

Luellerson Carlos Ferreira

**Invariância de Rótulo e *Shifts* no Momento de Integração
de um Diagrama de Feynman: Termos de Superfície
como Violadores da Supersimetria**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Coorientadora: Brigitte Hiller

Belo Horizonte

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Ferreira, Luellerson Carlos.

F383i Invariância de Rótulo e Shifts no momento de integração de um diagrama de Feynman: termos de superfície como violadores da supersimetria/ Luellerson Carlos Ferreira. – 2019. 137 f. il.

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio.
Co-orientadora: Brigitte Hiller
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Física.
Bibliografia: f.91 -95.

1. Teoria quântica de campos. 2. Teoria geral das partículas e campos. 3. Supersimetria. I. Título. II. Sampaio, Marcos Donizeti Rodrigues. IV. Hiller, Brigitte.

CDU – 530.145 (043)

Elaborada pela Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira da UFMG.

Dedicatória.

*à Carol, Professora Maria Carolina Nemes (in memoriam),
“mãe” de muitos(as), sempre amiga e formidável mestre!*

*à Sofia, minha amada filha,
presente do Criador, incentivo máximo e luz da minha vida!*

Agradecimentos

Ao Eterno, *Hashem*, Pai Criador de todas as coisas. Pela minha vida, saúde, e todos os bens materiais e imateriais. Por me mostrar a Sua verdade: me desculpe pelos erros e vergonha, não sou o seu melhor filho, mas também não sou o pior. Dai-me sabedoria e entendimento para seguir o Seu caminho.

Aos meus pais, pelo amor incondicional. À minha mãe Aparecida, pela tenacidade, sabedoria e amor, exemplo de vida e por sempre me “botar pra frente” para concluir este trabalho. Ao meu pai Luiz (*in memoriam*), pela força, garra e superação, por me mostrar que mesmo nos momentos mais difíceis não devemos maldizer a vida, ao contrário, devemos sempre agradecer e dar o seu devido valor.

À minha família, suporte para todos os momentos. À minha esposa, companheira e eterna namorada Gissele, por todos os momentos vividos e que ainda viveremos, pelo amor dedicado, carinho e cuidado, por ser uma mulher de verdade: junto a você me tornei um homem melhor. À minha filha Sofia, meu incentivo máximo ao acordar todo dia, por me ensinar a ser homem, e por me mostrar que o Criador sempre está no controle. À minha filha do coração Júlia, pelo carinho e empatia, pela convivência diária e nossos debates filosóficos.

Aos meus orientadores, pelos ensinamentos e lições de vida. Ao meu orientador Prof. Marcos Sampaio, por ter aceitado me orientar (novamente!), pela dedicação e enorme paciência e por ser um exemplo de professor e pesquisador. À minha coorientadora Profa. Brigitte Hiller, pela ajuda, atenção e cuidado, por sempre estar disposta a enfrentar os desafios. À eterna Carol, Profa. Maria Carolina Nemes (*in memoriam*), por ter aceitado me orientar, pelas lições de física e de vida, pelos momentos compartilhados e pela fé em seus(suas) “filhos(as)”.

Aos meus amigos de ontem e de hoje. Aos *disgraceds*, Christiano, Plínio, Samuel e Flávio, pelo companheirismo e ombro amigo, por me entenderem e me aceitarem. Aos amigos de república, Consul, Dudu (*in memoriam*), don Diego, Brenno, David, Ara, Magneto e Zé, pela convivência e por arrumar um cantinho pra eu morar. Aos amigos do grupo de TQC da UFMG, pela ajuda nas “contas”, troca de idéias e disposição: este trabalho é de todos nós.

Aos amigos da CODAFIS/IFMG-OP, pelo suporte e incentivo, pela convivência diária e troca de idéias. Por me auxiliar nos momentos de necessidade profissional e pessoal, pela amizade e companheirismo.

A todos os funcionários, servidores e terceirizados, do ICEX/UFMG, do DF-PosGrad

e do IFMG-OP, pelo zelo em suas respectivas atividades, por manter as instituições funcionando e pelo pronto atendimento em todos os momentos de necessidade.

Às agências de fomento, pelo suporte. À Capes e ao CNPq, pelo suporte financeiro no período inicial do doutorado, e ao IFMG-OP pela concessão da licença para realização do doutorado.

*“No princípio era a Palavra,
e a Palavra estava com Deus,*

*e a Palavra era Deus.
Ele estava com Deus no princípio.*

*Todas as coisas vieram à existência por meio dele,
e sem ele, nada do que foi feito veio a existir.*

*Nele estava a vida,
e a vida era a luz da humanidade.*

*A luz brilhava nas trevas,
e as trevas não a suprimiram.”
(Bíblia Judaíca Completa, João 1, 1-5)*

Resumo

A regularização implícita (RI) é um método que, no espaço dos momentos, permite o cálculo de diagramas de Feynman de uma maneira independente de regularização. A ideia por trás da RI é extrair o comportamento ultravioleta da amplitude na forma de integrais divergentes básicas que só dependam dos momentos internos no diagrama. Todos os parâmetros arbitrários embutidos no diagrama de Feynman em questão são expressos por termos de superfície que, dentro da RI, se manifestam como diferenças finitas entre integrais (logaritmicamente) divergentes. Os termos de superfície estão diretamente relacionados com a possibilidade de se fazer *shifts* (translações), nos momentos de integração. Neste trabalho almejamos um maior entendimento de como os termos de superfície, quantidades finitas, porém indeterminadas, podem contaminar o conteúdo físico de uma Teoria Quântica dos Campos. Relacionando a liberdade de rotulação de um diagrama de Feynman com a operação de *shifts* (e o resultante surgimento de termos de superfície), conseguimos obter uma simetria associada aos diagramas de Feynman, a Invariância de Rótulo. Aplicamos tal resultado no modelo de Wess-Zumino e pudemos constatar que os termos de superfície podem violar a Supersimetria, caso seu valor seja não nulo.

Palavras-chave: Termos de Superfície, Diagramas de Feynman, Invariância de Rótulo, Supersimetria.

Abstract

Implicit regularization (IR) is a method that in the momentum space allows for the calculation of Feynman diagrams in an independent manner. The idea behind the IR is to extract the ultraviolet behavior of the amplitude in the form of basic divergent integrals which depend only on the internal momenta of the diagram. All arbitrary parameters embedded in the Feynman diagram are expressed by surface terms that, within the IR, are manifested as differences between (logarithmically) divergent integrals. The surface terms are directly related to the possibility of making shifts in the integration momenta. In this work, we aim for a better understanding of how surface terms, finite but indeterminate quantities, may contaminate the physical contents of a Quantum Field Theory. Relating the freedom of labeling of Feynman diagram with the shifts operation (and the resulting appearance of surface terms), we obtained a symmetry associated with the Feynman diagrams, the Momentum Routing Invariance. We applied this invariance to the Wess-Zumino model and we could see that surface terms may violate Supersymmetry if its value is non-zero.

Keywords: Surface Terms, Feynman Diagrams, Momentum Routing Invariance, Supersymmetry.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	ESTADO DA ARTE	23
2.1	Uma reg. invariante para teorias sensíveis à continuação dimensional	23
2.2	Síntese de resultados importantes	24
2.3	Implementação do Método	25
3	TS, MRI E SIMETRIA DE CALIBRE	29
3.1	<i>Shifts</i> na Variável de Integração e Termos de Superfície	29
3.1.1	Fazendo <i>Shifts</i> com a Regularização Implícita	30
3.1.1.1	Cálculo Explícito com RI	30
3.1.1.2	Abordagem pelo <i>Shift</i>	31
3.1.1.3	A Relação de Consistência	31
3.1.2	$\Upsilon_0^{\mu\nu}$ em Regularização Dimensional e <i>Cutoff</i>	32
3.2	Parametrizando os termos de superfície	33
3.3	<i>Momentum Routing Invariance</i>	36
3.4	Prova Diagramática da Invariância de Calibre	37
3.5	Invariância de Rótulo e Simetria de Calibre	40
4	INVARIÂNCIA DE RÓTULO E SUPERSIMETRIA	53
4.1	Modelo de Wess-Zumino em componentes	53
4.2	Função de dois pontos a 1 loop	56
4.2.1	Rotulação conveniente a 1 loop	56
4.2.2	Rotulação arbitrária a 1 loop	58
4.2.3	Invariância de Rótulo	61
4.2.4	MRI e SuSy	61
4.3	Função de dois pontos a 2 loops	63
4.3.1	Rotulação Conveniente a 2 loops	64
4.3.2	Rotulação Arbitrária a 2 loops	72
4.3.3	Invariância de Rótulo	81
4.3.4	MRI e Susy	83
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	87
6	TRABALHOS RELACIONADOS À MRI	89

Referências	91
-----------------------	----

APÊNDICES **97**

APÊNDICE A – TABELA DE INTEGRAIS **99**

A.1	Integrais do Cálculo de J^μ 99
A.2	Integrais Resolvidas pela Abordagem dos <i>Shifts</i> 101
A.3	Integrais do modelo de Wess-Zumino 105
A.3.1	Integrais da seção 4.3 106
A.3.2	Integrais da seção 4.2.2 108
A.3.3	Integrais da seção 4.3.2 110

APÊNDICE B – PARAMETRIZAÇÃO DOS TS **119**

APÊNDICE C – FATORES DE SIMETRIA **123**

C.1	Fatores de Simetria em 1 loop 123
C.2	Fatores de Simetria em 2 loops 127
C.2.1	Gráficos (a), (b), (c), (d) e (e) 127
C.2.2	Gráficos (g) e (i) 130
C.2.3	Gráficos (f), (h) e (j) 132

1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é uma estrutura conceitual, fenomenológica e matemática, na qual as entidades físicas fundamentais são campos quânticos: operadores de funções do espaço-tempo, com um número infinito de graus de liberdade. Ela desenvolveu-se a partir da necessidade de entendimento e explicação de fenômenos físicos fundamentais, como a existência de antipartículas, a indistinguibilidade de partículas elementares, o spin, a estatística quântica, etc., os quais apenas podem ser compreendidos a partir de uma descrição relativística da teoria quântica [1], [2].

Assim como a Matemática é a linguagem da Física, a TQC é uma linguagem especializada, pela qual uma grande variedade de processos físicos podem ser examinados. Ela também fornece um modelo para a descrição de fenômenos da física fundamental, o chamado Modelo Padrão (MP), que tem passado por todos os testes experimentais a qual foi submetido (Figura 1). Não há comparável estrutura teórica onde pode-se calcular tantos fenômenos com tamanha facilidade e precisão [3].

Além do sucesso alcançado em física das partículas elementares, a TQC também oferece análises impressionantes em física da matéria condensada, onde muitos efeitos fascinantes (como quebra espontânea de simetria, sólitons quânticos, carga fracionária, etc.), são descritos nesta linguagem. Não obstante, a TQC também é aplicada em escalas cósmicas de distância e energia, na descrição da “inflação” - uma análise especulativa, mas completamente física da cosmologia do universo primordial, a qual é bem consistente com os dados disponíveis.

Apesar de formidável desempenho, muitos são os críticos da TQC, buscando trocá-la por outras abordagens, como a Teoria de Cordas, por exemplo. Este movimento baseia-se nos fatos de que: por um lado, o MP requer dados de entrada *ad hoc* e não abrange a interação gravitacional; e, por outro, pela ocorrência de divergências quando o formalismo é desenvolvido no cálculo de processos físicos.

Ora, nenhum modelo é completo e toda teoria física tem um domínio de validade além do qual somos ignorantes da física envolvida. Por exemplo, não é razoável supor que a teoria que descreve um elétron interagindo com um próton, seja válida para energias arbitrariamente altas: com o aumento gradual da energia, outras partículas vão surgindo, e a Eletrodinâmica Quântica (QED), torna-se uma mera parte da Teoria Eletrofraca [5]. A TQC deve ser pensada como uma Teoria Efetiva a Baixas Energias, válida até uma escala de energia da ordem de alguns TeV (teraelétrons-volt). Acima desse limiar, uma nova física deve surgir e uma nova teoria deve ser construída para abarcar os novos fenômenos.

Por sua vez, as divergências surgem de vários modos em TQC, sendo as mais im-

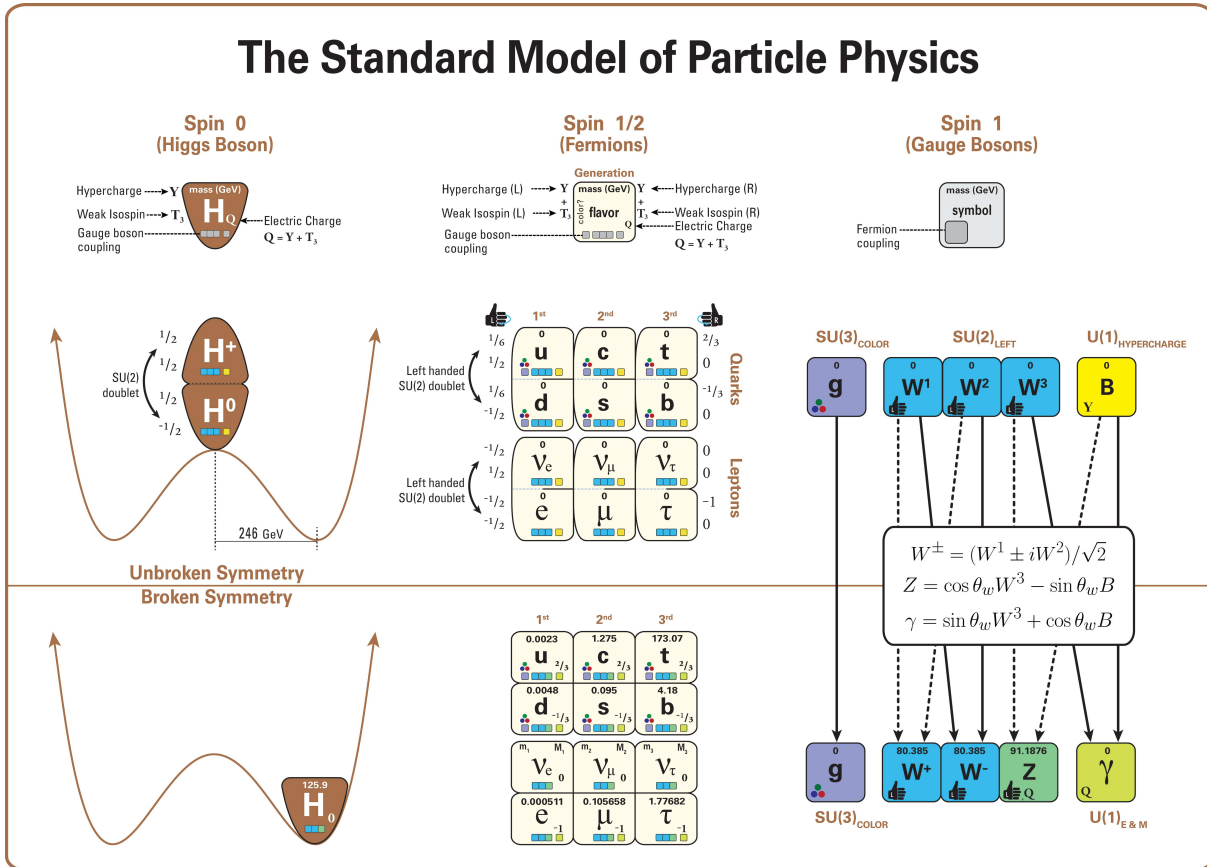


Figura 1 – Partículas elementares do Modelo Padrão (o bóson de Higgs, as três gerações de quarks e léptons, e os bósons de Calibre), incluindo seus nomes, massas e vários números quânticos, além de suas interações com as forças eletromagnética, fraca e forte. Também está destacado o papel crucial do bóson de Higgs na quebra da simetria eletrofraca, e é mostrado como as propriedades das várias partículas diferem na fase simétrica de altas energias (acima), da fase de quebra de simetria em baixas energias (abaixo). Retirado de [4].

pactantes, aquelas referentes à integração ou soma sobre estados intermediários, em uma série perturbativa: realizando a integração em termos da variável energia, os infinitos podem surgir do domínio de baixas energias (divergências infravermelhas), e/ou do domínio de altas energias (divergências ultravioletas).

Há um consenso de que as divergências infravermelhas não surgem de qualquer defeito intrínseco da teoria, mas antes de tentativas ilegítimas de forçar a teoria a consignar questões não físicas [3]. Por outro lado, os infinitos ultravioletas surgem como uma consequência da localização espaço-temporal das interações, às quais ocorrem em um único ponto, ao invés de uma região.

As divergências em TQC não devem ser vistas como defeitos não mitigados, antes elas transmitem informações crucialmente importantes sobre a situação física de determinados fenômenos. As divergências ultravioletas, aparentemente intrínsecas à TQC, não podem ser excluídas, mas podem ser contornadas ou “escondidas”, pela Renormalização: um processo de inequívoco sucesso em extrair previsões numéricas do MP.

Simetrias sempre foram guias para a construção de teorias físicas. O próprio *Sir* Isaac Newton percebeu que

...simetrias fundamentais não são reveladas nos movimentos de objetos individuais, mas no conjunto de todos os possíveis movimentos - simetrias são manifestadas em equações de movimento ao invés de soluções particulares destas equações [traduzido de [6], pag. 104].

As implicações dinâmicas desta constatação só foram completamente entendidas em 1917 pela matemática Emmy Noether, com o teorema de sua autoria, o qual diz que toda simetria da natureza produz uma lei de conservação, assim como toda lei de conservação revela uma simetria subjacente. Por exemplo, as leis da Física são simétricas em relação à translações temporais (elas não se alteram com o decorrer do tempo), e isto acarreta à conservação da energia [6].

Outro exemplo é que enquanto a descrição quântica faz uso de números complexos, as quantidades físicas são reais, de modo que fases complexas podem ser mudadas à vontade, sem afetar o conteúdo físico. Esta invariância pela redefinição da fase, chamada simetria de calibre, leva à conservação da carga [3].

Não obstante à nossa preferência de que as leis da natureza sejam simétricas, o mundo descrito por estas leis não o é: fenômenos físicos reais raramente exibem grande regularidade. Assim, ao mesmo tempo que constrói-se uma teoria física com uma simetria intrínseca, surge a necessidade de encontrar um modo de “quebrar” esta simetria, como forma de abarcar as consequências físicas do modelo.

Simetrias podem ser quebradas por “força bruta”, alterando termos na Lagrangeana da teoria, porém tal meio não traz consequências físicas fundamentais. Um modo mais sutil é a quebra espontânea de simetria, mecanismo onde as leis dinâmicas são simétricas, mas apenas configurações assimétricas são fisicamente realizáveis, uma vez que as configurações simétricas são energeticamente instáveis: diz-se que a simetria das equações de movimento é espontaneamente quebrada pela solução estável (assimétrica).

Pode ser demonstrado que a quebra espontânea de simetria ocorre em TQC devido aos infinitos intrínsecos da teoria [3], e foi por este meio que Weinberg e Salam quebraram simetrias indesejadas no modelo padrão na construção da Teoria Eletrofraca.

Há, ainda, a quebra anômala ou quântica de simetria: após a realização do processo de quantização, algumas simetrias da física clássica podem desaparecer quando a teoria quântica é devidamente definida na presença de seus infinitos. Um exemplo bem entendido de quebra anômala é o da simetria quiral, a invariância de fase para férmions sem massa e de única helicidade.

O decaimento do pión neutro em dois fótons, embora observado experimentalmente, era “proibido” pela análise teórica da invariância de calibre no canal de decaimento dos

quarks up-down (componentes deste pión). Com o entendimento de que a simetria quiral era anomalmente quebrada pelos infinitos ultravioletas da teoria, a amplitude deste decaimento pode ser finalmente calculada (na aproximação de que o pión é sem massa), e seu resultado apresenta excelente acordo com o obtido experimentalmente.

Assim, percebe-se que os infinitos da TQC local não são manchas indesejáveis da teoria, ao contrário, o sucesso de várias teorias de campo na descrição de fenômenos físicos dependem da ocorrência destes infinitos, como é o caso das quebras anômalas de simetria [2].

Para o tratamento e manipulação destas divergências é adotado em TQC o programa da Regularização. A Regularização Dimensional (RegD) [7], [8], e seus variantes, são os métodos mais comuns adotados para cálculos de ordem prática, em teorias de calibre da física de partículas elementares [9]. A idéia básica destes métodos dimensionais é regularizar integrais divergentes utilizando uma mudança na dimensão física da teoria, a partir de uma continuação analítica.

Além da RegD quebrar explicitamente a supersimetria, sabe-se que métodos dimensionais de regularização enfrentam problemas na presença de matrizes γ_5 e tensores completamente antissimétricos ϵ . Isto ocorre porque as propriedades usuais destes objetos em dimensões inteiras não são consistentes com o tratamento de tensores de Lorentz na RegD [10].

Um conjunto consistente de regras para manipular tensores de Lorentz em RegD foi proposto, entretanto, além de anomalias genuínas, algumas anomalias espúrias (não físicas) surgiram em funções de correlação de correntes axial-vetor em QCD e em teorias de calibre quirais, incluindo o MP. Tal obstáculo foi contornado, mas ao custo de uma grande complicação no método de cálculo [10].

A obtenção de quantidades físicas independentes do método de regularização adotado ocorre apenas após a implementação do programa de renormalização e da combinação adequada de correções reais e virtuais. Não obstante, a escolha do método está relacionada a questões de relevância conceitual e prática, na medida em que tal método deve seguir alguns preceitos como: os cálculos não podem levar a equações que se contradizem; os resultados finitos finais tem de ser compatíveis com os princípios de unitariedade e causalidade; a conservação de simetrias fundamentais como Lorentz, Calibre e Supersimetria; o respeito ao Princípio da Ação Quântica, traduzido pela relação entre as simetrias da Lagrangeana e as identidades de Ward/Slavnov-Taylor; e a eficiência computacional, na medida em que o método permita o uso de técnicas eficientes e idealmente menos complexas, tanto quanto possível [9].

A Regularização Implícita (RI) é um método que, no espaço dos momentos, permite o cálculo de diagramas de Feynman de uma maneira independente de regularização.

Consequentemente, é um bom método para se estudar quebras quânticas de simetria dentro de teoria de perturbação. Na RI, a Lagrangiana do modelo não é modificada porque nenhum regulador explícito é introduzido, além dela operar na dimensão física da teoria.

A vantagem deste procedimento sobre a RegD é que uma classe de teorias físicas importantes são sensíveis à continuação analítica na dimensão do espaço-tempo. Nesta classe, estão as teorias quirais, como o setor eletrofraco do modelo padrão e além do modelo padrão, as teorias topológicas (Chern-Simons) e teorias supersimétricas.

É neste contexto de TQC, regularizações, simetrias e sua quebra, que este trabalho é proposto. Assim, esta tese está organizada da seguinte forma:

- No capítulo 2, descrevo a necessidade e alguns resultados importantes do método de Regularização Implícita, bem como o funcionamento do mesmo.
- No capítulo 3, começamos com a conexão entre *shifts* no momento de integração de um diagrama de Feynman e o surgimento dos termos de superfície (TS). Depois, vemos como esses TS são vistos em algumas regularizações e, em particular, sua parametrização em RI. Finalmente, passamos para a construção da idéia de Invariância de Rótulo (MRI) dentro da RI e sua conexão com a simetria de calibre.
- No capítulo 4, introduzo o Modelo de Wess-Zumino e demonstro, até um nível de 2 loops, que a implementação da MRI é uma ferramenta poderosa para a conservação da supersimetria global.
- No capítulo 5, faço a análise dos resultados encontrados.
- No capítulo 6, comento sobre alguns trabalhos subsequentes a este, onde há a implementação e expansão dos conceitos relacionados à MRI.
- Nas seções finais temos as referências bibliográficas e os apêndices, onde se encontram as tabelas e resoluções de algumas integrais do trabalho, a parametrização dos TS e o cálculo de alguns fatores de simetria relacionados às amplitudes do capítulo 4.

2 Estado da Arte

2.1 Uma regularização invariante para teorias sensíveis à continuação dimensional

A idéia por trás da regularização implícita é extrair o comportamento ultravioleta da amplitude na forma de integrais divergentes básicas que só dependam dos momentos internos no diagrama. Estas integrais divergentes básicas podem ser subtraídas e absorvidas nos contratermos sem seu cálculo explícito.

De fato, o cálculo explícito é a origem de anomalias espúrias que podem contaminar a física do modelo estudado. Todos os parâmetros arbitrários embutidos no diagrama de Feynman em questão são expressos por termos de superfície que, dentro da RI, se manifestam como diferenças finitas entre integrais (logaritmicamente) divergentes. Os termos de superfície estão diretamente relacionados com a possibilidade de se fazer *shifts* (translações) nos momentos de integração. Tais parâmetros “escondidos” são determinados exclusivamente com base na física do problema, nomeadamente do seu conteúdo de simetria ou pela fenomenologia (ajuste numérico experimental).

Com relação ao programa de renormalização implementado por Bogoliubov, Parasiuk, Hepp e Zimmerman (BPHZ), embora seja importante na construção de provas de renormalizabilidade em todas as ordens, para teorias de calibre, as identidades de Slavnov-Taylor que garantem que a simetria de calibre não é quebrada, têm que ser impostas como equações de vínculo ordem a ordem porque tal simetria pode ser quebrada. Além disso, modificações devem ser feitas no programa BPHZ para tratar teorias sem massa [11].

De fato, a regularização e renormalização do Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MPSM) é um problema em aberto: a precisão experimental dos atuais e futuros aceleradores requer previsões teóricas dentro do modelo padrão e do MPSM ao nível de, pelo menos, até dois loops (veja por exemplo a página do projeto SPA *Supersymmetry Parameter Analysis*, <http://spa.desy.de/spa/>, para uma visão completa e atualizada). Dentro do MPSM, um esquema de regularização invariante, que permita de forma inequívoca discernir entre uma anomalia física e uma espúria ainda não existe [12].

Embora a regularização dimensional seja invariante de calibre, ela quebra supersimetria e simetria quiral. A razão é que a continuação dimensional do tensor de Levi-Civita é ambígua além de um loop, enquanto a supersimetria é intrinsecamente definida na dimensão física da teoria. Um procedimento alternativo chamado redução dimensional (RD) [13], funciona bem somente a um loop e foi mostrado como matematicamente incon-

sistente (Veja [14] para uma extensão até dois loops). Na prática, adiciona-se contratermos ordem a ordem no cálculo perturbativo para restaurar simetrias que foram quebradas no processo de regularização. Tal procedimento leva a complicações técnicas significativas e a RI surge como uma candidata natural para a solução destes problemas.

2.2 Síntese de resultados importantes

A Regularização Implícita teve seu surgimento no final da década de 90 do século passado, fruto da colaboração do Grupo de Teoria Quântica de Campos da UFMG a partir dos trabalhos [15], [16] e [17]. Ao passar dos anos, o método foi sendo aperfeiçoado e vários pesquisadores contribuíram para seu desenvolvimento. A seguir, temos um breve resumo desse desenvolvimento e dos trabalhos relacionados.

