

**Absorção de luz por um átomo em um meio e o
momento da luz na matéria**

Paulo Fernando Gomes de Oliveira

Fevereiro 2015



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós Graduação em Física

**Absorção de luz por um átomo em um meio e o momento da luz na
matéria**

Paulo Fernando Gomes de Oliveira

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Física

Área de Concentração: Óptica clássica, Eletromagnetismo clássico.

Fevereiro 2015

*“Todos somos gênios. Mas se você julgar um peixe pela habilidade de subir em árvores, ele
passará a vida inteira se achando um idiota.”- Albert Einstein*

Agradecimentos

Agradeço à minha família, por sempre incentivarem os meus estudos, tornando esse trabalho possível. Ao Pablo, por me ensinar a trabalhar como físico. E à Anne, por estar ao meu lado em todos os momentos. Agradeço a todos que de um forma ou de outra estiveram presentes, fisicamente ou em pensamento, todos foram muito importantes pra mim. Agradecimento especial à Shirley e à Elisabeth, que foram sempre muito solícitas e me ajudaram com tudo que eu precisei, com relação à escrita, normas, referências etc..

Resumo

Nessa dissertação estudamos um modelo simples de interação de um pulso de luz com um átomo ressonante imerso em um meio dielétrico linear não-dispersivo. O modelo consiste em um tratamento clássico para o átomo, considerando o núcleo fixo e a nuvem eletrônica como um oscilador harmônico (modelo de Lorentz), sendo forçado pela radiação eletromagnética do pulso incidente e absorvendo energia e momento no processo. A oscilação do dipolo elétrico do átomo gera uma segunda onda eletromagnética que se superpõe com o pulso incidente. Faremos cálculos da energia e do momento presentes tanto nas ondas eletromagnéticas quanto transmitidos para o átomo em questão e para o meio ao seu redor, procurando balanços de conservação de energia e momento no processo. Esses cálculos serão feitos a fim de estudarmos o debate Abraham-Minkowski, que trata de diferentes maneiras de formular o momento linear de um pulso eletromagnético em um meio dielétrico. Em 1908 Minkowski previu que o momento de um pulso de luz em um meio seria proporcional ao índice de refração, enquanto que em 1909 Abraham previu que este momento seria inversamente proporcional ao índice de refração, o que iniciou um debate secular sobre o tema. Hoje entendemos que ambas as formulações são corretas, com o momento de Abraham estando associado ao momento cinético e o de Minkowski associado ao momento canônico da onda eletromagnética. O objetivo principal desta dissertação é investigar o papel dos momentos de Abraham e de Minkowski no sistema em questão.

Palavras-chave: Momento eletromagnético, Debate Abraham-Minkowski, Eletrodinâmica clássica, Óptica clássica

Abstract

In this dissertation we study a simple interaction model of a light pulse with a resonant atom immersed in a linear, nondispersive dielectric medium. The model consists in a classic treatment for the atom, considering a fixed nucleus and the electron cloud as a harmonic oscillator (Lorentz model), being forced by the electromagnetic radiation of the incident pulse and absorbing energy and momentum in the process. The electric dipole oscillation generates a second electromagnetic wave that overlaps with the incident pulse. We will make energy and momentum calculations for the electromagnetic wave, as well as transmitted to the resonant atom and to the surroundings, in order to find conservation of energy and momentum in the process. We use these calculations to investigate the Abraham-Minkowski controversy, that debates the correct expression for electromagnetic momentum within a material medium. In 1908 Minkowski predicted that the momentum of a light wave in a medium would be proportional to the refractive index, while in 1909 Abraham predicted that the momentum would be proportional to the inverse of the refractive index, what initiated a century long debate. Today we understand that both formulations are correct, with Abraham's momentum associated with kinetic momentum and Minkowski's associated with the canonical momentum of the electromagnetic wave. The main objective of this paper is to investigate the role of Abraham's and Minkowski's momentum in the presented system.

Keywords: Electromagnetic momentum, Abraham-Minkowski controversy, Classical electrodynamics, Classical optics

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
Lista de Figuras	VI
1 Introdução	1
2 O Debate Abraham-Minkowski	5
2.1 Controvérsia	5
2.2 Experimentos	7
2.2.1 Jones et al.	7
2.2.2 Balazs	8
2.2.3 Walker, Lahoz e Walker	9
2.2.4 Campbell et al.	10
2.3 Conclusões	12
3 Ondas eletromagnéticas em meios dielétricos	15
3.1 Pulso de Onda Gaussiano	16
3.1.1 Equação de Onda	16
3.1.2 Feixe monocromático	17
3.1.3 Feixe paraxial	18
3.1.4 Feixe Gaussiano	19
3.1.5 Pulso Gaussiano	22

<i>SUMÁRIO</i>	IV
3.2 O modelo de oscilador harmônico	22
3.3 Emissão de dipolo	24
3.4 Reação de radiação	25
4 Absorção de luz por um átomo em um meio	27
4.1 Conservação da energia	28
4.1.1 Energia da onda incidente	28
4.1.2 O trabalho da força de Lorentz	29
4.1.3 Reação de radiação	30
4.1.4 Energia da onda resultante	30
4.2 Conservação do momento linear	32
4.2.1 Momento da onda incidente	32
4.2.2 Momento transmitido ao átomo	34
4.2.3 Momento da onda resultante	35
4.2.4 Momento transmitido à vizinhança do átomo	35
5 Considerações Finais	39
Referências Bibliográficas	42

Lista de Figuras

1.1	Linha do tempo para o heliocentrismo de Galileu, Relatividade Geral e Einstein e aquecimento global, com indicação de momentos de oposição organizada e estimativa de aceitação pela comunidade e pelo público.	2
2.1	Esquema do experimento de Jones e Richards.	7
2.2	Esquema do experimento mental de Balazs. (Adaptado)	8
2.3	Esquema do experimento de Walker et al.	10
2.4	Esquema do experimento de Campbel et al.	11
3.1	Parâmetros de um feixe Gaussiano que se propaga na direção z : a) Intensidade do campo em função da distância do eixo em z um plano z constante. b) Largura do feixe em função de z . c) Raio de curvatura da frente de onda em função de z . d) Fase de Guoy em função de z . .	21
3.2	Ilustração do significado geométrico do parâmetro $R(z)$, a curvatura da frente de onda.	22
3.3	Gráfico de $\Re[E_i(0, t)]$ mostrando a diferença de grandeza entre Γ e T .	24
4.1	Superposição da onda incidente e da emissão de dipolo. As linhas azuis representam o feixe incidente, e as linhas vermelhas representam a onda de emissão de dipolo.	31
4.2	Mensagem de erro do programa Matlab indicando problema provavelmente devido à singularidade.	38

4.3 Mensagem de erro do programa Mathematica indicando problema de convergência no cálculo, provavelmente devido à oscilação ou singularidade	38
---	----

Capítulo 1

Introdução

Atualmente, o estudo da óptica tem significado mais amplo do que o simplesmente indicado por sua etimologia, do grego *optike*, significando "relativo à visão". Sendo a área que estuda as propriedades da luz, ou mais amplamente, da radiação eletromagnética, seja ela visível ou não, é responsável por avanços em muitos ramos do conhecimento, desde o entretenimento, com o uso de fibras ópticas para transmissão mais rápida de dados, mídias Blu-ray[©] e tecnologias HD, até medicina, com cirurgias de correção de problemas visuais. Sendo intimamente ligada à informação, a óptica é uma área de grande importância na era atual.

Nesse trabalho trataremos de uma controvérsia da teoria óptica, o debate Abraham-Minkowski. Controvérsias fazem parte da ciência. Muitos trabalhos são amplamente criticados quando propostos, e levam anos para ser aceitos pela comunidade científica, e ainda mais que isso pelo público leigo. Na figura 1.1 temos exemplos de três controvérsias (a teoria heliocêntrica de Copérnico, a teoria da relatividade de Einstein, o aquecimento global) e o tempo estimado que levaram para serem aceitas tanto pela comunidade científica, em azul,

quanto pelo público, em verde. O raio significa ação organizada por opositores, sejam eles científicos, políticos ou religiosos.

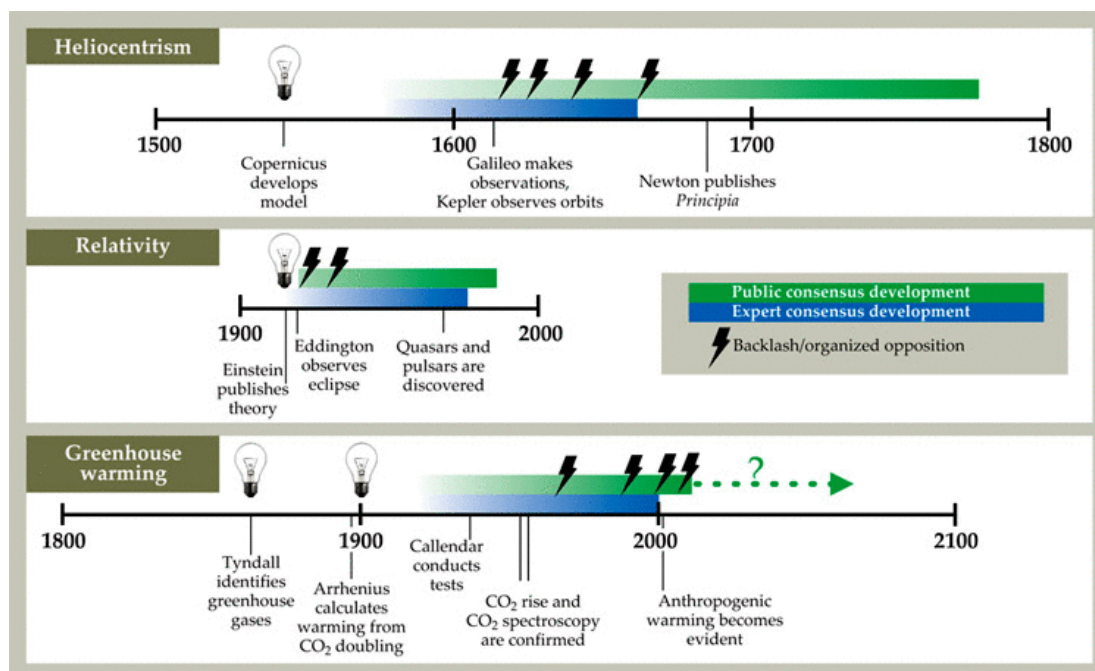


Figura 1.1: Linha do tempo para as controvérsias heliocentrismo, relatividade geral e aquecimento global. Fonte: <http://dx.doi.org/10.1063/PT.3.1295> - Acesso: dezembro 2014

O debate Abraham-Minkowski trata de formulações diferentes para o momento linear de um pulso de onda eletromagnética clássica que se propaga em um meio material. As formulações para essas características são muito bem aceitas na comunidade científica quando se trata de propagação no vácuo, mas, no meio material, a onda interage com as cargas, e transfere energia e momento para elas, que por sua vez se movimentam, modificando os campos que compõem a onda. Abraham e Minkowski fizeram duas formulações, por muito tempo consideradas contraditórias, que se tornaram as mais famosas para o problema, mas não foram as únicas formulações para o problema, outras foram feitas ao longo do século XX [1].

As formulações de Abraham e Minkowski se baseavam no formalismo de tensores energia-momento, que são objetos matemáticos que possuem termos associados à densidade de energia, densidade de momento, fluxo de energia e fluxo de momento, permitindo o cálculo da transferência de energia e momento entre regiões distintas do espaço a partir dos campos

eletromagnéticos e das propriedades dos meios. A partir deles pode-se calcular a densidade de energia e a densidade de momento da onda eletromagnética, entre outras propriedades. A principal diferença entre os dois é a previsão para o momento da onda no meio. Abraham previa que o momento seria inversamente proporcional ao índice de refração, tendo densidade $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, enquanto Minkowski previa que o momento seria proporcional ao índice de refração, com densidade $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$, em que \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico, \mathbf{B} o campo magnético. O deslocamento elétrico se relaciona com a polarização \mathbf{P} pela identidade $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, sendo ε_0 a permissividade elétrica do vácuo; e o campo \mathbf{H} se relaciona com a magnetização \mathbf{M} pela relação $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. Vários experimentos foram feitos ao longo do século XX a fim de determinar qual das duas formulações era a correta, resultados que partiam diretamente do cálculo da força de Lorentz concordavam com a formulação de Abraham, e os resultados a partir da medição da pressão de radiação em objetos submersos concordavam com a formulação de Minkowski [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

A resolução do debate surge da identificação de que as formulações de Abraham e Minkowski são incompletas se analisadas isoladamente, nenhuma das duas descreve completamente o sistema [10]. Para que seja atingida essa descrição completa, é necessário considerar não apenas os tensores energia-momento eletromagnéticos, mas também os tensores energia-momento materiais, e assim as duas formulações são equivalentes prevendo os mesmos resultados experimentais. Também podemos analisar o problema do ponto de vista de que o eletromagnetismo reconhece dois momentos lineares distintos, o momento cinético e o momento canônico. O momento de Abraham deve ser identificado como momento cinético, e o de Minkowski como momento canônico [11, 12, 13]. Esse debate será discutido com mais detalhe no capítulo 2.

