

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ADMINISTRATIVAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM ADMINISTRAÇÃO**

FELIPE VILHENA ANTUNES AMARAL

GESTÃO DE ATIVOS E PASSIVOS EM ENTIDADES FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

Dissertação apresentada ao Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Administração.

Área de Concentração: Finanças

Orientador: Prof. Luiz Alberto Bertucci, Dr.

Co-orientador: Prof. Aureliano Angel Bressan, Dr.

**BELO HORIZONTE
2010**

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Sempre gostei da seção de agradecimentos dos trabalhos acadêmicos que li. Pela natureza impessoal dos trabalhos acadêmicos, considero esta parte a única maneira de perceber um pouco das pessoas e sentimentos que rodeiam o autor. Nunca entendia a razão de tantos agradecimentos... até que escrevi esta dissertação. Olhando para trás, noto que foram tantas pessoas que influenciaram direta ou indiretamente nesta etapa de minha vida, que seria impossível relatar todas elas aqui. Dessa forma, destaco algumas que foram realmente especiais.

Aos professores Luiz Alberto Bertucci e Aureliano Bressan, pelos ensinamentos e pelas palavras de incentivo que sempre me foram tão caras.

Aos professores Alexandre de Paula Carrieri e Eduardo Facó por permitirem a continuidade dos meus estudos após minha mudança para o Rio de Janeiro.

À Íris Lanna de Moraes, por ser minha primeira tutora na matéria e a razão de meu interesse pela pesquisa.

Aos colegas Ricardo Weiss, Elen Arman, Cláudio Costa do Nascimento e João Roberto Rodarte pelos auxílios prestados na elaboração do trabalho.

Aos professores Tara Keshar Nanda Baidya e Robert Aldo Iquiapaza, pelas contribuições na ocasião da defesa da dissertação.

Aos meus pais, Geraldo Antunes Amaral e Lília Vilhena Barbosa, por, dentro de nossas dificuldades, permitirem que eu chegasse até aqui.

À minha esposa Christina do Prado Lima Vilhena, por sua paciência e amor.

"Desde que a estrutura do universo é mais perfeita, e é a obra do Criador mais sábio, absolutamente nada tem lugar no universo em que alguma forma de máximos e mínimos não apareça." (Leonhard Euler)

RESUMO

Neste estudo foi desenvolvida uma metodologia de gerenciamento de ativos e passivos para Entidades Fechadas de Previdência Complementar com planos do tipo Benefício Definido. O trabalho apresentou como a Gestão de Ativos e Passivos pode ser beneficiada com o uso das técnicas de Pesquisa Operacional. O objetivo do fundo de pensão foi formulado como um problema de minimização de probabilidade de inadimplência. Como metodologia de solução, foi utilizada a técnica dos Algoritmos Genéticos, a qual obteve êxito em encontrar soluções satisfatórias para o problema matemático formulado. O estudo também investigou sobre como mudanças na política de contribuição, reavaliações periódicas na composição do portfólio, escolhas do período para estimação dos parâmetros e grau de capitalização da EFPC influenciam no perfil de alocação dos ativos do fundo. A conclusão geral do estudo é que a abordagem da Gestão de Ativos e Passivos com o uso de Algoritmos Genéticos constitui uma boa ferramenta para seleção de carteiras que minimizam a probabilidade de inadimplência de uma Entidade Fechada de Previdência Complementar.

Palavras-chave: Gestão de Ativos e Passivos, Entidades Fechadas de Previdência Complementar, Pesquisa Operacional, Algoritmos Genéticos.

ABSTRACT

In this study a methodology of managing assets and liabilities in defined-benefit pension plans was developed. The study presents how Assets and Liabilities Management can be benefited from the use of Operations Research techniques. The goal of pension fund was formulated as a problem of minimizing the probability of default. The Genetic Algorithms technique was used as a solution methodology and succeeded in finding satisfactory solutions to the mathematical problem formulated. The study also investigated how changes in policy contributions, regular reviews of portfolio composition, choices on the period for estimation of parameters and degree of capitalization of pension funds interfere in the way fund's assets are allocated. The general conclusion is that the Assets and Liabilities Management approach with the use of Genetic Algorithms is a good tool for selecting portfolios that minimize the probability of default in a pension fund.

Key-Words: *Assets and Liabilities Management, Pension Funds, Operations Research, Genetic Algorithms.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Exemplo de desdobramentos previdenciários para uma EFPC.....	28
Figura 2- Diagrama de possibilidades de dois eventos simultâneos	30
Figura 3- Diagrama de possibilidades de três eventos simultâneos.....	31
Figura 4- Exemplo de fluxo de caixa para um participante em um ambiente de múltiplos eventos.....	32
Figura 5- Comparação de performance entre algoritmos genéricos e específicos para um determinado tipo de problema.....	52
Figura 6- Exemplo de um problema de programação linear com restrições	54
Figura 7- Exemplo de um problema de programação não linear.....	56
Figura 8- Relação entre as curvas de nível e os Multiplicadores de Lagrange λ	59
Figura 9- Possibilidades de um ponto de ótimo em uma função de maximização com restrição do tipo $z_i > 0$	60
Figura 10- Comparação entre um conjunto convexo e um não convexo	63
Figura 11- Layout de decomposições possíveis para problemas de Pesquisa Operacional.....	66
Figura 12- Exemplo de representação de um problema de programação dinâmica e suas etapas de solução	68
Figura 13- Estrutura da matriz de coeficientes das restrições de problemas biestágio com três cenários.....	79
Figura 14- Estrutura da matriz de coeficientes das restrições de problemas multiestágio com dois cenários no segundo estágio e quatro no terceiro estágio.....	80
Figura 15- Evolução da população Inicial (em preto) de um Algoritmo Genético para uma população final (em vermelho) em um problema de minimização de duas variáveis.....	84
Figura 16- Método da amostragem estocástica universal	89
Figura 17- Operadores de <i>crossover</i> e mutação na representação binária	90
Figura 18- Fronteira eficiente de Markowitz e a linha de mercado de capitais do modelo CAPM.....	98

Figura 19- Variância (V) como uma função do Preço (P) e do valor esperado do excedente (E)	100
--	-----

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Probabilidade de Morte por Idade para indivíduos maiores de 65 anos segundo tábuas de mortalidade <i>Annuity Table</i> – AT elaboradas em anos distintos	36
Gráfico 2- Fluxos de caixas atuariais reais previstos para o horizonte de estimação ...	134
Gráfico 3- Reservas Matemáticas projetadas para o horizonte de estimação.....	135
Gráfico 4- Histórico dos log-retornos mensais das classes de ativos e inflação	136
Gráfico 5- Histograma de 300 simulações da função objetivo com solução ótima do cenário 12.....	139
Gráfico 6- Histograma de 300 simulações da função objetivo com solução ótima do cenário 11.....	140
Gráfico 7- Função objetivo do melhor indivíduo e valor médio da população por geração nos cenários 10, 12, 14 e 16	144
Gráfico 8- Evolução da população inicial para a população final no cenário 10- Pf. 1 ..	145
Gráfico 9- Evolução da população inicial para a população final no cenário 10 – Pf. 2	145
Gráfico 10- Evolução da população inicial para a população final no cenário 12- Pf. 1	146
Gráfico 11- Evolução da população inicial para a população final no cenário 12- Pf. 2	146
Gráfico 12- Função objetivo do melhor indivíduo e valor médio da população por geração nos cenários 4, 6, 8, 11, 13 e 15	147
Gráfico 13- Projeção dos fluxos de caixa atuariais nominais (em valores absolutos) e valor dos ativos antes dos pagamentos do período com solução ótima do cenário 11 com limite máximo para valor dos ativos.	149
Gráfico 14- Projeção dos fluxos de caixa atuariais nominais (em valores absolutos) e valor dos ativos antes dos pagamentos do período com solução ótima do cenário 12 com limite máximo para valor dos ativos	149

Gráfico 15- Projeção dos fluxos de caixa atuariais nominais (em valores absolutos) e valor dos ativos antes dos pagamentos do período com solução ótima do cenário 12 sem limite máximo para valor dos ativos	150
---	-----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Operadores de <i>crossover</i> para representação real	91
Quadro 2- Operadores de mutação para representação real.....	93
Quadro 3- Características de outros modelos de ALM apresentados na literatura	110
Quadro 4- Quadro resumo dos cenários utilizados para execução dos algoritmos de otimização	132

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Percentual de causas de óbitos no Brasil no ano de 2007, segundo Capítulo CID-10 para a faixa etária acima de 20 anos	37
Tabela 2- Ilustração de aplicação de diversos métodos para aferição da solvência de um fundo de pensão.....	45
Tabela 3- Ilustração de aplicação de diversos métodos para aferição da solvência de um fundo de pensão com reservas matemáticas projetadas	47
Tabela 4- Log-retornos e desvio-padrão anuais projetados para as classes de ativos e inflação utilizando um período de 10 anos.	137
Tabela 5- Matriz de correlações para as classes de ativos e inflação utilizando um período de 10 anos.	137
Tabela 6- Log-retornos e desvio-padrão anuais projetados para as classes de ativos e inflação utilizando um horizonte de 3 anos	137
Tabela 7- Matriz de correlações para as classes de ativos e inflação utilizando um período de 3 anos	137

Tabela 8- Soluções propostas pelos Algoritmos Genéticos e respectiva função objetivo por cenário de teste.....	141
Tabela 9- Características da evolução do Algoritmo Genético até sua parada.....	142
Tabela 10- Comparação da estabilidade do algoritmo em duas execuções para um mesmo cenário.....	148
Tabela 11- Comparativo das funções objetivo sem rebalanceamento e com rebalanceamento do portfólio no horizonte de projeção.....	151
Tabela 12- Comparativo das funções objetivo com fundo superavitário ou deficitário no instante inicial da avaliação.....	152
Tabela 13- Comparativo das funções objetivo com período de 10 anos e 3 anos utilizados para a estimação.....	153
Tabela 14- Comparativo das funções objetivo com diferentes políticas de contribuição adotadas pelo fundo.....	154
Tabela 15- Comparativo entre soluções propostas pelo modelo de Markowitz e Algoritmos Genéticos	155

LISTA DE SIGLAS

ALM - Assets and Liabilities Management

AT - Annuity Table

BACEN - Banco Central

BD - Benefício Definido

BM&FBOVESPA - Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros

CALM - Computer-aided Assets and Liabilities Management

CAPM - Capital Asset Price Model

CD - Contribuição Definida

CGPC - Conselho de Gestão da Previdência Complementar

CID-10 - Classificação Estatística Internacional de Doenças e Problemas Relacionados à Saúde

CMN - Conselho Monetário Nacional

CNPC - Conselho Nacional de Previdência Complementar

CV - Contribuição Variável

CVM - Comissão de Valores Mobiliários

DASIS - Departamento de Análise da Situação da Saúde

DRAA - Demonstrativo de Resultados da Avaliação Atuarial

EFPC - Entidades Fechadas de Previdência Complementar

EVPI - *Expected Value of Perfect Information*

EVS - *Expected Value Solution*

EVWPI - *Expected Value With Perfect Information*

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IBRX - Índice Brasil

IMA - Índices de Mercado Andima

INPC - Índice Nacional de Preços ao Consumidor

INSS - Instituto Nacional do Seguro Social

MS - Ministério da Saúde

MTC - Moderna Teoria de Carteiras

OECD - Organization for Economic Co-operation and Development

PO - Pesquisa Operacional

PREVIC - Superintendência de Previdência Complementar

PVM - Portfólio de Variância Mínima

RM - Reserva Matemática

RP - *Recourse Problem*

SELIC - Sistema Especial de Liquidação e Custódia

SIM - Sistema de Informações sobre Mortalidade

SPC - Secretaria de Previdência Complementar

SPPC - Secretaria de Políticas em Previdência Complementar

SVS - Secretaria de Vigilância em Saúde

TIR - Taxa Interna de Retorno

VSS - *Value of Stochastic Solution*

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA	17
1.2 OBJETIVO	17
1.3 JUSTIFICATIVA.....	18
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	20
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	21
2.1. MODELAGEM ATUARIAL	21
2.1.1. Conceitos básicos sobre EFPC.....	21
2.1.2. Fluxo atuarial nos planos de benefício dos fundos de pensão.....	23
2.1.3. Eventos atuariais.....	27
2.1.4. Tábuas atuariais.....	33
2.1.5. Classificação das premissas atuariais.....	39
2.1.6. Métodos de financiamento	41
2.1.7. Equilíbrio financeiro do Fundo de Pensão.....	44
2.2. PESQUISA OPERACIONAL APLICADA EM ALM	47
2.2.1. Conceitos básicos em Pesquisa Operacional	47
2.2.2. Algoritmos Genéticos	82
2.3. IMPORTANTES APLICAÇÕES DE PESQUISA OPERACIONAL NA SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS.....	95
2.3.1. Abordagem Assets Only.....	95
2.3.2. Abordagem Assets and Liabilities Management	98
3. METODOLOGIA	112
3.1. VISÃO GERAL	112
3.2. MODELAGEM DOS FLUXOS DE CAIXA ATUARIAIS	113
3.2.1. Amostra e organização do banco de dados	114
3.2.2. Projeções dos fluxos atuariais individuais	115
3.3.3. Consolidação em relatório de resposta	121
3.3. MODELAGEM DAS RENTABILIDADES DOS ATIVOS E INFLAÇÃO	121
3.4. DINÂMICA DOS ATIVOS E PASSIVOS.....	124
3.5. A FUNÇÃO OBJETIVO PARA O MODELO DE ALM DE UM FUNDO DE PENSÃO.....	127
3.6. METODOLOGIAS DE PESQUISA OPERACIONAL PARA SOLUÇÃO DO MODELO	128
3.6.1. Algoritmos Genéticos	128
3.6.2. Abordagem Assets Only.....	130
3.7. SUMÁRIO DOS TESTES EXECUTADOS	131
4. RESULTADOS.....	134
5. CONCLUSÃO	157
REFERÊNCIAS.....	160
APÊNDICE.....	171

1. Introdução

A Gestão de Ativos e Passivos constitui uma estratégia de gerenciamento dos ativos e dos passivos de uma instituição de maneira coordenada. Luckener *et al.* (2003) definem tal gestão, ou *Assets and Liabilities Management* – ALM, como um processo contínuo de formulação, de implementação, de monitoramento e de revisão das estratégias relacionadas aos ativos e aos passivos para o alcance dos objetivos financeiros de uma organização, considerando sua tolerância ao risco e suas diversas restrições de investimento.

As Entidades Fechadas de Previdência Complementar – EFPC movimentam anualmente bilhões de reais, com o objetivo de proporcionar aos seus associados uma aposentadoria complementar aos benefícios e pensões da previdência pública. Segundo Richie (2005), as estratégias de ALM ficaram em princípio restritas ao mercado bancário, mas, com o passar do tempo, tornaram-se ferramentas de uso comum nas EFPC. De acordo com Booth *et al.* (1999), seu uso para determinação da carteira de ativos dos fundos de pensão tem substituído abordagens focadas unicamente em ativos.

Abordagens focadas no ativo, *Assets Only*, na qual figura o trabalho de Markowitz (1952), constituíram um marco no processo de seleção de ativos financeiros. Anteriormente ao artigo *Portfolio Selection*, de Markowitz, publicado em 1952, a montagem de carteiras era feita exclusivamente observando-se as características individuais de cada ativo. Através do modelo proposto, Markowitz demonstrou ser possível, a partir da covariância existente entre os ativos, obter uma melhor relação no composto risco-retorno. Uma extensão do modelo de Markowitz foi a inclusão da possibilidade de captação e de aplicação em um ativo livre de risco, a qual levou Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) ao desenvolvimento do *Capital Asset Price Model* - CAPM. O trabalho de Markowitz, em conjunto com o CAPM, compreende hoje o que chamamos de Moderna Teoria de Carteiras - MTC.

Sem dúvida, a MTC apresentou um enorme avanço com a introdução do princípio da diversificação para aperfeiçoar a gestão das carteiras de ativos. Entretanto, Booth *et al.* (1999) relataram alguns limites na aplicação da Moderna Teoria de Carteiras. Em particular, os autores argumentaram que o modelo desconsidera o problema quando o investidor investe para poder honrar suas obrigações financeiras, quando seria necessário avaliar a correlação dos passivos com os ativos do fundo.

A ALM desenvolveu-se primeiramente para gerenciar o impacto nas contas da instituição, nos casos de mudanças nas taxas de juros, sendo que o trabalho de Redington (1952) foi um dos pioneiros no assunto. Posteriormente, na década de 1980, trabalhos como os de Wilkie (1985), Wise (1987a), Wise (1987b) e Kusy e Ziemba (1985) desenvolveram novas perspectivas para a definição de estratégias de gerenciar ativos e passivos, ao considerar, além de mudanças nas taxas de juros, a variação nos retornos de diversas outras classes de ativos.

Nos anos subsequentes, autores como Dufresne (1989), Haberman (1994a) e Cairns (1994) passaram a considerar de maneira integrada a seleção de pesos dos ativos da carteira e os valores de contribuição dos participantes do fundo. Segundo Cairns (1994), a má gestão nas políticas de contribuição nos planos de benefício definido para aposentadoria pode conduzir a duas situações prejudiciais ao fundo de pensão: a primeira, na qual os recursos da instituição não são suficientes para o pagamento de todas as aposentadorias, tornando a instituição insolvente; e a segunda, na qual os valores dos ativos da instituição crescem descontroladamente de maneira exponencial.

Em seu escopo mais amplo, as técnicas de ALM confundem-se com técnicas de gerenciamento de risco. Neste trabalho, o foco foi dado à modelagem das estratégias de ALM com uso de técnicas de Pesquisa Operacional, conforme sugerido por Board, Sutcliffe e Ziemba (1999). A Pesquisa Operacional é bastante proveitosa por exigir que a estratégia de gerenciamento em uma EFPC seja totalmente descrita em termos

matemáticos, compreendendo a definição do objetivo da EFPC; a formalização das restrições legislatórias e administrativas existentes; e modo pelo qual as decisões tomadas pelos gestores influirão no alcance desse objetivo.

As estratégias de gestão propostas estão baseadas principalmente nos trabalhos de Wise (1987a, 1987b), Wilkie (1985, 1995), Sherris (1992) e Cairns (1994), os quais foram essenciais para o desenvolvimento da função objetivo e para a modelagem do relacionamento entre as variáveis.

O uso de Algoritmos Genéticos, como metodologia de solução para o problema matemático proposto, foi inspirado fundamentalmente em Poojari e Varghese (2008). Dentre as várias características que incentivam o uso dessa metodologia, os Algoritmos Genéticos são reconhecidos por sua capacidade de busca de soluções em ambientes estocásticos e funcionam bem, independentemente da forma da função subjacente.

O processo de otimização foi aplicado em um conjunto de cenários elaborados para ilustrar as consequências dessas circunstâncias no processo de decisão de um fundo de pensão. Foram testados os processos de otimização sobre diferentes taxas de contribuição dos participantes, graus de capitalização inicial da EFPC, alocações dinâmicas ou estáticas de portfólio e o uso de diferentes períodos para estimação dos parâmetros do modelo.

O fundo de pensão utilizado no estudo foi construído a partir de uma amostra de participantes de uma EFPC brasileira. A busca por uma EFPC real foi motivada para manter a coerência de premissas utilizadas no estudo com aquelas adotadas pelo mercado e com o contexto legislativo brasileiro.

1.1. Problema de pesquisa

O problema de pesquisa trabalhado refere-se à seguinte questão basilar: qual carteira de ativos deveria ser adotada por uma Entidade Fechada de Previdência Complementar, a fim de minimizar o risco de insolvência, considerando sua política de contribuição e suas restrições de investimento?

1.2. Objetivo

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma estratégia para a seleção do ativos em Entidades Fechadas de Previdência Complementar. O modelo de ALM desenvolvido teve como objetivo a minimização da probabilidade de inadimplência de um fundo de pensão em um horizonte de 80 anos, através da escolha dos pesos das classes de ativos: renda variável, renda fixa, imóveis e operações com participantes.

Os objetivos específicos do trabalho foram:

- i. Realizar projeções dos fluxos de caixa dos benefícios e contribuições;
- ii. modelar a evolução dos log-retornos das classes de ativos e da inflação;
- iii. desenvolver uma metodologia para estimação do valor da função objetivo;
- iv. analisar o impacto da variação no percentual das contribuições na função objetivo;
- v. analisar o efeito da mudança dos valores iniciais dos ativos na função objetivo;
- vi. analisar o efeito da mudança no período utilizado para estimação dos retornos dos ativos e inflação na função objetivo;
- vii. analisar o efeito de alocações dinâmicas de portfólio na função objetivo;
- viii. analisar o efeito de restrições legislatórias que limitam o crescimento dos ativos;
- ix. avaliar o processo de convergência dos Algoritmos Genéticos no problema apresentado e a estabilidade das soluções encontradas; e

- x. comparar o desempenho dos Algoritmos Genéticos com a técnica tradicional de Markowitz para seleção de portfólio.

1.3. Justificativa

O processo correto de seleção de carteiras é fundamental para melhorar o desempenho e eficiência de diversos agentes do mercado financeiro, como bancos comerciais, investidores particulares, fundos de investimento e fundos de pensão.

Ao adequar o processo de seleção de carteiras, de modo a maximizar o retorno esperado por nível de risco no contexto de um investidor, permite-se mitigar os riscos dos agentes financeiros do mercado, evitando que os custos da ineficiência sejam incorridos pelo investidor e repartido com a sociedade. No caso de um fundo de pensão, a ineficiência na seleção da carteira pode significar o aumento das contribuições dos participantes ou, até mesmo, significar a incapacidade financeira de pagamento das pensões com a consequente falência do fundo.

O estudo da aplicação de técnicas de Gestão de Ativos e Passivos em Entidades Fechadas de Previdência é justificado pela importância dessas instituições na economia brasileira. Segundo o Informe Estatístico de junho de 2008 da Secretaria de Previdência Complementar - SPC¹, os valores dos ativos totais das EFPC somaram mais de 472 bilhões de reais nesse período, o que corresponde a aproximadamente 65% do Produto Interno Bruto - PIB brasileiro, apurado na mesma época².

¹ A Lei nº 12.154, de 23 de dezembro de 2009, criou a Superintendência de Previdência Complementar – PREVIC e a Secretaria de Políticas em Previdência Complementar - SPPC em substituição à Secretaria de Previdência Complementar.

² O PIB brasileiro de 2008, apurado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, acumulado até junho foi de 730 bilhões de reais.

No estudo de Davis e Hu (2004), foi explorada a relação existente entre o crescimento dos ativos de fundos de pensão e o crescimento econômico de um país. O estudo concluiu, a partir de 38 países pesquisados, que existe essa relação e que os impactos do crescimento dos ativos dos fundos de pensão no crescimento econômico são maiores ainda nos países emergentes.

A importância de técnicas de Gestão de Ativos e Passivos é destacada no documento *“Fifteen principles for the regulation of private occupational pensions schemes”* elaborado pela Organisation for Economic Co-operation and Development- OECD. Booth *et al.* (1999) salientam que as técnicas integradas de gestão dos ativos e passivos nas EFPC são cruciais para seleção de portfólios, permitindo o pagamento de aposentadorias ao menor custo e com maior segurança possíveis.

Recentemente, conforme sugere Weiss (2010), a queda no patamar das taxas juros de renda fixa no Brasil, importante fonte de receitas para as EFPC, tem tornado a busca pelo equilíbrio financeiro e atuarial dessas instituições uma tarefa ainda mais desafiadora, justificando a busca de novas ferramentas gerenciais³.

O foco do estudo é dirigido para a gestão de planos do tipo Benefício Definido, que, de acordo com o Informe Estatístico da SPC, de junho de 2008, representam 35,5% do total de planos previdenciários contra 34,0% de planos de Contribuição Definida e 30,7% de planos de Contribuição Variável. Além disso, os desenvolvimentos do estudo também podem ser aproveitados na gestão de planos de Contribuição Definida, estruturados para replicar algumas características dos planos de Benefício Definido e em planos de Contribuição Variável que, em essência, funcionam como planos de Contribuição

³ Por exemplo, a rentabilidade da Taxa Selic/BACEN de 2009 (9,93%) deflacionada pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor – INPC/IBGE para o mesmo período (4,11%) já produz uma taxa de rentabilidade real de 5,59% a.a., menor que a meta atuarial normalmente fixada em 6% a.a.

Definida na fase de formação de poupança e como planos de Benefício Definido na fase de percepção do benefício, em função de uma garantia mínima sobre o indexador do valor do benefício vitalício.

Para Dorsey, Cornwell e Marpherson (1998), os planos de aposentadoria constituem parte dos incentivos de recursos humanos da empresa para atrair e reter talentos, sendo que consideram os planos de Benefício Definido os mais propícios para as reduções de *turnover*. Dessa forma, os autores defendem que a estruturação de um plano de aposentadoria de uma empresa influi diretamente na produtividade dos empregados.

Finalmente, a literatura brasileira ainda carece de textos em que são expostos estudos sobre gestão financeira de fundos de pensão, conforme levantamentos de Domenegheti (2009). Ainda, segundo Boulier e Dupré (2003), há escassez mundial de literatura sobre o assunto.

1.4. Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2, foi elaborado um referencial teórico, com o objetivo de oferecer contextualização e consistência à investigação. O tema foi exposto de maneira abrangente, de forma a permitir compreensão dos elementos de modelagem atuarial e Pesquisa Operacional necessários ao desenvolvimento de técnicas de ALM em fundos de pensão. No capítulo 3, aborda-se a metodologia de pesquisa em que são definidos os procedimentos utilizados para a modelagem do problema de ALM no fundo de pensão. No capítulo 4 os resultados são expostos e analisados. Finalmente, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões desta pesquisa.

2. Referencial teórico

2.1. Modelagem atuarial

2.1.1. Conceitos básicos sobre EFPC

Segundo Shapiro (2005), não é fácil atribuir com certeza a época de surgimento dos planos de aposentadoria, mas é aceito que esses planos já estavam disponíveis para os militares do Império Romano. Contudo, ressalta o autor que, somente no fim do século XIX, as empresas começaram a estabelecer planos de benefícios de aposentadoria similarmente às linhas atuais; e que somente no final do século XX as análises dos custos dos planos de benefícios ganharam alguma sofisticação.

Os planos de aposentadoria estão divididos em planos públicos e privados. No Brasil, a limitação do benefício oferecido pela previdência pública e a complementação das aposentadorias dos funcionários pelas empresas como uma ferramenta estratégica de gestão de recursos humanos colaboraram para a criação das Entidades Fechadas de Previdência Complementar.

Uma Entidade Fechada de Previdência Complementar é uma instituição sem fins lucrativos, cujo objetivo é complementar a aposentadoria pública recebida pelo aposentado, em um nível compatível à renda percebida durante sua atividade. No Brasil, as Entidades Fechadas de Previdência Complementar são popularmente conhecidas como “fundos de pensão”. Os principais agentes de um fundo de pensão são:

PATROCINADORES: Empresa ou grupo de empresas que contribuem com parcela de contribuição para o custeio dos benefícios previstos na EFPC (aposentadoria, pensão, auxílio-doença, pecúlio por morte, etc).

PARTICIPANTES: Na qualidade de participantes ATIVOS, são os empregados dos patrocinadores que aderiram ao plano de benefícios da EFPC e que não estejam em gozo de benefícios de aposentadoria ou complementação de auxílio-doença. Já na qualidade de participantes ASSISTIDOS, são os empregados e ex-empregados dos patrocinadores, em gozo dos benefícios de aposentadoria ou auxílio-doença.

DEPENDENTES: Configuram-se como dependentes normalmente o cônjuge do participante e seus filhos até certa idade limite. Consideram-se BENEFICIÁRIOS ASSISTIDOS os dependentes em gozo de pensão.

Boulrier e Dupré (2003) salientam que a gestão de um fundo de pensão deve buscar a segurança no pagamento das pensões, a minimização dos custos aos participantes e patrocinadores, e a estabilidade nas contribuições pagas.

Os planos de benefícios das EFPC de caráter previdenciário, conforme a Resolução do Conselho de Gestão da Previdência Complementar nº 16 de 22/11/2005, podem ser de três tipos:

1. **Benefício Definido (BD):** Os benefícios programados têm seu valor ou nível previamente estabelecidos, sendo o custeio determinado atuarialmente, de forma a assegurar sua concessão e sua manutenção.
2. **Contribuição Definida (CD):** Os benefícios programados têm seu valor permanentemente ajustado ao saldo de conta mantido em favor do participante, inclusive na fase de percepção de benefícios, considerando o resultado líquido de sua aplicação, os valores aportados e os benefícios pagos.
3. **Contribuição Variável (CV):** Os benefícios programados apresentam a conjugação das características das modalidades de contribuição definida e benefício definido.

Geralmente, tais planos funcionam como um tipo CD, na fase de acumulação, e como um tipo BD, na fase de pagamentos.

Na análise de Bodie, Marcus e Merton (1985) não há, *a priori*, uma dominância de uma modalidade de plano em relação a outra. Apesar disso, segundo Chan, Silva e Martins (2006), observa-se, mundialmente, uma migração dos planos do tipo Benefício Definido para planos do tipo de Contribuição Definida. De modo geral, os motivos dessa migração decorrem do fato de que os planos de Benefícios Definido não estão atrelados aos montantes arrecadados e à rentabilidade dos ativos durante o período de acumulação, o que os torna mais arriscados para os patrocinadores e difíceis de gerenciar do que um plano de Contribuição Definida.

Apesar da migração existente de planos, os planos do tipo Benefício Definido ainda são utilizados por serem mais baratos para os participantes, pois permitem a repartição do risco atuarial entre os indivíduos em uma relação de mutualismo. Por outro lado, um plano de Contribuição Definida pode ser muito severo a um participante que vive além da expectativa de vida calculada para o custeio de sua aposentadoria, podendo deixá-lo sem fundos em um período em que já cessou sua capacidade laborativa.

2.1.2. Fluxo atuarial nos planos de benefício dos fundos de pensão

As entradas e saídas monetárias projetadas no fundo de pensão, decorrentes das contribuições dos participantes e patrocinadores e dos benefícios pagos aos assistidos, constituem o fluxo de caixa atuarial.

Para se avaliar qual deveria ser a provisão do montante dos recursos em um determinado momento do tempo, o atuário calcula a Reserva Matemática - RM , que é dada pelo valor presente esperado dos benefícios futuros menos o valor presente esperado das contribuições futuras, gerando a seguinte fórmula:

$$RM = VP(\text{Benefícios Futuros}) - VP(\text{Contribuições Futuras}) \quad [2.1]$$

Como o fluxo de caixa atuarial não é conhecido no momento de avaliação, o atuário deve dispor de um método para projetar os benefícios e as contribuições futuras. Dessa forma, diferente da matemática financeira tradicional, a matemática atuarial deve trabalhar sobre fluxos de caixa incertos. Chan, Silva e Martins (2006) consideram três situações existentes em um fluxo de caixa: fluxo de caixa sem risco, fluxo de caixa com risco atuarial e fluxo de caixa com risco financeiro.

Para exemplificarmos esse conceito, considere um simples cálculo da Reserva Matemática sobre um fluxo de caixa certo e um fluxo de caixa incerto. Suponha que um fundo de pensão deseje constituir um fundo (A) no ano 0 para o pagamento de um benefício prometido anual (B), a partir do ano 4 de R\$100 a um indivíduo, enquanto ele viver, durante 5 anos. Nos três primeiros anos, será cobrada do participante uma contribuição (C) de R\$ 50,00. A taxa que as contribuições vão poder ser aplicadas no mercado financeiro foram estimadas em 6% ao ano (risco financeiro). A probabilidade (p) de que o indivíduo não faleça a cada ano foi estimada como uma taxa constante de 99% (risco atuarial).

Situação 1: Operação sem riscos

Nessa situação hipotética, não existe a capitalização monetária e nem existe o risco de morte do participante. Portanto, temos que o valor do fundo seria de R\$ 350,00 calculado pela seguinte equação:

$$A = (B_8 + B_7 + B_6 + B_5 + B_4) - (C_3 + C_2 + C_1)$$

$$A = (100 + 100 + 100 + 100 + 100) - (50 + 50 + 50)$$

$$A = R\$350$$

Situação 2: Operação com risco atuarial

Nesse caso, os fluxos de caixa do exemplo anterior são calculados, considerando-se o risco biométrico de morte do indivíduo. O fluxo de caixa atuarial é igual à multiplicação do fluxo de caixa do período por sua probabilidade de ocorrência. Calculado dessa maneira, em nosso exemplo, o fundo necessário seria de R\$323,77, dado pela equação:

$$A = ({}_8pB_8 + {}_7pB_7 + {}_6pB_6 + {}_5pB_5 + {}_4pB_4) - ({}_3pC_3 + {}_2pC_2 + {}_1pC_1)$$

$$\text{Sendo } {}_n p = p_{ano1} \times p_{ano2} \times p_{ano3} \times \dots \times p_{anon}$$

$$A = (0,99^8 B_8 + 0,99^7 B_7 + 0,99^6 B_6 + 0,99^5 B_5 + 0,99^4 B_4) - (0,99^3 C_3 + 0,99^2 C_2 + 0,99^1 C_1)$$

$$A = R\$323,77$$

Situação 3: Operação com risco atuarial e financeiro

O risco financeiro constitui o risco assumido pelo fundo de pensão de conseguir capitalizar as disponibilidades a uma determinada taxa i . Procedendo dessa maneira, calculamos de maneira adequada o valor presente dos fluxos de caixa, ao considerarmos o valor do dinheiro no tempo. No exemplo apresentado, o valor do fundo seria de R\$220,03, dado pela equação:

$$A = ({}_8pB_8v_8 + {}_7pB_7v_7 + {}_6pB_6v_6 + {}_5pB_5v_5 + {}_4pB_4v_4) - ({}_3pC_3v_3 + {}_2pC_2v_2 + {}_1pC_1v_1)$$

$$\text{Sendo, } v_t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

$$A = (0,99^8 B_8v_8 + 0,99^7 B_7v_7 + 0,99^6 B_6v_6 + 0,99^5 B_5v_5 + 0,99^4 B_4v_4) - (0,99^3 C_3v_3 + 0,99^2 C_2v_2 + 0,99^1 C_1v_1)$$

$$A = R\$220,03$$

Esse fundo calculado de modo ideal recebe o nome de Reserva Matemática, um valor de referência para os ativos da instituição. Quando o valor dos ativos é superior à Reserva Matemática, diz-se que o fundo de pensão está em superávit atuarial; caso contrário diz-se que o fundo está em déficit atuarial.

Fórmulas gerais para a avaliação da situação financeira e atuarial dos fundos de pensão

De maneira geral, temos as seguintes fórmulas para a avaliação da situação financeira e atuarial dos fundos de pensão:

$$FCP_t = B_t - C_t \quad [2.2]$$

$$FC_t = {}_t p FCP_t \quad [2.3]$$

$$RM_0 = \sum_{t=1}^T v_t FC_t \quad [2.4]$$

Onde,

B_t = benefício prometido no período t;

C_t = contribuição prometida no período t;

FCP_t = fluxo de caixa prometido no período t;

FC_t = fluxo de caixa atuarial no período t;

${}_t p$ = probabilidade de ocorrência do fluxo de caixa prometido no período t;

v_t = taxa de desconto do período t; e

RM_0 = valor presente dos fluxos atuariais (reserva matemática) do fundo de pensão no período $t = 0$.

Tendo como base os fluxos de caixa atuariais, também é possível projetar a Reserva Matemática do fundo de pensão ao longo do tempo. Nesse caso, a equação seria⁴:

$$RM_n = \sum_{t=n+1}^T v^t FC_t \quad [2.5]$$

A projeção da Reserva Matemática por período pode ser dividida em dois componentes: Benefícios Concedidos e Benefícios a Conceder. Os Benefícios Concedidos correspondem aos fluxos de caixa projetados sobre os participantes assistidos do fundo de pensão; ao passo que os Benefícios a Conceder correspondem aos fluxos de caixa projetados dos participantes ativos do fundo.

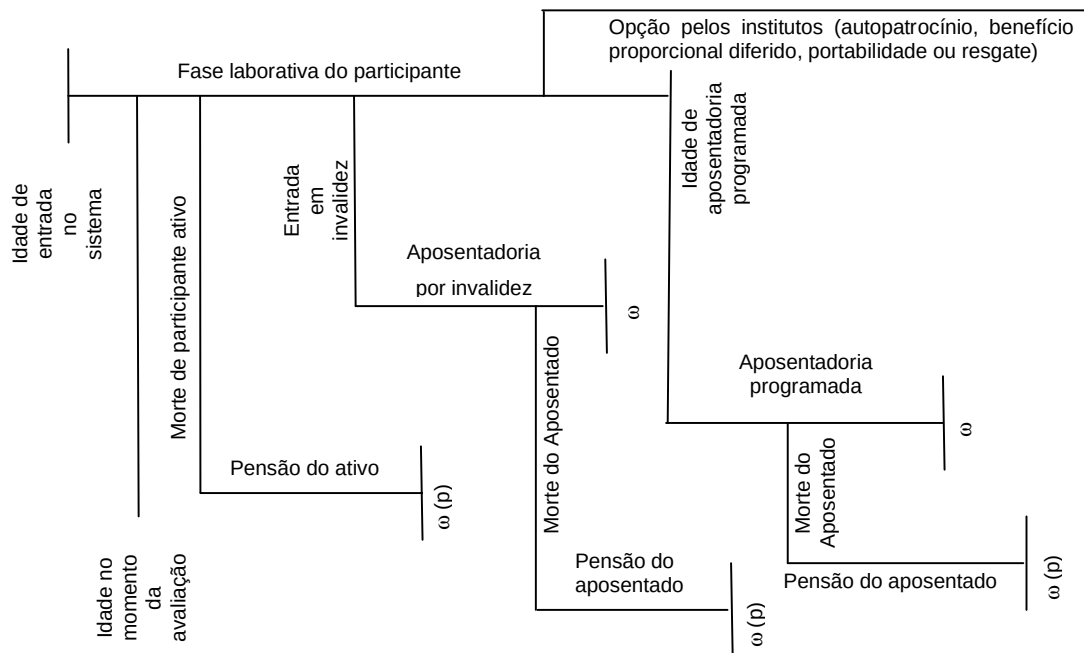
2.1.3. Eventos atuariais

Em estatística, define-se um evento como um subconjunto de possíveis resultados de um experimento, no qual cada evento está associado a uma medida de probabilidade. Como exemplo, podemos ter um experimento de rolar um dado, com os possíveis resultados $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o evento de tirar um número ímpar associado a uma probabilidade $P = [\{\text{ímpar}\}] = 1/2$.

Nas ciências atuariais, os eventos estão associados a diversos experimentos que provocam alterações sobre a composição dos participantes no plano de benefícios, como morte de indivíduo válido, entrada em invalidez, morte de indivíduo inválido, saída do plano, aposentadoria, etc.

⁴ O termo $t = n+1$ é utilizado para denotar apenas os fluxos de caixa futuros. O fluxo de caixa do momento $t=0$ já foi descontado dos ativos.

Festa (2005) ilustra (Figura 1) vários tipos de eventos possíveis que devem ser considerados para o cálculo dos fluxos atuariais de acordo com o plano de benefícios oferecidos por um fundo de pensão.



