

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística
Programa DINTER de Doutorado entre as Instituições UFMG e UFG

Renata Mendonça Rodrigues Vasconcelos

**Cartas de Controle para o Monitoramento da Média em Processos Ajustados
pela Distribuição Weibull**

Belo Horizonte - MG
2023

Renata Mendonça Rodrigues Vasconcelos

**Cartas de Controle para o Monitoramento da Média em Processos Ajustados
pela Distribuição Weibull**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Estatística.

Orientador: Roberto da Costa Quinino - DEST/UFMG
Coorientadora: Linda Lee Ho - EPRO/USP

Belo Horizonte - MG
2023

Vasconcelos, Renata Mendonça Rodrigues

V331cCartas de controle para o monitoramento da média em processos ajustados pela distribuição Weibull [manuscrito]/Renata Mendonça Rodrigues Vasconcelos–2023.
111f.il.

Orientador: Roberto da Costa Quinino.

Coorientadora: Linda Lee Ho.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f.77-83

1. Estatística– Teses. 2.Distribuição (estatística)–Teses.3. Markov, Processos de – Teses. 4.Controle estatístico de processo– Teses. I. Quinino, Roberto da Costa. II. Ho, Linda Lee. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.IV.Título.

CDU 519.2(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEX



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA



FOLHA DE APROVAÇÃO

Cartas de Controle para o Monitoramento da Média em Processos Ajustados pela Distribuição Weibull

RENATA MENDONÇA RODRIGUES VASCONCELOS

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Doutor em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.

Aprovada em 16 de agosto de 2023, pela banca constituída pelos membros:

Roberto da Costa
Quinino:80871291720

Assinado de forma digital por Roberto da Costa Quinino:80871291720
Dados: 2023.08.16 17:05:05 -03'00'

Prof. Roberto da Costa Quinino - Orientador

Documento assinado digitalmente



LINDA LEE HO
Data: 17/08/2023 08:43:06 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Linda Lee Ho – Coorientadora
EPRO/USP

FREDERICO RODRIGUES
BORGES DA CRUZ:51361230606

Assinado de forma digital por FREDERICO RODRIGUES BORGES DA CRUZ:51361230606
Dados: 2023.08.16 21:36:22 -03'00'

Prof. Frederico Rodrigues Borges da Cruz
DEST/UFMG

Luiz Henrique
Duczmal:535887036
91

Digitally signed by Luiz Henrique Duczmal:53588703691
Date: 2023.08.16 21:07:04 -03'00'

Prof. Luiz Henrique Duczmal
DEST/UFMG

Documento assinado digitalmente



AIRLANE PEREIRA ALENCAR
Data: 16/08/2023 18:41:08 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

IME-USP

Documento assinado digitalmente



FERNANDO LUIZ PEREIRA DE OLIVEIRA
Data: 16/08/2023 20:31:05 -0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

DEST/UFOP

Belo Horizonte, 16 de agosto de 2023.

Dedico essa tese de Doutorado à minha amada mãe, Maria Martins, ao meu esposo amado, José Eder, e às minhas paixões que abrilhantam meus olhos todos os dias, meus filhos Caio José, João Miguel e Joaquim Inácio!! Vocês são os pilares que sustentam a minha vida, meu suporte e minha motivação para vencer cada luta diária! Esse título é mais de vocês do que meu! Obrigada por tudo! Eu amo muito vocês!!!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus! Ele que me permitiu viver essa experiência e vencer cada desafio, cada dificuldade e suportar firme as dores de cada obstáculo. Se foi possível subir nessa espiral do aprendizado, foi porque Suas mãos me abençoaram e sustentaram em cada etapa desse processo. *Jesus olhou para eles e disse: “Aos homens isto é impossível, mas a Deus tudo é possível” (Mateus 19,26)*. Gratidão!

Agradeço à minha mãe, Maria Martins, meu maior exemplo de persistência, dedicação, amparo, zelo, fé e amor! Esse é só mais um resultado de que sua luta ao longo da vida não foi em vão! Se tenho asas para voar, foi a senhora quem me deu! Meu pai, lá no céu, com certeza está muito orgulhoso das suas lutas e vitórias! Eu te amo muito!

Agradeço ao meu esposo, José Eder! Seu companheirismo sem limite de amor caminha comigo desde o início de nossa história e segue maior ainda a cada dia de nossas vidas! Além de grande pai, consegui ser mãe, filho, professor, cozinheiro, enfim, de tudo um pouco conforme a necessidade do momento e com o seu jeitinho calmo de ser! Não foi fácil, mas vencemos juntos mais uma vez! Obrigada pelo seu amor e zelo comigo e nossos filhos! *Só o amor é capaz de nos fazer passar pelas maiores dificuldades com um sorriso no rosto!* Eu te amo, para sempre!!!

Agradeço aos meus filhos Caio José, João Miguel e Joaquim Inácio, razão do meu viver! Obrigada por entenderem a minha ausência em momentos difíceis e de reclusão necessária durante esse processo. Vocês não são empecilhos e, sim, a força que me move diariamente! Sem vocês, essa conquista com certeza não teria o mesmo sabor! Meu mundinho azul, minhas joias preciosas, a mamãe ama muito vocês!

Agradeço aos meus irmãos Alexandre e Adriana por estarem sempre comigo, com a minha família, pelo suporte, incentivo e apoio que deram nesse período. Obrigada também por cuidar e acompanhar minha mãe em suas necessidades diárias e por entenderem minha ausência na família em muitos momentos de tribulações! Meu amor por vocês é eterno!

Agradeço a todos os meus familiares e todos os meus amigos de coração! Também agradeço ao meu sogro Damião, minha sogra Ozélia, meus cunhados e sobrinhos! Mesmo que afastados, sempre me incentivaram e apoiaram de alguma forma!

Agradeço ao Prof. Roberto, por aceitar o desafio de orientar com tanta maestria a elaboração da minha tese de Doutorado! Agradeço também à Profa. Linda, por, mais uma vez, aceitar contribuir tão ricamente na minha trajetória acadêmica através de sua orientação. Foi um privilégio e um prazer tê-los como orientadores! A forma profissional e, ao mesmo tempo, tão humana com que me acolheram em todo esse processo, certamente

levarei comigo na memória!

Agradeço ao Márcio e à Marta, professores do IME/UFG, por embarcarem junto comigo nesse desafio e pelos momentos compartilhados! Em especial, agradeço à Profa. Tatiane, coordenadora local do DINTER UFMG/UFG e, também, amiga tão especial de longa data na UFG! Muito obrigada por todo o seu apoio, acolhimento e incentivo!

Agradeço ao Prof. Damião e à Profa. Dione Maria do Depto. de Estatística da UFRN que, de alguma forma, contribuíram na minha formação acadêmica. Especialmente, agradeço ao Prof. Pledson pela sua rica e importante contribuição nos meus primeiros passos nessa área de pesquisa tão vasta e tão desafiadora que é CEQ! Gratidão por todo o aprendizado compartilhado no meu Mestrado e que me trouxeram até aqui!

Agradeço aos membros da Banca avaliadora pela disponibilidade e, adicionalmente, por todas as sugestões que só somaram para enriquecer o trabalho. Em especial, agradeço ao Prof. Frederico por sua participação na elaboração do artigo publicado. Também agradeço pela sua contribuição no suporte de compilação do tese.

Agradeço ao IME/UFG como um todo, aos meus colegas de trabalho, ao Prof. Maurício que, enquanto Diretor da Unidade, não economizou esforços para contribuir na viabilização desse projeto de capacitação, e também aos técnicos, docentes e coordenadores do Programa de Pós-Graduação em Estatística do ICEX/UFG. Agradeço por acolherem e investirem dentro do que era possível para a realização do projeto DINTER UFMG/UFG contribuindo, assim, na minha formação acadêmica e na concretização de um sonho!

Agradeço a todos os servidores técnicos, docentes e coordenadores do Programa de Pós-Graduação em Estatística do ICEX/UFG por acolher e investir dentro do que foi possível no projeto DINTER UFMG/UFG e, conseqüentemente, na minha capacitação enquanto docente! Agradeço pela oportunidade de aprendizado e pelo incentivo no desenvolvimento e disseminação de novas pesquisas científicas.

“Imagine uma nova história para a sua vida e acredite nela!”
(Paulo Coelho)

Resumo

Em um processo de produção é importante manter um controle da média do processo com objetivo de verificar se o sistema de produção é previsível. O Gráfico de Controle de \bar{X} , desenvolvido na década de 1920 por *Walter A. Shewhart*, continua sendo bastante utilizado para esse objetivo no ambiente industrial não somente por ser simples, mas também por detectar rapidamente desajustes médios ou grandes em relação à média populacional. Entretanto, para pequenos deslocamentos da média o seu desempenho pode ser insuficiente. Outro problema é que a distribuição da variável de qualidade de interesse pode não possuir uma distribuição Normal sendo mais adequada, por exemplo, a distribuição Weibull. Nesse trabalho discutimos e avaliamos propostas para o gráfico de controle da média em que a característica de qualidade é mais aderente à distribuição Weibull. Apresentamos duas alternativas sendo que em uma os limites de controle são obtidos por simulação de Monte Carlo e na outra alternativa os limites de controle são obtidos numericamente com uso da distribuição Gama. Adicionalmente, para diminuir o valor do *ARL* (*Average Run Length*) visando detectar pequenas mudanças na média considerando a distribuição Weibull, incorporamos as regras suplementares de *Klein* e *Khoo* no gráfico de controle proposto com limites obtidos baseados na distribuição Gama. Exemplos numéricos são apresentados e discutidos.

Palavras-chave: Distribuição Weibull, gráficos de controle, Distribuição Exponencial, Distribuição Gama, *ARL*, transformação de variável, regras suplementares, Cadeia de Markov.

Abstract

In a production process, it is important to keep the control of the process average in order to verify if the production system is predictable. The \bar{X} Control Chart, developed in the 1920s by *Walter A. Shewhart*, is still widely used for this purpose in the industrial environment, not only because it is simple, but because it quickly detects medium or large shifts relative to the population mean. However, for small shifts from the mean, its performance may be insufficient. Another problem is that the distribution of the quality variable of interest may not have a Normal distribution, being more suitable, for example, the Weibull distribution. In this work we discuss and evaluate proposals for the mean control chart in which the quality characteristic the quality feature best fits the weibull distribution. We present two alternatives in which in one the control limits are obtained by Monte Carlo simulation and in the other alternative the control limits are obtained numerically using the Gamma distribution. Additionally, to decrease the value of *ARL* (*Average Run Length*) in order to detect small changes in the mean considering the Weibull distribution, we incorporate the supplementary rules of *Klein* and *Khoo* in the graph of proposed control with limits obtained based on the Gamma distribution. Numerical examples are presented and discussed.

Keywords: Weibull distribution, control charts, Exponential distribution, Gamma distribution, *ARL*, variable transformation, supplementary rules, Markov Chain.

Lista de Figuras

1.1	Distribuição de probabilidade Weibull para diferentes valores de δ , com γ fixo.	23
1.2	Curva da Banheira	25
1.3	Distribuição de \bar{X} sob controle e fora de controle (e interseção dessas distribuições) obtidas por simulação considerando 50 milhões de observações de uma distribuição Weibull com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$ e $(\gamma_1; \delta_1) = (1, 5; 3)$	31
1.4	Distribuição de \bar{X} sob controle e fora de controle obtidas por simulação considerando 50 milhões de observações de uma distribuição Weibull com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$ e $(\gamma_1; \delta_1) = (2; 3)$	32
3.1	Exemplo Numérico para a Carta de Controle de \bar{Y} com uso da Regra <i>2-de-2</i> de <i>Klein</i>	58
4.1	Limites de Controle para um Gráfico de Controle de \bar{Y} de <i>Shewhart</i> incorporando a regra <i>2-de-2</i> de <i>Khoo</i>	63
4.2	Exemplo Numérico para a Carta de Controle de \bar{Y} com uso da Regra <i>2-de-2</i> de <i>Khoo</i>	73

Lista de Tabelas

1.1	Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$	33
1.2	Valores de ARL 's do gráfico de \bar{X} considerando uma redução da média μ_0 na faixa de 20% a 25%: com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$	34
2.1	Valores do ARL de \bar{X} e de \bar{Y}	43
3.1	Valores de ARL_1 dos esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} considerando δ e os valores de deslocamento bidirecionais da média, d , com $n = 5$	54
3.2	Valores de ARL_1 dos esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} considerando os valores de $\delta = 5$ e do deslocamento bidirecional da média, d	55
3.3	Conjunto de dados para o exemplo numérico e decisão, com $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\delta}{n}$	57
4.1	Valores de ARL considerando dos procedimentos \bar{Y}_s , \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} , com $n = 5$	68
4.2	Valores de ARL 's dos esquemas \bar{Y}_s , \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} considerando os valores de d e de n , para $\delta = 10$	70
4.3	Conjunto de dados para o exemplo numérico e decisão, com $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\delta}{n}$	72

Lista de Símbolos

- X Variável aleatória com distribuição Weibull de parâmetros de forma δ e parâmetro de escala γ ;
- Y Variável aleatória tal que $Y = (X/\gamma)^\delta \sim \text{Exp}(1)$;
- Z Variável aleatória tal que $Z = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Gamma}(n, 1)$;
- X_i amostra aleatória tal que $i = 1, \dots, n$;
- Y_i amostra aleatória tal que $i = 1, \dots, n$;
- \bar{Y}_{i-1}, \bar{Y}_i Valores consecutivos de Y de modo que “ i ” indica o tempo da atual inspeção e “ $i - 1$ ” indica a inspeção feita imediatamente anterior ao tempo “ i ”;
- \bar{X} Média amostral de X ;
- \bar{Y} Média amostral de Y ;
- μ Média do processo;
- μ_0 Média do processo sob controle;
- μ_1 Média do processo fora de controle;
- σ Desvio padrão do processo;
- σ_0 Desvio padrão do processo sob controle;
- n Tamanho amostral;
- d Tamanho do deslocamento (bidirecional) de μ ;
- H_0 Hipótese nula;
- H_1 Hipótese alternativa;
- α probabilidade de erroneamente julgar o processo fora de controle quando na verdade está sob controle;
- β probabilidade de erroneamente julgar o processo sob controle quando na verdade está fora de controle;

γ Parâmetro de escala de uma distribuição Weibull;

δ Parâmetro de forma de uma distribuição Weibull;

(γ_0, δ_0) Parâmetros de escala e de forma sob controle de uma distribuição Weibull, respectivamente;

(γ_1, δ_1) Parâmetros de escala e de forma fora de controle de uma distribuição Weibull, respectivamente;

ARL Número médio de amostras coletadas até a ocorrência de um alarme/sinal indicando um desajuste no processo (*average run length*);

ARL_0 Número médio de amostras até ocorrência de alarme falso;

ARL_1 Número médio de amostras até ocorrência de alarme verdadeiro;

$ARL_1^{\bar{X}}$ ARL_1 de \bar{X} ;

$ARL_1^{\bar{Y}}$ ARL_1 de \bar{Y} ;

\bar{Y}_s procedimento associado ao desempenho do Gráfico de Controle de \bar{Y} (“*standard \bar{Y} chart*”);

\bar{Y}_{kl} procedimento associado ao desempenho do Gráfico de Controle de \bar{Y} com uso da regra suplementar 2-de-2 de Klein (“*Klein’s supplementary run rules*”);

\bar{Y}_{kh} procedimento associado ao desempenho do Gráfico de Controle de \bar{Y} com uso da regra suplementar 2-de-2 de Khoo (“*Khoo’s supplementary run rules*”);

LM Linha média;

UCL Limite superior de controle;

LCL Limite inferior de controle;

LWL *Lower Warning Limit*;

UWL *Upper Warning Limit*;

$UCL|LCL$ limites externos do procedimento \bar{Y}_{kh} ;

$UWL|LWL$ limites internos do procedimento \bar{Y}_{kh} ;

p_L^s probabilidade de um ponto amostral ocorrer abaixo do LCL no procedimento \bar{Y}_s ;

p^s probabilidade de um ponto amostral ocorrer entre o LCL e o UCL no procedimento \bar{Y}_s ;

-
- p_U^s probabilidade de um ponto amostral ocorrer acima do UCL no procedimento \bar{Y}_s ;
- q_L^s, q_U^s quantis inferior e superior de S , respectivamente, tal que $S = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma_0/\sqrt{n})$;
- \mathcal{E} espaço de estados da *Cadeia de Markov* para o procedimento \bar{Y}_{kl} tal que $\mathcal{E} = \{C, U_1, U_2, L_1, L_2\}$;
- C estado do \mathcal{E} que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável C indica que nenhum ponto amostral ocorre abaixo do LCL ou acima do UCL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [q_L, q_U]$;
- U_1 estado do \mathcal{E} que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável U_1 indica que $\bar{Y}_i \in (q_U, +\infty)$, mas $\bar{Y}_{i-1} \notin (q_U, +\infty)$;
- L_1 estado do \mathcal{E} que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável L_1 indica que $\bar{Y}_i \in (-\infty, q_L)$, mas $\bar{Y}_{i-1} \notin (-\infty, q_L)$;
- U_2 estado do \mathcal{E} que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho dois, onde U_2 indica que dois valores sucessivos de \bar{Y} são maiores que UCL ;
- L_2 estado do \mathcal{E} que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho dois, onde L_2 indica que dois valores sucessivos de \bar{Y} são menores que LCL ;
- p Probabilidade de um único ponto ocorrer na região central (RC), entre o LCL e o UCL no procedimento \bar{Y}_{kl} ;
- p_U Probabilidade de um ponto amostral ser plotado acima de UCL no procedimento \bar{Y}_{kl} ;
- p_L probabilidade de um ponto amostral ser plotado abaixo do LCL no procedimento \bar{Y}_{kl} ;
- q_L, q_U quantis inferior e superior de \bar{Y} , respectivamente, do procedimento \bar{Y}_{kl} ;
- \mathbf{P} matriz de transição da *Cadeia de Markov* do procedimento \bar{Y}_{kl} ;
- $\mathbf{\Pi}$ distribuição estacionária do procedimento \bar{Y}_{kl} ;
- π_j elementos de $\mathbf{\Pi}$ de forma que cada elemento está associado com um único estado da matriz \mathbf{P} , com $j = 1, \dots, 5$;
- p_{2L}^k probabilidade de um único ponto amostral ocorrer abaixo do LCL no procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- p^k probabilidade de um único ponto amostral ocorrer entre o LWL e o UWL no procedimento \bar{Y}_{kh} ;

-
- p_{2U}^s probabilidade de um único ponto amostral ocorrer acima do UCL no procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- p_L^k probabilidade de um único ponto ocorrer entre o LWL e o LCL no procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- p_U^k probabilidade de um único ponto amostral ser plotado acima entre o UWL e o UCL no procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- q_L^k, q_U^k quantis de \bar{Y} correspondendo, respectivamente, aos limites LWL e UWL do procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- q_{2L}^k, q_{2U}^k quantis de \bar{Y} correspondendo, respectivamente, aos limites LCL e UCL do procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- \mathcal{E}^k espaço de estados da *Cadeia de Markov* para o procedimento \bar{Y}_{kl} tal que $\mathcal{E}^k = \{C_k, L_{11}, U_{11}, L_{12}, U_{12}, L_{22}, U_{22}\}$;
- C_k estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável C_k indica que $\bar{Y}_i \in [q_L^k, q_U^k]$;
- L_{22} estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável L_{22} indica que $\bar{Y}_i \in (-\infty, q_{2L}^k)$;
- U_{22} estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável U_{22} indica que $\bar{Y}_i \in (q_{2U}^k, +\infty)$;
- L_{11} estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável L_{11} indica a ocorrência de um único ponto amostral entre o LCL e o LWL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [q_{2L}^k, q_L^k]$;
- U_{11} estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável U_{11} indica a ocorrência de um único ponto amostral entre o UWL e o UCL , isto é, $\bar{Y}_i \in (q_U^k, q_{2U}^k]$;
- L_{12} estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho dois, onde a variável L_{12} indica a ocorrência de dois valores amostrais sequenciais de \bar{Y} entre o LCL e o LWL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [q_{2L}^k, q_L^k)$ e $\bar{Y}_{i-1} \in [q_{2L}^k, q_L^k)$;
- U_{12} estado do \mathcal{E}^k que indica que a sequência de \bar{Y} é de tamanho dois, onde a variável U_{12} indica a ocorrência de dois valores amostrais sucessivos de \bar{Y} entre o UWL e o UCL , ou seja, $\bar{Y}_i \in (q_U^k, q_{2U}^k]$, mas $\bar{Y}_{i-1} \in (q_U^k, q_{2U}^k]$;
- \mathbf{W} matriz de transição da *Cadeia de Markov* do procedimento \bar{Y}_{kh} ;
- $\mathbf{\Pi}^k$ distribuição estacionária do procedimento \bar{Y}_{kh} ;

π_{j*}^k elementos de $\mathbf{\Pi}^k$ de forma que cada elemento está associado com um único estado da matriz \mathbf{W} , com $j = 1, \dots, 7$.

Sumário

1	Introdução	19
1.1	Sobre o monitoramento de processos e a Distribuição Weibull	20
1.1.1	Cartas de Controle como ferramenta de qualidade para o monitoramento de processos	20
1.1.2	Análise de desempenho de uma Carta de Controle	21
1.2	Distribuição Weibull: uma breve revisão de literatura	23
1.2.1	Algumas propriedades da Distribuição Weibull	26
1.3	Carta de Controle no monitoramento da média em um processo ajustado pela Distribuição Weibull	27
1.3.1	Carta de Controle de \bar{X}	29
1.3.2	Considerações importantes e possíveis problemas envolvendo o desempenho da Carta de Controle de \bar{X}	31
1.4	Motivação e Objetivos Propostos	35
1.4.1	Objetivos Propostos	35
2	Carta de Controle para a média de um processo ajustado pela distribuição Weibull baseado na Distribuição Gama	37
2.1	Introdução	37
2.2	Carta de Controle de \bar{Y}	38
2.3	Obtendo os Limites de Controle e ARL 's para a Carta de Controle de \bar{Y}	39
2.4	Comparando os valores do ARL_1 das Cartas de Controle de \bar{X} de \bar{Y}	42
2.5	Considerações Importantes	42
3	Regra Suplementar 2-de-2 de Klein aplicada na Carta de Controle de \bar{Y}	45
3.1	Introdução	45
3.1.1	Carta de Controle de \bar{X} com uso da Regra 2-de-2 de Klein	47
3.2	Uso da regra 2-de-2 de Klein pela Carta de controle de \bar{Y}	49
3.3	Análise do desempenho da carta de controle de \bar{Y} com uso da Regra Suplementar de Klein	52
3.4	Exemplo Numérico	56
3.5	Considerações Importantes	59
4	Sobre o uso das Regra Suplementar de Khoo pela Carta de Controle de \bar{Y}	60

4.1	Introdução	60
4.2	Regra 2-de-2 de <i>Khoo</i> aplicada à Carta de Controle de \bar{Y}	62
4.3	Análise do desempenho da carta de controle de \bar{Y} com uso da Regra Suplementar de <i>Khoo</i>	66
4.4	Exemplo Numérico	71
4.5	Considerações Importantes	74
5	Considerações Finais e Sugestão de Trabalhos Futuros	75
	Referências	77
	Apêndices	84
A	Valores de ARL's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X}	85
B	Distribuição estacionária - regra "2 - de - 2" de <i>Klein</i>	99
C	Valores de ARL's dos esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} considerando os valores de δ = {0,5;3;10;15;20} e do deslocamento bidirecional da média, d.	101
D	Valores de ARL's dos esquemas \bar{Y}_s, \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} considerando os valores de δ = {0, 5; 3; 5; 15; 20} e do deslocamento bidirecional da média, d.	106

Capítulo 1

Introdução

Uma das vantagens em adotar um procedimento de monitoramento de um processo seria garantir a qualidade dos produtos produzidos ao longo da sua produção. Além disso, essa metodologia possibilita uma redução considerável nos custos do processo de produção. Ao longo de muitos estudos já realizados nesse âmbito, [Montgomery \(2020\)](#) observa que as tradicionais cartas de controle de *Shewhart* mostraram-se muito apropriadas, úteis e de fácil implementação. No geral, é muito comum o uso de cartas de controle em processos onde supomos normalidade dos dados observados da característica de qualidade de interesse. No caso de processos não-normais, é comum adotar um procedimento de transformação dos dados de modo a obter uma aproximação pela distribuição normal. Contudo, existem situações práticas onde é possível obter cartas de controle para monitorar os parâmetros de interesse de um processo utilizando a distribuição que melhor se ajusta à característica de qualidade observada. Nesse sentido, em alguns casos, é possível, por exemplo, identificar o uso da distribuição Weibull como uma alternativa preferível em se tratando de processos com ausência da suposição de normalidade. Nesse capítulo introdutório, será apresentada uma breve revisão sobre o monitoramento de um processo de produção e conceitos que envolvem a análise do desempenho de uma carta de controle na Seção 1.1. Na Seção 1.2 descreveremos sobre a distribuição Weibull e suas propriedades. Enfim, na Seção 1.3, uma discussão e uma avaliação sobre o gráfico de controle de \bar{X} são realizados. A motivação desse estudo assim como os objetivos almejados são expostos na Seção 1.4.

1.1 Sobre o monitoramento de processos e a Distribuição Weibull

1.1.1 Cartas de Controle como ferramenta de qualidade para o monitoramento de processos

O monitoramento de processos tem por objetivo detectar possíveis aumentos na dispersão do processo e/ou deslocamento do parâmetro de interesse de grandeza mensurável, por exemplo a média, com relação ao valor-alvo. Assim, torna-se possível verificar a estabilidade de um processo de produção. Dado que qualidade agrega valor, uma vez que o monitoramento de um processo é realizado de forma eficaz, pode-se afirmar que adotar essa metodologia implica vantagens como custos mais reduzidos na produção de um determinado produto. Logo, considerando ainda ser uma metodologia de fácil implementação, sua aplicação em situações práticas tem se apresentado bastante útil e comum como apontado em [Montgomery \(2020\)](#).

O processo de monitoramento é realizado através da análise periódica de amostras, ou seja, a cada intervalo de tempo retira-se uma amostra independente e identicamente distribuída (*i.i.d.*) de n itens produzidos para uma análise e avaliação da característica de qualidade. O monitoramento da característica de qualidade obtido na amostra é avaliado por meio das *Cartas de Controle*, também chamados de *Gráficos de Controle*. Conforme [Montgomery \(2020\)](#), os primeiros gráficos de controle foram desenvolvidos e aplicados por *Walter A. Shewhart* na década de 1920. Voltados exclusivamente para o monitoramento de processos industriais, os gráficos de controle de *Shewhart* são de simples construção e fáceis de usar (mais detalhes em [Shewhart e Deming \(1986\)](#)). De acordo com [Costa et al. \(2005\)](#), a preocupação principal de *Shewhart* foi apresentar uma ferramenta capaz de monitorar e identificar graficamente a variabilidade do processo de produção que está associada às diferenças entre as unidades produzidas. A característica de interesse contempla uma variabilidade entre suas observações que pode ser representada por uma distribuição de probabilidade. Assim sendo, os gráficos de controle de *Shewhart* tem como propósito sinalizar se os parâmetros da distribuição mantém-se estável ou não ao longo do tempo em que os itens são produzidos.

Uma vez que o processo encontra-se sujeito à presença ocasional de perturbações (causas especiais) durante o monitoramento, o efeito esperado é que ele esteja ocorrendo em uma condição de anormalidade. Essa condição pode estar associada a um deslocamento do parâmetro de interesse (valor-alvo) e/ou aumento na dispersão em torno desse valor.

Identificado então um desajuste dessa natureza, torna-se possível a busca de soluções para o problema influente em operação que pode demandar correções significativas no processo ou mesmo uma possível eliminação da causa especial.

Os gráficos de controle comparam resultados amostrais com limites de controle previamente calculados: *Limite Inferior de Controle (LCL)* e *Limite Superior de Controle (UCL)*. Nos gráficos de controle de *Shewhart*, tradicionalmente um ponto amostral sendo plotado abaixo do *LCL* ou acima do *UCL* indica que o processo está em um estado *fora de controle* sinalizando, assim, a presença de causas especiais no processo. Em caso contrário, afirmamos que o processo está em um estado *sob controle* que caracteriza um processo isento de causas especiais onde nenhuma ação corretiva é necessária. Em resumo, temos que, enquanto os pontos amostrais nos gráficos distribuem-se aleatoriamente em torno da *Linha Média (LM)*, nem sempre deve-se intervir no processo.

O uso de gráficos de controle auxiliam na compreensão do comportamento do processo ou sistema de produção ao longo do tempo. Podemos citar situações práticas em que as observações são coletadas entre intervalos de tempo determinados durante a ocorrência de uma pandemia, por exemplo. Recentemente, mais precisamente entre os anos de 2020 e 2022, alguns estudiosos monitoraram dados relacionados a casos de infecção pelo vírus da COVID-19 em determinadas regiões do mundo. Os gráficos de controle foram largamente usados por pesquisadores para monitorar dados locais que eram divulgados diariamente. Métodos de construção de gráficos de controle foram desenvolvidos em [Perla et al. \(2021\)](#) e [Parry et al. \(2021\)](#). No caso de [Perla et al. \(2021\)](#), os gráficos de controle foram construídos para visualizar tempos e fases da pandemia. Outros estudos interessantes relacionados podem ser vistos também em [Inkelas et al. \(2021\)](#); [Bergman et al. \(2020\)](#) e [Shah et al. \(2021\)](#).

Parâmetros como média, mediana, variância, fração de itens não conformes, entre outros, podem ser monitorados através de gráficos de controle. Para utilizar os gráficos de *Shewhart* é necessário que os valores observados da variável monitorada sejam independentes. Além disso, é possível fazer uso dos gráficos de controle de *Shewhart*, mesmo quando a distribuição ajustada ao processo não for normal.

1.1.2 Análise de desempenho de uma Carta de Controle

Um processo sob controle é um processo estável. Sua variabilidade é devida às causas comuns, naturais do processo. Assim sendo, pode-se então construir os gráficos de controle com base em amostras coletadas. Para os gráficos de *Shewhart*, é usual distanciar os limites *LCL* e *UCL*, em relação ao *LM*, de exatos três desvios-padrão ($\pm 3\sigma$) da estatística

monitorada (mais detalhes em [Montgomery \(2020\)](#) e [Costa et al. \(2005\)](#)). Durante o período de coleta das amostras, uma avaliação quanto à eficiência do gráfico de controle é realizada visando detectar possíveis desajustes no processo de produção durante todo o intervalo de tempo em que foram retiradas as amostras.

Em um processo *sob controle*, espera-se que quase todos os pontos amostrais (estimativas baseadas nas amostras de tamanho n) sejam plotados entre o LCL e o UCL . No entanto, por se tratar de um teste estatístico, é preciso considerar os riscos de julgar erroneamente um processo quanto ao seu estado *sob controle* (“ H_0 : hipótese nula”) ou estado *fora de controle* (“ H_1 : hipótese alternativa”). Se o processo estiver sob controle, associado ao erro tipo I [Costa et al. \(2005\)](#) definem “ α ” como sendo a probabilidade de erroneamente julgar o processo como fora de controle (*alarme falso*). Por outro lado, associado ao erro tipo II, “ β ” corresponde a probabilidade de erroneamente sinalizar que o processo está sob controle. Consequentemente, “ $1 - \beta$ ” corresponde à probabilidade de detecção de desajustes no processo (*alarme verdadeiro - poder*).