O objetivo desse trabalho é avaliar o momento linear de um pulso de onda eletromagnética em um meio dielétrico, à luz do debate Abraham-Minkowski. Consideraremos um sistema simples de interação de um pulso de luz com um átomo ressonante inserido em um meio dielétrico linear não-dispersivo. O modelo consiste em um tratamento clássico para o átomo, considerando o núcleo fixo e a nuvem eletrônica como um oscilador harmônico. A oscilação do dipolo elétrico do átomo gera uma segunda onda eletromagnética que

se superpõe com o pulso incidente. Faremos cálculos da energia e do momento das ondas eletromagnéticas e transmitidos para o átomo ressonante e para o meio. Campbell e colaboradores [9], concluíram que o momento recebido de um fóton por um átomo de um gás é o momento de Minkowski, e compararemos seu resultado experimental com nossos cálculos teóricos. Também faremos o cálculo do momento material da onda diretamente pela força de Lorentz, ou seja, consideraremos que o momento eletromagnético da onda é segundo a formulação de Abraham, como foi feito por alguns autores [14, 15, 16, 17]. Em meios magnéticos, no entanto, se calcularmos a parte material do momento pela força de Lorentz, a densidade de momento eletromagnético fica $\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ [18, 19].

No capítulo 3 faremos uma revisão de temas envolvidos nos cálculos desta dissertação. A descrição do pulso de onda gaussiano em um meio dielétrico, do modelo de Lorentz para o átomo, da onda emitida por um dipolo elétrico oscilante, e da reação de radiação, causada pela atuação do campo gerado por uma partícula acelerada, sobre a própria partícula. O pulso gaussiano é um tipo de pulso paraxial, ou seja, tem dispersão angular pequena, com frentes de onda praticamente planas, e é interessante por ser a melhor descrição de um pulso produzido por um laser.

No capítulo 4 utilizaremos o pulso descrito no capítulo anterior para analisarmos um modelo atômico simples, e faremos cálculos das energias da onda, transferida para o átomo, transferida para o meio, e perdida por reação de radiação, bem como momento linear da onda, transferido para o átomo e transferido para o meio. Por fim, calculamos a razão entre momento e energia da onda, e discutimos o resultado com base no debate Abraham-Minkowski.

Capítulo 2

O Debate Abraham-Minkowski

2.1 Controvérsia

As equações de Maxwell macroscópicas, no sistema internacional, são [20]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1d)$$

em que \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{D} é o vetor deslocamento elétrico, \mathbf{B} o campo magnético, ρ_l e \mathbf{J}_l as densidades de carga e corrente livres, respectivamente. O deslocamento elétrico se relaciona com a polarização \mathbf{P} pela identidade $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, sendo ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo; e o campo \mathbf{H} se relaciona com a magnetização \mathbf{M} pela relação $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 -$

\mathbf{M} , sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. O fluxo de energia eletromagnética, em qualquer lugar do espaço, é dado pelo vetor de Poynting $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$, definido como [20]

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

e o momento linear de uma onda eletromagnética, no vácuo, tem a seguinte forma [20]:

$$\mathcal{P} = \int d^3r \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (2.3)$$

Quando uma onda se propaga em um meio dielétrico, porém, seu momento muda, e a busca pela maneira correta de expressar o momento linear de uma onda eletromagnética em um meio dielétrico deu luz a um debate que dura cerca de um século no meio científico, o chamado debate Abraham-Minkowski. Duas maneiras de descrever o momento linear de uma onda em um meio foram propostas por Minkowski, em 1908, e por Abraham, em 1909, e foram as duas propostas mais famosas, e por isso deram nome à discussão, apesar de outras formulações terem sido feitas ao longo do século XX [1].

Minkowski foi o primeiro autor do qual conhecemos a proposta para a densidade de momento da onda eletromagnética no meio dielétrico, que publicou em 1908 sua expressão

$$\mathbf{P}_{Min} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (2.4)$$

sendo \mathbf{D} o vetor deslocamento elétrico, e \mathbf{B} o campo magnético. Isso significa que o momento de uma onda é proporcional a n ao entrar em um meio dielétrico com índice de refração n , já que sua densidade de momento é proporcional a n^2 , já que $\mathbf{D} \propto n^2$, mas o volume da onda diminui por um fator $1/n$. Já a proposta de Abraham, publicada em 1909, era de que o momento da onda deveria ser, ao contrário de Minkowski, inversamente proporcional a n , sendo sua densidade de momento descrita por

$$\mathbf{P}_{Abr} = (1/c^2) \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (2.5)$$

em que \mathbf{H} é o campo magnético. No caso de Abraham, a densidade de momento não sofre mudança pelo índice de refração, e o volume da onda diminui por um fator $1/n$.

O maior problema enfrentado para comprovar qual formulação é a correta é que o momento de um pulso de onda eletromagnética é um conceito abstrato, e é impossível construir

um experimento que possa medi-lo de maneira direta. O máximo que pode ser feito são medidas indiretas de energia ou momento transferidos para um aparato em um dado conjunto de circunstâncias, que inclui contribuições não só eletromagnéticas, mas também da parte material associada.

A seguir discutiremos alguns experimentos realizados na tentativa de se solucionar o debate.

2.2 Experimentos

2.2.1 Jones et al.

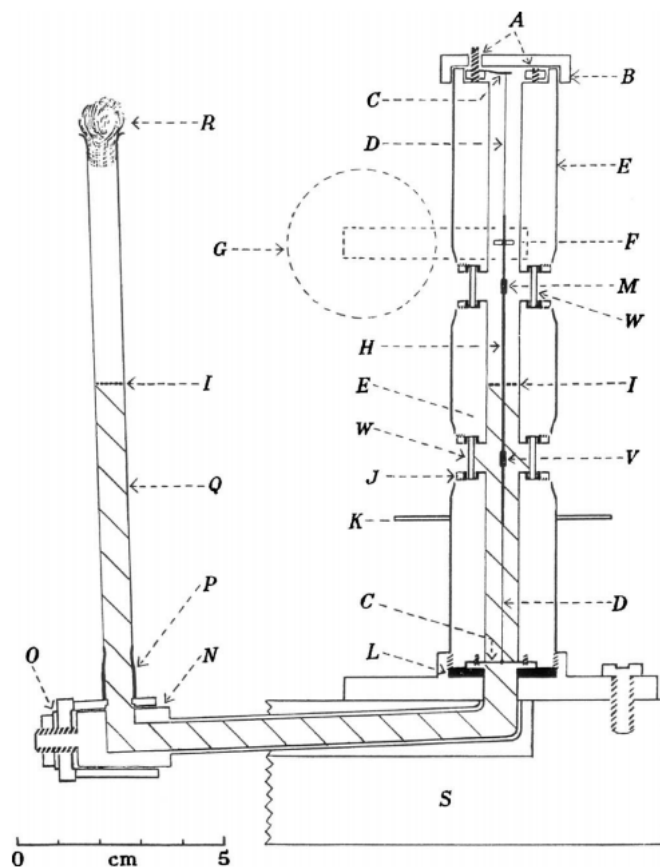


Figura 2.1: Esquema do experimento de Jones e Richards. Da referência [3]

Jones conduziu o primeiro experimento de medição de pressão de radiação de-

vido à luz em um meio refrator, em 1951 [2], e depois refinou esse experimento juntamente com Richards, em 1954 [3]. O arranjo experimental, mostrado na figura 2.1 consiste em um par de espelhos (V e M) presos verticalmente, e amarrados nas extremidades por uma fibra de torção de liga de ouro, em um tubo preenchido parcialmente por um líquido. O espelho V, que está submerso, é submetido a uma radiação assimétrica, que faz com que ele gire, juntamente com o espelho M, até que o torque seja neutralizado pela fibra. O torque é medido através do ângulo do espelho M, e a partir desse valor, mede-se a pressão de radiação no espelho V. Foi observado que a pressão de radiação era proporcional ao índice de refração.

Em 1977, Jones e Leslie [4] repetiram o experimento de 1954, fazendo uso de novas tecnologias. Usando um laser como fonte de luz, ao invés de uma lâmpada de tungstênio, foi possível determinar mais precisamente o índice de refração do líquido. Os espelhos foram melhorados, para diminuir as correntes de convecção geradas pelo aquecimento dos antigos e mais uma vez se observou que a pressão de radiação é proporcional ao índice de refração. Em seu artigo teórico subsequente [5], ele conclui novamente que ambas interpretações seriam aceitáveis, desde que o momento de Abraham fosse dividido em uma parte eletromagnética e uma parte material.

2.2.2 Balazs

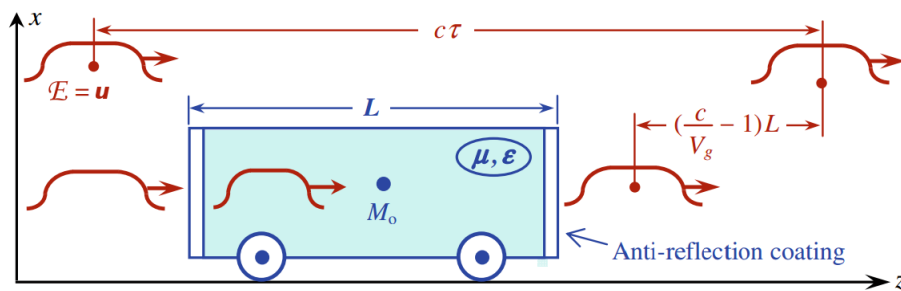


Figura 2.2: Esquema do experimento mental de Balazs. Adaptado da referência [15]

Balazs propôs um experimento mental [6] para mostrar que somente uma das proposições satisfaz simultaneamente a conservação do momento e o teorema do centro de massa-energia, no qual o centro de massa-energia do sistema está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, dada a ausência de forças externas. O experimento consiste em

um bloco transparente de comprimento L , com revestimento anti-reflexivo nas extremidades de entrada e saída do pulso de luz, fazendo com que o pulso todo seja transmitido. Um pulso de luz passa por dentro do bloco ou por fora. O pulso tem energia u e momento fora do bloco $\mathbf{p} = u/c\hat{k}$. O experimento está esquematizado na figura 2.2. Quando o pulso passa por fora do bloco, o centro de massa-energia se move ao longo do eixo z com velocidade constante $V_{cm} = [u/(u + M_0c^2)]c$, sendo c a velocidade da luz no vácuo e M_0 a massa do bloco, e se move uma distância $u\tau/[c(u/c^2 + M_0)]$ em um tempo τ . Quando o pulso passa pelo bloco, sua velocidade v é menor, então ele percorre uma distância menor que o outro no mesmo tempo, sendo essa diferença $[(c/v) - 1]L$. Sendo assim, para que o centro de massa-energia continue na mesma posição do caso anterior, o bloco deve se deslocar $\Delta z = [(c/v) - 1]Lu/c^2M_0$ para a direita. Com isso, o momento do bloco nesse intervalo de tempo τ deve ser

$$\mathbf{p}_b = \frac{u}{c^2}(c - v)\hat{k}. \quad (2.6)$$

O momento inicial, que corresponde ao momento do pulso eletromagnético $\mathbf{p} = u/c\hat{k}$, deve ser conservado, portanto o momento do pulso dentro do bloco deve ser

$$\mathbf{p}_{e.m.} = (u/c)(v/c)\hat{k}, \quad (2.7)$$

ou seja, o momento diminuiu de (v/c) com relação ao seu valor no espaço livre. Lembrando que, em um meio não dispersivo, o índice de refração n é dado por $n = (c/v)$, isso significa que o momento do pulso eletromagnético dentro do bloco é $\mathbf{p}_{e.m.} = (u/nc)$, o momento de Abraham.

Balazs não só chegou à conclusão de que o momento de Abraham seria o correto, quanto que o momento de Minkowski deveria fazer com que o bloco se movesse no sentido contrário ao da propagação do pulso, o que viola o teorema do centro de massa-energia.