Nota: ω = Idade limite da tábua de mortalidade do participante
 $\omega (p)$ = Idade limite da tábua de mortalidade do pensionista

Figura 1- Exemplo de desdobramentos previdenciários para uma EFPC
 Fonte: Festa (2005)

Como cada evento está associado a uma medida de probabilidade, é possível que os fluxos de caixa prometidos em contrato sejam transformados nos fluxos atuariais, a partir de sua ponderação por sua probabilidade de ocorrência.

Segundo Winklevoss (1993), a lei dos grandes números permite que os fluxos de caixa sejam ponderados pela probabilidade do evento, uma vez que nessa lei afirma-se que, para um grande número de experimentos, o percentual de ocorrências de um determinado evento tende a ser igual à probabilidade de ocorrência desse evento.

No cálculo atuarial, as probabilidades de eventos específicos são normalmente retiradas diretamente de tábuas atuariais. Quando existem eventos que atuam de maneira simultânea, as probabilidades individuais dos eventos devem ser transformadas em probabilidades conjuntas, para que os fluxos de caixa atuariais sejam calculados de maneira similar.

Os seguintes conceitos de estatística elementar são úteis para o cálculo dos eventos conjuntos:

i- Ocorrência conjunta de ambos os eventos

Tem-se a seguinte fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad [2.6]$$

Para mais de dois eventos, pode-se utilizar a fórmula:

$$P(E_1 \cap E_2, \cap \dots \cap E_K) = \prod_{k=1}^K P(E_k) \quad [2.7]$$

Assim, por exemplo, pode-se calcular a probabilidade de morte conjunta do participante e de seu dependente, $q^{(T)}$, pela multiplicação da probabilidade individual de morte do participante, $q^{(part)}$, pela probabilidade de morte do dependente $q^{(dep)}$, ou seja:

$$q^{(T)} = q^{(part)} \times q^{(dep)} \quad [2.8]$$

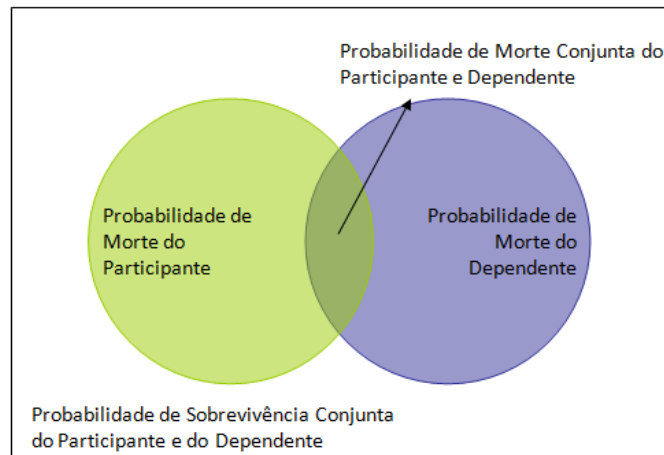


Figura 2- Diagrama de possibilidades de dois eventos simultâneos

ii- Ocorrência de pelo menos um dos eventos

Para o caso de dois eventos, tem-se a fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad [2.9]$$

No caso de três eventos, temos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) \quad [2.10]$$

Para mais de três eventos, podemos calcular a probabilidade de decrementos (morte, invalidez, etc.), diretamente pela fórmula:

$$P(E_1 \cup E_2, \cup \dots \cup E_K) = 1 - \prod_{k=1}^K (1 - P(E_k)) \quad [2.11]$$

Desse modo, para exemplificarmos, no cálculo da probabilidade conjunta de sobrevivência de todos os dependentes de um determinado participante, basta somar as

probabilidades individuais de cada evento e excluir as interseções resultantes de ocorrências conjuntas, conforme ilustra a figura a seguir:

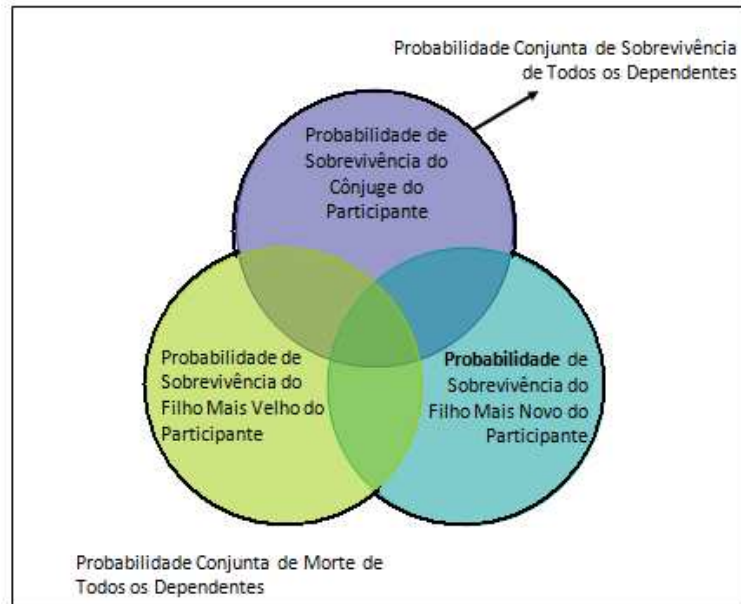


Figura 3- Diagrama de possibilidades de três eventos simultâneos

Para o cálculo de decrementos na população provocados por mais de um motivo, Bowers (1997) define uma fórmula de probabilidade de múltiplos decrementos no mesmo sentido daquela apresentada anteriormente:

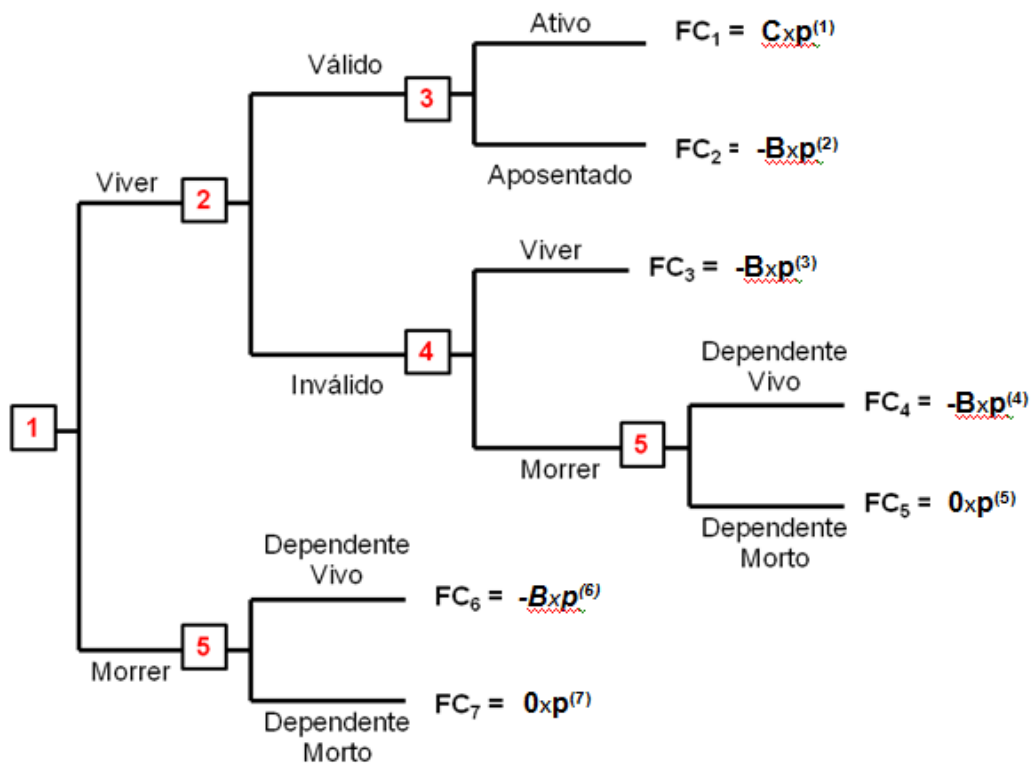
$$q^{(T)MD} = 1 - \prod_{k=1}^m (1 - q_x^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad [2.12]$$

Sendo:

$q^{(T)MD}$ = probabilidade de múltiplo decremento

$q_x^{(k)}$ = probabilidade independente de decremento pelo motivo k.

Dessa maneira, um fluxo de caixa atuarial pode ser facilmente calculado em um determinado instante do tempo, atribuindo aos múltiplos eventos de um fundo de pensão os seus fluxos de caixa associados, conforme ilustrado na figura a seguir:



Legenda:

- 1- Evento Morte/Vida pela Tábua de Mortalidade de Válidos
- 2- Evento Validez/Invalidez pela Tábua de Entrada em Invalidez
- 3- Evento Ativo/Aposentado pela chance de aposentadoria
- 4- Evento Morte/Vida pela Tábua de Mortalidade de Inválidos
- 5- Evento Morte/Vida dos dependentes pela Tábua de Mortalidade de Válidos

FC_k = Fluxo de caixa atuarial após os múltiplos eventos no caminho de ocorrências k.

$p^{(k)}$ = Probabilidade de ocorrência dos múltiplos eventos no caminho de ocorrências k.

B = Benefício Prometido

C = Contribuição Prometida

Figura 4- Exemplo de fluxo de caixa para um participante em um ambiente de múltiplos eventos

O fluxo de caixa atuarial total pode ser calculado pela soma dos fluxos de caixa prometidos em cada combinação possível de eventos ponderados por sua probabilidade de ocorrência, ou seja:

$$FC = \sum_{k=1}^n FC_k \times p^{(k)} \quad [2.13]$$

e,

$$\sum_{k=1}^n p^{(k)} = 1 \quad [2.14]$$

2.1.4. Tábuas atuariais

As tábuas atuariais são tabelas que relatam a evolução de uma população inicial sobre um determinado evento. Tábuas que sofrem decrementos ao longo do tempo por um único evento são chamadas de tábuas unidcrementais. As tábuas atuariais unidcrementais mais utilizadas nos fundos de pensão, relata Ribeiro (2007), são as de mortalidade de válidos, de entrada em invalidez, de mortalidade de inválidos, de rotatividade e de composição familiar.

Dentre as tábuas apresentadas, a mais conhecida é a de mortalidade de válidos. Ela é elaborada com base em um grupo inicial de indivíduos de mesma idade que são acompanhados até a data de seus óbitos. O número inicial de indivíduos estudados é reescalado, normalmente em uma base $l_0=1.000.000$ ou $l_0=100.000$, chamado de “raiz” da tabela. O número de indivíduos vivos a cada ano sofre decrementos devido às mortes ocorridas na população até o momento em que não haja mais nenhum indivíduo vivo.

As funções existentes nas tábuas de mortalidade são derivadas do decréscimo da população e possuem símbolos padronizados internacionalmente. Suas principais funções são:

l_x : indica o número de indivíduos no início da idade x .

p_x : indica a probabilidade de um indivíduo com idade x sobreviver ao longo dessa idade, dado por l_{x+1}/l_x . Também é utilizada a notação ${}_n p_x$ para denotar a probabilidade de um indivíduo com a idade x sobreviver n anos, dado por l_{x+n}/l_x ou $p_x \times p_{x+1} \times \dots \times p_{x+n}$

q_x : indica a probabilidade de um indivíduo com idade x falecer ao decorrer dessa idade, dado por $1 - p_x$

d_x : indica o número de indivíduos que faleceram ao longo da idade x , dado por $l_x \times p_x$

Para Promislow (2006), grande parte da metodologia atuarial foi desenvolvida em uma era pré-computacional. Tal fato tornou necessário o desenvolvimento de metodologias para facilitar a avaliação atuarial. Um exemplo desse desenvolvimento são as tábuas de comutação, que possuem o intuito de simplificar os cálculos dos atuários, combinando os dados biométricos das tábuas atuariais com a taxa de desconto. No cálculo da Reserva Matemática, quando os fluxos de caixa prometidos são iguais, temos:

$$RM_0 = \sum_{t=1}^T {}_t p_x v^t FCP_t = \sum_{t=1}^T {}_t p_x v^t FCP = FCP \sum_{t=1}^T {}_t p_x v^t \quad [2.15]$$

O termo $\sum_{t=1}^T {}_t p_x v^t$ pode ser calculado fazendo:

$$D_x = l_x v^t \quad [2.16]$$

e,

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_{\omega} \quad [2.17]$$

onde ω é a idade do indivíduo mais longo da tábua de mortalidade.

Assim, notando que $\frac{D_{x+t}}{D_x}$ traz a valor presente o fluxo de caixa unitário ${}_t p_x v^t$, temos que

$\sum_{t=1}^T {}_t p_x v^t = \sum_{t=1}^T \frac{D_{x+t}}{D_x}$, que pode ser calculado diretamente por:

$$\frac{N_{x+1} - N_{x+T+1}}{D_x} \quad [2.18]$$

Nas ciências atuariais, também é comum o uso do símbolo $a_{\overline{x:n}|}$ para denotar $\sum_{t=1}^T {}_t p_x v^t$, a fim de representar o valor atual de uma série de anuidades iguais pagáveis por um indivíduo com idade x , enquanto ele viver, mas, no máximo, T anos e a partir da idade $x+1$.

Segundo Beltrão e Pinheiro (2002) *apud* Chan, Silva e Martins (2006), a escolha da tábua de mortalidade e das taxas de desconto utilizadas são as premissas que mais influem no estudo atuarial dos fundos de pensão.

Festa (2005) aponta que, em virtude do avanço do aumento crescente da longevidade dos indivíduos, os fundos de pensão têm migrado para tábuas atuariais mais conservadoras, como a AT-2000. As diferenças entre as tábuas de mortalidade existentes podem ser observadas no Gráfico 1, a seguir:

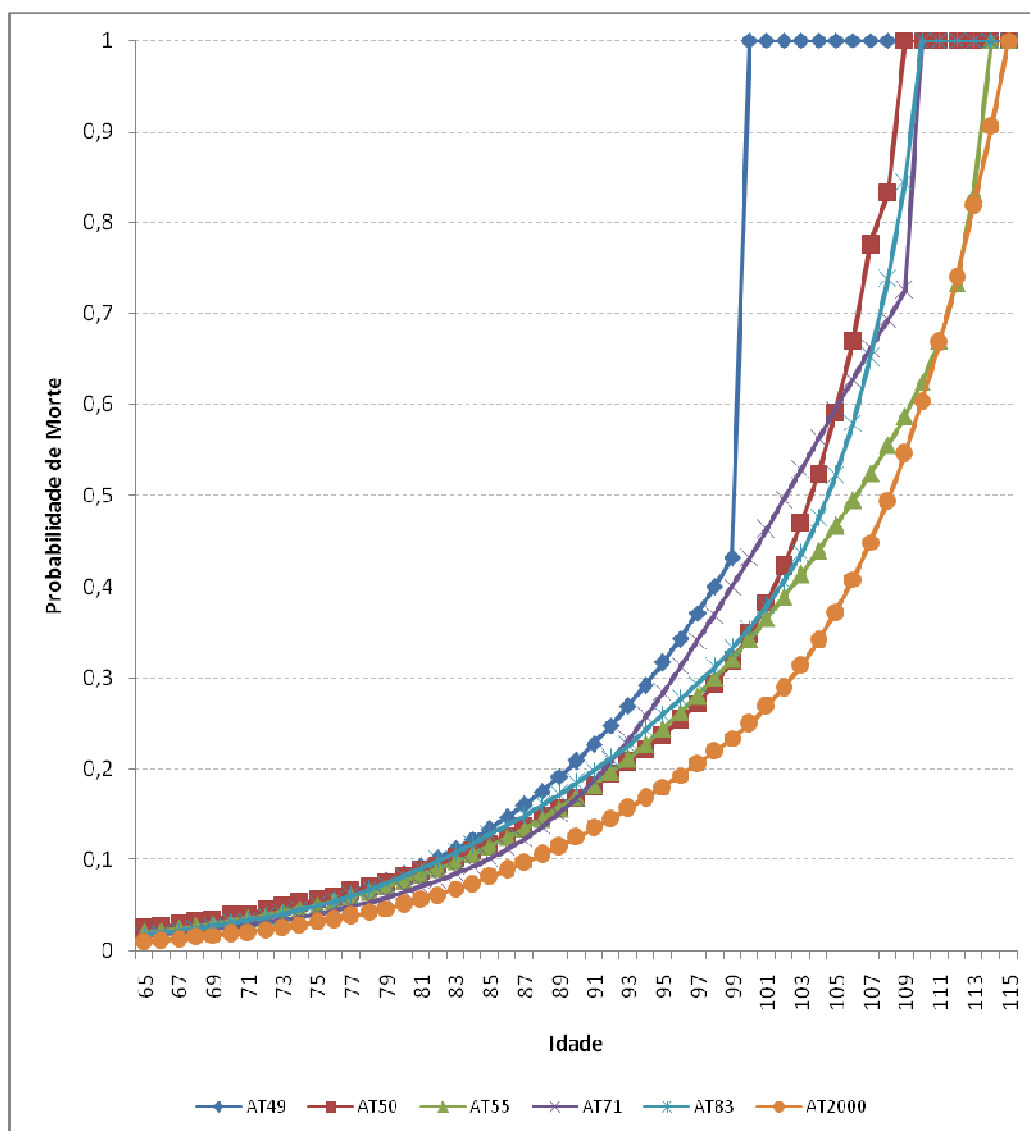


Gráfico 1- Probabilidade de Morte por Idade para indivíduos maiores de 65 anos segundo tábuas de mortalidade *Annuity Table* – AT elaboradas em anos distintos

As tábuas de mortalidade devem ser aderentes às causas de mortalidade que afligem a população em estudo. Geralmente, tais causas são decorrentes de localização geográfica da população, da exposição à violência, de seus hábitos sociais, da acessibilidade à saúde, etc. Segundo os dados do Sistema de Informações sobre Mortalidade do Ministério da Saúde, as causas mais comuns de mortalidade no Brasil são provenientes de doenças cardíacas, doenças cerebrovasculares, tumores

cancerígenos, doenças respiratórias, *diabetes mellitus* e causas externas, como agressões e acidentes de transportes. Os percentuais das causas de morte no Brasil agrupadas, segundo a Classificação Estatística Internacional de Doenças e Problemas Relacionados à Saúde - CID-10, são informados a seguir:

Tabela 1- Percentual de causas de óbitos no Brasil no ano de 2007, segundo Capítulo CID-10 para a faixa etária acima de 20 anos

Capítulo CID-10	Percentual
IX. Doenças do aparelho circulatório	31,83%
II. Neoplasias (tumores)	16,46%
XX. Causas externas de morbidade e mortalidade	11,29%
X. Doenças do aparelho respiratório	10,32%
XVIII. Sinais e achados anormais de exames clínicos e laboratoriais	7,88%
IV. Doenças endócrinas nutricionais e metabólicas	6,27%
XI. Doenças do aparelho digestivo	5,47%
I. Algumas doenças infecciosas e parasitárias	4,25%
XIV. Doenças do aparelho geniturinário	1,86%
VI. Doenças do sistema nervoso	1,83%
V. Transtornos mentais e comportamentais	1,12%
III. Doenças sangue órgãos hemat. e transt. imunitár.	0,51%
XIII. Doenças do sistema osteomuscular e tecido conjuntivo	0,37%
XII. Doenças da pele e do tecido subcutâneo	0,25%
XV. Gravidez, parto e puerpério	0,14%
XVII. Malformações congênitas, deformidades e anomalias	0,12%
VIII. Doenças do ouvido e da apófise mastóide	0,01%
XVI. Algumas afecções originadas no período perinatal	0,01%
VII. Doenças do olho e anexos	0,00%
TOTAL	100%

Fonte: MS/SVS/DASIS - Sistema de Informações sobre Mortalidade - SIM.

Para aprimorar a aderência das premissas atuariais à população em estudo, Promislow (2006) sugere o uso de tábuas personalizadas para os indivíduos. Por exemplo, como os homens, por alguns motivos não muito claros, vivem menos que as mulheres, a sugestão é que devem ser adotadas tábuas distintas para os sexos. Outro ponto

sugerido pelo autor para um cálculo atuarial mais sofisticado é a utilização de tábuas para fumantes e não fumantes para considerar o conhecido fato de que fumantes vivem menos.

As tábuas de entrada em invalidez e mortalidade de inválidos também são muito importantes para a determinação do passivo atuarial. Segundo Rodrigues (2002) *apud* Chan, Silva e Martins (2006), o conceito de invalidez tem se alterado bastante ao longo do tempo, pois, no início do século XX, um trabalhador era considerado inválido por sua efetiva incapacitação por perda total ou parcial de membros, incapacidade visual extrema, doenças respiratórias, etc. No entanto, atualmente, um indivíduo pode ser declarado inválido por lesões ou doenças não tão severas como as citadas e que possuem capacidade de recuperação. Aliado a esse fator, deve ser levado em consideração que as tábuas de invalidez e de mortalidade de inválidos utilizadas pelo mercado advêm de longa data, aumentando consideravelmente o risco de não aderência aos participantes do fundo.

Tábuas multidecrementais

É comum, nos cálculos atuariais dos fundos de pensão, a combinação das tábuas com decremento simples para formar tábuas multidecrementais. Tais tábuas mostram, hipoteticamente, a evolução do número de empregados de um grupo populacional original, sujeito aos efeitos de todas as taxas decrementais das hipóteses demográficas do fundo, que permanecem no plano a cada idade atingida futura.

Para a construção dessas tábuas, Winklevoss (1993) destaca que é necessário atribuir exatamente um decremento a cada evento. Por exemplo, ao invés de calcular diretamente a probabilidade de um participante ativo com idade x continuar ativo em um ano, após os eventos morte de válido (m), saída do emprego (t), invalidez (d), aposentadoria (r) pela equação 2.19, o cálculo é efetuado segundo a Equação 2.20, a partir de novas probabilidades dependentes (marcadas sem o apóstrofo “’”):

$$p_x^{(T)} = (1 - q_x^{(m)})(1 - q_x^{(t)})(1 - q_x^{(d)})(1 - q_x^{(r)}) \quad [2.19]$$

$$p_x^{(T)} = 1 - (q_x^{(m)} + q_x^{(t)} + q_x^{(d)} + q_x^{(r)}) \quad [2.20]$$

Para calcular as probabilidades dependentes de múltiplo decremento, assume-se a hipótese de que a incidência de eventos conjuntos, $P'(A \cap B)$, está dividida igualmente entre os eventos, ou seja:

$$P(A) = P'(A) + P'(A \cap B)/2 \text{ e } P(B) = P'(B) + P'(A \cap B)/2 \quad [2.21]$$

Dessa forma, a tábua de múltiplos decrementos é construída a partir das seguintes equações recursivas:

$$l_x^{(T)} = l_{x-1}^{(T)} - \sum_{k=1}^K d_x^{(k)} \text{ e,} \quad [2.22]$$

$$d_x^{(k)} = l_x^{(T)} q_x^{(k)}, \text{ sendo } k, \text{ o } k\text{-ésimo decremento.} \quad [2.23]$$

É interessante notar que, quando a causa do decremento não altera o fluxo de caixa atuarial (por exemplo, quando não é importante a causa da morte para o pagamento de um benefício), os cálculos das probabilidades dependentes e a montagem de tábuas de múltiplos decrementos não são necessários.

2.1.5. Classificação das premissas atuariais

Os cálculos atuariais são realizados através de premissas a respeito do futuro. Segundo Rodrigues (2002) *apud* Chan, Silva e Martins (2006), as premissas atuariais podem ser classificadas da seguinte maneira:

Premissas econômicas:

- a) Taxa de Inflação de longo prazo;
- b) Ganho real dos investimentos;
- c) Escala de ganhos salariais;
- d) Indexador dos benefícios;
- e) Teto de benefício do sistema público; e
- f) Custeio administrativo.

Premissas biométricas:

- a) Mortalidade de válidos;
- b) Mortalidade de inválidos;
- c) Entrada de invalidez; e
- d) Rotatividade.

Outras premissas:

- a) Composição Familiar;
- b) Idade presumida de aposentadoria;
- c) Idade de entrada no emprego;
- d) Idade de adesão ao sistema público de aposentadoria; e
- e) Formas opcionais de escolha de benefícios.

Segundo Resolução CGPC Nº 23, de 6 de dezembro de 2006, as premissas adotadas pelo atuário responsável nas avaliações atuariais devem ser divulgadas aos participantes ativos e assistidos da EFPC por meio do Demonstrativo de Resultados da Avaliação Atuarial – DRAA.

A escolha das premissas atuariais devem ser as mais fidedignas possíveis, para não sub ou sobreavaliar o passivo da instituição. Cairns (1994) ressalta que a prática vigente entre os atuários é adotar parâmetros mais conservadores nas premissas, ao invés de serem mais conservadores diretamente na função objetivo da instituição, por

exemplo, reduzindo a chance de insolvência tolerável. Há desvantagem no ato de agirem dessa maneira, uma vez que, alterando o valor mais provável das premissas não se sabe certamente o quanto de risco foi reduzido após a escolha dos ativos e da taxa de contribuição a ser descontada dos participantes. Ademais, a escolha de valores diferentes daqueles que seriam os mais prováveis para as premissas, tendem a propiciar a transferência de riqueza entre as gerações de participantes do fundo de pensão.

2.1.6. Métodos de financiamento

Os métodos de financiamento de uma EFPC consistem na previsão de como serão os fluxos das contribuições para a entidade, necessárias para honrar o pagamento dos benefícios do fundo. Segundo Iyer (2002), qualquer função de contribuição que satisfaça a equação fundamental que iguala o valor presente da série de contribuições futuras ao valor presente das despesas futuras constitui um método de financiamento teoricamente possível para um novo sistema de previdência. No entanto, ressalta o autor, questões práticas e legais impõem restrições sobre os valores possíveis das contribuições, benefícios e reservas do fundo de pensão. A imposição dessas e de outras restrições conduz a métodos de financiamentos diversos.

A Deliberação CVM 371, de 13 de novembro de 2000, divide os tipos de métodos de avaliação atuarial em duas grandes categorias⁵: o método de avaliação dos benefícios

⁵ Recentemente, devido à convergência às normas internacionais de contabilidade, a Deliberação CVM 371/2000 foi substituída pela Deliberação CVM 600, de 07 de outubro de 2009. Contudo, a classificação preconizada continua conceitualmente válida. Outras classificações comuns de métodos de financiamento: (1) Custo Individual versus Agregado: no método de custo individual, determina-se o custo do benefício para cada participante e somam-se os custos individuais para obter o custo de todo o plano. No método de custo agregado, o custo é estabelecido em bases coletivas; (2) Custo em Nível

acumulados, *accrued benefit valuation method*, e o método de avaliação dos benefícios projetados, *projected benefit valuation method*.

As diferenças entre essas duas categorias residem basicamente na forma de reconhecimento dos benefícios. No método de avaliação dos benefícios acumulados, os benefícios reconhecidos são proporcionais aos anos de serviços prestados pelo funcionário em atividade. Já os métodos de avaliação dos benefícios projetados refletem os benefícios de aposentadoria baseados nos serviços tanto prestados como a prestar pelos empregados na data da avaliação atuarial.

A forma mais comum dos métodos de avaliação dos benefícios acumulados está baseada no método de custeio do crédito unitário, *Unit Credit Method*. Festa (2005) define que este método financia o valor atual dos benefícios em unidades proporcionais aos anos de filiação sobre os anos de serviços necessários à aposentadoria. Dessa forma, quando o participante se tornar elegível ao benefício previdenciário, o valor atual dos benefícios já estará integralizado. Uma variante é o método do crédito unitário projetado, *Projected Unit Credit Method*, utilizado com a projeção do crescimento salarial dos participantes até a data de elegibilidade do benefício.

Os métodos de avaliação dos benefícios projetados alocam o custo dos benefícios de aposentadoria dos empregados uniformemente (em valores absolutos ou como

versus Percentual de Salário: no método de custo em nível, as contribuições são constantes ao longo do tempo; no método de Percentual de Salário, o valor das contribuições é dado como um percentual da folha de pagamentos; (3) Único versus Separação de Benefícios de Serviços Passados: No método Único, é apurado o custeio sem a distinção da origem dos benefícios; no método de Separação de Benefícios de Serviços Passados, é apurado separadamente o custeio para cobrir os benefícios concedidos a participantes que não contribuíram para a formação das reservas.

porcentagem de salários) durante todo o período de emprego. A Deliberação CVM 371 considera os quatro principais métodos dessa categoria:

(1) Método Normal de Filiação, *Entry Age Normal Method*: nesse método, o custo do benefício individual é estimado como se todos os participantes tivessem entrado no fundo em uma determinada idade.

(2) Método de Prêmio Nivelado Individual, *Individual Level Premium Method*: esse método atribui o custo do benefício de aposentadoria de cada empregado durante o período que abarca desde a data de filiação ao plano até a data da aposentadoria, mediante importâncias anuais uniformes ou por uma porcentagem fixa do salário.

(3) Método Global, *Aggregate Method*: método que usa os mesmos princípios básicos do Método de Prêmio Nivelado Individual, aplicado ao plano como um todo, e não a cada empregado individualmente. O custo dos benefícios é alocado ao longo do tempo de serviço médio dos empregados em atividade.

(4) Método Normal de Idade Atingida, *Attained Age Normal Method*: método semelhante ao Método de Prêmio Nivelado Individual e ao Método Global, exceto pelo fato de que ele avalia o custo dos serviços passados (valor presente dos benefícios futuros por serviços prestados antes do início do plano), usando o Método de Avaliação de Benefícios Acumulados.

Todos os métodos expostos obedecem ao regime de capitalização, pois objetivam constituir um fundo de longo prazo para o custeio dos benefícios futuros. Vale ressaltar que esse regime é obrigatório para o custeio dos benefícios programados ou continuados, de acordo com a Resolução CGPC nº 18, de 28 de março de 2006.

Outro regime existente, comum nos sistemas de previdência social, é o regime de Repartição Simples. Nesse regime, as despesas de um determinado período com os

assistidos são divididas entre os participantes ativos. Como nesse regime não há formação de poupança para pagamento dos benefícios, a variação entre a população de ativos por assistidos constitui um risco para plano. Iver (2002) critica que o uso desse regime tende a favorecer a transferência de riqueza entre gerações e que um sistema de previdência ocupacional deve ser idealmente estruturado como um “fundo fechado”, ou seja, cada geração deve contribuir de maneira integral para custear seus benefícios futuros.

2.1.7. Equilíbrio financeiro do Fundo de Pensão

Autores como Festa (2005) e Pinheiro (2007) sugeriram ser a Reserva Matemática projetada como a meta a ser alcançada pelo fundo de pensão a cada período, para que esse plano encontre-se em estado de solvência. Outros autores como Valladão (2008) e Veiga (2003) também utilizaram a Reserva Matemática como um parâmetro para o estado de solvência do fundo. Contudo, tais autores apontaram que, para seu cálculo, seria necessário utilizar como taxa de desconto a rentabilidade projetada da carteira de ativos, ao invés das taxas de avaliação atuariais previstas na legislação, nas quais normalmente se utiliza a rentabilidade real fixa de 6% ao ano.

Podemos também distinguir duas situações de insolvência: insolvência técnica e a insolvência real. A primeira situação define-se como o caso em que o valor presente dos ativos não é capaz de saldar o valor presente dos passivos da instituição, ou seja, na qual o valor dos ativos é inferior à Reserva Matemática. A segunda define-se para os casos em que, em qualquer instante do tempo, o valor dos ativos não é suficiente para o pagamento dos passivos.

Nesse contexto, podem ser construídos vários indicadores de insolvência diferentes, que conduzirão a probabilidades de insolvência distintas, a saber: Caso 1 – Valor dos Ativos menor que o Valor Presente dos Passivos, sendo a taxa de desconto dos ativos

igual à taxa de desconto dos passivos; Caso 2 – Valor dos Ativos menor que o Valor Presente dos Passivos, sendo a taxa de desconto dos ativos diferente da taxa de desconto dos passivos; e, Caso 3 – Valor dos Ativos é inferior ao Valor dos Passivos em qualquer instante do tempo.

Para ilustrarmos como tal diferença afeta a medida de solvência, considere os dados da Tab. 2. Observa-se, no exemplo, que, tanto no Caso 1 como no Caso 2, a Reserva Matemática calculada é inferior ao valor do ativo, indicando um superávit atuarial. Além disso, vale frisar, para o Caso 1, que, quanto maior a taxa de avaliação atuarial utilizada, menor será o Valor Presente dos Passivos e, portanto, maiores serão as chances de o fundo vir a ser conceituado como solvente.

Tabela 2- Ilustração de aplicação de diversos métodos para aferição da solvência de um fundo de pensão

Ano	Rentabilidade Ativos	Taxa de Avaliação	Valor dos Ativos - Bruto	Fluxo de	CASO 1	CASO 2	CASO 3
		Atuarial		Caixa Atuarial			
0			100,00		92,80	97,67	
1	2,0%	6,0%	102,00	30,00			72,00
2	4,0%	6,0%	74,88	30,00			44,88
3	6,0%	6,0%	47,57	50,00			-2,43
4	8,0%	6,0%	-2,62	-10,00			7,38
5	10,0%	6,0%	8,12	5,00			3,12
Situação					Solvente	Solvente	Insolvente

O Caso 3, isoladamente, indicou um estado de insolvência do fundo, pois é o único que não considera a possibilidade de saldar compromissos presentes com recebimentos futuros. Ademais, não é possível que o método de avaliação de solvência utilizado no Caso 3 indique uma situação de solvência quando o método do Caso 2 indicar uma situação de insolvência, pois o valor do superávit/déficit atuarial calculado pelo Caso 2 é igual ao valor presente do ativo do último ano de avaliação (líquido do pagamento do

fluxo de caixa atuarial do período), o que, por definição da solvência do Caso 3, é positivo.

Para provar essa última afirmação, considere que o valor dos ativos em qualquer instante do tempo é dado por:

$$A_t = A_{t-1}(1+r_t) - FC_t \quad [2.24]$$

Efetuada o cálculo recursivo para a equação anterior, partindo do último período T, é possível deduzir que:

$$A_t = VP_t(A_T) + \sum_{i=t+1}^T VP_t(FC_i) \quad [2.25]$$

Ou, de modo equivalente:

$$A_t = VP_t(A_T) + RM_t \quad [2.26]$$

Onde:

A_t = Valor dos ativos após o pagamento do fluxo de caixa atuarial no período t (indicador de solvência do caso 3).

r_t = rentabilidade dos ativos entre o período t-1 e t.

FC_t = fluxo de caixa atuarial do período t.

$VP_t(\alpha_j)$ = valor presente de α_j no instante t, calculado pelo fator $1/[(1+r_j)\dots(1+r_{t+1})]$

RM_t = reserva matemática no instante t.

Os métodos de avaliação de solvência dos Casos 1 e 2 também podem ser estendidos para todos os períodos. Como demonstrado, o indicador do Caso 2 será invariável com

a projeção, por depender somente do sinal do indicador terminal A_T . Contudo, o indicador do Caso 1 não é consistente ao longo do tempo e ainda pode indicar insolvência quando os métodos 2 e 3 indicaram uma situação de solvência. Essa situação é ilustrada na Tab. 3, com uma pequena alteração nos fluxos de caixa anteriores:

Tabela 3- Ilustração de aplicação de diversos métodos para aferição da solvência de um fundo de pensão com reservas matemáticas projetadas

Ano	Rentabilidade Ativos	Taxa de	Valor dos Ativos - Bruto	Fluxo de	CASO 1'	CASO 2'	CASO 3
		Avaliação Atuarial		Caixa Atuarial			
0			100,00		95,10	99,89	
1	2,0%	6,0%	102,00	30	70,80	71,89	72,00
2	4,0%	6,0%	74,88	30	<u>45,05</u>	44,76	44,88
3	6,0%	6,0%	47,57	40	<u>7,75</u>	7,45	7,57
4	8,0%	6,0%	8,18	3,5	<u>4,72</u>	4,55	4,68
5	10,0%	6,0%	5,15	5	0,00	0,00	0,15
Situação					Insolvente	Solvente	Solvente

2.2. Pesquisa Operacional aplicada em ALM

2.2.1. Conceitos básicos em Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional⁶ (PO) é um ramo do conhecimento em que se estuda a maximização ou minimização de funções complexas em problemas com ou sem restrições através da matemática, da estatística e de algoritmos computacionais. Conforme discutido por Board, Sutcliffe e Ziemba (1999), as técnicas estudadas em Pesquisa Operacional formam a base para o entendimento de diversas aplicações de ALM.

A Pesquisa Operacional teve origem na II Guerra Mundial, quando grupos de cientistas de diversos campos do conhecimento faziam pesquisas para operações militares. A disciplina desenvolveu-se bastante nos anos subsequentes, impulsionadas por avanços no âmbito acadêmico e organizacional. Por ser uma disciplina que necessita de grande esforço computacional, a era moderna de computadores de grande velocidade fez com que a PO ganhasse um novo impulso⁷. Segundo Hillier e Lieberman (2006), a PO teve um impacto impressionante na melhoria da eficiência de inúmeras organizações pelo mundo e deu uma contribuição significativa no aumento de produtividade das economias de diversos países.

Um problema de pesquisa operacional surge quando um tomador de decisão depara-se com um problema da vida real e decide representá-lo através de um modelo matemático. A qualidade da representação da realidade no modelo desenvolvido será um dos componentes mais importantes da solução do problema da vida real.

Um bom modelo, destaca Friedman (1953), não pode ser avaliado em termos das suposições utilizadas nem em termos de se ele parece ser suficientemente complicado para capturar todos os detalhes "relevantes" da vida real. Em outras palavras, um modelo pode ser simples e, mesmo assim, ser julgado bem-sucedido, se ajudar a melhorar a eficiência do processo decisório.

A modelagem de um problema de pesquisa operacional possui um formato genérico de representação e alguns elementos característicos. Hillier e Lieberman (2006) apresentam a seguinte conceituação:

⁶ Também conhecida como Programação Matemática.

⁷ Atualmente existe uma enorme variedade de aplicativos disponíveis para a solução de problemas de Pesquisa Operacional. Para uma pequena amostra, consultar: www.informs.org/Resources/Computer_Programs.

Formato genérico de um problema de Pesquisa Operacional

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \quad [2.27]$$

Sujeito a :

$$\begin{array}{ll} G_i(\mathbf{x}) = 0 & i = 1, \dots, m_e \\ G_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i = m_e + 1, \dots, m \end{array}$$

Elementos de um modelo de Pesquisa Operacional

Função Objetivo: É uma função $f(\mathbf{x})$ que define e mensura o principal objetivo do modelo através de um valor escalar. A função objetivo deve ser otimizada, o que, dependendo do contexto do problema, significa encontrar um ponto de mínimo ou de máximo para a função. Vale notar que uma função de maximização de $f(\mathbf{x})$ pode ser representada igualmente por uma minimização de $h(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$.

Variáveis de Decisão: São as variáveis utilizadas no modelo que podem ser controladas pelo tomador de decisão. A solução do problema é dada por certa combinação de valores dessas variáveis, usualmente representado por um vetor genérico $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Parâmetros: Constituem os dados do problema que não podem ser alterados pelo tomador de decisão. São representados através de constantes e coeficientes fixos c nas restrições $G(\mathbf{x})$ e na função objetivo $f(\mathbf{x})$.