Para avaliar o desempenho do gráfico de controle e detectar possíveis mudanças nos parâmetros de interesse calculamos o valor do ARL (*Average Run Length*) que corresponde ao número médio de amostras coletadas até a ocorrência de um alarme/sinal indicando um desajuste no processo de produção. Esse valor pode ser obtido a partir da distribuição amostral da estatística monitorada ou mesmo via simulação no caso dessa distribuição ser desconhecida.

Nesse estudo, o número médio de amostras coletadas até a ocorrência de um *alarme falso* corresponde ao ARL_0 e o número médio de amostras coletadas até a ocorrência de um *alarme verdadeiro* pelo ARL_1 . O principal objetivo é minimizar o valor do ARL_1 condicionado a um valor de ARL_0 fixo.

Em processos normais, sendo a variável aleatória X a característica de qualidade de interesse, tradicionalmente emprega-se o *Gráfico de Controle de Shewhart da média amostral* (*Gráfico de Controle de \bar{X}*) para monitorar a centralidade da distribuição de X com relação ao seu valor-alvo durante o processo de produção. Para fins de determinação dos limites de controle para o gráfico com o processo isento de causas especiais, interessa, nesse caso, o valor de μ (*valor médio sob controle* ou *média do processo*). Supondo independência entre os valores individuais dos elementos da amostra, o valor esperado da estatística \bar{X} coincide com o valor esperado μ da variável aleatória X . Assim, para detectar alterações na média, avalia-se o desempenho do Gráfico de \bar{X} com a regra tradicional de *Shewhart*, que aqui denotaremos de *Regra 1-de-1*, onde apenas um ponto fora dos limites de controle indica um processo operando *fora de controle*.

É possível, contudo, também fazer uso dos Gráficos de *Shewhart* de \bar{X} , mesmo em situações em que a distribuição da variável aleatória X não seja normal. Uma distribuição importante e muito utilizada em diversas situações práticas é a *Distribuição Weibull*.

1.2 Distribuição Weibull: uma breve revisão de literatura

Em se tratando do monitoramento de processos não normais, a distribuição Weibull surge como uma opção em algumas situações práticas munidas de informações com um comportamento assimétrico. Consideramos nesse trabalho de tese a distribuição Weibull cuja densidade é expressa em termos de dois parâmetros: o *parâmetro de forma*, δ , e o *parâmetro de escala*, γ .

Conforme [Bruce e Bruce \(2019\)](#), em muitos casos a taxa de evento não permanece constante ao longo do tempo. Considerando esse cenário, as distribuições exponenciais (ou Poisson) não são muito úteis. Pode-se citar o caso de falhas mecânicas, onde o risco de falha aumenta com o passar do tempo. A distribuição Weibull é uma distribuição na qual a taxa de evento pode mudar, conforme especificado pelo parâmetro de forma δ .

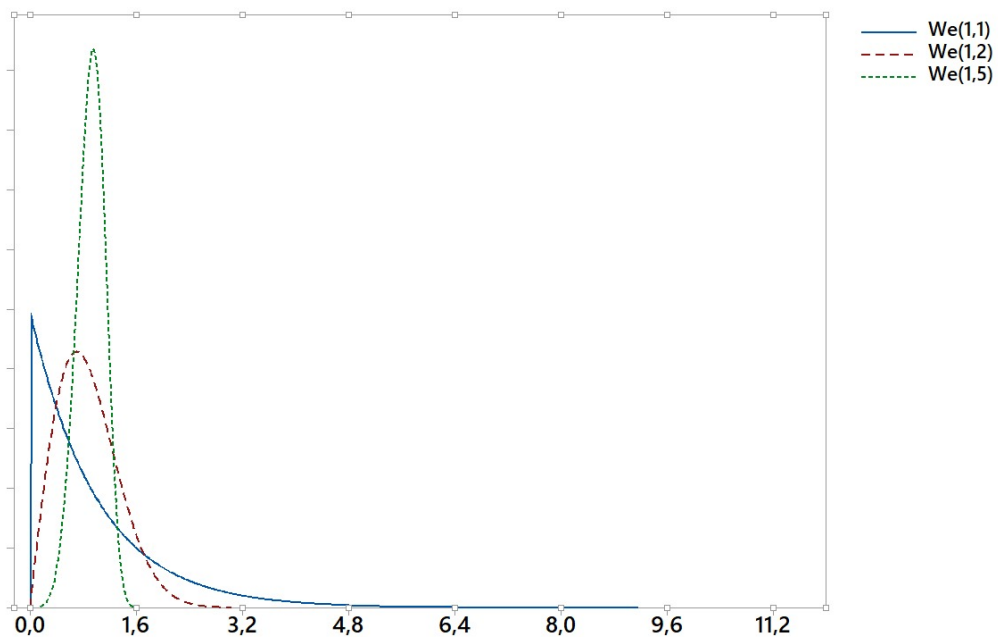


Figura 1.1: Distribuição de probabilidade Weibull para diferentes valores de δ , com γ fixo.

A Figura 1.1 ilustra graficamente a distribuição Weibull considerando alguns pares de valores para (γ, δ) . Em se tratando do monitoramento de um parâmetro de controle da distribuição Weibull, a detecção de desajustes no processo de produção equivale a monitorar os parâmetros de forma e de escala *sob controle*, isto é, δ_0 e γ_0 respectivamente.

A distribuição Weibull é assim conhecida em homenagem ao físico sueco *Waloddi Weibull* (1887-1979). Em [Weibull \(1939a\)](#) e [Weibull \(1939b\)](#) esse modelo foi usado para

representar a distribuição da ruptura na resistência de materiais. Em [Weibull \(1951\)](#), a distribuição foi descrita de forma mais detalhada, além de apontar possibilidades de uso da mesma em uma ampla variedade de outras aplicações.

[Johnson et al. \(1994\)](#) consideram que a estreita concordância que W. Weibull demonstra entre seus dados observados e aqueles previstos com o modelo Weibull ajustado aos dados foram muito impressionantes. Atualmente, o uso dessa distribuição é líder mundial para ajustar e analisar dados de sobrevivência, por exemplo, além de ser considerada um padrão industrial reconhecido.

Frequentemente a distribuição Weibull é empregada para descrever o tempo de vida de produtos industriais ou mesmo o tempo de vida de produtos formados de vários elementos cuja falha ocorre quando o primeiro deles falhar. Trata-se de uma distribuição bastante flexível quanto ao seu uso em situações práticas pelo fato de apresentar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a função taxa de falha é monotônica. Nesse sentido, ela descreve adequadamente, por exemplo, a vida de mancais, componentes eletrônicos, cerâmicas, capacitores dielétricos, entre outros ([Freitas e Colosimo, 1997](#)). Alguns exemplos de problemas de engenharia que são resolvidos com o uso da distribuição Weibull são descritos em [Abernethy \(2006\)](#), como:

- Um engenheiro de projeto relata três falhas de um componente em operações de serviço durante um período de três meses. O Gerente de Programa pergunta: “Quantas falhas teremos no próximo trimestre, seis meses e ano?”; “Qual será o custo?”; “Qual é a melhor ação corretiva para reduzir os riscos e perdas?”;
- Após uma mudança de engenharia, quantas unidades devem ser testadas ao longo do tempo, sem falhas, para verificar se o modo de falha antigo foi eliminado ou melhorado significativamente com 90% de confiança?

De acordo com [Abernethy \(2006\)](#), a principal vantagem apontada quanto ao uso da distribuição Weibull nesses casos aplicados é a capacidade de fornecer análises de falhas razoavelmente precisas e previsões de falhas com amostras extremamente pequenas. As soluções são possíveis nas primeiras indicações de um problema. O gráfico da distribuição Weibull é simples, informativo e, conseqüentemente útil sobre os dados Weibull, como já apontava [Weibull \(1951\)](#). Recursos gráficos facilitam na interpretação da distribuição dos dados por engenheiro e gerentes de produção, por exemplo.

Frente a essas pontuações, entende-se que a distribuição Weibull é eficiente por ser capaz de fazer previsões de acurácia razoável mesmo quando a quantidade de dados disponível é pequena. O campo de aplicações é vasto e modelagens utilizando essa distribuição tem se mostrado bem-sucedidas envolvendo dados provenientes de grandes áreas de conhecimento.

Métodos gráficos são comumente aplicados para o julgamento de qualidade de ajuste de dados à distribuição Weibull (papel de probabilidade de Weibull, gráficos do tipo

percentil-percentil e quantil-quantil) e servem para fins de análise de dados (no sentido de estimar parâmetros e validar um modelo) e de apresentação dos dados (são de fácil entendimento e são ótimos para comunicar resultados). Mais detalhes em [Rinne \(2008\)](#) e [Abernethy \(2006\)](#).

Como já mencionado acima, suas aplicações no geral visam a determinação do tempo de vida média e da taxa de falhas (ou ciclos até a falha ou quilometragem até a falha) em função do tempo. Em confiabilidade, por exemplo, a distribuição Weibull associa-se a dados específicos de falha, podendo indicar se a falha é um evento prematuro (falha de partida), aleatório (vida útil) ou ocasionada por desgaste (final de vida). Tendo um bom histórico de manutenção, essa distribuição permite então obter parâmetros significativos da configuração das falhas e representação gráfica simples.

[Abernethy \(2006\)](#) cita que em um gráfico de dados Weibull que mede a porcentagem cumulativa do tempo de falha de um componente, os dois parâmetros definidores da “linha Weibull” em um papel de probabilidade Weibull são a inclinação da função, $\delta > 0$, e a vida característica, $\gamma > 0$. A inclinação da linha, δ , que indica o comportamento da função taxa de falha, é particularmente significativa e pode fornecer uma pista para indicar qual das categorias (classes) de falhas mencionadas acima está presente.

Assim sendo, temos que a distribuição Weibull se ajusta a uma ampla faixa de dados e características de vida devido a sua capacidade de mudar através da variação do parâmetro de forma, δ . A Figura 1.2, por exemplo, ilustra as fases da vida operacional de um produto (fases da “Curva da Banheira”). As fases de vida do produto nesse modelo se dividem em três estágios: (1) de mortalidade infantil ($\delta < 1$): quando ocorrem falhas precoces; (2) de vida útil ($\delta = 1$): onde a incidência de falhas é relativamente estável no tempo); (3) de envelhecimento ($\delta > 1$): quando o produto passa a apresentar desgaste acentuado e falhas passam a ocorrer com maior frequência.

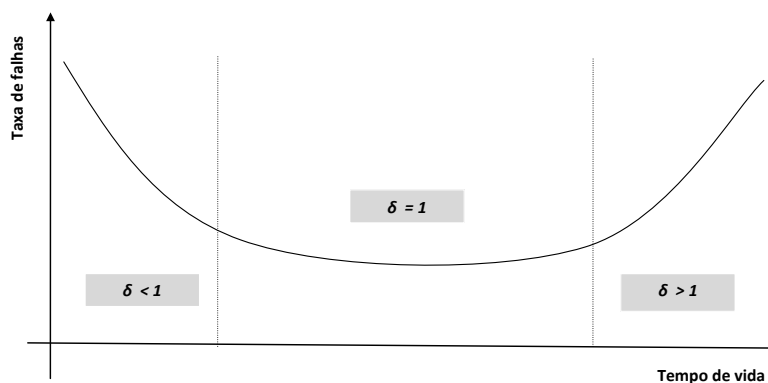


Figura 1.2: Curva da Banheira

Podemos então modelar as características de muitas distribuições de vida diferentes

ajustando o parâmetro de forma, δ . Esse parâmetro indica a forma da curva e as características das falhas, além de também determinar o membro da família de distribuição do tempo de falhas Weibull (Ross, 2020). No geral, observe na Fig. 1.1 que se $\delta \leq 1$, a função apresenta a forma de “J-invertido”. Caso $\delta = 1$, a distribuição Weibull é idêntica a distribuição Exponencial. Para $1 < \delta \leq 3,6$, a distribuição Weibull é assimétrica à direita, sendo igual a distribuição normal quando $\delta = 3,6$. Caso $\delta > 3,6$, a distribuição Weibull é assimétrica à esquerda. É possível então concluir que, do ponto de vista estatístico, sendo δ o parâmetro de forma da distribuição Weibull, suas variações alteram drasticamente o comportamento da distribuição.

Como a distribuição Weibull é utilizada em estudos que envolvem análises de tempo até a falha, Bruce e Bruce (2019) apontam que o segundo parâmetro é expressado em termos de vida característica. A *característica de vida*, γ , trata-se do tempo típico de falha na análise Weibull, isto é, está relacionada ao tempo médio até a falha (Abernethy (2006) e Rinne (2008)). Do ponto de vista estatístico, γ corresponde ao parâmetro de escala pois variações no seu valor, quando δ é mantido constante, causam a compressão ou expansão do gráfico da função de distribuição acumulada (C.D.F) da distribuição Weibull.

Rinne (2008) ratifica o fato já aqui mencionado que a distribuição Weibull definida em função de δ e γ contribui para que a mesma apresente uma maneira conveniente de introduzir alguma flexibilidade no modelo através do parâmetro de forma (δ). O autor cita alguns estudos envolvendo muitas formas diferentes dessa distribuição usadas por profissionais e que aponta possíveis confusões e erros que surgem devido a essa não-singularidade. Inclusive Jiang e Murthy (2011) apresentam um estudo sobre o efeito do parâmetro de forma na taxa de falha e propõe um esquema de classificação para a distribuição baseado nesse parâmetro. Portanto, em alguns estudos realizados baseados no modelo Weibull, é usual assumir um parâmetro de forma constante.

Considerando então as vantagens aqui apontadas, o modelo probabilístico Weibull pode ser considerado como uma alternativa apropriada a situações envolvendo variáveis contínuas definidas em um domínio real não-negativo com distribuição assimétrica no monitoramento de processos.

1.2.1 Algumas propriedades da Distribuição Weibull

Como vimos anteriormente, a distribuição Weibull é expressa em termos de dois parâmetros.

Seja então X uma variável aleatória seguindo uma distribuição Weibull, $X \sim We(\gamma, \delta)$. Sua função de densidade de probabilidade (*fdp*) é uma função dos parâmetros

$\delta > 0$ (parâmetro forma) e $\gamma > 0$ (parâmetro escala), e é dada por:

$$f(x|\gamma, \delta) = \frac{\delta}{\gamma} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\delta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\delta\right], \quad x > 0. \quad (1.1)$$

A média e a variância são dadas como segue:

$$E(X) = \mu = \gamma\Gamma(1/\delta + 1) \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \gamma^2[\Gamma(2/\delta + 1) - \Gamma^2(1/\delta + 1)]. \quad (1.2)$$

A *fdp* da distribuição Weibull assim definida, apresenta sua função de distribuição acumulada (*CDF*) como segue:

$$F(x|\mu, \delta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\mu/\Gamma(1/\delta + 1)}\right)^\delta\right], \quad x > 0. \quad (1.3)$$

A função de taxa de falha corresponde à taxa instantânea de falha em um determinado tempo, x . Sua expressão é dada por:

$$\lambda(x) = \frac{\delta x^{\delta-1}}{\gamma^\delta}, \quad x > 0. \quad (1.4)$$

1.3 Carta de Controle no monitoramento da média em um processo ajustado pela Distribuição Weibull

Como apresentado anteriormente, em muitas situações onde a característica de qualidade é uma variável contínua, é usual indicar a distribuição Normal para descrever seu comportamento. Esse procedimento é adequado e facilita análises como as apresentadas em [Abbas \(2018\)](#), [Abu-Shawiesh e Saeed \(2022\)](#), [Tailor \(2017a\)](#), [Tailor \(2017b\)](#), entre outros. Quando a característica de qualidade não é normalmente distribuída, é natural propor uma transformação adequada para os dados observados de modo a obter uma aproximação à essa distribuição, por exemplo a partir de uma aplicação do Teorema Central do Limite (*TCL*), como em [Chou et al. \(1998\)](#) e em [Fernandes et al. \(2019\)](#).

Estudos como os que envolvem tempo de sobrevivência, força, tensão, entre outros, no geral, não pressupõem a suposição de normalidade dos dados. Nesses casos, estudos

ajustados pela distribuição exata da característica de interesse fornecem muitas vantagens. [Abernethy \(2006\)](#) e [Rinne \(2008\)](#) se destacaram ao indicar que a distribuição Weibull descreve essas situações adequadamente, justamente pelo fato de apresentar uma distribuição mais flexível (por contemplar diferentes formas) definida em domínio real positivo, além do potencial de ajuste a dados assimétricos. É comum identificar aplicações da distribuição Weibull atualmente em áreas como assistência a saúde ([Suman e Prajapati \(2018\)](#); [Seoh et al. \(2021\)](#)), serviço de vigilância sanitária ([Gomes et al. \(2011\)](#); [Jain et al. \(2021\)](#)), rede social ([Perry \(2020\)](#); [Salmasnia et al. \(2021\)](#)), vigilância financeira ([Golosnoy et al. \(2010\)](#); [Bisiotis et al. \(2022\)](#)), organizações educacionais ([Dubinin et al. \(2018\)](#); [Hrynkevych \(2017\)](#); [Nandedkar e Bhati \(2021\)](#)), entre outros.

Outras contribuições em termos de construção de cartas de controle em processos ajustados pela distribuição Weibull são apresentadas na literatura como, por exemplo, em [Nelson \(1979\)](#). Sua proposta engloba um gráfico da mediana e amplitude para monitorar os parâmetros de um processo Weibull. Já [Ramalhoto e Morais \(1999\)](#) propuseram cartas de controle de *Shewhart* para o parâmetro de escala com intervalos de amostragem fixos ou variáveis. [Pascual \(2010\)](#) sugeriu um gráfico de controle para a média empregando uma ponderação exponencial média móvel (EWMA) com base na amplitude de amostragem dos logaritmos dos dados. [Pascual e Zhang \(2011\)](#) descreveram um gráfico de controle para monitorar o parâmetro de forma com base na amplitude de amostras aleatórias a partir da distribuição do mínimo valor extremo. [Chen \(2014\)](#) usou um esquema de controle *Shewhart* baseado em dois gráficos de controle para monitorar simultaneamente os parâmetros de forma e de escala de dados Weibull sem subagrupamento. [Dickinson et al. \(2014\)](#) fizeram uso de um gráfico CUSUM para monitorar tempo de vida médio com dados censurados de uma distribuição Weibull. [Faraz et al. \(2015\)](#) propuseram gráficos de controle de *Shewhart* para monitorar os parâmetros de escala e de forma após transformar uma distribuição Weibull controlada em uma distribuição normal padrão usando uma função de erro. Mais recentemente, um estudo focado no monitoramento do parâmetro de forma de um processo Weibull foi sugerido por [Zhang, Ye e Xie \(2017\)](#). Com base em uma nova estatística com distribuição aproximadamente normal, este estudo analisa o desempenho de uma nova carta de controle do tipo *Shewhart*, denominada “*Beta Chart*”. [Arif e Aslam \(2018\)](#) apresentaram um gráfico de controle para dados com distribuição Weibull usando uma estatística de média móvel ponderada baseada na estatística mínima e máxima. [Ho et al. \(2021\)](#) introduziram um procedimento simplificado de tamanho de amostra variável (SVSS), que consiste em usar alternadamente tamanhos de amostra n_A e n_B com $n_A > n_B$, para melhorar o desempenho do gráfico de controle tradicional \bar{X} (com um tamanho de amostra fixo n). Visando obter uma melhoria no monitoramento da média de um processo com uma variável aleatória seguindo uma distribuição Weibull, [Ho et al. \(2022\)](#) propuseram a inclusão de regras suplementares na carta de controle de *Shewhart* tradicional. Outros estudos interessantes envolvendo o monitoramento de processos ajustados a distribuição

Weibull também são apresentados em [Aslam et al. \(2018\)](#), [Gong e Mukherjee \(2019\)](#), [Khan et al. \(2021\)](#) e [Huwang e Lin \(2020\)](#).

Como mencionado anteriormente, para detectar mudanças nos parâmetros de interesse de um processo usualmente utilizamos o gráfico de *Shewhart*. Baseado na reparametrização da distribuição Weibull em (1.1), expressa em termos da média do processo, μ , e do parâmetro de forma δ , [Fernandes et al. \(2019\)](#) propuseram um gráfico de controle de \bar{X} para monitorar o parâmetro μ (*média da variável aleatória X*) tal que $X \sim \text{We}(\gamma, \delta)$. Essa carta tem como objetivo monitorar μ em um processo ajustado a distribuição Weibull. Os autores descrevem diretrizes para os profissionais e pesquisadores para a obtenção do tamanho mínimo de amostra necessário para combinar os valores obtidos do ARL_1 com os limites de controle exato e assintótico em função de δ (fixo) via simulação.

A contribuição de [Fernandes et al. \(2019\)](#) vem do fato de que o gráfico de controle de \bar{X} proposto foi realizado baseado diretamente na distribuição Weibull, ou seja, sem a necessidade de uma transformação dos dados para uma aproximação pela distribuição Normal. Os valores obtidos para o ARL_1 com os limites de controle exatos e assintóticos foram similares apenas para deslocamentos maiores da média sob controle e grandes valores de δ . Nos demais cenários considerados no estudo, os gráficos de controle com limites exatos apresentou melhor desempenho. Os limites de controle assintóticos, obtidos a partir da aplicação do *TLC*, são mais eficazes para um tamanho de amostra muito grande associados a deslocamentos moderados ou pequenos da média do processo. Contudo, os autores apontam que o uso dos limites de controle assintóticos podem conduzir a sérios erros de decisão por promoverem muitos impactos sobre os valores calculados dos *ARL*'s.

Assim sendo, [Fernandes et al. \(2019\)](#) mostram que, em casos com ausência da suposição de normalidade dos dados observados, gráficos de controle com limites exatos apresentam vantagens bem significativas quanto à sua capacidade de detecção quando comparados aos gráficos de controle com limites assintóticos. Os resultados obtidos expressam que o uso de limites exatos (limites que consideram a distribuição da característica da qualidade) garantem uma maior precisão nos valores obtidos para o *ARL*.

1.3.1 Carta de Controle de \bar{X}

Vimos que a carta de controle proposta por [Fernandes et al. \(2019\)](#) é baseada na distribuição Weibull. Contudo, a distribuição de \bar{X} é desconhecida. Um estudo de simulação de Monte Carlo é então realizado considerando vinte mil observações de tamanho n . Para a simulação, foram consideradas as variáveis aleatórias independentes

X_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, definidas em um domínio real positivo tal que $X_i \sim We(\gamma, \delta)$. Fixada a probabilidade do erro tipo I (α), os limites LCL e UCL são determinados de forma que:

$$P(\bar{X} < LCL|\gamma_0, \delta_0) = P(\bar{X} > UCL|\gamma_0, \delta_0) = \alpha/2 \quad (1.5)$$

$$\int_0^{LCL} f(\bar{x}|\gamma_0, \delta_0)d\bar{x} = \int_{UCL}^{\infty} f(\bar{x}|\gamma_0, \delta_0)d\bar{x} = \alpha/2. \quad (1.6)$$

onde γ_0 e δ_0 são, respectivamente, os *parâmetros de escala e de forma sob controle* do gráfico de controle de \bar{X} e $f(\bar{x}|\gamma_0, \delta_0)$ é a distribuição de \bar{X} obtida a partir da distribuição de X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, com *f.d.p.* expressa em (1.1).

Os valores de ARL são então calculados, via simulação, em função de γ e δ (fixo), bem como em função dos tamanhos considerados dos deslocamentos bidirecionais da média.

Considerando o estudo de simulação realizado por [Fernandes et al. \(2019\)](#), realizamos um estudo similar de forma a avaliar o desempenho do gráfico de controle de \bar{X} baseado na distribuição Weibull a fim de comprovar os resultados obtidos. Basicamente, o intuito é mostrar que, de fato, existem situações que podem apresentar problemas que demandam pesquisas no sentido de propor soluções. Um extensivo estudo de simulação de Monte Carlo foi realizado considerando cinquenta milhões de observações de uma distribuição Weibull. Contudo, variando agora os parâmetros de forma (δ) e de escala (γ).

Em um primeiro momento, sob a hipótese nula, simulamos a função empírica sob controle de $(\bar{X}|\mu_0)$, onde μ_0 é o *parâmetro média sob controle* do processo. É objetivo desse trabalho detectar mudanças de μ_0 para μ_1 (*média do processo fora de controle*), o que implica em monitorar os parâmetros sob controle δ_0 e γ_0 . Para esse estudo proposto, consideramos amostras de tamanho cinco e, assim como em [Fernandes et al. \(2019\)](#), adotamos a regra de decisão tradicional de *Shewhart* de um ponto fora dos limites de controle para um processo operando fora de controle. Os limites e os valores do ARL foram obtidos via simulação de Monte Carlo também considerando deslocamentos bidirecionais da média.

Para uma melhor compreensão sobre os possíveis problemas que o gráfico de \bar{X} pode apresentar, vamos considerar alguns exemplo ilustrativos. Considere um cenário onde a média sob controle é $\mu_0 = 1,772$, supondo os parâmetros sob controle $(\gamma_0; \lambda_0) = (2; 2)$. Considerando $n = 5$, obtemos $LCL = 0,709$ e $UCL = 3,153$. Se o valor da média fora de controle reduz para $\mu_1 = 1,339$, considerando parâmetros fora de controle $(\gamma_1; \lambda_1) = (1,5; 3)$, obtemos $ARL_1 = 900,365$. Esse resultado indica que o gráfico de \bar{X} pode apresentar dificuldades em detectar mudanças na média de um processo. A Figura 1.3 ilustra uma interseção entre a distribuição sob controle de \bar{X} e a distribuição fora de controle de \bar{X} que confirma que o gráfico de controle de \bar{X} proposto por [Fernandes et al.](#)

(2019) não apresenta um bom desempenho para o controle da média uma vez que alterações nesse parâmetro também alteram a variância. Esta situação mostra que seria necessário utilizarmos tamanhos amostrais muito maiores que aqueles usados na tradicional carta de controle de \bar{X} .

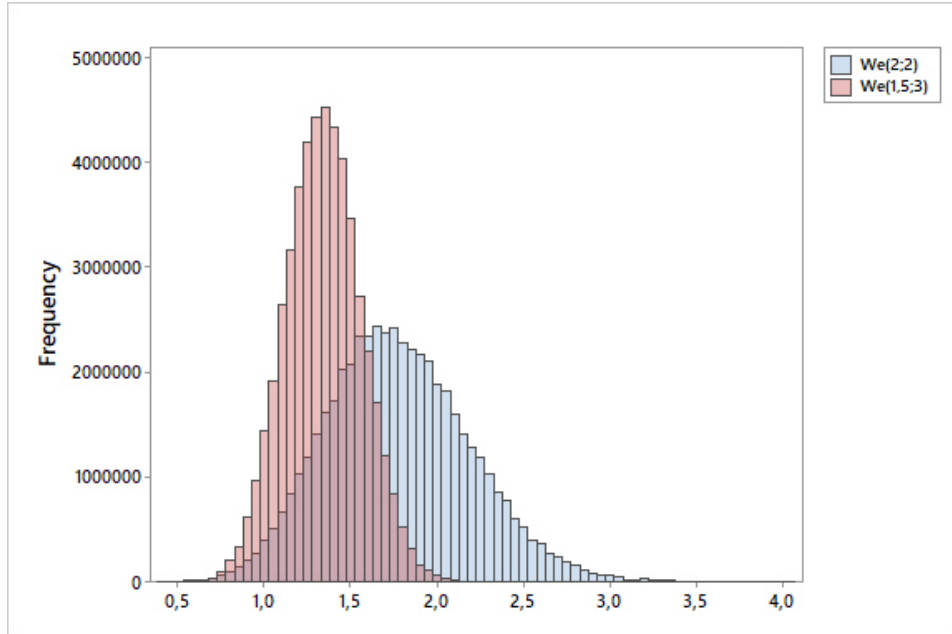


Figura 1.3: Distribuição de \bar{X} sob controle e fora de controle (e interseção dessas distribuições) obtidas por simulação considerando 50 milhões de observações de uma distribuição Weibull com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$ e $(\gamma_1; \delta_1) = (1, 5; 3)$.

Já na Figura 1.4, considerando um aumento da média para $\mu_1 = 1,786$, com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$ e $(\gamma_1; \delta_1) = (1, 5; 3)$, note que o uso da carta de controle \bar{X} pode simplesmente não detectar deslocamentos da média do processo. Para esse cenário, obtemos $ARL_1 = 40257,65$.

1.3.2 Considerações importantes e possíveis problemas envolvendo o desempenho da Carta de Controle de \bar{X}

Considerando alguns cenários envolvendo os parâmetros de um processo ajustado pela distribuição Weibull, o objetivo dessa seção é apontar algumas situações particulares em que o uso do gráfico de \bar{X} proposto por [Fernandes et al. \(2019\)](#) não é tão satisfatório quanto ao seu desempenho. Essa análise é importante pois contribui no sentido de entender melhor os resultados obtidos e buscar soluções alternativas que visam aumentar a velocidade de detecção de um processo fora de controle.

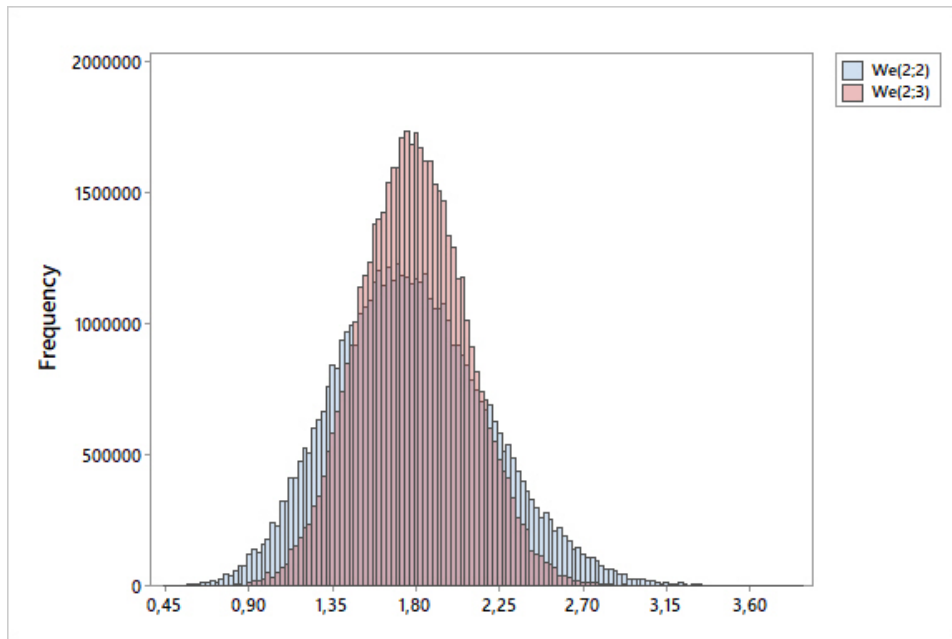


Figura 1.4: Distribuição de \bar{X} sob controle e fora de controle obtidas por simulação considerando 50 milhões de observações de uma distribuição Weibull com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$ e $(\gamma_1; \delta_1) = (2; 3)$.

