Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Thiago Linhares Brant Reis

ESTUDO DA PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PEDAGÓGICAS, MATERIAL DIDÁTICO E EXERCÍCIOS COMENTADOS.

Belo Horizonte
2011

Thiago Linhares Brant Reis

**ESTUDO DA PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO:
COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PEDAGÓGICAS, MATERIAL DIDÁTICO
E EXERCÍCIOS COMENTADOS.**

Trabalho apresentado ao Curso de Especialização do Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção do grau de Especialista em Estatística.

Aluno: Thiago Linhares Brant Reis

Orientadora: Prof.ª Edna Afonso Reis

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela companhia, coragem, força, amor e lealdade em cada um dos instantes da minha vida.

À minha amada esposa Fabiana, pela paciência, compreensão, apoio, incentivo, persistência e amor constante.

À minha amada mãe Ana Lúcia, pela vida, eterno amor, educação, apoio, cumplicidade, incentivo constante, dedicação aos filhos e à família.

Aos meus amados irmãos Bruno e Pedro e à minha amada irmã Juliana pela eterna amizade, cumplicidade e amor.

Aos meus amores que já não estão mais aqui, pelas eternas lições de vida.

Aos amigos e colegas pelas parcerias e momentos de descontração.

Aos professores e educadores que passaram por mim, ao longo de todos esses anos, me informando e me formando, para que eu pudesse me tornar uma pessoa melhor.

“Se viver um dia de cada vez, viverá todos os dias de suas vidas.
A vida não é uma corrida, mas sim uma viagem que deve ser desfrutada a cada passo.
Não desista enquanto ainda é capaz de um esforço a mais.
Nada termina até o momento em que se deixa de tentar.
E lembre-se:
Ontem é história!
Amanhã é mistério!
Hoje é uma dádiva. Por isso se chama "PRESENTE".”

BRIAN DYSON (ex-presidente da Coca-Cola)

ESTUDO DA PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PEDAGÓGICAS, MATERIAL DIDÁTICO E EXERCÍCIOS COMENTADOS.

Thiago Linhares Brant Reis

Profª.Edna Afonso Reis

Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais

Novembro, 2011

Resumo

A Probabilidade, tão útil desde a sua criação, é uma das ferramentas mais importantes e desafiadoras da Matemática, e por isso, é considerada tão nobre.

Este trabalho tem como objetivo apresentar os principais conceitos da Probabilidade voltada para o ensino médio, a fim de auxiliar o aluno no estudo para o vestibular; analisar livros didáticos; observar problemas no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo; propor sugestões para obter melhores resultados neste processo; analisar as competências e habilidades descritas nos PCN's, ENEM, LDB e outros referenciais teóricos.

Este trabalho possui também um rico material didático, com um vasto banco de questões já resolvidas de vestibulares da UFMG, do ENEM, e de outras instituições de ensino, proporcionando assim, maior interação entre o aluno e o conteúdo.

Dificilmente, uma boa prova de concurso deixa de lado uma questão de Probabilidade, o que justifica ainda mais a importância do seu estudo.

Palavras-chave: Matemática, Probabilidade, competências e habilidades, PCN's, LDB, vestibular, UFMG, ENEM.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO………………………………………………..……………... 8

1.1 A Importância do Ensino da Probabilidade... 8
1.2 Objetivos... 9
1.3 Metodologia.. 9

CAPÍTULO 2: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PEDAGÓGICAS............................ 11

2.1 Recomendações do Ministério da Educação- MEC.. 11
2.2 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB... 11
2.3 O Programa Curricular Nacional do Ensino Médio para o Estudo da Matemática – PCN... 14
2.3.1 Competências e habilidades a serem desenvolvidas através do ensino da Matemática de acordo com os PCN's.. 20
2.3.2 Rumos e desafios de acordo com os PCN's.. 21
2.4 Dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem da 27
2.5 Sugestões para melhoria da aprendizagem da Probabilidade.................................. 28
2.5.1 Introdução à Probabilidade... 29
2.5.2 Experimento determinístico e experimento aleatório... 29
2.5.3 Espaço amostral e eventos... 30
2.5.4 Equiprobabilidade.. 30
2.5.5 Estatística e Probabilidade... 31
2.6 Enquete.. 31

CAPÍTULO 3: MATERIAL DE PROBABILIDADE ELABORADO A PARTIR DA ANÁLISE REALIZADA NOS LIVROS DIDÁTICOS E RECOMENDAÇÕES DOS PCN'S........ 36

3.1 Um pouco de história........ 36
3.2 Considerações Iniciais........ 37
3.3 Experimento Aleatório........ 38
3.4 Experimento Determinístico........ 38
3.5 Experimentos Equiprováveis........ 38
3.6 Espaço Amostral........ 38
3.7 Eventos de um espaço amostral........ 39
3.7.1 Tipos de eventos probabilísticos........ 39
3.8 Probabilidade........ 42
3.8.1 Propriedades........ 42
3.9 Probabilidade condicional........ 45
3.10 Lista de Exercícios Resolvidos........ 47
3.11 Exercícios resolvidos - UFMG 2ª Etapa........ 76
3.12 Exercícios resolvidos – ENEM........ 81

CAPÍTULO 4: CONSIDERAÇÕES FINAIS........ 85

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS........ 87

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

> *"A Educação é um processo que atua na formação do homem, que está presente em todas as sociedades humanas e é inerente ao homem como ser social e histórico. Sua existência está fundamentada na necessidade de formar as gerações mais novas, transmitindo-lhes seus conhecimentos, valores e crenças dando-lhes possibilidades para novas realizações. O próprio conceito de Educação está sujeito a um evoluir histórico, conforme o modo de existir e de pensar das diferentes épocas* (GONÇALVES, 1997)."

1.1 A importância do ensino da Probabilidade

De acordo com Lopes (2005), o estudo matemático é muito importante, pois desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar e prever resultados de eventos aleatórios e equiprováveis.

Segundo os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais), a probabilidade desenvolve no estudante formas particulares de pensamentos, raciocínios e atitudes que possibilitam o posicionamento crítico, realizar previsões e assim, tomar decisões.

Segundo os estudos realizados por Lopes (2005) sobre os PCN's, a probabilidade é extremamente útil na sociedade atual, devido à necessidade que há nos indivíduos de compreenderem as informações veiculadas e fazerem previsões que influenciam suas vidas pessoais e profissionais.

Devido à grande dificuldade apresentada por muitos professores entrevistados em resolver certos problemas probabilísticos e ensinar a resolvê-los aos alunos do ensino médio, escolheu-se este conteúdo para ser estudado.

Costa (2005) pesquisou sobre a probabilidade no ensino médio e ressaltou que o ensino da probabilidade no ensino médio pode se constituir em um poderoso instrumento social, na medida em que permite ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscienciosamente sua cidadania.

Em função da importância desse conteúdo, será apresentado, nesta monografia, sugestões para se trabalhar este conteúdo de maneira que ele esteja mais ligado com o cotidiano do aluno, sem desconsiderar a importância teórica do assunto. O estudo deste conteúdo deverá ser realizado por meio de uma abordagem histórica, conceitos, exemplos práticos, pesquisas e questões discursivas, que permitam ao aluno argumentar e refletir de forma crítica sobre o que ele está aprendendo.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo observar problemas no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo; propor sugestões para obter melhores resultados neste processo; analisar as competências e habilidades descritas nos PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais, LDB – Lei das Diretrizes e Bases, e outros referenciais teóricos; verificar se a Probabilidade é realmente o assunto mais desafiador numa prova de Matemática; proporcionar ao aluno um material didático composto por uma abordagem histórica, conceitos, exemplos e uma vasta lista de exercícios resolvidos, com diversos níveis de dificuldade, a fim de facilitar o estudo e a compreensão deste nobre conteúdo.

1.3 Metodologia

A metodologia adotada para a realização desta monografia pode ser descrita da seguinte forma: pesquisa sobre o tema nos PCN's - Parâmetros Curriculares Nacionais, LDB – Lei das Diretrizes e Bases, livros e sites, elaboração de um material didático e enquete.

A enquete foi realizada com o objetivo de verificar entre professores e alunos se a Probabilidade é realmente o assunto mais desafiador da Matemática. Foi criada uma pergunta e um público alvo.

O resultado dessa enquete, assim como os gráficos gerados, encontram-se na seção 2.7.

A metodologia utilizada para a realização deste trabalho foi baseada no roteiro de trabalho acadêmico da Universidade Federal de Minas Gerais com a orientação da Professora Edna Afonso Reis do Departamento de Estatística da UFMG.

CAPÍTULO 2: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PEDAGÓGICAS

"... a educação tem como objetivo imediato o desenvolvimento da capacidade de pensar, não apenas de ministrar conhecimentos"

SÓCRATES ('470-399 a . c.).

2.1 Recomendações do Ministério da Educação- MEC

No PCN de matemática para o Ensino Médio, há uma divisão em três blocos: Álgebra - Números e Funções, Geometria e Medidas e Análise de dados (inclui Contagem, Probabilidade e Estatística).

O estudo da Análise de dados fica mais aprofundado e o estudante deverá, além de dominar os tópicos, interpretá-los criticamente e tomar algumas decisões. Além disso, na faixa etária de 15 a 17 anos, espera-se que o aluno abstraia, contextualize, compreenda as informações provenientes da mídia, com suas tabelas e gráficos e reflita criticamente sobre seus significados.

Como conteúdo escolar, deve-se aproximar do conteúdo a realidade do estudante, a fim de deixá-lo mais interessado e motivado para o estudo.

2.2 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB

Em 1996, a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação, propôs a reforma do ensino no País. A elaboração deste trabalho segue as orientações e tendências existentes na Lei nº 9.3945, na Seção IV que trata do Ensino Médio, através da RESOLUÇÃO CEB Nº 36, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que foi homologada em 25 de junho de 1998.

A organização dos currículos do Ensino Médio segue uma base nacional comum, que distribui o conhecimento em três áreas da seguinte maneira: Ciências da Natureza e Matemática (Biologia, Física, Química e Matemática), Linguagens e Códigos, e Ciências Humana, onde o Artigo 10 da Lei 9.394, trata das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, e os objetivos, entre outros desta categoria, estão destinados ao desenvolvimento de habilidades e competências que permitam ao educando:

• Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos ou experimentos científicos e tecnológicos;

• Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades;

• Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações, interpolações e interpretações;

• Analisar qualitativamente dados quantitativos representados graficamente ou algebricamente relacionados a contextos socioeconômicos, científicos ou cotidianos;

• Entender a importância das tecnologias contemporâneas de comunicação e informação para o planejamento, gestão, organização e fortalecimento do trabalho de equipe. (BRASIL, 1998, p. 46-55)

Segundo a LDB, os conteúdos do bloco Análise de dados e Probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das idéias de incerteza e de Probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos a ampliação e formalização de seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.

Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de bolas de determinada cor em uma caixa.

Os alunos devem fazer uma análise crítica na discussão de resultados de investigações estatísticas ou na avaliação de argumentos probabilísticos que se dizem baseados em alguma informação. A construção de argumentos racionais baseadas em informações e observações, veiculando resultados convincentes, exige o apropriado uso de terminologia estatística e probabilística. É também com a aquisição de conhecimento em estatística que os alunos se capacitam para questionar a validade das interpretações de dados e das representações gráficas, veiculadas em diferentes mídias, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra.

O estudo da Combinatória e da Probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A Combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as idéias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias.

A utilização do diagrama de árvores é importante para visualizar melhor a conexão entre os experimentos compostos e a Combinatória.

Ao estudar Probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras idéias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. Quando se trata de Probabilidade, a única certeza é a de que esta varia de 0 a 1.

Nas situações problema e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrever os eventos, a levantar hipóteses, a observar as frequências dos eventos, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um determinado evento.

2.3 O Programa Curricular Nacional do Ensino Médio para o Estudo da Matemática – PCN

Com a sociedade da informação crescentemente globalizada, é necessário que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos, valores, e de trabalhar cooperativamente.

Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em constante mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Com o seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e amadurecimento para analisar e enfrentar novas situações, proporcionando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza, da harmonia e da coerência, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Quanto ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

Com isso, é necessário que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias, que permite modelar a realidade e interpretá-la.

Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações.

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a idéia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. Sem dúvida, cabe a todas as áreas do Ensino Médio auxiliar no desenvolvimento da autonomia e da capacidade de pesquisa, para que cada aluno possa confiar em seu próprio conhecimento.

É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. A Matemática ajuda a entender a tecnologia e a tecnologia, muitas vezes, justifica o ensino da Matemática.

O trabalho recebe então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, se complementarão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos.

Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.

Assim, as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

Feitas as considerações sobre a importância da Matemática no Ensino Médio, devemos agora estabelecer os objetivos para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos.

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como levar o aluno a:

• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

• expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

• estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados.

De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras.

Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. Também por isso, o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados.

Sem dúvida, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento das atitudes e habilidades descritas anteriormente.

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Matemática na resolução de problemas.

O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.

Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de Probabilidade e Combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas.

Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de Contagem, Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.

Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes são fundamentais para que o aluno aprenda a aprender.

Omitir ou descuidar do trabalho com esse aspecto da formação pode impedir a aprendizagem inclusive da própria Matemática. Dentre esses valores e atitudes, podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas idéias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender a se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e assim, possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.

2.3.1 Competências e habilidades a serem desenvolvidas através do ensino da Matemática de acordo com os PCN's

• Ler e interpretar textos de Matemática.

• Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).

• Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

• Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

• Produzir textos matemáticos adequados.

• Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. Investigação e compreensão.

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

• Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

2.3.2 Rumos e desafios de acordo com os PCN's

A educação em geral e o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e das Tecnologias não se estabelecem como imediata realização de definições legais ou como simples expressão de convicções teóricas. Mais do que isso, refletem também as condições políticas, sociais e econômicas de cada período e região, assim como são diretamente relevantes para o desenvolvimento cultural e produtivo.

As idéias dominantes ou hegemônicas em cada época sobre a educação e a ciência, seja entre os teóricos da educação, seja entre as instâncias de decisão política, raramente coincidem com a educação efetivamente praticada no sistema escolar, que reflete uma situação real nem sempre considerada, onde as condições escolares são muito distintas das idealizadas. Por isso, na elaboração de propostas educacionais, além de se considerarem as variáveis regionais, de sentido cultural e sócio-econômico, tão significativas em um país de dimensões e de contrastes sociais como o Brasil, é preciso ter clareza de que as propostas, oficiais ou não, na melhor da hipóteses são o início de um processo de transformação, de reacomodação e de readequação. Os rumos desse processo dependem não só do mérito da proposta, que condicionará as reações a ela, mas também da história pregressa e dos meios empregados.

Quando foi promulgada a LDB 4024/61, o cenário escolar era dominado pelo ensino tradicional, ainda que esforços de renovação estivessem em processo. As propostas para o ensino de ciências debatidas para a confecção daquela lei orientavam-se pela necessidade de o currículo responder ao avanço do conhecimento científico e às novas concepções educacionais, deslocando o eixo da questão pedagógica, dos aspectos puramente lógicos para aspectos psicológicos, valorizando a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

A criação e expansão de centros de Ciências e de Matemática, em vários Estados, teve a finalidade de preparar professores para o desenvolvimento de ensino proposto nos projetos traduzidos e em produções próprias que tiveram grande influência na década seguinte. Nesta década de 70, já se propunha uma democratização do conhecimento científico, reconhecendo-se a importância da vivência científica não apenas para eventuais futuros cientistas, mas também para o cidadão comum, paralelamente a um crescimento da parcela da população atendida pela rede escolar. Esse crescimento, especialmente no tocante ao Ensino Médio, não foi acompanhado pela necessária formação docente, resultando assim em acentuada carência de professores qualificados, carência que só tem se agravado até a atualidade.

Mesmo sem pretender subestimar a importância das discussões ocorridas naquele período para a mudança de mentalidade do professor, que começa a assimilar, mesmo que num plano teórico, novos objetivos para o ensino, é preciso saber que a aplicação efetiva dos projetos em sala de aula acabou se dando apenas em alguns estabelecimentos de ensino de grandes centros.

Nessa época, o modelo de industrialização acelerada impôs, em todo o mundo, custos sociais e ambientais altos, de forma que, particularmente no Ensino Fundamental, os problemas relativos ao meio ambiente e à saúde humana começaram a estar presentes em currículos de ciências. Discutiam-se implicações políticas e sociais da produção e aplicação dos conhecimentos científicos e tecnológicos, com algum reflexo nas salas de aula. Foi nesse momento que se inaugurou a idéia de que tecnologia é integrante efetiva dos conteúdos educacionais, lado a lado com as ciências. Não se deve confundir essa idéia, contudo, com a real ou pretensa introdução, em todo o Ensino Médio, de disciplinas técnicas separadas das disciplinas científicas, como preconizado pela já mencionada Lei 5692/71, cuja perspectiva era a de formar profissionais de nível médio, e que teve resultados frustrantes.

No âmbito da pedagogia geral, naquele período, aprofundaram-se discussões sobre as relações entre educação e sociedade, determinantes para o surgimento de tendências cujo traço comum era atribuir particular importância a conteúdos socialmente relevantes e aos processos de discussão em grupo.

Nessa mesma época, estabeleceu-se um núcleo conceitual teórico de diferentes correntes denominadas construtivistas, cujo pressuposto básico é tomar a aprendizagem como resultado da construção do conhecimento pelo aluno, processo em que se respeitam as idéias dos alunos prévias ao processo de aprendizagem.

A proposta de condução do aprendizado tem sido aperfeiçoada no sentido de se levar em conta que a construção de conhecimento científico envolve valores humanos, relaciona-se com a tecnologia e, mais em geral, com toda a vida em sociedade, de se enfatizar a organicidade conceitual das teorias científicas, de se explicitar a função essencial do diálogo e da interação social na produção coletiva. Tais redirecionamentos têm sido relevantes para a educação científica e Matemática e, certamente, suas idéias influenciam o presente esforço de revisão de conteúdos e métodos para a educação científica. Será preciso, além disso, procurar suprir a carência de propostas interdisciplinares para o aprendizado, que tem contribuído para uma educação científica excessivamente compartimentada, especialmente no Ensino Médio, fazendo uso, por exemplo, de instrumentos com natural interdisciplinaridade, como os modelos moleculares, os conceitos evolutivos e as leis de conservação.

No plano das leis e das diretrizes, a definição para o Ensino Médio estabelecida na LDB/96, assim como seu detalhamento e encaminhamento pela Resolução CNE/98, apontam para uma revisão e uma atualização na direção correta. Vários dos artigos daquela Resolução são dedicados a orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando uma maior relação entre teoria e prática no próprio processo de aprendizado.

No Ensino Médio, a familiarização com as modernas técnicas de edição, de uso democratizado pelos computadores pessoais, é só um exemplo das vivências reais que é preciso garantir, ultrapassando-se assim o “discurso sobre as tecnologias” de utilidade questionável. É preciso identificar na Matemática, nas Ciências Naturais, Ciências Humanas, Comunicações e nas Artes, os elementos de tecnologia que lhes são essenciais e desenvolvê-los como conteúdos vivos, como objetivos da educação e, ao mesmo tempo, como meios para tanto.

O desenvolvimento de projetos, conduzidos por grupos de alunos com a supervisão de professores, pode dar oportunidade de utilização dessas e de outras tecnologias, especialmente no Ensino Médio. Isso, é claro, não ocorre espontaneamente, mas sim como uma das iniciativas integrantes do projeto pedagógico de cada unidade escolar, projeto que pode mesmo ser estimulado pelas redes educacionais. Para a elaboração de tal projeto, pode-se conceber, com vantagem, uma nucleação prévia de disciplinas de uma área, como a Matemática e Ciências da Natureza, articulando-se em seguida com as demais áreas.

Modificações como essas, no aprendizado, vão demandar e induzir novos conceitos de avaliação. Isso tem aspectos específicos para a área de Ciência e Tecnologia, mas tem validade mais ampla, para todas as áreas e disciplinas. Há aspectos bastante particulares da avaliação que deverão ser tratados em cada disciplina, no contexto de suas didáticas específicas, mas há aspectos gerais que podem ser desde já enunciados. Como parte do processo de aprendizado, precisa incluir registros e comentários da produção coletiva e individual do conhecimento e, por isso mesmo, não deve ser um procedimento aplicado nos alunos, mas um processo que conte com a participação deles. É pobre a avaliação que se constitua em cobrança da repetição do que foi ensinado, pois deveria apresentar situações em que os alunos utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram.

O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico. É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões. Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as Ciências e a Matemática, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de idéias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes.

Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

O aprendizado que tem seu ponto de partida no universo vivencial comum entre os alunos e os professores, desenvolve com vantagem o aprendizado significativo, criando condições para um diálogo efetivo, de caráter interdisciplinar, em oposição ao discurso abstrato do saber. Além disso, aproxima a escola do mundo real, entrando em contato com a realidade natural, social, cultural e produtiva, em visitas de campo, entrevistas, visitas industriais, excursões ambientais. Tal sistema de aprendizado também atribui sentido imediato ao conhecimento, fundamentando sua ampliação de caráter abstrato.

Para o aprendizado científico, matemático e tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, observação ou manipulação de situações e equipamentos do cotidiano do aluno e até mesmo laboratorial, propriamente dita, permite ao aluno a percepção de dados significativos, com as quais possa verificar ou propor hipóteses explicativas e, preferencialmente, fazer previsões sobre outras experiências que poderão ainda ser realizadas.

Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a idéia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante. Não precisa ser assim. A aula expositiva é só um dos muitos meios e deve ser o momento do diálogo, do exercício da criatividade e do trabalho coletivo de elaboração do conhecimento.

Através dessa técnica podemos, por exemplo, fornecer informações preparatórias para um debate, jogo ou outra atividade em classe, análise e interpretação dos dados coletados nos estudo do meio e laboratório.

Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática.

Os projetos coletivos são particularmente apropriados para esse propósito educacional, envolvendo turmas de alunos em projetos de produção e de difusão do conhecimento, em torno de temas amplos, como edificações e habitação ou veículos e transporte, ou ambiente, saneamento e poluição, ou ainda produção, distribuição e uso social da energia, temas geralmente interdisciplinares.

A compreensão da relação entre o aprendizado científico, matemático e das tecnologias e as questões de alcance social são a um só tempo meio para o ensino e objetivo da educação. Isso pode ser desenvolvido em atividades como os projetos acima sugeridos, ou se analisando historicamente o processo de desenvolvimento das Ciências e da Matemática. Nessa medida, a história das Ciências é um importante recurso. A importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos.

Cada um dos elementos pedagógicos da seqüência acima, que sequer tem a pretensão de ser completa, pode ser visto como meio e fim, como processo e produto da educação, devendo ser promovido, portanto, com o cuidado de se estar lidando com algo necessário, não como eventual expediente de que se lança mão, na falta de outro.

2.4 Dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem da Probabilidade

> *"O desenvolvimento de uma consciência crítica que permite ao homem transformar a realidade se faz cada vez mais urgente. Na medida em que os homens, dentro de sua sociedade, vão respondendo aos desafios do mundo, vão temporalizando os espaços geográficos e vão fazendo história pela sua própria atividade criadora" (FREIRE, 2003, p. 33).*

O grande desafio para o profissional do ensino atualmente é buscar a motivação, despertar o interesse do aluno com situações problema que envolva, pelo menos na apresentação do conteúdo, a realidade do meio em que o aluno vive.

Entre as dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem da Probabilidade, de acordo com os professores e alunos entrevistados, destacam-se:

• Formação insuficiente do professor, por falta de aprofundamento no conteúdo, o que faz com que este seja o mais desafiador para os professores entrevistados;

• Alguns problemas são tão complexos que geram dupla interpretação, e o pior, muitas vezes, ambas parecem estar coerentes. Com a prática constante, essa situação tende a diminuir;

• Trabalhar esse conteúdo, sem antes estudar a resolução de problemas envolvendo o Diagrama de Venn, Estatística e Análise Combinatória, além de limitar os modelos de exercícios que podem ser desenvolvidos, aumenta o grau de dificuldade do aprendizado e do ensino da Probabilidade.

2.5 Sugestões para melhoria da aprendizagem da Probabilidade

Segundo os PCN's, espera-se que o aluno nesta fase de escolaridade (ensino médio) ultrapasse a leitura de informações e reflita mais criticamente sobre seu significado. O foco principal será voltado para a necessidade de estudar este conteúdo de maneira reflexiva, ou seja, de que o aluno não resolva as questões de maneira mecânica, mas sim que ele analise suas respostas, reflita sobre o assunto e também perceba o elo que existe entre o conteúdo em estudo e o cotidiano.

Segundo Carmo, a ideia que em geral se tem é que para estudar Matemática não se precisa escrever e muito menos ler. Porém se estudar um pouco a história da Matemática, observa-se que muitos dos bons matemáticos eram também filósofos, e que, portanto, tinham boa intimidade com a leitura e com a escrita.

Assim, proponho a inclusão de questões discursivas, ou seja, questões que permitam que o estudante de matemática tenha mais intimidade com a escrita, e por consequência com a leitura. Não penso que seja interessante retirar as questões tradicionais abordadas pela maioria dos livros do ensino médio, mas acrescentar, uma vez que estas questões têm o seu valor, tanto histórico quanto atual e são boas para desenvolver o raciocínio lógico matemático. Penso também que ensinar a Teoria dos Conjuntos, a Análise Combinatória e a Estatística antes de ensinar as Teorias da Probabilidade fortalece e prepara melhor o aluno.

Lopes e Carvalho (1999) dizem que o ensino de conteúdos que envolvem fenômenos aleatórios, por meio de experimentações, observações, registros, coletas e análise de dados de modo interdisciplinar, pode possibilitar aos estudantes o desenvolvimento do senso crítico.

Segundo Carmo, uma sequência interessante para a abordagem do conteúdo é: apresentação histórica da Probabilidade, conceituar experimento aleatório, determinístico, espaço amostral, eventos do espaço amostral, eqüiprobabilidade, definição de Probabilidade, propriedades, adição de Probabilidades, Probabilidade condicional e eventos independentes.

2.5.1 Introdução à Probabilidade

Segundo Costa (1999), referências sobre Probabilidade nos seguros (ciências atuarais), teoria dos erros experimentais de Maxwel, mecânica quântica (física e química), controle de qualidade industrial (engenharia), genética (biologia), pesquisa de mercado (marketing), dentre outros, representam um manancial para introdução ao estudo de fenômenos aleatórios/probabilidade. Portanto, uma destas aplicações, seria de extrema necessidade para incitar a curiosidade do aluno a aprender e apreender a probabilidade.

