

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar as coordenadas de pontos notáveis de um triângulo qualquer como médias ponderadas, caracterizadas de acordo com os pesos atribuídos.

Palavras chave: pontos notáveis, triângulo, média ponderada.

ABSTRACT

The objective of this work is displaying the coordinates of notable points of any triangle as weighted averages, characterized according to the weights assigned.

Keywords: notable points, triangle, weighted average

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	07
CAPÍTULO 1	08
Definições Fundamentais	08
Plano Cartesiano	15
CAPÍTULO 2	19
2.1 Coordenadas do baricentro de um triângulo qualquer	19
2.2 Coordenadas do incentro de um triângulo qualquer	20
2.3 Coordenadas do ortocentro de um triângulo qualquer	23
2.4 Coordenadas do circuncentro de um triângulo qualquer	29
2.5 Reta de Euler	34
CONCLUSÃO	35
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	36

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo mostrar que as coordenadas dos pontos notáveis de um triângulo qualquer podem ser obtidas através do cálculo das médias ponderadas dos vértices, em que cada ponto possui os seus respectivos pesos.

No capítulo 1, apresentamos algumas definições fundamentais, tais como base média de um triângulo, mediana de um segmento, mediatriz de um segmento, altura de um triângulo, bissetrizes de ângulos, dentre outros especificados no mesmo.

No capítulo 2, na seção 2.1 calculamos as coordenadas do baricentro de um triângulo qualquer.

Na seção 2.2, calculamos as coordenadas do incentro de um triângulo qualquer.

Na seção 2.3, calculamos as coordenadas do ortocentro de um triângulo qualquer.

Na seção 2.4, calculamos as coordenadas do circuncentro de um triângulo qualquer e apresentamos a reta de Euler na seção 2.5.

CAPITULO 1

DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

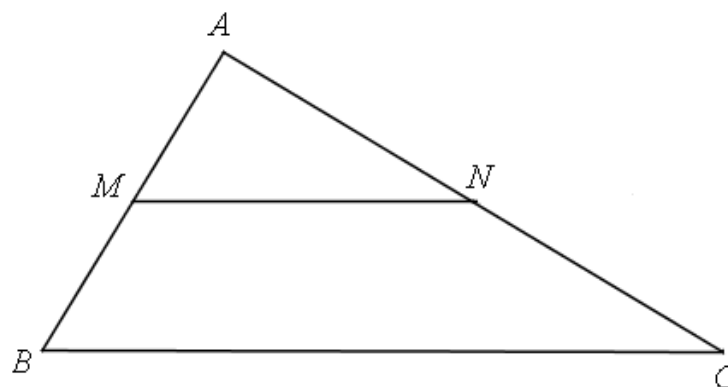
Definição 1: BASE MÉDIA DE UM TRIÂNGULO

É um segmento cujos extremos são pontos médios de dois lados de um triângulo.

Teorema 1: TEOREMA DA BASE MÉDIA DE UM TRIÂNGULO

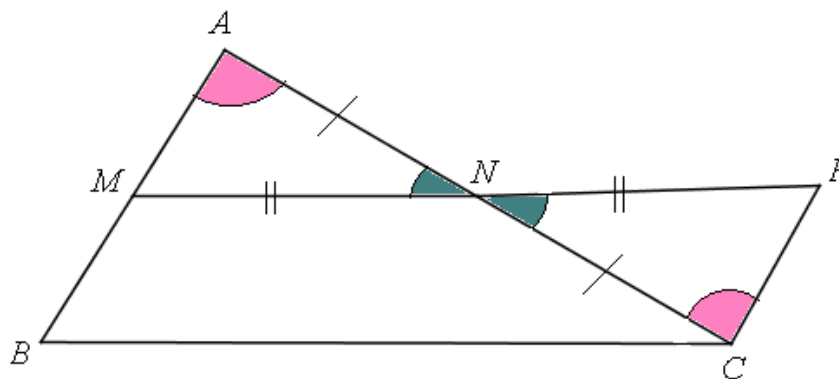
Sejam M e N os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo ABC .

Então, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, e $MN = \frac{BC}{2}$.



Demonstração:

Seja P um ponto na semirreta MN , de forma que $MN = 2(NP)$



Temos que $\triangle AMN \cong \triangle CPN$, pois:

$$MN = PN$$

$$\hat{A}NM = \hat{C}NP$$

$$AN = CN$$

Pelo caso LAL de congruência de triângulos.

Daí, temos:

- $AB \parallel PC$, pois $\hat{M}AN = \hat{P}CN$, que são ângulos alternos internos formados pelas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CP} com a transversal \overleftrightarrow{AC} .
- $MB = PC$, pois $CP = AM = MB$.

Dessas duas relações concluímos que o quadrilátero MBCP é um paralelogramo. Donde concluímos que $MP = BC$ e $MP \parallel BC$,

consequentemente $MN = \frac{BC}{2}$ e $MN \parallel BC$.

Isso conclui a demonstração.

Definição 2: MEDIANA DE UM TRIÂNGULO

A mediana de um triângulo com relação a um vértice do triângulo é o segmento de extremos que vai deste vértice ao ponto médio do lado oposto.

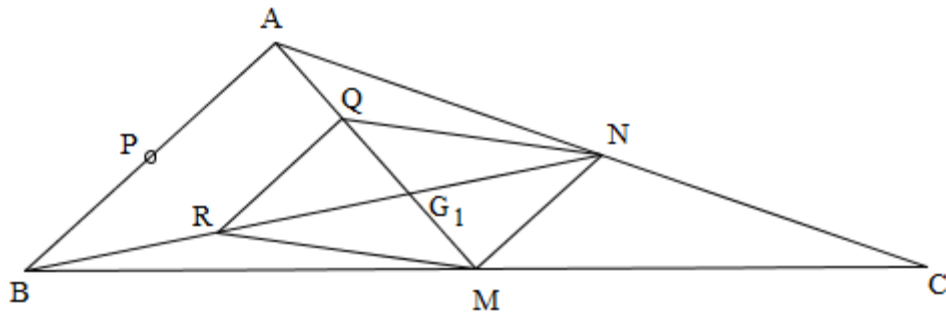
Teorema 2:

As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um mesmo ponto. Tal ponto é chamado de baricentro do triângulo.