Restrições: São um conjunto de m regras que dizem o que podemos (ou não) fazer e/ou quais são as limitações dos recursos e das atividades que estão associados ao modelo. Dessa maneira, o conjunto de soluções pode ser restrito por equações, $G_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, \dots, m_e$) e inequações $G_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ($i = m_e + 1, \dots, m$); já considerando, nesse

último caso, a possibilidade de limites inferiores LI e superiores LS para as variáveis de decisão. É interessante notar que uma restrição do tipo $I(\mathbf{x}) \geq 0$ pode ser multiplicada por menos um, para ser representada por uma função equivalente do tipo $G(\mathbf{x}) \leq 0$, sendo $G(\mathbf{x}) = -I(\mathbf{x})$. O conjunto de valores viáveis para as variáveis de decisão $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dado pelas restrições formando o espaço de decisão do problema.

Os problemas de Pesquisa Operacional são resolvidos através de algoritmos. Um algoritmo consiste em uma série de regras bem definidas para a resolução de uma tarefa em um intervalo de tempo finito. Os algoritmos funcionam como “receitas”, descritas em linguagem informal, pseudoformal ou formal, que, se aplicadas a uma determinada entrada de dados, atribuirão a essa entrada um valor de saída.

O algoritmo mais simples e direto para a solução de um problema de otimização é conhecido como “método da força bruta”, o qual busca calcular todas as possíveis soluções e decidir pela melhor. Entretanto, uma característica desejável de um algoritmo é o quão rapidamente ele converge para a solução da tarefa e o uso desse método provavelmente conduzirá a um longo tempo de espera.

Para Linden (2008), dois fatores são determinantes para o tempo de solução de um problema: (1) o tempo de processamento entre cada passo do algoritmo; e (2) o número de passos necessários para a solução de um problema⁸.

⁸ Obviamente, conforme destacam Ramos e Cerisola (2009), para computar o tempo real de solução de um problema, deve-se levar em conta o tempo de criação e interface, além do tempo próprio do processamento do algoritmo utilizado para otimização.

O tempo de processamento entre cada passo é dependente do sistema em que é processado o algoritmo. Como esse tempo varia bastante de máquina para máquina, ele geralmente não é computado para medir a eficiência de um algoritmo.

Pode-se, para um determinado algoritmo, relacionar o número total de passos do algoritmo ao número n de entradas do problema através de uma função $f(n)$. Uma medida aproximada de $f(n)$, denominada $O(f(n))$, foi uma métrica criada pelos cientistas da computação para medir a complexidade computacional do problema. Conforme Linden (2008), problemas de complexidade elevada podem rapidamente se tornar intratáveis computacionalmente para um número pequeno de entradas⁹.

Além do tamanho do problema dado, em função do número de variáveis de decisão e do número de restrições, as relações matemáticas entre a função objetivo, as restrições e as variáveis de decisão alteram a complexidade computacional do problema e podem torná-lo de difícil ou de impossível solução.

Wolpert e Macready (1997), através do Teorema da Inexistência do Almoço Grátis, demonstraram que, em problemas de otimização, não existe um algoritmo único e eficiente para encontrar a solução em todos os problemas. Linden (2008) afirma que nenhum algoritmo genérico pode ser melhor do que um algoritmo desenhado especificamente para a solução de um problema, em que as características especiais desse problema, incluindo suas restrições, seus mapeamentos e quaisquer outras peculiaridades que possamos imaginar, sejam projetadas e utilizadas para o benefício de solução, conforme ilustra a Figura 5. No entanto, o autor afirma que algoritmos

⁹ O autor exemplifica que, para um problema de $n=100$ elementos, com um algoritmo que oferece um tempo de processamento proporcional a 2^n , em um computador que processa 10^9 operações em um segundo, serão levados 10^{21} segundos (ou 10^{13} anos) para ser processado, um período de tempo 10^3 vezes maior que a idade estimada do universo.

genéricos podem ser extremamente úteis, por sua facilidade de implementação ou quando as características intrínsecas ao modelo estudado são difíceis de serem calculadas computacionalmente.

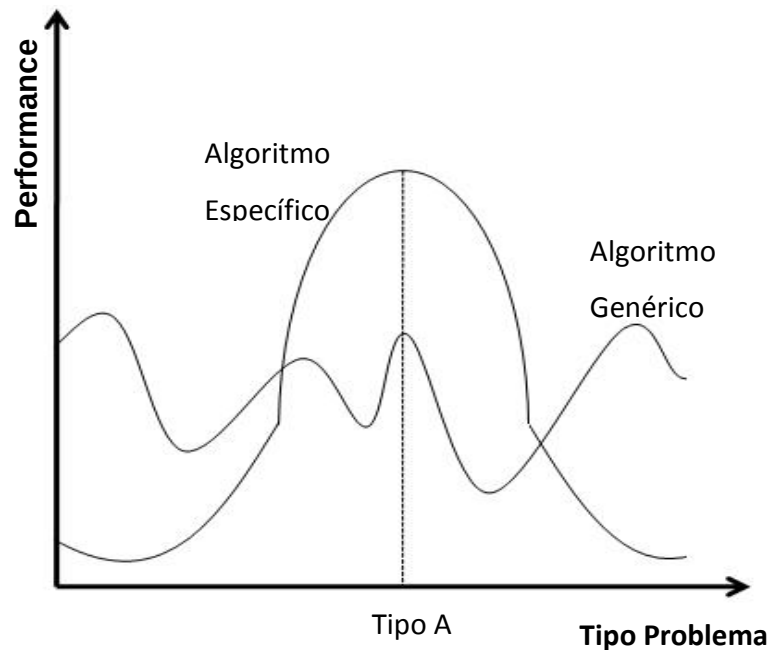


Figura 5- Comparação de performance entre algoritmos genéricos e específicos para um determinado tipo de problema
Fonte: Linden (2008).

A programação linear, a programação inteira, a programação quadrática, a programação dinâmica e a programação estocástica são categorias comumente utilizadas para dividir os tipos de problemas estudados na Pesquisa Operacional. Entretanto, Kall e Wallace (1994) alertam que as classificações não são sempre únicas, visto que temos problemas estocásticos lineares, problemas lineares dinâmicos, problemas não lineares com restrições inteiras, etc. A identificação do tipo de problema de Pesquisa Operacional irá auxiliar no processo de escolha de algoritmo específico a ser utilizado para um problema qualquer em estudo. As características dos problemas mais abordadas para auxiliar nessas classificações são:

1. Formas funcionais;

2. esparcidade;
3. decomponibilidade; e
4. estocasticidade.

Além dessa classe de algoritmos especialmente projetados, existem algoritmos genéricos denominados heurísticos, que são baseados em idéias relativamente intuitivas de busca de solução. Esses algoritmos fazem pouco uso da estrutura matemática subjacente dos problemas em análise. Conforme discutido em Colin (2007), os métodos heurísticos não possuem garantia de que a solução seja ótima, porém geralmente conduzem a resultados satisfatórios. Alguns desses algoritmos genéricos mais comuns incluem a Busca Padrão (*Pattern Search*), o Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), a Busca Tabu (*Tabu Search*), Busca por Dispersão (*Scatter Search*), Redes Neurais (*Neural Networks*), Otimização Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization*), Otimização Nuvem de Partículas (*Particle Swarm Optimization*), Algoritmos Evolucionários (*Evolutionary Algorithms*) e os Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithms*)¹⁰.

Nas próximas subseções, serão abordadas mais pormenorizadamente as características geralmente exploradas nos problemas de Pesquisa Operacional, bem

¹⁰ Alguns dos aplicativos que oferecem suporte para algoritmos de otimização heurísticos são:

1. Optimizer (WITNESS): Recozimento simulado, Busca tabu;
2. RiskOptimizer(@Risk): Algoritmos genéticos;
3. Algoritmos genéticos and Direct Search Toolbox (Matlab): Recozimento simulado, Algoritmos genéticos, Busca padrão;
4. AutoStat (AutoMod): algoritmos evolucionários, algoritmos genéticos;
5. OptQuest(Arena, Crystal Ball, ProModel, SIMUL8, Risk Solver Platform): busca por dispersão, busca tabu, redes neurais;
6. Evolutionary Optimizer(Extend): algoritmos evolucionários, algoritmos genéticos;
7. Large-Scale SQP (Risk Solver Platform): algoritmos evolucionários, algoritmos genéticos.

como uma exposição breve de seus métodos associados. A elucidação desses conceitos é necessária para o entendimento dos trabalhos de ALM, que os utilizam de maneira recorrente. Dentre esses, um método heurístico será apresentado em seção à parte, pois servirá como base para a metodologia deste trabalho.

2.2.1.1. Formas funcionais

A forma funcional de um problema de Pesquisa Operacional relaciona-se ao grau das equações e inequações das restrições e função objetivo do problema. Quando todas as equações e inequações do problema são de 1º grau, o problema é classificado como um problema de programação linear; caso contrário o problema é considerado de programação não linear.

Problemas de programação linear são muito mais fáceis de serem resolvidos do que problemas de programação não linear de mesmo tamanho. A propriedade que torna os problemas lineares tão mais fáceis é o fato que a solução ótima sempre estará na fronteira do espaço de decisão. Essa propriedade pode ser intuitivamente observada na figura a seguir:

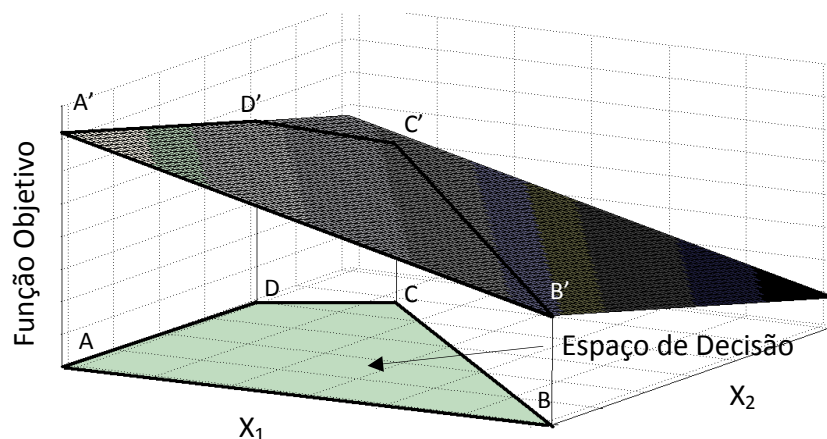


Figura 6- Exemplo de um problema de programação linear com restrições

O algoritmo mais famoso da programação linear é atribuído a George Dantzig. Após ter sua esperança frustrada de que o matemático John Von Neumann apresentasse uma solução satisfatória ao problema de otimização com funções e restrições lineares, Dantzig resolveu criar seu algoritmo de programação linear, o *Algoritmo Simplex*. Considerando que os vértices do polígono¹¹ formado pelo espaço de decisão contêm a solução ótima do problema, Hillier e Lieberman (2006) argumentaram que o principal conceito explorado pelo *Algoritmo Simplex* é de que não é preciso analisar todos os seus vértices. A propriedade derivada desse argumento é de que, se dois vértices adjacentes ao vértice analisado não melhoram a solução do problema, o vértice analisado contém uma solução ótima¹².

Problemas lineares, como o apresentado, possuem diversas propriedades que facilitam sua solução. Contudo, problemas do mundo real são, em grande parte das vezes, não lineares. O problema da não linearidade decorre do fato de que não há mais nenhuma garantia de que a solução ótima estará na fronteira do espaço de decisão. (Ver Figura 7)

¹¹ Para ser mais preciso, para mais de duas variáveis de decisão, um hiper-polígono.

¹² O algoritmo avalia a melhoria nos vértices adjacentes pela comparação dos coeficientes de inclinação dos respectivos lados do polígono projetado na função objetivo. Caso haja melhoria em ambos os vértices adjacentes, o algoritmo escolhe aquele que possui o coeficiente de inclinação maior (no caso de uma maximização) ou menor (no caso de minimização).

Na Figura 6, o vértice A' representa um ponto de máximo, pois os coeficientes de inclinação das retas formadas pelos vértices adjacentes A'B' e A'D' são negativos. Se o algoritmo estiver avaliando o vértice B' em um problema de maximização, ele avançará para o vértice A', pois o coeficiente de inclinação da reta B'A' é maior do que B'C'.

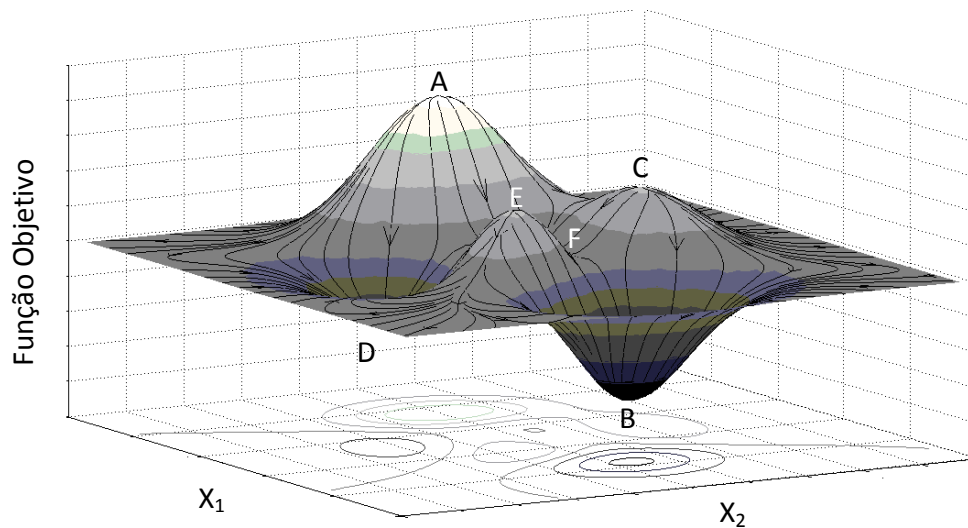


Figura 7- Exemplo de um problema de programação não linear

A solução de problemas de otimização de funções não lineares, remontam ao Cálculo Diferencial, desenvolvido independentemente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, no século XVII. Em uma função não linear $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ derivável e não restrita, seus pontos críticos são dados pela Condição de Primeira Ordem:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0 \quad [2.28]$$

Em outras palavras, o ponto $\mathbf{x}^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ é um ponto crítico de $f(\mathbf{x})$ quando as derivadas parciais da função avaliadas em $\mathbf{x}^*$ são nulas. Contudo, somente com as condições de primeira ordem, não há como saber se são pontos de máximo global (ponto A, na Figura 7) ou mínimo global (ponto B), pontos de máximos local (ponto C e E) ou mínimo local (ponto D) ou um ponto nem de máximo nem de mínimo (ponto F). As Condições de Segunda Ordem, dadas pelas segundas derivadas de $f(\mathbf{x})$, dão

informações sobre a concavidade ou convexidade¹³ da função no ponto crítico. Sendo a matriz de segundas derivadas H , denominada de matriz Hessiana, dada por:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad [2.29]$$

1. Se $f(\mathbf{x})$ apresenta um ponto de máximo local em $\mathbf{x}^*$, então $H(\mathbf{x}^*)$ é uma matriz negativa semidefinida;
2. Se $f(\mathbf{x})$ apresenta um ponto de mínimo local em $\mathbf{x}^{**}$, então $H(\mathbf{x}^{**})$ é uma matriz positiva semidefinida¹⁴.

Desta forma, as Condições de Segunda Ordem permitem inferir se o ponto encontrado é um ponto de máximo ou de mínimo, mas para funções em que, para certas regiões são côncavas e para outras são convexas, isto é, possuem vários máximos e mínimos, não há como saber se o ponto máximo ou mínimo encontrado é global ou local.

A entrada de restrições nos problemas não-lineares constitui um empecilho ao método acima descrito, pois os valores extremos da função poderiam não estar mais em um ponto em que as derivadas parciais da função objetivo são nulas. A solução de

¹³ Funções côncavas são aquelas que dados quaisquer dois pontos pertencentes a função, a função é maior ou igual à linha que une esses dois pontos; funções convexas são aquelas que dados quaisquer dois pontos pertencentes a função, a função é menor ou igual à linha que une esses dois pontos.

¹⁴ Uma matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ é negativa semidefinida se, e somente se, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Uma matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ é positiva semidefinida se, e somente se, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

problemas com restrições de igualdade tiveram solução a partir do método proposto pelo matemático franco-italiano Joseph-Louis Lagrange no século XVIII. O método afirma que a solução de otimização de $f(\mathbf{x})$ sujeita às restrições $g^i(\mathbf{x}) = 0$ é a mesma que a do problema de otimização irrestrita dada pela função lagrangeana $L(\mathbf{x}, \Lambda)$, dada por:

$$L(\mathbf{x}, \Lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j(\mathbf{x}) \quad [2.30]$$

A intuição por trás do método de Lagrange pode ser facilmente visualizada em uma função de minimização de duas variáveis $f(x_1, x_2)$ restrita a uma equação do tipo $g(x_1, x_2) = k$. Se percebermos $g(x_1, x_2)$ como uma curva de nível e projetarmos a curva de nível $f(x_1, x_2) = c$, conforme ilustrado na Figura 8, notamos que a curva de nível de c que minimiza a função é tangente à curva de nível k (caso contrário existe uma curva de nível interna que diminui o valor da função objetivo). Dessa forma, como a projeção das curvas de nível c e k compartilham a mesma tangente e os vetores gradientes são perpendiculares às retas tangentes, então os vetores gradientes nos pontos críticos são paralelos, o que matematicamente é expresso por $\nabla f(x_1, x_2) = \lambda \nabla g(x_1, x_2)$ para algum escalar λ .

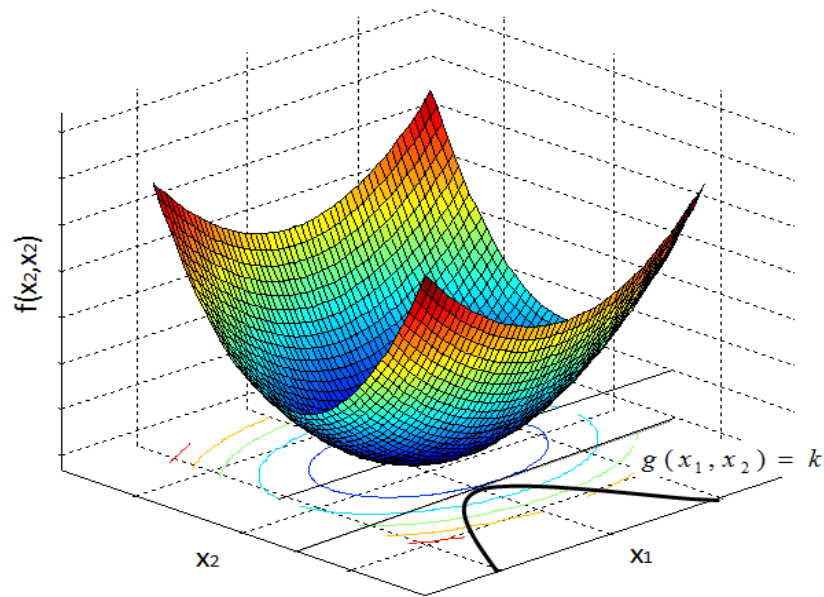


Figura 8- Relação entre as curvas de nível e os Multiplicadores de Lagrange λ

No Cálculo Diferencial, a expansão para funções de otimização genéricas (não-lineares e restrições com inequações) são resolvidas, de acordo com Jehle (1991), através de um simples truque. As restrições com inequações do tipo $g^i(\mathbf{x}) \geq 0$ são transformadas em restrições de equações com a inclusão de uma variável escalar z_i ($z_i > 0$) fazendo $g^i(\mathbf{x}) + z_i = 0$. Agora, como restam as inequações no problema do tipo $z_i > 0$, deve ser acrescentado às Condições de Primeira Ordem da função lagrangeana as seguintes condições ao problema (no formato de maximização) para todo i :

$$\text{Condição extra 1: } \frac{\partial L(\mathbf{x}, \Lambda, \mathbf{z})}{\partial z_i} \leq 0 \quad [2.31]$$

$$\text{Condição extra 2: } z_i \frac{\partial L(\mathbf{x}, \Lambda, \mathbf{z})}{\partial z_i} = 0 \quad [2.32]$$

$$\text{Condição extra 3: } z_i \geq 0 \quad [2.33]$$

O uso da restrição das condições extras é justificado pois elas atendem a todas as possibilidades de localização do ponto ótimo: quando o ponto se encontra em uma região que a restrição não foi utilizada em seu limiar ou é irrelevante $z_i^* \geq 0$ e a derivada $\partial L(\mathbf{x}, \Lambda, \mathbf{z})/\partial z_i$ avaliada em z_i^* é igual a zero (Figura 9 - Possibilidades 2 e 3); e quando a restrição é utilizada em seu limiar $z_i^* = 0$ e a derivada $\partial L(\mathbf{x}, \Lambda, \mathbf{z})/\partial z_i$ avaliada em z_i^* é diferente de zero (Figura 9- Possibilidade 1).

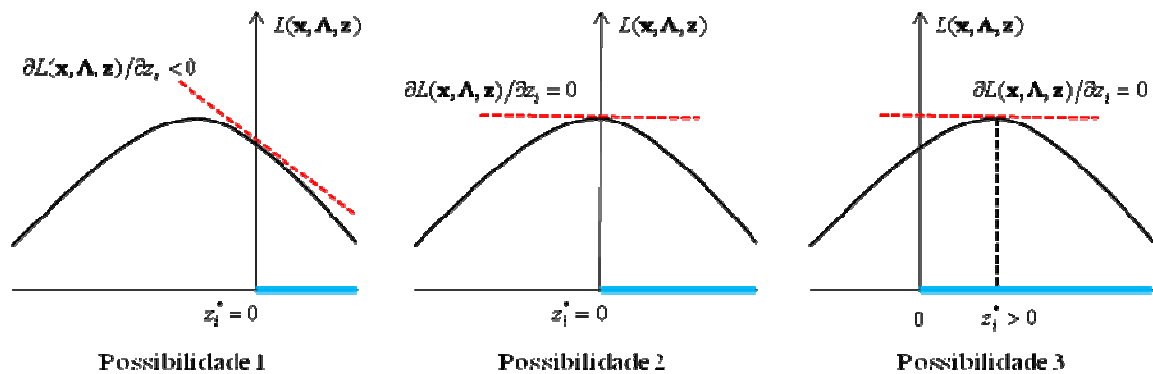


Figura 9- Possibilidades de um ponto de ótimo em uma função de maximização com restrição do tipo $z_i > 0$

Fonte: Jehle (1991)

Algumas manipulações algébricas para eliminar a variável z , nos levam as Condições de Karush-Kuhn-Tucker, necessárias para a existência de um ponto de ótimo em uma função de maximização de $f(\mathbf{x})$ sujeita a restrições de inequação $g^j(\mathbf{x}) \geq 0$, dadas por:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \Lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad [2.34]$$

$$\lambda_j g^j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad e \quad g^j(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad [2.35]$$

$$\Lambda^* \geq 0 \quad [2.36]$$

Um complicador para a solução dos problemas de otimização não linear, conforme destaca Hillier e Lieberman (2006), é que o sistema de equações das Condições de Primeira Ordem que iguala as derivadas parciais iguais à zero são formados, na maioria das vezes, por equações não lineares. Tal fato torna a solução simultânea das equações muito difícil de ser encontrada pelos métodos analíticos tradicionais. Por isso, são necessários métodos de busca algorítmica, também chamados de métodos numéricos, para encontrar a solução do sistema e, conseqüentemente, um ponto crítico da função objetivo.

Uma grande classe de algoritmos de busca utiliza as informações das derivadas parciais para direcionar a pesquisa. O vetor gradiente, formado pela representação vetorial das derivadas parciais, informa a direção e a taxa de variação máxima de uma função em um ponto. Assim, é de se esperar que quando uma busca é feita na direção do gradiente, o valor da função objetivo move-se na maior taxa possível. Colin (2007) destaca que os algoritmos “Maior Passo Ascendente”, “Método do Gradiente Conjugado”, “Métodos Quase-Newton” e “Método da Métrica Variável” são os métodos numéricos geralmente aplicados que utilizam os gradientes para direcionar a busca.

Na prática, destacam Hillier e Lieberman (2006), ficar continuamente mudando a direção de busca na direção do gradiente é pouco eficiente, pois exigiria recalcular os valores das derivadas parciais no novo ponto. Ao invés disso, os algoritmos procuram movimentar-se em uma direção fixa a partir da solução experimental atual, até que $f(x)$ deixe de crescer. Nesse novo ponto é recalculado um novo vetor gradiente.

Como dito anteriormente, o problema de otimização não-linear pode ter vários pontos críticos dependendo das características das Condições de Segunda Ordem. Colin

(2007) argumenta que quando não há como se afirmar se um ponto reflete um máximo ou um mínimo global é interessante refazer a busca numérica repetidas vezes, partindo de pontos iniciais diferentes e tomar como solução as variáveis de menor (ou maior) função objetivo dentre todas as tentativas. Esta técnica é chamada de programação não linear com reinício aleatório.

Um grande complicador para a solução de problemas de Pesquisa Operacional, não citado ainda, é a restrição de que alguma variável de decisão assuma apenas valores inteiros. A imposição de valor inteiro surge quando as variáveis representam entes indivisíveis (como número de ações ou imóveis na carteira) ou quando são utilizadas expressões lógicas¹⁵.

O uso de variáveis inteiras, normalmente conduz a um aumento da complexidade computacional do problema. Ao contrário do que possa parecer, Hillier e Lieberman (2006) argumentam que a restrição de soluções válidas provocadas pelo uso de variáveis inteiras torna o problema de mais difícil solução, já que não há mais garantias que a solução da função estará em um ponto de fronteira ou de gradiente nulo.

A convexidade do espaço de decisão também é um limitador para a solução da função estar em um ponto de fronteira ou de gradiente nulo. O conjunto de soluções viáveis das variáveis de decisão (isto é, as possíveis soluções que não violam as restrições) será dito convexo se qualquer segmento de reta ligando quaisquer dois pontos desse conjunto está contido no conjunto, ou seja:

¹⁵ Por exemplo, considerando x_1 e x_2 duas variáveis binárias de decisão:

- (1) Expressões do tipo “Se... então” podem ser modeladas como $x_1 - x_2 \geq 0$, para o caso de $x_2 = 1$ somente se a decisão x_1 seja também 1;
- (2) Expressões “Ou... ou...” podem ser modeladas como $x_1 + x_2 = 1$.

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall t \in [0,1] \quad (1-t)x_1 + tx_2 \in X \quad [2.37]$$

Dessa forma, se x_1 e x_2 são duas soluções viáveis do problema, uma combinação linear destas soluções também será uma solução viável para o problema.

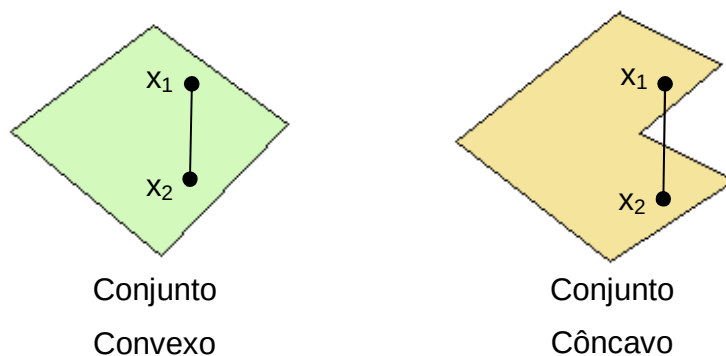


Figura 10- Comparação entre um conjunto convexo e um não convexo

Uma grande variedade de algoritmos explora a propriedade de convexidade do espaço de decisão para a busca de solução ótima. Conforme afirma Diwekar (2008), um problema de programação não linear não pode ser resolvido pelo método do gradiente com espaço de decisão não convexo. Nos problemas lineares, o algoritmo de Karmarkar (1984), também conhecido como método do ponto interior ou método da barreira, explora a convexidade para encontrar uma solução ótima de maneira eficiente, mesmo em problemas imensos.

2.2.1.2. Esparsidade

Uma alternativa simples para reduzir o custo computacional dos problemas de Pesquisa Operacional é reduzindo o armazenamento de dados. Hillier e Lieberman (2006) argumentam que um arquivo de dados pode estar no formato denso ou no formato esparço. No formato denso, o arquivo conterà uma entrada para cada possível combinação dos índices cobertos pelos dados. A porcentagem de entradas em formato

denso que são não-zero é conhecida como a densidade do conjunto de dados. Na prática, argumentam os autores, é comum que um conjunto de dados grandes apresente uma densidade abaixo de 5% e ela frequentemente se encontre abaixo de 1%.

Para melhorar a eficiência no uso da memória interna dos computadores, podem-se armazenar os valores no formato esparsos. Nesse formato, apenas os valores não-zero e a identificação dos valores-índice aos quais se referem são introduzidos no arquivo de dados. Harry Markowitz, além seu mais conhecido trabalho sobre a teoria de portfólio, também foi o responsável pela aplicabilidade das matrizes esparsas na melhoria da eficiência computacional em programação matemática.

2.2.1.3. Decomponibilidade

Algumas formalizações dos problemas de Pesquisa Operacional nos conduzem a problemas de larga escala, que tornam métodos comuns de resolução de problemas pouco eficientes¹⁶. Entretanto, conforme sugerido por Bradley, Hax e Magnanti (1977), alguns problemas de Pesquisa Operacional possuem uma determinada estrutura que permitem serem decompostos em subproblemas mais fáceis de resolver. A estrutura mais simples de decomposição conduz a problemas do tipo:

¹⁶ Problemas de larga escala são relativamente freqüentes em algumas abordagens para modelagem dos problemas de ALM, notadamente as conhecidas como modelagens de programação estocástica com recursos.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } \sum_{j=1}^r c_j x_j + \sum_{j=r+1}^s c_j x_j + \sum_{j=s+1}^n c_j x_j \\
& \text{Sujeito à: } \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, t), \\
& \sum_{j=r+1}^s a_{ij} x_j = b_i \quad (i = t+1, t+2, \dots, u), \\
& \sum_{j=s+1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = u+1, u+2, \dots, m) \\
& x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Observe que as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_r$, as variáveis $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_s$, e as variáveis $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$ não aparecem em conjunto nas mesmas restrições. Como consequência, o problema pode ser solucionado, resolvendo um problema menor nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_r$, outro nas variáveis $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_s$ e um terceiro nas variáveis $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n$. Bradley, Hax e Magnanti (1977) argumentam que um problema resolvido desta maneira faz com que a complexidade computacional caia da ordem de m^3 para $k(m/k)^3$ ou $m^3/9$ no caso do problema apresentado, sendo m o número de restrições do problemas e k o número de subsistemas.

Conejo et. al. (2006) argumentam que dois tipos de estruturas dificultam a solução do problema: uma marcada por restrições complicadoras, outra por variáveis complicadoras. As restrições complicadoras e as variáveis complicadoras são aquelas que dificultam a solução do problema atrapalhando sua solução direta por blocos.

De maneira geral, Bradley, Hax e Magnanti (1977) sugeriram algumas estruturas de problemas conforme apresentado na Figura 11. Problemas do tipo “Subsistemas Independentes” são os problemas decomponíveis mais fáceis de resolver, pois não possuem estruturas complicadoras. Problemas do tipo “Bloco Primal Angular” possuem um grupo de restrições complicadoras, ou seja, restrições que utilizam todos os blocos de variáveis de subsistemas independentes. Problemas do tipo “Bloco Dual Angular”

apresentam variáveis complicadoras nas restrições, como o uso de variáveis inteiras. Algumas outras formas típicas aparecem do uso de variáveis e restrições complicadoras, como no caso do problema tipo “Escadaria”, muito comum em problemas de otimização multiestágio, onde as variáveis de decisão são revistas com o passar do tempo.

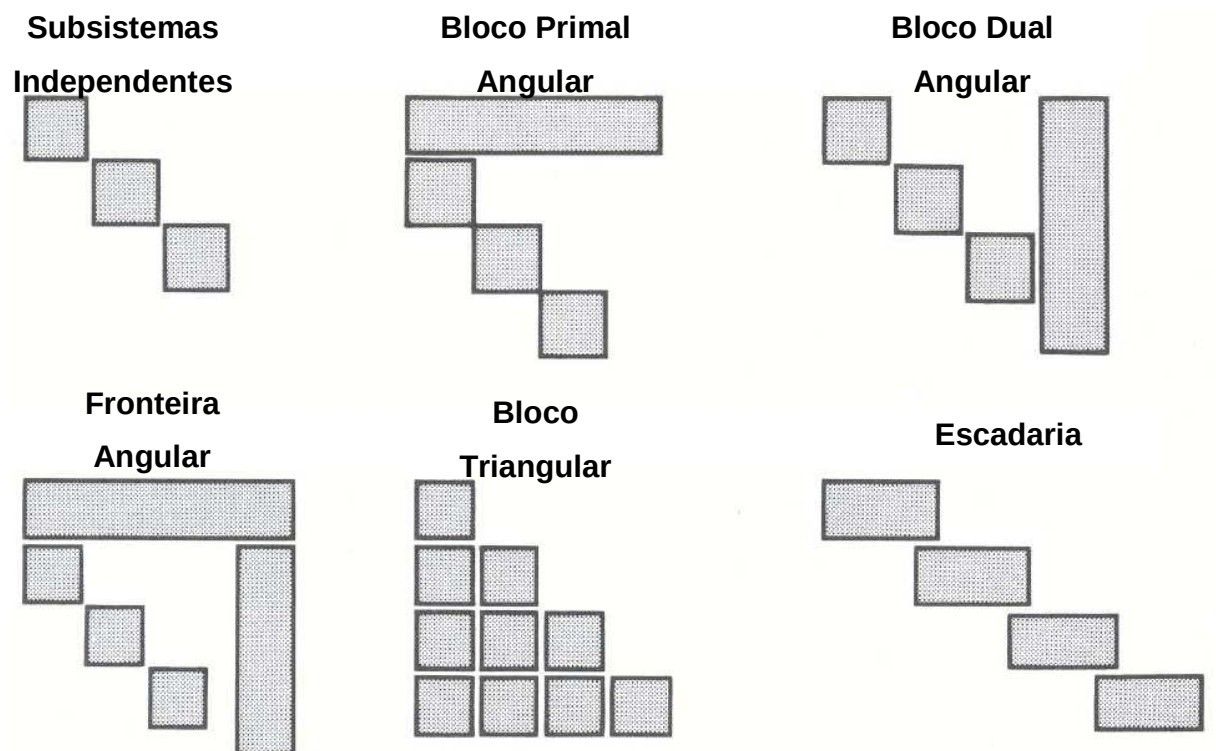


Figura 11- Layout de decomposições possíveis para problemas de Pesquisa Operacional

Fonte: Bradley, Hax e Magnanti (1977)

Conejo et. al. (2006) relataram que a Decomposição de Dantzig-Wolfe, Decomposição de Benders, Decomposição Lagrangeana Aumentada, Decomposição de Condições de Otimalidade e Relaxação Lagrangeana são famílias de algoritmos de decomposição que solucionam uma grande variedade de estruturas, inclusive problemas não lineares. Um desenvolvimento da Decomposição de Benders na otimização estocástica é o algoritmo de Decomposição Aninhada de Benders ou L-Shaped que, segundo Bortossi

e Pagnoncelli (2006), é possivelmente o método de resolução e aproximação de problemas de otimização estocástica mais conhecido e tradicional.

Outro tipo de decomposição, que tem ganhado um capítulo à parte na literatura de Pesquisa Operacional, é a técnica conhecida como otimização dinâmica. Bellman (1957) propôs um algoritmo para solução de sistemas que possuem uma sequência de decisões inter-relacionadas. Hastings (1973) relata que, para a formulação do modelo, é necessário identificar no problema os estados, estágios e ações. A vantagem de tal abordagem é a de evitar avaliar todas as alternativas possíveis, avaliando somente as melhores decisões parciais de cada estágio. A formulação genérica de um problema de programação dinâmica é dada por:

$$f(n, i) = \text{Min} [r(n, i, k) + f(n-1, j)] \quad [2.39]$$

Sendo n um indexador para o estágio, i e j um indexador para o estado correspondente em um dado estágio, k o indexador para uma possível ação dado que se está em um dado estado, $r(n, i, k)$ o retorno correspondente de tomar a ação k no estado (n, i) , e $f(n, i)$ é um plano ótimo dado que se está no estado (n, i) .

Um layout típico da resolução de um problema de otimização dinâmica pode ser observado a seguir:

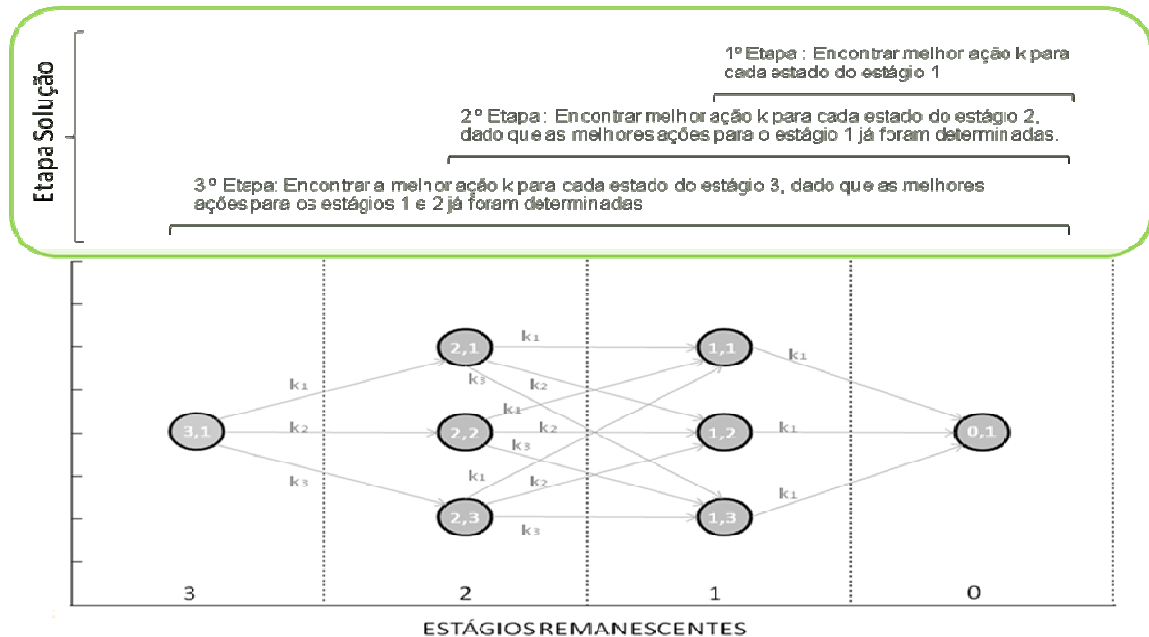


Figura 12- Exemplo de representação de um problema de programação dinâmica e suas etapas de solução

Fonte: Hastings (1973), (Adaptado).

