REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

doi.org/10.37001/remat25269062v17id426 eISSN: 2526-9062

Kit de frações no quadriculado como recurso didático para o ensino de frações

Gesiel Alisson Martinho[1]
Secretaria de Educação de Minas Gerais (SEEMG), Belo Horizonte, MG, Brasil

Diogo Alves de Faria Reis[2]
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Centro Pedagógico, Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo
Este artigo tem como objetivo explanar algumas concepções sobre o ensino e a aprendizagem de frações, a utilização de materiais manipuláveis para o ensino de frações e apresentar o resultado da tarefa "Manipulação do kit de frações no quadriculado". A pesquisa, de abordagem qualitativa, foi desenvolvida em uma escola estadual de Belo Horizonte com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Ao final da pesquisa, foi possível constatar que o material manipulável utilizado ajudou a maioria dos estudantes a compreender o processo de equivalência de frações e relacionar esse processo com as operações de adição e subtração. Podemos indicar, com base na pesquisa, a importância de se valorizar o conceito de equivalência de frações para a compreensão dessas operações.

Palavras-chave: Frações equivalentes; Comparação de frações; Material didático manipulável; Educação Matemática.

Fraction kit in the grid as a didactic resource for teaching fractions

Abstract
This article aims to explain some conceptions about the teaching and learning of fractions, the use of manipulable materials for the teaching of fractions and to present the result of the task "Handling the fraction kit in the grid". The research, with a qualitative approach, was developed in a state school in Belo Horizonte, with students from the 7th year of Elementary School II. At the end of the research, it was found that the manipulable material used helped most students to understand the fraction equivalence process and to relate this process to the addition and subtraction operations. We can indicate, based on the research, the importance of valuing the concept of fraction equivalence for the understanding of these operations.

Keywords: Equivalent fractions; Comparison of fractions; Manageable educational material; Mathematical Education.

Submetido em: 06/08/2020 **Aceito em:** 21/01/2021 **Publicado em:** 28/01/2021

[1] Mestre em Educação e Docência pela Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG. Professor da Educação Básica da Rede Estadual de Minas Gerais. Endereço para correspondência: Avenida Presidente, 739, apto 105, Copacabana, Belo Horizonte, Minas Gerais. E-mail: gesielalisson@yahoo.com.br.

[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais. Professor do Centro Pedagógico da Universidade Federal de Minas Gerais. Endereço para correspondência: Rua Desembargador Paulo Mota, 1665, apto 1002 Bl 3, Ouro Preto, Belo Horizonte, Minas Gerais. E-mail: diogofaria.ufmg@gmail.com.

Kit de fracciones en la cuadrícula como recurso didáctico para la enseñanza de fracciones

Resumen
Este artículo tiene como objetivo explicar algunas concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de fracciones, el uso de materiales manipulables para la enseñanza de fracciones y presentar el resultado de la tarea “Manejo del kit de fracciones en la cuadrícula”. La investigación, con un enfoque cualitativo, se desarrolló en una escuela estatal de Belo Horizonte, con alumnos del 7º año de la Escuela Primaria II. Al final de la investigación, se encontró que el material manipulable utilizado ayudó a la mayoría de los estudiantes a comprender el proceso de equivalencia de fracciones y relacionar este proceso con las operaciones de suma y resta. Podemos indicar, con base en la investigación, la importancia de valorar el concepto de equivalencia fraccionaria para comprender estas operaciones.

Palabras clave: Fracciones equivalentes; Comparación de fracciones; Material educativo manejable; Educación matemática.

1. Introdução

Neste artigo serão apresentados alguns recortes da dissertação (MARTINHO, 2020) intitulada “O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração” do programa de Mestrado profissional em Educação e Docência (PROMESTRE) da Faculdade de Educação (FAE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

A pesquisa foi fruto de reflexões e inquietações do pesquisador relacionadas ao ensino de frações, que mediante sua experiência com os ensinos Fundamental II e Médio, notou que, talvez, esse seja um dos conteúdos menos consolidados pelos estudantes. Dificuldades em operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, acumulam-se durante o Ensino Fundamental, sendo comum encontrar estudantes no terceiro ano do Ensino Médio que não consolidaram as habilidades mínimas necessárias nesse assunto.

Nesse sentido, a pesquisa teve as seguintes perguntas de investigação: Ao ensinar equivalência de frações com materiais manipulativos, para a compreensão das operações de adição e subtração de fração, o professor terá um retorno mais positivo por parte dos estudantes? Com base no procedimento de equivalência de frações, os estudantes compreenderão melhor as propriedades de adição e subtração? Qual a contribuição do material manipulativo para a aprendizagem do conceito de frações?

Este artigo tem como objetivo explanar algumas concepções sobre o ensino e a aprendizagem de frações, a utilização de materiais manipuláveis para o ensino de frações e apresentar o resultado da tarefa “Manipulação do kit de frações no quadriculado”.

Para isso, exibiremos cinco seções, sendo a primeira “O ensino e a aprendizagem de frações”, onde apresentamos algumas discussões referente ao ensino e à aprendizagem de frações. A segunda “O uso de materiais manipuláveis no ensino de frações” dividimos em duas seções. Primeiramente definimos o que são materiais didáticos manipuláveis, de acordo com Lorenzato (2006), abordamos o uso de materiais manipuláveis no ensino de frações e, em seguida, apresentamos o kit de frações no quadriculado.

Na terceira seção, apresentamos o contexto da pesquisa, no qual informamos a modalidade escolhida, o local da pesquisa, os sujeitos e como foi feita a coleta de dados. Em "Manipulação do kit de frações no quadriculado" descrevemos como ocorreu a tarefa, destacando e efetuando comentários de algumas situações vivenciadas durante a aplicação, que possibilitaram, aos estudantes, a compreensão mais razoável sobre o assunto abordado e, também, algumas dificuldades apresentadas por eles.

Por fim, finalizamos esse artigo elaborando algumas considerações sobre a nossa experiência vivida na pesquisa; relacionadas à tarefa aplicada e ao material didático manipulável utilizado.

2. O ensino e a aprendizagem de frações

O processo de ensino e aprendizagem de frações, de acordo com Maranhão e Igliori (2003), tem sido alvo de várias pesquisas da Educação Matemática. Os autores relatam que "as implicações da não acessibilidade de um aluno ao conceito de número racional podem acarretar graves prejuízos à aprendizagem dos diversos ramos da matemática." (p. 57). Acreditamos que as implicações da não compreensão do conceito pelo estudante são prejuízos ao longo de sua vida acadêmica. Ou seja, se o estudante não tem uma clareza dos conceitos fundamentais/básicos de frações, terá, então, dificuldades à compreensão de novos conceitos matemáticos.