A RI foi aplicada em vários modelos em TQC incluindo teorias de calibre sensíveis à continuação dimensional, onde a RD falha. Em [18], aplicou-se o método à eletrodinâmica quântica e a teorias envolvendo objetos violadores de paridade (Chern-Simons e o Modelo de Schwinger Quiral). Em [19] estudou-se a possibilidade de violação CPT numa versão quiral estendida da eletrodinâmica quântica. Uma comparação entre a RI, a RD, a regularização diferencial e o método BPHZ no estudo de divergências acavaladas, foi feita em [20]. Neste trabalho descreveu-se como é definido um esquema de regularização dentro da RI, onde os infinitos são expressos como integrais nos momentos internos: definiu-se o que seria o análogo da subtração mínima em RD e um esquema independente da massa, que é importante no controle de divergências infravermelhas em teorias sem massa.

Uma versão vinculada da RI que preserva invariância de calibre (não-abeliana) *ab initio* foi exemplificada no estudo da cromodinâmica quântica até um loop em [21]. Uma investigação sistemática do tratamento de divergências acavaladas exemplificado pela teoria φ_6^3 usando RI foi estudada em [22]. Em [23], demonstrou-se que a RI pode ser manifestamente invariante por supersimetria. Para tal, calculou-se a função β do modelo de Wess-Zumino até a ordem de três loops. Aplicações fenomenológicas ao *gauged Nambu and Jona-Lasinio model* podem ser encontradas em [17]. Em [24], foi feito um estudo sistemático de anomalias em TQC. Mostrou-se, em diferentes casos, desde a famosa anomalia do triângulo até anomalias gravitacionais para férmions imersos num espaço curvo em duas dimensões, que os parâmetros arbitrários dependentes de regularização, corretamente parametrizados dentro da RI, são importantes para apresentar a quebra de simetria de maneira democrática entre as identidades de Ward, que um dado diagrama satisfaz a nível clássico mas pode não satisfazer a nível quântico.

Finalmente, numa versão $SU(2) \otimes SU(2)$ do modelo sigma linear mostrou-se que correções radiativas levam a contribuições finitas indeterminadas que aparecem em RI como diferenças entre integrais divergentes. Mostrou-se que, embora algumas ambiguidades

des sejam fixas por renormalização sobre um parâmetro livre na constante de decaimento do pión, que, contudo, é fixa por simetria quiral [25]. A generalização para ordem arbitrária em *loops* da RI, tanto para teorias escalares quanto para teorias de gauge abelianas de maneira invariante, foi feita em [26] e [27]. O mapeamento da RI na renormalização diferencial a um loop foi feito em [28]. O estudo das correções de supergravidade para o momento magnético anômalo $(g - 2)_l$ do lépton foi feito em [29].

2.3 Implementação do Método

A Regularização Implícita é um método operacional que, em suma, separa as quantidades pertinentes a correções radiativas em integrais divergentes básicas (IDB), termos de superfície (TS) e contribuições finitas. Dentro do método, esta filtragem se justifica a partir do fato de haver, na literatura, um mal entendimento em relação ao comportamento divergente de uma amplitude no que se refere às ambiguidades emergentes do cálculo explícito das integrais divergentes, sem a prévia identificação e distinção das IDB e dos TS. As contribuições finitas, por sua vez, podem ser determinadas utilizando-se qualquer método calculacional, uma vez que seu resultado será sempre o mesmo independente da regularização implementada.

As IDB, dentro da RI, podem ser subtraídas e absorvidas nos contratermos sem seu cálculo explícito, enquanto que os TS, antes tratados como ambiguidades *a priori* indeterminadas, surgem como quantidades finitas, que serão determinadas pelo conteúdo físico da teoria.

As integrais divergentes básicas são classificadas pelo seu grau de divergência, que pode ser quadrático, linear ou logaritmico. As IDB utilizadas neste trabalho são,

$$I_{quad}^{(n)}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \ln^{(n-1)} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.1)$$

$$I_{quad}^{(n)\mu\nu}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^2} \ln^{(n-1)} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.2)$$

$$I_{log}^{(n)}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} \ln^{(n-1)} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.3)$$

$$I_{log}^{(n)\mu\nu}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} \ln^{(n-1)} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.4)$$

$$I_{log}^{(n)\mu\nu\rho\eta}(m^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - m^2]^4} \ln^{(n-1)} \left(-\frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.5)$$

as quais são integrais quadrática (índice *quad*) e logaritmicamente (índice *log*) divergentes por contagem de potências, e sem dependência nos momentos externos do diagrama.

As IDBs são quantidades divergentes, porém sem significado físico, uma vez que toda informação sobre o processo físico está atrelada aos momentos externos. O índice n se refere à ordem da IDB e, conseqüentemente, à ordem da teoria de perturbação que estamos operando.

Quando tivermos uma teoria sem massa, podemos utilizar uma massa fictícia μ na forma

$$I_{log}(\mu^2) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \mu^2]^2}, \quad (2.6)$$

que pode ser removida no final do cálculo, a partir da relação independente de regularização

$$I_{log}(\mu^2) = I_{log}(\lambda^2) - b \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (2.7)$$

sendo $b = i/(4\pi)^2$. A equação acima é chamada relação de escala, pois permite trocar a massa fictícia por uma constante arbitrária positiva λ , que assume o papel de escala do grupo de renormalização.

Para o tratamento das integrais divergentes utilizaremos a identidade algébrica

$$\frac{1}{(k-p)^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]}, \quad (2.8)$$

no nível dos integrandos, quantas vezes for necessário, até que consigamos separar as IDB dos TS e da parte finita. Para exemplificar, consideremos a integral

$$I^\mu \equiv \int_k \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]}, \quad (2.9)$$

onde usamos a notação

$$\int_k \equiv \int^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4},$$

sendo Λ um *cutoff* superior, um regulador implícito necessário para podermos fazer as manipulações nos integrandos. Utilizando a identidade (2.8) teremos,

$$I^\mu = \int_k \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2} + \int_k \frac{k^\mu [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^2 [(k-p)^2 - m^2]}, \quad (2.10)$$

onde temos que a primeira integral é nula por ser o integrando uma função ímpar dentro de um limite de integração simétrico. A segunda integral tem duas partes, a primeira ainda superficialmente divergente e a segunda finita. Assim reutilizaremos a relação (2.8), que produzirá:

$$\begin{aligned} I^\mu &= 0 + 2p_\nu \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^2 [(k-p)^2 - m^2]} - p^2 \int_k \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2 [(k-p)^2 - m^2]} = \\ &= 2p_\nu \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} + 2p_\nu \int_k \frac{k^\mu k^\nu [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^3 [(k-p)^2 - m^2]} - \\ &\quad - p^2 \int_k \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2 [(k-p)^2 - m^2]}, \\ I^\mu &= 2p_\nu I_{log}^{\mu\nu}(m^2) + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 2p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^\mu, \end{aligned} \quad (2.11)$$

sendo $I_{log}^{\mu\nu}(m^2)$ o termo que engloba tanto a IDB quanto o TS, e as integrais

$$I_{f,i,j}^{(n)}, I_{f,i,j}^{(n)\mu}, I_{f,i,j}^{(n)\mu\nu}, I_{f,i,j}^{(n)\mu\nu\rho} \equiv \int_k \frac{1, k^\mu, k^\mu k^\nu, k^\mu k^\nu k^\rho}{[k^2 - m^2]^i [(k-p)^2 - m^2]^j} \left[\ln \left(- \frac{k^2 - m^2}{\lambda^2} \right) \right]^{n-1}, \quad (2.12)$$

são integrais finitas I_f .

Para separmos a IDB do TS temos a relação de consistência

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ \frac{k^\nu}{[k^2 - m^2]^2} \right\} = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} - 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3}, \quad (2.13)$$

a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Upsilon_0^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{log}(m^2) - 4I_{log}^{\mu\nu}(m^2), \\ I_{log}^{\mu\nu}(m^2) &= \frac{1}{4}g^{\mu\nu} I_{log}(m^2) - \frac{1}{4}\Upsilon_0^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo $I_{log}(m^2)$ a IDB e $\Upsilon_0^{\mu\nu}$ o termo de superfície. Utilizando a relação de consistência no cálculo de I^μ , produz:

$$\begin{aligned} I^\mu &= 2p_\nu \left[\frac{1}{4}g^{\mu\nu} I_{log}(m^2) - \frac{1}{4}\Upsilon_0^{\mu\nu} \right] + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 2p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^\mu, \\ I^\mu &= \frac{1}{2}p^\mu I_{log}(m^2) - \frac{1}{2}p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 2p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^\mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Neste ponto, podemos resolver a parte finita com o uso de qualquer regularização, e o resultado é:

$$4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 2p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^\mu = \frac{p^\mu}{2} \left[2b - b \ln \left(- \frac{p^2}{m^2} \right) \right].$$

Com este resultado e usando a relação de escala (2.7), nossa integral resultará em:

$$I^\mu = \underbrace{\frac{1}{2}p^\mu I_{log}(\lambda^2)}_{IDB} - \underbrace{\frac{1}{2}p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}}_{TS} + \underbrace{\frac{p^\mu}{2} \left[2b - b \ln \left(- \frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right]}_{\text{termos finitos}}. \quad (2.16)$$

3 Termos de Superfície, Invariância de Rótulo e Simetria de Calibre

Neste capítulo, pretendemos dar uma visão geral sobre a relação entre rotulação de um diagrama de Feynman, *shifts* no momento interno e os termos de superfície gerados por estes *shifts*. Primeiro, veremos como os TS surgem e como são tratados em diferentes regularizações. Depois, realizaremos uma parametrização geral para os termos de superfície demonstrando como podemos implementar valores aos mesmos, por meio da Regularização Implícita. A seguir, apresentaremos a prova diagramática da invariância de calibre e analisaremos as identidades de Ward-Takahashi para os diagramas do tensor de polarização do vácuo da Eletrodinâmica Quântica (QED), utilizando várias rotulações. Neste ambiente veremos que a escolha da rotulação para um determinado diagrama reflete no aparecimento de possíveis termos de superfície, interpretados como o preço que pagamos pelos *shifts* em integrais de divergência superior à linear. Concluimos o capítulo demonstrando a relação entre simetria de calibre e a Invariância de Rótulo.

3.1 *Shifts* na Variável de Integração e Termos de Superfície

No artigo [30], os autores calculam diferenças entre integrais de Feynman linearmente divergentes, as quais se diferem por *shifts* nas variáveis de integração. Em 4 dimensões, essa diferença leva a termos de superfície finitos, chamados de termos de superfície de *Jauch-Rohrlich* :

$$\int d^4k \frac{k^\mu}{[(k-p)^2 - m^2]^2} - \int d^4k \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2} = -i\pi^2 \frac{p^\mu}{2}.$$

A discussão leva à regularização dimensional, onde a mesma diferença de integrais resulta em

$$\int d^n k \frac{k^\mu}{[(k-p)^2 - m^2]^2} - \int d^n k \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2} = 0,$$

para uma dimensão n . Entretanto, quando a dimensão $n \rightarrow 4$, a mesma diferença de integrais levará a outro resultado, demonstrando o caráter ambíguo desta quantidade finita, cujo resultado é dependente de regularização.

Agora, iremos calcular esta diferença no contexto da regularização implícita e ver qual será o resultado. Para maior comodidade definiremos

$$J^\mu \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k-p)^2 - m^2]^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2}. \quad (3.1)$$

3.1.1 Fazendo *Shifts* com a Regularização Implícita

Para calcularmos a diferença (3.1) podemos seguir o roteiro dos autores do artigo citado, utilizando parametrização de Feynman, seguido de *shifts*, integração por partes até obter o resultado final, ou podemos aplicar a RI desde o início. Aqui, primeiro faremos o cálculo explícito das integrais em (3.1) utilizando a RI, depois realizaremos um *shift* na primeira integral de (3.1) para resolver esta diferença e finalmente compararemos os resultados encontrados.

3.1.1.1 Cálculo Explícito com RI

O primeiro passo para realizar o cálculo explícito das integrais em (3.1) com RI, é separar as partes puramente divergentes das demais. Como pode ser visto na seção A.1 do Apêndice A, para tal fim utilizaremos a identidade algébrica (2.8) no nível dos integrandos, quantas vezes for necessário. Assim, utilizando o resultado (A.1) a nossa diferença de integrais (3.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
J^\mu &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k-p)^2 - m^2]^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2} = \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k^\mu k \cdot p}{[k^2 - m^2]^3} + \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k^\mu k \cdot p [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^3 [(k-p)^2 - m^2]} - p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2 [(k-p)^2 - m^2]} - \\
&\quad - p^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2] [(k-p)^2 - m^2]^2} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k \cdot p [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^2 [(k-p)^2 - m^2]^2} - \\
&\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2}, \\
J^\mu &= -p^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} + 4p_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} + \\
&\quad + 8p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 4p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^\mu - p^2 I_{f,1,2}^\mu + 4p_\nu p_\rho I_{f,2,2}^{\mu\nu\rho} - 2p_\nu p^2 I_{f,2,2}^{\mu\nu}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Na primeira linha do lado direito do resultado acima podemos identificar nossas IDBs $I_{log}(m^2)$ e $I_{log}^{\mu\nu}(m^2)$ e na segunda linha temos integrais finitas que estão tabeladas no Apêndice A. Assim, utilizando o resultado (A.9) nossa diferença de integrais fica:

$$\begin{aligned}
J^\mu &= -p^\mu I_{log}(m^2) + 4p_\nu I_{log}^{\mu\nu}(m^2) + \\
&\quad + 8p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 4p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - 2p^2 I_{f,2,1}^\mu + p^4 I_{f,2,2}^\mu - 4p_\nu p^2 I_{f,2,2}^{\mu\nu} + 4p_\nu p_\rho I_{f,2,2}^{\mu\nu\rho},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J^\mu = -p_\nu \left\{ g^{\mu\nu} I_{log}(m^2) - 4I_{log}^{\mu\nu}(m^2) \right\}. \quad (3.3)$$

3.1.1.2 Abordagem pelo *Shift*

Para um função $f(k)$ em torno de um ponto a , sempre podemos fazer a expansão em Taylor

$$\begin{aligned} f(k+a) \Big|_{k+a \rightarrow k} &= f(k) + a_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f(k) + \frac{1}{2!} a_\sigma a_\rho \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} f(k) + \dots = \\ &= \left(1 + a_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma} + \frac{1}{2!} a_\sigma a_\rho \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} + \dots \right) f(k) = \\ &= e^{a_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma}} f(k). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por sua vez, sabe-se que se

$$B \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f(k),$$

e, sendo a integral finita por contagem de potências (ou seja, a dimensão do integrando é menor que $-d$), então, pelo Teorema de Gauss, B é nulo.

Podemos fazer um *shift* na primeira integral de (3.1) na forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k-p)^2 - m^2]^2} \Big|_{k-p \rightarrow k} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{(-p_\nu) \frac{\partial}{\partial k_\nu}} \frac{k^\mu + p^\mu}{[k^2 - m^2]^2} = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu + p^\mu}{[k^2 - m^2]^2} + \\ &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-p_\nu) \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu + p^\mu}{[k^2 - m^2]^2} + \\ &\quad + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2!} (-p_\nu) \frac{\partial}{\partial k_\nu} (-p_\rho) \frac{\partial}{\partial k_\rho} \frac{k^\mu + p^\mu}{[k^2 - m^2]^2} + \dots = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu + p^\mu}{[k^2 - m^2]^2} - p_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2}, \end{aligned}$$

onde os termos de ordem maior ou igual a 2 são nulos pelo Teorema de Gauss. Com isto podemos escrever a nossa diferença de integrais (3.1) na forma:

$$\begin{aligned} J^\mu &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[(k-p)^2 - m^2]^2} \Big|_{k-p \rightarrow k} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2} = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu + p^\mu}{[k^2 - m^2]^2} - p_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2} - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^\mu}{[k^2 - m^2]^2}, \\ J^\mu &= -p_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.1.3 A Relação de Consistência

Finalmente, comparando os resultados obtidos pela aplicação direta da RI (3.3) com a abordagem pelos *shifts* (3.5), na diferença de integrais linearmente divergentes, as quais se diferem por um *shift* na variável de integração, equação (3.1), temos a relação

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2]^2} = g^{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - 4I_{\log}^{\mu\nu}(m^2), \quad (3.6)$$

a qual é idêntica à relação de consistência da RI, equação (2.13).

3.1.2 $\Upsilon_0^{\mu\nu}$ em Regularização Dimensional e *Cutoff*

Para melhor entendimento de como é a dependência com regularização do termo de superfície obtido a equação (3.6), vamos calcular o mesmo utilizando duas das mais conhecidas regularizações, a regularização dimensional (RegD) e a regularização *sharp cutoff* (RegSC).

Partindo da definição do termo de superfície

$$\Upsilon_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} - 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3}, \quad (3.7)$$

começemos com a RegD. Na mesma, passamos do espaço-tempo quadridimensional para o d -dimensional, sendo as integrais resultantes previamente tabeladas como em [31], de forma que:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} = \frac{(-1)^2 i \Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(2)} \frac{1}{(m^2)^{2-d/2}}$$

e

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} = \frac{(-1)^2 i g^{\mu\nu} \Gamma(3 - d/2 - 1)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(3)} \frac{1}{(m^2)^{3-d/2-1}},$$

com $\Gamma(x) = (x-1)!$ sendo a função gamma de Euler. Assim, nosso TS resulta em

$$\begin{aligned} \Upsilon_{0,RegD}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} - 4 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} = \\ &= \frac{ig^{\mu\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(m^2)^{2-d/2}} - \frac{4}{2!} \frac{ig^{\mu\nu}}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(m^2)^{2-d/2}}, \\ \Upsilon_{0,RegD}^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou seja, a RegD anula o TS automaticamente, o que, por um lado, garante a conservação da simetria de calibre na QED mas, por outro, encontre o papel ambíguo desta quantidade em teorias sensíveis à continuação dimensional, como a Supersimetria.

Agora, vamos utilizar a RegSC. Primeiro consideremos a integral

$$I_{log(m^2)_{RegSC}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}.$$

Passando do espaço de Minkowski para o Euclidiano, fazemos as substituições

$$k^2 \rightarrow -k_E^2,$$

$$d^4k \rightarrow id^4k_E,$$

$$\int d^4k_E = \int_0^\infty dk_E k_E^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^\pi d\theta_2 \sin^2(\theta_2) = 2\pi^2 \int_0^\infty dk_E k_E^3,$$

e nossa integral fica

$$\begin{aligned} I_{\log}(m^2)_{RegSC} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} = i \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk_E \frac{k_E^3}{[k_E^2 + m^2]^2} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty dk_E^2 \frac{k_E^2}{[k_E^2 + m^2]^2} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dk_E^2 \frac{k_E^2}{[k_E^2 + m^2]^2}, \end{aligned}$$

onde, na última passagem, substituímos o limite superior de integração por um *cutoff* Λ . O mesmo fazemos para

$$I_{\log}^{\mu\nu}(m^2)_{RegSC} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3},$$

com a substituição

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^\mu k^\nu f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 f(k^2),$$

de forma que

$$\begin{aligned} I_{\log}^{\mu\nu}(m^2)_{RegSC} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - m^2]^3} = \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int \frac{id^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{-k_E^2}{[-k_E^2 - m^2]^3} = \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dk_E^2 \frac{k_E^4}{[k_E^2 + m^2]^3}. \end{aligned}$$

Assim, nosso termo de superfície resultará em

$$\begin{aligned} \Upsilon_{0,RegSC}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} - 4 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - m^2]^3} = \\ &= g^{\mu\nu} \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\Lambda dk_E^2 \left[\frac{k_E^2}{[k_E^2 + m^2]^2} - \frac{k_E^4}{[k_E^2 + m^2]^3} \right], \\ \Upsilon_{0,RegSC}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \frac{i}{2(4\pi)^2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

ou seja, na RegSC, o TS é não nulo, o que implica no fato desta regularização violar a simetria de calibre na QED, uma vez que tal simetria está atrelada ao valor do TS, como veremos na última seção deste capítulo.

3.2 Parametrizando os termos de superfície

Na seção anterior, vimos quão dependente de regularização é o valor do termo de superfície, quantidade *a priori* finita, porém indeterminada. Neste trabalho entendemos que tal ambiguidade deve ser sanada, uma vez que o conteúdo físico de uma determinada teoria não deve depender da matemática usada na resolução de suas integrais. Como veremos mais adiante, as violações da simetria de calibre, assim como da supersimetria,

estão diretamente atreladas ao valor denotado aos TS, como expresso nas identidades de Ward-Takahashi. Nesta seção, implemetaremos uma parametrização dos TS, de tal modo que sua estrutura funcional seja explicitada para a realização do cálculo das amplitudes pretendidas neste trabalho.

Dentro da RI a relação de consistência (2.13) pode ser obtida por derivação direta no integrando, na forma:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_0^{\mu\nu} &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^2} = \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^{\nu\alpha} \delta_{\alpha\mu} [k_\beta k^\beta - \lambda^2]^{-2} + \\
&\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^\nu (-2) [k_\beta k^\beta - \lambda^2]^{-3} [\delta_{\mu\beta} k^\beta + k_\beta g^{\beta\sigma} \delta_{\sigma\mu}] = \\
&= g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \lambda^2]^2} - 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3}, \\
\Upsilon_0^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{log}(\lambda^2) - 4I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

De modo semelhante obtemos mais duas relações de consistência

$$\begin{aligned}
\Upsilon_0^{\mu\nu\rho\eta} &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - \lambda^2]^3}, \\
\Upsilon_0^{\mu\nu\rho\eta} &= g^{\mu\nu} I_{log}^{\rho\eta}(\lambda^2) + g^{\mu\rho} I_{log}^{\nu\eta}(\lambda^2) + g^{\mu\eta} I_{log}^{\nu\rho}(\lambda^2) - 6I_{log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Upsilon_2^{\mu\nu} &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]}, \\
\Upsilon_2^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - 2I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Vamos parametrizar o TS definido na equação (3.10), sendo os outros parametrizados de forma semelhante, como pode ser verificado no Apêndice B. Tomando a derivada de $I_{log}(\lambda^2)$ em relação a λ^2 , teremos

$$\frac{d}{d\lambda^2} I_{log}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \frac{1}{[k^2 - \lambda^2]^2} = 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \lambda^2]^3},$$

sendo a integral finita dada por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \lambda^2]^3} = -\frac{b}{2!} \frac{1}{\lambda^2},$$

e assim

$$\frac{d}{d\lambda^2} I_{log}(\lambda^2) = -b \frac{1}{\lambda^2}.$$

Agora, fazemos o caminho oposto, ou seja, tomamos a integral do resultado acima para obter a primitiva:

$$I_{log}(\lambda^2) = \int d\lambda'^2 \frac{-b}{\lambda'^2} = -b \left[\ln \lambda^2 + C_1 \right], \quad (3.13)$$

com C_1 sendo uma constante arbitrária de integração.

Por sua vez, tomando a derivada de $I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2)$ em relação a λ^2 , teremos

$$\frac{d}{d\lambda^2} I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3} = 3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^4},$$

sendo a integral finita dada por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^4} = -\frac{b}{2} \frac{g^{\mu\nu}}{3!} \frac{1}{\lambda^2},$$

e assim

$$\frac{d}{d\lambda^2} I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2) = -b \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Tomando o caminho inverso, teremos:

$$I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2) = \int d\lambda'^2 (-b) \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{1}{\lambda'^2} = -b \frac{g^{\mu\nu}}{4} \left[\ln \lambda^2 + C_2 \right], \quad (3.14)$$

sendo C_2 outra constante arbitrária de integração.

Aplicando os resultados (3.13) e (3.14) em (3.10), podemos escrever nosso termo de superfície na forma:

$$\begin{aligned} \Upsilon_0^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{log}(\lambda^2) - 4 I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2) = \\ &= g^{\mu\nu} (-b) \left[\ln \lambda^2 + C_1 \right] - 4 (-b) \frac{g^{\mu\nu}}{4} \left[\ln \lambda^2 + C_2 \right] = \\ &= b \left[C_2 - C_1 \right] g^{\mu\nu}, \\ \Upsilon_0^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} v_{0,2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

com $v_{0,2} \equiv b \left[C_2 - C_1 \right]$ sendo determinado pelo valor das constantes arbitrárias de integração, o qual muda de regularização para regularização. Em RI, deixamos o conteúdo físico da teoria determinar o valor desta constante, através das simetrias subjacentes à teoria. A notação $v_{i,j}$ denota a ordem i do TS e seu número j de índices de Lorentz. Como pode ser visto no Apêndice B, para os TS definidos em (3.11) e (3.12), temos as respectivas parametrizações

$$\Upsilon_0^{\mu\nu\rho\eta} = g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} v_{0,4}, \quad (3.16)$$

$$\Upsilon_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} v_{2,2}. \quad (3.17)$$

3.3 Momentum Routing Invariance

Haja vista nossa definição e parametrização dos termos de superfície, partamos para um caso prático de implementação da abordagem descrita neste trabalho e vamos realizar o cálculo de uma amplitude de probabilidade, através de um diagrama de Feynman.

Quando estudamos um determinado diagrama, em sua construção temos de seguir as regras de Feynman. Entre elas há uma que se refere à conservação do quadrimomento nos vértices. Dessa forma, temos que na construção de uma determinada amplitude, não importa qual rotulação para os momentos utilizamos, contanto que nossa escolha sempre conserve o momento nos vértices. Abaixo, ilustramos um vértice geral onde apresentamos três rotulações distintas, porém equivalentes (Fig. 2):

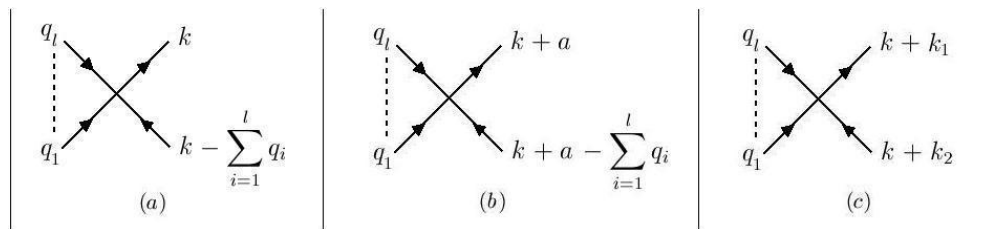


Figura 2 – Um vértice genérico com três rotulações distintas, porém equivalentes. Em (c) considera-se $k_2 = k_1 - \sum_{i=1}^l q_i$.

Aqui, podemos ver que, apesar das diferenças de notação (neste caso, rotulação), todos os vértices conservam momento e, desta forma, qualquer amplitude que venha a ser escrita utilizando-se qualquer uma das três rotulações tem de ter um mesmo resultado final. No nível das amplitudes relacionadas a um determinado processo, temos a relação

$$\mathcal{M} - \mathcal{M}_{Ra} = 0, \quad (3.18)$$

onde \mathcal{M} denota a expressão matemática para a amplitude e o subscrito Ra denota uma rotulação arbitrária para o gráfico. A essa propriedade do diagrama de Feynman daremos o nome de Invariância de Rótulo (MRI) (do inglês *Momentum Routing Invariance*).

