



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Escola de Engenharia

Rafael Nascimento Silva

**Síntese de Observadores Constantes para
Sistemas Discretos com Parâmetros Variantes
no Tempo Sujeitos a Entradas Desconhecidas e
sua Aplicação no Projeto de Controladores por
Realimentação de Estados**

Belo Horizonte
2020

Rafael Nascimento Silva

Síntese de Observadores Constantes para Sistemas Discretos com Parâmetros Variantes no Tempo Sujeitos a Entradas Desconhecidas e sua Aplicação no Projeto de Controladores por Realimentação de Estados

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzatto Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL NASCIMENTO SILVA E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUCIANO ANTONIO FREZZATTO SANTOS.

Belo Horizonte
2020

S586s	<p>Silva, Rafael Nascimento. Síntese de observadores constantes para sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo sujeitos a entradas desconhecidas e sua aplicação no projeto de controladores por realimentação de estados [recurso eletrônico] / Rafael Nascimento Silva. - 2020. 1 recurso online (77 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Luciano Antonio Frezzatto Santos.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndices: f. 75-77.</p> <p>Bibliografia: f. 65-73.</p> <p>Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Controle robusto - Teses. 3. Controladores elétricos - Teses. I. Santos, Luciano Antonio Frezzatto. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 621.3(043)</p>
-------	--

**"Síntese de Observadores Constantes Para Sistemas Discretos
Com Parâmetros Variantes No Tempo Sujeitos A Entradas
Desconhecidas e Sua Aplicação No Projeto de Controladores
Por Realimentação de Estados"**

Rafael Nascimento Silva

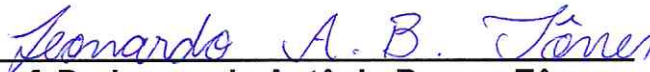
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2020.

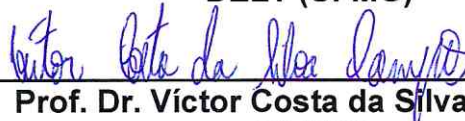
Por:



Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzatto Santos
DELT (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos
(UFMG)

Dedico esta dissertação a minha família

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a minha família, especialmente a meus pais Jaime e Maria, por todas as oportunidades que me deram, pela educação, pela confiança e por sempre estarem comigo, não importando se estavam longe.

Agradeço ao professor Luciano pela sua excelente orientação, por sua paciência e pelo conhecimento compartilhado; fatores esses que me auxiliaram no caminho para me tornar um pesquisador melhor.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) cujo conhecimento contribuíram para este trabalho, além do auxílio no processo de pesquisa que fundamenta o mesmo.

Agradeço a todos meus amigos e colegas do D!FCOM e a amigos e professores do IFBA campus Vitória da Conquista. Agradecimentos especiais a meus amigos de muitos anos, que estiveram ao meu lado e me apoiaram nas dificuldades ocorridas durante os anos do mestrado.

Agradecimentos a UFMG pela infra estrutura fornecida e agradecimentos especiais ao suporte financeiro provido pela agência CAPES.

*“Teria sido melhor ver o filme do pelé”
(Marcelo Gastaldi Júnior)*

Resumo

Este trabalho propõe condições para a síntese de observadores com matrizes constantes para sistemas discretos lineares com parâmetros variantes no tempo sujeitos a entradas desconhecidas, assim como sua aplicação para o projeto de controladores por realimentação de estados. Tal abordagem remove a necessidade de medição ou estimação dos parâmetros variantes do sistema, que é uma premissa recorrente na literatura; permitindo, também, que a metodologia proposta possa ser aplicada a outras classes de sistema. Os estados estimados pelo observador proposto são utilizados para compor uma lei de controle, por meio de um controlador por realimentação de estados com ganho constante. O problema é reescrito de maneira a apresentar equivalência ao problema de síntese de controladores por realimentação estática de saída, possibilitando que técnicas presentes na literatura sejam utilizadas para o projeto desses controladores. As condições de projeto do observador e do controlador baseado em observador são descritas em termos de problemas de otimização sujeitos a restrições na forma de desigualdades matriciais lineares. Exemplos numéricos são utilizados para validar e avaliar as abordagens propostas.

Palavras-chaves: Observador de entradas desconhecidas; Controle baseado em observador; Observador com matrizes constantes; Controle robusto; Sistemas com parâmetros variantes.

Abstract

This work proposes synthesis conditions of constant observers for discrete-time linear parameter-varying systems subject to unknown inputs, as well as their application to the design of state-feedback controllers. Such approach does not require measuring or estimating the time-varying parameters of the systems, which is a recurrent premise in the literature. This also allows the proposed methodology to be applied to other system classes. An observer-based state-feedback control law with constant gain is proposed using the states estimated by the designed observer. The procedure of designing the observer-based controllers is rewritten in a structure similar to the static output-feedback problem, allowing techniques from the literature to be applied to design such controllers. The observer and the observer-based controller design conditions are described in terms of optimization problems subject to linear matrix inequalities constraints. Numerical examples are used to validate and evaluate the proposed approaches.

Keywords: Unknown input observer; Observer-based control; Constant observer; Robust control; Parameter-varying systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.1.	35
Figura 2 – Comparação entre os estados reais (x_i) e estados estimados pelo observador (\hat{x}_i) para o sistema do Exemplo 3.1.	36
Figura 3 – Valor de erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.2.	37
Figura 4 – Comparação entre os estados reais (x_i) e estimados (\hat{x}_i) para o sistema LPV do Exemplo 3.2.	37
Figura 5 – Valor de erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.3.	38
Figura 6 – Comparação entre os estados reais (x_i) e estimados (\hat{x}_i) para o sistema LPV do Exemplo 3.3.	39
Figura 7 – Limitantes superiores do ganho ℓ_2 fornecidos pelas condições de síntese de controladores por realimentação estática de saída de (DE CAIGNY <i>et al.</i> , 2010) e (ROSA <i>et al.</i> , 2017) e do Teorema 4.1.	46
Figura 8 – Evolução temporal do estados do sistema proposto no Exemplo 5.1 sujeito a um controle baseado em observador projetado a partir do Teorema 5.1.	56
Figura 9 – Erros de estimação dos estados referentes ao sistema do Exemplo 5.1.	57
Figura 10 – Entradas de controle referentes ao sistema do Exemplo 5.1.	57
Figura 11 – Estados estimados pelo observador projetado para o Exemplo 5.1.	57
Figura 12 – Limitantes de ganho ℓ_2 obtidos para o controlador por realimentação estática de saída, projetado utilizando o Teorema 4.1, e para o controlador baseado em observador, projetado utilizando o Teorema 5.1, ambos aplicados ao Exemplo 5.2.	58
Figura 13 – Evolução do estados do sistema do Exemplo 5.3 com controlador baseado em observador projetado por meio do Teorema 5.1.	59
Figura 14 – Evolução dos estados do sistema do Exemplo 5.3 em malha aberta.	59
Figura 15 – Erros de estimação dos estados referentes ao sistema do Exemplo 5.3.	60
Figura 16 – Entrada de controle referente ao sistema do Exemplo 5.3.	60
Figura 17 – Evolução dos estados do sistema do Exemplo 5.4 com controlador baseado em observador projetado por meio dos Teoremas 5.2 e 5.3.	61
Figura 18 – Erros de estimação dos estados referentes ao sistema do Exemplo 5.4.	61
Figura 19 – Estados estimados pelo observador projetado para o Exemplo 5.4.	62
Figura 20 – Entradas de controle referente ao sistema do Exemplo 5.4.	62

Lista de tabelas

Tabela 1 – Limitantes superiores para o ganho ℓ_2 obtidos com as diferentes metodologias escolhidas aplicadas ao sistema do Exemplo 4.2.	47
Tabela 2 – Valores de μ^* obtidos para o sistema do Exemplo 4.3	48
Tabela 3 – Valores de γ obtidos com as diferentes metodologias escolhidas aplicadas ao sistema do Exemplo 5.1.	55

Lista de abreviaturas e siglas

LIT Linear Invariante no Tempo

LMI *Linear Matrix Inequality*

LPV Linear com Parâmetros Variantes

UIO Unknown Input Observer

Lista de símbolos

\in	pertence a
\forall	para todo
\mathbb{R}	conjunto do números reais
\mathbb{R}^n	espaço vetorial real de dimensão n
$>$	maior que
$<$	menor que
\geq	maior ou igual
\leq	menor ou igual
$A \succ 0$	matriz A é definida positiva
$A \prec 0$	matriz A é definida negativa
$A \succeq 0$	matriz A é semidefinida positiva
$A \preceq 0$	matriz A é semidefinida negativa
$A \succ B$	$A - B$ é definida positiva
$A \prec B$	$A - B$ é definida negativa
$(\cdot)^T$	transposta
$(\cdot)^{-1}$	inversa
$(\cdot)^{-T}$	inversa transposta
$(\cdot)^\dagger$	pseudo inversa
$\ \cdot\ _{\ell_2}$	norma ℓ_2
$\text{rank}(\cdot)$	posto da matriz
$\text{diag}(\cdot)$	matriz bloco diagonal

Sumário

Lista de ilustrações	9
Lista de tabelas	10
Lista de abreviaturas e siglas	11
Lista de símbolos	12
Sumário	13
1 Introdução	15
1.1 Objetivos	18
1.2 Organização do Texto	19
2 Fundamentos matemáticos	20
2.1 Observadores de entradas desconhecidas para sistemas LPV	20
2.2 Estabilidade de sistemas LPV	22
2.3 Sistemas Politópicos	24
2.4 Ganho L2	25
2.5 Complemento de Schur	27
2.6 Lema de Finsler	28
3 UIO com matrizes constantes	30
3.1 Introdução	30
3.2 Definição do problema	30
3.3 Resultados	32
3.4 Exemplos	34
3.5 Conclusão	39
4 Realimentação de Saída	40
4.1 Introdução	40
4.2 Definição do problema	41
4.3 Resultados	41
4.4 Exemplos	45
4.5 Conclusão	49
5 Controlador baseado UIO em constante	50
5.1 Introdução	50
5.2 Definição do problema	50
5.3 Resultados	51
5.4 Exemplos	55
6 Conclusão	63
6.1 Trabalhos Futuros	64
6.2 Trabalhos desenvolvidos	64

Referências	65
Apêndices	74
APÊNDICE A Método de 2 Estágios para Sistemas LPV	75

1 Introdução

Como abordado por (LUENBERGER, 1964; LUENBERGER, 1971), algumas técnicas de controle requerem que todos os estados do sistema estejam disponíveis para que possam ser efetivamente aplicadas. São recorrentes os casos nos quais essa premissa não é atendida seja pela impossibilidade de instalação de sensores, seja pelo custo elevado desses dispositivos, seja, ainda, pela indisponibilidade de um sensor adequado (HOLTZ, 2002; BOBTSOV *et al.*, 2018). Como maneira de lidar com esse problema, alguns controladores não se baseiam na disponibilidade de todos os estados utilizando apenas as saídas mensuráveis para realizar o controle, como acontece, por exemplo, no controle por realimentação de saída (CRUSIUS; TROFINO, 1999). Além de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, pode-se associar a qualquer controlador critérios de desempenho, como tempo de acomodação e máximo sobressinal (HANG *et al.*, 1991; RYU *et al.*, 1997; BASILIO; MATOS, 2002), normas H_2 (DOYLE *et al.*, 1989) e H_∞ (PETERSEN *et al.*, 1991; DE SOUZA; XIE, 1992), taxa de convergência (ELIA; MITTER, 2001; LORÍA; PANTELEY, 2002), dentre outros.

Outro meio de se lidar com a impossibilidade de mensurar todos os estados dá-se pelo uso de observadores, cujo principal intuito é estimar os estados do sistema a partir de saídas medidas (LUENBERGER, 1971; KUDVA *et al.*, 1980; ZEITZ, 1987). Os estados estimados podem, posteriormente, ser utilizados para a implementação de controladores por realimentação de estados, sendo que tal metodologia é conhecida na literatura por controle baseado em observador (BERGHUIS; NIJMEIJER, 1993; STORVOGEL *et al.*, 1991).

No âmbito de sistemas lineares, é possível projetar o observador e o controlador de maneira dissociada, sendo posteriormente integrados para a realização do propósito ao qual foram projetados. Essa característica de projeto se deve ao princípio da separação (WONHAM, 1968; ROTEA, 1993; CHEN, 2013). No entanto, o mesmo não pode ser considerado para os demais tipos de sistemas, requerendo que os projetos do observador e do controlador ocorram conjuntamente (ARIKUŞU; ALPASLAN PARLAKÇI, 2018).

Observadores podem, também, ser aplicados para estimação de falhas em sensores e atuadores como é tratado, por exemplo, nos projetos de Detecção e Isolação de Falhas (do inglês, *Fault Detection and Isolation* — FDI), nos quais observadores são empregados para detecção de falhas por meio da análise de resíduos. Nessa abordagem a saída estimada pelo observador é comparada com a saída do sistema gerando um resíduo que fornece informações de possíveis falhas quando seus valores ultrapassam um valor limiar (FRANK; DING, 1997; CHEN; PATTON, 2012).

Uma das classes de observadores utilizadas para tal prática são os Observado-

res de Entradas Desconhecidas (do inglês, *Unknown Input Observer* — UIO). A principal característica desses observadores é desacoplar entradas desconhecidas (distúrbios, erros de modelagem, dentre outros fatores) do erro de estimação e, conseqüentemente, do resíduo. Uma das primeiras aplicações de UIOs para estudo de falhas por meio da análise de resíduos é apresentada por (WATANABE; HIMMELBLAU, 1982). Diferentes metodologias de projeto de observadores para sistemas lineares afetados por entradas desconhecidas foram estudadas e revistas ao longo dos anos (CHEN; PATTON, 2012; YANG; WILDE, 1988; HOU; MULLER, 1992; DAROUACH *et al.*, 1994; FLOQUET *et al.*, 2006; SUNDARAM; HADJICOSTIS, 2007; BEJARANO; PISANO, 2011). Posteriormente condições de projeto de UIOs são estendidas para tratar sistemas não lineares como em (SELIGER; FRANK, 1991a; SELIGER; FRANK, 1991b; FRANK, 1994; CHEN; SAIF, 2006; KOENIG *et al.*, 2008).

Algumas aplicações de UIOs se fazem presentes nos trabalhos de (PHATAK; VISWANADHAM, 1988) e (YAZ; AZEMI, 1998) nos quais bancos de observadores são utilizados para detectar falhas em atuadores em sistemas lineares e não lineares, respectivamente. No trabalho de (ZASADZINSKI *et al.*, 1993), UIOs são aplicados para o projeto de controladores baseados em observadores, sendo que o UIO sintetizado é empregado para estimar os estados do sistema, os quais são posteriormente utilizados para realizar o controle por realimentação de estados. Outra aplicação para controle existente na literatura surge do uso de UIOs para estimativa de entradas desconhecidas (distúrbios) utilizada em aplicações como *Disturbance Accommodation Control* (DAC) (CHEN *et al.*, 2016).

Os primeiros trabalhos envolvendo o projeto de observadores e controladores recorriam ao uso de Equações Algébricas de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation* — ARE), sendo estas resolvidas por meio de Hamiltonianas (KALMAN, 1960; DE SOUZA; XIE, 1992). Com o advento da teoria de estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992) e com a melhoria de técnicas de otimização, tais problemas passam a ser escritos por meio de técnicas de programação semidefinida utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequality* — LMI) como restrições (BOYD *et al.*, 1994). As LMIs mostraram ser uma poderosa ferramenta para análise e síntese, sendo amplamente empregadas na literatura para projetar controladores (BOYD *et al.*, 1993; GAHINET; APKARIAN, 1994; MONTAGNER *et al.*, 2005; SILVESTRE *et al.*, 2009; CAI *et al.*, 2014; AGULHARI *et al.*, 2012), observadores (PALHARES; PERES, 1998; YAZ; AZEMI, 1998; CHEN; SAIF, 2006; ZEMOUCHE *et al.*, 2008; ZEMOUCHE; BOUTAYEB, 2013; CHEN *et al.*, 2016) e filtros (XIE *et al.*, 1996; PALHARES; PERES, 1998; ZHONG *et al.*, 2003; DUAN *et al.*, 2006; FREZZATTO *et al.*, 2017). Ademais, a inclusão de critérios de desempenho, como as normas H_2 (GEROMEL *et al.*, 2000; GERSHON; SHAKED, 2006; CAI *et al.*, 2014; FREZZATTO *et al.*, 2016) e H_∞ (GAHINET; APKARIAN, 1994; YU *et al.*, 2002; DE SOUZA *et al.*, 2006), é feita de forma imediata por meio

dessa ferramenta.

Os projetos com base em desigualdades matriciais originados da Teoria de Estabilidade de Lyapunov deram-se, em um primeiro momento, a partir de funcionais quadráticos constantes (BOYD *et al.*, 1994; WANG; UNBEHAUEN, 2000; APKARIAN *et al.*, 2001; YU *et al.*, 2002). Embora aplicáveis a sistemas sujeitos a incertezas, tais escolhas de funcional mostram-se excessivamente conservadoras; tornando, então, necessária a busca por funcionais mais relaxados, que provejam condições menos conservadoras. São propostos, desse modo, funcionais de Lyapunov com dependências paramétrica e polinomial na incerteza (GAHINET *et al.*, 1996; FERON *et al.*, 1996; DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a; DUAN *et al.*, 2006; OLIVEIRA; PERES, 2006; FREZZATTO *et al.*, 2015), resultando em condições menos conservadoras para análise de sistemas e síntese de controladores e observadores. Além de considerar novas funções de Lyapunov, outros graus de relaxação podem ser alcançados por meio do acréscimo de variáveis de folga às condições LMIs (DE OLIVEIRA *et al.*, 1999; DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a; SHAKED, 2001; APKARIAN *et al.*, 2001) e relaxações de Pólya (SCHERER, 2005).

Como maneira de aplicar condições LMIs para análise e controle de sistemas que apresentem não linearidades, alguns trabalhos utilizam métodos (por exemplo, não linearidade de setor (DA SILVA; TARBOURIECH, 2005; CAO *et al.*, 2003)) que possibilitam reescrever tais sistemas por meio de subsistemas lineares conectados por funções que, possivelmente, apresentam variação temporal, resultando em sistemas denominados *quasi-LPV* (Lineares com Parâmetros Variantes) (RUGH; SHAMMA, 2000).

Sistemas LPV são aqueles que apresentam dependência de parâmetros que variam no tempo. O estudo de sistema dessa classe de sistemas mostra-se importante, pois muitos sistemas apresentam ao menos um parâmetro que não é constante durante a operação (MOHAMMADPOUR; SCHERER, 2012). Várias abordagens de controle têm sido aplicadas com sucesso em áreas como: Controle de manipuladores robóticos (YU *et al.*, 2002), conversão de energia eólica (MUHANDO *et al.*, 2011), controle de sistemas de enrolamento (KOC *et al.*, 2002) e controle de dinâmica de veículos (DOUMIATI *et al.*, 2013).

Algumas estratégias para o projeto de controladores e observadores para sistemas LPV consideram que os parâmetros variantes possam ser acessados em tempo real (WANG; UNBEHAUEN, 2000; MONTAGNER *et al.*, 2007; DE CAIGNY *et al.*, 2012). Recai-se, assim, em um problema similar ao abordado no início do texto, isto é, pode não ser possível garantir que todos os parâmetros variantes sejam mensuráveis, sendo necessário construir estimadores para tais parâmetros. O trabalho de (PALMA *et al.*, 2018) utiliza um esquema de identificação reversa para estimar os parâmetros do sistema em tempo real sendo que, tais parâmetros podem apresentar divergências dos valores reais, o que é levado em consideração nas condições LMIs derivadas. Há casos em que os parâmetros podem ser mensurados mas com alguma incerteza em sua medição o que leva,

também, a condições mais complexas (DAAFOUZ *et al.*, 2008).

Utilizar controladores que não apresentam dependência paramétrica é suficiente para tratar o problema da impossibilidade de acesso a todos os parâmetros variantes. Tal metodologia é presente, por exemplo, na realimentação estática de saída (CRUSIUS; TROFINO, 1999; DE CAIGNY *et al.*, 2010; AGULHARI *et al.*, 2010; ROSA *et al.*, 2017). Porém, a equivalência para o caso de projeto de observadores é pouco tratada uma vez que não há garantia de convergência do erro de estimação para zero. O trabalho de (GU; POON, 2001) trata do caso de projetar um observador robusto para sistemas contínuos, no qual consideram-se perturbações não mensuráveis limitadas em norma na matriz de estados. Nesse trabalho, o erro de estimação não converge para zero, mas fica limitado em uma região em torno da origem. O trabalho de (MONDAL *et al.*, 2010) trata do projeto de UIOs robustos para sistemas contínuos com incertezas variantes no tempo limitadas em norma, objetivando minimizar a norma H_∞ entre o erro de estimação e os ruídos e incertezas.

Alguns trabalhos tiram proveito dos observadores robustos para utilizar em controles por realimentação de estados. Em (LIEN, 2004), condições LMIs são derivadas para o projeto de controladores robustos por realimentação de estados baseados em observadores de Luenberger. O sistema considerado é contínuo e apresenta incertezas limitadas em norma nas matrizes de estados e de saída. O trabalho de (LAN; PATTON, 2016) utiliza dos resultados de (LIEN, 2004) para derivar condições de projeto de controladores tolerantes a falhas baseado em UIOs robustos para sistemas contínuos com incertezas. Tal trabalho objetiva o projeto de, não somente o controle nominal para o sistema, como também uma compensação em caso de falhas, sendo essas estimadas por meio do UIO.

1.1 Objetivos

Tendo em vista o problema de projetar observadores e controladores baseados em observadores constantes para sistemas incertos ou com parâmetros variantes no tempo, o presente trabalho tem como objetivo principal analisar o efeito do uso de observadores de entradas desconhecidas robustos (com matrizes constantes) para estimação de estados em sistemas LPV e com incertezas politópicas, assim como utilizar a estimativa para o projeto de controladores por realimentação de estados com ganho estático. A principal motivação deste trabalho é projetar observadores e controladores com estruturas simples, capazes de atenderem aos requisitos de projeto e que não necessitem mensurar ou estimar os parâmetros do sistema.

As condições de projeto para o controlador baseado em observador são descritas na forma de LMIs que garantem estabilidade assintótica para os sistemas projetados, além de fornecerem um limitante para o ganho ℓ_2 (Norma H_∞) entre a entrada desconhecida e a saída de desempenho escolhida. As condições são escritas como equivalentes a um

problema de realimentação estática de saída sendo que observador e controlador podem ser projetados juntos.