2.5.2 Experimento determinístico e experimento aleatório

Pode-se dizer que experimentos determinísticos são experimentos em que podemos determinar os resultados nas diversas vezes que repetirmos o experimento; e experimento aleatório são experimentos que podem ser repetidos diversas vezes sob as mesmas condições iniciais, e mesmo assim não é possível determinar previamente o resultado. Alguns autores nem falam sobre experimentos determinísticos, porém, considero interessante que se apresente pelo menos um exemplo sobre este conteúdo, mesmo sem aprofundar, pois o objeto de estudo são os experimentos aleatórios. Diversos autores se limitam em explicar experimento aleatório utilizando apenas exemplos com jogos de azar. Os autores devem ter cuidado para que o aluno não pense que a principal utilidade da probabilidade é estudar os jogos de azar.

A fim de evitar essa impressão, outros exemplos devem ser apresentados, tais como, o nascimento de uma criança, a previsão do tempo, o teste de qualidade de uma empresa, escolher uma pessoa ao acaso em um grupo de n pessoas, jogo de futebol, etc.

2.5.3 Espaço amostral e eventos

Neste tópico a teoria dos conjuntos é essencial para compreensão da Teoria de Probabilidades. Meyer (1983) e Lipschutz (1979) propõem tópicos da teoria de conjuntos antes de iniciar a teoria da probabilidade em seus livros.

Considerando que a maioria dos alunos do ensino médio iniciam o estudo de Probabilidade sem domínio da teoria de conjuntos, reforça-se a necessidade de incluir este tópico no início do capítulo de teoria da probabilidade do ensino médio.

Por exemplo, podemos dizer que dois eventos A e B são excludentes quando $A \cap B = \emptyset$. No entanto, isto não faz sentido para um aluno que não sabe que “$\cap$” significa interseção entre conjuntos, e que “$\emptyset$” significa conjunto vazio.

2.5.4 Equiprobabilidade

Um espaço amostral é equiprovável se as frequências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de vezes que o experimento é repetido tende ao infinito. Sabendo disso, proponho as seguintes experiências para auxiliar na ilustração deste conceito: desenvolver no aluno a noção intuitiva de infinito, para que deste modo ele compreenda melhor a equiprobabilidade, pois ela está intimamente ligada com a noção de infinito; experiências como nascimento de uma criança, retirada de uma bola branca de uma urna que contém 4 bolas brancas, entre outros. Se o aluno encarar este experimento com seriedade, ele poderá perceber de maneira mais clara a definição de Probabilidade.

Exemplo de experimento para o aluno perceber o significado de equiprobabilidade:

a) Lance uma moeda 100 vezes e faça um relatório de suas observações.
b) Faça o mesmo com um dado.
c) Compare os resultados obtidos nos itens “a” e “b”.

Assim, o aluno provavelmente irá perceber o significado de equiprobabilidade.

2.5.5 Estatística e Probabilidade

A partir de experiências prévias em sala de aula, no ensino médio, percebo que seria mais interessante que a estatística seja estudada antes da Probabilidade. Dante (2005) apresenta no final do capítulo de Estatística um tópico sobre a Estatística e Probabilidade. Nesse tópico ele comenta que experimentos do tipo: Probabilidade de um avião cair, Probabilidade de chuva, resultados eleitorais, mortalidade causada por doença, dentre outras, depende do histórico dos dados. Ele afirma que quanto maior for o histórico dos dados a ser analisado melhor será a apresentação das probabilidades do experimento ocorrer. A idéia apresentada pelo autor é interessante, no entanto, proponho a apresentação do conteúdo de Estatística antes da Probabilidade.

Com isso, o aluno já teria estudado frequências relativas, uma ótima ferramenta para explicar a eqüiprobabilidade. Como conseqüência, a definição de Probabilidade pode ser melhor compreendida. A Probabilidade condicional é outro conteúdo que seria beneficiado com esta alteração de ordem de conteúdos, pois vemos que a maioria dos exercícios de Probabilidade condicional abordados pelos livros no ensino médio envolvem dados estatísticos.

2.6 Enquete

A Probabilidade é realmente o assunto mais desafiador da Matemática?

Um dos objetivos deste trabalho foi verificar, entre os professores de Matemática, qual é o assunto mais desafiador da Matemática para ensinar e verificar, entre os alunos e professores de outras disciplinas, qual o assunto mais desafiador da Matemática numa prova. A fim de obter a resposta, foram entrevistados professores de Matemática, professores de outras disciplinas e alunos da 3ª série do ensino médio do Colégio Salesiano, do Pré-Vestibular Promove, e do curso de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção do Centro Universitário Newton Paiva.

Pergunta realizada aos professores de outras disciplinas e alunos da 3ª série do ensino médio do Colégio Salesiano, do Pré-Vestibular Promove, e do curso de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção do Centro Universitário Newton Paiva:

Qual o campo da Matemática mais lhe desafia ou lhe desafiou na hora da prova?

I- Álgebra e Aritmética
II- Geometria
III- Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística

Pergunta realizada aos professores de Matemática do Colégio Salesiano, do Pré-Vestibular Promove e do Centro Universitário Newton Paiva:

Qual o campo da Matemática mais lhe desafia na hora de lecionar?

I- Álgebra e Aritmética
II- Geometria
III- Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística

Os dados foram tabulados e os resultados estão representados abaixo, por gráficos gerados no Excel:

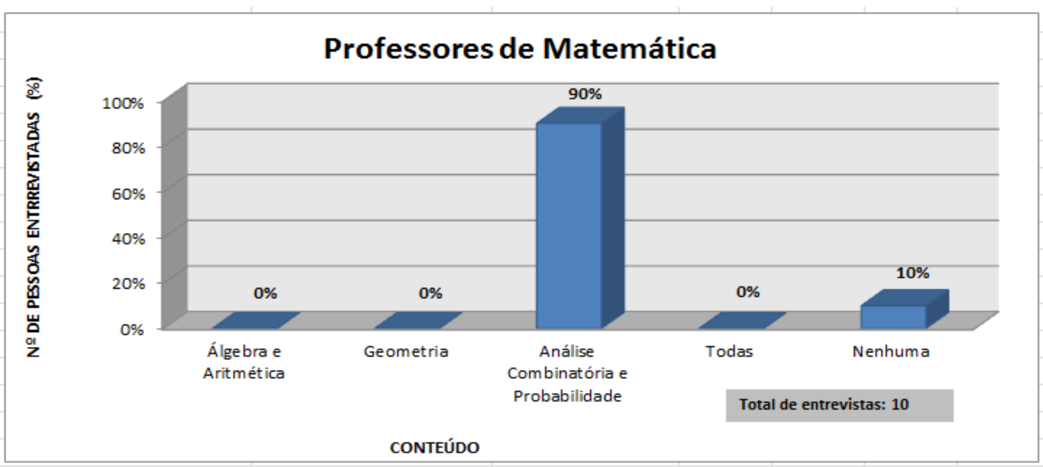


Gráfico 01: Professores de Matemática

Para os professores de Matemática entrevistados, os assuntos mais desafiadores são Análise Combinatória, Estatística e Probabilidade, com 90% de preferência.

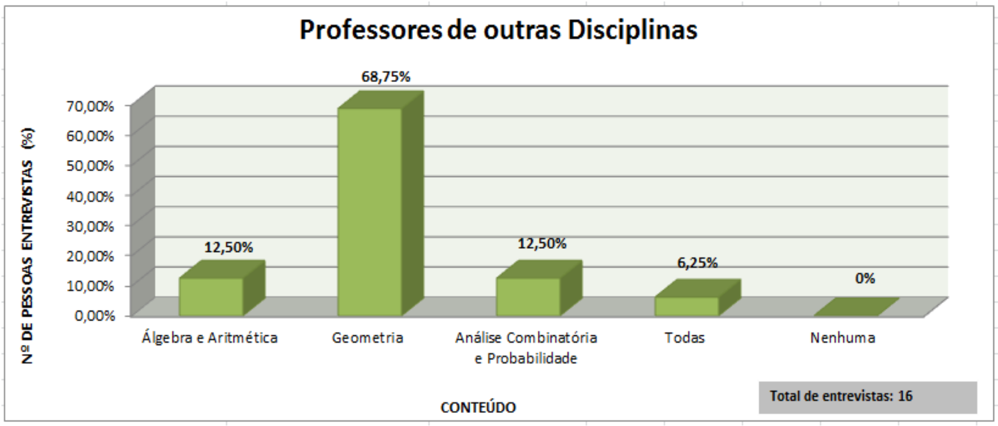


Gráfico 02: Professores de outras disciplinas

Para os professores de outras disciplinas entrevistados, o assunto mais desafiador é a Geometria, com 68,75% de preferência.

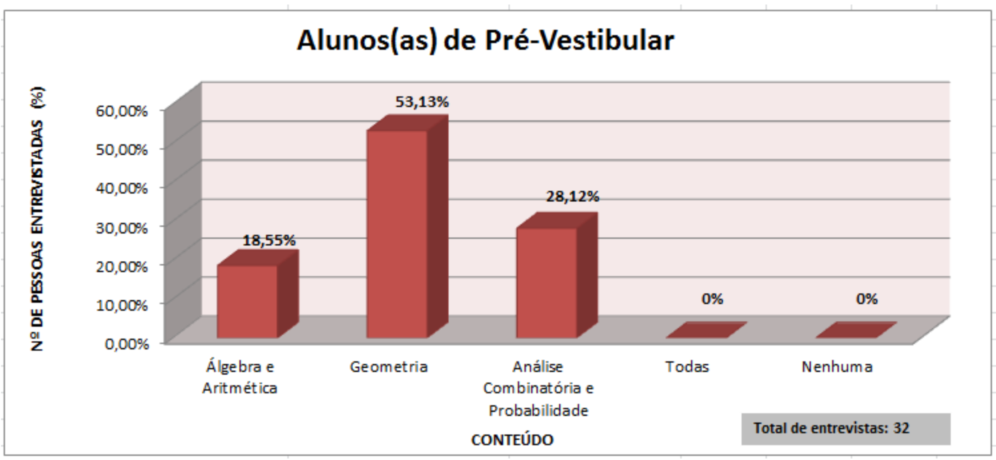


Gráfico 03: Alunos de Pré-Vestibular

Para os alunos de Pré-Vestibular entrevistados, o assunto mais desafiador é a Geometria, com 53,13% de preferência.

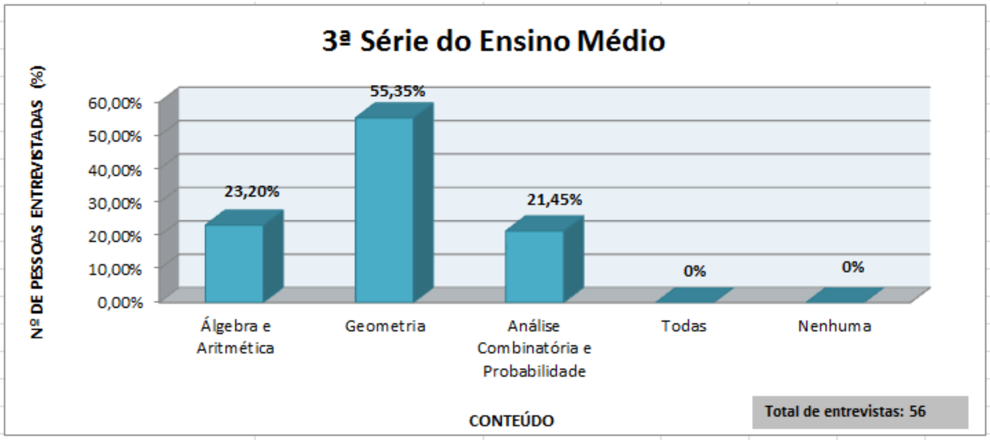


Gráfico 04: Alunos da 3ª série do ensino médio

Para os alunos da 3ª série do ensino médio entrevistados, o assunto mais desafiador é a Geometria, com 55,35% de preferência.

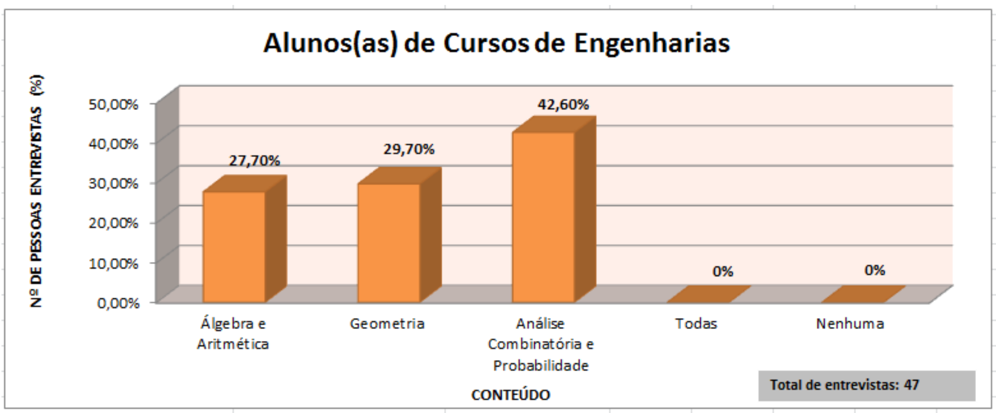


Gráfico 05: Alunos dos cursos de Engenharia

Para os alunos dos cursos de Engenharia entrevistados, os assuntos mais desafiadores são Análise Combinatória, Estatística e Probabilidade, com 42,60% de preferência.