Demonstração:

Consideremos um triângulo de vértices A, B e C (veja pg.12)

Sejam AM e BN as medianas do $\triangle ABC$ relativas aos vértices A e B e denotemos por G_1 a interseção dessas medianas. Considere Q e R os pontos médios de AG_1 e BG_1 , respectivamente.



O quadrilátero $MNQR$ é um paralelogramo.

De fato, pelo teorema da base média temos:

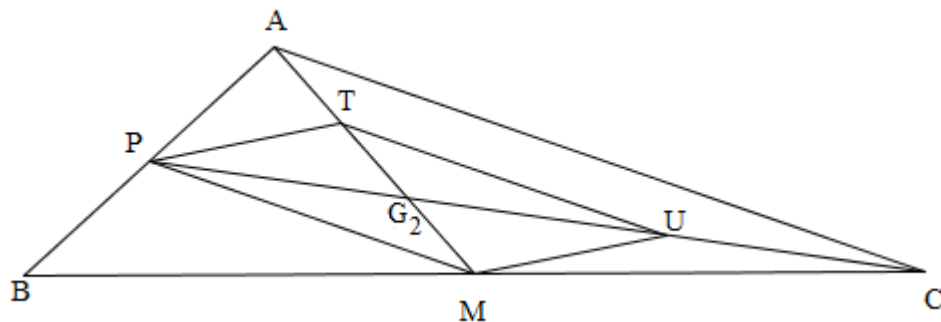
No $\triangle ABC$ que $MN \parallel AB$ e $MN = \frac{AB}{2}$ no $\triangle BG_1A$ que $QR \parallel AB$ e $QR = \frac{AB}{2}$

. Assim $MN \parallel QR$ e $MN = QR$.

Além disso, sendo G_1 a interseção das diagonais do paralelogramo $MNQR$,

temos: $AG_1 = 2G_1M$ e $BG_1 = 2G_1N$.

Consideremos agora as medianas AM e CP .



O quadrilátero $MUTP$ é um paralelogramo.

De fato, pelo teorema da base média temos:

NO $\triangle CG_2A$ que $UT \parallel CA$ e no $\triangle ABC$ que $UT = \frac{CA}{2}$ e $PM \parallel CA$ e $PM = \frac{CA}{2}$.

Assim $UT \parallel PM$ e $UT = PM$.

Além disso, sendo G_2 a interseção das diagonais do paralelogramo $MUTP$,

temos: $T = Q$, $AG_2 = 2G_2M$ e $CG_2 = 2G_2P$.

Como existe um único ponto X sobre AM tal que $AX = 2XM$, concluímos que $G_1 = G_2$.

Dessa forma fica provado que as três medianas se encontram em um mesmo ponto.

Corolário: O baricentro está sobre cada mediana, a uma distancia do vértice de $\frac{2}{3}$ da mediana relativa ao vértice.

Definição 3: MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO

É a reta perpendicular ao segmento, traçada pelo seu ponto médio.

Observação: Da geometria plana pode-se demonstrar que a mediatriz de um segmento, é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam dos extremos deste segmento.

Teorema 3:

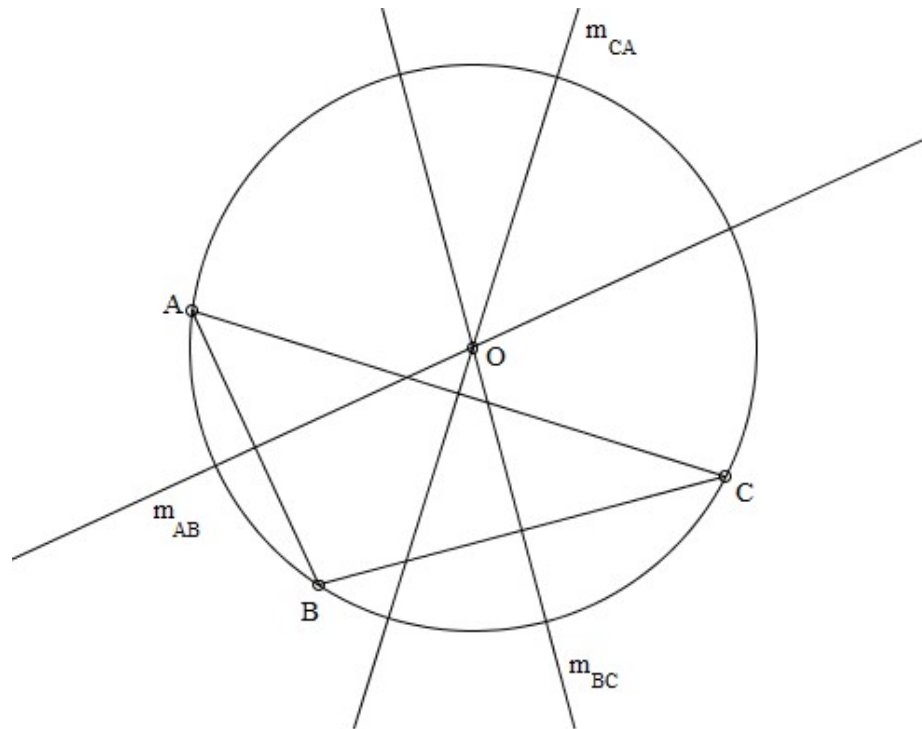
As três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontram em um mesmo ponto.

Tal ponto é chamado de circuncentro de um triângulo.

Demonstração:

Dado um $\triangle ABC$ e sejam m_{AB} , m_{BC} , m_{CA} as mediatrizes referentes aos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} .

O ponto O interseção de m_{AB} e m_{BC} é o ponto que equidista de A e B e, também, de B e C . Portanto, o ponto O eqüidista de A e C . Logo, O pertence a m_{CA} . Isto é, as três mediatrizes se intersectam em O , que equidista de A , B e C .



Definição 4: ALTURA DE UM TRIÂNGULO

É um segmento contido na reta que passa por um vértice e que é perpendicular e cujos extremos são esse vértice e a interseção dessa reta com o lado oposto.

