 501 (0, 516)	0, 499 (0, 216)
$\beta_{11} = 0, 2$	0, 186 (0, 399)	0, 199 (0, 280)	0, 200 (0, 118)
$\beta_{12} = -0, 3$	-0, 297 (0, 411)	-0, 297 (0, 303)	-0, 299 (0, 126)
$\alpha_1 = 0, 1$	0, 063 (1, 455)	0, 089 (0, 994)	0, 101 (0, 400)
$\omega_2 = 0, 5$	0, 503 (0, 528)	0, 500 (0, 389)	0, 499 (0, 161)
$\beta_{21} = 0, 1$	0, 097 (0, 402)	0, 098 (0, 273)	0, 101 (0, 117)
$\beta_{22} = -0, 4$	-0, 405 (0, 420)	-0, 404 (0, 302)	-0, 401 (0, 127)
$\alpha_2 = 0, 2$	0, 194 (1, 164)	0, 201 (0, 791)	0, 203 (0, 309)
$\omega_0 = 0, 5$	0, 499 (0, 206)	0, 498 (0, 143)	0, 500 (0, 061)
$\beta_{01} = 0, 1$	0, 098 (0, 075)	0, 098 (0, 050)	0, 100 (0, 021)
$\beta_{02} = 0, 2$	0, 198 (0, 091)	0, 197 (0, 066)	0, 200 (0, 028)
$\alpha_0 = 0, 3$	0, 297 (0, 214)	0, 301 (0, 151)	0, 300 (0, 068)

Tabela 3.2: Médias empíricas e REQM das estimativas de máxima verossimilhança do processo Skellam-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.

Parâmetros	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 5000$
$\omega_1 = 0, 5$	0, 500 (0, 952)	0, 539 (0, 788)	0, 507 (0, 314)
$\beta_{11} = 0, 2$	0, 191 (0, 611)	0, 194 (0, 420)	0, 198 (0, 178)
$\beta_{12} = -0, 3$	-0, 295 (0, 622)	-0, 299 (0, 473)	-0, 301 (0, 184)
$\alpha_1 = 0, 1$	0, 089 (1, 763)	0, 008 (1, 616)	0, 088 (0, 560)
$\omega_2 = 0, 5$	0, 501 (0, 758)	0, 503 (0, 546)	0, 504 (0, 234)
$\beta_{21} = 0, 1$	0, 104 (0, 588)	0, 103 (0, 430)	0, 100 (0, 171)
$\beta_{22} = -0, 4$	-0, 409 (0, 600)	-0, 402 (0, 444)	-0, 402 (0, 183)
$\alpha_2 = 0, 2$	0, 186 (1, 580)	0, 172 (1, 212)	0, 192 (0, 464)
$\omega_0 = 0, 5$	0, 503 (0, 281)	0, 501 (0, 195)	0, 499 (0, 085)
$\beta_{01} = 0, 1$	0, 100 (0, 117)	0, 099 (0, 078)	0, 100 (0, 035)
$\beta_{02} = 0, 2$	0, 199 (0, 127)	0, 199 (0, 090)	0, 199 (0, 038)
$\alpha_0 = 0, 3$	0, 298 (0, 332)	0, 298 (0, 239)	0, 300 (0, 101)

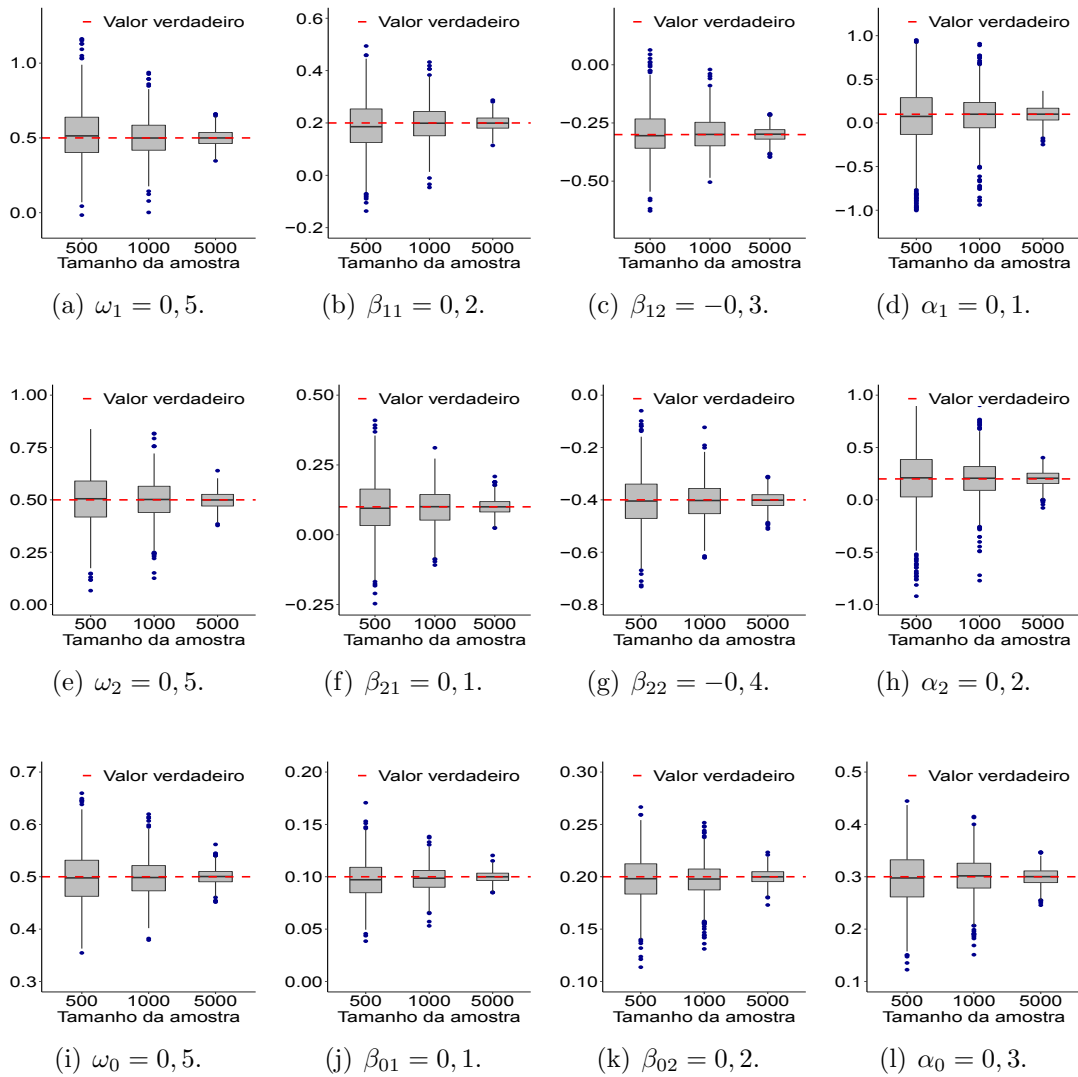


Figura 3.5: Boxplots das estimativas dos parâmetros do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e com amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

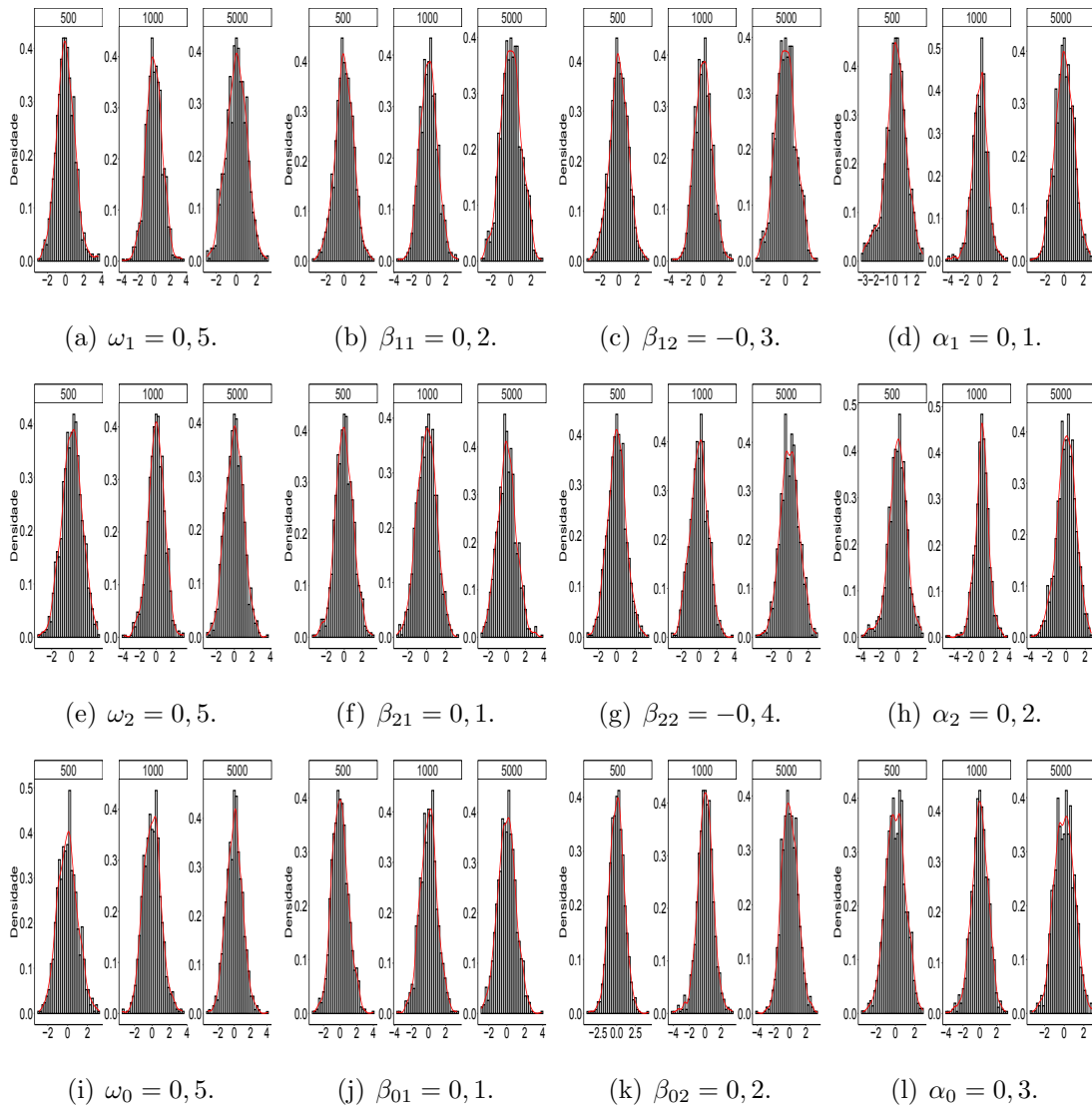


Figura 3.6: Histogramas das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e com amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

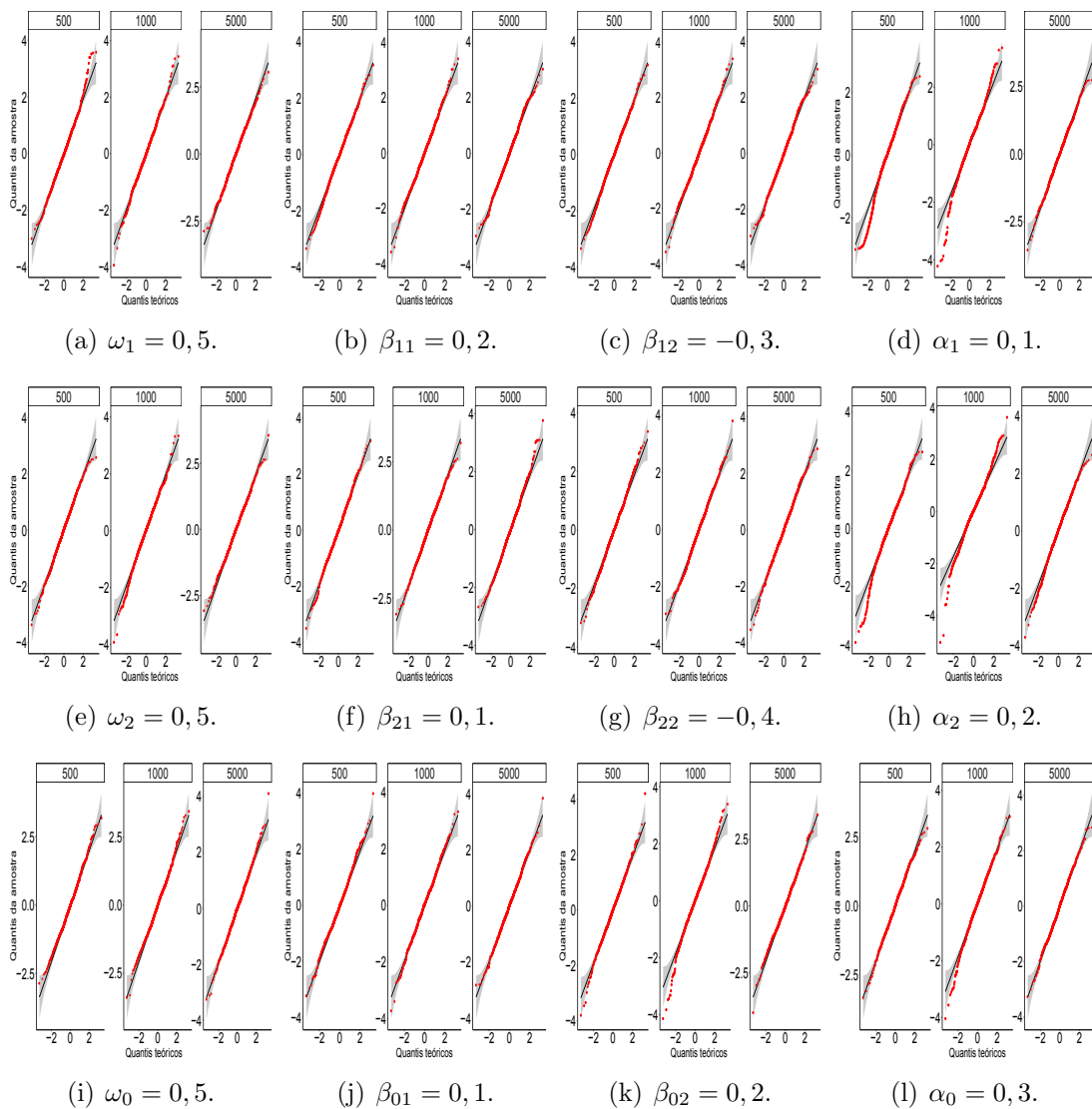


Figura 3.7: Qq-plots das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e com amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

### 3.5 Variação dos ticks das taxas de câmbio EUR/GBP e EUR/USD

A menor variação de preço possível de um título financeiro, o chamado tick-size ou tick mínimo, desempenha um papel importante nas finanças quantitativas e todas as informações de preço bruto são discretizadas pelo tamanho do tick (Münnix et al., 2010). No Brasil, por exemplo, essa variação é de um centavo. A variação dos ticks pode ser

tratada como uma variável que assume valores inteiros (Koopman et al., 2017).