3.4 Prova Diagramática da Invariância de Calibre

A invariância de calibre na Eletrodinâmica Quântica é uma consequência de nossa redundância em relação à descrição do que é um fóton. Isto reside no fato de utilizarmos um campo vetorial A^μ , o qual possui quatro graus de liberdade para descrever uma partícula com apenas dois graus de liberdade: como sabemos da experimentação, o fóton possui apenas duas polarizações [5].

Cabe aqui salientar uma observação feita em [31] acerca dos termos identidade de Ward, conservação da corrente e invariância de calibre, os quais são usados indiscriminadamente ao longo da literatura: afinal, a identidade de Ward é a expressão diagramática da conservação da corrente elétrica, a qual por sua vez é uma consequência da invariância de calibre. Como sabemos, a invariância de calibre é a simetria fundamental da Lagrangeana da QED, enquanto que a conservação da corrente é a equação de movimento que provém desta simetria e, por sua vez, a identidade de Ward é a identidade diagramática que impõe a simetria nas amplitudes.

A densidade de Lagrangeana da Eletrodinâmica Quântica é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

onde Ψ é o campo espinorial do elétron, $\bar{\Psi}$ seu conjugado hermitiano ($\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0$), e e m são a carga e massa do elétron, respectivamente, A^μ é o campo vetorial do fóton e $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. A simetria de calibre é expressa pela invariância desta Lagrangeana pelas transformações de calibre

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\Psi(x) \quad (3.20)$$

e

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{ie}e^{-i\Lambda(x)}\partial_\mu e^{i\Lambda(x)} = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x). \quad (3.21)$$

Pelo Teorema de Noether, ao campo Ψ corresponde a corrente $j^\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$, a qual é conservada

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0,$$

relação esta que transportada para o espaço dos momentos seria $k_\mu j^\mu(k) = 0$.

A prova diagramática da invariância de calibre é uma representação pictórica da simetria de calibre na QED, sendo quantificada pela identidade de Ward-Takahashi

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0, \quad (3.22)$$

onde k_μ é o momento associado a um fóton externo e \mathcal{M}^μ é uma amplitude para algum processo na QED envolvendo este fóton. A prova para tal identidade está dada em [31].

Em resumo, considere um diagrama associado a uma amplitude $\mathcal{M}(k)$, como descrito na figura 3. Se removermos o fóton $\gamma(k)$, obteremos um diagrama mais simples, o

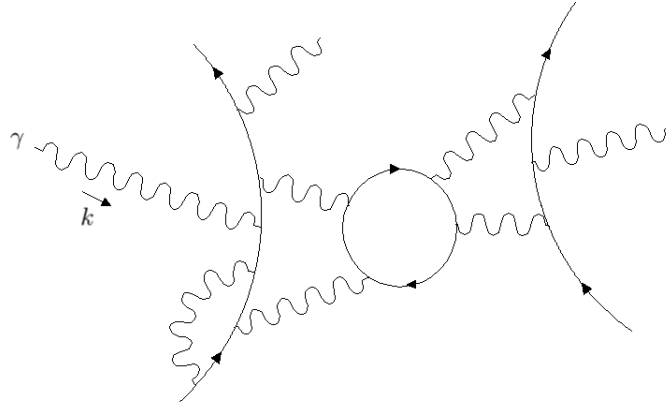


Figura 3 – Um típico diagrama de Feynman correspondente a uma amplitude $\mathcal{M}(k)$. O fóton γ carrega um momento k . Adaptado de [31].

qual é parte de uma amplitude também mais simples \mathcal{M}_0 . Reinsertando o fóton em um outro lugar do diagrama mais simples, obteremos mais uma contribuição para a amplitude $\mathcal{M}(k)$. A idéia principal aqui é que, se somarmos todos os diagramas que contribuem para \mathcal{M}_0 e então somarmos sobre todos os possíveis pontos de inserção do fóton em cada um destes diagramas, obtemos $\mathcal{M}(k)$.

Quando inserimos o fóton em um dos diagramas de \mathcal{M}_0 , o mesmo pode ser associado a uma linha externa do diagrama, ou a uma linha interna de um loop. Diagramaticamente, esta soma sobre todos os possíveis pontos de inserção em um dado gráfico seria expresso como vemos na figura 4, onde o círculo sombreado representa qualquer diagrama

$$\sum_{\text{inserções}} k_\mu \cdot \left(\begin{array}{c} (q_1 \cdots q_n) \\ \mu \text{ --- } \gamma \text{ --- } k \\ \text{---} \\ (p_1 \cdots p_n) \end{array} \right) = e \sum_i \left(\begin{array}{c} (q_1 \cdots (q_i - k) \cdots) \\ \text{---} \\ (p_1 \cdots p_n) \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} (q_1 \cdots q_n) \\ \text{---} \\ (p_1 \cdots (p_i + k) \cdots) \end{array} \right)$$

Figura 4 – Identidade de Ward-Takahashi da QED em sua forma diagramática. À esquerda da igualdade, somamos sobre todos os possíveis pontos de inserção do fóton. À direita, temos a diferença entre duas amplitudes mais simples que se diferem por um *shift*. Adaptado de [31].

que contribui para \mathcal{M}_0 . Quantitativamente esta relação é dada pela expressão

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots q_n) = e \sum_i \left[\mathcal{M}_0(p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots (q_i - k) \cdots) - \mathcal{M}_0(p_1 \cdots (p_i + k) \cdots; q_1 \cdots q_n) \right], \quad (3.23)$$

onde observa-se que as amplitudes \mathcal{M}_0 à direita diferem por um *shift*.

Quando realizamos inserções em linhas externas do diagrama, removendo e reinserindo o fóton a esta linha em todos os possíveis pontos de inserção, o resultado é que as amplitudes à direita de (3.23) diferem por um *shift* no momento do elétron. De acordo com [31], o lado direito da relação acima é nulo, uma vez que seus termos não contribuem para a matriz S quando os elétrons são *off-shell*. E, de acordo com [5], quando os mesmos são *on-shell*, podemos utilizar a equação de movimento de Dirac de modo a satisfazer a identidade de Ward (3.22).

No caso de um fóton sendo inserido em uma linha de loop de elétron, temos que a identidade (3.22) é satisfeita uma vez que os termos restantes na relação diferem por um *shift* na variável de integração. Uma vez que a referência [31] utiliza a regularização dimensional para resolver as integrais divergentes e sendo que na mesma os TS são automaticamente nulos, seu papel de violador da simetria é encoberto pela natureza da regularização.

Como neste trabalho estamos interessados no papel dos TS como possíveis violadores de simetrias, vamos analisar tais amplitudes sob a luz da RI. Antes da inserção do fóton, um loop típico teria a forma descrita na figura 5 (a) e inserindo o fóton $\gamma(k)$ entre os vértices i e $i + 1$ produziria o visto na figura 5 (b):

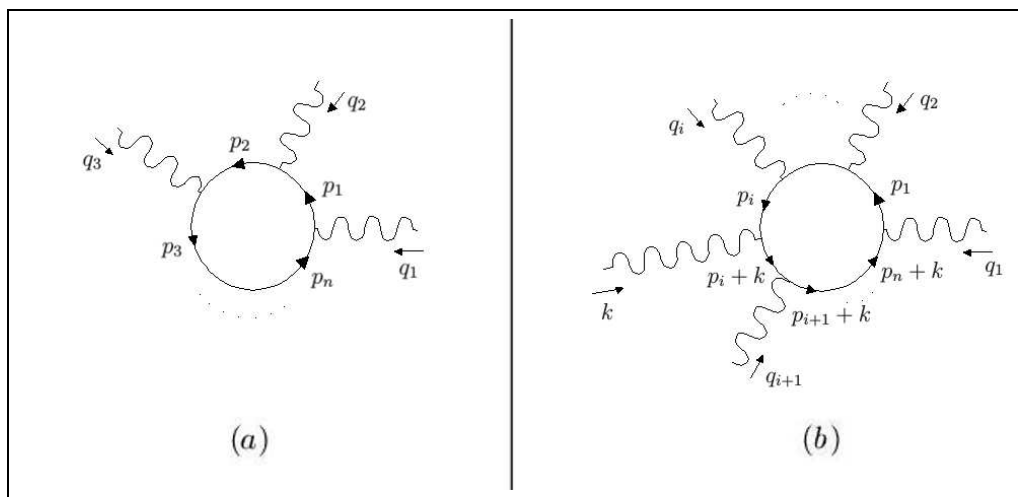


Figura 5 – Um típico loop de elétron antes e depois da inserção do fóton externo. Em (a), para n vértices existem n possíveis pontos de inserção no loop e considera-se $q_1 + p_n = p_1$. Em (b) o fóton com momento k foi inserido entre os vértices i e $i + 1$ e considera-se $q_1 + p_n + k = p_1$. Adaptado de [31].

Assim o processo se repete e vamos inserindo o fóton em todos os possíveis pontos de inserção e, no final, somamos todos os diagramas que contribuem para a amplitude, resultando quantitativamente na relação (3.23).

3.5 Invariância de Rótulo e Simetria de Calibre

No caso a 1 loop, a relação (3.23) está expressa na sua forma gráfica e quantitativa na figura 6.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} \mu \\ \rightarrow \\ a \end{array} \right) \text{---} \left(\text{loop} \right) \text{---} = (-ie) \left(\begin{array}{c} k \\ \text{loop} \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} k+a \\ \text{loop} \end{array} \text{---} \right) \\
 & a_\mu \Pi^{\mu\nu} = (-ie) (\Pi_k^\nu - \Pi_{k+a}^\nu) \\
 \\
 & \sum_{\text{inserções}} a_\mu \cdot \left(\begin{array}{c} \mu \\ \rightarrow \\ a \end{array} \right) \text{---} \left(\text{loop} \right) \text{---} = (-ie) \left(\begin{array}{c} k-a-p \\ \text{loop} \\ k \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} k-p \\ \text{loop} \\ k+a \end{array} \text{---} \right) \\
 & \sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} = (-ie) (\Pi_k^{\nu\rho} - \Pi_{k+a}^{\nu\rho}) \\
 \\
 & \sum_{\text{inserções}} a_\mu \cdot \left(\begin{array}{c} \mu \\ \rightarrow \\ a \end{array} \right) \text{---} \left(\text{loop} \right) \text{---} = (-ie) \left(\begin{array}{c} k-a-p \\ \text{loop} \\ k \end{array} \text{---} - \begin{array}{c} k-p \\ \text{loop} \\ k+a \end{array} \text{---} \right) \\
 & \sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho\eta} = (-ie) (\Pi_k^{\nu\rho\eta} - \Pi_{k+a}^{\nu\rho\eta})
 \end{aligned}$$

Figura 6 – Diagramas e amplitudes que representam a identidade de Ward (3.23) a 1 loop.

Estes são os únicos diagramas que vamos abordar, uma vez que aqueles com mais pernas externas de fóton têm as respectivas amplitudes representadas por integrais finitas e para as quais *shifts* podem ser realizados sem incorrer no surgimento de termos de superfície.

As identidades de Ward representadas na figura 6 tem algumas características a observar. No lado esquerdo das equações temos as amplitudes com o fóton inserido no loop e seu valor nulo está atrelado à diferença entre as amplitudes mais simples situadas à direita da identidade.

Para fazer a conexão entre invariância de rótulo (MRI) e simetria de calibre, vamos

fazer o que se segue: as amplitudes do lado esquerdo das identidade (ID) de Ward serão resolvidas seguindo-se a prescrição adota em [31] de forma a implementar a invariância de calibre; Já para a diferença de amplitudes do lado direito da ID de Ward utilizaremos gráficos com diferentes rotulações de modo a implementar a MRI. Por questão de comodidade, vamos considerar a QED com elétrons sem massa.

Na primeira ID de Ward vamos utilizar a abordagem dos *shifts* para resolver a diferença entre as amplitudes do lado direito da igualdade, de forma a implementar a MRI na forma

$$\Pi^\nu - \Pi_{Ra}^\nu = 0, \quad (3.24)$$

onde o subscripto *Ra* indica um rótulo arbitrário atribuído ao gráfico. Os correspondentes gráficos com as rotulações descritas estão na figura 7:

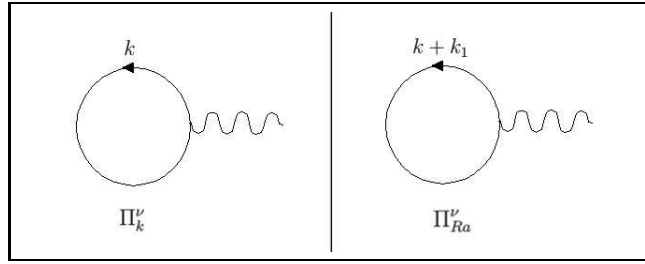


Figura 7 – Diagramas de Feynman representando o tensor de polarização do vácuo, com duas rotulações distintas, mas equivalentes.

Neste caso, temos as amplitudes

$$\Pi^\nu = -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} = -4e \int_k \frac{k^\nu}{k^2}, \quad (3.25)$$

e

$$\Pi_{Ra}^\nu = -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1} = -4e \int_k \frac{(k + k_1)^\nu}{[k + k_1]^2}. \quad (3.26)$$

Para a segunda amplitude, vamos utilizar a expansão em Taylor (3.4) na forma:

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra}^\nu \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= -4e \left\{ \int_k \frac{k^\nu}{k^2} + \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^2} \right) + \right. \\ &\quad + \int_k \frac{1}{2!} k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial k_\beta} k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^2} \right) + \\ &\quad \left. + \int_k \frac{1}{3!} k_{1\gamma} \frac{\partial}{\partial k_\gamma} k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial k_\beta} k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na equação anterior, vemos que o primeiro termo do lado direito é idêntico à amplitude (3.25), de forma que a invariância de rótulo expressa na equação (3.24) está vinculada ao resultado dos segundo, terceiro e quarto termos do lado direito de (3.27). Para estes termos temos

$$\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^2} \right) = \int_k \frac{g^{\alpha\nu}}{k^2} - 2 \int_k \frac{k^\alpha k^\nu}{k^4} \equiv \Upsilon_2^{\alpha\nu} = g^{\alpha\nu} v_{2,2},$$

$$\int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^2} \right) = -2 \int_k \frac{g^{\beta\alpha} k^\nu + g^{\alpha\nu} k^\beta + g^{\nu\beta} k^\alpha}{k^4} + 8 \int_k \frac{k^\beta k^\alpha k^\nu}{k^6},$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\gamma} \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^2} \right) &= -2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\gamma} \left(\frac{g^{\beta\alpha} k^\nu + g^{\alpha\nu} k^\beta + g^{\nu\beta} k^\alpha}{k^4} \right) + 8 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\gamma} \left(\frac{k^\beta k^\alpha k^\nu}{k^6} \right) = \\ &= -2 \left[g^{\beta\alpha} \Upsilon_0^{\nu\gamma} + g^{\alpha\nu} \Upsilon_0^{\gamma\beta} + g^{\nu\beta} \Upsilon_0^{\gamma\alpha} \right] + 8 \Upsilon_0^{\gamma\beta\alpha\nu} = \\ &= -2 g^{\gamma\{\beta} g^{\alpha\nu\}} [v_{0,2} - 4v_{0,4}]. \end{aligned}$$

Assim, a amplitude resulta em:

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra}^\nu \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= -4e \left\{ \int_k \frac{k^\nu}{k^2} + k_{1\alpha} g^{\alpha\nu} v_{2,2} + \right. \\ &+ \frac{1}{2!} k_{1\beta} k_{1\alpha} (-2) \left[\int_k \frac{g^{\beta\alpha} k^\nu + g^{\alpha\nu} k^\beta + g^{\nu\beta} k^\alpha}{k^4} - 4 \int_k \frac{k^\beta k^\alpha k^\nu}{k^6} \right] + \\ &+ \left. \frac{1}{3!} k_{1\gamma} k_{1\beta} k_{1\alpha} (-2) g^{\gamma\{\beta} g^{\alpha\nu\}} [v_{0,2} - 4v_{0,4}] \right\} = \\ &= -4e \left\{ \int_k \frac{k^\nu}{k^2} + k_1^\nu v_{2,2} - k_1^2 k_1^\nu [v_{0,2} - 4v_{0,4}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

e a diferença entre as amplitudes é dada por:

$$\Pi^\nu - \Pi_{Ra}^\nu = 4e k_1^\nu [v_{2,2} - k_1^2 (v_{0,2} - 4v_{0,4})]. \quad (3.29)$$

Uma vez que k_1 é um momento arbitrário, podendo assumir qualquer valor, a MRI, equação (3.24), exige que os TS sejam identicamente nulos¹, ou seja,

$$v_{2,2} = 0, \quad v_{0,2} = 0, \quad v_{0,4} = 0. \quad (3.30)$$

Por sua vez, a simetria de calibre é expressa pela transversalidade do tensor de polarização do vácuo, ou seja, pelo valor nulo do lado esquerdo da ID de Ward na forma

$$a_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0. \quad (3.31)$$

O lado esquerdo desta relação é descrito na figura 8.

Quantitativamente, tal amplitude é dada por

$$a_\mu \Pi^{\mu\nu} = -\text{tr} \int_k \frac{i}{\not{k}} (-ie\not{d}) \frac{i}{\not{k} + \not{d}} (-ie\gamma^\nu). \quad (3.32)$$

¹ Como estamos operando na ordem de 1 loop, a exigência de cada TS ser nulo individualmente pode não ser clara diante do resultado (3.29). Quando realizamos a operação a n loops, ou seja, quando implementamos a MRI em amplitudes em todas as ordens da teoria de perturbação a exigência citada surge como condição inata da MRI, como pode ser visto em [32].

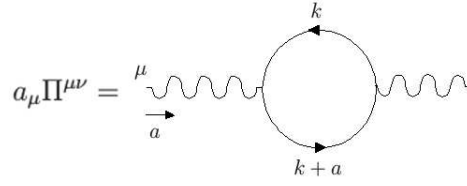


Figura 8 – Diagrama que representa a identidade de Ward (3.23) a 1 loop, com a inserção de um fóton externo ao loop em todos os possíveis pontos de inserção. O momento externo é a .

Aqui seguiremos a prescrição adotada em [31], utilizando a identidade

$$(-ie\phi) = -ie[(\not{k} + \not{\phi}) - \not{k}],$$

de modo que a amplitude fica

$$\begin{aligned} a_\mu \Pi^{\mu\nu} &= -\text{tr} \int_k \frac{i}{\not{k}} (-ie) (-ie\gamma^\nu) + \text{tr} \int_k (-ie) \frac{i}{\not{k} + \not{\phi}} (-ie\gamma^\nu) = \\ &= ie^2 \int_k \frac{\text{tr}(\not{k}\gamma^\nu)}{k^2} - ie^2 \int_k \frac{\text{tr}[(\not{k} + \not{\phi})\gamma^\nu]}{[k+a]^2} = \\ &= 4ie^2 \int_k \frac{k^\nu}{k^2} - 4ie^2 \int_k \frac{(k+a)^\nu}{[k+a]^2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

No desenvolvimento acima, vemos que a segunda integral se difere da primeira por um *shift* na variável de integração. Assim utilizando a abordagem dos *shifts* está integral resulta em:

$$\int_k \frac{(k+a)^\nu}{[k+a]^2} \Big|_{k+a \rightarrow k} = \int_k \frac{k^\nu}{k^2} + a^\nu v_{2,2} - a^2 a^\nu [v_{0,2} - 4v_{0,4}], \quad (3.34)$$

onde utilizamos o resultado (3.28) com a troca $k_1 \leftrightarrow a$. Com isso temos o resultado:

$$a_\mu \Pi^{\mu\nu} = -4ie^2 a^\nu \{v_{2,2} - a^2 [v_{0,2} - 4v_{0,4}]\}, \quad (3.35)$$

e uma vez que o momento $a^\mu \neq 0$, para satisfazermos a identidade de Ward (3.31), ou ainda, para haver a conservação da simetria de calibre, temos que fazer os TS nulos:

$$v_{2,2} = 0, \quad v_{0,2} = 0, \quad v_{0,4} = 0. \quad (3.36)$$

Aqui vemos a relação entre MRI e simetria de calibre explicitamente: que a condição para termos a liberdade de rotulação em determinado diagrama de Feynman é a mesma para termos a conservação da invariância de calibre, a partir da satisfação da ID de Ward, ou seja, valor nulo para os termos de superfície.

Na segunda ID de Ward vamos utilizar a abordagem dos *shifts* para resolver a diferença entre as amplitudes do lado direito da igualdade, de forma a implementar a MRI na forma

$$\Pi^{\nu\rho} - \Pi_{Ra}^{\nu\rho} = 0, \quad (3.37)$$

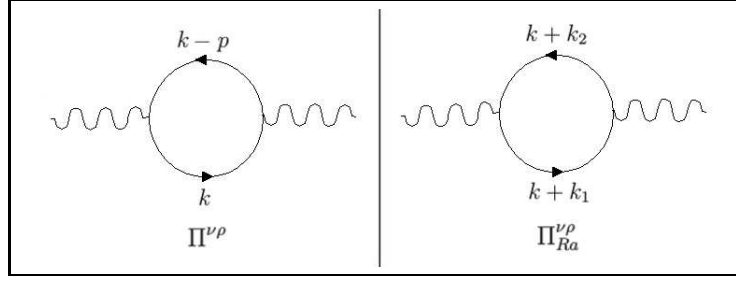


Figura 9 – Diagramas de Feynman representando o tensor de polarização do vácuo, com duas rotulações distintas, mas equivalentes. O momento externo é p e pela conservação do momento $k_1 - k_2 = p$.

com Ra indicando o diagrama com rotulação arbitrária. Os correspondentes gráficos com as rotulações descritas estão na figura 9:

As correspondentes amplitudes são:

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu\rho} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} - \not{p}} = \\ &= -e^2 \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{p}} \right),\end{aligned}\quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned}\Pi_{Ra}^{\nu\rho} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2} = \\ &= -e^2 \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2} \right),\end{aligned}\quad (3.39)$$

Para a segunda amplitude vamos utilizar a expansão em Taylor (3.4) na forma:

$$\begin{aligned}\Pi_{Ra}^{\nu\rho} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= -e^2 \left\{ \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) + \right. \\ &+ \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) + \\ &\left. + \int_k \frac{1}{2!} k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial k_\beta} k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Na equação acima vemos que o primeiro termo do lado direito é idêntico à amplitude (3.38) (uma vez que $k_{1\mu} - k_{2\mu} = p_\mu$), de forma que a invariância de rótulo expressa na equação (3.37) está vinculada ao resultado do segundo e terceiro termos do lado direito de (3.40). O traço acima resulta em

$$\text{T} \equiv \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) = \frac{\text{tr} [\gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\rho \gamma^\delta] k_\eta (k - k_1 + k_2)_\delta}{k^2 [k - k_1 + k_2]^2}$$

Resolvendo o traço e fazendo as contrações de Lorentz, o numerador acima fica

$$\text{N} = 4 \left[2k^\nu k^\rho - g^{\nu\rho} k^2 - k^\nu (k_1 - k_2)^\rho - k^\rho (k_1 - k_2)^\nu + g^{\nu\rho} k \cdot (k_1 - k_2) \right]$$

e no denominador utilizamos a identidade (2.8), na forma

$$\frac{1}{[k - (k_1 - k_2)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2}{k^2[k - (k_1 - k_2)]^2}$$

Com isto o segundo termo do lado direito de (3.40) fica:

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra2}^{\nu\rho} &\equiv \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) = \\ &= 4k_{1\alpha} \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left[\frac{2k^\nu k^\rho - g^{\nu\rho} k^2 - k^\nu (k_1 - k_2)^\rho - k^\rho (k_1 - k_2)^\nu + g^{\nu\rho} k \cdot (k_1 - k_2)}{k^4} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left[\frac{2k^\nu k^\rho - g^{\nu\rho} k^2 - k^\nu (k_1 - k_2)^\rho - k^\rho (k_1 - k_2)^\nu + g^{\nu\rho} k \cdot (k_1 - k_2)}{k^2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2)}{k^2[k - (k_1 - k_2)]^2} \right\} = \\ &= 4k_{1\alpha} \left\{ 2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu k^\rho}{k^4} \right) - g^{\nu\rho} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{1}{k^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (k_1 - k_2)^\rho \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu}{k^4} \right) - (k_1 - k_2)^\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\rho}{k^4} \right) + g^{\nu\rho} (k_1 - k_2)_\beta \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\beta}{k^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4(k_1 - k_2)_\beta \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu k^\rho k^\beta}{k^4[k - (k_1 - k_2)]^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2g^{\nu\rho} (k_1 - k_2)_\beta \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\beta}{k^2[k - (k_1 - k_2)]^2} \right) \right\} = \\ &= 4k_{1\alpha} \left\{ 2 \left[g^{\alpha\nu} \int_k \frac{k^\rho}{k^4} + g^{\alpha\rho} \int_k \frac{k^\nu}{k^4} - 4 \int_k \frac{k^\alpha k^\nu k^\rho}{k^6} \right] - g^{\nu\rho} (-2) \int_k \frac{k^\alpha}{k^4} - \right. \\ &\quad \left. - (k_1 - k_2)^\rho \Upsilon_0^{\alpha\nu} - (k_1 - k_2)^\nu \Upsilon_0^{\alpha\rho} + g^{\nu\rho} (k_1 - k_2)_\beta \Upsilon_0^{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. + 4(k_1 - k_2)_\beta \Upsilon_0^{\alpha\nu\rho\beta} - 2g^{\nu\rho} (k_1 - k_2)_\beta \Upsilon_0^{\alpha\beta} \right\} = \\ &= -4 \left\{ \left[k_1^\nu (k_1 - k_2)^\rho + k_1^\rho (k_1 - k_2)^\nu + g^{\nu\rho} k_1 \cdot (k_1 - k_2) \right] v_{0,2} - \right. \\ &\quad \left. - 4k_{1\alpha} (k_1 - k_2)_\beta g^{\alpha\nu} g^{\rho\beta} \right\} v_{0,4} \Big\} = \\ &= -4k_{1\alpha} (k_1 - k_2)_\beta g^{\alpha\{\beta} g^{\nu\rho\}} \left[v_{0,2} - 4v_{0,4} \right]. \end{aligned} \tag{3.41}$$

E, por sua vez, o terceiro termo do lado direito de (3.40) resulta em:

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra3}^{\nu\rho} &\equiv \int_k \frac{1}{2!} k_{1\beta} k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} k_{1\beta} k_{1\alpha} \left\{ 2 \left[g^{\alpha\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\rho}{k^4} \right) + g^{\alpha\rho} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\nu}{k^4} \right) - 4 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\alpha k^\nu k^\rho}{k^6} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - g^{\nu\rho} (-2) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\alpha}{k^4} \right) \right\} = \\ &= 4k_{1\beta} k_{1\alpha} \left[g^{\alpha\nu} \Upsilon_0^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} \Upsilon_0^{\beta\nu} + g^{\nu\rho} \Upsilon_0^{\beta\alpha} - 4\Upsilon_0^{\beta\alpha\nu\rho} \right] = \\ &= 4k_{1\alpha} k_{1\beta} g^{\alpha\{\beta} g^{\nu\rho\}} \left[v_{0,2} - 4v_{0,4} \right]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Com isto, a amplitude (3.40) resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra}^{\nu\rho} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= -e^2 \left\{ \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \right) - \right. \\ &\quad - 4k_{1\alpha} (k_1 - k_2)_\beta g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} [v_{0,2} - 4v_{0,4}] + \\ &\quad \left. + 4k_{1\alpha} k_{1\beta} g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} [v_{0,2} - 4v_{0,4}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

e a diferença entre as amplitudes, equação (3.37), é dada por

$$\Pi^{\nu\rho} - \Pi_{Ra}^{\nu\rho} = 4e^2 g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} k_{1\alpha} k_{2\beta} [v_{0,2} - 4v_{0,4}]. \quad (3.44)$$

Mais uma vez, sendo k_1 e k_2 momentos arbitrários podendo assumir qualquer valor, a MRI exige que os TS sejam identicamente nulos, ou seja,

$$v_{0,2} = 0, \quad v_{0,4} = 0. \quad (3.45)$$

Já a simetria de calibre é expressa pela identidade de Ward

$$\sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} = 0, \quad (3.46)$$

sendo o lado esquerdo desta relação dada pelos diagramas da figura 10. Os gráficos des-

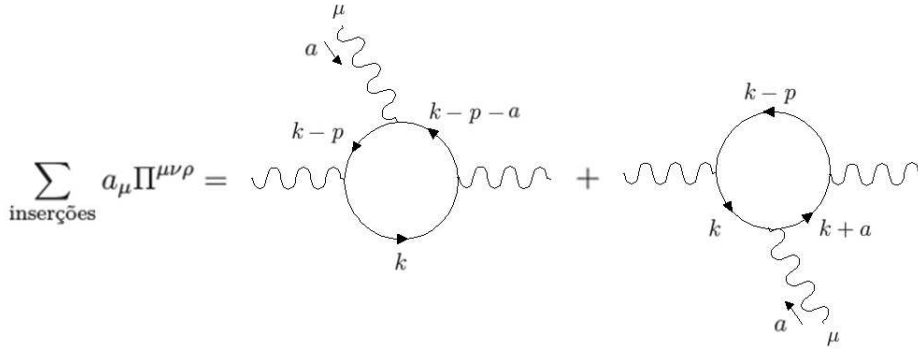


Figura 10 – Diagramas que representam a identidade de Ward (3.23) a 1 loop, com a inserção de um fóton externo ao loop em todos os possíveis pontos de inserção. O momento externo é $p+a$.

critos em tal figura são quantificados na amplitude

$$\begin{aligned} \sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} - \not{p} - \not{a}} (-ie\cancel{a}) \frac{i}{\not{k} - \not{p}} - \\ &\quad - \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\cancel{a}) \frac{i}{\not{k} + \not{a}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} - \not{p}}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Novamente seguiremos a prescrição adotada em [31], utilizando, para o primeiro termo do lado direito, a identidade

$$(-ie\cancel{a}) = -ie[(\not{k} - \not{p}) - (\not{k} - \not{p} - \not{a})],$$

e, para o segundo termo, a identidade

$$(-ie\phi) = -ie[(\not{k} + \not{\phi}) - \not{k}],$$

de modo que a amplitude fica

$$\begin{aligned} \sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) (-ie) \frac{i}{\not{k} - \not{p} - \not{\phi}} + \\ &+ \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) (-ie) \frac{i}{\not{k} - \not{p}} - \\ &- \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) (-ie) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} - \not{p}} + \\ &+ \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) (-ie) \frac{i}{\not{k} + \not{\phi}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} - \not{p}}, \\ \sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} &= ie^3 \text{tr} \int_k \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{p} - \not{\phi}} + \\ &- ie^3 \text{tr} \int_k \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{\phi}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{p}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

No desenvolvimento acima, vemos que a segunda integral difere da primeira por um *shift* na variável de integração. Assim, utilizando a abordagem dos *shifts*, esta integral resulta em:

$$\begin{aligned} \text{tr} \int_k \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{\phi}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{p}} \Big|_{k+a \rightarrow k} &= \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{\phi} - \not{p}} \right) - \\ &- 4a_\alpha (a+p)_\beta g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} [v_{0,2} - 4v_{0,4}] + \\ &+ 4a_\alpha a_\beta g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} [v_{0,2} - 4v_{0,4}] = \\ &= \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{\phi} - \not{p}} \right) - \\ &- 4a_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} [v_{0,2} - 4v_{0,4}], \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde utilizamos o resultado (3.43) com as trocas $k_1 \leftrightarrow a$ e $k_2 \leftrightarrow -p$. Com isso, obtemos:

$$\sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} = 4ie^3 a_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} [v_{0,2} - 4v_{0,4}], \quad (3.50)$$

e, uma vez que os momentos $a^\mu \neq 0$ e $p^\mu \neq 0$, para satisfazermos a identidade de Ward, temos que fazer os TS nulos:

$$v_{0,2} = 0, \quad v_{0,4} = 0. \quad (3.51)$$

Na terceira ID de Ward vamos utilizar a abordagem dos *shifts* para resolver a diferença entre as amplitudes do lado direito da igualdade, de forma a implementar a MRI na forma

$$\Pi^{\nu\rho\eta} - \Pi_{Ra}^{\nu\rho\eta} = 0, \quad (3.52)$$

com Ra indicando o diagrama com rotulação arbitrária. Os correspondentes gráficos com as rotulações descritas estão na figura 11.

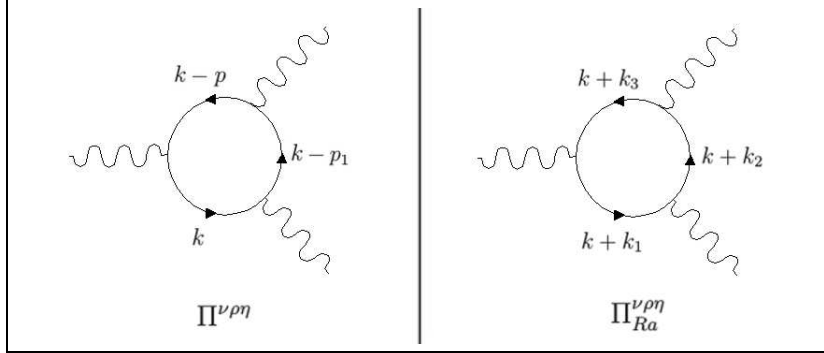


Figura 11 – Diagramas de Feynman representando o tensor de polarização do vácuo, com duas rotulações distintas, mas equivalentes. O momento externo é p e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p_1$ e $k_1 - k_3 = p$.

As correspondentes amplitudes são:

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu\rho\eta} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k} - \not{p}} = \\ &= -e^3 \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} - \not{p}} \right),\end{aligned}\quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu\rho\eta}_{Ra} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k} + \not{k}_3} = \\ &= -e^3 \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{k}_1} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} + \not{k}_2} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} + \not{k}_3} \right),\end{aligned}\quad (3.54)$$

Para a segunda amplitude, vamos utilizar a expansão em Taylor (3.4) na forma:

$$\begin{aligned}\Pi^{\nu\rho}_{Ra} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= -e^3 \left\{ \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_3} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Na equação acima, vemos que o primeiro termo do lado direito é idêntico à amplitude (3.53) (uma vez que $k_{1\mu} - k_{2\mu} = p_{1\mu}$ e $k_{1\mu} - k_{3\mu} = p_\mu$), de forma que a invariância de rótulo expressa na equação (3.52) está vinculada ao resultado do segundo termo do lado direito de (3.55). O traço acima resulta em

$$\begin{aligned}\text{T} &\equiv \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_3} \right) \\ &= \frac{\text{tr} [\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\eta \gamma^\delta] k_\alpha (k - k_1 + k_2)_\beta (k - k_1 + k_3)_\delta}{k^2 [k - k_1 + k_2]^2 [k - k_1 + k_3]^2},\end{aligned}$$

e, resolvendo o mesmo e fazendo as contrações de Lorentz, o numerador fica

$$N = 4 \left[-g^{\nu\rho} k^2 k^\eta - g^{\nu\eta} k^2 k^\rho - g^{\rho\eta} k^2 k^\nu + 4k^\nu k^\rho k^\eta + O(k^2) + O(k^1) + O(k^0) \right],$$

onde os termos $O(k^{2,1,0})$ são aqueles que resultarão nulos pelo Teorema de Gauss. No denominador utilizamos a identidade (2.8), nas formas

$$\frac{1}{[k - (k_1 - k_2)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2}$$

e

$$\frac{1}{[k - (k_1 - k_3)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_3) + (k_1 - k_3)^2}{k^2 [k - (k_1 - k_3)]^2}.$$

Com isto, o segundo termo do lado direito de (3.55) fica:

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra2}^{\nu\rho\eta} &\equiv \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_3} \right) = \\ &= 4k_{1\alpha} \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left[-k^2 (g^{\nu\rho} k^\eta + g^{\nu\eta} k^\rho + g^{\rho\eta} k^\nu) + 4k^\nu k^\rho k^\eta + O(k^2) + O(k^1) + O(k^0) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} \right) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_3) + (k_1 - k_3)^2}{k^2 [k - (k_1 - k_3)]^2} \right) \right\} = \\ &= 4k_{1\alpha} \left\{ - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{g^{\nu\rho} k^\eta + g^{\nu\eta} k^\rho + g^{\rho\eta} k^\nu}{k^4} \right) + 4 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\nu k^\rho k^\eta}{k^6} \right) \right\} = \\ &= -4k_{1\alpha} [g^{\nu\rho} \Upsilon_0^{\alpha\eta} + g^{\nu\eta} \Upsilon_0^{\alpha\rho} + g^{\rho\eta} \Upsilon_0^{\alpha\nu} - 4\Upsilon_0^{\alpha\nu\rho\eta}] = \\ &= -4k_{1\alpha} g^{\alpha\{\nu} g^{\rho\eta\}} [v_{0,2} - 4v_{0,4}]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Finalmente, a amplitude (3.55) resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_{Ra}^{\nu\rho\eta} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= -e^3 \left\{ \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_2} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k} - \not{k}_1 + \not{k}_3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 4k_{1\alpha} g^{\alpha\{\nu} g^{\rho\eta\}} [v_{0,2} - 4v_{0,4}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

e a diferença entre as amplitudes, equação (3.53), é dada por

$$\Pi^{\nu\rho\eta} - \Pi_{Ra}^{\nu\rho\eta} = -4e^3 g^{\alpha\{\nu} g^{\rho\eta\}} k_{1\alpha} [v_{0,2} - 4v_{0,4}]. \quad (3.58)$$

E, mais uma vez, sendo k_1 um momento arbitrário podendo assumir qualquer valor, a MRI exige que os TS sejam idênticamente nulos, ou seja,

$$v_{0,2} = 0, \quad v_{0,4} = 0. \quad (3.59)$$

Por sua vez, a simetria de calibre é expressa pela identidade de Ward

$$\sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho\eta} = 0, \quad (3.60)$$

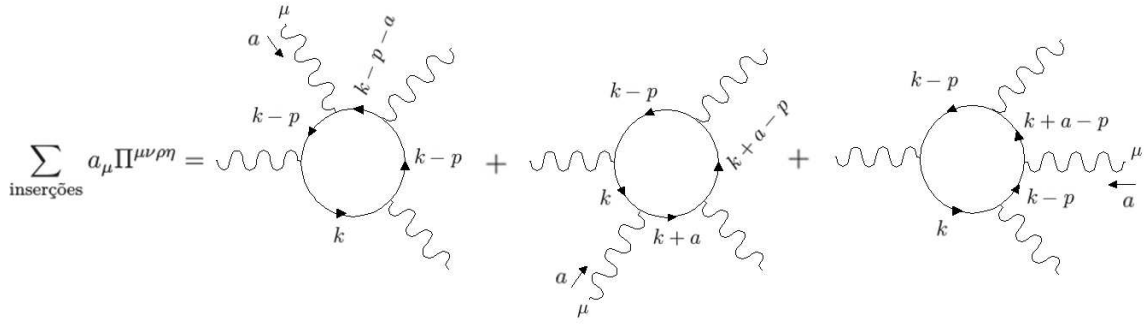


Figura 12 – Diagramas que representam a identidade de Ward (3.23) a 1 loop, com a inserção de um fóton externo ao loop em todos os possíveis pontos de inserção. O momento externo é $p+a$.

sendo o lado esquerdo desta relação dada pelos diagramas da figura 12.

Os gráficos descritos na figura acima são quantificados na amplitude

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho\eta} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{a}-\not{p}} (-ie\cancel{a}) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} - \\
 &- \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\cancel{a}) \frac{i}{\not{k}+\not{a}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}+\not{a}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} - \\
 &- \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} (-ie\cancel{a}) \frac{i}{\not{k}+\not{a}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{p}}.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Novamente, seguiremos a prescrição adotada em [31], utilizando, para o primeiro termo do lado direito, a identidade

$$(-ie\cancel{a}) = -ie[(\not{k}-\not{p}) - (\not{k}-\not{a}-\not{p})],$$

para o segundo termo, a identidade

$$(-ie\cancel{a}) = -ie[(\not{k}+\not{a}) - \not{k}],$$

e para o terceiro termo, a identidade

$$(-ie\cancel{a}) = -ie[(\not{k}+\not{a}-\not{p}) - (\not{k}-\not{p})],$$

de modo que a amplitude fica

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho\eta} &= -\text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) (-ie) \frac{i}{\not{k}-\not{q}-\not{p}} + \\
&+ \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) (-ie) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} - \\
&- \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) (-ie) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}+\not{q}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} + \\
&+ \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) (-ie) \frac{i}{\not{k}+\not{q}} (-ie\gamma^\rho) \frac{i}{\not{k}+\not{q}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} - \\
&- \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) (-ie) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{p}} + \\
&+ \text{tr} \int_k (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{k}} (-ie\gamma^\rho) (-ie) \frac{i}{\not{k}+\not{q}-\not{p}} (-ie\gamma^\eta) \frac{i}{\not{k}-\not{p}}, \\
\sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho} &= ie^4 \text{tr} \int_k \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}-\not{p}} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k}-\not{q}-\not{p}} - \\
&- ie^4 \text{tr} \int_k \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}+\not{q}-\not{p}} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k}-\not{p}}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

No desenvolvimento acima, vemos que a segunda integral difere da primeira por um *shift* na variável de integração. Assim, utilizando a abordagem dos *shifts*, esta integral resulta em:

$$\begin{aligned}
\text{tr} \int_k \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}+\not{q}-\not{p}} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k}-\not{p}} \Big|_{k+a \rightarrow k} &= \int_k \text{tr} \left(\gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k}-\not{p}} \gamma^\eta \frac{1}{\not{k}-\not{q}-\not{p}} \right) - \\
&- 4a_\alpha g^{\alpha\{\nu} g^{\rho\eta\}} [v_{0,2} - 4v_{0,4}], \tag{3.63}
\end{aligned}$$

onde utilizamos o resultado (3.57) com as trocas $k_1 \leftrightarrow a$ e $k_2 \leftrightarrow a-p$ e $k_3 \leftrightarrow -p$. Com isso temos o resultado:

$$\sum_{\text{inserções}} a_\mu \Pi^{\mu\nu\rho\eta} = 4ie^4 a_\alpha g^{\alpha\{\beta} g^{\nu\rho\}} [v_{0,2} - 4v_{0,4}], \tag{3.64}$$

e, uma vez que o momento $a^\mu \neq 0$, para satisfazermos a identidade de Ward, temos que fazer os TS nulos:

$$v_{0,2} = 0, \quad v_{0,4} = 0. \tag{3.65}$$

Assim concluímos o paralelo entre invariância de rótulo e simetria de calibre. Vemos que a condição para termos a liberdade de rotulação em determinado diagrama de Feynman é relacionada à necessidade de se fazer *shifts* no momento de integração dos diagramas, o que acarreta no surgimento de termos de superfície. Tais TS têm de ser identicamente nulos para que a MRI seja respeitada.

Por outro lado, vemos que a conservação da simetria de calibre também está atrelada ao valor nulo dos mesmos TS. Assim, a imposição da MRI é uma condição necessária e suficiente para conservarmos calibre e, como veremos a seguir, a mesma imposição está atrelada à conservação da supersimetria global.

4 Invariância de Rótulo e Supersimetria

Neste trabalho, almejamos um maior entendimento de como quantidades finitas, porém indeterminadas, podem contaminar o conteúdo físico de uma Teoria Quântica dos Campos. Tais quantidades, denominadas Termos de Superfície, tem um papel relevante na determinação de correções quânticas associadas a processos físicos em várias teorias.

Uma vez que já verificou-se que estes termos de superfície devem ser nulos a fim de satisfazermos a simetria de calibre [33], no presente trabalho pretendemos verificar o comportamento dos mesmos quando estivermos tratando de uma teoria que é invariante por Supersimetria (SuSy, do inglês *Supersymmetry*). Dessa forma, estudamos o modelo desenvolvido por Wess e Zumino [34], o qual é composto por um mesmo número de graus de liberdade fermiônicos e bosônicos e invariante por supersimetria global.

Realizamos os cálculos das correções radiativas até a segunda ordem em teoria de perturbação, ou, ainda, realizamos os cálculos dos gráficos até dois loops, e em seguida aplicamos os resultados das amplitudes nas identidades de Ward. Este processo se justifica na medida em que a simetria subjacente à teoria estudada é representada pela satisfação da identidade de Ward.

Utilizando uma rotulação específica e outra arbitrária podemos ver o surgimento dos termos de superfície e seu papel como possíveis violadores da MRI e conseqüentemente da SuSy.

4.1 Modelo de Wess-Zumino em componentes

A supersimetria é pensada como uma generalização das simetrias do espaço-tempo em Teoria Quântica de Campos, que transforma férmions em bósons e bósons em férmions [35]. Neste contexto, a invariância exata por SuSy implicaria que para cada partícula do Modelo Padrão seria associada um parceiro supersimétrico de mesma massa e números quânticos à exceção do *spin*, que obedece uma estatística quântica oposta [36]. Pelo fato de tal espectro de partículas não ser compatível com a observação, supõe-se que a SuSy exista em energias muito altas e é espontaneamente quebrada nas escalas de energia atualmente acessíveis no estudo de partículas elementares [37].

Por sua vez, a Física da Matéria Condensada fornece um terreno fértil para o pesquisa de modelos supersimétricos que emulam o mundo das partículas elementares em uma escala de energia muito mais baixa e acessível. Por exemplo, uma proposta de realização do modelo de Wess-Zumino foi feita, na qual uma mistura fria átomo-molécula proporciona a emergência da supersimetria pelo ajuste fino das interações desta mistura

[38].

O modelo desenvolvido por Julius Wess e Bruno Zumino nos anos de 1970 foi a primeira implementação bem sucedida de uma ação invariante pelas transformações de supercalibre (*supergauge transformations*) em 4 dimensões do espaço-tempo [39]. A partir de três trabalhos seminais [34], [39] e [40], a lagrangeana da teoria foi construída e as transformações supersimétricas estabelecidas.

Nesta visão, as transformações supersimétricas transformam campos tensoriais (incluindo escalares) em campos espinoriais e vice-versa. Estas transformações dependem de parâmetros que são espinores, os quais são tratados como quantidades totalmente anti-comutantes, ou seja, anticomutam consigo mesmo e com outros espinores, mas comutam com os outros campos [39].

A Lagrangeana do modelo de Wess-Zumino em componentes, sem massa [41] é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial^\mu\Psi + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \\ & + g[F(A^2 - B^2) - 2GAB - \bar{\Psi}(A + i\gamma_5 B)\Psi], \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde A e B são campos bosônicos escalar e pseudoescalar, respectivamente, o campo Ψ é um campo fermiônico de Majorana $\Psi_M^{\chi^1}$, e F e G são campos auxiliares necessários para se manter o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Aqui, estamos utilizando a métrica contra-corrente $g^{\mu\nu} \equiv (-1, 1, 1, 1)$.

Esta Lagrangeana escrita por Wess e Zumino é invariante (a menos de uma derivada total), sob as transformações supersimétricas globais

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\epsilon}\Psi, & \delta B &= -i\bar{\epsilon}\gamma_5\Psi, \\ \delta\Psi &= -\bar{\epsilon}\not{\partial}(A + i\gamma_5 B) + \bar{\epsilon}(F + i\gamma_5 G), \\ \delta F &= \bar{\epsilon}\not{\partial}\Psi, & \delta G &= i\bar{\epsilon}\gamma_5\not{\partial}\Psi, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde o parâmetro $\bar{\epsilon}$ é um espinor infinitesimal, o qual anticomuta consigo mesmo e com Ψ e comuta com os outros campos.

A partir da Lagrangeana do modelo e pelas transformações supersimétricas, temos que o princípio da ação quântica é satisfeito se o funcional gerador for invariante para estas transformações e, particularmente, se satisfizermos a identidade de Ward-Takahashi. Para tal, utilizando o método funcional podemos deduzir que o funcional gerador das funções de Green conexas *one-particle-irreducible* 1PI (Γ) é invariante sob as transformações acima [40]. Assim, diferenciando a equação $\delta\Gamma = 0$, em relação a $A(x)$ e $\Psi(x)$ obtemos:

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A(x)\delta A(y)}\delta_{\gamma\alpha} + (\not{\partial}_y)_{\gamma\beta}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Psi_\alpha(x)\delta\bar{\Psi}_\beta(y)} = 0, \quad (4.3)$$

¹ A escolha pela representação de Majorana vem da conveniência de se usar matrizes de Dirac γ^μ reais, com $(\gamma^0)^2 = -1$ e $(\gamma^5)^2 = -1$, como pode ser visto em [34].

a qual, no espaço dos momentos, é

$$\Gamma_{AA}(p) + i\not{p}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}(p) = 0. \quad (4.4)$$

A relação acima é a identidade de Ward para as funções de dois pontos, sendo $\Gamma_{AA}(p)$ a função de dois pontos para o bóson A e $\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}(p)$ a função de dois pontos do férmion Ψ [41], [42].

Aqui, pretendemos realizar o cálculo das correções quânticas associadas a estas funções de Green de dois pontos até a segunda ordem na teoria de perturbação, ou seja, faremos o cálculo a um e dois loops das amplitudes de probabilidade associadas aos gráficos que contribuirão para as funções de dois pontos. Neste cálculo, utilizaremos duas rotulações para os gráficos de Feynman e implementaremos a invariância de rótulo, de modo a verificar se as identidades de Ward serão satisfeitas, e qual será o papel dos termos de superfície nesta invariância.

As regras de Feynman, necessárias para o cálculo das amplitudes e derivadas da Lagrangeana do modelo estudado estão nas tabelas abaixo [41]:

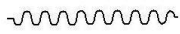

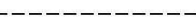
Propagador	Regra de Feynman
	$\frac{-i}{p^2+m^2}$
	$\frac{-1}{\not{p}+m}$
	$\frac{ip^2}{p^2+m^2}$

Tabela 1 – Regras de Feynman para os propagadores no modelo de Wess-Zumino.

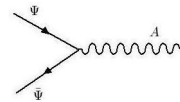
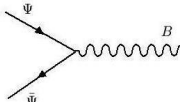
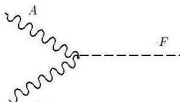
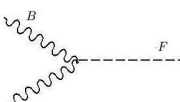
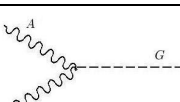
Vértice	Regra de Feynman
	$-ig$
	$g\gamma_5$
	ig
	$-ig$
	$-ig$

Tabela 2 – Regras de Feynman para os vértices no modelo de Wess-Zumino.

4.2 Função de dois pontos a 1 loop

Vamos calcular as funções de dois pontos do modelo de Wess-Zumino sem massa, onde utilizaremos duas rotulações para os diagramas. Na primeira, os diagramas serão rotulados da forma usual, onde pensaremos na conveniência e facilidade de cálculo das amplitudes associadas, apenas mantendo em mente a conservação do quadrimomento. Na segunda, utilizaremos um rótulo geral e arbitrário, satisfazendo a conservação do quadrimomento nos vértices, na forma

$$k^\mu + k_1^\mu = k^\mu + k_2^\mu + p^\mu.$$

A um loop, a função de dois pontos dos campos A e Ψ tem a contribuição dos seguintes gráficos (Fig. 13):

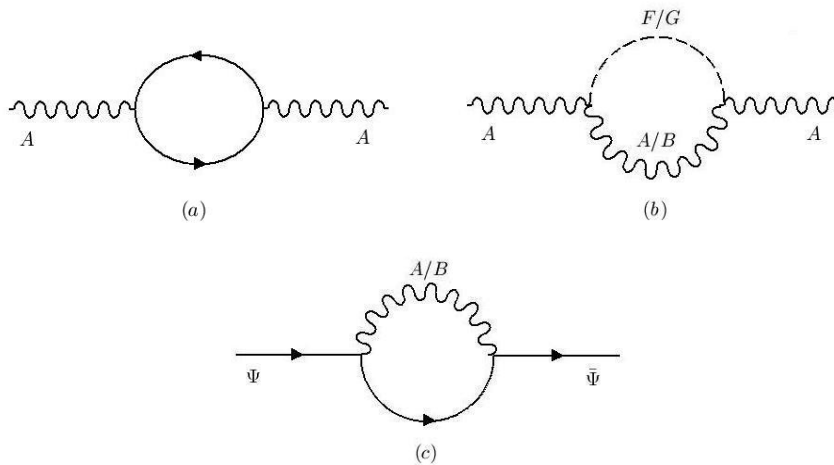


Figura 13 – Diagramas que contribuem para a função de dois pontos a 1 loop.

4.2.1 Rotulação conveniente a 1 loop

O gráfico (a) tem uma contribuição

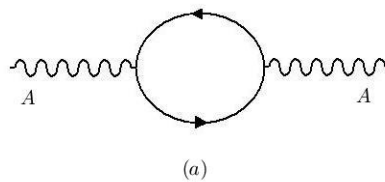


Figura 14 – Diagrama que contribue para a amplitude (a). O momento externo é p e o momento interno é k .

à qual corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{(a)} &= S^{(a)} \times -\text{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-(\not{k} - \not{p})}{(k-p)^2} (-ig) = \\
&= S^{(a)} \times g^2 \int_k \frac{\text{Tr}[\not{k}(\not{k} - \not{p})]}{k^2 [k-p]^2} = \\
&= S^{(a)} \times 4g^2 \int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k-p]^2}, \tag{4.5}
\end{aligned}$$

sendo $S^{(a)}$ o fator de simetria do gráfico, que calcularemos no Apêndice C.1; A integral em k está resolvida o Apêndice A.3, utilizando a prescrição da RI.