1.2 Organização do Texto

O restante desta dissertação é organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 são apresentados, brevemente, os principais fundamentos matemáticos relacionados ao projeto de UIOs, à teoria de estabilidade de Lyapunov e condições de análise de estabilidade para sistemas discretos LPV. São apresentados fundamentos de análise de norma H_∞ e como a mesma pode ser induzida por meio da norma ℓ_2 . Nesse capítulo também são apresentados ferramentas auxiliares para obtenção dos resultados desse trabalho.

No Capítulo 3 discute-se o projeto de observadores constantes para sistemas com entradas desconhecidas. As premissas de desacoplamento para o observador proposto são introduzidas e condições LMIs para seu projeto são propostas. Ao final, exemplos numéricos são apresentados para avaliar o desempenho dos observadores projetados.

Por sua vez, o Capítulo 4 trata sobre o projeto de controladores por realimentação estática de saída e novas condições LMIs para a síntese desses controladores são apresentadas e comparadas com outras existentes na literatura. As condições obtidas são resultados suplementares obtidos por consequência do problema de projeto de controladores baseado em observador apresentado no capítulo subsequente.

O Capítulo 5 aborda com detalhes o projeto de controladores baseados em observador, utilizando o UIO projetado no Capítulo 3 e reescrevendo a estrutura do problema na forma de uma realimentação estática de saída. As condições desenvolvidas no Capítulo 4 são, então, adaptadas para a síntese do controlador proposto. Exemplos numéricos e simulações são propostos e os resultados obtidos com o controlador projetado são comparados a outros métodos de realimentação estática de saída.

Por fim, o Capítulo 6 traz as conclusões finais do trabalho e apresenta possíveis sugestões de continuidade.

2 Fundamentos matemáticos

Neste capítulo é apresentado o problema de projeto de observadores de entradas desconhecidas. Considera-se um sistema discreto linear com parâmetros variantes no tempo e um observador de ordem completa com dependência paramétrica de forma similar ao apresentado em (LI *et al.*, 2017). Para o caso proposto são revistas as condições de existência do observador de ordem completa apresentadas em (CHEN; ZHANG, 1991).

Além disso, são apresentados conceitos da teoria de estabilidade de Lyapunov em que funções de Lyapunov são utilizadas para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, assim como para projeto de observadores, filtros e controladores. As condições de estabilidade apresentadas são importantes, pois permitem que as condições de projeto possam ser escritas como LMIs.

Ademais, são revistos alguns conceitos de cômputo da norma H_∞ para sistemas LPV induzida por meio do ganho ℓ_2 , bem como sua caracterização por meio de LMIs.

2.1 Observadores de entradas desconhecidas para sistemas LPV

Seja um sistema LPV no tempo discreto dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_d(\alpha_k)d_k \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ os estados do sistema e $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ as entradas mensuráveis ou conhecidas. A entrada desconhecida $d_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ representa sinais não mensuráveis, não linearidades do sistema ou outras incertezas presentes que se deseja desacoplar da estimação. As matrizes $A(\alpha_k)$, $B_u(\alpha_k)$ e $B_d(\alpha_k)$ apresentam dependência do vetor de parâmetros variantes no tempo $\alpha_k \in \mathbb{R}^N$. Assume-se que C é uma matriz constante conhecida e que o par $(A(\alpha_k), C)$ é observável para todo valor do parâmetro α_k .

Objetiva-se projetar um observador com o qual seja possível estimar os estados do sistema sem a interferência das entradas desconhecidas. Para este trabalho utiliza-se um UIO com a estrutura proposta em (LI *et al.*, 2017), adaptado para o caso de sistemas discretos, dado por

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= A_h(\alpha_k)h_k + B_h(\alpha_k)u_k + L(\alpha_k)y_k \\ \hat{x}_k &= h_k - Ey_k, \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo $h_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ os estados internos do observador e $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o estado estimado. As matrizes $A_h(\alpha_k)$, $B_h(\alpha_k)$, $L(\alpha_k)$ e E são variáveis de projeto. Assume-se para tal estrutura que α_k possa ser perfeitamente mensurado. Essa é uma premissa forte, como comentado na introdução deste trabalho.

Com base na estrutura do observador escolhido, é possível escrever o erro de estimação como sendo $e_k = x_k - \hat{x}_k$. Uma vez que $\hat{x}_k = h_k - Ey_k$ e que $y_k = Cx_k$, o erro é, então, dado como $e_k = x_k - h_k + ECx_k = (I + EC)x_k - h_k$, resultando em $e_k = Mx_k - h_k$ sendo $M = I + EC$. Com isso, é possível escrever a dinâmica do erro de estimação como:

$$e_{k+1} = Mx_{k+1} - h_{k+1}. \quad (2.3)$$

Substituindo a dinâmica do sistema (2.1) e do observador (2.2) obtém-se

$$e_{k+1} = M[A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_d(\alpha_k)d_k] - A_h(\alpha_k)h_k - B_h(\alpha_k)u_k - L(\alpha_k)y_k. \quad (2.4)$$

Como $e_k = (I + EC)x_k - h_k$ então, h_k pode ser substituído por $(I + EC)x_k - e_k$; e y_k pode ser substituído por Cx_k , resultando em:

$$e_{k+1} = M[A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_d(\alpha_k)d_k] - A_h(\alpha_k)[(I + EC)x_k - e_k] - B_h(\alpha_k)u_k - L(\alpha_k)Cx_k, \quad (2.5)$$

em que, agrupando os termos semelhantes obtém-se:

$$\begin{aligned} e_{k+1} = & MA(\alpha_k) - A_h(\alpha_k) - [A_h(\alpha_k)E - L(\alpha_k)]Cx_k \\ & + [MB_u(\alpha_k) - B_h(\alpha_k)]u_k \\ & + MB_d(\alpha_k)d_k \\ & + A_h(\alpha_k)e_k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Objetiva-se que a dinâmica do erro de estimação não apresente influência dos estados x_k , da entrada conhecida u_k e da entrada desconhecida d_k . Para isso é realizado o desacoplamento de tais termos fazendo, $\forall \alpha_k$:

$$MA(\alpha_k) - A_h(\alpha_k) - [A_h(\alpha_k)E - L(\alpha_k)]C = 0, \quad (2.7)$$

$$MB_u(\alpha_k) - B_h(\alpha_k) = 0, \quad (2.8)$$

$$MB_d(\alpha_k) = 0. \quad (2.9)$$

A condição (2.9) pode ser reescrita substituindo-se M por $I + EC$, resultando em $B_d(\alpha_k) = -ECB_d(\alpha_k)$. Tal condição de igualdade apresenta relação direta com a condição necessária de existência de um UIO com estrutura (2.2) para um sistema LPV dado por (2.1). Essa condição é derivada de maneira semelhante à condição de existência para observadores de ordem completa para sistemas contínuos Lineares Invariantes no Tempo (LIT) apresentado em (CHEN; ZHANG, 1991) e (DAROUACH *et al.*, 1994).

Lema 2.1. *É necessário que*

$$\text{rank}(B_d(\alpha_k)) = \text{rank}(CB_d(\alpha_k)), \quad \forall \alpha_k, \quad (2.10)$$

para que exista um UIO (2.2) para o sistema (2.1).

Prova. Uma vez que $MB_d(\alpha_k) = (I + EC)B_d(\alpha_k) = 0$ então $B_d(\alpha_k) = -ECB_d(\alpha_k)$. Sendo assim, é necessário que $\text{rank}(B_d(\alpha_k)) = \text{rank}(-ECB_d(\alpha_k)) = \text{rank}(ECB_d(\alpha_k))$. Pela desigualdade de posto obtém-se

$$\text{rank}(ECB_d(\alpha_k)) \leq \text{rank}(CB_d(\alpha_k)) \leq \text{rank}(B_d(\alpha_k)) \quad (2.11)$$

o que implica na necessidade de $\text{rank}(CB_d(\alpha_k)) = \text{rank}(B_d(\alpha_k))$. \square

No caso de o lema apresentado não ser satisfeito, não é possível existir uma matriz E tal que $B_d(\alpha_k) = -ECB_d(\alpha_k)$, implicando que não existe um observador UIO com estrutura (2.2) para o sistema. Importante notar que a condição apresentada acima é somente necessária e, diferente do que é apresentado no trabalho de (CHEN; ZHANG, 1991), não foram encontradas condições necessárias e suficientes para existência do observador.

Determinada a matriz E que cumpre a condição (2.9), é possível encontrar a matriz $B_h(\alpha_k)$ que desacopla u_k fazendo $B_h(\alpha_k) = MB_u(\alpha_k)$. Reescrevendo o termo $A_h(\alpha_k)E - L(\alpha_k) = K(\alpha_k)$, a condição de desacoplamento (2.7) pode ser cumprida fazendo $A_h(\alpha_k) = MA(\alpha_k) + K(\alpha_k)C$. Ao final a dinâmica do erro é escrita como:

$$e_{k+1} = A_h(\alpha_k)e_k = [MA(\alpha_k) + K(\alpha_k)C]e_k. \quad (2.12)$$

Tal dinâmica apresenta relação direta com a definição de UIO dada por (CHEN; PATTON, 2012)

Definição 2.1. *Um observador é definido como um UIO para o sistema (2.1) se o erro de estimação de estados e_k se aproxima de zero assintoticamente, independentemente da presença de entrada desconhecida no sistema.*

A definição apresentada implica que $K(\alpha_k)$ deve ser projetado de modo que o erro de estimação convirja assintoticamente para zero. Uma vez obtido $K(\alpha_k)$, é possível determinar as matrizes $A_h(\alpha_k)$ e $L(\alpha_k)$ pelas igualdades

$$A_h(\alpha_k) = MA(\alpha_k) + K(\alpha_k)C \quad (2.13)$$

$$L(\alpha_k) = A_h(\alpha_k)E - K(\alpha_k) \quad (2.14)$$

2.2 Estabilidade de sistemas LPV

Para o projeto de observadores e controladores a teoria de estabilidade de Lyapunov é uma ferramenta fundamental, pois trata o problema de estabilidade relacionando-o a existência de uma função que cumpra determinadas restrições de desigualdade (LYAPUNOV, 1992). Neste trabalho, à estabilidade (assintótica) de um sistema é definida no

sentido de Lyapunov (HADDAD; CHELLABOINA, 2008). Assim, seja um sistema linear discreto no tempo autônomo com parâmetros variantes dado por

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k, \quad (2.15)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ são os estados do sistema e sendo $A(\alpha_k)$ limitada para todo k . O sistema (2.15) é assintoticamente estável, se para qualquer condição inicial x_0 os estados do sistema convergem para a origem quando o tempo tende a infinito, ou seja, o sistema é estável e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \forall x_0, \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (2.16)$$

Em termos da teoria de Lyapunov, o sistema (2.15) é assintoticamente estável se as condições presentes no seguinte lema forem satisfeitas.

Lema 2.2. *Se existir um função $V(x_k, k)$ e funções $a_1(\cdot)$, $a_2(\cdot)$ e $b(\cdot)$ de classe \mathcal{K} tais que*

$$V(x_k, 0) = 0, \quad \forall k \quad (2.17)$$

$$0 \leq a_1(\|x_k\|) < V(x_k, k) < a_2(\|x_k\|), \quad \forall k \quad (2.18)$$

$$\Delta V(x_k, k) = V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k) \leq -b(\|x_k\|), \quad (2.19)$$

para todos valores possíveis de x_k , então o sistema (2.1) é assintoticamente estável.

Escolhendo uma função quadrática constante $V(x_k, k) = x_k^T P x_k$, com $P \succ 0$, a relação (2.17) pode ser reescrita como

$$x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k = x_k^T [A^T(\alpha_k) P A(\alpha_k) - P] x_k \leq -b(\|x_k\|), \quad (2.20)$$

sendo suficiente que a desigualdade matricial

$$A^T(\alpha_k) P A(\alpha_k) - P \prec 0 \quad (2.21)$$

seja verdadeira, pois é possível definir um ϵ suficientemente pequeno tal que

$$A^T(\alpha_k) P A(\alpha_k) - P \preceq -\epsilon I \prec 0, \quad (2.22)$$

implicando na existência uma função de classe \mathcal{K} do tipo $b(\|x_k\|) = \epsilon x_k^T x_k$.

Como abordado na introdução deste trabalho, relaxações da condição apresentada podem ser obtidas optando-se pelo uso de funcionais que apresentem dependência dos parâmetros. Ao se escolher, por exemplo, o funcional $V(x_k, k) = x_k^T P(\alpha_k) x_k$, tal como apresentado em (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a), a condição de estabilidade resultante é dada por

$$A^T(\alpha_k) P(\alpha_{k+1}) A(\alpha_k) - P(\alpha_k) \prec 0. \quad (2.23)$$

Entretanto, tal escolha, apesar de poder resultar em menor conservadorismo, implica em maior custo computacional para resolução das condições obtidas.

Reescrevendo a condição (2.23) na forma

$$P(\alpha_k) - A^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1})P^{-1}(\alpha_{k+1})P(\alpha_{k+1})A(\alpha_k) \succ 0, \quad (2.24)$$

é possível aplicar o lema do complemento de Schur, que será apresentado na Seção 2.5, resultando na condição equivalente

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & P(\alpha_{k+1})A(\alpha_k) \\ A^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) & P(\alpha_k) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.25)$$

Note que a condição LMI apresenta dependência do parâmetro α_k . Visto que esse parâmetro pode assumir quaisquer valores dentro de uma faixa de validade, há um número infinito de condições a serem testadas. Considerações acerca do parâmetro devem ser feitas para que o problema seja solucionável por meio da análise de um conjunto finito de desigualdades.

2.3 Sistemas Politópicos

Como mencionado na seção anterior, é necessário fazer algumas considerações acerca do parâmetro α_k do sistema (2.15) para que o problema em estudo seja solucionável por meio de um conjunto finito de LMIs. Uma consideração recorrente é assumir que o parâmetro pertence ao simplex unitário

$$\Lambda_N = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.26)$$

Posto isso, uma matriz qualquer $X(\alpha_k)$, com α_k pertencente ao simplex unitário (2.26), pode ser escrita como

$$X(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} X_i, \quad (2.27)$$

que representa um politopo formado pela combinação convexa de N vértices, sendo X_i matrizes constantes e conhecidas. Assim, a matriz de estados $A(\alpha_k)$ e a matriz de Lyapunov $P(\alpha_k)$ da função quadrática podem ser escritas na forma apresentada acima. Ao considerar o caso em que o parâmetro varia arbitrariamente de um instante para outro, ou seja α_{k+1} não possui relação com α_k , é possível escrevê-los em simplices distintos. Então, pode-se aplicar as considerações feitas em (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001a) escrevendo $P(\alpha_{k+1})$ como:

$$P(\alpha_{k+1}) = \sum_{i=1}^N a_{k+1,i} P_i = \sum_{j=1}^N \xi_{k,j} P_j. \quad (2.28)$$

Dadas as estruturas apresentadas, a condição (2.25) pode ser escrita com as matrizes na sua forma politópica

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \xi_{k,i} P_j & \left(\sum_{j=1}^N \xi_{k,i} P_j \right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i^T \right) \left(\sum_{j=1}^N \xi_{k,i} P_j \right) & \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} P_i \right) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.29)$$

Uma vez que ambos os somatórios $\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i}$ e $\sum_{i=1}^N \xi_{k,i}$ são iguais à unidade, é possível realizar a seguinte operação de homogeneização:

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i}\right) \left(\sum_{i=1}^N \xi_{k,j} P_j\right) & \left(\sum_{j=1}^N \xi_{k,i} P_j\right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i\right) \\ \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} A_i^T\right) \left(\sum_{j=1}^N \xi_{k,i} P_j\right) & \left(\sum_{i=1}^N \xi_{k,i}\right) \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} P_i\right) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.30)$$

culminando na condição

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{k,i} \xi_{k,i} \begin{bmatrix} P_j & P_j A_i \\ A_i^T P_j & P_i \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.31)$$

Como $\alpha_{k,i}$ e $\xi_{k,j}$ são ambos positivos para todo $k, i = 1, 2, \dots, N$ e $j = 1, 2, \dots, N$, o seguinte lema apresenta condições finitas para certificar a estabilidade do sistema (2.15).

Lema 2.3. *Se existirem matrizes $P_i = P_i^T \succ 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} P_j & P_j A_i \\ A_i^T P_j & P_i \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.32)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N$ e $j = 1, 2, \dots, N$, então o sistema (2.15) é assintoticamente estável..

2.4 Ganho ℓ_2

Para análise e projeto de sistemas sujeitos a entradas exógenas, como distúrbios ou ruídos, é possível estabelecer critérios para quantificar a influência de tais entradas sobre a saída do sistema ou outra variável que se deseja analisar.

Tais critérios podem ser baseados na energia referente a resposta ao impulso do sistema, como a norma H_2 para sistemas LIT (ZHOU *et al.*, 1996). Outro critério estabelece a máxima relação de ganho entre uma entrada limitada qualquer e a saída do sistema definida como norma H_∞ .

Seja um sistema LPV discreto no tempo sujeito a uma entrada de distúrbio $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B_w(\alpha_k)w_k \\ z_k &= C_z(\alpha_k)x_k + D_w(\alpha_k)w_k, \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ os estados do sistema e $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída de desempenho. As matrizes $A(\alpha_k)$, $B_w(\alpha_k)$, $C_z(\alpha_k)$ e $D_w(\alpha_k)$ possuem dimensões compatíveis e α_k é um vetor de parâmetros variantes pertencente ao simplex unitário.

A norma H_∞ para um sistema LPV pode ser definida como em (XIE *et al.*, 1996; ZHONG *et al.*, 2003)

Definição 2.2. *Seja um sistema LPV dado por (2.33). O sistema é dito estável de ganho finito ℓ_2 se, para $x_0 = 0$, existir uma constante $\gamma \geq 0$ tal que*

$$\|z_k\|_{\ell_2} \leq \gamma \|w_k\|_{\ell_2},$$

sendo $\|\cdot\|_{\ell_2}$ a norma ℓ_2 dada por

$$\|z_k\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} z_k^T z_k} \quad (2.34)$$

e w_k pertencente ao espaço ℓ_2

Por meio da definição acima, pode-se caracterizar a norma H_∞ induzida do sistema a partir do ganho ℓ_2 (HILL; MOYLAN, 1980).

Definição 2.3. A norma H_∞ do sistema (2.33) equivale a norma induzida ℓ_2 , dada por

$$\gamma^* = \sup_{\|w_k\|_{\ell_2} \neq 0} \frac{\|z_k\|_{\ell_2}}{\|w_k\|_{\ell_2}}, \quad (2.35)$$

sendo w_k pertencente ao espaço ℓ_2 .

Tal definição implica que a norma H_∞ de um sistema LPV estável é dada pelo menor valor de γ tal que $\|z_k\|_{\ell_2} \leq \gamma \|w_k\|_{\ell_2}$. Note que o cômputo direto do valor da norma é trabalhoso, pois requer-se avaliar o sistema para toda entrada $w_k \in \ell_2$. Assim, usualmente, busca-se por um limitante superior para o valor da norma, o qual pode ser determinado por meio de funções de Lyapunov como apresentado a seguir.

Lema 2.4. O sistema (2.33) é assintoticamente estável com ganho finito ℓ_2 menor ou igual a γ se, para a condição inicial $x_0 = 0$, existir uma função de Lyapunov $V(x_k, \alpha_k)$ definida positiva tal que

$$\Delta V(x_k, \alpha_k) = V(x_{k+1}, \alpha_{k+1}) - V(x_k, \alpha_k) < \gamma^2 \|w_k\|^2 - \|z_k\|^2 \quad (2.36)$$

Prova. A estabilidade assintótica do sistema pode ser provada tomando $w_k = 0 \forall k$, ou seja, um sistema sem entradas. Com isso a condição do lema se resume a

$$\Delta V(x_k, \alpha_k) < -\|z_k\|^2 \leq 0, \quad (2.37)$$

que garante a estabilidade assintótica do sistema. Para o caso de w_k ser um sinal ℓ_2 limitado, toma-se o somatório de 0 a n de ambos os lados da desigualdade (2.36) resultando em

$$\sum_{k=0}^n \left(\Delta V(x_k, \alpha_k) - \gamma^2 w_k^T w_k + z_k^T z_k \right) < 0, \quad (2.38)$$

que pode ser reescrita considerando o somatório dos termos individuais

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \Delta V(x_k, \alpha_k) - \sum_{k=0}^n \gamma^2 w_k^T w_k + \sum_{k=0}^n z_k^T z_k \\ &= V(x_n, \alpha_n) - V(x_0, \alpha_0) - \sum_{k=0}^n \gamma^2 w_k^T w_k + \sum_{k=0}^n z_k^T z_k < 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como a condição inicial do sistema é $x_0 = 0$, então $V(x_0, \alpha_0) = 0$,

$$V(x_n, \alpha_n) + \sum_{k=0}^n z_k^T z_k < \sum_{k=0}^n \gamma^2 w_k^T w_k \quad (2.40)$$

e uma vez que $V(x_n, \alpha_n) > 0$ implica que

$$\sum_{k=0}^n z_k^T z_k < V(x_n, \alpha_n) + \sum_{k=0}^n z_k^T z_k < \sum_{k=0}^n \gamma^2 w_k^T w_k \implies \sum_{k=0}^n z_k^T z_k < \sum_{k=0}^n \gamma^2 w_k^T w_k \quad (2.41)$$

tomando o limite de $n \rightarrow \infty$ a desigualdade resulta em $\|z_k\|_{\ell_2} < \gamma \|w_k\|_{\ell_2}$ finalizando a prova. \square

O Lema 2.4 mostra-se bastante adequado para a obtenção de condições que certifiquem a estabilidade do sistema (2.33) e determinem um limitante superior para a norma H_∞ . Escolhendo $V(x_k, \alpha_k) = x_k^T P(\alpha_k) x_k > 0$ obtém-se um resultado recorrente na literatura que apresenta relação com o *Bounded Real Lemma* (BOYD *et al.*, 1994).

Lema 2.5. *Seja um sistema dado por (2.33), se existir matriz $P(\alpha_k) = P^T(\alpha_k) \succ 0$ tal que*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A^T(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) & 0 & C \\ * & P(\alpha_k) & P(\alpha_{k+1})B_w(\alpha_k) & 0 \\ * & * & I & D \\ * & * & * & * \quad \gamma^2 I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.42)$$

então existe um ganho finito ℓ_2 menor ou igual a γ para o sistema (2.33).