Logo, é de interesse desse estudo responder questões do tipo: Quando o deslocamento da média aumenta temos uma diminuição do ARL_1 ? Existem casos em que o aumento no deslocamento da média implicou em um aumento do ARL_1 ? Em busca de responder tais questionamentos, espera-se com esse estudo ter um maior conhecimento quanto ao desempenho do gráfico proposto e mostrar que podem existir situações que apresentam problemas quanto a sinalização de alertas e que necessitam de pesquisas no sentido de propor soluções.

Considere então os seguintes cenários para os parâmetros sob controle: $(\gamma_0; \delta_0) = \{(0, 5; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 6), (50; 25)\}$. Daí, os valores de \bar{X} são calculados para obter sua distribuição empírica. Fixado o erro tipo I com $\alpha = 0,0027$, o LCL e o UCL são definidos como sendo os quantis $(\alpha/2)^{th}$ e $(1 - \alpha/2)^{th}$ da distribuição empírica de \bar{X} para obter um $ARL_0 \approx 370,4$. Adicionalmente, simulamos uma função empírica fora de controle de $(\bar{X}|\mu_1)$, sendo μ_1 a média fora de controle da distribuição Weibull com parâmetros escala e forma fora de controle assumindo, respectivamente, $\gamma_1 = \{0, 1; 0, 5; 1; 1, 5; 2; 3; 4; 5; 6\}$ combinados com os valores de $\delta_1 = \{0, 5; 1; 1, 5; 2; 3; 5; 10; 20\}$. Assim, os valores de ARL_1 são obtidos considerando aumentos e reduções (sentido bidirecional) de μ_0 para μ_1 .

Os valores de ARL_1 são obtidos considerando cada cenário proposto, de forma que ARL_0 calibrado em 370,4. Esse resultados estão disponibilizados na Tabela 1.1 e nas Tabelas A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5, no Apêndice A. O número médio de amostras que sinalizam o desajuste do processo será denotado aqui por $ARL_1^{\bar{X}}$. O tamanho do deslocamento de μ_0 para μ_1 é denotado por d . Esse valor, d , indica o percentual do quanto

μ_1 se desloca com relação à μ_0 , sendo negativo (redução com relação a μ_0) ou positivo (aumento com relação a μ_0).

Considere então o cenário que corresponde à Tabela 1.1 em que os parâmetros sob controle da distribuição são tomados como $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$. Para essa situação, obtemos $\mu_0 = 1,7724$ e os valores obtidos para o LCL e UCL foram, respectivamente, 0,709 e 3,153.

Tabela 1.1: Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
2	2	370,3978	1,7724	0,9265	0,7087	3,1530
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
0,1	0,5	1,0287	0,2000	0,4472	1,5725	-89%
0,5	0,5	1,8363	1,0000	2,2361	0,7725	-44%
1	0,5	1,7725	2,0000	4,4721	0,2275	13%
4	0,5	1,3355	8,0000	17,8885	6,2275	351%
5	0,5	1,2404	10,0000	22,3607	8,2275	464%
6	0,5	1.1814	12,0000	26,8328	10,2275	577%
0,1	1	1,0000	0,1000	0,1000	1,6725	-94%
0,5	1	1,1978	0,5000	0,5000	1,2725	-72%
1	1	3,5248	1,0000	1,0000	0,7725	-44%
4	1	1,5565	4,0000	4,0000	2,2275	126%
5	1	1,2662	5,0000	5,0000	3,2275	182%
6	1	1,1442	6,0000	6,0000	4,2275	239%
0,1	1,5	1,0000	0,0903	0,0613	1,6822	-95%
0,5	1,5	1,0435	0,4514	0,3065	1,3211	-75%
1	1,5	3,9293	0,9027	0,6129	0,8697	-49%
4	1,5	1,5726	3,6110	2,4517	1,8385	104%
5	1,5	1,1899	4,5137	3,0647	2,7413	155%
6	1,5	1,0742	5,4165	3,6776	3,6440	206%
0,1	2	1,0000	0,0886	0,0463	1,6838	-95%
0,5	2	1,0088	0,4431	0,2316	1,3293	-75%
1	2	4,9629	0,8862	0,4633	0,8862	-50%
4	2	1,4989	3,5449	1,8530	1,7725	100%
5	2	1,1159	4,4311	2,3163	2,6587	150%
6	2	1,0320	5,3174	2,7795	3,5449	200%

Note que, para esse cenário, tanto para reduções (valores negativos de d) quanto para aumentos de μ_0 (valores positivos de d), combinados a pequenos valores de δ_1 , os valores de $ARL_1^{\bar{X}}$ tendem a um, conforme também observado por [Fernandes et al. \(2019\)](#). Por outro lado, nota-se que para pequenos desajustes de μ_0 , considerando valores intermediários de δ_1 combinados aos valores de $\gamma_1 = \{1, 5; 2; 2, 5; 3\}$, alguns casos merecem destaque. Por exemplo: considere a Tabela 1.2, onde estão apresentados os valores $ARL_1^{\bar{X}}$ do gráfico de \bar{X} .

Tabela 1.2: Valores de ARL 's do gráfico de \bar{X} considerando uma redução da média μ_0 na faixa de 20% a 25%: com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
2	2	370,3978	1,7724	0,9265	0,7087	3,1530
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
1,5	1,5	24,6255	1,3541	0,9194	0,4183	-24%
1,5	2	70,2499	1,3293	0,6949	0,4431	-25%
1,5	3	900,3655	1,3395	0,4868	0,4330	-24%
1,5	5	387596,9000	1,3773	0,3155	0,3952	-22%

Observe que se migramos da situação sob controle $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$ para uma situação fora de controle $(\gamma_1; \delta_1) = (1, 5; 3)$, então a média sofre uma redução de 25% (consideravelmente alta). No entanto, temos um $ARL_1^{\bar{X}}$ de aproximadamente 900 e basicamente estamos falando que o gráfico de controle de \bar{X} sozinho não detecta um desajuste do processo com $n = 5$. Por outro lado, se a situação fora de controle for de $(\gamma_1; \delta_1) = (1, 5; 2)$ a redução na média ainda é em torno de 25%. Porém, agora, o $ARL_1^{\bar{X}}$ é um valor em torno de 70. Usualmente, em cartas de controle aplicadas em processos normalmente distribuídos, tal situação não ocorre pois, nesse caso, a média é independente da variância. Já aqui, detectamos um problema sério pois o responsável pelo controle possui uma ferramenta que eventualmente pode ou não detectar mudanças nas médias com deslocamentos similares ao que usa rotineiramente em processos normais ou usando aproximações pelo TCL .

Casos semelhantes a esses podem ser observados também nos demais cenários considerados nas Tabelas [A.1](#), [A.2](#), [A.3](#), [A.4](#) e [A.5](#) (no *Apêndice A*). Alguns exemplos: na Tabela [A.2](#), uma situação similar ao anteriormente mencionado em que $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 3)$, considerando um deslocamento da média na faixa de 1% a 3%, os respectivos valores do ARL_1 obtidos quando $(\gamma_1; \delta_1) = (2; 1, 5)$ e $(\gamma_1; \delta_1) = (2; 5)$ foram aproximadamente 8,97 e 282485,9, respectivamente (sendo um valor razoável para o primeiro caso e, para o segundo, um valor muito alto). Já na Tabela [A.3](#), com $(\gamma_0; \delta_0) = (0, 5; 1)$, para deslocamentos de μ_0 entre 10% e 11%, quando $(\gamma_1; \delta_1) = (0, 5; 1, 5)$ obtemos $ARL_1 = 27487, 63$ e quando

$(\gamma_1; \delta_1) = (2; 1, 5)$ obtemos $ARL_1 = 1724138$ (ambos muito altos). Também enquanto $(\gamma_0; \delta_0) = (3; 6)$, Tabela A.4, para deslocamentos de μ_0 de 11%, obtemos $ARL_1 = 96,2386$ quando $(\gamma_1; \delta_1) = (3; 5)$ e $ARL_1 = 396825,4$ e quando $(\gamma_1; \delta_1) = (3; 10)$.

1.4 Motivação e Objetivos Propostos

Conforme mencionado anteriormente, o modelo probabilístico Weibull é uma opção apropriada para aplicação em várias situações onde as observações podem apresentar um comportamento assimétrico. Assim sendo, essa distribuição apresenta-se como uma alternativa à distribuição Normal no monitoramento de processos cuja a variável aleatória é contínua e seu domínio é não-negativo.

Como a média da distribuição Weibull é uma função dos parâmetros de forma e de escala (conforme em (1.2)), um gráfico de controle de *Shewhart* para monitorar a média da variável aleatória seguindo essa densidade não poderia ser proposto diretamente, uma vez que a distribuição da média amostral não é conhecida.

A contribuição de Fernandes et al. (2019) para situações ausentes do pressuposto de normalidade engloba a proposta de uma carta de controle alternativa cujos limites de controle baseiam-se em uma aplicação do *TCL* para sua construção. Também discutiram um gráfico de controle sem a necessidade de uma aproximação pela distribuição Normal, utilizando um gráfico construído com base em limites de controle exatos.

Em um estudo posterior, a inclusão de uma regra suplementar proposta por Klein (2000) pelo gráfico de controle de \bar{X} de Fernandes et al. (2019) é descrita em Ho et al. (2022) com o intuito de acelerar a detecção de pequenas alterações no processo ajustado pela distribuição Weibull. Quando da criação dos gráficos de controle de 3σ , um ponto além dos limites de controle significa que o operador deve intervir no processo (regra padrão de *Shewhart*). De acordo com Costa et al. (2005), muitas das regras suplementares tentam formalizar a percepção intuitiva do operador de que algo no processo pode estar fora de ordem.

1.4.1 Objetivos Propostos

Esse trabalho de tese propõe uma carta de controle de *Shewhart* alternativa à carta de controle baseadas em processos não-normais como a apresentada em Fernandes

et al. (2019). Inicialmente, uma carta de controle para monitorar a média de um processo ajustado pela distribuição Weibull baseado na distribuição Gama, denominada *Carta de Controle de \bar{Y}* , é apresentada e seu desempenho é discutido e avaliado.

Adicionalmente, assim como em Ho et al. (2022), a regra suplementar de execução proposta em Klein (2000) é incorporada à Carta de Controle de \bar{Y} . Essa regra é conhecida como Regra 2-de-2 de Klein e seu impacto quanto aos valores de *ARL* obtidos é também discutido. O intuito é avaliar se a inclusão da regra 2-de-2 de Klein torna esse gráfico competitivo em relação ao Gráfico de Controle de \bar{Y} tradicional (padrão).

Na sequência, uma outra regra proposta por Khoo e Ariffin (2006), conhecida como regra melhorada 2-de-2 de Khoo, é proposta. Seu desempenho também é analisado, todavia com o objetivo de avaliar se existe uma melhoria quanto à capacidade de sinalização em relação ao gráfico de controle de \bar{Y} com uso da regra padrão (regra 1-de-1) e em relação ao gráfico de \bar{Y} com uso da regra 2-de-2 de Klein.

Esse trabalho é composto por esse capítulo introdutório, Cap. 1, seguido de três capítulos em estrutura de artigos que descrevem e avaliam o desempenho das cartas de controle propostas quanto aos valores de *ARL* obtidos. Cada um dos capítulos ilustram um exemplo numérico, utilizando o mesmo conjunto de dados reais, visando uma aplicação para cada uma das cartas propostas.

No artigo a que se refere o Cap. 2, o *Gráfico de Controle de \bar{Y}* é proposto a partir de uma variável transformada e expressa em termos dos parâmetros de forma e de escala da distribuição Weibull e é avaliado. Adicionalmente, uma comparação com o gráfico de \bar{X} é realizado; o artigo que propõe a inclusão da regra de execução de Klein pelo gráfico de controle de \bar{Y} corresponde ao Cap. 3. Já o artigo no Cap. 4, propõe a carta de controle de \bar{Y} com uso da regra de Khoo. Ao final, algumas considerações e sugestões de trabalhos futuros são expostos no Cap. 5.

Capítulo 2

Carta de Controle para a média de um processo ajustado pela distribuição Weibull baseado na Distribuição Gama

2.1 Introdução

O gráfico de controle proposto por [Fernandes et al. \(2019\)](#) visa monitorar a média de um processo ajustado pela distribuição Weibull, assumindo o parâmetro de forma fixo. A grande contribuição desse estudo segue do fato de não existir a necessidade de realizar uma aproximação de dados pela distribuição normal para o monitoramento de um processo de produção. A partir de um estudo exaustivo de simulação, uma melhoria significativa quanto a capacidade de detecção de desajustes no processo é apontada quando comparada aos resultados obtidos pelo gráfico de controle de \bar{X} com limites assintóticos.

Motivados pelo estudo realizado em [Fernandes et al. \(2019\)](#), propõe-se nesse artigo uma carta de controle para controlar a média sob controle de um processo ajustado pela distribuição Weibull, baseado em uma distribuição Gama. O monitoramento do parâmetro média da característica de qualidade de interesse é realizado a partir de uma variável aleatória transformada de dados oriundos de um processo Weibull. Essa nova variável, $Y = (X/\gamma)^\delta$, segue uma distribuição Exponencial expressa em função dos parâmetros de forma (δ) e de escala (γ) de uma distribuição Weibull, $X \sim We(\delta, \gamma)$. A essa carta é dada a denominação de *Gráfico de Controle de \bar{Y}* .

Como $Y \sim \text{Exp}(1)$, a soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas terá uma distribuição Gama com parâmetros n e 1. Como para o monitoramento da média usamos a distribuição Gama, podemos afirmar que o Gráfico de \bar{Y} aqui proposto tem como vantagem, sobre o Gráfico de controle de \bar{X} proposto por [Fernandes et al. \(2019\)](#), a dispensa de um estudo de simulação. Além disso, valores menores de ARL_1

são obtidos (considerando ARL_0 fixado em 370,4) para a maioria dos deslocamentos na média considerados.

O artigo que descreve a carta de controle de \bar{Y} foi publicado com o título “*About Shewhart control charts to monitor the Weibull mean based on a Gamma distribution*” pela Revista Internacional *Quality and Reliability Engineering International* em Setembro/2022 e pode ser acessado em <https://doi.org/10.1002/qre.3200>.

Destacaremos aqui alguns pontos desse artigo e que serão importantes para avaliações comparativas com os gráficos de controle de \bar{Y} com uso de regras suplementares que serão discutidos nos artigos descritos no Cap. 3 e no Cap. 4.

2.2 Carta de Controle de \bar{Y}

Para o Gráfico de Controle de \bar{Y} , similarmente considera-se a variável aleatória X como sendo a característica de qualidade seguindo uma distribuição Weibull tal que $X \sim \text{Weibull}(\delta, \gamma)$, em que $\delta > 0$ (parâmetro de forma) e $\gamma > 0$ (parâmetro de escala). A função de densidade de probabilidade (fdp) de X é dada como em (1.1). A média e variância seguem como em (1.2).

Observe que se o parâmetro de forma δ não mudar, então o controle da média é equivalente a controlar o parâmetro de escala γ . Se

$$Y = \left(\frac{X}{\gamma}\right)^\delta,$$

então Y segue a distribuição exponencial com parâmetro 1, ou seja, $Y \sim \text{Exp}(1)$, conforme detalhado em Johnson et al. (1994).

Esse resultado pode ser obtido observando que a função de distribuição cumulativa (CDF) de Y pode ser escrita como

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y^{1/\delta}\gamma)$$

e, conseqüentemente, a fdp de Y é a derivada de seu CDF, que resulta em $Y \sim \text{Exp}(1)$.

Logo, a distribuição Weibull pode ser caracterizada como a distribuição de uma variável aleatória X tal que a variável aleatória Y tem uma distribuição exponencial com média igual a 1. Além disso, para uma dada amostra (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*) de Y , então a variável aleatória $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ tem uma distribuição Gama com parâmetros n e 1. Isto é, $Z \sim \text{Gama}(n, 1)$.

Note que nenhum resultado (nem mesmo aproximações) é conhecido sobre a soma de variáveis aleatórias Weibull como observado por [Nadarajah \(2008\)](#) e, de acordo com [Fernandes et al. \(2019\)](#), mesmo o *TLC* que assegura que \bar{X} segue assintoticamente uma distribuição normal (embora tal convergência não seja confiável, pois depende do tamanho da amostra n e da média μ). Assim, a distribuição exata de \bar{X} , para $X_i \sim \text{Weibull}(\delta, \gamma)$, é desconhecida.

2.3 Obtendo os Limites de Controle e *ARL*'s para a Carta de Controle de \bar{Y}

Considere X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de X de tamanho n tal que $X_i \sim \text{Weibull}(\delta, \gamma)$. Quando o processo está sob controle, sua média é denotada por μ_0 e, quando está fora de controle, por $\mu_1 = \mu_0 \times (1 + d)$, em que d é o tamanho do deslocamento, que pode ser positivo (aumento da média) ou negativo (diminuição da média). Suponha também que o parâmetro de forma δ não se altera, como consideram [Ramalhoto e Morais \(1999\)](#), [Pascual e Park \(2018\)](#), [Fernandes et al. \(2019\)](#), e [Ho et al. \(2021\)](#). [Pascual e Park \(2018\)](#) observaram que existem situações práticas em que essa suposição é válida. O valor de δ pode ser uma propriedade inerente ao processo, ou seja, é especificado pelas propriedades mecânicas e materiais.

Assim como em [Fernandes et al. \(2019\)](#), calcularemos os limites de controle superior (*UCL*) e inferior (*LCL*) usando os quantis $(\alpha/2)$ -th e $(1 - \alpha/2)$ -th de Y , respectivamente, isto é, $q_{\alpha/2}$ e $q_{1-\alpha/2}$ de Z . A escolha de α é tal que um $\text{ARL}_0 = 1/\alpha = 370,4$ é alcançado.

Considerando a variável transformada $Y = (X/\gamma)^\delta$, o objetivo então é monitorar a quantidade \bar{Y} já que mudanças no parâmetro de forma, δ , ou no parâmetro de escala, γ , irão alterar a distribuição de \bar{Y} e mudanças serão sinalizadas em \bar{X} .

Logo, sendo Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra aleatória de Y com distribuição Exponencial de média um, o *UCL* e o *LCL* são obtidos de forma que satisfaça:

$$P\left(Z = \sum_{i=1}^n y_i > n\text{UCL}\right) = \alpha/2 \quad (2.1)$$

e

$$P\left(Z = \sum_{i=1}^n y_i < n\text{LCL}\right) = \alpha/2. \quad (2.2)$$

Como observado anteriormente, $Z = \sum_{i=1}^n y_i$ é tal que $Z \sim \text{Gamma}(n, 1)$, com CDF dada por $F_Z(z)$. Consequentemente, o *UCL* e o *LCL* são numericamente calculados

pelas seguintes expressões:

$$UCL = \frac{F_Z^{-1}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{n} \quad (2.3)$$

e

$$LCL = \frac{F_Z^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{n}. \quad (2.4)$$

Para cada amostra coletada no processo de produção, \bar{Y} é calculado e comparado com UCL e LCL . Se $\bar{Y} > UCL$ ou $\bar{Y} < LCL$, o processo será considerado *fora de controle* e, caso contrário, *sob controle*.

Embora o cálculo para a obtenção dos limites de controle por (2.3) e por (2.4) não seja numericamente simples, ele pode ser feito facilmente com o auxílio de recursos computacionais comuns. Por exemplo, se $n = 5$ e $\alpha = 0,0027$ (para ter um $ARL_0 \approx 370,4$), então, usando o *software estatístico R* (R Core Team, 2023), verifica-se que:

$$UCL = qgamma(1 - 0,0027/2, 5, 1)/5 = 2,88$$

e

$$LCL = qgamma(0,0027/2, 5, 1)/5 = 0,16.$$

Para calcular os valores de ARL_1 , deve-se observar que o parâmetro de forma δ não muda e considerando a média expressa em (1.2) e $\mu_1 = \mu_0 \times (1 + d)$, segue que a mudança na média é equivalente a mudar o parâmetro de escala sob controle γ_0 para o parâmetro de escala fora de controle $\gamma_1 = \gamma_0 \times (1 + d)$.

O problema no cálculo do ARL_1 é que quando o processo sair de controle, a variável X terá parâmetros de forma δ e de escala γ_1 . No entanto, como a transformação $Y = \left(\frac{X}{\gamma_0}\right)^\delta$ é mantida, a propriedade de Y ter uma distribuição Exponencial com média igual a 1 não será mais tão válida. Assim, para continuar usando as propriedades da distribuição Exponencial e da distribuição Gama, algumas manipulações algébricas devem ser realizadas de forma que a distribuição de $(n\bar{Y})$ seja obtida com base em $Y = \left(\frac{X}{\gamma_1}\right)^\delta$. Portanto, a expressão do ARL_1 pode ser dada por:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (2.5)$$

onde β pode ser interpretado como sendo a probabilidade do erro tipo II em um teste de hipóteses. Então, β é obtido a partir de:

$$\beta = P \left[nULC \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i | \gamma_1}{\gamma_0} \right)^\delta \leq nULC \right]. \quad (2.6)$$

Um problema com (2.6) é que a distribuição de $\left(\frac{X_i|\gamma_1}{\gamma_0}\right)^\delta$ é desconhecida. No entanto, os termos em (2.6) forem multiplicados por $\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)^\delta$, a seguinte expressão é obtida, em que o termo $\left(\frac{X_i|\gamma_1}{\gamma_1}\right)^\delta$ tem uma distribuição Exponencial com média 1 e, conseqüentemente, a soma $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i|\gamma_1}{\gamma_1}\right)^\delta$ terá uma distribuição Gama, o que torna então possível o cálculo do ARL_1 . Segue:

$$\beta = P \left[n\text{ULC} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)^\delta \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i|\gamma_1}{\gamma_1}\right)^\delta \leq n\text{ULC} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right)^\delta \right]. \quad (2.7)$$

Observe que o cálculo de β depende da razão

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = (1 + d)^{-1}, \quad (2.8)$$

o que significa que valores diferentes de d resultam em diferentes valores de β .

Assim como no cálculo dos limites de controle descritos anteriormente, o valor de ARL_1 também pode ser calculado usando recursos computacionais simples. Por exemplo:

$$n = 5, \delta = 3, d = 0,2 \text{ e } \mu_0 = 3,572$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = 4,00 \text{ e } \gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_0 \times d = 4,80.$$

Assim, com o auxílio do *software R*, obtemos:

$$\beta = \text{pgamma}(5 * 2,88 * (4,00/4,80)^3, 5, 1) - \text{pgamma}(5 * 0,16 * (4,00/4,80)^3, 5, 1)$$

$$\Rightarrow \beta \approx 0,92$$

resultando em

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \cong 12,14.$$

2.4 Comparando os valores do ARL_1 das Cartas de Controle de \bar{X} de \bar{Y}

No sentido de verificar se a carta de controle de \bar{Y} proposta é competitiva com a carta de controle de \bar{X} de [Fernandes et al. \(2019\)](#) quanto ao seu desempenho, apresentamos um estudo comparativo nessa Seção. Vale lembrar que os limites de controle e ARL_1 do gráfico de \bar{X} foram obtidos por simulações de Monte Carlo e os limites obtidos pela carta de controle \bar{Y} aqui proposta e os valores de ARL_1 foram obtidos exatamente usando a distribuição Gama.

A Tabela 2.1 apresenta os valores de ARL obtidos de um estudo considerando: $d = \{-0,4; -0,3; -0,2; -0,1; -0,05; -0,01; 0; 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4\}$, $n = \{3, 5, 10, 30, 100\}$ e $\delta = \{0.5, 3, 5, 10, 15, 20\}$. Como o parâmetro de forma δ é considerado fixo, então o parâmetro $(1 + d)$ pode ser interpretado como a mudança na média quando o processo sai de controle, isto é, $\mu_1 = \mu_0 \times (1 + d)$ ou, equivalentemente, alterando o parâmetro de escala (ou seja, $\gamma_1 = \gamma_0 \times (1 + d)$).

Observando a Tabela 2.1, é possível verificar alguns resultados. Primeiramente, vale ressaltar que, na proposta [Fernandes et al. \(2019\)](#), não é tão simples calibrar o valor de ARL_0 em 370,4, uma vez que os limites de controle são obtidos por simulação de Monte Carlo. Em linhas gerais, considerando apenas os casos em que $d \neq 0$, a carta de controle \bar{Y} proposta apresenta valores menores de ARL_1 em aproximadamente 70% dos casos avaliados.

Na Fig. 1 do artigo de [Vasconcelos et al. \(2022\)](#) em <https://doi.org/10.1002/qre.3200>, observa-se que o gráfico \bar{Y} proposto apresentou um percentual médio de casos, com menores valores de ARL_1 , maior que os do gráfico de \bar{X} . Ressalta-se que para valores altos de $|d|$, o percentual de empates cresce, pois as duas cartas propostas conseguem detectar facilmente a mudança na média. Na Fig. 2 desse mesmo artigo, observa-se a variação percentual média dos valores de ARL_1 dos gráficos de controle \bar{X} e \bar{Y} , definida como $\Delta\%_{ARL} = \frac{ARL_1^{\bar{X}} - ARL_1^{\bar{Y}}}{ARL_1^{\bar{X}}} \times 100\%$, onde $ARL_1^{\bar{X}}$ e $ARL_1^{\bar{Y}}$ correspondem aos ARL 's obtidos para os gráficos de \bar{X} e de \bar{Y} , respectivamente .

2.5 Considerações Importantes

Uma vez que o desempenho do gráfico de controle de \bar{Y} proposto mostrou-se melhor que o gráfico \bar{X} em vários cenários propostos e os limites de controle, bem como os valores

do ARL_1 , foram calculados analiticamente, o gráfico de \bar{Y} proposto pode ser considerado competitivo. De fato, essa proposta pode ser útil para aplicação em casos reais de forma simples, podendo até mesmo ser implementado utilizando planilhas comuns como o *Excel* que, no geral, estão amplamente disponíveis no ambiente de negócios.

A carta de controle de \bar{Y} envolve uma nova abordagem para controlar a média de um processo ajustado pela distribuição Weibull vem como uma alternativa analítica ao método proposto por [Fernandes et al. \(2019\)](#), onde simulações intensivas de Monte Carlo são necessárias em todas as etapas. Com base em várias situações apresentadas na Tabela 2.1, conclui-se que a abordagem aqui proposta é competitiva com a abordagem de [Fernandes et al. \(2019\)](#) com a vantagem de ser analítica e de fácil implementação, mesmo em planilhas como, por exemplo, *Excel*.

Capítulo 3

Regra Suplementar *2-de-2* de *Klein* aplicada na Carta de Controle de \bar{Y}

Em um processo de produção, é sempre interessante buscar melhorias quanto a velocidade de detecção de possíveis desajustes ocorrendo no processo. Os gráficos de controle estatístico são muito utilizados para esse fim. Nesse artigo, uma inclusão de uma regra suplementar de decisão na carta de controle de \bar{Y} é proposta. Essa regra foi proposta por [Klein \(2000\)](#) e é conhecida como *Regra 2-de-2 de Klein*. O objetivo é discutir e avaliar o impacto da inclusão dessa regra suplementar no desempenho de um processo ajustado pela distribuição Weibull baseado na distribuição Gama. Um exemplo numérico para melhor entendimento sobre o gráfico proposto é ilustrado.

3.1 Introdução

As cartas de controle de *Shewhart* tradicionais é composta basicamente pelo gráfico de controle para monitorar o parâmetro de interesse de um processo de produção. Sua indicação de uma condição fora de controle é tradicionalmente sinalizada quando um único ponto amostral ultrapassa os limites de controle de 3σ (σ : *desvio padrão do processo*). Isso significa que o operador deve então intervir no processo e promover os ajustes necessários. Esse procedimento de simples implementação junto à sua capacidade em detectar grandes deslocamentos de uma característica de qualidade de interesse (variáveis ou atributos) em um processo de produção, faz com que essa ferramenta seja muito atrativa. Logo, o gráfico de controle de *Shewhart*, no geral, apresenta bom desempenho para sinalizar grandes deslocamentos (em processos normais, por exemplo, esse gráfico tem alta capacidade de detecção considerando limites de controle com desvios iguais ou superiores a $1,5\sigma$). Porém, alguns estudos realizados ao longo do tempo, citados em [Montgomery \(2020\)](#), indicam dificuldades relativas na detecção de pequenos deslocamentos da característica alvo.

Novas implementações do gráfico de controle de *Shewhart* foram apresentadas

com metodologias alternativas a esse gráfico como, por exemplo, o gráfico de controle *CUSUM* (soma acumulativa) e o gráfico de controle *EWMA* (média móvel exponencialmente ponderada). Apesar de [Montgomery \(2020\)](#) indicar que esses gráficos apresentam excelente capacidade de detecção em pequenos desajustes do processo, [Klein \(2000\)](#) afirma que até então eles parecem não ter alcançado ampla aplicação além das indústrias de processos químicos.

[Montgomery \(2020\)](#) e [Costa et al. \(2005\)](#) sugerem a incorporação de regras suplementares de execução pelos gráficos de controle tradicionais na tentativa de obter melhorias na velocidade de detecção de pequenos desajustes do processo. De acordo com [Costa et al. \(2005\)](#), muitas das regras suplementares tentam formalizar a percepção intuitiva do operador de que algo no processo pode estar fora de ordem.

No sentido de tornar o gráfico de controle de *Shewhart* mais sensível a pequenas mudanças na média do processo, testes adicionais na forma de regras suplementares de decisão foram sugeridas por [Shewhart \(1941\)](#). Três desses testes estão em [Small et al. \(1956\)](#), [Nelson \(1984\)](#) e [Montgomery \(2020\)](#), mas ainda assim apresentaram um aumento significativo no número médio de alarmes falsos.

No geral, dentre as contribuições com uso de regras suplementares no monitoramento de processos modelados com a distribuição normal, a mais conhecida é a regra suplementar de decisão de “*Western Electric Company*” (mais detalhes em [Small et al. \(1956\)](#)). Recentemente, [Oh e Cho \(2022\)](#) propuseram um gráfico de controle para monitorar o vetor de médias e a matriz de covariância usando as regras de execução propostas pela *Western Electric Company*. Nesse estudo, os valores do *ARL* fora de controle (ARL_1) obtidos a partir de uma cadeia de Markov finita reduziram, mesmo com um pequeno deslocamento do vetor médio e da matriz de covariância. Trata-se de um gráfico de controle mais sensível à pequenas mudanças. [Oh e Cho \(2022\)](#) observaram então que o gráfico de controle de *Shewhart* utilizando regras suplementares é eficaz na detecção de pequenas flutuações.

Resultados exatos para gráficos de controle de *Shewhart* com regras suplementares foram apresentados em [Champ e Woodall \(1987\)](#). Eles, além de observarem uma melhora real na detecção de pequenas perturbações, apontaram também uma deterioração da taxa de alarmes falsos. Para tal fim, é necessário alterar os limites de controle para se obter um ARL_0 planejado. [Zhang e Wu \(2005\)](#) discutiram alguns projetos de gráficos de controle com regras suplementares e [Koutras et al. \(2007\)](#) apresentaram os princípios básicos e avanços recentes na área de gráficos de controle com a incorporação de regras. [Palm \(1990\)](#) também se destaca por fornecer ao profissional tabelas dos valores percentuais da distribuição do número de pontos amostrais do gráfico após a mudança para o estado fora de controle e fornece alguns exemplos de seu uso. Uma avaliação do tamanho do subgrupo com uma taxa de amostragem fixa e a da taxa de alarmes falsos também é realizada. Outros estudos relacionados ao uso de regras suplementares estão em [Walker et al. \(1991\)](#),

Champ (1992) e Shmueli e Cohen (2003).

