Rodrigo Geraldo Do Couto

Algumas Questões em Percolação Anisotrópica

Belo Horizonte - MG, Brasil

08 de Julho 2013

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Algumas Questões em Percolação Anisotrópica

Esta tese foi apresentada como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática.

Rodrigo Geraldo do Couto

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Co-orientador: Rémy de Paiva Sanchis

Belo Horizonte - MG, Brasil

08 de Julho 2013

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Secretaria de Pós-Graduação em Matemática
(31) 3409.5963 FAX 3409.5797
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br // www.mat.ufmg.br/pgmat

FOLHA DE APROVAÇÃO

Algumas questões em Percolação Anisotrópica

RODRIGO GERALDO DO COUTO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG

Prof. Remy de Paiva Sanchis
UFMG

Prof. Marcelo Richard Hilário
UFMG

Prof. Ronald Dickman
UFMG (Física)

Prof. Leandro Pinto Rodrigues Pimentel
UFRJ

Prof. Roberto Imbuzeiro Morais Felinto de Oliveira
IMPA

Belo Horizonte, 08 de julho de 2013.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns aspectos dos modelos de percolação independente de elos anisotrópico na laje $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \ldots, k\}$ e na rede quadrada $\mathbb{Z}^2$. Consideramos o modelo de percolação independente de elos anisotrópico na laje $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \ldots, k\}$, onde supomos que os elos verticais estão abertos com probabilidade p_v, enquanto os elos horizontais estão abertos com probabilidade p_h. Estudaremos as curvas críticas para esses modelos e estabeleceremos sua continuidade e monotonicidade estrita. Os resultados podem ser estendidos para percolação independente de elos anisotrópico em $\mathbb{Z}^3$.

Posteriormente, consideramos o modelo de percolação independente de elos anisotrópico em $\mathbb{Z}^2$, i.e., seja $\mathbf{p} = (p_h, p_v) \in [0, 1]^2$ com $p_v > p_h$ e declare cada elo horizontal (respectivamente vertical) de $\mathbb{Z}^2$ aberto com probabilidade p_h (respectivamente p_v), e fechado de outro modo, independentemente de todos os outros elos. Denote por $\mathbb{P}_\mathbf{p}$ a medida de probabilidade correspondente. Considere $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ com $0 < x_1 < x_2$, e $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}^2$. É natural questionar como se comporta a função de conectividade $\mathbb{P}_\mathbf{p}(\{0 \to x\})$, e quando a anisotropia das probabilidades de percolação implica na desigualdade estrita $\mathbb{P}_\mathbf{p}(\{0 \to x\}) > \mathbb{P}_\mathbf{p}(\{0 \to x'\})$. Nós daremos uma resposta afirmativa para a questão, considerando o regime altamente supercrítico.

Palavras-chave: Percolação, anisotropia, conectividades truncadas.

Abstract

In this work we study some aspects of anisotropic independent bond percolation on the slab $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$ and on the lattice $\mathbb{Z}^2$. We consider anisotropic independent bond percolation on the slab $\mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k\}$, where we suppose that the vertical bonds are open with probability p_v, while the horizontal bonds are open with probability p_h. We study the critical curves for these models and establish their continuity and strict monotonicity. The results can be extended to anisotropic independent bond percolation on $\mathbb{Z}^3$.

Later, we consider an anisotropic independent bond percolation model on $\mathbb{Z}^2$, i.e., let $\mathbf{p} = (p_h, p_v) \in [0, 1]^2$ with $p_v > p_h$ and declare each horizontal (respectively vertical) edge of $\mathbb{Z}^2$ to be open with probability p_h (respectively p_v), and otherwise closed, independently of all other edges. Let $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ denote the corresponding probability measure. Let $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ with $0 < x_1 < x_2$, and $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}^2$. Its natural to ask how behaves the connectivity function $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\{0 \to x\})$, and whether anisotropy in percolation probabilities implies the strict inequality $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\{0 \to x\}) > \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\{0 \to x'\})$. We give affirmative answer to this question, at least in the highly supercritical regime.

Keywords: Percolation, anisotropy, truncated connectivity.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por iluminar os pensamentos.

À minha família, em particular aos meus pais, pelo apoio e sacrifício feitos durante toda a vida por mim.

Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática, em especial ao professor Mário Jorge com quem tive a oportunidade de fazer iniciação científica e inúmeras disciplinas, e ao professor Fernando Oliveira, pela amizade e por todos os anos de trabalho juntos, desde a primeira palestra, onde ao ouvi-lo escolhi trocar a engenharia pela matemática.

Ao amigo Thiago Santos, mais pela amizade do que pela abissal ajuda com os softwares. Ao amigo Sebastião, pelo exemplo de luta. Aos demais amigos da graduação e pós, por todos os anos memoráveis.

Aos meus orientadores, Bernardo e Remy, a eles serei eternamente prato pela oportunidade e por todo trabalho desenvolvido. O prazer com que trabalham com matemática é contagiante.

Aos demais membros da banca, pela disponibilidade e pelas valiosas dicas.

À minha futura esposa Mariane, que esteve sempre a meu lado e a quem, juntamente com meus pais, dedico esta obra.

Sumário

Introdução

O estudo do modelo de percolação teve início em 1957 com Broadbent e Hammersley [7], sendo uma fonte de problemas intrigantes, muitos destes de enunciado simples mas não raramente exigem uma investigação elaborada. Várias variantes do modelo foram propostas ao longo do tempo, muitas das quais surgiram da análise de fenômenos físicos, e nesse caso, um ingrediente que acompanha vários fenômenos é a anisotropia do sistema. Um caso particular de anisotropia, do qual trataremos, consiste em dividir os elos da rede em duas classes (horizontal e vertical) de elos paralelos onde permitimos que a medida produto tenha intensidades diferentes em elos diferentes, mas requerendo que quaisquer dois elos paralelos tenham a mesma intensidade.

Um dos primeiros resultados sobre percolação anisotrópica surge em 1964 com o artigo de Sykes and Essam [31], que obtém (de maneira não muito rigorosa) as curvas críticas dos modelos de percolação anisotrópica para as redes quadrada, triangular e hexagonal. Em 1982, H. Kesten [21] obteve de maneira rigorosa a prova para o caso da rede quadrada. Para o caso da rede triangular a prova começou a ser dada em Kesten [20], [21] e foi aparentemente completada em Kesten [22], mas a prova detalhada não foi publicada. A prova desses fatos também pode ser encontrada em Grimmett [15]. Considerando o problema de percolação anisotrópica, na década de 1980 alguns resultados exatos ou aproximados envolvendo por exemplo expoentes críticos e transição de fase, foram obtidos via grupo de renormalização (ver [5, 8, 19, 26, 27]), expansão em séries [29], método de “sítio fantasma” Turban [33].

Mais recentemente, encontramos trabalhos envolvendo percolação “Bootstrap” anisotrópica [12, 13], percolação de primeira passagem anisotrópica [32], e trabalhos submetidos de Grimmett e Manolescu [16, 17] que estendem métodos usados em modelos isotrópicos para modelos de percolação anisotrópica nas redes quadrada, triangular e hexagonal, obtendo uma teoria de cruzamentos de caixas (RSW) e desenvolvendo técnicas para estudar a universalidade em tais modelos.

O presente trabalho trata do estudo de alguns modelos de percolação anisotrópica.

No Capítulo (1) definimos o modelo de percolação independente anisotrópico e enunciamos alguns resultados da teoria de percolação que serão utilizados nos capítulos seguintes.

No Capítulo (2) estudaremos a curva crítica do modelo de percolação independente de elos anisotrópico na laje $\mathbb{S}^k = \mathbb{Z}^2 \times \{0, \ldots, k\}$, i.e., o grafo onde o conjunto de vértices é $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, ..., k\}$ e o conjunto de elos $\mathbb{E}$ é o conjunto de elos entre os primeiros vizinhos de $\mathbb{S}^k$. O conjunto de elos é particionado em dois subconjuntos disjuntos $\mathbb{E}_h = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : x_3 = y_3\}$ (elos horizontais) e $\mathbb{E}_v = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : x_3 \neq y_3\}$ (elos verticais). Declaramos cada elo horizontal (respec. vertical) aberto com probabilidade p_h (respec. p_v). Seja $p_k = 1 - \sqrt[k+1]{\frac{1}{2}}$ o ponto crítico para o modelo no caso em que $p_v = 1$.

Definimos então as funções $p^k_{v,c} : \left[p_k, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ e $p^k_{h,c} : [0, 1] \mapsto \left[p_k, \frac{1}{2}\right]$ por

$$
\begin{aligned}
p^k_{v,c}(p_h) &= \sup\{p_v \in [0, 1] : \theta(p_h, p_v) = 0\} \\
p^k_{h,c}(p_v) &= \sup\{p_h \in [0, 1] : \theta(p_h, p_v) = 0\}
\end{aligned}
$$

O resultado que provamos é que a curva crítica $p^k_{v,c}(p_h)$ que divide as regiões onde $\theta(p_h, p_v) > 0$ e $\theta(p_h, p_v) = 0$ é contínua, Lipschitz em qualquer compacto do domínio e estritamente decrescente, fato sumarizado no seguinte teorema:

Teorema (2.1). *As funções $p_{v,c} : \left[p_k, \frac{1}{2}\right] \mapsto [0, 1]$ e $p_{h,c} : [0, 1] \mapsto \left[p_k, \frac{1}{2}\right]$ são estritamente decrescentes, contínuas e $p_{v,c}$ é a inversa de $p_{h,c}$. Além disso, para qualquer compacto $[a, b] \subset \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$, existem constantes positivas c and C (dependendo de a e b) tais que*

$$
c|p'_h - p_h| \leq |p_{v,c}(p'_h) - p_{v,c}(p_h)| \leq C|p'_h - p_h|
$$

para todo $p'_h, p_h \in [a, b]$.

No Capítulo (3) estudaremos o comportamento da conectividade truncada no modelo de percolação independente de elos anisotrópico em $\mathbb{Z}^2$, onde o conjunto de elos $\mathbb{E}$ é o conjunto de elos entre os primeiros vizinhos de $\mathbb{Z}^2$, particionado em dois subconjuntos disjuntos $\mathbb{E}_h = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : x_2 = y_2\}$ (elos horizontais) e $\mathbb{E}_v = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : x_1 = y_1\}$ (elos verticais). Declaramos cada elo horizontal (respec. vertical) aberto com probabilidade p_h (respec. p_v). Consideramos então a conectividade truncada no regime supercrítico $\tau^f_{\mathbf{p}}(x, y)$, dada pela probabilidade de x e y pertencerem ao mesmo aglomerado aberto finito.

Considerando $p_h \leq p_v$ e um fator de anisotropia η (a ser definido posteriormente), nós estabeleceremos uma desigualdade estrita que envolve a probabilidade da origem se conectar com pontos x e x' que são simétricos em relação à diagonal em $\mathbb{Z}^2$. O teorema que provaremos é o seguinte:

Teorema (3.1)**.** *Seja* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ *e* $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}^2_+$ *com* $\rho = \frac{x_2}{x_1} > 1$. *Então, para qualquer* $\eta \in (0, 1)$, *existe* $p^*(\eta, \rho) < 1$ *tal que a desigualdade*

$$\tau^f_{\boldsymbol{p}}(0, x) > \tau^f_{\boldsymbol{p}}(0, x')$$

é verdadeira para todo $p_h > p^*(\eta, \rho)$.

O Capítulo (4) (Apêndice) contém uma adaptação para $\mathbb{S}^k$ de um resultado envolvendo desigualdades diferencias para o processo de percolação independente de elos em $\mathbb{Z}^2$.

Os resultados apresentados nessa tese são a base de [10] e [11].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo descreveremos de maneira breve o modelo de percolação independente e o caso envolvendo anisotropia. Parte da notação usada na tese também é introduzida neste capítulo, assim como alguns resultados da teoria de percolação que serão utilizados no texto. As referências para o que segue são os livros de Grimmett [15] e Bollobás e Riordan [6].

1.1 O modelo de percolação independente

Seja $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo infinito, localmente finito, onde $\mathbb{V}$ e $\mathbb{E}$ são os conjuntos de vértices (sítios) e elos de G, respectivamente. A cada elo ou sítio associamos uma variável aleatória que assume os valores 0 (fechado) ou 1 (aberto), considerando $(p_s)_{s\in\mathbb{V}}$ e $(p_e)_{e\in\mathbb{E}}$ sequências tais que $0 \leq p_s, p_e \leq 1$ $\forall\, s \in \mathbb{V}$, $\forall\, e \in \mathbb{E}$, onde p_s (respectivamente p_e) é a probabilidade do sítio s (respectivamente, do elo e) estar aberto.

Considerando que todos os sítios e elos estão abertos ou fechados independentemente, o espaço de probabilidade que descreve o modelo é $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde o espaço amostral é $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{V}} \times \{0,1\}^{\mathbb{E}}$, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos em Ω e $\mathbb{P} = \prod_{s\in\mathbb{V}} b_s \times \prod_{e\in\mathbb{E}} b_e$ é o produto de medidas de Bernoulli, onde b_α é a medida de Bernoulli de parâmetro α.

Alguns casos particulares mais difundidos são os modelos homogêneos: percolação de elos, quando $p_e = p \ \forall \ e \in \mathbb{E}$ e $p_s = 1 \ \forall \ s \in \mathbb{V}$; percolação de sítios, quando $p_s = p \ \forall \ s \in \mathbb{V}$ e $p_e = 1 \ \forall \ e \in \mathbb{E}$; e percolação mista, quando $p_s = p_e = p$, $\forall \ s \in \mathbb{V}$, $\forall \ e \in \mathbb{E}$.

O modelo de interesse para o nosso trabalho é o modelo de percolação anisotrópica de elos, onde o conjunto de elos será particionado em dois subconjuntos $\mathbb{E}^v$ (elos verticais) e $\mathbb{E}^h$ (elos horizontais), cuja definição depende do grafo envolvido, e nesse caso vamos considerar $p_s = 1 \ \forall \ s \in \mathbb{V}$, $p_e = p_h \ \forall \ e \in \mathbb{E}^h$ e $p_e = p_v \ \forall \ e \in \mathbb{E}^v$. Para simplificar a notação usaremos $\mathbf{p} = (p_h, p_v)$ para representar o par de parâmetros p_h e p_v e denotaremos por $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ a respectiva medida de probabilidade. Se X é um conjunto usaremos $|X|$ para denotar sua cardinalidade. Se $X \subset \mathbb{E}$ usaremos $X^h = X \cap \mathbb{E}^h$ para denotar o conjunto de elos horizontais de X e $X^v = X \cap \mathbb{E}^v$ para denotar o conjunto de elos verticais de X.

Durante quase todo o restante do texto trataremos com o modelo de percolação independente de elos anisotrópico; quando não, isso ficará explícito no texto. Dados dois vértices $x, y \in \mathbb{V}$ dizemos que x e y estão conectados, na configuração ω, se existe um caminho finito de elos abertos conectando x a y, isto é, existe caminho $\sigma = x_0, e_0, x_1, e_1, ..., e_{n-1}, x_n$ onde $x_0 = x$, $x_n = y$ e o elo $e_i = \langle v_i, v_{i+1} \rangle$ está aberto $\forall \ i = 0, 1, ..., n-1$. Vamos usar a notação $\{x \leftrightarrow y\}$ para denotar o evento onde x e y estão conectados.

Dado uma configuração $\omega \in \Omega$, um aglomerado ocupado A em ω é um subgrafo conexo $A = (V_A, E_A)$ de G tal que $\omega(e) = 1 \ \forall \ e \in E_A$ e $\omega(e) = 0 \ \forall \ e \in \partial_e A$, onde $\partial_e A = \{e \in \mathbb{E} : |e \cap V_A| = 1\}$ é a fronteira externa de elos de A. Denotaremos o aglomerado ocupado de x na configuração ω por $C_x(\omega)$. O conjunto de vértices de $C_x(\omega)$ é o conjunto $\{y \in \mathbb{V} : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}$ e o conjunto de elos de $C_x(\omega)$ é o conjunto de elos abertos de $\mathbb{E}$ que conectam tais vértices. Por vezes usaremos o termo C_x para representar o conjunto $\{y \in \mathbb{V} : x \leftrightarrow y\}$ e $|C_x|$ para representar o número de elementos desse conjunto.

Uma das principais quantidades em percolação é a função que representa a probabilidade de um vértice x pertencer a um aglomerado infinito. Formalmente definimos

$\theta_x(\mathbf{p}) = \theta_x(p_h, p_v) : [0,1]^2 \mapsto [0,1]$ por

$$\theta_x(\mathbf{p}) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\} \tag{1.1}$$

Em grafos com invariância translacional as variáveis aleatórias $|C_x|$ têm a mesma distribuição para todo $x \in \mathbb{V}$, assim em $\mathbb{Z}^d$ não há perda de generalidade em supor que x é a origem do grafo e nesse caso escreveremos simplesmente $|C_0|$ para o tamanho do aglomerado da origem e $\theta(\mathbf{p}) = \theta(p_h, p_v)$ para a probabilidade de percolação. Nós dizemos que o vértice x percola se a cardinalidade de $C_x(\omega)$ é infinita; usaremos a seguinte notação padrão $\{x \leftrightarrow \infty\} := \{\omega \in \Omega; |C_x(\omega)| = \infty\}$.