Extensões desse lema para abarcar o projeto de filtros, controladores e observadores com desempenho garantido H_∞ são vastas na literatura; veja, por exemplo, (LI; FU, 1997; DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001b; WITCZAK *et al.*, 2013; GAHINET; APKARIAN, 1994; APKARIAN *et al.*, 1995; PALHARES; PERES, 1998; DUAN *et al.*, 2006; DE SOUZA *et al.*, 2006; AGULHARI *et al.*, 2010; FREZZATTO *et al.*, 2016; ROSA *et al.*, 2017; XU *et al.*, 2019) e referências.

2.5 Complemento de Schur

Definição 2.4. *Seja*

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

- *Supondo que a matriz A seja não singular, o complemento de Schur de \mathcal{M} com relação a A e dada por $\mathcal{M}/A = D - CA^{-1}B$*
- *Supondo que a matriz D seja não singular, o complemento de Schur de \mathcal{M} com relação a D e dada por $\mathcal{M}/D = A - BD^{-1}C$*

Para o caso de \mathcal{M} ser uma matriz simétrica é possível definir uma relação entre \mathcal{M} e o complemento de Schur correspondente.

Lema 2.6 (BOYD *et al.*, 1994). *Seja \mathcal{M} simétrica dada por*

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

então

- $\mathcal{M} \succ 0$ se e somente se $A \succ 0$ e $C - B^T A^{-1} B \succ 0$,
- $\mathcal{M} \succ 0$ se e somente se $C \succ 0$ e $A - B C^{-1} B^T \succ 0$.
- $\mathcal{M} \prec 0$ se e somente se $A \prec 0$ e $C - B^T A^{-1} B \prec 0$,
- $\mathcal{M} \prec 0$ se e somente se $C \prec 0$ e $A - B C^{-1} B^T \prec 0$.

Prova. Uma vez que \mathcal{M} é definida positiva, os elementos da sua diagonal principal também o são, então A é simétrica definida positiva assim como C , e, devido a isso, as matrizes A e C são não singulares. Além do mais, \mathcal{M} pode ser escrita na forma do produto triplo.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1} B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \mathcal{T}^T \mathcal{M}_s \mathcal{T}. \quad (2.45)$$

Como $\mathcal{M} = \mathcal{T}^T \mathcal{M}_s \mathcal{T}$ e \mathcal{T} é não singular, é necessário e suficiente que \mathcal{M} seja definida positiva para que \mathcal{M}_s também o seja. Dado que \mathcal{M}_s é diagonal, é necessário e suficiente que os elementos de sua diagonal principal sejam definidos positivos, implicando que $A \succ 0$ e $C - B^T A^{-1} B \succ 0$ que finaliza a prova da primeira afirmação.

Prova semelhante poder ser realizada com relação a segunda afirmação escrevendo \mathcal{M} como

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B C^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - B C^{-1} B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^{-1} B^T & I \end{bmatrix} = \mathcal{T}^T \mathcal{M}_s \mathcal{T} \quad (2.46)$$

Para o caso de \mathcal{M} ser definida negativa, a prova acontece de maneira análoga às anteriores. \square

Tal lema é utilizado para estabelecer a relação de equivalência entre a condição (2.24) e (2.25).

2.6 Lema de Finsler

Outro importante resultado da literatura utilizado para derivar as condições desse trabalho é o Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001).

Lema 2.7. *Considere $x \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $x^T \mathcal{L} x < 0, \forall x \neq 0 : \mathcal{B} x = 0$.
2. $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{L} \mathcal{B}^{\perp} \prec 0$ sendo $\mathcal{B} \mathcal{B}^{\perp} = 0$.
3. $\exists \rho \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L} - \rho \mathcal{B}^T \mathcal{B} \prec 0$.
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $\mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \prec 0$.

Esse resultado possibilita que condições LMIs mais relaxadas sejam propostas, por meio da adição de variáveis de folga.

3 UIO com matrizes constantes

3.1 Introdução

Nesse capítulo é tratado o problema de projeto de observadores de entradas desconhecidas para sistemas LPV discretos no tempo. Diferentemente dos trabalhos de (LI *et al.*, 2017) e (ICHALAL; MAMMAR, 2015), assume-se que todas as matrizes do observador são constantes, ou seja, não apresentam dependência dos parâmetros variantes do sistema LPV. Tal consideração é feita para tratar o caso quando os parâmetros não são mensuráveis. O observador proposto apresenta uma estrutura baseada no trabalho de (CHEN; ZHANG, 1991) e, em seu projeto, visa minimizar o efeito de fatores que não puderam ser desacoplados. O projeto do observador é realizado com base em condições LMIS, as quais são o resultado principal desse capítulo.

3.2 Definição do problema

Considere um sistema com parâmetros variantes no tempo descrito na forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B_u u_k + B_d(\alpha_k)d_k \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados do sistema, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ uma entrada conhecida, $d_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ a entrada desconhecida e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída mensurada. As matrizes do sistema $A(\alpha_k)$, B_u , $B_d(\alpha_k)$ e C possuem dimensões apropriadas; considera-se que $B_d(\alpha_k)$ apresenta posto completo de colunas para todo k ; e B_u e C constantes e precisamente conhecidas. Assume-se que o parâmetro variante no tempo α_k pertence ao simplex unitário (2.26), possibilitando que as matrizes $A(\alpha_k)$ e $B_d(\alpha_k)$ possam ser escritas como em (2.27)

Além disso, considera-se que a condição de posto apresentada no Lema 2.1, é satisfeita para o sistema (3.1).

O intuito é projetar um observador na forma

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= A_h h_k + B_h u_k + L y_k \\ \hat{x}_k &= h_k - E y_k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

que rejeite a entrada desconhecida d_k , sendo $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados estimado do sistema e $h_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados internos do observador. As matrizes A_h , B_h , L e E possuem dimensões compatíveis e são assumidas constantes, sendo que essas matrizes devem ser projetadas visando minimizar o erro de estimação dos estados do sistema. A escolha de matrizes constantes possibilita a estimação dos estados sem o conhecimento

a priori dos parâmetros do sistema que, como abordado anteriormente, não são sempre acessíveis.

O erro de estimação é definido como $e_k = x_k - \hat{x}_k$, sendo possível reescrevê-lo como

$$e_k = (I + EC)x_k - h_k = Mx_k - h_k. \quad (3.3)$$

Tomando o sistema (3.1), a dinâmica do erro é dada por

$$e_{k+1} = A_h e_k + [MA(\alpha_k) - A_h - KC]x_k + (MB_u - B_h)u_k + MB_d(\alpha_k)d_k, \quad (3.4)$$

com $K = A_h E + L$. Para que haja o desacoplamento do sinal u_k e da entrada desconhecida d_k , é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$MB_u - B_h = 0, \quad (3.5)$$

$$MB_d(\alpha_k) = 0. \quad (3.6)$$

Para determinar a matriz $M = (I + EC)$ que cumpre a condição de desacoplamento (3.6), pode-se reescrever a matriz $B_d(\alpha_k)$ em (3.6) na forma (2.27), e com isso, obtém-se que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{k,i} MB_{d,i} = 0, \quad (3.7)$$

na qual $MB_{d,i} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, N$, é suficiente para que a igualdade seja satisfeita. Dadas as condições apresentadas e cumprida a condição do Lema 2.1, é possível escrever o problema como

$$H\Upsilon = Q \quad (3.8)$$

sendo

$$H = \begin{bmatrix} M & E \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} I & B_{d,1} & \dots & B_{d,N} \\ -C & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz Υ apresentar posto completo de linhas então a matriz H pode ser obtida por meio de $H = Q\Upsilon^\dagger$, em que Υ^\dagger representa a pseudo inversa à direita de Υ .

Determinada, então, a matriz M , a condição (3.5) é satisfeita escolhendo $MB_u = B_h$. Ressalta-se que a condição não poderia ser satisfeita caso a matriz B_u apresentasse dependência do parâmetro α_k .

Uma vez determinadas as matrizes M e B_h a dinâmica do erro de estimação dos estados pode ser escrita como

$$e_{k+1} = A_h e_k + [MA(\alpha_k) - A_h - KC]x_k. \quad (3.9)$$

Note que não é possível realizar o desacoplamento dos estados x_k do erro de estimação e_k devido às escolhas de matrizes constantes para o observador. Para lidar com tal problema, os estados x_k serão considerados como entradas exógenas para a dinâmica

do erro de estimação. Desse modo, o projeto do UIO deve ser feito de modo a atenuar a influência dos estados do sistema sobre a dinâmica do erro de estimação, similar à minimização do ganho ℓ_2 sobre o sistema como feito em (ZEMOUCHE *et al.*, 2008; LI; FU, 1997). O objetivo, portanto, consiste em determinar L e A_h tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0, \quad \text{para } x_k = 0, \quad (3.10)$$

$$\|e\|_{\ell_2} \leq \gamma \|x\|_{\ell_2}, \quad \text{para } x_k \neq 0, e_0 = 0, \quad (3.11)$$

A condição (3.11) implica que a norma ℓ_2 da diferença entre o estado real e o estimado está sempre limitado a uma região menor que γ vezes a norma ℓ_2 da sequência de estados do sistema. Para valores de γ pequenos, o erro de estimação também o será. Vale ressaltar que, apesar do desacoplamento das entradas conhecidas e desconhecidas ter sido feito em (3.6), a impossibilidade de desacoplar os estados da dinâmica do erro resulta na influência indireta dessas entradas sobre a dinâmica. O trabalho de (GU; POON, 2001) aponta o problema de não convergência do erro para origem, e sim, para um região em torno da mesma. Com base nisso, para não apresentar contradição com a definição 2.1, uma nova definição é apresentada acerca do UIO com matrizes constantes (robusto).

Definição 3.1. *Um observador com estrutura (3.2) será um UIO constante para o sistema LPV (3.1), se o erro de estimação convergir assintoticamente para uma região em torno da origem.*

Importante notar que a presença do estado x_k no erro de estimação não permite que tal estimador seja aplicado, da maneira como apresentado, para sistemas cujos estados cresçam indefinidamente. Por outro lado, havendo uma entrada conhecida estabilizante, é possível utilizar o estimador proposto para tratar esse tipo de sistema. Tal estimador também pode ser aplicado para controle baseado em observadores uma vez que se objetiva convergência dos estados. Esse assunto é tratado com maiores detalhes no Capítulo 5.

3.3 Resultados

Nesta seção são apresentadas as condições LMIs para síntese do observador que satisfazem as condições (3.10) e (3.11) e atenua a influência dos estados do sistema na dinâmica do erro de estimação. As condições são derivadas de forma semelhante a (ZEMOUCHE *et al.*, 2008) e o resultado apresenta relação com *Bounded Real Lemma* (BOYD *et al.*, 1994).

Teorema 3.1. *Dada uma matriz M que satisfaz a condição (3.6), se existirem matrizes $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P = P^T \succ 0$, $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e um escalar $\gamma \geq 0$ soluções do*

problema de otimização

$$\min \quad \gamma^2$$

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 & X^T \\ * & \gamma^2 I & (MA_i)^T P - X^T - C^T Y^T \\ * & * & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.12)$$

para todo $i = 1, \dots, N$, então existe um observador dado na forma (3.2) com matrizes $A_h = P^{-1}X$ e $L = A_h E - P^{-1}Y$.

Prova. Para que sejam satisfeitas as condições (3.10) e (3.11) utiliza-se do Lema 2.4 aplicado ao sistema (3.9). Escolhendo uma função de Lyapunov quadrática constante do tipo $V_k = e_k^T P e_k$, resulta na condição

$$e_{k+1}^T P e_{k+1} - e_k^T P e_k = [A_h e_k + S(\alpha_k) x_k]^T P [A_h e_k + S(\alpha_k) x_k] - e_k^T P e_k \prec 0, \quad (3.13)$$

sendo $S(\alpha_k) = MA(\alpha_k) - A_h - KC$. Definindo $s_k^T = [e_k^T, x_k^T]$, a condição (3.13) pode ser escrita como

$$s_k^T \begin{bmatrix} A_h^T P A_h - P + I & A_h^T P S(\alpha_k) \\ S(\alpha_k)^T P A_h & S^T(\alpha_k) P S(\alpha_k) - \gamma^2 I \end{bmatrix} s_k < 0, \quad (3.14)$$

a qual é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_h^T P \\ S^T(\alpha_k) P \end{bmatrix} [P^{-1}] [A_h P \quad P S(\alpha_k)] \succ 0, \quad (3.15)$$

sendo possível, por meio do Lema 2.6, obter a condição

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 & A_h^T P \\ * & \gamma^2 I & S^T(\alpha_k) P \\ * & * & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.16)$$

na qual, substituindo-se $S^T(\alpha_k) P = (MA(\alpha_k) - A_h - KC)^T P$ e aplicando a distributiva ao produto resulta em

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 & A_h^T P \\ * & \gamma^2 I & (MA(\alpha_k))^T P - A_h^T P - C^T K^T P \\ * & * & P \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.17)$$

Visto que a matriz $A(\alpha_k)$ pertence ao politopo descrito em (2.27), é possível escrever o problema com um número finito de condições (como apresentado no Lema 2.3) sendo suficiente que

$$\begin{bmatrix} P - I & 0 & A_h^T P \\ * & \gamma^2 I & (MA_i)^T P - A_h^T P - C^T K^T P \\ * & * & P \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.18)$$

para todo $i = 1, \dots, N$, para que (3.17) seja verdadeira. Realizando a troca de variáveis $A_h^T P = X^T$ e $K^T P = Y^T$ resulta em (3.12) encerrando a prova do Teorema. \square

Observação 3.1. Nota-se que as condições do Teorema 3.1 podem ser, também, aplicadas a um sistema incerto LIT. Para tanto, basta definir $\alpha_k = \alpha$ e derivar as condições de forma similar ao apresentado na prova do Teorema 3.1.

Observação 3.2. Pode-se empregar o Lema de Finsler para que sejam acrescentadas variáveis de folga ou uso de funções de Lyapunov dependentes do parâmetro de modo a obter condições menos conservadoras do que as reportadas no Teorema 3.1. Entretanto, tais considerações foram exploradas e testadas para alguns sistemas e, em todos os testes realizados não foram obtidos resultados melhores do que aqueles referentes à condição apresentada no teorema proposto.

3.4 Exemplos

Nesta seção são apresentados três exemplos tratando sistemas LPV e sistemas incertos. Todos os experimentos numéricos foram realizados em MATLAB 2018a usando o parser YALMIP (LÖFBERG, 2004) e o solver SeDuMi (STURM, 1999).

Importante ressaltar que os trabalhos de (GU; POON, 2001) e (MONDAL *et al.*, 2010) não podem ser utilizados para apresentar comparações, pois os mesmos desenvolvem seus resultados com base em sistemas contínuos e, ademais, as incertezas tratadas são limitadas em norma, diferente dos parâmetros variantes pertencentes ao domínio politópico tratados nesse trabalho. Uma vez que não são conhecidas pelo autor outras metodologias para síntese de UIOs para sistemas LPV abordados neste trabalho, não são apresentadas comparações nos exemplos reportados.

Exemplo 3.1. Este é um exemplo adaptado de (DUAN *et al.*, 2006) (Exemplo 2) em que são acrescentados os termos referentes à entrada desconhecida d_k e desconsiderados os termos de transmissão direta da entrada desconhecida para a saída do sistema.

Considere, portanto, o sistema incerto LIT descrito pelas seguintes matrizes

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1 + \delta \end{bmatrix}, & B_u &= \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_d &= \begin{bmatrix} 1 + \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo $|\delta| \leq 0,4$. Uma representação politópica com dois vértices pode ser obtida considerando os valores extremos de δ . A matriz B_d ligada a entrada desconhecida foi escolhida como dependente do parâmetro de modo a cumprir a condição do Lema 2.1, sendo possível realizar o desacoplamento (3.6).

Aplicando as condições do Teorema 3.1 ao sistema (3.19), obteve-se um limitante superior para o fator de atenuação dado por $\gamma = 1,500$.

O sistema em conjunto com o observador projetado foi simulado assumindo que as entradas d_k e u_k são sinais pseudoaleatórios gerados com distribuição normal padrão, ou

seja, com média nula e variância unitária. As condições iniciais para os estados do sistema e do observador são, respectivamente, $x_0 = [1 \ 0]^T$ e $h_0 = [0 \ 0]^T$. A Figura 1 mostra a dinâmica do erro de estimação para cada estado do sistema, enquanto a Figura 2 apresenta a evolução dos estados reais e estimados ao longo da simulação.

Para assegurar a validade do método proposto realizou-se uma simulação de Monte Carlo, repetindo o experimento por 1000 vezes para o sistema (3.19) com diferentes valores para o vetor α , os quais foram sorteados de modo arbitrário no início de cada simulação. As condições iniciais para os estados do sistema e do observador foram mantidas as mesmas, assim como as considerações acerca das entradas u_k e d_k . Os valores do ganho ℓ_2 dos estados do sistema x_k para o erro e_k foram computados, obtendo-se uma estimativa para o fator de atenuação em cada simulação. O valor de pior caso de atenuação obtido foi $\gamma_{\max} = 1,2521$ e o valor médio $\bar{\gamma} = 0,7872$, estando abaixo do obtido pelo Teorema 3.1.

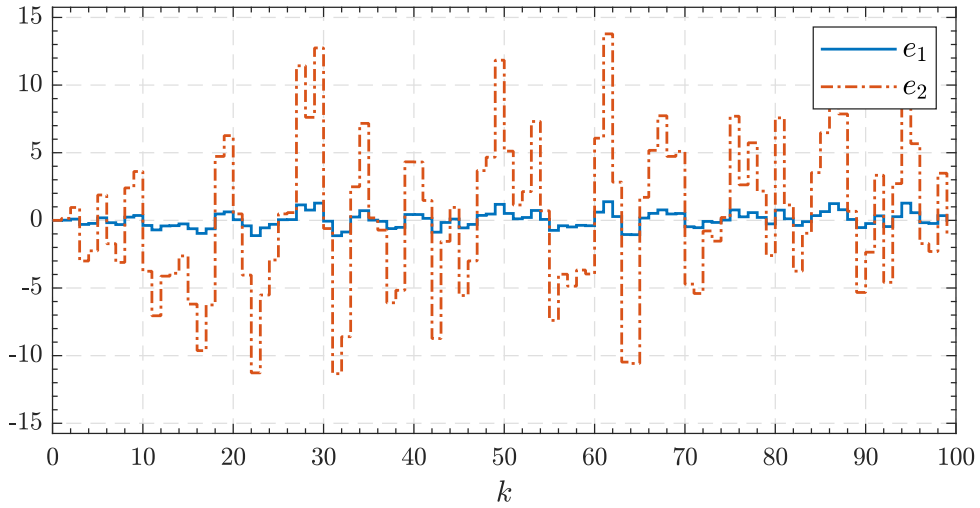


Figura 1 – Erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.1.

Exemplo 3.2. O seguinte exemplo numérico é adaptado de (GEROMEL *et al.*, 2000), sendo que a matriz de entrada B_u foi modificada, uma entrada desconhecida d_k é acrescentada e é desconsiderado o termo de transmissão direta da entrada u_k para a saída. As matrizes do sistema na forma (3.1) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 + 0,06\theta_k \\ 0,01 + 0,05\sigma_k & 0,9 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0,5\sigma_k \end{bmatrix}, \\ C = [1 \ 1], \quad (3.20)$$

no qual $|\theta_k| \leq 1$ e $|\sigma_k| \leq 1$ são parâmetros que variam no tempo de forma arbitrária. Uma representação politópica pode ser obtida considerando os valores extremos de cada parâmetro, resultando em um politopo de quatro vértices.

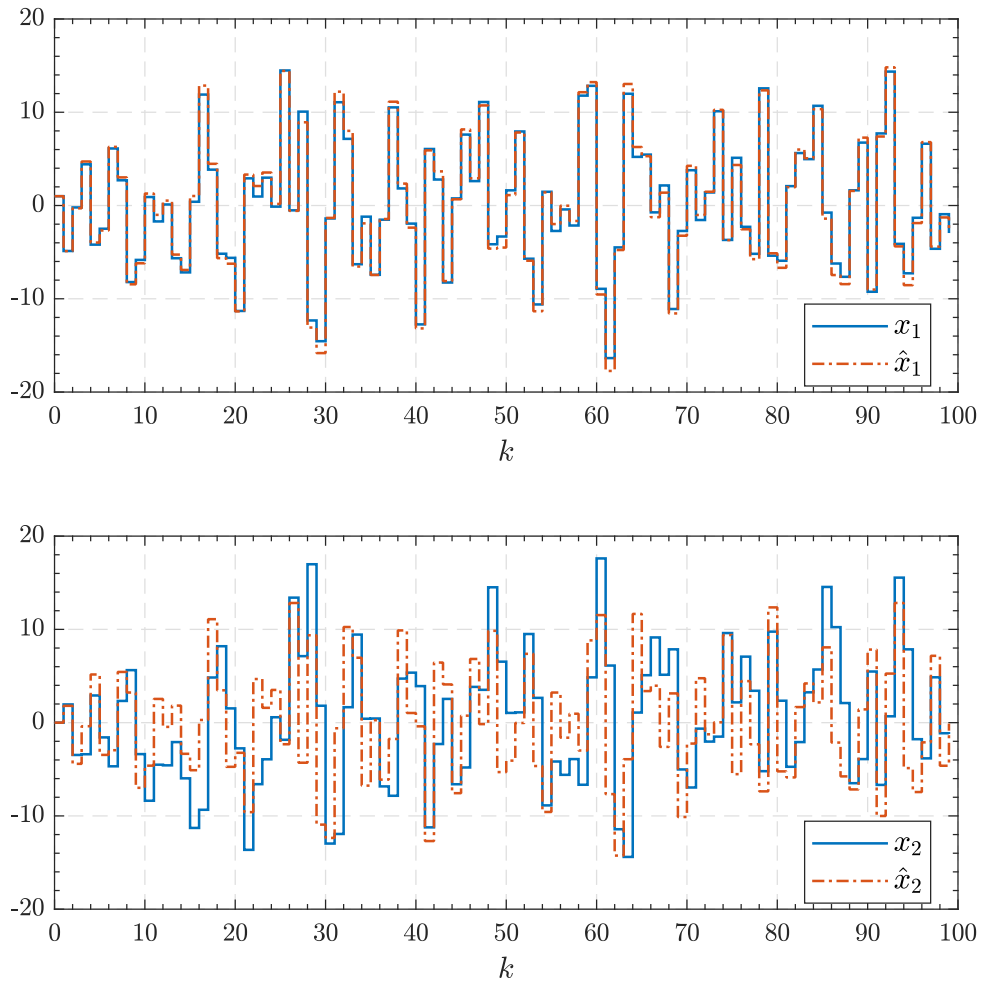


Figura 2 – Comparação entre os estados reais (x_i) e estados estimados pelo observador (\hat{x}_i) para o sistema do Exemplo 3.1.