Montgomery (2020) aponta que, apesar de se observar uma melhora na capacidade do gráfico de controle em detectar deslocamentos menores do parâmetro do processo, o erro tipo I pode ser substancialmente aumentado, demandando alterar os limites de controle para se obter o valor do ARL_0 desejado.

Essas regras tem sido também utilizadas em outros contextos envolvendo processos normais, como: para monitorar o controle multivariado de processos (Costa e Machado (2013), Aparisi et al. (2004)); observações autocorrelacionadas (Alwan et al. (1994), Shongwe e Malela-Majika (2022)); valores discretos autocorrelacionados (Oh e Cho (2022)); perfil linear (Zhang, Shang, Gao e Wang (2017)); em esquemas adaptativos (Costa (2000), Celano et al. (2006), Yu et al. (2016)).

3.1.1 Carta de Controle de \bar{X} com uso da Regra *2-de-2* de *Klein*

Em Fernandes et al. (2019), uma carta de controle da média amostral (\bar{X}) é proposta para monitorar o parâmetro média de uma variável aleatória com distribuição Weibull. Mais detalhes no Cap. 1.

Em um estudo posterior, uma inclusão de regras suplementares no gráfico de controle de \bar{X} de Fernandes et al. (2019) é proposto em Ho et al. (2022) com um propósito de acelerar a detecção de pequenas alterações no processo ajustado pela distribuição Weibull. Ao incorporar regras suplementares ao gráfico de controle de \bar{X} , Ho et al. (2022) mostram que existe um ganho considerável na eficiência do gráfico em detectar pequenos deslocamentos da média do processo quando comparado o seu desempenho com o do gráfico de controle de *Shewhart* tradicional.

Ho et al. (2022) cita que poucos autores contribuíram no sentido de propor modificações para melhorar o desempenho do monitoramento de um processo de produção na ausência da suposição de normalidade dos dados. Dos que consideram as regras suplementares no monitoramento de parâmetros de processos não-normais, destacamos, por exemplo: Malela-Majika et al. (2018), para monitoramento de processo ajustado a distribuição Burr tipo XII e Rocha et al. (2015), sob uma perspectiva econômica, para monitorar taxas médias para distribuições de Poisson.

A inclusão de algumas regras suplementares podem ser operacionalmente complexas ou até mesmo inviáveis em contextos práticos tornando-os difíceis de serem mais utilizados (Ho et al., 2022). No entanto, Klein (2000) propôs um gráfico de controle de \bar{X} para processos normais incorporando uma regra denominada *Regra 2-de-2 de Klein* que possui

fácil implementação e interpretação. Em resumo, essa regra requer mais de uma observação para obter um sinal fora de controle (*out-of-control - o.o.c*). Em outras palavras, para obter um sinal *o.o.c*, seriam necessários dois pontos amostrais sucessivos acima do *UCL*) ou dois pontos sucessivos abaixo do (*LCL*). O *UCL* e *LCL* são escolhidos de tal forma a fornecer um erro Tipo I de nossa escolha. Os resultados obtidos apontaram que os gráficos de controle baseados na *Regra 2-de-2* são mais sensíveis às mudanças da média do processo do que o gráfico de controle padrão de *Shewhart* (sem regras suplementares) em uma faixa importante de tais mudanças.

Motivados pela simplicidade de implementação da regra *2-de-2* de *Klein, Ho et al. (2022)* tiveram como objetivo buscar uma melhoria quanto ao desempenho de detecção de desajustes da média no gráfico de controle de \bar{X} , usando uma reparametrização da distribuição Weibull usada em *Fernandes et al. (2019)*, em (1.1).

Basicamente, *Ho et al. (2022)* consideram n amostras aleatórias tomadas em intervalos de tempo igualmente espaçados e obtem $S = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$, onde μ_0 e σ_0 correspondem à média e os desvio padrão sob controle, respectivamente, e $X \sim \text{We}(\gamma, \delta)$. Foram utilizados vinte mil valores simulados de $\bar{X} | \mu_0$ sob controle a partir da reparametrização de distribuição Weibull em (1.1). A esperança e variância são expressas como em (1.2) e a CDF como em (1.3).

Assim, considerando dois valores sequenciais de S , no caso S_{i-1} e S_i , a decisão quanto ao estado do processo de produção é dada por:

- **Processo fora de controle:** *se dois sucessivos valores de S estiverem do mesmo lado e acima do UCL ou abaixo do LCL ;*
- **Processo sob controle:** *caso contrário;*

Para derivar as propriedades estatísticas das regras suplementares no gráfico de controle de \bar{X} , *Ho et al. (2022)* usou uma *Cadeia de Markov*. O procedimento de decisão/inspeção pode ser descrito por seis estados possíveis. Para tanto, supõe-se que as probabilidades p_L^s (probabilidade de um ponto amostral ser plotado abaixo do *LCL*), p^s (probabilidade de um ponto amostral ser plotado entre *LCL* e *UCL*) e p_U^s (probabilidade de um ponto amostral ser plotado acima do *UCL*) devem satisfazer, respectivamente $P(S < q_L^s) = p_L^s$ e $P(S > q_U^s) = p_U^s$, onde q_L^s e q_U^s correspondem aos limites de controle e os quantis de S , restrito a $p_L^s + p_U^s = 1 - p^s$.

Considere $\mu_1 = \mu_0 \times (1 \pm d)$, onde μ_0 e μ_1 equivalem, respectivamente, à média do processo sob controle e fora de controle e d corresponde ao tamanho do deslocamento da média. Quando $d = 0$, o valor do ARL_0 (*número médio de amostras até a ocorrência de um alarme falso*) é calibrado em 370,4 de forma a obter os limites de controle. Quando $d \neq 0$, as probabilidades p^s , p_L^s e p_U^s são recalculados via simulação e, então, obtém-se ARL_1 , que corresponde ao *ARL fora de controle*.

Os resultados obtidos por [Ho et al. \(2022\)](#) foram similares aos obtidos por [Klein \(2000\)](#). Eles indicam que tal procedimento proposto gera redução razoável em termos de ARL com relação a carta de controle de \bar{X} de [Fernandes et al. \(2019\)](#) para uma característica de qualidade com distribuição Weibull. Em outras palavras, a proposta com a inclusão da *Regra 2-de-2 de Klein* em [Ho et al. \(2022\)](#) indica um aumento relevante da velocidade de sinalização de um processo operando fora de controle. Essa melhora no desempenho da carta de controle de \bar{X} proposta em [Ho et al. \(2022\)](#) é detectada principalmente considerando pequenos e moderados deslocamentos da média do processo. Para deslocamentos maiores, o gráfico de \bar{X} tradicional pode ser usado pois apresenta um melhor desempenho.

Em [Vasconcelos et al. \(2022\)](#), uma carta de controle para controlar a média de um processo ajustado à distribuição Weibull baseado na distribuição Gama é proposta, denominada Carta de Controle de \bar{Y} . Baseado em [Ho et al. \(2022\)](#), é objetivo nesse estudo incluir a regra *2-de-2* de *Klein* apresentada por [Klein \(2000\)](#) no gráfico de controle de \bar{Y} de forma que os limites de controle possam ser ajustados para fornecer um valor de ARL_0 desejado. Espera-se, com essa inclusão, obter uma melhoria na velocidade de detecção de um pequeno desajuste no processo de produção pelo gráfico de controle de \bar{Y} tradicional.

Esse artigo segue estruturado da seguinte forma: essa seção introdutória, Seção 3.1 que faz uma breve revisão quanto ao uso de regras suplementares de decisão em cartas de controle de *Shewhart*, além de descrever o impacto da inclusão da regra *2-de-2* de *Klein* na Carta de Controle de \bar{X} proposta por [Ho et al. \(2022\)](#); a Seção 3.2 descreve a Carta de Controle de \bar{Y} com uso da regra *2-de-2* de *Klein*; uma análise quanto ao impacto da inclusão da regra *2-de-2* de *Klein* no desempenho do gráfico de \bar{Y} é apresentado na Seç. 3.3; na Seção 3.4 um exemplo numérico é apresentado e considerações finais são pontuadas na Seção 3.5.

3.2 Uso da regra *2-de-2* de *Klein* pela Carta de controle de \bar{Y}

Em busca de avaliar o desempenho do gráfico de controle de \bar{Y} , faz-se necessário obter os limites de controle. O LCL e o UCL devem ser encontrados de forma que o ARL sob controle esteja calibrado em 370,4, o mesmo valor que o adotado na carta de controle de \bar{Y} proposta por [Vasconcelos et al. \(2022\)](#).

Conforme apresentado no Cap. 2, considera-se a variável aleatória $Y = (X/\gamma)^\delta \sim \text{Exp}(1)$, tal que $X \sim \text{We}(\gamma, \delta)$. Isso implica que, sendo Y_1, Y_2, \dots, Y_n uma amostra aleatória

de Y , temos que $Z = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Gama}(n, 1)$.

Considere que um gráfico de controle é composto com uma região acima do UCL , uma abaixo do LCL e uma região central entre UCL e o LCL , denota-se:

- \mathbf{p}_L : a probabilidade de um único item amostral ocorrer na região abaixo do LCL

$$\Rightarrow p_L = P[\bar{Y} < LCL | X_i \sim We(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n]; \quad (3.1)$$

- \mathbf{p} : a probabilidade de um único item amostral ocorrer na região central (RC), entre LCL e o UCL

$$\Rightarrow p = P[LCL \leq \bar{Y} \leq UCL | X_i \sim We(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n]; \quad (3.2)$$

- \mathbf{p}_U : a probabilidade de um único item amostral ocorrer na região acima do UCL

$$\Rightarrow p_U = P[\bar{Y} > UCL | X_i \sim We(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n]. \quad (3.3)$$

Sejam \bar{Y}_{i-1} e \bar{Y}_i dois valores sequenciais de \bar{Y} . Assim sendo, similarmente a [Vasconcelos et al. \(2022\)](#), para cada amostra coletada no processo de produção, \bar{Y} é calculado e comparado com o LCL e com o UCL . A decisão quanto ao estado do processo avaliado baseia-se então na sequência de dois valores sucessivos de \bar{Y} . O processo é declarado fora de controle (*o.o.c.*) se dois valores consecutivos de \bar{Y} estiverem abaixo do LCL ou se ambos estiverem acima do UCL . Computados os valores de \bar{Y} , o LCL e o UCL são calculados correspondendo aos quantis q_L e q_U , respectivamente, satisfazendo:

$$Pr[\bar{Y} < q_L] = p_L \quad \text{e} \quad Pr[\bar{Y} > q_U] = p_U. \quad (3.4)$$

Em outras palavras, o processo é declarado como:

- **Fora de controle:** $[\bar{Y}_{i-1} < q_L \text{ e } \bar{Y}_i < q_L]$ ou $[\bar{Y}_{i-1} > q_U \text{ e } \bar{Y}_i > q_U]$;
- **Sob controle:** *caso contrário.*

Considere uma *Cadeia de Markov* com cinco estados de transição. O procedimento de decisão ou de inspeção pode ser descrito então pelo espaço de estados $\mathcal{E} = \{C, U_1, U_2, L_1, L_2\}$. Os Estados C , U_1 e L_1 indicam que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável C indica que nenhum ponto amostral ocorre abaixo do LCL ou acima do UCL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [q_L, q_U]$; U_1 indica que $\bar{Y}_i \in (q_U, +\infty)$, mas $\bar{Y}_{i-1} \notin (q_U, +\infty)$; e L_1 indica que $\bar{Y}_i \in (-\infty, q_L)$, mas $\bar{Y}_{i-1} \notin (-\infty, q_L)$. Os Estados U_2 e L_2 indicam que a sequência de \bar{Y} é de tamanho dois, onde U_2 indica que dois valores sucessivos de \bar{Y} são maiores que UCL ; e L_2 indica que dois valores sucessivos de \bar{Y} são menores que LCL .

A matriz de transição \mathbf{P} pode ser escrita então como em (3.5). Os valores das probabilidades de transição dessa matriz são como em (3.1), (3.2) e (3.3), satisfazendo

$p_U + p_L = 1 - p$, sob a hipótese nula H_0 , com os cinco estados da cadeia de Markov. Assim sendo, na matriz \mathbf{P} , a probabilidade p , por exemplo, representa a probabilidade condicional tal que na próxima inspeção (no estado E_i) o processo estará no estado (C), ou seja, $q_L \leq \bar{Y}_i \leq q_U$, dado que na inspeção anterior (no estado E_{i-1}) ele estava no estado (U_1), ou seja, $\bar{Y}_{i-1} > q_U$. Em outras palavras, p indica a probabilidade de produzir um item na RC no tempo (i) dado que um item foi produzido acima do UCL no tempo imediatamente anterior ($i - 1$). Vale ressaltar que para a obtenção da matriz de transição, é necessário considerar que: quando o processo é declarado fora de controle, o processo é pausado, ajustado e, na sequência, reiniciado.

A matriz de transição \mathbf{P} pode ser escrita então como em (3.5). Os valores das probabilidades condicional da matriz \mathbf{P} são calculadas utilizando (3.1), (3.2) e (3.3).

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{C} & \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{C} & p & p_U & 0 & p_L & 0 \\ \mathbf{U}_1 & p & 0 & p_U & p_L & 0 \\ \mathbf{U}_2 & p & p_U & 0 & p_L & 0 \\ \mathbf{L}_1 & p & p_U & 0 & 0 & p_L \\ \mathbf{L}_2 & p & p_U & 0 & p_L & 0 \end{array} \quad (3.5)$$

A matriz de transição \mathbf{P} é irredutível, aperiódica e \mathbf{P}^t converge para uma matriz na qual cada linha é uma distribuição estacionária $\boldsymbol{\Pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5]$, quando $t \rightarrow \infty$, desde que π_j seja estritamente positivo ($\pi_j > 0, \forall j \in \mathbb{R}$). Cada elemento $\pi_j, j = 1, 2, \dots, 5$, está associado com um único estado de \mathbf{P} . O vetor $\boldsymbol{\Pi}$ pode ser obtido a partir da solução do sistema linear de equações $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{P}$, sujeito à restrição de que a soma dos seus elementos deve ser igual a um. Mais detalhes que envolvem a distribuição estacionária estão descritos no Apêndice B. Resolvendo o sistema, os elementos do vetor $\boldsymbol{\Pi}$ são dados por:

$$\pi_1 = p \quad ; \quad \pi_2 = \frac{p_U}{1 + p_U} \quad ; \quad \pi_3 = \frac{p_U^2}{1 + p_U} \quad ; \quad \pi_4 = \frac{p_L}{1 + p_L} \quad ; \quad \pi_5 = \frac{p_L^2}{1 + p_L}$$

Os valores π_3 e π_5 indicam a probabilidade de longo prazo associada aos estados que demandam ajustes no processo uma vez que a média do processo foi alterada. Assim, o número médio de amostras até que o gráfico de controle produza um sinal pode ser expresso como:

$$\mathbb{E}(\mathcal{E}|d) = \frac{1}{\pi_3 + \pi_5} = \frac{1}{\frac{p_U^2}{1+p_U} + \frac{p_L^2}{1+p_L}} = ARL. \quad (3.6)$$

Quando $d = 0$ em (3.6), o valor de ARL_0 é calibrado em 370,4 para corresponder ao ARL sob controle do gráfico de controle de \bar{Y} tradicional (usualmente $\alpha = 0,0027$ é

escolhido para garantir o valor $ARL_0 = 370,4$). Isto é, devemos procurar valores de UCL e LCL que gerem um valor de ARL_0 fixado, usualmente 370,4.

Para obter os limites de controle e os valores de ARL , como em [Vasconcelos et al. \(2022\)](#), temos $\mu_1 = \mu_0 \times (1 + d)$ e, conseqüentemente, $\gamma_1 = \gamma_0 \times (1 + d)$. Daí, por exemplo, se $n = 5$ (*tamanho da amostra*), $\delta = 0,5$, $d = 0,1$ e $\mu_0 = 3,572$, então $\gamma_0 = 1,786$ e $\gamma_1 = 1,965$. Igualando então (3.6) ao valor desejado para o ARL_0 de modo a atingir o nível de significância de $\alpha = 0,0027$, obtemos $p_L = p_U = 0,0375$. Logo, usando o *software* estatístico R ([R Core Team, 2023](#)), encontramos $UCL = qgamma(1 - 0,037422, 5, 1)/5 = 1,926$ e $LCL = qgamma(0,037422, 5, 1)/5 = 0,362$.

Quando $d \neq 0$ em (3.6), o valor de ARL_1 é calculado utilizando os valores de UCL e LCL previamente obtidos para um fixado valor de ARL_0 . Para tanto, é preciso recalcular os valores de p_L , p e p_U em (3.1), (3.2) e (3.3) de forma a levar em conta a mudança na distribuição Weibull em relação aos limites de controle. Em seguida, (3.6) é utilizada para determinar os valores de ARL_1 associados ao deslocamento d .

Assim com o cálculo dos limites de controle descritos, o valor de ARL_1 pode ser determinado usando procedimentos analíticos e computacionais. As probabilidades p , p_L e p_U são obtidas e inseridas na matriz de transição P (uma vez que a distribuição de Z é conhecida) e depois usadas analiticamente na distribuição estacionária, Π , para determinar o ARL_1 .

No caso, se $d = 0,1$ em (3.6) e considerando (2.7) e (2.8), obtemos: $p_U = 1 - pgamma(5 * 1,926 * ((1,786/1,965)^{0,5}), 5, 1) = 0,049$, $p_L = pgamma(5 * 0,362 * ((1,786/1,965)^{0,5}), 5, 1) = 0,031$ e $p = 1 - p_U - p_L = 0,919$. Então, usando (3.6), encontramos $ARL_1 = 310,467$.

3.3 Análise do desempenho da carta de controle de \bar{Y} com uso da Regra Suplementar de *Klein*

Nessa Seção, o desempenho do gráfico de controle de \bar{Y} com uso da regra suplementar 2-de-2 de *Klein* (procedimento \bar{Y}_{kl} - *Klein's supplementary run rules*) é comparado com o desempenho do gráfico de controle de \bar{Y} tradicional proposto por [Vasconcelos et al. \(2022\)](#) (procedimento \bar{Y}_s - *standard \bar{Y} chart*) em termos de ARL . Consideramos os valores de $\delta = \{0,5; 3; 5; 10; 15; 20\}$, $d = \{\pm 0,01; \pm 0,05; \pm 0,1; \pm 0,2; \pm 0,3; \pm 0,4; \pm 0,6; \pm 0,8\}$ e $n = \{3; 5; 10; 30; 100\}$. Os conjuntos δ , n e d contém os valores utilizados em [Vasconcelos et al. \(2022\)](#) para fins comparativos. A escolha para o parâmetro forma δ são aqueles descritos em muitos estudos práticos como em [Jiang e Murthy \(2011\)](#), [Rinne \(2008\)](#) e

Abbas (2018). Como o parâmetro de forma δ é considerado fixo, então o parâmetro $\mu_1/\mu_0 = (1 + d)^{-1}$ pode ser interpretado como a mudança na média quando o processo sai de controle. O valor de ARL associado a um deslocamento de valor zero corresponde ao ARL_0 . As mudanças na média do processo, medidas em d , são consideradas repentinas e sustentadas. Todos os parâmetros dos gráficos de controle são considerados ter ARL_0 calibrado em 370,4 para os procedimentos \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} .

A Tabela 3.1 compara os valores de ARL dos esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} associados aos valores de δ definidos, considerando $n = 5$. Alguns impactos quanto à incorporação da regra 2-de-2 de Klein pelo gráfico de controle de \bar{Y} são observados e medidos pelo ARL_1 . Os resultados em negrito nas Tabelas 3.1 indicam menores valores de ARL_1 quando comparamos \bar{Y}_s com \bar{Y}_{kl} .

A regra de Klein apresenta maior sensibilidade de detecção do que a regra padrão do gráfico de \bar{Y} quanto maior for o valor de δ e menor for o valor de $|d|$. Também, para $\delta \geq 3$ e valores grande de $|d|$, conforme Tabela 3.1, os valores de ARL_1 obtidos pelo procedimento \bar{Y}_s tendem a um e os obtidos pelo esquema \bar{Y}_{kl} tendem a dois. Esses resultados já eram esperados uma vez que a regra 2-de-2 de Klein exige dois pontos consecutivos para sinalização de um desajuste no processo. Assim, para grandes deslocamentos com $\delta > 3$, o gráfico de controle padrão de \bar{Y} apresenta melhor desempenho. Quando $\delta = 0,5$, no geral, o procedimento \bar{Y}_{kl} é melhor, para qualquer valor de d . Nessa situação, os valores do ARL_1 do procedimento \bar{Y}_s que se apresentam menores, são muito próximos dos valores obtidos pelo \bar{Y}_{kl} . Logo, ambos podem ser usados.

Assim como em Ho et al. (2022), o procedimento \bar{Y}_{kl} é mais eficaz considerando pequenos e moderados deslocamentos da média do processo, em especial na faixa $d = [-0,10; 0,10]$ e grandes valores de δ (no caso, $\delta = \{15; 20\}$). Nos casos em que o \bar{Y}_s foi melhor, os ARL_1 obtidos por \bar{Y}_{kl} também foram similares ($\delta = \{0,5; 3; 5\}$ e $d = 0,01$).

Embora a Tabela 3.1 aponte casos em que o procedimento \bar{Y}_{kl} apresentou ARL_1 maior que o ARL_0 (como para $\delta = 0,5$ e $d \in \{-0,10; -0,05; -0,01\}$; $\delta = \{3; 5\}$ e $d = -0,01$), ainda nesses casos vale ressaltar que gráfico proposto apresentou melhor desempenho quando comparado ao gráfico com procedimento \bar{Y}_s . Resultados similares aos observados na Tabela 3.1 foram também observados nas Tabelas anexas no Apêndice C. Em resumo, os resultados apontam que o procedimento \bar{Y}_{kl} promove uma redução de ARL_1 em diversos cenários, principalmente para pequenos e moderados deslocamentos da média do processo e tamanho de amostras menores.

Podemos destacar em particular, por exemplo, os resultados dos valores de ARL obtidos considerando $\delta = 5$ e um deslocamento bidirecional da média μ , conforme Tabela 3.2. Para desvios da média do processo na faixa de $|d| < 0,2$, nota-se que os valores de ARL_1 para a regra sugerida (destacados em negrito) são inferiores aos do esquema \bar{Y}_s . Essa percepção torna-se mais evidente ainda à medida que aumentamos a variação de δ juntamente com um aumento de n . Nos casos em que o esquema \bar{Y}_s apresentou um ARL_1

Tabela 3.1: Valores de ARL_1 dos esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} considerando δ e os valores de deslocamento bidirecionais da média, d , com $n = 5$.

d	20		15		10		5		3		0,5	
	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}
-0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	29,135	9,466
-0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,006	2,000	108,866	43,733
-0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,027	2,000	3,266	2,265	245,936	137,739
-0,30	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,970	2,053	11,798	4,343	326,720	218,344
-0,20	1,000	2,000	1,000	2,000	1,165	2,001	10,209	3,925	47,949	16,054	390,864	312,234
-0,10	1,286	2,003	2,932	2,202	12,438	4,515	82,978	30,855	192,993	96,152	408,283	378,472
-0,05	13,612	4,833	33,109	10,772	87,625	33,049	244,921	136,871	352,713	251,125	395,246	384,601
-0,01	302,085	190,962	355,909	255,516	398,149	327,808	407,697	379,852	398,403	385,057	376,121	374,692
0,01	107,233	94,328	155,033	141,778	220,519	211,772	298,814	299,085	329,843	332,425	364,371	365,477
0,05	2,707	3,455	5,550	5,834	16,416	14,590	77,055	66,255	158,342	145,188	337,935	340,700
0,10	1,071	2,047	1,359	2,283	2,857	3,584	17,452	15,423	57,130	48,574	302,159	302,764
0,20	1,000	2,000	1,003	2,001	1,095	2,065	3,174	3,854	12,136	11,154	233,079	225,683
0,30	1,000	2,000	1,000	2,000	1,004	2,002	1,531	2,432	4,586	5,038	176,784	164,463
0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,154	2,112	2,509	3,284	134,774	121,242
0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,013	2,008	1,383	2,304	82,242	70,970
0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,001	2,001	1,117	2,082	54,051	45,904

mais reduzido do que o esquema \bar{Y}_{kl} , a diferença entre eles foi pequena. Logo, tanto um procedimento quanto o outro poderia ser usado (por exemplo, se $n < 30$ e $d = 0,01$).

Embora a melhoria obtida em termos de velocidade de detecção pelo procedimento \bar{Y}_{kl} tenha acontecido em um grande percentual dos resultados obtidos pela Tabela 3.2, para grandes deslocamentos da média (em uma margem na faixa de $|d| > 0,2$), esquema \bar{Y}_s apresenta-se melhor. Resultados similares pode ser observados considerando os valores de $\delta = \{0,5; 3; 10; 15; 20\}$ no Apêndice C.

Assim, os destaques aqui apontados mostram que o procedimento \bar{Y}_{kl} para o gráfico de controle de \bar{Y} com uso da regra de *Klein* apresenta-se como uma alternativa mais eficaz ao procedimento \bar{Y}_s para o gráfico de controle \bar{Y} , principalmente considerando pequenos e moderados deslocamentos da média.

3.4 Exemplo Numérico

Nessa Seção, ilustraremos o gráfico proposto a partir de um exemplo numérico adaptado a um conjunto de dados utilizado em estudos anteriores como em Pascual (2010), Nelson (1979), Ramalhoto e Morais (1999), Pascual e Zhang (2011), Faraz et al. (2015), Arif e Aslam (2018), Fernandes et al. (2019), Ho et al. (2022) e Vasconcelos et al. (2022). Esse conjunto de dados é reanalisado de modo a verificar se a média do processo mudou ou não. Os dados consistem da resistência à ruptura (em gigapascais) de fibras de carbono usadas na fabricação de materiais compósitos fibrosos. Eles são derivados de um estudo feito por pelo Laboratório de Tecnologia de Materiais do Exército dos EUA em *Watertown, Massachusetts*. Todos esses trabalhos assumiram os parâmetros δ e γ serem ambos conhecidos e respectivamente iguais a 4,8 e 3,2 resultando em uma média $\mu_0 = 2,9312$.

A Tabela 3.4 reproduz o conjunto de dados. Conforme descrito na Seção 3.3, obtemos $LCL = 0,363$ e $UCL = 1,923$ a partir de (3.6) calibrada em 370,4 (valor do ARL_0 igual a 370,4) e das probabilidades sob controle (3.1), (3.2) e (3.3). Na sequência, comparamos os limites de controle com o valor de \bar{Y} calculado para cada amostra. O objetivo aqui é verificar se a média do processo muda em relação a μ_0 .

Pela Tabela 3.4, até a 3^a amostra, o processo é julgado *sob controle* já que os pontos amostrais consecutivos \bar{Y}_{i-1} e \bar{Y}_i , com $i = \{1, 2, 3\}$, não ocorreram em torno da LM , entre o LCL e o UCL . Contudo, \bar{Y}_4 ocorreu acima do UCL . Nessa situação, não é possível ter uma decisão quanto ao estado do processo de produção. Então, o julgamento é considerado *indefinido* para \bar{Y}_4 e a linha de produção continua ocorrendo na sequência. Isso porque, pelo procedimento \bar{Y}_{kl} aqui proposto, para decidir se o processo está *sob*

Tabela 3.3: Conjunto de dados para o exemplo numérico e decisão, com $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\delta}{n}$.

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{y}	Decisão
1	3,7	2,74	2,73	2,5	3,6	1,003	<i>Sob controle</i>
2	3,11	3,27	2,87	1,47	3,11	0,694	<i>Sob controle</i>
3	4,42	2,41	3,19	3,22	1,69	1,406	<i>Sob controle</i>
4	3,28	3,09	1,87	3,15	4,90	2,141	<i>Indefinido</i>
5	3,75	2,43	2,95	2,97	3,39	1,020	<i>Sob controle</i>
6	2,96	2,53	2,67	2,93	3,22	0,623	<i>Indefinido</i>
7	3,39	2,81	4,2	3,33	2,55	1,418	<i>Sob controle</i>
8	3,31	3,31	2,85	2,56	3,56	0,987	<i>Sob controle</i>
9	3,15	2,35	2,55	2,59	2,38	0,419	<i>Indefinido</i>
10	2,81	2,77	2,17	2,83	1,92	0,366	<i>Fora de controle</i>
11	1,41	3,68	2,97	1,36	0,98	0,539	<i>Indefinido</i>
12	2,76	4,91	3,68	1,84	1,59	2,072	<i>Indefinido</i>
13	3,19	1,57	0,81	5,56	1,73	3,050	<i>Fora de controle</i>
14	1,59	2,00	1,22	1,12	1,71	0,041	<i>Indefinido</i>
15	2,17	1,17	5,08	2,48	1,18	1,932	<i>Indefinido</i>
16	3,51	2,17	1,69	1,25	4,38	1,257	<i>Sob controle</i>
17	1,84	0,39	3,68	2,48	0,85	0,464	<i>Indefinido</i>
18	1,61	2,79	4,70	2,03	1,80	1,412	<i>Sob controle</i>
19	1,57	1,08	2,03	1,61	2,12	0,065	<i>Indefinido</i>
20	1,89	2,88	2,82	2,05	3,65	0,645	<i>Sob controle</i>

controle ou *fora de controle* no tempo “ i ” vai depender do que ocorreu com a amostra imediatamente anterior, no tempo “ $i - 1$ ”. Logo, como $\bar{Y}_4 = 2,141 > 1,432 = UCL$ e $\bar{Y}_5 \in [LCL, UCL] = [0,640; 1,432]$, então a decisão para \bar{Y}_4 é *indefinida*, pois a decisão para \bar{Y}_3 foi *sob controle*). O processo segue então *sob controle* já que $\bar{Y}_5 \in [LCL, UCL]$. Na Figura 3.1 é possível identificar os pontos amostrais associados à decisão tomada conforme a regra do procedimento \bar{Y}_{kl} . Situações similares de julgamentos indefinidos são observadas também envolvendo as amostras \bar{Y}_i , com $i = \{6, 9, 12, 15, 17, 19\}$.

Conforme Tabela 3.4 e Figura 3.1, note que a decisão é *fora de controle* para \bar{Y}_{10} uma vez que trata-se do segundo ponto amostral consecutivo da sequência a ocorrer abaixo do LCL e $\bar{Y}_9 < LCL$. A mesma decisão *fora de controle* também ocorre para \bar{Y}_{13} (pois $\bar{Y}_{12} > UCL$ e $\bar{Y}_{13} > UCL$). Em ambos os casos, o processo de produção é pausado, ajustado e, então, reiniciado. Assim sendo, considerando os pontos amostrais \bar{Y}_{11} e \bar{Y}_{14} , o processo é julgado *indefinido* por serem o primeiro ponto amostral ocorrendo abaixo e acima dos limites de controle LCL e UCL , respectivamente, após um reajuste do processo. Com relação aos demais pontos amostrais na sequência observada (\bar{Y}_i , com $i = \{7, 8, 16, 18, 20\}$), o processo é declarado *sob controle*.