2.2.3 Walker, Lahoz e Walker

Walker e colaboradores [7, 8] montaram um experimento a fim de demonstrar experimentalmente a existência da força de Abraham, de densidade $\chi_e \varepsilon_0 \partial/\partial t(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ em um meio dielétrico não-magnético. Essa força não aparece na formulação de Minkowski. A

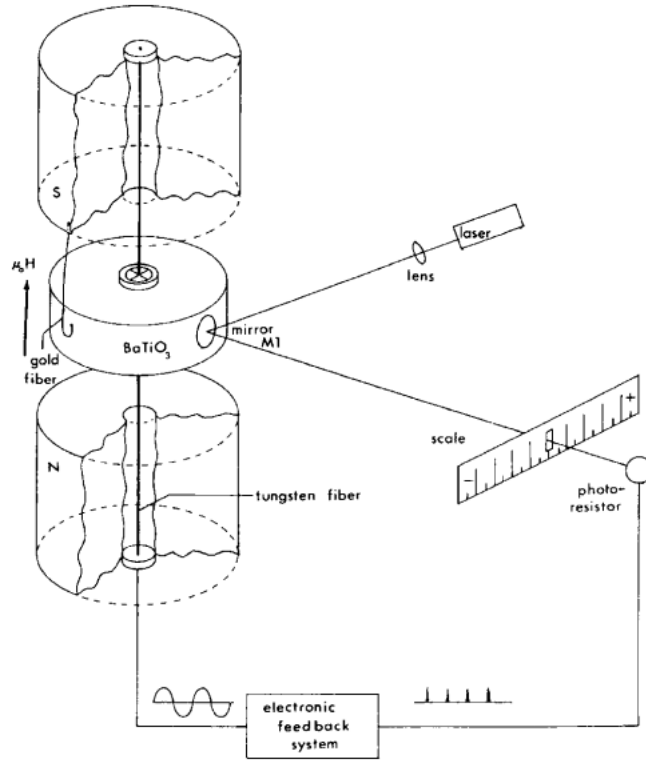


Figura 2.3: Esquema do experimento de Walker et al.. Da referência [8]

equipe mediu o torque sobre um disco de titanato de bário suspenso por uma fibra de torsão em um campo magnético axial constante, e um campo elétrico radial dependente do tempo. O experimento está esquematizado na figura 2.3.

As oscilações do disco foram medidas refletindo um laser em um espelho preso no disco. O período do campo elétrico foi sincronizado com as oscilações do disco, para que a resposta do sistema fosse maximizada. Após algum tempo, o disco, que estava inicialmente em repouso, passou a oscilar, confirmando a existência da força de Abraham, portanto esse experimento foi considerado como comprovação da proposta de Abraham.

2.2.4 Campbell et al.

O debate Abraham-Minkowski não é restrito somente à física clássica, e existem muitos experimentos e discussões sobre o debate no domínio da física quântica, esse experimento é um deles.

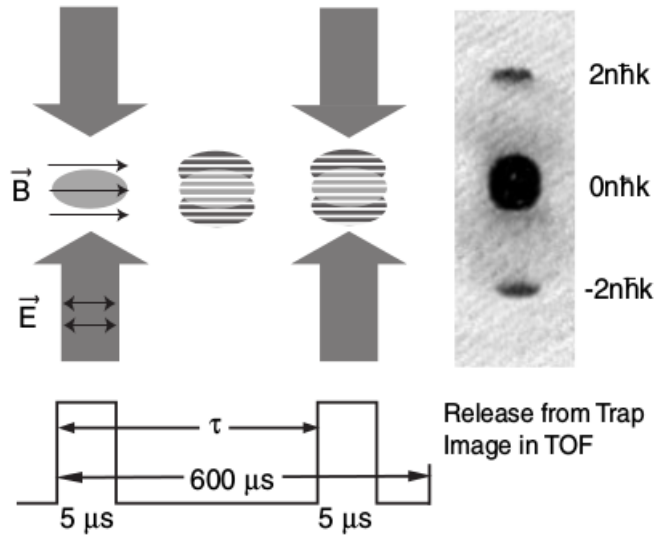


Figura 2.4: Esquema do experimento de Campbell et al. Da referência [9]

A ideia do experimento de Campbell et al. [9] era medir interferometricamente a energia cinética de átomos por refletir um fóton (uma partícula de luz) em um gás diluído. O gás utilizado foi um condensado de Bose-Einstein de ^{87}Rb criado em uma armadilha magnética. Nas condições iniciais do experimento todos os átomos tinham momento praticamente nulo, no que chamaremos de estado fundamental. O condensado recebe dois pulsos de ondas ópticas contrapropagantes. Há uma amplitude de probabilidade de que alguns átomos espalhem fótons do primeiro pulso de um modo para outro (por exemplo, do modo que se propaga para cima para o modo que se propaga para baixo na figura 2.4), ficando com duas vezes o momento do fóton. Espera-se um tempo τ variável e o condensado é submetido a outro pulso, idêntico ao primeiro. Há então uma amplitude de probabilidade de que os átomos de que os átomos voltem ao estado inicial, porém com uma fase em relação à situação em que não espalham fótons nem no primeiro, nem no segundo pulsos. Essa fase surge porque a evolução da função de onda depende da energia do átomo, e ao refletir o fóton a energia ganha um termo cinético, que não existe na amplitude de probabilidade do átomo que esteve desde o princípio no estado fundamental. Essa fase gera interferência na medida da fração de átomos no estado inicial ao variarmos o tempo τ , que oscila com a frequência proporcional à energia cinética. A partir da energia cinética foi identificado que o momento transferido para os átomos é o momento de Minkowski, proporcional ao índice de refração do condensado de Bose-Einstein.

2.3 Conclusões

O debate Abraham-Minkowski, sobre a maneira correta de expressar o momento de um pulso de onda eletromagnética em um meio dielétrico, foi resolvido depois de haver o reconhecimento de que nenhuma das duas interpretações está totalmente correta, nem totalmente errada [10]. O momento do pulso não está completamente descrito sem se considerar a parte material que o acompanha, ou seja, toda expressão que considerar somente a parte eletromagnética é arbitrária e incompleta, mas as duas partes juntas sempre levam ao mesmo resultado. Dessa maneira os resultados experimentais devem ser obtidos fazendo uso de qualquer uma das duas formulações. E de fato são.

Gordon [14], mostrou que enquanto o momento de Abraham representa o momento da onda eletromagnética, a formulação de Minkowski pode ser usada para calcular a pressão de radiação em objetos imersos em meios dielétricos. Gordon mostrou que é um erro pensar que pode-se desprezar as propriedades mecânicas do meio, e que os experimentos que medem pressão de radiação, assim como o de Jones e Richards [3?] podem ser descritos pela formulação de Minkowski. O experimento mental de Balazs [6] também pode ser descrito usando a formulação de Minkowski. O momento da barra é considerado momento material pela formulação de Abraham, enquanto a formulação de Minkowski reconhece que o momento surge e propaga devido à presença da onda, ou seja, para Minkowski o momento da barra também faz parte do momento eletromagnético.

De acordo com Barnett [11, 12, 13], o problema pode ser encarado como os momentos de Abraham e Minkowski sendo duas partes diferentes de um momento total, material mais eletromagnético, que se conserva, sendo o momento de Abraham o momento cinético, e o momento de Minkowski o momento canônico. Para demonstrar essa relação, partiremos da lagrangeana de uma partícula neutra não-relativística, com momento de dipolo elétrico e magnético, em um campo eletromagnético:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{p}, \quad (2.8)$$

em que $\boldsymbol{\mu}$ é o momento de dipolo magnético e \mathbf{p} é o momento de dipolo elétrico. O momento de dipolo elétrico, em movimento, gera momento de dipolo magnético, da seguinte maneira

[21]:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 - \mathbf{v} \times \mathbf{p}_0, \quad (2.9)$$

sendo $\boldsymbol{\mu}_0$ o momento de dipolo magnético de repouso. Simetricamente, o momento de dipolo magnético, em movimento, gera um momento de dipolo elétrico:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}_0}{c^2}, \quad (2.10)$$

em que \mathbf{p}_0 é o momento de dipolo elétrico de repouso. Substituindo essas relações em 2.8, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}_0 - \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{p}_0) + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}_0}{c^2} + \frac{\mathbf{E}}{c^2} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}_0). \quad (2.11)$$

Usamos a relação $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A)$ e calculamos cada componente do momento canônico $\partial\mathcal{L}/\partial v_i$:

$$P_{i-can} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_i} = mv_i - (\mathbf{p}_0 \times \mathbf{B})_i + \frac{(\boldsymbol{\mu}_0 \times \mathbf{E})_i}{c^2}. \quad (2.12)$$

Portanto, a diferença entre o momento cinético ($m\mathbf{v}$) e o canônico é

$$\mathbf{P}_{can} - \mathbf{P}_{cin} = -\mathbf{p}_0 \times \mathbf{B} + \frac{\boldsymbol{\mu}_0 \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (2.13)$$

Se tivermos uma densidade de dipolos elétricos \mathcal{P} e uma densidade de dipolos magnéticos \mathcal{M} :

$$\mathbf{P}_{can} - \mathbf{P}_{cin} = -\mathcal{P} \times \mathbf{B} + \frac{\mathcal{M} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (2.14)$$

Essa diferença é a mesma entre o momento de Abraham e o de Minkowski:

$$\mathbf{P}_{Min} - \mathbf{P}_{Abr} = \mathcal{P} \times \mathbf{B} - \frac{\mathcal{M} \times \mathbf{E}}{c^2}, \quad (2.15)$$

Sendo \mathbf{P}_{Min} e \mathbf{P}_{Abr} os momentos de Abraham e Minkowski, das equações (2.5) e (2.4). Dessa forma identificamos os termos da equação 2.14 como o momento de Abraham e Minkowski, sendo [22]:

$$\mathbf{P}_{cin}^{mat} + \mathbf{P}_{Abr} = \mathbf{P}_{can}^{mat} + \mathbf{P}_{Min}, \quad (2.16)$$

e podemos dizer que o momento total é o momento cinético material mais o momento de Abraham, ou o momento canônico material mais o momento de Minkowski.

Para Kemp [23], o momento de Abraham seria o momento do campo eletromagnético, que não contém contribuições da massa no sistema, e o momento de Minkowski seria o momento

da onda eletromagnética propagante, que inclui contribuições tanto do campo, quanto da matéria. Esses dois momentos dão origem, na teoria quântica, respectivamente, aos momentos cinético e canônico do fóton. Kemp também argumenta que o debate só existe por motivo de um equívoco de "plataforma", a questão física, diz, não é qual dos momentos é *correto*, mas sim qual deles é *mensurável*.

A limitação para a construção de uma expressão definitiva para o momento da luz em um meio não surge do eletromagnetismo, mas sim de ciência dos materiais. É possível escrever todas as contribuições ao tensor energia-momento que são relevantes em um meio ideal particular, mas fazê-lo para um meio real generalizado está além do escopo atual do nosso entendimento. Felizmente, em muitas circunstâncias não é necessário conhecimento completo das propriedades do material, ele pode se comportar próximo o suficiente do ideal, ou ser necessário somente o entendimento sobre o centro de massa e podemos desprezar efeitos de forças e tensões internas que somente redistribuem as forças aplicadas. A existência de trabalhos que ainda defendem essa ou aquela formulação parece ser devido à natureza fragmentada da literatura sobre o assunto.

Capítulo 3

Ondas eletromagnéticas em meios dielétricos

Nesse capítulo faremos uma revisão de assuntos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Partindo das equações de Maxwell demonstraremos a equação da onda e a equação de Helmholtz. Depois mostraremos o feixe monocromático, o feixe paraxial, e finalmente o feixe Gaussiano. Discutiremos o modelo de Lorentz para o átomo, que consiste em tratar o átomo como oscilador harmônico; a onda emitida por um dipolo elétrico oscilante, e a reação de radiação, efeito causado pela a variação da aceleração de uma partícula carregada.