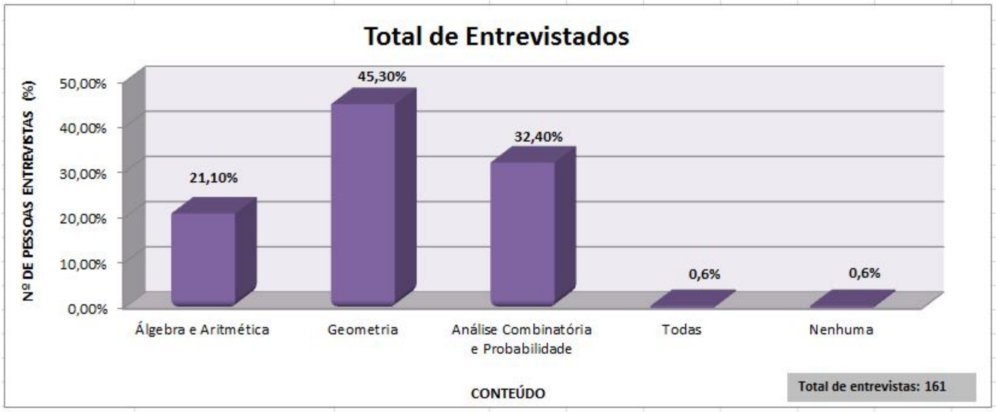


Gráfico 06: Total de entrevistados

No total, foram 161 entrevistas e destas, 21,1% disseram que Álgebra e Aritmética são os assuntos mais desafiadores, 45,3% disseram que Geometria é o assunto mais desafiador, 32,4% disseram que Análise Combinatória, Estatística e Probabilidade são os assuntos mais desafiadores, 0,6% disseram que tem dificuldade em todos os assuntos citados e 0,6% disseram que não tem dificuldade nenhuma em Matemática.

Observe que, no geral, para os Professores de Matemática e para os alunos do curso de Engenharia entrevistados, os assuntos mais desafiadores são realmente Análise Combinatória, Estatística e Probabilidade. Já para os Professores de outras disciplinas, alunos da 3ª série do ensino médio, e alunos do Pré-Vestibular, a mais desafiadora é a Geometria, muitas vezes porque não foi bem trabalhada ao longo dos anos escolares, outras vezes pelo grande número de fórmulas e abstração, ou porque nem viram os conteúdos de probabilidades.

CAPÍTULO 3: MATERIAL DE PROBABILIDADE ELABORADO A PARTIR DA ANÁLISE REALIZADA NOS LIVROS DIDÁTICOS E RECOMENDAÇÕES DOS PCN’S

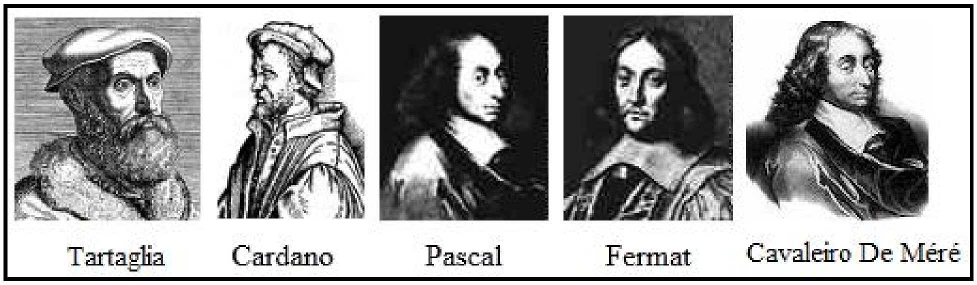
> *“ Gosto de ser homem, de ser gente, porque não está dado como certo, inequívoco, irrevogável que sou e serei decente , que testemunharei sempre gestos puros, que sou e que serei justo, que respeitarei os outros, que não mentirei escondendo seu valor porque a inveja de sua presença no mundo me incomoda e me enraivece. Gosto de ser homem, de ser gente, porque sei que a minha passagem pelo mundo não é predeterminada, preestabelecida. Que o meu “destino” não é um dado mas algo que precisa ser feito e de cuja responsabilidade não posso me eximir. Gosto de ser gente porque a História em que me faço com os outros e de cuja feitura tomo parte é um tempo de possibilidades e não de determinismo. Daí que insista tanto na problematização do futuro e recuse sua inexorabilidade”.*
>
> PAULO FREIRE

3.1 Um pouco de história

O tema que estudaremos não teve uma origem muito nobre. As primeiras investigações e os primeiros conceitos relacionados à Teoria da Probabilidade têm origem nos chamados “jogos de azar”, ou seja, jogos que dependem mais da sorte que dos cálculos.

Dois famosos matemáticos Tartaglia (Francês - 1499 a 1557) e Cardano (Italiano - 1501 a 1576) analisavam problemas de Probabilidade a partir de jogos, mas esses trabalhos foram deixados de lado pelos matemáticos, pois começaram a considerar que o que discutiam estava ligado a uma aplicação muito restrita; e os jogadores acabaram perdendo o interesse devido à complexidade da Matemática envolvida.

A probabilidade na forma em que será apresentada e estudada neste material foi desenvolvida por três franceses, nos meados do século XVII: O cavaleiro De Méré (um nobre da corte) e os matemáticos Pascal (Francês – 1623 a 1662) e Fermat (Francês – 1601 a 1665).



Fonte: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm25/pag1.htm

Curiosidade histórica

Quis o acaso que o Cavaleiro de Méré e Pascal se encontrassem durante uma viagem à cidade de Poitou (França).

Procurando assunto de conversa para a viagem, De Méré apresentou a Pascal um problema que fascinara os jogadores desde a Idade Média: "Como dividir a aposta num jogo de dados que necessite ser interrompido?"

A propósito do problema colocado pelo jogador De Méré a Pascal, iniciou-se uma troca de correspondência entre Pascal e o matemático Pierre Fermat, que se tornou histórica.

As suas 7 cartas contendo as reflexões de ambos sobre a resolução deste problema, são consideradas os documentos fundadores da Teoria das Probabilidades.

3.2 Considerações Iniciais

Segundo Carmo, uma sequência interessante para a abordagem do conteúdo é: apresentação da probabilidade, conceituar experimento aleatório, experimento determinístico, experimentos equiprováveis, espaço amostral, eventos do espaço amostral, tipos de eventos probabilísticos, definição de Probabilidade, propriedades, adição de Probabilidade e Probabilidade condicional.

Nesta seção foi desenvolvido um material com conceitos, exemplos e uma vasta lista de exercícios resolvidos sobre Probabilidade.

3.3 Experimento Aleatório

É aquele cujo resultado é imprevisível, depende exclusivamente do acaso. Apesar desta aleatoriedade, os possíveis resultados são conhecidos.

Exemplos:

a) O lançamento de um dado;

b) O lançamento de uma moeda;

c) O sexo de um filhote.

3.4 Experimento Determinístico

É aquele cujo resultado é previsível, pois conhecendo certas condições, é possível calcular o resultado, sem realizar o experimento.

Exemplos:

a) A que temperatura a água entra em ebulição?

b) Se largarmos uma bola, com velocidade ela atinge o chão?

3.5 Experimentos Equiprováveis

São aqueles que possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

Exemplo:

No lançamento de uma moeda, a probabilidade de ocorrer cara é a mesma probabilidade de ocorrer coroa.

P(ocorrer cara)=P(ocorrer coroa) = $\frac{1}{2}$

3.6 Espaço Amostral

É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos:

a) Possíveis resultados num único lançamento de um dado com 6 faces:

$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$;

b) Possíveis resultados num único lançamento de uma moeda:
Ω ={ cara, coroa };

c) Possíveis resultados de um nascimento de um filhote:
Ω ={ macho, fêmea }.

3.7 Eventos de um espaço amostral

É qualquer subconjunto de um espaço amostral.

Exemplos:

a) A = { 1, 2 } é um evento do espaço amostral Ω ={ 1, 2, 3, 4, 5, 6 };

b) B ={ cara } é um evento do espaço amostral Ω ={ cara, coroa };

c) C ={ fêmea } é um evento do espaço amostral Ω ={ macho, fêmea }.

3.7.1 Tipos de eventos probabilísticos

Evento certo: Evento cuja probabilidade P de ocorrer é certa, ou seja, P = 1.

Exemplo:

Ao lançar um dado com 6 faces uma única vez, calcular a probabilidade de ocorrer um número menor ou igual a 6:

P = $\frac{6}{6} = 1$

Evento impossível: Evento cuja probabilidade P de ocorrer é impossível ou seja, P = 0.

Exemplo:

Ao lançar um dado com 6 faces, calcular a probabilidade de ocorrer um número maior que 6:

P= $\frac{0}{6} = 0$

Eventos complementares: Eventos cuja união resulta no conjunto universo. Sabemos que um evento pode ocorrer ou não. Sendo p a probabilidade de que ele ocorra (sucesso) e q a probabilidade de que não ocorra (fracasso), para um mesmo evento existe sempre a relação:

p + q = 1 , logo, q = 1 – p

Exemplo:

Sabemos que a probabilidade de tirar o 3 no lançamento de um dado é p = $\frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de não tirar o 3 no lançamento de um dado é q = 1 – $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$. Observe que p + q = 1, logo, p e q são eventos complementares.

Eventos mutuamente exclusivos: Eventos cuja ocorrência de um elimina a possibilidade de ocorrência do outro. Neste caso a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento é dada por:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se e somente se, $A \cap B = \varnothing$ e $P(A \cap B) = 0$.

Observação:

Na probabilidade:

$\cup$ equivale à palavra **ou**, logo **$P(A \cup B)$** é o mesmo que **P(A ou B);**

$\cap$ equivale à palavra **e**, logo **$P(A \cap B)$** é o mesmo que **P(A e B);**

Exemplo:

Num determinado casamento, será estimada a probabilidade de nascer um menino de olhos castanhos ou uma menina de olhos azuis. Assim, tem-se que:

P(A)=P(nascer menino de olhos castanhos) = $\frac{3}{5}$

P(B)=P(nascer menina de olhos azuis) = $\frac{1}{5}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Se $A \cap B \neq \varnothing$ e $P(A \cap B) > 0$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemplo:

Num determinado casamento, será estimada a probabilidade de nascer um menino ou uma criança de olhos azuis. Assim, tem-se que:

P(A) = P(nascer menino) = $\frac{1}{2}$

P(B) = P(nascer criança de olhos azuis) = $\frac{1}{4}$

P(A $\cap$ B) = P(nascer menino de olhos azuis) = $\frac{1}{8}$

P(A$\cup$ B) = P(A) + P(B) - P(A$\cap$ B) = $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

A necessidade de subtrair a probabilidade de nascer menino de olhos azuis vem da idéia de que na P(A $\cup$ B), tanto no valor da P(nascer menino) quanto no valor da P(nascer criança de olhos azuis) está incluído a possibilidade de nascer menino de olhos azuis, conseqüentemente esta probabilidade estaria sendo somada duas vezes. Por isso a importância da subtração.

Eventos independentes: Dois eventos são independentes quando a probabilidade de ocorrer B não depende da ocorrência de A. A expressão que define a lei para eventos independentes é a seguinte:

P(A $\cap$ B) = P(A).P(B)

Exemplo:

Em uma família será estimada a probabilidade de nascer um menino de olhos azuis:

P(A) = P(nascer menino) = $\frac{1}{2}$

P(B) = P(nascer criança de olhos azuis) = $\frac{1}{4}$

P(A $\cap$ B) = P(nascer menino de olhos azuis) = P(A).P(B) = $\frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}=\ \frac{1}{8}$

Eventos equiprováveis: Quando todos os elementos do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer**.**

Exemplo:

No lançamento de uma moeda, a chance de sair cara é igual à chance de sair coroa.

3.8 Probabilidade

A probabilidade de um determinado evento ocorrer é determinada por um cálculo, realizado pela razão entre o número de casos favoráveis a um determinado evento e o número total de casos.

$$P = \frac{\textit{Número de casos favoráveis}}{\textit{Número total de casos}}$$

3.8.1 Propriedades

O cálculo da probabilidade de um evento A deve satisfazer as seguintes propriedades:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $P(\Omega) = 1$, sendo Ω o conjunto de todos os possíveis resultados;

c) $P(\overline{\Omega}) = 0$, sendo $\overline{\Omega}$ o complemento de Ω.

Exemplos:

a) Probabilidade de ocorrer um número maior que 6 no lançamento de um dado honesto:

Obs.: Dado honesto é aquele equiprovável, ou seja, aquele em que cada uma das faces tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Número de casos favoráveis: 0

A = { }

Número total de casos: 6

$$P = \frac{0}{6} = 0$$

Se A = { }, então o evento é classificado como impossível.

b) Probabilidade de ocorrer a face cara no lançamento de uma moeda honesta:

Número de casos favoráveis: 1

B ={ cara }

Número total de casos: 2

$$P = \frac{1}{2} = 50\%$$

c) Probabilidade de nascer um filhote do sexo feminino:

Número de casos favoráveis: 1

C ={ fêmea }

Número total de casos: 2

$$P = \frac{1}{2} = 50\%$$

Exercícios resolvidos:

1- Numa classe com 60 alunos, 36 estudam inglês, 28 estudam espanhol, 12 estudam inglês e espanhol.