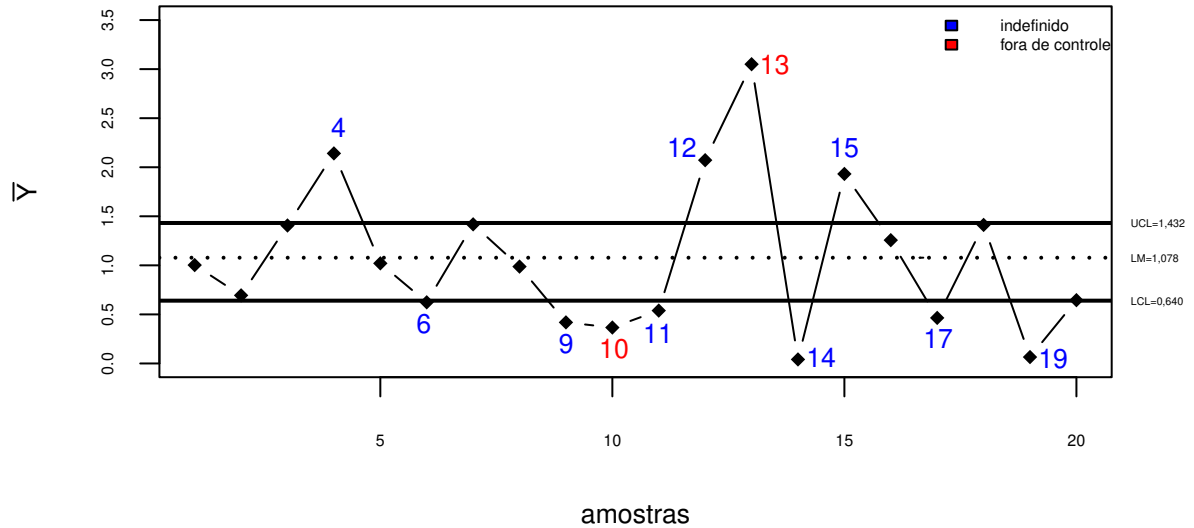


Figura 3.1: Exemplo Numérico para a Carta de Controle de \bar{Y} com uso da Regra *2-de-2* de *Klein*.

Para fins ilustrativo, caso o tamanho do deslocamento da média do processo seja de $d = -0,05$, usando o esquema \bar{Y}_{kl} obtemos um $ARL_1 = 56,625$ contra um $ARL_1 = 26,396$ caso o procedimento \bar{Y}_s seja utilizado. Portanto, o procedimento \bar{Y}_{kl} apresentou um melhor desempenho.

É possível então observar, a partir dos resultados obtidos, que um sinal *o.o.c* ocorre com maior velocidade considerando o uso do procedimento \bar{Y}_{kl} proposto por [Klein \(2000\)](#). Conforme apresentado no exemplo numérico da *Seção 5* do artigo de [Vasconcelos et al. \(2022\)](#), no procedimento \bar{Y}_s , quando esse é aplicado ao mesmo conjunto de dados aqui considerado, o primeiro sinal de desajuste da média do processo ocorre somente na 13^a amostra. Note que, conforme Tabela 3.4 e Fig. 3.1, o primeiro sinal de descontrole ocorre já na 10^a amostra, que corresponde ao segundo ponto amostral sequencial ocorrendo após a mudança. Isso indica que o esquema \bar{Y}_{kl} apresenta uma melhoria em comparação ao procedimento \bar{Y}_s , uma vez que esse último mostra-se com o pior desempenho quando aplicado ao conjunto de dados \bar{Y} da Tabela 3.4. Portanto, o procedimento proposto, \bar{Y}_{kl} , apresenta-se como uma boa alternativa para o procedimento \bar{Y}_s .

3.5 Considerações Importantes

A contribuição com a proposta da incorporação da regra *2-de-2* de *Klein* pelo gráfico de \bar{Y} proposto por [Vasconcelos et al. \(2022\)](#) é a melhoria quanto ao desempenho apresentado quando comparado com o desempenho do gráfico de controle padrão \bar{Y} . Embora para deslocamentos maiores da média do processo o ARL_1 obtido a partir do procedimento de \bar{Y} seja melhor, com a inclusão da regra proposta por [Klein \(2000\)](#), o procedimento \bar{Y}_{kl} mostrou-se mais eficiente considerando deslocamentos pequenos e moderados da média.

Capítulo 4

Sobre o uso das Regra Suplementar de *Khoo* pela Carta de Controle de \bar{Y}

No sentido de aumentar a sensibilidade de um gráfico de controle de *Shewhart* em detectar mais rapidamente pequenos deslocamentos da média de um processo de interesse, incorporar regras suplementares ao monitoramento pode ser uma boa estratégia. É objetivo nesse capítulo propor a inclusão da regra *2-de-2* de *Khoo*, apresentada por [Khoo e Ariffin \(2006\)](#), pelo Gráfico de Controle de \bar{Y} proposto por [Vasconcelos et al. \(2022\)](#). Os valores do *ARL* são calculados e uma avaliação com relação a grandes e pequenos deslocamentos da média do processo de interesse é realizada e discutida. Um exemplo numérico do gráfico de controle de \bar{Y} com a inclusão da regra de *Khoo* é apresentado.

4.1 Introdução

No sentido de contornar problemas envolvendo o impacto submetido ao erro tipo I com a inclusão de regras suplementares na tradicional Carta de Controle de \bar{X} de *Shewhart*, [Klein \(2000\)](#) sugere o uso de uma regra conhecida como *Regra 2-de-2*. A incorporação dessa regra pelo gráfico de controle de \bar{X} é possível por meio de uma cadeia de Markov finita, em que os limites de controle podem ser ajustados para fornecer um valor de ARL_0 desejado. Assim, o valor obtido do *ARL* para esse esquema é comparado com os obtidos por um gráfico padrão de *Shewhart* no sentido de verificar se, de fato, trata-se de um gráfico competitivo.

Pela regra *Regra 2-de-2* proposta por [Klein \(2000\)](#), para obter um sinal fora de controle (*out-of-control - o.o.c*) seriam necessários dois pontos amostrais sucessivos ocorrendo acima de um *limite de controle superior (UCL)* ou abaixo de um *limite inferior de controle (LCL)*. O *UCL* e *LCL* são escolhidos com base em um método apresentado para fornecer um erro Tipo I de nossa escolha.

Baseado no estudo descrito por [Ho et al. \(2022\)](#), propomos no Cap. 3 a inclusão da

regra 2-de-2 de Klein na Carta de Controle de \bar{Y} apresentada por Vasconcelos et al. (2022). Os resultados obtidos implicaram em uma melhora no seu desempenho quando comparado com o desempenho do gráfico de controle padrão de \bar{Y} proposto em Vasconcelos et al. (2022). Contudo, para maiores deslocamentos da média do processo, o gráfico de controle padrão de \bar{Y} (com uso da regra tradicional de Shewhart que requer somente um ponto para obter um sinal *o.o.c*) apresenta um melhor desempenho e, logo, pode ser usado. Isso se deve ao fato da regra 2-de-2 de Klein exigir pelo menos dois pontos antes que uma decisão sobre o estado de um processo possa ser tomada.

Com o propósito de contornar a dificuldade de detecção em grandes deslocamentos da média pelo gráfico de controle de \bar{X} de Shewhart com uso da regra 2-de-2 de Klein para processos normais apresentada em Klein (2000), Khoo e Ariffin (2006) propuseram a inclusão de uma nova regra no gráfico de controle de \bar{X} . Sua proposta envolve uma combinação da Regra 1-de-1 do tradicional gráfico de controle de \bar{X} de Shewhart com a Regra 2-de-2 proposta por Klein (2000). A regra 1-de-1 requer apenas um ponto para obter um sinal *o.o.c.* se o deslocamento da média do processo for grande o suficiente.

Na regra Regra 2-de-2 proposta por Khoo e Ariffin (2006) para processos com o pressuposto de normalidade dos dados, foi adicionado dois novos limites de controle entre os limites *LCL* e *UCL* denominados *LWL* (“*Lower Warning Limit*”) e *UWL* (“*Upper Warning Limit*”). Veja Figura 4.1 para uma ilustração. Um desajuste no processo pode ser sinalizado: (i) quando um ponto amostral ocorre acima do *UCL* ou abaixo do *LCL*; ou (ii) quando dois pontos amostrais consecutivos ocorrem entre *UWL* e *UCL*; ou (iii) quando dois pontos amostrais consecutivos ocorrem entre *LCL* e *LWL*.

Motivados por Khoo e Ariffin (2006), buscando uma melhoria na velocidade de detecção de grandes deslocamentos da média, é objetivo nesse capítulo de tese discutir o uso da Regra 2-de-2 de Khoo pela Carta de Controle de \bar{Y} proposta em Vasconcelos et al. (2022).

A organização desse capítulo segue estruturado da seguinte forma: essa seção introdutória, Seção 4.1, que faz uma breve revisão quanto ao uso de regras suplementares em processos normais e em processos ajustados pela distribuição Weibull; na Seção 4.2, a Carta de Controle de \bar{Y} com uso Regra 2-de-2 de Khoo é descrita; uma análise quanto ao impacto da inclusão da Regra 2-de-2 de Khoo no desempenho do gráfico de \bar{Y} é discutida e avaliada na Seção 4.3; A Seção 4.4 apresenta um exemplo numérico e considerações finais são pontuadas na Seção 4.5.

4.2 Regra 2-de-2 de *Khoo* aplicada à Carta de Controle de \bar{Y}

Seja uma variável aleatória X seguindo uma distribuição Weibull com parâmetros de forma δ e de escala γ , isto é, $X \sim \text{We}(\gamma, \delta)$. A *pdf* de X é dado por (1.1). Sua esperança e variância são também, respectivamente, como em (1.2), assim como a *CDF* é expressa por (1.3).

Tomando Y uma variável aleatória positiva tal que $Y = (X/\gamma)^\delta \sim \text{Exp}(1)$, com $\gamma > 0$, de forma que $X \sim \text{We}(\gamma, \delta)$. Sendo $Y_i, i = 1, \dots, n$, variáveis aleatórias i.i.d. tal que $Y_i \sim \text{Exp}(1)$, temos então que $Z = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \text{Gama}(n, 1)$, conforme descrito no Cap. 2. Dessa forma, diferentemente do estudo realizado em [Ho et al. \(2022\)](#), uma vez conhecida a distribuição da variável aleatória Z , é possível obter os limites de controle e os valores de *ARL* no caso do gráfico de controle de \bar{Y} sem a necessidade de um estudo de simulação.

Considerando a regra suplementar proposta por [Khoo e Ariffin \(2006\)](#), vimos que um sinal *o.o.c.* ocorre se um ponto amostral for plotado acima ou abaixo dos limites externos *UCL/LCL*, isto é, em $(-\infty, LCL)$ ou em $(UCL, +\infty)$. Ou ainda se ocorrerem dois pontos amostrais sequenciais em (LCL, LWL) ou em $[UWL, UCL)$, tal que *UWL/LWL* correspondem aos *limites internos*. A Figura 4.1 apresenta uma ilustração gráfica desses limites em uma carta de controle de \bar{Y} de *Shewhart*.

Assim sendo, considere um gráfico de controle como o representado pela Figura 4.1, denota-se:

- \mathbf{p}^k : a probabilidade de um único ponto amostral ocorrer entre o *LWL* e o *UWL*

$$\Rightarrow p^k = P[LWL \leq \bar{Y} \leq UWL | X_i \sim \text{We}(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n] \quad (4.1)$$

- \mathbf{p}_L^k : a probabilidade de um único ponto amostral ocorrer entre o *LWL* e o *LCL*

$$\Rightarrow p_L^k = P[LCL \leq \bar{Y} < LWL | X_i \sim \text{We}(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n] \quad (4.2)$$

- \mathbf{p}_U^k : a probabilidade de um único ponto amostral ocorrer entre o *UWL* e o *UCL*.

$$\Rightarrow p_U^k = P[UWL < \bar{Y} \leq UCL | X_i \sim \text{We}(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n] \quad (4.3)$$

- \mathbf{p}_{2L}^k : a probabilidade de um único ponto amostral ser plotado abaixo do *LCL*.

$$\Rightarrow p_{2L}^k = P[\bar{Y} < LCL | X_i \sim \text{We}(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n]; \quad (4.4)$$

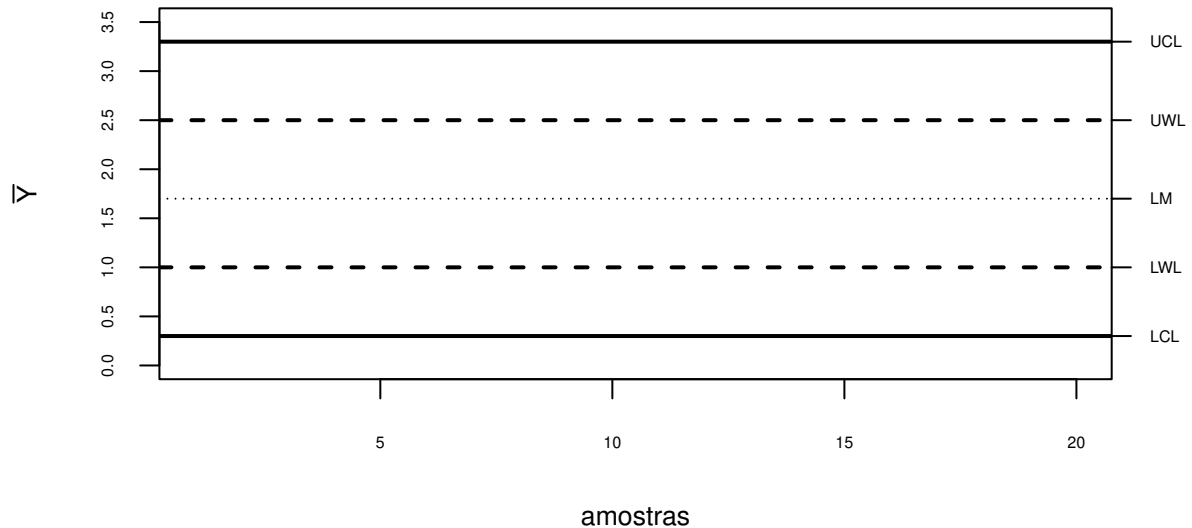


Figura 4.1: Limites de Controle para um Gráfico de Controle de \bar{Y} de *Shewhart* incorporando a regra *2-de-2* de *Khoo*.

- p_{2U}^k : a probabilidade de um único ponto ser plotado acima do UCL .

$$\Rightarrow p_{2U}^k = 1 - P[\bar{Y} < UCL | X_i \sim We(\mu_1 = \mu_0 \pm d, \delta), i = 1, \dots, n]; \quad (4.5)$$

Sejam \bar{Y}_{i-1} e \bar{Y}_i dois valores sequenciais de \bar{Y} . Similarmente como no Cap. 3, para cada amostra coletada no processo, \bar{Y} é calculado e comparado com os limites internos UWL/LWL e com os limites externos UCL/LCL . Conforme vimos anteriormente, a decisão quanto ao estado do processo avaliado baseia-se na sequência de dois valores sucessivos de \bar{Y} . Computados os valores de \bar{Y} , os limites LWL , UWL , LCL e UCL são calculados correspondendo, respectivamente, aos quantis q_L^k , q_U^k , q_{2L}^k e q_{2U}^k , satisfazendo:

$$Pr[q_{2L}^k < \bar{Y} \leq q_L^k] = p_L^k, \quad Pr[q_U^k < \bar{Y} \leq q_{2U}^k] = p_U^k,$$

$$Pr[\bar{Y} < q_{2L}^k] = p_{2L}^k \quad \text{e} \quad Pr[\bar{Y} > q_{2U}^k] = p_{2U}^k.$$

Com o objetivo de descrever a Carta de Controle de \bar{Y} com a regra de *Khoo*, considere uma *Cadeia de Markov* com sete estados de transição. O procedimento de decisão ou de inspeção pode ser descrito pelo espaço de estados $\mathcal{E}^k = \{C_k, L_{11}, U_{11}, L_{12}, U_{12}, L_{22}, U_{22}\}$. Os Estados C_k , L_{22} , U_{22} , U_{11} e L_{11} indicam que a sequência de \bar{Y} é de tamanho um, onde a variável C_k indica que $\bar{Y}_i \in [q_L^k, q_U^k]$; L_{22} indica que $\bar{Y}_i \in (-\infty, q_{2L}^k)$; e U_{22} indica que $\bar{Y}_i \in (q_{2U}^k, +\infty)$; L_{11} indica a ocorrência de um único ponto amostral entre o LCL e o LWL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [q_{2L}^k, q_L^k)$; U_{11} indica a ocorrência de um único ponto amostral entre

o UWL e o UCL , isto é, $\bar{Y}_i \in (q_U^k, q_{2U}^k]$. Os Estados L_{12}, U_{12} indicam que a sequência de \bar{Y} é de tamanho dois, onde a variável L_{12} indica a ocorrência de dois valores amostrais sucessivos de \bar{Y} entre o LCL e o LWL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [q_{2L}^k, q_L^k]$ e $\bar{Y}_i \in [q_{2L}^k, q_L^k]$; e a variável U_{12} indica a ocorrência de dois valores amostrais sucessivos de \bar{Y} entre o UWL e o UCL , ou seja, $\bar{Y}_i \in (q_U^k, q_{2U}^k]$ e $\bar{Y}_{i-1} \in (q_U^k, q_{2U}^k]$.

A matriz de transição \mathbf{W} pode ser escrita como em (4.6) com as respectivas probabilidades de transição entre os sete estados transitórios da cadeia de Markov. Os valores das probabilidades condicional dessa matriz são como em (4.2), (4.3), (4.4), (4.4) e (4.5). Assim como em Khoo e Ariffin (2006), sob a hipótese nula (H_0), tomamos $p_{2U}^k = p_{2L}^k$ e $p_U^k = p_L^k$. Devido ao fato de que deve-se satisfazer a condição $p + p_U^k + p_L^k + p_{2U}^k + p_{2L}^k = 1$, e das informações anteriores, facilmente obtemos o ARL sob controle, ARL_0 . Para tanto, antes é preciso expressar a distribuição estacionária da cadeia de Markov aqui considerada.

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c|ccccccc} & C_k & U_{22} & U_{11} & U_{12} & L_{11} & L_{12} & L_{22} \\ \hline C_k & p^k & p_{2U}^k & p_U^k & 0 & p_L^k & 0 & p_{2L}^k \\ U_{22} & p^k & p_{2U}^k & p_U^k & 0 & p_L^k & 0 & p_{2L}^k \\ U_{11} & p^k & p_{2U}^k & 0 & p_U^k & p_L^k & 0 & p_{2L}^k \\ U_{12} & p^k & p_{2U}^k & p_U^k & 0 & p_L^k & 0 & p_{2L}^k \\ L_{11} & p^k & p_{2U}^k & p_U^k & 0 & 0 & p_L^k & p_{2L}^k \\ L_{12} & p^k & p_{2U}^k & p_U^k & 0 & p_L^k & 0 & p_{2L}^k \\ L_{22} & p^k & p_{2U}^k & p_U^k & 0 & p_L^k & 0 & p_{2L}^k \end{array} \quad (4.6)$$

Assim sendo, na matriz \mathbf{W} , a probabilidade p^k , por exemplo, representa a probabilidade condicional tal que, na próxima inspeção (no Estado E_i), o processo estará no estado (C_k), ou seja, $q_L^k < \bar{Y}_i < q_U^k$, dado que na inspeção anterior (no Estado E_{i-1}) ele estava no estado (U_{22}), ou seja, $\bar{Y}_{i-1} > q_{2U}^k$. Em outras palavras, p^k indica a probabilidade de produzir um item na RC (entre o LWL e o UWL) no tempo (i) dado que um item foi produzido acima do UCL no tempo imediatamente anterior ($i - 1$). Vale ressaltar que para a obtenção da matriz de transição, é necessário considerar que: quando o processo é declarado fora de controle, o processo é pausado, ajustado e, na sequência, reiniciado.

A matriz de transição \mathbf{W} é irredutível, aperiódica e \mathbf{W}^{t^*} converge para uma matriz na qual cada linha é uma distribuição estacionária $\mathbf{\Pi}^k = [\pi_1^k, \pi_2^k, \pi_3^k, \pi_4^k, \pi_5^k, \pi_6^k, \pi_7^k]$, quando $t^* \rightarrow \infty$, desde que π_i^k seja estritamente positivo ($\pi_{j^*}^k > 0, \forall j^* \in \mathbb{R}$). Cada elemento π_i^k , $i = 1, 2, \dots, 7$ está associado com um único estado de \mathbf{W} . O vetor $\mathbf{\Pi}^k$ pode ser obtido a partir da solução do sistema linear de equações $\mathbf{\Pi}^k = \mathbf{\Pi}^k \times \mathbf{W}$, sujeito à restrição de que a soma dos seus elementos deve ser igual a um. Resolvendo o sistema, sob a hipótese nula (H_0), os elementos do vetor $\mathbf{\Pi}^k$ são dados por:

$$\pi_1^k = p^k \quad ; \quad \pi_2^k = p_U^k \quad ; \quad \pi_3^k = \frac{p_{2U}^k}{1 + p_{2U}^k} \quad ; \quad \pi_4^k = \frac{(p_{2U}^k)^2}{1 + p_{2U}^k}$$

$$\pi_5^k = \frac{p_{2L}^k}{1 + p_{2L}^k} = \frac{p_{2U}^k}{1 + p_{2U}^k} ; \quad \pi_6^k = \frac{(p_{2L}^k)^2}{1 + p_{2L}^k} = \frac{(p_{2U}^k)^2}{1 + p_{2U}^k}; \quad \pi_7^k = p_L^k = p_U^k.$$

Os valores π_2^k , π_4^k , π_6^k e π_7^k indicam a probabilidade de longo prazo associada aos estados que demandam ajustes no processo uma vez que a média do processo foi alterada. Assim, o número médio de amostras até que o gráfico de controle produza um sinal pode ser expresso como:

$$\mathbb{E}(\mathcal{E}^k | d) = \frac{1}{\pi_2^k + \pi_4^k + \pi_6^k + \pi_7^k} = \frac{1 + p_{2U}^k}{2[p_U^k + p_U^k p_{2U}^k + (p_{2U}^k)^2]} \quad (4.7)$$

Para usar a regra *2-de-2* de *Khoo*, primeiro é necessário fixar os valores dos limites externos (*UCL/LCL*). Os valores de *UCL/LCL* devem ser maiores que a largura $\pm 3\sigma$ se o ARL_0 desejado é o valor de 370,4. Na sequência, deve-se determinar os limites internos *UWL/LWL* usando as fórmulas derivadas de uma Cadeia de Markov com base nos valores de *UCL/LCL* que foram fixados. A média do processo *sob controle* é expressa por μ_0 e $\mu_1 = \mu_0 \times (1 + d)$ representa a média *fora de controle*, onde d é o tamanho do deslocamento da média (que pode ser *positivo* para um aumento com relação à μ_0 ou pode ser *negativo* para uma redução). Vale ressaltar que para obter os limites de controle e os valores de *ARL* temos que $\mu_1/\mu_0 = (1 + d)^{-1}$, o que equivale à razão $\gamma_1/\gamma_0 = (1 + d)^{-1}$. Assim como em [Vasconcelos et al. \(2022\)](#), assume-se que o parâmetro de forma δ não se altera.

Os seguintes passos descrevem o procedimento \bar{Y}_{kh} (*Khoo's supplementary run rules*):

- P1) Fixamos os valores dos limites externos (ou seja, *UCL/LCL*). Os valores devem ser maiores que a largura $\pm 3\sigma$;
- P2) Determinar os limites internos de *UWL/LWL* usando fórmulas derivadas de uma abordagem de cadeia de Markov com $\mathcal{E} = \{C_k, L_{11}, U_{11}, L_{12}, U_{12}, L_{22}, U_{22}\}$;
- P3) O valor esperado (conforme (4.7)) do primeiro tempo de passagem do estado inicial (sob controle) para o estado fora de controle é igual ao *ARL* sob controle, ARL_0 , com $d = 0$ (em geral calibrado em 370,4 para corresponder ao *ARL* sob controle do tradicional gráfico de controle de *Shewhart*). Para valores de deslocamento tal que $d \neq 0$, o cálculo dos valores de ARL_1 requer o recálculo das probabilidades (4.2), (4.3), (4.4), (4.4) e (4.5), modificado para levar em conta a mudança na distribuição Weibull em relação aos limites de controle obtidos;

Para ilustrar como obter os limites da regra *2-de-2* de *Khoo*, considere o seguinte exemplo para um processo ajustado pela distribuição Weibull baseado na distribuição Gama com $n = 5$, $\delta = 3$, $d = -0,1$ e $\mu_0 = 3,572$. Então, $\gamma_0 = 4,00$ e $\gamma_1 = \gamma_0 * (1 + d) = 3,60$. Definimos $ARL_0 = 370,4$ e os limites externos $UCL/LCL = \pm 3,5\sigma$. Uma abordagem

inicial é utilizar o *software R* (R Core Team, 2023), fazendo $p_{2L}^k = pnorm((-3, 5), 0, 1) = 0,00023$. Logo, computacionalmente obtemos $LCL = qgamma((0, 00023), 5, 1)/5 = 0,107$ e $UCL = qgamma((1 - 0,00023), 5, 1)/5 = 3,344$. Substituindo os valores de p_U^k e p_{2U}^k na Eq. (4.7) e a resolvendo, encontramos como solução da equação de 2º grau $p_L^k = p_U^k = 0,034$. Assim, podemos então obter os limites internos, de modo que $LWL = qgamma((0, 00023 + 0,034), 5, 1)/5 = 0,354$ e $UWL = qgamma([1 - (0,00023 + 0,034)], 5, 1)/5 = 1,951$.

Para um deslocamento de $d = -0,1$ em (4.7) e considerando (2.7) e (2.8), obtemos, por exemplo, p_{2L}^k a partir de $p_{2L}^k = pgamma(5 * (0,107) * ((4,00/3,60)^3), 5, 1) = 0,001$. Os valores de p_{2U}^k , p^k , p_U^k e p_L^k são obtidos analogamente, com adequações conforme (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5), respectivamente. Logo, obtemos então um $ARL_1 = 102,360$.

É importante destacar que os valores de ARL também podem ser determinados utilizando procedimentos analíticos e com auxílio computacional, pois as probabilidades p^k , p_{2L}^k , p_{2U}^k , p_L^k e p_U^k , na matriz \mathbf{W} são encontradas computacionalmente pela sua simplicidade de implementação (já que a distribuição de Z é conhecida) e, posteriormente, usadas analiticamente em $\mathbf{\Pi}^k$ para determinar o ARL .

4.3 Análise do desempenho da carta de controle de \bar{Y} com uso da Regra Suplementar de *Khoo*

Nessa Seção, o objetivo é avaliar o desempenho do gráfico de controle de \bar{Y} com uso da regra suplementar 2-de-2 de *Khoo* (procedimento \bar{Y}_{kh} - *Khoo's supplementary run rules*) com respeito ao gráfico de controle de \bar{Y} proposto por Vasconcelos et al. (2022) (procedimento \bar{Y}_s - *standard \bar{Y} chart* de 3σ). Adicionalmente, também é objetivo comparar seu desempenho com o gráfico de controle de \bar{Y} com uso da regra 2-de-2 de *Klein* (procedimento \bar{Y}_{kl} - *Klein's supplementary run rules*) proposto no artigo descrito no Cap. 3.

Esse estudo foi conduzido considerando os valores de $n = \{3; 5; 10; 30; 100\}$, $\delta = \{0, 5; 3; 5; 10; 15; 20\}$ e $d = \{\pm 0,01; \pm 0,05; \pm 0,1; \pm 0,2; \pm 0,3; \pm 0,4; \pm 0,6; \pm 0,8\}$. Os conjuntos n , δ e d contém os valores utilizados em Vasconcelos et al. (2022) para fins comparativos. A escolha para o parâmetro forma δ são aqueles descritos em muitos estudos práticos como em Jiang e Murthy (2011), Rinne (2008) e Abbas (2018). Como o parâmetro de forma δ é considerado fixo, então o parâmetro $(1 + d)$ pode ser interpretado como a mudança na média quando o processo sai de controle devido a um aumento do seu valor ($d > 0$) ou uma redução ($d < 0$). O valor de ARL associado a um deslocamento de valor zero equivale ao processo sob controle. As mudanças na média do processo, medidas

em d , são consideradas repentinas e sustentadas. Todos os parâmetros dos gráficos de controle são considerados ter ARL_0 calibrado em 370,4 para os procedimentos \bar{Y}_s , \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} . Logo, para cada regra implementada, diferentes valores de UCL/LCL podem ser considerados. Para todos os cálculos, supõe-se que os pontos \bar{Y} plotados no gráfico de controle são obtidos a partir de uma amostra aleatória de tamanho n da variável X com distribuição Weibull.

A Tabela 4.1 apresenta o desempenho do gráfico de controle proposto (procedimento \bar{Y}_{kh}) combinado aos valores de δ considerando $n = 5$ e $UCL/LCL = \pm 3,5\sigma$ (σ : desvio padrão do processo). Seu desempenho em termos dos valores do ARL_1 é apresentado concomitante com o desempenho dos gráficos que consideram os esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} conforme o deslocamento bidirecional da média, d . Os valores em negrito indicam qual procedimento que apresentou o melhor desempenho dentre os três indicados e os valores em itálico representam o segundo melhor desempenho.

Avaliando individualmente o desempenho do gráfico de controle proposto com o procedimento \bar{Y}_{kh} , à medida que aumenta $|d|$, o ARL_1 tende a um (como esperado e também como observado no procedimento \bar{Y}_s). Isso ocorre devido a regra 2-de-2 de Khoo envolver na sua estrutura a regra 1-de-1 do gráfico de controle padrão de \bar{Y} . Embora se note que o ARL de \bar{Y}_s tende a um mais rapidamente do que o ARL_1 de \bar{Y}_{kh} , a diferença entre um valor e outro é muito pequena.

De acordo com Tabela 4.1, conforme δ diminui, os valores ARL_1 do procedimento \bar{Y}_{kh} aumentam, o que implica em uma maior dificuldade para detectar deslocamentos da média. Alguns valores de ARL_1 são maiores do que o ARL_0 quando $d < 0$, indicando que esse tipo de mudança da média do processo poderá nem ser sinalizado ($\delta = \{3, 5\}$ e $d = -0,01$; $\delta = 0,5$ e $-0,10 \leq d \leq -0,01$). Um outro fato interessante observado é que para o mesmo tamanho do deslocamento absoluto, $|d|$, a sinalização de um desajuste é mais rápida para deslocamentos positivos da média do processo. Por exemplo: para $d = -0,01$, o ARL_1 para o procedimento \bar{Y}_{kh} é de 200,816 e para $d = 0,01$, o ARL_1 foi de 88,472. Além disso, a cada aumento do valor de δ , o valor do ARL do \bar{Y}_{kh} tende a um à medida que o valor de $|d|$ diminui, assim como ocorre com os valores do ARL_1 do esquema \bar{Y}_s .