Nesta seção, apresentaremos uma aplicação empírica do modelo bivariado CINGARCH com cópula Gaussiana, considerando as distribuições condicionais Laplace discreta e Skellam.

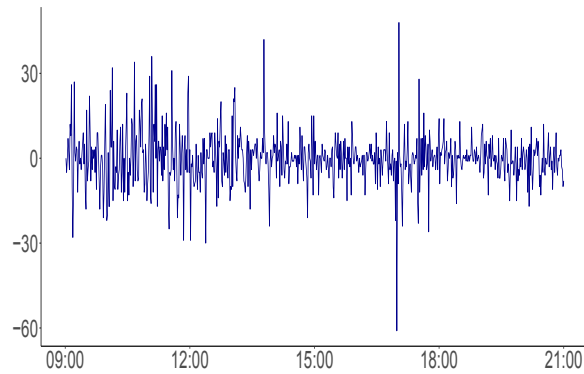
Considerando a natureza inteira da variação dos ticks e o fato de mercados financeiros apresentarem dependência entre si, que pode não ser constante ao longo do tempo (Serban et al., 2007), o processo CINGARCH pode ser adequado para ajustar este tipo de dado. Selecionamos duas séries temporais e as ajustamos conjuntamente, em que a primeira é a variação dos ticks da taxa de câmbio do euro para libra esterlina (EUR/GBP) e a segunda é a variação dos ticks da taxa de câmbio do euro para o dólar americano (EUR/USD). Os dados foram coletados em 04 de janeiro de 2019, das 9h as 21h. Iremos analisar conjuntamente a variação dos ticks das taxas de câmbio da EUR/GBP e EUR/USD.

Os dados consistem em 720 observações do preço de fechamento de cada minuto  $t$  para EUR/GBP,  $q_{1t}$ , e EUR/USD,  $q_{2t}$ . Considerando o preço de fechamento, a variação dos ticks é calculada dividindo a variação do preço pelo tamanho do tick,  $10^{-5}$ . Mais especificamente, a variação dos ticks é dada por  $X_{1t} = (q_{1t} - q_{1(t-1)}) \times 10^5$ , para a EUR/GBP, e  $X_{2t} = (q_{2t} - q_{2(t-1)}) \times 10^5$ , para a EUR/USD. Os dados estão disponíveis em <https://www.histdata.com>.

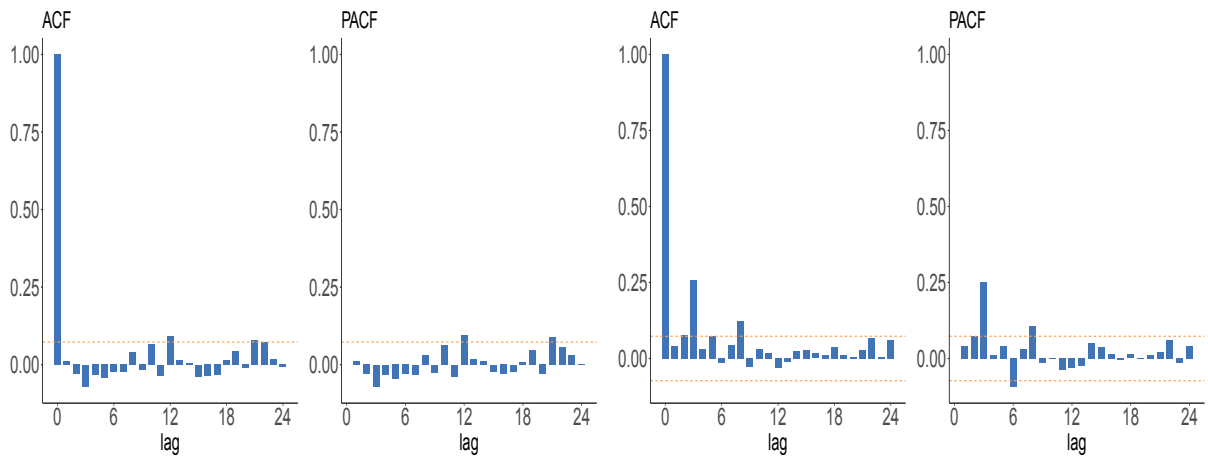
A Tabela 3.3 apresenta as estatísticas descritivas da variação dos ticks da EUR/GBP e EUR/USD. As duas séries assumem valores inteiros. Além disso, a mediana das duas séries é zero e a média é bem próxima de zero. Também podemos observar estes fatos nos gráficos da trajetória da EUR/GBP, Figura 3.8, e EUR/USD, Figura 3.9. As Figuras 3.8 e 3.9 também apresentam os gráficos da ACF e PACF das séries originais e das séries ao quadrado. Podemos perceber que, para as séries originais os gráficos não retornam lags com correlações relevantes. No entanto, quando analisamos as correlações para as séries ao quadrado o cenário muda e lags com correlações significativas aparecem. Estes fatos indicam que o modelo CINGARCH com condicionais Laplace discreta simétrica ou Skellam simétrica podem ser adequados para ajustar os dados considerados. Já que, além de serem distribuições para dados inteiros, as distribuições condicionais do modelo têm média zero e o modelo é relacionado ao segundo momento.

Tabela 3.3: Estatísticas descritivas de variação de ticks da taxa de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD (04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h).

	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Desvio padrão
EUR/GBP	-61	48	-0,114	0	9,260
EUR/USD	-53	70	-0,121	0	12,096



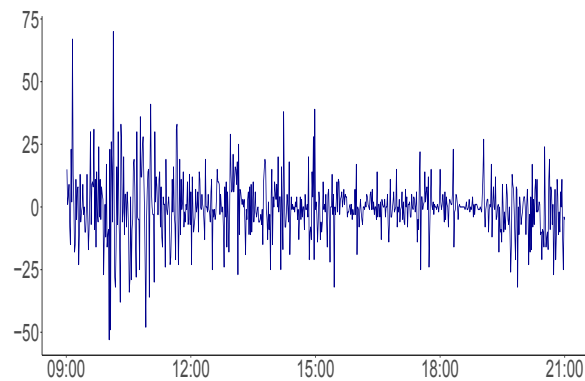
(a) Trajetória da variação dos ticks da taxa de câmbio EUR/GBP.



(b) ACF e PACF de  $X_{1t}$ .

(c) ACF e PACF de  $X_{1t}^2$ .

Figura 3.8: Trajetória, ACF e PACF da variação dos ticks por minuto da taxa de câmbio EUR/GBP, em 04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h.



(a) Trajetória da variação dos ticks da taxa de câmbio EUR/USD.

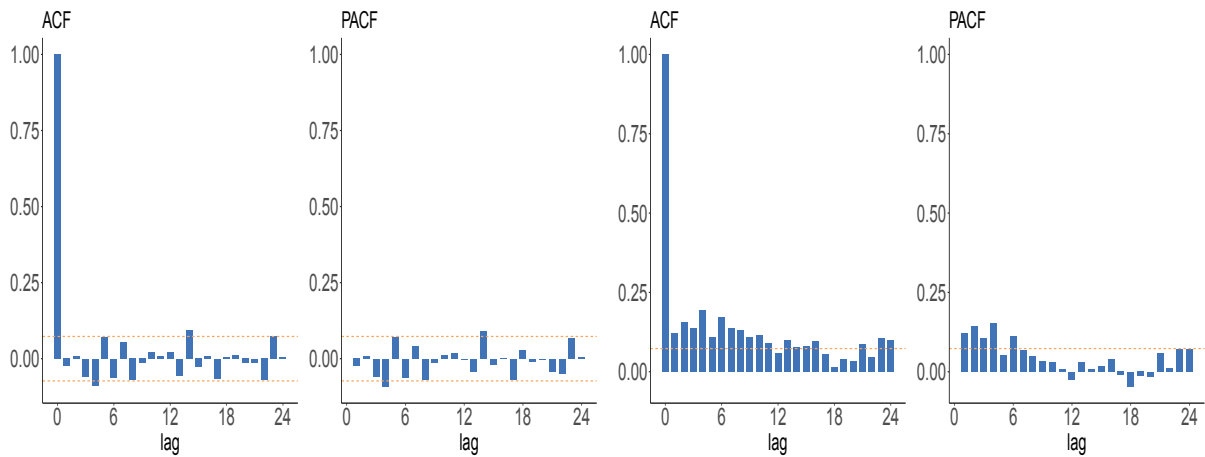
(b) ACF e PACF de  $X_{2t}$ .(c) ACF e PACF de  $X_{2t}^2$ .

Figura 3.9: Trajetória, ACF e PACF da variação dos ticks por minuto da taxa de câmbio EUR/USD, em 04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h.

O método de estimação de máxima verossimilhança em dois estágios, proposto para os processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH, foi implementado às séries de variação dos ticks da taxa de câmbio do EUR/GBP e variação dos ticks da taxa de câmbio do EUR/USD (04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h), ajustadas conjuntamente. A maximização das funções foi realizada através do comando `Optim` com o método `BFGS`, consideramos os valores iniciais zero para todos os parâmetros. A Tabela 3.4 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança em dois estágios dos parâmetros dos processos LD-CINGARCH com cópula Gaussiana e Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana, respectivamente.

Tabela 3.4: Estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo bivariado CINGARCH com cópula Gaussiana e distribuições condicionais LD e Skellam, aplicadas a variação dos ticks da taxa de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD (04 de janeiro de 2019, de 9h às 21h).

	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\beta}_{21}$	$\hat{\beta}_{22}$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\omega}_0$	$\hat{\beta}_{01}$	$\hat{\beta}_{02}$	$\hat{\alpha}_0$
LD	0,176	0,122	0,099	0,680	0,056	0,043	0,191	0,759	0,149	0,686	0,013	-0,007
Skellam	0,670	0,242	0,192	0,605	0,323	0,099	0,382	0,705	0,656	-0,647	0,006	0,005

Uma forma de se obter o erro padrão para as estimativas de máxima verossimilhança precisa ser investigada. [Koopman et al. \(2018\)](#) apresentam uma aproximação para a densidade da cópula e obtém o erro padrão das estimativas de máxima verossimilhança seguindo esta metodologia. [Ko e Hjort \(2019\)](#) fornecem uma expressão para a variância assintótica dos estimadores dos parâmetros das distribuições condicionais e para o parâmetro de correlação da cópula. Estes são dois caminhos a serem seguidos, de modo a combinar estes resultados à metodologia que estamos propondo.

Iremos avaliar marginalmente a bondade de ajuste do modelo às séries inteiras consideradas, por meio da construção de histogramas PIT e envelopes simulados para os resíduos de Pearson.

Para os histogramas PIT, consideramos a construção do PIT para dados discretos proposta por [Czado et al. \(2009\)](#). Para tanto, o valor do PIT randomizado é substituído pela sua função de distribuição acumulada condicional dada a contagem observada  $x$ , dando origem ao PIT não aleatório. Assim,

$$F_t(u|x_t) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq p_{t(t-1)}(x_t - 1|x_{(t-1)}; \theta) \\ \frac{u - p_{t(t-1)}(x_t - 1|x_{(t-1)}; \theta)}{p_{t(t-1)}(x_t|x_{(t-1)}; \theta) - p_{t(t-1)}(x_t - 1|x_{(t-1)}; \theta)}, & \text{se } u > p_{t(t-1)}(x_t - 1|x_{(t-1)}; \theta) \text{ e} \\ & u \leq p_{t(t-1)}(x_t|x_{(t-1)}; \theta) \\ 1, & \text{se } u > p_{t(t-1)}(x_t|x_{(t-1)}; \theta), \end{cases}$$

para  $0 \leq u \leq 1$  e  $i = 1, 2$ , consideramos  $p_{it(t-1)}(x_{it} - 1|x_{i(t-1)}; \theta)$  como a distribuição condicional do processo CINGARCH (LD ou Skellam), com dinâmica temporal para  $X_{1t}|\mathbf{F}_{t-1}$  e  $X_2|\mathbf{F}_{t-1}$ . Assim, o PIT é dado por

$$\bar{F}(u) = \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n F_{it}(u|x_{it}), \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Segundo [Czado et al. \(2009\)](#),  $\bar{F}(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada de uma distribuição uniforme. Para avaliarmos a uniformidade do modelo, vamos plotar um histograma de frequências. Usaremos os histogramas PIT para avaliar marginalmente o ajuste dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH à variação dos ticks por minuto das taxas de câmbio EUR/GBP e EUR/USD.

Os histogramas PIT para a aplicação considerada neste trabalho são apresentados nas Figuras 3.10 e 3.11. Podemos observar que o processo LD-CINGARCH realiza um

melhor ajuste dos dados, uma vez que os histogramas tem distribuição quase uniforme. O processo Skellam-CINGARCH, deixa a desejar, já que os histogramas apresentam uma distribuição forma de U, o que indica um ajuste ruim do modelo aos dados.