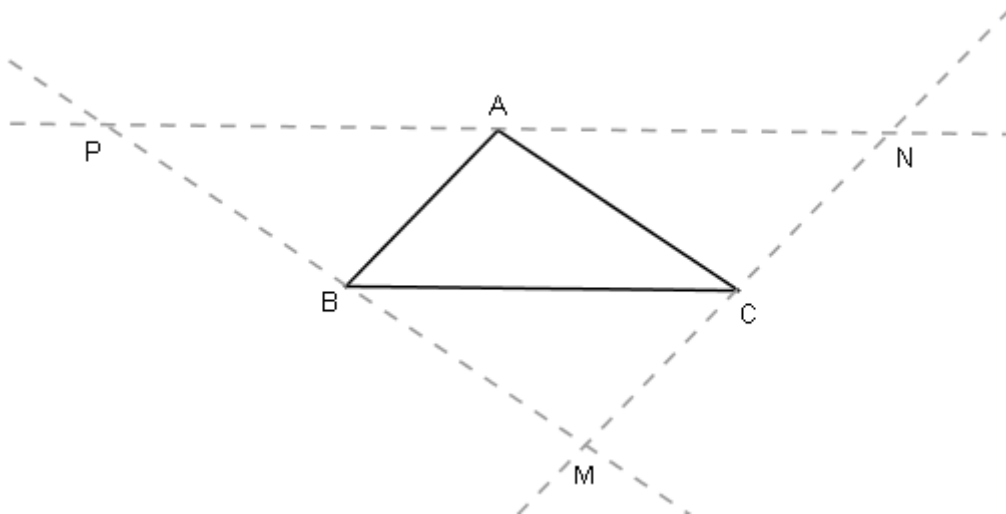
Teorema 4:

As retas que contêm as alturas de um triângulo qualquer se encontram em um mesmo ponto. O ortocentro de um triângulo é o ponto onde se intersectam as retas que contêm as alturas do triângulo.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo qualquer.

Pelos vértices A, B e C desse triângulo, tracemos retas paralelas aos lados opostos a estes vértices, obtendo o ΔMNP .



Temos que:

$$A \in \overline{NP} \text{ e } \overline{NP} \parallel \overline{BC}$$

$$B \in \overline{MP} \text{ e } \overline{MP} \parallel \overline{AC}$$

$$C \in \overline{MN} \text{ e } \overline{MN} \parallel \overline{AB}.$$

Daí:

$$APBC \text{ é paralelogramo } \Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC}$$

$$ABCN \text{ é paralelogramo } \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC}$$

Logo, A é ponto médio de \overline{PN} .

De forma análoga, concluímos que B é ponto médio de \overline{PM} , e C é ponto médio de \overline{MN} .

As retas que contêm as alturas do $\triangle ABC$ são mediatrizes dos lados \overline{PM} , \overline{PN} e \overline{MN} do $\triangle PMN$. Pelo teorema das mediatrizes sabemos que estas retas se encontram em um mesmo ponto. Este ponto é o ortocentro do triângulo ABC .

Definição 5: BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

A bissetriz de um ângulo $\hat{A}OB$ é a semirreta de origem O , incluída no ângulo, e que o divide em dois outros de mesma medida.

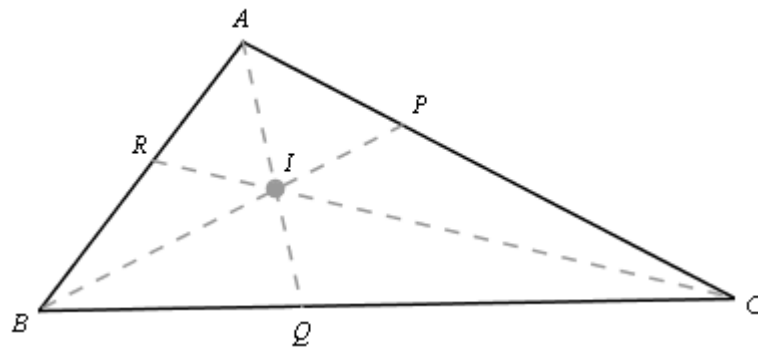
Definição 6: BISSETRIZ DO ÂNGULO DE UM TRIÂNGULO ABC

A bissetriz do triângulo ABC relativa ao vértice A , é o segmento contido na bissetriz do ângulo A e cujos extremos são A e a interseção desta com o lado oposto.

Observação: Vale observar que a bissetriz de um ângulo, é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.

TEOREMA 5:

As bissetrizes de um triângulo qualquer se encontram em um ponto comum. Tal ponto é chamado de incentro de um triângulo.



Demonstração:

Dado o $\triangle ABC$, tracemos a bissetriz \overline{BP} e a bissetriz \overline{AQ} .

Seja I a interseção de \overline{BP} e \overline{AQ} . Então:

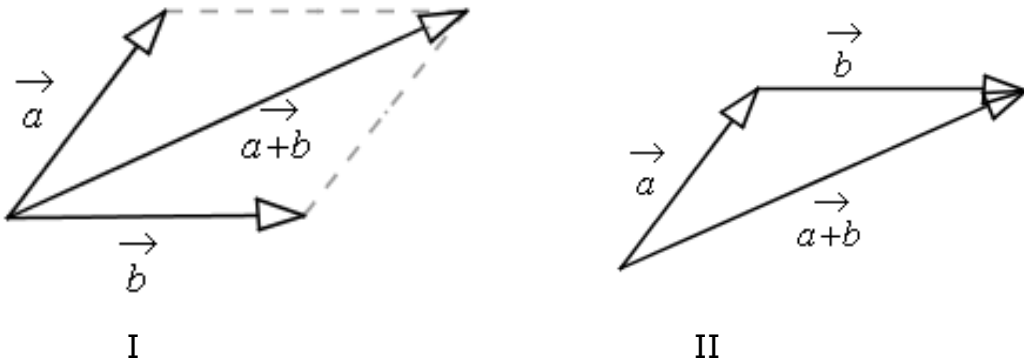
$I \in \overline{AQ} \Rightarrow d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{AC})$ e $I \in \overline{BP} \Rightarrow d(I, \overline{AB}) = d(I, \overline{BC})$, donde

$d(I, \overline{AC}) = d(I, \overline{BC})$.

Logo, $I \in \overline{CR}$.