O ensino de frações é cercado por dificuldades, tais como, a rejeição dos estudantes por acreditarem que fração é um "bicho de 7 cabeças"; o despreparo do professor para lidar com o tema, pouco abordado em sua formação; e, muitas vezes, a forma como o assunto é abordado em livros didáticos. A falta de recursos didáticos pode prejudicar ainda mais esse processo. Para Loyola (2013), de fato, esse assunto tem orientado muitos educadores a pesquisarem o tema, sem que seja apontado um caminho conclusivo.

Moreira e David (2007) afirmam que:

> Ao longo do processo de formação matemática do professor, o conjunto dos racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da Matemática escolar (p. 59-60).

Assim, muitas vezes, o docente, ao abordoar frações em sala de aula, não está preparado para enfrentar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, pois, no processo de sua formação, esse tema pode ter sido considerado simples de se ensinar, porém, não é um tema cujo aprendizado seja simples ou trivial.

Quando o ensino de frações é iniciado – no 4º ano –, Pelissaro (2011) relata que os estudantes até compreendem, pois conseguem associar com os números naturais que estão mais familiarizados, geralmente utilizam, como recurso, a ideia de divisão. A autora exemplifica que, o professor, ao trabalhar com fração, inicialmente, poderá levar uma pizza e dividi-la na metade, na quarta parte e, por fim, na quantidade de estudantes da turma. Com base nisso, questiona os estudantes, perguntando que parte da pizza cada um comeu, como eram as partes e, assim, constrói o conceito parte-todo.

Para Garcez (2013), ensinar frações envolve diversos desafios e um deles é o conceito de medida, já que os números naturais com os quais os estudantes estão habituados são bastante intuitivos e concretos e, por isso, não oferecem os mesmos desafios dos números racionais. Outro desafio, para o ensino e a aprendizagem de frações, é a sua própria escrita. Não é tão trivial a associação de uma quantidade a dois números (inteiros) "separados" por um pequeno traço e escritos na vertical.

Assim, Behr (1983) ressalta que,

> A ênfase exagerada nos procedimentos e algoritmos, para operar com os números racionais, tem sido apontada como um dos principais motivos das dificuldades das crianças em aprenderem e aplicarem os conceitos de números racionais (BEHR, 1983, p.60, *apud* DAVID e FONSECA, 1997).

Nesse sentido, Garcez (2013) relata que alguns professores, ao tentar facilitar o entendimento por parte dos estudantes, acabam limitando o ensino de frações à memorização de regras, alcançando, justamente, o contrário do pretendido, comprometendo a compreensão do tema. Ao optar pelo ensino por meio de regras, ainda, conforme o autor, o professor impede o estudante de vivenciar várias etapas – como a experimentação, a manipulação de materiais didáticos, a formulação e a verificação de conjecturas em um ambiente em que o professor e estudante discutem sobre o assunto abordado – que são importantes e conduzem à compreensão do conceito.

3. O uso de materiais manipuláveis no ensino de frações

Nessa seção, definimos o que são materiais didáticos manipuláveis de acordo com Lorenzato (2006), a importância da utilização de materiais manipuláveis para o ensino de frações e, por fim, apresentamos o kit de frações no quadriculado.

Lorenzato (2006, p. 18) define materiais didáticos manipuláveis "como qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem". Neste sentido, uma calculadora, um quebra cabeça, um jogo, dentre outros materiais, podem ser considerados materiais didáticos manipuláveis se o professor os utilizar como recurso didático para o ensino e a aprendizagem.

Para o autor, não basta o professor ter um bom material manipulável como recurso didático, pois, mais importante que o material, é saber utilizá-lo corretamente para objetivar uma aprendizagem específica. Lorenzato (2006, p.3) ainda acrescenta que "um dos elementos que dificulta a aprendizagem com base em materiais manipuláveis diz respeito a sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados". Baseando-nos nessa informação, podemos enfatizar a importância de o professor, antes de trabalhar com qualquer material manipulável, preparar com prudência sua aula e se certificar se, realmente, o material que deseja trabalhar vai ao encontro do conteúdo que se pretende ensinar.

Apesar de algumas dificuldades que o ensino de frações possa apresentar, acreditamos que, com a utilização de materiais manipuláveis, esse ensino possa facilitar o aprendizado dos estudantes. De acordo com Bordin (2011), a utilização de materiais manipuláveis pode se tornar significativa no ensino, caso o professor seja um efetivo mediador das atividades, ou seja, é necessário que os objetivos das atividades estejam bem definidos e esclarecidos antes da utilização do material manipulável, pois, caso contrário, o material poderá tornar-se um brinquedo cujo objetivo não tenha fundamento pedagógico, o que poderia fugir do escopo da aula. Esse autor ressalta que:

> o material manipulável não pode ser visto apenas como um "brinquedo" ou "escada", adequados em determinados momentos do processo de ensino aprendizagem e passíveis de serem retirados pelo professor quando ele acha adequado. O aluno, após manusear várias vezes os objetos e concluir as relações necessárias entre o que estava sendo mostrado com o material e o conteúdo matemático propriamente dito, deve sentir-se seguro para abrir mão desse suporte para seu crescimento e, então, optar por trabalhar sem esse auxílio (BORDIN, 2011, p. 20).

Nesse sentido, Nacarato (2005, p. 4) afirma que "o uso não apropriado ou, ainda, pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática". Desse modo, podemos inferir que o problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como eles são planejados e trabalhados.

Segundo Santos (2014, p. 22), "o conceito de números fracionários é bastante complexo e difícil de ser abstraído, havendo a necessidade de o aluno manipular materiais didáticos para facilitar o entendimento." Em consonância com essa autora, acreditamos que o estudante, ao utilizar materiais manipuláveis para aprender fração, terá a oportunidade de construir conceitos, compreender regras e, além disso, perceber a aplicação desse conteúdo em algumas situações do seu dia a dia.

Conforme relata Scolaro (2008, p. 4), "o uso destes objetos reais, nomeados de materiais didáticos manipuláveis, que leva o aluno a tocar, sentir, manipular e movimentar, acabam por tornarem-se representação de uma ideia". Ou seja, podemos considerar que a manipulação desses materiais proporciona, ao estudante, a materialização de ideias que, algumas vezes, eles têm acesso apenas por meio de teorias, excessivamente, abstratas.