Adicionalmente, realizamos a avaliação marginal do desempenho dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH através da construção de envelopes simulados para os resíduos de Pearson, dados pela Equação (2.36).

Considerando as estimativas dos parâmetros dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH, apresentadas na Tabela 3.4, realizamos a construção dos envelopes simulados para os resíduos Pearson, como detalhado no Algoritmo 1.

Para a variação dos ticks por minuto das taxas de câmbio EUR/GBP e EUR/USD, temos um tamanho de amostra  $n = 720$  e realizamos um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas. As Figuras 3.12 e 3.13 apresentam, respectivamente, os envelopes simulados para os resíduos de Pearson dos processos LD-CINGARCH e Skellam-CINGARCH *versus* os quantis teóricos da distribuição normal padrão. As bandas dos envelopes são construídas usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$  (resíduo de Pearson obtido em cada réplica Monte Carlo) e através dos valores mínimo e o máximo dos resíduos  $\tilde{r}_i$ .

Os envelopes indicam que o processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana é adequado para modelar os dados, uma vez que, os envelopes acomodam praticamente todos os resíduos de Pearson, indicando um desempenho melhor em comparação com o processo Skellam-CINGARCH. Para os envelopes construídos usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$ , o processo LD-CINGARCH apresenta uma cobertura para os resíduos de Pearson verdadeiros de 100%, para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e 95%, para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/USD. Já o processo Skellam-CINGARCH apresenta uma cobertura para os resíduos de Pearson verdadeiros, de 32% para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e 91% para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/USD. Padrão semelhante pode ser observado para os envelopes construídos usando os valores mínimo e o máximo dos resíduos  $\tilde{r}_i$ . Esta análise corrobora o resultado apresentado na análise de calibração realizada através dos histogramas PIT.

Concluimos que o processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana é adequado para realizar o ajuste da variação dos ticks por minuto das taxas de câmbio EUR/GBP e EUR/USD. Além de apresentar um melhor desempenho, o processo LD-CINGARCH ainda retornou ganhos computacionais, quando comparado ao processo Skellam-CINGARCH.

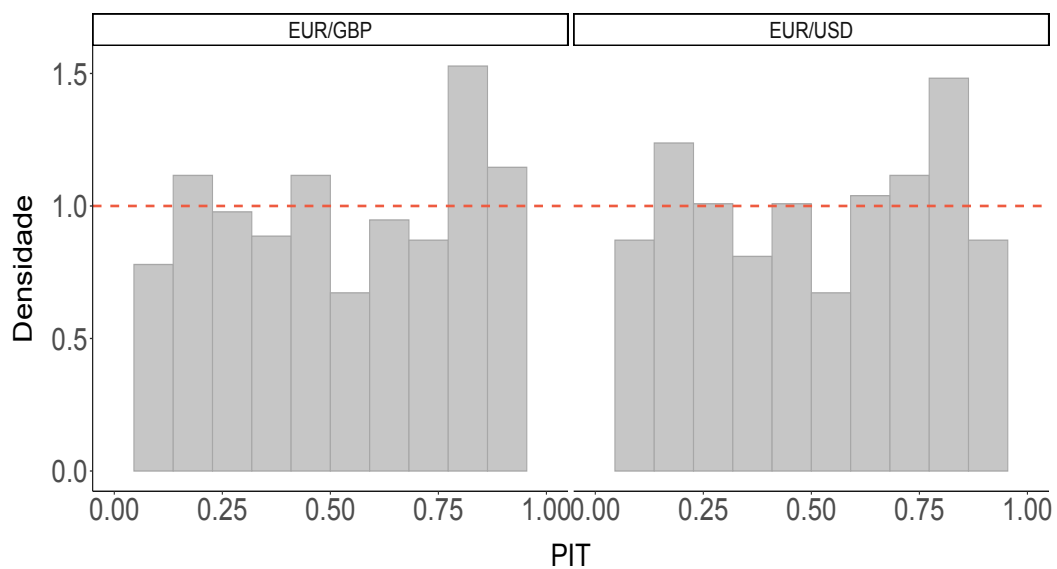


Figura 3.10: Histogramas PIT para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e EUR/USD, ajustado ao processo LD-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.

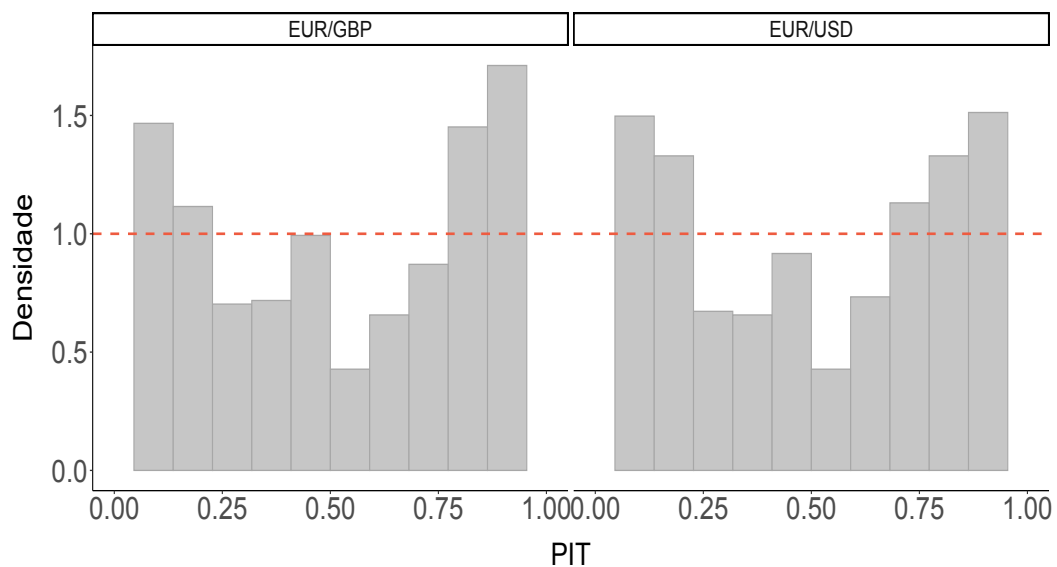
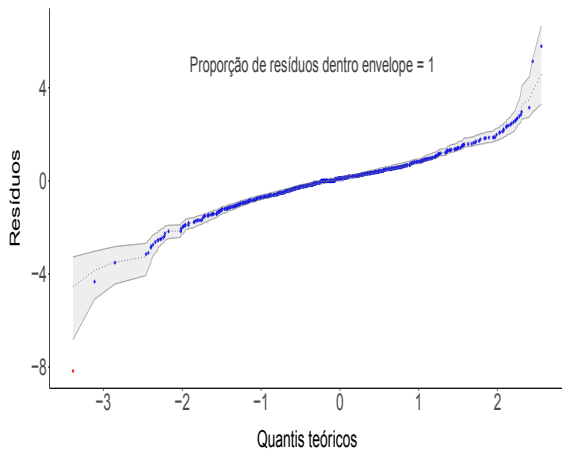
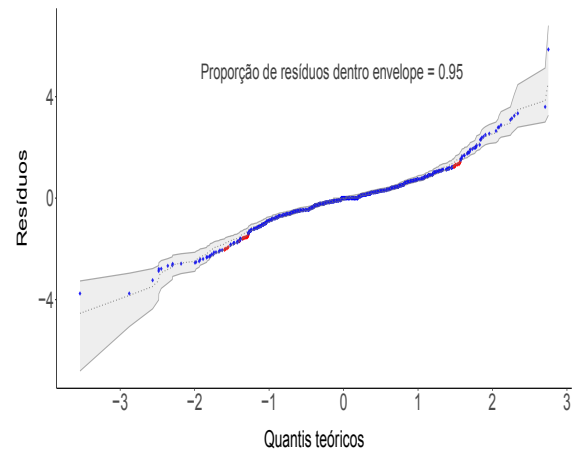


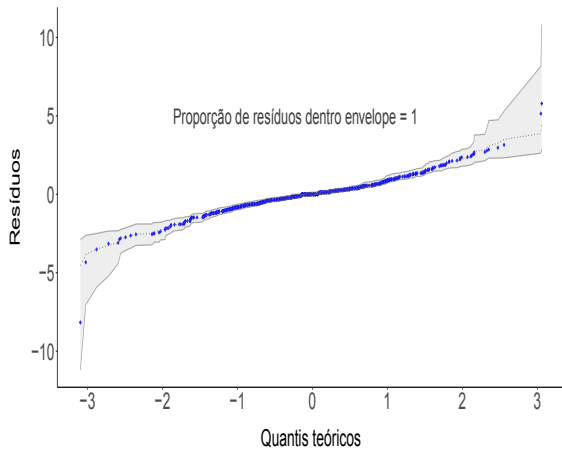
Figura 3.11: Histogramas PIT para a variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e EUR/USD, ajustado ao processo Skellam-CINGARCH bivariado com cópula Gaussiana.



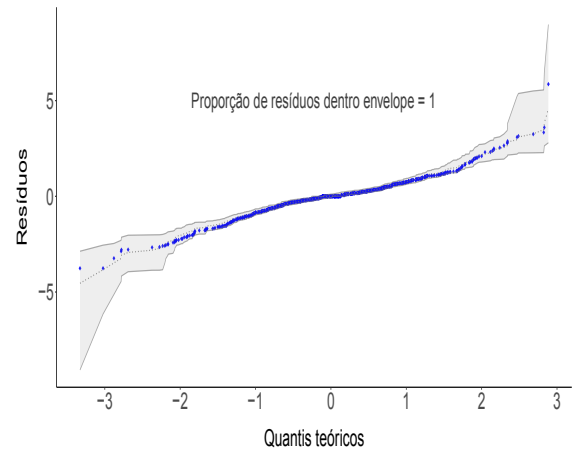
(a) Envelope com bandas construídas usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/GBP.



(b) Envelope com bandas construídas usando os percentis 2,5% e 97,5% de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/USD.

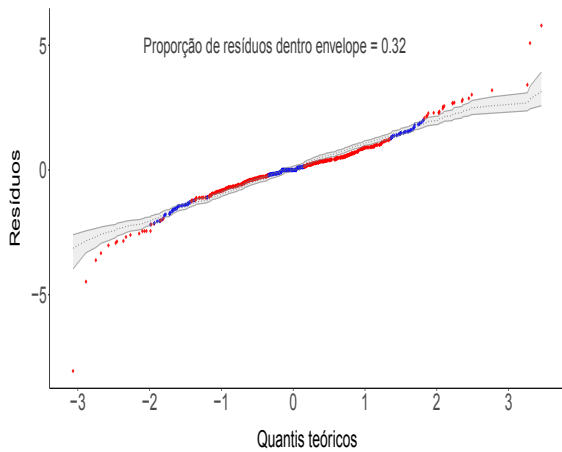


(c) Envelope com bandas construídas usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/GBP.

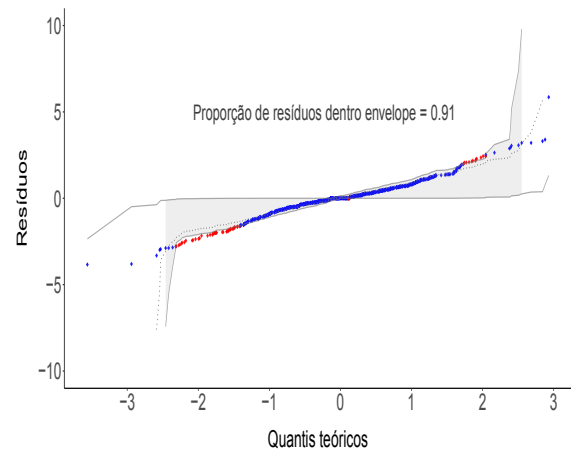


(d) Envelope com bandas construídas usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/USD.

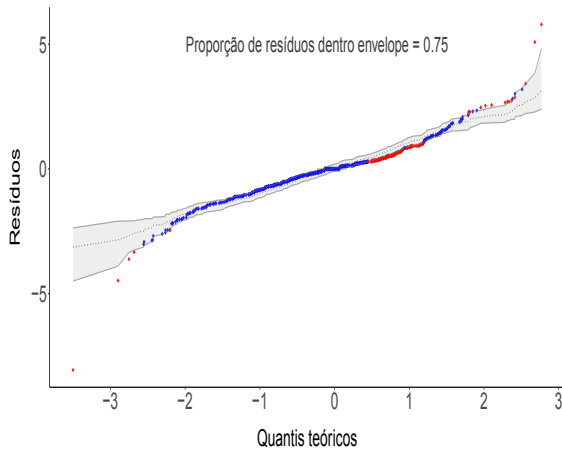
Figura 3.12: Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo LD-CINGARCH.



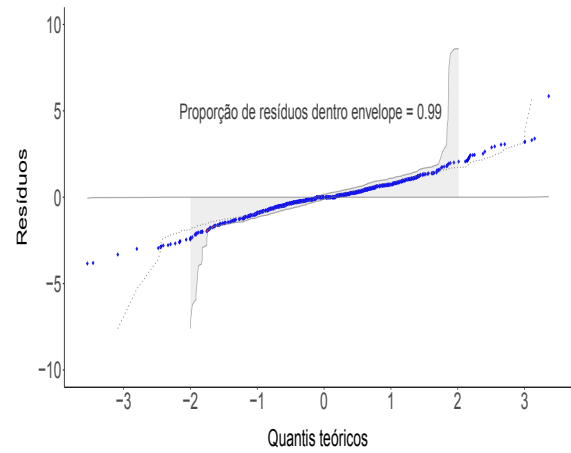
(a) Envelope com bandas construídas usando os percentis 2, 5% e 97, 5% de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/GBP.



(b) Envelope com bandas construídas usando os percentis 2, 5% e 97, 5% de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/USD.



(c) Envelope com bandas construídas usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/GBP.



(d) Envelope com bandas construídas usando o mínimo e o máximo de  $\tilde{r}_i$  para a variação do tick da taxa de câmbio da EUR/USD.