Quando a transição de um estado (n, i) para um estado (n, j) para uma ação k está associada a uma probabilidade $p(n, i, j, k)$, o problema é chamado de programação dinâmica probabilística de tempo discreto e variáveis discretas ou de Programação Markov. Nesse sentido, uma pequena modificação na equação anteriormente apresentada é necessária para a solução do problema. Tal passo é feito considerando que o retorno $r(n, i, k)$ representará o retorno esperado de tomar a ação k no estado (n, i) , ou seja, será igual à probabilidade de transição $p(n, i, j, k)$ entre (n, i) e (n, j) sobre a ação k vezes o retorno de transição $c(n, i, j, k)$ entre (n, i) e (n, j) sobre a ação k . Assim, usando a recorrência, a equação para um problema programação dinâmica probabilística é determinada por:

$$f(n, i) = \text{Min} \left[r(n, i, k) + \sum_{j=1}^N p(n, i, j, k) f(n-1, j) \right] \quad [2.40]$$

O uso de variáveis aleatórias contínuas implica em um número infinito de estados subsequentes possíveis sobre uma determinada ação k . Também, decisões tomadas em tempo contínuo, ao invés de decisões revistas periodicamente inviabilizam o uso da equação acima para a solução do problema. Contudo, Miranda e Fackler (2002) argumentam que soluções aproximadas para os problemas programação dinâmica de tempo discreto/variáveis contínuas e problemas de controle estocástico em tempo contínuo sempre podem ser obtidas por uma aproximação discreta do problema¹⁷. Soluções analíticas para esses problemas também podem ser obtidas, porém, dizem os autores, em raros casos elas são possíveis.

2.2.1.4. Estocasticidade

Até este momento, grande parte dos métodos de solução de problemas apresentados é para ambientes determinísticos. Problemas estocásticos estão sujeitos a variáveis cujos resultados são impossíveis de serem previstos com certeza, portanto tais problemas trazem um novo ramo do conhecimento para a Pesquisa Operacional: a estatística.

O estudo dos problemas estocásticos tem grande importância nos estudos de finanças, especialmente nos problemas de ALM em fundos de pensão nos quais existem variáveis aleatórias econômicas, como a rentabilidade dos ativos do fundo; e atuariais, como o crescimento dos salários, e as datas de mortes, de aposentadorias, de entradas em invalidez, dos casamentos, de nascimento dos filhos e inúmeras outras variáveis que afetam a vida dos participantes do fundo.

¹⁷ Os autores disponibilizaram gratuitamente em <http://www4.ncsu.edu/~pfackler/compecon/toolbox.html> um Toolbox para MATLAB® que, dentre outras funcionalidades, soluciona problemas de programação dinâmica dos mais variados tipos.

Diferentemente dos problemas determinísticos, as decisões tomadas pelo gestor estão sujeitas ao risco. Segundo Varghese e Poojeri (2008), o risco refere-se a perda decorrente da incerteza que rodeia os eventos e resultados futuros. Ele é a expressão da probabilidade do impacto de um evento com potencial de influenciar a realização dos objetivos organizacionais. Para Jorion (2003), a função principal de instituições financeiras é gerir os riscos ativamente, planejando as consequências de eventos adversos para se preparar de maneira mais eficiente à incerteza inevitável.

Como exemplo de como a incerteza afeta a decisão de um gestor, Steuer, Qi e Hirschberger (2005) em um contexto tradicional de seleção de portfólios, apresentaram a seguinte formulação do problema onde o objetivo final é de maximizar a variável aleatória retorno do portfólio, r_p , através da escolha dos pesos dos ativos x_i , sujeitas ao espaço de decisão S que é delimitado pela restrição orçamentária e limites superiores LS_i e inferiores LI_i de peso dos ativos:

$$\begin{aligned} \text{Max } r_p &= \sum_{i=1}^n r_i x_i \\ \text{Sujeito à :} & \\ x \in S &= \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, LI_i \leq x_i \leq LS_i\} \end{aligned} \quad [2.41]$$

Uma vez que r_i não é conhecido no início do período de decisão, o problema é definido como um problema de otimização estocástica. O problema que surge com esta formulação, segundo Steuer, Qi e Hirschberger (2005), é que problemas de otimização estocástica não são bem definidos. Uma abordagem possível neste passo é redefinir o problema em um “problema determinístico equivalente”, fazendo uso de estatísticas, como a média e variância, em substituição das variáveis aleatórias. Por exemplo, poderemos ter as seguintes diferentes formulações para o problema apresentado acima:

- a) $\text{Max } E(r_p)$, sujeito a $x \in S$;
- b) $\text{Min } \text{Var}(r_p)$, sujeito a $x \in S$;
- c) $\text{Max } E(r_p)$ e $\text{Min } \text{Var}(r_p)$, sujeito a $x \in S$;
- d) $\text{Max } P(r_p \geq u)$, para algum nível de u , sujeito a $x \in S$;
- e) $\text{Max } u$, sujeito a $P(r_p \geq u) \geq \beta$, para algum nível de β e $x \in S$.

A escolha das funções para a nova formulação é um passo vital no problema de otimização, porém sua escolha não é trivial, devendo satisfazer os objetivos e restrições específicas do investidor. Segundo Elton *et al.* (2004) alguns investidores selecionam portfólios com a simples regra de maximização da riqueza esperada, como no caso “a”. Contudo, conforme Bernoulli (1738) demonstrou através do “Paradoxo de São Petesburgo”, é possível estabelecer jogos com esperança de riqueza infinita (como em “a”), mas que na prática os apostadores pagariam apenas uma pequena quantia para jogá-lo¹⁸. Também Kall e Wallace (1994) argumentaram que somente em casos muito

¹⁸ Bernoulli propôs o seguinte jogo: Uma moeda (não viciada) é jogada para cima enquanto der cara. Se der coroa somente na primeira jogada, o jogador recebe somente \$1, se der cara na primeira e coroa na segunda ele recebe \$2, se aparecer coroa somente na terceira o jogador recebe \$4, e assim prossegue o jogo, dobrando-se o prêmio a cada rodada. Desta forma, se a coroa aparecer somente na n-ésima jogada o jogador receberá 2^{n-1} . A pergunta de Bernoulli é: “Quanto deve ser pago para se jogar esse jogo?”, se o valor de jogo for baseado na esperança seu valor será de: $E(\text{jogo}) = (1/2) \cdot \$1 + (1/4) \cdot \$2 + (1/8) \cdot \$4 + \dots = \$0.5 + \$0.5 + \$0.5\$ = \$\infty$; ou seja, qualquer valor que for oferecido a um jogador, este deveria jogá-lo, pois por mais que caro o fosse, no longo prazo, seus ganhos seriam muito maiores que os valores que ele apostou. Na prática, observou Bernoulli as pessoas não aceitam valores altos de aposta por não disporem de tempo e dinheiro para os ganhos de longo prazo. Segundo ele a diferença está na avaliação de *valor* e de *utilidade*. O *valor* de um item é dependente somente dele próprio e é igual para todos; a *utilidade*, entretanto, é dependente das circunstâncias particulares da pessoa que faz a estimativa.

particulares o uso da esperança matemática em substituição à variável aleatória em problemas de otimização estocásticos conduziria a uma solução ótima.

Quando observamos o caso “c”, podemos considerar o modelo de seleção de carteiras de Markowitz como uma aproximação para o problema estocástico apresentado, uma vez que esse autor considera o retorno esperado, variância e covariâncias dos ativos como dados no início do período.

Na formulação do tipo “d” e “e” o termo $P(r_p \geq u)$ demanda o cálculo da probabilidade de $r_p \geq u$. Especificamente, a inclusão de restrições que envolvem probabilidades, como em “e”, conduz ao ramo da programação matemática chamada *Chance-Constrained Programming*. Henrion (2004) divide a *Chance-Constrained Programming* em problemas de dois tipos:

(1) *Individual Chance-Constrained Programming*, que possui restrições no formato:

$$P(g^j(\mathbf{x}) \geq \xi_j) \geq p \quad (j=1, \dots, m) \quad [2.42]$$

(2) *Joint Chance-Constrained Programming*, que possui restrições no formato:

$$P(g^j(\mathbf{x}) \geq \xi_j \quad (j=1, \dots, m)) \geq p \quad [2.43]$$

Sendo o termo ξ_j uma variável aleatória qualquer, observa-se que a diferença entre os dois formatos está na posição do contador $(j=1, \dots, m)$. No primeiro formato, as restrições podem ser vistas como várias restrições de probabilidades tomadas individualmente, ou seja, **cada** restrição $g^j(\mathbf{x}) \geq \xi_j$ deve ser verdadeira em p% das vezes. No segundo formato, todas as restrições devem ser calculadas de maneira

conjunta, ou seja, **todas** as restrições $g^j(\mathbf{x}) \geq \xi_j$ devem ser verdadeiras em $p\%$ das vezes.

A solução para problemas de *Chance-Constrained Programming* são possíveis com a reformulação e eliminação do problema do termo de probabilidade $P(\cdot)$. Para tanto, devem ser descobertos os números não aleatórios b_j que correspondem ao p -ésimo quantil da distribuição de probabilidade da função em $P(\cdot)$ e fazer $g^j(\mathbf{x}) \geq b_j$.¹⁹

Segundo Henrion (2004), a descoberta do parâmetro b_j pode ser bem fácil em um problema do tipo *Individual Chance-Constrained Programming*, pois pode ser calculado como um dos limites do intervalo de confiança obtido diretamente da distribuição de probabilidade de ξ_j . Em problemas de *Joint Chance-Constrained Programming* tal cálculo pode não ser tão fácil, pois depende do cálculo da distribuição conjunta multivariada que envolve todas as equações $g^j(\mathbf{x}) \geq \xi_j$.

Outro grande avanço para a solução de problemas estocásticos foi a adoção de “funções utilidade” desenvolvidas por Von Neumann e Morgenstern (1944). Neste caso, o problema estocástico de seleção de carteiras, segundo Freund (1956) *apud* Buccola (1982), poderia ser substituído pelo equivalente certo do tipo $\text{Max } U(f(x))$, onde $f(x)$ poderia ser uma função quadrática do tipo $f(x) = E(r_p) - (1/2)\lambda \text{Var}(r_p)$, sendo λ o coeficiente de aversão ao risco do investidor. É interessante notar que, apesar das restrições ao formato de $U(f(x))$ imposto pela Teoria da Utilidade Esperada de Von Neumann e Morgenstern para se caracterizar um investidor com expectativas racionais, Kahneman e Tversky (1979), a partir de estudos comportamentais, propõem ser possível conceber funções utilidade com formatos diferentes e que permitem, por

¹⁹ O *Value at Risk*, calculado por gestores de risco, correspondem a um exemplo de quantil deste tipo.

exemplo, refletir uma maior aversão de um investidor a perdas que sua propensão a ganhos.

Especificamente, as funções objetivo dos modelos propostos para os fundos de pensão são bem diversas. Por exemplo, Cairns (1995) apresenta os seguintes objetivos possíveis para um gestor de um fundo de pensão:

- Minimizar a variância das contribuições sujeito a que a variação do valor dos ativos seja menor que um valor máximo especificado;
- Minimizar a variância das contribuições sujeito a que o valor esperado dos ativos seja igual um valor médio especificado;
- Minimizar a variância do valor presente de todas as contribuições futuras;
- Maximizar uma função utilidade que varia em função do tamanho do fundo, por exemplo, uma função que penaliza o desvio do valor dos ativos de um valor alvo.
- Minimizar a variância das contribuições sujeita a restrição de que fundo se torne insolvente com uma chance inferior a uma probabilidade específica.

Já Boulrier e Dupré (2003) propõem os seguintes objetivos:

- Maximizar uma função utilidade da carteira de ativos sujeito a restrição de estar acima de duas retas do plano retorno-risco, sendo uma reta refletindo a rentabilidade-risco mínima para o longo prazo e a outra refletindo a rentabilidade-risco mínima para o curto prazo;
- Maximizar uma função utilidade da carteira de ativos, sujeito a um desvio máximo de uma carteira ideal para o longo prazo (restrição de *tracking-error*²⁰);

²⁰ O uso do *tracking-error* também tem grande importância quando trabalhamos com classes de ativos ao invés dos ativos individuais. Após a decisão dos pesos das classes de ativos é necessário que se

- Minimizar o valor presente das contribuições dos participantes²¹;

Como discutido, a solução de problemas estocásticos passa pela eliminação das variáveis aleatórias. As técnicas acima procuram utilizar estatísticas destas variáveis para formular um problema determinístico-equivalente. Uma alternativa ao uso de estatísticas é a simulação de realizações destas variáveis. Kall e Wallace (1994) sugeriram que um problema com variáveis aleatórias poderia seguir os seguintes passos de transformação:

- 1º Passo: Formulação do Problema Estocástico Inicial
- 2º Passo: Introdução de Decisões de Recurso e Penalidades
- 3º Passo: Discretização de valores com o uso de realizações (cenários)

O seguinte exemplo hipotético elaborado pelos autores permite compreender a dinâmica existentes entre os passos:

1º Passo: Formulação do Problema Estocástico Inicial

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2 \quad [2.44]$$

Sujeito a:

escolha uma carteira de ativos que acompanhe de perto os retornos e variância das classes de ativos, sob a pena de perda da relação de risco e retorno que balizou a seleção dos pesos nos cálculos iniciais.

²¹ Deve ser utilizada uma taxa de desconto “psicológica” para refletir o fato de que uma contribuição próxima possui um valor maior para o participante.

$$\begin{array}{rclcl}
x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\
(2+\tilde{\eta}_1)x_1 & + & 6x_2 & \geq & 180+\tilde{\zeta}_1 \\
3x_1 & + & (3.4-\tilde{\eta}_2)x_2 & \geq & 162+\tilde{\zeta}_2 \\
x_1 & & & \geq & 0 \\
& & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

2º Passo: Introdução de Decisões de Recurso e Penalidades

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2 + E_{\xi} [7y_1(\tilde{\xi}) + 12y_2(\tilde{\xi})] \quad [2.45]$$

Sujeito a :

$$\begin{array}{rclcl}
x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\
\alpha(\tilde{\xi})x_1 & + & 6x_2 & + & y_1(\tilde{\xi}) \geq h_1(\tilde{\xi}) \\
3x_1 & + & \beta(\tilde{\xi})x_2 & + & y_2(\tilde{\xi}) \geq h_2(\tilde{\xi}) \\
x_1 & + & & \geq & 0 \\
& & x_2 & \geq & 0 \\
& & & y_1(\tilde{\xi}) \geq & 0 \\
& & & & y_2(\tilde{\xi}) \geq 0
\end{array}$$

3º Passo: Discretização de valores com o uso de realizações (cenários)

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2 + \sum_{i=1}^n p_i [7y_1(\xi^i) + 12y_2(\xi^i)] \quad [2.46]$$

Sujeito a :

$$\begin{array}{rclcl}
x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\
\alpha(\xi^i)x_1 & + & 6x_2 & + & y_1(\xi^i) \geq h_1(\xi^i) \forall i \\
3x_1 & + & \beta(\xi^i)x_2 & + & y_2(\xi^i) \geq h_2(\xi^i) \forall i \\
x_1 & + & & \geq & 0 \\
& & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Na formulação inicial do problema hipotético, existem variáveis estocásticas $\tilde{\zeta}_1$ e $\tilde{\zeta}_2$ que possuem uma distribuição normal, isto é, $\tilde{\zeta}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $\tilde{\zeta}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, e $\tilde{\eta}_1$ e $\tilde{\eta}_2$ as quais possuem distribuição uniforme $\tilde{\eta}_1 \sim U(k_1, k_2)$ e exponencial $\tilde{\eta}_2 \sim EXP(\lambda)$. Dadas as características do problema e das variáveis aleatórias, é impossível escolher qualquer valor para x_1 e x_2 que satisfaçam as restrições do problema para todas as realizações possíveis das variáveis. Por esse motivo, a formulação da primeira etapa é dita mal definida.

No segundo passo do problema, são introduzidas duas novas variáveis aleatórias $y_1(\tilde{\xi})$ e $y_2(\tilde{\xi})$, chamadas variáveis de recurso. Tais variáveis são utilizadas em um segundo momento, para tornar, quando necessário, o lado esquerdo da inequação igual ao lado direito. Dessa forma, o equilíbrio das restrições que envolvem aleatoriedade é garantido para qualquer realização de $\tilde{\zeta}_1$, $\tilde{\zeta}_2$, $\tilde{\eta}_1$ e $\tilde{\eta}_2$. Ao mesmo tempo, o uso das variáveis de recurso é coibido através da função penalidade $E_{\xi}[7y_1(\tilde{\xi}) + 12y_2(\tilde{\xi})]$, acrescida na função objetivo.

A interpretação do sentido das variáveis de recurso varia conforme o contexto do problema em estudo; possíveis interpretações seriam originadas de captações de fundos emergenciais, para suprir ausências de caixa em problemas financeiros; ou compras emergenciais de matéria-prima, em problemas de produção. Obviamente, esses usos emergenciais possuem um preço pouco atrativo e o custo de seu uso deve ficar refletido na função penalidade.

A formulação do problema no segundo passo é bem definida e, por isso, um algoritmo de otimização poderia ser aplicado para encontrar o ponto de máximo. Entretanto, analisando-se pelo lado estatístico do problema, a função da esperança matemática da função penalidade para todas as combinações possíveis de x_1 e x_2 pode ser difícil de

ser obtida de maneira analítica. Uma alternativa para resolver esse impasse é a utilização de realizações das variáveis e reformulação do problema em um novo passo.

No terceiro passo do problema, são gerados um número n de realizações (digamos, 5000) das variáveis $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$, $\tilde{\eta}_1$ e $\tilde{\eta}_2$, e computados os valores dos parâmetros associados a tais variáveis $\alpha(\xi^i)$, $\beta(\xi^i)$, $h_1(\xi^i)$ e $h_2(\xi^i)$ para cada i -ésimo cenário²². No segundo estágio, são computados para cada i -ésimo cenário os valores das variáveis de recurso, $y_1(\xi^i)$ e $y_2(\xi^i)$, necessários para garantir a satisfação das restrições, através das seguintes equações:

$$y_1(\xi^i) = \text{Máximo} [0, h_1(\xi^i) - \alpha(\xi^i)x_1 + 6x_2] \quad [2.47]$$

$$y_2(\xi^i) = \text{Máximo} [0, h_2(\xi^i) - 3x_1 - \beta(\xi^i)x_2] \quad [2.48]$$

Deve-se observar, no terceiro passo, que apesar da representação do problema estar escrito na forma compacta, ele evolui de um problema de apenas 7 restrições no segundo passo para um problema de 10003 restrições (para 5000 cenários), tornando-se um problema de larga escala.

O problema anterior é denominado problema estocástico com recurso biestágio. Quando as decisões são periodicamente revistas, tem-se um problema de otimização dinâmica, que é chamado estocástico com recursos multiestágio²³. Denotando por ${}_n x$ o

²² Note a ausência do indicador de aleatoriedade “~” em cima dos parâmetros.

²³ Uma lista de softwares utilizados para otimização estocástica (com recursos) está disponível em: <http://stoprog.org/software.html>. Recentemente foi lançado o Risk Solver Platform, pela empresa Frontline Systems, um suplemento para Microsoft Excel que oferece um ambiente de desenvolvimento mais

vetor de decisões do i -ésimo estágio e i um indicador das realizações das variáveis associados ao cenário i , temos as seguintes representações matriciais dos problemas:

Problema biestágio

$$\begin{aligned}
 \min_{x_1, x_2} & c_1^T x_1 + \sum_{i=1}^I p^i c_2^{iT} x_2^i \\
 & A_1 x_1 = b_1 \\
 & B_1^i x_1 + A_2^i x_2^i = b_2^i \\
 & x_1, x_2^i \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

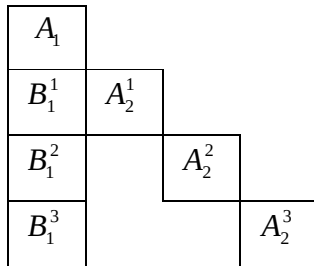


Figura 13- Estrutura da matriz de coeficientes das restrições de problemas biestágio com três cenários

Fonte: Ramos e Cerisola (2009)

Problema multiestágio

$$\begin{aligned}
 \min_{x_n} & \sum_{n=1}^N \sum_{i_n=1}^I p_{n^{i_n}} c_n^{i_n T} x_n^{i_n} \\
 & B_{n-1}^{i_n} x_{n-1} + A_n^{i_n} x_n^{i_n} = b_n^{i_n} \\
 & x_n^{i_n} \\
 & B_0^{i_n} = 0
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

amigável que os demais softwares de otimização estocástica, os quais, geralmente, exigem o conhecimento de uma linguagem algébrica específica.

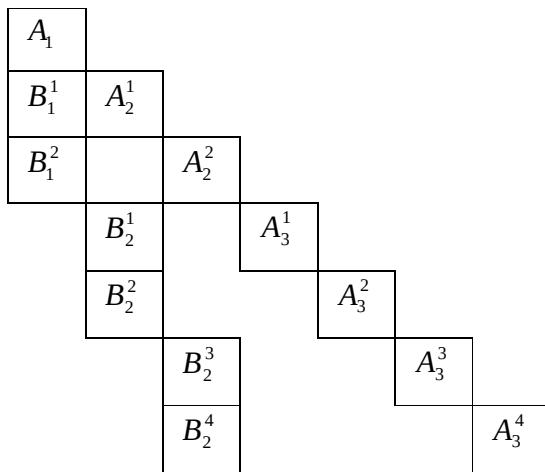


Figura 14- Estrutura da matriz de coeficientes das restrições de problemas multiestágio com dois cenários no segundo estágio e quatro no terceiro estágio
 Fonte: Ramos e Cerisola (2009)

A solução de problema com incerteza, olhando para trás, após as realizações verdadeiras, não conduz a uma solução ótima. Contudo, dado que não há como prever as realizações futuras da variável aleatória, a solução apresentada é a mais prudente. Em Ramos e Cerisola (2009), podem ser encontradas algumas estatísticas que ilustram a decisão sobre incerteza:

- *Expected Value With Perfect Information* - EVWPI: Mede o valor de conhecer o futuro com certeza. Seu cálculo é dado pela soma da solução ótima da função objetivo em cada cenário ponderado por sua probabilidade de ocorrência.
- *Expected Value Solution* – EVS: Mede a solução do problema, considerando que as variáveis aleatórias do problema estocástico são substituídas por sua esperança matemática.

- *Recourse Problem* – RP: Mede o valor da função objetivo dado pelas partes correspondentes das decisões de primeiro estágio acrescido do valor esperado das decisões de segundo estágio.
- *Value of Stochastic Solution* – VSS: Mede a diferença entre EVS e RP, refletindo o ganho esperado de se adotar um modelo de otimização que considera o risco.
- *Expected Value of Perfect Information* – EVPI: Mede a diferença entre RP e EVWPI, refletindo a perda esperada de não possuir informação sobre o futuro.

Obviamente, em um problema de minimização, a seguinte relação é válida:

$$EVWPI \leq RP \leq EVS \quad [2.51]$$

Seydel (2003) sugere os seguintes passos para geração de cenários²⁴:

- 1) Dispor de um algoritmo para gerar números pseudoaleatórios com uma distribuição uniforme sobre o intervalo [0,1];
- 2) transformar o número aleatório com distribuição uniforme em uma distribuição desejada, por meio da inversa da função de distribuição de probabilidade cumulativa²⁵;
- 3) transformar as distribuições univariadas independentes em distribuições multivariadas. Nesse caso, é efetuada a fatoração de Cholesky na matriz de correlação desejada $\mathbf{R}$, fazendo $\mathbf{R}=\mathbf{T}\mathbf{T}'$ e, então, multiplica-se a matriz triangular

²⁴ Ver Chiralaksanakul(2003) para mais detalhes sobre geração de cenários em otimização estocástica. Para maior eficácia no método de otimização estocástica, é comum o uso de técnicas de redução de cenários e de formação de cenários com arquitetura de árvore (com estágios e estados bem definidos). O aplicativo GAMS/SCENRED2 é um dos sistemas disponíveis que oferecem suporte para essas técnicas.

inferior $\mathbf{T}$ por um vetor de variáveis independentes $\mathbf{u}$, para produzir um vetor $\mathbf{Tu}$ de variáveis correlacionadas;

- 4) escolher uma equação representativa específica para a simulação de um caminho de uma variável.

O uso de simulações, conforme sugerido por Cairns (1994), também pode ser utilizado para se computarem estatísticas das variáveis, quando é difícil obtê-las através de uma fórmula analítica. A generalidade do modelo provém da propriedade ergódica dos processos em análise. Assim, seja qual for o formato de uma função $f(\mathbf{x})$, temos:

$$\overline{f(\mathbf{x})} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f(\mathbf{x}) \rightarrow E[f(\mathbf{x})] \text{ quase certamente quando } n \rightarrow \infty \quad [2.52]$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(f(\mathbf{x}) - \overline{f(\mathbf{x})} \right)^2 \rightarrow \text{Var}[f(\mathbf{x})] \text{ quase certamente quando } n \rightarrow \infty \quad [2.53]$$

Finalmente, as estatísticas obtidas por simulação podem ser utilizadas no “método da força bruta”, um método grosseiro para a solução de um problema de otimização, o qual considera como solução ótima aquela que apresentar o maior (ou menor) valor de $f(\mathbf{x})$ para cada vetor de decisão $\mathbf{x}$ testado.

2.2.2. Algoritmos Genéticos

2.2.2.1. Introdução

Os Algoritmos Genéticos são métodos heurísticos de otimização de funções inspirados no princípio da seleção natural e na sobrevivência do mais apto, proposto pelo o

²⁵ Pois o domínio de qualquer função densidade de probabilidade está no intervalo [0,1].

naturalista e fisiologista inglês Charles Darwin. Seu desenvolvimento deve-se ao trabalho de Holland (1975), que tinha o duplo objetivo de aperfeiçoar o conhecimento do processo de adaptação natural e de projetar sistemas artificiais com propriedades semelhantes ao sistema natural.

Como os Algoritmos Genéticos tomam a Teoria da Evolução das Espécies como metáfora, a terminologia tradicional de Pesquisa Operacional foi ligeiramente adaptada. Para exemplificar, uma proposta de solução para o problema é na terminologia dos Algoritmos Genéticos um indivíduo ou cromossomo e a avaliação da função objetivo é chamada de função de *fitness* ou aptidão.

A dinâmica do algoritmo também é descrita como um processo biológico: em cada iteração (geração) do algoritmo, avalia-se um conjunto de propostas de solução, chamada população. Os membros da população mais aptos formam pais (soluções experimentais tomadas aos pares), os quais se combinam (por *crossover*) e geram filhos (novas soluções experimentais), que são cópias ligeiramente modificadas dos pais e que, eventualmente, sofrem mutações as quais os tornam um pouco mais diferentes. Mais formalmente, a estrutura de um Algoritmo Genético típico é descrito em Lacerda e Carvalho (1999) como:

1. Gerar a população inicial
2. avaliar cada indivíduo da população
3. enquanto o critério de parada não for satisfeito:
 - 3.1 selecionar os indivíduos mais aptos
 - 3.2 criar novos indivíduos aplicando os operadores *crossover* e mutação
 - 3.3 armazenar os novos indivíduos em uma nova população
 - 3.4 avaliar cada indivíduo da nova população

Com a execução do algoritmo, espera-se que a população inicial evolua para uma população final próxima da solução ótima, sendo seu indivíduo mais bem avaliado a

resposta para o problema de otimização. Na Figura 15, apresenta-se um desenvolvimento hipotético do algoritmo para um problema de minimização de uma função não convexa de duas variáveis. Nessa figura, os pontos pretos representam uma população inicial que evolui para uma população final, marcada por pontos vermelhos. Observe que os pontos pretos estão aleatoriamente distribuídos na superfície do gráfico, enquanto a população final evolui para as regiões da superfície mais azuladas, locais mais prováveis para um ponto de mínimo.

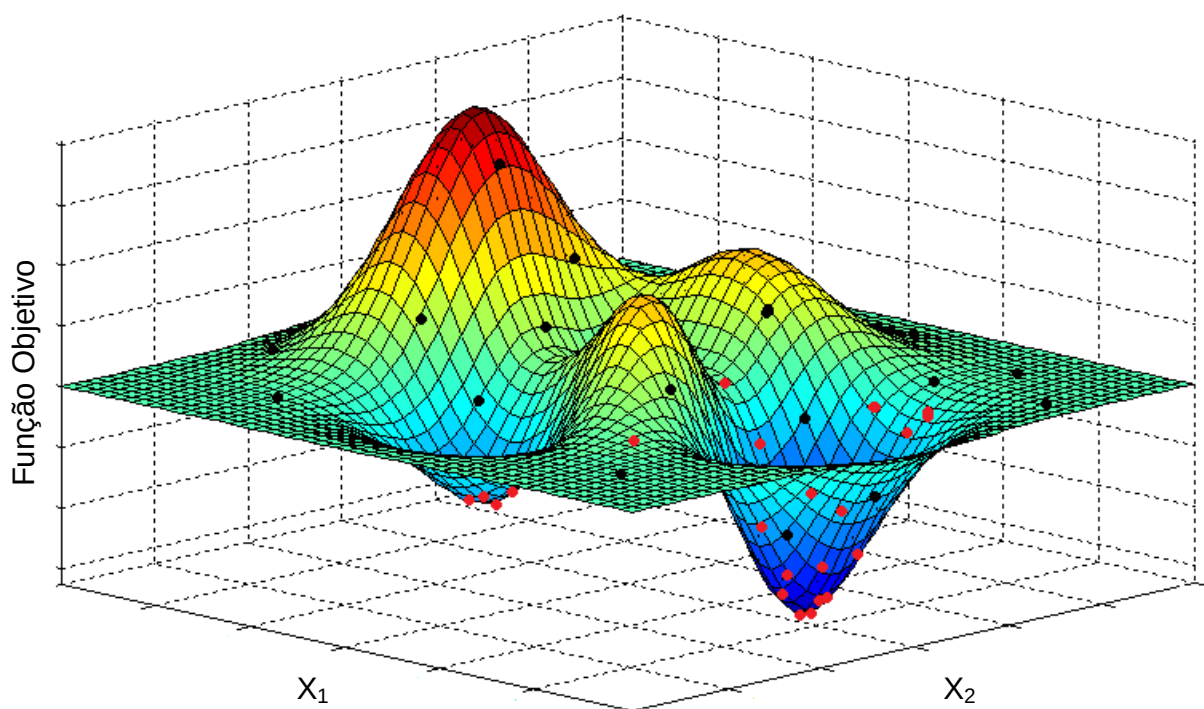


Figura 15- Evolução da população Inicial (em preto) de um Algoritmo Genético para uma população final (em vermelho) em um problema de minimização de duas variáveis

As principais características dos Algoritmos Genéticos encontradas em Lacerda e Carvalho (1999) e Linden (2008), que ajudaram a tornar essa abordagem bem-sucedida são as seguintes:

- São métodos bastante flexíveis às várias formulações possíveis dos problemas;

- são métodos que funcionam bem em funções multimodais, não sendo propensos a ficar presos em ótimos locais como outros métodos de busca;
- não são afetadas por descontinuidades na função ou em suas derivadas;
- são capazes de lidar com funções discretas e contínuas;
- funcionam bem em problemas não convexos;
- avaliam várias propostas de solução simultaneamente, adaptando-se bem em computadores paralelos;
- são boas técnicas para atacar problemas de busca com espaços de busca intratavelmente grandes, que não podem ser resolvidos por técnicas tradicionais;
- podem ser utilizados em conjunto com outras técnicas de Pesquisa Operacional (algoritmos híbridos);
- facilidade de implementação dos algoritmos em computadores;
- são modulares e portáteis, no sentido de que o desenvolvimento da solução independe da representação particular do problema considerado; e
- não é necessário conhecimento matemático aprofundado do problema considerado.

Entretanto, os Algoritmos Genéticos apresentam também algumas desvantagens:

- Por estarem no grupo das meta-heurísticas²⁶ não há uma garantia de solução ótima, sendo esperado somente como um algoritmo que encontra boas soluções na maioria das vezes. Dessa forma, Hillier e Lieberman (2006) argumentam que, ao invés de chamar a solução encontrada pelo algoritmo de ótima, é mais apropriado apresentá-la como uma solução satisfatória;

²⁶ Hillier e Lieberman (2006) definem uma meta-heurística como um método de resolução geral, que fornece tanto uma estrutura quanto diretrizes de estratégias gerais para desenvolver um método heurístico específico que se ajuste a um tipo de problema particular.

- devido à sua natureza estocástica de busca de solução, cada vez que forem executados, resultados diferentes serão produzidos, e
- o preço pago pela generalidade do método é a baixa velocidade de solução dos Algoritmos Genéticos, quando comparados aos métodos tradicionais de otimização.

Ademais, na opinião de Russel e Norvig (2004), não está claro se a atratividade dos Algoritmos Genéticos surgiu de seu desempenho ou de suas origens esteticamente agradáveis na teoria da evolução, apesar de reconhecerem que os Algoritmos Genéticos tiveram um amplo impacto nos problemas de otimização.

Hillier e Lieberman (2006) relacionaram as seguintes perguntas no *design* de um Algoritmo Genético:

1. Qual deve ser o tamanho da população?
2. Como devem ser selecionados os membros da população atual, para se tornarem pais?
3. Como as características dos filhos devem ser derivadas das características dos pais?
4. Como as mutações devem ser injetadas nas características dos filhos?
5. Qual regra de parada deve ser usada?

Para responder a tais perguntas, nos tópicos seguintes serão expostos os principais elementos para o desenvolvimento de um Algoritmo Genético, a saber: representação dos parâmetros, seleção, operadores genéticos de *crossover* e mutação, elitismo, critérios de parada, otimização com restrições e problemas recorrentes em Algoritmos Genéticos.

2.2.2.2. Representação dos parâmetros

As variáveis de decisão do problema podem ser representadas tanto no formato binário quanto no formato real. Cada uma dessas representações conduzirá a operadores genéticos de *crossover* e mutação específicos, sendo, portanto uma etapa importante a ser observada no *design* de um Algoritmo Genético.

Para ilustrarmos as diferenças de representação de uma proposta de solução em um problema de duas variáveis com espaço de decisão restrito entre -10 e 50, enquanto a representação real de uma proposta de solução pode ser dada diretamente por um vetor $\mathbf{x}$ qualquer, como $\mathbf{x} = [31,10, -3,39]$; a mesma proposta de solução em representação binária seria dada por $\mathbf{x} = 10101110001110$.

Para interpretar o resultado da representação binária, é necessário decompor a cadeia de 14 bits em duas cadeias de 7 bits (1010111 e 0001110), converter os números binários em número real (87 e 14) e mapeá-los no intervalo [-10,50] fazendo $x_1 = [87 / (2^7 - 1)][50 - (-10)] - 10 = 31,10$ e $x_2 = [14 / (2^7 - 1)][50 - (-10)] - 10 = -3,39$.

Lacerda e Carvalho (1999) argumentam que, apesar de a representação binária ser tradicionalmente importante, sendo utilizada nos trabalhos de Holland (1975), ela é desvantajosa quando se trabalha com parâmetros contínuos e quando é exigida uma precisão numérica elevada, o que exige armazenar cromossomos longos na memória.

2.2.2.3. Seleção

A pressão da seleção é a responsável pela convergência do Algoritmo Genético para soluções satisfatórias. Como na seleção natural das espécies, os melhores indivíduos em cada geração são selecionados para gerar filhos através dos operadores de *crossover* e de mutação.

Para descobrir como devem ser selecionados os membros da população atual para se tornarem os pais, devem ser escolhidos dois parâmetros: Mapeamento da função objetivo e o método de seleção.

Como já dito, a avaliação da função objetivo é na terminologia dos Algoritmos Genéticos chamada de função de *fitness* ou aptidão. Entretanto, não é necessário que sejam iguais. O mapeamento da função objetivo para a função de aptidão pode ser feito por várias maneiras, sendo os métodos mais populares:

- Ordenamento: Nesse método, o indivíduo mais bem avaliado na função objetivo recebe a ordem 1; o segundo mais bem avaliado a ordem 2, e assim por diante. Em um problema de minimização, o valor da função de aptidão, segundo Sivanandam e Deepa (2007), pode ser dada por $1/\sqrt{n}$, sendo n a ordem de avaliação do indivíduo na população.
- Proporcional: Nesse método, a função de avaliação é igual à função objetivo. Segundo Lacerda e Carvalho (1999), o uso do método nem sempre é adequado como método de mapeamento. Exemplos de problemas relacionados ao método são: valores negativos na função objetivo inviabilizam o uso da “roleta” como método de seleção²⁷ e alguns valores elevados na função objetivo podem causar uma convergência prematura do algoritmo.

Os métodos de seleção dizem respeito ao processo de escolha dos pais, os quais deixarão suas características para a próxima seleção. Nesse processo, cada indivíduo pode ser escolhido mais de uma vez, normalmente, por um dos seguintes critérios (LACERDA E CARVALHO, 1999):

²⁷ O método da “roleta” será explicado adiante.

- Seleção por torneio: Nesse método, são escolhidos aleatoriamente com igual probabilidade um número n de indivíduos de uma geração, o melhor entre eles é selecionado. O processo é repetido até que todos os pares de pais estejam preenchidos.
- Método amostragem estocástica universal: Nesse método, as funções de avaliação são emparelhadas em um gráfico tipo “pizza”, tomando as áreas das fatias proporcionais à aptidão (Ver Figura 16). São colocados ponteiros igualmente espaçados ao redor do gráfico e os indivíduos apontados são escolhidos como os pais.
- Método da “roleta”: Esse método é parecido com o método da amostragem estocástica universal, com a diferença de que para cada indivíduo é sorteado um número para selecionar uma das seções “da torta” com uma probabilidade igual à sua área.

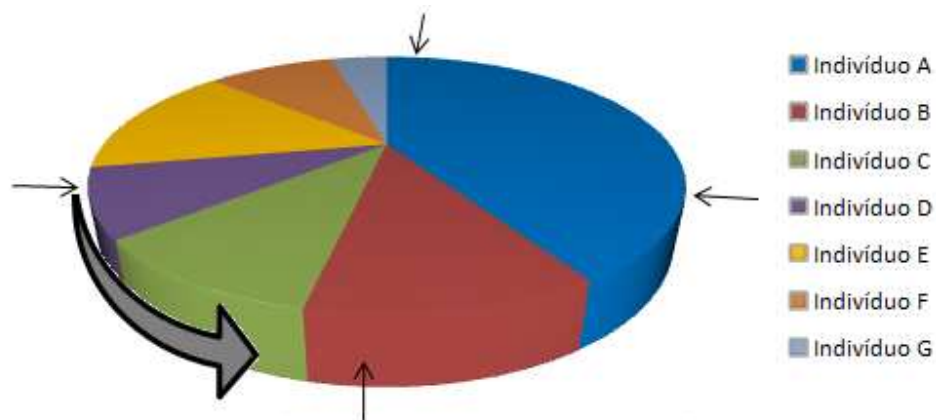


Figura 16- Método da amostragem estocástica universal
Fonte: Lacerda e Carvalho (1999), (Adaptado).