Uma das dificuldades no ensino de frações, de acordo com Santos (2014), é a pouca aplicabilidade do conteúdo nas situações práticas dos estudantes. Nessa direção, Bigode (2014, p. 38) afirma:

> Com o rápido desenvolvimento e a popularização das tecnologias digitais, o uso de frações no dia a dia está se tornando cada vez mais raro. Calculadoras, computadores, balanças digitais, painéis de automóveis e máquinas em geral usam a notação decimal para expressar números e medidas que não são inteiros, conhecidos como “números quebrados”.

O referido autor afirma que o ensino de frações está se tornando cada vez mais difícil para o professor ensinar, pois as frações, diante do exposto pelo autor, perdem valor utilitário nas atividades cotidianas e profissionais, mas, por outro lado, esse ensino continua tendo relevância nos currículos de Matemática.

Compreendemos que essa não é uma situação fácil de se resolver, mas, assim como, Santos (2014), Scolaro (2008) e Soares e Silva (2018), acreditamos que uma metodologia possível de ser utilizada pelo professor, para ensinar esse conteúdo, é o uso de materiais manipuláveis, pois esse recurso didático possibilita auxiliar os estudantes no entendimento desse conceito matemático, ou seja, facilitando, talvez, esse ensino. Conforme relata Scolaro (2008), com base na visualização, os estudantes têm a oportunidade de ir mais além e compreender melhor o conteúdo, nesse caso, fração, ou seja, há a possiblidade de eles perceberem algumas aplicações do conteúdo em situações, por eles, vivenciadas fora da sala de aula.

Entendemos que os benefícios e as contribuições que o uso do material manipulável oferece aos estudantes não estão nos materiais em si, mas nas ações que esses materiais podem proporcionar, como a concretização de seus pensamentos que favorece elaborar hipóteses e estratégias mais consistentes para uma melhor compreensão do conceito.

Assim, acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis para ensinar frações tende a beneficiar tanto o estudante quanto o professor. Nessa direção, Soares e Silva (2018) relatam que, para o estudante, o material manipulável possibilita aguçar a sua curiosidade e despertar um interesse maior pelo conteúdo, além de essa interação com o material promover a criatividade e melhorar seu raciocínio rumo à aprendizagem.

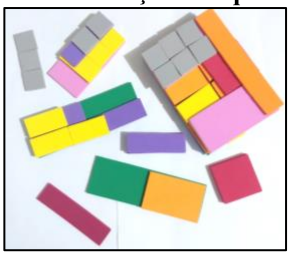
Pensando no professor, Vale e Barbosa (2014, p. 7) mencionam que “há vantagens para os professores quando lhes são dadas oportunidades para explorar uma variedade de estratégias de ensino e recurso didático”, pois, o professor tem a oportunidade de aprender mais. Em uma aula em que o professor utilize de materiais didáticos como recurso, é possível surgir várias perguntas por parte dos estudantes; perguntas que, às vezes, são surpresas, perguntas inesperadas, que conduzem o professor, cada vez mais, a reflexões, resultando, assim, em um grande aprendizado em relação ao modo como os estudantes aprendem Matemática, pois, cada aula terá novidades diferentes a serem estudadas e pensadas.

Assim, apresentamos, a seguir, o kit de frações no quadriculado, utilizado como recurso didático em nossa pesquisa, que pode auxiliar o estudante a melhor compreender esse conceito.

3.1. Kit de frações no quadriculado

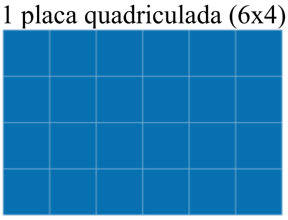
O kit de frações no quadriculado, é de autoria da Professora Marli Esteves Guimarães, fundadora da MMP Materiais Pedagógicos[3]. O Material é formado por peças retangulares e suas respectivas divisões em diversas cores e direções. Por ser quadriculado, algumas divisões podem ser feitas em dois sentidos, por isso, temos duas representações de meios, quartos e sextos, mas apenas uma representação de terços, oitavos, doze avos e vinte e quatro avos. O kit contém 72 peças em EVA, das quais serão ilustradas a seguir.

Figura 1: Kit de frações no quadriculado

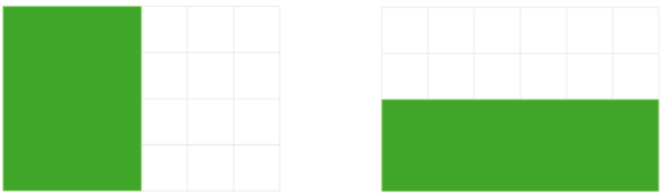


Fonte: Acervo do autor

1 placa quadriculada (6x4) com 24 quadradinhos – Azul – A peça representa 1 inteiro

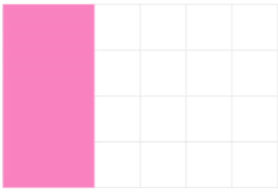


2 peças (3x4) e 2 peças (2x6) – Verde – Cada peça representa $\frac{1}{2}$



3 peças (2x4) – Rosa – Cada peça representa $\frac{1}{3}$

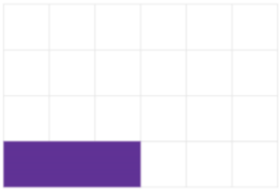
[3]A MMP Materiais Pedagógicos é uma fábrica direcionada a materiais pedagógicos de matemática, localizada na Vila Pires, Santo André, São Paulo. Acesso pelo site: https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/.



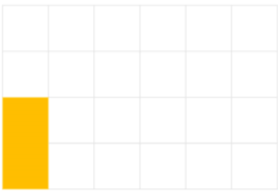
4 peças (3x2) e 4 peças (1x6) – Laranja – Cada peça representa $\frac{1}{4}$

6 peças (2x2) e 6 peças (1x4) – Vermelho – Cada peça representa $\frac{1}{6}$

8 peças (1x3) – Lilás – Cada peça representa $\frac{1}{8}$



12 peças (1x2) – Amarelo – Cada peça representa $\frac{1}{12}$



24 peças (1x1) – Cinza – Cada peça representa $\frac{1}{24}$

O kit pode ser adquirido na MMP Materiais Pedagógicos, onde fizemos a aquisição do material para a pesquisa. É um material de boa qualidade com longa duração, dependendo dos cuidados do usuário.