Definimos a distância entre dois vértices x, y de G como

$$d(x, y) = \min\{|\sigma| : \sigma \text{ é caminho que liga } x \text{ a } y\} \tag{1.2}$$

onde $|\sigma|$ é o número de elos do caminho σ. Em $\mathbb{Z}^d$ a distância definida acima é dada por

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i| \tag{1.3}$$

1.2 A Fórmula de Russo

A Fórmula de Russo é uma técnica para estimar a taxa de variação de $\mathbb{P}(A)$ como função dos parâmetros p_e, para eventos crescentes A. A demonstração pode ser encontrada em [6]ou [15]. Antes de enunciar a Fórmula de Russo temos alguma definições.

No conjunto da configurações Ω, considere a seguinte ordem parcial.

Definição 1.1. *Dadas as configurações ω, $\omega' \in \Omega$, dizemos que $\omega \preccurlyeq \omega'$ se $\omega(e) \leq \omega'(e)$ para todo elo $e \in \mathbb{E}$.*

Vamos considerar eventos crescentes A, onde dada uma configuração na qual A ocorre, a mudança do estado de alguns elos de fechado para aberto não pode fazer com que A deixe de ocorrer.

Definição 1.2. *Dizemos que o evento $A \in \mathcal{F}$ é crescente se para todo $\omega \in A$, temos que $\omega' \in A$, $\forall \omega \preccurlyeq \omega'$. Dizemos que o evento A é decrescente se seu complementar é crescente.*

Definição 1.3. *Sejam $e \in \mathbb{E}$, $A \in \mathcal{F}$ um evento qualquer e $\omega \in \Omega$ uma configuração. Dizemos que o elo e é pivotal para o par (A, ω), se $\omega \in A$ e $\omega' \notin A$, ou $\omega \notin A$ e $\omega' \in A$, onde ω' é a configuração obtida a partir de ω trocando-se apenas o estado do elo e, i.e.,*

$$\omega'(f) = \begin{cases} \omega(f), & se \quad f \neq e \\ 1 - \omega(f), & se \quad f = e. \end{cases}$$

Escrevemos "e é pivotal para A" para o evento $\{\omega \in \Omega : e$ é pivotal para $(A, \omega)\}$. Para um evento crescente A, um elo é pivotal se e somente se A não ocorre quando e está fechado mas A ocorre quando e está aberto. Enunciamos então a Fórmula de Russo.

Lema 1.1. ***(Fórmula de Russo)*** *Seja A um evento crescente que depende apenas de uma quantidade finita de elos, e um elo qualquer e p_e a probabilidade de e estar aberto. Então, temos que*

$$\frac{\partial \mathbb{P}(A)}{\partial p_e} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : e \text{ é pivotal para } (A, \omega)\} \tag{1.4}$$

1.3 Percolação dependente e decaimento exponencial

Considere um grafo G e seja $\tilde{\mathbb{P}}$ uma medida de percolação de sítios em G, i.e., uma medida de probabilidade no conjunto de estados (aberto ou fechado) dos vértices de G. Dizemos que a a medida $\tilde{\mathbb{P}}$ é l-independente se, sempre que U e V são conjuntos de vértices de G cuja distância no grafo é pelo menos l, os estados dos vértices em U são independentes dos estados dos vértices em V. Observe que se $\tilde{\mathbb{P}}$ é 1-independente, então $\tilde{\mathbb{P}}$ é uma medida produto.

Liggett, Schonmann and Stacey [23] provaram um resultado geral comparando medidas l-independente com medidas produto. Uma consequência, cuja prova é mais simples e pode ser feita usando contagem de caminhos, se encontra no Lema 11 da Seção (3.5) em [6], é a seguinte:

Lema 1.2. *Sejam $l \geq 2$ e $\Delta \geq 2$ inteiros positivos e G um grafo (finito ou infinito) com grau máximo menor ou igual a Δ. Existem constantes $p_1 = p_1(l, \Delta) > 0$ e $a = a(l, \Delta) > 0$ tais que, se $\widetilde{\mathbb{P}}$ é uma medida de percolação de sítios l-independente em G onde cada sítio está aberto com probabilidade no máximo p_1, então*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(|C_v| \geq n) \leq e^{-an} \tag{1.5}$$

para todo vértice v de G e todo $n \geq 1$.

Esse lema será usado na prova do Lema (2.1) do Capítulo (2).

Capítulo

2

Percolação Anisotrópica em Lajes

Neste capítulo estudaremos a curva crítica do modelo de percolação independente de elos anisotrópico em $\mathbb{S}^k$. Nós estabeleceremos sua continuidade e monotonicidade estrita. Na Seção (2.1) faremos uma exposição do problema, daremos algumas notações e definições e enunciaremos o Teorema (2.1). Na Seção (2.2) enunciaremos e provaremos alguns lemas utilizados na prova do Teorema (2.1). Na Seção (2.3) fechamos com a prova do Teorema (2.1).

2.1 Introdução

Um dos motivos para se estudar o processo de percolação anisotrópica em Lajes vem de uma relação com o seguinte problema:

Em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$ considere o grafo $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, com conjunto de vértices $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^d$ e conjunto de elos $\mathbb{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_n$ onde

$$\mathbb{E}_n = \{\langle v, u\rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \exists! i \in \{1, \dots, d\} \text{ tal que } |v_i - u_i| = n \text{ e } v_j = u_j, \forall j \neq i\}, \tag{2.1}$$

i.e., $\mathbb{E}_n$ é o conjunto dos elos paralelos a algum eixo coordenado e de comprimento n.

Dada uma sequência $(p_n \in [0,1), n \in \mathbb{N})$ considere um modelo de percolação de elos independente onde cada elo de comprimento n está aberto com probabilidade p_n e assuma que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = \infty$. Formalmente, considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}}$, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra apropriada e $\mathbb{P} = \prod_{\langle u,v\rangle\in\mathbb{E}} \mu_{\langle u,v\rangle}$ onde

$$\mu_{\langle u,v\rangle}(\omega_{\langle u,v\rangle} = 1) = p_n \quad \text{se} \quad \langle u,v\rangle \in \mathbb{E}_n \tag{2.2}$$

são medidas de Bernoulli independentes. Observe que uma aplicação do Lema de Borel-Cantelli nos diz que a origem desse grafo percola com probabilidade 1. Dado $K \in \mathbb{N}$, considere a sequência truncada em K, $(p_{K,n})_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$p_{K,n} = \begin{cases} p_n & \text{se} \quad n \leq K, \\ 0 & \text{se} \quad n > K. \end{cases} \tag{2.3}$$

Considere também o processo truncado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_K)$ onde a medida é $\mathbb{P}_K = \prod_{\langle u,v\rangle\in\mathbb{E}} \mu_{K,\langle u,v\rangle}$ e $\mu_{K,\langle u,v\rangle}(\omega_{\langle u,v\rangle} = 1) = p_{K,n}$ se $\langle u,v\rangle \in \mathbb{E}_n$.

O problema do truncamento ainda em aberto é o seguinte: *é verdade que existe um K inteiro positivo grande o suficiente tal que a origem no processo truncado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_K)$ ainda percola com probabilidade positiva*? Veja [14] para uma melhor descrição do problema do truncamento e a solução em alguns casos especiais.

Em de Lima, Sanchis e Silva [25] os resultados obtidos vão na direção de compreender melhor o problema do truncamento. Uma versão mais simples do Teorema 1 em [25] mostra que para o processo de percolação de elos independente com parâmetro p no grafo $\mathcal{G}^k = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_k)$, onde $\mathbb{E}_k$ é definido na Expressão (2.1), vale que $\lim_{k\to\infty} p_c(\mathcal{G}^k) = p_c(\mathbb{Z}^{2d})$, onde $p_c(\mathbb{Z}^{2d})$ é o ponto crítico do modelo de percolação de primeiros vizinhos em $\mathbb{Z}^{2d}$. Note que $\mathcal{G}^k$ é $\mathbb{Z}^d$ equipado com os elos de comprimento 1 e elos de longo alcance de comprimento k paralelos a algum eixo coordenado. Uma questão que é deixada em aberto é a questão da monotonicidade de $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$ em k. A prova dos fatos em [25] passa por um isomorfismo entre um subgrafo de $\mathcal{G}^k$ com uma laje 2d dimensional. A motivação passa então pela possibilidade de se relacionar, via esse isomorfismo, o problema de percolação em $\mathcal{G}^k$ com parâmetros p_1 e p_k ao estudo do modelo de percolação anisotrópica em lajes.

Consideramos então $\mathbb{S}^k = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ a laje de espessura $k \in \mathbb{N}$, i.e., o grafo com conjunto de vértices $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, ..., k\}$ e conjunto de elos $\mathbb{E} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{V}, d(x, y) = 1\}$. Vamos considerar o modelo de percolação anisotrópica de elos em $\mathbb{S}^k$ onde o conjunto de elos horizontais é $\mathbb{E}_h = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : x_3 = y_3\}$ e $\mathbb{E}_v = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : x_3 \neq y_3\}$.

Considere a caixa $B(n) = [-n, n]^2 \times \{0, 1, ..., k\}$, denotamos a fronteira de $B(n)$ por $\partial B(n) = \{x \in B(n) : \exists y \notin B(n) \text{ tal que } d(x, y) = 1\}$. Seja $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial B(n)\}$ o evento onde 0 está conectado a $\partial B(n)$. Denotando por $\theta_n(p_h, p_v) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A_n)$ observamos que $\{0 \leftrightarrow \infty\} = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ e $\theta_n(p_h, p_v) \downarrow \theta(p_h, p_v)$ quando $n \to \infty$.

Observe que se $p_v = 1$ o modelo é equivalente ao modelo de percolação de elos em $\mathbb{Z}^2$ com parâmetro s satisfazendo $1 - s = (1 - p_h)^{k+1}$. Neste caso, denotaremos por p_k o ponto crítico horizontal onde $p_k = 1 - \sqrt[k+1]{\frac{1}{2}}$. Portanto, um argumento simples de dominação mostra que $\theta(p_h, p_v) = 0$ para todo $p_h \leq p_k$ e $p_v \in [0, 1]$.

Se $p_v = 0$ temos $k + 1$ cópias disjuntas de $\mathbb{Z}^2$. Logo o valor crítico nesse caso é $\frac{1}{2}$ e se tivermos $p_h > \frac{1}{2}$, há percolação independentemente do valor de p_v. Usando um argumento padrão de acoplamento podemos mostrar que $\theta(p_h, p_v)$ é uma função crescente nas variáveis p_h e p_v. Isto não quer dizer, no entanto, que $\theta(p_h, p_v)$ seja estritamente crescente em qualquer dos dois parâmetros (faremos esta distinção entre "crescente/decrescente" e "estritamente crescente/decrescente" ao longo do texto).

Definimos então a função $p^k_{v,c} : \left[p_k, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$ por

$$p^k_{v,c}(p_h) = \sup\{p_v \in [0, 1] : \theta(p_h, p_v) = 0\}. \tag{2.4}$$

Usando o resultado de Aizenman and Grimmett [1] podemos ver que $p^k_{v,c}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Segue da definição de $p^k_{v,c}$ que $p^k_{v,c}(p_k) = 1$ pois $\theta(p_k, p_v) \leq \theta(p_k, 1) = 0$. Como $\theta(p_h, p_v)$ é crescente em p_h, $p^k_{v,c}(p_h)$ é decrescente em p_h. Neste capítulo vamos provar que a função $p^k_{v,c}(p_h)$ (cujo gráfico, que denotaremos por curva crítica, separa as regiões onde $\theta(p_h, p_v) > 0$ e $\theta(p_h, p_v) = 0$) é contínua, Lipschitz em qualquer compacto do domínio e estritamente decrescente. De maneira análoga definimos a função $p^k_{h,c} : [0, 1] \mapsto \left[p_k, \frac{1}{2}\right]$

onde

$$p^k_{h,c}(p_v) = \sup\{p_h \in [0,1] : \theta(p_h, p_v) = 0\}. \tag{2.5}$$

Nós iremos omitir o índice k quando conveniente e escreveremos $p_{v,c}(p_h)$ e $p_{h,c}(p_v)$.

Observe que dado $x \in \mathbb{V}$ a probabilidade de percolação $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(x \leftrightarrow \infty)$ é, em geral, diferente de $\theta(p_h, p_v)$ mas as funções $p_{v,c}(p_h)$ e $p_{h,c}(p_v)$ são as mesmas, pois fixado p_h e p_v, ou $\theta_x(p_h, p_v) > 0\ \forall\, x \in \mathbb{V}$, ou $\theta_x(p_h, p_v) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{V}$. Agora podemos enunciar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1. *As funções* $p_{v,c} : \left[p_k, \frac{1}{2}\right] \mapsto [0,1]$ *e* $p_{h,c} : [0,1] \mapsto \left[p_k, \frac{1}{2}\right]$ *são estritamente decrescentes, contínuas e* $p_{v,c}$ *é a inversa de* $p_{h,c}$*. Além disso, para qualquer compacto* $[a,b] \subset \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$*, existem constantes positivas c e C (dependendo de a e b) tais que*

$$c|p'_h - p_h| \leq |p_{v,c}(p'_h) - p_{v,c}(p_h)| \leq C|p'_h - p_h| \tag{2.6}$$

para todo $p'_h, p_h \in [a,b]$.

Observações:

1) Os resultados deste capítulo podem ser generalizados, com modificações mínimas, para o modelo de percolação anisotrópica em $\mathbb{Z}^3$.

2) Simulações em [18] indicam que em $\mathbb{Z}^3$ anisotrópico, $p_{v,c}(p_h)$ é convexa. Se tivermos a convexidade de $p_{v,c}(p_h)$ no modelo de percolação independente de elos anisotrópico em $\mathbb{S}^k$, então, pelo Teorema (2.1), teremos que, se $p > p'$ e $\theta(p, p') = 0$ obtemos $\theta(p', p) = 0$. Isso não implica que a laje $\mathbb{S}^k$ "percola melhor" quando o parâmetro maior está associado aos elos horizontais, mas esperamos que esse comportamento seja verdadeiro $\forall\, k$.

A prova do resultado se baseia nas ideias de Aizenman and Grimmett [1] que desenvolve uma técnica para estudar como o ponto crítico é afetado por um melhoramento (Enhancement) do processo. Alguns fatos seguem direto de [1] enquanto outros precisam ser adaptados. Recorremos também á abordagem dada em Chayes and Schonmann para o processo de percolação mista, que entre outros fatos, mostra via uso de desigualdades diferenciais a continuidade (Lipschitz) deste processo.

2.2 Lemas preliminares

O primeiro lema prova que, se $p_h < 1/2$ e p_v é suficientemente pequeno, temos decaimento exponencial da distribuição de $|C_0|$. Como consequência teremos que $p_{v,c}(p_h) > 0$ para todo $p_h \in [p_k, \frac{1}{2})$.

Lema 2.1. *Dado $p_h < \frac{1}{2}$, existe $\delta = \delta(p_h) > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $0 \leq p_v < \delta$ existe uma constante $c = c(\delta) > 0$ tal que*

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}(|C_0| \geq n) \leq e^{-cn}, \ \forall n \geq 1. \tag{2.7}$$

Onde C_0 é o aglomerado aberto da origem em $\mathbb{S}^k$.

Demonstração. Nós adaptaremos para $\mathbb{S}^k$ as ideias contidas na Seção (3.5) de [6], mais especificamente, no Teorema (12) daquela seção.

Dado um inteiro $m > 0$ e $A \subset \mathbb{V}$, denote por $C_m(A)$ o evento onde algum vértice em A está conectado por um caminho aberto a algum vértice à distância m de A, onde a distância é dada pela norma do máximo. Dado $m > k$ um inteiro denote por S_m a caixa $S_m = [0, m-1]^2 \times \{0, 1, ..., k\}$ em $\mathbb{S}^k$. Mostraremos primeiramente que dado $\epsilon > 0$ (a ser escolhido a posteriori) e $p_h < \frac{1}{2}$ existem m e $\delta > 0$ tais que $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_m)) < \epsilon$, $\forall p_v \in [0, \delta)$.

Para $i \in \{0, 1, ..., k\}$ denote por P^i o plano $\mathbb{Z}^2 \times \{i\}$ e $S^i_m = [0, m-1]^2 \times \{i\} \subset P^i$. Escreveremos $C_m(S^i_m)$ para o evento onde algum vértice em S^i_m está conectado por um caminho aberto em P^i a algum vértice à distância m de S^i_m. Seja $Q(S_m)$ o evento onde todos os elos verticais da caixa $\tilde{S}_m = [-m, 2m-1]^2 \times \{0, ...k\}$ estão fechados.

Observe que $C_m(S_m) \cap Q(S_m) \subset \bigcup_{i=0}^{k} C_m(S^i_m)$. Como os eventos $C_m(S^i_m)$ tem a mesma probabilidade $\forall\, i$, temos que $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_m) \cap Q(S_m)) \leq (k+1)\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S^0_m))$. Como $p_h < \frac{1}{2}$, usamos o decaimento exponencial na fase subcrítica de $\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ (ver Teorema 5.4 em [15]), ou seja, existe uma constante $\psi(p_h) > 0$ tal que $\mathbb{P}_{p_h}(0 \leftrightarrow [-n, n]^2) \leq e^{-\psi(p_h)n}$, onde $\mathbb{P}_{p_h}$ é a medida de probabilidade para o modelo de percolação de Bernoulli com parâmetro p_h em $\mathbb{Z}^2$. Então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S^0_m)) = \mathbb{P}_{p_h}(C_m(S^0_m)) &\leq \sum_{v\in S^0_m} \mathbb{P}_{p_h}(v \longleftrightarrow \partial B(v,m)) \\ \leq\ m^2 e^{-\psi(p_h)m} &\overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $B(v,m)$ é a bola de centro v e raio m na norma do máximo em $\mathbb{Z}^2\times\{0\}$. Tomamos então m grande o suficiente de modo que $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S^0_m)) \leq \frac{\epsilon}{2(k+1)}$. Logo

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_m)\cap Q(S_m)) \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{2.9}$$

Observando que $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(Q(S_m)) = (1-p_v)^N$ onde $N = k(3m)^2$ é o número de elos verticais em $\tilde{S}_m$, podemos escolher $\delta > 0$ pequeno suficiente de modo que $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(Q(S_m)) > 1-\frac{\epsilon}{2}$ para todo $p_h \in [0,1]$ e $p_v \in [0,\delta)$.