Aplicando as condições do Teorema 3.1 ao sistema (3.20) obteve-se um limitante superior para o fator de atenuação dado por $\gamma = 0,4064$.

A simulação do sistema é realizada assumindo entradas d_k, u_k e os parâmetros variantes (θ_k e σ_k) como variáveis pseudoaleatórias com distribuição normal padrão e as condições iniciais para os estados do sistema e do observador são, respectivamente, $x_0 = [1 \ 1]^T$ e $h_0 = [0 \ 0]^T$. A Figura 3 apresenta o comportamento dos erros de estimação para cada um dos estados e, na Figura 4, a comparação entre os estados reais e estimados do sistema é ilustrada. Para a simulação realizada, o fator de atenuação estimado foi $\gamma = 0,1524$, inferior ao limitante superior obtido pelas condições LMIs.

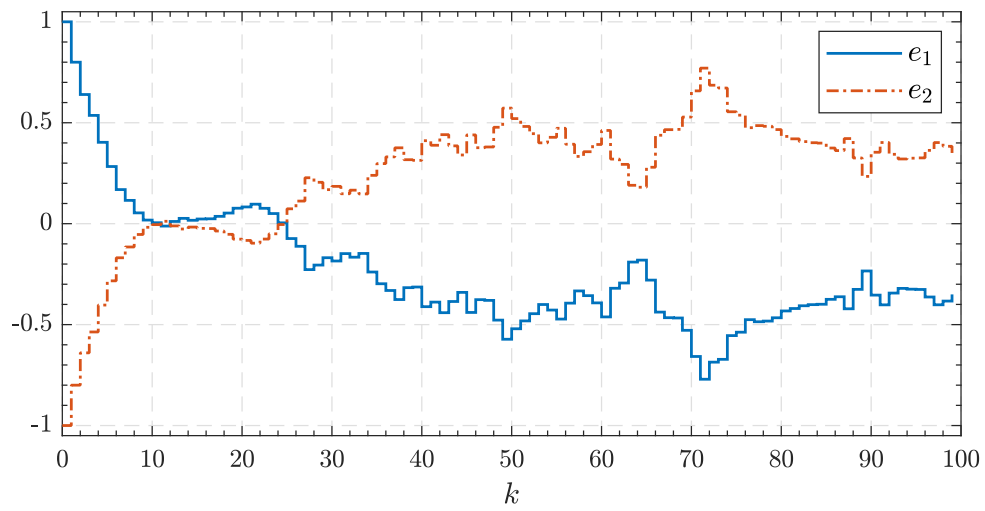


Figura 3 – Valor de erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.2.

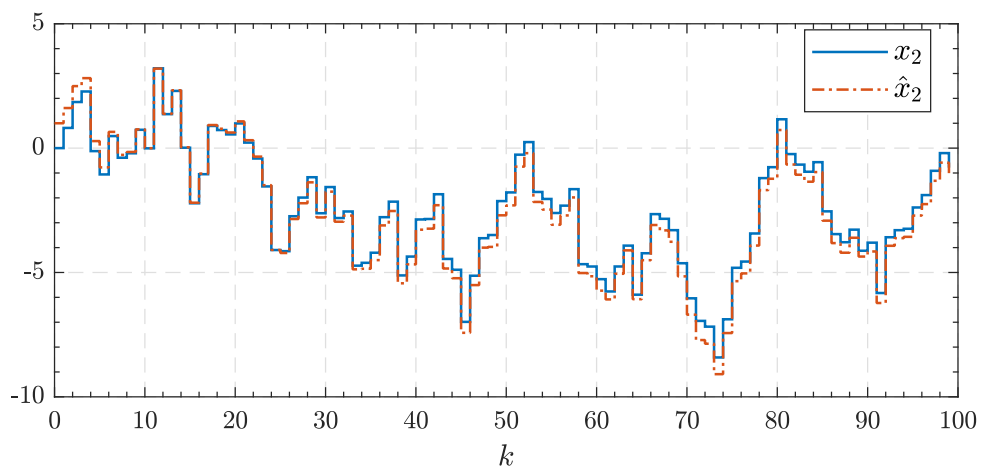
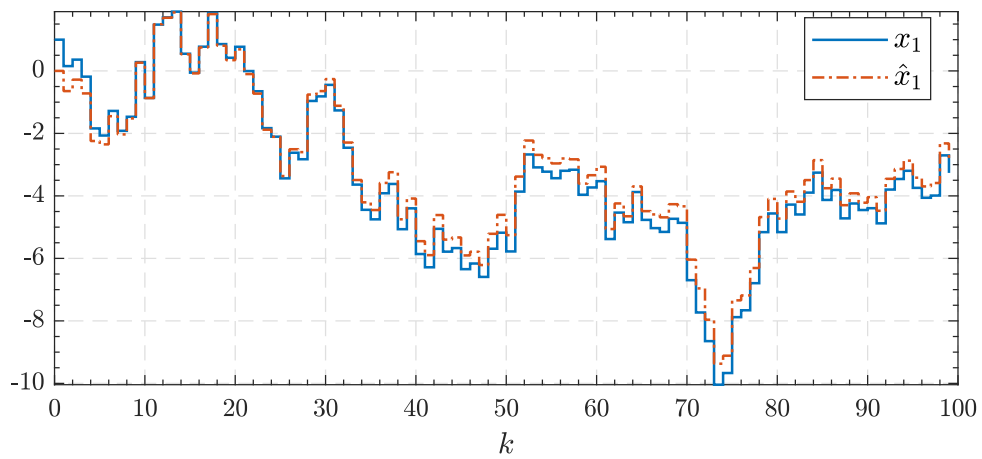


Figura 4 – Comparação entre os estados reais (x_i) e estimados (\hat{x}_i) para o sistema LPV do Exemplo 3.2.

Exemplo 3.3. O sistema LPV apresentado neste exemplo foi gerado de forma aleatória e é dado pelos vértices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,52 & 0,57 \\ 0,22 & 0,15 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,24 & -0,77 \\ -0,01 & 0,40 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{d,1} = B_{d,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema considerado, o limitante superior para o fator de atenuação obtido a partir das condições do Teorema 3.1 é $\gamma = 0,2314$.

Assim como feito nos exemplos anteriores, realizou-se uma simulação do sistema assumindo entradas d_k e u_k como sinais pseudoaleatórios com distribuição normal padrão, o vetor de parâmetros α_k é definido de forma arbitrária a cada instante k e as condições iniciais para os estados do sistema e do observador são $x_0 = [1 \ -1]^T$ e $h_0 = [0 \ 0]^T$ respectivamente. O comportamento dos erros de estimação para cada um dos estados é ilustrado na Figura 5 e a comparação entre os estados reais e estimados é mostrada na Figura 6.

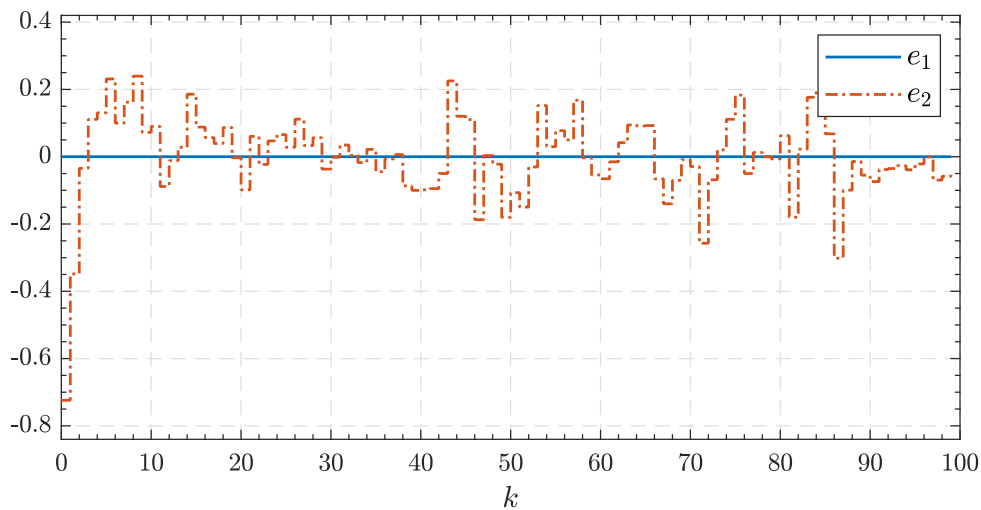


Figura 5 – Valor de erro de estimação para os estados x_1 (e_1) e x_2 (e_2) para o sistema do Exemplo 3.3.

O método de Monte Carlo foi aplicado também ao sistema do Exemplo 3.3 sendo realizadas 1000 simulações. Nesse caso, o vetor de parâmetros α_k é sorteado de modo aleatório a cada instante de tempo para todas as simulações. Foram mantidas as mesmas condições iniciais e considerações acerca de u_k e d_k . Estimativas numéricas do fator de atenuação γ foram obtidas por meio do cômputo da razão entre as normas ℓ_2 do erro e_k e dos estados do sistema x_k . O valor de pior caso de atenuação obtido foi $\gamma_{\max} = 0,1155$ e valor médio $\bar{\gamma} = 0,0911$, estando abaixo do valor obtido pelo Teorema 3.1.

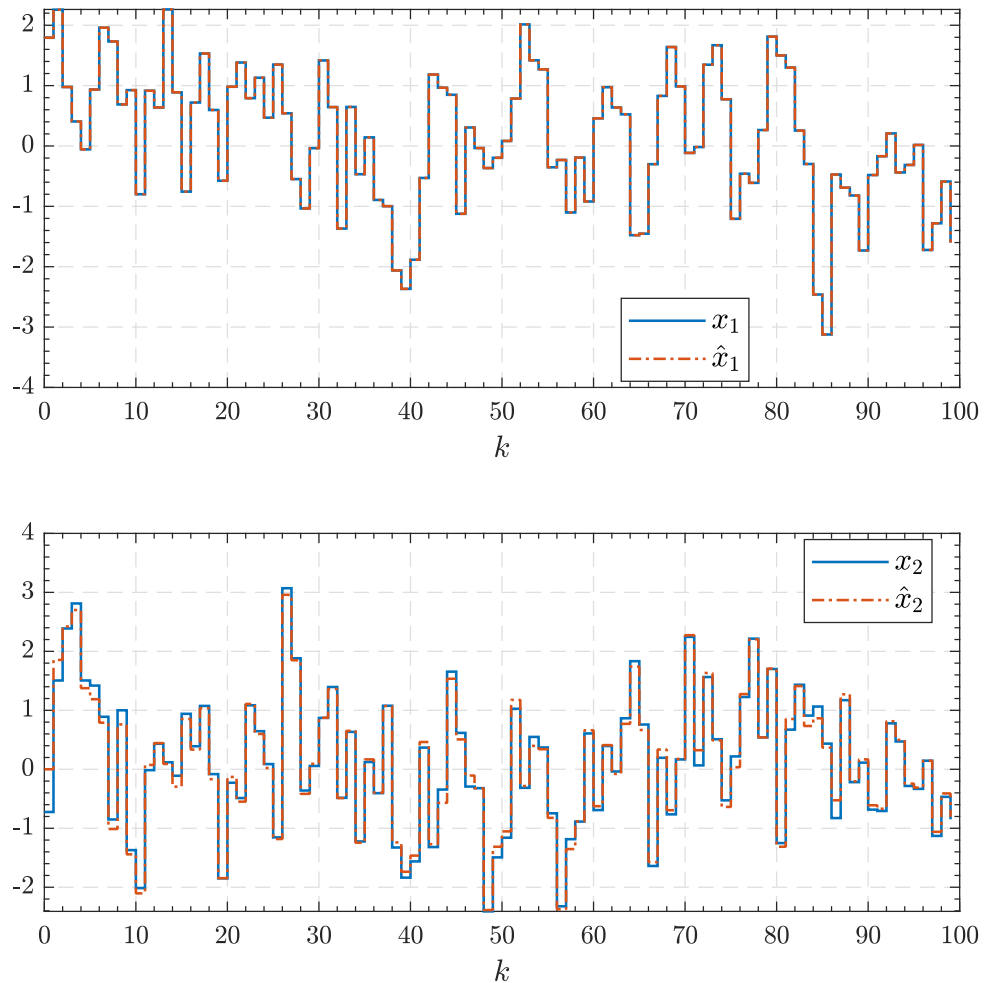


Figura 6 – Comparação entre os estados reais (x_i) e estimados (\hat{x}_i) para o sistema LPV do Exemplo 3.3.

3.5 Conclusão

Neste capítulo foram propostas condições de síntese para um observador de entradas desconhecidas com matrizes constantes para sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo. A principal vantagem do observador projetado reside no fato de que não é necessário medir ou estimar os parâmetros do sistema para computar as matrizes de observação. Dadas as características do observador projetado, as condições de síntese podem ser adaptadas para outros tipos de sistemas, por exemplo, sistemas incertos e sistemas *fuzzy*, sem a necessidade de modificações nas condições apresentadas.

A metodologia proposta não permite sua aplicação direta para estimação dos estados de sistemas cujos estados cresçam indefinidamente, uma vez que a dinâmica do estado ainda influencia de forma direta a dinâmica do erro de estimação. Todavia, será abordado no Capítulo 5 a sua possibilidade de aplicação para controladores baseados em observadores.

4 Realimentação de Saída

4.1 Introdução

O problema de síntese de controladores por realimentação estática de saída é um dos problemas de controle mais importantes e complexos de lidar no escopo de LMIs (CRUSIUS; TROFINO, 1999). Devido a isso, diversos trabalhos apresentam abordagens diferentes para tratar tal problema e obter condições convexas. Uma das primeiras abordagens propostas aplica transformações de similaridade de maneira que a matriz de saída apresente a forma $[I \ 0]$, que corresponde a uma realimentação parcial de estados (LIN; QIAN, 1998; DE CAIGNY *et al.*, 2010); então o controlador por realimentação de saída é projetado para o sistema transformado. Uma das maiores desvantagens de tal método é que a matriz de saída não pode apresentar dependência paramétrica, caso contrário não é possível determinar uma transformação convexa que satisfaça a metodologia. Essa restrição foi eliminada nos trabalhos de (AGULHARI *et al.*, 2010; AGULHARI *et al.*, 2012), nos quais um método de dois estágios é proposto. Inicialmente uma realimentação de estados virtual (podendo ser de ganho escalonado) é projetada, sendo, em seguida, utilizada no segundo estágio para projetar o controle por realimentação de saída. Mais recentemente, por meio de algumas manipulações matriciais, (ROSA *et al.*, 2017) propuseram condições de síntese capazes de determinar diretamente o controlador, sem a necessidade de aplicar a abordagem de dois estágios, mas ainda preservando as vantagens de (AGULHARI *et al.*, 2010; AGULHARI *et al.*, 2012).

Neste capítulo é abordado o problema de projeto de controladores por realimentação de saída com ganho estático. Condições LMIs para o projeto do controlador com um custo garantido ℓ_2 são apresentadas para sistemas LPV discretos no tempo. As condições propostas são obtidas com manipulações matriciais diferentes das apresentadas em (ROSA *et al.*, 2017), mas mantendo-se as características de projeto em um estágio. Visto que não são necessárias transformações sobre as matrizes do sistema, a matriz de saída pode apresentar dependência paramétrica.

Os resultados obtidos neste capítulo são suplementares e auxiliam na resolução do problema de projeto de controlador baseado em observador a ser apresentado no próximo capítulo. Ao final exemplos numéricos são apresentados a fim de comparar a abordagem proposta a outros trabalhos da literatura.

4.2 Definição do problema

Nessa seção é abordada a formulação do problema de projeto de controladores por realimentação estática de saída. Assume-se que o sistema apresenta dependência paramétrica em todas as matrizes do sistema e influência direta das entradas de controle e de distúrbio na saída controlada. Considera-se, portanto, um sistema LPV discreto na forma

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_w(\alpha_k)w_k \\z_k &= C_z(\alpha_k)x_k + D_u(\alpha_k)u_k + D_w(\alpha_k)w_k \\y_k &= C(\alpha_k)x_k\end{aligned}\tag{4.1}$$

com $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados do sistema, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ uma entrada de controle, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ um distúrbio (ou entrada exógena), $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída mensurada. As matrizes do sistema $A(\alpha_k)$, $B_u(\alpha_k)$, $B_w(\alpha_k)$, $C_z(\alpha_k)$, $D_u(\alpha_k)$, $D_w(\alpha_k)$ e $C(\alpha_k)$ apresentam dimensões apropriadas, sendo α_k o vetor de parâmetros variantes pertencente ao simplex unitário (2.26), o que permite escrever as matrizes do sistema na forma politópica (2.27).

Deseja-se projetar um controlador baseado em realimentação de saída na forma $u_k = Ly_k$, sendo L uma matriz constante, que estabiliza assintoticamente o sistema (4.1) com ganho ℓ_2 garantido menor que uma constante γ . Assim, substituindo a lei de controle escolhida no sistema (4.1), obtém-se o sistema realimentado

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (A(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)LC(\alpha_k))x_k + B_w(\alpha_k)w_k \\z_k &= (C_z(\alpha_k) + D_u(\alpha_k)LC(\alpha_k))x_k + D_w(\alpha_k)w_k.\end{aligned}\tag{4.2}$$

O projeto do controlador é realizado com base no Lema 2.4, sendo que objetiva-se determinar o mínimo ganho finito ℓ_2 entre o distúrbio w_k e a saída de desempenho z_k . O uso do Lema 2.4 permite que o problema seja escrito como um problema de minimização de γ sujeito a determinadas condições LMIs.

Na seção seguinte são apresentadas as condições de projeto para o controlador estático por realimentação de saída com garantia de limitante para o ganho ℓ_2 . As condições propostas consideram que todas as matrizes do sistema (4.1) apresentam dependência paramétrica e nenhuma estrutura particular é imposta às mesmas.

4.3 Resultados

No intuito de evitar escolhas restritivas acerca das variáveis de folga, devido a problemas de convexidade, os produtos $B_u(\alpha_k)LC(\alpha_k)$ e $D_u(\alpha_k)LC(\alpha_k)$ são escritos como

$$\bar{B}_u(\alpha_k)\bar{L}C(\alpha_k) = \begin{bmatrix} B_u(\alpha_k) & \mathbf{0}_{n \times (n-p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \Delta \end{bmatrix} C(\alpha_k),\tag{4.3}$$

$$\bar{D}_u(\alpha_k)\bar{L}C(\alpha_k) = \begin{bmatrix} D_u(\alpha_k) & \mathbf{0}_{m \times (n-p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \Delta \end{bmatrix} C(\alpha_k), \quad (4.4)$$

sendo que Δ pode ser qualquer matriz real. Importante notar que a mudança de variáveis efetuada não altera a malha do sistema (4.2), pois $\bar{B}_u(\alpha_k)\bar{L}C(\alpha_k) = B_u(\alpha_k)LC(\alpha_k)$ e $\bar{D}_u(\alpha_k)\bar{L}C(\alpha_k) = D_u(\alpha_k)LC(\alpha_k)$.

Teorema 4.1. *Dados escalares δ e β , se existirem matrizes $P(\alpha_k) = P(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_1(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_2(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_3(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_4(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_w \times n_x}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $K \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ solução do problema de otimização*

$$\min \gamma^2$$

$$\begin{bmatrix} -X_1(\alpha_k) - X_1^T(\alpha_k) & * & * & * & * & * \\ -\delta Y^T - X_2(\alpha_k) & -Y - Y^T & * & * & * & * \\ \Psi_{31}(\alpha_k) & \Psi_{32}(\alpha_k) & \Psi_{33}(\alpha_k) & * & * & * \\ B_w^T(\alpha_k)X_1^T(\alpha_k) - X_4(\alpha_k) & B_w^T(\alpha_k)X_2^T(\alpha_k) & \Psi_{43}(\alpha_k) & \Psi_{44}(\alpha_k) & * & * \\ P(\alpha_{k+1}) & P(\alpha_{k+1})\bar{B}_u(\alpha_k) & 0 & 0 & -P(\alpha_{k+1}) & * \\ 0 & \bar{D}_u(\alpha_k) & C_z(\alpha_k) & D_w(\alpha_k) & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.5)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_{31}(\alpha_k) &= A(\alpha_k)^T X_1^T(\alpha_k) + \delta C^T(\alpha_k)K^T - X_3(\alpha_k) \\ \Psi_{32}(\alpha_k) &= A(\alpha_k)^T X_2^T(\alpha_k) + C^T(\alpha_k)K^T - \beta Y \\ \Psi_{33}(\alpha_k) &= A^T(\alpha_k)X_3^T(\alpha_k) + X_3(\alpha_k)A(\alpha_k) + \beta(C^T(\alpha_k)K^T + KC(\alpha_k)) - P(\alpha_k) \\ \Psi_{43}(\alpha_k) &= B_w^T(\alpha_k)X_3^T(\alpha_k) + X_4(\alpha_k)A(\alpha_k) \\ \Psi_{44}(\alpha_k) &= X_4(\alpha_k)B_w(\alpha_k) + B_w^T(\alpha_k)X_4^T(\alpha_k) - \gamma^2 I \end{aligned}$$

então existe uma matriz de ganho $\bar{L} = Y^{-1}K$, que estabiliza assintoticamente o sistema (4.1), com ganho garantido ℓ_2 limitado superiormente por γ .