Caso o (a) professor (a) tenha interesse em construir as peças com os estudantes, é uma ótima oportunidade para desenvolver uma familiaridade com o material. É muito fácil, porém, ao fazer essa escolha, o (a) professor (a) precisa estar ciente de que necessitará de tempo para a construção. Acreditamos que duas aulas de 50 minutos serão o suficiente para fazer a reprodução do material com os estudantes e, além disso, é necessário ter alguns cuidados no momento da reprodução, como cortes irregulares, pois poderão gerar resultados indesejáveis no momento de fazer a troca das peças.

A seguir, citamos algumas recomendações, caso o professor opte em fazer a construção do material.

Recomendamos	***Não recomendamos***
- Utilizar papel cartão; - Folha couchê com gramatura de 300g; - EVA; - Precisão na hora dos cortes das peças, pois cortes irregulares poderão atrapalhar no momento de fazer a sobreposição das peças. - Cobrir as peças com papel adesivo contact, pois trará uma durabilidade maior para o material.	- Um material frágil, por exemplo: folha de papel A4 comum, folha de revistas, cartolina e similares. - Material com gramatura muito pesada, como: Papelão paraná, PVC, madeira e similares, pois são materiais que, para fazer o corte, é necessário utilizar estiletes ou similares.

Em nossa dissertação disponibilizamos o molde para reprodução do kit de frações. Com base nele é possível fazer a reprodução de todas as peças do kit. Não é necessário seguir, rigorosamente, as cores originais do kit, porém é fundamental que toda a turma esteja trabalhando com as mesmas cores.

Para a utilização do material, é interessante cada estudante ter o seu kit, para manuseá-lo, porém, entendemos que o custo pode ser alto. Com isso, sugerimos um kit para no máximo dois estudantes trabalharem juntos, pois, mais do que dois estudantes, pode dificultar a exploração do material. Para a nossa pesquisa, cada dupla de estudantes recebeu um kit e foi possível fazer um bom trabalho.

4. O contexto da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede estadual de Minas Gerais em Belo Horizonte, com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II, sob uma abordagem qualitativa de pesquisa em educação.

Creswel (2007) define algumas características de uma pesquisa qualitativa:

> O pesquisador qualitativo sempre vai ao local onde está o participante para conduzir a pesquisa. Isso permite ao pesquisador desenvolver um nível de detalhes sobre a pessoa ou local e está altamente envolvido nas experiências reais dos participantes. [...] A pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa. Isso significa que o pesquisador faz uma interação dos dados. Isso inclui o desenvolvimento da descrição de uma pessoa ou de um cenário, análise de dados para identificar temas ou categorias e, finalmente, fazer uma interpretação ou tirar conclusões sobre seu significado, pessoal e teoricamente, mencionando as lições aprendidas e oferecendo mais perguntas a serem feitas (CRESWEL, 2007, p. 186).

Com isso, acreditamos que o ambiente natural é a fonte direta de dados, o pesquisador, o principal instrumento, e os dados coletados são, predominantemente, descritivos. Além disso, Ludke e André (1986, p.12) destacam que, em uma pesquisa qualitativa, "a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto", ou seja, o interesse do pesquisador, ao estudar seu problema de pesquisa, é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações do dia a dia. Outro aspecto que os autores destacam é que a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Em nossa pesquisa de campo foram realizadas tarefas sobre comparação de frações, equivalência de frações, adição e subtração de frações, um jogo e observação com base na interação do grupo de estudantes. Além da observação das tarefas, foi possível compreender e interpretar determinados comportamentos dos estudantes, tais como, ouvir as opiniões e expectativas e, por fim, analisar as dificuldades e facilidades apresentadas durante as atividades e jogo. Ou seja, não houve o intuito de obter números como resultados – obter dados quantitativos –, mas *insights* por parte dos estudantes, que, muitas vezes, foram imprevisíveis e puderam indicar o caminho para a tomada de decisão sobre o problema de pesquisa.

Para a coleta de dados, foram utilizados como instrumentos: (a) registro em vídeo para análise da interação, facilidades, dificuldades e comentários dos estudantes em duas aulas; (b) tarefas que foram recolhidas ao final de cada aula contendo as respostas dos estudantes; (c) diário de campo baseado no registro escrito e (d) gravador de áudio por meio do celular.

A gravação do vídeo ocorreu em apenas duas aulas, segunda e sexta aula, com a ajuda de uma professora que trabalhava com o pesquisador no turno da manhã. Devido sua disponibilidade, não foi possível fazer a gravação de vídeo de todas as aulas. Já a gravação dos áudios foi efetuada pelo pesquisador, em todas as aulas, porém, não foi uma gravação contínua, pois tinha apenas um aparelho. Com isso, optamos em gravar, apenas, algumas discussões que percebíamos durante as tarefas e quando o pesquisador questionava os estudantes. Por fim, o diário de campo, também, foi registrado pelo pesquisador todos os dias após o término de cada aula.

5. Manipulação do kit de frações no quadriculado

Essa tarefa – manipulação do kit de frações no quadriculado – teve como objetivo propiciar, aos estudantes, reconhecerem as peças do kit de frações no quadriculado, e efetuarem algumas manipulações para comparar e encontrar frações equivalentes. Era muito importante esse reconhecimento, pois, nas próximas tarefas, utilizariam o kit como recurso didático.

Com todos os estudantes em sala, solicitei[4] que se organizassem em dupla e se assentassem de frente para o outro, facilitando a divisão do kit e o debate a respeito da tarefa. De acordo com Bordin (2011), quando se trabalha com materiais manipuláveis, a disposição dos estudantes, em grupos ou duplas, é um diferencial para o aprendizado, porque, ao conversar e trocar ideias sobre o que estão observando, a construção do conhecimento torna-se mais palpável e menos abstrata.

Assim, após a organização das duplas, entreguei uma folha com a tarefa para cada estudante e um kit para cada dupla. No início, ficaram todos empolgados com o kit e já queriam abrir a embalagem para ver o que tinha dentro. Todos com o material em mãos, dei início à aula.