Fixado então $p_h < \frac{1}{2}$ e $p_v \in [0,\delta)$ temos que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_m)) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_m)\cap Q(S_m)) + \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_m)\cap Q(S_m)^c) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(Q(S_m)^c) \leq \epsilon\end{aligned} \tag{2.10}$$

Agora iremos definir uma medida de percolação de sítios $\widetilde{\mathbb{P}}$ em $\mathbb{Z}^2$. Declaramos cada vértice $v = (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ como aberto se e somente se o evento $C_m(S_{v,m})$ acontece para a caixa de tamanho $m\times m$, $S_{v,m} = [mx+1, mx+m]\times[my+1, my+m]\times\{0,...,k\}$.

Mais formalmente, seja $f : \Omega \mapsto \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ a função definida como $f(\omega) = (f_v(\omega))_{v\in\mathbb{Z}^2}$ onde

$$f_v(\omega) = \begin{cases} 1\ ,\ \text{if } \omega\in C_m(S_{v,m}) \\ 0\ ,\ \text{if } \omega\notin C_m(S_{v,m}). \end{cases} \tag{2.11}$$

A função f e a medida $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}$ induzem uma medida de probabilidade $\widetilde{\mathbb{P}}$ em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ dada por $\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f^{-1}(A))$ para $A\in\mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos de $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$. Essa medida $\widetilde{\mathbb{P}}$ nos dá um modelo de percolação de sítios em $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$.

Como o evento $C_m(S_{v,m})$ depende somente do estado dos sítios cuja distância é no máximo m de $S_{v,m}$, a medida $\widetilde{\mathbb{P}}$ é 5-independente (com a distância do grafo, ver figura (2.1)). Além disso, cada vértice $v \in \mathbb{Z}^2$ está aberto com probabilidade $\widetilde{\mathbb{P}}(v$ está aberto$) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_m(S_{v,m})) \leq \epsilon$.

Figura 2.1: Os estados dos vértices u e v são independentes

Pelo Lema (1.2), existem $p_1 = p_1(l, \Delta)$ e $a = a(l, \Delta)$ (as constantes l e Δ do Lema (1.2) são 5 e 4, respectivamente) tais que, tomando $\epsilon < p_1$, teremos $\widetilde{\mathbb{P}}(v$ está aberto$) \leq \epsilon < p_1$, logo

$$\widetilde{\mathbb{P}}(|\widetilde{C}_v| \geq n) \leq e^{-an}, \ \forall n \geq 1. \tag{2.12}$$

Onde $\widetilde{C}_v$ é o aglomerado aberto do vértice v no modelo 5-independente induzido em $\mathbb{Z}^2$.

Se $|C_0| \geq (k+1)(4m+1)^2$, isso implica que cada vértice u de C_0 está conectado por um caminho aberto a algum vértice que está a uma distância no mínimo $2m$ de u, então $C_m(S_{v,m})$ ocorre para cada vértice v tal que $S_{v,m} \cap C_0 \neq \emptyset$, i.e., o vértice v está aberto no modelo 5-independente induzido em $\mathbb{Z}^2$, em particular $v \in \widetilde{C}_0$. Por isso, como cada $S_{v,m}$ contêm $(k+1)m^2$ vértices, se $n \geq (k+1)(4m+1)^2$ temos que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(|C_0| \geq n) \leq \widetilde{\mathbb{P}}\left(|\widetilde{C}_0| \geq \frac{n}{(k+1)m^2}\right) \leq e^{-\frac{an}{(k+1)m^2}}. \tag{2.13}$$

Concluímos a prova do Lema (2.1) tomando $c = \frac{a}{(k+1)m^2}$.

$\square$

No próximo lema usamos um argumento análogo para mostrar que $p_{v,c}(p_h)$ é estritamente menor que 1 no intervalo $\left(p_k, \frac{1}{2}\right]$ e que $p_{v,c}(p_h)$ é contínua em $1/2$.

Lema 2.2. *Para todo $p_h \in \left(p_k, \frac{1}{2}\right]$ temos que $p_{v,c}(p_h) < 1$. Ainda, temos que*

$$\lim_{p_h \uparrow \frac{1}{2}} p_{v,c}(p_h) = p_{v,c}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{2.14}$$

Demonstração. Observamos que a igualdade 2.14 (provada neste lema) também segue de Aizenman and Grimmett [1]. Primeiramente mostraremos que $p_{v,c}(p_h) < 1$ para $p_h \in (p_k, 1/2]$. Como $p_{v,c}$ é decrescente em p_h, é suficiente mostrar que $p_{v,c}(p_h) < 1$ para p_h próximo de p_k. De fato mostraremos que, dado $\epsilon > 0$ existe $p_v < 1$ tal que $\theta(p_k+\epsilon, p_v) > 0$, logo $p_{v,c}(p_k + \epsilon) \leq p_v < 1$.

Seja $\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Considere o grafo G obtido de $\mathbb{S}^k$ substituindo cada elo vertical $f_v = \langle v, v+u_3\rangle$, com $v \in \mathbb{Z}^2 \times \{0,1,...,k-1\}$, por 4 elos paralelos, denotados por f_v^r, f_v^l, f_v^t e f_v^d, conectando os vértices v e $v+u_3$ e declarando cada um desses novos elos abertos com probabilidade $\widehat{p_v}$ onde $1 - p_v = (1-\widehat{p_v})^4$.

Isso significa que cada elo vertical em $\mathbb{S}^k$ está fechado se e somente se os respectivos 4 elos paralelos de G estão fechados. Observe que G e $\mathbb{S}^k$ têm o mesmo conjunto de vértices e as substituições feitas não alteram as funções de conectividade envolvendo os vértice de $\mathbb{S}^k$. Temos então que $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(0 \longleftrightarrow \partial B(n) \text{ em } \mathbb{S}^k) = \mathbb{P}_{p_h,\widehat{p_v}}(0 \longleftrightarrow \partial B(n) \text{ em } G)$ e $\theta^{\mathbb{S}^k}(p_h, p_v) = \theta^G(p_h, \widehat{p_v})$.

Definiremos então um processo de percolação de elos independente em $\mathbb{Z}^2$ que será estocasticamente dominado pelo processo de percolação de elos em G, logo se ocorrer percolação em $\mathbb{Z}^2$ então ocorrerá percolação em G. Para simplificar a notação identificamos $\mathbb{Z}^2$ com $\mathbb{Z}^2 \times \{0\} \subset G$. A cada elo $\langle v, v+u_1\rangle$ de $\mathbb{Z}^2$ associamos os caminhos c^i_{v,u_1} em G, com $i \in \{0,1,...,k\}$ onde c^0_{v,u_1} é o elo $\langle v, v+u_1\rangle$ e c^i_{v,u_1} para $i = 1,\ldots,k$ é o caminho em G que começa em v, segue verticalmente usando os elos $f^r_{v+ju_3}$ com

$0 \leq j \leq i-1$, até o vértice $v+iu_3$, usa o elo $\langle v+iu_3, v+iu_3+u_1\rangle$, e desce verticalmente até o vértice $v+u_1$ usando os elos $f^l_{v+u_1+ju_3}$ com $0 \leq j \leq i-1$. Analogamente associamos os caminhos c^i_{v,u_2} ao elo $\langle v, v+u_2\rangle$, usando os elos verticais $f^t_{v+ju_3}$ e $f^d_{v+u_2+ju_3}$. Declare cada elo $e = \langle v, v+u_1\rangle$ de $\mathbb{Z}^2$ como aberto se pelo menos um dos caminhos associados c^i_{v,u_1} está aberto. Analogamente, fazemos o mesmo para o elo $e = \langle v, v+u_2\rangle$ e os caminhos c^i_{v,u_2}. Observe que esses caminhos foram escolhidos de modo que tenhamos um processo de percolação de elos independente em $\mathbb{Z}^2$, com parâmetro $\overline{p} = \overline{p}(p_h, p_v)$ definido como:

$$\overline{p} = \overline{p}(p_h, p_v) = p_h \sum_{j=0}^{k} [(1-p_h)\widehat{p_v}^{\,2}]^j = p_h \frac{1-[(1-p_h)\widehat{p_v}^{\,2}]^{k+1}}{1-(1-p_h)\widehat{p_v}^{\,2}}, \tag{2.15}$$

lembrando que $\widehat{p_v} = 1-(1-p_v)^{\frac{1}{4}}$. Tomando $p_h = p_k+\epsilon$ e $p_v = 1$ (portanto $\widehat{p_v} = 1$) obtemos

$$\overline{p}(p_k+\epsilon, 1) = 1 - \left(\sqrt[k+1]{\frac{1}{2}} - \epsilon\right)^{k+1} > \frac{1}{2} \tag{2.16}$$

Como $\overline{p}(p_h, p_v)$ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{p}(p_k+\epsilon, p_v) > \frac{1}{2}$ para todo $p_v \in (1-\delta, 1]$. Então escolhemos $p_v < 1$ tal que $\overline{p}(p_k+\epsilon, p_v) > \frac{1}{2}$. Portanto

$$\theta^{\mathbb{S}^k}(p_h, p_v) = \theta^G(p_h, \widehat{p_v}) \geq \theta^{\mathbb{Z}^2}(\overline{p}(p_k+\epsilon, p_v)) > 0 \tag{2.17}$$

Para mostrar que $\lim_{p_h \uparrow \frac{1}{2}} p_{v,c}(p_h) = 0$, podemos supor $k = 1$ já que $p^k_{v,c}$ é decrescente em k. Como $\widehat{p_v} > 0$ é equivalente a $p_v > 0$, temos que para $p_v > 0$ e $p_h = \frac{1}{2}$, $\overline{p} = \frac{1}{2} + \frac{\widehat{p_v}^{\,2}}{4} > \frac{1}{2}$.

Fixado $p_v = \epsilon > 0$, como $\overline{p}$ é função contínua de p_h, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\overline{p}(p_h, \epsilon) > \frac{1}{2}$ $\forall\, p_h \in \left(\frac{1}{2} - \delta_1, \frac{1}{2}\right]$.

Logo,

$$\theta^{\mathbb{S}^k}(p_h, \epsilon) = \theta^G(p_h, \widehat{\epsilon}) \geq \theta^{\mathbb{Z}^2}(\overline{p}(p_h, \epsilon)) > 0 \tag{2.18}$$

onde $\widehat{\epsilon} = 1-(1-\epsilon)^{\frac{1}{4}}$. Assim, $p_{v,c}(p_h) \leq \epsilon$ $\forall\, p_h \in \left(\delta_1, \frac{1}{2}\right]$. Temos então que $\lim_{p_h \uparrow \frac{1}{2}} p_{v,c}(p_h) = 0$ e $p_{v,c}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

□

Combinando o resultado acima com o Lema (2.1) temos que $0 < p_{v,c}(p_h) < 1$ para todo $p_h \in \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$.

Antes da prova do próximo lema enunciaremos um resultado, cuja prova se encontra no apêndice, que é uma adaptação para $\mathbb{S}^k$ do Lema (3.5) de [15].

Proposição 2.1. *Existe um inteiro positivo N e uma função contínua $\beta : (0,1)^2 \mapsto (0,\infty)$ tal que $\forall\ p_h, p_v \in (0,1)$ e $n \geq N$, vale que*

$$\beta^{-1}(p_h,p_v)\frac{\partial\theta_n}{\partial p_h}(p_h,p_v) \geq \frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h,p_v) \geq \beta(p_h,p_v)\frac{\partial\theta_n}{\partial p_h}(p_h,p_v). \tag{2.19}$$

Desigualdades diferenciais como as de (2.19) são usadas para provar desigualdades estritas entre pontos críticos, como por exemplo em Aizenman and Grimmett [1], e também para estabelecer continuidade (Lipschitz) de curvas críticas, como por exemplo em Chayes and Schonmann [9], de onde nos inspiramos para a prova do Teorema (2.1).

O próximo lema utiliza as desigualdades diferenciais em (2.19) para estabelecer direções de crescimento da função $\theta(p_h, p_v)$.

Lema 2.3. *Dado $\delta > 0$, existem $\phi = \phi(\delta)$ e $\psi = \psi(\delta) \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que $\forall\ (p_h, p_v) \in [\delta, 1-\delta]^2$ a função $\theta(p_h,p_v)$ é crescente nas direções de $(\cos\phi, -\sin\phi)$ e $(-\cos\psi, \sin\psi)$.*

Demonstração. Nós mostraremos a existência de ϕ, a prova da existência de ψ é similar.

Considerando a desigualdade à esquerda na Proposição (2.1), dado $\delta > 0$ tome $m > 0$ tal que $\beta(p_h,p_v) \geq m$ em $[\delta/2, 1-\delta/2]^2$, nesse caso $\frac{\partial\theta_n}{\partial p_h}(p_h,p_v) \geq m\frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h,p_v)$ para n suficientemente grande. Tome então $\phi \in (0,\pi/2)$ tal que $\tan\phi = m$. Logo

$$\begin{aligned}
&\nabla\theta_n(p_h,p_v)\cdot(\cos\phi,-\sin\phi) = \frac{\partial\theta_n}{\partial p_h}(p_h,p_v)\cos\phi - \frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h,p_v)\sin\phi = \\
&= \cos\phi\left(\frac{\partial\theta_n}{\partial p_h}(p_h,p_v) - \frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h,p_v)\tan\phi\right) \geq \cos\phi\left(m\frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h,p_v) - \frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h,p_v)\tan\phi\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

pois $m = \tan\phi$.

Dado $(p_h, p_v) \in [\delta, 1-\delta]^2$ considere $(p'_h, p'_v) = (p_h, p_v) + \delta/2(\cos\phi, -\sin\phi)$ de modo que $(p'_h, p'_v) \in [\delta/2, 1-\delta/2]^2$. Seja $\alpha : [0, \delta/2] \longrightarrow [\delta/2, 1-\delta/2]^2$, $\alpha(t) = (p_h, p_v) + t(\cos\phi, -\sin\phi)$ o caminho linear ligando (p_h, p_v) a (p'_h, p'_v). Integrando (2.20) ao longo do caminho α obtemos

$$\theta_n(p'_h, p'_v) - \theta_n(p_h, p_v) = \int_0^{\delta/2} \frac{d\theta_n}{dt}(\alpha(t))dt = \int_0^{\delta/2} \nabla\theta_n(p_h, p_v) \cdot (\cos\phi, -\sin\phi)dt \geq 0$$

Tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$ temos

$$\theta(p'_h, p'_v) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(p'_h, p'_v) \geq \lim_{n\to\infty} \theta_n(p_h, p_v) = \theta(p_h, p_v) \tag{2.21}$$

Logo $\theta(p_h, p_v)$ é crescente na direção de $(\cos\phi, -\sin\phi)$.

$\square$

Como consequência do lema acima podemos ver que

$$\lim_{p_h \downarrow p_k} p_{v,c}(p_h) = p_{v,c}(p_k) = 1. \tag{2.22}$$

De fato, suponha que $\lim\limits_{p_h \downarrow p_k} p_{v,c}(p_h) < 1$, então existe $\bar{p}_v < 1$ e $\eta > 0$ tal que $\theta(p_h, \bar{p}_v) > 0$ $\forall\ p_h \in (p_k, p_k + \eta)$. Tomando $\delta < \min\{\frac{1-\bar{p}_v}{2}, \frac{p_k}{2}\}$ nós obtemos do Lema (2.3) que $\theta(p_h, p_v)$ é crescente na direção de $(-\cos\psi, \sin\psi)$. Assim, deve existir um par $(p_h, p_v) \in [\delta, 1-\delta]^2$ com $p_h < p_k$ e $\theta(p_h, p_v) > 0$, o que é uma contradição, pois não há percolação se $p_h < p_k$. Logo $p_{v,c}(p_k) = 1$.

De maneira análoga mostramos que $\lim\limits_{p_h \downarrow p_k} p_{v,c}(p_h) = 1$.

Resumindo, temos que $\lim\limits_{p_h \downarrow p_k} p_{v,c}(p) = p_{v,c}(p_k) = 1$, $\lim\limits_{p \uparrow \frac{1}{2}} p_{v,c}(p_h) = p_{v,c}(1/2) = 0$ e $0 < p_{v,c}(p_h) < 1$, $\forall p_h \in \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$. De maneira análoga, para a função $p_{h,c} : [0,1] \mapsto \left[p_k, \frac{1}{2}\right]$ definida na Equação (2.5), podemos mostrar que $p_{h,c}(0) = 1/2$, $p_{h,c}(1) = p_k$ e $p_{h,c}(p_v)$ é decrescente em p_v, logo $p_{h,c}(p_v) \in [p_k, \frac{1}{2}]$, $\forall p_v \in [0,1]$.