3.1 Pulso de Onda Gaussiano

3.1.1 Equação de Onda

Em uma região do espaço em que não há cargas nem correntes, as equações de Maxwell dizem que[20, 24]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.1d)$$

que são equações diferenciais de primeira ordem, acopladas, para \mathbf{E} e \mathbf{B} . Se aplicarmos o operador rotacional em (3.1c) e (3.1d) e utilizarmos a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ e as equações (3.1a) e (3.1b) para simplificação, obtemos[20, 24]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

que são equações separadas para \mathbf{E} e \mathbf{B} , porém de segunda ordem, de modo que, no vácuo, cada componente de \mathbf{E} e \mathbf{B} obedecem à equação de onda [20]

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

com velocidade $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Através desse resultado e de a velocidade da luz ter sido medida com valor c , Maxwell se convenceu de que a luz era formada por ondas eletromagnéticas. Considerando que os campos oscilem com frequência ω , podemos escrever: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, sendo os campos a parte real das expressões em notação complexa. Se substituirmos esses campos na equação de onda (3.2), vemos que os campos devem obedecer à equação de Helmholtz[25]

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.3)$$

com $k = \omega/c$ e $U(\mathbf{r})$ o campo escalar que representa uma componente de \mathbf{E} ou \mathbf{B} .

Esse resultado foi obtido com base nas equações de Maxwell no vácuo, mas trabalharemos com ondas que se propagam na matéria, então precisamos encontrar uma

maneira de expressar esse resultado para a onda que se propaga em um dielétrico linear e sem dispersão. Podemos partir das equações de Maxwell microscópicas,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.4b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.4d)$$

em que ρ é a densidade de carga e \mathbf{J} é a densidade de corrente, e escolhendo a equação (3.4a), por exemplo, podemos fazer uma comparação com a equação (2.1a):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 n^2 \mathbf{E} \rightarrow \varepsilon_0 n^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_l \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0 n^2}, \quad (3.5)$$

sendo assim, ao substituir ε_0 por ε (ou $n^2 \varepsilon_0$), e ρ por ρ_l em (3.4a) recuperamos (2.1a). O mesmo pode ser feito partindo da equação (3.4d), para chegarmos à equação (2.1b), e aí devemos fazer também a substituição $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_l$.

Dessa maneira, na equação (3.2), teremos $\mu_0 \varepsilon_0 \rightarrow n^2 \mu_0 \varepsilon_0$, então a velocidade da onda muda de $c \rightarrow c/n$, e o vetor de onda, k , muda para $k = n\omega/c$. Então, toda demonstração que fizemos nesse capítulo, para o vácuo, pode ser facilmente convertida a um resultado para a matéria, simplesmente aplicando as substituições mencionadas.

3.1.2 Feixe monocromático

Consideremos o campo monocromático de frequência ω [25]:

$$V(x, y, z, t) = U(x, y, z; \omega) e^{-i\omega t}, \quad (3.6)$$

propagando no espaço livre, $z > 0$. $U(x, y, z; \omega)$ pode ser escrito como uma superposição de ondas planas, com o mesmo número de onda

$$k = \frac{\omega n}{c}, \quad (3.7)$$

ou seja:

$$U(x, y, z; \omega) = \int \int a(p, q, \omega) e^{ik(px+qy+mz)} dpdq, \quad (3.8)$$

em que $a(p, q, \omega)$ é a amplitude espectral do pulso, e

$$m = \sqrt{1 - p^2 - q^2} \quad \text{quando } p^2 + q^2 \leq 1 \quad (3.9a)$$

$$= i\sqrt{p^2 + q^2 - 1} \quad \text{quando } p^2 + q^2 > 1. \quad (3.9b)$$

As ondas planas com $p^2 + q^2 \leq 1$ são ondas ordinárias e homogêneas que se propagam na direção do vetor unitário (p, q, m) . As que têm $p^2 + q^2 > 1$ são ondas planas evanescentes, cuja amplitude decai exponencialmente com o aumento de z . A amplitude espectral pode ser escrita em termos dos valores de contorno do campo $U(x, y, z; \omega)$ no plano $z = 0$

$$a(p, q; \omega) = k^2 \tilde{U}^{(0)}(kp, kq; \omega), \quad (3.10)$$

em que $\tilde{U}^{(0)}(kp, kq; \omega)$ é a transformada de Fourier espacial bidimensional de $U(x, y, 0; \omega)$:

$$\tilde{U}^{(0)}(kp, kq; \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int U(x, y, z; \omega) e^{-ik(px+qy)} dx dy. \quad (3.11)$$

3.1.3 Feixe paraxial

As relações anteriores são válidas em geral. Para o caso de um feixe, as amplitudes serão desprezíveis, exceto nas direções dos vetores unitários s próximos do eixo do feixe, esse é o chamado feixe paraxial [25]. Para um feixe com eixo coincidente com o eixo z , esse resultado implica que os valores absolutos da amplitude espectral $|a(kp, kq; \omega)|$ serão desprezíveis a menos que $p^2 + q^2 \ll 1$. Fisicamente, isso significa que para um feixe que se propaga próximo à direção $+z$, só as ondas planas cuja direção se encontre em um ângulo sólido estreito ao redor do eixo do feixe tem amplitudes não desprezíveis. Sendo assim, somente (3.9a) se aplica. Podemos fazer uma aproximação dessa expressão pelos primeiros dois termos da sua expansão binomial,

$$m \approx 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (3.12)$$

Se substituirmos essa expressão em $U(x, y, z; \omega)$ da equação (3.8), obtemos a seguinte representação para um feixe monocromático que propaga próximo ao eixo z em sentido positivo:

$$U(x, y, z; \omega) = e^{ikz} \int \int a(p, q; \omega) e^{ik(px+qy)} e^{-ik(p^2+q^2)z/2} dp dq. \quad (3.13)$$

Podemos estudar o feixe paraxial de uma maneira alternativa, sem usar a representação do espectro angular do feixe para obter sua representação. Definimos primeiramente

$$U(x, y, z) = \psi(x, y, z)e^{ikz}. \quad (3.14)$$

Todo feixe real que se propague próximo ao eixo z deverá variar com x , y e z , mas se a dispersão angular é suficientemente pequena, a variação em z será muito menor que as outras. Assumiremos que essa variação é tão pequena que $|\partial^2\psi/\partial z^2| \ll 2k|\partial\psi/\partial z|$. Substituindo na equação de Helmholtz (3.3), e desprezando o termo de derivada segunda em z , encontramos que $\psi(x, y, z)$ satisfaz à equação paraxial de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (3.15)$$

Isolando ψ na equação (3.14), e usando a representação (3.13) para $U(x, y, z)$:

$$\psi(x, y, z) = \int \int a(p, q)e^{ik(px+qy)}e^{-ik(p^2+q^2)z/2} dpdq \quad (3.16)$$

3.1.4 Feixe Gaussiano

O feixe gaussiano é um campo bastante direcional, produzido por grande parte dos lasers mais comuns, gerado pela distribuição [25]:

$$U(x, y, 0) = Ae^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \quad (3.17)$$

em $z = 0$, em que A e w_0 são constantes positivas. Observamos que quando $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = w_0$, U cai para $1/e$ do valor máximo $U(0, 0, 0) = A$ no centro. Primeiramente temos que calcular $a(p, q)$:

$$a(p, q) = A \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \int \int e^{-(x^2+y^2)/w_0^2} e^{-ik(px+qy)} dx dy. \quad (3.18)$$

A integral é avaliada usando a seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 t^2} e^{-iqt} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-q/4\beta^2}, \quad (3.19)$$

e ficamos com:

$$a(p, q) = \frac{A(kw_0)^2}{4\pi} e^{-(kw_0)^2(p^2+q^2)/4}. \quad (3.20)$$

Para que essa expressão represente um feixe, $|a(p, q)|$ só pode ter valores não desprezíveis quando $p^2 + q^2 \ll 1$. A expressão (3.20) tem valor máximo quando $p = q = 0$ e diminui para $1/e$ do seu máximo quando $(p^2 + q^2) = 4/(kw_0)^2$. Como $k = 2\pi/\lambda$, essa condição é equivalente a

$$w_0 \gg \lambda/\pi, \quad (3.21)$$

ou seja, w_0 deve ser muito maior do que o comprimento de onda, para que a distribuição Gaussiana no plano $z = 0$ gere um feixe Gaussiano no subespaço $z \gg 0$. O feixe Gaussiano tem a seguinte representação espectral:

$$U(x, y, z) = \frac{A(kw_0)^2}{4\pi} e^{ikz} \int \int e^{-[(kw_0)^2/4 + ikz/2](p^2 + q^2)} e^{ik(px + qy)} dpdq. \quad (3.22)$$

Essas integrais podem ser calculadas utilizando (3.19). Definimos agora o vetor transversal $\rho \equiv (x, y)$ e obtemos:

$$U(x, y, z) = \frac{A(kw_0)^2}{(kw_0)^2 + 2ikz} e^{-(k\rho)^2/[(kw_0)^2 + 2ikz]} e^{ikz}. \quad (3.23)$$

Definimos os seguintes parâmetros que serão utilizados para evidenciar as características do feixe [26]:

$$z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (3.24)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2}, \quad (3.25)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_r}{z}\right)^2\right], \quad (3.26)$$

$$\xi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_r}\right). \quad (3.27)$$

Substituindo os novos parâmetros, temos:

$$U(\rho, z) = A \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] e^{-\rho^2/w(z)^2} e^{i\{k[z + (\rho^2/2R(z))] - \xi(z)\}}. \quad (3.28)$$

Essa equação foi obtida para o feixe na região $z > 0$, mas também é válida na região $z < 0$. O parâmetro z_r , conhecido como *comprimento de Rayleigh*, é uma distância característica do feixe ao longo da sua direção de propagação, que estabelece uma escala para a variação dos outros parâmetros definidos acima. Podemos ver pela figura 3.1a, que a intensidade do feixe, $I(\rho, z) = |U(\rho, z)|^2$, é sempre gaussiano. A intensidade é máxima em $\rho = 0$ e cai para $1/e^2$ do máximo em $\rho = w(z)$. Temos, então, que $w(z)$ é a chamada *largura do feixe*. Na

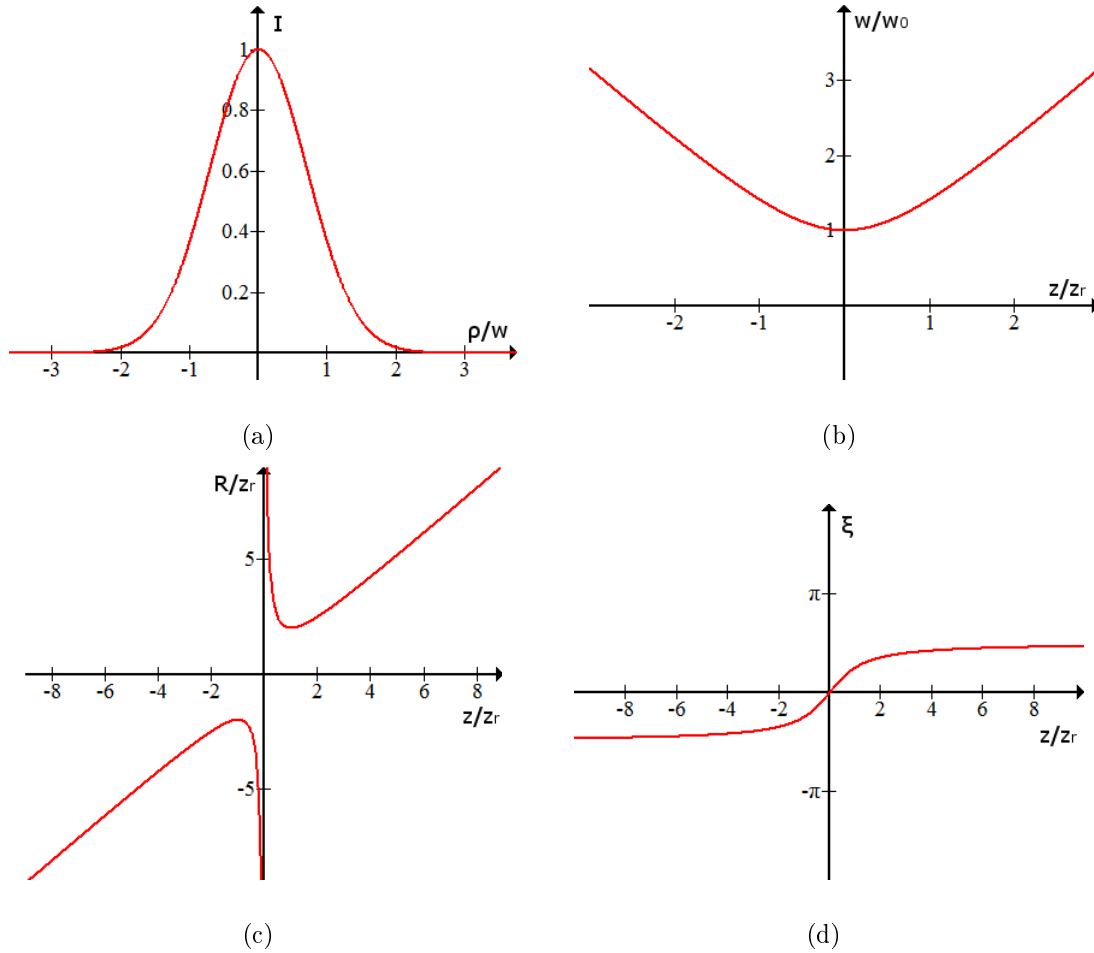


Figura 3.1: Parâmetros de um feixe Gaussiano que se propaga na direção z : a) Intensidade do campo em função da distância do eixo em z um plano z constante. b) Largura do feixe em função de z . c) Raio de curvatura da frente de onda em função de z . d) Fase de Guoy em função de z .

figura 3.1b vemos que o valor mínimo de $w(z)$ é w_0 no plano $z = 0$. Nas figuras 3.1c e 3.2 vemos o comportamento de $R(z)$, que representa a curvatura da frente de onda no plano z . Em $z = 0$ e $z = \infty$ o valor de $R(z)$ é infinito, portanto a onda é praticamente plana. A frente de onda corresponde à aproximação de uma onda esférica centrada em um ponto a uma distância $R(z)$ do plano de observação como ilustrado na figura 3.2. O parâmetro $\xi(z)$, chamado *fase de Guoy* é uma anomalia da fase do campo próximo ao foco. Vemos o comportamento desse parâmetro na figura 3.1d. A fase de Guoy gera um adiantamento da fase do feixe em relação a uma onda plana com o mesmo comprimento de onda.