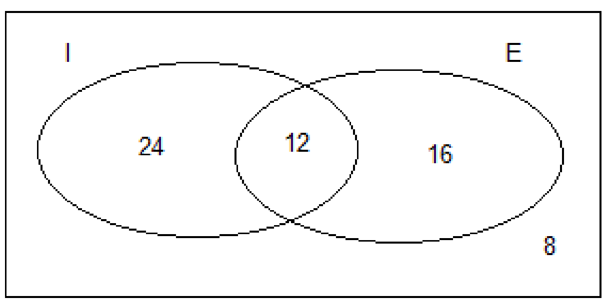
Responda:

a) Qual é a probabilidade de um aluno que estuda inglês estudar também espanhol?

b) Qual é a probabilidade de, ao escolher um desses alunos ao acaso, ele não estudar nem inglês nem espanhol?

Resolução:

Neste exercício, percebo a importância do Diagrama de Venn, na organização dos dados:



a) $P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$

b) $P = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} = 13{,}3\%$

2- Calcule a probabilidade de se obter um triângulo retângulo, quando se unem de modo aleatório três vértices de um hexágono regular:

Resolução:

Neste exercício, como a ordem dos vértices desse hexágono na formação dos triângulos retângulos não importa, percebo a importância da utilização da Combinação Simples na geração do número total de casos.

Número de casos favoráveis: 12, pois para cada aresta existem 2 triângulos retângulos. Como são 6 arestas, então, são 6 x 2 = 12 triângulos retângulos.

Número total de casos:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = \frac{6!}{3!.3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2!} = 5.4 = 20$$

$$P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\%$$

3- Numa praça, 4 homens e 4 mulheres devem ocupar os 8 lugares de um banco. Calcule a probabilidade de que nunca fiquem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo:

Resolução:

Neste exercício, como a ordem dos lugares que serão ocupados no banco importa, percebo a importância da utilização da Regra do Produto na resolução do problema.

Número de casos favoráveis:

$\frac{H}{4}.\frac{M}{4}.\frac{H}{3}.\frac{M}{3}.\frac{H}{2}.\frac{M}{2}.\frac{H}{1}.\frac{M}{1}$ Esse resultado deve ser multiplicado por 2, pois a ordem entre homens e mulheres deve alternar.

Número total de casos:

$$\frac{\quad}{8}.\frac{\quad}{7}.\frac{\quad}{6}.\frac{\quad}{5}.\frac{\quad}{4}.\frac{\quad}{3}.\frac{\quad}{2}.\frac{\quad}{1}$$

$$P = \frac{4.4.3.3.2.2.1.1.2}{8.7.6.5.4.3.2.1} = \frac{1}{35}$$

3.9 Probabilidade condicional

Vamos introduzir o conceito de probabilidade condicional, por meio do seguinte problema:

Uma urna contém 12 esferas numeradas de 1 a 12. Ao retirar uma esfera dessa caixa, percebe-se que ela possui um número par. Qual seria, então, a probabilidade de que essa esfera seja um múltiplo de 3?

O espaço amostral pode ser considerado, inicialmente, como o conjunto constituído por todas as esferas de 1 a 12.

Ω = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Entretanto, como sabemos que ela possui um número par, podemos definir um novo espaço amostral **S,** constituído apenas pelas esferas **pares.**

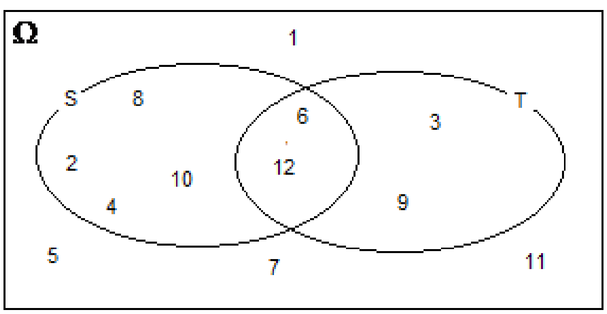
S = {2,4,6,8,10,12} e n(S) = 6

Chamaremos de **T** o conjunto dos números múltiplos de 3, de 1 a 12.

T = {3,6,9,12}

Observe que $S \cap T$ **=** { 6,12} e $n(S \cap T) = 2$

Vamos organizar os dados utilizando o Diagrama de Venn:



Logo, a probabilidade de ocorrer o evento T, já tendo ocorrido o evento S, é igual a:

$$\frac{n(S \cap T)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Essa probabilidade indicada por $P(T/S)$ é chamada probabilidade condicional do evento T, dado que o evento S já ocorreu.

A fórmula para o cálculo dessa probabilidade é dada por:

$$P(T/S)=\frac{n(S\cap T)}{n(S)}$$

Exemplo:

Um baralho completo é constituído por 52 cartas, distribuídas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas. Cada naipe possui 13 cartas: A(ás), 2,3,4,5,6,7,8,9,10, J(valete), Q(dama) e K(rei). Foi extraída uma carta desse baralho e observou-se que era uma carta de ouros. Determinar a probabilidade de que essa carta seja um rei de ouros:

Resolução:

Sabendo que a carta extraída é de ouros, o espaço amostral fica reduzido a 13 cartas.

n(A) = n(cartas de ouros) = 13

n(B) = n(reis no baralho) = 4

($A\cap B$) = n(reis de ouros) = 1

Logo, P(B/A)= $\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{1}{13}$

3.10 Lista de Exercícios Resolvidos

1. Nível: Fácil (ENEM/1998) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante três fichas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.
A probabilidade de o PARTICIPANTE não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0

b) 1/3

c) 1/4

d) 1/2

e) 1/6

Resolução:

Número total de casos: 6

Ω ={ TVE,TEV,ETV,EVT,VTE,VET }

Número de casos favoráveis: 2

São aqueles que fazem com que o participante não ganhe qualquer prêmio. Logo, as possibilidades são as seguintes:

ETV, VET

Portanto,

P = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Nível: Fácil (ENEM/1999) Uma estação distribuidora de energia elétrica foi atingida por um raio. Este fato provocou escuridão em uma extensa área.
Segundo estatísticas, ocorre em média a cada 10 anos um fato desse tipo. Com base nessa informação, pode-se afirmar que:

a) a estação está em funcionamento há no máximo 10 anos.

b) daqui a 10 anos deverá cair outro raio na mesma estação.

c) se a estação já existe há mais de 10 anos, brevemente deverá cair outro raio na mesma.

c) a probabilidade de ocorrência de um raio na estação independe do seu tempo de existência.

d) é impossível a estação existir há mais de 30 anos sem que um raio já a tenha atingido anteriormente.

Resolução:

a) Falsa, pois se a estação estivesse em funcionamento há no máximo 10 anos, não seria possível estimar a tal média.

b) Falsa, pois não sei em que ano estou na contagem do tempo, pode ser que um raio tenha caído há 7 anos atrás e então, de acordo com o estudo realizado, é provável que ele volte a cair daqui há três anos.

c) Falsa, pois não posso afirmar que um raio deverá cair brevemente, ele poderá cair ou não.

d) Verdadeira, pois apesar do estudo probabilístico realizado, a ocorrência de um raio na estação não depende do seu tempo de existência. Pode ser caia um, dois ou mais raios num único dia e depois ficar 100 anos sem a ocorrência de um caso como esse.

e) Falsa, pois de acordo com o estudo realizado é provável e não um evento certo que caia um raio a cada 10 anos. Pode ser que fique 100 anos sem uma ocorrência como essa.

3. Nível: Fácil Os alunos quartanistas do curso diurno e do curso noturno de uma faculdade se submeteram a uma prova de seleção, visando a participação numa olimpíada internacional. Dentre os que tiraram nota 9,5 ou 10,0 será escolhido um aluno, por sorteio.

Nota	Curso	
	Diurno	Noturno
9,5	6	7
10,0	5	8

Com base na tabela, a probabilidade de que o aluno sorteado tenha tirado nota 10,0 e seja do curso noturno é:

a) 12/26

b) 6/14

c) 4/13

d) 12/52

e) 1/6

Resolução:

Obs.: Quartanistas são alunos do quarto ano da faculdade.

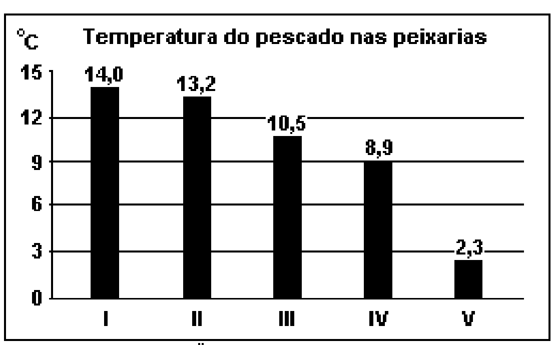
Número de casos favoráveis: 8 (número de alunos do noturno com nota igual a 10).

Número total de casos: 26 (número total de alunos que tiraram nota 9,5 ou 10).

Logo, P = $\frac{8}{26} = \frac{4}{13}$

Caso tivesse $\frac{8}{15}$ entre as opções de resposta, esta seria tentadora, pois poderia pensar que o número total de casos é o número de alunos do noturno, que é 15, assim ficaria $\frac{8}{15}$.

4. Nível: Fácil (ENEM/2007) Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias.



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) 1/2.
b) 1/3.
c) 1/4.
d) 1/5.
e) 1/6.

Resolução:

Pela interpretação gráfica, fica fácil perceber que das cinco peixarias pesquisadas, somente uma mantém os peixes na temperatura ideal, a V.

Logo,

$$P = \frac{1}{5}$$

5. Nível: Fácil (UNESP/2008) Numa certa região, uma operadora telefônica utiliza 8 dígitos para designar seus números de telefones, sendo que o primeiro é sempre 3, o segundo não pode ser 0 e o terceiro número é diferente do quarto. Escolhido um número ao acaso, a probabilidade de os quatro últimos algarismos serem distintos entre si é:

a) 63/125
b) 567/1250
c) 189/1250
d) 63/1250
e) 7/125

Resolução:

Número total de casos:

$\frac{3}{1}\frac{}{9}\frac{}{10}\frac{}{9}\frac{}{10}\frac{}{10}\frac{}{10}\frac{}{10}$, o segundo algarismo não pode ser o zero e o terceiro algarismo é diferente do quarto.

Número de casos favoráveis:

$\frac{3}{1}\frac{}{9}\frac{}{10}\frac{}{9}\frac{}{10}\frac{}{9}\frac{}{8}\frac{}{7}$, além das condições citadas acima, os quatro últimos algarismos devem ser distintos entre si.

Logo,

$$P = \frac{1.9.10.9.10.9.8.7}{1.9.10.9.10.10.10.10} = \frac{504}{1000} = \frac{63}{125}$$

6. Nível: Fácil (ENEM/2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela adiante apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por

problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que
le seja uma criança é igual a:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Resolução:

Número total de casos: 200

Total de pacientes com problemas respiratórios causados pelas queimadas: 50 + 150 = 200

Número de casos favoráveis: 150

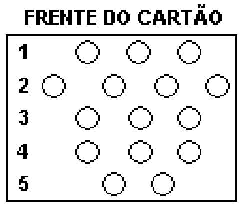
Total de crianças com problemas respiratórios causados pelas queimadas: 150

Logo,

P = $\frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0,75$

Portanto, a opção correta é a letra e.

7. Nível: Médio (ENEM/2001) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:



VERSO DO CARTÃO

Como jogar:

- Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1).
- Se achar uma bola de futebol , vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas.
Continue raspando dessa forma até o fim do jogo.
- Se encontrar um "X" em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio.
- Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas terá direito ao prêmio.

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de X" distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

a) 1/27.

b) 1/36.

c) 1/54.

d) 1/72.

e) 1/108.

Resolução:

Como existem duas bolas na linha 4 e duas na linha 5, já foram 4, restam 3, uma para cada uma das três primeiras.

Logo,

P(ganhar) = $\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{2}=\frac{1}{54}$

8. Nível: Médio (PUC-MG/2004) As percentagens de filmes policiais transmitidos pelos canais A, B e C de uma provedora de sinal de TV são, respectivamente, 35%, 40% e 50%. Se uma pessoa escolhe casualmente um desses canais para assistir a um filme, a probabilidade de que ela não assista a um filme policial é:

a) 5/12

b) 6/12

c) 7/12

d) 8/12

e) 1/6

Resolução:

$A \to 0{,}35 \therefore \overline{A} \to 0{,}65$

$B \to 0{,}4 \therefore \overline{B} \to 0{,}6$

$C \to 0{,}5 \therefore \overline{C} \to 0{,}5$

Logo,

P(não assistir) = $\frac{1}{3}.\left(\frac{65}{100}+\frac{6}{10}+\frac{5}{10}\right)=\frac{7}{12}$, multipliquei por $\frac{1}{3}$, pois como são três canais, a probabilidade de escolher, ao acaso, qualquer um dos canais é $\frac{1}{3}$.

9. Nível: Médio (PUC-Rio/2004) Um casal pretende ter 3 filhos. Qual a probabilidade de que todos os três filhos sejam do mesmo sexo?

a) 1/8

b) 1/6

c) 1/3

d) 1/4

e) 2/3

Resolução:

1º filho: Pode ser de qualquer sexo, logo a probabilidade será igual a 1.

2º filho: Deve ter o mesmo sexo do primeiro, logo a probabilidade é $\frac{1}{2}$.

3º filho: Deve ter o mesmo sexo dos dois primeiros, logo a probabilidade é $\frac{1}{2}$.

Portanto,

P(3 filhos do mesmo sexo) $=1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

10. Nível: Médio (ENEM/2005) Um aluno de uma escola será escolhido por sorteio para representá-la em uma certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno há 300 alunos, distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno há 240 alunos, distribuídos em 6 turmas de 40 alunos.

Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio:

Método I: escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.

Método II: escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.Sobre os métodos I e II de sorteio é correto afirmar:

a) em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.

b) no método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método II a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.

c) no método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método I, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.

d) no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.

e) em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

Resolução:

Pelo Método I, temos que a probabilidade de um aluno ser sorteado é:

$\frac{1}{2}.\frac{1}{300}=\frac{1}{600}$ no diurno

Ou

$\frac{1}{2}.\frac{1}{240}=\frac{1}{480}$ no noturno

Pelo Método II, temos que a probabilidade de um aluno ser sorteado é:

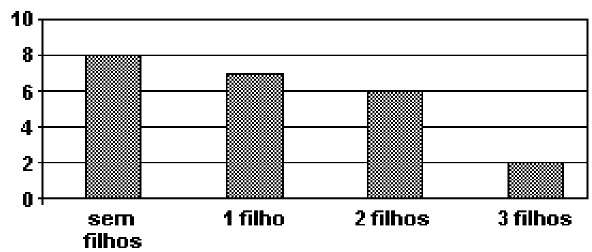
$\frac{1}{16}.\frac{1}{30}=\frac{1}{480}$ no diurno

Ou

$\frac{1}{16}.\frac{1}{40}=\frac{1}{640}$ no noturno

Logo, a opção correta é a letra d, que diz que no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.

11. Nível: Médio As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

a) 1/3.

b) 1/4.

c) 7/15.

d) 7/23.

e) 7/25.

Resolução:

Número de casos favoráveis: 7 (total de filhos únicos)

Número total de casos: 25 (total de filhos)

Logo,

P = $\frac{7}{25}$

Essa questão tem uma PEGADINHA, que é a letra d) $\frac{7}{23}$, escolhida por muitos por falta de atenção, já que 23 é o total de mulheres e não o total de filhos.

12. Nível: Médio (UFMG/2007) Em uma mesa, estão espalhados 50 pares de cartas. As duas cartas de cada par são iguais e cartas de pares distintos são diferentes.

Suponha que duas dessas cartas são retiradas da mesa ao acaso.

Então, é correto afirmar que a probabilidade de essas duas cartas serem iguais é:

a) 1/100.

b) 1/99.

c) 1/50.

d) 1/49.

Resolução:

A primeira carta pode ser qualquer uma das 50 distribuídas entre as 100, logo a probabilidade é de $\frac{50}{100}$. Já a segunda deve ser igual à primeira, logo a probabilidade é de $\frac{1}{99}$. Devo multiplicar por 2, pois existem duas possibilidades de retiradas diferentes em relação à posição das cartas, posso retirar a primeira e a segunda ou a segunda e a primeira.

Portanto,

P = $\frac{50}{100}.\frac{1}{99}.2=\frac{1}{99}$

13. Nível: Médio (UFMG/2008) Considere uma prova de Matemática constituída de quatro questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada uma, das quais apenas uma é correta.

Um candidato decide fazer essa prova escolhendo, aleatoriamente, uma alternativa em cada questão.
Então, é correto afirmar que a probabilidade de esse candidato acertar, nessa prova, exatamente uma questão é:

a) 27/64
b) 27/256
c) 9/64
d) 9/256

Resolução:

P (A) = P (acertar) = $\frac{1}{4}$

P (E) = P (errar) = $\frac{3}{4}$

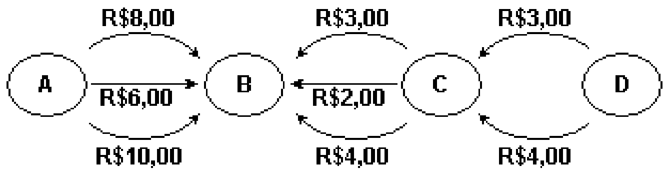
Logo,
P(acertar exatamente uma questão) =

$$P(A \cap E \cap E \cap E) + P(E \cap A \cap E \cap E) + P(E \cap E \cap A \cap E) + P(E \cap E \cap E \cap A) =$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.4 = \frac{27}{64}$$

Essa questão tem uma PEGADINHA, que é a letra b) $\frac{27}{256}$, escolhida por falta de atenção, quando não se leva em consideração as 4 possibilidades distintas, ou seja, quando não se leva em consideração que se deve multiplicar $\frac{27}{256}$ por 4.

14. Nível: Médio (UFG/2008) A figura a seguir mostra os diversos caminhos que podem ser percorridos entre as cidades A, B, C e D e os valores dos pedágios desses percursos.



Dois carros partem das cidades A e D, respectivamente, e se encontram na cidade B. Sabendo-se que eles escolhem os caminhos ao acaso, a probabilidade de que ambos gastem a mesma quantia com os pedágios é:

a) 1/18

b) 1/9

c) 1/6

d) 1/2

e) 2/3

Resolução:

Possíveis taxas de A até B:

R$ 6,00

R$ 8,00

R$ 10,00

Possíveis taxas de D até B:

R$ 5,00

R$ 6,00

R$ 6,00

R$ 7,00

R$ 7,00

R$ 8,0

Custo do pedágio de A para B	Custo do pedágio de D para B
R$ 6,00	R$ 8,00 R$ 7,00 R$ 7,00 R$ 5,00 R$ 6,00 R$ 6,00

R$ 8,00	R$ 8,00 R$ 6,00 R$ 6,00 R$ 5,00 R$ 7,00 R$ 7,00
R$ 10,00	R$ 6,00 R$ 5,00 R$ 7,00 R$ 7,00 R$ 6,00 R$ 8,00

Para cada caminho escolhido de A até B, tenho 6 caminhos de D até B. Desses, 3 geram as mesmas taxas.

P = $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

15. Nível: Médio (PUC-SP/2008) Um marceneiro pintou de azul todas as faces de um bloco maciço de madeira e, em seguida, dividiu-o totalmente em pequenos cubos de 10 cm de aresta. Considerando que as dimensões do bloco eram 140 cm por 120 cm por 90 cm, então a probabilidade de escolher-se aleatoriamente um dos cubos obtidos após a divisão e nenhuma de suas faces estar pintada de azul é:

a) 1/3
b) 5/9
c) 2/3
d) 5/6
e) 8/9

Resolução:
Número total de casos:
Número total de cubos: 9.12.14
Número de casos favoráveis:

Número de cubos que não foram pintados: (9-2).(12-2).(14-2) = 7.10.12

Logo,

P = $\frac{7.10.12}{9.12.14} = \frac{5}{9}$

16. Nível: Médio (FGV/2008) Uma urna contém cinco bolas numeradas com 1, 2, 3, 4 e 5. Sorteando-se ao acaso, e com reposição, três bolas, os números obtidos são representados por x, y e z . A probabilidade de que xy + z seja um número par é de:

a) 47/125.

b) 2/5.

c) 59/125.

d) 64/125.

e) 3/5.

Resolução:

Número total de casos:

$\bar{5}.\bar{5}.\bar{5} = 125$

Número de casos favoráveis:

Vamos considerar a seguinte legenda:

I – Número ímpar

P – Número par

Como a seqüência retirada deve formar um número par, as possibilidades são as seguintes:

I.I+I $\rightarrow 3.3.3 = 27$

P.I+P $\rightarrow 2.3.2 = 12$

P.P+P $\rightarrow 2.2.2 = 8$

I.P+P $\rightarrow 3.2.2 = 12$

Total: $27 + 12 + 8 + 12 = 59$

Logo,

P = $\frac{59}{125}$

Essa questão tem uma PEGADINHA, que é a letra a) $\frac{47}{125}$, escolhida por falta de atenção, quando não se leva em consideração que as seqüências P.I+P e I.P+P, apesar de formarem os mesmos números, são diferentes e por isso devem ser levadas em consideração.

17. Nível: Médio (UFPR/2008) Um grupo de pessoas foi classificado quanto ao peso e pressão arterial, conforme mostrado no quadro a seguir:

PRESSÃO	PESO			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Alta	0,10	0,08	0,02	0,20
Normal	0,15	0,45	0,20	0,80
Total	0,25	0,53	0,22	1,00

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas:

1. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão alta é de 0,20.
2. Se se verifica que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem excesso de peso, a probabilidade de ela ter também pressão alta é de 0,40.
3. Se se verifica que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem pressão alta, a probabilidade de ela ter também peso normal é de 0,08.
4. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão normal e peso deficiente é de 0,20.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

Resolução:

Analisando cada uma das afirmativas, temos:

1. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão alta é de 0,20.

Verdadeira, pois P = $\frac{0,2}{1} = 0,2$

2. Se se verifica que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem excesso de peso, a probabilidade de ela ter também pressão alta é de 0,40.

Verdadeira, pois P = $\frac{0,1}{0,25} = 0,4$

3. Se se verifica que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem pressão alta, a probabilidade de ela ter também peso normal é de 0,08.

Falsa, pois P = $\frac{0,08}{0,2} = 0,4$

4. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão normal e peso deficiente é de 0,20.
Verdadeira, basta ver direto na tabela.

18. Nível: Médio A probabilidade de um casal com quatro filhos ter dois do sexo masculino e dois do sexo feminino é:

a) 60%
b) 50%
c) 45%
d) 37,5%
e) 25%

Resolução:

Vamos considerar a seguinte legenda:

M – Masculino

F – Feminino

Número total de casos: 16

$\overline{2}.\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 16$, pois para cada filho existem duas possibilidades de sexo, masculino ou feminino.

Número de casos favoráveis: 6

Ω ={ MMFF, FFMM, MFMF, FMFM, MFFM, FMMF }

Logo,

P = $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

19. Nível: Médio (FGV/2007) Em um grupo de turistas, 40% são homens. Se 30% dos homens e 50% das mulheres desse grupo são fumantes, a probabilidade de que um turista fumante seja mulher é igual a:

a) 5/7

b) 3/10

c) 2/7

d) 1/2

e) 7/10

Resolução:

Nesse exercício, resolvi atribuir o valor de 100 para o número de turistas, a fim de facilitar o trabalho.

Número de turistas: 100

Número de homens: 40 $\begin{cases} Número\ de\ \text{hom}ens\ \ fumantes: \dfrac{30}{100}.40 = 12 \\ Número\ de\ \text{hom}ens\ não\ \ fumantes: \dfrac{70}{100}.40 = 28 \end{cases}.$

Número de mulheres: 60 $\begin{cases} Número\ de\ mulheres\ \ fumantes: \dfrac{50}{100}.60 = 30 \\ Número\ de\ mulheres\ não\ \ fumantes: \dfrac{50}{100}.60 = 30 \end{cases}.$

Número total de casos:

Total de fumantes: 30 + 12 = 42

Número de casos favoráveis:

Total de mulheres fumantes: 30

Logo,

P = $\dfrac{30}{42} = \dfrac{5}{7}$

20. Nível: Médio (UFU/2007) De uma urna que contém bolas numeradas de 1 a 100 será retirada uma bola. Sabendo-se que qualquer uma das bolas tem a mesma chance de ser retirada, qual é a probabilidade de se retirar uma bola, cujo número é um quadrado perfeito ou um cubo perfeito?

a) 0,14

b) 0,1

c) 0,12

d) 0,16

Resolução:

Quadrados perfeitos no intervalo de 1 a 100:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Ao todo são 10.

Cubos perfeitos no intervalo de 1 a 100:

1, 8, 27, 64. Ao todo são 4.

Observe que 1 e 64 são comuns aos dois conjuntos.

Número total de casos: 100

Número de casos favoráveis: 10 + 4 – 2 = 12

Logo,

P = $\frac{12}{100} = 0{,}12$

Essa questão tem uma PEGADINHA, que é a letra a) $0{,}14$, escolhida por falta de atenção, quando não se leva em consideração que os números 1 e 64 são comuns aos dois conjuntos. Deixando de subtrair os dois, obtemos $\frac{14}{100}$.

21. Nível: Médio (UFRS/2007) Uma caixa contém bolas azuis, brancas e amarelas, indistinguíveis a não ser pela cor. Na caixa existem 20 bolas brancas e 18 bolas azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser amarela é 1/3.

Então, o número de bolas amarelas é:

a) 18.

b) 19.

c) 20.

d) 21.

e) 22.

Resolução:

Número de bolas azuis: 18

Número de bolas brancas: 20

Número de bolas amarelas: x

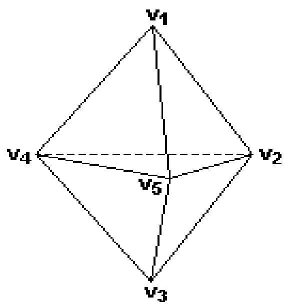
P(bola ser amarela) = $\frac{1}{3}$

Logo,

$$\frac{x}{18 + 20 + x} = \frac{1}{3}$$

$$x = 19$$

22. Nível: Médio (UNESP/2007) Dado um poliedro com 5 vértices e 6 faces triangulares, escolhem-se ao acaso três de seus vértices.



A probabilidade de que os três vértices escolhidos pertençam à mesma face do poliedro é:

a) 3/10.

b) 1/6.

c) 3/5.

d) 1/5.

e) 6/35.