PLANO CARTESIANO:

Definição 7: SOMA DE VETORES

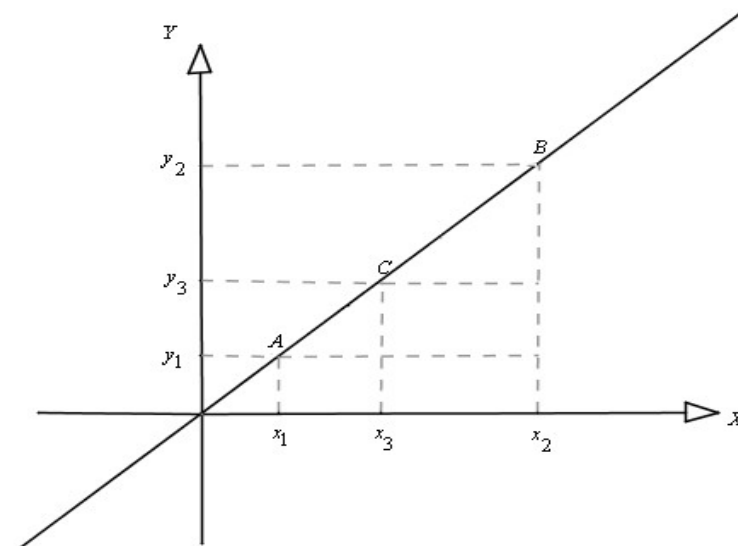


Definição 8: DIVISÃO DE UM SEGMENTO NA RAZÃO DADA

Dados três pontos colineares $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, tal que $B \neq C$, dizemos que o ponto C divide o segmento \overline{AB} na razão r ,

com $r > 0$, e escrevemos $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$, se $\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{CB}$.

Proposição: Coordenadas do ponto C que divide \overline{AB} na razão r .



Então, $\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{AB}$. Essa equação vetorial pode ser escrita em coordenadas cartesianas da seguinte forma:

$$X_C - X_A = r(X_B - X_A)$$

$$X_C = r(X_B - X_A) + X_A$$

Analogamente,

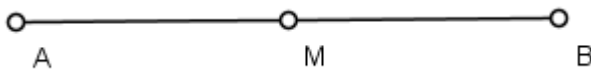
$$Y_C = r(Y_B - Y_A) + Y_A$$

Logo,

$$C = (r(X_B - X_A) + X_A, r(Y_B - Y_A) + Y_A).$$

EXEMPLO: vamos calcular as coordenadas do ponto médio de um segmento

Dado um segmento \overline{AB} , determinar as coordenadas do ponto médio, M, desse segmento.



Solução:

Temos que $\overrightarrow{AM} = r\overrightarrow{AB}$, em que $r = \frac{1}{2}$

Daí obtemos que:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Definição 9: Vetores linearmente dependentes

Dois vetores são linearmente dependentes, quando um deles for um múltiplo escalar do outro.

Observação: Se dois vetores não nulos são linearmente dependentes, então eles têm a mesma direção.

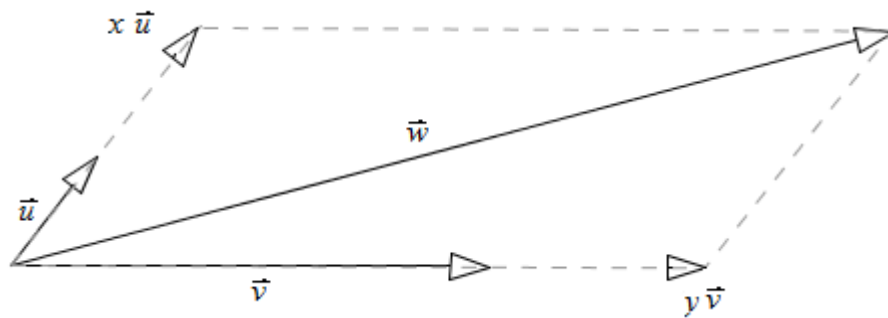
Definição 10: Vetores linearmente independentes

Dois vetores são linearmente independentes, quando nenhum deles for um múltiplo escalar do outro.

Observação: Se dois vetores são linearmente independentes, então eles possuem direções diferentes.

Todo vetor no plano se escreve como combinação linear de dois vetores linearmente independentes.

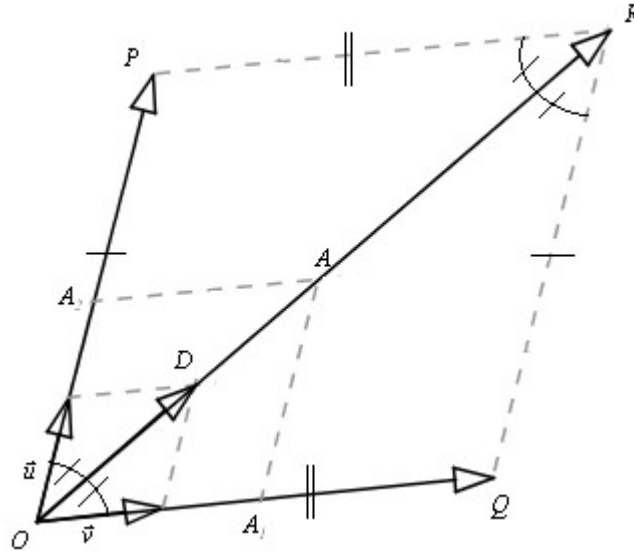
Representando por \vec{u} e \vec{v} dois vetores linearmente independentes, então um vetor \vec{w} é uma combinação linear de \vec{u} e \vec{v} , isto é, existem reais x e y tais que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



Definição 11: VETOR UNITÁRIO

Dado um vetor $\vec{OP} \neq 0$, o seu vetor unitário é dado por $\vec{u} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$. Isto é, chamaremos de vetor unitário o vetor de norma 1, com o mesmo sentido de OP.

Definição 12: EQUAÇÃO DA BISSETRIZ DO ÂNGULO NÃO NULO $P\hat{O}Q$.



Sejam os vetores unitários $\vec{u} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$ e $\vec{v} = \frac{\vec{OQ}}{\|\vec{OQ}\|}$. Então o vetor $\vec{OD} = \vec{u} + \vec{v}$

tem a direção da bissetriz do ângulo formado por \vec{u} e \vec{v} .

De fato, \vec{OD} dá a direção da diagonal do paralelogramo de lados paralelos a \vec{u} e \vec{v} .