Figura 3.13: Envelopes simulados para os resíduos de Pearson do processo Skellam-CINGARCH.

## 3.6 Conclusão

Neste capítulo realizamos a construção de uma classe de modelos para análise de séries temporais multivariadas, para modelagem de dados inteiros, combinando a metodologia INGARCH com cópulas, o processo CINGARCH. A dinâmica do modelo foi considerada através da variância condicional, dadas as observações passadas. Consideramos as distribuições condicionais Skellam e Laplace discreta em uma cópula Gaussiana. Foi realizado um estudo de simulação Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e obtivemos

as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo. A estimação foi realizada através do método de estimação em dois estágios. A metodologia proposta foi utilizada para analisar conjuntamente a variação dos ticks da taxa de câmbio do EUR/GBP e EUR/USD. A bondade de ajuste do modelo foi avaliada marginalmente por meio de envelopes simulados para os resíduos de Pearson e da construção de histogramas PIT. O processo LD-CINGARCH apresentou melhor ajuste aos dados em comparação com o processo Skellam-CINGARCH.

Para pesquisa futura pretendemos estudar como realizar a previsão considerando o segundo momento, uma vez que o modelo que estamos estudando tem médias iguais a zero.

Pretendemos explorar alguns resultados assintóticos do processo CINGARCH. Como ponto de partida, podemos considerar o trabalho realizado por [Ko e Hjort \(2019\)](#). Eles apresentam uma expressão da variância assintótica para os estimadores dos parâmetros das distribuições condicionais e para o estimador do parâmetro de correlação da cópula. Seja  $\theta$  o vetor completo de parâmetros das distribuições condicionais e da cópula. A variância assintótica dos estimadores de  $\theta$  é  $V_\theta = I_\theta^{-1} K_\theta (I_\eta^{-1})^\top$ , em que  $I_\theta$  é uma matriz de segundas derivadas da log-verossimilhança da cópula em relação aos parâmetros e  $K_\theta$  é uma matriz que envolve o cálculo das derivadas da função de log-verossimilhança da cópula em relação aos parâmetros. Um ponto importante seria associar este resultado à combinação de cópula e metodologia INGARCH que estamos realizando e formular uma teoria para o cálculo da variância assintótica referente aos processos CINGARCH.

Através da variância assintótica dos estimadores, poderemos calcular o erro padrão das estimativas de máxima verossimilhança e avaliar, via estudo Monte Carlo, a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança. Para obter as derivadas da log-verossimilhança da cópula em relação aos parâmetros, inicialmente podemos considerar métodos numéricos, como por exemplo as funções do software R como a `num.Deriv` do pacote `Deriv`.

## Capítulo 4

# Considerações Finais

Como discutido ao longo deste trabalho, o estudo de modelos para séries temporais é tópico de interesse em diversas áreas. Ressaltamos sua importância no mercado financeiro, onde os dados são geralmente coletados ao longo do tempo e apontam a necessidade de modelagens que acomodem bem as particularidades das séries. Esta tese apresentou duas construções de modelos para séries temporais motivadas por aplicações do mercado financeiro.

A primeira abordagem foi o processo de Markov ponderado-gama, PG. Apresentamos um modelo de Markov construído a partir de uma densidade de peso gama que introduziu a estrutura de dependência no modelo. Esta construção foi proposta para dados não-negativos e contínuos. O modelo foi definido a partir de sua densidade de transição. Em particular, as distribuições GIG e gama foram consideradas como potenciais distribuições para a marginal do processo, as quais retornaram processos com vários resultados explícitos. A estimação dos parâmetros foi realizada via método de máxima verossimilhança e, adicionalmente, foi realizado um estudo empírico a respeito do ajuste do modelo aos dados de volatilidade realizada dos log-retornos das ações que compõe o índice FTSE 100, para os quais um exercício de pseudo previsão foi realizado. Para avaliar a bondade do ajuste, verificamos a calibração do modelo através de histogramas PIT e realizamos a construção de envelopes simulados para os resíduos de Pearson. O modelo PG-GIG apresentou melhor ajuste aos dados quando comparado ao PG-Ga.

Considerando a literatura de modelos de séries temporais para dados contínuos não-negativos existente, a metodologia proposta é relevante no sentido de apresentar uma expressão para a densidade de transição e por trazer uma proposta de densidade de peso contínua, que traz ganhos no que diz respeito ao cálculo de quantidades de interesse.

Para trabalhos futuros envolvendo esta metodologia, podemos realizar a construção de um processo de Markov com densidade de peso contínua em tempo contínuo. Outro ponto importante seria a construção de modelos multivariados seguindo esta estrutura, considerando uma função de peso discreta ou contínua.

A segunda abordagem proposta neste trabalho foi uma classe de modelos para análise de séries temporais multivariadas, para modelagem de dados inteiros, combinando a metodologia INGARCH com cópulas, o processo CINGARCH. Consideramos as distri-

---

buições condicionais Skellam e Laplace discreta em uma cópula Gaussiana. Assim como na primeira abordagem, um estudo de simulação Monte Carlo foi realizado e obtivemos as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo. A estimação foi realizada através do método de estimação em dois estágios. A utilização do processo CINGARCH foi motivada na análise conjunta da variação dos ticks da taxa de câmbio da EUR/GBP e EUR/USD. A bondade de ajuste dos modelos foi avaliada marginalmente por meio de envelopes simulados para os resíduos de Pearson e da construção de histogramas PIT. Um melhor ajuste aos dados foi apresentado pelo processo LD-CINGARCH em comparação com o processo Skellam-CINGARCH.

O modelo multivariado para séries temporais inteiras que propomos se destaca em relação as metodologias presentes na literatura, como por exemplo o trabalho realizado por [Koopman et al. \(2018\)](#), no sentido de proporcionar uma dinâmica temporal e contemporânea simples, introduzida através da metodologia INGARCH. Além disso, trouxemos a Laplace discreta como uma excelente opção para a distribuição condicional do modelo. As construções disponíveis na literatura sugerem a Skellam como única opção e mostramos no estudo empírico que o processo LD-CINGARCH apresentou um ajuste melhor aos dados. Vale ressaltar ainda que a distribuição Skellam possui a função Bessel modificada de terceiro tipo, isso implica que nos exercícios de simulação aproximações para esta função especial são feitas e, conseqüentemente, o tempo computacional aumenta, o que não acontece quando consideramos a distribuição condicional Laplace discreta.

Para esta metodologia, como pesquisas futuras pretendemos estudar como realizar a previsão considerando o segundo momento, uma vez que o modelo que estamos estudando tem médias iguais a zero. Outro ponto será estudar alguns resultados assintóticos do processo CINGARCH como, por exemplo, obter uma expressão para a variância assintótica para os estimadores dos parâmetros das distribuições condicionais e para o estimador do parâmetro de correlação da cópula. Uma solução seria considerar os resultados apresentados no trabalho realizado por [Ko e Hjort \(2019\)](#), e utilizar métodos numéricos como, por exemplo, as funções do software R como a `num.Deriv` do pacote `Deriv` para obter aproximações para as derivadas presentes nos resultados apresentados pelos autores. Um ponto importante seria associar este resultado à combinação de cópula e metodologia INGARCH que propomos e formular uma teoria para o cálculo da variância assintótica referente aos processos CINGARCH.

# Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1974) *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY, USA: Dover Publications, Inc.
- Acar, E. F., Czado, C. e Lysy, M. (2019) Flexible dynamic vine copula models for multivariate time series data. *Econometrics and Statistics*, **12**, 181–197.
- Agosto, A., Cavaliere, G., Kristensen, D. e Rahbek, A. (2016) Modeling corporate defaults: Poisson autoregressions with exogenous covariates (PARX). *Journal of Empirical Finance*, **38**, 640 – 663.
- Al-Osh, M. A. e Aly, E. (1992) First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **21**, 2483–2492.
- Al-Osh, M. A. e Alzaid, A. A. (1987) First-order integer-valued autoregressive (INAR (1)) process. *Journal of Time Series Analysis*, **8**, 261–275.
- Alomani, G. A., Alzaid, A. A. e Omair, M. A. (2018) A Skellam GARCH model. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **32**, 200–214.
- Alzaid, A. A. e Omair, M. A. (2010) On the Poisson difference distribution inference and applications. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series*, **33**, 17–45.
- Andersen, T., Bollerslev, T., Diebold, F. e Labys, P. (2003) Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, **71**, 579–625.
- Anzarut, M., Mena, R. H., Nava, C. R. e Prünster, I. (2018) Poisson-driven stationary Markov models. *Journal of Business & Economic Statistics*, **36**, 684–694.
- Barbiero, A. e Ferrari, P. A. (2017) An R package for the simulation of correlated discrete variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **46**, 5123–5140.
- Barndorff-Nielsen, O. e Shephard, N. (2001) Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society*, **63**, 167–241.

- Barreto-Souza, W. e Bourguignon, M. (2015) A skew inar(1) process on  $z$ . *Advances in Statistical Analysis*, **99**, 189–208.
- Barreto-Souza, W. e Simas, A. (2016) General mixed Poisson regression models with varying dispersion. *Statistics and Computing*, **26**, 1263–1280.
- Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Chebana, F., Adlouni, S. e Bobée, B. (2010) Mixed estimation methods for halphen distributions with applications in extreme hydrologic events. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **77**, 359–376.
- Chen, C. W., Watanabe, T. e Lin, E. M. (2021) Bayesian estimation of realized GARCH-type models with application to financial tail risk management. *Econometrics and Statistics*.
- Chen, X. B., Gao, J., Li, D. e Silvapulle, P. (2018) Nonparametric estimation and forecasting for time-varying coefficient realized volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics*, **36**, 88–100.
- Christou, V. e Fokianos, K. (2015) Estimation and testing linearity for non-linear mixed Poisson autoregressions. *Electronic Journal of Statistics*, **9**, 1357–1377.
- Contreras-Cristán, A., Mena, R. H. e Walker, S. G. (2009) On the construction of stationary ar(1) models via random distributions. *Statistics*, **43**, 227–240.
- Corsi, F., Mittnik, S., Pigorsch, C. e Pigorsch, U. (2008) The volatility of realized volatility. *Econometric Reviews*, **27**, 46–78.
- Creal, D., Koopman, S. J. e Lucas, A. (2011) A dynamic multivariate heavy-tailed model for time-varying volatilities and correlations. *Journal of Business Economic Statistics*, **29**, 552–563.
- (2013) Generalized autoregressive score models with applications. *Journal of Applied Econometrics*, **28**, 777–795.
- Cui, Y. e Zhu, F. (2018) A new bivariate integer-valued GARCH model allowing for negative cross-correlation. *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, **27**, 428–452.
- Czado, C., Gneiting, T. e Held, L. (2009) Predictive model assessment for count data. *Biometrics*, **65**, 1254–1261.

- Dawid, A. P. (1984) Present position and potential developments: Some personal views: Statistical theory: The prequential approach. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, **147**, 278–292.
- Denuit, M. e Lambert, P. (2005) Constraints on concordance measures in bivariate discrete data. *Journal of Multivariate Analysis*, **93**, 40–57.
- Doukhan, P., Khan, N. M. e Neumann, M. H. (2021) Mixing properties of integer-valued garch processes. *ALEA, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, **18**, 401–420.
- Durante, F. e Sempì, C. (2015) *Principles of Copula Theory*. Chapman and Hall/CRC, 1 edn.
- Eberlein, E. e Hammerstein, E. A. (2004) Generalized hyperbolic and inverse gaussian distributions: Limiting cases and approximation of processes. *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV*, **58**, 221–264.
- Engle, R. F. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987–1007.
- Ferland, R., Latour, A. e Oraichi, D. (2006) Integer-valued GARCH process. *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 923–942.
- Fokianos, K. (2011) Some recent progress in count time series. *Statistics*, **45**, 49–58.
- Fokianos, K., Rahbek, A. e Tjøstheim, D. (2009) Poisson autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, **104**, 1430–1439.
- Fokianos, K. e Tjøstheim, D. (2012) Nonlinear Poisson autoregression. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **64**, 1205–1225.
- Freeland, R. (2010) True integer value time series. *AStA Advances in Statistical Analysis*, **94**, 217–229.
- Gaver, D. P. e Lewis, P. A. W. (1980) First-order autoregressive gamma sequences and point processes. *Advances in Applied Probability*, **12**, 727–745.
- Good, I. J. (1953) The population frequencies of species and the estimation of population parameters. *Biometrika*, **40**, 237–264.
- Harvey, A. C. (2013) *Dynamic Models for Volatility and Heavy Tails: With Applications to Financial and Economic Time Series*. Econometric Society Monographs. Cambridge University Press.

- Heber, G., Shephard, N., Sheppard, K., Lunde, A., Sharp, J., Hendricks, D. e Pesch, D. (2020) Oxford-man institute's realized library, version 0.3. URL <https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/data>.
- Heinen, A. (2003) Modeling time series count data: an autoregressive conditional Poisson model.
- Heinen, A. e Rengifo, E. (2007) Multivariate autoregressive modeling of time series count data using copulas. *Journal of Empirical Finance*, **14**, 564–583.
- Iyengar, S. e Liao, Q. (1997) Modeling neural activity using the generalized inverse Gaussian distribution. *Biological Cybernetics*, **77**, 289–295.
- Jacobs, P. A. e Lewis, P. A. W. (1977) A mixed autoregressive-moving average exponential sequence and point process (EARMA 1,1). *Advances in Applied Probability*, **9**, 87–104.
- Joe, H. (1996) Time series models with univariate margins in the convolution-closed infinitely divisible class. *Journal of Applied Probability*, **33**, 664–677.
- Jørgensen, B. (1982) *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, vol. 9 de 0930-0325. Springer-Verlag New York, 1 edn.
- Kahaner, D., Moler, C. e Nash, S. (1989) *Numerical Methods and Software*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc.
- Ko, V. e Hjort, N. L. (2019) Model robust inference with two-stage maximum likelihood estimation for copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, **171**, 362–381.
- Koopman, S. J., Lit, R. e Lucas, A. (2017) Intraday stochastic volatility in discrete price changes: The dynamic Skellam model. *Journal of the American Statistical Association*, **112**.
- Koopman, S. J., Lit, R., Lucas, A. e Opschoor, A. (2018) Dynamic discrete copula models for high-frequency stock price changes. *Journal of Applied Econometrics*, **33**, 966–985.
- Kozubowski, T. e Inusah, S. (2006) A skew laplace distribution on integers. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **58**, 555–571.
- Lakshminarayana, J., Pandit, S. e Rao, K. S. (1999) On a bivariate Poisson distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **28**, 267–276.
- Lawrance, A. J. e Lewis, P. A. W. (1977) An exponential moving-average sequence and point process (EMA1). *Journal of Applied Probability*, **14**, 98–113.
- Lee, L. F. (1983) Generalized econometric models with selectivity. *Econometrica*, **51**, 507–512.