Assim, com o resultado (A.28) da integral e com cálculo (C.6) do fator de simetria, a amplitude (4.5) fica:

$$\Gamma_{AA}^{(a)} = 4g^2 \left\{ 2I_{quad}(\lambda^2) - p^2 I_{log}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} - bp^2 \left[2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}. \tag{4.6}$$

O gráfico (b) tem duas contribuições

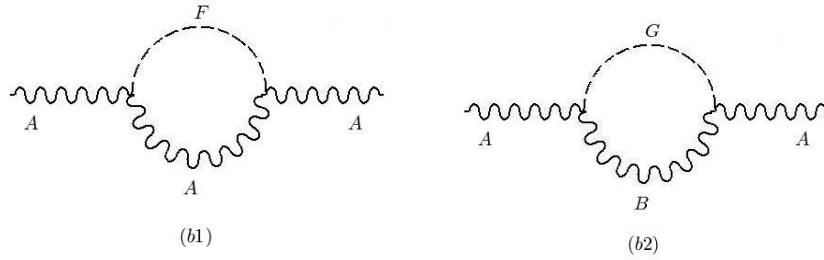


Figura 15 – Diagramas que contribuem para a amplitude (b). O momento externo é p e o momento interno é k .

e às mesmas corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{(b)} &= S^{(b1)} \int_k \frac{-i}{k^2} (ig)i(ig) + S^{(b2)} \int_k \frac{-i}{k^2} (-ig)i(-ig) = \\
&= (S^{(b1)} + S^{(b2)}) \times -g^2 \int_k \frac{1}{k^2} = \\
&= S^{(b)} \times -g^2 I_{quad}(\lambda^2). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Com o resultado (C.9) para o fator de simetria, a amplitude fica

$$\Gamma_{AA}^{(b)} = -8g^2 I_{quad}(\lambda^2). \tag{4.8}$$

O gráfico (c) também tem duas contribuições,

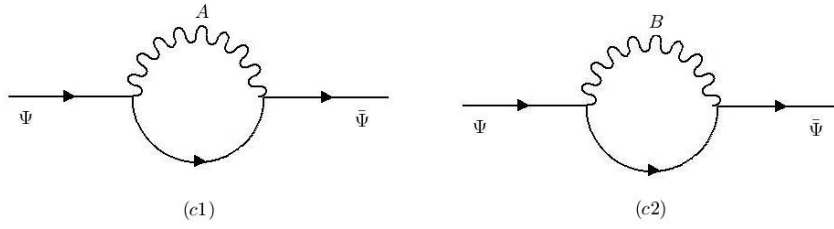


Figura 16 – Diagramas que contribuem para a amplitude (c). O momento externo é p e o momento interno é k .

às quais corresponde a amplitude:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c)} &= S^{(c1)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + S^{(c2)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5) = \\ &= (S^{(c1)} + S^{(c2)}) \times -ig^2 \int_k \frac{\not{k}}{k^2 [k-p]^2} = S^{(c)} \times -ig^2 \gamma_\mu I^\mu.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Aqui, utilizamos os resultados (A.27) e (C.15) e a amplitude (4.9) resultará em:

$$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c)} = -4ig^2 \left\{ \not{p} I_{\log}(\lambda^2) - \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + b\not{p} \left[2 - \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right] \right\}.\quad (4.10)$$

4.2.2 Rotulação arbitrária a 1 loop

Agora, vamos calcular os gráficos a 1 loop vistos na seção anterior, todavia utilizaremos um rótulo arbitrário, satisfazendo a conservação do quadrimomento nos vértices, na forma

$$k^\mu + k_1^\mu = k^\mu + k_2^\mu + p^\mu.$$

O gráfico (a) tem uma contribuição,

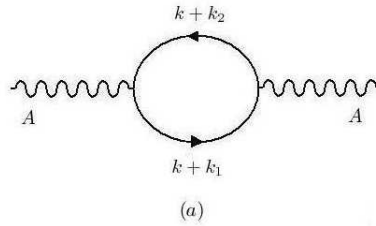


Figura 17 – Diagrama que contribue para a amplitude (a). O momento externo é p , o momento interno é k e pela conservação do momento $k_1 - k_2 = p$.

à qual corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA_{Ra}}^{(a)} &= 2 \times -\text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{\not{k} + \not{k}_1} (-ig) \frac{-1}{\not{k} + \not{k}_2} (-ig) = \\ &= 2g^2 \int_k \frac{\text{tr}[(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)]}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2},\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde já inserimos o fator de simetria e utilizamos o subscrito Ra para diferenciar as amplitudes com rótulo arbitrário das anteriores. Tomando o traço e manipulando o numerador nossa amplitude fica:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AARa}^{(a)} &= -4g^2 \int_k \frac{[k+k_1]^2 + [k+k_2]^2 - [k_1-k_2]^2}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} = \\ &= -4g^2 \left\{ \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} + \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} - [k_1-k_2]^2 \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \right\}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Neste ponto temos de resolver as integrais em k . Vamos fazer isto no Apêndice A.3.2 utilizando a abordagem dos *shifts*. Assim utilizando os resultados (A.41), (A.42) e (A.43) na amplitude (4.12) teremos

$$\begin{aligned}\Gamma_{AARa}^{(a)} &= 4g^2 \left\{ 2I_{quad}(\lambda^2) - (k_1-k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) - [k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu}] \Upsilon_0^{\mu\nu} - \right. \\ &\quad \left. -b(k_1-k_2)^2 \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1-k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

O gráfico (b) tem duas contribuições,

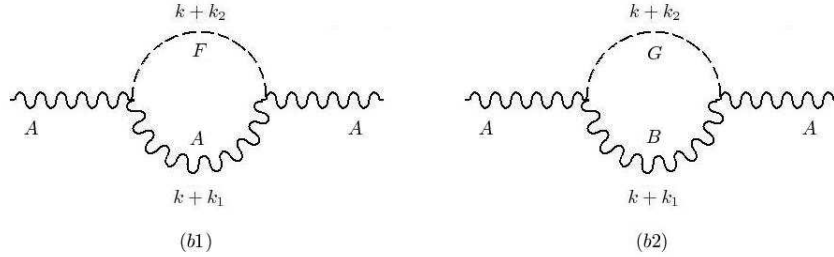


Figura 18 – Diagramas que contribuem para a amplitude (b) em 1 loop. O momento externo é p , o momento interno é k e pela conservação do momento $k_1 - k_2 = p$.

e às mesmas corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AARa}^{(b)} &= 4 \times \int_k \frac{-i}{(k+k_1)^2} (ig) \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} (ig) + 4 \times \int_k \frac{-i}{(k+k_1)^2} (-ig) \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} (-ig) = \\ &= -8g^2 \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2}, \\ \Gamma_{AARa}^{(b)} &= -8g^2 \left\{ I_{quad}(\lambda^2) - k_{1\mu}k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\},\end{aligned}\quad (4.14)$$

onde utilizamos o resultado (A.41).

O gráfico (c) também tem duas contribuições,

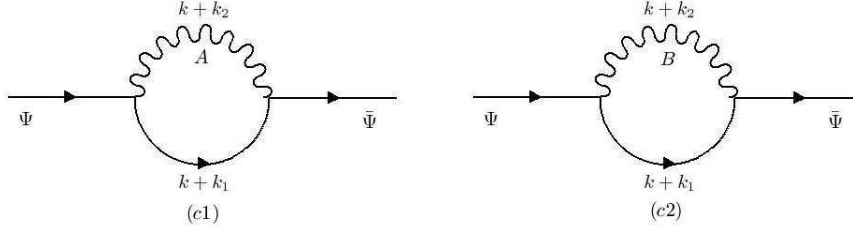


Figura 19 – Diagramas que contribuem para a amplitude (c) em 1 loop. O momento externo é p , o momento interno é k e pela conservação do momento $k_1 - k_2 = p$.

às quais corresponde a amplitude:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(c)} &= 4 \times \int_k \frac{-1}{\not{k} + \not{k}_1} (-ig) \frac{-i}{[k + k_2]^2} (-ig) + 4 \times \int_k \frac{-1}{\not{k} + \not{k}_1} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k + k_2]^2} (g\gamma_5) = \\ &= -8ig^2 \int_k \frac{\not{k} + \not{k}_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

o resultado da integral acima sendo dado na equação (A.46) do respectivo apêndice, de forma que a amplitude fica:

$$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(c)} = -4ig^2 \left\{ (\not{k}_1 - \not{k}_2) I_{\log}(\lambda^2) + \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} + b(\not{k}_1 - \not{k}_2) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.16)$$

4.2.3 Invariância de Rótulo

Calculadas as amplitudes a 1 loop, vamos analisar seus resultados. Como visto na seção 3.5, a implementação da invariância de rótulo nas amplitudes calculadas é equivalente a fazermos os termos de superfície nulos. Abaixo reescrevemos os resultados dos gráficos a 1 loop com as rotulações distintas para melhor visualização:

Tabela 3 – Amplitudes e seus resultados. Os coeficientes multiplicativos globais foram omitidos: para os gráficos (a) seu valor é $4g^2$, para os gráficos (b) é $-8g^2$ e para os gráficos (c) seu valor é $-4ig^2$.

Amplitude	IDB	Parte Finita		TS
$\Gamma_{AA}^{(a)}$	$2I_{quad}(\lambda^2) - p^2 I_{log}(\lambda^2)$	$-bp^2$	$2 - \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)$	$-p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}$
$\Gamma_{AA Ra}^{(a)}$	$2I_{quad}(\lambda^2) - (k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2)$	$-b(k_1 - k_2)^2$	$2 - \ln\left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2}\right)$	$-[k_{1\mu} k_{1\nu} + k_{2\mu} k_{2\nu}] \Upsilon_0^{\mu\nu}$
$\Gamma_{AA}^{(b)}$	$I_{quad}(\lambda^2)$	0		0
$\Gamma_{AA Ra}^{(b)}$	$I_{quad}(\lambda^2)$	0		$-k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu}$
$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c)}$	$\not{p} I_{log}(\lambda^2)$	$b\not{p}$	$2 - \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)$	$-\gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}$
$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi} Ra}^{(c)}$	$(\not{k}_1 - \not{k}_2) I_{log}(\lambda^2)$	$b(\not{k}_1 - \not{k}_2)$	$2 - \ln\left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2}\right)$	$\gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu}$

Uma vez que $k_{1\mu} - k_{2\mu} = p_\mu$, vemos que a parte das IDB e a parte finita de todas as amplitudes coincidem, havendo discrepância apenas na parte associadas aos termos de superfície que, como havíamos predito, são dependentes de rotulação. Assim, o processo de implementação da MRI às amplitudes é dependente das relações:

$$\Gamma_{AA Ra}^{(a)} - \Gamma_{AA}^{(a)} = -4g^2 [k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{2\mu} k_{1\nu}] \Upsilon_0^{\mu\nu} = 0, \quad (4.17)$$

$$\Gamma_{AA Ra}^{(b)} - \Gamma_{AA}^{(b)} = 8g^2 k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} = 0, \quad (4.18)$$

$$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi} Ra}^{(c)} - \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c)} = -8ig^2 \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} = 0, \quad (4.19)$$

e, uma vez que os momentos k_1 e k_2 tem valores completamente arbitrários, a MRI exige que o TS tem de ser nulo

$$\Upsilon_0^{\mu\nu} = 0.$$

4.2.4 MRI e SuSy

Agora, podemos ver o poder da MRI quando aplicada à conservação da SuSy no modelo de Wess-Zumino. Substituindo as amplitudes (4.13), (4.14) e (4.16) na identidade de Ward-Takahashi (4.4), teremos:

$$I_{WT} = \Gamma_{AA}(p) + i\not{p}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}(p) = 0,$$

$$\begin{aligned}
I_{\text{WT}} &= 4g^2 \left\{ 2I_{\text{quad}}(\lambda^2) - (k_1 - k_2)^2 I_{\text{log}}(\lambda^2) - [k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu}] \Upsilon_0^{\mu\nu} - \right. \\
&\quad \left. - (k_1 - k_2)^2 \left[2b - b \ln \left(- \frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} - \\
&\quad - 8g^2 \left\{ I_{\text{quad}}(\lambda^2) - k_{1\mu}k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\} - \\
&\quad - i(\not{k}_1 - \not{k}_2) 4ig^2 \left\{ (\not{k}_1 - \not{k}_2) I_{\text{log}}(\lambda^2) + \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + (\not{k}_1 - \not{k}_2) \left[2b - b \ln \left(- \frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\
&= -4g^2 (k_1 - k_2)^2 I_{\text{log}}(\lambda^2) + 4g^2 (\not{k}_1 - \not{k}_2) \cdot (\not{k}_1 - \not{k}_2) I_{\text{log}}(\lambda^2) + \\
&\quad + 4g^2 \left\{ -k_{2\mu}k_{2\nu} + k_{1\mu}k_{1\nu} + (\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \right\} \Upsilon_0^{\mu\nu} \\
&= 4g^2 \left\{ k_{1\mu}k_{1\nu} - k_{2\mu}k_{2\nu} + (\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \right\} \Upsilon_0^{\mu\nu}, \\
I_{\text{WT}} &= \alpha_{\mu\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} = 0, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

onde $\alpha_{\mu\nu} \equiv 4g^2 \left\{ k_{1\mu}k_{1\nu} - k_{2\mu}k_{2\nu} + (\not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \right\}$. Impondo a MRI, ou seja,

$$\Upsilon_0^{\mu\nu} = 0,$$

a identidade de Ward é satisfeita e podemos constatar que o termo de superfície seria o responsável pela violação da supersimetria, caso ele fosse diferente de zero.

Para fazer um paralelo com trabalhos anteriores que tratam do mesmo tema [43], podemos fazer as substituições $k_1^\mu \rightarrow \alpha p^\mu$ e $k_2^\mu \rightarrow (\alpha - 1)p^\mu$ nos momentos arbitrários, produzindo

$$\alpha_{\mu\nu} = 4g^2 (2\alpha - 1) [p_\mu + \not{p} \gamma_\mu] p_\nu,$$

onde α é uma constante arbitrária. Notamos que a escolha $\alpha = 1/2$, produz um $\alpha_{\mu\nu} = 0$, o que satisfaria automaticamente a identidade de Ward, porém encobriria o papel de violador da SuSy do termo de superfície, demonstrando assim que a MRI é uma condição mais geral relacionada à conservação desta simetria.

4.3 Função de dois pontos a 2 loops

A dois loops, a função de dois pontos dos campos A e Ψ tem a contribuição dos seguintes gráficos:

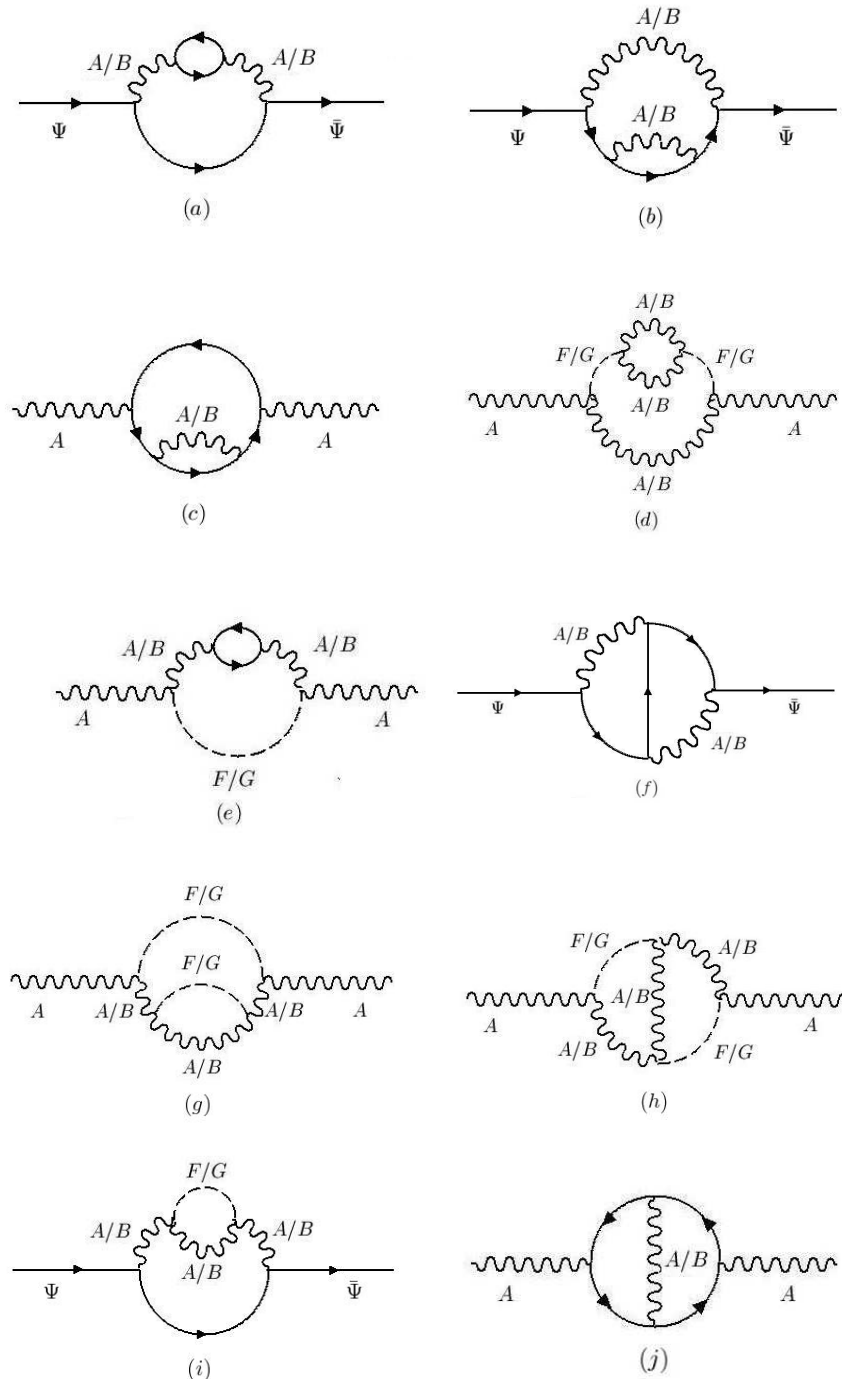


Figura 20 – Diagramas que contribuem para a função de dois pontos a 2 loops.

Nas próximas seções iremos calcular os gráficos (a), (b), (c), (d) e (e), utilizando novamente os dois tipos de rotulações. Em todos estes gráficos aplicaremos o método da floresta, ou BPHZ, que consiste em substituir as subdivergências pela parte finita do

gráfico correspondente a um loop, a esta subdivergência. A Regularização Implícita é compatível com o BPHZ, como mostrado em [44].

Como pode ser visto no Apêndice C.2, os gráficos (*f*), (*h*) e (*j*) não contribuem para as funções de dois pontos, uma vez que suas amplitudes individuais contam com um sinal relativo oposto, anulando a contribuição total da amplitude. Já os gráficos (*g*) e (*i*) não contribuirão uma vez que suas subdivergências não contêm termos finitos, anulando assim suas respectivas amplitudes.

4.3.1 Rotulação Conveniente a 2 loops

O gráfico (*a*) tem duas contribuições

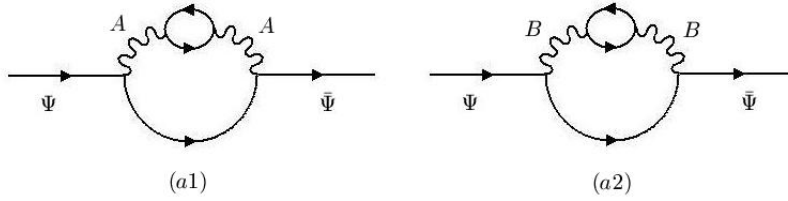


Figura 21 – Diagramas que contribuem para a amplitude (*a*) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

e às mesmas, corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)} = & S^{(a1)} \times \int_k \frac{-(\not{p} - \not{k})}{[p - k]^2} (-ig) \frac{-i}{k^2} \left[\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (-ig) + \\ & + S^{(a2)} \times \int_k \frac{-(\not{p} - \not{k})}{[p - k]^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{k^2} \left[\Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (g\gamma_5), \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo $\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin}$ e $\Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin}$, a parte finita dos respectivos gráficos em 1 loop (Tab. 4).

Tabela 4 – Subdivergências associadas à amplitude (*a*). O momento externo é k e o momento interno é l .

Função	Parte finita do gráfico
$\Pi_A^{\mu\nu} \Big _{fin}$	
$\Pi_B^{\mu\nu} \Big _{fin}$	

A partir do cálculo a 1 loop da seção anterior, sabemos que

$$\Pi_A^{\mu\nu}\Big|_{fin} = \Pi_B^{\mu\nu}\Big|_{fin} = 4g^2 \times \left\{ \frac{-k^2}{2} \left[2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] - \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\}.$$

Neste ponto, vemos que, apesar de o termo de superfície ser uma quantidade indeterminada, ele é finito. Uma vez que tal termo vem da contribuição do gráfico a 1 loop e naquele nível o mesmo deve ser nulo a fim de satisfazer a MRI e a identidade de Ward, vamos desconsiderá-lo todas as vezes que o mesmo ocorrer.

Voltando a amplitude, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)} &= S^{(a1)} \times -g^2 \int_k \frac{(\not{p} - \not{k})}{k^2 [k-p]^2} \left\{ -2g^2 k^2 \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \frac{1}{k^2} + \\ &\quad + S^{(a2)} \times -g^2 \int_k \frac{(\not{p} - \not{k})}{k^2 [k-p]^2} \left\{ -2g^2 k^2 \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \frac{1}{k^2} = \\ &= (S^{(a1)} + S^{(a2)}) \times 2g^4 \int_k \frac{(\not{p} - \not{k})}{k^2 [k-p]^2} \left[2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] = \\ \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)} &= S^{(a)} \times 2g^4 \left[2b(\not{p}I - \gamma_\mu I^\mu) - b(\not{p}I^{(2)} - \gamma_\mu I^{(2)\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

As integrais acima estão explicitadas no Apêndice A.3, e com os resultados (A.34) e (A.35), a amplitude resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)} &= S^{(a)} \times 2g^4 \left\{ 2b \left[\frac{\not{p}}{2} \left(I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) + \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - \right. \\ &\quad - b \left[\frac{1}{2} \not{p} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{4} \not{p} I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \frac{1}{4} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} - 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + [2\not{p}p_\mu + \gamma_\mu p^2] I_{f,2,1}^{(2)\mu} - \not{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right] \right\}, \\ \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)} &= S^{(a)} \times -bg^4 \left\{ \not{p} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{5}{2} \not{p} I_{log}(\lambda^2) + \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \right. \\ &\quad - 2b\not{p} \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - \\ &\quad \left. - 8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 2[2\not{p}p_\mu + \gamma_\mu p^2] I_{f,2,1}^{(2)\mu} - 2\not{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $S^{(a)} = 16$, resultado (C.16).

O gráfico (b) tem quatro contribuições

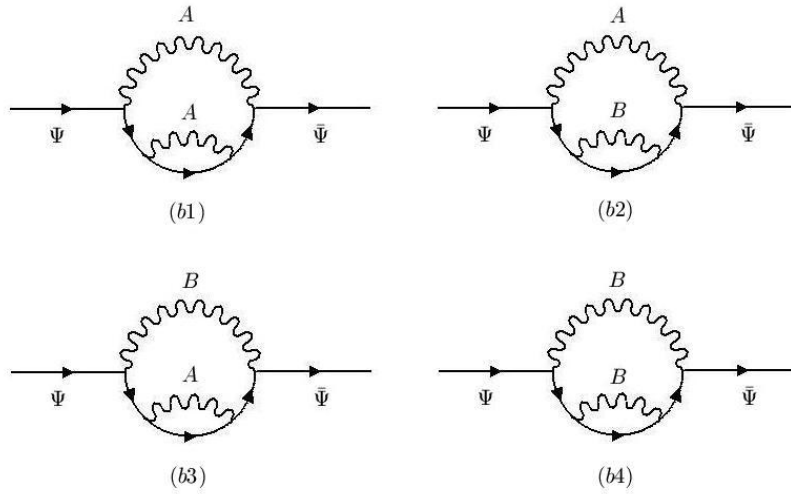


Figura 22 – Diagramas que contribuem para a amplitude (b) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

e, às mesmas, corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(b)} = & S^{(b1)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big|_{fin} \right] \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + \\
 & + S^{(b2)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big|_{fin} \right] \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + \\
 & + S^{(b3)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big|_{fin} \right] \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5) + \\
 & + S^{(b4)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big|_{fin} \right] \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5), \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

onde as subdivergências são dadas na tabela 5.

Tabela 5 – Subdivergências associadas à amplitude (b). O momento externo é k e o momento interno é l .

Função	Parte finita do gráfico
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big _{fin}$	
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big _{fin}$	

Do cálculo a 1 loop, temos

$$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A}\Big|_{fin} = \Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B}\Big|_{fin} = -ig^2\gamma_\mu \left\{ \frac{k^\mu}{2} \left[2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] - \frac{1}{2} k_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\}.$$

Com estes resultados, a amplitude fica:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(b)} &= S^{(b12)} \times ig^2 \int_k \frac{k}{k^2} \left\{ -ig^2\gamma_\mu \frac{k^\mu}{2} \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \frac{k}{k^2[k-p]^2} + \\ &+ S^{(b34)} \times -ig^2 \int_k \frac{\gamma_5 k}{k^2} \left\{ -ig^2\gamma_\mu \frac{k^\mu}{2} \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \frac{k\gamma_5}{k^2[k-p]^2} = \\ &= S^{(b)} \times g^4 \int_k \frac{k}{k^2} \frac{k}{2} \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \frac{k}{k^2[k-p]^2} = \\ &= S^{(b)} \times \frac{1}{2} g^4 \int_k \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \frac{k}{k^2[k-p]^2} = \\ &= S^{(b)} \times \frac{1}{2} g^4 \left\{ 2b\gamma_\mu I^\mu - b\gamma_\mu I^{(2)\mu} \right\} = \\ &= S^{(b)} \times \frac{1}{2} g^4 \left\{ 2b \left[\frac{\not{p}}{2} \left(I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - \right. \\ &- b\gamma_\mu \left[\frac{1}{2} \left(p^\mu I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{p^\mu}{2} I_{log}(\lambda^2) - p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right) + \right. \\ &\left. \left. + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right] \right\}, \\ \\ \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(b)} &= S^{(b)} \times \frac{1}{4} b g^4 \left\{ -\not{p} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{3}{2} \not{p} I_{log}(\lambda^2) + \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \right. \\ &\left. + 2b \not{p} \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - 2\gamma_\mu \left[4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde $S^{(b)} = 64$, resultado (C.17).