Assim a equação da bissetriz de $P\hat{O}Q$ é $\lambda \vec{OD}$, com $\lambda \geq 0$.

CAPÍTULO 2

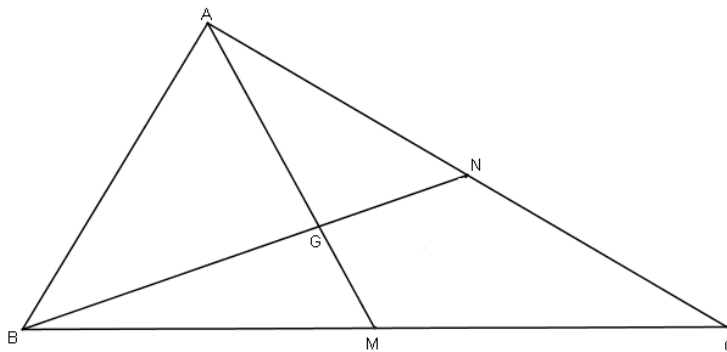
2.1 COORDENADAS DO BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO QUALQUER:

Teorema 6: Dado um triângulo qualquer de vértices $A = (X_A, Y_A)$, $B = (X_B, Y_B)$, $C = (X_C, Y_C)$, o baricentro desse triângulo é dado por:

$$G = \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3} \right)$$

Demonstração:

Seja AM a mediana do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC .



Então, $M = \left(\frac{X_B + X_C}{2}, \frac{Y_B + Y_C}{2} \right)$ e $\overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AM}$.

Daí usando o teorema 6, temos:

$$X_G - X_A = \frac{2}{3}(X_M - X_A)$$

$$X_G = \frac{2}{3} \left(\frac{X_B + X_C}{2} - X_A \right) + X_A$$

$$X_G = \frac{X_B + X_C}{3} - \frac{2X_A}{3} + \frac{3X_A}{3}$$

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$

Analogamente temos:

$$Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

Dessa forma podemos escrever $G = \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3} \right)$

Observação: A partir dessa seção usaremos notações envolvendo A, B, C , com o intuito de expressar uma relação que vale simultaneamente para a abscissa e a ordenada de cada um desses pontos.

Por exemplo, $G = \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3} \right) = \frac{A + B + C}{3}$.

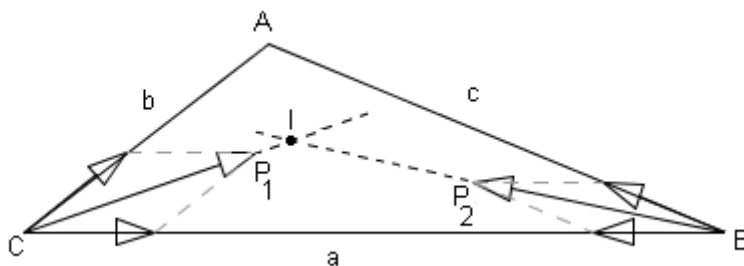
2.2 COORDENADAS DO INCENTRO DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Teorema 7: Dado o $\triangle ABC$ no plano, as coordenadas do incentro desse

triângulo são dadas por: $I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$, sendo a, b, c as medidas dos lados opostos aos vértices A, B, C respectivamente.

Demonstração:

Na figura abaixo, I representa o incentro do $\triangle ABC$.



Temos que :

$$1) \overrightarrow{CP_1} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \text{ e } \overrightarrow{CI} = \alpha \overrightarrow{CP_1}, \alpha \in \mathfrak{R}$$

$$2) \overrightarrow{BP_2} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \text{ e } \overrightarrow{BI} = \beta \overrightarrow{BP_2}, \beta \in \mathfrak{R}$$

Temos ainda as seguintes equações:

$$I) \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$II) \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CB}$$

De II temos:

$$\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \alpha (\overrightarrow{CP_1}) + \beta (\overrightarrow{BP_2}) = \overrightarrow{CB}$$

$$\alpha \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \right) + \beta \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BA}\|} + \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} \right) = \overrightarrow{CB}$$

Observação: $\|\overrightarrow{CA}\| = b$, $\|\overrightarrow{CB}\| = a$, $\|\overrightarrow{BA}\| = c$

$$III) \frac{\alpha}{b} \overrightarrow{CA} + \frac{\alpha}{a} \overrightarrow{CB} + \frac{\beta}{c} \overrightarrow{BA} + \frac{\beta}{a} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB} = 0$$

De (I) Podemos escrever: $\frac{\beta}{c} \overrightarrow{BA} = \frac{\beta}{c} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$ e substituir em III, em

seguida colocamos \overrightarrow{CA} e \overrightarrow{CB} em evidência. Dessa forma obtemos:

$$\left(\frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{c} \right) \overrightarrow{CA} + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{c} - 1 \right) \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\begin{cases} i) \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{c} = 0 \quad \therefore \beta = -\frac{c\alpha}{b} \\ ii) \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{c} - 1 = 0 \end{cases}$$

Substituindo i em ii , obtemos: $\alpha = \frac{ab}{a+b+c}$.

Podemos então escrever que: $\overrightarrow{CI} = \alpha \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \right)$.

$$\text{Donde, } \overrightarrow{CI} = \frac{ab}{a+b+c} \left(\frac{x_A - x_C}{b} + \frac{x_B - x_C}{a} \right)$$

$$x_I - x_C = \frac{a(x_A - x_C)}{a+b+c} + \frac{b(x_B - x_C)}{a+b+c}$$

$$x_I = \frac{ax_A - ax_C + bx_B - bx_C}{a+b+c} + x_C$$

$$x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}$$

Analogamente para a segunda coordenada, temos:

$$y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}$$

Dessa forma podemos escrever

$$I = \left(\frac{aX_A + bX_B + cX_C}{a + b + c}, \frac{aY_A + bY_B + cY_C}{a + b + c} \right)$$

$$I = \frac{a(X_A, Y_A)}{a + b + c} + \frac{b(X_B, Y_B)}{a + b + c} + \frac{c(X_C, Y_C)}{a + b + c} \Rightarrow I = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

2.3 COORDENADAS DO ORTOCENTRO DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Teorema 8: As coordenadas do ortocentro de um triângulo $\triangle ABC$ é dada por:

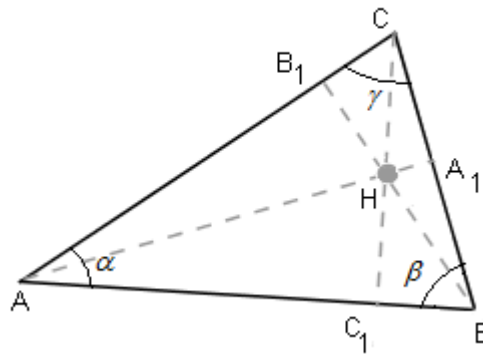
$$H = \left(\frac{X_A \operatorname{tg}\alpha + X_B \operatorname{tg}\beta + X_C \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}, \frac{Y_A \operatorname{tg}\alpha + Y_B \operatorname{tg}\beta + Y_C \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} \right), \text{ isto é,}$$

$$H = \frac{A \operatorname{tg}\alpha + B \operatorname{tg}\beta + C \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}.$$

Demonstração:

As coordenadas dos pontos são $A = (X_A, Y_A)$, $B = (X_B, Y_B)$ e $C = (X_C, Y_C)$.

Sejam A_1, B_1 , e C_1 os pés das alturas relativas aos lados BC, CA e AB .



1) Do triângulo $\triangle AB_1B$, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB_1}{AB_1} \Rightarrow BB_1 = \operatorname{tg}\alpha \cdot AB_1$$

2) Do triângulo $\triangle CBB_1$, temos:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{BB_1}{CB_1} \Rightarrow BB_1 = \operatorname{tg}\gamma \cdot CB_1$$

Das relações obtidas em 1 e 2, obtemos:

$$tg\alpha \cdot \overline{AB_1} = tg\gamma \cdot \overline{CB_1} \Rightarrow \frac{\overline{AB_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{tg\gamma}{tg\alpha}. \text{ Donde } \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{tg\alpha}{tg\gamma} \Rightarrow \frac{\overline{CB_1} + \overline{AB_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{tg\alpha + tg\gamma}{tg\gamma}$$

e, conseqüentemente, $\overline{AB_1} = \left(\frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} \right) \overline{AC}.$

Assim concluímos que $\overline{AB_1} = \left(\frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} \right) \overline{AC}.$

Daí,

$$B_1 - A = \left(\frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma} \right) \cdot (C - A)$$

$$B_1 = \frac{C tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} - \frac{A tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} + A$$

$$B_1 = \frac{C tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} - \frac{A tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma} + \frac{A tg\alpha + A tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}$$

$$B_1 = \frac{A tg\alpha + C tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}$$

Analogamente

obtemos:

$$C_1 = \frac{A tg\alpha + B tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$$

Considerando ΔAB_1H , temos:

$$(1) \overline{B_1H} + \overline{HA} = \overline{B_1A}$$

$$(2) \overline{B_1H} = \lambda (\overline{B_1B})$$

$$\overline{B_1H} = \lambda (\overline{B_1C} + \overline{CB})$$

$$\overline{B_1H} = \lambda (\overline{pAC} - \overline{BC})$$

$$(3) \overline{HA} = \vartheta (\overline{A_1A})$$

$$\overline{B_1H} = \vartheta (\overline{A_1C} + \overline{CA})$$

$$\overline{B_1H} = \vartheta (\overline{qBC} - \overline{AC})$$

$$(4) \overrightarrow{B_1A} = -w\overrightarrow{AC}, \text{ em que } w = \frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\gamma}$$

Substituindo esses valores encontrados na equação (1), vamos obter:

$$(5) \lambda \left(p\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \right) + \vartheta \left(q\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \right) + w\overrightarrow{AC} = 0$$

Para encontrarmos os valores de p e q , faremos:

$$\text{I) } B_1C = p AC \therefore p = \frac{B_1C}{AC}$$

$$AC = AB_1 + B_1C \therefore AB_1 = AC - B_1C$$

$$\text{Sabemos que } tg\gamma = \frac{B_1B}{B_1C} \text{ e } tg\alpha = \frac{B_1B}{B_1A}.$$

Igualando as tangentes, temos:

$$(B_1C) tg\gamma = (B_1A) tg\alpha$$

$$(B_1C) tg\gamma = (AB_1) tg\alpha$$

$$(B_1C) tg\gamma = (AC - B_1C) tg\alpha$$

$$(B_1C) tg\gamma = (AC) tg\alpha - (B_1C) tg\alpha$$

$$B_1C (tg\gamma - tg\alpha) = (AC) tg\alpha$$

$$\frac{B_1C}{AC} = \frac{tg\alpha}{(tg\gamma + tg\alpha)}$$

$$p = \frac{tg\alpha}{(tg\gamma + tg\alpha)}$$

$$\text{II) } A_1C = q BC \therefore q = \frac{A_1C}{BC}$$

$$A_1B = CB - CA_1 \therefore A_1B = -BC + A_1C$$

$$\text{Sabemos que } tg\gamma = \frac{A_1A}{A_1C} \text{ e } tg\beta = \frac{A_1A}{A_1B}.$$

Igualando as tangentes, temos:

$$(A_1C) \operatorname{tg} \gamma = (A_1B) \operatorname{tg} \beta$$

$$(A_1C) \operatorname{tg} \gamma = (BC - A_1C) \operatorname{tg} \beta$$

$$(A_1C) \operatorname{tg} \gamma + (A_1C) \operatorname{tg} \beta = (BC) \operatorname{tg} \beta$$

$$A_1C(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta) = (BC) \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{A_1C}{BC} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)}$$

$$q = \frac{\operatorname{tg} \beta}{(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)}$$

Substituindo os valores de p e q em (5) e organizando a equação temos:

$$\lambda (\overrightarrow{pAC} + \overrightarrow{CB}) - \vartheta (\overrightarrow{qCB} - \overrightarrow{AC}) + w \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\lambda (\overrightarrow{pAC}) - \lambda \overrightarrow{BC} + \vartheta q \overrightarrow{BC} - \vartheta \overrightarrow{AC} + w \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(\lambda p - \vartheta + w) \overrightarrow{AC} + (\lambda - \vartheta q) \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\begin{cases} \text{I) } \lambda p - \vartheta + w = 0 \\ \text{II) } \lambda - \vartheta q = 0 \therefore \lambda = \vartheta q \therefore \vartheta = \frac{\lambda}{q} \end{cases}$$