- Lee, Y., Lee, S. e Tjøstheim, D. (2018) Asymptotic normality and parameter change test for bivariate Poisson INGARCH models. *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, **27**, 52–69.
- Leisen, F., Mena, R. H., Palma, F. e Rossini, L. (2019) On a flexible construction of a negative binomial model. *Statistics & Probability Letters*, **152**, 1–8.
- Lewis, P., McKenzie, E. e Hugus, D. K. (1989) Gamma processes. *Communications in Statistics Stochastic Models*, **5**, 1–30.
- Lewis, P. A. W. (1983) Generating negatively correlated gamma variates using the beta-gamma transformation. *Proc. 1983 Winter Simulation Conf.*, **1**, 175–176.
- Liu, H. (2012) *Some models for time series of counts*. Tese de doutorado, Universidade de Columbia.
- McKenzie, E. (1985) Some simple models for discrete variate time series. *Journal of the American Water Resources Association*, **21**, 645–650.
- Mckenzie, E. (1988) Some arma models for dependent sequences of Poisson counts. *Advances in Applied Probability*, **20**, 822–835.
- Mena, R. H. e Walker, S. G. (2005) Stationary autoregressive models via a bayesian nonparametric approach. *Journal of Time Series Analysis*, **26**, 789–805.
- Münnix, M. C., Schäfer, R. e Guhr, T. (2010) Impact of the tick-size on financial returns and correlations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **389**, 4828–4843.
- Onorati, P. e Liseo, B. (2022) Bayesian hierarchical copula model for financial time series. *doi=10.48550/arXiv.2202.13689*.
- Palma, F. e Mena, R. H. (2021) Duality for a class of continuous-time reversible Markov models. *Statistics*, **55**, 231–242.
- Patton, A. J. (2006) Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, **47**, 527–556.
- Piancastelli, L. S., Barreto-Souza, W. e Ombao, H. (2022) Flexible bivariate INGARCH process with a broad range of contemporaneous correlation. *Journal of Time Series Analysis*, Aceito para publicação. doi: 10.1111/jtsa.12663.
- Pitt, M. K., Chatfield, C. e Walker, S. G. (2002) Constructing first order stationary autoregressive models via latent processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, **29**, 657–663.

- Rao, C. R. (1965) On discrete distributions arising out of methods of ascertainment. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)*, **27**, 311–324.
- Revuz, D. e Yor, M. (1999) *Continuous martingales and Brownian motion*. Berlin Springer, 3rd ed edn.
- Ristić, M. M., Bakouch, H. S. e Nastić, A. S. (2009) A new geometric first-order integer-valued autoregressive (NGINAR(1)) process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 2218–2226.
- Silva, R. e Barreto-Souza, W. (2019) Flexible and Robust Mixed Poisson INGARCH Models. *Journal of Time Series Analysis*, **40**, 788–814.
- Skellam, J. (1946) The frequency distribution of the difference between two Poisson variates belonging to different populations. *Journal of the Royal Statistical Society*, **109**, 296.
- Sklar, M. J. (1959) *Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges*. Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris, 8 edn.
- Smith, M. e Khaled, M. (2012) Estimation of copula models with discrete margins via bayesian data augmentation. *Journal of the American Statistical Association*, **107**, 290–303.
- Steutel, F. W. e van Harn, K. (1978) Discrete analogues of self-decomposability and stability. *The Annals of Probability*, **7**, 893–899.
- Takahashi, M., Watanabe, T. e Omori, Y. (2021) Forecasting daily volatility of stock price index using daily returns and realized volatility. *Econometrics and Statistics*, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2021.08.002>.
- Zhu, F. (2010) A negative binomial integer-valued GARCH model. *Journal of Time Series Analysis*, **32**, 54–67.
- Șerban, M., Brockwell, A., Lehoczky, J. e Srivastava, S. (2007) Modelling the Dynamic Dependence Structure in Multivariate Financial Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, **28**, 763–782.

# Apêndice A

## Resultados do processo de Markov ponderado-gama

### A.1 Densidade de transição do modelo de Markov ponderado-gama

Cálculo da densidade de transição  $f(x_t, x_{t-1})$ , do modelo de Markov ponderado-gama:

$$\begin{aligned}
 f_{X_t|X_{t-1}}(x_t|x_{t-1}) &= \frac{f(x_t, x_{t-1})}{f(x_{t-1})} \\
 &= \int_0^\infty \frac{f(x_t, x_{t-1}, y)}{f(x_{t-1})} dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{f(x_{t-1})} f(x_t|x_{t-1}, y) f(x_{t-1}, y) dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{f(x_{t-1})} f(x_t|x_{t-1}, y) f(y|x_{t-1}) f(x_{t-1}) dy \\
 &= \int_0^\infty f(x_t|x_{t-1}, y) f(y|x_{t-1}) dy \\
 &= \int_0^\infty \hat{f}(x_t; y, \phi) \frac{(x_{t-1})^\phi}{\Gamma(\phi)} e^{-x_{t-1}y} y^{\phi-1} dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{x_t^\phi e^{-x_t y} f(x_t)}{\eta(y, \phi)} \frac{(x_{t-1})^\phi}{\Gamma(\phi)} e^{-x_{t-1}y} y^{\phi-1} dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{(x_t x_{t-1})^\phi e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1} f(x_t)}{\eta(y, \phi) \Gamma(\phi)} dy \\
 &= \frac{(x_t x_{t-1})^\phi f(x_t)}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} dy.
 \end{aligned}$$

## A.2 Correlação do modelo de Markov ponderado-gama

Cálculo da correlação do modelo de Markov ponderado-gama :

$$\begin{aligned}\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-1} - \mathbb{E}(X_{t-1}))] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} [\mathbb{E}(X_t X_{t-1}) - \mu^2].\end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_{t-1}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_t x_{t-1} f(x_t, x_{t-1}) dx_{t-1} dx_t \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_t x_{t-1} \frac{(x_t x_{t-1})^\phi f(x_t)}{\Gamma(\phi)} \left( \int_0^\infty \frac{e^{-y(x_t+x_{t-1})} y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} dy \right) f(x_{t-1}) dx_{t-1} dx_t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} \left[ \int_0^\infty x_t^{\phi+1} e^{-yx_t} f(x_t) \left( \int_0^\infty x_{t-1}^{\phi+1} e^{-yx_{t-1}} f(x_{t-1}) dx_{t-1} \right) dx_t \right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1}}{\eta(y, \phi)} \int_0^\infty x_t^{\phi+1} e^{-yx_t} f(x_t) \eta(y, \phi + 1) dx_t dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1} \eta(y, \phi + 1)}{\eta(y, \phi)} \left[ \int_0^\infty x_t^{\phi+1} e^{-yx_t} f(x_t) dx_t \right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1} \eta^2(y, \phi + 1)}{\eta(y, \phi)} dy.\end{aligned}$$

Assim, a correlação é dada por:

$$\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1} \eta^2(y, \phi + 1)}{\eta(y, \phi)} dy - \mu^2 \right).$$

## A.3 Correlação do modelo de Markov ponderado-gama com marginal gama( $a, b$ )

$$\begin{aligned}\text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \frac{b^2}{a} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \int_0^\infty y^{\phi-1} \left( \frac{b^a \Gamma(\phi + a + 1)}{\Gamma(a)(b+y)^{\phi+a+1}} \right)^2 \frac{\Gamma(a)(b+y)^{\phi+a}}{b^a \Gamma(\phi + a)} dy - \frac{a^2}{b^2} \right) \\ &= \frac{b^2}{a} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \frac{b^a \Gamma^2(\phi + a + 1)}{\Gamma(a)\Gamma(\phi + a)} \frac{1}{b^{\phi+a+2}} \int_0^\infty \frac{y^{\phi-1}}{\left(1 + \frac{y}{b}\right)^{\phi+a+2}} dy - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (\text{A.1})\end{aligned}$$

faremos duas mudanças de variável na integral presente na equação acima, a primeira será  $k = \frac{y}{b}$ , e a segunda será  $\frac{1}{1+k} = u$  que resultam:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \frac{b^2}{a} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \frac{b^a \Gamma^2(\phi + a + 1)}{\Gamma(a) \Gamma(\phi + a)} \frac{b^\phi}{b^{\phi+a+2}} \int_0^\infty \frac{k^{\phi-1}}{(1+k)^{\phi+a+2}} dk - \frac{a^2}{b^2} \right) \\ &= \frac{b^2}{a} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \frac{b^a \Gamma^2(\phi + a + 1)}{\Gamma(a) \Gamma(\phi + a)} \frac{b^\phi}{b^{\phi+a+2}} \int_0^1 (1-u)^{\phi-1} u^{a+1} du - \frac{a^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

Perceba que o integrando é o núcleo de uma densidade Beta com parâmetros  $a + 2$  e  $\phi$  com densidade dada por:

$$f(u) = \frac{\Gamma(\phi + a + 2)}{\Gamma(\phi) \Gamma(a + 2)} (1-u)^{\phi-1} u^{a+1},$$

desse modo, a correlação fica expressa por:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \frac{b^2}{a} \left( \frac{1}{\Gamma(\phi)} \frac{b^a \Gamma^2(\phi + a + 1)}{\Gamma(a) \Gamma(\phi + a)} \frac{b^\phi}{b^{\phi+a+2}} \frac{\Gamma(a + 2) \Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi + a + 2)} - \frac{a^2}{b^2} \right) \\ &= \frac{\Gamma^2(\phi + a + 1) \Gamma(a + 2)}{a \Gamma(a) \Gamma(\phi + a) \Gamma(\phi + a + 2)} - a \\ &= \frac{\phi}{\phi + a + 1}. \end{aligned}$$

## A.4 Boxplots, histogramas e qq-plots das estimativas de máxima verossimilhança do processo de Markov ponderado-gama

A Figura A.1 apresenta os boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , em um estudo Monte Carlo de tamanho  $N = 1000$ .

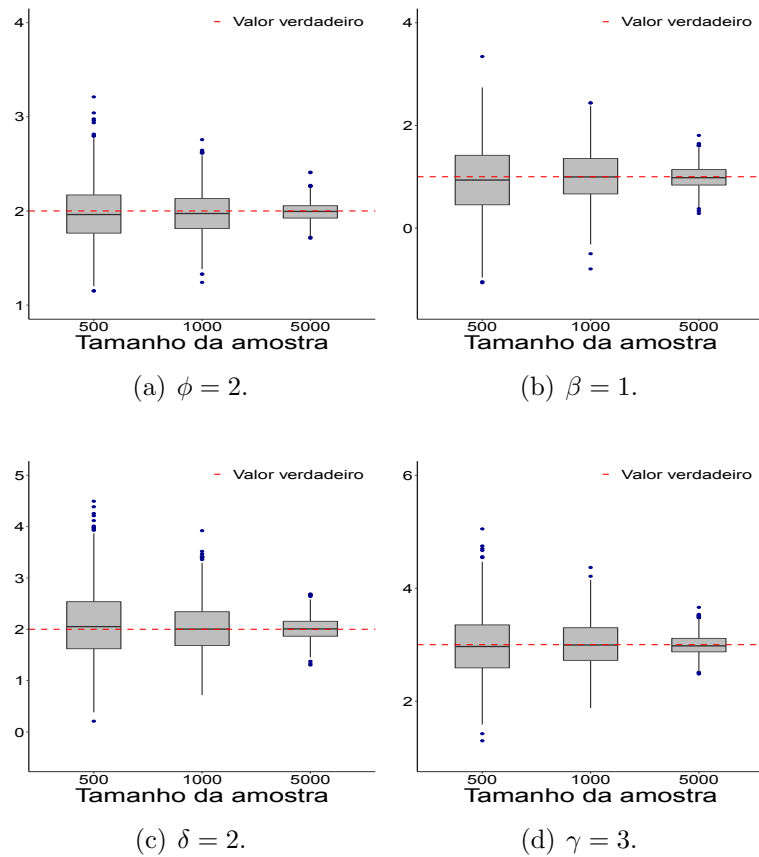


Figura A.1: Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

A Figura A.2 apresenta os boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 2$ ,  $a = 2$ , e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , em um estudo Monte Carlo de tamanho  $N = 1000$ .

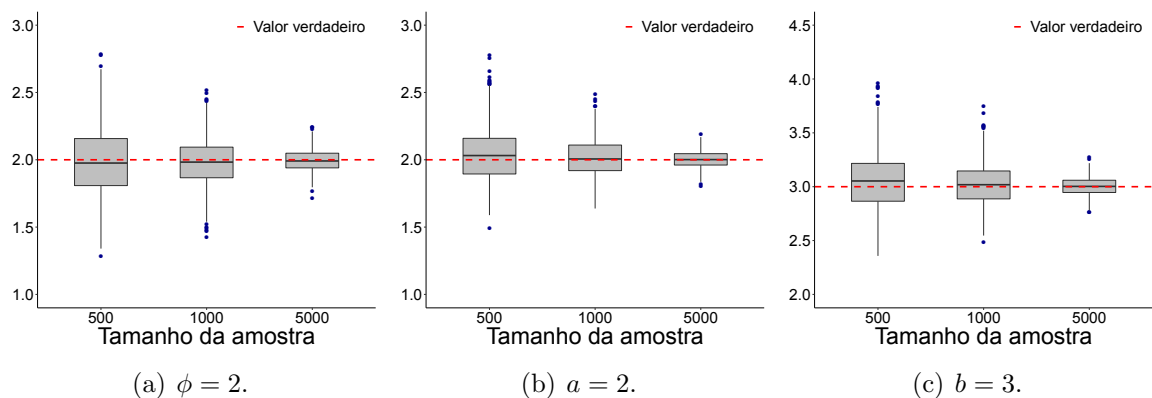


Figura A.2: Boxplots das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 2$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

A Figura A.3 apresenta os histogramas das estimativas de máxima verossimilhança

padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , em um estudo Monte Carlo de tamanho  $N = 1000$ .