O gráfico (c) tem duas contribuições

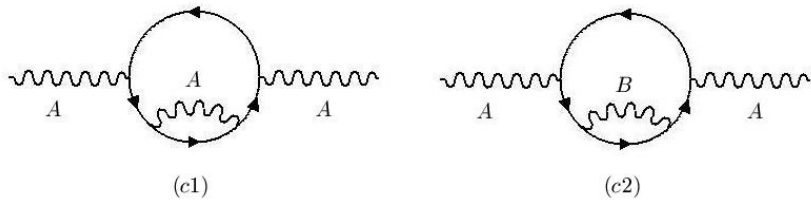


Figura 23 – Diagramas que contribuem para a amplitude (c) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

e, às mesmas, corresponde a seguinte amplitude²:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{(c)} &= S^{(c1)} \times -2\text{tr} \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big|_{fin} \right] \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-(\not{k} - \not{p})}{[k-p]^2} (-ig) + \\
&\quad + S^{(c2)} \times -2\text{tr} \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big|_{fin} \right] \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-(\not{k} - \not{p})}{[k-p]^2} (-ig) = \\
&= S^{(c)} \times -2g^2 \text{tr} \int_k \frac{\not{k}}{k^2} \left\{ -ig^2 \gamma_\mu \frac{k^\mu}{2} \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} \frac{\not{k}(\not{k} - \not{p})}{k^2 [k-p]^2} = \\
&= S^{(c)} \times 2ig^4 \text{tr} \int_k \frac{\not{k}}{k^2} \frac{\not{k}}{2} \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \frac{\not{k}(\not{k} - \not{p})}{k^2 [k-p]^2} = \\
\Gamma_{AA}^{(c)} &= S^{(c)} \times ig^4 \int_k \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \frac{\text{tr}[\not{k}(\not{k} - \not{p})]}{k^2 [k-p]^2}, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

cujas subdivergências são as mesmas que as do gráfico (b), tabela 5. O traço é dado por

$$\begin{aligned}
\text{T} &= \text{tr}[\not{k}\gamma_\mu\not{k}(\not{k} - \not{p})] \\
&= 4[g_{\rho\mu}g_{\sigma\eta} - g_{\rho\sigma}g_{\mu\eta} + g_{\rho\eta}g_{\mu\sigma}]k^\rho k^\sigma (k-p)^\eta = \\
&= 4[k_\mu k \cdot (k-p) - k^2(k-p)_\mu + k \cdot (k-p)k_\mu] = \\
&= 4[k^2 k_\mu + k^2 p_\mu - 2k \cdot p k_\mu] \\
&= 4[k^2 k_\mu + k^2 p_\mu + [(k-p)^2 - k^2 - p^2]k_\mu] \\
&= 4[k^2 p_\mu + (k-p)^2 k_\mu - p^2 k_\mu], \tag{4.27}
\end{aligned}$$

e a amplitude fica

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{(c)} &= S^{(c)} \times 4ig^4 \int_k \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k-p]^2} = \\
&= S^{(c)} \times 4ig^4 \left\{ 2b \int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k-p]^2} - b \int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k-p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right\}. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

De acordo com os resultados (A.36) e (A.37) do Apêndice A.3, a amplitude resulta

² O fator multiplicativo 2 na amplitude é devido ao fato de a subdivergência poder estar na parte de cima do loop ou na parte de baixo (mantido o roteamento dos momentos), sendo estas duas contribuições iguais.

em:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{(c)} &= S^{(c)} \times 4ig^4 \left\{ 2b \left[I_{quad}(\lambda^2) - \frac{p^2}{2} \left(I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - \right. \\
&\quad - b \left[I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p^2 I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{4} p^2 I_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{4} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. \left. + 4p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 3p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right] \right\}, \\
\Gamma_{AA}^{(c)} &= S^{(c)} \times 4ibg^4 \left\{ 2I_{quad}(\lambda^2) - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{5}{4} p^2 I_{log}(\lambda^2) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - bp^2 \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - \\
&\quad \left. - 4p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 2p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 3p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right\}, \tag{4.29}
\end{aligned}$$

onde $S^{(c)} = 16$, resultado (C.18).

O gráfico (d) tem três contribuições

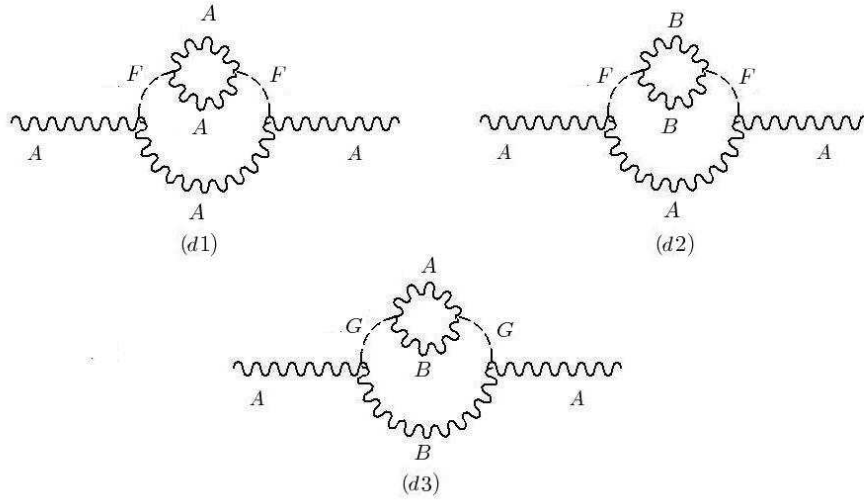


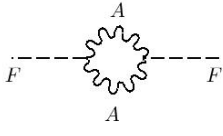
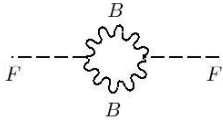
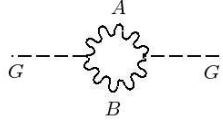
Figura 24 – Diagramas que contribuem para a amplitude (d) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

às quais corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{(d)} &= S^{(d1)} \times \int_k \frac{-i}{(p-k)^2} (ig) \frac{ik^2}{k^2} \left[\Gamma_{FF,A} \Big|_{fin} \right] \frac{ik^2}{k^2} (ig) + \\
&\quad + S^{(d2)} \times \int_k \frac{-i}{(p-k)^2} (ig) \frac{ik^2}{k^2} \left[\Gamma_{FF,B} \Big|_{fin} \right] \frac{ik^2}{k^2} (ig) + \\
&\quad + S^{(d3)} \times \int_k \frac{-i}{(p-k)^2} (-ig) \frac{ik^2}{k^2} \left[\Gamma_{GG} \Big|_{fin} \right] \frac{ik^2}{k^2} (-ig), \tag{4.30}
\end{aligned}$$

sendo as respectivas subdivergências dadas na tabela 6.

Tabela 6 – Subdivergências associadas à amplitude (d) . O momento externo é k e o momento interno é l .

Função	Parte finita do gráfico
$\Gamma_{FF,A} _{fin}$	
$\Gamma_{FF,B} _{fin}$	
$\Gamma_{GG} _{fin}$	

Temos que

$$\begin{aligned}\Gamma_{FF,A} &= \int_l \frac{-i}{l^2} (ig) \frac{-i}{(l-k)^2} (ig) = \\ &= g^2 \int_l \frac{1}{l^2(l-k)^2} = g^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.31)$$

e sendo

$$\Gamma_{FF,A} = \Gamma_{FF,B} = \Gamma_{GG},$$

a amplitude resulta em:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{(d)} &= S^{(d)} \times -ig^2 \int_k \frac{1}{(k-p)^2} \left[g^2 \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] = \\ &= S^{(d)} \times -ig^4 \left\{ 2b \int_k \frac{1}{(k-p)^2} - b \int_k \frac{1}{(k-p)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Utilizando os resultados (A.39) e (A.40) a amplitude fica:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{(d)} &= S^{(d)} \times -ig^4 \left\{ 2b \left[I_{quad}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - \right. \\ &\quad - b \left[I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 I_{log}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. \left. + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right] \right\}, \\ \Gamma_{AA}^{(d)} &= S^{(d)} \times -ibg^4 \left\{ 2I_{quad}(\lambda^2) - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p^2 I_{log}(\lambda^2) + p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \right. \\ &\quad \left. - 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right\},\end{aligned}\quad (4.33)$$

onde $S^{(d)} = 32$, resultado (C.21).

O gráfico (e) tem duas contribuições

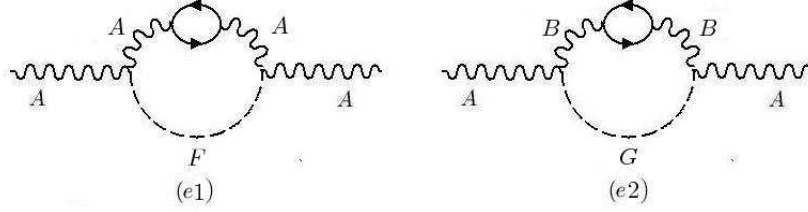


Figura 25 – Diagramas que contribuem para a amplitude (e) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

às quais corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{AA}^{(e)} &= S^{(e1)} \times \int_k \frac{i(p-k)^2}{(p-k)^2} (ig) \frac{-i}{k^2} \left[\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (ig) + \\
 &\quad + S^{(e2)} \times \int_k \frac{i(p-k)^2}{(p-k)^2} (-ig) \frac{-i}{k^2} \left[\Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (-ig) = \\
 &= S^{(e)} \times ig^2 \int_k \frac{1}{k^4} \left\{ -2g^2 k^2 \left(2b - b \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right) \right\} = \\
 \Gamma_{AA}^{(e)} &= S^{(e)} \times -2ig^4 \left\{ 2bI_{quad}(\lambda^2) - bI_{quad}^{(2)}(\lambda^2) \right\}, \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

onde $S^{(e)} = 16$, resultado (C.22).

4.3.2 Rotulação Arbitrária a 2 loops

Vamos agora calcular os gráficos a 2 loops vistos na seção anterior, todavia utilizaremos um rótulo arbitrário, de forma que a função de dois pontos dos campos A e Ψ tem a contribuição dos seguintes gráficos:

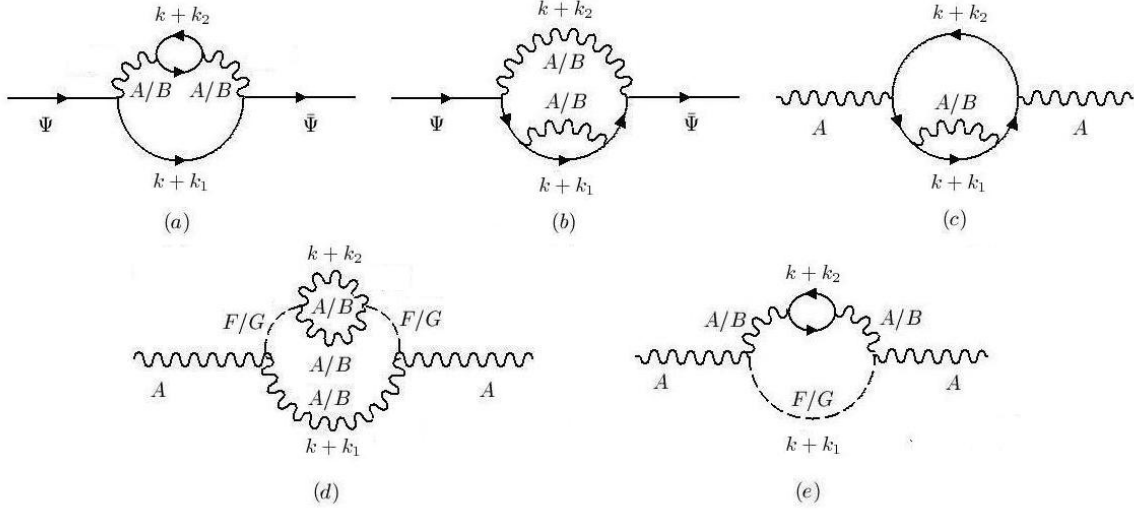


Figura 26 – Diagramas que contribuem para a função de dois pontos a 2 loops, com uma rotulação arbitrária. O momento externo é p e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p$.

O gráfico (a) tem duas contribuições,

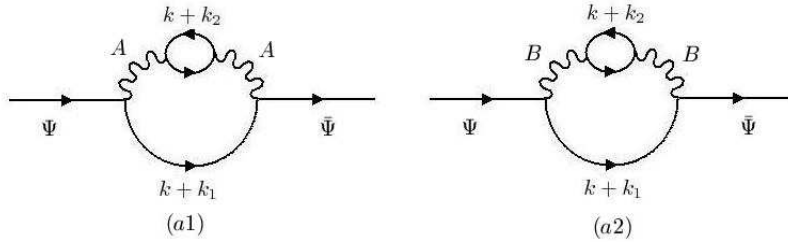


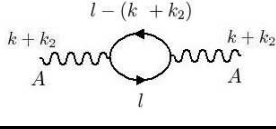
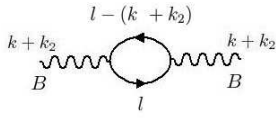
Figura 27 – Diagramas que contribuem para a amplitude (a) em 2 loops. O momento externo é p , os momentos internos são k e l e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p$.

às quais corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(a)} &= 8 \times \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-i}{[k + k_2]^2} \left[\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k + k_2]^2} (-ig) + \\ &+ 8 \times \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k + k_2]^2} \left[\Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k + k_2]^2} (g\gamma_5), \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo as subdivergências dadas pelos diagramas da tabela 7.

Tabela 7 – Subdivergências associadas à amplitude (a). O momento externo é $k + k_2$ e o momento interno é l .

Função	Parte finita do gráfico
$\Pi_A^{\mu\nu} \Big _{fin}$	
$\Pi_B^{\mu\nu} \Big _{fin}$	

Como pode ser visto no apêndice A.3.3, equação (A.47):

$$\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} = \Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} = 4g^2 \left\{ -\frac{(k+k_2)^2}{2} \left[2b - b \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.36)$$

Portanto, a amplitude fica

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(a)} &= -16g^2 \int_k \frac{k+k_1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} 4g^2 \left\{ -\frac{(k+k_2)^2}{2} \left[2b - b \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} \frac{1}{[k+k_2]^2} = \\ &= 32bg^4 \left\{ 2 \int_k \frac{k+k_1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} - \int_k \frac{k+k_1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

As integrais acima são resolvidas pela abordagem dos *shifts* nos Apêndices A.3.2 e A.3.3, de forma que utilizando os resultados (A.46) e (A.49):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(a)} &= 32bg^4 \left\{ (k_1 - k_2) I_{log}(\lambda^2) + \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} + \right. \\ &\quad + (k_1 - k_2) b \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (k_1 - k_2) I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{4} (k_1 - k_2) I_{log}(\lambda^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{4} \gamma_\mu (k_{1\nu} - k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\ &\quad \left. + 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - (\gamma_\mu p^2 + 2\cancel{p}p_\mu) I_{f,2,1}^{(2)\mu} + \cancel{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right\}, \\ \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(a)} &= 16bg^4 \left\{ (k_1 - k_2) \left[-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] - \right. \\ &\quad - \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + 2b(k_1 - k_2) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] + \\ &\quad \left. + 8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 2(\gamma_\mu p^2 + 2\cancel{p}p_\mu) I_{f,2,1}^{(2)\mu} + 2\cancel{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde desprezamos o TS de primeira ordem $\Upsilon_0^{\mu\nu}$, como exige a MRI e a identidade de Ward em 1 loop.

O gráfico (b) tem quatro contribuições, figura 28,

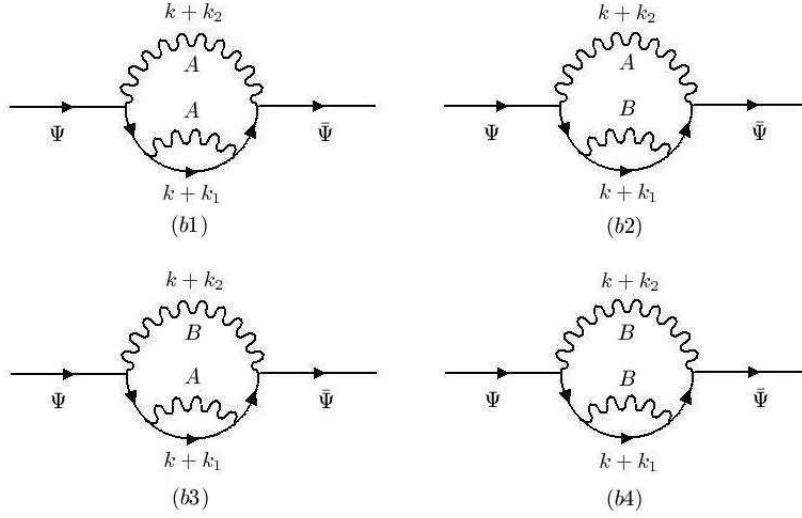


Figura 28 – Diagramas que contribuem para a amplitude (b) em 2 loops. O momento externo é p , os momentos internos são k e l e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p$.

às quais corresponde a seguinte amplitude

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(b)} = & S^{(b1)} \times \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-i}{[k + k_2]^2} (-ig) + \\
 & + S^{(b2)} \times \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-i}{[k + k_2]^2} (-ig) + \\
 & + S^{(b3)} \times \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k + k_2]^2} (g\gamma_5) + \\
 & + S^{(b4)} \times \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k + k_2]^2} (g\gamma_5), \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

onde as subdivergências estão descritas na tabela 8.

Tabela 8 – Subdivergências associadas à amplitude (b). O momento externo é $k + k_1$ e o momento interno é l .

Função	Parte finita do gráfico
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big _{fin}$	
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big _{fin}$	

Utilizando o resultado (A.51) para a parte finita da amplitude das subdivergências

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}_{Ra}}^{(b)} &= 64ig^2 \frac{-b}{2} ig^2 \int_k \frac{(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (\not{k} + \not{k}_1) \left[2 - \ln \left(- \frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} = \\ &= 32bg^4 \left\{ 2 \int_k \frac{\not{k} + \not{k}_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} - \int_k \frac{\not{k} + \not{k}_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \ln \left(- \frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) \right\}. \quad (4.40)\end{aligned}$$

De acordo com os resultados (A.46) e (A.53) para as integrais acima, a amplitude (b) fica:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}_{Ra}}^{(b)} &= 32bg^4 \left\{ (\not{k}_1 - \not{k}_2) I_{log}(\lambda^2) + \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} + \right. \\ &\quad + (\not{k}_1 - \not{k}_2) b \left[2 - \ln \left(- \frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\not{k}_1 - \not{k}_2) \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \frac{1}{4} \gamma_\mu (k_{1\nu} - k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\ &\quad \left. - 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + \gamma_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right\} \\ \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}_{Ra}}^{(b)} &= 16bg^4 \left\{ (\not{k}_1 - \not{k}_2) \left[- I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{3}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] - \right. \\ &\quad - \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + 2b(\not{k}_1 - \not{k}_2) \left[2 - \ln \left(- \frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\ &\quad \left. - 8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 2\gamma_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right\}. \quad (4.41)\end{aligned}$$

O gráfico (c) tem quatro contribuições

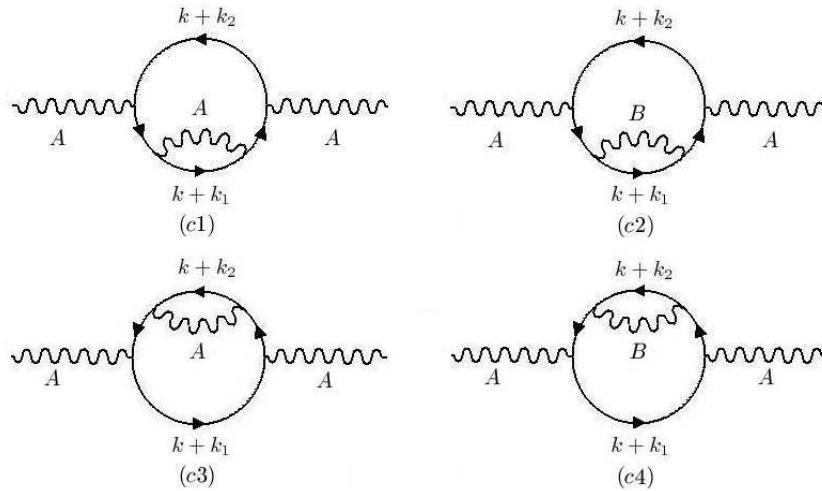


Figura 29 – Diagramas que contribuem para a amplitude (c) em 2 loops. O momento externo é p , os momentos internos são k e l e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p$.

com as respectivas subdivergências dadas na tabela 9.

Tabela 9 – Subdivergências associadas à amplitude (c). Para os gráficos c1 e c2 o momento externo é $k + k_1$ e para os gráficos c3 e c4 o momento externo é $k + k_2$, o momento interno sendo l para todos.

Função	Parte finita do gráfico
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A1} _{fin}$	
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B2} _{fin}$	
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A3} _{fin}$	
$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B4} _{fin}$	

Portanto, com os resultados (A.51) e (A.54) para a parte finita das amplitudes das subdivergências, a amplitude (c) fica

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(c)} &= S^{(c1)} \times -\text{tr} \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A1}|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} (-ig) + \\
&+ S^{(c2)} \times -\text{tr} \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B2}|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} (-ig) + \\
&+ S^{(c3)} \times -\text{tr} \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A3}|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} (-ig) + \\
&+ S^{(c4)} \times -\text{tr} \int_k \frac{-(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (-ig) \frac{-(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} \left[\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B4}|_{fin} \right] \frac{-(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} (-ig) = \\
&= -16g^2 \frac{-b}{2} ig^2 \text{tr} \int_k \frac{(\not{k} + \not{k}_1)}{[k + k_1]^2} (\not{k} + \not{k}_1) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} - \\
&- 16g^2 \frac{-b}{2} ig^2 \text{tr} \int_k \frac{(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} (\not{k} + \not{k}_2) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k + k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \frac{(\not{k} + \not{k}_2)}{[k + k_2]^2} = \\
&= 8ig^4 \int_k \frac{\text{tr}[(\not{k} + \not{k}_1)(\not{k} + \not{k}_2)]}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \left[4 - \ln \left(-\frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) - \ln \left(-\frac{(k + k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Tomando o traço e manipulando o numerador na amplitude acima, teremos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(c)} = & 16ibg^4 \left\{ 4 \left[\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} + \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} - \int_k \frac{[k_1-k_2]^2}{[k+k_1]^2[k+k_2]^2} \right] - \right. \\
& - \left[\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_1)^2}{\lambda^2} \right) + \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) + \right. \\
& + \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_1)^2}{\lambda^2} \right) + \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) - \\
& - \int_k \frac{[k_1-k_2]^2}{[k+k_1]^2[k+k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_1)^2}{\lambda^2} \right) - \\
& \left. \left. - \int_k \frac{[k_1-k_2]^2}{[k+k_1]^2[k+k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

As três primeiras integrais acima estão resolvidas no Apêndice A.3.2, equações (A.41), (A.42) e (A.43), respectivamente, enquanto que as seis últimas estão no Apêndice A.3.3, equações (A.55), (A.56), (A.60), (A.62), (A.63) e (A.64). Assim, utilizando estes resultados, temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(c)} = & 16ibg^4 \left\{ 4 \left[I_{quad}(\lambda^2) + k_{1\mu}k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] + 4 \left[I_{quad}(\lambda^2) + k_{2\mu}k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - \right. \\
& - 4(k_1-k_2)^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + b \left(2 - \ln \left(-\frac{(k_1-k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] - \\
& - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - k_{1\mu}k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} + k_{1\mu}k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \\
& - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - k_{2\mu}k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \\
& - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{2}(k_1-k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) - \\
& - \left[-k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{2\mu}(k_{1\nu}-k_{2\nu}) \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \\
& - \frac{1}{2} \left[k_{1\mu}(k_{1\nu}+k_{2\nu}) + k_{2\mu}(k_{1\nu}-k_{2\nu}) \right] \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\
& - 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1}^{(2)} + \\
& - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{2}(k_1-k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) + \\
& + \left[k_{1\mu}(k_{1\nu}-k_{2\nu}) + k_{2\mu}k_{1\nu} \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
& + \frac{1}{2} \left[k_{1\mu}(k_{1\nu}-k_{2\nu}) - k_{2\mu}(k_{1\nu}+k_{2\nu}) \right] \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
& + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1+}^{(2)} + \\
& + (k_1-k_2)^2 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right] + \\
& \left. + (k_1-k_2)^2 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - 2p_\mu I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1+}^{(2)} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(c)} = & 32ibg^4 \left\{ -2I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 4I_{quad}(\lambda^2) + (k_1 - k_2)^2 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{5}{2}I_{log}(\lambda^2) \right] + \right. \\
& + \left[k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu} \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - 2b(k_1 - k_2)^2 \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
& \left. - 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 6p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - 2p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right\}, \quad (4.43)
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que

$$I_{f,i,j+}^{(2)}, I_{f,i,j+}^{(2)\mu}, I_{f,i,j+}^{(2)\mu\nu}, I_{f,i,j+}^{(2)\mu\nu\rho} = I_{f,i,j}^{(2)}, -I_{f,i,j}^{(2)\mu}, I_{f,i,j}^{(2)\mu\nu}, -I_{f,i,j}^{(2)\mu\nu\rho}. \quad (4.44)$$

O gráfico (d) tem três contribuições

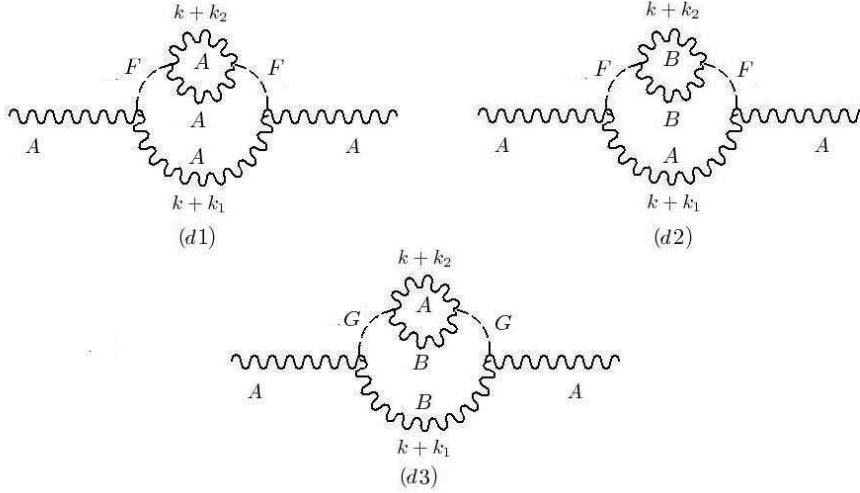


Figura 30 – Diagramas que contribuem para a amplitude (d) em 2 loops. O momento externo é p , os momentos internos são k e l e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p$.

às quais corresponde a amplitude:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(d)} = & S^{(d1)} \times \int_k \frac{-i}{(k+k_1)^2} (ig) \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} \left[\Gamma_{FF,A} \Big|_{fin} \right] \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} (ig) + \\
& + S^{(d2)} \times \int_k \frac{-i}{(k+k_1)^2} (ig) \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} \left[\Gamma_{FF,B} \Big|_{fin} \right] \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} (ig) + \\
& + S^{(d3)} \times \int_k \frac{-i}{(k+k_1)^2} (-ig) \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} \left[\Gamma_{GG} \Big|_{fin} \right] \frac{i(k+k_2)^2}{(k+k_2)^2} (-ig), \quad (4.45)
\end{aligned}$$

sendo a parte finita das subdivergências (Tabela 10) dada na equação (A.66), de modo que

$$\Gamma_{AA_{Ra}}^{(d)} = -32ibg^4 \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \left[2 - \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (4.46)$$

Tabela 10 – Subdivergências associadas à amplitude (d). O momento externo é $k + k_2$ e o momento interno é l .