Substituindo II em I, temos:

$$\vartheta = \frac{\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha}}{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha} \right) \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta} \right) - 1}$$

$$\vartheta = \frac{\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha}}{\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)}{(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)}}$$

$$\vartheta = \frac{\operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta)}$$

De (3), temos:

$$\overrightarrow{HA} = \vartheta (\overrightarrow{AC} + q\overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{HA} = \vartheta \overrightarrow{AC} + \vartheta q\overrightarrow{CB}$$

$$X_A - X_H = \vartheta (X_C - X_A) + \vartheta q(X_B - X_C)$$

$$X_H = (\vartheta + 1)X_A - \vartheta q X_B + (\vartheta q - \vartheta) X_C$$

- $\vartheta + 1$

$$\frac{tg\gamma (tg\gamma + tg\beta)}{tg\alpha \, tg\beta - (tg\gamma + tg\alpha)(tg\gamma + tg\beta)} + 1$$

$$\frac{tg\gamma (tg\gamma + tg\beta) + tg\alpha \, tg\beta - (tg\gamma + tg\alpha)(tg\gamma + tg\beta)}{tg\alpha \, tg\beta - (tg\gamma + tg\alpha)(tg\gamma + tg\beta)}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} X_A$$

- $-\vartheta q$

$$- \left(\frac{tg\gamma (tg\gamma + tg\beta)}{tg\alpha \, tg\beta - (tg\gamma + tg\alpha)(tg\gamma + tg\beta)} \right) \left(\frac{tg\beta}{(tg\gamma + tg\beta)} \right)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} X_B$$

- $\vartheta q - \vartheta \therefore \vartheta (q - 1)$

$$\left(\frac{tg\gamma (tg\gamma + tg\beta)}{tg\alpha \, tg\beta - (tg\gamma + tg\alpha)(tg\gamma + tg\beta)} \right) \left(\frac{tg\beta}{(tg\gamma + tg\beta)} - 1 \right)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} X_C$$

$$X_H = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} X_A + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} X_B + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} X_C$$

Analogamente,

$$Y_H = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} Y_A + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} Y_B + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} Y_C$$

Dessa forma podemos escrever $H = \frac{A \operatorname{tg}\alpha + B \operatorname{tg}\beta + C \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}$.

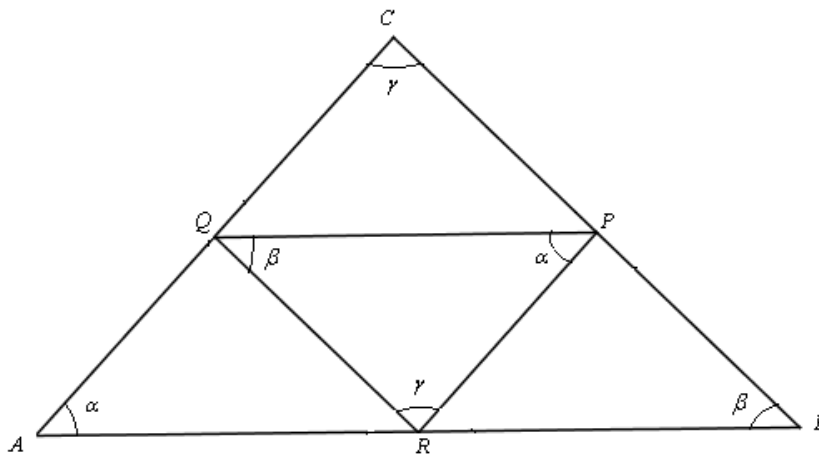
2.4 COORDENADAS DO CIRCUNCENTRO DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Teorema 9: As coordenadas do circuncentro de um ΔABC é dada por:

$$N = \frac{A \operatorname{sen}(2\alpha) + B \operatorname{sen}(2\beta) + C \operatorname{sen}(2\gamma)}{\operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\beta) + \operatorname{sen}(2\gamma)}$$

Demonstração:

Vamos considerar o ΔABC , e a seguir tomaremos os pontos P, Q e R , médios aos respectivos lados \overline{AB} , \overline{AC} , e \overline{BC} .



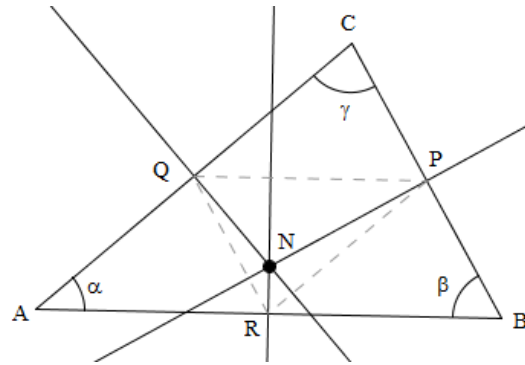
Temos que:

$$P = \frac{B + C}{2}, \quad Q = \frac{A + C}{2}, \quad R = \frac{A + B}{2}.$$

Os triângulos ABC e PQR têm os ângulos iguais e podemos dizer também que:

$$\overline{PR} \parallel \overline{AC}, \quad \overline{QP} \parallel \overline{AB}, \quad \overline{QR} \parallel \overline{CB}.$$

Logo as mediatrizes dos lados do ΔABC contêm as alturas do ΔPQR .



Portanto o circuncentro N do $\triangle ABC$ é o ortocentro do $\triangle PQR$.

Logo:

$$N = \frac{P \operatorname{tg} \alpha + Q \operatorname{tg} \beta + R \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}$$

$$N = \frac{\frac{B+C}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{A+C}{2} \operatorname{tg} \beta + \frac{A+B}{2} \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}$$

$$N = \frac{(B+C) \operatorname{tg} \alpha + (A+C) \operatorname{tg} \beta + (A+B) \operatorname{tg} \gamma}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}$$

$$N = \frac{A(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) + B(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma) + C(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}$$

$$N = \frac{A(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) + B(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta) + C(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma)}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}$$

$$N = \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)(A+B+C) - A \operatorname{tg} \alpha - B \operatorname{tg} \beta - C \operatorname{tg} \gamma}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)}$$

$$N = \frac{(A+B+C)}{2} - \frac{A \operatorname{tg} \alpha + B \operatorname{tg} \beta + C \operatorname{tg} \gamma}{2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)} (*). \text{ Essa é uma primeira expressão}$$

para N .