Inicialmente, os estudantes manipularam o kit, sem a minha intervenção, para verificarem as peças que faziam parte do material. Após esse momento, pedi que separassem as peças do kit por cores, pois seria muito importante que eles soubessem a quantidade de peças que cada cor tinha. Em seguida, separaram as peças e alguns estudantes anotaram o total de peças que havia de cada cor. Após esse primeiro reconhecimento, informei que a peça azul seria o nosso inteiro, ou seja, todos os questionamentos que faríamos seriam em relação à peça azul. Tudo esclarecido, dei início aos questionamentos.

Solicitei que pegassem uma peça verde, pois iria dar um exemplo de como iriam preencher o primeiro quadro. Quando todos já estavam com uma peça verde na mão, eu disse:

> **Pesquisador**: Essa peça verde foi dividida em quantas partes?
> **Estudantes**: Duas partes.
> **Pesquisador**: O que aconteceu com o nosso inteiro então?
> **Estudantes**: Foi dividido ao meio.
> **Pesquisador**: Se essa peça foi dividida em duas partes, e se eu pegar apenas uma peça verde, qual a fração que ela irá representar?
> **Agatha**: Um dobro.
> **Pesquisador**: Um dobro?
> **Estudantes**: Não, será um meio.
> **Pesquisador**: Muito bem. E se pegarmos apenas uma peça rosa, qual a fração que ela representaria?
> **Taís**: Três terços.
> **Pesquisador**: Três terços, todos concordam? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Houve um silencio.

> **Pesquisador**: Se eu pegar uma peça rosa, você está usando apenas uma, correto?
> **Taís**: Correto.
> **Pesquisador**: Então isso quer dizer que você está usando uma parte de quantos?
> **Estudantes**: Uma parte de três.
> **Pesquisador**: Então qual a fração que essa peça representa?
> **Estudantes**: Um terço.
> **Pesquisador**: Isso aí. Ficou claro agora? Então vamos fazer esse mesmo procedimento com todas as outras cores. Vocês irão pegar somente uma peça de cada cor e escrever, no

[4] A partir deste trecho, o texto está em primeira pessoa por se tratar de narrativa de situações vivenciadas no ambiente de pesquisa.

quadro, a representação fracionária de cada uma. Ok? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019).

Figura 2: Questão 1

Complete o quadro abaixo com a representação fracionária de **cada uma das peças** do kit de frações no quadriculado.

Quadro para registro	
Peças	**Representação fracionária em relação à peça azul**
Uma peça azul	**Um inteiro = 1**
Uma peça verde	
Uma peça rosa	
Uma peça laranja	
Uma peça vermelha	
Uma peça roxa	
Uma peça amarela	
Uma peça cinza	

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

Esse início da atividade foi bem tranquilo, pois os estudantes conseguiram entender que o inteiro foi dividido em várias partes diferentes, por exemplo, 2, 3, 4 e 6. Também conseguiram fazer a representação fracionária de cada uma delas com facilidade.

Apesar da facilidade para responderem essa questão, entendemos que isso não quer dizer que os estudantes dominam o conteúdo fração, pois, conforme Nunes e Bryant (1997) relatam, muitas vezes, o estudante aparenta ter uma compreensão completa das frações, mas ainda não tem. No entanto, acreditamos que a forma como foi conduzida a discussão, para o preenchimento do quadro, oportunizou que os estudantes se posicionassem sobre o que pensavam enquanto manipulavam o material.

Nesse sentido, Smole e Diniz (2016) afirmam que os estudantes, ao verbalizarem entre si, enquanto manipulam o material didático, naturalmente, a linguagem matemática também se desenvolve. Isto é, o estudante tem a oportunidade de refletir sobre as situações expostas por seus colegas, e, assim, estabelecer uma negociação entre diferentes significados de uma mesma noção. As autoras reforçam ainda que, “o processo de negociação solicita a linguagem e os termos matemáticos apresentados pelo material” (Ibid., p. 13).

Um exemplo é quando a estudante diz que uma peça verde representava “um dobro”. Ou seja, provavelmente, ao expressar “um dobro”, estava pensando em um meio, pois a peça estava dividida em duas partes iguais, mas não conhecia ou esqueceu a forma “correta” de falar. No entanto, ao ser questionada, se realmente a peça representava “um dobro”, os outros estudantes informaram que o “correto” seria um meio. Assim, podemos inferir que, nesse momento, a estudante teve a oportunidade de refletir sobre o que havia dito.

Após todos preencherem o quadro, retomei a questão número 2 da tarefa 1, pois houve dúvidas se a barra de chocolate representava o todo ou os quadradinhos da barra que representavam o todo.

> **Pesquisador**: Na aula anterior, houve uma dúvida em relação à barra de chocolate. Uma aluna disse que não sabia se a barra representava o todo ou se cada quadradinho representava o todo. O que vocês me dizem? Nessa questão, a barra representa o quê? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019).

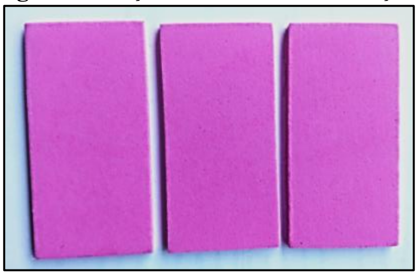
Os estudantes ficaram em silêncio por um tempo, mas, depois, um deles respondeu:

> **Pietro**: Ela representa o todo. Seria como se fosse essa peça azul. E os quadradinhos seriam as partes que ela foi dividida.
> **Pesquisador**: Muito bom. Todos concordam com o colega?
> **Estudantes**: Sim. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019).

Nesse momento, podemos perceber que o estudante foi capaz de fazer um comparativo do material manipulável com a barra de chocolate do exercício para expor seu raciocínio, ou seja, utilizou o material como base para a compreensão do conteúdo. Ao pensar assim, de acordo com Scolaro (2008), o estudante demonstra ter um envolvimento maior na sua aprendizagem, propiciando desenvolver diversas capacidades e atitudes, bem como a compreensão dos conceitos e ideias matemáticas.

Assim, aproveitei a resposta do Pietro e escrevi duas frações no quadro, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{10}$, e retomei uma dúvida da aula anterior a respeito do denominador de uma fração. Perguntei o que o 5 e o 10 representavam. Alguns estudantes ficaram em dúvida e outros responderam que representa o todo. Então, solicitei que pegassem uma peça rosa do kit, e disse: Essa peça rosa, se eu pegar apenas uma, qual fração ela representa?