Prova. Para reduzir a notação, a dependência do parâmetro α_k é omitida e, para o caso da matriz $P(\alpha_{k+1})$ a mesma será denotada como P^+ ao longo da prova. Aplicando o Lema 2.4 ao sistema (4.2) e escolhendo uma função de Lyapunov $V(x_k, \alpha_k) = x_k^T P(\alpha_k)x_k$, a condição seguinte pode ser obtida

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ * & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.6)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= A^T P^+ A + A^T P^+ \bar{B}_u \bar{L} C + C^T \bar{L}^T \bar{B}_u^T P^+ A + C^T \bar{L}^T \bar{B}_u^T P^+ \bar{B}_u \bar{L} C - P \\ &\quad + C_z^T C_z + C_z^T \bar{D}_u \bar{L} C + C^T \bar{L}^T G_c^T C_z + C^T \bar{L}^T \bar{G}_c^T \bar{D}_u \bar{L} C, \\ \Gamma_{12} &= A^T P^+ B_w + C^T \bar{L}^T \bar{B}_u^T P^+ B_w + C_z D_w + C^T \bar{L}^T \bar{G}_c^T D_w, \\ \Gamma_{22} &= B_w^T P^+ B_w + G_w^T G_w - \gamma^2 I. \end{aligned}$$

A desigualdade (4.6) pode ser escrita na forma do produto

$$\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{L} \mathcal{B}^{\perp} \prec 0 \quad (4.7)$$

em que

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} P^+ & * & * & * \\ \bar{B}_u^T P^+ & \bar{B}_u^T P^+ \bar{B}_u + \bar{D}_u^T \bar{D}_u & * & * \\ 0 & C_z^T \bar{D}_u & C_z^T C_z - P & * \\ 0 & D_w^T \bar{D}_u & D_w^T C_z & D_w^T D_w - \gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}^{\perp T} = \begin{bmatrix} A^T & (\bar{L}C)^T & I & 0 \\ B_w^T & 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

o que permite aplicar a equivalência entre as condições 2 e 4 do Lema 2.7. Escolhendo a matriz \mathcal{B} de forma apropriada, tal que $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0$, e \mathcal{X} como

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & 0 & A & B_w \\ 0 & -I & \bar{L}C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

de modo que a desigualdade (4.7) pode ser convertida para a condição equivalente

$$\mathcal{L} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \prec 0 \quad (4.9)$$

sendo $Y_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y_3 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Y_4 \in \mathbb{R}^{n_w \times n_x}$. Ademais, a matriz \mathcal{L} pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} - \mathcal{R}^T \mathcal{S}^{-1} \mathcal{R} \quad (4.10)$$

com

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} -P^+ & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} P^+ & P^+ \bar{B}_u & 0 & 0 \\ 0 & \bar{D}_u & C_z & D_w \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo a matriz \mathcal{L} como proposto e substituindo na condição (4.9), resulta em $\mathcal{W} - \mathcal{R}^T \mathcal{S}^{-1} \mathcal{R} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \prec 0$ que, por meio do Lema 2.6 (complemento de Schur) permite obter a condição equivalente

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T & \mathcal{R}^T \\ \mathcal{R} & \mathcal{S} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.11)$$

com

$$\mathcal{W} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T = \begin{bmatrix} -X_1 - X_1^T & * & * & * \\ -Y_1^T - X_2 & -Y_2 - Y_2^T & * & * \\ A^T X_1^T + C^T \bar{L}^T Y_1^T - X_3 & A^T X_2^T + C^T \bar{L}^T Y_2^T - Y_3 & \Psi_{33} & * \\ B_w^T X_1^T - X_4 & B_w^T X_2^T - Y_4 & B_w^T X_3^T + X_4 A + Y_4 \bar{L} C & \Psi_{44} \end{bmatrix},$$

sendo $\Psi_{33} = A^T X_3 + X_3 A + Y_3 \bar{L} C + C^T \bar{L}^T Y_3^T - P$ e $\Psi_{44} = X_4 B_w + B_w^T X_4^T - \gamma^2 I$.

Note que até o momento a desigualdade apresentada está na forma bilinear, sendo necessário realizar sua linearização. Para tanto, basta definir $\bar{L}Y_1 = K_1$, $\bar{L}Y_2 = K_2$, $\bar{L}Y_3 = K_3$ e $\bar{L}Y_4 = K_4$. Entretanto, tal escolha impossibilita a recuperação da matriz \bar{L} , pois é necessário que $\bar{L} = K_1 Y_1^{-1} = K_2 Y_2^{-1} = K_3 Y_3^{-1} = K_4 Y_4^{-1}$, sendo que não existem garantias, no processo de otimização, que as matrizes Y_i e K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, satisfaçam tal condição. Como forma de solucionar esse problema, escolhem-se matrizes $Y_1 = \delta Y$, $Y_2 = Y$, $Y_3 = \beta Y$ e $Y_4 = 0$ com δ e β escalares arbitrados. Note que Y_4 não é escolhida como um múltiplo escalar de Y devido à incompatibilidade de dimensão. Tal escolha leva a uma estrutura particular para a matriz \mathcal{X} dada por

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \delta Y \\ X_2 & Y \\ X_3 & \beta Y \\ X_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

que implica em uma relação de apenas suficiência da condição 4 com a condição 2 do lema 2.7 (lema de Finsler).

Dada a estrutura escolhida para a matriz \mathcal{X} , a condição (4.11) é, então, dada por

$$\mathcal{W} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T = \begin{bmatrix} -X_1 - X_1^T & * & * & * \\ -\delta Y^T - X_2 & -Y - Y^T & * & * \\ A^T X_1^T + \delta C^T \bar{L}^T Y^T - X_3 & A^T X_2^T + C^T \bar{L}^T Y^T - \beta Y & \Psi_{33} & * \\ B_w^T X_1^T - X_4 & B_w^T X_2^T & B_w^T X_3^T + X_4 A & \Psi_{44} \end{bmatrix},$$

sendo $\Psi_{33} = A^T X_3 + X_3 A + \beta Y \bar{L} C + \beta C^T \bar{L}^T Y^T - P$ e $\Psi_{44} = X_4 B_w + B_w^T X_4^T - \gamma^2 I$.

Ao aplicar a troca de variáveis $\bar{L}Y = K$ na desigualdade, chega-se à condição LMI do Teorema 4.1. \square

A análise de estabilidade assintótica do sistema (4.2), na ausência do distúrbio w_k , pode ser inferida a partir do do Teorema 4.1 resultando no seguinte corolário.

Corolário 4.1. Dados escalares δ e β , se existirem matrizes $P(\alpha_k) = P(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_1(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_2(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $X_3(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $K \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ tal que

$$\begin{bmatrix} -X_1(\alpha_k) - X_1^T(\alpha_k) & * & * & * \\ -\delta Y^T - X_2(\alpha_k) & -Y - Y^T & * & * \\ \Psi_{31}(\alpha_k) & \Psi_{32}(\alpha_k) & \Psi_{33}(\alpha_k) & * \\ P(\alpha_{k+1}) & P(\alpha_{k+1})\bar{B}_u(\alpha_k) & 0 & -P(\alpha_{k+1}) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.13)$$

sendo

$$\Psi_{31}(\alpha_k) = A(\alpha_k)^T X_1^T(\alpha_k) + \delta C^T(\alpha_k) K^T - X_3(\alpha_k)$$

$$\Psi_{32}(\alpha_k) = A(\alpha_k)^T X_2^T(\alpha_k) + C^T(\alpha_k) K^T - \beta Y$$

$$\Psi_{33}(\alpha_k) = A^T(\alpha_k) X_3^T(\alpha_k) + X_3(\alpha_k) A(\alpha_k) + \beta (C^T(\alpha_k) K^T + K C(\alpha_k)) - P,$$

apresente factibilidade, então existe um ganho estático $\bar{L} = Y^{-1}K$ de realimentação de saída que estabiliza assintoticamente o sistema (4.1) para $w_k = 0, \forall k$.

Observação 4.1. Devido à estrutura da condição LMI reportada no Teorema 4.1, tais condições podem ser aplicadas para o projeto de controladores por realimentação de saída para sistemas incertos LIT. Para isso é suficiente escolher $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha$ nas condições propostas.

4.4 Exemplos

Nessa seção são apresentados exemplos numéricos para demonstrar a validade da metodologia proposta e os resultados são comparados com outros métodos da literatura para ilustrar as vantagens apresentadas pelo mesmo. Todos os exemplos propostos são programados com os mesmos softwares utilizados nos exemplos do Capítulo 3. Além disso, o *parser* ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019) também é utilizado para automatizar a extração de um conjunto finito de LMIs a partir das condições de síntese propostas.

Uma vez que as condições propostas no Teorema 4.1 e no Corolário 4.1 dependem de escalares dados, existe a necessidade de realizar uma busca que resulte nos menores valores de limitante para o ganho ℓ_2 . No escopo deste trabalho é realizada a busca das variáveis dentro do conjunto finito dado por $[\delta, \beta] \in \mathbb{U}_\delta \times \mathbb{U}_\beta$, em que os conjuntos \mathbb{U}_δ e \mathbb{U}_β são especificados nos exemplos.

Exemplo 4.1. O seguinte exemplo é proposto em (DE CAIGNY *et al.*, 2010) e representa um sistema politópico variante no tempo com vértices dados por

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \eta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, & B_{w,1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_{w,2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 B_{u,1} = B_{u,2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & C_1 = C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & D_{w,1} = D_{w,2} &= 0, \\
 C_{z,1} = C_{z,2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & D_{u,1} = D_{u,2} &= 0,
 \end{aligned}$$

O objetivo deste exemplo é avaliar o limitante do ganho ℓ_2 obtido para cada valor de η dentro do intervalo $[0,43,0,465]$. O projeto do controlador é realizado com base no Teorema 4.1 (Te 4.1), sendo a busca dos escalares realizada considerando os conjuntos

$$\mathbb{U}_\delta = \mathbb{U}_\beta = \{-1; -0,9; \dots; 0,9; 1\}. \quad (4.14)$$

Os valores de γ obtidos são comparados às condições de síntese para controladores de ganho escalonado e robustos apresentados em (DE CAIGNY *et al.*, 2010, Theorem 8, Corollary 1)(dCCOPS10, dCCOPS10_{rob}) e em (ROSA *et al.*, 2017, Corollary 1)(RMO17, RMO17_{rob}). A Figura 7 apresenta os limitantes para o ganho ℓ_2 obtidos a partir das condições de síntese propostas para valores de η no intervalo $[0,430, 0,465]$.

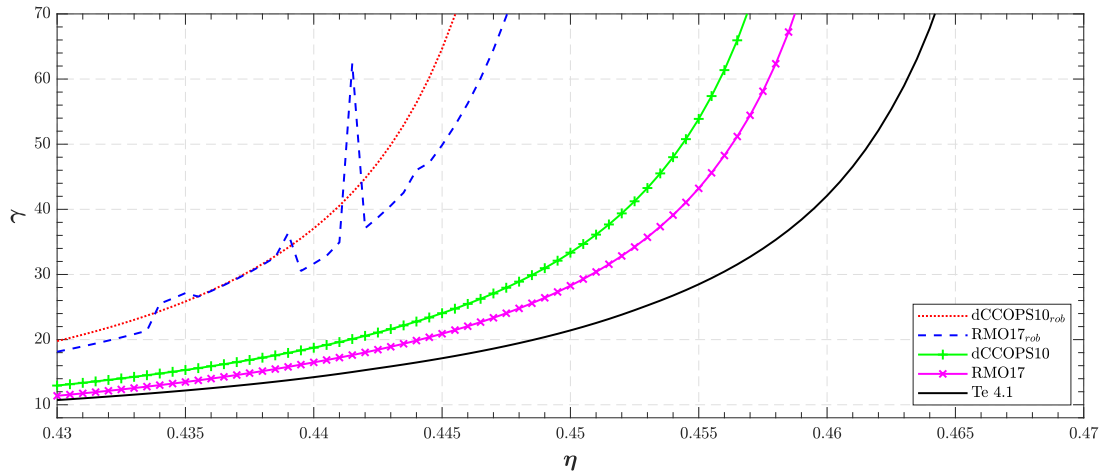


Figura 7 – Limitantes superiores do ganho ℓ_2 fornecidos pelas condições de síntese de controladores por realimentação estática de saída de (DE CAIGNY *et al.*, 2010) e (ROSA *et al.*, 2017) e do Teorema 4.1.

Como pode ser observado na Figura 7, os resultados obtidos pelo Teorema 4.1 mostram-se menos conservadores, uma vez que apresentam menores valores de limitante do que as metodologias propostas em (DE CAIGNY *et al.*, 2010) e (ROSA *et al.*, 2017). Importante notar que os resultados obtidos apresentam limitantes menores que os obtidos para o caso de ganho escalonado, ainda que o controlador projetado seja de ganho estático.

Exemplo 4.2. Considere o exemplo adaptado de (EMEDI; KARIMI, 2015), usado também em (ROSA, 2017), cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned}
 A(\theta) &= \begin{bmatrix} 0,7370 & 0,0777 & 0,0810 & 0,0732 \\ 0,2272 & 0,9030 & 0,0282 & 0,1804 \\ -0,0490 & 0,0900 & 0,7111 & -0,2322 \\ -0,1726 & -0,0931 & 0,1442 & 0,7744 \end{bmatrix} \\
 &\quad + \theta \begin{bmatrix} 0,0819 & 0,0086 & 0,0090 & 0,0081 \\ 0,0252 & 0,1003 & 0,0031 & 0,0200 \\ -0,0055 & 0,0010 & 0,0790 & -0,0258 \\ -0,0192 & -0,0103 & 0,0160 & 0,0860 \end{bmatrix}, \\
 B_u &= \begin{bmatrix} 0,0045 & 0,0044 \\ 0,1001 & 0,0100 \\ 0,0003 & -0,0136 \\ -0,0051 & 0,0936 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0,0953 & 0 & 0 \\ 0,0145 & 0 & 0 \\ 0,0862 & 0 & 0 \\ -0,0011 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 D_w &= 0.
 \end{aligned}$$

sendo θ um parâmetro variante pertencente ao intervalo $[-1 \ 1]$, resultando em um sistema de 2 vértices, obtido pela escolha dos valores extremos de θ dentro do intervalo.

No exemplo proposto visa-se projetar um controlador por realimentação estática de saída. A Tabela 1 apresenta a comparação entre os limitantes de ganho obtidos pelo Teorema 4.1, com busca escalar realizada considerando os conjuntos (4.14), e as condições propostas em (DE CAIGNY *et al.*, 2010, Corollary 1)(dCCOPS10_{rob}) e (ROSA, 2017, Corollary 4.1)(R17_{rob}) aplicadas ao sistema proposto.

Tabela 1 – Limitantes superiores para o ganho ℓ_2 obtidos com as diferentes metodologias escolhidas aplicadas ao sistema do Exemplo 4.2.

Método	Limitante de ganho ℓ_2
Te4.1	1,4043
R17 _{rob}	1,4290
dCCOPS10 _{rob}	1,8943

Como observado na Tabela 1, a metodologia proposta apresenta menores valores de limitante superior para o sistema LPV tratado, se comparado aos resultados das outras metodologias.

Exemplo 4.3. Seja o sistema com 2 vértices, sem a presença de entrada exógena w_k , retirado de (DONG; YANG, 2008)

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1,3 + \mu & -1,0 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0,8 & -1,5 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}, \\ B_{u,1} &= \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,2 \end{bmatrix}, & B_{u,2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [1,0 \quad 1,5], & C_2 &= [1 \quad 1], \end{aligned}$$

O propósito desse exemplo é determinar o máximo valor do parâmetro μ (μ^*) para o qual o sistema pode ser estabilizado por meio de uma realimentação estática de saída. Como apenas estabilidade é requerida para tal problema, utilizam-se as condições do Corolário 4.1, com busca escalar realizada considerando os conjuntos (4.14), para o projeto do controlador.

O valor de μ^* e o ganho do controlador correspondente são apresentados na Tabela 2, juntamente com os resultados obtidos ao aplicar as condições propostas em (DONG; YANG, 2008)(DY08) e (ROSA *et al.*, 2018)(RMO18).

Tabela 2 – Valores de μ^* obtidos para o sistema do Exemplo 4.3

Método	μ^*	L
Corolário 4.1 (com $[\delta \ \beta] = [0,2 \ 0,9]$)	0,86	-1,7581
RMO18 (com $[\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3 \ \epsilon \ \xi \ \rho] = [0 \ 0 \ 0,29 \ 1,0 \ -0,75 \ 1,0]$)	0,42	-1,7647
DY08	0,40	-1,3336

Como pode ser notado pelos resultados apresentados, as condições propostas apresentam-se menos conservadoras do que as propostas em (DONG; YANG, 2008) e (ROSA *et al.*, 2018), fornecendo valores de μ^* que são pouco mais do que o dobro do que o obtido nas outras abordagens. Como as condições de (DE CAIGNY *et al.*, 2010) necessitam que a matriz de saída mensurada seja contante e precisamente conhecida, não é possível aplicá-las a esse exemplo, uma vez que a matriz de saída apresenta dependência do parâmetro variante.

Exemplo 4.4. Como proposto na Observação 4.1, as condições propostas no Teorema 4.1 podem ser adaptadas para sistemas incertos; com isso, o seguinte exemplo é proposto para avaliar tal abordagem. Considerando o sistema incerto com 2 vértices proposto em (AGU-LHARI *et al.*, 2010).

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,4 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0,6 \\ -0,7 & -1,3 \end{bmatrix}, & B_{u,1} &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2,1 \end{bmatrix} & B_{u,2} &= \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix} \\ B_{w,1} = B_{w,2} &= \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix}, & C_1 = C_2 &= [1,3 \quad 0], & D_{u,1} &= 0,8, & D_{u,2} &= -0,9, \\ & & C_{z,1} = C_{z,2} &= [1 \quad 0], & D_{w,1} &= D_{w,2} &= 0, \end{aligned}$$

Aplicam-se as condições propostas utilizando os conjuntos $\mathbb{U}_\delta = 0$ e $\mathbb{U}_\beta = \{-1, -0,95; -0,90; \dots; 0,90; 0,95; 1\}$ para a busca das variáveis escalares obtendo $\gamma = 15,75$ com $\beta = 0,95$. Esse resultado é melhor do que o limitante $\gamma = 17,72$ obtido pelo método de (AGULHARI *et al.*, 2010, Theorem 2 and Theorem 3).

4.5 Conclusão

Nesse capítulo foram propostas condições de síntese para controladores por realimentação estática de saída, com ganho ℓ_2 garantido para sistemas LPV, sendo possível sua extensão para sistemas incertos invariantes no tempo. As condições, como ilustrado nos exemplos apresentados, mostram-se menos conservadoras, resultando em melhores (menores) valores para o limitante superior do ganho ℓ_2 . Além disso, não se exigem estruturas específicas para as matrizes do sistema e permite-se que todas apresentem dependência dos parâmetros variantes. As condições, também, apresentam a simplicidade de projetar o controlador em apenas um estágio, entretanto exige que uma busca seja realizada em dois parâmetros. Os resultados apontados nesse capítulo também são importantes para o projeto de controladores baseados em UIO constantes (apresentado no capítulo seguinte), uma vez que o problema é reescrito como equivalente a um projeto de controlador por realimentação estática de saída.

5 Controlador baseado UIO em constante

5.1 Introdução

O observador de entradas desconhecidas proposto no Capítulo 3 apresenta desempenho satisfatório para estimação dos estados do sistema, contanto que o sistema seja estável. Apesar disso, é possível empregar essa classe de UIOs para tratar o problema de projeto de controladores baseados em observador, ainda que o sistema a ser controlado seja instável em malha aberta. Para tanto, requer-se que o projeto do controlador e do observador seja feito de forma conjunta. Neste capítulo são abordados os passos necessários para alcançar tal objetivo.

5.2 Definição do problema

Considere um sistema LPV descrito na forma:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_d(\alpha_k)d_k \\z_k &= C_z(\alpha_k)x_k \\y_k &= Cx_k,\end{aligned}\tag{5.1}$$

com $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados do sistema, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ uma entrada conhecida, $d_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ a entrada desconhecida, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída de controle e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída mensurada. As matrizes $A(\alpha_k)$, $B_u(\alpha_k)$, $B_d(\alpha_k)$ e $C_z(\alpha_k)$ apresentam dependência paramétrica e C é constante e precisamente conhecida. É assumido que o vetor de parâmetros α_k pertence ao simplex unitário (2.26), permitindo escrever as matrizes do sistema como pertencentes a um domínio politópico, semelhante ao definido em (2.26) e (2.27).

Deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação de estados para o sistema (5.1), porém, é assumido que os estados do sistema não estejam totalmente disponíveis para realimentação. Por isso, objetiva-se controlar o sistema por meio de uma lei de controle do tipo $u_k = K_c \hat{x}_k$, sendo \hat{x}_k os estados estimados por meio de um UIO dado por

$$\begin{aligned}h_{k+1} &= A_h h_k + L y_k \\ \hat{x}_k &= h_k - E y_k,\end{aligned}\tag{5.2}$$

em que $h_k \in \mathbb{R}^{n_h}$ são os estados internos do observador e A_h , L e E matrizes constantes, precisamente conhecidas e com dimensões apropriadas. Assume-se também que a condição de posto do Lema 2.1 apresentada no Capítulo 2 é satisfeita para o sistema (5.1).

Semelhante ao procedimento efetuado na Seção 3.2, o erro de estimação é definido como $e_k = x_k - \hat{x}_k = (I + EC)x_k - h_k = Mx_k - h_x$, o que possibilita escrever a

dinâmica do erro de estimação na forma

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= Mx_{k+1} - h_{k+1} \\
&= M[A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_d(\alpha_k)d_k] - [A_h h_k + Ly_k] \\
&= M[A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)K_c \hat{x}_k + B_d(\alpha_k)d_k] - [A_h(\hat{x}_k + Ey_k) + Ly_k] \\
&= [MA(\alpha_k) - A_h EC - LC]x_k - [A_h - B_u(\alpha_k)K_c]\hat{x}_k + MB_d(\alpha_k)d_k. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Como também apresentado na Seção 3.2, as matrizes M e E podem ser determinadas por meio da resolução do sistema (3.8), desacoplando d_k da dinâmica do erro. Escolhendo $A_h E + L = R$, e sabendo que $\hat{x}_k = x_k - e_k$, a dinâmica do erro é dada por

$$e_{k+1} = [A_h - B_u(\alpha_k)K_c]e_k + [MA(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)K_c - RC - A_h]x_k \tag{5.4}$$

e o sistema (5.1) em malha fechada pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= [A(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)K_c]x_k - B_u(\alpha_k)K_c e_k + B_d(\alpha_k)d_k \\
z_k &= C_z(\alpha_k)x_k \\
y_k &= Cx_k
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Combinando ambas as dinâmicas e fazendo $s_k = [x_k^T \ e_k^T]^T$, constrói-se o seguinte sistema aumentado

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= \begin{bmatrix} A(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)K_c & -B_u(\alpha_k)K_c \\ MA(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)K_c - RC - A_h & A_h - B_u(\alpha_k)K_c \end{bmatrix} s_k + \begin{bmatrix} B_d(\alpha_k) \\ 0 \end{bmatrix} d_k. \\
z_k &= \begin{bmatrix} C_z(\alpha_k) & 0 \end{bmatrix} s_k
\end{aligned} \tag{5.6}$$

O problema resume-se, então, a determinar as matrizes de projeto K_c , A_h e R (assumindo que M e E soluções de (3.8)) tais que o sistema aumentado seja assintoticamente estável e apresente ganho garantido ℓ_2 entre os estados e a entrada desconhecida. A presença dos produtos $B_u(\alpha_k)K_c$ com a matriz de projeto K_c multiplicando à direita, juntamente com RC com a matriz de projeto R multiplicando à esquerda pode implicar em não conve-xidades no problema de otimização. Ademais, devido à estrutura da matriz de estados aumentada não é possível aplicar o princípio da separação e projetar separadamente o controlador e o observador.