Função	Parte finita do gráfico
$\Gamma_{FF,A} _{fin}$	
$\Gamma_{FF,B} _{fin}$	
$\Gamma_{GG} _{fin}$	

As integrais acima estão resolvidas nos respectivos apêndices, de forma que, utilizando os resultados (A.41) e (A.62), vem:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(d)} &= -32ibg^4 \left\{ 2I_{quad}(\lambda^2) + 2k_{1\mu}k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) + \right. \\
&\quad + [k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{2\mu}k_{1\nu}] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{2} [k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) - k_{2\mu}(k_{1\nu} + k_{2\nu})] \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
&\quad \left. + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1+}^{(2)} \right\}, \\
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(d)} &= 32ibg^4 \left\{ I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2) + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) - \right. \\
&\quad - [k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{2\mu}k_{1\nu}] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad \left. + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right\}, \tag{4.47}
\end{aligned}$$

onde, novamente, utilizamos (4.44). Por fim, o gráfico (e) tem duas contribuições

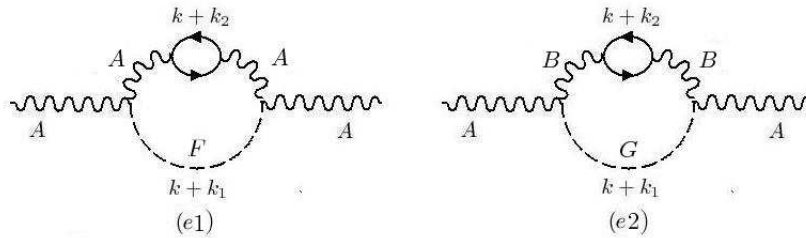


Figura 31 – Diagramas que contribuem para a amplitude (e) em 2 loops. O momento externo é p , os momentos internos são k e l e, pela conservação do momento, $k_1 - k_2 = p$.

cuja amplitude é:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(e)} &= S^{(e1)} \times \int_k \frac{i(k+k_1)^2}{(k+k_1)^2} (ig) \frac{-i}{[k+k_2]^2} \left[\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k+k_2]^2} (ig) + \\
&+ S^{(e2)} \times \int_k \frac{i(k+k_1)^2}{(k+k_1)^2} (-ig) \frac{-i}{[k+k_2]^2} \left[\Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k+k_2]^2} (-ig) = \\
&= -32ibg^4 \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \left[2 - \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] = \\
&= -32ibg^4 \left\{ 2I_{quad}(\lambda^2) + 2k_{2\mu}k_{2\nu} \cancel{\Upsilon_0^{\mu\nu}} - \right. \\
&\quad \left. - I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - k_{2\mu}k_{2\nu} \cancel{\Upsilon_0^{\mu\nu}} + k_{2\mu}k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} \right\}, \\
\Gamma_{AA_{Ra}}^{(e)} &= 32ibg^4 \left\{ I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2) - k_{2\mu}k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} \right\}, \tag{4.48}
\end{aligned}$$

onde, na terceira linha, utilizamos

$$\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} = \Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} = -2bg^2(k+k_2)^2 \left[2 - \ln \left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right],$$

e, nas quarta e quinta linhas, utilizamos os resultados das equações (A.42) e (A.56).

4.3.3 Invariância de Rótulo

Abaixo, escrevemos os resultados das amplitudes a 2 loops com as duas rotações. Separamos as partes das IDB, finitas e dos TS, para melhor visualização:

Tabela 11 – Amplitudes (a) com as duas rotações. O coeficiente multiplicativo global para ambas é $16bg^4$.

Parte	Amplitudes	
	$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)}$	$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}_{Ba}}^{(a)}$
IDB	$-\not{p}I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{2}\not{p}I_{log}(\lambda^2)$	$(k_1 - k_2) \left[-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{2}I_{log}(\lambda^2) \right]$
Finita	$2b\not{p} \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) +$ $8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} -$ $2 \left[2\not{p}p_\mu + \gamma_\mu p^2 \right] I_{f,2,1}^{(2)\mu} + 2\not{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)}$	$2b(k_1 - k_2) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] +$ $8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} -$ $2(\gamma_\mu p^2 + 2\not{p}p_\mu) I_{f,2,1}^{(2)\mu} + 2\not{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)}$
TS	$-\gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$	$-\gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$

Tabela 12 – Amplitudes (b) com as duas rotações. O coeficiente multiplicativo global para ambas é $16bg^4$.

Parte	Amplitudes	
	$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(b)}$	$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}_{Ba}}^{(b)}$
IDB	$-\not{p}I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{3}{2}\not{p}I_{log}(\lambda^2)$	$(k_1 - k_2) \left[-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{3}{2}I_{log}(\lambda^2) \right]$
Finita	$2b\not{p} \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) -$ $2\gamma_\mu \left[4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - \right.$ $\left. p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right]$	$2b(k_1 - k_2) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] -$ $8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} +$ $2\gamma_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu}$
TS	$\gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$	$-\gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$

Tabela 13 – Amplitudes (c) com as duas rotações. O coeficiente multiplicativo global para ambas é $32ibg^4$.

Parte	Amplitudes	
	$\Gamma_{AA}^{(c)}$	$\Gamma_{AABa}^{(c)}$
IDB	$-2I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 4I_{quad}(\lambda^2) + p^2 I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{5}{2}p^2 I_{log}(\lambda^2)$	$-2I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 4I_{quad}(\lambda^2) + (k_1 - k_2)^2 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{5}{2}I_{log}(\lambda^2) \right]$
Finita	$-2bp^2 \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 6p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - 2p^4 I_{f,2,1}^{(2)}$	$-2b(k_1 - k_2)^2 \left[2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] - 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 6p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - 2p^4 I_{f,2,1}^{(2)}$
TS	$p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$	$k_{1\mu} k_{1\nu} + k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$

Tabela 14 – Amplitudes (d) com as duas rotações. O coeficiente multiplicativo global para ambas é $32ibg^4$.

Parte	Amplitudes	
	$\Gamma_{AA}^{(d)}$	$\Gamma_{AABa}^{(d)}$
IDB	$I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2) + \frac{1}{2}p^2 I_{log}(\lambda^2)$	$I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2) + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2)$
Finita	$8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)}$	$8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)}$
TS	$-p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$	$-k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{2\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$

Tabela 15 – Amplitudes (e) com as duas rotações. O coeficiente multiplicativo global para ambas é $32ibg^4$.

Parte	Amplitudes	
	$\Gamma_{AA}^{(e)}$	$\Gamma_{AABa}^{(e)}$
IDB	$I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2)$	$I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2)$
Finita	0	0
TS	0	$-k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$

Novamente, vemos que a parte das IDB e a parte finita de todas as amplitudes coincidem, havendo discrepância apenas na parte associadas aos termos de superfície, dependentes de rotação. Assim, o processo de implementação da MRI às amplitudes é explicitado pelas relações:

$$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(a)} - \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(a)} = 32bg^4 \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \quad (4.49)$$

$$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}Ra}^{(b)} - \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(b)} = -32bg^4\gamma_\mu k_{1\nu}\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \quad (4.50)$$

$$\Gamma_{AA Ra}^{(c)} - \Gamma_{AA}^{(c)} = 32ibg^4[k_{1\mu}k_{2\nu} + k_{2\mu}k_{1\nu}]\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \quad (4.51)$$

$$\Gamma_{AA Ra}^{(d)} - \Gamma_{AA}^{(d)} = -32ibg^4k_{2\mu}[2k_{1\nu} - k_{2\nu}]\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \quad (4.52)$$

$$\Gamma_{AA Ra}^{(e)} - \Gamma_{AA}^{(e)} = -32ibg^4k_{2\mu}k_{2\nu}\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \quad (4.53)$$

e, mais uma vez, sabendo que os momentos k_1 e k_2 assumem valores completamente arbitrários, a MRI exige que o TS de segunda ordem seja nulo

$$\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0. \quad (4.54)$$

4.3.4 MRI e Susy

Novamente, observamos que o termo de superfície, agora o de segunda ordem, deve ser nulo a fim de que tenhamos invariância de rótulo para os gráficos a 2 loops no modelo de Wess-Zumino sem massa. Agora, vamos substituir as amplitudes calculadas com rótulo arbitrário na identidade de Ward e verificar o comportamento dos TS.

Uma vez que as amplitudes tratadas aqui tem resultados extensos, vamos decompor a Identidade de Ward em três partes para melhor visualização dos resultados:

$$I_{WT} \equiv \Gamma_{AA}(p) + i\not{p}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}(p) = I_{WT}\Big|_{IDB} + I_{WT}\Big|_{TS} + I_{WT}\Big|_{fin} = 0.$$

Dessa forma, utilizando os resultados (4.38), (4.41), (4.43), (4.47) e (4.48), temos para a parte das IDB da ID de Ward:

$$\begin{aligned} I_{WT}\Big|_{IDB} &= 32ibg^4\left\{-2I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 4I_{quad}(\lambda^2) + (k_1 - k_2)^2\left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{5}{2}I_{log}(\lambda^2)\right]\right\} + \\ &+ 32ibg^4\left\{I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2) + \frac{1}{2}(k_1 - k_2)^2I_{log}(\lambda^2)\right\} + \\ &+ 32ibg^4\left\{I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2I_{quad}(\lambda^2)\right\} + \\ &+ i(k_1 - k_2)16bg^4(k_1 - k_2)\left\{-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{5}{2}I_{log}(\lambda^2)\right\} + \\ &+ i(k_1 - k_2)16bg^4(k_1 - k_2)\left\{-I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{3}{2}I_{log}(\lambda^2)\right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Por sua vez, a parte finita é:

$$\begin{aligned}
I_{\text{WT}} \Big|_{fin.} &= 64ibg^4 \left\{ -bp^2 \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - 4p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + \right. \\
&\quad \left. + 2p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 3p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right\} - \\
&\quad - 32ibg^4 \left\{ 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^4 I_{f,2,1}^{(2)} \right\} + \\
&\quad + i\not{p}(-16)bg^4 \left\{ -2b\not{p} \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - 8\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + \right. \\
&\quad \left. + 4\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + 2[2\not{p}p_\mu + \gamma_\mu p^2] I_{f,2,1}^{(2)\mu} - 2\not{p}p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right\} + \\
&\quad + i\not{p}16bg^4 \left\{ 2b\not{p} \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - 2\gamma_\mu \left[4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right] \right\} = 0. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

E, finalmente, a parte dos TS produz:

$$\begin{aligned}
I_{\text{WT}} \Big|_{TS} &= 32ibg^4 [k_{1\mu} k_{1\nu} + k_{2\mu} k_{2\nu}] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \\
&\quad - 32ibg^4 [k_{1\mu} (k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{2\mu} k_{1\nu}] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \\
&\quad - 32ibg^4 k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad + i[k_1 - k_2](-16)bg^4 \gamma_\mu [k_{1\nu} + k_{2\nu}] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad + i[k_1 - k_2](-16)bg^4 \gamma_\mu [k_{1\nu} + k_{2\nu}] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}, \\
I_{\text{WT}} \Big|_{TS} &= \beta_{\mu\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo estes resultados na ID de Ward, teremos

$$\begin{aligned}
I_{\text{WT}} &= \Gamma_{AA}(p) + i\not{p}\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}(p) = 0, \\
I_{\text{WT}} &= 32ibg^4 \left\{ k_{1\mu} k_{2\nu} - k_{2\mu} k_{1\nu} - (k_1 - k_2) \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \right\} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \\
I_{\text{WT}} &= \beta_{\mu\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0, \tag{4.58}
\end{aligned}$$

onde $\beta_{\mu\nu} \equiv 32ibg^4 \left\{ k_{1\mu} k_{2\nu} - k_{2\mu} k_{1\nu} - (k_1 - k_2) \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \right\}$. Impondo a MRI, ou seja,

$$\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = 0,$$

a identidade de Ward é satisfeita e podemos constatar que o termo de superfície seria o responsável pela violação da supersimetria, caso ele fosse diferente de zero.

Novamente, podemos fazer um paralelo com a literatura, realizando as substituições $k_1^\mu \rightarrow \alpha p^\mu$ e $k_2^\mu \rightarrow (\alpha - 1)p^\mu$ nos momentos arbitrários, produzindo

$$\beta_{\mu\nu} = -32ibg^4 (2\alpha - 1) \not{p} \gamma_\mu p_\nu,$$

o qual produziria o resultado nulo para a identidade de Ward, se fizéssemos $\alpha = 1/2$. Mais uma vez, notamos que uma escolha específica da constante arbitrária α satisfaz a identidade de Ward, porém encobre o papel de violador da SuSy do termo de superfície. Com este resultado, demonstramos mais uma vez que a MRI é uma condição mais geral de conservação da supersimetria.

5 Análise dos Resultados

Com o resultado do cálculo das funções de dois pontos a 1 e 2 loops no modelo de Wess-Zumino em componentes, vemos que os termos de superfície são quantidades que merecem uma maior atenção, no sentido de que sua indeterminação espúria, dependente de regularização, pode levar a interpretações incorretas no tratamento de Teorias Quânticas de Campo sensíveis a continuação dimensional.

No caso a um loop, observamos que, devido à identidade de Ward (a qual é derivada do princípio da ação quântica), o termo de superfície de primeira ordem $\Upsilon_0^{\mu\nu}$ deve necessariamente ser nulo, tanto no caso onde usamos uma rotulação específica (seção 4.2), quanto quando usamos uma rotulação arbitrária (seção 4.2.2). O vínculo que exige este valor nulo para o termo de superfície é a supersimetria global, e aqui vemos que o valor nulo do TS não é um parâmetro de entrada do modelo estudado, mas uma exigência, ou um produto, do conteúdo de simetria da teoria.

No caso a dois loops, na seção 4.3 utilizamos uma rotulação específica, a mais conveniente para resolver cada um dos cinco conjuntos de gráficos que contribuíam para a correspondente amplitude. Neste caso, vimos que para o termo de superfície de segunda ordem $\Upsilon_0^{(2)\mu\nu}$ não conseguimos obter a mesma exigência de anulação como no caso a um loop, devido ao fato de que as contribuições que geram tais TS conduzem a uma anulação natural par a par destas quantidades, o que é uma consequência da escolha específica de rotulação em cada gráfico.

Por outro lado, na seção 4.3.2 fizemos o mesmo cálculo a dois loops, utilizando uma rotulação a mais arbitrária possível. Neste caso, pudemos constatar o surgimento do TS de segunda ordem na identidade de Ward, com o papel de possível violador da SuSy.

Utilizando uma rotulação mais geral e completamente arbitrária no tratamento das amplitudes relacionadas à função de dois pontos e conseqüentemente ao conteúdo de simetria da teoria, representada pela identidade de Ward, vemos que a invariância de rótulo (MRI) é uma condição mais geral e elegante de conservação da supersimetria. A MRI, neste caso relacionada à determinação do valor nulo para os TS de primeira e segunda ordens, se apresenta como uma ferramenta útil e promissora no tratamento de teorias cujo conteúdo de simetria pode ser contaminado com a aparecimento de TS provenientes do cálculo das amplitudes.

Neste trabalho, utilizamos o entendimento proveniente da prova diagramática da invariância de calibre na QED, de que se fazer *shifts* nos momentos de integração é uma necessidade para se satisfazer a simetria de calibre. Dentro da abordagem da RI, a operação de se fazer *shifts* está diretamente relacionada ao fato do surgimento de termos de

superfície, e estes últimos devem necessariamente ser nulos, para satisfazermos a simetria de calibre.

Conectando estas observações, inicialmente disjuntas, conseguimos relacionar a operação de *shifts* com uma simetria fundamental dos diagramas de Feynman: a invariância de rótulo. Sabe-se do cálculo das amplitudes relacionadas aos diagramas, que podemos sempre utilizar um rótulo arbitrário no roteamento dos momentos internos ao diagrama, uma vez que, por definição, estes momentos internos podem assumir qualquer valor em seu intervalo de integração, desde que nos vértices a conservação de momento seja respeitada. Podemos chegar à conclusão de que os TS devem ter seu valor fixo por esta simetria dos rótulos e, assim, poderemos alcançar um maior entendimento de como estas quantidades podem se manifestar, ou até contaminar determinadas teorias.

6 Trabalhos Relacionados à MRI

O presente trabalho teve seu início na primeira entrada do autor no Doutorado do Programa de Pós-graduação do Departamento de Física da UFMG, no período entre os anos de 2008 a 2012. Com a participação e colaboração do grupo de pesquisa em Teoria Quântica de Campos da UFMG, a partir do ano de 2011, os frutos do projeto começaram a ser colhidos com a publicação de vários trabalhos relacionados à MRI e sua aplicação [32], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52].

Dentre estes destacamos o artigo de apresentação da MRI [32], que atualmente conta com 18 citações, segundo a base de dados *inspire-hep*:

PHYSICAL REVIEW D **86**, 025016 (2012)

Momentum routing invariance in Feynman diagrams and quantum symmetry breakings

L. C. Ferreira,^{1,*} A. L. Cherchiglia,^{1,†} Brigitte Hiller,^{2,‡} Marcos Sampaio,^{1,§} and M. C. Nemes^{1,||}

¹Universidade Federal de Minas Gerais - Departamento de Física - ICEX, P. O. BOX 702, 30.161-970, Belo Horizonte MG - Brazil

²Departamento de Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Rua Larga, P-3004-516 Coimbra - Portugal
(Received 4 November 2011; published 13 July 2012)

We illustrate with examples that quantum symmetry breakings in perturbation theory are connected to breakdown of momentum routing invariance (MRI) in the loops of a Feynman diagram. We show that MRI is a necessary and sufficient condition to preserve Abelian gauge symmetry at arbitrary loop order. We adopt the implicit regularization framework in which surface terms that are directly connected to momentum routing can be constructed to arbitrary loop order. The interplay between momentum routing invariance, surface terms and anomalies is discussed. We also illustrate that MRI is important to preserve supersymmetry. For theories with poor symmetry content, such as scalar field theories, MRI is shown to be important in the calculation of renormalization group functions.

DOI: [10.1103/PhysRevD.86.025016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.025016)

PACS numbers: 11.10.Gh, 11.15.Bt, 11.30.Qc

Figura 32 – Trabalho publicado fruto da pesquisa

Neste trabalho demonstramos que a MRI é uma condição necessária e suficiente para a conservação da simetria de calibre a n loops, além de mostrar que dentro da Regularização Implícita o surgimento dos termos de superfície está atrelado à liberdade de rotulação de determinado diagrama para uma ordem arbitrária de loops.

Ainda aplicamos a MRI na conservação da supersimetria global, seu papel na questão da anomalia quiral e sua função no cálculo de funções do grupo de renormalização para teorias com pouco conteúdo de simetria. Este trabalho foi fruto da colaboração entre eu e os Professores Doutores Brigitte Hiller, da Universidade de Coimbra, Maria Carolina Nemes e Marcos D. R. Sampaio, da UFMG, e do atualmente Doutor Adriano L. Cherchiglia, à época aluno de doutorado na UFMG.

Depois da publicação deste trabalho, várias outras contribuições do grupo de Teoria Quântica de Campos da UFMG surgiram como implementação ou aplicação da MRI,

algumas das quais cito resumidamente a seguir.

Em [46] os autores investigaram o aparecimento de parâmetros arbitrários, dependentes de regularização, no decaimento do Bóson de Higgs em dois fótons e no espalhamento de dois fótons. Eles constataram que as amplitudes, apesar de serem finitas, eram ambíguas e, assim, dependentes de regularização. Este problema foi sanado pela imposição de condições físicas às amplitudes, a saber a invariância de rótulo nos loops dos diagramas de Feynman.

Já no trabalho [50] foi investigado papel da MRI na extensão supersimétrica da QED. Os autores calcularam as identidades de Ward para as funções de dois e três pontos e derivaram as condições de conservação da simetria de calibre do setor eletromagnético da extensão do modelo padrão a um loop. Eles demonstraram que a MRI é condição suficiente para fixar arbitrariedades e parâmetros dependentes de regularização, intrínsecos à teoria de perturbação nos diagramas envolvidos.

Por fim, em [51] foi tratado o papel da MRI em anomalias em duas e quatro dimensões do espaço-tempo, além da identificação de ambiguidades associadas com a álgebra das matrizes γ^5 em integrais divergentes, mesmo na ausência de alteração da dimensão física no processo de regularização. Para o caso particular de teorias abelianas com vértices quirais efetivos, os autores obtiveram uma reinterpretação do papel da rotulação do momento na questão da escolha da identidade de Ward a ser satisfeita em um processo anômalo, além de demonstrar que a MRI é condição necessária e suficiente para assegurar a invariância de calibre vetorial nestas teorias.

Com isto, vemos a relevância da implementação da invariância de rótulo em diagramas de Feynman relacionados aos mais diversos processos físicos. Assim, este campo de pesquisa mostra-se promissor e frutífero, na medida que mais fenômenos atribuídos a ambiguidades provenientes do método de regularização empregado, podem ser investigados e sanados.

Uma outra motivação de sequência da implementação da MRI seria a sua relação com alguma simetria a nível de Lagrangeana da teoria estudada: assim como a prova diagramática da invariância de calibre é uma visão pictórica da simetria de calibre, a invariância de rótulo poderia estar associada com alguma simetria neste nível mais fundamental.

Referências

- [1] Padmanabhan, Thanu: *Quantum Field Theory*. Graduate Texts in Physics. Springer, 2016. Citado na página 17.
- [2] Wilczek, Frank: *Quantum field theory*. Rev. Mod. Phys., 71:S85–S95, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- [3] Jackiw, R.: *The Unreasonable effectiveness of quantum field theory*. Em *Conceptual foundations of quantum field theory. Proceedings, Symposium and Workshop, Boston, USA, March 1-3, 1996*, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- [4] Wikipedia, The Free Encyclopedia: *Mathematical formulation of the Standard Model*, janeiro 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_formulation_of_the_Standard_Model. Citado na página 18.
- [5] Zee, A.: *Quantum field theory in a nutshell*. 2003, ISBN 0691140340, 9780691140346. Citado 3 vezes nas páginas 17, 37 e 39.
- [6] Griffiths, David: *Introduction to elementary particles*. 2008, ISBN 9783527406012. Citado na página 19.
- [7] Bollini, C. G. e J. J. Giambiagi: *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*. Nuovo Cim., B12:20–26, 1972. Citado na página 20.
- [8] Hooft, Gerard 't e M. J. G. Veltman: *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*. Nucl. Phys., B44:189–213, 1972. Citado na página 20.
- [9] Gnendiger, C. et al.: *To d, or not to d: recent developments and comparisons of regularization schemes*. Eur. Phys. J., C77(7):471, 2017. Citado na página 20.
- [10] Bruque, A. M., A. L. Cherchiglia e M. Pérez-Victoria: *Dimensional regularization vs methods in fixed dimension with and without γ_5* . JHEP, 08:109, 2018. Citado na página 20.
- [11] Albuquerque, L. C. de, M. Gomes e A. J. da Silva: *Renormalization group study of Chern-Simons field coupled to scalar matter in a modified BPHZ subtraction scheme*. Phys. Rev., D62:085005, 2000. Citado na página 23.
- [12] Jack, I. e D. R. T. Jones: *Regularization of supersymmetric theories*. páginas 149–167, 1997. [Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.21,494(2010)]. Citado na página 23.

-
- [13] Siegel, W.: *Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization*. Phys. Lett., 94B:37–40, 1980. Citado na página 23.
- [14] Stockinger, D.: *Regularization of supersymmetric theories: Recent progress*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 157:136–140, 2006. [136(2006)]. Citado na página 24.
- [15] Baeta Scarpelli, A. P., O. A. Battistel e M. C. Nemes: *Testing a new strategy to treat divergent amplitudes in QED*. Braz. J. Phys., 28:161–168, 1998. Citado na página 24.
- [16] Battistel, O. A., A. L. Mota e M. C. Nemes: *Consistency conditions for 4-D regularizations*. Mod. Phys. Lett., A13:1597–1610, 1998. Citado na página 24.
- [17] Battistel, O. A. e M. C. Nemes: *Consistency in regularizations of the gauged NJL model at one loop level*. Phys. Rev., D59:055010, 1999. Citado na página 24.
- [18] Baeta Scarpelli, A. P., M. Sampaio e M. C. Nemes: *Consistency relations for an implicit n-dimensional regularization scheme*. Phys. Rev., D63:046004, 2001. Citado na página 24.
- [19] Baeta Scarpelli, A. P., M. Sampaio, B. Hiller e M. C. Nemes: *Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework*. Phys. Rev., D64:046013, 2001. Citado na página 24.
- [20] Sampaio, M., A. P. Baeta Scarpelli, B. Hiller, A. Brizola, M. C. Nemes e S. Gobira: *Comparing implicit, differential, dimensional and BPHZ renormalization*. Phys. Rev., D65:125023, 2002. Citado na página 24.
- [21] Sampaio, M. D., A. P. Baeta Scarpelli, J. E. Ottoni e M. C. Nemes: *Implicit regularization and renormalization of QCD*. Int. J. Theor. Phys., 45:436–457, 2006. Citado na página 24.
- [22] Gobira, S. R. e M. C. Nemes: *N-loop treatment of overlapping diagrams by the implicit regularization technique*. Int. J. Theor. Phys., 42:2765–2795, 2003. Citado na página 24.
- [23] Carneiro, D. E., A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio e M. C. Nemes: *Consistent momentum space regularization / renormalization of supersymmetric quantum field theories: The Three loop beta function for the Wess-Zumino model*. JHEP, 12:044, 2003. Citado na página 24.
- [24] Souza, L. A. M., M. Sampaio e M. C. Nemes: *Arbitrary parameters in implicit regularization and democracy within perturbative description of 2-dimensional gravitational anomalies*. Phys. Lett., B632:717–724, 2006. Citado na página 24.