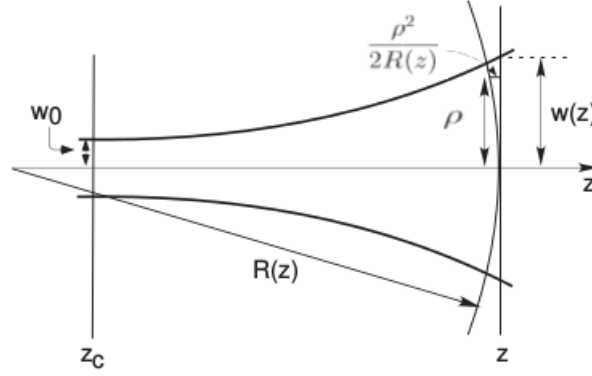


Figura 3.2: Ilustração do significado geométrico do parâmetro $R(z)$, a curvatura da frente de onda. Da referência [26]

3.1.5 Pulso Gaussiano

Nesse trabalho não usaremos feixes monocromáticos, mas pulsos de onda Gaussiana. Por serem limitados no espaço, os pulsos não podem ser monocromáticos, dado que a limitação espacial surge justamente pela interferência destrutiva entre as várias frequências que compõem o pulso, criando um pacote. Apesar disso, usaremos a aproximação monocromática, considerando que o pacote de onda é grande o suficiente para que as frequências que o compõem sejam muito próximas, e consideraremos frequência única. A diferença entre a equação de feixe e a equação do pulso é a multiplicação pelo pacote gaussiano $\exp[-(nz - ct)^2/\Gamma^2]$. O campo elétrico do pulso gaussiano será escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{E}(\rho, z, t) = \frac{Aw_0}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w(z)^2}} e^{i\left\{k\left[z + \frac{\rho^2}{2R(z)}\right] - \xi(z) - \omega t\right\}} e^{-\frac{(nz-ct)^2}{\Gamma^2}} \hat{i} \quad (3.29)$$

3.2 O modelo de oscilador harmônico

Utilizaremos o modelo de Lorentz para um átomo ressonante interagindo com o pulso da equação (3.29). O átomo será modelado com uma nuvem eletrônica como oscilador harmônico amortecido, forçado pelo campo elétrico oscilante incidente. O núcleo atômico será considerado fixo na origem do sistema de coordenadas. A força que atua em uma carga negativa ($-q$), que se move com velocidade v na presença de campos elétrico \mathbf{E} e magnético

\mathbf{B} é dada por [20]

$$\mathbf{F} = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.30)$$

e é chamada força de Lorentz. Essa é a força de interação entre os campos da onda eletromagnética incidente e a nuvem eletrônica do átomo ressonante. O sistema será regido pela seguinte equação diferencial [27]

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -q\mathbf{E} - \gamma' m \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\mu_0 q^2 n}{6\pi c} \frac{d^3 \mathbf{x}}{dt^3} - K\mathbf{x}, \quad (3.31)$$

sendo m , \mathbf{x} e $(-q)$ a massa, a posição do centro de massa e a carga da nuvem eletrônica, respectivamente, μ_0 a permeabilidade magnética do espaço livre, c a velocidade da luz no vácuo, γ um coeficiente de amortecimento associado à absorção de radiação pelo átomo, n o índice de refração do meio e K a constante elástica associada ao potencial do núcleo. Do lado direito da equação, os termos representam a força de Lorentz, uma força de amortecimento proporcional à velocidade da nuvem eletrônica, a reação de radiação (que será explicada em uma sessão seguinte) e a força elástica, respectivamente. A força magnética foi omitida, porque é muito menor que a elétrica no caso tratado.

Consideraremos que as dimensões do átomo são muito menores que o comprimento de onda λ , de forma que \mathbf{E} é constante no átomo. O campo elétrico (3.29), na origem do sistema de coordenadas, é escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{E}_i(0, t) = A e^{-i\omega t} e^{-\frac{c^2 t^2}{r^2}} \hat{i} \quad (3.32)$$

em notação complexa. O campo real é dado por $\Re[\mathbf{E}]$. Supondo solução do tipo $\mathbf{x}(t) = x_0 e^{-i\omega t} e^{-\frac{c^2 t^2}{r^2}} \hat{i}$, sendo ω a frequência do campo incidente, e substituindo na equação diferencial (3.31), temos

$$\left(-m\omega^2 - i\omega m\gamma' - i\omega^3 \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} + K \right) \mathbf{x} = -q\mathbf{E}_i(0, t). \quad (3.33)$$

A ausência dos termos com Γ advindos da derivada temporal de \mathbf{x} , pode ser vista na figura 3.3. Consideraremos $\Gamma/c \gg T$, em que T representa o período da onda. A variação do envólucro é pequena demais em vista da variação da fase da onda, por isso desprezamos esses termos. Podemos definir um novo fator de amortecimento $\gamma \equiv \gamma' + \frac{\omega^2 \mu_0 q^2}{6\pi m c}$, e escrever a posição do elétron em função do campo incidente como [27]

$$\mathbf{x} = \frac{-q\mathbf{E}_i(0, t)}{-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K}. \quad (3.34)$$

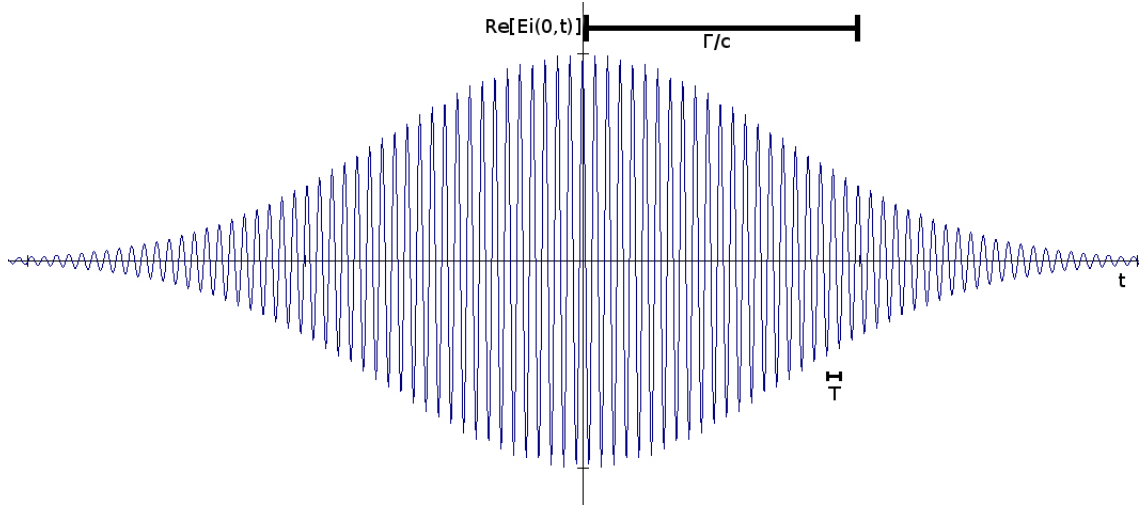


Figura 3.3: Gráfico de $\Re[E_i(0,t)]$ mostrando a diferença de grandeza entre Γ e T .

Considerando o regime de ressonância, ou seja, com $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, temos:

$$\mathbf{x} = \frac{q\mathbf{E}_i(0,t)}{i\omega m\gamma}. \quad (3.35)$$

Daí podemos calcular a velocidade do centro de massa da núvem eletrônica $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$:

$$\mathbf{v} = \frac{q}{i\omega m\gamma} \frac{\partial \mathbf{E}_i(0,t)}{\partial t} = \frac{-q\mathbf{E}_i(0,t)}{m\gamma}. \quad (3.36)$$

É importante ressaltar que as posições e velocidades reais são dadas por $\Re[\mathbf{x}]$ e $\Re[\mathbf{v}]$.

3.3 Emissão de dipolo

No modelo de Lorentz, usado nesse trabalho, o átomo ressonante é tratado como um oscilador harmônico, com núcleo fixo, e a núvem eletrônica tendo seu centro de massa acelerado pelo campo elétrico da onda incidente. O centro de massa da núvem eletrônica e o núcleo formam um dipolo elétrico, que oscila e emite uma onda de dipolo. A equação para determinarmos o potencial vetor para fontes não estáticas é [20]

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r} d^3r', \quad (3.37)$$

sendo \mathbf{J} a densidade de corrente, t_r o tempo retardado, dado por $t_r = t - rn/c$. Usamos tempo retardado, porque a informação viaja à velocidade da luz, portanto não interessa o

status da fonte nesse momento, mas sim em um tempo anterior, t_r . A densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{J} = -q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r}') = \frac{q^2\mathbf{E}\delta(\mathbf{r}')}{m\gamma}, \quad (3.38)$$

com \mathbf{v} da equação (3.36). Substituindo a densidade de corrente na equação do potencial vetor, podemos resolver a integral, ficando com

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{A\mu_0q^2}{4\pi\gamma mr} e^{-i\omega(t-\frac{nr}{c})} e^{-\frac{(ct-nr)^2}{\Gamma^2}} \hat{i}. \quad (3.39)$$

Podemos escrever \hat{i} em coordenadas esféricas, e tomar o rotacional do potencial vetor para encontrar o campo magnético [24]:

$$\mathbf{B}_d = \frac{\mu_0ck^2}{4n\pi} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right). \quad (3.40)$$

Sendo \mathbf{r} o versor direcional, e \mathbf{p} o momento de dipolo do átomo, dado por:

$$\mathbf{p} = -\frac{Aq^2}{i\omega m\gamma} e^{-i\omega t} e^{-c^2t^2/\Gamma^2} \hat{i}. \quad (3.41)$$

O campo elétrico é dado por [24]:

$$\mathbf{E}_d = \frac{ic}{nk} \nabla \times \mathbf{B}_d, \quad (3.42)$$

ou explicitamente:

$$\mathbf{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r} \frac{e^{ikr}}{r} + [3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p})] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \right\}, \quad (3.43)$$

sendo, na zona de radiação:

$$\mathbf{E}_d = -\frac{A\mu_0q^2\omega}{4\pi\gamma mr} e^{-i[\omega(t-\frac{rn}{c})-\frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{(ct-nr)^2}{\Gamma^2}} ((\mathbf{r} \times \hat{i}) \times \mathbf{r}). \quad (3.44)$$

Na zona de radiação, o campo magnético é:

$$\mathbf{B}_d = -\frac{A\mu_0q^2\omega n}{4\pi\gamma mcr} e^{-i[\omega(t-\frac{rn}{c})-\frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{(ct-nr)^2}{\Gamma^2}} (\mathbf{r} \times \hat{i}). \quad (3.45)$$