Agora, estamos aptos a provar o Teorema (2.1).

2.3 Prova do Teorema

Prova do Teorema (2.1). Primeiramente trataremos da equação (2.6). Fixado $[a,b] \subset \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$ temos que $0 < p_{v,c}(b) \leq p_{v,c}(a) < 1$, assim, tome $\delta = \delta(a,b) > 0$ tal que a região $[2\delta, 1-2\delta]^2$ contenha os pontos $(a, p_{v,c}(a))$ e $(b, p_{v,c}(b))$. Como $p_{v,c}$ é decrescente temos $(p_h, p_{v,c}(p_h)) \in [2\delta, 1-2\delta]^2$, $\forall p_h \in [a,b]$.

Sejam $\phi = \phi(\delta)$ e $\psi = \psi(\delta)$ dados pelo Lema (2.3) e tome $\epsilon = \frac{\delta}{2}\min\{(\tan\psi)^{-1}, (\tan\phi)^{-1}\}$. Considere então $p_h < p_h' \in [a,b]$ com $|p_h' - p_h| \leq \epsilon$.

Observe que $\forall\ 0 < \eta < \frac{\delta}{2}$ valem

i) $(p_h, p_{v,c}(p_h) + \eta)$, $(p_h', p_{v,c}(p_h) + \eta - |p_h' - p_h| \tan\phi) \in [\delta, 1-\delta]^2$ e

$$(p_h', p_{v,c}(p_h) + \eta - |p_h' - p_h| \tan\phi) = (p_h, p_{v,c}(p_h) + \eta) + \frac{|p_h' - p_h|}{\cos\phi}(\cos\phi, -\sin\phi) \tag{2.23}$$

ii) $(p_h, p_{v,c}(p_h) - \eta)$, $(p_h', p_{v,c}(p_h) - \eta - |p_h' - p_h| \tan\psi) \in [\delta, 1-\delta]^2$ e

$$(p_h', p_{v,c}(p_h) - \eta - |p_h' - p_h| \tan\psi) = (p_h, p_{v,c}(p_h) - \eta) + \frac{|p_h' - p_h|}{\cos\psi}(\cos\psi, -\sin\psi) \tag{2.24}$$

As direções de crescimento e decrescimento de $\theta(p_h, p_v)$ são mostradas na figura (2.2).

Pelo Lema (2.3) e a Equação (2.23) temos que

$$\theta(p_h', p_{v,c}(p_h) + \eta - |p_h' - p_h| \tan\phi) \geq \theta(p_h, p_{v,c}(p_h) + \eta) > 0, \tag{2.25}$$

logo $p_{v,c}(p_h') \leq p_{v,c}(p_h) + \eta - |p_h' - p_h| \tan\phi$, $\forall\, 0 < \eta < \frac{\delta}{2}$, de onde obtemos

$$|p_{v,c}(p_h') - p_{v,c}(p_h)| \geq |p_h' - p_h| \tan\phi \tag{2.26}$$

Novamente, pelo Lema (2.3), usando o fato que $\theta(p_h, p_v)$ é decrescente na direção de $(\cos\psi, -\sin\psi)$ e a Equação (2.24), temos que

$$\theta(p_h', p_{v,c}(p_h) - \eta - |p_h' - p_h| \tan\psi) \leq \theta(p_h, p_{v,c}(p_h) - \eta) = 0, \tag{2.27}$$

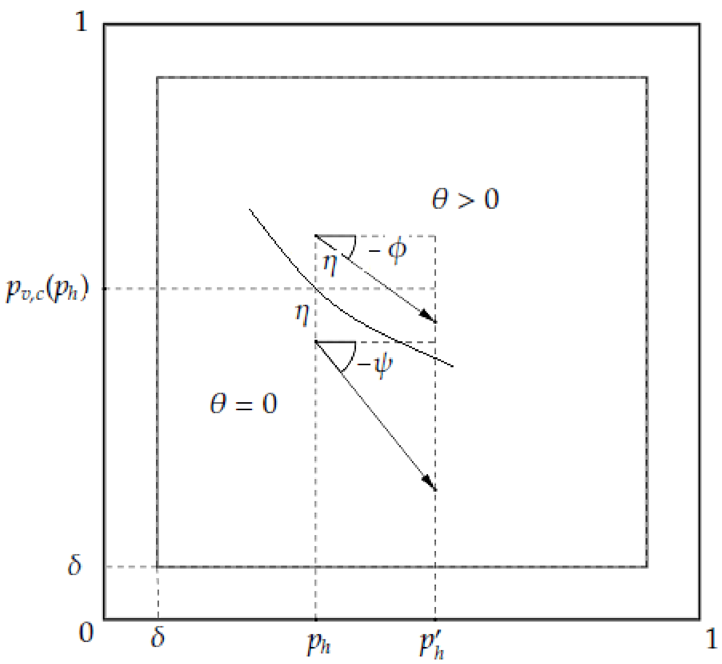

Figura 2.2: Direções de crescimento e decrescimento de θ

logo $p_{v,c}(p'_h) \geq p_{v,c}(p_h) - \eta - |p'_h - p_h| \tan\psi,\ \forall 0 < \eta < \frac{\delta}{2}$ de onde obtemos

$$|p_{v,c}(p'_h) - p_{v,c}(p_h)| \leq |p'_h - p_h| \tan\psi \tag{2.28}$$

Observe que provamos as desigualdades em (2.6), mas com a restrição $|p'_h - p_h| \leq \epsilon$. Para obter a desigualdade do lado direito em (2.6) para todo $p_h, p'_h \in [a, b]$, basta observar que $p_{v,c}$ é decrescente e escrever $|p'_h - p_h|$ como uma soma telescópica onde cada termo da soma seja menor que ϵ. Assim, tome $C(a, b) = \tan\psi$. Para a desigualdade do lado esquerdo de (2.6), observe que se $p'_h - p_h > \epsilon$, tomando $p_h \leq p_1 < p_2 \leq p'_h$ com $p_2 - p_1 = \epsilon$ teremos que

$$\begin{aligned} |p_{v,c}(p'_h) - p_{v,c}(p_h)| &\geq |p_{v,c}(p_2) - p_{v,c}(p_1)| \geq \frac{|p_2 - p_1||p'_h - p_h| \tan\phi}{|p'_h - p_h|} \geq \\ &\geq \frac{\epsilon |p'_h - p_h| \tan\phi}{|b - a|} \end{aligned} \tag{2.29}$$

assim, tome $c(a, b) = \frac{\epsilon \tan\phi}{b-a}$.

O argumento acima mostra que $p_{v,c}$ é uma função Lipschitziana e estritamente decrescente em qualquer compacto $[a,b] \subset \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$. Combinando com $\lim_{p_h \downarrow p_k} p_{v,c}(p_h) = p_{v,c}(p_k) = 1$ e $\lim_{p_h \uparrow \frac{1}{2}} p_{v,c}(p_h) = p_{v,c}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, temos que $p_{v,c}$ é estritamente decrescente e contínua em todo intervalo $\left[p_k, \frac{1}{2}\right]$.

Analogamente provamos que $p_{h,c}(p_v)$ é estritamente decrescente e contínua para $p_v \in [0,1]$.

Agora, mostraremos que a função $p_{v,c}$ é a inversa de $p_{h,c}$. Dado $p_h \in \left(p_k, \frac{1}{2}\right)$, como $p_{v,c}(p_h)$ é estritamente decrescente, temos que $\forall \epsilon > 0$, $\theta(p_h - \epsilon, p_{v,c}(p_h)) = 0$, logo $p_{h,c}(p_{v,c}(p_h)) \geq p_h$. Também temos que $\forall \epsilon > 0$, $\theta(p_h + \epsilon, p_{v,c}(p_h)) > 0$, logo $p_{h,c}(p_{v,c}(p_h)) \leq p_h)$. Logo, concluímos que $p_{h,c}(p_{v,c}(p_h)) = p_h$. Da mesma maneira mostramos que $p_{v,c}(p_{h,c}(p_v)) = p_v$, ou seja, $p_{v,c}$ é a inversa da função $p_{h,c}$.

$\square$

Capítulo 3

Conectividades Truncadas em Percolação Anisotrópica

Neste capítulo estudaremos o comportamento da conectividade finita no modelo de percolação independente de elos anisotrópico em $\mathbb{Z}^2$. Nós estabeleceremos uma desigualdade estrita que envolve a probabilidade da origem se conectar com pontos x e x' que são simétricos em relação à diagonal em $\mathbb{Z}_+^2$. Na Seção (3.1) faremos uma exposição do problema e enunciaremos o Teorema (3.1). Na Seção (3.2) daremos algumas notações e definições para o restante do Capítulo. Na Seção (3.3) provaremos alguns lemas que envolvem contagem com contornos. Na Seção (3.4) obtemos cotas superior e inferior para a conectividade finita. Na Seção (3.5) fechamos com a prova do Teorema (3.1).

3.1 Introdução

A motivação para tratar desse assunto vem do seguinte problema proposto por E. Andjel. Antes precisamos introduzir algumas notações. A referência para a discussão que segue é [24].

Considere o grafo $\mathbb{L} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ onde o conjunto de vértices é $\mathbb{V} = \mathbb{Z}^2$ e o conjunto de elos é formado pelos pares de primeiros vizinhos, i.e., $\mathbb{E} = \{e = \{x, y\} \subset \mathbb{V} : d(x, y) = 1\}$ onde $d(x, y)$ é a distância do grafo $\mathbb{Z}^2$. O conjunto $\mathbb{E}$ é particionado em dois subconjuntos disjuntos $\mathbb{E}^h = \{e = \{x, y\} \in \mathbb{E} : x_2 = y_2\}$ e $\mathbb{E}^v = \{e = \{x, y\} \in \mathbb{E} : x_1 = y_1\}$. Dizemos que e é um elo horizontal (resp. vertical) se $e \in \mathbb{E}^h$ (resp. $e \in \mathbb{E}^v$).

Dado $V \subset \mathbb{Z}^2$, denote por $\mathbb{L}[V] = (V, \mathbb{E}[V])$ o subgrafo induzido por V em $\mathbb{L}$ onde $\mathbb{E}[V] = \{\{x, y\} \in \mathbb{E} : x \in V, y \in V\}$. Diremos que um conjunto $V \subset \mathbb{Z}^2$ é conexo se $\mathbb{L}[V]$ é conexo.

Vamos considerar o modelo de percolação de elos anisotrópico em $\mathbb{Z}^2$ com conjunto de elos horizontais $\mathbb{E}^h$ e elos verticais $\mathbb{E}^v$, como descrito na Seção (1.1).

Denotaremos por $\alpha \in (0, 1]$ o fator de anisotropia dado por $\alpha = p_h/p_v$.

Assim, o modelo de percolação de elos anisotrópico em $\mathbb{Z}^2$ é descrito pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\mathbf{p})$ onde $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}}$, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos em Ω e $\mathbb{P}_\mathbf{p} = \prod_{e \in \mathbb{E}} \mu(e)$ é o produto de medidas de Bernoulli.

Dados $x, y \in \mathbb{V}$ denotaremos por $\tau_\mathbf{p}(x, y) = \mathbb{P}_\mathbf{p}(x \leftrightarrow y)$ a função de conectividade do processo.

Considere agora $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2 = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ com $x_1 < x_2$ e $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}_+^2$. Se o modelo não tem anisotropia, i.e., $\alpha = 1$, então por simetria temos que $\tau_\mathbf{p}(0, x) = \tau_\mathbf{p}(0, x')$ onde 0 é a origem de $\mathbb{Z}^2$. Considerando o caso anisotrópico, i.e., $\alpha < 1$, E. Andjel questionou se a desigualdade estrita $\tau_\mathbf{p}(0, x) > \tau_\mathbf{p}(0, x')$ é verdadeira ou não [3]. A conjectura é a seguinte:

Conjectura 3.1. *Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ e $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}_+^2$ com $x_1 < x_2$, então a desigualdade estrita*

$$\tau_p(0, x) > \tau_p(0, x') \tag{3.1}$$

vale para todo $x \in \mathbb{Z}_+^2$, para todo $p_v \in (0, 1)$ e para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Apesar da simplicidade, a conjectura sem restrições ainda está em aberto. Um problema envolvendo desigualdades similares em percolação orientada em $\mathbb{Z}^2$ foi resolvido em 2008 por E. Andjel e M.Sued em [4].

Vamos fazer uma primeira análise de como a quantidade $\tau_{\mathbf{p}}(0,x)$ depende dos parâmetros. O parâmetro chave que mede o grau de anisotropia do sistema é o parâmetro α. De fato, α próximo de 1 significa que o sistema é pouco anisotrópico enquanto α próximo de 0 é a situação oposta. Claramente, deve ser mais simples provar a desigualdade (3.1) para α próximo de 0 do que para α próximo de 1, que poderia ser um regime onde a desigualdade (3.1) não seja verdadeira.

Assim, gostaríamos de provar a conjectura o mais uniformemente possível em relação ao parâmetro α, i.e., queremos provar que, para qualquer $\alpha < 1$, que significa considerar anisotropia no sistema, a desigualdade (3.1) é verdadeira para pelo menos determinadas regiões do parâmetro p_v.

Considerando a dependência de $\tau_{\mathbf{p}}(0,x)$ em relação à variável x, $\tau_{\mathbf{p}}(0,x)$ depende claramente da distância de x à origem, mas também da inclinação $\rho = x_2/x_1$ do vetor x com o semi-eixo positivo x. Em particular, se $|x| \to \infty$ e simultaneamente $\rho \to 1^+$ i.e., x vai pra infinito de tal maneira que a distância angular de x com a diagonal vai para 0, então razoavelmente esperamos que $\tau_{\mathbf{p}}(0,x) - \tau_{\mathbf{p}}(0,x') \to 0$ para quaisquer valores de p_v e α. Assim parece mais difícil provar a desigualdade (3.1) uniformemente em x, devido exatamente à região onde $|x| \to \infty$ e $\rho \to 1^+$. Assim, ao tentar provar a desigualdade (3.1) podemos pedir uma uniformidade em x no sentido que a desigualdade (3.1) seja verdadeira para todas as distâncias $|x|$ que tenham inclinação ρ maior ou igual a um valor fixo maior que 1.

Um primeiro resultado parcial, obtido por de Lima e Procacci em [24], prova que se o sistema tem anisotropia ($\alpha \in (0,1)$), mesmo uma fraca anisotropia, e é fixada uma distância angular positiva $\rho = x_2/x_1$, mesmo muito pequena, entre x e a diagonal, então a Desigualdade (3.1) vale para p_v suficientemente pequeno, ou seja, num regime altamente subcrítico. Lembramos que, como provado originalmente em [21] (ver também [15]), o regime subcrítico para esse modelo ocorre quando $p_h + p_v < 1$. O resultado obtido em [24] é o seguinte:

Teorema 3.1. *Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ e $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}_+^2$ com $x_1 < x_2$ (i.e., $\rho > 1$). Então,* *para qualquer* $\alpha \in (0,1)$*, existe* $p^*(\alpha,\rho) > 0$ *tal que a desigualdade estrita*

$$\tau_p(0,x) > \tau_p(0,x') \tag{3.2}$$

vale para todo $p_v < p^*(\alpha,\rho)$*.*

Em [24] também é observado que a Desigualdade (3.1) pode ser provada para valores maiores (mais ainda subcríticos) de p_v, via um cálculo similar ao apresentado é possível mostrar que para todo $\rho > 1$ e para todo α menor que uma quantidade fixa $\alpha^*(\rho)$ (de fato, α suficientemente pequeno), a Desigualdade (3.1) é verdadeira para todo $p_v < 1/3$.

O resultado que vamos obter é análogo ao resultado acima, mas considerando a conectividade truncada no regime supercrítico, definida a seguir.

Definição 3.1. *Dados* $x, y \in \mathbb{Z}^2$ *definimos* $\tau_p^f(x,y)$ *como a probabilidade que* x *e* y *pertençam ao mesmo aglomerado aberto e este seja finito, ou seja,*

$$\tau_p^f(x,y) = \mathbb{P}_p(\exists \text{ aglomerado aberto } A : \{x,y\} \subset V_A, |E_A| < \infty)$$

Na fase supercrítica usaremos outro parâmetro para medir a anisotropia do sistema, dado por $\eta \in (0,1]$, a ser definido posteriormente em (3.7), mas que também carregará a informação de que η próximo de 1 significa que o sistema é pouco anisotrópico e η próximo de 0 significa que o sistema é bastante anisotrópico. Podemos então enunciar o resultado que provaremos nesse capítulo.

Teorema 3.2. *Seja* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ *e* $x' = (x_2, x_1) \in \mathbb{Z}_+^2$ *com* $\rho = \frac{x_2}{x_1} > 1$*. Então, para qualquer* $\eta \in (0,1)$*, existe* $p^*(\eta,\rho) < 1$ *tal que a desigualdade*

$$\tau_p^f(0,x) > \tau_p^f(0,x')$$

é verdadeira para todo $p_h > p^*(\eta,\rho)$*.*

A prova do resultado começa por darmos uma caracterização da conectividade truncada através de uma expansão que envolve contornos, como exposto em [28]. Seguindo as ideias em [24], usando tal caracterização e algumas estimativas do número de contornos que cercam 0 e x, obtemos cotas inferior e superior para a conectividade truncada, que quando comparadas, fornecem a desigualdade do Teorema (3.2). Observamos que a limitação em relação à "supercriticalidade forte" vem precisamente da expansão em contornos que utilizamos.