2.2.2.4. Operadores genéticos de *crossover* e mutação

Os operadores de *crossover* e de mutação constituem o principal mecanismo de busca dos Algoritmos Genéticos. É através desses operadores que é regulada a maneira

como os filhos herdarão as características dos pais e que governarão o processo de busca do algoritmo conhecido como *exploration* e *explotation*. A função do operador de *crossover* consiste em potencialmente refinar a solução dos melhores indivíduos com a criação de um novo indivíduo (*explotation*). O operador de mutação é o responsável pela diversidade dos indivíduos para a descoberta de novas regiões do espaço de busca (*exploration*).

Como descrito, os operadores genéticos são estudados segundo o tipo de representação, binária ou real, dos indivíduos da população. De maneira geral, um *crossover* de representação binária funciona trocando uma sequência de caracteres entre dois cromossomos e a mutação de representação binária funciona, trocando um valor de um *bit* com certa probabilidade predefinida pelo programador (Ver Figura 17).

Os operadores de *crossover*, na representação real, são mais diversificados, podendo ocorrer por diferentes processos, como trocas de sequências de caracteres, por operações aritméticas entre os pais ou pelo uso de informações da função, como derivadas. O operador de mutação, na representação real, também pode ser de vários tipos, sendo geralmente construído por adição ou por substituição de um indivíduo por um número aleatório.

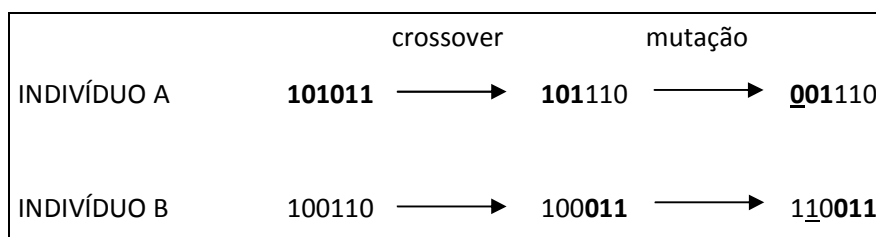


Figura 17- Operadores de *crossover* e mutação na representação binária
Fonte: Lacerda e Carvalho (1999)

Dados dois pais p_1 e p_2 , selecionados para geração dos filhos c , são descritos os seguintes operadores de *crossovers* aritméticos para a representação real:

Nome do operador	Regra de Formação
<i>Crossover</i> Média (Davis,1991)	$\mathbf{c}_1 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) / 2$
<i>Crossover</i> Média Geométrica	$\mathbf{c}_1 = \sqrt{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}$
<i>Crossover</i> BLX- α ou crossover mistura (Eshelman e Shaffer, 1993)	$\mathbf{c}_1 = \mathbf{p}_1 + \beta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2); \beta \in U[-\alpha, 1 + \alpha]$
<i>Crossover</i> Linear (Wright, 1993)	Melhor filho entre: $\mathbf{c}_1 = 0,5\mathbf{p}_1 + 0,5\mathbf{p}_2; \mathbf{c}_2 = 1,5\mathbf{p}_1 - 0,5\mathbf{p}_2; \mathbf{c}_3 = -0,5\mathbf{p}_1 + 1,5\mathbf{p}_2$
<i>Crossover</i> Aritmético (Michalewicz, 1994)	$\mathbf{c}_1 = \beta\mathbf{p}_1 + (1 - \beta)\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{c}_2 = (1 - \beta)\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$
<i>Crossover</i> Heurístico (Michalewicz, 1994)	Para $f(\mathbf{p}_1) \geq f(\mathbf{p}_2)$ $\mathbf{c}_1 = \mathbf{p}_1 + r(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2); r \in U[0,1]$ Obs: Se $\mathbf{c}_1$ for infactível é gerado um novo r , em um máximo de t vezes.
<i>Crossover</i> Simples (Michalewicz, 1994)	Variante do <i>crossover</i> binário para representação real.

Quadro 1- Operadores de *crossover* para representação real

Fonte: Lacerda e Carvalho (1999)

Para os filhos gerados nos passos anteriores, Lacerda e Carvalho (1999) descrevem os seguintes operadores de mutação que produzirão o novo vetor de solução $\mathbf{c}' = \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$, com o gene (variável de decisão) x_j , aleatoriamente selecionado para mutação:

Nome do operador	Regra de Formação
Mutação uniforme	$x_i = \begin{cases} U(a_i, b_i), & \text{se } i = j \\ x_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$ onde a_i e b_i representam os limites permitidos para o gene x_j
Mutação gaussiana	$x_i = \begin{cases} N(x_i, \sigma), & \text{se } i = j \\ x_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$ Obs.: Os valores de σ podem também diminuir com o aumento de gerações.
Mutação <i>creep</i>	$x_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon, & \text{se } i = j \\ x_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$ onde ε é um número aleatório pequeno obtido de uma distribuição uniforme ou normal. Alternativamente, pode-se multiplicar x_i por um número aleatório próximo de um.
Mutação limite (Michalewicz,1994)	Substituição de um gene por um dos limites permitidos, a_i ou b_i , com igual probabilidade.
Mutação não uniforme (Michalewicz,1994)	$x_i = \begin{cases} x_i + (b_i - x_i) f(G), & \text{se } r_1 < 0,5 \text{ e } i = j \\ x_i - (x_i - a_i) f(G), & \text{se } r_1 \geq 0,5 \text{ e } i = j \\ x_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$ $f(G) = (r_2 (1 - G/G_{\max}))^b$ onde $r_1 \in U(0,1)$, G é o número da geração corrente; $G_{\max}$ é número máximo de gerações; e b é um parâmetro escolhido.
Mutação não uniforme múltipla	Aplicação do operador de mutação não uniforme em todos os genes do cromossomo c' .
Mutação adaptativa viável	$x_j = x_j + kad$ Onde, para todo j, k é uma constante para indicar o

Continua
→

Continuação

Nome do operador	Regra de Formação
	tamanho do passo; a é uma correção da escala para que o passo se mantenha dentro da região factível; e d é um parâmetro para indicar a direção para mudança no cromossomo.

Quadro 2- Operadores de mutação para representação real

Fonte: Lacerda e Carvalho (1999), (Adaptado).

2.2.2.5. Elitismo

Nos Algoritmos Genéticos, após uma população gerar os filhos para a próxima geração, ela é automaticamente destruída. O elitismo, conforme descrito em Sivanandam e Deepa (2007), é um procedimento em que os indivíduos mais fracos da população são substituídos pelos indivíduos mais bem avaliados da população imediatamente anterior. Dessa forma, os melhores indivíduos não são perdidos por causa dos operadores de *crossover* e de mutação. O resultado esperado com o uso do elitismo é a convergência mais rápida do algoritmo para a solução do problema.

2.2.2.6. Critérios de parada

Os critérios de parada nos Algoritmos Genéticos determinam o que causa o término do algoritmo. Os critérios discutidos em Sivanandam e Deepa (2007) são:

1. Número de Gerações: Especifica o número máximo de iterações do algoritmo;
2. tempo limite: Especifica o tempo máximo de processamento do algoritmo;
3. limite para função objetivo: Se a função objetivo alcançar um determinado valor, o algoritmo termina;
4. gerações estagnadas: Especifica quantas gerações o algoritmo prossegue, sem melhoria na função objetivo (ou pouca melhoria para uma dada tolerância); e
5. prazo em estagnação: Especifica quanto tempo o algoritmo prossegue, sem melhoria na função objetivo (ou pouca melhoria para uma dada tolerância).

2.2.2.7. Otimização com restrições

A existência de restrições na função objetivo pode ser contornada com vários artifícios. Os operadores de *crossover* e de mutação podem ser definidos de maneira a não apresentar valores inactíveis, eliminando indivíduos inactíveis da população, reparando as propostas inactíveis para propostas factíveis, ou transformando as funções objetivo em funções sem restrições com o uso dos Multiplicadores de Lagrange ou algum outro método de penalização.

Segundo Linden (2008), a proibição da existência de indivíduos inactíveis na população intermediária do algoritmo pode representar a eliminação de indivíduos inactíveis, mas muito próximas à solução ótima. O autor sugere a penalização de indivíduos inadequados em uma função de minimização por uma função do tipo $f(\mathbf{x}_{inad}) = f(\mathbf{x}_{inad}) + Q(\mathbf{x}_{inad})$, na qual $Q(\mathbf{x}_{inad})$ é uma penalidade associada ao descumprimento das condições. A penalidade $Q(\mathbf{x}_{inad})$ pode ser constante ao longo do tempo (estática); variável em função do tempo (dinâmica) ou variável em função de a concentração da população estar dentro da região admissível (adaptativa).

Para Linden (2008), a representação de operadores que satisfazem as restrições é mais adequada que os métodos de penalização. Contudo, o autor destaca que o principal problema desse método reside no fato de que é necessário criar uma representação e um conjunto de operadores para cada conjunto de restrições diferentes que surgirem.

Os problemas listados com os métodos de separação de soluções são, geralmente, o alto custo computacional associado à procura de uma solução satisfatória e o tempo necessário para o desenvolvedor elaborar uma heurística própria para o problema.

2.2.2.8. Problemas comuns em Algoritmos Genéticos

Segundo Lacerda e Carvalho (1999), alguns problemas acontecem de maneira recorrente nos Algoritmos Genéticos. Um desses problemas surge da convergência prematura do algoritmo para um ponto de ótimo local. As causas para essa convergência estão relacionadas aos superindivíduos que produzem um número excessivo de filhos na população e a consequente perda de diversidade. Geralmente, para contornar o problema, é necessário reespecificar o problema com escolhas mais adequadas dos operadores de mutação, aumento da população em cada geração e queda do número de indivíduos gerados por elitismo.

Há outro problema documentado na literatura dos Algoritmos Genéticos: o tempo de processamento da função objetivo. Geralmente, o processamento da função objetivo representa a maior parte do tempo de processamento do algoritmo. A situação pode ser remediada com o aproveitamento de avaliações de indivíduos que se repetem em várias populações, ou mesmo substituindo a função objetivo original por aproximações computacionalmente mais rápidas nas primeiras gerações do algoritmo.

2.3. Importantes aplicações de Pesquisa Operacional na seleção de portfólios

2.3.1. Abordagem *Assets Only*

Em um artigo que revolucionou a maneira como investidores formam carteiras de investimentos, alocando ativos distintos em posições compradas ou vendidas, Markowitz (1952) demonstrou que, quando um investidor diversifica suas aplicações, escolhendo ativos que não apresentem correlação perfeita, ou seja, igual a 1, ele obrigatoriamente reduz o risco da carteira. A fórmula proposta para delineamento para uma carteira eficiente é a seguinte:

$$\underset{x_1, \dots, x_n}{Max} R_p = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

[2.54]

Sujeito a:

$$\sigma_p^2 \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \leq k$$

Onde:

R_p = retorno esperado do portfólio

$R_{i(j)}$ = retorno esperado do ativo i(j)

$x_{i(j)}$ = fração da carteira aplicada no ativo i(j)

σ_p^2 = variância do portfólio

$\sigma_{i(j)}$ = desvio padrão do ativo i(j)

ρ_{ij} = correlação entre o ativo i e o ativo j

k = nível de risco máximo tolerável

O problema de alocação de recursos para uma fronteira eficiente é um problema não linear de Pesquisa Operacional, mais especificamente um problema de programação quadrática. Refazendo o problema para vários valores de k , pode-se traçar uma curva, conhecida como fronteira eficiente de Markowitz (Ver Figura 18). Um ponto de interesse na fronteira de Markowitz é o ponto que apresenta o portfólio de menor variância possível, denominado portfólio de variância mínima – PVM.

Considerando a possibilidade de captação e de aplicação em um ativo livre de risco, Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) desenvolveram um modelo mais abrangente, conhecido como CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Segundo Brealey (2006), a simplicidade de cálculo do modelo e a capacidade de, com uma única regressão univariada, responder inúmeras questões a respeito do comportamento do retorno dos ativos, permitiram que o modelo se tornasse o predileto entre os modelos

utilizados pelos analistas financeiros na construção de carteiras. Nesse caso, o portfólio ideal para solução do problema proposto por Markowitz sempre cairá sobre uma reta (linha de mercados de capitais) dada por uma combinação de proporções do capital aplicadas no ativo livre de risco e na carteira mercado (tangente à fronteira de Markowitz), que alternativamente ao problema anterior, pode ser calculado diretamente pela seguinte equação:

$$R_p = R_f + \beta_i (R_m - R_f) \quad [2.55]$$

Onde:

R_p = retorno esperado do portfólio

R_f = retorno do ativo livre de risco

R_m = retorno esperado da carteira de mercado

β_i = sensibilidade da carteira com risco em relação a uma mudança no excesso de retorno de mercado ($R_m - R_f$)

Assim, o raciocínio da construção do modelo está na construção da fronteira eficiente com aplicações e captação à taxa livre de risco. Pelo modelo, todos os investidores devem constituir carteiras na linha de mercados de capitais quando não há possibilidades de arbitragem.

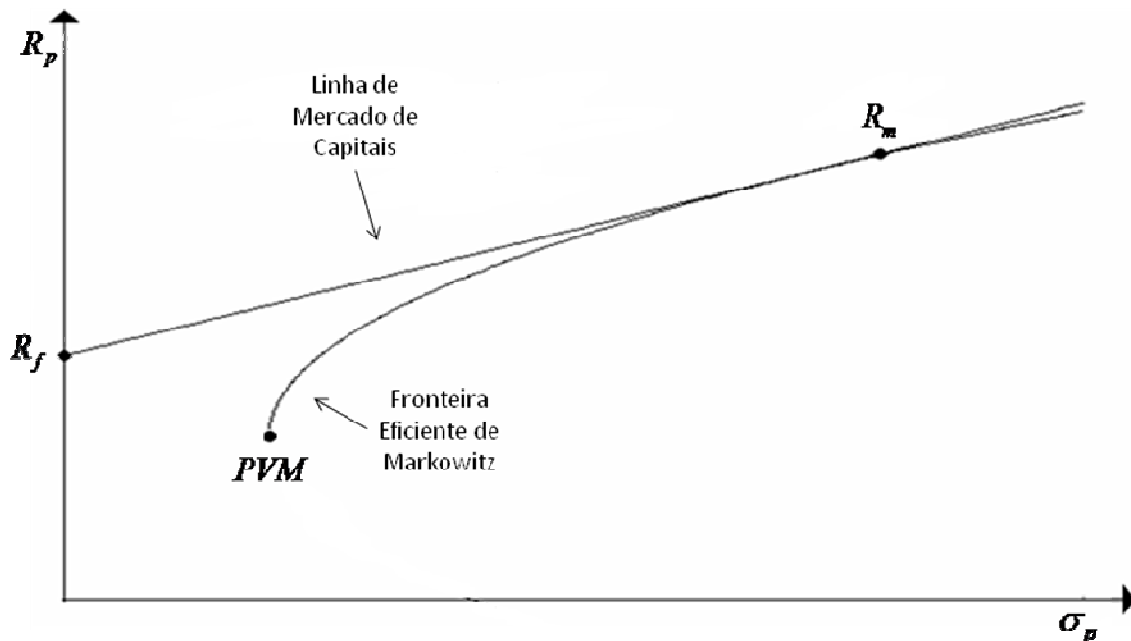


Figura 18- Fronteira eficiente de Markowitz e a linha de mercado de capitais do modelo CAPM

2.3.2. Abordagem *Assets and Liabilities Management*

A construção de portfólios ganhou um novo desafio, quando foi considerada a situação de um investidor particular que escolhe seus ativos com o objetivo não de maximizar sua riqueza, mas de pagar determinados compromissos em períodos específicos do tempo.

Uma proposta de solução para incorporar os passivos na construção do portfólio foi elaborada por Wise (1984a), Wise (1984b) e Wilkie (1985) que desenvolveram um modelo no mesmo sentido da abordagem tradicional desenvolvida por Markowitz (1952). Segundo Wilkie(1985), a diferença desse novo modelo para o tradicional consiste que, em seu modelo, não se pode inserir passivos como simples ativos negativos, conforme poderia ser feito no modelo de Markowitz, já que, nesse último, o objetivo independe do montante inicialmente disponível para alocação dos ativos.

Dessa forma, o método de seleção de portfólios desenvolvido por Wise-Wilkie acrescenta o componente “preço”, tornando-o conhecido como modelo Média-Variância-Preço (E-V-P)²⁸.

Considerando-se um portfólio com apenas dois ativos de risco, as equações de relacionamento entre as variáveis são:

$$E = x_1 E(P_1) + x_2 E(P_2) - E(P_L) \text{ (Valor esperado do excedente)}^{29} \quad [2.56]$$

$$V = x_1^2 Var_1 + x_2^2 Var_2 + 2x_1 x_2 Cov_{12} - 2x_1 x_2 Cov_{1L} - 2x_1 x_2 Cov_{2L} + Var_L \text{ (Variância do excedente)}$$

$$P_0 = x_1 P_{01} + x_2 P_{02} \text{ (Valor inicial dos ativos)}$$

Sendo que:

E = excedente remanescente entre o valor dos ativos e o valor dos passivos

P_i = valor do ativo 1, valor do ativo 2, e valor presente do passivo L

V = variância do excedente

Var_i = variância do ativo 1, variância do ativo 2, e variância do passivo L

Cov_{ij} = covariância entre i e j

x_i = peso do ativo i

²⁸ Para manter a identidade com o original, a notação utilizada no problema está ligeiramente diferente da notação utilizada no restante da dissertação.

²⁹ Também conhecido como *Surplus* ou *Superávit Atuarial*, S, ou na forma negativa como Déficit Atuarial, UL (*Unfunded Liability*).

Segundo o modelo proposto, o problema do fundo de pensão pode ser resolvido, fixando-se um valor esperado para o excedente. Vale ressaltar que Wise (1984b) defendeu o uso do valor zero para o excedente, por considerá-lo um valor não viesado (*unbiased match*). Em seguida, deve-se minimizar o valor da variância, escolhendo ativos cujos termos de covariância (entre ativos e passivos) façam com que a variância fique mais próxima possível de zero.

O resultado do modelo não seria mais um modelo de fronteira eficiente bidimensional, mas um modelo de fronteira eficiente tridimensional, conforme ilustrado na figura a seguir:

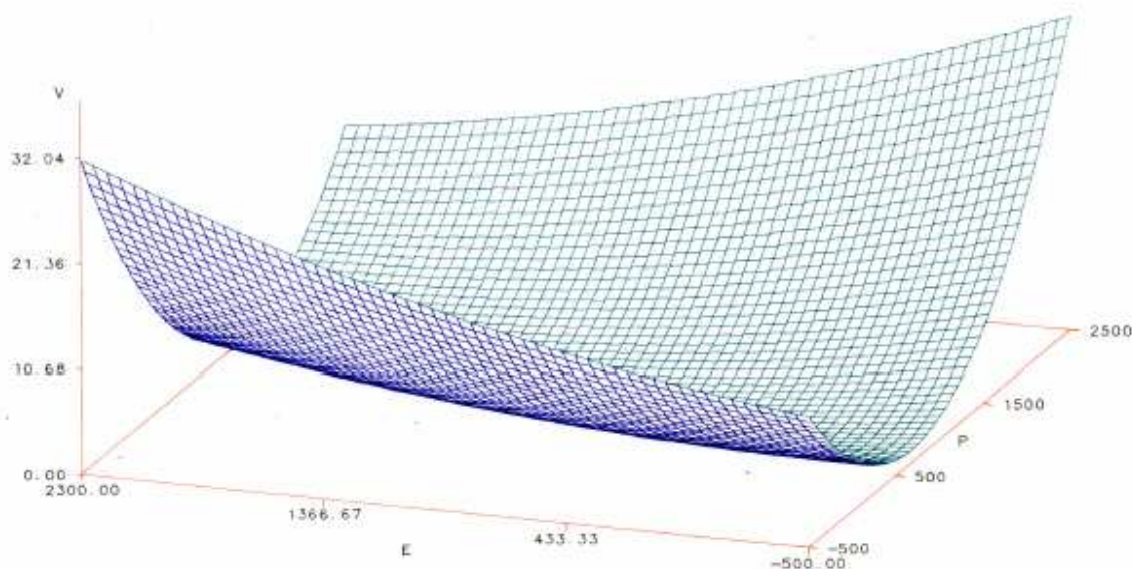


Figura 19- Variância (V) como uma função do Preço (P) e do valor esperado do excedente (E). Os dados são como os Wise (1984b) com $P_{01} = 100$ e $P_{02} = 400$
Fonte: Wilkie (1985)

Para Wilkie (1985), na relação de dominância para o desenho da fronteira eficiência, é preferível o portfólio que:

- para o mesmo P e E, aquele que possui o menor V;
- para o mesmo P e V, aquele que possui o maior E;
- para o mesmo E e V, aquele que possui o menor P;
- para o mesmo P, aquele que possui o maior E e o menor V;
- para o mesmo E, aquele que possui o menor P e menor V;
- para o mesmo V, aquele que possui o menor P e maior E; e
- aquele que possui o menor P, maior E e menor V.

Sherris (1992) generalizou o método de Wise-Wilke, demonstrando que os portfólios ótimos podem ser obtidos utilizando a idéia de algum tipo de função utilidade para ser maximizada.

Para o caso específico discutido em Wise-Wilkie, Sherris propôs que o problema seria equivalente à maximização da seguinte função utilidade: $E\{U(-P_K) + U(E)/(1+b)\}$, em que b seria a taxa que refletiria o custo de oportunidade do investidor e P_K , a margem de solvência inicial dada por $P_K = pxRM$ e RM a reserva matemática mínima para pagamento dos benefícios.

Sherris também generalizou o modelo de Wilse-Wikie para um modelo de vários períodos de alocação, ou seja, um modelo em que os pesos para os ativos são revistos periodicamente. A equação proposta por Sherris para o problema de otimização dinâmica é:

$$\text{Max} \left\{ U(-P_{0K}) + \sum_{t=0}^{t=T} [EU(E_t)/(1+b)^t] \right\} \quad [2.57]$$

A ferramenta de Pesquisa Operacional utilizada nesse caso é a Programação Dinâmica, a qual, conforme a proposta de Bellman (1957), permite a decomposição do problema grande em vários subproblemas menores. No caso, considerando-se o período de

investimento como s , e chamando o valor da função utilidade como $V(s)$, podemos reescrever a equação como:

$$V(s) = \text{Max} \{U(-P_{SK}) + EU(E_{t+1})/(1+b)\} + V(s+1)/(1+b) \quad [2.58]$$

Assim, pode-se resolver o problema do último período até o primeiro período por decomposição, podendo, dessa maneira, obter todo o caminho de escolha dos pesos.

No artigo *Portfolio selection models for life insurance and pension funds*, Sherris redefine o modelo de seleção de portfólio em um formato mais geral que permite:

- (a) Incorporar um critério geral de otimização (em termos de um excedente de longo prazo);
- (b) permitir revisões na seleção dos pesos dos ativos do portfólio;
- (c) incorporar passivos estocásticos; e
- (d) incorporar a probabilidade de insolvência do fundo de pensão.

Segundo Valladão (2008), o risco de desequilíbrio financeiro em um fundo de pensão em relação ao horizonte de estudo pode ser dividido em diferentes situações. (1) O fundo de pensão encontra-se em déficit atuarial ou *underfunding*, ou seja, quando se tem a expectativa de que o valor dos ativos não será suficiente para o pagamento de todas as futuras obrigações; (2) O fundo de pensão encontra-se insolvente; onde o valor dos ativos já não é suficiente para o pagamento da obrigação atual.³⁰ Valladão (2008) conclui que, quando se trabalha com horizontes finitos no modelo de otimização, como é o caso da maioria dos modelos existentes na literatura, só é possível trabalhar

³⁰ Também há o caso em que o fundo encontra-se com um problema de liquidez, caso no qual apesar do valor dos seus ativos serem maiores que as obrigações atuais, não há possibilidade de convertê-los em numerário e efetivar o pagamento.

com modelos de *underfunding*. Além disso, como o horizonte no modelo de Pesquisa Operacional é geralmente menor do que o horizonte de existência real do fundo, a probabilidade de *underfunding* é menor do que a probabilidade de insolvência real do fundo, o que subestima o risco de equilíbrio.

O modelo proposto por Sherris é em tempo finito e, dessa maneira, a insolvência considerada no modelo é de ocorrência de um déficit atuarial (*underfunding*) acontecido em qualquer tempo. De qualquer forma, sua incorporação no modelo representa um grande avanço, quando comparada ao seu modelo anterior. O problema a ser maximizado assume, então, a seguinte forma:

$$\text{Max}_{\{p_t, x_{it}\}} \sum_{t=0}^{t=T} f_t(E_t, p_t, x_{it}) \quad [2.59]$$

Sujeito a:

$$E_{t+1} = g_t(E_t, p_t, x_{it})$$

$$\text{Prob}(E_{t+1} \leq P_{kt+1} | E_t) \leq q_t \text{ (Insolvência)}$$

$$p_t, x_{it} \geq 0 \text{ (condições de não negatividade para as variáveis de controle)}$$

Da mesma maneira, o problema de otimização pode ser, a partir da programação dinâmica, dividido em subproblemas e resolvido seqüencialmente do último período para o primeiro. A otimização dentro de cada subproblema é realizada através do uso de técnicas do cálculo diferencial, dado pelas condições de Kuhn-Tucker e a reformulação do problema com restrições para um problema sem restrições com o uso dos multiplicadores de Lagrange.

Talvez a conclusão mais interessante dos estudos de Wise, Wilkie e Sherris é que, dependendo da subcapitalização do fundo para pagamento dos passivos, carteiras de ativos mais voláteis e, portanto, de maior risco na abordagem *Assets Only* são

consideradas menos arriscadas na abordagem *Assets and Liabilities Management*, uma vez que carteiras de altos retornos podem ser a única chance de saldar os compromissos da instituição³¹.

Uma alternativa ligeiramente diferente para o problema de seleção de portfólio em um fundo de pensão é quando se incorpora a possibilidade de mudança na contribuição do indivíduo em instantes específicos do tempo. Os autores que desenvolveram essa abordagem consideram como variável de controle, além da escolha dos pesos de cada ativo, mudanças nas taxas de contribuições dos indivíduos, como na escolha do período de amortização do excedente.

Conforme Boulier e Dupré (2003), os modelos desenvolvidos por Wise, Wilkie e Sherris não consideraram a política de contribuições como parte do modelo. Conforme sugerem Huang e Cairns (2005), a escolha apropriada do período de amortização dos déficits atuariais, através da cobrança de acréscimos ao valor normal de contribuição, ajuda na redução da variância do tamanho do fundo, tornando-o mais solvente ao longo do tempo.

A necessidade de variação na contribuição decorre do descasamento do que foi previsto pelo atuário e o que aconteceu de fato, gerando o excedente ou déficit E_t para ser amortizado. Cairns (1994) e Wright (1998) alegam que, como os benefícios em planos tipo benefício definido não são dependentes da performance dos investimentos, o fato de tornar a contribuição fixa pode afetar o desequilíbrio do fundo de duas maneiras: 1) Os ativos tornam-se insuficientes para os pagamentos dos benefícios; 2) Os ativos crescem exponencialmente fora de controle.

³¹ Em Boulier, Michel e Wisnia (1996), podem ser encontrados resultados semelhantes para o caso em que as taxas de contribuições são voláteis.

Para evitar o crescimento exponencial, Cairns (1994) sugeriu que seja imposto um limite máximo para a proporção de ativos/passivos, acima do qual o fundo de pensão deve devolver recursos para aos participantes e patrocinadores. No Brasil, a Lei Complementar 109, de 29 de maio de 2001, e a Resolução CGPC Nº 26, de 29 de setembro de 2008, impõem que, quando o superávit do fundo for superior a 25% de suas reservas matemáticas, por três anos consecutivos, o plano de benefícios da entidade deve ser revisto³².

O método de amortização estudado em Dufresne (1989), Cairns (1994) e Haberman (1994a) é o de amortizar o excedente E_t em m parcelas iguais, PMT_m , ou seja, a contribuição total paga pelos participantes no período t , C_t , será igual à contribuição normal paga NC_t acrescida da contribuição extraordinária ADJ_t . Essa relação pode ser vista pelas seguintes equações:

$$C_t = NC_t + ADJ_t \quad [2.60]$$

$$ADJ_t = PMT_m E_t \quad [2.61]$$

Segundo Cairns (1994), além do método de amortização do excedente, as mudanças necessárias nas contribuições são afetadas pelos períodos de reavaliação das contribuições e pelo intervalo dado, até que a nova contribuição entre em vigor. A conclusão geral do artigo é de que apurar os déficits atuariais em pequenos intervalos e implementações mais imediatas das novas contribuições diminui a variâncias das contribuições e a variabilidade dos ativos.

³² A Resolução CGPC Nº 26 determina que antes da revisão, a entidade deve adotar tábua biométrica AT-2000 (ou alguma mais conservadora) e taxa de avaliação atuarial de no máximo 5% ao ano.

Além dos modelos já apresentados, diversos outros modelos de gestão de ativos e passivos têm sido considerados na literatura para fundos de pensão. Para ilustrar a diversidade dos modelos de ALM disponíveis, no Quadro 3 apresentam-se as principais características de alguns desses modelos:

AUTOR	FUNÇÃO OBJETIVO	VARIÁVEIS DE DECISÃO	METODOLOGIA DE PESQUISA OPERACIONAL	OBSERVAÇÕES
Haberman (1994b)	- Minimização da variância das contribuições e da variância dos valores dos ativos, e - Minimização da variância dos valores presentes das futuras contribuições.	- Período de amortização do excedente; - Atraso na implantação de novas contribuições, - Frequência de avaliações atuariais; - Escolha do método de financiamento.	- Solução Analítica	- Encontradas soluções para os casos em que as rentabilidades projetadas dos ativos (taxas de avaliação atuarial) são intertemporariamente independentes e nos casos que são dependentes (Autorregressivos de ordem 1 e 2).
Wright (1998)	- Minimizar as taxas de contribuição.	- Percentual alocado nas diversas classes de ativos; - Nível de risco, dado por percentual de insolvência desejado.	- Otimização por simulação; - Solução analítica	- Utiliza o modelo estocástico de Wilkie (1995)³³; - Propõe método analítico para minimizar os números de simulações.

Continua
→

³³ Segundo Booth *et al.* (1999) modelos estocásticos de longo prazo geralmente incorporam séries passadas e variáveis econômicas para realizar simulações de longo prazo. Uma vez que as otimizações realizadas por simulação são menos restritivas, o uso da técnica permite resolver uma ampla gama de problemas práticos de seleção de portfólio e de alocação de ativos. Wright (1998) afirma que os modelos estocásticos de longo prazo desenvolvidos por Wikie (1986) e Wilkie (1995) são os melhores modelos conhecidos e mais utilizados na Inglaterra.

Continuação

AUTOR	FUNÇÃO OBJETIVO	VARIÁVEIS DE DECISÃO	METODOLOGIA DE PESQUISA OPERACIONAL	OBSERVAÇÕES
Consigli e Dempster (1998)	- Maximizar uma função utilidade da riqueza terminal.	- Compras, vendas e manutenção das classes de ativos: ações, depósitos bancários, imóveis, títulos de renda fixa pré-fixados e pós-fixados - Manutenção ou venda de passivos.	- Programação Estocástica Multiestágio (Solução por diversos métodos, como: Simplex, Pontos Interiores, Decomposição Aninhada de Benders)	- Utilização do modelo estocástico de Wilkie (1995); - Análise do modelo da Watson & Sons Consulting Actuaries, como um exemplo de modelos <i>Computer-aided Assets and Liabilities Management</i> - CALM ³⁴ ; - Comparação dos softwares utilizados; - Constatação da superioridade da Decomposição Aninhada de Benders como algoritmo de solução de problemas lineares de larga escala.

Continua
→

³⁴ Outros exemplos bem-sucedidos de modelos de Programação Estocástica em fundos de pensão referidos pelos autores são: Modelo de Russel- Yasuda Kasai, discutido em Cariño, Myers e Ziemba (1995), e o modelo da Towers Perrin, discutido em Mulvey (1992).

Continuação

AUTOR	FUNÇÃO OBJETIVO	VARIÁVEIS DE DECISÃO	METODOLOGIA DE PESQUISA OPERACIONAL	OBSERVAÇÕES
Yakoubov, Teeger e Duval (1999)	- Maximizar o nível de capitalização do fundo de pensão; - Minimizar as taxas de contribuição.	- Percentual alocado nas diversas classes de ativos: Dinheiro, Títulos de renda fixa pré-fixados e pós-fixados, Ações Domésticas e Ações Internacionais.	- Otimização por simulação (método da "força bruta")	- Modelo estocástico de investimento de longo prazo, que incorpora a estrutura subjacente entre as variáveis; - Inspirado no modelo estocástico de Wilkie (1986); - Adota uma estrutura em cascata com a inflação, influenciando a correção dos salários e os retornos dos outros ativos.
Haberman e Sung (2002)	- Minimizar a distância entre as razões Ativos/Reserva Matemática, FR_t, e Contribuição sobre Reserva Matemática, CR_t, das razões alvo para essas variáveis, fr_t e cr_t.	- Razão da Contribuição sobre a Reserva Matemática, CR_t .	- Programação Dinâmica em tempo discreto e variável contínua. (Com solução analítica).	- Analisa os efeitos dos <i>delays</i> do processo de avaliação atuarial; - Permite variáveis estocásticas econômicas e demográficas; - Função objetivo tipo <i>tracking-error</i>.

Continua
→

Continuação

AUTOR	FUNÇÃO OBJETIVO	VARIÁVEIS DE DECISÃO	METODOLOGIA DE PESQUISA OPERACIONAL	OBSERVAÇÕES
Sharpe (2002)	- Maximizar uma função utilidade dada pelo retorno esperado menos variância (incluindo a covariância de ativos e passivos) dada uma tolerância a risco.	- Percentual alocado nas diversas classes de ativos.	- Programação Não Linear.	- Otimização no contexto média-variância; - Inclui o estudo do uso de fatores principais para previsões mais robustas.
Gerber e Shiu (2003)	- Maximizar o valor presente esperado do pagamento de bônus aos participantes.	- Grau de capitalização em que se pode distribuir bônus aos participantes.	- Solução analítica.	- Modela a evolução dos ativos em um intervalo de capitalização mínimo e máximo.
Vlerk (2003)	- Minimização do custo esperado do fundo (contribuições normais e emergenciais).	- Contribuição emergencial do patrocinador; - Valores alocados, comprados e vendidos por classe de ativos: Ações, Imóveis, Renda Fixa e Caixa; - Taxa de contribuição; - Valor total dos ativos por período; - Superávit no último período.	- <i>Individual Chance-Constrained Programming</i> .	- Modelo incorpora as características regionais (Holanda); - Restrição do tipo <i>Individual Chance-Constrained Programming</i> , para garantir com grande confiabilidade que a razão ativos/ valor presente dos passivos estará maior que um certo nível especificado pelos reguladores.

Continua
→

Continuação

AUTOR	FUNÇÃO OBJETIVO	VARIÁVEIS DE DECISÃO	METODOLOGIA DE PESQUISA OPERACIONAL	OBSERVAÇÕES
Huang e Cairns (2005)	- Minimização da variância das contribuições e da variância dos valores dos ativos.	- Variáveis que impactam na taxa de contribuição (período de amortização do excedente) e retornos anormais futuros esperados.	- Solução Analítica.	- Estrutura a termo para as taxas de juros de curto prazo; - Uso de três classes de ativos com dependência temporal.
Hilli, Koivu, Pennanen e Ranne (2007)	- Maximizar a função utilidade dada pelo valor presente do nível de cobertura das reservas (por faixa) e pagamento de bônus aos participantes.	- Compras, vendas e manutenção das classes de ativos: dinheiro, títulos de renda fixa, ações, imóveis e empréstimos aos participantes; - Pagamento de bônus aos participantes (limitado em restrição); - Nível de cobertura das reservas matemáticas (diversas faixas com diferentes penalidades associadas).	- Programação Estocástica Multiestágio Não Linear Convexa, resolvida com o Método dos Pontos Interiores.	- Modelo incorpora as características regionais (Finlândia); - Discretização de cenários.
Valladão (2008)	- Maximizar a função utilidade esperada da riqueza do fundo ao final do horizonte de estudos.	- Percentual alocado em cada classe de ativos: Ações, Imóveis, Renda Fixa e Caixa.	- Programação Linear Estocástica Multiestágio.	- Modelo incorpora as características regionais (Brasil); - Modelo determinístico para os passivos, modelo estocástico para os ativos; - Modelo de geração de cenários em árvore.

Quadro 3- Características de outros modelos de ALM apresentados na literatura

Modelos de ALM envolvendo meta-heurísticas são menos explorados pela literatura. Uma exceção foi o artigo de Poojari e Varghese (2008), no qual foi abordado o desenvolvimento e a implementação de Algoritmos Genéticos e métodos amostrais de Monte Carlo para a solução de problemas do tipo *chance constrained* na determinação de portfólios e de níveis de contribuições dos participantes nos fundos de pensão. A conclusão dos autores é que esse método de Pesquisa Operacional pode resolver com sucesso problemas estocásticos, não-convexos e com elevado grau de não linearidade. O objetivo do modelo foi maximizar a probabilidade do segurador de obter seu nível desejado de retorno, sujeito às restrições de probabilidade para manter o mínimo requerimento de capital e liquidez da empresa. O procedimento do algoritmo utilizado foi:

Passo 1: Definir o tamanho da população, probabilidades de *crossover* e de mutação, critérios de parada de geração máxima e função de penalidade para violação de restrições.

Passo 2: Gerar a população inicial.

Passo 3: Usar a simulação de Monte Carlo, a fim de obter os valores esperados e as probabilidades nas restrições para cada cromossomo na população. Computar a função objetivo via Simulação de Monte Carlo. Determinar a função de avaliação para cada cromossomo.

Passo 4: Selecionar os pais usando uma estratégia de seleção. Selecionar cromossomos-elite para a próxima geração. Aplicar os operadores de *crossover* e mutação para gerar uma nova população.

Passo 5: Voltar para o passo 3, caso o critério de parada não for satisfeito. Reportar a melhor solução factível e terminar.

3. METODOLOGIA

3.1. Visão geral

Neste estudo foi desenvolvido um modelo de gerenciamento de ativos e passivos para Entidades Fechadas de Previdência Complementar que possuem planos do tipo Benefício Definido.

A pesquisa pautou-se em premissas e em dados de um fundo de pensão que figura entre as maiores EFPC públicas do país. A motivação para a escolha de uma EFPC existente foi manter a coerência de premissas utilizadas no estudo com as adotadas pelo mercado e com o contexto legislativo brasileiro. Além disso, a EFPC forneceu dados para projeção dos fluxos de caixa atuariais e séries históricas não disponíveis no mercado.

Como o estudo foi baseado em amostras e adotou hipóteses simplificadoras, o nome da EFPC estudada foi resguardado, para que não ocorram comparações ou análises equivocadas quanto ao plano de benefícios administrado.

O processo de estruturação da modelagem utilizada para o fundo de pensão consistiu das seguintes partes:

1. Modelagem determinística dos fluxos de caixa previstos para pagamento pela EFPC;
2. modelagem estocástica das rentabilidades dos ativos e da inflação;
3. modelagem da dinâmica dos valores dos ativos e passivos em cada ano da projeção;
4. modelagem da função objetivo para a EFPC; e

5. estruturação das metodologias de solução do problema de Pesquisa Operacional.