5.3 Resultados

Para lidar com o problema de projeto de controle baseado em observador re-tratado anteriormente, opta-se por reescrever o sistema (5.6) como:

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= [A_s(\alpha_k) + B_s(\alpha_k)L_s C_s]s_k + \hat{B}_d(\alpha_k)d_k \\
z_k &= \hat{C}_z(\alpha_k)s_k
\end{aligned} \tag{5.7}$$

sendo

$$A_s(\alpha_k) = \begin{bmatrix} A(\alpha_k) & 0 \\ MA(\alpha_k) & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s(\alpha_k) = \begin{bmatrix} B_u(\alpha_k) & 0 \\ MB_u(\alpha_k) & -I \end{bmatrix}, \quad L_s = \begin{bmatrix} K_c & 0 \\ A_h & R \end{bmatrix},$$

$$C_s = \begin{bmatrix} I & -I \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_d(\alpha_k) = \begin{bmatrix} B_d(\alpha_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_z(\alpha_k) = \begin{bmatrix} C_z(\alpha_k) & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que a estrutura do sistema (5.7) apresenta equivalência com o problema de projeto de um controlador por realimentação estática de saída, com lei de controle $\hat{u}_k = L_s y_k$, para um sistema dado por

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= A_s(\alpha_k) s_k + B_s(\alpha_k) \hat{u}_k + \hat{B}_d(\alpha_k) d_k \\ y_k &= C_s s_k \\ z_k &= \hat{C}_z(\alpha_k) s_k. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Importante ressaltar que, caso seja escolhida uma lei de controle $\hat{u}_k = W y_k$ em que W é uma matriz cheia, não é possível recuperar os ganhos A_h , R e K_c do problema original. Em vista do que foi apresentado, é necessário impôr estruturas a algumas matrizes nas condições de projeto do controlador por realimentação estática de saída, para que seja recuperada uma matriz com mesma estrutura que L_s .

Sendo assim, é possível aplicar as condições de projeto abordadas no Capítulo 4 para projetar o controlador baseado em observador proposto neste capítulo. Igualmente, outras metodologias citadas no Capítulo 4 podem ser utilizadas para síntese do controlador, sendo necessário, como mencionado, impôr estruturas para alguns matrizes de projeto.

Antes de apresentar o principal teorema do capítulo é importante notar que, tal como abordado no Capítulo 4, faz-se necessário rescrever o produto $B_s(\alpha_k) L_s C_s$ como o produto das matrizes aumentadas $\bar{B}_s(\alpha_k) \bar{L}_s C_s(\alpha_k)$, de forma similar ao retratado em (4.3). Todavia, ao invés de aumentar a matriz $B_s(\alpha_k)$ e L_s com um bloco de zeros e uma matriz qualquer, realiza-se tal expansão da seguinte forma:

$$\bar{B}_s(\alpha_k) \bar{L}_s C_s = \begin{bmatrix} \hat{B}_u(\alpha_k) & 0 \\ M \hat{B}_u(\alpha_k) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_c & 0 \\ A_h & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -I \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

sendo

$$\hat{B}_u(\alpha_k) = \begin{bmatrix} B_u(\alpha_k) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{K}_c = \begin{bmatrix} K_c & \Delta \end{bmatrix}.$$

Teorema 5.1. *Dados escalares δ e β , se existirem matrizes $P(\alpha_k) = P(\alpha_k)^T \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $X_1(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $X_2(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $X_3(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $X_4(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_w \times 2n_x}$, $Y \in$*

$\mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ e $K \in \mathbb{R}^{2n_x \times (n_y + n_x)}$ soluções do problema de otimização

$$\min \gamma^2$$

$$\begin{bmatrix} -X_1(\alpha_k) - X_1^T(\alpha_k) & * & * & * & * & * \\ -\delta Y^T - X_2(\alpha_k) & -Y - Y^T & * & * & * & * \\ \Psi_{31}(\alpha_k) & \Psi_{32}(\alpha_k) & \Psi_{33}(\alpha_k) & * & * & * \\ \hat{B}_d^T(\alpha_k)X_1^T(\alpha_k) - X_4(\alpha_k) & \hat{B}_d^T(\alpha_k)X_2^T(\alpha_k) & \Psi_{43}(\alpha_k) & \Psi_{44}(\alpha_k) & * & * \\ P(\alpha_{k+1}) & P(\alpha_{k+1})\bar{B}_s(\alpha_k) & 0 & 0 & -P(\alpha_{k+1}) & * \\ 0 & 0 & \hat{C}_z(\alpha_k) & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_{31}(\alpha_k) &= A_s(\alpha_k)^T X_1^T(\alpha_k) + \delta C_s^T K^T - X_3(\alpha_k) \\ \Psi_{32}(\alpha_k) &= A_s(\alpha_k)^T X_2^T(\alpha_k) + C_s^T K^T - \beta Y \\ \Psi_{33}(\alpha_k) &= A_s^T(\alpha_k) X_3^T(\alpha_k) + X_3(\alpha_k) A_s(\alpha_k) + \beta(C_s^T K^T + K C_s) - P(\alpha_k) \\ \Psi_{43}(\alpha_k) &= \hat{B}_d^T(\alpha_k) X_3^T(\alpha_k) + X_4(\alpha_k) A(\alpha_k) \\ \Psi_{44}(\alpha_k) &= X_4(\alpha_k) \hat{B}_d(\alpha_k) + \hat{B}_d^T(\alpha_k) X_4^T(\alpha_k) - \gamma^2 I \end{aligned}$$

e as matrizes Y e K com estruturas

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

então existe uma matriz de ganho $\bar{L}_s = Y^{-1}K$, que estabiliza assintoticamente o sistema (5.7), com ganho garantido ℓ_2 limitado superiormente por γ .

Prova. A prova das condições LMIs do Teorema 5.1 segue a mesma estrutura da prova do Teorema 4.1, restando demonstrar que é possível recuperar uma matriz com a mesma estrutura de L_s a partir do produto $Y^{-1}K$. A factibilidade da LMI (5.1) garante a existência de Y^{-1} , assim

$$\begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1^{-1} & 0 \\ Y_3^{-1}Y_2Y_1^{-1} & Y_3^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

e o produto $Y^{-1}K$ é

$$\begin{bmatrix} Y_1^{-1} & 0 \\ Y_3^{-1}Y_2Y_1^{-1} & Y_3^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1^{-1}K_1 & 0 \\ Y_3^{-1}Y_2Y_1^{-1}K_1 + Y_3^{-1}K_2 & Y_3^{-1}K_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

que preserva a mesma estrutura da matriz L_s . \square

Observação 5.1. Devido à estrutura estática (constante) escolhida para o controlador e o observador, as condições de projeto retratadas no Teorema 5.1 podem, também, ser aplicadas a sistemas incertos LIT, como notado na Observação 4.1.

Como foi antes abordado, devido a equivalência do problema com o projeto de controladores com realimentação estática de saída, é possível aplicar os métodos abordados no Capítulo 4 para projeto do controlador baseado em observador, sendo necessário considerar estruturas adequadas para algumas matrizes de projeto. Visto que as condições de síntese reportadas no Teorema 4.1 mostraram-se menos conservadoras do que as demais condições de um estágio existentes na literatura (como ilustrado no exemplos do capítulo anterior), nesta seção faz-se a adaptação para sistemas LPV apenas do método de dois estágios de (AGULHARI *et al.*, 2010), pois seu processo iterativo pode, porventura, culminar em menores limitantes.

Teorema 5.2. *Se existirem matrizes $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ simétricas, $G(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ e $Z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times 2n_x}$ tais que as seguintes condições LMIs sejam factíveis*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A_s(\alpha_k)G(\alpha_k) + \bar{B}_s(\alpha_k)Z(\alpha_k) \\ * & G(\alpha_k) + G(\alpha_k)^T - P(\alpha_k) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.14)$$

então existe uma lei de controle, $u_k = Z(\alpha_k)G(\alpha_k)^{-1}s_k$ que estabiliza o sistema equivalente (5.8).

Teorema 5.3. *Dadas as matrizes $Z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_u \times 2n_x}$ e $G(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ soluções do Teorema 5.2, se existirem matrizes $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ simétricas, $F(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $H(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, além de matrizes $Y \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e $K \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_y)}$ com estrutura*

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

em que as seguintes condições LMIs sejam factíveis

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(\alpha_k) & \Omega_{12}(\alpha_k) & 0 & \Omega_{14}(\alpha_k) & \Omega_{15}(\alpha_k) \\ * & \Omega_{22}(\alpha_k) & F(\alpha_k)^T \hat{B}_d(\alpha_k) & 0 & F(\alpha_k)^T \bar{B}_s(\alpha_k) \\ * & * & \gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & H(\alpha_k) + H(\alpha_k)^T - I & 0 \\ * & * & * & * & -(Y + Y^T) \end{bmatrix} \succ 0;$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= G(\alpha_k)^T P(\alpha_k) G(\alpha_k), & \Omega_{12}(\alpha_k) &= (G(\alpha_k)^T A_s(\alpha_k)^T + Z(\alpha_k)^T \bar{B}_s(\alpha_k)^T) F(\alpha_k), \\ \Omega_{14}(\alpha_k) &= G(\alpha_k)^T \hat{C}_z(\alpha_k)^T H(\alpha_k), & \Omega_{15}(\alpha_k) &= G(\alpha_k)^T C_s^T K^T - Z(\alpha_k)^T Y^T, \\ \Omega_{22} &= F(\alpha_k) + F(\alpha_k)^T - P(\alpha_{k+1}), \end{aligned}$$

então existe uma lei de controle por realimentação estática de saída do tipo $u_k = Y^{-1}K y_k$ que estabiliza o sistema (5.8) com um limitante superior para o ganho ℓ_2 dado por γ .

As provas para as condições LMIs dos Teoremas 5.2 e 5.3 são equivalentes às provas realizadas em (AGULHARI *et al.*, 2010) e são apresentadas no Apêndice A. A imposição de estrutura às matrizes Y e K garante a recuperação do ganho L_s no sistema (5.7).

5.4 Exemplos

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos com o intuito de demonstrar a eficácia das condições propostas. Além disso, são comparados os desempenhos dos controladores baseados em observador obtidos a partir das condições do Teorema 5.1 e do método de dois estágios reportado nos Teoremas 5.2 e 5.3.

Exemplo 5.1. Considere novamente o exemplo adaptado de (EMEDI; KARIMI, 2015) apresentado na Seção 4.4, cujas matrizes são lembradas a seguir:

$$\begin{aligned}
 A(\theta) &= \begin{bmatrix} 0,7370 & 0,0777 & 0,0810 & 0,0732 \\ 0,2272 & 0,9030 & 0,0282 & 0,1804 \\ -0,0490 & 0,0900 & 0,7111 & -0,2322 \\ -0,1726 & -0,0931 & 0,1442 & 0,7744 \end{bmatrix} \\
 &+ \theta \begin{bmatrix} 0,0819 & 0,0086 & 0,0090 & 0,0081 \\ 0,0252 & 0,1003 & 0,0031 & 0,0200 \\ -0,0055 & 0,0010 & 0,0790 & -0,0258 \\ -0,0192 & -0,0103 & 0,0160 & 0,0860 \end{bmatrix}, \\
 B_u &= \begin{bmatrix} 0,0045 & 0,0044 \\ 0,1001 & 0,0100 \\ 0,0003 & -0,0136 \\ -0,0051 & 0,0936 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0,0953 & 0 & 0 \\ 0,0145 & 0 & 0 \\ 0,0862 & 0 & 0 \\ -0,0011 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} D_u = 0, \\ D_w = 0, \end{matrix}
 \end{aligned}$$

em que considera-se w_k como a entrada desconhecida (d_k) e B_w a matriz B_d .

Neste exemplo, para que o sistema apresente a mesma estrutura proposta em (5.1) fez-se $D_u = 0$; caso contrário, não seria possível aplicar as condições propostas. A Tabela 3 apresenta a comparação entre os limitantes para o ganho ℓ_2 obtidos ao se aplicar o Teorema 5.1 (Te 5.1) e os Teoremas 5.2 e 5.3 (Te 5.2-5.3). Além disso, compara-se o valor de limitante para o ganho ℓ_2 obtido ao projetar um controlador por realimentação estática de saída para o sistema (5.1) utilizando o Teorema 4.1 (Te 4.1).

Tabela 3 – Valores de γ obtidos com as diferentes metodologias escolhidas aplicadas ao sistema do Exemplo 5.1.

Metodologia	γ
Te 5.1 (com $[\delta \ \beta] = [1,5 \ 0,7]$)	0,1980
Te 5.2-5.3	0,3535
Te 4.1 (com $[\delta \ \beta] = [0,8 \ 1,5]$)	0,2305

Pode ser notado que o Teorema 5.1 proveu um menor limitante para o ganho ℓ_2 quando comparado às condições adaptadas dos Teoremas 5.2 e 5.3. Nota-se, também, que a abordagem proposta apresenta um limitante menor do que o obtido ao se utilizar um controlador por realimentação estática de saída.

O sistema, juntamente com o controlador baseado em observador projetado (utilizando o Teorema 5.1), foram simulados e a evolução temporal dos estados é apresentada na Figura 8. A simulação é realizada considerando a entrada desconhecida d_k como sendo um sinal aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[-1, 1]$ ($d_k \sim \mathcal{U}(-1,1)$, $\forall k$), condição inicial $x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ para os estados do sistema e $h_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ para os estados internos do observador.

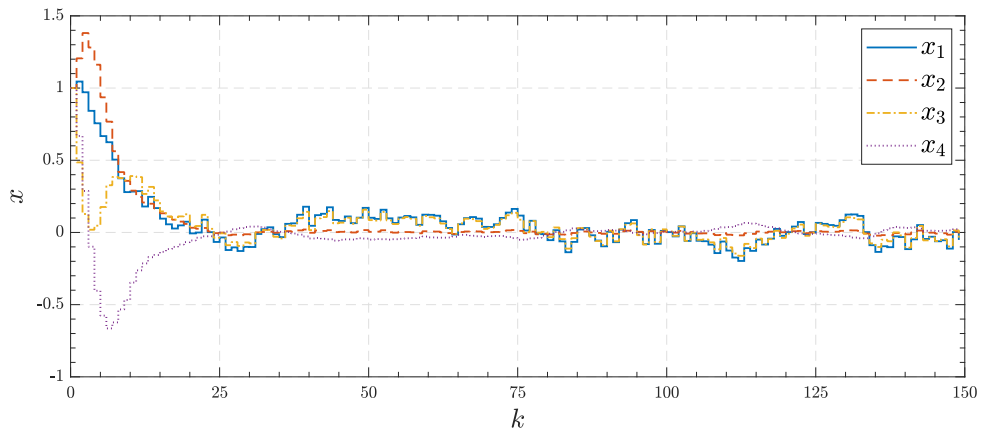


Figura 8 – Evolução temporal dos estados do sistema proposto no Exemplo 5.1 sujeito a um controle baseado em observador projetado a partir do Teorema 5.1.

O valor de norma ℓ_2 obtida pela simulação apresentada foi de 0,1350, inferior ao limitante apresentado pelo Teorema 5.1. Ademais, é possível notar que os estados tendem a manter-se em uma região em torno do ponto de equilíbrio $x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. A Figura 9 apresenta a evolução temporal do erro de estimação dos estados do sistema. Nota-se que, nos primeiros instantes de tempo, o erro converge para uma região em torno de zero e mantém-se no interior da mesma para os instantes de tempo subsequentes.

Os sinais de controle gerados pelo controlador projetado e os estados estimados pelo observador são mostrados nas Figuras 10 e 11, respectivamente. Nota-se que os sinais de controle não apresentam valores de amplitude elevada. Tal comportamento é relevante, pois, em sistemas reais, os atuadores podem estar sujeitos a limitações nas ações de controle, implicando em saturações quando ocorrerem sinais de controle elevados.

Exemplo 5.2. Neste exemplo é realizada análise similar a do Exemplo 4.1. Entretanto, para que sejam cumpridas as condições do Lema 2.1, as matrizes $B_{w,1}$ e $B_{w,2}$ são tratadas como as entradas desconhecidas e modificadas como sendo

$$B_{w,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad B_{w,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

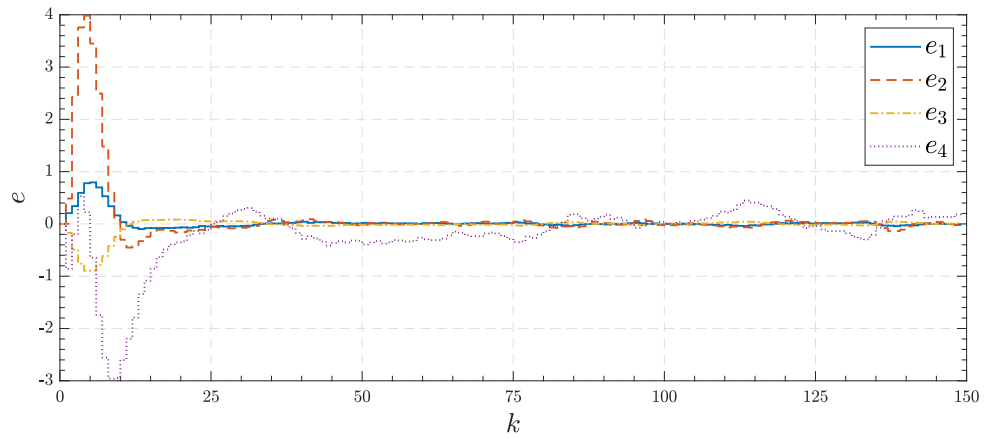


Figura 9 – Erros de estimação dos estados referentes ao sistema do Exemplo 5.1.

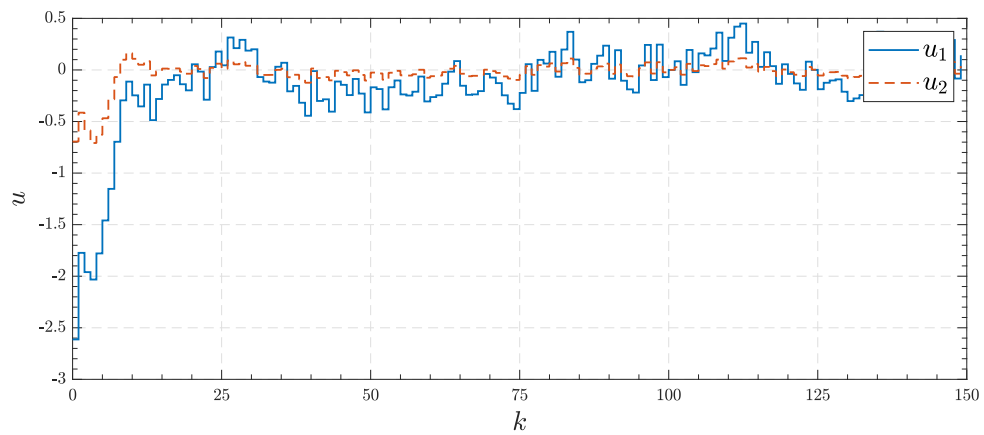


Figura 10 – Entradas de controle referentes ao sistema do Exemplo 5.1.

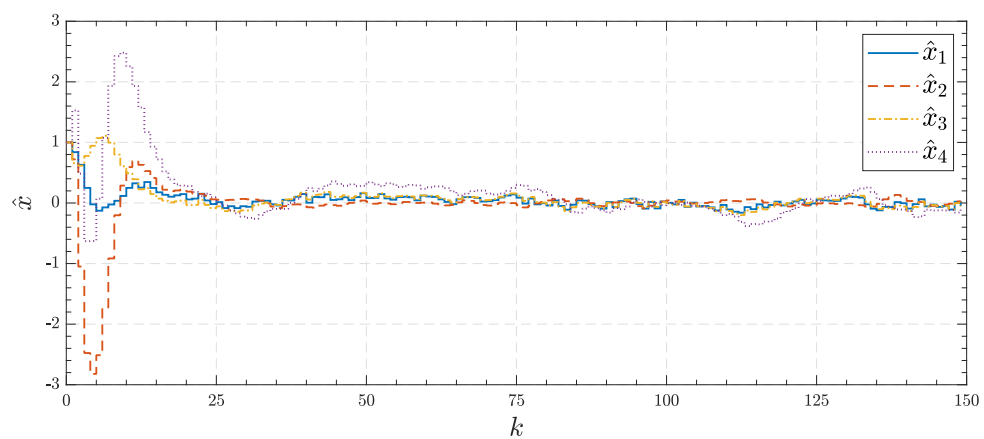


Figura 11 – Estados estimados pelo observador projetado para o Exemplo 5.1.

Tem-se como objetivo comparar os valores de limitante dos ganhos ℓ_2 em função do parâmetro η , obtidos utilizando a realimentação estática de saída, projetada com base

nas condições propostas no Teorema 4.1 (Te 4.1), e utilizando a abordagem proposta neste capítulo, com base no Teorema 5.1 (Te 5.1), ambas com buscas realizadas considerando os conjuntos (4.14). A Figura 12 apresenta os valores de limitantes obtidos com cada uma das abordagens.

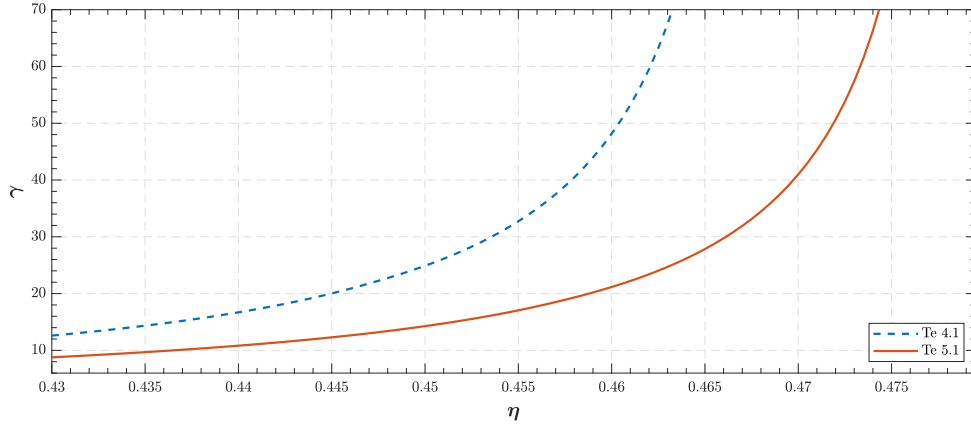


Figura 12 – Limitantes de ganho ℓ_2 obtidos para o controlador por realimentação estática de saída, projetado utilizando o Teorema 4.1, e para o controlador baseado em observador, projetado utilizando o Teorema 5.1, ambos aplicados ao Exemplo 5.2.