3.2 Notações e definições

Nesta seção daremos uma caracterização da conectividade truncada usando expansão em aglomerados. Antes porém precisamos de algumas notações e definições.

Dado $V \subset \mathbb{Z}^2$ denotamos por $\partial_e V = \{e \in \mathbb{E} : |e \cap V| = 1\}$ a fronteira de elos de V. Denotaremos por $\partial_v^{ext} V = \{x \in \mathbb{Z}^2 \backslash V : d(x, V) = 1\}$ a fronteira exterior de vértices de V e $\partial_v^{int} V = \{x \in V : d(x, \mathbb{Z}^2 \backslash V) = 1\}$ a fronteira interior de vértices de V.

Diremos que um conjunto $\gamma \subset \mathbb{E}$ é um conjunto separador se o grafo $\mathbb{L} \backslash \gamma \equiv (\mathbb{V}, \mathbb{E} \backslash \gamma)$ é desconexo. A seguir daremos a definição de contorno, objeto extensivamente usado durante o restante do texto. Uma boa referência para o assunto são os artigos [28] e [2].

Definição 3.2. *Um subconjunto finito $\gamma \subset \mathbb{E}$ é chamado contorno se $\mathbb{L} \backslash \gamma$ tem exatamente uma componente conexa finita e é minimal com respeito a essa propriedade, i.e., para qualquer elo $e \in \gamma$, o grafo induzido $(\mathbb{V}, \mathbb{E} \backslash (\gamma \backslash e))$ não tem componente conexa finita. Denotaremos por Γ o conjunto dos contornos em $\mathbb{L}$.*

Se γ é um contorno em $\mathbb{L}$, denotamos por $G_\gamma = (I_\gamma, E_\gamma)$ a única componente conexa finita de $\mathbb{L} \backslash \gamma$, onde $I_\gamma \subset \mathbb{Z}^2$ é o conjunto de vértices interior ao contorno γ e $E_\gamma \subset \mathbb{E}$ é o conjunto de elos interior ao contorno γ. Observe que $\partial_e I_\gamma = \gamma$.

Considere um contorno $\gamma \in \mathbb{L}$ e um conjunto de vértices $X \subset \mathbb{Z}^2$. Dizemos que γ cerca X se $X \subset I_\gamma$ e usaremos a notação $\gamma \odot X$. Denotaremos por $|\gamma|$ o tamanho do contorno γ, i.e., o número de elos de γ. Denotaremos por Γ_X o conjunto dos contornos que cercam X, i.e., $\Gamma_X = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \odot X\}$ e por Γ_X^n o conjunto dos contornos de tamanho

n que cercam X, i.e., $\Gamma_X^n = \{\gamma \in \Gamma_X : |\gamma| = n\}$. Durante o restante do o texto o conjunto X conterá somente um ou dois elementos.

Como vamos trabalhar a volume finito considere $G = (V_G, E_G)$ um subgrafo de $\mathbb{L}$ e denote por Ω_G o conjunto de configurações em G. Denotaremos por $G_N = \mathbb{L}[V_N]$ o subgrafo induzido por $V_N = [-N, N] \times [-N, N] \subset \mathbb{Z}^2$ e escreveremos $E_N = \mathbb{E}[V_N]$ para os elos de G_N. Denotaremos por Ω_G o conjunto das configuraçãoes em G, i.e., $\Omega_G = \{\omega : E_G \to \{0, 1\}\}$. Dado $\omega \in \Omega_G$ denotamos por $O(\omega) = \{e \in E_G : \omega(e) = 1\}$ o conjunto de elos em E_G abertos na configuração ω e por $C(\omega) = \{e \in E_G : \omega(e) = 0\}$ o conjunto de elos em E_G fechados na configuração ω.

Considerando a medida $\mathbb{P}_\mathbf{p}$ restrita a Ω_G e fixando $\omega \in \Omega_G$ a probabilidade $\mathbb{P}_\mathbf{p}(\omega)$ é dada por

$$\mathbb{P}_\mathbf{p}(\omega) = p_h^{|O^h(\omega)|} p_v^{|O^v(\omega)|} (1 - p_h)^{|C^h(\omega)|} (1 - p_v)^{|C^v(\omega)|} \tag{3.3}$$

A quantidade com a qual vamos trabalhar no regime supercrítico é a conectividade truncada, de fato, vamos trabalhar a volume finito, i.e., fixe N suficientemente grande de modo que $\{x, y\} \subset V_N \backslash \partial_v^{int} V_N$. A conectividade truncada a volume finito $\tau_\mathbf{p}^{f,N}(x, y)$ é definida como a probabilidade que os vértices x, y pertençam ao mesmo aglomerado aberto, e este aglomerado não intercepte $\partial_v^{int} V_N$. Nominalmente temos,

$$\tau_\mathbf{p}^{f,N}(x, y) = \mathbb{P}_\mathbf{p}(\exists \text{ aglomerado aberto } A : \{x, y\} \subset V_A, V_A \cap \partial_v^{int} V_N = \emptyset) \tag{3.4}$$

Observando a definição (3.1) temos que

$$\tau_\mathbf{p}^{f}(x, y) = \lim_{N \to \infty} \tau_\mathbf{p}^{f,N}(x, y) \tag{3.5}$$

Observe que, pela continuidade da medida produto $\mathbb{P}_\mathbf{p}$, para encontrar uma cota superior para a conectividade finita $\tau_\mathbf{p}^{f}(x, y)$, basta encontrar uma cota superior para $\tau_\mathbf{p}^{f,N}(x, y)$ que seja uniforme em N.

Vamos dar uma expressão para $\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(x,y)$ em termos dos parâmetros

$$\lambda_h = \frac{1-p_h}{p_h} \quad \text{e} \quad \lambda_v = \frac{1-p_v}{p_v} \tag{3.6}$$

Desde já usaremos

$$\eta = \frac{\lambda_v}{\lambda_h} \quad \in \quad (0,1] \tag{3.7}$$

que nos dá uma medida da anisotropia do sistema. Observe que fixado p_h ($p_h < p_v$) temos que

$$\lim_{p_v \to p_h^+} \eta = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{p_v \to 1} \eta = 0 \tag{3.8}$$

Primeiramente observe que

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{\omega \in \Omega_G} p_h^{|O^h(\omega)|} p_v^{|O^v(\omega)|} (1-p_h)^{|C^h(\omega)|} (1-p_v)^{|C^v(\omega)|} = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega_G} p_h^{|O^h(\omega)|+|C^h(\omega)|} p_v^{|O^v(\omega)|+|C^v(\omega)|} (\frac{1-p_h}{p_h})^{|C^h(\omega)|} (\frac{1-p_v}{p_v})^{|C^v(\omega)|} = \\
&= p_h^{|E_G^h|} p_v^{|E_G^v|} \sum_{\omega \in \Omega_G} \lambda_h^{|C^h(\omega)|} \lambda_v^{|C^v(\omega)|}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Definimos então a função de partição

$$Z_{E_G}(\mathbf{p}) = Z_{E_G}(p_h, p_v) = p_h^{-|E_G^h|} p_v^{-|E_G^v|} = \sum_{\omega \in \Omega_G} \lambda_h^{|C^h(\omega)|} \lambda_v^{|C^v(\omega)|} \tag{3.10}$$

Denotamos simplesmente por $Z_N(\mathbf{p})$ se $G = G_N$. A conectividade truncada a volume finito $\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(x,y)$ pode ser escrita com uma expressão similar a (3.10), a saber

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(x,y) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega_N:\exists\ A \text{ aglomerado aberto} \\ \{x,y\}\subset V_A,\ \partial_e A\subset E_N}} p_h^{|O^h(\omega)|} p_v^{|O^v(\omega)|}(1-p_h)^{|C^h(\omega)|}(1-p_v)^{|C^v(\omega)|} =$$

$$= \frac{1}{Z_N(\mathbf{p})} \sum_{\substack{\omega\in\Omega_N:\exists\ A \text{ aglomerado aberto} \\ \{x,y\}\subset V_A,\ \partial_e A\subset E_N}} \lambda_h^{|C^h(\omega)|}\lambda_v^{|C^v(\omega)|} \tag{3.11}$$

Uma configuração $\omega \in \Omega_N$ é especificada uma vez que conhecemos o conjunto de elos fechados $C(\omega)$ em E_N. Se $C = C(\omega)$ é um conjunto de elos fechados em E_N, escrevemos $C \odot \{x, y\}$ quando existe um contorno $\gamma \subset C$ tal que $\gamma \odot \{x, y\}$. Fixada uma configuração $\omega \in \Omega_N$, existe um único contorno γ contido na fronteira do aglomerado aberto (em ω) que contém $\{x, y\}$. De fato, a fronteira do aglomerado aberto que contém $\{x, y\}$ é um conjunto separador. Se tal fronteira não é um contorno podemos, excluindo alguns elos, encontrar um contorno γ contido nessa fronteira. Suponha agora que exista dois contornos γ e γ' para o aglomerado aberto que contém $\{x, y\}$. Então existe um elo $e \in \gamma'$ tal que $e \notin \gamma$. Mas assim o grafo $G_N\backslash\gamma$ contém o elo e, logo $G_N\backslash\gamma$ é conexo pois γ' é um contorno.

Podemos então reescrever (3.10) e (3.11) como

$$Z_N(\mathbf{p}) = \sum_{C\subset E_N} \lambda_h^{|C^h|}\lambda_v^{|C^v|} = p_h^{-|E_N^h|} p_v^{-|E_N^v|} \tag{3.12}$$

e

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(x,y) = \frac{1}{Z_N(\mathbf{p})} \sum_{\substack{C\subset E_N \\ C\odot\{x,y\}}} \lambda_h^{|C^h|}\lambda_v^{|C^v|} \tag{3.13}$$

Utilizaremos a caracterização da conectividade truncada a volume finito dada acima na Seção (3.4) para encontrar cotas, inferior e superior, para a conectividade truncada.

3.3 Contagem com contornos

Nesta seção provaremos alguns lemas que envolvem contagem com contornos, os quais serão utilizados na prova do Teorema (3.2).

Inicialmente vamos dar uma caracterização dos contornos em termos da rede dual de $\mathbb{L}$ a qual denotaremos por $\mathbb{L}^*$, cuja definição formal pode ser encontrada em [15]. Temos que $\mathbb{L}^*$ é isomorfo a $\mathbb{L}$. Considere $\mathbb{L}$ imersa em $\mathbb{R}^2$. Tomaremos como vértices da rede dual o conjunto $\mathbb{V}^* = \left\{x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : x \in \mathbb{Z}^2\right\}$ e nós ligaremos dois vértices vizinhos por um elo que será representado por um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$. Usaremos $0^* = (1/2, 1/2) \in \mathbb{Z}^2$ para a origem em $\mathbb{L}^*$. Denotaremos por $\mathbb{E}^*$ o conjunto de elos de $\mathbb{L}^*$. Dessa maneira existe uma bijeção entre os elos de $\mathbb{L}$ e os elos do dual $\mathbb{L}^*$, pois cada elo e de $\mathbb{L}$ é "atravessado" por um único elo do dual, o qual denotaremos por e^*.

Se $X \subset \mathbb{E}$, denotaremos por X^* o conjunto $X^* = \{e^* \in \mathbb{E}^* : e \in X\}$, observe que $|X| = |X^*|$. Temos então o seguinte fato, cuja prova basicamente se encontra em [28].

Proposição 3.1. *Se $\gamma \in \Gamma$ então γ^* é um circuito em $\mathbb{L}^*$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que γ^* contém um circuito c^* no dual. De fato, um circuito c^* no dual é tal que c é um conjunto separador na rede original (ver [21]), logo como $\gamma \supset c$ e γ é um conjunto separador minimal então $\gamma = c$ e $\gamma^* = c^*$.

Vamos então mostrar que γ^* contém um circuito c^* no dual. Inicialmente vamos mostrar que todo vértice $v \in \gamma^*$ é incidente a pelo menos dois elos em γ^*.

Suponha que v seja incidente a somente um elo e^* em γ^*. Denotando por $V_\gamma^{ext} = \mathbb{Z}^2 \backslash I_\gamma$ temos que $\gamma = \partial_e I_\gamma = \{e = \{x, y\} \in \mathbb{E} : x \in I_\gamma, y \in V_\gamma^{ext}\}$, logo o elo e^* é dual de $e = \{x, y\}$ em γ com $x \in I_\gamma$ e $y \in V_\gamma^{ext}$. Dos 3 elos restantes do dual aos quais v é incidente, dois perpendiculares a e^* e um paralelo a este, denote por $\tilde{e}^*$ aquele paralelo a e^*. Por construção, se escrevemos $\tilde{e} = \{x', y'\}$ então denotando por f^* e g^* os dois elos do dual perpendiculares a e^* aos quais v é incidente, então podemos escrever $f = \{x, x'\} \in \mathbb{E}$ e $g = \{y, y'\} \in \mathbb{E}$. Como o único elo de γ^* ao qual v é incidente é e^*, então $\tilde{e}^*$, f^* e g^* não pertencem a γ^*, logo $\tilde{e}$, f e g não pertencem a γ. Assim temos um caminho $\sigma = x, f, x', \tilde{e}, y', g, y$ conectando $x \in I_\gamma$ a $y \in V_\gamma^{ext}$ onde $\sigma \cap \gamma = \emptyset$, contradizendo a hipótese que γ é um contorno.

Considerando agora o subgrafo γ^* da rede dual $\mathbb{L}^*$, seja $\pi = v_0, e_0^*, v_1, ..., e_{n-1}^*, v_n$ um caminho de tamanho máximo em γ^*. Como v_n está em γ^* e todo vértice de γ^* é incidente a pelo menos 2 elos em γ^*, existe um elo $e_n^* = \{v_n, v_{n+1}\} \neq e_{n-1}^*$ em γ^*. Como π é um caminho de tamanho máximo então devemos ter $v_{n+1} \in \pi$, de fato devemos ter $v_{n+1} = v_i \in \{v_0, v-1, ...v_{n-3}\}$. Logo γ^* contém o circuito (ciclo) $c^* = v_i, e_i^*, v_{i+1}, ..., e_{n-1}^*, v_n, e_n^*, v_{n+1}$.

□

Trataremos agora com contagem de contornos que cercam 0 e x. Entre os contornos que cercam $\{0, x\}$, ou seja $\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}$, existem aqueles de tamanho mínimo, os quais denotaremos por contornos mínimos. Se $\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}$ é um contorno mínimo então

$$|\gamma^h| = 2(x_2 + 1) \quad e \quad |\gamma^v| = 2(x_1 + 1) \tag{3.14}$$

Temos então que $|\gamma| = 2(x_1 + x_2 + 2) = 2(|x| + 2)$. Usaremos a notação $||x||$ para o tamanho de um contorno mínimo que cerca 0 e x, i.e., $||x|| = 2(|x| + 2)$.

Para simplificar escreveremos $F(x, n)$ para o número de contornos de tamanho n que cercam 0 e x, para $n \geq ||x||$, ou seja

$$F(x, n) = |\Gamma^n_{\{0,x\}}| \tag{3.15}$$

Usaremos também a notação $\beta_x = F(x, ||x||)$ para o número de contornos de tamanho mínimo que cercam 0 e x. Temos então o seguinte lema.

Lema 3.1.

i) $F(x, n) \leq 4^n$, *para todo* $n \geq ||x||$

ii) $F(x, ||x|| + m) \leq 12^m \cdot \binom{||x||}{m} \cdot \beta_x$, *se* $0 \leq m \leq \frac{||x||}{2}$

Demonstração.

i)

Inicialmente observe que contar o número de contornos de tamanho n que cercam 0 e x é o mesmo que contar o número de circuitos de tamanho n no dual que contém 0 e x no seu interior. Vamos dar uma cota superior estimando o número de circuitos de tamanho n no dual que contém 0 no seu interior. Como um tal circuito envolve a origem então ele contém um elo da forma $e^* = \{v_-, v_+\}$ onde $v_- = \left(k - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ e $v_+ = \left(k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ para algum $k \leq 0$. Devemos ainda ter $n- < k \leq 0$ pois caso $k \leq -n$ o circuito teria tamanho pelo menos $2n$. Retirando-se o elo e^* do circuito obtemos um caminho (auto evitante) de tamanho $n-1$. Logo o número de circuitos de tamanho n no dual que contém 0 no seu interior é cotado superiormente por $n \cdot 3^{n-1} \leq 4^n$.

ii)

Dado $\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}$, temos que o circuito γ^* corta o eixo x, denote então por e_γ^* o elo mais à esquerda de γ^* que cruza o eixo x, i.e., entre os elos da forma $e_k^* = \{v_-^k, v_+^k\}$ onde $v_-^k = \left(k - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ e $v_+^k = \left(k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ que pertencem a γ^*, escolha aquele que tem o menor valor de k. Denotando por k_γ esse menor valor escrevemos $e_\gamma^* = \{v_-^{k_\gamma}, v_+^{k_\gamma}\}$. Como o circuito γ^* envolve 0 e x então devemos ter $-m < k_\gamma \leq 0$.