Quando comparamos o desempenho dos gráficos com os procedimentos \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} com o desempenho obtido usando o esquema aqui proposto, note pela Tab. 4.1 que, no geral, o procedimento \bar{Y}_{kh} apresenta maior agilidade de sinalização frente a um desajuste no processo. Observe que, tanto para grandes deslocamentos bidirecionais da média ($|d| > 0$) quanto para pequenos deslocamentos positivos da média ($d > 0$), o procedimento \bar{Y}_{kh} é melhor. Contudo, para pequenas mudanças negativas da média ($d < 0$), o procedimento \bar{Y}_{kl} segue tendo melhor desempenho dentre os três procedimentos avaliados. Por exemplo: para $d = 0,01$, o ARL_1 para o procedimento \bar{Y}_{kh} foi de 88,472, enquanto que o do \bar{Y}_{kl} foi de 94,328 e do \bar{Y}_s foi de 107,233. Assim, concluímos que, nesse cenário, o desempenho da

Tabela 4.1: Valores de ARL considerando dos procedimentos \bar{Y}_s , \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} , com $n = 5$.

δ	20			15			10			5			3			0.5		
	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}
-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	29,135	9,466	9,941
-0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,082	108,866	43,733	46,773
-0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,185	2,000	1,185	3,266	2,265	2,152	245,936	137,739	145,850
-0,30	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,831	2,053	1,831	11,798	4,343	4,433	326,720	218,344	228,795
-0,20	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,001	1,165	2,001	1,445	3,983	3,925	3,983	47,949	16,054	17,040	390,864	312,234	322,855
-0,10	1,286	2,003	1,554	2,932	2,202	2,071	12,438	4,515	4,617	82,978	30,855	82,969	192,993	96,152	102,360	408,283	378,472	385,133
-0,05	13,612	4,833	4,959	33,109	10,772	11,348	87,625	33,049	35,325	244,921	136,871	144,948	352,713	251,125	262,002	395,246	384,601	387,983
-0,01	302,085	190,962	200,816	355,909	255,516	266,425	398,149	327,808	338,052	407,697	379,852	386,247	398,403	385,057	389,024	376,121	374,692	375,344
0,01	107,233	94,328	88,472	155,033	141,778	134,965	220,519	211,772	204,747	298,814	299,085	293,965	329,843	332,425	328,985	364,371	365,477	364,846
0,05	2,707	3,455	2,604	5,550	5,834	4,737	16,416	14,590	12,639	77,055	66,255	61,336	158,342	145,188	138,333	337,935	340,700	337,816
0,10	1,071	2,047	1,110	1,359	2,283	1,446	2,857	3,584	2,721	17,452	15,423	13,401	57,130	48,574	44,435	302,159	302,764	297,795
0,20	1,000	2,000	1,000	1,003	2,001	1,005	1,095	2,065	1,143	3,174	3,854	2,967	12,136	11,154	9,515	233,079	225,683	218,784
0,30	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,004	2,002	1,008	1,531	2,432	1,615	4,586	5,038	4,027	176,784	164,463	157,431
0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,154	2,112	1,219	2,509	3,284	2,447	134,774	121,242	114,758
0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,013	2,008	1,023	1,383	2,304	1,471	82,242	70,970	65,870
0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,001	2,001	1,002	1,117	2,082	1,172	54,051	45,904	41,899

regra de *Khoo* foi melhor. Por outro lado, para $d = -0,01$, o ARL_1 para o procedimento \bar{Y}_{kl} foi de 190,962, enquanto que o do \bar{Y}_{kh} foi de 200,816 e do \bar{Y}_s foi de 302,085. Logo, a regra de *Klein* apresentou melhor desempenho.

Isso significa que o procedimento \bar{Y}_{kh} , além de ser eficiente para grandes desajustes da média, apresenta-se também eficiente para pequenos deslocamentos em uma faixa considerável de valores positivos e pequenos de $|d|$, superando a velocidade de sinalização nessa faixa pelo esquema \bar{Y}_{kl} . Além disso, esse desempenho melhora à medida que aumenta o valor de δ . Todavia, é possível notar que para um grande valor de δ como, por exemplo, $\delta = \{15, 20\}$ e $d = \{-0,05, -0,01\}$, notamos que os valores ARL_1 do \bar{Y}_{kl} e do \bar{Y}_{kh} são muito próximos. Nessa situação, ambos os gráficos podem ser usados.

Ainda na Tab. 4.1, os casos em que o procedimento \bar{Y}_s apresenta melhor desempenho (menor ARL_1), a diferença em eficiência considerando o segundo melhor desempenho, no caso, do procedimento \bar{Y}_{kh} , também é pequena ($\delta = 0,5$ e $d = 0,01$).

Análises similares considerando $n = 5$ podem ser constatadas considerando outros tamanhos amostrais envolvendo o desempenhos dos três procedimentos aqui estudados (tabelas anexadas no Apêndice D). A Tabela 4.2 apresenta os valores de ARL obtidos para os procedimentos \bar{Y}_s , \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} considerando os valores de n , d e $\delta = 10$.

Considerando o procedimento \bar{Y}_{kh} , note que no que se refere aos alarmes verdadeiros, no geral eles podem ser antecipados em relação ao procedimento \bar{Y}_s , para qualquer tamanho de amostra (n). Empates ou mesmo valores próximos e tendendo a um são para $|d| > 0,05$ à medida que aumenta o tamanho da amostra, n . Vale destacar que, embora o esquema \bar{Y}_s sinalize mais rapidamente que \bar{Y}_{kh} para valores maiores de n , os valores do ARL_1 são similares e, logo, tanto um quanto o outro podem ser adotados.

Para grandes deslocamentos da média, o esquema \bar{Y}_s também apresenta-se mais rápido em sinalizar o desajuste do que o procedimento \bar{Y}_{kh} quando $|d| > 0,20$. Contudo, ainda aqui, os valores de ARL_1 de ambos os procedimentos mostram-se muito próximos. Já com relação ao esquema \bar{Y}_{kl} , o procedimento \bar{Y}_{kh} supera suas dificuldades em sinalizar um *o.o.c.* (por exemplo, considerando $|d| > 0,3$), uma vez que os valores do ARL_1 para o \bar{Y}_{kl} tende a dois e para o \bar{Y}_{kh} tende a um.

Observamos também na Tabela 4.2 situações em que tanto o procedimento \bar{Y}_s quanto o \bar{Y}_{kh} podem nunca sinalizar um desajuste considerando pequenas amostras e pequenos deslocamentos da média ($d < 0$ e $n < 5$). Contudo, ainda nesses casos, o procedimento \bar{Y}_{kh} apresenta uma melhora com relação ao esquema \bar{Y}_s , embora o procedimento \bar{Y}_{kl} tenha um desempenho mais eficaz nessa situação.

Conclusões similares também podem ser observadas considerando outros valores δ (ver em Apêndice D). Assim sendo, quando comparamos os desempenhos relacionados aos procedimentos \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} , podemos concluir que no geral (considerando os cenários analisados) o esquema \bar{Y}_{kh} aponta como melhor (com menor ARL_1). Em destaque, temos que o procedimento \bar{Y}_{kh} sinaliza mais rapidamente para grandes valores de d em qualquer

Tabela 4.2: Valores de ARL 's dos esquemas \bar{Y}_s , \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} considerando os valores de d e de n , para $\delta = 10$.

δ	d	$n = 3$			$n = 5$			$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$		
		\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}
10	-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,30	1,021	2,000	1,228	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,20	3,169	2,111	2,023	1,165	2,001	1,445	1,000	2,000	1,001	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,10	41,979	11,255	12,082	12,438	4,515	4,617	2,549	2,261	2,053	1,004	2,000	1,026	1,000	2,000	1,000
	-0,05	176,507	73,809	79,900	87,625	33,049	35,325	26,561	10,530	10,848	3,231	2,676	2,434	1,022	2,001	1,075
	-0,01	433,110	376,211	387,192	398,149	327,808	338,052	325,719	243,696	251,653	176,718	109,915	113,106	53,191	28,455	28,674
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	239,633	239,536	231,325	220,519	211,772	204,747	184,284	163,234	158,278	107,573	80,323	78,150	36,659	23,620	22,749
	0,05	26,184	24,536	21,112	16,416	14,590	12,639	7,752	6,962	5,993	2,153	2,671	2,088	1,026	2,004	1,064
	0,10	4,727	5,554	4,287	2,857	3,584	2,721	1,547	2,365	1,631	1,012	2,002	1,028	1,000	2,000	1,000
	0,20	1,347	2,328	1,426	1,095	2,065	1,143	1,004	2,001	1,008	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,30	1,048	2,041	1,071	1,004	2,002	1,008	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,40	1,007	2,005	1,011	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	LWL	0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,54	0,7	0,694	0,726	0,829	0,826
	UWL	3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,637	1,348	1,357	1,327	1,185	1,190
	LCL	-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	-	-	0,482	-	-	0,687
	UCL	-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	-	-	1,766	-	-	1,388

direção e também para deslocamentos positivos ($d > 0$) em diversos cenários, comparado tanto para o procedimento \bar{Y}_{kh} quanto para o \bar{Y}_s . Já o procedimento \bar{Y}_{kl} é mais veloz para deslocamentos negativos pequenos e moderados da média. Isso pode ser notado à medida que δ diminui e menor é o tamanho da amostra. Todos esse resultados analisados e aqui discutidos implicam em uma contribuição relevante quanto ao uso da regra *2-de-2* de *Khoo* pelo gráfico de controle de \bar{Y} uma vez que o mesmo aponta para um ganho em velocidade de sinalização de desajustes do processo. Assim, podemos concluir que a inclusão da regra *2-de-2* de *Khoo* pelo gráfico de controle de \bar{Y} proposto por [Vasconcelos et al. \(2022\)](#) faz desse um gráfico com potencial competitivo na detecção de deslocamentos do parâmetro média ajustados pela distribuição Weibull.

4.4 Exemplo Numérico

Nessa Seção, ilustraremos o gráfico proposto a partir de um exemplo numérico adaptado a um conjunto de dados utilizado em estudos anteriores como em [Pascual \(2010\)](#), [Nelson \(1979\)](#), [Ramalhoto e Morais \(1999\)](#), [Pascual e Zhang \(2011\)](#), [Faraz et al. \(2015\)](#), [Arif e Aslam \(2018\)](#), [Fernandes et al. \(2019\)](#), [Ho et al. \(2022\)](#) e [Vasconcelos et al. \(2022\)](#). Esse conjunto de dados é reanalisado de modo a verificar se existe um indicativo que a média do processo mudou ou não. Os dados consistem da resistência à ruptura (em gigapascas) de fibras de carbono usadas na fabricação de materiais compósitos fibrosos. Eles são derivados de um estudo feito pelo Laboratório de Tecnologia de Materiais do Exército dos EUA em *Watertown, Massachusetts*. Todos esses trabalhos assumiram os parâmetros δ e γ serem ambos conhecidos e respectivamente iguais a 4,8 e 3,2 resultando em uma média $\mu_0 = 2,931$.

A Tabela 4.4 reproduz o conjunto de dados. Conforme descrito na Seção 4.2, obtemos $LCL = 0,397$ e $UCL = 1,974$, assim como $LWL = 0,633$ e $UWL = 1,445$ a partir de (4.7) calibrada em 370,4 (valor do ARL_0 decorrente de $\alpha = 0,0027$) e das probabilidades sob controle em (4.2), (4.3), (4.4), (4.4) e (4.5). Na sequência, comparamos com os limites de controle com o valor de \bar{Y} calculado para cada amostra. O objetivo aqui é verificar se a média do processo muda com relação a μ_0 .

Pela Tabela 4.4, até a 3^a amostra, o processo é declarado *sob controle* uma vez que \bar{Y}_i e \bar{Y}_{i-1} , para $i = \{1, 2, 3\}$, não atende os requisitos para um sinal *o.o.c* considerando o procedimento proposto \bar{Y}_{kh} . Isso significa que até a 3^a amostra, não observamos um único item amostral inspecionado ocorrendo abaixo do LCL ou acima do UCL , ou seja, $\bar{Y}_i \in [LWL, UWL] = [0,633; 1,078]$, com $i = \{1, 2, 3\}$. Além disso, também não observamos dois pontos sequenciais ocorrendo em $[LCL, LWL)$ ou em $(UWL, UCL]$.

Tabela 4.3: Conjunto de dados para o exemplo numérico e decisão, com $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\delta}{n}$.

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{y}	Decisão
1	3,7	2,74	2,73	2,50	3,60	1,003	<i>Sob controle</i>
2	3,11	3,27	2,87	1,47	3,11	0,694	<i>Sob controle</i>
3	4,42	2,41	3,19	3,22	1,69	1,406	<i>Sob controle</i>
4	3,28	3,09	1,87	3,15	4,9	2,141	<i>Fora de controle</i>
5	3,75	2,43	2,95	2,97	3,39	1,020	<i>Sob controle</i>
6	2,96	2,53	2,67	2,93	3,22	0,623	<i>Indefinido</i>
7	3,39	2,81	4,20	3,33	2,55	1,418	<i>Sob controle</i>
8	3,31	3,31	2,85	2,56	3,56	0,987	<i>Sob controle</i>
9	3,15	2,35	2,55	2,59	2,38	0,419	<i>Indefinido</i>
10	2,81	2,77	2,17	2,83	1,92	0,366	<i>Fora de controle</i>
11	1,41	3,68	2,97	1,36	0,98	0,539	<i>Indefinido</i>
12	2,76	4,91	3,68	1,84	1,59	2,072	<i>Fora de controle</i>
13	3,19	1,57	0,81	5,56	1,73	3,050	<i>Indefinido</i>
14	1,59	2,00	1,22	1,12	1,71	0,041	<i>Fora de controle</i>
15	2,17	1,17	5,08	2,48	1,18	1,932	<i>Indefinido</i>
16	3,51	2,17	1,69	1,25	4,38	1,257	<i>Sob controle</i>
17	1,84	0,39	3,68	2,48	0,85	0,464	<i>Indefinido</i>
18	1,61	2,79	4,70	2,03	1,80	1,412	<i>Sob controle</i>
19	1,57	1,08	2,03	1,61	2,12	0,065	<i>Fora de controle</i>
20	1,89	2,88	2,82	2,05	3,65	0,645	<i>Sob controle</i>

Contudo, note que \bar{Y}_4 ocorre acima do UCL . Nessa situação, a decisão é *fora de controle*. O processo é assim declarado no tempo $i = 4$ pois, pelo esquema \bar{Y}_{kh} , um dos critérios para a ocorrência de um sinal *o.o.c.* é que ocorra um único ponto amostral abaixo do LCL ou acima do UCL . Nesse caso, em particular, temos que \bar{Y}_4 corresponde ao primeiro ponto amostral na sequência a ocorrer acima do UCL , isto é, $\bar{Y}_4 = 2,141 > 1,974 = UCL$. Uma vez que o processo é declarado *fora de controle*, o mesmo é então pausado, ajustado e, então, reiniciado. Analogamente, o processo também é declarado como *fora de controle* considerando as amostras $\bar{Y}_i = \{10, 12, 13, 14, 19\}$. Já com relação às amostras observadas \bar{Y}_i , com $i = \{5, 7, 8, 16, 18, 20\}$, o processo é julgado *sob controle*. Na Figura 4.2 é possível identificar os pontos amostrais que culminaram na uma decisão do processo ser declarado *fora de controle*.

Ainda conforme Tabela 4.4 e Figura 4.2, note que a 6^a amostra é tal que $\bar{Y}_6 = 0,623 \in [LCL, LWL) = [0,397; 0,633)$. Isso indica que \bar{Y}_6 é o primeiro ponto amostral a ocorrer entre o LCL e o LWL . Pelo procedimento \bar{Y}_{kh} , um sinal *o.o.c.* também ocorre quando dois pontos amostrais consecutivos ocorrerem em $[LCL, LWL)$ ou em $(UWL, UCL]$. Contudo, apesar de $\bar{Y}_6 \in [LCL, UCL)$, observe que a 5^a amostra que corresponde ao ponto

amostral observado no tempo “ $i - 1$ ” é tal que $\bar{Y}_5 \in [LWL, UWL]$. Nessa situação, não é possível tomar uma decisão quanto ao estado do processo de produção. O julgamento é então dado como *indefinido* e a linha de produção continua sendo realizada na sequência. Similarmente, a decisão é também declarada *indefinida* considerando os pontos amostrais \bar{Y}_i , com $i = \{9, 17\}$. Vale destacar que com relação aos pontos amostrais \bar{Y}_i , com $i = \{11, 15\}$, a decisão do processo também é *indefinida* por essas amostras corresponderem ao primeiro ponto amostral a ocorrer após um ajuste do processo ocorrido no tempo imediatamente anterior.

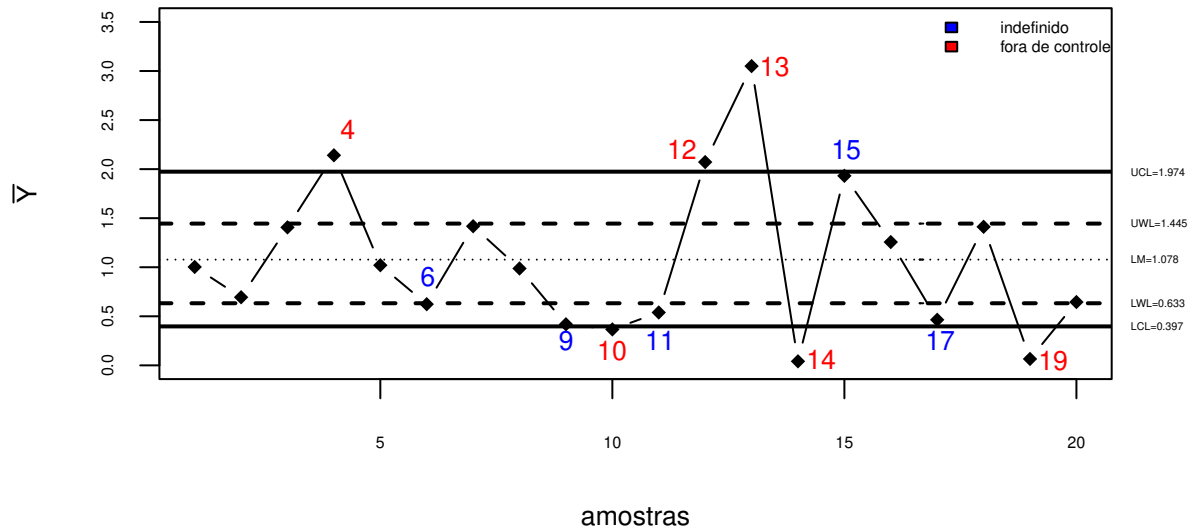


Figura 4.2: Exemplo Numérico para a Carta de Controle de \bar{Y} com uso da Regra 2-de-2 de *Khoo*.

Para fins ilustrativo, caso o tamanho do deslocamento da média do processo seja de $d = 0,05$, usando o procedimento \bar{Y}_{kl} obtemos um $ARL_1 = 25,858$ e um $ARL_1 = 18,715$ com o procedimento \bar{Y}_{kl} enquanto que para o procedimento aqui proposto \bar{Y}_{kh} obtemos um $ARL_1 = 17,474$. Logo, o procedimento \bar{Y}_{kh} apresentou um melhor desempenho.

Pelos resultados aqui obtidos, é possível observar que o procedimento \bar{Y}_{kh} sinaliza um *o.o.c.* mais rapidamente no primeiro ponto após a mudança na média do processo para magnitudes maiores dos limites de controle (ou mesmo para grandes deslocamentos da média). Em [Vasconcelos et al. \(2022\)](#), no exemplo numérico apresentado na *Seção 5* e que usa o mesmo conjunto de dados aqui considerado, observe que o primeiro sinal *o.o.c.* ocorre somente na 13^a amostra com o esquema \bar{Y}_s . Já no Cap. 3, *Seção 3.4*, também utilizando o mesmo conjunto de dados, um sinal *o.o.c.* ocorre na 10^a amostra, sendo mais rápido na detecção da mudança da média do que o gráfico de controle com uso do procedimento

\bar{Y}_{kl} proposto por Klein (2000). Contudo, note que pela Tabela 4.4 e Fig. 4.2, a primeira mudança no processo já ocorre na 4^a amostra. Essa é uma melhoria em comparação com o procedimento \bar{Y}_s e, também, com o procedimento \bar{Y}_{kl} , onde a detecção mais rápida de um sinal *o.o.c* ocorre somente no segundo ponto amostral sequencial, após a mudança no processo. Vale destacar que o procedimento \bar{Y}_s mostra-se com o pior desempenho quando aplicado ao conjunto de dados \bar{Y} da Tabela 4.4. Logo, o procedimento proposto \bar{Y}_{kh} apresenta-se como uma boa alternativa, tanto para o procedimento \bar{Y}_{kl} , quanto para o esquema \bar{Y}_s .

4.5 Considerações Importantes

A regra *2-de-2* de Khoo apresenta similar ou melhor desempenho quando seus valores obtidos de *ARL* são comparados aos obtidos pelos procedimentos \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} na detecção de grandes deslocamentos, mantendo a mesma superioridade de sinalização de desajustes na maioria dos cenários envolvendo pequenas a moderadas alterações na média do processo. Essa melhoria obtida pode ser atribuída ao fato do procedimento \bar{Y}_{kh} consistir de uma combinação do procedimento \bar{Y}_{kl} proposto por Klein (2000) e do procedimento \bar{Y}_s apresentado em Vasconcelos et al. (2022). Para essa combinação, o princípio é que a primeira regra (\bar{Y}_{kl}) reaja rapidamente a pequenos desajustes do processo, enquanto a última (\bar{Y}_s) dá um rápido sinal de descontrole (um sinal *o.o.c.*) para grandes mudanças.

Assim, além da simplicidade de implementação e dos resultados de *ARL* favoráveis para uma detecção mais rápida de desajustes no processo, o esquema \bar{Y}_{kh} mostra-se também atrativo para situações reais como um complemento ao gráfico de controle de *Shewhart* com o procedimento de \bar{Y}_s .

Capítulo 5

Considerações Finais e Sugestão de Trabalhos Futuros

O gráfico de controle de \bar{Y} proposto por [Vasconcelos et al. \(2022\)](#) pode ser considerado competitivo, uma vez que o seu desempenho apresentou-se melhor quando comparado ao gráfico de controle de \bar{X} de [Fernandes et al. \(2019\)](#). Uma vantagem do procedimento \bar{Y}_s adotado pelo gráfico de \bar{Y} é que os valores dos limites de controle, assim como o cálculo relacionado aos valores do ARL_1 , podem ser calculados analiticamente, dispensado a necessidade de um estudo de simulação. Consideramos o procedimento \bar{Y}_s útil para aplicação em casos reais de forma simples, podendo até mesmo ser implementado em planilhas comuns, amplamente disponíveis no ambiente de negócios (como, por exemplo, o *Excel*).

Também propomos, nesse trabalho de tese, dois procedimentos que incorporam regras suplementares ao gráfico de controle de \bar{Y} : os procedimentos \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} . A contribuição com relação ao uso dos procedimentos aqui propostos e apresentados nos Caps. 3 e 4 está relacionada à melhoria quanto ao desempenho do gráfico de controle de \bar{Y} observado quando comparados com o desempenho do gráfico com o esquema \bar{Y}_s . Com a inclusão da regra proposta por [Klein \(2000\)](#) no gráfico de controle de \bar{Y} , o desempenho do esquema \bar{Y}_{kl} apontou ser mais eficiente, considerando deslocamentos pequenos e moderados da média, embora para deslocamentos maiores da média do processo, o procedimento \bar{Y}_s tenha se apresentado melhor.

A regra 2-de-2 de *Khoo*, descrita pelo procedimento \bar{Y}_{kh} no Cap. 4, indicou melhor desempenho quando comparados os seus valores de ARL com os obtidos pelos procedimentos \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} . Nos cenários aqui considerados, essa melhoria é mais evidente na detecção de grandes deslocamentos da média do processo. Além disso, o procedimento \bar{Y}_{kh} mantém essa mesma superioridade de sinalização de desajustes em grande parte dos cenários considerados que envolvem de pequenas a moderadas alterações na média. Esse fato é mais evidentemente observado para deslocamentos positivos da média associados a qualquer tamanho de amostra. Essa melhoria obtida pode ser atribuída ao fato do procedimento \bar{Y}_{kh} consistir de uma combinação das regras 2-de-2 de [Klein \(2000\)](#) e da regra tradicional adotada em [Vasconcelos et al. \(2022\)](#). Para essa combinação, o princípio

é que a primeira regra, do procedimento (\bar{Y}_{kl}) , reaja rapidamente a pequenos desajustes do processo, enquanto a última, do procedimento \bar{Y}_s , dá um rápido sinal de descontrolo (sinal *o.o.c.*) para grandes mudanças.

De um modo geral, considerando todos os cenários propostos, o procedimento \bar{Y}_{kh} indicou ter uma velocidade de detecção elevada, superando inclusive o bom desempenho do mesmo gráfico com o procedimento \bar{Y}_s e o procedimento \bar{Y}_{kl} .

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se uma discussão e avaliação dos procedimentos \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} em uma abordagem que considere casos em que os parâmetros de escala e de forma podem mudar simultaneamente. Nesse caso, os limites de controle permanecerão os mesmos apresentados nessa tese, embora o cálculo analítico do ARL_1 seja difícil (pois parece ser bastante complicado obter probabilidades associadas à distribuição de \bar{Y} quando o processo está fora de controle, devido a mudanças simultâneas nos parâmetros de escala e de forma). Uma outra sugestão seria um estudo para avaliar o impacto no valor do ARL_0 e ARL_1 quando os parâmetros de forma e de escala necessitam ser estimados.

Referências

- Abbas, N. (2018). Homogeneously weighted moving average control chart with an application in substrate manufacturing process, *Computers & Industrial Engineering* 120: 460–470.
- Abernethy, R. B. (2006). *The new Weibull handbook*, quinta edn, CRC press.
- Abu-Shawiesh, M. O. A. e Saeed, N. (2022). Monitoring process variability using decile mean standard deviation, *Quality and Reliability Engineering International* 38(1): 501–515.
- Alwan, L. C., Champ, C. W. e Maragah, H. D. (1994). Study of average run lengths for supplementary runs rules in the presence of autocorrelation, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 23(2): 373–391.
- Aparisi, F., Champ, C. W. e García-Díaz, J. C. (2004). A performance analysis of Hotelling's χ^2 control chart with supplementary runs rules, *Quality Engineering* 16(3): 359–368.
- Arif, O. H. e Aslam, M. (2018). A new generalized range control chart for the Weibull distribution, *Complexity* 2018(Article ID 9453589): 8 pages.
- Aslam, M., Azam, M. e Jun, C.-H. (2018). A HEWMA-CUSUM control chart for the Weibull distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 47(24): 5973–5985.
- Bergman, A., Sella, Y., Agre, P. e Casadevall, A. (2020). Oscillations in US COVID-19 incidence and mortality data reflect diagnostic and reporting factors, *mSystems* 5(4): e00544–20.
- Bisiotis, K., Psarakis, S. e Yannacopoulos, A. N. (2022). Control charts in financial applications: An overview, *Quality and Reliability Engineering International* 38(3): 1441–1462.
- Bruce, A. e Bruce, P. (2019). *Estatística prática para cientistas de dados*, Alta Books.
- Celano, G., Costa, A. e Fichera, S. (2006). Statistical design of variable sample size and sampling interval \bar{X} control charts with run rules, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 28(9): 966–977.

-
- Champ, C. W. (1992). Steady-state run length analysis of a Shewhart quality control chart with supplementary runs rules, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 21(3): 765–777.
- Champ, C. W. e Woodall, W. H. (1987). Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules, *Technometrics* 29(4): 393–399.
- Chen, J.-T. (2014). A Shewhart-type control scheme to monitor Weibull data without subgrouping, *Quality and Reliability Engineering International* 30(8): 1197–1214.
- Chou, Y.-M., Polansky, A. M. e Mason, R. L. (1998). Transforming non-normal data to normality in statistical process control, *Journal of Quality Technology* 30(2): 133–141.
- Costa, A. F. B. (2000). X charts with supplementary samples to control the mean and variance, *International Journal of Production Research* 38(16): 3801–3809.
- Costa, A. F. B., Epprecht, E. K. e Carpinetti, L. C. R. (2005). *Controle estatístico de qualidade*, segunda edn, Atlas, São Paulo - SP.
- Costa, A. F. B. e Machado, M. A. G. (2013). A single chart with supplementary runs rules for monitoring the mean vector and the covariance matrix of multivariate processes, *Computers & Industrial Engineering* 66(2): 431–437.
- Dickinson, R. M., Roberts, D. A. O., Driscoll, A. R., Woodall, W. H. e Vining, G. G. (2014). CUSUM charts for monitoring the characteristic life of censored Weibull lifetimes, *Journal of Quality Technology* 46(4): 340–358.
- Dubin, N. N., Kalinin, V. V., Kokovin, A. V., Guseva, O. S., Lapshina, S. N., Dolganov, A. e Parusheva, S. S. (2018). Shewhart's control charts in the education quality management system, *AIP Conference Proceedings* 1978(1): 440016–1–440016–4.
- Faraz, A., Saniga, E. e Heuchenne, C. (2015). Shewhart control charts for monitoring reliability with Weibull lifetimes, *Quality and Reliability Engineering International* 31(9): 1565–1574.
- Fernandes, F. H., Ho, L. L. e Bourguignon, M. (2019). About Shewhart control charts to monitor the Weibull mean, *Quality and Reliability Engineering International* 35(7): 2343–2357.
- Freitas, M. A. e Colosimo, E. A. (1997). *Confiabilidade: Análise de tempo de falha e testes de vida acelerados*, Fundação Christiano Ottoni - Escola de Engenharia - UFMG, Belo Horizonte - MG.
- Golosnoy, V., Okhrin, I., Ragulin, S. e Schmid, W. (2010). *On the application of SPC in finance*, Physica-Verlag HD, Heidelberg, pp. 119–130.