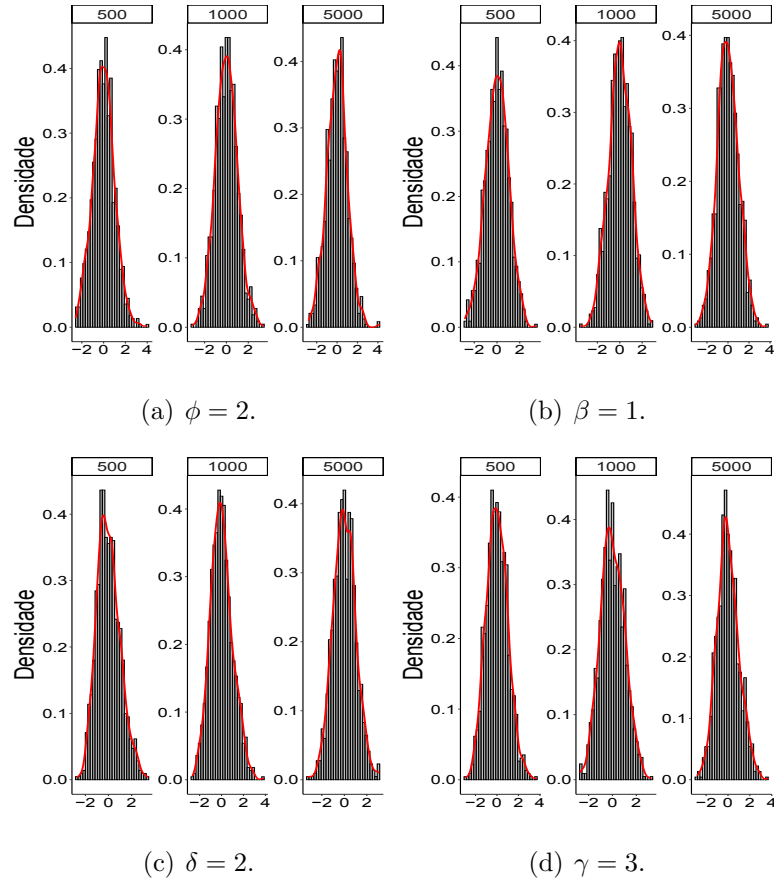


Figura A.3: Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

A Figura A.4 apresenta os histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 5$ ,  $\phi = 2$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , em um estudo Monte Carlo de tamanho  $N = 1000$ .

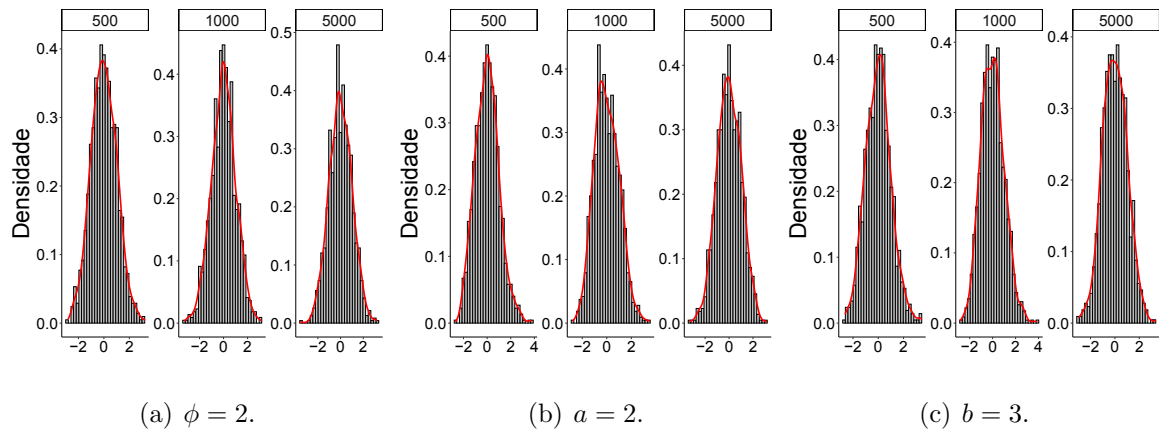


Figura A.4: Histogramas das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 2$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

As Figuras A.5 e A.6, apresentam os qq-plots das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2, 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , e do processo PG-Ga,  $\phi = 2, 5$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ , em um estudo Monte Carlo de tamanho  $N = 1000$ .

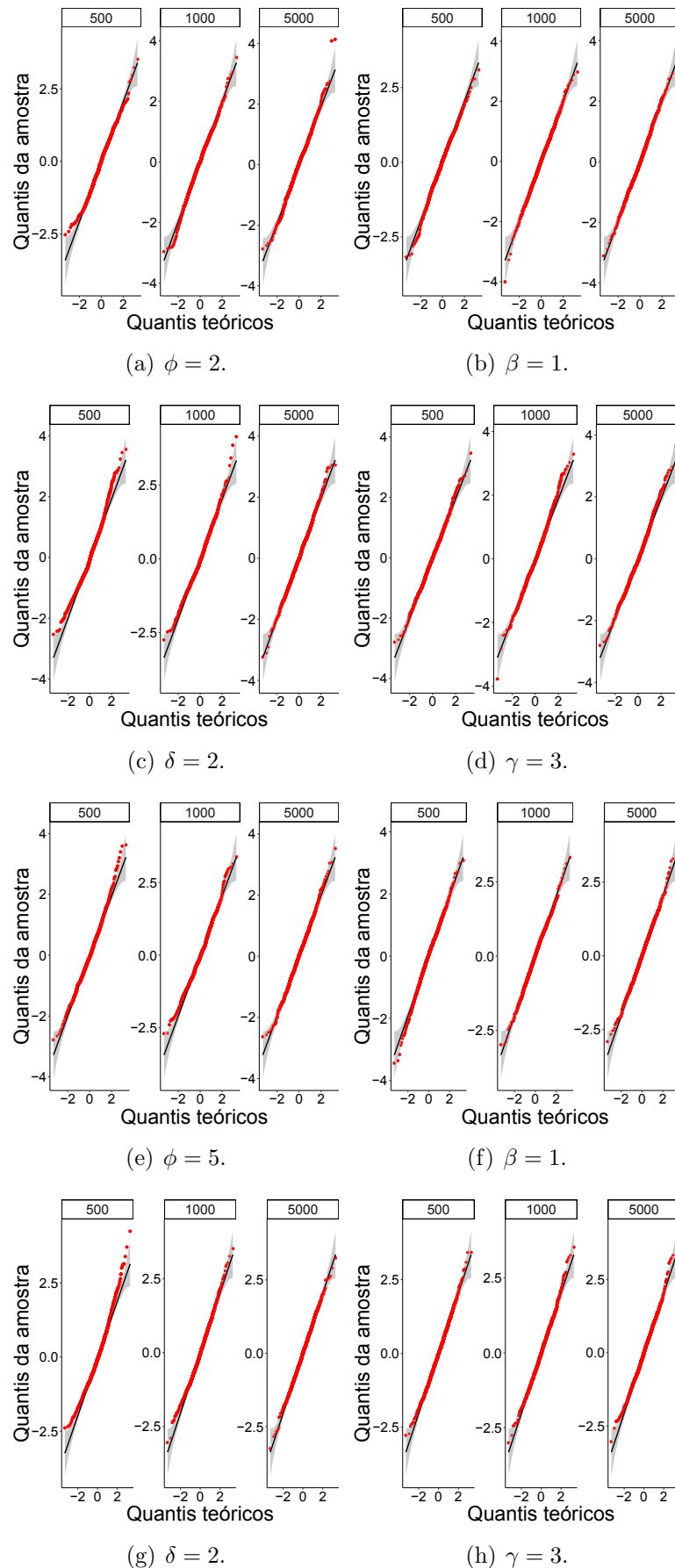


Figura A.5: Qq-plots das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-GIG,  $\phi = 2, 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 2$  e  $\gamma = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

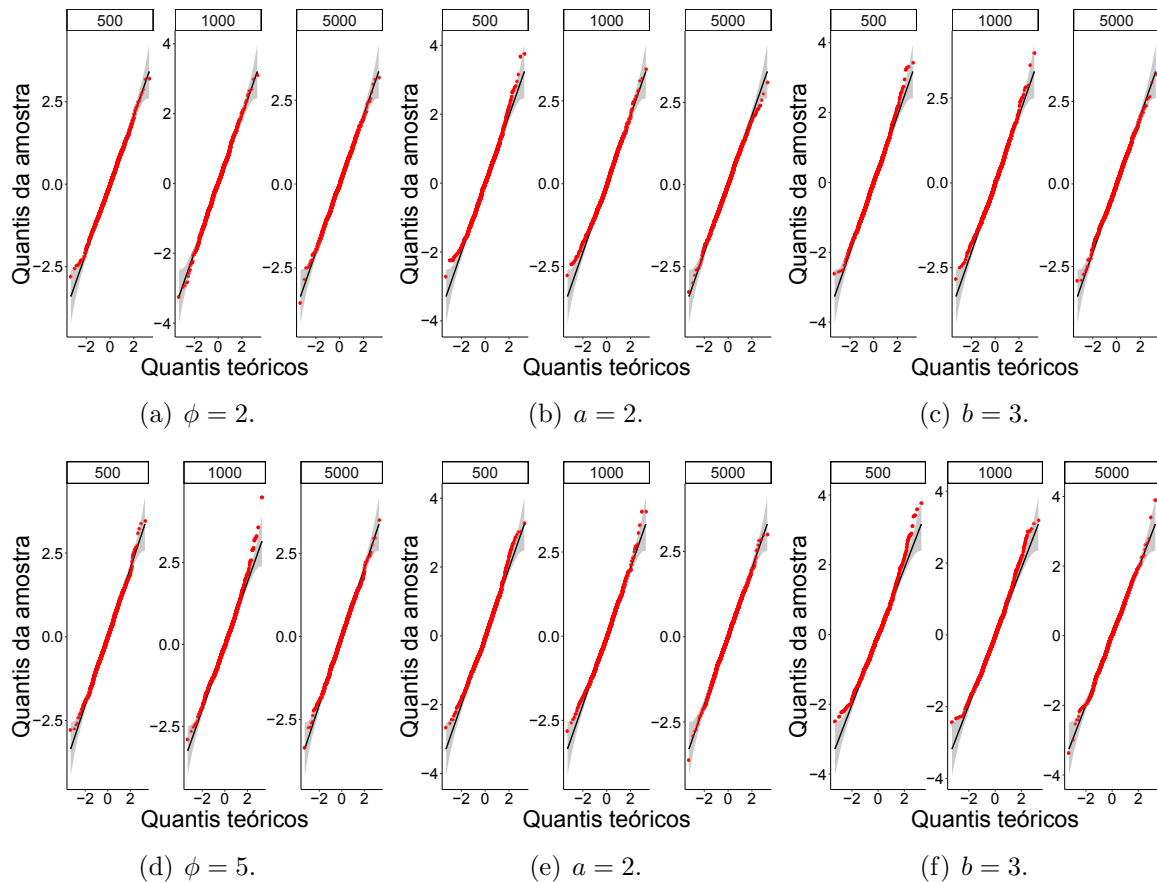


Figura A.6: Qq-plots Histograma das estimativas de máxima verossimilhança padronizadas dos parâmetros do processo PG-Ga,  $\phi = 2, 5$ ,  $a = 2$  e  $b = 3$ , com amostras de tamanho  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

## A.5 Código da aplicação proposta, no software R.

A seguir apresentamos o código no software R, para o ajuste da volatilidade realizada diária dos log-retornos do índice FTSE 100 ao processo PG-GIG.

```
# Biblioteca
require(reshape2)
require(plyr)
require(tidyr)
library(forecast)
require(pracma)
require(GeneralizedHyperbolic)
require(stringr)
```

```
library(magrittr)
library(lubridate)
library(mice)
library(outliers)
#-----
# VOLATILIDADE REALIZADA DIÁRIA DOS LOG-RETORNOS DO ÍNDICE FTSE100

dados<- read.csv("OxfordManRealizedVolatilityIndices.csv", sep=",",header=T,
stringsAsFactors=FALSE)
#-----
#SELECIONANDO E TRATANDO A SÉRIE DE INTERESSE,

ftse<- as.numeric(dados$FTSE.100..Live..4[1000:1938])
periodo<- ymd(dados$X[1000:1938])
serie<- data.frame(periodo,ftse)
#-----
# TRATANDO OS DADOS:

# 1) Analisando os dados:
summary(serie) # 38 dados.
outlier(serie$ftse)
#serie$ftse[872]

# 2) Eliminaremos os dados faltantes:

serienoNa<- subset(serie, !is.na(serie$ftse)) #elimino as linhas com NA's.
summary(serienoNa)
length(serienoNa$ftse)
serienoNa<- data.frame(serienoNa$periodo,serienoNa$ftse)

# 3) Tratando o outlier
outlier(serie$ftse)
serienoNa$serienoNa.ftse[422]<- NA

# 4) Completando o valor faltante:

md.pattern(serienoNa)
```

```

d<- mice(serienoNa,seed=500)
summary(d)

completedData <- complete(d,2) # dados completos
length(completedData$serienoNa.periodo)
summary(completedData)$ftse)
completedData$serienoNa.ftse[422]
sd(completedData$serienoNa.ftse)

#-----
# APLICANDO A SÉRIE NO MODELO

x<- completedData$serienoNa.ftse*(10^3)
n<-length(x)

aux1<- function(theta, x_1,x_0){
  n<- length(x)
  x_0<- x[1:n-1]
  x_1<- x[2:n]
  cc <- gaussLaguerre(17, 0) # Gerando pesos e pontos via gauss Laguerre

  integrando<- function( x_0, x_1, theta){
    theta<-theta
    A<- 1/(x_1+x_0)
    return(sum(cc$w *A* (((cc$x*A)^(theta[1]-1)) *
      ( theta[4] +2* cc$x*A)^((theta[1]+theta[2])/2))/
      (2*besselK((sqrt(theta[3]*(theta[4]+ 2*cc$x*A))), theta[2]+theta[1],
      expon.scaled = FALSE)) ) )
  }

  gauss.lag<- NULL
  for(i in 1:(n-1)){gauss.lag[i]<- integrando(x_1 = x_1[i],x_0=x_0[i],theta)}

  return(gauss.lag)
}

logverossimilhanca<- function(theta){
  x_0<- x[1:n-1]