Denotamos então por $\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_k^*) = \{\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m} : e_\gamma^* = e_k^*\}$ o conjunto dos contornos de tamanho $||x|| + m$ que cercam 0 e x cujo elo mais à esquerda do circuito dual γ^* que cruza o eixo x é e_k^*. Temos claramente $\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_k^*) \cap \Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_j^*) = \emptyset$ se $j \neq k$. Logo podemos escrever

$$\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m} = \bigcup_{k=-m+1}^{0} \Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_k^*) \tag{3.16}$$

Como a união é disjunta temos

$$F(x, ||x|| + m) = |\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}| = \sum_{k=-m+1}^{0} |\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_k^*)| \tag{3.17}$$

Para cada um dos termos $|\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_k^*)|$ do somatório, afirmamos que a seguinte cota superior (independente de k) é verdadeira

$$|\Gamma_{\{0,x\}}^{||x||+m}(e_k^*)| \leq 3^m \cdot \binom{||x|| + m}{m} \beta_x \quad \text{para} \quad k = -m+1, ..., -1, 0 \tag{3.18}$$

Nós postergamos a prova de (3.18) para a próxima proposição. Com essa cota superior obtemos

$$F(x,\|x\|+m) \leq m\cdot 3^m \cdot \binom{\|x\|+m}{m}\beta_x = m\cdot 3^m\beta_x\binom{\|x\|}{m}\prod_{j=1}^{m}\frac{\|x\|+j}{\|x\|-m+j} \leq$$
$$\leq m\cdot 3^m\beta_x\cdot\binom{\|x\|}{m}\left(\frac{\|x\|+1}{\|x\|-m+1}\right)^m \tag{3.19}$$

pois na última desigualdade usamos que $\max\limits_{j=1,\ldots,m}\left\{\frac{\|x\|+j}{\|x\|-m+j}\right\}=\frac{\|x\|+1}{\|x\|-m+1}$

Se $0\leq m\leq\frac{\|x\|}{2}$ podemos dar a seguinte cota superior para o termo acima.

$$\frac{\|x\|+1}{\|x\|-m+1}\leq\frac{\|x\|+1}{\frac{\|x\|}{2}+1}\leq\frac{\|x\|+2}{\frac{\|x\|}{2}+1}=2 \tag{3.20}$$

Logo, de (3.19) e (3.20) obtemos

$$F(x,\|x\|+m)\leq m\cdot 3^m\cdot\binom{\|x\|}{m}\cdot 2^m\cdot\beta_x\leq 2^m\cdot 6^m\cdot\binom{\|x\|}{m}\cdot\beta_x\leq$$
$$\leq 12^m\cdot\binom{\|x\|}{m}\cdot\beta_x \tag{3.21}$$

□

Agora resta provar a Desigualdade (3.18).

Proposição 3.2. *Para $k=-m+1,\ldots,-1,0$*

$$|\Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|+m}(e_k^*)|\leq 3^m\cdot\binom{\|x\|+m}{m}\beta_x \tag{3.22}$$

Demonstração. A prova consiste em formalizar o seguinte argumento para contornos, que aparece originalmente para caminhos no Teorema V.6.9 de [30]. A cada $\tilde{\gamma}\in\Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|+m}(e_k^*)$ consideramos o circuito $\tilde{\gamma}^*$ no dual $\mathbb{L}^*$ e associamos uma palavra de $\|x\|+m$ letras usando o alfabeto $\{R,L,U,D\}$, a saber $W(\tilde{\gamma}^*)$. Mostramos então que a palavra $W(\tilde{\gamma}^*)$ contém uma subpalavra W tal que o circuito γ^* dado pela realização da subpalavra W a partir de u é o dual de um contorno de tamanho mínimo γ. Como a associação acima é injetiva segue então que uma cota superior para o número de tais contornos pode ser obtido escolhendo $\|x\|$ dentre as $\|x\|+m$ entradas para alocar a subpalavra associada ao contorno de tamanho mínimo, feito isso temos β_x possibilidades para tais subpalavras e no restante das m entradas temos no máximo 3 possibilidades, pois a menos do vértice inicial o circuito é auto-evitante.

Formalizando então temos: dado $\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|}$, γ^* é um circuito no dual $\mathbb{L}^*$ de tamanho mínimo $\|x\|$ que contém os vértices $u = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $w = (x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2})$. Logo γ^* é a concatenação de dois caminhos no dual c_1^* e c_2^*, ambos de tamanho $\frac{\|x\|}{2} = |x| + 2$, que não se interceptam, sendo c_1^* um caminho orientado saindo de u e chegando em w, e c_2^* um caminho orientado saindo de w e chegando em u.

Como c_1^* é um caminho que satisfaz a distância de u a w, seguindo c_1^* a partir de u só podemos caminhar para a direita e para cima. De fato, devemos dar exatamente x_1+1 passos pra direita e x_2+1 passos pra cima. Podemos então identificar c_1^* com uma palavra $W(c_1^*)$ de x_1+x_2+2 letras, contendo x_1+1 letras R(direita) e x_2+1 letras U(cima). Diremos que o caminho c_1^* é a realização da palavra $W(c_1^*)$ a partir de u. De maneira análoga podemos identificar c_2^* com uma palavra $W(c_2^*)$ de $x_1 + x_2 + 2$ letras, contendo $x_1 + 1$ letras L(esquerda) e $x_2 + 1$ letras D(baixo). Desse modo, podemos identificar o circuito γ^* com uma palavra $W(\gamma^*)$ de $\|x\|$ letras sendo que as primeiras $\|x\|/2$ letras correspondem à palavra $W(c_1^*)$ e as $\|x\|/2$ últimas letras correspondem à palavra $W(c_2^*)$. Diremos que o circuito γ^* é a realização da palavra $W(\gamma^*)$ a partir de u.

Considere agora $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|+m}(e_k^*)$. De maneira análoga ao que fizemos para um contorno de tamanho mínimo, podemos identificar o circuito $\tilde{\gamma}^*$ com uma palavra $W(\tilde{\gamma}^*)$ de $\|x\|+m$ letras, usando o alfabeto $\{R, L, U, D\}$. Esta palavra é obtida da seguinte maneira: escrevendo $\tilde{\gamma}^* = u_1, f_1^*, u_2, ..., f_{\|x\|+m}^*, u_{\|x\|+m+1}$ onde $u_{\|x\|+m+1} = u_1 = v_-^k$ e $f_1^* = e_k^*$, identificamos $f_i^* = \{u_i, u_{i+1}\}$ com a letra U se $u_{i+1} - u_i = (0, 1)$, com a letra D se $u_{i+1} - u_i = (0, -1)$, com a letra R se $u_{i+1} - u_i = (1, 0)$ e com a letra L se $u_{i+1} - u_i = (-1, 0)$. Dessa maneira o elo $f_1^* = e_k^*$ é identificado com a letra U.

O que faremos agora é mostrar que a palavra $W(\tilde{\gamma}^*)$ contém uma subpalavra W tal que o circuito γ^* dado pela realização da subpalavra W a partir de u é o dual de um contorno de tamanho mínimo γ.

Como $\tilde{\gamma} \odot \{0, x\}$ então seguindo o contorno $\tilde{\gamma}^*$, a partir de u_1, este deve conter algum vértice na região $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > x_1, b > x_2\}$. Dentre os vértices de $\tilde{\gamma}^*$ nessa região, escolha um vértice u_{i_0+1} com a seguinte propriedade

$$d(u_{i_0+1}, x) \geq d(z, x) \;\; \forall\, z \in \{u_1, u_2, ..., u_{\|x\|+m+1}\} \cap \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > x_1, b > x_2\} \tag{3.23}$$

Observe que as letras associadas aos elos $f^*_{i_0} = \{u_{i_0}, u_{i_0+1}\}$ e $f^*_{i_0+1} = \{u_{i_0+1}, u_{i_0+2}\}$ são R e D respectivamente.

Dessa maneira, considere os caminhos

$$\lceil \tilde{\gamma}^* \rceil = u_1, f^*_1, ..., f^*_{i_0}, u_{i_0+1} \quad \text{e} \quad \lfloor \tilde{\gamma}^* \rfloor = u_{i_0+1}, f^*_{i_0+1}, ..., f^*_{\|x\|+m}, u_{\|x\|+m+1} \tag{3.24}$$

Por construção, temos que a palavra $W(\lceil \tilde{\gamma}^* \rceil)$ contém pelo menos $x_1 + 1$ letras R e pelo menos $x_2 + 1$ letras U e a palavra $\lfloor \tilde{\gamma}^* \rfloor$ contém pelo menos $x_1 + 1$ letras L e pelo menos $x_2 + 1$ letras D. Seja então $\lceil W \rceil$ a subpalavra obtida de $W(\lceil \tilde{\gamma}^* \rceil)$ tomando-se em $W(\lceil \tilde{\gamma}^* \rceil)$ as primeiras $x_2 + 1$ letras U e as últimas $x_1 + 1$ letras R. De maneira análoga seja $\lfloor W \rfloor$ a subpalavra obtida de $W(\lfloor \tilde{\gamma}^* \rfloor)$ tomando-se em $W(\lfloor \tilde{\gamma}^* \rfloor)$ as primeiras $x_2 + 1$ letras D e as últimas $x_1 + 1$ letras L. Denote por W a concatenação das palavras $\lceil W \rceil$ e $\lfloor W \rfloor$ e por γ^* a realização da palavra W a partir de u. Observe que $|\gamma^*| = 2|x| + 4 = \|x\|$. Temos que γ^* é a concatenação dos caminhos $\lceil \gamma^* \rceil$ e $\lfloor \gamma^* \rfloor$ onde $\lceil \gamma^* \rceil$ é a realização a partir de u da subpalavra $\lceil W \rceil$ e $\lfloor \gamma^* \rfloor$ é a realização a partir de w da subpalavra $\lfloor W \rfloor$.

Considere $\lfloor \gamma^* \rfloor^{-1}$ o caminho inverso de $\lfloor \gamma^* \rfloor$ que sai de u e chega em w. A palavra $W(\lfloor \gamma^* \rfloor^{-1})$ é obtida de $\lfloor W \rfloor$ começando da última letra de $\lfloor W \rfloor$ para a primeira e trocando D por U e L por R. Claramente a primeira letra de $\lceil W \rceil$ é U, a última letra de $\lceil W \rceil$ é R e a última letra de $W(\lfloor \gamma^* \rfloor^{-1})$ é U. Pela construção de γ^* podemos ver que a primeira letra de $W(\lfloor \gamma^* \rfloor^{-1})$ é R.

Para mostrar que γ^* é um circuito no dual que envolve 0 e x resta ver que os caminhos $\lceil \gamma^* \rceil$ e $\lfloor \gamma^* \rfloor^{-1}$ ligando u a w não têm interseção, além de u e w é claro. Suponha então que existe um vértice $v = \left(r - \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}\right)$ diferente de u e w na interseção de $\lceil \gamma^* \rceil$ e

$\lfloor\gamma^*\rfloor^{-1}$. Escrevemos $\lceil\gamma^*\rceil(u,v)$ para denotar o pedaço de caminho de $\lceil\gamma^*\rceil$ que vai de u a v, analogamente para $\lfloor\gamma^*\rfloor^{-1}(u,v)$. Desse modo as palavras $W(\lceil\gamma^*\rceil(u,v))$ e $W(\lfloor\gamma^*\rfloor^{-1}(u,v))$ contém r letras R e s letras U. Considere o subcaminho de $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil$ de u_1 a u_{i_1}, $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_1,u_{i_1})$, onde

$$\begin{aligned} i_1 = \max\{i : \; & W(\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_1,u_i)) \text{ tem exatamente } s \text{ letras } U \text{ e} \\ & W(\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_i,u_{i_0+1})) \text{ tem exatamente } x_1+1-r \text{ letras } R\} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Observe que $i_1 < i_0+1$ e na construção do caminho $\lceil\gamma^*\rceil$ a partir do caminho $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil$, o subcaminho $\lceil\gamma^*\rceil(u,v)$ é obtido quando restringimos a construção ao subcaminho $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_1,u_{i_1})$.

Com relação ao ponto final u_{i_1} do caminho $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_1,u_{i_1})$ temos que a segunda coordenada de u_{i_1} é no máximo s. Ainda, a primeira coordenada deve ser pelo menos r, pois caso contrário teríamos ainda no caminho $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_{i_1},u_{i_0})$ mais que x_1+1-r elos associados à letra R. Mas observe que a partir da etapa da construção de $\lceil\gamma^*\rceil$ em que aparece uma letra R na palavra $\lceil W\rceil$ extraída de $W(\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil)$, as próximas letras R da palavra $W(\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil)$, a partir dessa primeira letra R extraída, estão todas na palavra $\lceil W\rceil$. Logo a palavra $\lceil W\rceil$ teria mais que $x_1+1-r+r = x_1+1$ letras R, o que é absurdo. Então, a primeira coordenada de u_{i_1} deve ser pelo menos r.

Concluímos então que o caminho $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil(u_1,u_{i_1})$ sai do vértice u_1 através do elo $f_1^* = e_k^*$ cruzando a semi-reta $\{(a,0)\in\mathbb{R}^2 : a\le k\}$ da rede original, a partir daí não mais cruza essa semi-reta, fica sempre na região $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : b\le s\}$ e cruza a semi-reta $\{(r,b)\in\mathbb{R}^2 : b\le s\}$ da rede dual.

De maneira análoga ao exposto acima, encontramos um vértice u_{i_2} onde $i_2 > i_0+1$ tal que o caminho $\lfloor\tilde{\gamma}^*\rfloor^{-1}(u_1,u_{i_2})$ sai do vértice u_1 através do elo $f^*_{\|x\|+m} \neq e_k^*$, não cruza a semi-reta $\{(a,0)\in\mathbb{R}^2 : a\le k\}$ da rede original, fica sempre na região $\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\le r\}$ e cruza a semi-reta $\{(a,s)\in\mathbb{R}^2 : a\le r\}$ da rede dual.

Logo, deve existir um ponto de cruzamento dos caminhos $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil$ e $\lfloor\tilde{\gamma}^*\rfloor^{-1}$ diferente de u_1 e u_{i_0+1}, o que é absurdo. Assim γ^* é um circuito no dual que envolve 0 e x.

Assim, a cada $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\|x\|+m}_{\{0,x\}}(e_k^*)$ está associada uma palavra $W(\tilde{\gamma}^*)$ que contém uma

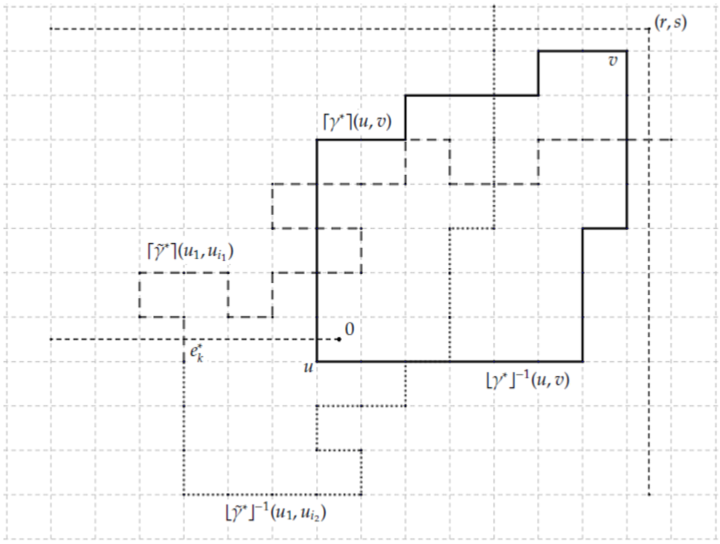

Figura 3.1: Cruzamento dos caminhos $\lceil\tilde{\gamma}^*\rceil$ e $\lfloor\tilde{\gamma}^*\rfloor^{-1}$

subpalavra W tal que o circuito γ^* dado pela realização da subpalavra W a partir de u é o dual de um contorno de tamanho mínimo γ. Como o mapa

$$W : \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|+m}(e_k^*) \to \{L, R, U, D\}^{\|x\|+m} \tag{3.26}$$

é injetivo, uma cota superior para o número de tais palavras pode ser obtido da seguinte maneira: escolhemos $\|x\|$ dentre as $\|x\| + m$ entradas para alocar a subpalavra associada ao contorno de tamanho mínimo, feito isso temos β_x possibilidades para tais subpalavras e no restante das m entradas temos no máximo 3 possibilidades, pois a menos do vértice inicial o circuito é auto-evitante. Logo temos

$$|\Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|+m}(e_k^*)| \leq 3^m \cdot \binom{\|x\| + m}{m}\beta_x \tag{3.27}$$

para $k = -m + 1, ..., -1, 0$

□

O próximo lema nos dá uma estimativa do crescimento do número de contornos de tamanho mínimo que cerca 0 e x em relação ao crescimento do tamanho $|x|$, restrito a uma reta de inclinação fixa ρ.

Lema 3.2. *Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ com $x_1 = n > 0$, $x_2 = \rho n > 0$ onde $\rho > 1$. Denotando por $\alpha_n = \beta_{(n,\rho n)}$ temos que existe o limite $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{n}} = \alpha(\rho)$ e $1 \leq \alpha(\rho) \leq 4^{1+\rho}$.*

Demonstração. Claramente $\alpha_n \geq 1$, logo $\alpha_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$.

Qualquer contorno $\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|}$ é tal que o circuito γ^* contém os elos $\left\{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right\}$, $\left\{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\right\}$, $\left\{(x_1-\frac{1}{2},x_2+\frac{1}{2}),(x_1+\frac{1}{2},x_2+\frac{1}{2})\right\}$ e $\left\{(x_1+\frac{1}{2},x_2+\frac{1}{2}),(x_1+\frac{1}{2},x_2-\frac{1}{2})\right\}$.