Resolução:

Número total de casos:

$C_{5,3} = 10$

Número de casos favoráveis:

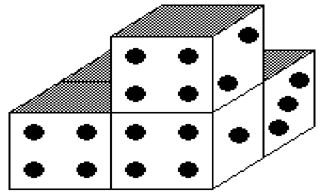
Número de triângulos: 6

Logo,

P = $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

23. Nível: Difícil (FGV/2007) Em relação aos cinco dados indicados na figura, sabe-se que:

- cada dado tem faces numeradas de 1 a 6;
- a soma das faces opostas em cada dado é igual a 7;
- a soma das faces em contato de dois dados é igual a 8.



Nas condições dadas, a probabilidade de que as quatro faces sombreadas na figura tenham o mesmo número marcado é igual a:

a) 1/16.

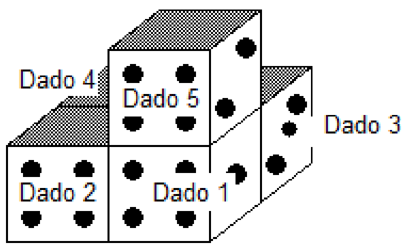
b) 1/8.

c) 1/6.

d) 1/4.

e) 1/2.

Resolução:



Pelas condições impostas pelo problema, os dados 2, 3 e 4 terão a face superior como 1 ou 6. O dado 1, por sua vez, terá como possíveis faces superiores 2 ou 5. Como o dado que está sobreposto a ele poderia ter como face inferior apenas 1 ou 6 e a soma das faces em contato deve ser 8, a única possibilidade é ter a face inferior igual a 6. A face superior do dado sobreposto é, portanto, igual a 1. Das duas possibilidades para as demais faces sombreadas, de acordo com o enunciado, a única possível é a face 1.

No dado 5, a face sombreada é igual a 1.

No dado 4, a face sombreada pode ser 1 ou 6.

No dado 3, a face sombreada pode ser 1 ou 6.

No dado 2, a face sombreada pode ser 1 ou 6.

Logo,

P = $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{8}$

24. Nível: Difícil (UFRS/2005) Um número natural N de três algarismos, menor que 500, é escolhido ao acaso. A probabilidade de que log N seja um número natural é:

a) 0,001.

b) 0,0025.

c) 0,01.

d) 0,05.

e) 0,1.

Resolução:

Para que Log N seja um número natural, N deve ser uma potência de base 10 menor que 500, com 3 algarismos.

N = 10^0 = 1 $\rightarrow$ Log 1 = 0 (Não convém!)

N = 10^1 = 10 $\rightarrow$ Log 10 = 1 (Não convém!)

N = 10^2 = 100 $\rightarrow$ Log 100 = 2 (Convém!)

N = 10^3 = 1000 $\rightarrow$ Log 1000 = 3 (Não convém!)

Desses, o único que convém é o 100, pois é o único menor que 500, com 3 algarismos, proveniente de uma potência de base 10.

Número total de casos: 400

De 100 a 499, são 400 números

Número de casos favoráveis: 1

Logo,

P = $\frac{1}{400} = 0,0025$

25. Nível: Médio (PUC-MG/2007) Três prêmios foram sorteados entre 17 pessoas (6 homens e 11 mulheres), de modo que cada pessoa recebesse um único prêmio. Se uma mulher ganhou o primeiro prêmio e um homem, o segundo, a probabilidade de uma mulher ter ganhado o terceiro prêmio é aproximadamente igual a:

a) 0,59

b) 0,67

c) 0,71

d) 0,82

Resolução:

17 pessoas $\begin{cases} 6\,\text{hom}\,ens \\ 11\,mulheres \end{cases}$ e três prêmios.

Se uma mulher e um homem já ganharam um prêmio cada, então, resta um prêmio para ser sorteado entre as 15 pessoas restantes, sendo10 mulheres e 5 homens.

Número total de casos: 15

Número de casos favoráveis: 10

Logo,

P = $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

26. Nível: Médio (UFU/2006) Em um vilarejo com 1000 habitantes, 52% dos habitantes são mulheres e 25% dos homens têm no máximo 20 anos. Escolhendo-se aleatoriamente dois habitantes da cidade, a probabilidade de que as duas pessoas escolhidas sejam homens, sendo um deles com no máximo 20 anos de idade e o outro com pelo menos 21 anos de idade, é igual a:

a) 16/185

b) 27/625

c) 12/275

d) 12/2775

Resolução:

Número de mulheres: $\frac{52}{100}.1000 = 520$

Número de homens: $\frac{48}{100}.1000 = 480$

Número de homens com, no máximo, 20 anos: $\frac{25}{100}.480 = 120$

Número de homens com, no mínimo, 21 anos: $\frac{75}{100}.480 = 360$

Número total de casos:

$$C_{1000,2} = 500.999$$

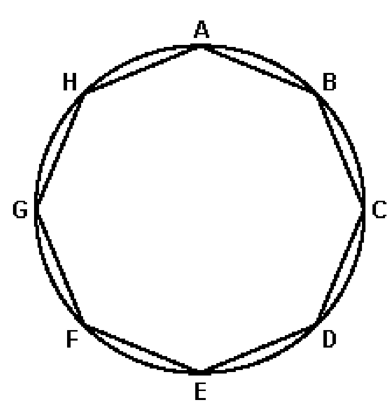
Número de casos favoráveis:

$$C_{120,1}.C_{360,1} = 120.360$$

Logo,

P = $\frac{120.360}{500.999} = \frac{16}{185}$

27. Nível: Difícil (PUC-SP/2004) Na figura abaixo tem-se um octógono regular inscrito em uma circunferência:



Selecionando-se aleatoriamente três vértices desse octógono, a probabilidade de que eles determinem um triângulo retângulo é:

a) 9/14
b) 4/7
c) 3/7
d) 3/14
e) 1/7

Resolução:

Os três vértices escolhidos determinarão um triângulo retângulo se dois deles forem extremos de um mesmo diâmetro da circunferência. Para cada um dos 4 diâmetros, temos 6 triângulos retângulos, 3 de um lado e 3 do outro, isso, graças à propriedade da geometria plana que diz que todo triângulo inscrito numa semi-circunferência é retângulo.

Número de casos favoráveis: $4.6 = 24$

Número total de casos: $C_{8,3} = 56$

Logo,

P(determinar um triângulo retângulo) = $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

28. Nível: Difícil (UFMG/2006) Leandro e Heloísa participam de um jogo em que se utilizam dois cubos. Algumas faces desses cubos são brancas e as demais, pretas.

O jogo consiste em lançar, simultaneamente, os dois cubos e em observar as faces superiores de cada um deles quando param:

- se as faces superiores forem da mesma cor, Leandro vencerá; e
- se as faces superiores forem de cores diferentes, Heloísa vencerá.

Sabe-se que um dos cubos possui cinco faces brancas e uma preta e que a probabilidade de Leandro vencer o jogo é de 11/18.

Então, é CORRETO afirmar que o outro cubo tem:

a) quatro faces brancas.
b) uma face branca.

c) duas faces brancas.

d) três faces brancas.

Resolução:

Mesma cor: Leandro vence.

Cores diferentes: Heloísa vence.

1º cubo:

5 brancas e 1 preta

2º cubo:

X brancas e (6 – X) pretas

Assim, temos que:

P(Leandro vencer) = P (sair branca e branca ou sair preta e preta)

Logo,

$$\frac{11}{18} = \frac{5}{6} \cdot \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6 - X}{6}$$

$$X = 4$$

Portanto, o 2º cubo possui 4 faces brancas e 2 faces pretas.

29. Nível: Difícil (ITA/2008) Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população:

a) 1/21

b) 1/8

c) 3/21

d) 5/21

e) ¼

Resolução:

Nesse exercício, resolvi atribuir o valor de 10000 para o número de homens e para o número de mulheres, a fim de facilitar o trabalho.

Número de homens: 10000

Número de mulheres: 10000

Número de homens daltônicos: $\frac{5}{100}.10000 = 500$

Número de mulheres daltônicas: $\frac{0,25}{100}.10000 = 25$

Número total de casos:

Número de pessoas daltônicas: 500 + 25 = 525

Número de casos favoráveis:

Número de mulheres daltônicas: 25

Logo,

P = $\frac{25}{525} = \frac{1}{21}$

30. Nível: Difícil (UERJ/2008) Um RNA sintético foi formado apenas pelas bases citosina e guanina, dispostas ao acaso, num total de 21 bases. O esquema a seguir mostra o RNA mensageiro, formado a partir da introdução dos códons de iniciação AUG e de terminação UAA nas extremidades do RNA original. Nesse esquema, B representa as bases C ou G:

AUG. BBB. BBB. BBB. BBB. BBB. BBB. BBB. UAA

Sabe-se que:

- os códons correspondentes ao aminoácido arginina são AGA, AGG, CGA, CGC, CGG e CGU;

- o aminoácido metionina correspondente ao códon de iniciação AUG é removido do peptidío sintetizado pela tradução desse RNA mensageiro.

A probabilidade de que a arginina apareça pelo menos uma vez na estrutura final deste peptidío é de:

a) $1 - (1/3)^7$

b) $(1/8)^7$

c) $1 - (3/4)^7$

d) $(1/4)^7$

Resolução:

São 7 seqüências de BBB e só pode usar C ou G, então só aceita duas possibilidades de arginina que são CGG e CGC.

Para resolver o exercício, pode-se calcular a probabilidade de **NÃO** cair nenhuma arginina e subtrair de 1.

Vejamos:

$\overline{2}.\overline{2}.\overline{2} = 8$, são duas possibilidades para cada, pois posso colocar C ou G em cada lugar de B. No total são 8^7 casos possíveis para BBB.

Como são 7 seqüências de BBB, temos $(8 - 2)^7 = 6^7$ possibilidades . Diminuir 2 de 8, significa tirar as chances de aparecer CGG e CGC em cada seqüência de BBB.

Logo, a probabilidade de **NÃO** cair nenhuma arginina é dada por $\frac{6^7}{8^7} = \left(\frac{3}{4}\right)^7$

Portanto, a probabilidade de que a arginina apareça pelo menos uma vez na estrutura final deste peptidío é:

P = $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7$

3.11 Exercícios resolvidos - UFMG 2ª Etapa

- ***Prova do Ano 2011***

Numa brincadeira, um dado, com faces numeradas de 1 a 6, será lançado por Cristiano e, depois, por Ronaldo. Será considerado vencedor aquele que obtiver o **maior** número como resultado do lançamento. Se, nos dois lançamentos, for obtido o mesmo resultado, ocorrerá empate.

Com base nessas informações,

1- **CALCULE** a probabilidade de ocorrer um empate.
2- **CALCULE** a probabilidade de Cristiano ser o vencedor.

Resolução:

1- Considere o espaço amostral dos dois lançamentos:

R \ C	1	2	3	4	5	6
1	E	C	C	C	C	C
2	R	E	C	C	C	C
3	R	R	E	C	C	C
4	R	R	R	E	C	C
5	R	R	R	R	E	C
6	R	R	R	R	R	E

Legenda:

E - Empate

C- Cristiano vence

R – Ronaldo vence

São 6 empates num total de 36 possibilidades, portanto, a probabilidade de empate será: P(E) = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2- Pelo espaço amostral acima, a probabilidade de Cristiano vencer será: P(C)=$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

- ***Prova do ano 2010***

Um bloco de madeira retangular e sólido mede 30 cm de largura, 20 cm de comprimento e 10 cm de altura e o seu exterior foi colorido d azul. Por meio de cortes paralelos a cada de uma de suas faces, esse bloco é inteiramente dividido em cubos de 1 cm de aresta, que são colocados dentro de uma urna. Com base nessas informações:

1- DETERMINE a quantidade de cubos que resultou da divisão desse bloco de madeira.

2- CALCULE a probabilidade de uma pessoa retirar da urna, que contém todos os cubos em que o bloco foi dividido, um cubo com, **exatamente, duas** faces azuis.

3- CALCULE a probabilidade de uma pessoa retirar um cubo da urna, que contém todos os cubos em que o bloco foi dividido, lançá-lo sobre uma mesa e obter a **face superior azul.**

Resolução:

1- Volume do bloco: 10.20.30 = 6000 cm^3

Volume do cubo: 1.1.1=1 cm^3

Número de cubos: $\frac{Volume\ do\ bloco}{Volume\ do\ cubo}=\frac{6000}{1}=6000$

2- Temos: $\begin{cases} 4\, mesas\, de\, tamanho\, 10\, cm \\ 4\, mesas\, de\, tamanho\, 20\, cm \\ 4\, mesas\, de\, tamanho\, 30\, cm \end{cases}$

Em cada aresta devemos tirar os dois cubos que estão em cada extremo,logo temos: N = 4.8 + 4.18 + 4.28 = 216. Portanto a probabilidade de retirar um cubo com exatamente duas faces azuis será: P = $\frac{216}{6000} = \frac{9}{250}$

3- Número de cubos com 3 faces pintadas: 8

1º modelo:

Cubo com 3 faces azuis.

Número de cubos no grupo: 8

Número de cubos com duas faces pintadas: 216

2º modelo:

Cubo com 2 faces azuis.

Número de cubos no grupo: 28.4 + 18.4 + 8.4 = 216

Número de cubos com uma face pintada: 1744

3º modelo:

Cubo com 1 face azul.