-
- Gomes, I. C., Mingoti, S. A. e Oliveira, C. D. L. (2011). A novel experience in the use of control charts for the detection of nosocomial infection outbreaks, *Clinics* 66: 1681–1689.
- Gong, M. e Mukherjee, A. (2019). Design and comparison of some Shewhart-type schemes for simultaneous monitoring of Weibull parameters, *Quality and Reliability Engineering International* 35(4): 889–901.
- Ho, L. L., Fernandes, F. H., Quinino, R. C. e Bourguignon, M. (2021). Improving Shewhart control chart performance for monitoring the Weibull mean, *Quality and Reliability Engineering International* 37(3): 984–996.
- Ho, L. L., Quinino, R. C., Fernandes, F. H. e Bourguignon, M. (2022). Klein’s supplementary runs rules on \bar{X} chart to control the mean of a Weibull random variable, *Quality and Reliability Engineering International* 38(4): 1750–1759.
- Hrynkevych, O. S. (2017). Statistical analysis of higher education quality with use of control charts, *Advanced Science Letters* 23(10): 10070–10072.
- Huwang, L. e Lin, L.-W. (2020). New EWMA control charts for monitoring the Weibull shape parameter, *Quality and Reliability Engineering International* 36(6): 1872–1894.
- Inkelas, M., Blair, C., Furukawa, D., Manuel, V. G., Malenfant, J. H., Martin, E., Emeruwa, I., Kuo, T., Arangua, L., Robles, B. e Provost, L. P. (2021). Using control charts to understand community variation in COVID-19, *PLoS ONE* 16(4): e0248500.
- Jain, S. R., Sim, W., Ng, C. H., Chin, Y. H., Lim, W. H., Syn, N. L., Kamal, N. H. B. A., Gupta, M., Heong, V., Lee, X. W., Sapari, N. S., Koh, X. Q., Isa, Z. F. A., Ho, L., O’Hara, C., Ulagapan, A., Gu, S. Y., Shroff, K., Weng, R. C., Lim, J. S. Y., Lim, D., Pang, B., Ng, L. K., Wong, A., Soo, R. A., Yong, W. P., Chee, C. E., Lee, S.-C., Goh, B.-C., Soong, R. e Tan, D. S. P. (2021). Statistical process control charts for monitoring next-generation sequencing and bioinformatics turnaround in precision medicine initiatives, *Frontiers in Oncology* 11.
- Jiang, R. e Murthy, D. N. P. (2011). A study of Weibull shape parameter: Properties and significance, *Reliability Engineering & System Safety* 96(12): 1619–1626.
- Johnson, N. L., Kotz, S. e Balakrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distributions*, Vol. 1 of *Wiley Series in Probability and Statistics*,, segunda edn, John Wiley & Sons, Inc.
- Khan, N., Nawaz, M. S., Sherwani, R. A. K. e Aslam, M. (2021). Moving average EWMA chart for the Weibull distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation (in press)* .
- URL:** <https://doi.org/10.1080/03610918.2021.1901119>

-
- Khoo, M. K. B. e Ariffin, K. N. b. (2006). Two improved runs rules for the Shewhart \bar{X} control chart, *Quality Engineering* 18(2): 173–178.
- Klein, M. (2000). Two alternatives to the Shewhart \bar{X} control chart, *Journal of Quality technology* 32(4): 427–431.
- Koutras, M. V., Bersimis, S. e Maravelakis, P. E. (2007). Statistical process control using Shewhart control charts with supplementary runs rules, *Methodology and Computing in Applied Probability* 9(2): 207–224.
- Malela-Majika, J.-C., Malandala, S. K. e Graham, M. A. (2018). Shewhart control schemes with supplementary 2-of- $(h + 1)$ side-sensitive runs-rules under the Burr-type XII distribution, *Quality and Reliability Engineering International* 34(8): 1800–1817.
- Montgomery, D. C. (2020). *Introduction to statistical quality control*, John Wiley & Sons.
- Nadarajah, S. (2008). A review of results on sums of random variables, *Acta Applicandae Mathematicae* 103: 131–140.
- Nandedkar, T. e Bhati, G. (2021). Assessment of academic performance through SQC: An application of control charts, *Interdisciplinary Research in Technology and Management*, CRC Press, pp. 76–81.
- Nelson, L. S. (1984). The Shewhart control chart - Tests for special causes, *Journal of quality technology* 16(4): 237–239.
- Nelson, P. R. (1979). Control charts for Weibull processes with standards given, *IEEE Transactions on Reliability* 28(4): 283–288.
- Oh, I. e Cho, G.-Y. (2022). Multivariate control charts for mean vector and covariance matrix with supplementary runs rules, *Journal of the Korean Data & Information Science Society* 33(2): 311–323.
- Palm, A. C. (1990). Tables of run length percentiles for determining the sensitivity of Shewhart control charts for averages with supplementary runs rules, *Journal of Quality Technology* 22(4): 289–298.
- Parry, G., Provost, L. P., Provost, S. M., Little, K. e Perla, R. J. (2021). A hybrid Shewhart chart for visualizing and learning from epidemic data, *International Journal for Quality in Health Care* 33(4).
- Pascual, F. (2010). EWMA charts for the Weibull shape parameter, *Journal of Quality Technology* 42(4): 400–416.

-
- Pascual, F. e Park, C. (2018). Control charts for monitoring the mean and percentiles of Weibull processes with variance components, *Quality and Reliability Engineering International* 34(2): 245–256.
- Pascual, F. e Zhang, H. (2011). Monitoring the Weibull shape parameter by control charts for the sample range, *Quality and Reliability Engineering International* 27(1): 15–25.
- Perla, R. J., Provost, S. M., Parry, G. J., Little, K. e Provost, L. P. (2021). Understanding variation in reported covid-19 deaths with a novel Shewhart chart application, *International Journal for Quality in Health Care* 33(1): 1–8.
- Perry, M. B. (2020). An EWMA control chart for categorical processes with applications to social network monitoring, *Journal of Quality Technology* 52(2): 182–197.
- R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
URL: <https://www.R-project.org/>
- Ramalhoto, M. F. e Morais, M. (1999). Shewhart control charts for the scale parameter of a Weibull control variable with fixed and variable sampling intervals, *Journal of Applied Statistics* 26(1): 129–160.
- Rinne, H. (2008). *The Weibull distribution: A handbook*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- Rocha, A. L. S., Medeiros, P. G. e Ho, L. L. (2015). Economical control chart with supplementary rules to monitor the average number of defects, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 76(5): 881–891.
- Rodrigues, R. M. (2009). *Controle on-line para o número de nao-conformidades em um item inspecionado*, Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models*, Academic press.
- Ross, S. M. (2020). *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*, Academic press.
- Salmasnia, A., Namdar, M., Abolfathi, M. e Ajaly, P. (2021). Statistical design of a VSI-EWMA control chart for monitoring the communications among individuals in a weighted social network, *International Journal of System Assurance Engineering and Management* 12: 495–508.
- Seoh, Y. K., Wong, V. H. e Zangeneh Sirdari, M. (2021). A study on the application of control chart in healthcare, *ITM Web of Conferences* 36(01001): 1–23.

-
- Shah, A., Pereira, P. e Tuma, P. (2021). Quality improvement at times of crisis, *BMJ* 373:n928.
- Shewhart, W. A. (1941). *ABC's of the quality control chart in use*, Engineering Department of Princeton University, Newark.
- Shewhart, W. A. e Deming, W. E. (1986). *Statistical method from the viewpoint of quality control*, Courier Corporation.
- Shmueli, G. e Cohen, A. (2003). Run-length distribution for control charts with runs and scans rules, *Communications in Statistics - Theory and Methods* 32(2): 475–495.
- Shongwe, S. C. e Malela-Majika, J.-C. (2022). Shewhart-type monitoring schemes with supplementary w-of-w runs-rules to monitor the mean of autocorrelated samples, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 51(1): 293–322.
- Small, B. B. et al. (1956). Statistical quality control handbook (Western Electric Company), *Mack Printing Company: Easton, PA* .
- Suman, G. e Prajapati, D. (2018). Control chart applications in healthcare: A literature review, *International Journal of Metrology and Quality Engineering* 9(5): 1–21.
- Tailor, K. S. (2017a). Exponential weighted moving average (ewma) chart under the assumption of moderateness and its 3δ control limits, *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences* 5(2): 121–129.
- Tailor, K. S. (2017b). Sample mean deviation (d) chart under the assumption of moderateness and its performance analysis under normality against moderateness, *International Journal of Engineering and Management Research (IJEMR)* 7(4): 292–296.
- Vasconcelos, R. M. R., Quinino, R. C., Ho, L. L. e Cruz, F. R. B. (2022). About Shewhart control charts to monitor the Weibull mean based on a Gamma distribution, *Quality and Reliability Engineering International* 38(8): 4210–4222.
- Walker, E., Philpot, J. W. e Clement, J. (1991). False signal rates for the Shewhart control chart with supplementary runs tests, *Journal of Quality Technology* 23(3): 247–252.
- Weibull, W. (1939a). *The phenomenon of rupture in solids*, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm.
- Weibull, W. (1939b). *A statistical theory of the strength of materials*, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag, Stockholm.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability, *Journal of applied mechanics* .

- Yu, S., Wan, Q., Wei, Z. e Tang, T. (2016). Statistical design of an adaptive synthetic control chart with run rule on service and management operation, *Scientific Programming* 2016.
- Zhang, C. W., Ye, Z. e Xie, M. (2017). Monitoring the shape parameter of a Weibull renewal process, *IISE Transactions* 49(8): 800–813.
- Zhang, S. e Wu, Z. (2005). Designs of control charts with supplementary runs rules, *Computers & Industrial Engineering* 49(1): 76–97.
- Zhang, Y., Shang, Y., Gao, N. e Wang, Q. (2017). Monitoring prespecified changes in linear profiles using control charts with supplementary runs rules, *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 46(9): 7249–7263.

Apêndices

Apêndice A

Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X}

Tabela A1 - Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 2)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
2	2	370,3978	1,7724	0,9265	0,7087	3,1530
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
0,1	0,5	1,0287	0,2000	0,4472	1,5725	-89%
0,5	0,5	1,8363	1,0000	2,2361	0,7725	-44%
1	0,5	1,7725	2,0000	4,4721	0,2275	13%
1,5	0,5	2,1080	3,0000	6,7082	1,2275	69%
2,0	0,5	1,8367	4,0000	8,9443	2,2275	126%
2,5	0,5	1,6398	5,0000	11,1803	3,2275	182%
3	0,5	1,5033	6,0000	13,4164	4,2275	239%
4	0,5	1,3355	8,0000	17,8885	6,2275	351%
5	0,5	1,2404	10,0000	22,3607	8,2275	464%
6	0,5	1,1814	12,0000	26,8328	10,2275	577%
0,1	1	1,0000	0,1000	0,1000	1,6725	-94%
0,5	1	1,1978	0,5000	0,5000	1,2725	-72%
1	1	3,5248	1,0000	1,0000	0,7725	-44%
1,5	1	8,8955	1,5000	1,5000	0,2725	-15%
2,0	1	7,0874	2,0000	2,0000	0,2275	13%
2,5	1	3,8235	2,5000	2,5000	0,7275	41%
3	1	2,4741	3,0000	3,0000	1,2275	69%
4	1	1,5565	4,0000	4,0000	2,2275	126%
5	1	1,2662	5,0000	5,0000	3,2275	182%
6	1	1,1442	6,0000	6,0000	4,2275	239%
0,1	1,5	1,0000	0,0903	0,0613	1,6822	-95%

0,5	1,5	1,0435	0,4514	0,3065	1,3211	-75%
1	1,5	3,9293	0,9027	0,6129	0,8697	-49%
1,5	1,5	24,6255	1,3541	0,9194	0,4183	-24%
2,0	1,5	43,9415	1,8055	1,2259	0,0330	2%
2,5	1,5	9,5136	2,2569	1,5323	0,4844	27%
3	1,5	3,6219	2,7082	1,8388	0,9358	53%
4	1,5	1,5726	3,6110	2,4517	1,8385	104%
5	1,5	1,1899	4,5137	3,0647	2,7413	155%
6	1,5	1,0742	5,4165	3,6776	3,6440	206%
0,1	2	1,0000	0,0886	0,0463	1,6838	-95%
0,5	2	1,0088	0,4431	0,2316	1,3293	-75%
1	2	4,9629	0,8862	0,4633	0,8862	-50%
1,5	2	70,2499	1,3293	0,6949	0,4431	-25%
2,0	2	369,1345	1,7725	0,9265	0,0000	0%
2,5	2	23,4500	2,2156	1,1581	0,4431	25%
3	2	4,7616	2,6587	1,3898	0,8862	50%
4	2	1,4989	3,5449	1,8530	1,7725	100%
5	2	1,1159	4,4311	2,3163	2,6587	150%
6	2	1,0320	5,3174	2,7795	3,5449	200%
0,1	3	1,0000	0,0893	0,0325	1,6832	-95%
0,5	3	1,0002	0,4465	0,1623	1,3260	-75%
1	3	9,7347	0,8930	0,3246	0,8795	-50%
1,5	3	900,3655	1,3395	0,4868	0,4330	-24%
2,0	3	40257,6500	1,7860	0,6491	0,0135	1%
2,5	3	157,0480	2,2324	0,8114	0,4600	26%
3	3	1,3126	2,6789	0,9737	0,9065	51%
4	3	7,1477	3,5719	1,2982	1,7995	102%
5	3	1,0341	4,4649	1,6228	2,6924	152%
6	3	1,0042	5,3579	1,9473	3,5854	202%
0,1	5	1,0000	0,0918	0,0210	1,6806	-95%
0,5	5	1,0000	0,4591	0,1052	1,3134	-74%
1	5	64,4791	0,9182	0,2103	0,8543	-48%
1,5	5	387596,9000	1,3773	0,3155	0,3952	-22%
2,0	5	inf	1,8363	0,4206	0,0639	4%
2,5	5	31625,5500	2,2954	0,5258	0,5230	30%
3	5	13,0865	2,7545	0,6309	0,9821	55%
4	5	1,0947	3,6727	0,8412	1,9002	107%
5	5	1,0016	4,5908	1,0515	2,8184	159%

6	5	1,0000	5,5090	1,2619	3,7366	211%
0,1	10	1,0000	0,0951	0,0114	1,6773	-95%
0,5	10	1,0000	0,4757	0,0572	1,2968	-73%
1	10	inf	0,9514	0,1145	0,8211	-46%
1,5	10	inf	1,4270	0,1717	0,3454	-19%
2,0	10	inf	1,9027	0,2289	0,1302	7%
2,5	10	inf	2,3784	0,2861	0,6059	34%
3	10	1,0022	2,8541	0,3434	1,0816	61%
4	10	1,0000	3,8054	0,4578	2,0329	115%
5	10	1,0000	4,7568	0,5723	2,9843	168%
6	10	1,0000	5,7081	0,6867	3,9357	222%
0,1	20	1,0000	0,0974	0,0060	1,6751	-95%
0,5	20	inf	0,4868	0,0302	1,2857	-73%
1	20	inf	0,9735	0,0603	0,7989	-45%
1,5	20	inf	1,4603	0,0905	0,3122	-18%
2,0	20	4805,3820	1,9470	0,1207	0,1746	10%
2,5	20	inf	2,4338	0,1508	0,6613	37%
3	20	1,0000	2,9205	0,1810	1,1481	65%
4	20	1,0000	3,8940	0,2413	2,1216	120%
5	20	1,0000	4,8675	0,3017	3,0951	175%
6	20	1,0000	5,8410	0,3620	4,0686	230%

Tabela A2 - Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (2; 3)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
2	3	370,3978	1,7859	0,6491	0,9604	2,6736
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
0,1	0,5	1,0103	0,2000	0,4472	1,5860	-89%
0,5	0,5	1,4415	1,0000	2,2361	0,7860	-44%
1	0,5	1,7037	2,0000	4,4721	0,2140	12%
1,5	0,5	1,6253	3,0000	6,7082	1,2140	68%
2,0	0,5	1,4991	4,0000	8,9443	2,2140	124%
2,5	0,5	1,3962	5,0000	11,1803	3,2140	180%
3	0,5	1,3195	6,0000	13,4164	4,2140	236%
4	0,5	1,2192	8,0000	17,8885	6,2140	348%
5	0,5	1,1595	10,0000	22,3607	8,2140	460%

6	0,5	1,1214	12,0000	26,8328	10,2140	572%
0,1	1	1,0000	0,1000	0,1000	1,6860	-94%
0,5	1	1,0393	0,5000	0,5000	1,2860	-72%
1	1	1,9001	1,0000	1,0000	0,7860	-44%
1,5	1	3,6080	1,5000	1,5000	0,2860	-16%
2,0	1	3,3384	2,0000	2,0000	0,2140	12%
2,5	1	2,3381	2,5000	2,5000	0,7140	40%
3	1	1,7718	3,0000	3,0000	1,2140	68%
4	1	1,3113	4,0000	4,0000	2,2140	124%
5	1	1,1494	5,0000	5,0000	3,2140	180%
6	1	1,0801	6,0000	6,0000	4,2140	236%
0,1	1,5	1,0000	0,0903	0,0613	1,6957	-95%
0,5	1,5	1,0011	0,4514	0,3065	1,3346	-75%
1	1,5	1,6341	0,9027	0,6129	0,8832	-49%
1,5	1,5	5,7844	1,3541	0,9194	0,4318	-24%
2,0	1,5	8,9677	1,8055	1,2259	0,0195	1%
2,5	1,5	3,7276	2,2569	1,5323	0,4709	26%
3	1,5	2,0451	2,7082	1,8388	0,9223	52%
4	1,5	1,2526	3,6110	2,4517	1,8250	102%
5	1,5	1,0814	4,5137	3,0647	2,7278	153%
6	1,5	1,0302	5,4165	3,6776	3,6305	203%
0,1	2	1,0000	0,0886	0,0463	1,6973	-95%
0,5	2	1,0000	0,4431	0,2316	1,3428	-75%
1	2	1,5316	0,8862	0,4633	0,8997	-50%
1,5	2	8,8130	1,3293	0,6949	0,4566	-26%
2,0	2	27,2270	1,7725	0,9265	0,0135	-1%
2,0	3	5,2852	1,7745	0,7593	0,0114	-1%
3	2	2,1181	2,6587	1,3898	0,8727	49%
4	2	1,1704	3,5449	1,8530	1,7589	98%
5	2	1,0364	4,4311	2,3163	2,6452	148%
6	2	1,0090	5,3174	2,7795	3,5314	198%
0,1	3	1,0000	0,0893	0,0325	1,6967	-95%
0,5	3	1,0000	0,4465	0,1623	1,3395	-75%
1	3	1,4718	0,8930	0,3246	0,8930	-50%
1,5	3	26,1081	1,3395	0,4868	0,4465	-25%
2,0	3	374,4785	1,7860	0,6491	0,0000	0%
2,5	3	8,7503	2,2324	0,8114	0,4465	25%
3	3	1,9998	2,6789	0,9737	0,8930	50%
4	3	1,0626	3,5719	1,2982	1,7860	100%

5	3	1,0052	4,4649	1,6228	2,6789	150%
6	3	1,0005	5,3579	1,9473	3,5719	200%
0,1	5	1,0000	0,0918	0,0210	1,6941	-95%
0,5	5	1,0000	0,4591	0,1052	1,3269	-74%
1	5	1,5037	0,9182	0,2103	0,8678	-49%
1,5	5	463,7703	1,3773	0,3155	0,4087	-23%
2,0	5	282485,9000	1,8363	0,4206	0,0504	3%
2,5	5	19,8332	2,2954	0,5258	0,5095	29%
3	5	1,6160	2,7545	0,6309	0,9685	54%
4	5	1,0052	3,6727	0,8412	1,8867	106%
5	5	1,0000	4,5908	1,0515	2,8049	157%
6	5	1,0000	5,5090	1,2619	3,7231	208%
0,1	10	1,0000	0,0951	0,0114	1,6908	-95%
0,5	10	1,0000	0,4757	0,0572	1,3103	-73%
1	10	1,8316	0,9514	0,1145	0,8346	-47%
1,5	10	4545455,0000	1,4270	0,1717	0,3589	-20%
2,0	10	inf	1,9027	0,2289	0,1167	7%
2,5	10	194,6199	2,3784	0,2861	0,5924	33%
3	10	1,1388	2,8541	0,3434	1,0681	60%
4	10	1,0000	3,8054	0,4578	2,0194	113%
5	10	1,0000	4,7568	0,5723	2,9708	166%
6	10	1,0000	5,7081	0,6867	3,9221	220%
0,1	20	1,0000	0,0974	0,0060	1,6886	-95%
0,5	20	1,0000	0,4868	0,0302	1,2992	-73%
1	20	3,5941	0,9735	0,0603	0,8125	-45%
1,5	20	inf	1,4603	0,0905	0,3257	-18%
2,0	20	inf	1,9470	0,1207	0,1610	9%
2,5	20	704225,4000	2,4338	0,1508	0,6478	36%
3	20	1,0040	2,9205	0,1810	1,1346	64%
4	20	1,0000	3,8940	0,2413	2,1081	118%
5	20	1,0000	4,8675	0,3017	3,0816	173%
6	20	1,0000	5,8410	0,3620	4,0551	227%

Tabela A3 - Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (0, 5; 1)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
0,5	1	370,3978	0,5	0,5	0,0792	1,4400
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
0,1	0,5	3,5187	0,2000	0,4472	0,3000	-60%
0,5	0,5	4,2355	1,0000	2,2361	0,5000	100%
1	0,5	2,0199	2,0000	4,4721	1,5000	300%
1,5	0,5	1,5284	3,0000	6,7082	2,5000	500%
2,0	0,5	1,3330	4,0000	8,9443	3,5000	700%
2,5	0,5	1,2321	5,0000	11,1803	4,5000	900%
3	0,5	1,1719	6,0000	13,4164	5,5000	1100%
4	0,5	1,1060	8,0000	17,8885	7,5000	1500%
5	0,5	1,0721	10,0000	22,3607	9,5000	1900%
6	0,5	1,3330	12,0000	26,8328	11,5000	2300%
0,1	1	2,7538	0,1000	0,1000	0,4000	-80%
0,5	1	370,6477	0,5000	0,5000	0,0000	0%
1	1	6,4039	1,0000	1,0000	0,5000	100%
1,5	1	2,1009	1,5000	1,5000	1,0000	200%
2,0	1	1,4146	2,0000	2,0000	1,5000	300%
2,5	1	1197448,0000	2,5000	2,5000	2,0000	400%
3	1	1,1061	3,0000	3,0000	2,5000	500%
4	1	1,0377	4,0000	4,0000	3,5000	700%
5	1	1,0161	5,0000	5,0000	4,5000	900%
6	1	1,4146	6,0000	6,0000	5,5000	1100%
0,1	1,5	2,6942	0,0903	0,0613	0,4097	-82%
0,5	1,5	27487,6300	0,4514	0,3065	0,0486	-10%
1	1,5	27,4055	0,9027	0,6129	0,4027	81%
1,5	1,5	2,5710	1,3541	0,9194	0,8541	171%
2,0	1,5	1,3648	1,8055	1,2259	1,3055	261%
2,5	1,5	1,1196	2,2569	1,5323	1,7569	351%
3	1,5	1,0454	2,7082	1,8388	2,2082	442%
4	1,5	1,0087	3,6110	2,4517	3,1110	622%
5	1,5	1,0022	4,5137	3,0647	4,0137	803%
6	1,5	1,3648	5,4165	3,6776	4,9165	983%
0,1	2	2,9428	0,0886	0,0463	0,4114	-82%
0,5	2	1724138,0000	0,4431	0,2316	0,0569	-11%

1	2	142,7165	0,8862	0,4633	0,3862	77%
1,5	2	2,8785	1,3293	0,6949	0,8293	166%
2,0	2	1,2773	1,7725	0,9265	1,2725	254%
2,5	2	1,0616	2,2156	1,1581	1,7156	343%
3	2	1,0161	2,6587	1,3898	2,1587	432%
4	2	1,0015	3,5449	1,8530	3,0449	609%
5	2	1,0002	4,4311	2,3163	3,9311	786%
6	2	1,2773	5,3174	2,7795	4,8174	963%
0,1	3	4,0480	0,0893	0,0325	0,4107	-82%
0,5	3	Inf	0,4465	0,1623	0,0535	-11%
1	3	9090,9090	0,8930	0,3246	0,3930	79%
1,5	3	3,1121	1,3395	0,4868	0,8395	168%
2,0	3	1,1307	1,7860	0,6491	1,2860	257%
2,5	3	1,0124	2,2324	0,8114	1,7324	346%
3	3	1,0014	2,6789	0,9737	2,1789	436%
4	3	1,0000	3,5719	1,2982	3,0719	614%
5	3	1,0000	4,4649	1,6228	3,9649	793%
6	3	1,1307	5,3579	1,9473	4,8579	972%
0,1	5	10,7739	0,0918	0,0210	0,4082	-82%
0,5	5	Inf	0,4591	0,1052	0,0409	-8%
1	5	Inf	0,9182	0,2103	0,4182	84%
1,5	5	2,9529	1,3773	0,3155	0,8773	175%
2,0	5	1,0203	1,8363	0,4206	1,3363	267%
2,5	5	1,0002	2,2954	0,5258	1,7954	359%
3	5	1,0000	2,7545	0,6309	2,2545	451%
4	5	1,0000	3,6727	0,8412	3,1727	635%
5	5	1,0000	4,5908	1,0515	4,0908	818%
6	5	1,0203	5,5090	1,2619	5,0090	1002%
0,1	10	386,5870	0,0951	0,0114	0,4049	-81%
0,5	10	Inf	0,4757	0,0572	0,0243	-5%
1	10	Inf	0,9514	0,1145	0,4514	90%
1,5	10	2,2055	1,4270	0,1717	0,9270	185%
2,0	10	1,0001	1,9027	0,2289	1,4027	281%
2,5	10	1,0000	2,3784	0,2861	1,8784	376%
3	10	1,0000	2,8541	0,3434	2,3541	471%
4	10	1,0000	3,8054	0,4578	3,3054	661%
5	10	1,0000	4,7568	0,5723	4,2568	851%
6	10	1,0001	5,7081	0,6867	5,2081	1042%
0,1	20	3333333,0000	0,0974	0,0060	0,4026	-81%

0,5	20	Inf	0,4868	0,0302	0,0132	-3%
1	20	Inf	0,9735	0,0603	0,4735	95%
1,5	20	1,3931	1,4603	0,0905	0,9603	192%
2,0	20	1,0000	1,9470	0,1207	1,4470	289%
2,5	20	1,0000	2,4338	0,1508	1,9338	387%
3	20	1,0000	2,9205	0,1810	2,4205	484%
4	20	1,0000	3,8940	0,2413	3,3940	679%
5	20	1,0000	4,8675	0,3017	4,3675	874%
6	20	1,0000	5,8410	0,3620	5,3410	1068%

Tabela A4 - Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (3; 6)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
3	6	370,3978	2,7831	0,5393	2,0127	3,4486
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
0,1	0,5	1,0004	0,2000	0,4472	2,5832	-93%
0,5	0,5	1,0933	1,0000	2,2361	1,7832	-64%
1	0,5	1,2372	2,0000	4,4721	0,7832	-28%
1,5	0,5	1,2878	3,0000	6,7082	0,2168	8%
2,0	0,5	1,4834	4,0000	8,9443	1,2168	44%
2,5	0,5	1,2598	5,0000	11,1803	2,2168	80%
3	0,5	1,2314	6,0000	13,4164	3,2168	116%
4	0,5	1,1805	8,0000	17,8885	5,2168	187%
5	0,5	1,1425	10,0000	22,3607	7,2168	259%
6	0,5	1,1144	12,0000	26,8328	9,2168	331%
0,1	1	1,0000	0,1000	0,1000	2,6832	-96%
0,5	1	1,0000	0,5000	0,5000	2,2832	-82%
1	1	1,0287	1,0000	1,0000	1,7832	-64%
1,5	1	1,2353	1,5000	1,5000	1,2832	-46%
2,0	1	2,0386	2,0000	2,0000	0,7832	-28%
2,5	1	1,7900	2,5000	2,5000	0,2832	-10%
3	1	1,7610	3,0000	3,0000	0,2168	8%
4	1	1,4721	4,0000	4,0000	1,2168	44%
5	1	1,2672	5,0000	5,0000	2,2168	80%
6	1	1,1572	6,0000	6,0000	3,2168	116%
0,1	1,5	1,0000	0,0903	0,0613	2,6929	-97%
0,5	1,5	1,0000	0,4514	0,3065	2,3318	-84%
1	1,5	1,0005	0,9027	0,6129	1,8804	-68%
1,5	1,5	1,0705	1,3541	0,9194	1,4290	-51%
2,0	1,5	2,4519	1,8055	1,2259	0,9777	-35%
2,5	1,5	2,2632	2,2569	1,5323	0,5263	-19%
3	1,5	2,5957	2,7082	1,8388	0,0749	-3%
4	1,5	1,7159	3,6110	2,4517	0,8278	30%
5	1,5	1,2687	4,5137	3,0647	1,7306	62%
6	1,5	1,1114	5,4165	3,6776	2,6333	95%
0,1	2	1,0000	0,0886	0,0463	2,6945	-97%
0,5	2	1,0000	0,4431	0,2316	2,3400	-84%

1	2	1,0000	0,8862	0,4633	1,8969	-68%
1,5	2	1,0203	1,3293	0,6949	1,4538	-52%
2,0	2	2,6858	1,7725	0,9265	1,0107	-36%
2,5	2	2,6483	2,2156	1,1581	0,5676	-20%
3	2	3,9056	2,6587	1,3898	0,1245	-4%
4	2	1,8174	3,5449	1,8530	0,7617	27%
5	2	1,2043	4,4311	2,3163	1,6480	59%
6	2	1,0602	5,3174	2,7795	2,5342	91%
0,1	3	1,0000	0,0893	0,0325	2,6939	-97%
0,5	3	1,0000	0,4465	0,1623	2,3367	-84%
1	3	1,0000	0,8930	0,3246	1,8902	-68%
1,5	3	1,0012	1,3395	0,4868	1,4437	-52%
2,0	3	2,8152	1,7860	0,6491	0,9972	-36%
2,5	3	3,6183	2,2324	0,8114	0,5507	-20%
3	3	9,8014	2,6789	0,9737	0,1042	-4%
4	3	1,7205	3,5719	1,2982	0,7888	28%
5	3	1,0861	4,4649	1,6228	1,6817	60%
6	3	1,0121	5,3579	1,9473	2,5747	93%
0,1	5	1,0000	0,0918	0,0210	2,6913	-97%
0,5	5	1,0000	0,4591	0,1052	2,3241	-84%
1	5	1,0000	0,9182	0,2103	1,8650	-67%
1,5	5	1,0000	1,3773	0,3155	1,4059	-51%
2,0	5	2,5352	1,8363	0,4206	0,9468	-34%
2,5	5	8,5380	2,2954	0,5258	0,4877	-18%
3	5	96,2386	2,7545	0,6309	0,0287	-1%
4	5	1,3740	3,6727	0,8412	0,8895	32%
5	5	1,0094	4,5908	1,0515	1,8077	65%
6	5	1,0002	5,5090	1,2619	2,7259	98%
0,1	10	1,0000	0,0951	0,0114	2,6880	-97%
0,5	10	1,0000	0,4757	0,0572	2,3075	-83%
1	10	1,0000	0,9514	0,1145	1,8318	-66%
1,5	10	1,0000	1,4270	0,1717	1,3561	-49%
2,0	10	1,7684	1,9027	0,2289	0,8805	-32%
2,5	10	208,7857	2,3784	0,2861	0,4048	-15%
3	10	396825,4000	2,8541	0,3434	0,0709	3%
4	10	1,0506	3,8054	0,4578	1,0222	37%
5	10	1,0000	4,7568	0,5723	1,9736	71%
6	10	1,0000	5,7081	0,6867	2,9249	105%
0,1	20	1,0000	0,0974	0,0060	2,6858	-97%

0,5	20	1,0000	0,4868	0,0302	2,2964	-83%
1	20	1,0000	0,9735	0,0603	1,8097	-65%
1,5	20	1,0000	1,4603	0,0905	1,3229	-48%
2,0	20	1,9470	1,9470	0,1207	0,8361	-30%
2,5	20	1063830,0000	2,4338	0,1508	0,3494	-13%
3	20	inf	2,9205	0,1810	0,1374	5%
4	20	1,0003	3,8940	0,2413	1,1109	40%
5	20	1,0000	4,8675	0,3017	2,0844	75%
6	20	1,0000	5,8410	0,3620	3,0579	110%

Tabela A5 - Valores de ARL 's obtidos para análise de desempenho do gráfico de \bar{X} : mudança bidirecional com $(\gamma_0; \delta_0) = (50; 25)$