Trabalharemos a seguir para obter C como uma média ponderada. Na verdade,

$$N = \frac{A \operatorname{sen}(2\alpha) + B \operatorname{sen}(2\beta) + C \operatorname{sen}(2\gamma)}{\operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\beta) + \operatorname{sen}(2\gamma)}$$

De fato

Substituindo as observações 1,2,3 e 4 na equação a seguir

$$N = \frac{A \cos \alpha (\operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \beta) + B \cos \beta (\operatorname{sen} \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha) + C \cos \gamma (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)}{2(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \beta)},$$

temos:

$$N = \frac{A \cos \alpha (\operatorname{sen}(\beta + \gamma)) + B \cos \beta (\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)) + C \cos \gamma (\operatorname{sen}(\alpha + \beta))}{2(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \beta)}$$

$$N = \frac{A \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + B \cos \beta \operatorname{sen} \beta + C \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma}{2(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \beta)}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2, segue:

$$N = \frac{2A \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + 2B \cos \beta \operatorname{sen} \beta + 2C \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma}{4(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \beta)}$$

$$N = \frac{A \operatorname{sen}(2\alpha) + B \operatorname{sen}(2\beta) + C \operatorname{sen}(2\gamma)}{4(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \beta)}$$

Desenvolvendo apenas o denominador

$4(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha \cos \beta)$, temos:

$$4(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha (\operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \beta))$$

$$4(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha (\operatorname{sen}(\beta + \gamma)))$$

$$4(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha)$$

$$4(\operatorname{sen} \alpha (\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha))$$

Agora vamos mostrar que:

$$4(\operatorname{sen} \alpha (\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)) = \operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\beta) + \operatorname{sen}(2\gamma)$$

$$2(\operatorname{sen} \alpha (\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma$$

$$2\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma$$

$$2\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma$$

$$\operatorname{sen} \alpha (2 \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha) = \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma$$

$$\operatorname{sen}(\beta + \gamma)(2 \cos \beta \cos \gamma - \cos(\beta + \gamma)) = \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma$$

$$2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma)(\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma) = \operatorname{sen} \beta \cos \beta + \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma$$

$$2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma)(\cos(\beta - \gamma)) = \operatorname{sen}(2\beta) + \operatorname{sen}(2\gamma)$$

$$2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma)(\cos(\beta - \gamma)) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\beta + 2\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\beta - 2\gamma}{2}\right)$$

$$2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma)(\cos(\beta - \gamma)) = 2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma)(\cos(\beta - \gamma)) \quad .$$

Assim,

$$4(\operatorname{sen} \alpha (\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)) = \operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\beta) + \operatorname{sen}(2\gamma) .$$

Dessa forma podemos escrever
$$N = \frac{A \operatorname{sen}(2\alpha) + B \operatorname{sen}(2\beta) + C \operatorname{sen}(2\gamma)}{\operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(2\beta) + \operatorname{sen}(2\gamma)} .$$

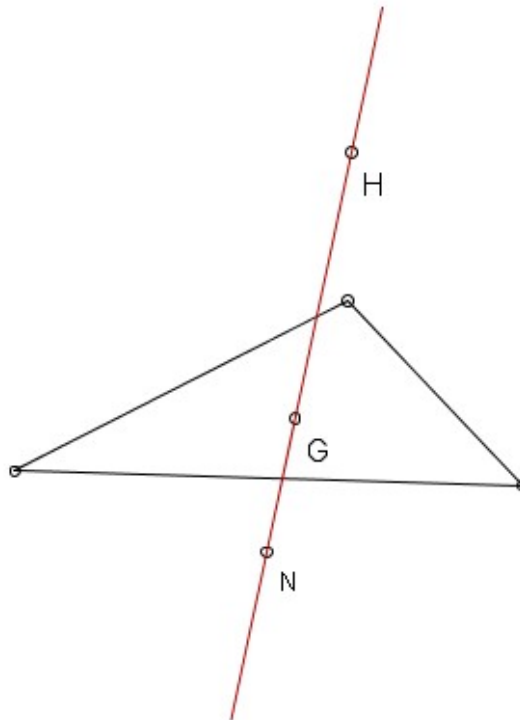
2.5 RETA DE EULER

Da relação em (*) da pg.26, temos que:

$$N = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H \Leftrightarrow 2N = 3G - H \Leftrightarrow \overrightarrow{2GC} = \overrightarrow{HG}, \text{ o que quer dizer que os pontos}$$

N, G e H são colineares.

A reta que contém esses pontos N, G e H é denominada a reta de Euler do $\triangle ABC$.



CONCLUSÃO:

Ao iniciar este trabalho, percebi como os conteúdos matemáticos estão entrelaçados de uma maneira muito interessante e desafiadora.

Em alguns momentos, tive muita dificuldade em perceber esta relação entre os diversos conteúdos utilizados para as demonstrações feitas nos capítulos anteriores. A idéia de “unificar” uma fórmula para provar que os centros dos triângulos partem de uma mesma fórmula, e o que as diferencia são os pesos utilizados, é realmente muito interessante e divertido de descobrir.

Apreendi que para atingirmos nossos objetivos, nesse caso, das demonstrações é necessário muita dedicação, atenção e força de vontade. Precisei superar medos, inseguranças e tabus que eu também tinha sobre alguns conteúdos matemáticos. Meu orientador foi de muita importância para que eu atingisse esse objetivo. Ele me deu forças e conselhos, que me ajudaram a me esforçar e cumprir a tarefa a que me dispus.

Que este trabalho possa ser um meio de ajuda para outros colegas que como eu, tive a força de vontade para superar as dificuldades que às vezes encontramos em nossos caminhos matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Revistas R.P.M. Vol.2 e 3 – Seção de problemas – Sociedade Brasileira de Matemática.
- Revista R.P.M. Vol.43 – Seção sobre Coordenadas para os centros dos triângulos – Sociedade Brasileira de Matemática.