```

```

x_1<- x[2:n]

vect<- aux1(theta = theta, x_1 = x_1 , x_0 =x_0)

logvero<- ( sum((theta[1]+theta[2]-1)*log(x_1)+ theta[1]*log(x_0))-
            (1/2)*sum(theta[3]*((x_1)^(-1))+ theta[4]*x_1) -
            (n-1)*((lgamma(theta[1]))))-
            ((n-1)*(theta[1]+theta[2])/2)*((log(theta[3]))) +
            sum(log(vect))) + (theta[2]/2)*log(theta[4])-
            (theta[2]/2)*log(theta[3]) - log(2)-
            log(besselK((sqrt(theta[3]*theta[4])), theta[2],
            expon.scaled = FALSE)) +(theta[2]-1)*log(x_0[1]) -
            (1/2)*(theta[3]*(x_0[1]^(-1))+theta[4]*x_0[1])

            return(-logvero)
}

chute <- gigFit(x)
p1<- c(1, chute$param[3],chute$param[1],chute$param[2])

maximo1 <- (optim(p1, fn=logverossimilhanca, hessian = TRUE))

ep <- sqrt(diag(solve(maximo1$hessian)))

#-----
# PSEUDO PREVISÃO

j <- 1
mc_it<- 402
matrizprevisao <- matrix(data = NA,nrow = mc_it, ncol = 1)
colnames(matrizprevisao)<-c("E(X_t|X_(t-1))")

while(j <= mc_it){
# pegando os dados:
x<- completedData$serienoNa.ftse[1:(499+j)] *(10^3)
n<-length(x)

# Estimando os parâmetros:
logverossimilhanca<- function(theta){

```

```

x_0<- x[1:n-1]
x_1<- x[2:n]

vect<- aux1(theta = theta, x_1 = x_1 , x_0 =x_0)

logvero<- ( sum((theta[1]+theta[2]-1)*log(x_1)+ theta[1]*log(x_0))-
(1/2)*sum(theta[3]*((x_1)^(-1))+ theta[4]*x_1) -
(n-1)*((lgamma(theta[1]))))-
((n-1)*(theta[1]+theta[2])/2)*((log(theta[3]))) +
sum(log(vect))) + (theta[2]/2)*log(theta[4])-
(theta[2]/2)*log(theta[3]) - log(2)-
log(besselK((sqrt(theta[3]*theta[4])), theta[2],
expon.scaled = FALSE)) +(theta[2]-1)*log(x_0[1]) -
(1/2)*(theta[3]*(x_0[1]^(-1))+theta[4]*x_0[1])

return(-logvero)
}
return(-logvero)
}

chute <- gigFit(x)
p1<- c(1, chute$param[3],chute$param[1],chute$param[2])
maximo <- optim(p1, fn=logverossilhanca)

# Cálculo da esperança condicional e variância condicional
alphaprevisao<- maximo$par[1]
betaprevisao<- maximo$par[2]
deltaprevisao<- maximo$par[3]
gamaprevisao<- maximo$par[4]

cc <- gaussLaguerre(17, 0) # Gerando pesos e pontos via gauss Laguerre
integrando<- function(xpk){
return(sum(cc$w* ( ((cc$x/xpk)^(alphaprevisao-1))*
besselK((sqrt(deltaprevisao*(gamaprevisao+ 2*cc$x/xpk))),
betaprevisao+alphaprevisao+1,
expon.scaled = FALSE)) /(xpk*(gamaprevisao+2*cc$x/xpk)^(1/2) *
besselK((sqrt(deltaprevisao*(gamaprevisao + 2*cc$x/xpk))),
betaprevisao+alphaprevisao, expon.scaled = FALSE) )))

```

```

}
gauss.lag2<- NULL
Esperanca.condicional<- NULL

xp<- completedData$serienoNa.ftse[(499+j)]*(10^3)
gauss.lag2<- integrando(xpk = xp)
Esperanca.condicional<- ((xp^(alphaprevisao))*(deltaprevisao^(1/2)))/
                        gamma(alphaprevisao))*gauss.lag2

matrizprevisao[j,] <- Esperanca.condicional
j <- j+1
cat(j, "\r")

}

MSFE<- NULL
FS<- NULL

for(i in 1:401){
  valoreverdadeiros<- completedData$serienoNa.ftse[501:(501+(i-1))]*(10^3)
  valoresprevistos<- matrizprevisao[1:i]
  MSFE[i]<- (1/(500 +i - 500))*sum(valoreverdadeiros - valoresprevistos)^2
  FS[i]<- (1/(500 +i - 500))*
          sum(valoreverdadeiros*log( valoresprevistos) - valoresprevistos)
}

#-----
#ENVELOPE:

# O resíduo de Pearson verdadeiro deve ser calculado.
Aqui o denotamos por "pearsonverdadeiro".

j <- 1
mc_it<- 1000
n<- 901
matrizerros <- matrix(data = NA,nrow = mc_it, ncol = n-1)
alpha<- maximo1$par[1]

```

```

beta<- maximo1$par[2]
delta<- maximo1$par[3]
gama<- maximo1$par[4]

while(j <= mc_it){

  x<- rep(x = NA, times = n)
  y<- rep(x = NA, times = n-1)
  x[1]<- rgig(1, delta, gama, beta,param = c(delta, gama, beta))

  for (i in 2:n) {
    y[i-1]<- rgamma(1,alpha,rate = x[i-1])
    x[i]<- rgig(1, delta, gama+ 2*y[i-1], alpha+beta,
               param = c(delta, gama+ 2*y[i-1], alpha+beta))
  }

  x_0<- x[1:n-1]
  x_1<- x[2:n]
  y_0<-y[1:n-1]

logverossimilhanca<- function(theta){
  x_0<- x[1:n-1]
  x_1<- x[2:n]

  vect<- aux1(theta = theta, x_1 = x_1 , x_0 =x_0)

  logvero<- ( sum((theta[1]+theta[2]-1)*log(x_1)+ theta[1]*log(x_0))-
             (1/2)*sum(theta[3]*((x_1)^(-1))+ theta[4]*x_1) -
             (n-1)*(((lgamma(theta[1])))))-
             ((n-1)*(theta[1]+theta[2])/2)*((log(theta[3])))+
             sum(log(vect))) + (theta[2]/2)*log(theta[4])-
             (theta[2]/2)*log(theta[3]) - log(2)-
             log(besselK((sqrt(theta[3]*theta[4])), theta[2],
             expon.scaled = FALSE)) +(theta[2]-1)*log(x_0[1]) -
             (1/2)*(theta[3]*(x_0[1]^(-1))+theta[4]*x_0[1])

  return(-logvero)
}

```

```

chute <- gigFit(x)
p<- c(1, chute$param[3],chute$param[1],chute$param[2])
maximo <- optim(p, fn=logverossimilhanca)

Esperanca.condicional.meu<- NULL
variancia.condicional<- NULL
alphaprevisao<- maximo$par[1]
betaprevisao<- maximo$par[2]
deltaprevisao<- maximo$par[3]
gamaprevisao<- maximo$par[4]

for (i in 2:n) {

  xp<- x[i-1]
  gauss.lag2<- integrando( xpk = xp)
  gauss.lag3<- integrando2( xpk = xp)
  Esperanca.condicional.meu[i]<- ((xp^(alphaprevisao))*
                                (deltaprevisao^(1/2))/gamma(alphaprevisao))*
                                gauss.lag2
  variancia.condicional[i]<- ((xp^(alphaprevisao))*
                              (deltaprevisao)/gamma(alphaprevisao))*gauss.lag3 -
                              (Esperanca.condicional.meu[i])^2
}

valoresverdadeiros<-x[2:901]
Esperanca.condicional.meu<- Esperanca.condicional.meu[2:901]
variancia.condicional<- variancia.condicional[2:901]
cont<- c(1:900)
pearson<- NULL
pearson<- (valoresverdadeiros - Esperanca.condicional.meu)/
          sqrt(variancia.condicional)
matrizerros[j,]<- pearson

j <- j+1
cat(j,"\r")
}

# Ordenando os erros:

```

```
eord <- NULL
for (i in 1:1000){
  eord <- rbind(eord , sort(as.numeric(matrizerros[i,])))
}

# Selecionando os percentis de cada amostra:
perc <- NULL

for (i in 1:900){
  perc <- rbind(perc, quantile(eord[,i], probs = c(0.025, 0.975)))
}
dim(perc)

# Selecionando min e max de cada amostra:
minmax <- NULL
for (i in 1:900){
  minmax <- rbind(minmax, c(min(eord[,i]), max(eord[,i])))
}
dim(minmax)

e1 <- perc[,1]
e2 <- perc[,2]

e1 <- minmax[,1]
e2<- minmax[,2]

med <- apply(eord,2,mean) # Essa média é por coluna
faixa <- range(pearsonverdadeiro,e1, e2)

#Proporção fora do Envelope:
prop1 <- sort(pearsonverdadeiro) > e2
prop2 <- sort(pearsonverdadeiro) < e1

v1 <- ifelse(prop1 == "FALSE", 0, 1)
v2 <- ifelse(prop2 == "FALSE", 0, 1)

table(v1+v2)
prop.table(table(v1+v2))
```

```

#valores fora do envelope
out <- c(which(sort(pearsonverdadeiro) < e1 | sort(pearsonverdadeiro) > e2))
how2 <- rep(0,n-1)
how2[out] <- 1 # Aqui associamos 0 e 1 a
                quem ta fora e quem ta dentro do envelope, resp.

#Gerando da normal para montar os quantis:
normv <- rnorm(n-1)

how <- c(rep("", 740), "Proporção de resíduos dentro do envelope = ",
         rep("", 159))
pos2 <- c(rep(0, 740), 15, rep(0, 159))
dataE <- data.frame(sort(normv),sort(pearsonverdadeiro), e2, e1, med, how2)
names(dataE) <- c("x", "ri", "e1", "e2", "med", "howd")

cor <- ifelse(how2 == 1, "red", "blue")

# Gráfico do envelope:
GE <- ggplot(dataE, aes(x=x)) +
  geom_point(aes(y = ri), size = 2, alpha = 0.9,
            shape = "diamond", color = cor) +
  geom_line(aes(y = med), color="gray45", linetype="dotted", size = 0.6) +
  geom_line(aes(y = e1), color="gray45", size = 0.5, alpha = 0.6) +
  geom_line(aes(y = e2), color="gray45", size = 0.5, alpha = 0.6) +
  geom_ribbon(aes(ymin = e1, ymax = e2), fill = "gray55", alpha = .15)+
  ylab("Resíduos") +
  xlab("Quantis teóricos") +
  geom_text(aes(label = how, y = pos2), color = "gray25", cex = 8) +
  scale_x_continuous(breaks = scales::breaks_width(1, offset = 1))+
  theme_classic() + theme(legend.position="none") +
  theme(axis.title.y = element_text(margin = margin(t = 0, r = 15,
            b = 0, l = 0), size=25)) +
  theme(axis.title.x = element_text(margin = margin(t = 17, r = 0,
            b = 0, l = 0), size=25)) +
  theme(strip.text.x = element_text(size=25)) +
  theme(axis.text = element_text(size=25)) +
  theme(plot.margin = margin(0.2, 0.5, 0.2, 0.3, "cm"))