γ_0	δ_0	ARL_0	μ_0	σ_0	LCL	UCL
50	25	370,3978	48,9219	2,4413	45,0233	51,6512
γ_1	δ_1	$ARL_1^{\bar{X}}$	μ_1	σ_1	desvio	d(%)
0,1	0,5	1,0000	0,2000	0,4472	48,7219	-1751%
0,5	0,5	1,0000	1,0000	2,2361	47,9219	-1722%
1	0,5	1,0000	2,0000	4,4721	46,9219	-1686%
1,5	0,5	1,0000	3,0000	6,7082	45,9219	-1650%
2,0	0,5	1,0001	4,0000	8,9443	44,9219	-1614%
2,5	0,5	1,0003	5,0000	11,1803	43,9219	-1578%
3	0,5	1,0008	6,0000	13,4164	42,9219	-1542%
4	0,5	1,0024	8,0000	17,8885	40,9219	-1470%
5	0,5	1,0050	10,0000	22,3607	38,9219	-1398%
6	0,5	1,0084	12,0000	26,8328	36,9219	-1327%
0,1	1	1,0000	0,1000	0,1000	48,8219	-1754%
0,5	1	1,0000	0,5000	0,5000	48,4219	-1740%
1	1	1,0000	1,0000	1,0000	47,9219	-1722%
1,5	1	1,0000	1,5000	1,5000	47,4219	-1704%
2,0	1	1,0000	2,0000	2,0000	46,9219	-1686%
2,5	1	1,0000	2,5000	2,5000	46,4219	-1668%
3	1	1,0000	3,0000	3,0000	45,9219	-1650%
4	1	1,0000	4,0000	4,0000	44,9219	-1614%
5	1	1,0000	5,0000	5,0000	43,9219	-1578%
6	1	1,0000	6,0000	6,0000	42,9219	-1542%
0,1	1,5	1,0000	0,0903	0,0613	48,8316	-1755%
0,5	1,5	1,0000	0,4514	0,3065	48,4705	-1742%
1	1,5	1,0000	0,9027	0,6129	48,0192	-1725%
1,5	1,5	1,0000	1,3541	0,9194	47,5678	-1709%
2,0	1,5	1,0000	1,8055	1,2259	47,1164	-1693%
2,5	1,5	1,0000	2,2569	1,5323	46,6650	-1677%
3	1,5	1,0000	2,7082	1,8388	46,2137	-1660%
4	1,5	1,0000	3,6110	2,4517	45,3109	-1628%
5	1,5	1,0000	4,5137	3,0647	44,4082	-1596%
6	1,5	1,0000	5,4165	3,6776	43,5054	-1563%
0,1	2	1,0000	0,0886	0,0463	48,8333	-1755%
0,5	2	1,0000	0,4431	0,2316	48,4788	-1742%

1	2	1,0000	0,8862	0,4633	48,0357	-1726%
1,5	2	1,0000	1,3293	0,6949	47,5926	-1710%
2,0	2	1,0000	1,7725	0,9265	47,1495	-1694%
2,5	2	1,0000	2,2156	1,1581	46,7063	-1678%
3	2	1,0000	2,6587	1,3898	46,2632	-1662%
4	2	1,0000	3,5449	1,8530	45,3770	-1630%
5	2	1,0000	4,4311	2,3163	44,4908	-1599%
6	2	1,0000	5,3174	2,7795	43,6045	-1567%
0,1	3	1,0000	0,0893	0,0325	48,8326	-1755%
0,5	3	1,0000	0,4465	0,1623	48,4754	-1742%
1	3	1,0000	0,8930	0,3246	48,0289	-1726%
1,5	3	1,0000	1,3395	0,4868	47,5824	-1710%
2,0	3	1,0000	1,7860	0,6491	47,1360	-1694%
2,5	3	1,0000	2,2324	0,8114	46,6895	-1678%
3	3	1,0000	2,6789	0,9737	46,2430	-1662%
4	3	1,0000	3,5719	1,2982	45,3500	-1629%
5	3	1,0000	4,4649	1,6228	44,4570	-1597%
6	3	1,0000	5,3579	1,9473	43,5640	-1565%
0,1	5	1,0000	0,0918	0,0210	48,8301	-1754%
0,5	5	1,0000	0,4591	0,1052	48,4628	-1741%
1	5	1,0000	0,9182	0,2103	48,0037	-1725%
1,5	5	1,0000	1,3773	0,3155	47,5447	-1708%
2,0	5	1,0000	1,8363	0,4206	47,0856	-1692%
2,5	5	1,0000	2,2954	0,5258	46,6265	-1675%
3	5	1,0000	2,7545	0,6309	46,1674	-1659%
4	5	1,0000	3,6727	0,8412	45,2492	-1626%
5	5	1,0000	4,5908	1,0515	44,3311	-1593%
6	5	1,0000	5,5090	1,2619	43,4129	-1560%
0,1	10	1,0000	0,0951	0,0114	48,8268	-1754%
0,5	10	1,0000	0,4757	0,0572	48,4462	-1741%
1	10	1,0000	0,9514	0,1145	47,9706	-1724%
1,5	10	1,0000	1,4270	0,1717	47,4949	-1707%
2,0	10	1,0000	1,9027	0,2289	47,0192	-1689%
2,5	10	1,0000	2,3784	0,2861	46,5435	-1672%
3	10	1,0000	2,8541	0,3434	46,0679	-1655%
4	10	1,0000	3,8054	0,4578	45,1165	-1621%
5	10	1,0000	4,7568	0,5723	44,1652	-1587%
6	10	1,0000	5,7081	0,6867	43,2138	-1553%
0,1	20	1,0000	0,0974	0,0060	48,8246	-1754%

0,5	20	1,0000	0,4868	0,0302	48,4352	-1740%
1	20	1,0000	0,9735	0,0603	47,9484	-1723%
1,5	20	1,0000	1,4603	0,0905	47,4617	-1705%
2,0	20	1,0000	1,9470	0,1207	46,9749	-1688%
2,5	20	1,0000	2,4338	0,1508	46,4881	-1670%
3	20	1,0000	2,9205	0,1810	46,0014	-1653%
4	20	1,0000	3,8940	0,2413	45,0279	-1618%
5	20	1,0000	4,8675	0,3017	44,0544	-1583%
6	20	1,0000	5,8410	0,3620	43,0809	-1548%

Apêndice B

Distribuição estacionária - regra “2 - de - 2” de *Klein*

A matriz de transição \mathbf{P} considerada no Cap. 3 é uma matriz de uma Cadeia de Markov Ergótica com cinco estados de transição $\mathcal{E} = \{C, U_1, U_2, L_1, L_2\}$, pois:

- (I) todos os estados se comunicam (matriz *irredutível*);
- (II) $M.D.C. = \{s : P_{kk}^s > 0\} = 1$ onde o *M.D.C.* é o maior divisor comum de todos os n 's para os quais $P_{kk}^s > 0$ (matriz *aperiódica*), $k = 1, \dots, 5$;
- (III) a Cadeia de Markov é *finita*.

Portando, por (I), (II) e (III), temos que a matriz de transição \mathbf{P} é irredutível, aperiódica e, então existe $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{P}^s = \mathbf{\Pi}$. Em outras palavras, tem-se que \mathbf{P}^s converge para uma matriz $\mathbf{\Pi}$ na qual todas as suas linhas são iguais ao vetor linha

$$\pi = [\pi_C, \pi_{U_1}, \pi_{U_2}, \pi_{L_1}, \pi_{L_2}]$$

tal que

$$\pi_1 = \pi_C, \dots, \pi_5 = \pi_{L_2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^5 \pi_k = 1,$$

com todos os valores π_k estritamente positivos.

Cada elemento π_k , $k = 1, 2, \dots, 5$, é interpretado como sendo a probabilidade do tempo em que o processo permanece no estado (i) - *Probabilidade de Estados-Estáveis da CM* ou *Probabilidade de Estados Estacionários* ou *Distribuição Estacionária*. Então, cada elemento de $\mathbf{\Pi}$ está associado com um único estado de \mathbf{P} . Mais detalhes sobre essa teoria pode ser visto em [Ross \(2014\)](#) e em [Rodrigues \(2009\)](#).

Resumindo, temos que sendo \mathbf{P} uma matriz de transição de uma CM irredutível, finita e aperiódica, então existe $\mathbf{\Pi}$ (distribuição estacionária) tal que:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{P}, \tag{B.1}$$

isto é, no limite, essa equação é verdadeira. Logo, $\mathbf{\Pi}$ é único e é obtido a partir da resolução do sistema de equações lineares com a restrição de que $\sum_k \pi_k = 1$.

Como todas as linhas de $\mathbf{\Pi}$ são iguais à π , a equação $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$, também é válida e pode ser escrita como

$$\pi(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \mathbf{0}, \quad (\text{B.2})$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{0}$ é o vetor linha de zeros¹. Portanto, o vetor único $\mathbf{\Pi}$ pode ser obtido a partir da resolução do sistema linear expresso em $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \times \mathbf{P}$. Daí, podemos ter então:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{P} - \mathbf{I})\mathbf{\Pi}^T = \mathbf{0}^T \\ \implies & \begin{bmatrix} p-1 & p_U & 0 & p_L & 0 \\ p & -1 & p_U & p_L & 0 \\ p & p_U & 0 & -1 & p_L \\ p & p_U & -1 & p_L & 0 \\ p & p_U &) & p_L & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \implies & \begin{cases} (p-1)\pi_1 + p_U\pi_2 + p_L\pi_4 = 0 \\ p\pi_1 - \pi_2 + p_U\pi_3 + p_L\pi_4 = 0 \\ p\pi_1 + p_U\pi_2 - \pi_4 + p_L\pi_5 = 0 \\ p\pi_1 + p_U\pi_2 - \pi_3 + p_L\pi_4 = 0 \\ p\pi_1 + p_U\pi_2 + p_L\pi_4 - \pi_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Devido aos limites de controle simétricos que são adotados para obter um processo calibrado em 370.4 (isto é, $p_L = p_U = \alpha/2$), tem-se $p = 1 - (p_U + p_L) \Rightarrow p - 1 = p_U + p_L$. Assim sendo, os elementos de π são dados por:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_C \\ \pi_{U_1} \\ \pi_{U_2} \\ \pi_{L_1} \\ \pi_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \frac{p_U}{1+p_U} \\ \frac{p_U^2}{1+p_U} \\ \frac{p_L}{1+p_L} \\ \frac{p_L^2}{1+p_L} \end{bmatrix}$$

Vale ressaltar que a convergência para a distribuição estacionária $\mathbf{\Pi}$ pode ser obtido analiticamente a partir de uma técnica de escalonamento ou mesmo computacionalmente, considerando a simplicidade de implementação desse procedimento.

¹**Teorema:** Se \mathbf{P} é uma matriz regular, adicionado ao fato de \mathbf{A} e \mathbf{a} serem tais que $\mathbf{P}^n \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{A}$, $n \rightarrow \infty$, onde \mathbf{A} é uma matriz de probabilidade de ordem r tal que cada coluna é formada pelo mesmo vetor de probabilidade $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)^T$. Então o vetor \mathbf{a} é o único vetor de probabilidades tal que $\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
Nota: Resolver $\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ é equivalente a resolver o sistema linear $(\mathbf{P} - \mathbf{I})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ - \mathbf{I} : matriz identidade ; $\mathbf{0}$: vetor de zeros.

Apêndice C

Valores de ARL 's dos esquemas \bar{Y}_s e \bar{Y}_{kl} considerando os valores de $\delta = \{0,5;3;10;15;20\}$ e do deslocamento bidirecional da média, d .

d	$\delta = 0,5$											
	$n = 3$		$n = 5$		$n = 10$		$n = 30$		$n = 100$		\bar{Y}_{kl}	
	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}		
-0,80	80,346	24,615	29,135	9,466	6,283	3,379	1,150	2,010	1,000	2,000		
-0,60	205,017	92,470	108,866	43,733	36,271	14,412	4,622	3,217	1,079	2,006		
-0,40	348,880	219,876	245,936	137,739	126,394	62,059	28,079	13,312	3,652	3,014		
-0,30	406,566	299,665	326,720	218,344	207,917	121,511	67,414	33,741	11,219	6,467		
-0,20	432,754	367,604	390,864	312,234	308,370	221,731	153,918	91,700	41,554	21,878		
-0,10	417,877	394,865	408,283	378,472	383,387	341,317	303,651	240,827	166,233	109,042		
-0,05	397,079	388,429	395,246	384,601	389,440	374,689	365,997	338,582	300,010	250,261		
-0,01	376,078	374,779	376,121	374,692	375,990	374,351	375,121	372,827	371,899	367,484		
0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398		
0,01	364,588	365,691	364,371	365,477	364,053	365,060	363,109	363,557	360,035	358,474		
0,05	340,424	344,220	337,935	340,700	332,797	332,660	314,803	304,241	264,175	232,488		
0,10	309,418	313,676	302,159	302,764	286,708	278,969	238,390	210,934	145,322	107,793		
0,20	250,513	251,300	233,079	225,683	199,195	179,150	122,842	93,587	45,095	29,183		
0,30	200,756	197,571	176,784	164,463	135,664	114,131	65,560	46,457	17,809	11,824		
0,40	161,301	155,691	134,774	121,242	94,209	75,828	38,037	26,390	8,699	6,423		
0,60	107,394	100,690	82,242	70,970	50,004	38,745	16,061	11,615	3,296	3,252		
0,80	75,276	69,520	54,051	45,904	29,946	23,237	8,516	6,773	1,883	2,423		
LCL	0,071	0,242	0,158	0,363	0,308	0,515	0,54	0,7	0,726	0,829		
UCL	3,623	2,23	2,878	1,923	2,218	1,629	1,637	1,348	1327	1185		

$\delta = 3$

d	n = 3		n = 5		n = 10		n = 30		n = 100	
	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}
-0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,60	1,557	2,003	1,006	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,40	13,045	3,877	3,266	2,265	1,107	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,30	40,254	10,746	11,798	4,343	2,430	2,231	1,003	2,000	1,000	2,000
-0,20	115,389	40,040	47,949	16,054	11,685	5,150	1,569	2,097	1,000	2,000
-0,10	300,333	169,434	192,993	96,152	85,776	38,170	15,138	7,538	2,002	2,301
-0,05	420,161	326,342	352,713	251,125	242,238	151,705	90,755	47,682	17,477	9,431
-0,01	401,111	390,424	398,403	385,057	390,255	371,471	358,553	324,095	275,896	219,874
0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
0,01	333,300	337,440	329,843	332,425	322,570	321,012	297,511	282,311	232,549	195,659
0,05	183,746	179,388	158,342	145,188	116,813	96,297	52,169	36,480	13,062	8,990
0,10	78,931	73,000	57,130	48,574	32,005	24,790	9,218	7,221	2,003	2,491
0,20	19,809	18,914	12,136	11,154	5,646	5,429	1,690	2,373	1,006	2,001
0,30	7,735	8,272	4,586	5,038	2,241	2,892	1,076	2,024	1,000	2,000
0,40	4,100	4,975	2,509	3,284	1,416	2,267	1,006	2,001	1,000	2,000
0,60	1,980	2,956	1,383	2,304	1,052	2,024	1,000	2,000	1,000	2,000
0,80	1,402	2,383	1,117	2,082	1,006	2,002	1,000	2,000	1,000	2,000
LCL	0,071	0,242	0,158	0,363	0,308	0,515	0,54	0,7	0,726	0,829
UCL	3,623	2,23	2,878	1,923	2,218	1,629	1,637	1,348	1,327	1,185

$\delta = 10$										
d	n = 3		n = 5		n = 10		n = 30		n = 100	
	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}
-0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,30	1,021	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,20	3,169	2,111	1,165	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,10	41,979	11,255	12,438	4,515	2,549	2,261	1,004	2,000	1,000	2,000
-0,05	176,507	73,809	87,625	33,049	26,561	10,530	3,231	2,676	1,022	2,001
-0,01	433,110	376,211	398,149	327,808	325,719	243,696	176,718	109,915	53,191	28,455
0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
0,01	239,633	239,536	220,519	211,772	184,284	163,234	107,573	80,323	36,659	23,620
0,05	26,184	24,536	16,416	14,590	7,752	6,962	2,153	2,671	1,026	2,004
0,10	4,727	5,554	2,857	3,584	1,547	2,365	1,012	2,002	1,000	2,000
0,20	1,347	2,328	1,095	2,065	1,004	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000
0,30	1,048	2,041	1,004	2,002	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,40	1,007	2,005	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
LCL	0,071	0,242	0,158	0,363	0,308	0,515	0,54	0,7	0,726	0,829
UCL	3,623	2,23	2,878	1,923	2,218	1,629	1,637	1,348	1,327	1,185

$\delta = 15$										
	$n = 3$		$n = 5$		$n = 10$		$n = 30$		$n = 100$	
d	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}
-0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,30	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,20	1,065	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,10	11,690	3,597	2,932	2,202	1,076	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000
-0,05	88,259	27,838	33,109	10,772	7,326	3,712	1,218	2,020	1,000	2,000
-0,01	421,614	329,677	355,909	255,516	246,893	156,079	94,321	49,923	18,552	9,952
0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
0,01	180,646	176,093	155,033	141,778	113,538	93,269	49,994	34,897	12,347	8,567
0,05	9,359	9,717	5,550	5,834	2,647	3,201	1,131	2,048	1,000	2,000
0,10	1,931	2,908	1,359	2,283	1,047	2,021	1,000	2,000	1,000	2,000
0,20	1,036	2,030	1,003	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,30	1,001	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000
LCL	0,071	0,242	0,158	0,363	0,308	0,515	0,54	0,7	0,726	0,829
UCL	3,623	2,23	2,878	1,923	2,218	1,629	1,637	1,348	1,327	1,185

$\delta = 20$											
d	n = 3		n = 5		n = 10		n = 30		n = 100		
	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	
-0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
-0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
-0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
-0,30	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
-0,20	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
-0,10	3,942	2,207	1,286	2,003	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
-0,05	45,075	12,188	13,612	4,833	2,774	2,321	1,007	2,000	1,000	2,000	
-0,01	391,229	274,920	302,085	190,962	179,792	99,187	51,581	25,032	7,725	4,857	
0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	
0,01	133,823	127,275	107,233	94,328	69,955	54,992	25,074	17,541	5,299	4,431	
0,05	4,457	5,306	2,707	3,455	1,490	2,322	1,009	2,002	1,000	2,000	
0,10	1,283	2,266	1,071	2,047	1,002	2,001	1,000	2,000	1,000	2,000	
0,20	1,003	2,002	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
0,30	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
0,40	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
0,60	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
0,80	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	
LCL	0,071	0,242	0,158	0,363	0,308	0,515	0,54	0,7	0,726	0,829	
UCL	3,623	2,23	2,878	1,923	2,218	1,629	1,637	1,348	1,327	1,185	

Apêndice D

Valores de ARL 's dos esquemas \bar{Y}_s, \bar{Y}_{kl} e \bar{Y}_{kh} considerando os valores de $\delta = \{0, 5; 3; 5; 15; 20\}$ e do deslocamento bidirecional da média, d .

		UCL2/LCL2 = $\pm 3, 5\sigma$														
		$n = 3$			$n = 5$			$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$		
δ	d	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}
0,5	-0,80	80,346	24,615	26,706	29,135	9,466	9,941	6,283	3,379	3,303	1,150	2,010	1,320	1,000	2,000	1,000
	-0,60	205,017	92,470	99,810	108,866	43,733	46,773	36,271	14,412	14,951	4,622	3,217	3,017	1,079	2,006	1,193
	-0,40	348,880	219,876	232,656	245,936	137,739	145,850	126,394	62,059	65,170	28,079	13,312	13,441	3,652	3,014	2,726
	-0,30	406,566	299,665	313,310	326,720	218,344	228,795	207,917	121,511	127,066	67,414	33,741	34,598	11,219	6,467	6,252
	-0,20	432,754	367,604	379,296	390,864	312,234	322,855	308,370	221,731	229,529	153,918	91,700	94,416	41,554	21,878	21,950
	-0,10	417,877	394,865	401,381	408,283	378,472	385,133	383,387	341,317	347,756	303,651	240,827	245,722	166,233	109,042	110,962
	-0,05	397,079	388,429	391,663	395,246	384,601	387,983	389,440	374,689	378,186	365,997	338,582	342,096	300,010	250,261	253,275
	-0,01	376,078	374,779	375,404	376,121	374,692	375,344	375,990	374,351	375,028	375,121	372,827	373,533	371,899	367,484	368,245
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	364,588	365,691	365,082	364,371	365,477	364,846	364,053	365,060	364,415	363,109	363,557	362,919	360,035	358,474	357,902
	0,05	340,424	344,220	341,368	337,935	340,700	337,816	332,797	332,660	329,867	314,803	304,241	301,979	264,175	232,488	231,337
	0,10	309,418	313,676	308,545	302,159	302,764	297,795	286,708	278,969	274,590	238,390	210,934	208,213	145,322	107,793	106,645
	0,20	250,513	251,300	243,400	233,079	225,683	218,784	199,195	179,150	174,122	122,842	93,587	91,298	45,095	29,183	28,253
	0,30	200,756	197,571	188,709	176,784	164,463	157,431	135,664	114,131	109,677	65,560	46,457	44,702	17,809	11,824	11,143
	0,40	161,301	155,691	146,861	134,774	121,242	114,758	94,209	75,828	72,092	38,037	26,390	25,028	8,699	6,423	5,875
	0,60	107,394	100,690	92,969	82,242	70,970	65,870	50,004	38,745	36,112	16,061	11,615	10,703	3,296	3,252	2,771
	0,80	75,276	69,520	63,059	54,051	45,904	41,899	29,946	23,237	21,275	8,516	6,773	6,065	1,883	2,423	1,881
	LWL	0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,54	0,7	0,694	0,726	0,829	0,826
	UWL	3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,637	1,348	1,357	1327	1185	1190
	LCL	-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	-	-	0,482	-	-	0,687
	UCL	-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	-	-	1,766	-	-	1388

δ	d	$n = 3$			$n = 5$			$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$		
		\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}
3	-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,60	1,557	2,003	1,734	1,006	2,000	1,082	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,40	13,045	3,877	4,009	3,266	2,265	2,152	1,107	2,001	1,308	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,30	40,254	10,746	11,524	11,798	4,343	4,433	2,430	2,231	2,012	1,003	2,000	1,021	1,000	2,000	1,000
	-0,20	115,389	40,040	43,502	47,949	16,054	17,040	11,685	5,150	5,174	1,569	2,097	1,660	1,000	2,000	1,001
	-0,10	300,333	169,434	180,647	192,993	96,152	102,360	85,776	38,170	40,052	15,138	7,538	7,480	2,002	2,301	1,911
	-0,05	420,161	326,342	339,680	352,713	251,125	262,002	242,238	151,705	158,183	90,755	47,682	49,028	17,477	9,431	9,259
	-0,01	401,111	390,424	394,225	398,403	385,057	389,024	390,255	371,471	375,547	358,553	324,095	328,058	275,896	219,874	222,895
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	333,300	337,440	334,008	329,843	332,425	328,985	322,570	321,012	317,747	297,511	282,311	279,834	232,549	195,659	194,511
	0,05	183,746	179,388	170,457	158,342	145,188	138,333	116,813	96,297	92,137	52,169	36,480	34,900	13,062	8,990	8,374
	0,10	78,931	73,000	66,371	57,130	48,574	44,435	32,005	24,790	22,752	9,218	7,221	6,493	2,003	2,491	1,962
	0,20	19,809	18,914	16,038	12,136	11,154	9,515	5,646	5,429	4,577	1,690	2,373	1,748	1,006	2,001	1,019
	0,30	7,735	8,272	6,633	4,586	5,038	4,027	2,241	2,892	2,194	1,076	2,024	1,140	1,000	2,000	1,000
	0,40	4,100	4,975	3,790	2,509	3,284	2,447	1,416	2,267	1,510	1,006	2,001	1,014	1,000	2,000	1,000
	0,60	1,980	2,956	2,031	1,383	2,304	1,471	1,052	2,024	1,091	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,80	1,402	2,383	1,483	1,117	2,082	1,172	1,006	2,002	1,012	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
LWL		0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,54	0,7	0,694	0,726	0,829	0,826
UWL		3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,637	1,348	1,357	1,327	1,185	1,190
LCL		-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	-	-	0,482	-	-	0,687
UCL		-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	-	-	1,766	-	-	1,388

δ	d	$n = 3$			$n = 5$			$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$		
		\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}
5	-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,60	1,000	2,000	1,001	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,40	1,954	2,014	1,828	1,027	2,000	1,185	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,30	7,482	2,784	2,809	1,970	2,053	1,831	2,000	1,086	1,086	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,20	35,840	9,483	10,140	10,209	3,925	3,983	2,142	2,161	1,910	2,000	1,010	2,000	2,000	2,000	1,000
	-0,10	169,947	69,776	75,580	82,978	30,855	32,969	24,593	9,778	10,054	2,978	2,580	2,326	1,015	2,000	1,057
	-0,05	348,027	218,896	231,653	244,921	136,871	144,948	125,537	61,516	64,601	27,764	13,166	13,289	3,606	2,994	2,705
	-0,01	416,355	394,828	401,065	407,697	379,852	386,247	384,944	345,481	351,716	310,445	249,786	254,674	176,225	117,643	119,705
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	306,564	310,752	305,441	298,814	299,085	293,965	282,345	273,823	269,353	231,567	203,161	200,441	137,148	100,523	99,376
	0,05	101,692	95,061	87,529	77,055	66,255	61,336	46,115	35,673	33,159	14,477	10,592	9,720	2,978	3,064	2,579
	0,10	27,691	25,870	22,324	17,452	15,423	13,401	8,278	7,343	6,345	2,273	2,750	2,172	1,034	2,006	1,079
	0,20	5,290	6,069	4,730	3,174	3,854	2,967	1,669	2,457	1,737	1,019	2,004	1,044	1,000	2,000	1,000
	0,30	2,275	3,245	2,290	1,531	2,432	1,615	1,089	2,045	1,146	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,40	1,490	2,471	1,573	1,154	2,112	1,219	1,010	2,004	1,020	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,60	1,095	2,084	1,135	1,013	2,008	1,023	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,80	1,021	2,017	1,033	1,001	2,001	1,002	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	LWL	0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,54	0,7	0,694	0,726	0,829	0,826
	UWL	3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,637	1,348	1,357	1,327	1,185	1,190
	LCL	-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	-	-	0,482	-	-	0,687
	UCL	-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	-	-	1,766	-	-	1,388

δ	d	n = 3			n = 5			n = 10			n = 30			n = 100						
		\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}				
10	-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,30	1,021	2,000	1,228	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,20	3,169	2,111	2,023	1,165	2,001	1,445	1,000	2,000	1,001	1,001	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,10	41,979	11,255	12,082	12,438	4,515	4,617	2,549	2,261	2,053	2,053	2,000	1,004	2,000	1,026	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,05	176,507	73,809	79,900	87,625	33,049	35,325	26,561	10,530	10,848	10,848	3,231	2,676	2,434	2,434	1,022	2,001	1,075	2,001	1,075
	-0,01	433,110	376,211	387,192	398,149	327,808	338,052	325,719	243,696	251,653	251,653	176,718	109,915	113,106	113,106	53,191	28,455	28,674	28,455	28,674
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	239,633	239,536	231,325	220,519	211,772	204,747	184,284	163,234	158,278	158,278	107,573	80,323	78,150	78,150	36,659	23,620	22,749	23,620	22,749
	0,05	26,184	24,536	21,112	16,416	14,590	12,639	7,752	6,962	5,993	5,993	2,153	2,671	2,088	2,088	1,026	2,004	1,064	2,004	1,064
	0,10	4,727	5,554	4,287	2,857	3,584	2,721	1,547	2,365	1,631	1,631	1,012	2,002	1,028	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	0,20	1,347	2,328	1,426	1,095	2,065	1,143	1,004	2,001	1,008	1,008	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	0,30	1,048	2,041	1,071	1,004	2,002	1,008	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	0,40	1,007	2,005	1,011	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	LWL	0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,506	0,54	0,7	0,694	0,694	0,726	0,829	0,826	0,829	0,826
	UWL	3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,647	1,637	1,348	1,357	1,357	1,327	1,185	1,190	1,185	1,190
	LCL	-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	0,244	-	-	0,482	0,482	-	-	0,687	-	0,687
	UCL	-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	2,493	-	-	1,766	1,766	-	-	1,388	-	1,388

δ	d	$n = 3$			$n = 5$			$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$		
		\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}
15	-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,30	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,20	1,065	2,000	1,366	1,000	2,000	1,001	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,10	11,690	3,597	3,704	2,932	2,202	2,071	1,076	2,001	1,254	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	-0,05	88,259	27,838	30,224	33,109	10,772	11,348	7,326	3,712	3,657	1,218	2,020	1,397	1,000	2,000	1,000
	-0,01	421,614	329,677	342,946	355,909	255,516	266,425	246,893	156,079	162,674	94,321	49,923	51,346	18,552	9,952	9,788
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	180,646	176,093	167,163	155,033	141,778	134,965	113,538	93,269	89,165	49,994	34,897	33,348	12,347	8,567	7,962
	0,05	9,359	9,717	7,890	5,550	5,834	4,737	2,647	3,201	2,497	1,131	2,048	1,218	1,000	2,000	1,000
	0,10	1,931	2,908	1,987	1,359	2,283	1,446	1,047	2,021	1,083	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,20	1,036	2,030	1,054	1,003	2,001	1,005	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,30	1,001	2,001	1,002	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000
	LwL	0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,54	0,7	0,694	0,726	0,829	0,826
	UWL	3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,637	1,348	1,357	1,327	1,185	1,190
	LCL	-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	-	-	0,482	-	-	0,687
	UCL	-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	-	-	1,766	-	-	1,388

δ	d	$n = 3$			$n = 5$			$n = 10$			$n = 30$			$n = 100$						
		\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}	\bar{Y}_s	\bar{Y}_{kl}	\bar{Y}_{kh}				
20	-0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,30	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,20	1,000	2,000	1,003	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,10	3,942	2,207	2,149	1,286	2,003	1,554	1,000	2,000	1,005	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,05	45,075	12,188	13,104	13,612	4,833	4,959	2,774	2,321	2,130	1,007	2,000	1,039	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000
	-0,01	391,229	274,920	288,540	302,085	190,962	200,816	179,792	99,187	103,924	51,581	25,032	25,574	7,725	4,857	4,619	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,00	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,01	133,823	127,275	118,858	107,233	94,328	88,472	69,955	54,992	51,811	25,074	17,541	16,424	5,299	4,431	3,937	370,398	370,398	370,398	370,398
	0,05	4,457	5,306	4,074	2,707	3,455	2,604	1,490	2,322	1,579	1,009	2,002	1,022	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	0,10	1,283	2,266	1,357	1,071	2,047	1,110	1,002	2,001	1,005	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	0,20	1,003	2,002	1,005	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	0,30	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	0,40	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	0,60	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	0,80	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000	2,000	1,000	1,000
	LwL	0,071	0,242	0,234	0,158	0,363	0,354	0,308	0,515	0,506	0,54	0,7	0,694	0,726	0,829	0,826	0,726	0,829	0,829	0,826
	UwL	3,623	2,23	2,269	2,878	1,923	1,951	2,218	1,629	1,647	1,637	1,348	1,357	1,327	1,185	1,190	1,637	1,348	1,357	1,190
	LCL	-	-	0,038	-	-	0,107	-	-	0,244	-	-	0,482	-	-	0,687	-	-	0,482	0,687
	UCL	-	-	4,316	-	-	3,341	-	-	2,493	-	-	1,766	-	-	1,388	-	-	1,766	1,388