3.4 Reação de radiação

A reação de radiação, também conhecida como força de Abraham-Lorentz, é uma força de recuo que age sobre uma carga elétrica em arrancada, ou seja, cuja aceleração

varia. Essa força é um efeito de "coice" dos campos da própria partícula, agindo sobre ela mesma. Devido a esse amortecimento, uma partícula neutra sob influência de uma força acelera mais do que uma partícula carregada sob influência da mesma força, porque parte da energia que a carga recebe, ela irradia ao acelerar. Nessa seção vamos mostrar como é a força de Abraham-Lorentz, baseado na seção 11.2.2 do livro do Griffiths [20]. A fórmula de Larmor indica a potência radiada por uma partícula não relativística:

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}, \quad (3.46)$$

em que a é a aceleração da carga. Podemos pensar que a potencia radiada é a taxa de perda de energia da partícula, sob influência da força de reação de radiação

$$\mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}, \quad (3.47)$$

porém essa expressão não leva em consideração toda troca de energia da partícula com o campo, somente a que é radiada para o infinito. A energia perdida em um intervalo qualquer, deve ser igual à energia levada pela radiação, somada a qualquer outra troca entre a partícula e os campos. Se considerarmos somente pontos em que a partícula retorna ao estado inicial, então a equação acima, apesar de estar errada em um instante arbitrário, funciona na média:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt. \quad (3.48)$$

Fazemos a substituição $a^2 = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$ e integrando o lado direito da equação por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} a^2 dt = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (3.49)$$

Como os estados inicial e final são iguais, o primeiro termo desaparece. Podemos escrever (3.48) como

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{rad} - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}\right) \cdot \mathbf{v} dt = 0, \quad (3.50)$$

que claramente é satisfeita se

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}. \quad (3.51)$$

Essa é a fórmula da força de Abraham-Lorentz para a força da reação de radiação no vácuo. No nosso caso, como trataremos de um átomo imerso em um meio, a onda emitida será modificada pelo índice de refração, de acordo com as transformações (3.5), sendo sua expressão:

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 n}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}. \quad (3.52)$$

Capítulo 4

Absorção de luz por um átomo em um meio

Neste capítulo será investigado o comportamento de um átomo interagindo em ressonância com um pulso gaussiano de onda eletromagnética, todo o sistema em um meio linear, dielétrico, não dispersivo, não absorvedor e não magnético. Usaremos o modelo de Lorentz para o átomo, um modelo clássico que consiste em tratá-lo como oscilador harmônico amortecido. O átomo é excitado pelo pulso, e a oscilação da sua nuvem eletrônica gera uma onda de dipolo. Calculamos a energia e o momento linear do pulso incidente, do pulso resultante e do sistema atômico, que leva a discussões sobre conservação de energia e momento no processo. Esse cálculo servirá de base para a discussão sobre o debate Abraham-Minkowski, em que a razão entre a densidade de momento e a densidade de energia eletromagnéticas vale $1/(nc)$ na formulação de Abraham, e n/c na formulação de Minkowski.

4.1 Conservação da energia

4.1.1 Energia da onda incidente

Para calcularmos a energia da onda incidente, usaremos a expressão do pulso gaussiano (3.29) no limite $ct \ll -\Gamma$. Nesse limite temos

$$\begin{aligned} w(z) &\simeq \frac{2z}{kw_0}, \\ R(z) &\simeq z, \\ \xi(z) &\simeq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Com isso, o campo elétrico da equação (3.29) tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{E}_i^\infty(x, y, z, t) = \frac{An\omega w_0^2}{2cz} e^{-\rho^2 \frac{n^2 \omega^2 w_0^2}{4c^2 z^2}} e^{i[\frac{n\omega}{c}(z - \frac{\rho^2}{2z}) - \omega t - \frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{(nz-ct)^2}{\Gamma^2}} \hat{i}. \quad (4.2)$$

A energia da onda terá dois termos. O primeiro termo, chamado eletromagnético, representa a energia armazenada nos campos médios \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$U_{e.m.} = \frac{1}{2} \int d^3r \left[\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}_i|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_i|^2 \right]. \quad (4.3)$$

O segundo termo, a energia material, se deve à transferência de energia do pulso eletromagnético incidente para o meio dielétrico em questão. A densidade de trabalho realizado sobre as cargas ligadas, em um material não magnético, é dada por

$$\frac{1}{2} \Re[\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}] = \frac{1}{2} \Re \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right], \quad (4.4)$$

sendo \mathbf{P} a polarização do meio. Devido ao meio ser linear e não dispersivo, a polarização pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t), \quad (4.5)$$

sendo χ_e a susceptibilidade elétrica do meio. Portanto, a variação da densidade de energia material será dada por [24]

$$\frac{1}{2} \Re \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}_i^* \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_e \Re \left[\mathbf{E}_i^* \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t} \right] = \varepsilon_0 \chi_e \frac{1}{4} \frac{\partial |\mathbf{E}_i|^2}{\partial t} = \frac{\partial u_{mat}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

A energia material será a integral de U_{mat} , em todo o espaço:

$$U_{mat} = \int d^3r \chi_e \varepsilon_0 \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{4}, \quad (4.7)$$

Fazendo a substituição $\chi_e = n^2 - 1$, podemos calcular a energia inicial $U_0 = U_{e.m.} + U_{mat.}$. Como $|\mathbf{B}| = \frac{n}{c}|\mathbf{E}|$, podemos trabalhar a expressão da energia, e ficamos com

$$U_0 = \frac{1}{2} \int d^3r \varepsilon_0 n^2 |\mathbf{E}|^2 = \frac{A^2 n^2 \omega^2 w_0^2 \varepsilon_0}{8c^2} \int d^3r \frac{1}{z^2} e^{\frac{\rho^2 n^2 \omega^2 w_0^2}{2c^2 z^2}} e^{-\frac{2(nz-ct)^2}{\Gamma^2}}. \quad (4.8)$$

As integrais em x e y são gaussianas do tipo

$$\int dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (4.9)$$

Depois basta resolver a integral em z, que tem o mesmo formato, e ficamos com o seguinte resultado:

$$U_0 = \frac{A^2 w_0^2 \varepsilon_0 \pi \Gamma n}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.10)$$

Este é o valor da energia total (eletromagnética mais material) da onda incidente.

4.1.2 O trabalho da força de Lorentz

A energia transferida do pulso incidente para o átomo ressonante, na origem do sistema de coordenadas, é o trabalho realizado pela força de Lorentz, $U_l = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$. Substituímos $d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$ e $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$, porque a força magnética não realiza trabalho, e ficamos com

$$U_l = \frac{1}{2} \int dt \Re(-q\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{v}), \quad (4.11)$$

na qual substituímos a expressão para \mathbf{v} , da equação (3.36). Nesse cálculo devemos utilizar a expressão (3.32) para o campo elétrico, então ficamos com a integral

$$U_l = \int dt \frac{A^2 q^2}{2m\gamma} e^{-\frac{2c^2 t^2}{\Gamma^2}}, \quad (4.12)$$

que é uma integral gaussiana na variável t. Portanto, de acordo com (4.9), o trabalho da força de Lorentz é dado por

$$U_l = \frac{A^2 q^2 \Gamma}{2m\gamma c} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.13)$$

Esta é a energia transferida para o átomo pela onda incidente.

4.1.3 Reação de radiação

Também precisamos calcular a energia perdida pelo elétron devido à reação de radiação, que é o trabalho da força radiativa: $U_{rad} = \frac{1}{2} \int dt \Re[\mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v}]$, com \mathbf{F}_{rad} dado por (3.50). Podemos escrever $\dot{\mathbf{a}} = -\omega^2 \mathbf{v}$, com \mathbf{v} dado por (3.36), e resolver a integral

$$U_{rad} = - \int dt \Re \left[\frac{\omega^2 \mu_0 q^2 n |\mathbf{v}|^2}{12\pi c} \right] = - \frac{A^2 \mu_0 \omega^2 q^4 n}{12\pi c^2 m^2 \gamma^2} \int dt e^{-\frac{2c^2 t^2}{r^2}}. \quad (4.14)$$

A integral a ser resolvida é igual à anterior, uma gaussiana na variável t . Após o cálculo, chegamos ao seguinte resultado:

$$U_{rad} = - \frac{A^2 \mu_0 \omega^2 q^4 n \Gamma}{12\pi c^2 m^2 \gamma^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.15)$$

Essa é a energia perdida pelo átomo devido à reação de radiação.

4.1.4 Energia da onda resultante

Após a interação da onda incidente com o átomo, a onda resultante é a superposição da onda incidente com a onda gerada por um dipolo elétrico oscilante, ou seja, $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_d$. Considerando o limite $ct \gg \Gamma$, temos:

$$\mathbf{E}_i^\infty = \frac{An\omega w_0^2}{2cz} e^{-\rho^2 \frac{n^2 \omega^2 w_0^2}{4c^2 z^2}} e^{i[\frac{n\omega}{c}(z + \frac{\rho^2}{2z}) - \omega t + \frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{(nz-ct)^2}{r^2}} \hat{i}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E}_d = - \frac{A\mu_0 q^2 \omega}{4\pi \gamma m r} e^{-i[\omega(t - \frac{rn}{c}) - \frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{(ct-nr)^2}{r^2}} ((\mathbf{r} \times \hat{i}) \times \mathbf{r}), \quad (4.17)$$

em que foi considerado apenas o termo de radiação da onda de dipolo. O cálculo da energia da onda resultante, de acordo com (4.8), tem três termos, já que devemos calcular $n^2 \varepsilon_0 |\mathbf{E}_r|^2 = n^2 \varepsilon_0 (|\mathbf{E}_i|^2 + |\mathbf{E}_d|^2 + 2\Re[\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_d])$ e integrar em todo o espaço. O primeiro termo já foi calculado anteriormente, e é igual à energia da onda incidente. O segundo termo é facilmente computado em coordenadas esféricas:

$$U_d = \frac{1}{2} \int \Re[\varepsilon_0 n^2 |\mathbf{E}_d|^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi] \quad (4.18)$$

sendo integrais de funções trigonométricas simples e uma gaussiana em r ; assim encontramos a energia da onda gerada pelo dipolo oscilante:

$$U_d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 n^2 \frac{\mu_0^2 e^4 A^2 \omega^2}{16\pi^2 \gamma^2 m^2} \int e^{-\frac{2(ct-nr)^2}{r^2}} \sin^3 \theta dr d\theta d\phi = \frac{A^2 \varepsilon_0 \mu_0^2 q^4 \omega^2 n \Gamma}{12\pi \gamma^2 m^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.19)$$

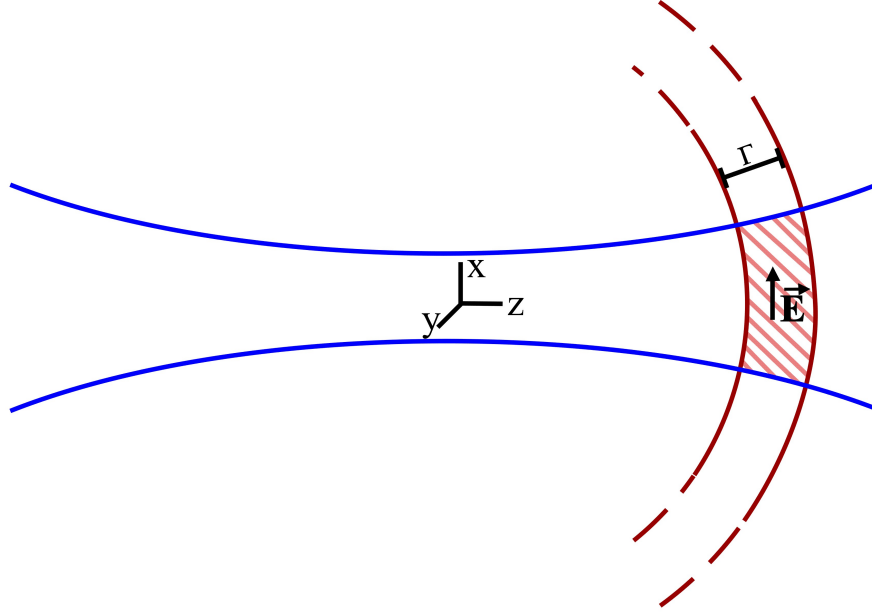


Figura 4.1: Superposição da onda incidente e da emissão de dipolo. As linhas azuis representam o feixe incidente, e as linhas vermelhas representam a onda de emissão de dipolo.