```

## Apêndice B

# Resultados do processo CINGARCH

### B.1 Código para implementar um gerador do processo CINGARCH no software R

A seguir apresentamos o código para implementar um gerador do processo CINGARCH bivariado, com cópula Gaussiana, no software R. Consideramos as distribuições condicionais Laplace discreta e Skellam.

```
# Pacotes necessários
  require(DiscreteLaplace)
  require(skellam)
  require(mvtnorm)

n<-500          # tamanho da amostra
x<- rep(x = NA, times = n)
y<- rep(x = NA, times = n)
u<- rep(x = NA, times = n-1)
z<- c(NA,NA)

theta1<- rep(x = NA, times = n)
theta2<- rep(x = NA, times = n)
thetaC<- rep(x = NA, times = n)
rho<- rep(x = NA, times = n)
R<- matrix(data = NA,nrow = 2, ncol = 2)
  # Dimensões maiores requerem modificações na dimensão desta matriz.

# Configuração escolhida para os parâmetros:
  w1<-0.5
  beta11<- 0.2
```

```
beta12<--0.3
alpha1<-0.1

w2<-0.5
beta21<- 0.1
beta22<- -0.4
alpha2<-0.2

w0<- 0.5
beta01<- 0.1
beta02<- 0.2
alpha0<- 0.3

# Inicializando algumas quantidades:
theta1[1]<- 0.5
theta2[1]<- 0.5
thetaC[1]<- 1
x[1]<- 0
y[1]<- 0

# Gerador do processo LD-CINGARCH

for (i in 2:n) {

  # passo 1
  thetaC[i]<- w0 + beta01*x[i-1] + beta02*y[i-1] + alpha0*thetaC[i-1]
  rho[i]<- tanh(thetaC[i])
  R<- matrix(c(1,rho[i], rho[i], 1), nrow=2, ncol=2,byrow = TRUE)
  mu <- c(0,0)
  z <- rmvnorm(1,mu,R)

  # passo 2
  # u[i-1]<- pnorm(z[i1])
  u1<- pnorm(z[,1])
  u2<- pnorm(z[,2])

  # passo 3
  theta1[i]<- w1 + beta11*log(abs(x[i-1])+1) + beta12*log(abs(y[i-1])+1) +
    alpha1*theta1[i-1]
```

```

theta2[i]<- w2 + beta21*log(abs(x[i-1])+1) + beta22*log(abs(y[i-1])+1) +
          alpha2*theta2[i-1]

p1<- exp(theta1[i])/(1+exp(theta1[i]))
p2<- exp(theta2[i])/(1+exp(theta2[i]))

x[i]<- qdlaplace(u1, p1, p1)
y[i]<-qdlaplace(u2, p2, p2)
}

# Gerador do processo Skellam-CINGARCH

for (i in 2:n) {

# passo 1
thetaC[i]<- w0 + beta01*x[i-1] + beta02*y[i-1] + alpha0*thetaC[i-1]
rho[i]<- tanh(thetaC[i])
R<- matrix(c(1,rho[i], rho[i], 1), nrow=2, ncol=2,byrow = TRUE)
mu <- c(0,0)
z <- rmvnorm(1,mu,R)

# passo 2
# u[i-1]<- pnorm(z[i1])
u1<- pnorm(z[,1])
u2<- pnorm(z[,2])

# passo 3
theta1[i]<- w1 + beta11*log(abs(x[i-1])+1) + beta12*log(abs(y[i-1])+1) +
          alpha1*theta1[i-1]
theta2[i]<- w2+beta21*log(abs(x[i-1])+1) + beta22*log(abs(y[i-1])+1) +
          alpha2*theta2[i-1]

p1<- exp(theta1[i])
p2<- exp(theta2[i])

x[i]<- qskellam(u1, p1, p1)
y[i]<- qskellam(u2, p2, p2)
}

```

## B.2 Boxplots, histogramas e qq-plots do processo Skellam-CINGARCH

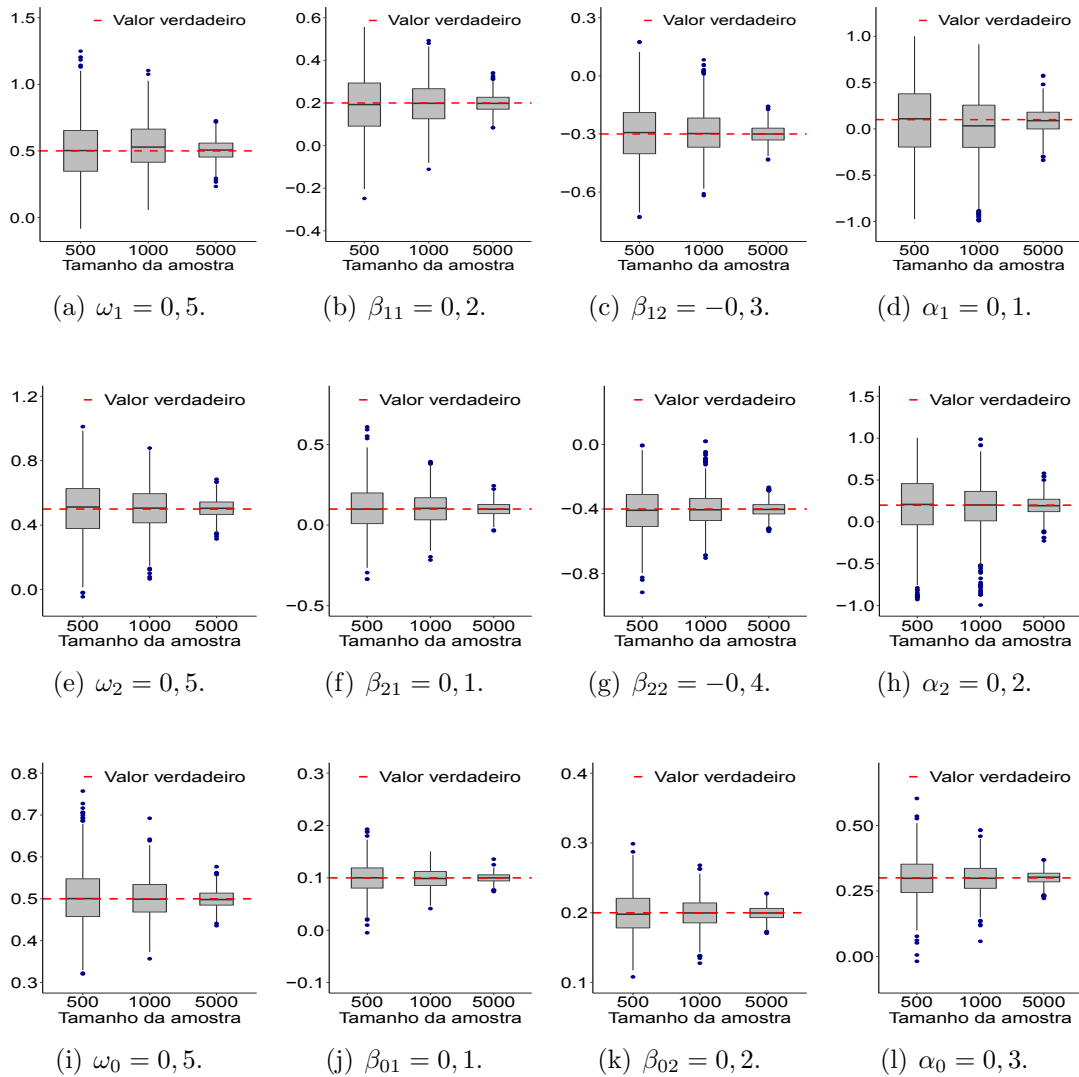


Figura B.1: Boxplots das estimativas dos parâmetros do do processo Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e com amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

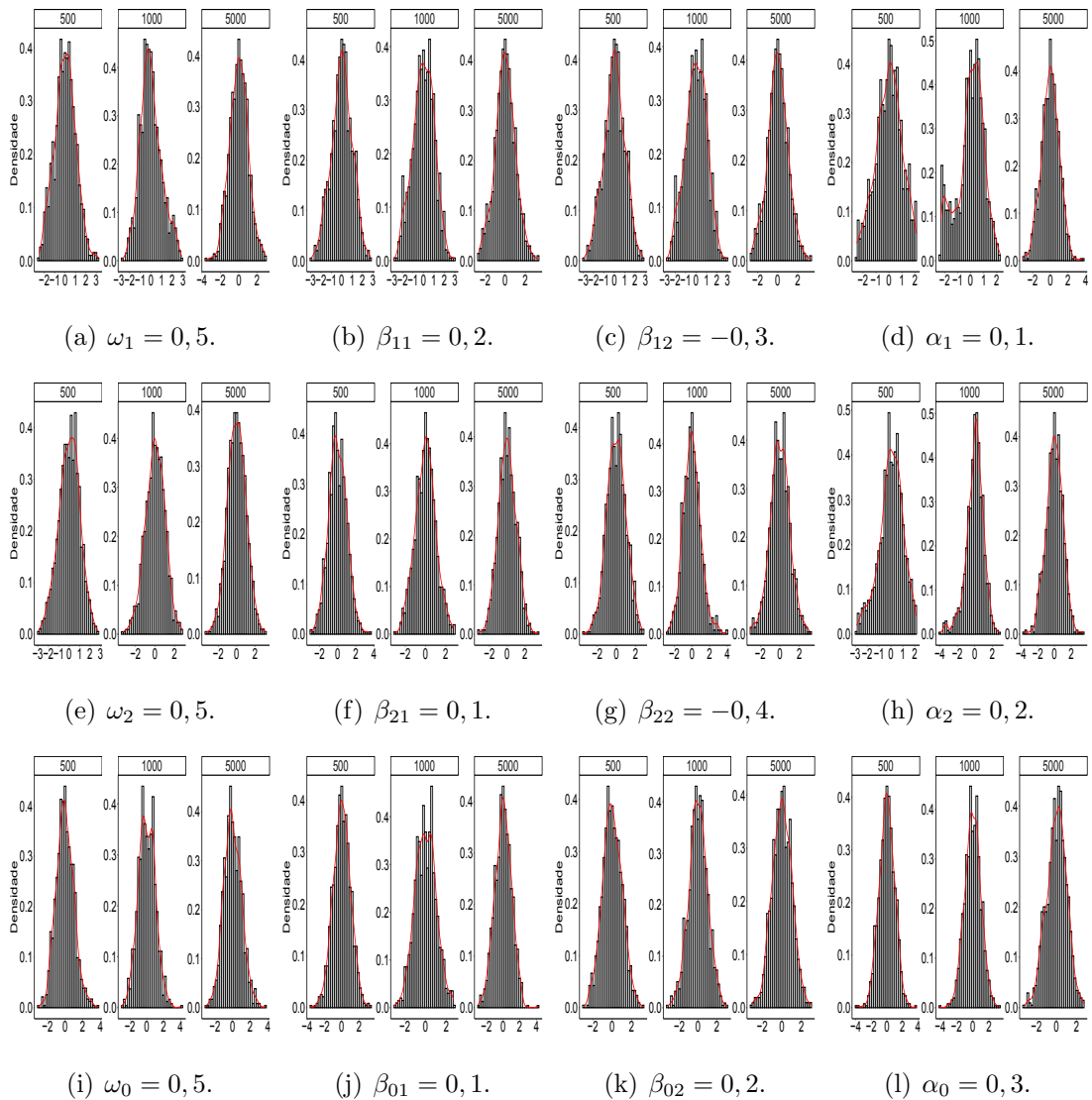


Figura B.2: Histogramas das estimativas padronizadas dos parâmetros do processo Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e com amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .

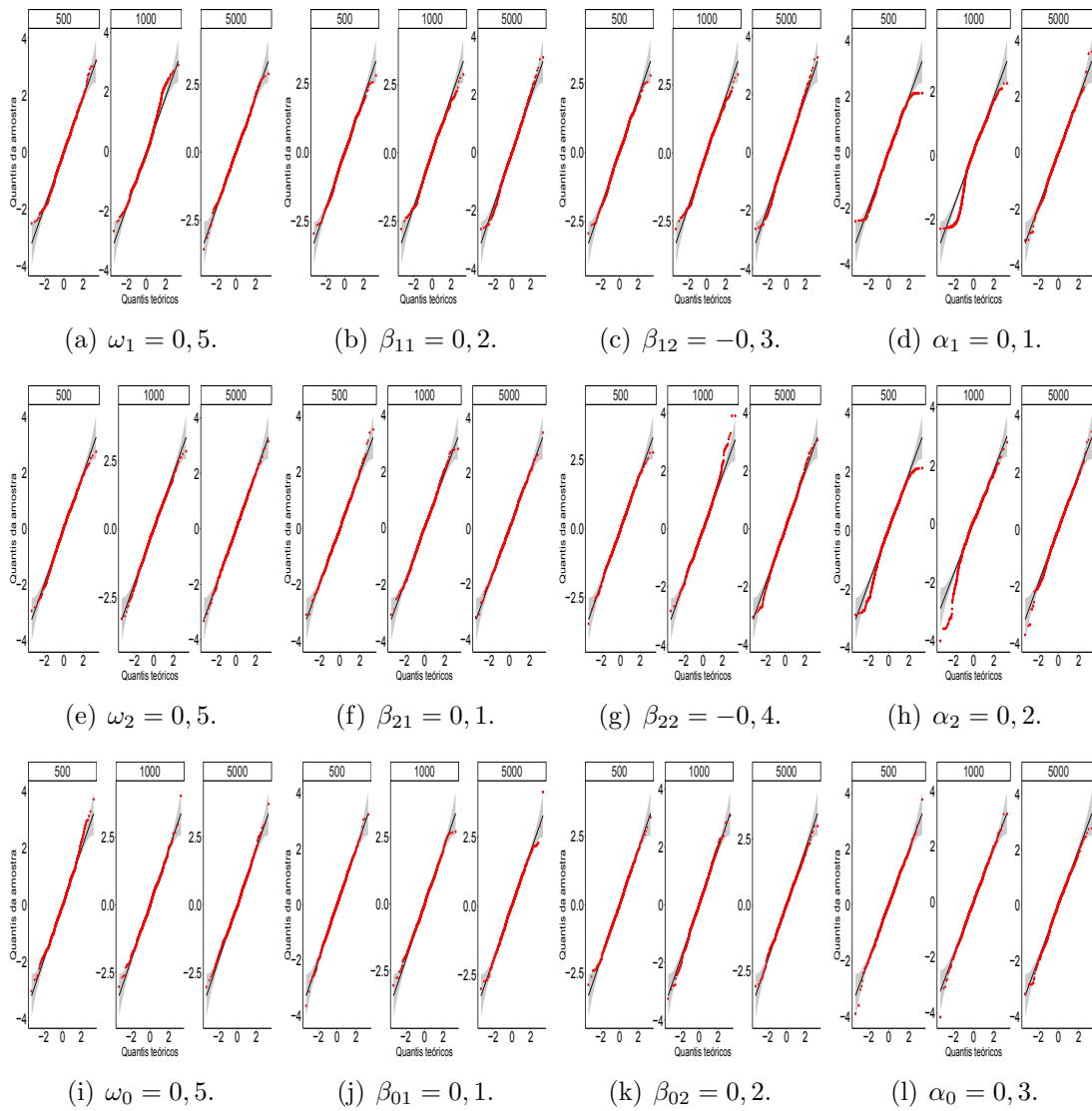


Figura B.3: Qq-plots das estimativas dos parâmetros do processo Skellam-CINGARCH com cópula Gaussiana em um estudo Monte Carlo com  $N = 1000$  réplicas e com amostras de tamanhos  $n = 500, 1000$  e  $5000$ .