A técnica dos Algoritmos Genéticos foi adotada como metodologia padrão de Pesquisa Operacional. Os resultados foram comparados com a abordagem tradicional de seleção de carteiras desenvolvida por Markowitz (1952).

Para fins ilustrativos, foram assumidas algumas variações nas premissas assumidas no modelo de Pesquisa Operacional, da seguinte forma:

- Mudança no período utilizado para estimação dos retornos dos ativos e inflação;
- alteração na periodicidade de reavaliação dos pesos dos ativos na carteira;
- modificação no percentual de contribuições dos participantes e patrocinador; e
- mudança no valor dos ativos iniciais do fundo;

Além disso, ainda foram investigados os efeitos da não limitação dos valores dos ativos em função de seu passivo com a eliminação da restrição correspondente na função objetivo.

Os aplicativos utilizados no estudo foram: Microsoft Excel®, Excel Solver®, Visual Basic for Applications® e o software MATLAB® – MATrix LABoratory, versão 7.5.0.342 (R2007b) e seu o pacote *Genetic Algorithm And Direct Search Toolbox*®. Os modelos foram executados em um computador com processador Intel Core 2 Duo T5800 de 2.0Ghz de velocidade e memória RAM DDR2 de 3Gb e 800Mhz.

3.2. Modelagem dos fluxos de caixa atuariais

Os fluxos de caixa atuariais correspondem ao valor estimado de pagamento de benefícios em cada período menos os valores esperados das contribuições por período.

A modelagem dos fluxos de caixa atuariais foi realizada com o auxílio do Microsoft Excel® e do Visual Basic for Applications®. A estrutura da modelagem foi organizada em três componentes: amostra e organização do Banco de Dados; projeções dos fluxos atuariais individuais; e consolidação em relatório de resposta.

A dinâmica dos cálculos se deu através de um processo iterativo: para cada i -ésimo indivíduo no banco de dados, foi realizada a projeção dos valores esperados de seus benefícios e contribuições e os resultados encontrados de cada i -ésima projeção somados às $i-1$ projeções anteriores.

3.2.1. Amostra e organização do banco de dados

Para projeção dos fluxos de caixa do fundo de pensão, foi considerada uma pequena amostra de 170 participantes na posição de outubro de 2009, estratificada nas proporções da população dos participantes da EFPC, composta por:

- Número de Inválidos: 2 participantes
- Número de Pensionistas: 12 participantes
- Número de Aposentados: 61 participantes
- Número de Ativos: 95 participantes

Por simplificação, devido aos cálculos estarem sendo efetuados em bases anuais, indivíduos da amostra que estavam há seis meses da aposentadoria foram considerados já aposentados.

A escolha dos indivíduos para a composição da amostra, bem como a escolha de sua estratificação e tamanho foi, por motivos de sigilo de acesso aos dados, efetuada pelo atuário responsável da EFPC.

Por esse mesmo motivo, as informações sobre os participantes também foram inseridas na base de dados pelo atuário responsável da EFPC, não sendo, em momento algum, disponibilizado ao pesquisador o seu teor. Os campos para preenchimento da base de dados foram:

- Número do participante no banco de dados;
- Salário bruto do participante;
- Percentual de contribuição extra sobre contribuição normal (jóia e autopatrocinio);
- Campo binário para indicar se o participante é inválido;
- Campo binário para indicar se o participante é pensionista;
- Campo binário para indicar se indivíduo é aposentado; e
- Data de nascimento do participante.

3.2.2. Projeções dos fluxos atuariais individuais

Os fluxos de caixa atuariais individuais foram projetados para um horizonte de 80 anos. A escolha do período de projeção foi devido ao fato de que horizontes mais longos diminuem a possibilidade de subestimação do risco do fundo. Considerando-se que a modelagem foi feita para um grupo fechado de participantes, é esperado que, ao final do horizonte projetado, os indivíduos mais novos ainda vivos apresentem idade próxima aos 100 anos e, dessa forma, com custos atuariais e financeiros pouco significativos no instante inicial.

Foram considerados os seguintes benefícios prometidos em regulamento para a projeção dos fluxos atuariais individuais:

- Complementação de aposentadoria por idade: em valor igual à diferença entre o último salário do participante enquanto ativo (salário-real-de-participação) e o valor do benefício pago pela Previdência Social, inclusive 13º salário.

- Complementação de pensão por morte: pago aos dependentes em valor igual à complementação de aposentadoria do participante, caso estivesse vivo. Considerados como dependentes o cônjuge e os filhos até 24 anos.
- Complementação de aposentadoria por invalidez: em valor igual à diferença entre o salário atual do participante e o valor de aposentadoria por invalidez recebida pela Previdência Social.

Tais benefícios cessam com a morte do participante e seus dependentes. Não foi considerada a possibilidade de retorno ao trabalho após ser declarada a invalidez do participante.

Para financiar os benefícios do plano, foi considerada a seguinte política de contribuição aos participantes e patrocinadores:

- Participantes Ativos – **Alternativa de contribuição 1:** Contribuição equivalente à soma de três parcelas: a) 1% de seu salário; b) 3% de seu salário menos metade do teto de aposentadoria fixado pelo INSS; c) 5% de seu salário menos o teto de aposentadoria fixado pelo INSS. **Alternativa de contribuição 2:** Contribuição equivalente à soma de três parcelas: a) 1% de seu salário; b) 2% de seu salário menos metade do teto de aposentadoria fixado pelo INSS; c) 4% de seu salário menos o teto de aposentadoria fixado pelo INSS

Também foi incluído um percentual de contribuição extra sobre as contribuições ordinárias dos participantes ativos, informadas pelo atuário da entidade, correspondentes às parcelas de jóia e autopatrocínio. Tais parcelas possuem o intuito, respectivamente, de sobretaxar aqueles participantes que aderiram tardiamente aos planos de aposentadoria ou aqueles que perderam remuneração e desejam manter o nível anterior de seu salário-real-de-participação.

- Participantes Assistidos: 5% de sua renda global.

- Patrocinador: Contribuição paritária sobre as contribuições dos participantes ativos e assistidos, exceto jóia e autopatrocínio.

Essas taxas de contribuição são fixadas no início do período de avaliação e não são revistas com o passar do tempo. A alternativa 1 da contribuição dos participantes ativos corresponde à política atual de contribuição da EFPC, a alternativa 2 foi elaborada para ilustrar o efeito de uma diminuição nas arrecadações do fundo. Também foi considerada uma taxa fixa de 10% das contribuições para serem destinadas ao custeio administrativo da entidade.

Os valores das contribuições e benefícios foram estimados para cada período, sem contar o efeito inflação e, portanto, correspondem a valores reais.

As demais premissas atuariais foram:

- Crescimento Real do Salário dos Ativos: 3,5% a.a.
- Teto do INSS: R\$ 3.218,90
- Crescimento do Teto do INSS: 0%
- Composição Familiar³⁵
 - Idade do Participante no casamento: 25
 - Idade do Cônjuge no Casamento: 25
 - Idade do Participante no Primeiro Filho: 27
 - Idade do Participante no Segundo Filho: 29

³⁵ Por simplificação do estudo foi assumida a hipótese de uma família padrão para os participantes. Contudo, a maioria dos estudos atuariais utiliza a composição familiar verdadeira de cada participante ou utilizam a função *Heritor*, $H(x)$, para determinação do grupo familiar. Para maiores detalhes ver Pinheiro (2007).

- Tábua de Mortalidade de Válidos: AT-2000
- Tábua de Entrada em Invalidez: Álvaro Vindas
- Tábua de Mortalidade de Inválidos: Exp. Stea Cap.

Como o trabalho foi baseado em uma amostra da população do fundo, para a definição do valor inicial dos ativos também foram adotadas as seguintes premissas:

- Taxa de Avaliação Atuarial: 6% a.a.
- Valor inicial dos ativos: **Alternativa de ativo inicial 1:** 108,5% da Reserva Matemática calculada sobre política de contribuição atual; **Alternativa de ativo inicial 2:** 80% da Reserva Matemática calculada sobre política de contribuição atual.
- Método de Avaliação da Reserva Matemática: Agregado

O percentual aplicado na alternativa 1 foi obtido pelo percentual médio histórico (de dez/03 a dez/08) do valor dos ativos sobre as reservas matemáticas da EFPC calculada com uma taxa de avaliação atuarial de 6% ao ano (a mesma adotada pela entidade no período). O percentual da alternativa 2 foi elaborado para ilustrar o processo de alocação de ativos sobre um cenário de estresse.

Para o atendimento da Resolução CGPC Nº 26, de 29 de setembro de 2008 (dispõe sobre limites máximos de superávit), foram calculadas as reservas matemáticas projetadas a partir do ano 3, com taxa de avaliação atuarial de 5% a.a. (máximo permitido pela legislação).

Conforme discutido na revisão da literatura, um fluxo de caixa atuarial em um ano de projeção n é calculado pela soma dos fluxos de caixa associados aos múltiplos eventos atuariais possíveis. Para tanto, no ano de projeção n foi considerado se o indivíduo deveria estar ativo ou aposentado, e se o participante no ano de avaliação era inválido ou pensionista. Os cenários possíveis em cada um desses casos foram calculados pelas fórmulas:

- Fluxo de caixa do participante ativo no ano de projeção n , dado pela soma dos seguintes cenários:

a) Participante Vivo e Válido em n :

$${}_n p_x \times (1 - {}_n i_x) \times C_n \times 13 \quad [3.1]$$

b) Participante Vivo e Inválido em n :

$${}_n p_x \times {}_n i_x \times {}_n p_x^i \times (-B_n) \times 13 \quad [3.2]$$

c) Participante morto após invalidez com dependentes aptos:

$${}_n p_x \times {}_n i_x \times (1 - {}_n p_x^i) \times {}_n D \times (-B_n) \times 13 \quad [3.3]$$

d) Participante morto com dependentes aptos:

$$(1 - {}_n p_x) \times {}_n D \times (-B_n) \times 13 \quad [3.4]$$

- Fluxo de caixa do participante aposentado em n , composto pela soma dos seguintes cenários:

a) Participante Vivo e Válido em n :

$${}_n p_x \times (1 - {}_n i_x) \times (-B_n) \times 13 \quad [3.5]$$

b) Participante Vivo e Inválido em n :

$${}_n p_x \times {}_n i_x \times {}_n p_x^i \times (-B_n) \times 13 \quad [3.6]$$

c) Participante morto após invalidez com dependentes aptos:

$${}_n p_x \times {}_n i_x \times (1 - {}_n p_x^i) \times {}_n D \times (-B_n) \times 13 \quad [3.7]$$

d) Participante morto com dependentes aptos:

$$(1 - {}_n p_x) \times {}_n D \times (-B_n) \times 13 \quad [3.8]$$

- Fluxo de caixa do participante já inválido em $t = 0$ no ano de projeção n , dado pela soma dos cenários:

a) Participante Vivo e Inválido em n :

$${}_n p_x^i \times (-B_n) \times 13 \quad [3.9]$$

b) Participante morto após invalidez com dependentes aptos:

$$(1 - {}_n p_x^i) \times {}_n D \times (-B_n) \times 13 \quad [3.10]$$

- Fluxo de caixa do pensionista em $t = 0$ no ano de projeção n , dado por:

a) Dependentes aptos em n :

$${}_n D \times (-B_n) \times 13 \quad [3.11]$$

Sendo:

n = Ano de projeção que varia de $n = 1$ a $n = 80$.

13 = Número de benefícios ou contribuições no ano.

C_n = Contribuição mensal total líquida do ativo no ano n

B_n = Despesa líquida mensal com o assistido no ano n

${}_n p_x$ = Probabilidade de um indivíduo com idade x sobreviver até o ano n

${}_n i_x$ = Probabilidade de um indivíduo com idade x entrar em invalidez até o ano n

${}_n p_x^i$ = Probabilidade de um indivíduo inválido com idade x sobreviver até o ano n

${}_n D$ = Chance conjunta de dependentes aptos até o ano n

Deve-se observar que, para a simplificação dos cálculos, foi considerado para cada computar o fluxo de caixa em cada período, que os eventos de morte e entrada e

invalidez ocorrem no início da avaliação e os pagamentos de benefícios e recebimentos de contribuições são realizados ao final do período n^{36} .

3.3.3. Consolidação em relatório de resposta

Por motivo de sigilo de acesso aos dados individuais dos participantes da EFPC, a consolidação dos fluxos de caixa projetados foi realizada através de rotina de programação, cuja execução foi delegada ao atuário responsável da EFPC. Dessa maneira, o pesquisador teve acesso somente ao relatório de resposta com os fluxos individuais consolidados.

3.3. Modelagem das rentabilidades dos ativos e inflação

A modelagem das rentabilidades futuras para os ativos e da inflação é um passo crítico em qualquer modelo de ALM. Em se tratando de um modelo de ALM para fundos de pensão, o risco do modelo não corresponder à realidade para um horizonte de décadas é quase um fato certo. Contudo, a escolha de um modelo representativo para a evolução dos preços dos ativos deve ser feita, não sendo possível de nenhuma forma ignorá-la.

O modelo escolhido pode ser simples, como um valor conservador mínimo para a evolução dos preços; de complexidade média, como aqueles baseados em dados históricos; até modelos mais requintados que consideram os dados históricos e expectativas econômicas. Apesar de, em algumas situações, alguns modelos serem

³⁶ A simplificação subavalia o número de indivíduos inválidos e sobreavalia o número de pensionistas, mas como os fluxos nominais associados aos dois eventos são iguais, o fluxo atuarial é aproximado daquele gerado por árvores de múltiplos eventos mais ramificadas.

preferíveis aos outros, não há nenhuma garantia de supremacia de um modelo em relação ao outro no que tange seu poder preditivo.

No presente estudo, foram escolhidos modelos baseados em dados históricos de log-retornos com reversão à média para todas as classes de ativos e para a inflação. A distribuição escolhida para modelagem da matriz $\mathbf{r}$ dos log-retornos dos ativos e inflação foi uma normal multivariada, ou seja, $\mathbf{r} \sim N(\mu, \Sigma)$. Desse modo, foi definida a seguinte fórmula para a evolução de cada série de log-retornos do i -ésimo ativo/índice de preços:

$$\begin{aligned} r_{it} &= \mu_i + \sigma_i Z_{it} \\ Z_{it} &\sim N(0,1) \end{aligned} \tag{3.12}$$

O vetor aleatório $\mathbf{Z}_t$ que agrega todas as realizações $\mathbf{Z}_{it}$ é calculado por $\mathbf{Z}_t = \mathbf{u}_t \mathbf{T}$ sendo o vetor $\mathbf{u}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\mathbf{T}$ a matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Cholesky da matriz de correlações $\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{T}'$, e o elemento $\mathbf{R}_{i,j}$ da matriz de correlação dado por $\mathbf{R}_{i,j} = \Sigma_{i,j} / (\sigma_i \sigma_j)$.

Os log-retornos anuais das séries foram obtidos através da seguinte fórmula $r_{it} = 12 * \ln(1 + R_{it})$, onde R_{it} é a variação percentual mensal da cesta que compõe a i -ésima série histórica. Igualmente, o desvio-padrão anual foi obtido multiplicando por $\sqrt{12}$ o desvio-padrão da série de log-retornos mensais.

A justificativa para escolha do modelo foi a sua relativa simplicidade para projeção futura, dado que ele apresenta esperanças e correlações constantes para cada ano de projeção. Não obstante, a metodologia adotada permitiu modelar as relações entre a evolução das variações nos ativos e passivos via correlações entre os retornos de cada

classe de ativos e a inflação, premissa de modelos atuariais bem aceitos, como o de Wilkie (1986).

Os dados foram estimados com dois períodos de séries históricas do ponto de avaliação: **Alternativa de período de estimação 1:** 10 anos do ponto de avaliação (novembro de 1999 a outubro de 2009) e, **Alternativa de período de estimação 2:** séries históricas de 3 anos (novembro de 2006 a outubro de 2009); refletindo as hipóteses subjacentes de dependência histórica dos retornos de longo ou curto prazo, respectivamente.

As classes de ativos estudadas foram ações, renda fixa, imóveis e operações com participantes³⁷, devidamente representadas por um índice. A carteira de ações foi representada pela série mensal do Índice Brasil - IBRX, índice de preços que mede o retorno de uma carteira teórica composta por 100 ações selecionadas entre as mais negociadas na BM&FBOVESPA, em termos de número de negócios e volume financeiros. A carteira de renda fixa foi representada pela taxa mensal de juros referencial do Sistema Especial de Liquidação e Custódia, taxa SELIC over. Devido à indisponibilidade no mercado de um índice de preços representativo de uma carteira de imóveis e de operações com participantes de fundos de pensão, foram adotadas as próprias séries históricas dos retornos mensais do fundo de pensão escolhido como representativas dessas carteiras. Além disso, para representar a inflação foi adotado o Índice Nacional de Preços ao Consumidor- INPC.

As fontes dos dados foram:

- IBRX – Economática®

³⁷ A classe de operações com participantes também é chamada de segmento de empréstimos e financiamentos.

- Taxa SELIC *over*– Banco Central
- INPC – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE
- Carteira de Imóveis e Operações com Participantes – Obtidas diretamente com a EFPC pesquisada.

A justificativa para a escolha dos índices IBRX e INPC como representativos foi devida ao fato da própria EFPC adotá-los como *benchmark* para as carteiras de ações e componente da meta atuarial, respectivamente. A taxa SELIC *over* foi escolhida como representativa da carteira de renda fixa, devido ao fato do *benchmark* atualmente utilizado pela EFPC, uma ponderação dos Índices de Mercado Andima - IMA de títulos de curto prazo (menos de dois anos) e longo prazo (mais de dois anos), não estar disponível para o horizonte de estimação.

3.4. Dinâmica dos ativos e passivos

A dinâmica que descreve o valor dos ativos em qualquer instante do tempo, após o pagamento dos benefícios e recebimento das contribuições do período é dado por:

$$A_t = A_{t-1} \exp(r_{At}) - FC_t \quad [3.13]$$

Dessa forma, os valores dos ativos são determinados em função do valor dos ativos no ano anterior, A_{t-1} , pela rentabilidade da carteira de ativos, r_{At} , e pelos fluxos de caixa atuariais em valores nominais do período, FC_t .

Os fluxos de caixa nominais são calculados aplicando o fator de inflação acumulada para o ano t , $\exp(\sum_{i=1}^t r_{\pi i})$, sobre o fluxo de caixa atuarial real para o período, FC_t^R , pela equação:

$$FC_t = FC_t^R \exp\left(\sum_{i=1}^t r_{\pi}\right) \quad [3.14]$$

A rentabilidade da carteira de ativos é dada em função das rentabilidades das classes de ativos que a compõem no período de t-1 a t, r_{RFt} , r_{RVt} , r_{OPt} e r_{IMt} ; e seus respectivos percentuais alocados no período, x_{RFt} , x_{RVt} , x_{OPt} e x_{IMt} , calculado pela equação³⁸:

$$r_{At} = x_{RFt} r_{RFt} + x_{RVt} r_{RVt} + x_{OPt} r_{OPt} + x_{IMt} r_{IMt} \quad [3.15]$$

Os pesos dos ativos constituem as variáveis de decisão do problema de pesquisa operacional. Para efeito de estudo, foram consideradas duas alternativas para alocação das proporções dos ativos na carteira: **Alternativa de alocação 1**: As proporções são decididas no instante inicial e não sofrem revisões no horizonte de previsão (alocação estática); e **Alternativa de alocação 2**: As proporções dos pesos são decididas para o primeiro ano e são revistas de vinte em vinte anos, isto é, revistas no início dos anos $t = \{1, 21, 41, 61\}$ (alocação dinâmica).

Como o percentual alocado em operações com participantes depende da demanda dos participantes por crédito, o percentual dessa carteira foi fixado em 4,5%, a média histórica (dezembro de 2003 a setembro de 2009) da alocação da EFPC no segmento. Também, como existe a restrição orçamentária da soma das proporções de todos ativos ser igual a 100%, as variáveis de decisão foram restritas as escolhas dos pesos x_{RVt} e x_{IMt} . O peso de x_{RFt} na carteira é calculado tomando-se a diferença:

³⁸ Além das classes de ativos apresentadas para a classificação dos investimentos dos recursos dos planos administrados pela EFPC, recentemente, a Resolução CMN Nº 3.792, de 24 de setembro de 2009, aumentou as classes vigentes na Resolução CMN Nº 3.456, de 1º de junho de 2007 em mais dois segmentos: investimentos estruturados e investimentos no exterior. Para efeito deste estudo, contudo, a reclassificação não foi efetuada.

$$x_{RFt} = 1 - x_{RVt} - x_{IMt} - 0,045 \quad [3.16]$$

Outras restrições que existem nas variáveis de decisão são devidas às exigências regulatórias dos limites das alocações por segmento no conjunto de investimentos. Para obediência à Resolução CMN Nº 3.792, de 24 de setembro de 2009, foram fixados o limite máximo de investimento em renda variável em 50% da carteira e em imóveis o limite foi de 8%.

Vale acrescentar que a revisão da taxa de contribuição no início do ano não foi escolhida como variável de decisão, por não ser uma prática adotada pela EFPC. A única exceção nesse sentido foi a adoção de limites para os superávits, com o intuito de evitar o crescimento exponencial dos ativos e o atendimento da Resolução CGPC Nº 26, de 29 de setembro de 2008.

A restrição adotada foi: após três anos consecutivos em que a instituição apresente superávit superior a 25% ao valor das provisões matemáticas, o excedente dos ativos é devolvido, de alguma maneira, aos participantes e patrocinadores. A equação que ajusta o novo valor dos ativos para o ano t é a seguinte:

$$\text{Se } t \geq 3 \text{ e } (A_t - RM_t) / RM_t \geq 0.25 \text{ e } (A_{t-1} - RM_{t-1}) / RM_{t-1} \geq 0.25 \text{ e } (A_{t-2} - RM_{t-2}) / RM_{t-2} \geq 0.25, \\ \text{então } A'_t = 1,25RM_t \quad [3.17]$$

Onde, A_t é o valor dos ativos calculados sem a adoção da restrição, RM_t é a reserva matemática calculada pelo valor presente dos fluxos de caixa atuariais à taxa de avaliação atuarial de 5% a.a., e A'_t é o novo valor dos ativos no ano t após a distribuição do excedente aos participantes e patrocinador.

É interessante notar que a inclusão da última restrição provavelmente inviabilizaria a solução do problema de Pesquisa Operacional por métodos não heurísticos, devido ao aumento da complexidade na sua forma funcional e decomponibilidade.

3.5. A função objetivo para o modelo de ALM de um fundo de pensão

O objetivo escolhido para o fundo de pensão foi a minimização da probabilidade de ocorrência de inadimplência em qualquer um dos 80 anos da projeção dos fluxos de caixa atuariais.

A motivação para a adoção dessa função objetivo é sua coerência com a atividade sem finalidade lucrativa das EFPC e com seu principal objetivo, qual seja: honrar os compromissos assumidos em seu plano de benefícios. Além disso, alterações nas contribuições de participantes e patrocinador não constituem uma prática de gestão da entidade, não justificando o uso de funções objetivo que utilizam tal variável, como a minimização do valor presente das contribuições.

O fundo foi considerado em desequilíbrio financeiro quando o valor dos ativos foi inferior ao valor dos passivos em qualquer instante do tempo. Dessa forma, sendo A_t o valor dos ativos já líquido do pagamento dos passivos no instante t , foi construído o indicador de inadimplência $Inad$, definido por:

$$Inad \begin{cases} 1, & \text{se } A_t < 0 \text{ (para algum } t/t = 1, 2, \dots, 80) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad [3.18]$$

Por ser desconhecida a função de densidade acumulada do indicador $Inad$ em função das variáveis x_{RVt} e x_{IMt} , não foi possível expressar a função objetivo diretamente por:

$$\underset{x_{RV}, x_{IM}}{\text{Minimizar}} P(Inad = 1) \quad [3.19]$$

Dessa maneira, para a função objetivo, foi adotada a seguinte fórmula de aproximação da função mencionada:

$$\underset{x_{RV}, x_{IM}}{\text{Minimizar}} \frac{\sum_{i=1}^{\omega} Inad_i}{\omega} \quad [3.20]$$

A aproximação adotada converge para a verdadeira probabilidade de ocorrência de $Inad$, quando o número de cenários ω tende para o infinito. Apesar de não haver um número certo, Poojari e Varghese (2003) sugeriram um número entre 1.000 e 2.000 simulações para aproximação. Para efeitos da dissertação, foi adotado um valor de $\omega = 10.000$.

Para computar a função objetivo, foi construída uma função denominada $ALM(x)$, escrita em arquivo próprio do MATLAB® (M-file), que consistiu das seguintes partes: (1) Parâmetros; (2) Simulação de rentabilidades e inflação; (3) Dinâmica entre ativos e passivos; e (4) Valor de resposta para a função objetivo (vide APÊNDICE).

Novamente, a minimização da função objetivo escolhida é bastante difícil por métodos não heurísticos de otimização, por envolver uma distribuição de probabilidade conjunta.

3.6. Metodologias de Pesquisa Operacional para solução do modelo

3.6.1. Algoritmos Genéticos

A execução dos Algoritmos Genéticos foi feita com o auxílio do pacote *Genetic Algorithm And Direct Search Toolbox®* do software MATLAB®. A configuração utilizada para o algoritmo foi:

- Função Objetivo: $ALM(\mathbf{x})$
- Variáveis de Decisão (Cromossomos):
 Alternativa de alocação 1: $\mathbf{x} = [x_{RV1} \ x_{IM1}]$
 Alternativa de alocação 2: $\mathbf{x} = [x_{RV1} \ x_{RV21} \ x_{RV41} \ x_{RV61} \ x_{IM1} \ x_{IM21} \ x_{IM41} \ x_{IM61}]$
- Limites no espaço de decisão:
 Alternativa de alocação 1: $LI = [0 \ 0], LS = [0,5 \ 0,08]$
 Alternativa de alocação 2: $LI = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], LS = [0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,08 \ 0,08 \ 0,08 \ 0,08]$
- Representação da população: Real
- Número de indivíduos da população: 30
- Função de criação para a população inicial: Geração por distribuição uniforme no espaço de decisão.
- Função de aptidão: Ordenamento
- Método de seleção: Roleta
- Número de cromossomos com elitismo: 2
- Número de *crossovers*: 20
- Número de mutações: 8
- Função para o *crossover*: Crossover BLX- α ($\alpha = 0$)
- Função para mutação: Adaptativa Viável
- Número máximo de gerações: 50
- Valor da função objetivo para parada: 0% de inadimplência
- Número máximo de gerações sem melhoria: 15

Para as análises dos resultados, foram computados o tempo de processamento, motivo de término do algoritmo e o valor da função objetivo associada a cada indivíduo das gerações.

3.6.2. Abordagem Assets Only

Como contraponto aos Algoritmos Genéticos, foi computado, para os casos em que não há rebalanceamentos nos pesos dos ativos, o valor da função objetivo $ALM(\mathbf{x})$ com a solução $\mathbf{x}_{MKW}$ sugerida pelo modelo de programação não linear de Markowitz para a seleção de carteiras.

Como o modelo de Markowitz não sugere qual ponto da fronteira é o melhor para o problema desenvolvido no estudo, foi escolhido o portfólio de risco mínimo (no contexto de Markowitz) necessário ao pagamento dos passivos. A regra adotada para escolha do portfólio da fronteira foi a seguinte:

- Portfólio de Variância Mínima, nos casos em que o retorno associado ao portfólio de variância mínima é superior à taxa interna de retorno dos fluxos de caixa atuariais (em $t=1$ a $t = 80$) e o valor do ativo inicial (em $t=0$), ou
- Portfólio com taxa esperada de rentabilidade igual à taxa interna de retorno dos fluxos de caixa atuariais (em $t=1$ a $t = 80$) e o valor do ativo inicial (em $t=0$).

No sentido similar ao *unbiased match* de Wise (1984b), foi proposto o uso da taxa interna de retorno - TIR para que o superávit esperado do plano seja igual à zero, já que a TIR é a taxa que iguala o valor presente dos fluxos de caixa atuariais nominais esperados (projetados com taxa de inflação esperada) ao valor do ativo inicial. A TIR é calculada como a raiz do polinômio $P(TIR)$:

$$P(TIR) = A_0 - \sum_{t=1}^{80} \frac{1}{(1 + TIR)^t} FC_t \quad [3.21]$$

Como os fluxos atuariais são todos negativos e o ativo é positivo, o polinômio terá apenas uma raiz positiva real. Apesar de não existir uma fórmula fechada para

encontrar a raiz do polinômio, o valor da TIR pode ser computado por convergência, utilizando o algoritmo de Newton-Raphson, a partir de uma tentativa inicial TIR_0 :

$$TIR_{n+1} = TIR_n - \frac{P(TIR_n)}{P'(TIR_n)} \quad [3.22]$$

Finalmente, para igualar as bases dos parâmetros utilizados no modelo foi calculada a TIR em base contínua fazendo $TIR_{cont} = \ln(1 + TIR_{discr})$.

3.7. Sumário dos testes executados

Os algoritmos apresentados foram executados com base em um conjunto de 16 cenários elaborados a partir das diferentes alternativas assumidas para os parâmetros do modelo. A organização dos cenários pode ser visualizada no quadro a seguir:

CENÁRIO	PERÍODO DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS	BALANCEAMENTOS	POLÍTICA DE CONTRIBUIÇÃO	ATIVO INICIAL
CENÁRIO 1	10 ANOS	1 X	FC_135/RM_135 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 2	10 ANOS	1 X	FC_135/RM_135 _{5%}	80% da RM _{6%}
CENÁRIO 3	10 ANOS	1 X	FC_124/RM_124 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 4	10 ANOS	1 X	FC_124/RM_124 _{5%}	80% da RM _{6%}
CENÁRIO 5	10 ANOS	4 X	FC_135/RM_135 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 6	10 ANOS	4 X	FC_135/RM_135 _{5%}	80% da RM _{6%}
CENÁRIO 7	10 ANOS	4 X	FC_124/RM_124 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 8	10 ANOS	4 X	FC_124/RM_124 _{5%}	80% da RM _{6%}
CENÁRIO 9	3 ANOS	1 X	FC_135/RM_135 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 10	3 ANOS	1 X	FC_135/RM_135 _{5%}	80% da RM _{6%}

Continua
→

Continuação

CENÁRIO 11	3 ANOS	1 X	FC_124/RM_124 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 12	3 ANOS	1 X	FC_124/RM_124 _{5%}	80% da RM _{6%}
CENÁRIO 13	3 ANOS	4 X	FC_135/RM_135 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 14	3 ANOS	4 X	FC_135/RM_135 _{5%}	80% da RM _{6%}
CENÁRIO 15	3 ANOS	4 X	FC_124/RM_124 _{5%}	108,5% da RM _{6%}
CENÁRIO 16	3 ANOS	4 X	FC_124/RM_124 _{5%}	80% da RM _{6%}

Legenda:

10 anos = Período de (novembro de 1999 a outubro de 2009) utilizado para estimação dos log-retornos médios, desvio-padrão e correlação das classes de ativos e inflação.

3 anos = Período de (novembro de 2006 a outubro de 2009) utilizado para estimação dos log-retornos médios, desvio-padrão e correlação das classes de ativos e inflação.

1x = Balanceamento do portfólio feito no início do ano $t = 1$.

4x = Balanceamento de portfólio realizado no início dos anos $t = 1, t = 21, t = 41, t = 61$

FC_135 = Fluxo de caixa projetado com contribuição dos participantes ativos dada pela soma das parcelas: a) 1% de seu salário; b) 3% de seu salário menos metade do teto de aposentadoria fixado pelo INSS; c) 5% de seu salário menos o teto de aposentadoria fixado pelo INSS.

FC_124 = Fluxo de caixa projetado com contribuição dos participantes ativos dada pela soma das parcelas: a) 1% de seu salário; b) 2% de seu salário menos metade do teto de aposentadoria fixado pelo INSS; c) 4% de seu salário menos o teto de aposentadoria fixado pelo INSS

RM_135_{5%} = Reserva Matemática projetada para o período $t = 0$ a $t=80$ utilizando o fluxo de caixa FC_135 e taxa de avaliação de 5% a.a.

RM_124_{5%} = Reserva Matemática projetada para o período $t = 0$ a $t=80$ utilizando o fluxo de caixa FC_124 e taxa de avaliação de 5% a.a.

RM_{6%} = Reserva Matemática calculado para o período $t = 0$ a $t=80$ utilizando o fluxo de caixa FC_135 e taxa de avaliação de 6% a.a.

Quadro 4- Quadro resumo dos cenários utilizados para execução dos algoritmos de otimização

Para alcance dos objetivos propostos no estudo, foram realizadas diversas análises sobre o processo de modelagem e o desempenho dos algoritmos nos cenários propostos. Com o intuito de facilitar a apresentação dos resultados, as análises foram divididas por assuntos e dispostas na seguinte forma:

Análise 1: Projeções dos fluxos de caixa atuariais e das Reservas Matemáticas

Análise 2: Resultados da modelagem dos ativos e inflação.

Análise 3: Estabilidade da função objetivo

Análise 4: Desempenho geral dos Algoritmos Genéticos nos 16 cenários de otimização

Análise 5: Processo de Convergência dos Algoritmos Genéticos

Análise 6: Estabilidade da solução dos Algoritmos Genéticos

Análise 7: Efeito da eliminação do teto máximo para o valor dos ativos

Análise 8: Efeito do rebalancamento do portfólio

Análise 9: Efeito da mudança no valor dos ativos iniciais

Análise 10: Efeito da mudança no período utilizado para estimação dos retornos dos ativos e inflação

Análise 11: Efeito da mudança na política de contribuição da EFPC

Análise 12: Comparação do desempenho das soluções propostas pelo Algoritmo Genético com as soluções propostas pelo modelo de seleção de carteiras de Markowitz.

4. RESULTADOS

Análise 1: Projeções dos fluxos de caixa atuariais e das Reservas Matemáticas

Seguindo a metodologia proposta, foram estimados os fluxos de caixa reais (sem considerar inflação) das políticas de contribuição mencionadas (para o FC_135 e FC_124) para o horizonte de 80 anos. O resultado pode ser observado no seguinte gráfico:

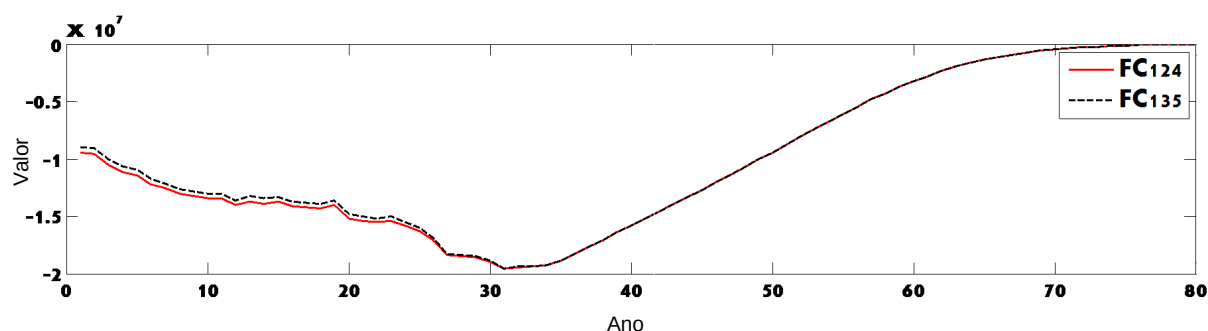


Gráfico 2- Fluxos de caixas atuariais reais previstos para o horizonte de estimação

No primeiro ano da projeção, o fluxo de caixa da política de maior taxa de contribuição (FC_135) foi negativo em R\$ 8.924.585,79, enquanto que o de menor contribuição (FC_124) foi negativo em R\$ 9.442.012,14. Nos anos seguintes, os desembolsos monetários seguiram tendência de crescimento, até que, no princípio do 30º ano, a tendência se reverteu com a queda contínua no pagamento derivada do aumento do número de mortes na população.

Como a projeção foi feita para um "fundo fechado", ou seja, sem entrada de novos participantes, no último período de projeção (ano 80) era esperado que os fluxos tendessem a zero e o plano à extinção, uma vez que os participantes mais novos já teriam idades próximas aos cem anos. De fato, o desembolso para o último período foi de apenas R\$ 12.061,32 em ambas as políticas de contribuição.

Para atendimento da Resolução CGPC Nº 26, de 29 de setembro de 2008 foram calculadas, considerando uma taxa de avaliação atuarial de 5% a.a., as reservas matemáticas reais associadas aos fluxos de caixa (RM_124_{5%} e RM_135_{5%}) para cada período do horizonte de estimação. As projeções das reservas matemáticas são visualizadas a seguir:

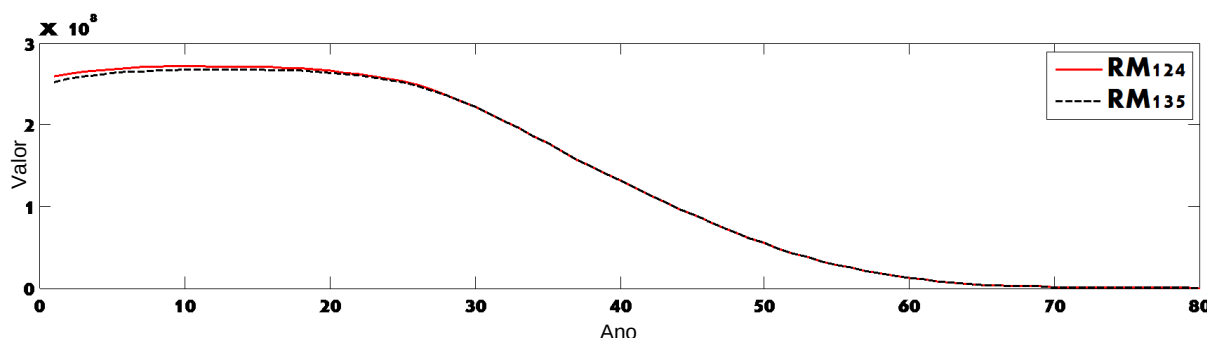


Gráfico 3- Reservas Matemáticas projetadas para o horizonte de estimação

Os valores no primeiro ano das reservas foram de R\$ 252.240.051,00 e 258.522.830,72 para os fluxos FC_135 e FC_124, respectivamente. Os valores das reservas, após um leve crescimento nos anos iniciais iniciou trajetória rumo à nulidade no último período.

Também, para o cálculo do valor inicial dos ativos foi estimada a reserva matemática no ano zero com taxa de desconto de 6% a.a. O valor encontrado foi de R\$ 197.835.293,87 o que resultou nos dois valores sugeridos para o valor dos ativos: R\$ 214.651.293,85 (108,5% da RM_{6%}) e R\$ 158.268.235,10 (80% da RM_{6%}).

Análise 2: Resultados da modelagem dos ativos e inflação.