Note que este termo é igual à equação (4.15), mas com sinal contrário, o que era de se esperar já que a reação de radiação media a troca de energia entre o oscilador e a onda emitida. A última parte representa a superposição entre as duas ondas, a incidente, e a de emissão de dipolo. Este é o termo que resta ser calculado. Para calcular esse produto escalar, vamos escrever a equação para a onda de dipolo em coordenadas cartesianas, fazendo duas aproximações considerando $ct \gg \Gamma$. Como podemos ver na figura 4.1, na região em que os campos se superpõem, o campo elétrico oscila praticamente na direção \hat{i} , então aproximaremos $((\mathbf{r} \times \hat{i}) \times \mathbf{r}) = \hat{i}$, ficando assim com o campo elétrico abaixo:

$$\mathbf{E}_d = -\frac{A\mu_0 q^2 \omega}{4\pi\gamma m r} e^{-\frac{(ct-nr)^2}{r^2}} e^{i(\frac{\omega r n}{c} - \omega t - \frac{\pi}{2})} \hat{i}. \quad (4.20)$$

Dessa maneira só precisamos multiplicar o complexo conjugado do campo elétrico incidente pelo campo acima e integrar o resultado em todo espaço, mas para resolver a integral, devemos fazer algumas aproximações, porque o campo de dipolo ainda tem a variável r . Faremos duas aproximações, porque estamos tratando as ondas no limite em que z é muito maior que x e y : na exponencial imaginária faremos uma expansão em série de Taylor de r e tomaremos termos até segunda ordem, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z + \frac{\rho^2}{2z}$. Como a exponencial

imaginária representa funções seno e cosseno, uma pequena variação do argumento (da ordem de λ) pode causar mudanças drásticas no valor da função, portanto precisamos de uma aproximação mais cuidadosa. Nas outras partes, podemos fazer $r = z$, que é o suficiente para as partes não oscilatórias, e ficamos com o campo

$$\mathbf{E}_d = -\frac{A\mu_0 q^2 \omega}{4\pi\gamma m z} e^{i\left[\frac{n\omega}{c}\left(z + \frac{r^2}{2z}\right) - \omega t - \frac{\pi}{2}\right]} e^{-\frac{(ct-nz)^2}{\Gamma^2}} \hat{\mathbf{i}}. \quad (4.21)$$

Calculando o produto escalar entre \mathbf{E}_i e \mathbf{E}_d , ficamos com duas integrais gaussianas, uma em x e uma em y , que depois de resolvidas, levam a uma integral gaussiana em z . A terceira parte da energia da onda resultante fica

$$U_s = -\frac{A^2 n^3 q^2 \omega^2 w_0^2}{8\pi\gamma m c^3} \int \frac{d^3 r}{z^2} e^{-\frac{\rho^2 n^2 \omega^2 w_0^2}{4c^2 z^2}} e^{-\frac{2(nz-ct)^2}{\Gamma^2}}. \quad (4.22)$$

Resolvemos três integrais gaussianas, e encontramos a energia da superposição das suas ondas:

$$U_s = -\frac{A^2 q^2 \Gamma}{2c\gamma m} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.23)$$

Note que este termo é idêntico a U_l da equação (4.13), que corresponde à energia transferida ao átomo, mas com sinal contrário. Agora somamos as três partes, e temos a energia da onda resultante:

$$U_r = U_0 + U_d + U_s. \quad (4.24)$$

A energia total final vale $U_{TF} = U_r + U_{rad} + U_d$ e é igual à inicial U_0 , já que $U_d = -U_{rad}$ e $U_s = -U_l$.

4.2 Conservação do momento linear

4.2.1 Momento da onda incidente

Além de energia, as ondas eletromagnéticas também transportam momento. A densidade de momento armazenada nos campos no vácuo é [20]

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \quad (4.25)$$

sendo \mathbf{S} o vetor de Poynting, dado por $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Consideraremos nessa dissertação que a densidade de momento eletromagnético em um meio dielétrico também é dado por

(4.25), correspondendo à proposta de Abraham ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ no meio). Como foi mostrado por varios autores [14, 15, 16, 17, 18, 19] isso é consistente com o cálculo da densidade de momento material a partir da força de Lorentz. Usaremos esta abordagem. É válido dizer que em meios magneticos, a densidade de momento compatível com a força de Lorentz é $\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, não a densidade de Abraham [18, 19]. Portanto, consideraremos que o momento eletromagnético da onda no meio é a integral no espaço da densidade:

$$\mathbf{P}_{e.m.} = \frac{1}{2} \int d^3r \Re[\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}]. \quad (4.26)$$

O momento material, relativo à interação da onda com o meio, pode ser calculado diretamente da força de Lorentz. Um dipolo elétrico sofre a seguinte força [20, 24]:

$$\mathbf{F}_{dip} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (4.27)$$

sendo \mathbf{p} o momento de dipolo. Como estamos tratando um meio linear, a densidade de dipolos elétricos pode ser escrita como $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Para tratar o termo da equação acima, utilizamos a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) = \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (4.28)$$

juntamente com a lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.29)$$

e podemos escrever a equação da densidade de força no meio como [14, 28]

$$\mathbf{f} = \chi_e \varepsilon_0 \left[\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (4.30)$$

Para a onda incidente da equação (3.29), o operador divergência é uma derivada em z , e podemos realizar a substituição $\partial/\partial z \leftrightarrow -n/c(\partial/\partial t)$. Dessa maneira, a equação (4.30) pode ser escrita em termos somente de derivadas temporais:

$$\mathbf{f} = \chi_e \varepsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{n}{2c} |\mathbf{E}|^2 \right) \hat{k} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (4.31)$$

Podemos fazer ainda a mudança $(n/c)|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, e identificar o produto $|\mathbf{E}||\mathbf{B}|$ como o produto vetorial entre \mathbf{E} e \mathbf{B} , já que são sempre perpendiculares.

$$\mathbf{f} = -\frac{\chi_e \varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \chi_e \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\chi_e \varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}). \quad (4.32)$$

Sendo assim, integramos a densidade de força no tempo, para encontrarmos a expressão para o momento material:

$$\mathbf{P}_{mat} = \chi_e \frac{\varepsilon_0}{4} \int d^3r \Re[\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}]. \quad (4.33)$$

Fazemos novamente a substituição $\chi_e = n^2 - 1$, e podemos calcular o momento total da onda a partir de (4.26) e (4.33) como

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{e.m.} + \mathbf{P}_{mat} = \frac{\varepsilon_0(n^2 + 1)}{4} \int d^3r \Re[\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}]. \quad (4.34)$$

Para calcular o momento da onda incidente, basta substituir os campos da equação (4.2) na equação acima:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{(n^2 + 1)A^2\varepsilon_0 n^3 \omega^2 w_0^4}{16c^3} \int \frac{d^3r}{z^2} e^{-\frac{\rho^2 n^2 \omega^2 w_0^2}{2c^2 z^2}} e^{-\frac{(ct-nz)^2}{\Gamma^2}} \hat{k} \quad (4.35)$$

Resolvemos as integrais gaussianas nas três variáveis, de acordo com (4.9), e chegamos ao seguinte resultado:

$$\mathbf{P}_0 = (n^2 + 1) \frac{A^2 \varepsilon_0 w_0^2 \pi \Gamma}{8c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{k}. \quad (4.36)$$

Este é o momento total (eletromagnético mais material) da onda incidente.

4.2.2 Momento transmitido ao átomo

A força de Lorentz também é responsável pela transferência de momento linear para o elétron do átomo ressonante. O momento transmitido tem a forma

$$\mathbf{P}_T = \frac{1}{2} \int dt \Re[(-q)\mathbf{v}^* \times \mathbf{B}]. \quad (4.37)$$

Nesse cálculo usamos o campo magnético na origem, $n/c|\mathbf{E}|\hat{j}$, sendo o campo elétrico da equação (3.32), e a velocidade \mathbf{v} de (3.36), porque o átomo está na origem do sistema de coordenadas, e devemos resolver uma integral gaussiana na variável t .

$$\mathbf{P}_T = \frac{A^2 q^2 n}{2mc\gamma} \int dt e^{-\frac{2c^2 t^2}{\Gamma^2}} \hat{k} = \frac{A^2 q^2 n \Gamma}{2c^2 m \gamma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{k}. \quad (4.38)$$

Este é o momento transferido para o átomo pela onda incidente. Note que o resultado é consistente com os experimentos de Campbell e colaboradores [9]. Se calcularmos a razão entre a energia (4.13) e o momento (4.38) transferidos ao átomo, vemos que é proporcional ao índice de refração:

$$\frac{|\mathbf{P}_T|}{U_l} = \frac{n}{c} \quad (4.39)$$

4.2.3 Momento da onda resultante

O momento da onda resultante tem quatro termos, que surgem através do produto vetorial $\mathbf{E}_r^* \times \mathbf{B}_r = \mathbf{E}_i^* \times \mathbf{B}_i + \mathbf{E}_d^* \times \mathbf{B}_d + \mathbf{E}_i^* \times \mathbf{B}_d + \mathbf{E}_d^* \times \mathbf{B}_i$. A onda gerada pelo dipolo oscilante, por simetria, tem momento zero. Isso pode ser verificado no cálculo da integral $\int n^2 \varepsilon_0 \Re[\mathbf{E}_d^* \times \mathbf{B}_d] d^3r$ em coordenadas esféricas, fazendo $\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{j} + \cos(\theta)\hat{k}$. O termo referente ao momento da onda incidente já foi calculado, então resta calcular os termos referentes à superposição entre as duas ondas. No nosso caso, esses termos serão iguais, e chamaremos de \mathbf{P}_s a soma dos dois termos de superposição:

$$\mathbf{P}_s = (n^2 + 1)\varepsilon_0 \int d^3r \Re(\mathbf{E}_d^* \times \mathbf{B}_i), \quad (4.40)$$

sendo \mathbf{E}_d da equação (3.44) e \mathbf{B}_i dado por:

$$\mathbf{B}_i^\infty = \frac{An^2\omega w_0^2}{2c^2z} e^{-\rho^2 \frac{n^2\omega^2 w_0^2}{4c^2z^2}} e^{i[\frac{n\omega}{c}(z + \frac{\rho^2}{2z}) - \omega t + \frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{(nz-ct)^2}{\Gamma^2}} \hat{i}. \quad (4.41)$$

Nesse cálculo, faremos as mesmas aproximações que fizemos para chegar a (4.21), e em seguida, resta computar as integrais gaussianas nas três variáveis.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_s &= -\frac{(n^2 + 1)\varepsilon_0 A^2 n^2 \mu_0 q^2 \omega^2 w_0^2}{16\pi\gamma m c^2} \int d^3r e^{-\frac{\rho^2 n^2 \omega^2 w_0^2}{2c^2 z^2}} e^{-\frac{(ct-nz)^2}{\Gamma^2}} \hat{k} \\ \mathbf{P}_s &= -(n^2 + 1) \frac{A^2 q^2 \Gamma}{4\gamma m n c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{k}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

O momento da onda resultante será a soma do termo referente ao momento da onda incidente com o referente à superposição das ondas:

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_s. \quad (4.43)$$

4.2.4 Momento transmitido à vizinhança do átomo

Todos os cálculos até aqui foram feitos utilizando os campos na zona de radiação, mas a vizinhança imediata do átomo interage com os campos na zona próxima, e a transferência de momento para esses átomos deve ser calculada separadamente. Usaremos a equação para a densidade de força (4.30), e a superposição dos pulsos $2\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_d$, visto que o momento da onda de dipolo é nulo:

$$\mathbf{f} = \chi_e \varepsilon_0 \nabla (\mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_d). \quad (4.44)$$

Usaremos a parte do campo de dipolo que corresponde à zona próxima, da equação (3.44) [24]:

$$\mathbf{E}_d = \frac{1}{4\pi n^2 \varepsilon_0} [3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p})] e^{ikr} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right]. \quad (4.45)$$

O termo de radiação já foi utilizado no cálculo do momento da superposição dos dois pulsos (4.42). Aproximaremos o campo incidente por uma onda plana na região próxima à origem do sistema:

$$\mathbf{E}_i = A e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.46)$$

Fazendo a substituição dos campos (4.45) e (4.46) na equação da força, usando o momento de dipolo \mathbf{p} da equação (3.41) e integrando para calcular a componente z do momento, ficamos com:

$$\mathbf{P}_{viz} = -\frac{A^2 q^2 (n^2 - 1)}{8i\pi n^2} \int d^3r dt \frac{\partial}{\partial z} [(3\text{sen}^2\theta \cos^2\theta - 1) e^{\frac{i n \omega}{c}(r-z)} e^{-\frac{(ct-nr)^2}{r^2}} e^{-\frac{(ct-nz)^2}{r^2}}] \left[\frac{1}{r^3} - \frac{i n \omega}{cr^2} \right] \hat{k}. \quad (4.47)$$