Figura 3: Peças rosas do kit de frações

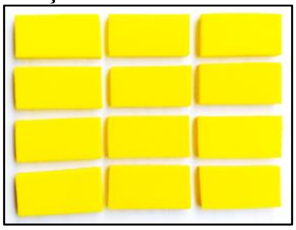


Fonte: Acervo do autor

Todos disseram com facilidade que representava $\frac{1}{3}$. Então questionei o porquê ela representava um terço. A maioria dos estudantes respondeu que era um terço porque a peça rosa foi dividida em três partes iguais e foi retirada somente uma.

Então, continuei com os questionamentos: se eu pegar duas peças amarelas, qual seria a representação fracionária dela?

Figura 4: Peças amarelas do kit de frações



Fonte: Acervo do autor

Alguns estudantes tiveram dúvidas. Uns disseram que era dois quartos e outros, um oitavo, mas percebi que eles já estavam meio cansados, pois não estão acostumados com atividades em que o professor questiona a todo momento, então, começaram a dar respostas aleatórias. Com muita insistência, responderam que as duas peças amarelas representavam dois doze avos, porque ela havia sido dividida em doze partes iguais e eu estava utilizando apenas duas.

Após esses questionamentos, perguntei novamente: Então, podemos concluir o quê sobre o denominador de uma fração? O que ele representa? Finalmente, responderam que o denominador de uma fração representava as partes em que o inteiro foi dividido. Após essa conclusão, perguntei sobre as frações que eu escrevera no quadro: Então o 5 representa o quê? E o 10? A maioria respondeu que o 5 representava o inteiro dividido em cinco partes iguais, e o 10, em dez partes iguais.

Aproveitei o ensejo da discussão e perguntei sobre a questão 3 da tarefa 1.

Figura 5: Questão 3, tarefa 1

Na sala de Pedro, haverá eleição para representante da turma. Do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, e o restante da turma está indeciso.

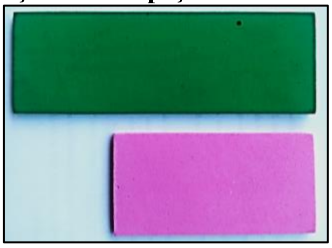
a) Se, do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, e $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, quem está ganhando a eleição até o momento? Justifique como chegou a sua conclusão.
b) Qual a fração que representa o total de alunos que já decidiram seu voto?

Fonte: Acervo do autor

Questionei qual fração seria maior. No primeiro momento, todos responderam que $\frac{2}{10}$ era maior. Perguntei se tinham certeza, mas todos ficaram na dúvida e criou-se um silêncio. Então, solicitei que pegassem uma peça verde e uma rosa. Perguntei qual era maior, a verde ou a rosa. Todos, sem exceção, responderam, com convicção, que a verde era maior. Pedi que comparassem a peça laranja com a rosa. Responderam que a rosa era maior.

Fechando essa discussão, perguntei: A peça verde é maior do que a rosa, sabem por quê? Todos conseguiram responder que a verde era maior porque foi dividida em duas partes, e a rosa, em três, ou seja, as partes da verde eram maiores do que a rosa.

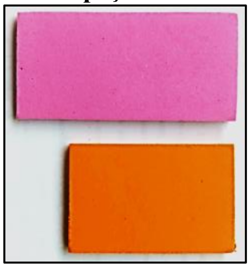
Figura 6: Comparação entre a peça verde e rosa do kit de frações



Fonte: Acervo do autor

Dei outro exemplo com a peça rosa. Por que a peça rosa é maior do que a peça laranja? Rapidamente, uma estudante falou.

Figura 7: Comparação entre as peças rosa e laranjada do kit de frações



Fonte: Acervo do autor

> **Estudante**: Nossa professor! Agora que consegui ver. Quanto mais você divide o inteiro, menor ficam as partes. Então, para eu comparar essas duas frações eu só preciso olhar em quantas partes o inteiro foi dividido para saber qual é a maior. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Após essa conclusão, os outros estudantes começaram a perceber que, realmente, fazia sentido o que ela estava falando. Para que a situação acima ficasse mais esclarecida, desenhei, no quadro, duas barras de mesmo tamanho. Dividi uma em cinco partes e outra em dez partes. Dessa forma, ficou bem visível, para todos, a conclusão da estudante.

Conforme observamos, após algumas tentativas e demonstrações para comparar duas frações, os estudantes, aos poucos, foram compreendendo. Com isso, assim como Scolaro (2008), cremos que o material didático, quando manuseado pelo estudante, funciona como um instrumento de investigação, exploração e descoberta. A autora ressalta ainda que o uso de material manipulável é um suporte para uma aprendizagem matemática mais sólida.

Nessa direção, acreditamos que o estudante, em contato direto com o material, tem a oportunidade de envolver-se em diversas situações, em que aprende a agir, comunicar, raciocinar, resolver problemas e, até mesmo, fazer generalizações. Exemplo disso, é quando a estudante, ao fazer as comparações, utilizando o kit, foi capaz de perceber que quanto mais partes dividimos o inteiro, menores ficam as suas partes. Como entramos nessa discussão para fazer a comparação de duas frações com numeradores iguais, concluímos, então, após a fala da estudante, que, para comparar duas frações com numeradores iguais, basta verificar em quantas partes o inteiro foi dividido, ou seja, analisar o denominador da fração para saber qual é a maior ou menor.

Assim, voltei às frações escritas no quadro, e disse: Então, qual das duas frações é a maior? Todos conseguiram responder que $\frac{2}{5}$ era maior do que $\frac{2}{10}$. Foi possível concluir que, na questão 3 da tarefa 1, Aline estava ganhando a votação. Houve murmúrios de alguns alunos, dizendo:

> **Estudantes**: Nossa! Errei essa questão.
> **Estudantes**: Agora que entendi. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

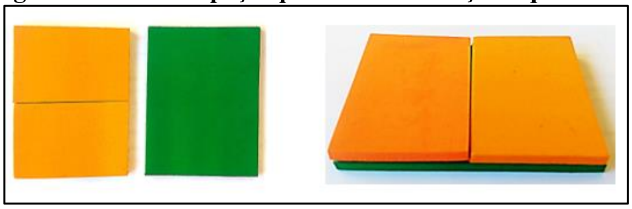
De acordo com o que averiguamos, da tarefa 1, 12 estudantes colocaram que $\frac{2}{10}$ era maior do que $\frac{2}{5}$ e, com as justificativas muito parecidas, de que 10 era maior do que 5. Ou seja, a maioria dos estudantes, ao fazer a comparação das duas frações, tratou o numerador e o denominador de forma independente, como se fossem dois números isolados. Porém, nas discussões, os próprios estudantes descobriram que a forma como pensaram não era a mais adequada para este assunto – fração.