Excluindo-se esses elos de γ^* obtemos dois caminhos de tamanho $|x|$, um ligando $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ a $\left(x_1-\frac{1}{2},x_2+\frac{1}{2}\right)$ e outro ligando $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ a $\left(x_1+\frac{1}{2},x_2-\frac{1}{2}\right)$. Como os tamanhos desses caminhos são iguais à distância entre seus vértices inicial e final, então a partir do vértice inicial só podemos ir pra direita ou pra cima. Logo uma cota superior para α_n é dada por $2^{|x|} \cdot 2^{|x|} = 4^{n(1+\rho)}$, logo $\alpha_n^{\frac{1}{n}} \leq 4^{1+\rho}$.

Denote agora γ_1 um contorno de tamanho mínimo cercando $\{0,x\}$ e γ_2 um contorno de tamanho mínimo cercando x e $y = (n+m, \rho(n+m))$. Considere os seguintes elos, $e_1 = \{(x_1-1,x_2),x\}$, $e_2 = \{(x_1,x_2-1),x\}$, $e_3 = \{x,(x_1+1,x_2)\}$ e $e_4 = \{x,(x_1,x_2+1)\}$. Temos então que

$$\gamma_{1,2} = (\gamma_1 \backslash \{e_3,e_4\}) \cup (\gamma_2 \backslash \{e_1,e_2\}) \tag{3.28}$$

é um contorno de tamanho minimal cercando $\{0,y\}$. Ainda, se $\gamma_1 \neq \tilde{\gamma}_1$ ambos em $\Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|}$ ou $\gamma_2 \neq \tilde{\gamma}_2$ ambos em $\Gamma_{\{x,y\}}^{\|y-x\|}$, então $\tilde{\gamma}_{1,2} \neq \gamma_{1,2}$.

Logo temos que $\alpha_{n+m} \geq \alpha_n \alpha_m$. Considere então $a_n = -ln(\alpha_n) < 0$, temos então que

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \tag{3.29}$$

Ou seja, a sequência $(a_n : n \geq 1)$ é subaditiva. Pelo Teorema Subaditivo (ver [15], Apêndice 2) temos que existe o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a(\rho)$. Assim

$$a(\rho) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\lim_{n\to\infty} ln(\alpha_n^{\frac{1}{n}}) = -ln\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{n}}\right) \tag{3.30}$$

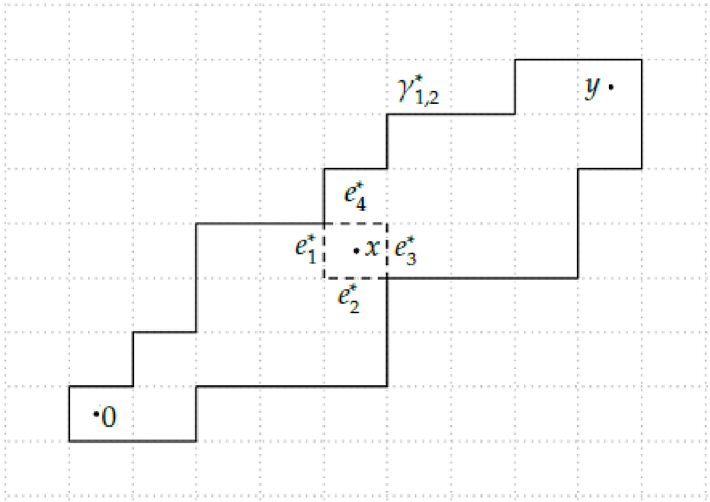

Figura 3.2: Circuito $\gamma^*_{1,2}$ dual do contorno $\gamma_{1,2}$ que cerca x e y

Logo

$$\alpha(\rho) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{n}} = e^{-a(\rho)} \tag{3.31}$$

□

3.4 Cotas inferior e superior para a conectividade truncada

Nesta seção daremos cotas inferior e superior para a conectividade truncada a volume finito para valores positivos de λ_h e λ_v suficientemente próximos de 0 usando a caracterização dada em (3.13).

Cota superior:

Considere a caracterização da conectividade truncada a volume finito dada em (3.13),

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(0,x') = \frac{1}{Z_N(\mathbf{p})} \sum_{\substack{C\subset E_N \\ C\odot\{0,x'\}}} \lambda_h^{|C^h|}\lambda_v^{|C^v|}$$

Temos que todo conjunto de elos fechados $C \subset \mathbb{E}_N$ que cerca 0 e x' contém algum contorno $\gamma \in \Gamma$ que cerca 0 e x', logo podemos escrever

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(0,x') \leq \frac{1}{Z_N(\mathbf{p})} \sum_{\gamma\in\Gamma_{\{0,x'\}}} \sum_{\substack{C\subset E_N \\ C\supset\gamma, C\odot\{0,x'\}}} \lambda_h^{|C^h|}\lambda_v^{|C^v|} \leq \frac{1}{Z_N(\mathbf{p})} \sum_{\gamma\in\Gamma_{\{0,x'\}}} \left(\lambda_h^{|\gamma^h|}\lambda_v^{|\gamma^v|} \sum_{\substack{C\subset E_N\setminus\gamma \\ C\cup\gamma\odot\{0,x'\}}} \lambda_h^{|C^h|}\lambda_v^{|C^v|} \right) =$$

$$= \sum_{\gamma\in\Gamma_{\{0,x'\}}} \lambda_h^{|\gamma^h|}\lambda_v^{|\gamma^v|} \left(\frac{1}{Z_N(\mathbf{p})} \sum_{\substack{C\subset E_N\setminus\gamma \\ C\cup\gamma\odot\{0,x'\}}} \lambda_h^{|C^h|}\lambda_v^{|C^v|} \right) \leq \sum_{\gamma\in\Gamma_{\{0,x'\}}} \lambda_h^{|\gamma^h|}\lambda_v^{|\gamma^v|} =$$

$$= \sum_{n\geq\|x\|} \sum_{\gamma\in\Gamma^n_{\{0,x'\}}} \lambda_h^{|\gamma^h|}\lambda_v^{|\gamma^v|}$$

onde $\|x\| = 2(|x| + 2)$. Uusando as igualdades em (3.14) e lembrando que $x' = (x_2, x_1)$ obtemos

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(0,x') \leq \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n\geq\|x\|} \sum_{\gamma\in\Gamma^n_{\{0,x'\}}} \lambda_h^{|\gamma^h|-2(x_1+1)}\lambda_v^{|\gamma^v|-2(x_2+1)} \leq$$

$$\leq \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n\geq\|x\|} \sum_{\gamma\in\Gamma^n_{\{0,x'\}}} \lambda_h^{|\gamma|-2(|x|+2)} = \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n\geq\|x\|} \sum_{\gamma\in\Gamma^n_{\{0,x'\}}} \lambda_h^{|\gamma|-\|x\|} =$$

$$= \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n\geq\|x\|} \left(\lambda_h^{n-\|x\|} |\Gamma^n_{\{0,x'\}}| \right)$$

onde a última desigualdade foi obtida observando que $\lambda_v \leq \lambda_h$. Lembrando que $F(x', n)$ é o número de contornos de tamanho n que cercam 0 e x', i.e.,

$$F(x', n) = |\Gamma^n_{\{0,x'\}}| \tag{3.32}$$

então podemos escrever,

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(0,x') \leq \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n=\|x\|}^{\frac{3\|x\|}{2}} \lambda_h^{n-\|x\|} F(x,n) + \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n>\frac{3\|x\|}{2}} \lambda_h^{n-\|x\|} F(x,n) \tag{3.33}$$

Observe que por simetria $F(x', n) = F(x, n)$. Para cotar o segundo termo de (3.33), que envolve valores grandes de n, usaremos a estimativa bruta para $F(x, n)$ dada pelo item i) do Lema (3.1), a saber, $F(x,n) \leq 4^n$. Logo

$$\lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n>\frac{3\|x\|}{2}} \lambda_h^{n-\|x\|}F(x,n) \leq \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n>\frac{3\|x\|}{2}} \lambda_h^{n-\|x\|}4^n <$$
$$< \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{j>\frac{\|x\|}{2}} \lambda_h^{j}(4^3)^j \tag{3.34}$$

pois $j = n - \|x\|$, logo $n = j + \|x\| < j + 2j = 3j$.

A série em (3.34) converge se $\lambda_h < 4^{-3}$ e nesse caso temos a cota

$$\lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n>\frac{3\|x\|}{2}} \lambda_h^{n-\|x\|}F(x,n) < \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \frac{(4^3\lambda_h)^{\frac{\|x\|}{2}+1}}{1-4^3\lambda_h} \tag{3.35}$$

Já para a cota do primeiro termo de (3.33) que envolve valores de n próximos de $\|x\|$, $\|x\| \leq n \leq \frac{3\|x\|}{2}$, usaremos a estimativa mais fina dada pelo item ii) do Lema (3.1), ou seja

$$F(x,\|x\|+m) \leq 12^m \beta_x \binom{\|x\|}{m} \quad \text{se} \quad m \leq \frac{\|x\|}{2} \tag{3.36}$$

Temos então

$$\lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{n=\|x\|}^{\frac{3\|x\|}{2}} \lambda_h^{n-\|x\|}F(x,n) = \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)} \sum_{m=0}^{\frac{\|x\|}{2}} \lambda_h^{m}F(x,\|x\|+m) \leq$$
$$\leq \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)}\beta_x \sum_{m=0}^{\frac{\|x\|}{2}} \lambda_h^{m}12^m\binom{\|x\|}{m} < \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)}\beta_x \sum_{m=0}^{\|x\|} (12\lambda_h)^m\binom{\|x\|}{m} =$$
$$= \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)}\beta_x(1+12\lambda_h)^{\|x\|} \tag{3.37}$$

Logo, de (3.34) e (3.37) obtemos

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(0,x') < \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)}\left(\frac{(4^3\lambda_h)^{\frac{\|x\|}{2}+1}}{1-4^3\lambda_h} + \beta_x(1+12\lambda_h)^{\|x\|}\right) \tag{3.38}$$

Como a cota acima é uniforme em N, então ela é válida também para $\tau^f_{\mathbf{p}}(0,x')$, ou seja

$$\tau^f_{\mathbf{p}}(0,x') < \lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)}\left(\frac{(4^3\lambda_h)^{\frac{\|x\|}{2}+1}}{1-4^3\lambda_h}+\beta_x(1+12\lambda_h)^{\|x\|}\right) \tag{3.39}$$

Cota inferior:

Fixemos $\gamma \in \Gamma^{\|x\|}_{\{0,x\}}$ um contorno mínimo que cerca 0 e x onde $\gamma \subset E_N$ (podemos supor N suficientemente grande de modo que E_N contenha γ). Temos que γ contém os elos em $Q = \{\{(-1,0),(0,0)\},\{(0,-1),(0,0)\},\{(x_1,x_2),(x_1,x_2+1)\},\{(x_1,x_2),(x_1+1,x_2)\}\}$ e $(\gamma\backslash Q)^*$ é a união de dois caminhos disjuntos no dual, $c_1^*(\gamma)$ ligando $(-1/2,1/2)$ a $(x_1-1/2,x_2+1/2)$ e $c_2^*(\gamma)$ ligando $(1/2,-1/2)$ a $(x_1+1/2,x_2-1/2)$, ambos de tamanho $|x|$, ou seja, são caminhos de tamanho mínimo. Denote por $\sigma_1(\gamma)$ o caminho na rede original de tamanho mínimo ligando 0 a x obtido transladando o caminho $c_1^*(\gamma)$ de $(1/2,-1/2)$, e por σ_2 o caminho de tamanho mínimo ligando 0 a x obtido transladando o caminho $c_2^*(\gamma)$ de $(-1/2,1/2)$. Denote por $t_\gamma \subset I_\gamma$ o conjunto $t_\gamma = \sigma_1(\gamma)\cup\sigma_2(\gamma)$. Observe que

$$|t^h_\gamma| \le 2x_1 < |\gamma^v| \quad e \quad |t^v_\gamma| \le 2x_2 < |\gamma^h| \tag{3.40}$$

Pela definição de contorno temos que o conjunto $E_N\backslash\gamma$ é particionado em dois subconjunto disjuntos, o conjunto E_γ de elos interiores a γ e o conjunto $E_N\backslash(\gamma\cup E_\gamma)$ de elos exteriores a γ, onde $G_\gamma = (I_\gamma, E_\gamma)$ é conexo.

Assim, entre as configurações de elos fechados $C \subset E_N$ tais que $C \odot \{0,x\}$, existem aquelas configurações C onde $C \supset \gamma$ e $C \cap t_\gamma = \emptyset$ (ou seja, os elos de t_γ estão abertos). Denote por C_γ o conjunto de tais configurações, claramente $C_\gamma \neq \emptyset$. Afirmamos que se $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ então $C_{\tilde{\gamma}} \cap C_\gamma = \emptyset$.

De fato, temos que $\tilde{\gamma}^*\backslash(\gamma^*\cup E^*_\gamma) \neq \emptyset$ ou $\gamma^*\backslash(\tilde{\gamma}^*\cup E^*_{\tilde{\gamma}}) \neq \emptyset$. Consideraremos o primeiro caso, o segundo é análogo. Seja $e^* \in \tilde{\gamma}^*\backslash(\gamma^*\cup E^*_\gamma)$, como $Q^* \subset \tilde{\gamma}^*\cap\gamma^*$ então $e^* \in c_1^*(\tilde{\gamma})$ ou $e^* \in c_2^*(\tilde{\gamma})$. Considere $e^* \in c_1^*(\tilde{\gamma})$, o outro caso é análogo. Como $e^* \in \tilde{\gamma}^*\backslash(\gamma^*\cup E^*_\gamma)$, então existe um vértice $v^* \in e^*$ que não pertence a nenhum elo de $\gamma^*\cup E^*_\gamma$, ou seja, v^* está a distância pelo menos 1 de todo vértice pertencente a algum elo de $\gamma^*\cup E^*_\gamma$. Como γ^* é um circuito e E^*_γ é o conjunto de elos interiores a esse circuito, então v^* não pertence a

γ^* nem à região de $\mathbb{R}^2$ interior a γ^*. Considerando então o vértice $v = v^* + (1/2, -1/2)$, temos que v obviamente não pertence a γ^*, ainda, v não pertence à região de $\mathbb{R}^2$ interior a γ^*. Mas como $v^* \in c_1^*(\tilde{\gamma})$, então $v \in \sigma_1(\tilde{\gamma}) = c_1^*(\tilde{\gamma}) + (1/2, -1/2)$.

Logo $\sigma_1(\tilde{\gamma})$ é um caminho (na rede original) ligando 0 e x (que pertence à região de $\mathbb{R}^2$ interior a γ^*) que passa por v. Assim $\sigma_1(\tilde{\gamma})$ deve cruzar γ^*, i.e., $\sigma_1(\tilde{\gamma}) \cap \gamma \neq \emptyset$, o que implica que $t_{\tilde{\gamma}} \cap \gamma \neq \emptyset$.

Resumindo temos que se $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ então $t_{\tilde{\gamma}} \cap \gamma \neq \emptyset$ ou $t_\gamma \cap \tilde{\gamma} \neq \emptyset$. Como em uma configuração de C_γ os elos em γ estão fechados e os elos em t_γ estão abertos, então devemos ter $C_{\tilde{\gamma}} \cap C_\gamma = \emptyset$.

Considere então $C = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|}} C_\gamma$, união disjunta e cada C_γ não vazio. Temos então que

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathbf{p}}^{f,N}(0,x) &\geq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|}} C_\gamma\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\{0,x\}}^{\|x\|}} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(C_\gamma) = \\
&= \beta_x (1-p_h)^{|\gamma^h|}(1-p_v)^{|\gamma^v|} p_h^{|t_\gamma^h|} p_v^{|t_\gamma^v|} = \beta_x \frac{(1-p_h)^{|\gamma^h|}}{p_h^{|\gamma^h|}} \frac{(1-p_v)^{|\gamma^v|}}{p_v^{|\gamma^v|}} p_h^{|\gamma^h|+|t_\gamma^h|} p_v^{|\gamma^v|+|t_\gamma^v|} > \\
&> \beta_x \lambda_h^{|\gamma^h|} \lambda_v^{|\gamma^v|} p_h^{|\gamma^h|+|\gamma^v|} p_v^{|\gamma^h|+|\gamma^v|} = \beta_x \lambda_h^{|\gamma^h|} \lambda_v^{|\gamma^v|} p_h^{|\gamma|} p_v^{|\gamma|} > \beta_x \lambda_h^{|\gamma^h|} \lambda_v^{|\gamma^v|} p_h^{2|\gamma|} = \\
&= \beta_x \lambda_h^{2(x_2+1)} \lambda_v^{2(x_1+1)} p_h^{2\|x\|}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde, na primeira desigualdade usamos (3.40), na segunda desigualdade usamos que $p_v > p_h$ e na última igualdade usamos (3.14).