As séries históricas dos log-retornos mensais, utilizadas para estimação dos log-retornos, desvio-padrão e correlações esperadas das classes de ativos e inflação, estão ilustradas no seguinte gráfico, elaborado a partir de dados do BACEN, IBGE, Economática® e da EFPC:

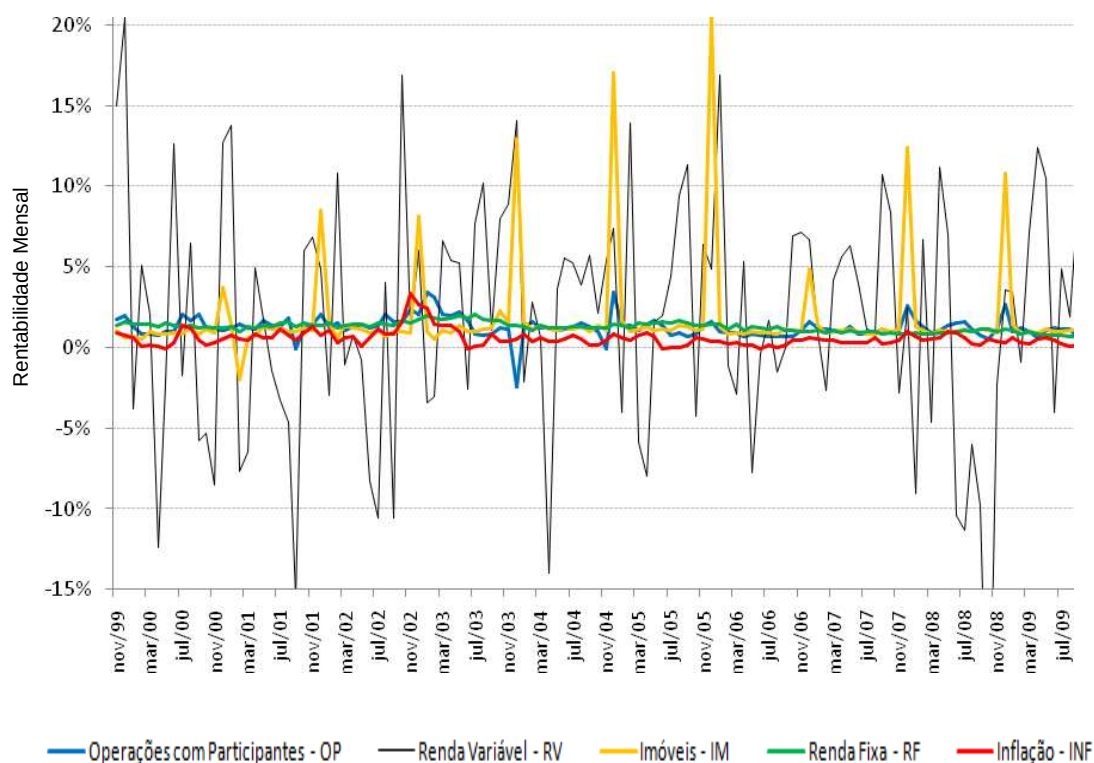


Gráfico 4- Histórico dos log-retornos mensais das classes de ativos e inflação

Durante o período selecionado, as séries mais rentáveis e voláteis foram as de Renda Variável (pelo índice IBRX) e Imóveis (série histórica da EFPC). A volatilidade da carteira de imóveis surge, principalmente, devido aos resultados das reavaliações desses ativos (provocando os picos em amarelo no gráfico).

Os resultados completos das estimações para o período de 10 anos (novembro de 1999 a outubro de 2009) e três anos (novembro de 2006 a outubro de 2009) foram dispostos nas tabelas a seguir:

Tabela 4- Log-retornos e desvio-padrão anuais projetados para as classes de ativos e inflação utilizando um período de 10 anos.

	<i>OP</i>	<i>RV</i>	<i>IM</i>	<i>RF</i>	<i>INF</i>
r_i	14,92938%	21,56570%	21,30141%	15,11296%	6,78429%
σ_i	2,25888%	26,34029%	10,38035%	1,01843%	1,75159%

OP – Operações com Participantes, RV – Renda Variável, IM – Imóveis, RF – Renda Fixa, INF - Inflação

Tabela 5- Matriz de correlações para as classes de ativos e inflação utilizando um período de 10 anos.

	<i>OP</i>	<i>RV</i>	<i>IM</i>	<i>RF</i>	<i>INF</i>
OP	1,00000	-0,01986	0,15827	0,28090	0,52119
RV	-0,01986	1,00000	0,16902	0,05762	0,02073
IM	0,15827	0,16902	1,00000	0,06511	0,10676
RF	0,28090	0,05762	0,06511	1,00000	0,34782
INF	0,52119	0,02073	0,10676	0,34782	1,00000

OP – Operações com Participantes, RV – Renda Variável, IM – Imóveis, RF – Renda Fixa, INF - Inflação

Tabela 6- Log-retornos e desvio-padrão anuais projetados para as classes de ativos e inflação utilizando um horizonte de 3 anos

	<i>OP</i>	<i>RV</i>	<i>IM</i>	<i>RF</i>	<i>INF</i>
r_i	13,86906%	14,56712%	20,77513%	11,02223%	5,25562%
σ_i	1,51255%	28,04089%	8,61633%	0,42766%	0,75377%

OP – Operações com Participantes, RV – Renda Variável, IM – Imóveis, RF – Renda Fixa, INF - Inflação

Tabela 7- Matriz de correlações para as classes de ativos e inflação utilizando um período de 3 anos

	<i>OP</i>	<i>RV</i>	<i>IM</i>	<i>RF</i>	<i>INF</i>
OP	1,000000	0,016717	0,826564	0,133529	0,393963
RV	0,016717	1,000000	0,076474	-0,414243	-0,099853
IM	0,826564	0,076474	1,000000	0,128273	0,272770
RF	0,133529	-0,414243	0,128273	1,000000	0,102402
INF	0,393963	-0,099853	0,272770	0,102402	1,000000

OP – Operações com Participantes, RV – Renda Variável, IM – Imóveis, RF – Renda Fixa, INF - Inflação

Comparando-se os dados de 10 anos com os de 3 anos nota-se, de maneira geral, uma queda das rentabilidades das classes de ativos. No cenário obtido com os dados de 3 anos, a diferença entre as rentabilidades de renda fixa para a inflação (taxa efetiva de 5,94%) é bem próxima da taxa livre de risco de 6%, normalmente utilizada nas avaliações atuariais dos fundos de pensão.

As volatilidades também caíram nos últimos 3 anos da série, com exceção da carteira de renda variável que registrou aumento. O principal motivo para o aumento da volatilidade da carteira de renda variável foi a crise imobiliária norte-americana, no segundo semestre de 2008, que gerou instabilidade em todos os mercados mundiais.

Considerando-se que correlações positivas dos ativos com a inflação possuem um efeito de mitigar o risco de inadimplência do fundo (conforme discutido nos modelos de Wise-Wilkie-Sheris), observou-se que as carteiras de ativos mais correlacionados na estimação foram as de Operações com Participantes e de Renda Fixa, utilizando o período de 10 anos, e Operações com Participantes e Imóveis, utilizando o período de 3 anos.

Além disso, com exceção da carteira de imóveis, constatou-se uma queda no valor das correlações de ativos com a inflação com a diminuição do período de estimação, o que torna o período de 3 anos ainda mais desfavorável ao fundo de pensão do que o período de 10 anos.

Análise 3: Estabilidade da função objetivo

Cenários Utilizados: 11 e 12

Como a função objetivo utilizada produz resultados diferentes a cada vez que é executada, sua estabilidade foi testada calculando 300 vezes seu valor resultante para um dado vetor de solução. Dessa forma, tendo-se que a função objetivo é calculada

sobre 10.000 simulações, foi realizado um total de 3.000.000 (300×10.000) dos caminhos dos log-retornos dos ativos e inflação.

O teste foi aplicado aos vetores de solução, sugeridos pelo Algoritmo Genético para os cenários 11 e 12 (vide Tab. 8). Considerando-se o valor retornado da função objetivo $ALM(x)$ calculada sobre as 10.000 simulações como uma variável aleatória, pelo Teorema do Limite Central, a função possui distribuição normal e média convergente para o verdadeiro valor esperado da função objetivo com o uso de grandes amostras. No caso em estudo, a média das 300 simulações da função objetivo calculada sobre 10 mil simulações é equivalente ao cálculo direto da função objetivo calculada sobre 3 milhões de simulações, ou seja, uma estimativa muito mais precisa do percentual de ocorrência de inadimplências para uma dada carteira de ativos.

No cenário 12, a média encontrada da função objetivo foi de 0,6123 (61,23%) com erro padrão de 0,0051 (0,51%). O baixo desvio padrão confirma que o número de simulações escolhidas (10.000) é adequado para produzir valores consistentes para a função objetivo.

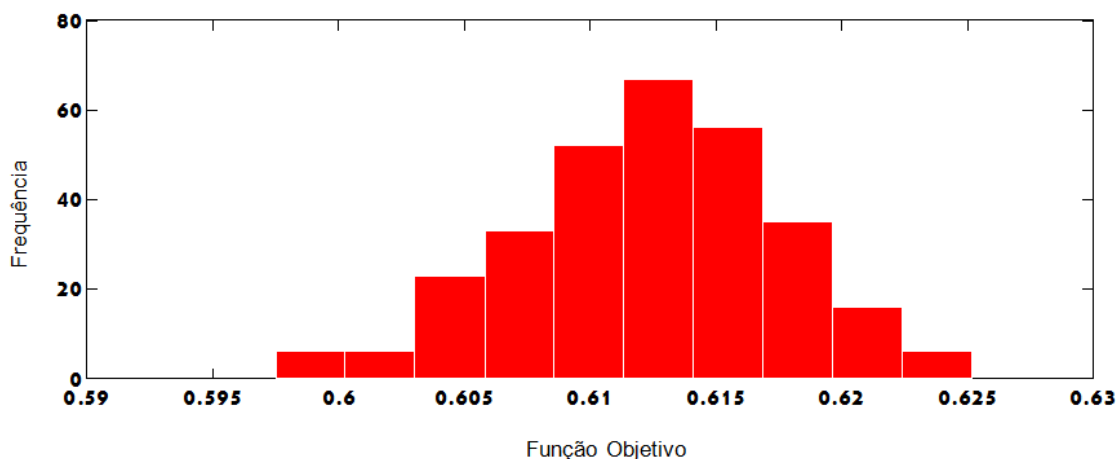


Gráfico 5- Histograma de 300 simulações da função objetivo com solução ótima do cenário 12

Realizando o mesmo procedimento para o cenário 11, a média da função objetivo foi de 0,0058 (0,58%) e o desvio padrão de apenas 0,0008105 (0,08105%). A queda

significativa do desvio padrão para o cenário 11 em relação ao do cenário 12 indicou que a função objetivo fornece estimativas relativamente precisas para ambientes de pouco risco. A razão para a melhoria de precisão é oriunda da baixa volatilidade dos ativos subjacentes no portfólio escolhido nessas situações.

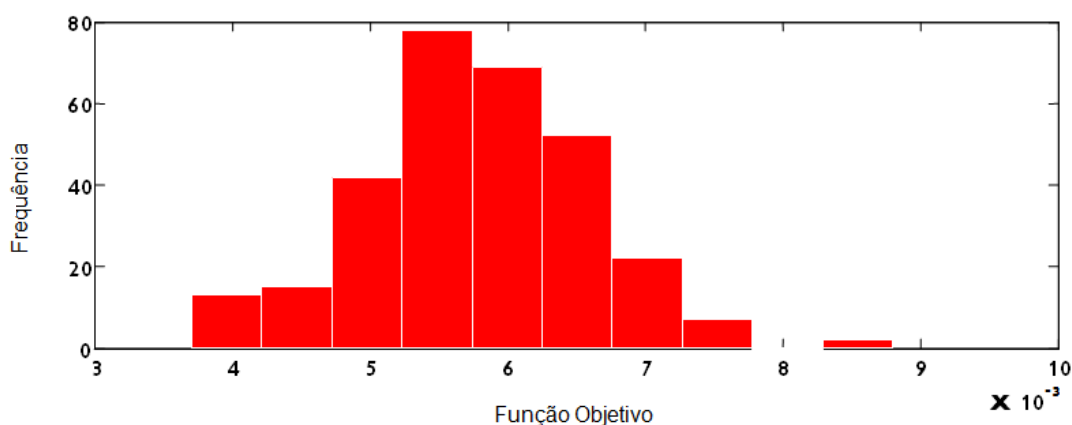


Gráfico 6- Histograma de 300 simulações da função objetivo com solução ótima do cenário 11

Os valores reportados no Algoritmo Genético (vide Tab. 8) para o cenário 11 (0,0048) e 12 (0,6062) são ligeiramente inferiores às médias dos cenários 11 (0,0058) e 12 (0,6123), calculadas sobre as 300 simulações para o vetor de solução. A explicação para essa constatação é que, devido à convergência dos indivíduos nas últimas populações, o algoritmo tende a reportar a menor realização da função objetivo, provocando o viés para baixo observado.

Entretanto, deve ser salientado que, nas populações intermediárias, o indivíduo erroneamente bem avaliado em uma geração é reavaliado nas seguintes e tende a ser descartado pelo princípio da seleção.

O tempo médio de processamento da função objetivo foi de aproximadamente 4,6 segundos. À primeira vista pode o tempo parecer pouco, mas tendo que avaliá-la 1530 vezes (como foi o caso dos cenários 11 e 12) são necessárias aproximadamente 2

horas de processamento. Tal fato torna bastante dispendioso qualquer aumento do número de simulações para ganho de precisão.

Análise 4: Desempenho geral dos Algoritmos Genéticos nos 16 cenários de otimização

Cenários utilizados: Todos

Neste trabalho desenvolveu-se, principalmente, uma metodologia de solução para o problema de minimização da probabilidade de inadimplência de um fundo fechado de previdência complementar com benefício definido. Na Tab. 8, apresenta-se o resultado por cenário com as soluções propostas pelos Algoritmos Genéticos e o respectivo valor da função objetivo.

Tabela 8- Soluções propostas pelos Algoritmos Genéticos e respectiva função objetivo por cenário de teste

CENÁRIO	RENDA VARIÁVEL				IMÓVEIS				FUNÇÃO OBJETIVO
	ANO 1	ANO 21	ANO 41	ANO 61	ANO 1	ANO 21	ANO 41	ANO 61	
1	0,0000				0,0800				0,0000
2	0,0371				0,0787				0,0000
3	0,1555				0,0800				0,0000
4	0,0482				0,0676				0,0021
5	0,0584	0,1389	0,0147	0,0451	0,0417	0,0596	0,0224	0,0701	0,0000
6	0,0325	0,1243	0,2297	0,1907	0,0526	0,0525	0,0315	0,0445	0,0000
7	0,0316	0,1639	0,0623	0,0803	0,0681	0,0766	0,0088	0,0502	0,0000
8	0,0566	0,1218	0,1171	0,2030	0,0746	0,0406	0,0476	0,0420	0,0023
9	0,0012				0,0644				0,0000
10	0,2729				0,0772				0,5478
11	0,0399				0,0472				0,0048
12	0,2783				0,0744				0,6062
13	0,0103	0,0338	0,1276	0,1540	0,0558	0,0481	0,0426	0,0501	0,0000
14	0,3772	0,0986	0,2420	0,1974	0,0729	0,0543	0,0554	0,0399	0,4966
15	0,0033	0,0358	0,1125	0,0809	0,0698	0,0303	0,0518	0,0238	0,0000
16	0,4088	0,2211	0,2114	0,1218	0,0688	0,0669	0,0492	0,0195	0,5163

As soluções encontradas pelos Algoritmos Genéticos foram bastante satisfatórias para os cenários 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13 e 15; tornando a probabilidade de inadimplência praticamente nula. Por exemplo, a carteira sugerida pelo cenário 4 (alocação de 4,82% renda variável, 6,76% em imóveis, 4,5% em operações com participantes e 83,92% em ações em todo horizonte) fez com que apenas em 21 casos, das 10.000 simulações testadas, o fundo se encontrasse inadimplente com seus participantes.

Nos cenários 10, 12, 14 e 16, o algoritmo apresentou valores altos para a função objetivo, porém as análises efetuadas (vide Análise 5) sugerem que, no contexto desses cenários, as soluções apresentadas convergem ao ponto de mínimo global da função.

Na tabela a seguir, é apresentada a evolução do algoritmo em relação às soluções finais no número de funções avaliadas, o número de gerações até a parada, o máximo de gerações sem melhoria, o motivo de parada e o tempo total de execução do algoritmo.

Tabela 9- Características da evolução do Algoritmo Genético até sua parada

CENÁRIO	FUNÇÕES		MÁXIMO DE		TEMPO DE
	AVALIADAS	GERAÇÕES	GERAÇÕES SEM	MOTIVO PARADA	
			MELHORIA		EXECUÇÃO (MINUTOS)
1	60	1	0	Avaliação zero	6,8426
2	120	3	1	Avaliação zero	13,9534
3	60	1	0	Avaliação zero	6,8549
4	1530	50	2	Máximo de gerações	192,0012
5	60	1	0	Avaliação zero	7,4914
6	1230	40	3	Avaliação zero	154,1913
7	60	1	0	Avaliação zero	7,4908
8	1530	50	3	Máximo de gerações	191,5405
9	60	1	0	Avaliação zero	6,8059
10	1530	50	3	Máximo de gerações	217,0467

Continua
→

Continuação

CENÁRIO	FUNÇÕES	GERAÇÕES	MÁXIMO DE		TEMPO DE EXECUÇÃO (MINUTOS)
	AVALIADAS		GERAÇÕES SEM MELHORIA	MOTIVO PARADA	
11	1530	50	3	Máximo de gerações	201,4818
12	1530	50	3	Máximo de gerações	176,2699
13	960	31	2	Avaliação zero	115,9225
14	1530	50	3	Máximo de gerações	185,6094
15	1080	35	4	Avaliação zero	159,0010
16	1530	50	3	Máximo de gerações	182,0819

Nos cenários 1, 2, 3, 5, 7 e 9, o algoritmo não teve dificuldade para encontrar uma carteira que satisfizesse o critério de parada de nenhuma ocorrência de inadimplência nas 10.000 simulações. Pelo contrário, na maioria desses cenários, na população final do algoritmo foram apresentadas mais de uma ocorrência de carteiras que atendessem a esse critério de parada (cenário 1 – 22 soluções, cenário 3 – 12 soluções, cenário 5 – 3 soluções e cenário 7 – 2 soluções). Tal fato sugere que, no contexto desses cenários, existe um grande número de soluções possíveis.

O critério de 15 avaliações sucessivas sem melhoria não foi utilizado em nenhum dos cenários. Essa constatação é um bom indicativo do processo de melhoria contínua conquistado pelos Algoritmos Genéticos.

Análise 5: Processo de Convergência dos Algoritmos Genéticos

Cenários utilizados: 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16

O sucesso dos Algoritmos Genéticos depende da qualidade do processo de convergência para a solução ótima. No gráfico a seguir expõe-se a convergência para a solução apresentada nos cenários 10, 12, 14 e 16. Pode-se observar que as melhores soluções de cada geração (denotadas pelas linhas pontilhadas) estão em padrão de declínio.

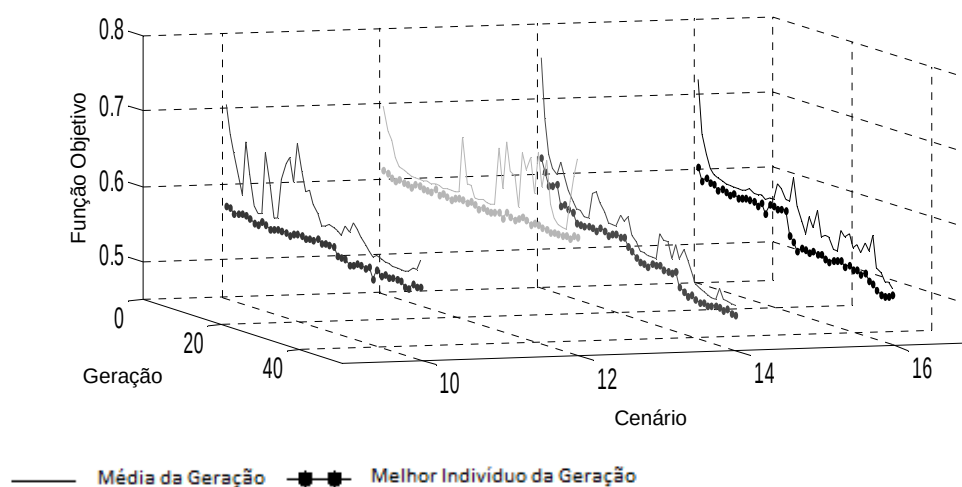


Gráfico 7- Função objetivo do melhor indivíduo e valor médio da população por geração nos cenários 10, 12, 14 e 16

Nas linhas sólidas do gráfico anterior, apresentam-se os valores médios dos indivíduos em cada geração. Seu padrão irregular, mesmo nas últimas gerações, sugere que o algoritmo não apresentou os problemas de perda de diversidade da população e que o algoritmo manteve seu padrão exploratório no espaço de decisão.

O padrão de declive nos cenários 10 e 12 é menos acentuado, pois logo nas primeiras gerações o algoritmo encontrou soluções próximas da ótima. A evidência da convergência pode ser observada pela área de grande concentração de pontos nos gráficos de evolução da população expostos a seguir. É interessante notar que os pontos marcados no gráfico sugerem o formato de uma “tigela cortada pela metade” para a função objetivo nesses cenários.

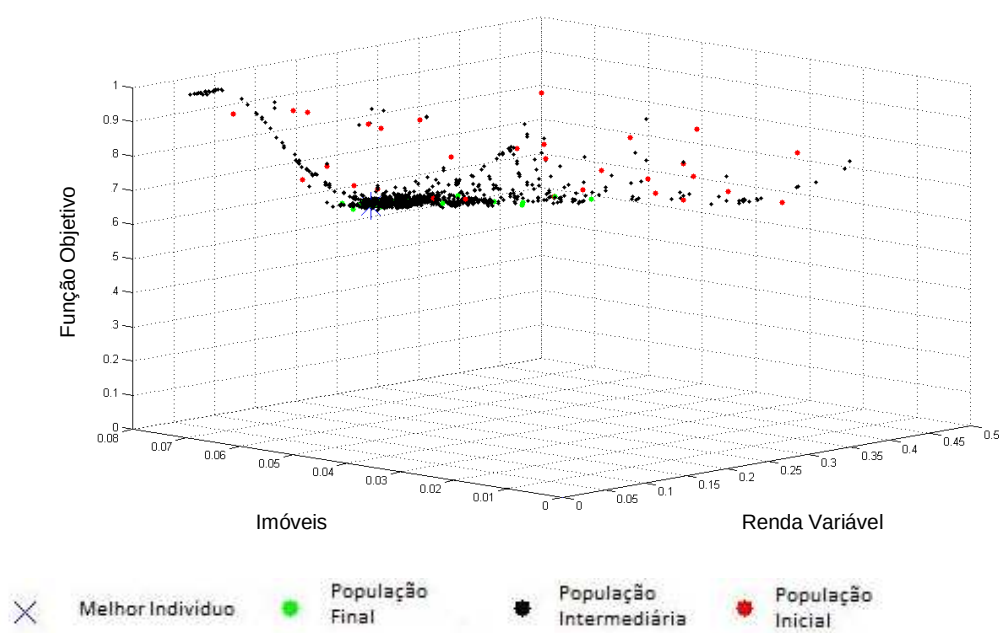


Gráfico 8- Evolução da população inicial para a população final no cenário 10 – Perfil 1

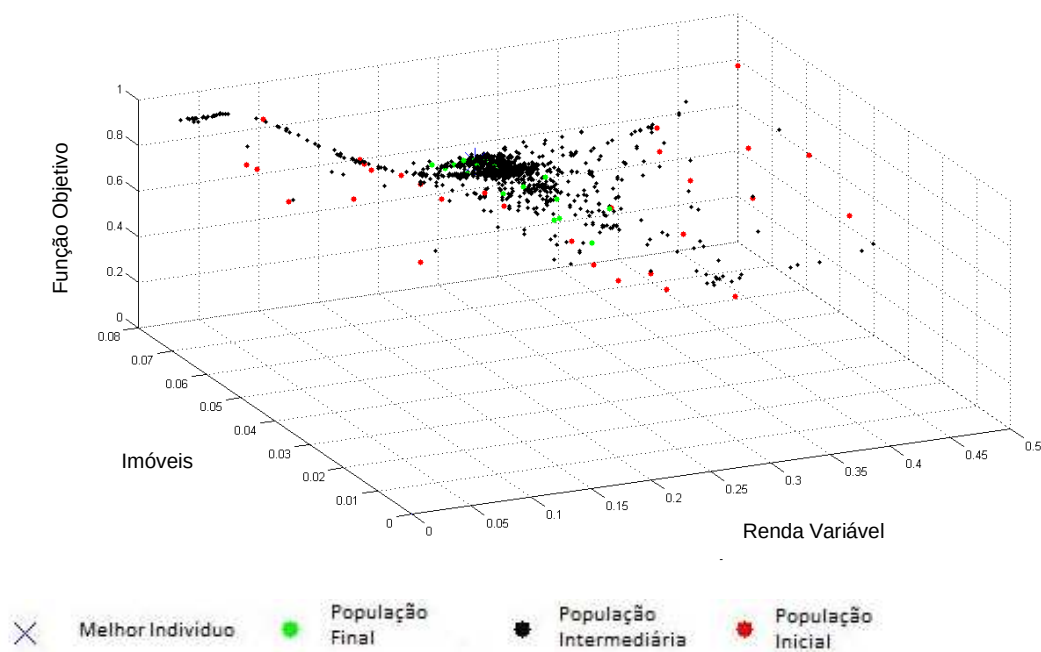


Gráfico 9- Evolução da população inicial para a população final no cenário 10 – Perfil 2

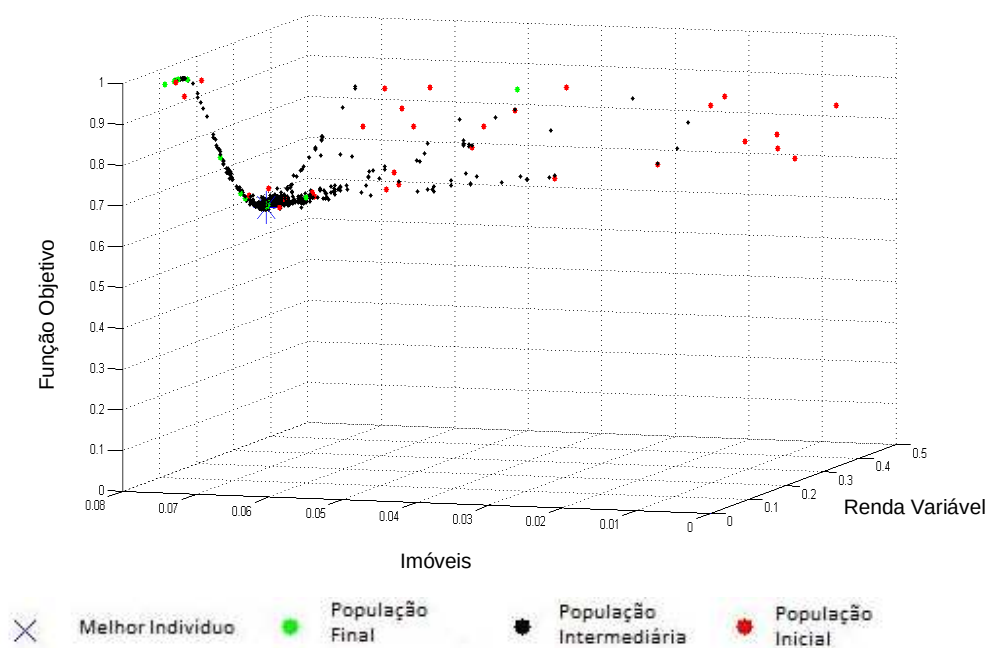


Gráfico 10- Evolução da população inicial para a população final no cenário 12- Perfil 1

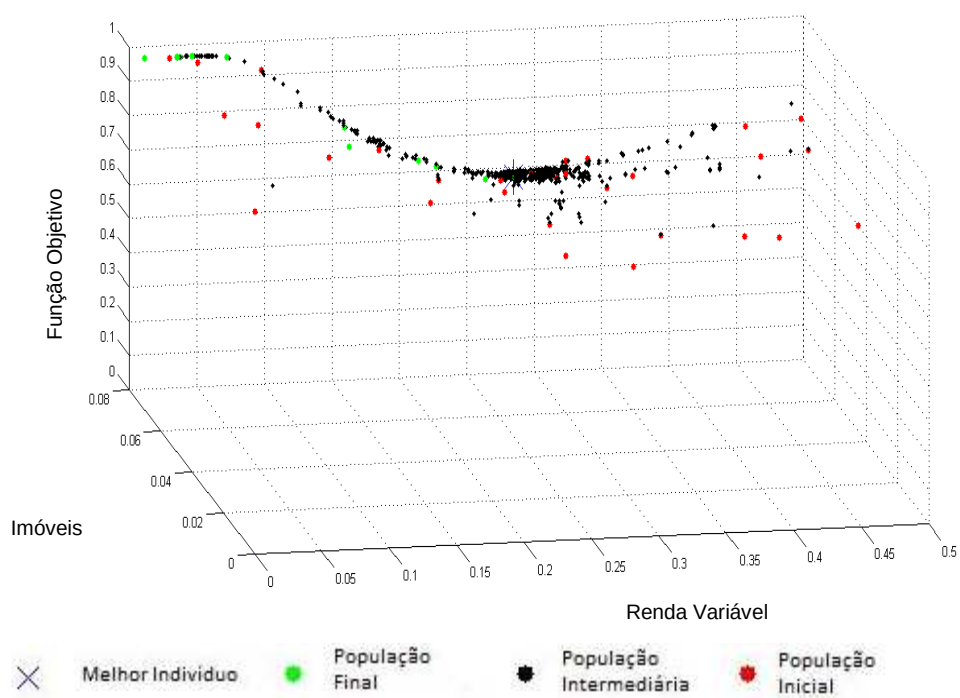


Gráfico 11- Evolução da população inicial para a população final no cenário 12- Perfil 2

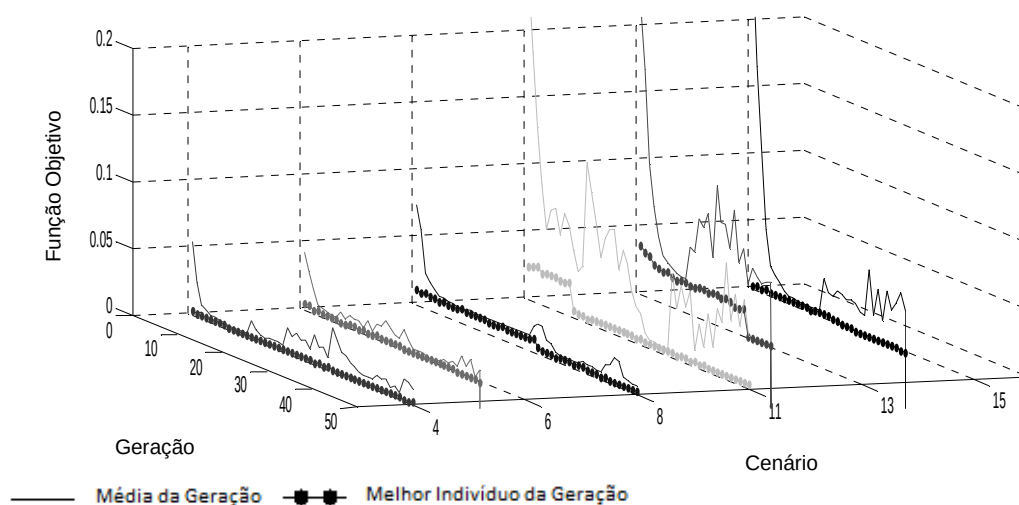


Gráfico 12- Função objetivo do melhor indivíduo e valor médio da população por geração nos cenários 4, 6, 8, 11, 13 e 15

O padrão de convergência e busca exploratória também é encontrado nos cenários 4, 6, 8, 11, 13 e 15. Pelo Gráfico 12, pode ser observado que, nos cenários projetados com os dados históricos de três anos (11, 13, 15), houve uma maior espera para a convergência e exigiu uma exploração mais intensa no espaço de decisão pelo algoritmo.

Análise 6: Estabilidade da solução dos Algoritmos Genéticos

Cenários utilizados: 16

Devido à natureza aleatória do algoritmo, os resultados encontrados podem variar um pouco a cada vez que o processo de otimização é executado. Para verificar a estabilidade da solução proposta pelos Algoritmos Genéticos, foi executado mais uma vez o processo de otimização para o cenário 16, uma vez que ele possui dimensão elevada (8 variáveis de decisão) e maior variância na função objetivo.

O desempenho do algoritmo na segunda execução (16-b) em contraste com a execução anterior (16-a) pode ser observado na Tab.10.

Tabela 10- Comparação da estabilidade do algoritmo em duas execuções para um mesmo cenário

CENÁRIO	RENDIA VARIÁVEL				IMÓVEIS				FUNÇÃO OBJETIVO
	ANO 1	ANO 21	ANO 41	ANO 61	ANO 1	ANO 21	ANO 41	ANO 61	
16-a	0,4088	0,2211	0,2114	0,1218	0,0688	0,0669	0,0492	0,0195	0,5163
16-b	0,4606	0,2094	0,1956	0,1536	0,0614	0,0690	0,0511	0,0361	0,5086

Os valores encontrados para a função objetivo e vetor de solução foram bastante próximos. As maiores diferenças observadas nas alocações foi um aumento de 5,18% na alocação de ações no primeiro ano e de 1,66% na alocação de imóveis no ano 61.

Análise 7: Efeito da eliminação do teto máximo para o valor dos ativos

Cenários utilizados: 11 e 12

A avaliação do impacto da Resolução CGPC Nº 26, de 29 de setembro de 2008, a qual limita o superávit em 25% das provisões matemáticas após três anos consecutivos acima desse percentual, foi realizada por meio da eliminação da restrição correspondente na função ALM(x) (Equação 3.17) e, então, computados, em cada instante do tempo, os valores dos ativos antes dos pagamentos do período e os fluxos de caixa a serem desembolsados pelo fundo de pensão no período.

Para ilustrar a diferença, os mesmos valores foram computados para os cenários 11 e 12 e mapeados nos gráficos 13 e 14. Os gráficos mostram a evolução dos ativos e passivos para as 10.000 simulações, sendo que as inadimplências são visualizadas quando as linhas azuis cruzam as linhas vermelhas.

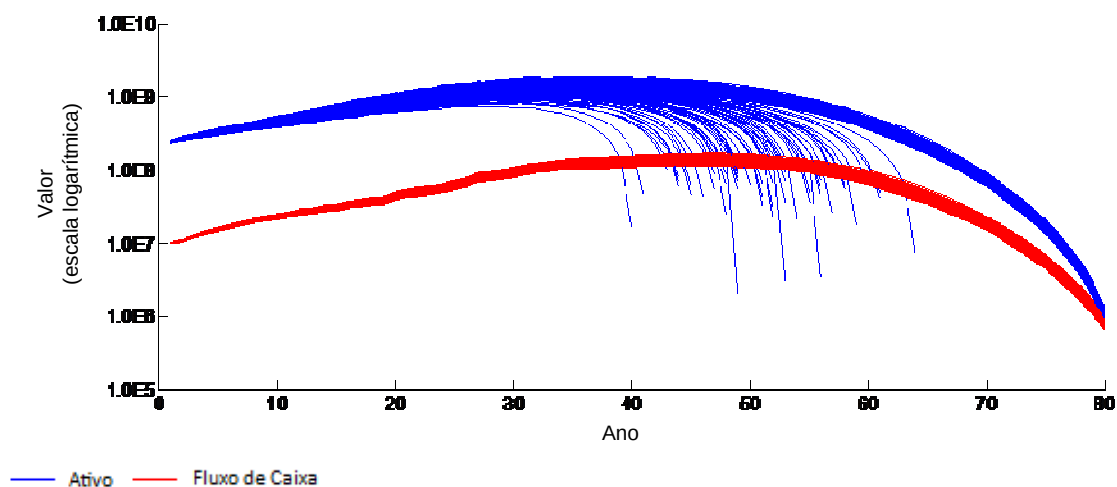


Gráfico 13- Projeção dos fluxos de caixa atuariais nominais (valores em módulo) e valor dos ativos antes dos pagamentos do período com solução ótima do cenário 11 com limite máximo para valor dos ativos.

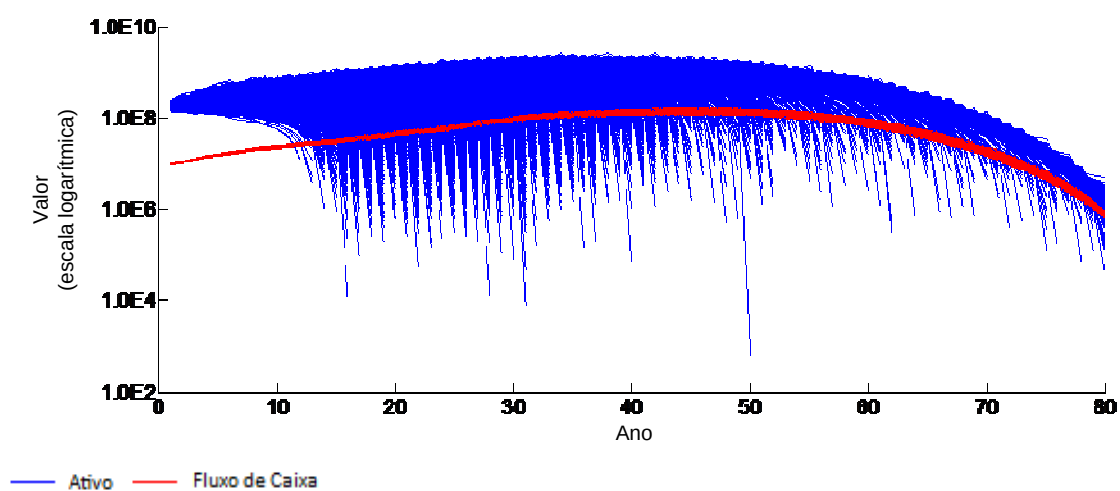


Gráfico 14- Projeção dos fluxos de caixa atuariais nominais (valores em módulo) e valor dos ativos antes dos pagamentos do período com solução ótima do cenário 12 com limite máximo para valor dos ativos

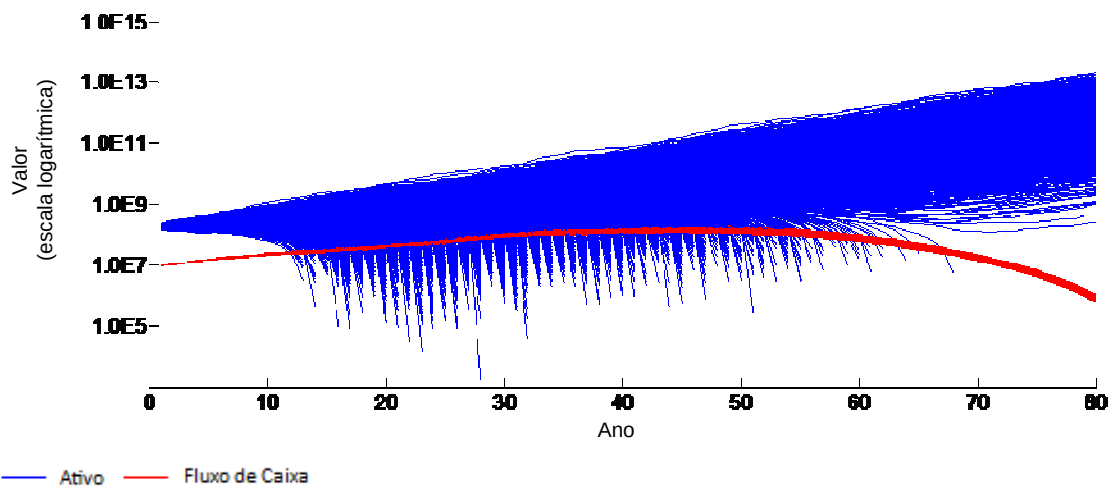


Gráfico 15- Projeção dos fluxos de caixa atuariais nominais (valores em módulo) e valor dos ativos antes dos pagamentos do período com solução ótima do cenário 12 sem limite máximo para valor dos ativos

Os valores dos ativos projetados no cenário 12 sem a restrição de 25% de superávit, ao contrário do observado do caso com a restrição, a partir de um ponto, cresceram descontroladamente de maneira exponencial, conforme previsto e discutido no referencial teórico.