Número de cubos no grupo: 2.28.18 + 2.28.8 + 2.18.8 = 1744

Número de cubos com nenhuma face pintada: 4032

Como esses cubos formam um bloco com arestas 8, 18 e 28, temos:

N = 8.18.28 = 4032

Logo, a probabilidade será:

P = $\frac{4032}{6000}.\frac{0}{6}+\frac{1744}{6000}.\frac{1}{6}+\frac{216}{6000}.\frac{2}{6}+\frac{8}{6000}.\frac{3}{6}=\frac{11}{80}$

- ***Prova do ano 2009***

Rodrigo e Gabriel participam de um jogo, em que usam dois dados, cada um com 6 faces. Primeiro, Rodrigo lança os dados e, quando ambos param, os meninos somam os valores das duas faces superiores. Se o resultado dessa soma for igual a 6, Rodrigo vence o jogo. Se isso não ocorre, então, Gabriel lança os dados e, do mesmo modo, quando ambos param, os meninos somam os valores das duas faces superiores. Se o resultado dessa soma for igual a 7, Gabriel vence o jogo.

Caso se verifique qualquer outro valor, o jogo prossegue, até que Rodrigo obtenha o total 6, ou Gabriel, o total 7.

Com base nessas informações, calcule a probabilidade de Rodrigo.

1- Vencer o jogo no **primeiro** lançamento.

2- Vencer o jogo fazendo**, no máximo, dois** lançamentos.

3- Vencer o jogo.

Resolução:

1- Observe a tabela abaixo:

Resultado 2º dado \ Resultado 1º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dos 36 resultados possíveis para o lançamento dos dois dados, Rodrigo vence 5: (1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3).

Logo, P(Rodrigo vencer no primeiro lançamento) = $\frac{5}{36}$

2- Observe a árvore abaixo, em que $\begin{cases} R - Rodrigo\ ganha \\ G - Gabriel\ ganha \\ N - Ninguém\ ganha \end{cases}$

Obs.:

1- Se alguém ganha, acaba o jogo. Se ninguém ganha, o jogo continua.

2- 2-Gabriel ganha com soma 7. Logo, P(G) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

P(Rodrigo vencer no primeiro lançamento) = $\frac{5}{36}$

P(Rodrigo vencer no segundo lançamento) = P(Rodrigo perder no primeiro lançamento).P(Gabriel perder no primeiro lançamento).P(Rodrigo vencer no segundo lançamento)

P(Rodrigo vencer no segundo lançamento) = $\frac{31}{36}.\frac{5}{6}.\frac{5}{36}$

Como Rodrigo pode vencer no primeiro lançamento ou no segundo, pode-se afirmar que a probabilidade de Rodrigo vencer o jogo fazendo**, no máximo, dois** lançamentos é dada por:

P = $\frac{5}{36}+\frac{31}{36}.\frac{5}{6}.\frac{5}{36}=\frac{1855}{7776}$

3- Aplicando o que foi feito no item 2 indefinidamente, temos:

P= $\frac{5}{36}+\frac{31}{36}.\frac{5}{6}.\frac{5}{36}+\frac{31}{36}.\frac{5}{6}.\frac{31}{36}.\frac{5}{6}.\frac{5}{36}+...,$

Que corresponde a uma soma de termos de uma PG infinita, com $a_1=\frac{5}{36}$ e q = $\frac{31}{36}.\frac{5}{6}$

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita S = $\frac{a_1}{1-q}$,temos:

S = $\frac{\frac{5}{36}}{1-\frac{31}{36}.\frac{5}{6}}=\frac{30}{61}$

3.12 Exercícios resolvidos – ENEM

- **Ano 2010- Matemática e suas tecnologias – Caderno cinza**

Questão 155 - A figura 1 abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura 2 representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

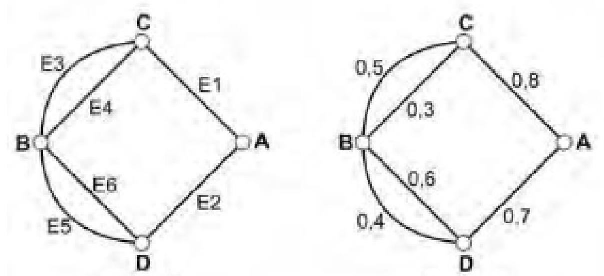


Figura I Figura II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.
O melhor trajeto para Paula é:

a) E1E3 b)E1E4 c)E2E4 d)E2E5 e)E2E6

Resolução:

Neste caso, devemos observar as probabilidades por vias, pois essas probabilidades são independentes umas das outras.
Observe que, partindo de A, o trajeto com menor probabilidade de engarrafamento é o E2, que leva ao ponto D. Partindo de D, o trajeto com menor probabilidade de engarrafamento é o E5, que leva ao ponto B. Logo, o melhor trajeto é o E2E5.
Resposta: letra d

Questão 174 – O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, A probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{14}$

Resolução:

Número de casos favoráveis: 10

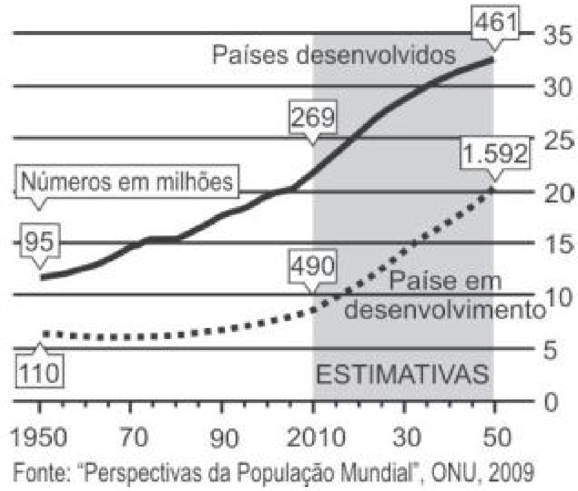
Número total de casos: 3+10+1 = 14

P = $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

Resposta: letra d

- ***Ano 2009- Matemática e suas tecnologias – Caderno cinza***

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Questão 137 – Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de:

f) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{8}{25}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{3}{25}$

Resolução:

De acordo com as informações citadas acima, em 2050 haverá uma população próxima de 461 milhões, nos países desenvolvidos, o que equivale a uma taxa próxima de 32% (veja gráfico).

Observe que 32% = $\frac{32}{100} = \frac{8}{25}$

Resposta: letra c

Questão 171- A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto { 01,02,...,59, 60}, custava R$ 1,50.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente:

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor c) 4 vezes menor

d) 9 vezes menor e) 14 vezes menor

Resolução:

Com R$ 126,00 pode-se fazer 84 apostas com seis dezenas cada, já que cada aposta custa R$ 1,50. Número de possibilidades de acertar a quina com 84 apostas de 6 dezenas cada:

$$C_{6,5} = 84.\frac{6!}{5!.(6-5)!} = 84.\frac{6.5!}{5!.1!} = 84.6 = 504$$

Número de possibilidades de acertar a quina num jogo de 9 dezenas:

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5!.(9-5)!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!.4.3.2!} = 126$$

Observe que o número de possibilidades de acertar a quina no segundo caso é 4 vezes menor que no primeiro caso, afinal, $\frac{126}{504} = \frac{1}{4}$.

Resposta: letra c

CAPÍTULO 4: CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *"Ensinar é alumbrar e alumbramento é inspiração, iluminação. No caminho que fazemos, é preciso criar a consciência de que métodos e técnicas são ferramentas a serviço do pensamento e que o pensamento é um mosaico formado por paixão e razão. A paixão de ensinar é uma paixão sábia, aquela que não turva os sentidos, mas ilumina os caminhos".*
>
> LUIZ ALBERTO SANZ

Considera-se, portanto, que a Probabilidade bem trabalhada, assim como a sua assimilação e compreensão, pode ser utilizada como um diferencial na vida do indivíduo, em diversas etapas e setores da vida, para fazer uma prova ou tomar uma decisão.

Nessa monografia foram desenvolvidas críticas com embasamento no estudo e na pesquisa realizada. Além disso, percebe-se a oportunidade de verificar como é trabalhada a questão da Probabilidade em alguns livros didáticos e apostilas de pré-vestibular.

Vale ressaltar que os professores do ensino médio devem explorar bem cada um desses assuntos que têm gerado mais dificuldade, como a Geometria, a Análise Combinatória, a Estatística e a Probabilidade, a fim de despertar o interesse do aluno para a utilização destas poderosas ferramentas que podem ser úteis na resolução de inúmeros problemas.

Quanto aos autores dos livros e das questões das provas de vestibulares, sugere-se que os mesmos possam expor de uma forma bem expressiva, detalhada e clara, as questões de Probabilidade, pois muitas delas são mal interpretadas pelos alunos/candidatos, ora por falta de preparo do mesmo, ou por deficiência na montagem do problema criado pelo autor, gerando algumas vezes, dupla interpretação.

Os professores podem iniciar o trabalho com a probabilidade utilizando um contexto histórico e exemplos que façam parte do cotidiano do seu aluno, por exemplo: Qual a probabilidade de um aluno ser sorteado numa turma de 40 alunos? Assim desperta-se o interesse pelo conteúdo e o envolvimento do aluno.

Através da pesquisa realizada, constata-se que a Probabilidade nem sempre é o assunto mais desafiador da Matemática, e sim a geometria.

Contudo, percebe-se que o caminho é longo, que as lutas serão constantes, mas acredita-se que o caminho seja esse, pois a qualidade dos livros e das questões vem melhorando cada vez mais.

Enfim, a Probabilidade está entre os assuntos que compõem a parte mais nobre da Matemática e, portanto, deve ser tratada com seriedade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Ensino Médio. Brasília: SEF/MEC, 1997.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais**. Volume 3: Matemática - Educação Fundamental**..** 2.ed. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. **Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. **Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.

CARMO, Anselmo Gonçalves do. **Teoria e Aplicação da Probabilidade no Ensino Médio.** Disponível em: www.ucb.br/sites/100/103/TCC/.../AnselmoGoncalvesdoCarmo.pdf
Acesso em 31/10/11.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. In **Educação matemática e políticas públicas**.2007.Disponível em:
www3.fe.usp.br/seções/ebook/mat_pol/cont/5.swf
Acesso em 30/10/11

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio. Volume 2)

Conceitos e histórias sobre Probabilidade
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm25/pag1.htm. Acesso em 1/11/2011

COSTA, Sérgio Francisco. **Introdução Ilustrada à Estatística.** 3ª ed. São Paulo: Editora Harbra, 1998. p.313.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Desafios da educação matemática no novo milênio**. In: Educação Matemática em Revista, São Paulo, Ano 8, n. 11, dez. 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** São Paulo: Editora Ática, 2006. 4ºv.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro didático de matemática: Uso ou abuso?** In: Em aberto. Brasília, v.26, n.69, p. 52-58, Jan/Mar. 1996.

FARIAS, Alfredo Alves de; SOARES, José Francisco; CÉSAR, Cibele Comini. **Introdução à Estatística**. 2ª edição. Editora LTC, 2003.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Estatística. In: FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário da língua Portuguesa**. 2.ed.ren.aum. Rio de Janeiro Nova Fronteira, 1986, p.717.

FONSECA, Marcos Alfredo; FONSECA, Frederico Melo. **Apostila de Matemática. Editora** Lastro.

FRIOLANI, Luis César. **O pensamento estocástico nos livros didáticos do ensino fundamental.** 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de Matemática) – Pontifícia Univerdidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; Jr., José Ruy Giovanni. **Matemática Fundamental,** Volume único: Uma nova abordagem-Coleção Delta. São Paulo: FTD, 2002.

GONÇALVES, Maria Augusta S. **Sentir, pensar, agir: corporeidade e educação**. São Paulo: Papirus, 1997.

IMENES, Luiz Márcio.; LELLIS, Marcelo. **Estatística.** São Paulo: Atual, 2000. p.5.

ISHIHARA, Cristiane; PESSOA, Neide. **Matemática Ensino Médio**, Volume 2: Rede Salesiano de Ensino – RSE, 3ª edição, 2008.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoria e problemas de probabilidade**. São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Porto Alegre, Recife(1979): Mcgraw-Hill, 1979.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **A probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular**. Dissertação (Mestrado em Educação). Campinas Unicamp, 1998.

http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02.pdf. Acesso em: 10 out. 2008.

LOPES, Celi Espasandin; MORAN, Regina Célia Carvalho Pinto. **A Estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o ensino Fundamental I.** 1999. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/lem/publica/ce_lopes/est_prop.pdf - >. Acesso em: 10 out. 2008.

MACHADO, Nílson José. **Sobre livros didáticos: quatro pontos.** Em aberto. Brasília, v.26, n.69, p. 22-27. jan/mar. 1996.

MEYER, Paul L. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. 2ª Edição – Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro, 1983.

MUNIZ, Cristiano Alberto; GONÇALVES, Harryson Júnio Lessa. **A educação estatística no Ensino Fundamental:** discussões sobre a práxis de professoras que ensinam Matemática no interior de Goiás. 2006. Disponível em: http://www.desenho.ufpr.br/IIISIPEM/GT12.pdf. Acesso em: 10 out. 2008.

PROBABILIDADE - Disponível em: http://www.ufv.br/dbg/labgen/probbin.html. Acesso em 30/07/2011.

PROVAS DO ENEM - Disponíveis no CD Super Pro do Interbits e no CD Tirando de letra da Rede Salesiano.

PROVAS DA UFMG - Disponíveis em: http://www.colegiobernoulli.com.br. Acesso em 31/07/2011.

SANTANA, Afonso A. F. **Apostila de Lógica e Probabilidades**. Editora Lastro, 2005.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio., **Matemática** Volume único: série – Matemática para o Ensino Médio. São Paulo, Ática, 2ª edição, 1999.

TRIOLA, Mário. **Introdução à Estatística**. 10ª edição. Editora LTC, 2008.