Observe que a cota acima é uniforme em N, logo podemos escrever

$$\tau_{\mathbf{p}}^{f}(0,x) \geq \beta_x \lambda_h^{2(x_2+1)} \lambda_v^{2(x_1+1)} p_h^{2\|x\|} \tag{3.42}$$

3.5 Prova do Teorema

Faremos aqui a prova do Teorema (3.2) usando os resultados obtidos nas seções anteriores. Consideramos então $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $x' = (x_2, x_1)$, $\rho = \frac{x_2}{x_1} > 1$ e $\eta = \frac{\lambda_v}{\lambda_h}$. Comparando a cota inferior e a cota superior dadas em (3.39) e (3.42) temos que

$\tau^{f}_{\mathbf{p}}(0,x) > \tau^{f}_{\mathbf{p}}(0,x')$ se

$$\lambda_h^{2(x_1+1)}\lambda_v^{2(x_2+1)}\left(\frac{(4^3\lambda_h)^{\frac{\|x\|}{2}+1}}{1-4^3\lambda_h}+\beta_x(1+12\lambda_h)^{\|x\|}\right)<\beta_x\lambda_h^{2(x_2+1)}\lambda_v^{2(x_1+1)}p_h^{2\|x\|} \tag{3.43}$$

que é equivalente a

$$\eta<\left(\frac{\beta_x p_h^{2\|x\|}}{\frac{(4^3\lambda_h)^{\frac{\|x\|}{2}+1}}{1-4^3\lambda_h}+\beta_x(1+12\lambda_h)^{\|x\|}}\right)^{\frac{1}{2(x_2-x_1)}} \tag{3.44}$$

Logo a desigualdade $\tau^{f}_{\mathbf{p}}(0,x) > \tau^{f}_{\mathbf{p}}(0,x')$ é satisfeita para todo η tal que

$$\eta<\tilde{\eta}(p_h,x_1,x_2) \tag{3.45}$$

onde a função $\tilde{\eta}(p_h,x_1,x_2)$ esta definida para $\lambda_h < 4^{-3}$, ou seja, $p_h > (1+4^{-3})^{-1}$, para todo $x_2 > x_1 > 0$ e é dada explicitamente por

$$\tilde{\eta}(p_h,x_1,x_2)=\left(\frac{\beta_x p_h^{4(x_1+x_2+2)}}{\frac{(4^3\lambda_h)^{x_1+x_2+3}}{1-4^3\lambda_h}+\beta_x(1+12\lambda_h)^{2(x_1+x_2+2)}}\right)^{\frac{1}{2(x_2-x_1)}} \tag{3.46}$$

Agora observe que

$$\lim_{p_h\to 1^-}\tilde{\eta}(p_h,x_1,x_2)=\lim_{p_h\to 1^-}\left(\frac{\beta_x^{\frac{1}{x_1}}p_h^{4(1+\rho+\frac{2}{x_1})}}{\frac{(4^3\lambda_h)^{1+\rho+\frac{3}{x_1}}}{(1-4^3\lambda_h)^{\frac{1}{x_1}}}+\beta_x^{\frac{1}{x_1}}(1+12\lambda_h)^{2(1+\rho+\frac{2}{x_1})}}\right)^{\frac{1}{2(\rho-1)}}=1 \tag{3.47}$$

pois $\lambda_h \to 0^+$ quando $p_h \to 1^-$.

Observe também que com a inclinação fixa $\rho > 1$ e usando o Lema (3.2) temos que

$$\lim_{|x|\to\infty}\tilde{\eta}(p_h,x_1,x_2)=\lim_{x_1\to\infty}\left(\frac{\beta_x^{\frac{1}{x_1}}p_h^{4(1+\rho+\frac{2}{x_1})}}{\frac{(4^3\lambda_h)^{1+\rho+\frac{3}{x_1}}}{(1-4^3\lambda_h)^{\frac{1}{x_1}}}+\beta_x^{\frac{1}{x_1}}(1+12\lambda_h)^{2(1+\rho+\frac{2}{x_1})}}\right)^{\frac{1}{2(\rho-1)}}=f(p_h,\rho) \tag{3.48}$$

onde

$$f(p_h, \rho) = \left(\frac{\alpha(\rho) p_h^{4(1+\rho)}}{(4^3\lambda_h)^{1+\rho} + \alpha(\rho)(1 + 12\lambda_h)^{2(1+\rho)}} \right)^{\frac{1}{2(\rho-1)}} \tag{3.49}$$

e $\lim\limits_{p_h \to 1^-} f(p_h, \rho) = 1$.

Assim concluímos a prova do teorema.

Capítulo

4

Apêndice

Faremos aqui a prova da Proposição (2.1). Antes porém vamos escrever a Fórmula de Russo para o modelo de percolação de elos anisotrópico em $\mathbb{S}^k$.

Novamente considere a caixa $B(n) = [-n, n]^2 \times \{0, 1, ..., k\}$, $\partial B(n) = \{x \in B(n) : \exists y \notin B(n)$ tal que $d(x, y) = 1\}$ a fronteira de $B(n)$, $A_n = \{0 \leftrightarrow \partial B(n)\}$ o evento onde 0 está conectado a $\partial B(n)$ e $\theta_n(p_h, p_v) = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(A_n)$

Utilizando a Fórmula de Russo (1.4) podemos escrever,

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial p_h}(p_h, p_v) = \sum_{e \in \mathbb{E}^h \cap B(n)} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(e \text{ é pivotal para } A_n) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial p_v}(p_h, p_v) = \sum_{f \in \mathbb{E}^v \cap B(n)} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f \text{ é pivotal para } A_n) \tag{4.2}$$

Prova da Proposição (2.1)**.** Vamos provar a desigualdade à direita de (2.19) pois para a desigualdade à esquerda a prova é análoga.

Inicialmente, para cada elo horizontal $e \in \mathbb{E}^h$ vamos comparar $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(e \text{ é pivotal para } A_n)$ com $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f \text{ é pivotal para } A_n)$ para o elo vertical $f = f(e) \in \mathbb{E}^v$ definido abaixo.

A cada elo horizontal $e = \langle x, x + u_i\rangle$, $i = 1, 2$, onde o vértice x não pertence ao topo da laje, associamos o elo vertical $f = f(e) = \langle x, x + u_3\rangle$. Se x pertence ao topo da laje, associamos ao elo e o elo $f = f(e) = \langle x, x - u_3\rangle$, onde u_1, u_2 e u_3 são vetores unitários nas direções dos eixos x, y e z respectivamente.

Se mostrarmos que existe uma função $\beta_0(p_h, p_v) : (0, 1)^2 \longrightarrow (0, \infty)$ contínua tal que para todo n suficientemente grande vale

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(e \text{ é pivotal para } A_n) \leq \beta_0(p_h, p_v)\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f(e) \text{ é pivotal para } A_n) \tag{4.3}$$

para todo elo horizontal e em $B(n)$, então somando sobre os elos horizontais em $B(n)$ e usando a equação (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_n}{\partial p_h}(p_h, p_v) \leq \beta_0(p_h, p_v) \sum_{e\in\mathbb{E}^h\cap B(n)} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f(e) \text{ é pivotal para } A_n) \leq \\
&\leq 4\beta_0(p_h, p_v) \sum_{f\in\mathbb{E}^v\cap B(n)} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f \text{ é pivotal para} A_n) = \\
&= 4\beta_0(p_h, p_v)\frac{\partial\theta_n}{\partial p_v}(p_h, p_v)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde o fator 4 vem do fato que a cada elo vertical $f \in \mathbb{E}^v$ existem no máximo 4 elos horizontais e tais que $f(e) = f$. Tomando $\beta(p_h, p_v) = (4\beta_0(p_h, p_v))^{-1}$ obtemos a desigualdade à direita de (2.19).

Resta mostrar então a equação (4.3). Faremos a prova supondo $k \geq 2$, para $k = 1$ a prova é similar. A ideia é mostrar que se e é pivotal para A_n na configuração ω então fazendo alterações locais em ω nós criamos uma nova configuração onde $f(e)$ é pivotal para A_n. O fator β_0 reflete o preço a pagar para fazer tais alterações.

Seja então $e = \langle x, x + u_1\rangle$, um argumento similar vale para elos da forma $\langle x, x + u_2\rangle$. Considere a caixa $B_e = x + B(2)$ centrada em x, e seja E_e o conjunto dos elos que possuem pelo menos um vértice em B_e. Temos os seguintes casos a considerar:

- $0 \notin B_e$ e $B_e \cap \partial B(n) = \emptyset$

- $0 \in B_e$

- $B_e \cap \partial B(n) \neq \emptyset$

Vamos considerar o primeiro caso. Seja ω uma configuração onde e é pivotal para A_n. Se e está aberto então todos os caminhos ligando 0 a $\partial_L B(n)$ passam através de e. Então existe pelo menos um caminho $\pi = x_0, g_0, x_1, g_1, ..., x_{k-1}, g_{k-1}, x_k$ passando por e onde $x_0 = 0$ e $x_k \in \partial_L B(n)$. Caso haja mais de um caminho escolhemos um qualquer. Sejam

$$r = \min\{i : x_{i+1} \in \partial B_e\}, \quad s = \max\{i : x_i \in \partial B_e\} \tag{4.5}$$

Então os elos g_r e g_s satisfazem:

i) $x_{r+1}, x_s \in \partial B_e$; $x_r, x_{s+1} \notin B_e$, g_r e g_s estão abertos (na configuração ω).

ii) Na configuração obtida de ω declarando todos os elos em $E_e \backslash \{g_r, g_s\}$ como fechados, obtemos que $0 \leftrightarrow x_{r+1}$ e $x_s \leftrightarrow \partial_L B(n)$.

Construímos então uma configuração ω' onde

iii) ω' coincide com ω fora de $E_e \backslash \{g_r, g_s\}$.

iv) $\omega' \in \{f(e)$ é pivotal para $A_n\}$.

Uma maneira de se construir ω' é a seguinte: existe uma face lateral de ∂B_e que não contém os vértices x_{r+1} e x_s. Projete nessa face o elo $\langle x, x + u_3 \rangle$, obtendo assim o elo $\langle y, y + u_3 \rangle$. Denote por π_1 o caminho mais curto (que necessariamente só possui 2 elos e 3 vértices) ligando x a y. Analogamente denote por π_2 o caminho mais curto ligando $x + u_3$ a $y + u_3$. Obtemos assim 4 vértices x_{r+1}, x_s, y e $y + u_3$ pertencentes a $\partial B_e = x + B(2)$. Construímos então dois caminhos disjuntos π_3 e π_4 em ∂B_e onde π_3 liga x_{r+1} a y e π_4

liga $y + u_3$ a x_s. Definimos então ω' como

$$\omega'(g) = \begin{cases} \omega(g) & \text{se} \quad g \notin E_e \backslash \{g_r, g_s\}, \\ 1 & \text{se} \quad g \in \pi_j \text{ para algum } j = 1, 2, 3, 4, \\ 1 & \text{se} \quad g = f(e), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Observamos que ω' depende de e e ω. Nos caso em que $0 \in B_e$ ou $B_e \cap \partial B(n) \neq \emptyset$ podemos também encontrar ω' satisfazendo iii) e iv), mas nesses caso a construção geométrica é um pouco diferente. Concluímos então que para cada elo horizontal e e $\omega \in \{e$ é pivotal para $A_n\}$ existe ω' satisfazendo iii) e iv). Segue então de iii) que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega') = \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega) \left(\frac{p}{1-p}\right)^a \left(\frac{1-p}{p}\right)^b \left(\frac{q}{1-q}\right)^c \left(\frac{1-q}{q}\right)^d$$

onde a (resp. b) é o número de elos horizontais que a foram abertos (resp. fechados) na construção de ω'; c (resp. d) é o número de elos verticais que a foram abertos (resp. fechados) na construção de ω'. Temos que a, b, c e d dependem de ω mas como as alterações são feitas somente em E_e então a soma desses valores é no máximo $|E_e|$. Tomando $\gamma = \gamma(p, q) = \min\{p, 1-p, q, 1-q\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega') &\geq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega)(p)^a(1-p)^b(q)^c(1-q)^d \\ &\geq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega)(\gamma)^{a+b+c+d} \\ &\geq \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega)\gamma^{|E_e|}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dado $e \in \mathbb{E}_n^h$, denote por $A_e = \{e$ é pivotal para $A_n\}$ e $A_{f(e)} = \{f(e)$ é pivotal para $A_n\}$. Por iv), se $\omega \in A_e$ então $\omega' \in A_{f(e)}$. Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{p}}(e \text{ é pivotal para } A_n) &= \sum_{\omega\in A_e} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega) \leq \sum_{\omega\in A_e} \frac{1}{\gamma^{|E_e|}} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega') \\ \leq \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{|E_e|} \sum_{\omega'\in A_{f(e)}} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(\omega') &= \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{|E_e|} \mathbb{P}_{\mathbf{p}}(f(e) \text{ é pivotal para } A_n) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tomando então $\beta_0(p,q) = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{|E_e|}$ obtemos a equação (4.3). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. Aizenman and G.R. Grimmett, *Strict monotonicity for critical points in percolation and ferromagnetic models*, Jornal of Statistical Physics **63** (1991), 817–835.

[2] R.G. Alves, A. Procacci, B., and R.Sanchis, *Percolation on infinite graphs and isoperimetric inequalities*, Journal of Statistical Physics **149** (2012), no. 5, 831–845.

[3] E. D. Andjel, *Private communication*, (1997).

[4] E. D. Andjel and M. Sued, *An inequality for oriented 2-d percolation*, Progress in Probability **60** (2008), 21–30.

[5] D. Arovas, R.N. Bhatt, and B. Shapiro, *Anisotropic bond percolation in two dimension*, Phys.Rev. B **28** (1983), 1433–1437.

[6] B. Bollobás and O. Riordan, *Percolation*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[7] S.R. Broadbent and J.M. Hammersley, *Percolation processes I. Crystals and mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **53** (1957), 629–641.

[8] C.M. Chaves, P.M. Oliveira, and S.L.A. de Queiroz, *Remarks on the percolation problem in anisotropic systems*, Prog. Theor. Phys. **62** (1979), 1550–1555.

[9] L. Chayes and R.H. Schonmann, *Mixed percolation as a bridge between site an bond percolation*, The Ann. of Appl. Probab. **10** (2000), no. 4, 1182–1196.

[10] R.G. Couto, B.N.B. de Lima, and R. Sanchis, *Anisotropic percolation on slabs*, To appear in Markov Processes and Related Fields.

[11] ———, *Truncated connectivities in a highly supercritical anisotropic percolation model*, Submetido para publicação.

[12] H. Duminil-Copin, A.C.D. van Enter, and A. Fey, *Sharp metastability threshold for an anisotropic bootstrap percolation model*, Ann. Probab. (2010 aceito para publicação), arXiv:1010.4691.

[13] A.C.D. van Enter and A. Fey, *Metastability thresholds for anisotropic bootstrap percolation in three dimensions*, J. Stat. Phys. **147** (2012), 97–112.

[14] S. Friedli and B.N.B. de Lima, *On the truncation systems with non-summable interactions*, Journal of Statistical Physics **122** (2006), no. 6, 1215–1236.

[15] G.R. Grimmett, *Percolation, 2nd ed*, Springer Verlag, New York, 1999.

[16] G.R. Grimmett and I. Manolescu, *Inhomogeneous bond percolation on the square, triangular, and hexagonal lattices*, (2011 submetido), arXiv:1105.5535.

[17] ______, *Universality for bond percolation in two dimensions*, (2011 submetido), arXiv:1108.2784.

[18] E. Guyon, J.P. Clerc, G. Giraud, and J. Roussenq, *A network simulation of anisotropic percolation*, J. Physique **42** (1981), 1553–1557.

[19] H. Ikeda, *Percolation in anisotropic systems*, Prog. Theor. Phys. **61** (1979), 842–849.

[20] H. Kesten, *Unpublished*, (1980).

[21] ______, *Percolation theory for mathematicians*, Bikhäuser, Boston, 1982.

[22] ______, *Recent results in rigorous percolation theory*, Astérisque (1988), 157–158, 217–231.

[23] T.M. Liggett, R.H. Schonmann, and A.M. Stacey, *Domination by product measures*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 1, 71–95.

[24] B.N.B. de Lima and A. Procacci, *A note on anisotropic percolation*, Letters in Mathematical Physics **70** (2004), no. 3, 223–229.

[25] B.N.B. de Lima, R. Sanchis, and R.W.C. Silva, *Critical point and percolation probability in a long range site percolation model on* $\mathbb{Z}^d$, Stochastic Processes and their Applications **121** (2011), 2043–2048.

[26] A.C.N. de Magalhães, C. Tsallis, and G. Schwachheim, *Anisotropic bond percolation by position-space renormalisation group*, J. Phys. C: Solid State Phys. **14** (1981), 1393–1408.

[27] H. Nakanishi, P.J. Reynolds, and S. Redner, *Anisotropic bond percolation by position-space renormalisation group*, J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981), 855–871.

[28] A. Procacci, B. Scoppola, G.A. Braga, and R.Sanchis, *Percolation connectivity in the highly supercritical regime*, Markov Processes and Related Fields **10** (2004), 607–628.

[29] S. Redner and H.E. Stanley, *Anisotropic bond percolation*, J. Phys. A: Math. Gen. **12** (1979), 1267–1283.

[30] B. Simon, *The statistical mechanics of the lattice gases*, vol. I, Princeton University Press, 1993.

[31] M.F. Sykes and J.W. Essam, *Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions*, J. Math. Phys. **5** (1964), 1117–1127.

[32] M. Takei, *A note on anisotropic first-passage percolation*, J. Math. Kyoto Univ. **46** (2006), no. 4, 903–912.

[33] L. Turban, *Anisotropic percolation on the bethe lattice*, J. Phys. C: Solid State Phys. **12** (1979), 1479–1490.