Observa-se que a abordagem de projeto de controle baseado em observador proposta apresenta limitante para o ganho ℓ_2 inferior ao controle por realimentação estática de saída, demonstrando que tal abordagem pode apresentar melhor desempenho em algumas aplicações. Além disso, o máximo valor do parâmetro η obtido com o controlador baseado em observador é maior do que o obtido utilizando a realimentação estática de saída. Importante ressaltar que para ambos os casos as matrizes de projeto são constantes, ou seja, não existe dependência do parâmetro variante, o que permite a comparação entre os dois métodos.

Exemplo 5.3. O seguinte exemplo é uma modificação do sistema proposto no Exemplo 3.2 em que a matriz A do sistema é modificada de modo a ser instável em malha aberta. As matrizes do sistema são dadas por

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1,3 & 0,1 + 0,06\theta_k \\ 0,01 + 0,05\sigma_k & 0,9 \end{bmatrix}, & B_u &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_d &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0,5\sigma_k \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

sendo a representação politópica obtida considerando os extremos dos parâmetros $|\theta_k| \leq 1$ e $|\sigma_k| \leq 1$. Uma vez que o sistema não apresenta um saída de controle, escolhe-se a saída y_k como a saída a ser considerada, implicando que $C_z = C$ nas condições de projeto. Aplicando, então, as condições do Teorema 5.1, obteve-se um limitante $\gamma = 34,2376$ com

$[\delta \ \beta] = [0,2 \ 0,9]$. Ao utilizar o método de dois estágios apresenta-se factibilidade das condições do Teorema 5.2, mas não as condições do Teorema 5.3.

O sistema é simulado assumindo-se a entrada desconhecida $d_k \sim \mathcal{U}(-1,1)$, $\forall k$ e condições iniciais $x_0 = [1 \ 1]^T$ para os estados do sistema e $h_0 = [0 \ 0]$ pra os estados internos do observador. A Figura 13 apresenta a evolução dos estados do sistema ao longo do tempo, sendo obtido um limitante de 3,1627 para a norma ℓ_2 . Vale ressaltar que, em malha aberta, o sistema apresenta comportamento instável, como apresentado na Figura 14.

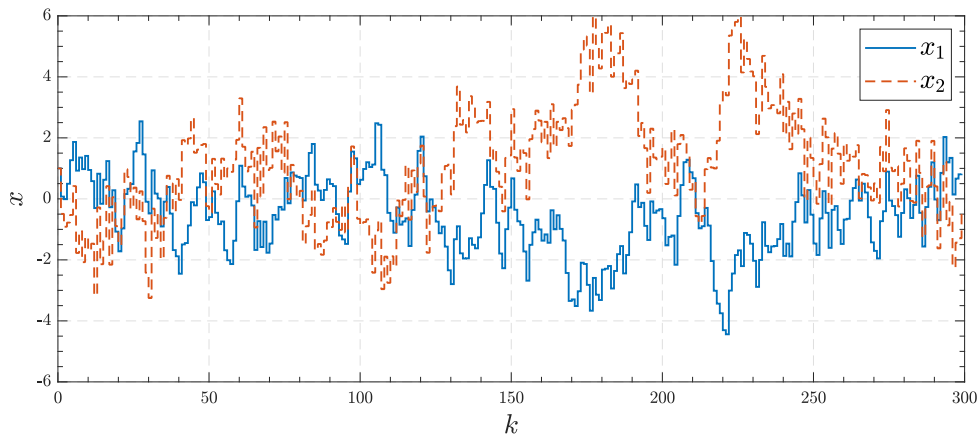


Figura 13 – Evolução do estados do sistema do Exemplo 5.3 com controlador baseado em observador projetado por meio do Teorema 5.1.

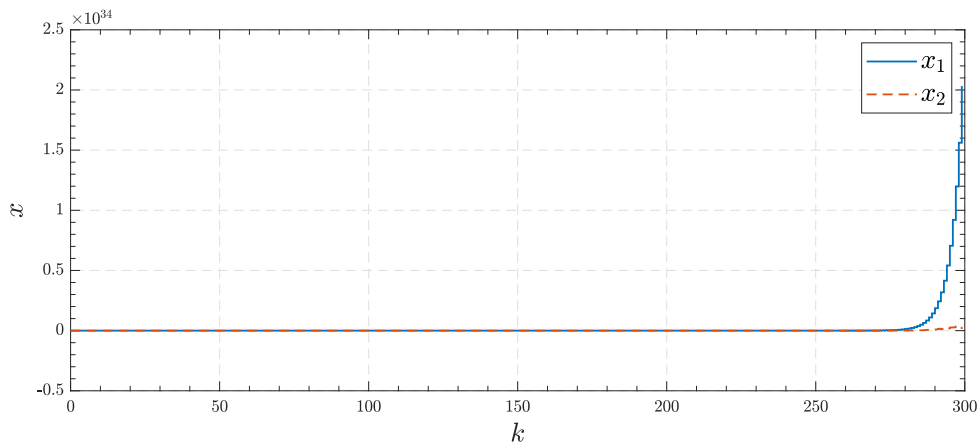


Figura 14 – Evolução dos estados do sistema do Exemplo 5.3 em malha aberta.

A Figura 15 mostra a evolução temporal do erro de estimação dos estados do sistema. Nota-se que o erro apresenta valores elevados em relação aos valores dos estados, indicando que a estimativa do estados não é precisa, mas ainda suficiente para estabilizar o sistema. Tal aspecto é justificável com base no elevado valor de limitante do ganho ℓ_2 obtido (que indica grande influência da entrada desconhecida). O sinal de controle forne-

cido pelo controlador projetado, ilustrado na Figura 16, não apresenta valores elevados, um comportamento desejado para evitar possíveis saturações.

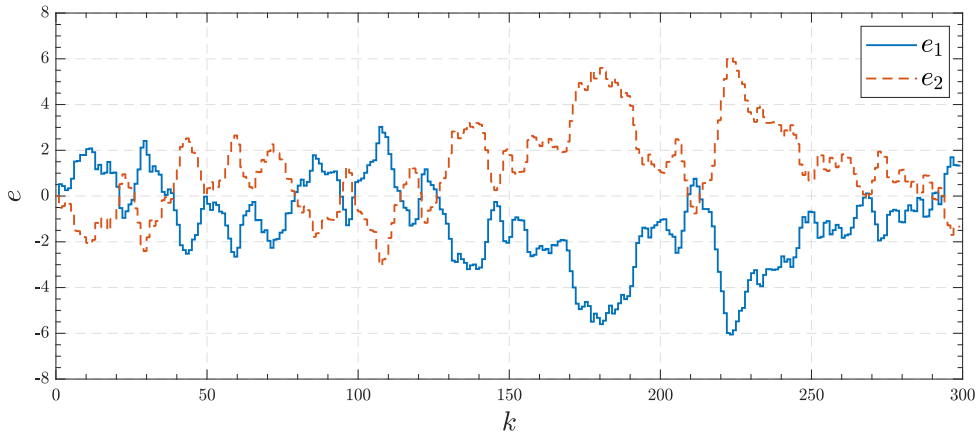


Figura 15 – Erros de estimação dos estados referentes ao sistema do Exemplo 5.3.

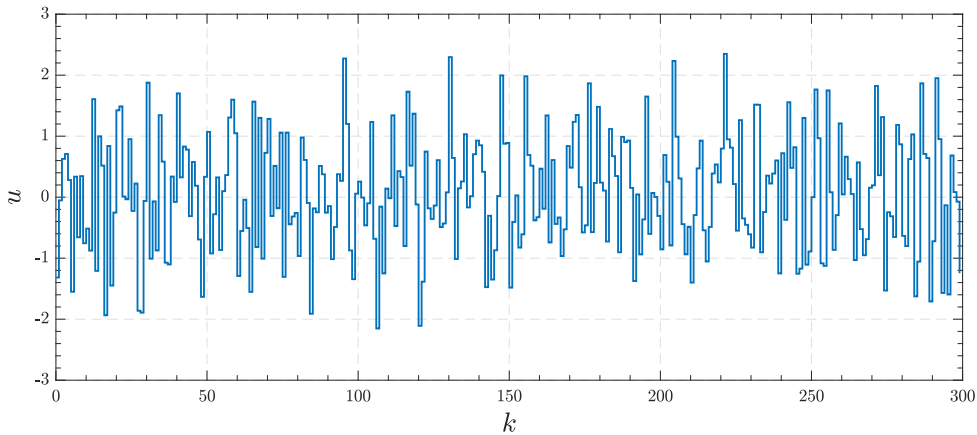


Figura 16 – Entrada de controle referente ao sistema do Exemplo 5.3.

Exemplo 5.4. Como apontado na Observação 5.1, as condições propostas podem ser aplicadas a sistemas incertos invariantes no tempo e, para ilustrar tal aplicação, é apresentado este exemplo adaptado de (AGULHARI *et al.*, 2010) cujas matrizes são:

$$A = \begin{bmatrix} 0,999634 & 0,100271 & 0,000188 & -0,004555 \\ 0,000482 & 0,989900 & 0,000024 & -0,040208 \\ 0,001002 & a_{32} & 0,992930 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0,010000 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} -0,004422 & -0,001761 \\ b_{21} & 0,075922 \\ 0,055200 & -0,044900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = 0,1I$$

sendo os parâmetros incertos $a_{32} \in [-0,006319 \ 0,013681]$, $a_{34} \in [0,012200 \ 0,016200]$ e $b_{21} \in [0,027446 \ 0,043446]$, resultando em um sistema com 8 vértices, obtidos a partir da combinação dos valores extremos de cada parâmetro.

Para este exemplo a condição do Teorema 5.1 não apresentou factibilidade. Entretanto, as condições do método de dois estágios dos Teoremas 5.2 e 5.3 apresentam factibilidade e um limitante superior para o ganho ℓ_2 de $\gamma = 0,1714$ é obtido. O sistema é simulado considerando uma entrada $d_k \sim \mathcal{U}(-1,1)$, $\forall k$, condições iniciais $x_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ para os estados do sistema e $h_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ para os estados internos do observador. A Figura 17 apresenta a evolução dos estados do sistema utilizando o controlador baseado em observador projetado. Para esse controlador obteve-se um valor de ganho ℓ_2 de 0,0626, inferior ao valor do limitante determinado.

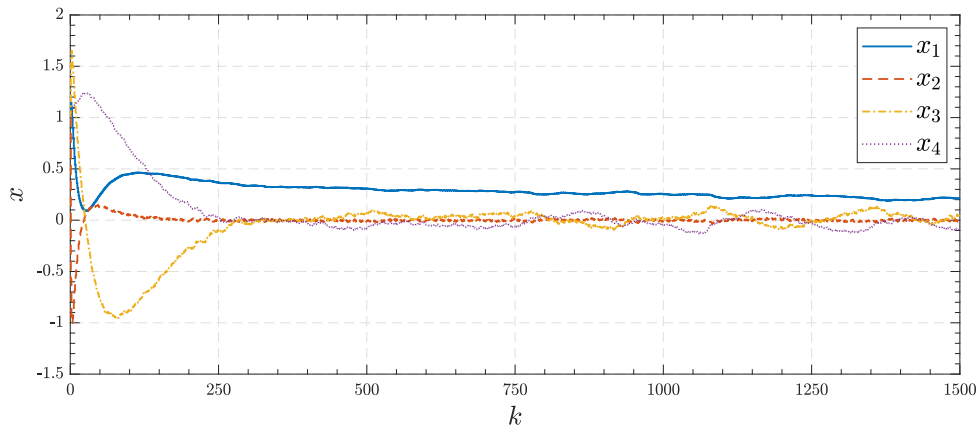


Figura 17 – Evolução dos estados do sistema do Exemplo 5.4 com controlador baseado em observador projetado por meio dos Teoremas 5.2 e 5.3.

É possível notar que o estado x_1 apresenta uma convergência lenta para a origem, se comparado a os outros estados, e um alto erro de estimação como mostrado na Figura 18.

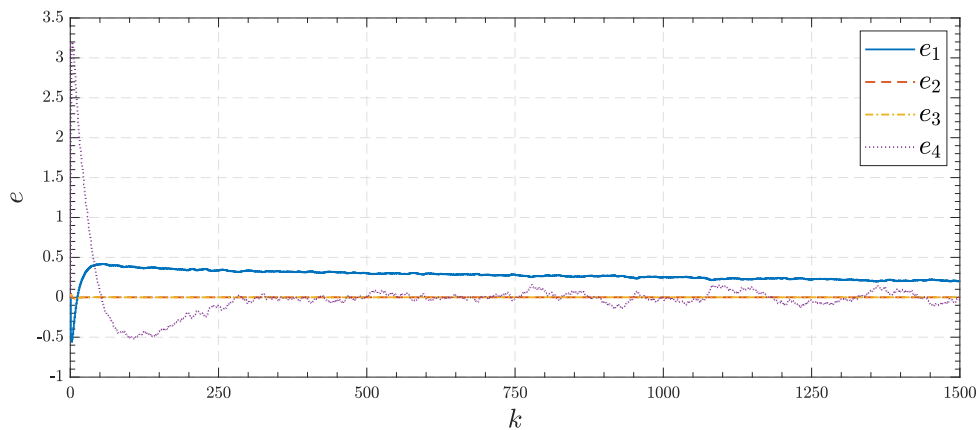


Figura 18 – Erros de estimação dos estados referentes ao sistema do Exemplo 5.4.

Finalmente, a ação de controle é mostrada na Figura 20, sendo possível notar um pico de elevada amplitude nos instantes iniciais da simulação, o que pode acarretar em saturação dos atuadores a depender de suas características intrínsecas.

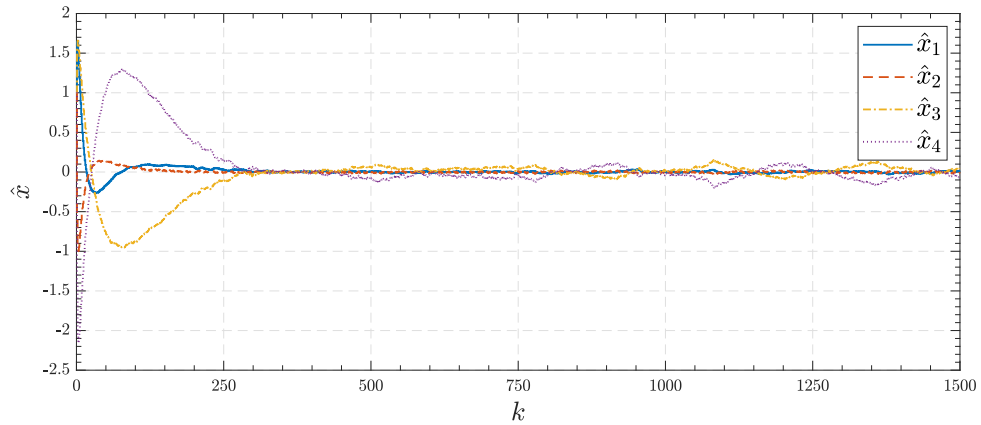


Figura 19 – Estados estimados pelo observador projetado para o Exemplo 5.4.

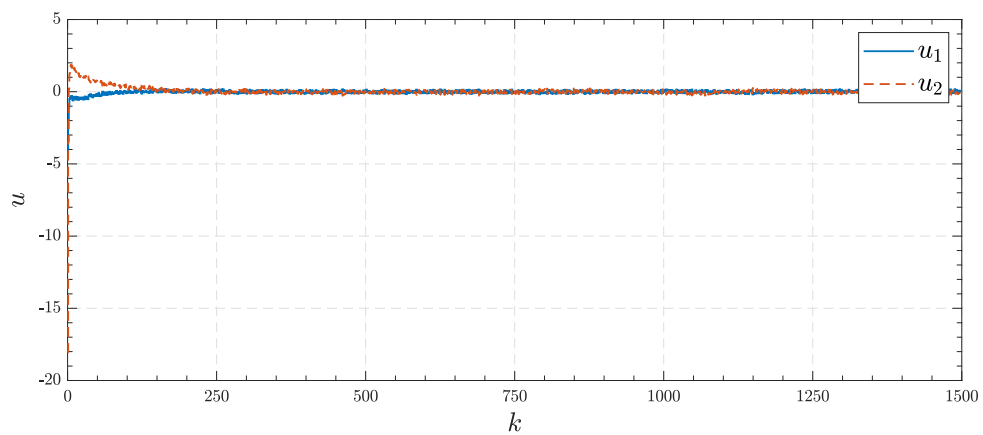


Figura 20 – Entradas de controle referente ao sistema do Exemplo 5.4.

6 Conclusão

Neste trabalho foram propostas condições de projeto de observadores e controladores baseados em observador para sistemas discretos lineares com parâmetros variantes no tempo, sujeitos a entradas desconhecidas. As condições garantem que o erro de estimação dos estados converge assintoticamente para uma região em torno da origem, sendo que o tamanho dessa região depende da norma ℓ_2 dos estados do sistema e do ganho ℓ_2 obtido pelas condições de projeto.

A estrutura constante do observador proposto apresenta a vantagem de não necessitar que os parâmetros constantes sejam medidos ou estimados em tempo real para determinação das matrizes de observação. Devido a isso, as condições de síntese do observador podem ser empregadas, também, em sistemas lineares invariantes no tempo incertos e sistemas fuzzy, sem necessidade de modificações nas condições apresentadas.

Os exemplos numéricos ilustram que o erro não converge assintoticamente para zero, devido à presença dos estados na dinâmica do erro de estimação. Apesar disso, as estimativas mostram-se adequadas, mantendo-se em uma região limitada em torno da origem. Em contrapartida, a metodologia apresentada não pode ser aplicada diretamente à estimação de estados para sistemas cujos estados crescem indefinidamente, devido à influência direta na dinâmica do erro de estimação.

Visto que o desempenho do observador projetado mostrou-se satisfatório, sua estrutura foi aplicada ao projeto de controladores baseados em observadores. Manipulações foram realizadas permitindo que o projeto do controlador e do observador fossem realizados de maneira simultânea por meio da equivalência a um problema de síntese de controladores por realimentação estática de saída, sendo necessária a imposição de estruturas a algumas matrizes de projeto.

Como resultado suplementar foram derivadas condições de projeto para controladores por realimentação estática de saída com custo ℓ_2 garantido. Exemplos numéricos foram utilizados para ilustrar que o método proposto pode ser menos conservador que os presentes na literatura, motivando seu uso para o projeto dos controladores baseados em observadores propostos.

Exemplos numéricos e simulações demonstraram que o controlador baseado em observador com matrizes constantes consegue garantir convergência assintótica dos estados para uma região em torno da origem, sendo respeitados os custos garantidos ℓ_2 obtidos pelas condições de projeto. Ademais, nos exemplos tratados, o controlador baseado em observador projetado obteve um desempenho melhor do que um controlador por realimentação estática de saída sintonizado para o mesmo sistema.

6.1 Trabalhos Futuros

Uma primeira ideia para trabalhos futuros consiste em estender as condições de projeto de observadores e controladores baseados em observador para sistemas que apresentem termos de transmissão direta das entradas para a saída, uma vez que alguns sistemas podem apresentar influência da entrada desconhecida ou da ação de controle, sobre a saída de controle, assim como sobre a saída mensurada.

Uma outra possibilidade é realizar a estimação da entrada desconhecida por meio do observador proposto e utilizar tal informação para atenuar seus efeitos em um sistema de controle.

Ademais, outra extrapolação está relacionada ao problema de detecção de falha. Uma vez que o observador pode reduzir o efeito da entrada desconhecida sobre o erro de estimação dos estados (consequentemente, do resíduo), pode-se considerar o estudo de desempenho da aplicação desse tipo de observador em problemas de estimação e detecção de falhas. Além disso, pode-se analisar a aplicação do controlador baseado em observador para controle tolerante a falhas.

6.2 Trabalhos desenvolvidos

- SILVA, R. N.; FREZZATO, L. A new parametrization for static output feedback control of LPV discrete-time systems. *Automatica*. Submetido.
- SILVA, R. N.; FREZZATTO, L. Um método para estimação de estados para sistemas discretos com parâmetros variantes no tempo sujeitos a perturbações desconhecidas. In: *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBAI, Ouro Preto, MG, 2020.

Referências

- AGULHARI, C. M.; FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. of Math. Softw.*, v. 45, n. 3, p. 36:1–36:25, August 2019. Citado na página 45.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust H_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 4677–4682. ISSN 0743-1619. Citado 8 vezes nas páginas 18, 27, 40, 48, 49, 54, 60 e 75.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI Relaxations for Reduced-Order Robust H_∞ Control of Continuous-Time Uncertain Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1532–1537, June 2012. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 40.
- APKARIAN, P.; GAHINET, P.; BECKER, G. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, v. 31, n. 9, p. 1251–1261, September 1995. Citado na página 27.
- APKARIAN, P.; HOANG DUONG TUAN; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, December 2001. Citado na página 17.
- ARIKUŞU, Y. S.; ALPASLAN PARLAKÇI, M. N. Design of a robust guaranteed cost observer-based controller for linear uncertain systems. In: *2018 6th International Conference on Control Engineering Information Technology (CEIT)*. Istanbul, TR: [s.n.], 2018. p. 1–6. Citado na página 15.
- BASILIO, J. C.; MATOS, S. R. Design of PI and PID controllers with transient performance specification. *IEEE Transactions on Education*, v. 45, n. 4, p. 364–370, November 2002. Citado na página 15.
- BEJARANO, F. J.; PISANO, A. Switched Observers for Switched Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 3, p. 681–686, March 2011. Citado na página 16.
- BERGHUIS, H.; NIJMEIJER, H. A passivity approach to controller-observer design for robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 9, n. 6, p. 740–754, December 1993. Citado na página 15.
- BOBTSOV, A.; PYRKIN, A.; ORTEGA, R.; VEDYAKOV, A. A state observer for sensorless control of magnetic levitation systems. *Automatica*, Elsevier, v. 97, p. 263–270, November 2018. Citado na página 15.

- BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOU, L. Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix inequalities. In: *Proceedings of the 1993 American Control Conference*. San Francisco, CA, USA: [s.n.], 1993. p. 2147–2154. Citado na página 16.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 27, 28 e 32.
- CAI, G.; HU, C.; YIN, B.; HE, H.; HAN, X. Gain-Scheduled Controller Synthesis for Continuous-Time Polytopic LPV Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2014, p. 1–14, March 2014. Citado na página 16.
- CAO, Y.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An output feedback H_∞ controller design for linear systems subject to sensor nonlinearities. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, v. 50, n. 7, p. 914–921, July 2003. Citado na página 17.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering). ISBN 9780199959570. Citado na página 15.
- CHEN, J.; PATTON, R. J. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 22.
- CHEN, J.; ZHANG, H. Robust detection of faulty actuators via unknown input observers. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 22, n. 10, p. 1829–1839, October 1991. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 22 e 30.
- CHEN, W.; SAIF, M. Unknown input observer design for a class of nonlinear systems: An LMI approach. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, USA: [s.n.], 2006. p. 834–838. Citado na página 16.
- CHEN, W.; YANG, J.; GUO, L.; LI, S. Disturbance-Observer-Based Control and Related Methods—An Overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 63, n. 2, p. 1083–1095, February 2016. Citado na página 16.
- CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, May 1999. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 40.
- DA SILVA, J. M. G.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 1, p. 106–111, January 2005. Citado na página 17.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 43, n. 5, p. 355–359, August 2001. Citado 3 vezes nas páginas 17, 23 e 24.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Poly-quadratic stability and H_∞ performance for discrete systems with time varying uncertainties. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference*

on *Decision and Control*. Orlando, USA: [s.n.], 2001. v. 1, p. 267–272. Citado na página 27.

DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. On Inexact LPV Control Design of Continuous-Time Polytopic Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 53, n. 7, p. 1674–1678, August 2008. Citado na página 18.

DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; XU, S. J. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 3, p. 606–609, March 1994. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; SWEVER, J. Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems. *IET Control Theory & Applications*, v. 4, n. 3, p. 362–380, March 2010. Citado 6 vezes nas páginas 9, 18, 40, 46, 47 e 48.

DE CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, J. S. P. L. D. Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 22, n. 5, p. 535–558, September 2012. Citado na página 17.

DE OLIVEIRA, M. C.; BERNUSSOU, J.; GEROMEL, J. C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v. 37, n. 4, p. 261–265, July 1999. Citado na página 17.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. R. (Ed.). *Perspectives in robust control*. London, UK: Springer London, 2001. p. 241–257. Citado na página 28.

DE SOUZA, C. E.; BARBOSA, K. A.; NETO, A. T. Robust H_∞ filtering for discrete-time linear systems with uncertain time-varying parameters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 54, n. 6, p. 2110–2118, June 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.

DE SOUZA, C. E.; XIE, L. On the discrete-time Bounded Real Lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers. *Systems & Control Letters*, v. 18, n. 1, p. 61–71, January 1992. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

DONG, J.; YANG, G. Robust static output feedback control for linear discrete-time systems with time-varying uncertainties. *Syst. & Control Lett.*, v. 57, n. 2, p. 123–131, February 2008. Citado na página 48.

DOUMIATI, M.; SENAME, O.; DUGARD, L.; MARTINEZ-MOLINA, J.; GASPAR, P.; SZABO, Z. Integrated vehicle dynamics control via coordination of active front steering and rear braking. *European Journal of Control*, v. 19, n. 2, p. 121–143, March 2013. Citado na página 17.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, August 1989. Citado na página 15.

DUAN, Z.; ZHANG, J.; ZHANG, C.; MOSCA, E. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 11, p. 1919–1926, November 2006. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 27 e 34.

- ELIA, N.; MITTER, S. K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, September 2001. Citado na página 15.
- EMEDI, Z.; KARIMI, A. Fixed-structure LPV discrete-time controller design with induced l_2 -norm and H_2 performance. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 89, n. 3, p. 494–505, Aug 2015. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 55.
- FERON, E.; APKARIAN, P.; GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, p. 1041–1046, July 1996. Citado na página 17.
- FLOQUET, T.; EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. On Sliding Mode Observers for Systems with Unknown Inputs. In: *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06*. Sardinia, IT: [s.n.], 2006. p. 214–219. Citado na página 16.
- FRANK, P.; DING, X. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of Process Control*, v. 7, n. 6, p. 403–424, December 1997. Citado na página 15.
- FRANK, P. M. On-line fault detection in uncertain nonlinear systems using diagnostic observers: a survey. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 25, n. 12, p. 2129–2154, April 1994. Citado na página 16.
- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust H_2 filtering for discrete-time uncertain systems with auxiliary past output measurements. In: *Proceedings of the 2016 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Buenos Aires, ARG: [s.n.], 2016. p. 1048–1053. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- FREZZATTO, L.; DE OLIVEIRA, M. C.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Gain-scheduled H_2 non-minimal order filtering design for linear parameter-varying discrete-time systems. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 11391–11396, July 2017. Citado na página 16.
- FREZZATTO, L.; LACERDA, M. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust H_2 and H_∞ memory filter design for linear uncertain discrete-time delay systems. *Signal Processing*, v. 117, p. 322–332, December 2015. Citado na página 17.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, n. 4, p. 421–448, July 1994. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P.; CHILALI, M. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 436–442, March 1996. Citado na página 17.
- GEROMEL, J. C.; JACQUES, B.; GARCIA, G.; DE OLIVEIRA, M. C. H_2 and H_∞ Robust Filtering for Discrete-Time Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 38, n. 5, p. 1353–1368, May 2000. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 35.

- GERSHON, E.; SHAKED, U. Static H_2 and H_∞ output-feedback of discrete-time LTI systems with state multiplicative noise. *Systems & Control Letters*, v. 55, n. 3, p. 232–239, March 2006. Citado na página 16.
- GU, D.; POON, F. W. A robust state observer scheme. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 12, p. 1958–1963, December 2001. Citado 3 vezes nas páginas 18, 32 e 34.
- HADDAD, W. M.; CHELLABOINA, V. S. *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2008. Citado na página 23.
- HANG, C. C.; ASTROM, K. J.; HO, W. K. Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, v. 138, n. 2, p. 111–118, March 1991. Citado na página 15.
- HILL, D.; MOYLAN, P. Connections between finite-gain and asymptotic stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 25, n. 5, p. 931–936, October 1980. Citado na página 26.
- HOLTZ, J. Sensorless control of induction motor drives. *Proceedings of the IEEE*, v. 90, n. 8, p. 1359–1394, August 2002. Citado na página 15.
- HOU, M.; MULLER, P. C. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 6, p. 871–875, June 1992. Citado na página 16.
- ICHALAL, D.; MAMMAR, S. On Unknown Input Observers for LPV Systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 62, n. 9, p. 5870–5880, Sep. 2015. Citado na página 30.
- KALMAN, R. E. Contribution to the Theory of Optimal Control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, v. 5, 1960. Citado na página 16.
- KOC, H.; KNITTEL, D.; DE MATHELIN, M.; ABBA, G. Modeling and robust control of winding systems for elastic webs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 10, n. 2, p. 197–208, March 2002. Citado na página 17.
- KOENIG, D.; MARX, B.; JACQUET, D. Unknown Input Observers for Switched Nonlinear Discrete Time Descriptor Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 53, n. 1, p. 373–379, February 2008. Citado na página 16.
- KUDVA, P.; VISWANADHAM, N.; RAMAKRISHNA, A. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 25, n. 1, p. 113–115, February 1980. Citado na página 15.
- LAN, J.; PATTON, R. J. A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control. *Automatica*, v. 69, p. 48–59, July 2016. Citado na página 18.
- LI, H.; FU, M. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 45, n. 9, p. 2338–2350, Sep. 1997. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 32.

- LI, S.; WANG, H.; AITOUICHE, A.; TIAN, Y.; CHRISTOV, N. Robust unknown input observer design for state estimation and fault detection using linear parameter varying model. *J. Phys. Conf. Ser.*, IOP Publishing, v. 783, p. 012001, jan 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 30.
- LIEN, C. Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 8, p. 1365–1370, August 2004. Citado na página 18.
- LIN, W.; QIAN, C. Semi-global robust stabilization of nonlinear systems by partial state and output feedback. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA: [s.n.], 1998. v. 3, p. 3105–3110. Citado na página 40.
- LÖFBERG, J. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. Citado na página 34.
- LORÍA, A.; PANTELEY, E. Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited. *Systems & Control Letters*, v. 47, n. 1, p. 13–24, September 2002. Citado na página 15.
- LUENBERGER, D. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 16, n. 6, p. 596–602, December 1971. Citado na página 15.
- LUENBERGER, D. G. Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics*, v. 8, n. 2, p. 74–80, April 1964. Citado na página 15.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.
- MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. 1. ed. New York, USA: Springer-Verlag New York, 2012. ISBN 9781461418337. Citado na página 17.
- MONDAL, S.; CHAKRABORTY, G.; BHATTACHARYYA, K. LMI Approach to Robust Unknown Input Observer Design for Continuous Systems with Noise and Uncertainties. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, v. 8, p. 210–219, April 2010. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 34.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. LMI approach for H_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, v. 152, n. 2, p. 195–201, March 2005. Citado na página 16.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; BLIMAN, P. A. Linear matrix inequality characterisation for H_∞ and H_2 guaranteed cost gain-scheduling quadratic stabilisation of linear time-varying polytopic systems. *IET Control Theory & Applications*, v. 1, n. 6, p. 1726–1735, November 2007. Citado na página 17.
- MUHANDO, E. B.; SENJYU, T.; UEHARA, A.; FUNABASHI, T. Gain-Scheduled H_∞ Control for WECS via LMI Techniques and Parametrically Dependent Feedback Part

- II: Controller Design and Implementation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 58, n. 1, p. 57–65, January 2011. Citado na página 17.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, v. 55, n. 1, p. 52–61, January 2006. Citado na página 17.
- PALHARES, R. M.; PERES, P. L. D. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems: a linear matrix inequality approach. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 29, n. 6, p. 587–593, October 1998. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 27.
- PALMA, J. M.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F. H_2 gain-scheduled filtering for discrete-time LPV systems using estimated time-varying parameters. In: *2018 Annual American Control Conference (ACC)*. Milwaukee, USA: [s.n.], 2018. p. 4367–4372. Citado na página 17.
- PETERSEN, I. R.; ANDERSON, B. D. O.; JONCKHEERE, E. A. A first principles solution to the non-singular H_∞ control problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 1, n. 3, p. 171–185, September 1991. Citado na página 15.
- PHATAK, M. S.; VISWANADHAM, N. Actuator fault detection and isolation in linear systems. *International Journal of Systems Science*, v. 19, n. 12, p. 2593–2603, 1988. Citado na página 16.
- ROSA, T. E. *Controle escalonado por realimentação de saída para sistemas lineares a tempo discreto afetados por parâmetros variantes no tempo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Julho 2017. Citado na página 47.
- ROSA, T. E.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F. H_∞ Output-Feedback Gain-Scheduled Control for Discrete-Time Linear Systems Affected by Time-Varying Parameters. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 8618–8623, July 2017. Citado 5 vezes nas páginas 9, 18, 27, 40 e 46.
- ROSA, T. E.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F. New robust LMI synthesis conditions for mixed H_2/H_∞ gain-scheduled reduced-order DOF control of discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 28, n. 18, p. 6122–6145, October 2018. Citado na página 48.
- ROTEA, M. A. The generalized H_2 control problem. *Automatica*, v. 29, n. 2, p. 373–385, March 1993. Citado na página 15.
- RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. *Automatica*, v. 36, n. 10, p. 1401–1425, October 2000. Citado na página 17.
- RYU, M.; HONG, S.; SAKSENA, M. Streamlining real-time controller design: From performance specifications to end-to-end timing constraints. In: *Proceedings Third IEEE Real-Time Technology and Applications Symposium*. Quebec, CA: [s.n.], 1997. p. 91–99. Citado na página 15.
- SCHERER, C. W. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 27, n. 2, p. 365–395, June 2005. Citado na página 17.

- SELIGER, R.; FRANK, P. M. Fault-diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, UK: [s.n.], 1991. p. 2248–2253 vol.3. Citado na página 16.
- SELIGER, R.; FRANK, P. M. Robust Component Fault Detection and Isolation in Non-linear Dynamic Systems using Nonlinear unknown Input Observers. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 24, n. 6, p. 277–282, September 1991. Citado na página 16.
- SHAKED, U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 4, p. 652–656, April 2001. Citado na página 17.
- SILVESTRE, C.; CUNHA, R.; PAULINO, N.; PASCOAL, A. A Bottom-Following Pre-view Controller for Autonomous Underwater Vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 17, n. 2, p. 257–266, March 2009. Citado na página 16.
- STOORVOGEL, A.; SABERI, A.; CHEN, B. A reduced order observer based controller design for H_∞ -optimization. In: _____. *Navigation and Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1991. Citado na página 15.
- STURM, J. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11–12, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu>>. Citado na página 34.
- SUNDARAM, S.; HADJICOSTIS, C. N. Delayed Observers for Linear Systems With Unknown Inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 2, p. 334–339, February 2007. Citado na página 16.
- WANG, Z.; UNBEHAUEN, H. A class of nonlinear observers for discrete-time systems with parametric uncertainty. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 31, n. 1, p. 19–26, 2000. Citado na página 17.
- WATANABE, K.; HIMMELBLAU, D. M. Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal of Systems Science*, v. 13, n. 2, p. 137–158, 1982. Citado na página 16.
- WITCZAK, M.; KORBICZ, J.; JÓZEFOWICZ, R. A H_∞ approach to robust fault estimation of non-linear discrete-time systems. In: *Proceedings of the 2013 European Control Conference*. Zurich, CH: [s.n.], 2013. p. 1433–1438. Citado na página 27.
- WONHAM, W. M. On the Separation Theorem of Stochastic Control. *SIAM Journal on Control*, v. 6, n. 2, p. 312–326, December 1968. Citado na página 15.
- XIE, L.; DE SOUZA, C. E.; WANG, Y. Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems: An H_∞ approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, n. 4, p. 297–312, May 1996. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.
- XU, X.; YUAN, Y.; WANG, M.; FU, M.; DUBLJEVIC, S. Fault detection and estimation for a class of PIDE systems based on boundary observers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 29, n. 17, p. 5867–5885, August 2019. Citado na página 27.
- YANG, F.; WILDE, R. W. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 7, p. 677–681, July 1988. Citado na página 16.

- YAZ, E. E.; AZEMI, A. Actuator fault detection and isolation in nonlinear systems using LMIs and LMEs. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. Philadelphia, USA: [s.n.], 1998. v. 3, p. 1590–1594. Citado na página 16.
- YU, Z.; CHEN, H.; WOO, P. Gain Scheduled LPV H_∞ Control Based on LMI Approach for a Robotic Manipulator. *Journal of Robotic Systems*, v. 19, n. 12, p. 585–593, November 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- ZASADZINSKI, M.; AS'AD, K.; DAROUACH, M.; MEHDI, D. H_∞ loop transfer recovery design with an unknown input observer-based controller. In: *Proceedings of the 1993 American Control Conference*. San Francisco, USA: [s.n.], 1993. p. 653–654. Citado na página 16.
- ZEITZ, M. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, v. 9, n. 2, p. 149–156, August 1987. Citado na página 15.
- ZEMOUCHE, A.; BOUTAYEB, M. On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, v. 49, n. 2, p. 585–591, February 2013. Citado na página 16.
- ZEMOUCHE, A.; BOUTAYEB, M.; BARA, G. I. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H_∞ performance analysis. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 1, p. 18–27, January 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 32.
- ZHONG, M.; DING, S. X.; LAM, J.; WANG, H. An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems. *Automatica*, v. 39, n. 3, p. 543–550, March 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0134565673. Citado na página 25.

Apêndices

APÊNDICE A – Método de 2 Estágios para Sistemas LPV

Neste apêndice são apresentadas condições de projetos de controladores por realimentação estática de saída para sistemas LPV, as quais são baseadas no método de dois estágios proposto em (AGULHARI *et al.*, 2010), realizando-se apenas adaptações. As provas apresentadas são equivalentes às realizadas em (AGULHARI *et al.*, 2010) e são repetidas com o intuito de esclarecer as diferenças existentes ao se tratar o caso de sistemas LPV.

Seja um sistema, discreto no tempo, linear com parâmetros variantes

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha_k)x_k + B_u(\alpha_k)u_k + B_w(\alpha_k)w_k \\ z_k &= C_z(\alpha_k)x_k + D_u(\alpha_k)u_k + D_w(\alpha_k)w_k \\ y_k &= C_y(\alpha_k)x_k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ uma entrada exógena, $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada e $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida. Deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação estática de saída do tipo $u_k = Y^{-1}Ky_k$, que estabilize assintoticamente o sistema (A.1).

Teorema A.1. *Se existirem matrizes $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ simétrica definidas positivas, $G(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que as seguintes condições LMIs sejam factíveis*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A(\alpha_k)G(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)Z(\alpha_k) \\ * & G(\alpha_k) + G(\alpha_k)^T - P(\alpha_k) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.2})$$

então existe uma lei de controle por realimentação de estados $u_k = Z(\alpha_k)G(\alpha_k)^{-1}x_k$ que estabiliza o sistema equivalente (A.1).

Prova. A condição LMI (A.2) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} P(\alpha_{k+1}) & A_{cl}(\alpha_k)G(\alpha_k) \\ * & G(\alpha_k) + G(\alpha_k)^T - P(\alpha_k) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.3})$$

sendo $A_{cl}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B_u(\alpha_k)Z(\alpha_k)G^{-1}(\alpha_k)$. Importante ressaltar que a existência da inversa de $G(\alpha_k)$ é garantida pelo bloco (2,2) da condição (A.3), pois $G(\alpha_k) + G(\alpha_k)^T \succ P(\alpha_k) \succ 0$. Multiplicando (A.3) à esquerda por $[I - A_{cl}(\alpha_k)]$ e à direita pela sua transposta obtém-se a condição

$$A_{cl}(\alpha_k)P(\alpha_k)A_{cl}^T(\alpha_k) - P(\alpha_{k+1}) \prec 0 \quad (\text{A.4})$$

provando a estabilidade do sistema em malha fechada com o ganho de realimentação $Z(\alpha_k)G(\alpha_k)^{-1}$. \square

Teorema A.2. Dadas matrizes $Z(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ soluções do Teorema A.1, se existirem matrizes $P(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ simétricas, $F(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $H(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, além de matrizes $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ e $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ em que as seguintes condições LMIs sejam factíveis

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}(\alpha_k) & \Omega_{12}(\alpha_k) & 0 & \Omega_{14}(\alpha_k) & \Omega_{15}(\alpha_k) \\ * & \Omega_{22}(\alpha_k) & F(\alpha_k)^T B_w(\alpha_k) & 0 & F(\alpha_k)^T B_u(\alpha_k) \\ * & * & \gamma^2 I & D_w(\alpha_k)^T H(\alpha_k) & 0 \\ * & * & * & H(\alpha_k) + H(\alpha_k)^T - I & H(\alpha_k)^T D_u(\alpha_k) \\ * & * & * & * & -(Y + Y^T) \end{bmatrix} \succ 0. \quad (\text{A.5})$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= G(\alpha_k)^T P(\alpha_k) G(\alpha_k), & \Omega_{12}(\alpha_k) &= (G(\alpha_k)^T A(\alpha_k)^T + Z(\alpha_k)^T B_u(\alpha_k)^T) F(\alpha_k), \\ \Omega_{14}(\alpha_k) &= (G(\alpha_k)^T C_z(\alpha_k)^T + Z(\alpha_k)^T D_u(\alpha_k)^T) H(\alpha_k), \\ \Omega_{15}(\alpha_k) &= G(\alpha_k)^T C(\alpha_k)_y^T K^T - Z(\alpha_k)^T Y^T, & \Omega_{22} &= F(\alpha_k) + F(\alpha_k)^T - P(\alpha_{k+1}), \end{aligned}$$

então, existe uma lei de controle por realimentação de saída do tipo $u_k = Y^{-1} K y_k$ que estabiliza o sistema (A.1) com um limitante superior para o ganho ℓ_2 dado por γ .

Prova. No intuito de reduzir as notações, o parâmetro α_k é omitido e, a matriz $P(\alpha_k)$ é denotada como P^+ ao longo da prova.

Multiplicando a condição LMI (A.5) à direita por $\text{diag}(G^{-1}, I, I, I, I)$ e à esquerda por sua transposta, obtém-se

$$\begin{bmatrix} P & (A^T + G^{-T} Z^T B_u^T) F & 0 & (C_z^T + G^{-T} Z^T D_u^T) H & C_y^T K^T - G^{-T} Z^T Y^T \\ * & F + F^T - P^+ & F^T B_w & 0 & F^T B_u \\ * & * & \gamma^2 I & D_w^T H & 0 \\ * & * & * & H + H^T - I & H^T D_u \\ * & * & * & * & -(Y + Y^T) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.6})$$

em seguida, ao se multiplicar (A.6) à esquerda por R_1

$$R_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & S^T \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

e à direita por R_1^T , com $S = Y^{-1} K C_y - Z G^{-1}$, resulta em

$$\begin{bmatrix} P & A_{cl}^T F & 0 & C_{cl}^T H \\ * & F + F^T - P^+ & F^T B_w & 0 \\ * & * & \gamma^2 I & D_w^T H \\ * & * & * & H + H^T - I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.8})$$

sendo $A_{cl} = A + B_u Y^{-1} K C_y$ e $C_{cl} = C_z + D_u Y^{-1} K C_y$. A factibilidade de (A.8) garante que $F + F^T \succ P^+ \succ 0$, $H + H^T \succ I \succ O$, , devido aos blocos (2, 2) e (4, 4). Ademais, utilizando as relações

$$\begin{aligned} (P^+ - F)^T (P^+)^{-1} (P^+ - F) \succeq 0 &\implies F^T (P^+)^{-1} F \succeq F + F^T - P^+, \\ (I - H)^T (I - H) \succeq 0 &\implies H^T H \succeq H + H - I. \end{aligned}$$

implica que a condição (A.8) reduz-se a

$$\begin{bmatrix} P & A_{cl}^T F & 0 & C_{cl}^T H \\ * & F^T (P^+)^{-1} F & F^T B_w & 0 \\ * & * & \gamma^2 I & D_w^T H \\ * & * & * & H^T H \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{A.9})$$

em que, multiplicando à direita por $\text{diag}(I, F^{-1} P^+, I, H^{-1})$ e à esquerda pela sua transposta, resulta em

$$\begin{bmatrix} P & A_{cl}^T P^+ & 0 & C_{cl}^T \\ * & P^+ & P^+ B_w & 0 \\ * & * & \gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \succ 0 \quad (\text{A.10})$$

que corresponde ao *Bounded Real Lemma*, encerrando assim a prova. \square