Por fim, pedi que registrassem a definição que, em uma fração com numerador igual, quanto maior o denominador, menor é a fração, e quanto menor o denominador, maior é a fração.

Depois de ter preenchido o primeiro quadro e efetuadas as discussões acima, pedi que virassem a folha a fim de que preenchermos os outros três quadros que estavam faltando. Muitos já começaram a conversar e perder um pouco o foco do que estávamos fazendo. Acredito que já estavam cansados, mas, mesmo assim, insisti e solicitei que preenchessem os quadros.

Nesta questão, nosso objetivo era fazer a troca de algumas peças e que os estudantes percebessem que as peças trocadas representavam a mesma parte do todo. Isto é, a representação fracionária das peças trocadas com a peça referência é equivalente. Por exemplo: Uma peça verde pode ser trocada por duas peças laranja.

Figura 8: Troca de peças para achar a fração equivalente



Fonte: Acervo do autor

A representação fracionária de uma peça verde é $\frac{1}{2}$, e de duas peças laranja é $\frac{2}{4}$. Com isso, podemos concluir que $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{2}{4}$, pois representam a mesma parte do todo.

A seguir, apresentamos um dos três quadros que os estudantes deveriam preencher.

Figura 9: Questão 2

Complete os quadros abaixo de acordo com cada uma das informações.

✓ **Uma peça verde é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Rosa	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

Como na questão 1, instruí sobre o preenchimento dos quadros da questão 2. Solicitei que pegassem uma peça verde. Perguntei, em seguida, se eu poderia trocar essa peça verde por outra peça, desde que as peças trocadas sobrepusessem à peça verde. Muitos conseguiram fazer essa primeira troca. Por exemplo, alguns estudantes falaram que poderia ser trocada por 2 peças laranja (como no exemplo da figura 8). Em seguida, perguntei: Qual seria a representação fracionária dessas duas peças laranjas? Houve dúvidas para fazer a representação fracionária, demoraram para perceber que 2 peças laranjas representavam $\frac{2}{4}$.

Como a discussão do primeiro quadro com as questões da tarefa 1 se prolongou, o tempo da aula já estava acabando, estávamos no 3º horário e em seguida seria o recreio. Com isso, muitos estudantes já estavam desanimados e não prestavam mais atenção ao que ocorria. Alguns conversavam entre eles, outros, começaram a fazer casinha com o kit de frações. Percebi que, para alguns estudantes, o material já estava se tornando um brinquedo, e não um recurso para executar a tarefa. Decidi encerrar a aula e retomar depois do recreio.

Voltando do recreio, retomamos a tarefa. Antes, conversei com eles sobre a seriedade do trabalho, solicitando a colaboração de todos para que efetuassem as atividades como deveriam.

Após se acomodarem em seus lugares, iniciei novamente o preenchimento dos outros três quadros. Porém, fizemos juntos, pois muitos estavam com dúvida, e alguns não fizeram porque não conseguiram compreender e desistiram no meio do caminho. Solicitei que pegassem uma peça verde e perguntei:

> **Pesquisador**: Essa peça verde, eu consigo trocar por outra peça? Qual? Quantas peças de mesma cor vocês utilizaram para fazer a troca? É possível trocar por outra peça? Qual a representação fracionária das peças que foram trocadas? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Dessa forma, foi possível fazer o preenchimento de todos os quadros e, finalmente, eles conseguiram entender o que realmente era para ser efetuado na questão. Com os quadros preenchidos, seguimos para a última questão, cujo objetivo era possibilitar, aos estudantes, perceberem que a representação fracionária das peças trocadas representava frações equivalentes.

Figura 10: Questão 3

Como observamos, podemos escolher uma peça e efetuar sua troca por outras peças, desde que uma sobreponha a outra. Por que podemos fazer esse tipo de troca? Explique.

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

Lemos a questão juntos e, em seguida, questionei por que podíamos, por exemplo, trocar uma peça verde por 2 peças laranjas, ou 3 vermelhas, ou 4 roxas e, assim, sucessivamente.

Figura 11: Troca de peças para achar a fração equivalente

Fonte: Acervo do autor

No início, houve um silêncio, mas um estudante levantou a mão e disse:

> **Estudante**: Podemos trocar porque ela preenche toda a peça verde.
> **Pesquisador**: Ok. Mas isso quer dizer o quê?
> **Estudante**: Quer dizer que ela representa a mesma parte do verde, porém, precisa de mais peças, porque foi dividida em mais partes.
> **Pesquisador**: Todos concordam com ele?
> **Alice**: Sim, professor, porque se a peça cobre a verde toda, ela representa a mesma parte do verde. Por exemplo, se eu pegar essas peças vermelhas, eu consigo colocar três delas no verde. Vai cobrir a peça verde toda, essas três peças. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Conforme podemos observar, até o presente momento, os estudantes perceberam que, se uma peça sobrepõe a outra, ela representava a mesma parte do todo. Porém, quando pedi que fizessem a comparação das frações, tiveram dúvidas.

> **Pesquisador**: Então, se podemos fazer essas trocas, o que vocês me dizem a respeito da fração: $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Os estudantes ficaram parados por algum tempo, mas, depois, começaram a falar:

> **Estudantes**: Uma é o dobro da outra.
> **Estudantes**: São múltiplas uma da outra.
> **Estudantes**: São divisíveis.
> **Estudantes**: Multiplicou um e dois por 4. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Por fim, após algumas discussões, pedindo que trocassem algumas peças, eles foram percebendo que, se foi possível fazer a troca das peças, também podíamos dizer que $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ representavam a mesma parte do todo.

Então, perguntei:

> **Pesquisador**: Na aula anterior, uma aluna me perguntou o que era fração equivalente e me falou mais ou menos o que achava. Quem foi a aluna?
> **Alice**: Eu?
> **Pesquisador**: O que você havia me falado?
> **Alice**: Eu disse que era fração parecida, até escrevi na minha avaliação.
> **Pesquisador**: Todos concordam que uma fração equivalente é uma fração parecida?
> **Estudantes**: Eu acho que sim.
> **Pesquisador**: Mas o que quer dizer frações parecidas?
> **Pietro**: Quer dizer que ela representa a mesma parte do todo. Foi o que fizemos com as peças.
> **Pesquisador**: Muito bom. Todos compreendem, que uma fração equivalente, é o tipo de fração que representa a mesma parte do todo?
> **Estudantes**: Sim. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Já estávamos quase terminando a aula quando chegamos a essa conclusão: que, se duas frações representam a mesma parte do todo, são chamadas de frações equivalentes. Em seguida, solicitei que os estudantes fizessem o registro no caderno do que seria uma fração equivalente e que respondessem à questão 3 com base nas discussões que efetuamos.