O cálculo será feito em coordenadas esféricas, fazendo $z = r \cos\theta$ e transformando a derivada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (4.48)$$

As integrais em t e ϕ são facilmente computadas, ficando os termos relativos a r e θ :

$$\mathbf{P}_{viz} = -\frac{A^2 q^2 (n^2 - 1) \Gamma}{8c\pi n^2} \int dr d\theta r^2 \text{sen}\theta \left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left\{ (3\text{sen}^2\theta - 2) e^{i\left\{ \frac{n\omega r}{c}(1-\cos\theta) - \frac{\pi}{2} \right\}} \right\} \left[\frac{1}{r^3} - \frac{i n \omega}{cr^2} \right] \hat{k} \quad (4.49)$$

Esse cálculo deve ser feito com o uso de métodos numéricos. Usamos dois programas computacionais para fazer os cálculos, Mathematica e Matlab, e devido à maneira que fazem os cálculos, devemos escrever a integral como função de termos adimensionais, para que não haja constantes arbitrárias na expressão, faremos isso substituindo $u = n\omega r/c$ e calculando a integral com relação a u e θ . O cálculo relativo ao termo $i n \omega / cr^2$ é zero, portanto explicitaremos somente o outro termo, proporcional a $1/r^3$.

$$\mathbf{P}_{viz} = -\frac{A^2 q^2 (n^2 - 1) \Gamma}{8n\gamma m c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int du d\theta u^2 \text{sen}\theta \left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\text{sen}\theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left\{ \frac{(3\text{sen}^2\theta - 2)}{u^3} e^{i\left[u(1-\cos\theta) - \frac{\pi}{2} \right]} \right\} \hat{k} = -\frac{A^2 q^2 (n^2 - 1) \Gamma}{8n\gamma m c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{I} \hat{k}, \quad (4.50)$$

definindo \mathcal{I} como a integral:

$$\mathcal{I} = \int du d\theta u^2 \text{sen}\theta \left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\text{sen}\theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left\{ \frac{(3\text{sen}^2\theta - 2)}{u^3} e^{i\left[u(1-\cos\theta) - \frac{\pi}{2} \right]} \right\}. \quad (4.51)$$

Podemos saber o valor da integral \mathcal{I} a priori, usando o fato de que o momento de um sistema fechado se conserva, portanto podemos avaliar a igualdade

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_T + \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_{viz}, \quad (4.52)$$

e sabemos que o momento transferido à vizinhança do átomo ressonante deve ser:

$$\mathbf{P}_{viz} = -(n^2 - 1) \frac{A^2 q^2 \Gamma}{4\gamma m n c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{k}, \quad (4.53)$$

de maneira que o valor da integral \mathcal{I} , na equação (4.50) tem que ser 2.

Infelizmente não foi possível mostrar por meio dos cálculos numéricos que a integral tem esse valor. Tentamos efetuar os cálculos usando o intervalo de integração em u de 0,0001 a 300, que foi um intervalo em que o programa começou a reproduzir resultados invariáveis. Tentamos efetuar os cálculos usando o intervalo de integração em u de 0,0001 a 300, que foi um intervalo em que o programa começou a reproduzir resultados invariáveis. O programa Mathematica nos deu o valor de $\mathcal{I} = -0.533$, que praticamente não variava ao mudarmos os limites de integração, e o programa Matlab deu um valor divergente usando o intervalo em u de 0,0001 a 300, mas que varia com a mudança do limite de integração. Analisando as mensagens de erro dadas pelos programas, figuras 4.2 e 4.3, pensamos que os métodos numéricos não sejam capazes de avaliar uma função altamente oscilatória com uma singularidade. Acreditamos que esta seja a razão de não termos encontrado uma relação de conservação do momento no tratamento do nosso problema.

```
Warning: Maximum function count exceeded; singularity likely.  
> In quad at 106  
In dblquad>innerintegral at 84  
In quad>quadstep at 126  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad>quadstep at 167  
In quad at 92  
In dblquad at 60
```

Figura 4.2: Mensagem de erro do programa Matlab indicando problema provavelmente devido à singularidade.

```
NIntegrate::slwcon:  
Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the  
integration is 0, highly oscillatory integrand, or WorkingPrecision too small. >>
```

Figura 4.3: Mensagem de erro do programa Mathematica indicando problema de convergência no cálculo, provavelmente devido à oscilação ou singularidade

Capítulo 5

Considerações Finais

Nessa dissertação estudamos os mecanismos clássicos de absorção de um pulso de onda eletromagnética por um átomo ressonante inserido em um meio dielétrico, e as consequências dessa absorção: transferrência de energia e momento para o átomo ressonante, bem como transferência de energia e momento para o meio em questão.

Fizemos revisão do debate Abraham-Minkowski, com exposição das formulações de Minkowski, na qual o momento de uma onda eletromagnética é proporcional ao índice de refração n , sendo sua expressão

$$\mathbf{P}_{Min} = \int d^3r \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (2.4)$$

e de Abraham, em que o momento da onda eletromagnética é inversamente proporcional ao índice de refração, com a seguinte expressão:

$$\mathbf{P}_{Abr} = \int d^3r \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2}, \quad (2.5)$$

Mostramos alguns dos varios experimentos feitos ao longo do século XX para identificar qual das duas formulações seria a correta[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] e em seguida apresentamos

argumentos de alguns autores que mostraram que as duas formulações são equivalentes, desde que sejam considerados os tensores eletromagnéticos juntamente com os tensores materiais de cada uma delas, e também maneiras de identificar os momentos de Abraham e Minkowski como momento cinético e momento canônico [11, 12, 13, 22, 23].

Fizemos revisão bibliográfica de assuntos necessários para os cálculos feitos nesse trabalho. Partindo das equações de Maxwell, fizemos a demonstração da equação da onda, e chegamos à equação de Helmholtz. Mostramos que é possível fazer a descrição dos objetos no vácuo e usar uma mudança de variáveis apropriada, a fim de usar o resultado em um meio material. Em seguida fizemos a demonstração do feixe gaussiano monocromático, um tipo de feixe paraxial, produzido pelos lasers mais comuns, e mostramos que, apesar de tratarmos de um pulso, podemos fazer aproximação monocromática dadas as dimensões desse pulso. Em seguida foi feita uma análise do modelo de Lorentz para o átomo clássico, considerando o núcleo fixo e a nuvem eletrônica como oscilador harmônico. Com uso desse modelo encontramos as expressões para a posição e a velocidade do centro de massa da nuvem eletrônica. Também demonstramos a emissão de dipolo a partir da carga oscilatória do modelo de Lorentz, e a força de Abraham-Lorentz, uma força de reação que atua sobre uma carga cuja aceleração varia.

No capítulo 4 fizemos a análise da interação do pulso incidente com o átomo ressonante, começamos com os cálculos da energia total do pulso (eletromagnética mais material). Calculamos a parte dessa energia que é absorvida pelo átomo como trabalho da força de Lorentz. A interação faz com que o átomo se comporte como um dipolo elétrico oscilante, e emita uma onda de dipolo, que, superposta ao pulso incidente, dá origem à onda resultante. Simultaneamente, a variação na aceleração da carga gera a reação de radiação. Fizemos os cálculos das energias desses dois fenômenos. Vimos que a energia da onda gerada pelo dipolo é exatamente a energia perdida pelo átomo na reação de radiação, e mostramos que a energia se conserva. Para o cálculo do momento linear do pulso incidente no meio, consideramos que o momento eletromagnético é dado pela formulação de Abraham, e calculamos a parte material a partir da força de Lorentz. O momento transmitido ao átomo ressonante também foi calculado pela força de Lorentz, e mostramos que esse momento é proporcional ao índice de refração, em concordância com o experimento de Campbell e colaboradores [9]. Fizemos

o cálculo do momento da onda resultante, e verificamos que o momento não se conserva, provavelmente porque ainda há uma perturbação permanente deixada na vizinhança do átomo ressonante. O cálculo desse distúrbio é feito utilizando a onda de dipolo na zona próxima, e deve ser feito por meio de métodos numéricos. Evocando argumentos de conservação de momento em sistemas fechados, podemos inferir o valor desse momento deixado na vizinhança, mas devemos fazer os cálculos para comprovação. Infelizmente, não conseguimos completar os cálculos desse momento, provavelmente por uma dificuldade nos métodos utilizados pelos programas Mathematica e Matlab, que nos mostraram mensagens de erro causadas, provavelmente, por singularidades na expressão, ou pela função ser altamente oscilatória.

Referências Bibliográficas

- [1] PFEIFER, R. N. C.; NIEMINEN, T. A.; HECKENBERG, N. R.; RUBINSZTEIN-DUNLOP, H. Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media. *Rev. Mod. Phys.*, v. 79, p. 1197, 2007.
- [2] JONES, R. V. Radiation Pressure in a Refracting Medium. *Nature*, London, v. 167, p. 439, 1951.
- [3] JONES, R. V.; RICHARDS, J. C. S. The Pressure of Radiation in a Refracting Medium. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 221, p. 480, 1954.
- [4] JONES, R. V.; LESLIE, B. The Measurement of Optical Radiation Pressure in Dispersive Media. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 360, p. 347, 1978.
- [5] JONES, R. V. Radiation Pressure of Light in a Dispersive Medium. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 360, p. 365, 1978.
- [6] BALAZS, N. L. The Energy-Momentum Tensor of the Electromagnetic Field inside Matter. *Physical Review*, New York, v. 91, p. 408, 1953.
- [7] WALKER, G. B.; LAHOZ, D. G. Experimental observation of Abraham Force in a dielectric. *Nature*, London, v. 253, p. 339, 1975.
- [8] WALKER, G. B.; LAHOZ, D. G.; WALKER, G. Measurement of the Abraham Force in a Barium Titanite Specimen. *Can. J. Phys.*, v. 53, p. 2577, 1975.
- [9] CAMPBELL, G. K.; LEANHARDT, A. E.; MUN, J.; BOYD, M.; STREED, E. W.;

- KETTERLE, W.; PRITCHARD, D. E. Photon Recoil Momentum in Dispersive Media. *Phys. Rev. Lett.*, v. 94, p. 170903, 2005.
- [10] PENFIELD, P.; HAUS, H. A. *Electrodynamics of moving media*. 1. ed. Cambridge: MIT Press, 1967.
- [11] BARNETT, S. M. Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma. *Phys. Rev. Lett.*, v. 104, p. 070401–1, 2010.
- [12] BARNETT, S. M.; LOUDON, R. The enigma of optical momentum in a medium. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, v. 368, p. 927, 2010.
- [13] CHO, A. Century-Long Debate Over Momentum of Light Resolved? *Science*, Washington, v. 327, p. 1067, 2010.
- [14] GORDON, J. P. Radiation Forces and Momenta in Dielectric Media. *Phys. Rev. A.*, v. 8, p. 14, 1973.
- [15] MANSURIPUR, M. Resolution of the Abraham-Minkowski controversy. *Opt. Commun.*, v. 283, p. 1997, 2010.
- [16] LOUDON, R. Theory of the radiation pressure on dielectric surfaces. *J. Mod. Optics*, v. 49, p. 821, 2002.
- [17] LOUDON, R. Theory of the forces exerted by Laguerre-Gaussian light beams on dielectrics. *Phys. Rev. A*, v. 68, p. 013806–1, 2003.
- [18] SALDANHA, P. L. Division of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts. *Opt. Express*, v. 18, p. 2258, 2010.
- [19] SALDANHA, P. L. Division of the energy and of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts. *Opt. Commun.*, v. 284, p. 2653, 2011.
- [20] GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.

- [21] HNIZDO, V. Magnetic dipole moment of a moving electric dipole. *Am. J. Phys.*, v. 80, p. 645, 2012.
- [22] HINDS, E. A.; BARNETT, S. M. Momentum Exchange between Light and Single Atom: Abraham or Minkowski. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, p. 050403, 2009.
- [23] KEMP, B. A. Resolution of the Abraham-Minkowski debate: Implications for the electromagnetic wave theory of light in matter. *J. Appl. Phys.*, v. 109, p. 111101–1, 2011.
- [24] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. New York: Wiley, 1998.
- [25] MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2008 (reimpressão).
- [26] SALDANHA, P. L. *Associação de um Feixe de Correlação ao Campo Gerado pela Conversão Paramétrica Descendente*. 2006. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [27] FOWLES, G. R. *Introduction to Modern Optics*. 2. ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- [28] SALDANHA, P. L. *Interação da Luz com Meios Contínuos: Abordagens Clássica e Quântica*. 2010. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.