Refazendo 300 vezes a projeção para uma estimativa mais precisa, a média da função objetivo sem a restrição foi de 0,5745, uma redução de 0,0378 em relação à mesma média para a função objetivo com restrição (de 0,6123). Em compensação, foram encontrados no final do ano 80 valores nominais para os ativos da ordem de 10^{13} reais ou 10 trilhões de reais! Nesses casos, os enormes montantes de superávit surgiram com as simulações de rentabilidades muito elevadas e que produzem ativos muito maiores aos pagamentos das pensões. O efeito juros sobre juros nesse excedente por um período longo provocou a explosão exponencial observada.

Análise 8: Efeito do rebalanceamento do portfólio

Cenários utilizados: Todos

A Tab. 11 foi elaborada para comparar o efeito na função objetivo de manter os pesos do portfólio constantes no período de projeção com os de rebalanceá-los de 20 em 20 anos. A conclusão observada foi de que a alocação dinâmica de ativos é equivalente ou diminui o risco do fundo de pensão.

Tabela 11- Comparativo das funções objetivo sem rebalanceamento e com rebalanceamento do portfólio no horizonte de projeção

CENÁRIOS	FUNÇÃO OBJETIVO SEM REBALANCEAMENTO	FUNÇÃO OBJETIVO COM REBALANCEAMENTO
1 versus 5	0,0000	0,0000
2 versus 6	0,0000	0,0000
3 versus 7	0,0000	0,0000
4 versus 8	0,0021	0,0023
9 versus 13	0,0000	0,0000
10 versus 14	0,5478	0,4966
11 versus 15	0,0048	0,0000
12 versus 16	0,6062	0,5163

Nos cenários de maior risco (10 versus 14 e 12 versus 16), a redução no risco foi significativa (redução de chance de inadimplência de 5,12% e 8,99%, respectivamente). Um olhar mais cuidadoso nos pesos dos ativos nesses cenários (vide Tab. 8) revelou que a estratégia elaborada pelos Algoritmos Genéticos consistiu em aumentar a participação de ativos mais voláteis e rentáveis nos 20 primeiros anos, uma vez que nesse período existe uma grande margem entre o valor dos ativos e fluxos de caixa atuariais.

Uma consequência direta dessa constatação é a de que o uso de modelos tradicionais de seleção de carteiras como os modelos de Markowitz e o CAPM, que não consideram de maneira intrínseca a possibilidade da realocação dos pesos dos ativos no portfólio, pode conduzir a carteiras equivocadas e que aumentam desnecessariamente o risco do fundo. Frisa-se aqui que o que está em discussão não é uma questão de frequência de aplicação de modelos, mas que no ano “zero” da avaliação, o modelo permita a possibilidade de realocação dos pesos dos ativos nos anos subsequentes.

Análise 9: Efeito da mudança no valor dos ativos iniciais

Cenários utilizados: Todos

A situação inicial dos ativos foi um dos fatores determinantes para provocar um aumento na probabilidade de inadimplência do fundo de pensão. As diferenças provocadas por um déficit de 20% em relação à Reserva Matemática calculada sobre uma taxa de 6% a.a. representou um aumento da chance de inadimplência de praticamente zero nos cenários 9, 11, 13 e 15, para uma chance por volta de 50% nos cenários 10, 12, 14 e 16.

Tabela 12- Comparativo das funções objetivo com fundo superavitário ou deficitário no instante inicial da avaliação.

CENÁRIOS	FUNÇÃO OBJETIVO COM FUNDO SUPERAVITÁRIO	FUNÇÃO OBJETIVO COM FUNDO DEFICITÁRIO
1 versus 2	0,0000	0,0000
3 versus 4	0,0000	0,0021
5 versus 6	0,0000	0,0000
7 versus 8	0,0000	0,0023
9 versus 10	0,0000	0,5478
11 versus 12	0,0048	0,6062
13 versus 14	0,0000	0,4966
15 versus 16	0,0000	0,5163

Na maioria dos casos analisados, o aumento do déficit provocou um aumento na participação de ativos de risco na carteira (no sentido tradicional) em uma tentativa de diminuição do risco do fundo de pensão (no sentido da função objetivo proposta).

Análise 10: Efeito da mudança no período utilizado para estimação dos retornos dos ativos e inflação

Cenários utilizados: Todos

O efeito da mudança no período utilizado na estimação dos retornos e inflação foi, em conjunto com o valor dos ativos, variável chave para explicação das grandes inadimplências encontradas, conforme pode ser observado na tabela a seguir:

Tabela 13- Comparativo das funções objetivo com período de 10 anos e 3 anos utilizados para a estimação.

CENÁRIOS	FUNÇÃO OBJETIVO COM PERÍODO DE 10 ANOS	FUNÇÃO OBJETIVO COM PERÍODO DE 3 ANOS
1 versus 9	0,0000	0,0000
2 versus 10	0,0000	0,5478
3 versus 11	0,0000	0,0048
4 versus 12	0,0021	0,6062
5 versus 13	0,0000	0,0000
6 versus 14	0,0000	0,4966
7 versus 15	0,0000	0,0000
8 versus 16	0,0023	0,5163

É interessante observar que, se o futuro replicar as rentabilidades dos ativos dos últimos 10 anos, em todas as situações apresentadas, as chances de insolvência do fundo são mínimas.

Análise 11: Efeito da mudança na política de contribuição da EFPC

Cenários utilizados: Todos

Ao contrário de outros estudos de gerenciamento de ativos e passivos em fundos de pensão, o presente estudo não considerou a revisão na política de contribuição como uma variável de decisão, por não ser uma prática adotada pela EFPC. Pelo mesmo motivo, não foi considerada uma função utilidade que buscasse equilibrar o risco de inadimplência do fundo com os custos por participante.

Entretanto, para efeitos ilustrativos, foi estudado o *trade-off* resultante de uma diminuição nas contribuições dos ativos no aumento de insolvência do fundo de pensão. Os resultados encontrados foram os seguintes:

Tabela 14- Comparativo das funções objetivo com diferentes políticas de contribuição adotadas pelo fundo

CENÁRIOS	FUNÇÃO OBJETIVO COM CONTRIBUIÇÃO ATUAL	FUNÇÃO OBJETIVO COM CONTRIBUIÇÃO REDUZIDA
1 versus 3	0,0000	0,0000
2 versus 4	0,0000	0,0021
5 versus 7	0,0000	0,0000
6 versus 8	0,0000	0,0023
9 versus 11	0,0000	0,0048
10 versus 12	0,5478	0,6062
13 versus 15	0,0000	0,0000
14 versus 16	0,4966	0,5163

Apesar de, na maioria dos casos, o decréscimo das contribuições arrecadadas significar um aumento do risco de insolvência do fundo de pensão, conforme esperado, em alguns cenários (1 versus 3, 5 versus 7 e 13 versus 15) não foi verificado a existência do *trade-off*. Nesses cenários, as boas rentabilidades dos ativos, adequação da

capitalização e estratégias de alocação dinâmica do portfólio foram os fatores que ajudaram a suportar o peso na mudança das contribuições, sem que houvesse um aumento no risco de inadimplência do fundo.

Análise 12: Comparação do desempenho das soluções propostas pelo Algoritmo Genético com as soluções propostas pelo modelo de seleção de carteiras de Markowitz

Cenários utilizados: 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12

O último teste efetuado foi a comparação dos valores das funções objetivo propostas pelos Algoritmos Genéticos com a proposta fornecida pelo modelo de Markowitz. Os testes foram efetuados nos cenários em que não houve alocação dinâmica do portfólio, uma vez que, obviamente, a técnica de Markowitz não considera essa possibilidade.

Os resultados encontrados foram os seguintes:

Tabela 15- Comparativo entre soluções propostas pelo modelo de Markowitz e Algoritmos Genéticos

CENÁRIO	CRITÉRIO			PORTFÓLIO MARKOWITZ					PORTFÓLIO ALGORÍTMO GENÉTICO		
				Rent		Variância					
	TIR	PMV	Escolha	Esperada	Esperada	RV	IM	ALM(x)	RV	IM	ALM(x)
1	0,1248	0,1512	PMV	0,1512	0,00010	0,0000	0,0018	0,0000	0,0000	0,0800	0,0000
2	0,1438	0,1512	PMV	0,1512	0,00010	0,0000	0,0018	0,0127	0,0371	0,0787	0,0000
3	0,1264	0,1512	PMV	0,1512	0,00010	0,0000	0,0018	0,0000	0,1555	0,0800	0,0000
4	0,1460	0,1512	PMV	0,1512	0,00010	0,0000	0,0018	0,0598	0,0482	0,0676	0,0021
9	0,1095	0,1117	PMV	0,1117	0,00001	0,0061	0,0000	0,0642	0,0012	0,0644	0,0000
10	0,1285	0,1117	TIR	0,1285	0,00529	0,2598	0,0800	0,5477	0,2729	0,0772	0,5478
11	0,1111	0,1117	PMV	0,1117	0,00001	0,0061	0,0000	0,3322	0,0399	0,0472	0,0048
12	0,1307	0,1117	TIR	0,1307	0,00808	0,3208	0,0800	0,6118	0,2783	0,0744	0,6062

De maneira geral, as soluções fornecidas pelo modelo de Markowitz apresentaram um desempenho inferior às apresentadas pelos Algoritmos Genéticos. *A priori*, esse

resultado já era esperado devido ao modelo de Markowitz ser uma abordagem focada apenas no ativo. O uso dessa abordagem desconsidera correlações entre as rentabilidades dos ativos e a inflação, e é indiferente ao cumprimento da função objetivo da EFPC de minimizar a probabilidade de inadimplência do fundo.

Todavia, vale observar que, em alguns cenários, as soluções sugeridas apresentaram valores bem próximos do portfólio sugerido pelo Algoritmo Genético (cenários 1, 3, 10 e 12). Como a solução do modelo de Markowitz é obtida em frações de segundo, a inclusão dessas soluções na população inicial pode levar o Algoritmo Genético a uma convergência mais rápida para a solução final.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi abordado como a Pesquisa Operacional pode ser utilizada no processo de gerenciamento coordenado de ativos e passivos nas Entidades Fechadas de Previdência Complementar.

A formulação do modelo de Pesquisa Operacional exige dos gestores uma definição matemática do objetivo do fundo de pensão, das restrições existentes e da maneira pela qual as decisões tomadas pelos gestores influirão no alcance desse objetivo. Em seguida, o gestor deve escolher qual metodologia de Pesquisa Operacional é a mais adequada para a solução do problema matemático apresentado.

Na revisão da literatura, foi verificado que o nome Gestão de Ativos e Passivos (*Assets and Liabilities Management*) esconde uma grande diversidade de modelagens e metodologias de solução para os problemas oriundos das atividades executadas em um fundo de pensão. Dessa forma, as decisões assumidas por um gestor de um fundo de pensão podem variar sobremaneira, dependendo da abordagem adotada para modelo de Pesquisa Operacional subjacente ao estudo de ALM.

Neste trabalho, para a modelagem do problema de Pesquisa Operacional, foi adotado, como objetivo para uma EFPC do tipo Benefício Definido, a minimização da probabilidade de inadimplência em um horizonte de 80 anos. As variáveis passíveis de decisão foram as proporções a serem aplicadas entre as diversas classes de ativos.

A metodologia de Pesquisa Operacional adotada para a solução do problema matemático proposto foi a técnica meta-heurística dos Algoritmos Genéticos. Os resultados obtidos em diversos cenários indicaram que os Algoritmos Genéticos são uma boa ferramenta na busca de soluções satisfatórias para a minimização da função objetivo proposta.

O uso dos Algoritmos Genéticos possibilitou grande flexibilidade para a modelagem do problema, que incluiu uma função objetivo estocástica, funções de probabilidades conjuntas e restrições com funções lógicas. Apesar dessas características pouco favoráveis presentes no problema, as soluções apresentadas pelos Algoritmos Genéticos foram equivalentes ou superiores às soluções obtidas com o uso da técnica tradicional de seleção de portfólios de Markowitz.

As análises efetuadas nos cenários de teste sugeriram que modelos que utilizam revisões periódicas de alocação apresentam soluções superiores aos modelos que projetam uma alocação estática nas proporções de ativos no horizonte do investimento. Nesses casos, foi observado que o modelo de alocação dinâmica conseguiu superioridade aproveitando a margem existente entre o valor dos ativos e os desembolsos previstos para aumentar ou diminuir a participação em ativos mais voláteis.

A situação superavitária ou deficitária do fundo de pensão também influenciou na maneira de alocação dos ativos. De modo geral, foi constatado que, em situações deficitárias, os portfólios escolhidos possuem maior peso nos ativos mais voláteis e rentáveis como uma tentativa esperançosa de evitar a ocorrência de inadimplementos futuros.

Os cenários de teste também apontaram que caso a queda de rentabilidade nos ativos percebidas nos últimos anos perdurar no horizonte de projeção, em algumas situações específicas, as chances de inadimplência da EFPC aumentará drasticamente.

Também foi estudado o *trade-off* existente entre a diminuição do custo do fundo de pensão para o participante e o risco de aumento da inadimplência associado. Apesar do *trade-off* estar presente na maioria dos cenários de teste, em alguns cenários com situações mais favoráveis, sua existência não foi verificada.

Apesar de o estudo ter procurado abordar de maneira abrangente os principais tópicos para a formalização de estratégias de gerenciamento de ativos e passivos em fundos de pensão, ainda resta uma enorme gama de problemas a serem debatidos e que podem superar eventuais limitações no presente trabalho. As sugestões para trabalhos futuros são:

- Investigação de outras metodologias de Pesquisa Operacional para solução dos problemas de Gestão de Ativos e Passivos;
- Emprego de modelos não determinísticos para a projeção dos fluxos de caixas atuariais reais. A modelagem poderia ser feita com a extensão da técnica de Monte Carlo aplicada nas rentabilidades dos ativos aos eventos atuariais (mortes, casamentos, filhos, crescimento salarial, etc.);
- Estudo da inclusão de técnicas de redução de variância para ganhos de precisão e de velocidade no cálculo da função objetivo;
- Uso de ativos individuais como variáveis de decisão, ao invés de classes de ativos;
- Elaboração de funções objetivo diferenciadas (por exemplo, com desenvolvimento de função utilidade que abarque o *trade-off* entre o custo por participante e a probabilidade de insolvência);
- Utilização de taxas de contribuição variáveis como variáveis de decisão;
- Desenvolvimentos de metodologias para projeções em intervalos mensais, ao invés de anuais, o que exigiria o uso de técnicas de interpolações nas tábuas atuariais;
- Elaboração de modelos com intervalos menores entre as revisões do portfólio;
- Desenvolvimento de metodologias híbridas de solução, como a combinação de técnicas de Algoritmos Genéticos com o modelo de Markowitz; e
- Emprego de modelos diferenciados, para explicar a evolução das rentabilidades das classes de ativos. Por exemplo, poderiam ser explorados modelos de convergência de longo prazo para a carteira de renda fixa, como o elaborado por Vasicek (1977); ou o uso de modelos de investimentos de longo prazo, como o de Wilkie (1995).

REFERÊNCIAS

BERNOULLI, D. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, as translated and reprinted in 1954, *Econometrica*, v. 22, p.23-36, 1738.

BELLMAN, R. *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957.

BELTRÃO, K. I. PINHEIRO, S. S. *Estimativa de mortalidade para a população coberta pelos seguros privados*. Texto para discussão nº 868. IPEA. Rio de Janeiro, 03 de 2002. Disponível em: http://desafios.ipea.gov.br/082/08201008.jsp?ttCD_CHAVE=1651. Acessado em : 13.02.2010

BIRGE, J. R. ; LOUVEAUX, F. *Introduction to Stochastic Programming*. New York: Springer-Verlag, 1997.

BRADLEY, S.P.; HAX, A.C.; MAGNANTI, T.L. *Applied Mathematical Programming*. Menlo Park, California, Addison-Wesley, 1977.

BOARD, J.; SUTCLIFFE, C.; ZIEMBA, W. T. *The application of operations research techniques to financial markets*. 1999. Stochastic Programming E-Print Series. Disponível em: <http://www.speps.org>. Acessado em: 15 mai. 2009.

BORTOLOSSI, H. J; B. K. PAGNONCELLI. *Introdução à Otimização sob Incerteza*. III BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Goiás, 2006. Disponível em: <http://www.mat.puc-rio.br/~hjbortol/seminarios/2006.1/soe/>. Acessado em 13 fev. 2010.

BODIE, Z.; MARCUS, A. J., MERTON, R. C. *Defined benefit versus defined contribution pension plans: What are the real trade-offs?* In: *Pensions in the US Economy*. Edited by

Zvi Bodie, John B. Shoven, and David A. Wise. Chicago: University of Chicago Press, 1988.

BRASIL. SECRETARIA DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR. *Informe Estatístico de junho de 2008*. Disponível em: http://www1.previdencia.gov.br/docs/pdf/ie_junho-2008.pdf. Acessado em: 15 mai. 2009.

BREALEY, R. A.; MYERS, S. C.; ALLEN, F. *Principles of Corporate Finance*. New York: McGraw-Hill Irwin, 2006.

BOULIER, J. F; DUPRÉ, D. *Gestão Financeira dos Fundos de Pensão*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2003.

BOULIER, J. F.; MICHEL, S.; WISNIA, V. *Optimizing contributions and allocation of a defined benefit pension funds*. Conferência AFIR, Nuremberg, 1996.

BOOTH, P., CHADBURN, R., COOPER, D., HABERMAN, S., JAMES D. *Modern Actuarial Theory and Practice*, California: Chapman and Hall, 1999.

BOWERS, N. L. *Actuarial mathematics*. 2nd ed. Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries, 1997.

BUCCOLA, S. T. Portfolio selection under exponential and quadratic utility. *Western Journal of Agricultural Economics*, v. 07, 1982.

CAIRNS, A.J.G. *An introduction to stochastic pension fund modeling*. (Paper for the Vancouver Interest Rate Risk Workshop). 1994. Disponível em: <http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/papers/>. Acessado em: 15 mai. 2009.

CAIRNS, A.J.G. *Pension funding in a stochastic environment: the role of objectives in selecting an asset allocation strategy*. Proceedings of the 5th AFIR International Symposium, Brussels, v. 1, p. 429-453, 1995.

CARIÑO, D. R.; MYERS, D. H.; ZIEMBA, W. T. *Concepts, technical issues, and uses of the Russell- Yasuda Kasai financial planning model*. Research Report, Frank Russell Company, Tacoma, Washington, 1995.

CHAN, B. L.; SILVA, F. L.; MARTINS, G. A. *Fundamentos da Previdência Complementar: Da atuária à contabilidade*. São Paulo: Atlas, 2006.

CHIRALAKSANAKUL, A. *Monte Carlo Methods for Multi-stage Stochastic Programs.*, University of Texas at Austin, 2003. (Thesis)

COLIN, E. *Pesquisa Operacional - 170 aplicações em Estratégia, Finanças, Logística, Produção, Marketing e Vendas*. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

CONEJO, A.J.; CASTILLO, E.; MINGUEZ, R.; GARCIA-BERTRAND, R. *Decomposition Techniques in Mathematical Programming: Engineering and Science Applications*. Netherlands: Springer-Verlag, 2006.

CONSIGLI, G.; DEMPSTER, M. A. H. Dynamic stochastic programming for asset-liability management. *Annals of Operations Research*, v. 81, p. 131-161. 1998.

DAVIS, L. *Handbook of Genetic Algorithms*. 1º ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.

DAVIS, E. P.; HU, Y. Is there a link between pension-fund assets and economic growth? - a cross-country study. *Public Policy Discussion Papers*, p. 04-23, Economics and Finance Section, Brunel University, 2004.

DOMENEGHETTI, V. *Gestão financeira de fundos de pensão*. 2009. 603f. Programa de Pós-Graduação em Administração de Organizações da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo. (Dissertação).

DORSEY, S., CORNWELL, C. MACPHERSON, D. *Pensions and Productivity*. Kalamazoo, Mich.: Upjohn Institute for Employment Research, 1998.

DUFRESNE, D. Stability of pension systems when rates of return are random. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 8, 71-76, 1989.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. São Paulo: Atlas, 2004.

ESHELMAN, L. J.; SHAFFER, D. J. *Real – coded genetic algorithms and interval – schemata*. In: WHITLEY, D. L.(ed). “Foundations of Genetic Algorithms”. San Mateo. CA: Morgan Kaufmann, 1993.

FESTA, J. Asset Liability Modeling (ALM): *Aplicação em otimização da alocação de ativos*. 2005. Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2005. (Dissertação)

FREUND, R. J. The introduction of risk into a programming model. *Econometrica*, v. 24, p. 253-63, 1956.

FRIEDMAN, M. *The Methodology of Positive Economics*. In: Essays in Positive Economics. Chicago: University of Chicago Press, 1953.

GERBER, H; SHIU, E. W. Geometric Brownian Motion Models for Assets and Liabilities: From Pension Funding to Optimal Dividends. *North American Actuarial Journal*, v. 7, n. 3, p. 37–51; Discussions 51–6. 2003.

HABERMAN, S. *Pension funding modeling and stochastic investment returns*. Staple IM Actuarial Society and Royal Statistical Society Joint Meeting, London, 1994a.

HABERMAN, S. Autoregressive rates of return and the variability of pension fund contributions and fund levels for a defined benefit pension scheme. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 14, p. 219-240, 1994b.

HABERMAN, S; SUNG, J. H. Dynamic Programming Approach to Pension Funding: The Case of Incomplete State Information. *ASTIN Bulletin*, v. 32, p. 129-142 S. 2002.

HASTINGS, N. A. J. *Dynamic programming with management applications*. London: Butterworths, 1973.

HENRION, R. *Introduction to Chance-Constrained Programming*. 2004. COSP. Disponível em: <http://stoprog.org/index.html?SPIntro/intro2ccp.html>. Acessado em 13 fev. 2010.

HILLI, P.; KOIVU, M.; PENNANEN, T. ; RANNE, A. A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company. *Ann. Oper. Res.*, v. 152, p.115–139. 2007.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à pesquisa operacional*. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

HOLLAND J.H. *Adaptation in natural and artificial system*. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.

HUANG, H.-C.; CAIRNS, A.J.G. On the control of defined-benefit pension plans. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 38, p. 113-131, 2005.

IYER, S. *Matemática Atuarial dos Sistemas de Previdência Social*. Brasília: Tradução do MPAS, 2002. (Coleção Previdência Social)

JEHLE, G. A. *Advanced microeconomic theory*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall International, 1991.

JORION, P. *Value at risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro*. 2. ed. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 2003.

KAHNEMAN, D. A.; TVERSKY. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, v. 47, n. 2, p. 263–292, 1979.

KALL, P.; WALLACE, S. W. *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.

KARMARKAR, N. A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984.

KUSY, M. I.; ZIEMBA, W. T. A bank asset and liability management model. *Operations Research*, v. 34, p. 356-376, 1986.

LACERDA, E.G.M, CARVALHO, A.C.P.L. *Introdução aos Algoritmos Genéticos*. In: GALVÃO, C.O., VALENÇA, M.J.S. (orgs.) *Sistemas inteligentes: aplicações a recursos hídricos e ciências ambientais*. Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS : Associação Brasileira de Recursos Hídricos. P. 99-150. 1999. (Coleção ABRH de Recursos Hídricos; 7.).

LINDEN, R. *Algoritmos Genéticos: Uma importante ferramenta da Inteligência Computacional*. Rio de Janeiro: Brasport, 2008.

LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, February, 1999.

LUCKNER, W. R; ABBOTT, M, C. BACKUS, J. E.; BENEDETTI, S.; BERGMAN, D.; COX, S. H.; FELDBLUM, S.; GILBERT, C. L.; LIU, X. L.; LUI, V.; MOHRENWEISER, J. A.; OVERGARD, W.; PEDERSEN, H. W.; RUDOLPH, M. J.; SHIU, E. S.; SMITH JR., P. T. *Society Professional Actuarial Specialty Guide: Asset-Liability Management*. 2003. Disponível em: <http://www.soa.org/>. Acessado em: 15 mai. 2009.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, v. 7, p. 77-91, 1952.

MICHALEWICZ, Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs* . 3º ed. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

MIRANDA, M. FACKLER, P. *Applied computational economics and finance*. Cambridge: MIT Press, 2002.

MOSSIN, J. Equilibrium in a Capital Asset Markets. *Econometrica*, October, 1966.

MULVEY, J. M. *Generating scenarios for the Towers Perrin investment system*. Technical Report, Statistics and Operations Research Series, School of Engineering and Applied Science, Princeton University, March, 1995.

NEUMANN, J. V; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.

OECD. *Fifteen principles for the regulation of private occupational pensions schemes*.

Disponível em: www.oecd.org. Acessado em 20 fev. 2010.

PINHEIRO, R. P. *A demografia dos fundos de pensão*. Brasília: Ministério da Previdência Social. Secretaria de Políticas de Previdência Social, 2007. (Coleção Previdência Social)

POOJARI, C. A.; VARGHESE, B. Genetic algorithm based technique for solving chance constrained problems. *European Journal of Operational Research*, v. 185, n. 3, p. 1128-1154. 2008.

PROMISLOW, S. D. *Fundamentals of actuarial mathematics*. Chichester, England: Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.

RAMOS, A. ; CERISOLA, S. *Optimización Estocástica*. 2009. Disponível em: <http://stoprog.org/index.html?SPIntro/intro2ccp.html>. Acessado em 13 fev. 2010.

REDINGTON, F. M. Review of the principles of life office valuations. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 78, p. 187-203, 1952.

RIECHE, F. S. Gestão de Riscos em Fundos de Pensão no Brasil: Situação Atual da Legislação e Perspectivas. *Revista do BNDES*, n. 23, 2005.

RODRIGUES, J. A. *Gestão da previdência com estudos atuariais*. Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro. 2002. (Dissertação)

RUSSELL, S. J; NORVIG, P. *Inteligência artificial : referência completa para cursos de computação*. Rio de Janeiro: Campus, 2004.

SEYDEL, R. *Tools for computational finance*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.

SHARPE, W. Capital Asset Prices, A Theory of Market Equilibrium, *Journal of Finance*, September, 1964.

SHARPE, W. Budgeting and monitoring pension fund risk. *Financial Analysts Journal*, v. 58, 74-86. 2002.

SHERRIS, M. Portfolio Selection and Matching: A Synthesis. *Journal of the Institute of Actuaries*, v.119, Pt. 1, 1992.

SHERRIS, M. *Portfolio selection models for life insurance and pension funds*. Disponível em: <<http://www.actuaries.org>>. Acessado em: 15 mai. 2009.

SIVANANDAM , S. N.; DEEPA, S. N. *Introduction to Genetic Algorithms*. Berlin: Springer Verlag, 2007.

STEUER, R. E.; QI, Y.; HIRSCHBERGER, M. Multiple objectives in portfolio selection. *Journal of Financial Decision Making*, v. 1, n. 1, p. 11-26, 2005.

VALLADÃO, D. M. *Alocação Ótima e Medida de Risco de um ALM para Fundo de Pensão Via Programação Estocástica Multi-Estágio e Bootstrap*. 2008. PUC-Rio. Rio de Janeiro. 2008. (Dissertação)

VASICEK, O. An Equilibrium Characterisation of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, v. 5, p. 177-188, 1977.

VEIGA FILHO, A. L. Medidas de Risco de Equilíbrio em Fundos de Pensão. In: Antonio M. Duarte Jr., Gyorgy Vargas. (Org.). *Gestão de Riscos no Brasil*. Rio de Janeiro: Editora Financial Consultoria, v. 1, p. 645-666, 2003.

VLERK, M. *Integrated chance constraints in an ALM model for pension funds*. Technical Report 03A21, University of Groningen, Research Institute SOM (Systems, Organisations and Management). 2003.

WEISS, R. Fundos de pensão no Brasil: antes e depois da crise de 2008. In: GIAMBIAGI, F.; GARCIA, M. (orgs.) *Risco e regulação: por que o Brasil enfrentou bem a crise e como ela afetou a economia mundial*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

WILKIE, A. D. Portfolio Selection in the Presence of Fixed Liabilities: A Comment on 'The Matching of Assets to Liabilities', *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 112, p. 229–277, 1985.

WILKIE, A. D. A stochastic investment model for actuarial use. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, v. 39, p. 341-381, 1986.

WILKIE, A. D. More on a stochastic investment model for actuarial use. *British Actuarial Journal*, v. 1, p. 777-964, 1995.

WINKLEVOSS, H. E. *Pension mathematics with numerical illustrations*. 2nd ed. Philadelphia: Published by Pension Research Council, Wharton School of the University of Pennsylvania and University, 1993.

WISE, A. J. A theoretical analysis of the matching of assets to liabilities. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 111, p. 445-485, 1984a.

WISE, A. J. The Matching of Assets to Liabilities. *Journal of the Institute of Actuaries*, v.111, Pt. 3., 1984b.

WISE, A. J. Matching and Portfolio Selection: Part 1. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 114, p. 113–133, 1987a.

WISE, A. J. Matching and Portfolio Selection: Part 2. *Journal of the Institute of Actuaries*, v. 114, p. 551–568, 1987b.

WOLPERT, D.H; MACREADY, W.G. No Free Lunch Theorems for Optimization. *IEEE. Transactions on Evolutionary Computation*, v. 1, 1997.

WRIGHT, A. H. *Genetic algorithms for real parameter optimization*. In: WHITLEY, D. L.(ed). *Foundations of Genetic Algorithms*. San Mateo. CA: Morgan Kaufmann, 1993.

WRIGHT, I. D. *A stochastic approach to pension scheme funding*. *Actuarial Research Paper* N° 112. 1998. Disponível em: <http://www.cass.city.ac.uk/facact/research/reports/112ARC.pdf>

YAKOUBOV, Y.; TEEGER, M. ; DUVAL, D.B. A stochastic investment model for asset and liability management. *Proceedings of the 9th International AFIR Colloquium*, Tokyo, Joint Day, p. 237-266, 1999.

APÊNDICE

Código escrito em MATLAB® para o cálculo da Função Objetivo ALM(x)

```
function OBJFUN = ALM(x); % Função objetivo do problema de Pesquisa
Operacional

% A função está dividida nas seguintes partes:
%(1) Parâmetros
%(2) Simulação de rentabilidades e inflação
%(3) Dinâmica entre ativos e passivos
%(4) Valor de resposta para a função objetivo

% Na função ALM(x), x é o vetor de variáveis de decisão ou indivíduos
% A primeira metade do vetor consiste no percentual de renda variável na
%carteira
% A segunda metade do vetor consiste no percentual de imóveis na carteira
% O tamanho do vetor x determina quantas vezes a carteira é revista
% Exemplo de vetor x: [0.50 0.50 0.50 0.08 0.08 0.08]

%% ----- 1º Parte: Parâmetros

% 1-a: O código seguinte captura os parâmetros no espaço de trabalho do
%Matlab:

N_iter = evalin('base','N_iter'); % Número total de iterações (Utilizado
%10.000)
T = evalin('base','T'); % T = Último Período (Utilizado 80 anos)
COR = evalin('base','COR');% Matriz de Correlações. Ordem dos Colunas: ope,
%aco, imo, rf, inf
```

```

Rope_medio = evalin('base','Rope_medio'); % Log-retorno esperado em Operações
%com Participantes
Raco_medio = evalin('base','Raco_medio'); % Log-retorno esperado em Renda
%Variável
Rimo_medio = evalin('base','Rimo_medio'); % Log-retorno esperado em Imóveis
Rrf_medio = evalin('base','Rrf_medio'); % Log-retorno esperado em Renda Fixa
Rinf_medio = evalin('base','Rinf_medio'); % Log-retorno esperado da Inflação
Rope_sd = evalin('base','Rope_sd'); % Desvio padrão esperado em Operações com
%Participantes
Raco_sd = evalin('base','Raco_sd'); % Desvio padrão esperado em Renda Variável
Rimo_sd = evalin('base','Rimo_sd'); % Desvio padrão esperado em Imóveis
Rrf_sd = evalin('base','Rrf_sd'); % Desvio padrão esperado em Renda Fixa
Rinf_sd = evalin('base','Rinf_sd'); % Desvio padrão esperado da Inflação
A0 = evalin('base','F0'); % Valor inicial dos ativos
iv_r = evalin('base','iv_r'); % Taxa Real de Avaliação Atuarial (Utilizado 5%
%a.a.)
Xope_const = evalin('base','Xope_const'); % Proporção fixa aplicada em
%Operações com Participantes
FC_r = evalin('base','FC_r'); % Fluxo de Caixa Real Esperado de Contribuições
%Futuras - Benefícios Futuros
RM_r = evalin('base','AL_r'); % Reserva Matemática dos FC_r
% Os fluxos de caixa FC_r foram projetados utilizando o Microsoft Excel e VBA

% 1-b: Construção da matriz de pesos por ano:

x= x'; % Transpõe o vetor x de vetor em linha para vetor em coluna

% Calculo do periodo (em anos) em que a carteira de ativos é revista

% Exemplo: Quando o tamanho do vetor x = 8, a carteira possui 4 ponderações
%diferentes
% espaçadas em iguais períodos de tempo: [1 21 41 61]

tam = max(size(x))/2; % Tamanho do vetor x dividido por 2
periodo = T/tam;

```

```

reav (1,1) = 1;
for t = 2:T
    reav(t,1)= round(reav(t-1,1)+periodo);
end

% Estrutura de Xaco por ano

Xaco(1,1)=x(1,1);
v=1;
for t = 2:T
    if find(reav==t)>0;
        v = 1 + v; % Contador de variáveis de decisão
        Xaco(t,1)= x(v,1);
    else
        Xaco(t,1)= Xaco(t-1,1);
    end
end

% Estrutura de Ximo por ano

Ximo(1,1)= x(v+1,1);
v=v+1;
for t = 2:T
    if find(reav==t)>0;
        v = 1 + v;
        Ximo(t,1) = x(v,1);
    else
        Ximo(t,1)= Ximo(t-1,1);
    end
end

% Estrutura de Xope e Xrf

for t=1:T

```

```

    Xope(t,1)= Xope_const;
end

Xrf = 1-Xope-Xaco-Ximo;

% 0 resultado final de 1-b:

X = [Xope Xaco Ximo Xrf];

%% ----- 2º Parte: Simulação de rentabilidades e inflação

% 2-a: Calcula a decomposição de Cholesky para a matriz de correlações:
% Ordem da Matriz COR: ope, aco, imo, rf, inf

COR_Chol = chol(COR);

% 2-b: Simulação de rentabilidades

for iter = 1:N_iter % Looping para gerar 10.000 simulações

    %Calculo da Matriz de Retornos para todos os períodos
    for t = 1:T
        VetorRandn = [randn randn randn randn randn]; % Vetor de numeros
%aleatório N(0,1)
        VetorCorrRandn = VetorRandn*COR_Chol; % Vetor de numeros aleatórios
%Correlacionados N(0,1)
        Rope(t,1) = Rope_medio+VetorCorrRandn(1)*Rope_sd;
        Raco(t,1) = Raco_medio+VetorCorrRandn(2)*Raco_sd;
        Rimo(t,1) = Rimo_medio+VetorCorrRandn(3)*Rimo_sd;
        Rrf(t,1) = Rrf_medio+VetorCorrRandn(4)*Rrf_sd;
        Rinf(t,1) = Rinf_medio+VetorCorrRandn(5)*Rinf_sd;
    end
end

```

```

% 2-c: Vetores resultantes

% Matriz de rentabilidades da "iter-ésima" simulação

R = [Rope Raco Rimo Rrf];

% Vetor de Retorno do Portfolio da "iter-ésima" simulação
Rport = sum((R.*X)')';

% Vetor de inflação acumulada da "iter-ésima" simulação

for t = 1:T
Rinf_acum(t,1)= sum(Rinf(1:t,1));
end

%% ----- 3º Parte: Dinâmica entre ativos e passivos

% 3-a: Fluxo de caixa atuarial nominal e Reserva Matemática nominal na "iter-
% ésima" simulação

FC = FC_r.*exp(Rinf_acum);
RM = RM_r.*exp(Rinf_acum);

% 3-b: Valor dos ativos A em cada instante do tempo e valor do superávit S
% em cada instante do tempo na "iter-ésima" simulação

A(1,1) = A0*exp(Rport(1,1))+ FC(1,1);
S(1,1) = A(1,1) - RM(1,1);
A(2,1) = A(1,1)*exp(Rport(2,1))+ FC(2,1);
S(2,1) = A(2,1) - RM(2,1);
for t = 3:T
    A(t,1) = A(t-1,1)*exp(Rport(t,1))+ FC(t,1);

```

```

    S(t,1) = A(t,1) - RM(t,1);
    %Restrição de 25% do superávit nas reservas matemáticas
    if t~=T % Para evitar divisão por zero no ano 80
    if S(t,1)/RM(t,1)>0.25&S(t-1,1)/RM(t-1,1)>0.25&S(t-2,1)/RM(t-2,1)>0.25;
    A(t,1)=RM(t,1)*1.25;
    end
    end
end

%% ----- 4º Parte: Valor de resposta para a função objetivo

% 4-a: Vetor indicador Inad de ocorrência real de inadimplencia, em todas as
% 10.000 iterações

Inad(iter,1) = sum(A<0)>0;

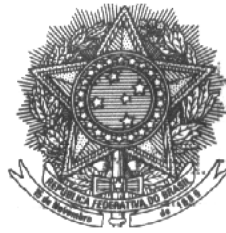
end % Termina o looping das 10.000 iterações

% 4-b: Valor da Função Objetivo
% Percentual de ocorrências de inadimplência nas 10.000 simulações

OBJFUN = (sum(Inad))/N_iter;

end

```



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ADMINISTRATIVAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM ADMINISTRAÇÃO

FELIPE VILHENA ANTUNES AMARAL

**GESTÃO DE ATIVOS E PASSIVOS EM ENTIDADES
FECHADAS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR**

BELO HORIZONTE

2010