Conforme observamos, os estudantes, ao manipular o kit de frações, puderam expor seus pensamentos, experimentar hipóteses e fazer generalizações. Dessa forma, em consonância com Smole e Diniz (2016), acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis possibilita que os estudantes aprofundem e ampliem os significados que constroem mediante sua participação nas atividades de aprendizagem. As autoras relatam ainda que “são os processos de pensamento do aluno que permitem a mediação entre os procedimentos didáticos e os resultados da aprendizagem” (Ibid., p. 12). Isto é, o estudante é o verdadeiro agente e responsável último por seu próprio processo de aprendizagem.

6. Algumas considerações

Para a tarefa apresentada, elaboramos questões a fim de que os estudantes explorassem o kit de frações no quadriculado e introduzir a ideia de comparação e equivalência de frações. O kit de frações foi uma novidade que, de acordo com nossa percepção, despertou a curiosidade e o interesse da maioria.

Com relação à utilização do kit de frações no quadriculado, entendemos que todo o material manipulável tem suas fragilidades e limitações, e não é o material, em si, que promoverá o aprendizado para o estudante, pois depende muito da forma como o professor conduz a tarefa. Nesse sentido, concordamos com Vale e Barbosa (2015), quando ressaltam que é de suma importância o professor ter conhecimento sobre o potencial – fragilidades e limitações – do material manipulável antes de propor sua utilização na sala de aula. Pois, dessa forma, é possível "desenvolver tarefas matematicamente ricas e desafiantes para a sua utilização, de acordo com os objetivos pretendidos" (ibid., p. 7- 8).

Assim, acreditamos que, da forma como conduzimos a nossa tarefa, os estudantes tiveram a oportunidade de pensar, argumentar, criar hipóteses e fazer generalizações. Além disso, cremos que os estudantes só aprendem a pensar, por si próprios, se tiverem a oportunidade de explicar e expor suas ideias em sala de aula, ao professor e aos seus pares. E esse foi o nosso intuito, ou seja, não apresentar respostas prontas para os estudantes, mas propiciar que se comunicassem com os seus pares, confrontando com opiniões diferentes da sua e posicionando-se para perceber o que não entendeu. Dessa forma, procuramos criar um ambiente no qual pudessem refletir e, possivelmente, aprender por meio dos experimentos efetuados com o kit de frações no quadriculado.

Vale destacar, que o material é um bom modelo para o estudante fazer a associação quando trabalhamos com o conjunto contínuo, porque é possível transferir para o material uma relação com as frações concretas, ou seja, ele permite visualizar, imaginar, conectar situações que estão relacionadas a esse conjunto. Porém, com o contexto discreto é necessário um salto maior. O estudante até pode utilizar o material para comparar frações para saber qual é a maior, mas acreditamos que o contexto do conjunto discreto não fica claro, isto é, existem limitações.

Utilizar o kit de frações no quadriculado para o ensino e a aprendizagem proporcionou, aos estudantes, uma compreensão melhor sobre o assunto abordado com base na visualização do conceito e algumas aplicações que, muitas vezes, os estudantes só veem na teoria. No entanto, reforçamos mais uma vez que todo material manipulável tem suas limitações. Para a ocorrência da construção desse conhecimento, foi necessário fazer as devidas intervenções e criar questionamentos pertinentes que estimulassem a curiosidade dos estudantes, a fim de que eles formulassem hipóteses e conclusões a respeito do conceito trabalhado.

7. Referências

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática:** soluções para dez desafios do professor: 4.º e 5.º ano do Ensino Fundamental. 1.ª ed. São Paulo: Ática, 2014. p. 38 – 47.

BORDIN, Laura Moreira. **Os materiais manipuláveis e os jogos pedagógicos como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros**. 2011. 102 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul: Santa Maria, 2011. Disponível em: <http://tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/375>. Acesso em: 24 set. 2018.

CRESWEL, John. W. **Projeto de pesquisa:** método qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. 248 p.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária**. Belo Horizonte, Presença Pedagógica, v.3, n.14, mar/abr. 1997. p. 60 – 71.

GARCEZ, Wagner Rohr. **Tópicos sobre o ensino de frações**: Equivalência. [dissertação] Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/wagner_rohr_garcez.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2018.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

LOYOLA, Sandro da Costa. **Tópicos sobre o ensino de frações:** Unidade. [dissertação] Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=49559>. Acesso em: 23 maio 2018.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. 128 p.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Registro de representação e os números racionais. *In*: MACHADO, S. D A. (org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Ed. Papirus, p. 57 – 70. Campinas, SP, 2003.

MARTINHO, Gesiel Alisson**. O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração**. 2020. 277 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Docência) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996, 304p.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti.; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A Formação Matemática do Professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116 p.

NACARATO, Adair Mendes. Eu Trabalho primeiro no concreto. Revista de Educação Matemática. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)**. Ano 9, n.9-10, (2004- 2005), p.1-6.

NUNES, Teresinha; BRYANT, Peter. **Criança fazendo matemática.** Porto Alegre; Artes Médicas, 1997. 244 p.

PELISSARO, Simone. **Ensino de frações: novas abordagens.** Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de título de Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Vila Flores, RS. 2011.

SANTOS, Maria José Batista de Souza. **O ensino e a aprendizagem de frações utilizando materiais manipuláveis concretos.** 2014. 45 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

SCOLARO, Maria Angela. **O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2019.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais**. Coleção Mathemoteca; v. 3. Porto Alegre: Penso, 2016. 160 p.

SOARES, João Paulo Vasconcelos; SILVA, Paulo Vilhena da. **Discos de frações**: Um material manipulativo para o ensino de frações na educação básica. VII Encontro Nacional das Licenciaturas, ENALIC. Fortaleza, CE. 2018. Disponível em: <http://uece.br/eventos/enalic/>. Acesso em: 28 ago. 2019.

VALE, Isabel; BARBOSA, Ana. **Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria.** Boletim Gepem: Rio de Janeiro, ano XXXVI, n. 65, p. 3-16, 2014.