- [25] Dias, E. W., B. Hiller, A. L. Mota, M. C. Nemes, M. Sampaio e A. A. Osipov: *Symmetries and ambiguities in the linear sigma model with light quarks*. Mod. Phys. Lett., A21:339–347, 2006. Citado na página 25.
- [26] Pontes, C. R., M. C. Nemes, A. P. Baeta Scarpelli e M. Sampaio: *Implicit regularization of massless theories*. J. Phys., G34:2215–2234, 2007. Citado na página 25.
- [27] Dias, E. W., A. P. Baeta Scarpelli, L. C. T. Brito, M. Sampaio e M. C. Nemes: *Implicit regularization beyond one loop order: Gauge field theories*. Eur. Phys. J., C55:667–681, 2008. Citado na página 25.
- [28] Pontes, C. R., A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, J. L. Acebal e M. C. Nemes: *On the equivalence between Implicit Regularization and Constrained Differential Renormalization*. Eur. Phys. J., C53:121–131, 2008. Citado na página 25.
- [29] Ottoni, J. E., A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio e M. C. Nemes: *Supergravity corrections to the $(g-2)(l)$ factor by Implicit Regularization*. Phys. Lett., B642:253–262, 2006. Citado na página 25.
- [30] Elias, V., G. McKeon e R. B. Mann: *Shifts of Integration Variable Within Four-dimensional and N-dimensional Feynman Integrals*. Phys. Rev., D28:1978, 1983. Citado na página 29.
- [31] Peskin, Michael E. e Daniel V. Schroeder: *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995, ISBN 9780201503975, 0201503972. <http://www.slac.stanford.edu/~mpeskin/QFT.html>. Citado 8 vezes nas páginas 32, 37, 38, 39, 41, 43, 46 e 50.
- [32] Ferreira, L. C., A. L. Cherchiglia, B. Hiller, M. Sampaio e M. C. Nemes: *Momentum routing invariance in Feynman diagrams and quantum symmetry breakings*. Phys. Rev., D86:025016, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 89.
- [33] Dias, Edson Wander: *Generalização do procedimento de regularização implícita para ordens superiores em teorias de calibre abelianas*. Tese de Doutorado, Departamento de Física, UFMG, Belo Horizonte-MG, 2008. http://lilith.fisica.ufmg.br/posgrad/Teses_Doutorado/decada2000/edson-dias/Edso. Citado na página 53.
- [34] Wess, J. e B. Zumino: *A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*. Phys. Lett., 49B:52, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- [35] Olive, K. A. e et al (Particle Data Group): *Supersymmetry, Part I (Theory)*. Chin. Phys., C38:090001, 2014. Citado na página 53.

- [36] Labelle, Patrick: *Supersymmetry Demystified: A Self-Teaching Guide*. Demystified Series. Mc-Graw Hill, 2010, ISBN 0071636412,9780071636414. Citado na página 53.
- [37] Aitchison, I. J. R.: *Supersymmetry in Particle Physics. An Elementary Introduction*. 2007. <http://www-public.slac.stanford.edu/sciDoc/docMeta.aspx?slacPubNumber=slac-r-86> Citado na página 53.
- [38] Dartora, C. A. e G. G. Cabrera: *Wess-Zumino supersymmetric phase and superconductivity in graphene*. Phys. Lett., A377:907–909, 2013. Citado na página 54.
- [39] Wess, J. e B. Zumino: *Supergauge Transformations in Four-Dimensions*. Nucl. Phys., B70:39–50, 1974. [24(1974)]. Citado na página 54.
- [40] Iliopoulos, J. e B. Zumino: *Broken Supergauge Symmetry and Renormalization*. Nucl. Phys., B76:310, 1974. Citado na página 54.
- [41] Hagiwara, T. e Parthasarathi Majumdar: *Supersymmetric Ward-takahashi Identities and the 't Hooft-Veltman Dimensional Regulator*. Nucl. Phys., B181:170–188, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- [42] Kumar, S. e Y. Fujii: *Analytic Regularization and Supersymmetric Ward-Takahashi Identities*. Prog. Theor. Phys., 69:653–663, 1983. Citado na página 55.
- [43] Elias, V., G. McKeon, S. B. Phillips e Robert B. Mann: *Preregularization for Supersymmetry*. Phys. Lett., 133B:83, 1983. Citado na página 62.
- [44] Cherchiglia, A. L., M. Sampaio e M. C. Nemes: *Systematic Implementation of Implicit Regularization for Multi-Loop Feynman Diagrams*. Int. J. Mod. Phys., A26:2591–2635, 2011. Citado na página 64.
- [45] Vieira, A. R., B. Hiller, M. D. R. Sampaio e M. C. Nemes: *Naturalness and Theoretical Constraints on the Higgs Boson Mass*. Int. J. Theor. Phys., 52:3494–3503, 2013. Citado na página 89.
- [46] Cherchiglia, A. L., L. A. Cabral, M. C. Nemes e M. Sampaio: *(Un)determined finite regularization dependent quantum corrections: the Higgs boson decay into two photons and the two photon scattering examples*. Phys. Rev., D87(6):065011, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.
- [47] Gazzola, G., A. L. Cherchiglia, L. A. Cabral, M. C. Nemes e M. Sampaio: *Conductivity of Coulomb interacting massless Dirac particles in graphene: Regularization-dependent parameters and symmetry constraints*. EPL, 104(2):27002, 2013. Citado na página 89.

-
- [48] Cherchiglia, A. L., A. R. Vieira, B. Hiller, A. P. Baêta Scarpelli e M. Sampaio: *Guises and Disguises of Quadratic Divergences*. *Annals Phys.*, 351:751–772, 2014. Citado na página 89.
- [49] Vieira, A. R., J. C. C. Felipe, G. Gazzola e M. Sampaio: *One-loop conformal anomaly in an implicit momentum space regularization framework*. *Eur. Phys. J.*, C75(7):338, 2015. Citado na página 89.
- [50] Vieira, A. R., A. L. Cherchiglia e M. Sampaio: *Momentum Routing Invariance in Extended QED: Assuring Gauge Invariance Beyond Tree Level*. *Phys. Rev.*, D93(2):025029, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.
- [51] Viglioni, A. C. D., A. L. Cherchiglia, A. R. Vieira, B. Hiller e M. Sampaio: *γ_5 algebra ambiguities in Feynman amplitudes: Momentum routing invariance and anomalies in $D = 4$ and $D = 2$* . *Phys. Rev.*, D94(6):065023, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.
- [52] Batista, Y. R., B. Hiller, Adriano Cherchiglia e M. Sampaio: *Supercurrent anomaly and gauge invariance in the $N=1$ supersymmetric Yang-Mills theory*. *Phys. Rev.*, D98(2):025018, 2018. Citado na página 89.

Apêndices

APÊNDICE A – Tabela de Integrais

A.1 Integrais do Cálculo de J^μ

Seguindo a ordem do capítulo, na seção 3.1.1.1 fizemos o desenvolvimento do denominador do integrando da primeira integral de (3.1), de forma a separar as partes puramente divergentes das demais. Tal desenvolvimento é o que segue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]^2} &= \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} = \\
&= \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right] \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} = \\
&= \frac{1}{[k^2 - m^2]} \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right] + \\
&\quad + \frac{2k \cdot p}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right] - \\
&\quad - \frac{p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]^2} = \\
&= \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2]^2[(k-p)^2 - m^2]} + \\
&\quad + \frac{2k \cdot p}{[k^2 - m^2]^2[(k-p)^2 - m^2]} + \frac{2k \cdot p [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^2[(k-p)^2 - m^2]^2} - \\
&\quad - \frac{p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]^2} = \\
&= \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} + \\
&\quad + \frac{4k \cdot p}{[k^2 - m^2]^2} \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right] - \\
&\quad - \frac{p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} \right] + \\
&\quad + \frac{2k \cdot p [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^2[(k-p)^2 - m^2]^2}, \\
\frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]^2} &= \frac{1}{[k^2 - m^2]^2} + \frac{4k \cdot p}{[k^2 - m^2]^3} + \\
&\quad + \frac{4k \cdot p [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^3[(k-p)^2 - m^2]} - \\
&\quad - \frac{p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{1}{[(k-p)^2 - m^2]} \right] + \\
&\quad + \frac{2k \cdot p [2k \cdot p - p^2]}{[k^2 - m^2]^2[(k-p)^2 - m^2]^2}.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Abaixo estão os resultados das integrais finitas que aparecem na equação (3.2):

$$I_{f,2,1}^\mu \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{k^4[k-p]^2} = \frac{b}{p^2} p^\mu, \quad (\text{A.2})$$

$$I_{f,3,1}^{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{k^6[k-p]^2} = -\frac{b}{4p^2} g^{\mu\nu} \left(1 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) + \frac{b}{2p^4} p^\mu p^\nu, \quad (\text{A.3})$$

$$I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{k^6[k-p]^2} = \frac{b}{8p^2} [g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu] + \frac{b}{4p^4} p^\mu p^\nu p^\rho, \quad (\text{A.4})$$

$$I_{f,2,2}^\mu \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{k^4[k-p]^4} = \frac{b}{p^4} p^\mu \left(1 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right), \quad (\text{A.5})$$

$$I_{f,2,2}^{\mu\nu} \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4[k-p]^4} = \frac{b}{2p^2} g^{\mu\nu} - \frac{b}{p^4} p^\mu p^\nu \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right), \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} I_{f,2,2}^{\mu\nu\rho} &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{k^4[k-p]^4} = \\ &= \frac{b}{4p^2} [g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu] - \frac{b}{p^4} p^\mu p^\nu p^\rho \left(\frac{5}{2} - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A integral finita $I_{f,1,2}^\mu$ pode ser expressa como uma combinação das integrais listadas acima, na forma:

$$\begin{aligned} I_{f,1,2}^\mu &\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]^2} = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \left[\frac{1}{[k^2 - m^2]} + \frac{2k \cdot p - p^2}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} \right], \\ I_{f,1,2}^\mu &= I_{f,2,1}^\mu + 2p_\nu I_{f,2,2}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,2}^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Com isto, a diferença de integrais (3.2) fica:

$$\begin{aligned}
J^\mu &= -p^\mu I_{\log}(m^2) + 4p_\nu I_{\log}^{\mu\nu}(m^2) + \\
&+ 8p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{\mu\nu\rho} - 4p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^\mu - p^2 I_{f,2,1}^\mu - \\
&- 2p_\nu p^2 I_{f,2,2}^{\mu\nu} + p^4 I_{f,2,2}^\mu + 4p_\nu p_\rho I_{f,2,2}^{\mu\nu\rho} - 2p_\nu p^2 I_{f,2,2}^{\mu\nu} = \\
&= -p_\nu \left\{ g^{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - 4I_{\log}^{\mu\nu}(m^2) \right\} + \\
&+ 8p_\nu p_\rho \left[\frac{b}{8p^2} [g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu] + \frac{b}{4p^4} p^\mu p^\nu p^\rho \right] - \\
&- 4p_\nu p^2 \left[-\frac{b}{4p^2} g^{\mu\nu} \left(1 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) + \frac{b}{2p^4} p^\mu p^\nu \right] - 2p^2 \frac{b}{p^2} p^\mu - \\
&- 4p_\nu p^2 \left[\frac{b}{2p^2} g^{\mu\nu} - \frac{b}{p^4} p^\mu p^\nu \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] - p^4 \frac{b}{p^4} p^\mu \left(1 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) + \\
&+ 4p_\nu p_\rho \left[\frac{b}{4p^2} [g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu] - \frac{b}{p^4} p^\mu p^\nu p^\rho \left(\frac{5}{2} - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] = \\
&= -p_\nu \left\{ g^{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - 4I_{\log}^{\mu\nu}(m^2) \right\} + \\
&+ \frac{b}{p^2} 3p^2 p^\mu + \frac{2b}{p^4} p^4 p^\mu + bp^\mu - bp^\mu \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - 2bp^\mu - 2bp^\mu - 2bp^\mu + 8bp^\mu - \\
&- 4bp^\mu \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) - bp^\mu + bp^\mu \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) + \frac{b}{p^2} 3p^2 p^\mu - 4\frac{5b}{2} p^\mu + 4bp^\mu \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) = \\
J^\mu &= -p_\nu \left\{ g^{\mu\nu} I_{\log}(m^2) - 4I_{\log}^{\mu\nu}(m^2) \right\}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

A.2 Integrais Resolvidas pela Abordagem dos Shifts

Aqui vamos listar algumas integrais utilizadas no trabalho e sua resolução pela abordagem dos *shifts*. De início temos

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) &= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right) - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu (-2k \cdot p + p^2)}{k^4 [k-p]^2} \right) = \\
&= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right) + \\
&+ 2p_\rho \left[\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{k^6} \right) - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu k^\rho (-2k \cdot p + p^2)}{k^6 [k-p]^2} \right) \right] - \\
&- p^2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^4 [k-p]^2} \right) = \\
&= g^{\alpha\mu} \int_k \frac{k^\nu}{k^4} + g^{\alpha\nu} \int_k \frac{k^\mu}{k^4} - 4 \int_k \frac{k^\alpha k^\mu k^\nu}{k^6} + 2p_\rho \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{k^6} \right), \\
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) &= 2p_\rho \Upsilon_0^{\alpha\mu\nu\rho}, \tag{A.10}
\end{aligned}$$

sendo que nas terceira e quartas linhas as integrais são nulas pelo Teorema de Gauss, e na quinta linha as integrais se anulam por terem um integrando ímpar em um limite

simétrico de integração. De forma análoga, temos:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{g^{\mu\nu} k^2}{k^2 [k-p]^2} \right) &= g^{\mu\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{1}{[k-p]^2} \right) = \\
&= g^{\mu\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{1}{k^2} \right) - g^{\mu\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{-2k \cdot p + p^2}{k^2 [k-p]^2} \right) = \\
&= -2g^{\mu\nu} \int_k \frac{k^\alpha}{k^4} + 2g^{\mu\nu} p_\beta \left[\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\beta}{k^4} \right) - g^{\mu\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\beta (-2k \cdot p + p^2)}{k^4 [k-p]^2} \right) \right] = \\
&= 2g^{\mu\nu} p_\beta \Upsilon^{\alpha\beta}, \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu p^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) &= p^\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu}{k^4} \right) - p^\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu (-2k \cdot p + p^2)}{k^4 [k-p]^2} \right) = \\
&= p^\nu \Upsilon_0^{\alpha\mu}, \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) &= g^{\alpha\mu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\nu}{k^4} \right) + g^{\alpha\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\mu}{k^4} \right) - 4 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\alpha k^\mu k^\nu}{k^6} \right) + \\
&\quad + 2p_\rho \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{k^6} \right) = \\
&= g^{\alpha\mu} \Upsilon_0^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} \Upsilon_0^{\beta\mu} - 4\Upsilon_0^{\beta\alpha\mu\nu}, \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Uma outra integral seria

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_2)^\nu}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{k^\mu (k-k_1+k_2)^\nu}{k^2 [k-k_1+k_2]^2} + \\
&\quad + \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\int_k \frac{k^\mu (k-k_1+k_2)^\nu}{k^2 [k-k_1+k_2]^2} \right) + \\
&\quad + \int_k \frac{1}{2!} k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial k_\beta} k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\int_k \frac{k^\mu (k-k_1+k_2)^\nu}{k^2 [k-k_1+k_2]^2} \right) \tag{A.14}
\end{aligned}$$

e utilizando a conservação do momento $k_1^\mu - k_2^\mu = p^\mu$, a primeira integral do lado direito pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k^\mu (k-k_1+k_2)^\nu}{k^2 [k-k_1+k_2]^2} &= \int_k \frac{k^\mu (k-p)^\nu}{k^2 [k-p]^2} = \\
&= \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} - p^\nu \int_k \frac{k^\mu}{k^2 [k-p]^2} \tag{A.15}
\end{aligned}$$

As integrais acima são resolvidas em RI, resultando em:

$$I \equiv \int_k \frac{1}{k^2 [k-p]^2} = I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right), \tag{A.16}$$

$$I^\mu \equiv \int_k \frac{k^\mu}{k^2 [k-p]^2} = \frac{1}{2} p^\mu \left[I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \frac{1}{2} p^\mu v_{0,2}, \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu} \equiv \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) + \\
&+ \frac{1}{3} p^\mu p^\nu \left[I_{log}(\lambda^2) + \frac{11}{6} b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{12} g^{\mu\nu} p^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + \frac{4}{3} b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} v_{2,2} - \frac{2}{3} \left[g^{\mu\nu} p^2 + 2p^\mu p^\nu \right] v_{0,4} - \\
&- \frac{1}{3} \left[\frac{5}{4} g^{\mu\nu} p^2 + 4p^\mu p^\nu \right] v_{0,2} \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Por sua vez, de (A.10) e (A.12), a segunda integral do lado direito de (A.14) resulta em

$$\begin{aligned}
k_{1\alpha} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu (k-p)^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) &= k_{1\alpha} \left[\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) - p^\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu}{k^2 [k-p]^2} \right) \right] = \\
&= k_{1\alpha} \left[2p_\rho g^{\alpha\{\mu} g^{\nu\rho\}} v_{0,4} - p^\nu g^{\alpha\mu} v_{0,2} \right] = \\
&= 2 \left(k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu + g^{\mu\nu} k_1 \cdot p \right) v_{0,4} - k_1^\mu p^\nu v_{0,2} , \tag{A.19}
\end{aligned}$$

e de (A.13), vem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} k_{1\beta} k_{1\alpha} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu (k-p)^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) &= \frac{1}{2} k_{1\beta} k_{1\alpha} \left[\int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2 [k-p]^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - p^\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{k^\mu}{k^2 [k-p]^2} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} k_{1\beta} k_{1\alpha} \left[g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} v_{0,2} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} v_{0,2} - 4g^{\beta\{\alpha} g^{\mu\nu\}} v_{0,4} \right] = \\
&= k_1^\mu k_1^\nu v_{0,2} - 2 \left(2k_1^\mu k_1^\nu + g^{\mu\nu} k_1^2 \right) v_{0,4} . \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Com estes resultados (A.14) fica

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_2)^\nu}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - \\
&- \frac{1}{6} p^\mu p^\nu \left[I_{log}(\lambda^2) + \frac{7}{3} b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{12} g^{\mu\nu} p^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + \frac{4}{3} b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} v_{2,2} - \frac{2}{3} \left[g^{\mu\nu} p^2 + 2p^\mu p^\nu \right] v_{0,4} - \\
&- \frac{1}{3} \left[\frac{5}{4} g^{\mu\nu} p^2 + 4p^\mu p^\nu \right] v_{0,2} + \\
&+ 2 \left(k_1^\mu p^\nu + k_1^\nu p^\mu + g^{\mu\nu} k_1 \cdot p \right) v_{0,4} - k_1^\mu p^\nu v_{0,2} + \\
&+ k_1^\mu k_1^\nu v_{0,2} - 2 \left(2k_1^\mu k_1^\nu + g^{\mu\nu} k_1^2 \right) v_{0,4} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{(k+k_1)^\mu (k+k_2)^\nu}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - \\
&- \frac{1}{6} p^\mu p^\nu \left[I_{log}(\lambda^2) + \frac{7}{3} b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{12} g^{\mu\nu} p^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + \frac{4}{3} b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} v_{2,2} - \frac{2}{3} \left[g^{\mu\nu} p^2 + 2p^\mu p^\nu \right] v_{0,4} - \\
&- \frac{1}{3} \left[\frac{5}{4} g^{\mu\nu} p^2 + 4p^\mu p^\nu \right] v_{0,2} - \\
&- 2 \left(k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 \right) v_{0,4} + k_1^\mu k_2^\nu v_{0,2} ,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Por sua vez, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{g^{\mu\nu}}{2} \int_k \frac{(k+k_1)^2 + (k+k_2)^2 - (k_1-k_2)^2}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} = \\
&= \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left\{ \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} + \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} - (k_1-k_2)^2 \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \right\} ,
\end{aligned}$$

onde cada uma das integrais resulta em:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2} + \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{1}{k^2} \right) + \int_k \frac{1}{2!} k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial k_\beta} k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{1}{k^2} \right) = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) - 2k_{1\alpha} \int_k \frac{k^\alpha}{k^4} + \frac{1}{2} k_{1\beta} k_{1\alpha} (-2) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta} \left(\frac{k^\alpha}{k^4} \right) = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) - k_{1\beta} k_{1\alpha} \Upsilon_0^{\beta\alpha} = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) - k_1^2 v_{0,2} ,
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} = \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \Big|_{k_1 \leftrightarrow k_2} , \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2 [k-k_1+k_2]^2} + \int_k k_{1\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\frac{1}{k^2 [k-k_1+k_2]^2} \right) = \\
&= \int_k \frac{1}{k^2 [k-p]^2} = \\
&= I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) ,
\end{aligned} \tag{A.24}$$

e com estes resultados teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{g^{\mu\nu}}{2} \int_k \frac{(k+k_1)^2 + (k+k_2)^2 - (k_1-k_2)^2}{[k+k_1]^2[k+k_2]^2} &= \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left\{ I_{quad}(\lambda^2) - k_1^2 v_{0,2} + I_{quad}(\lambda^2) - k_2^2 v_{0,2} - \right. \\
&\quad \left. - p^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\
&= g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - \frac{g^{\mu\nu}}{2} p^2 \left[I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{g^{\mu\nu}}{2} (k_1^2 + k_2^2) v_{0,2} . \tag{A.25}
\end{aligned}$$

A.3 Integraís do modelo de Wess-Zumino

Aqui, estão listadas as integrais utilizadas nos cálculos do modelo de Wess Zumino. Primeiro apresentamos aquelas da seção 4.2 iniciando por

$$I \equiv \int_k \frac{1}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} = I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \tag{A.26}$$

$$I^\mu \equiv \int_k \frac{k^\mu}{[k^2 - m^2][(k-p)^2 - m^2]} = \frac{p^\mu}{2} I - \frac{1}{2} p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} , \tag{A.27}$$

sendo $\Upsilon_0^{\mu\nu}$ é o termo de superfície de primeira ordem.

A integral do gráfico (a) no cálculo a um loop é:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2[k-p]^2} &= \int_k \frac{1}{[k-p]^2} - p_\mu \int_k \frac{k^\mu}{k^2[k-p]^2} = \\
&= \int_k \frac{1}{k^2} - \int_k \frac{-2k \cdot p + p^2}{k^2[k-p]^2} - p_\mu \int_k \frac{k^\mu}{k^2[k-p]^2} = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) + p_\mu \int_k \frac{k^\mu}{k^2[k-p]^2} - p^2 \int_k \frac{1}{k^2[k-p]^2} = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) + p_\mu I^\mu - p^2 I = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) + p_\mu \frac{1}{2} (p^\mu I - p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}) - p^2 I = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p^2 I - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p^2 I_{log}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\
&\quad - \frac{1}{2} p^2 b \left[2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] . \tag{A.28}
\end{aligned}$$

onde usamos (A.26) e (A.27) e apesar de nossa teoria ser de massa nula, e para este caso o $I_{quad}(\lambda^2) = 0$, vamos mantê-lo até o final do cálculo.

A.3.1 Integrais da seção 4.3

Agora temos as integrais utilizadas nos cálculos a dois loops:

$$I^{(2)} \equiv \int_k \frac{1}{k^2[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)}, \quad (\text{A.29})$$

$$I^{(2)\mu} \equiv \int_k \frac{k^\mu}{k^2[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = 2p_\nu I_{log}^{(2)\mu\nu}(\lambda^2) + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \quad (\text{A.30})$$

e a Relação de Consistência de segunda ordem leva a

$$\begin{aligned} I_{log}^{(2)\mu\nu}(\lambda^2) &\equiv \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2]^3} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ g^{\mu\nu} \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] - \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

sendo $\Upsilon_0^{\mu\nu}$ o termo de superfície de primeira ordem e

$$\Upsilon_0^{(2)\mu\nu} \equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{k^\nu}{[k^2 - m^2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right]$$

o termo de superfície de segunda ordem. Em alguns casos utilizaremos a notação compacta

$$I_{log}^{(2)\mu\nu}(\lambda^2) = \frac{1}{4} \left\{ g^{\mu\nu} \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] - \Omega^{\mu\nu} \right\}, \quad (\text{A.32})$$

com

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} \Upsilon_0^{\mu\nu},$$

e como já observado

$$I_{f,i,j}^{(n)}, I_{f,i,j}^{(n)\mu}, I_{f,i,j}^{(n)\mu\nu}, I_{f,i,j}^{(n)\mu\nu\rho} \equiv \int_k \frac{1, k^\mu, k^\mu k^\nu, k^\mu k^\nu k^\rho}{[k^2]^i [(k-p)^2]^j} \left[\ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right]^{n-1} \quad (\text{A.33})$$

são integrais finitas I_f todas já tabelas.

Com as definições acima, as integrais envolvidas no cálculo do gráfico (a) em dois loops são:

$$\begin{aligned} \not{p}I - \gamma_\mu I^\mu &= \not{p}I - \gamma_\mu \left[\frac{p^\mu}{2} I - \frac{1}{2} p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right], \\ \not{p}I - \gamma_\mu I^\mu &= \frac{\not{p}}{2} \left[I_{log}(\lambda^2) + 2b - b \ln\left(-\frac{p^2}{\lambda^2}\right) \right] + \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

E, seguindo os mesmos passos, temos

$$\begin{aligned}
\not{p}I^{(2)} - \gamma_\mu I^{(2)\mu} &= \not{p} \left[I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right] - \\
&\quad - \gamma_\mu \left[2p_\nu I_{\log}^{(2)\mu\nu}(\lambda^2) + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right] = \\
&= \not{p} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - 2\gamma_\mu p_\nu \frac{1}{4} \left\{ g^{\mu\nu} \left[I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{\log}(\lambda^2) \right] - \Omega^{\mu\nu} \right\} - \\
&\quad - 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + [2\not{p}p_\mu + \gamma_\mu p^2] I_{f,2,1}^{(2)\mu} - \\
&\quad - \not{p} p^2 I_{f,2,1}^{(2)}, \\
\not{p}I^{(2)} - \gamma_\mu I^{(2)\mu} &= \frac{1}{2} \not{p} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{4} \not{p} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Omega^{\mu\nu} - 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} \\
&\quad + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + [2\not{p}p_\mu + \gamma_\mu p^2] I_{f,2,1}^{(2)\mu} - \not{p} p^2 I_{f,2,1}^{(2)}. \tag{A.35}
\end{aligned}$$

Agora temos as integrais do cálculo do gráfico (c):

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k - p]^2} &= \int_k \frac{1}{[k - p]^2} - p_\mu I^\mu = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) + 2p_\mu I^\mu - p^2 I - p_\mu I^\mu = \\
&= I_{quad}(\lambda^2) + p_\mu \frac{1}{2} \left[p^\mu I - p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - p^2 I, \\
\int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k - p]^2} &= I_{quad}(\lambda^2) - \frac{p^2}{2} \left[I_{\log}(\lambda^2) + 2b - b \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right] - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}; \tag{A.36}
\end{aligned}$$

e por sua vez

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k - p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) &= \int_k \frac{1}{[k - p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - p_\mu I^{(2)\mu} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I^{(2)\mu} - p^2 I^{(2)} - p_\mu I^{(2)\mu} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + p_\mu I^{(2)\mu} - p^2 I^{(2)} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + p_\mu \left[\frac{1}{2} \left(p^\mu I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{p^\mu}{2} I_{\log}(\lambda^2) - p_\nu \Omega^{\mu\nu} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right] - \\
&\quad - p^2 \left[I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right], \\
\int_k \frac{k^2 - k \cdot p}{k^2 [k - p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) &= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p^2 I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{4} p^2 I_{\log}(\lambda^2) - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Omega^{\mu\nu} + \\
&\quad + 4p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 3p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)}; \tag{A.37}
\end{aligned}$$

onde temos a seguinte Relação de Consistência

$$\int_k \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \equiv I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2) = \frac{1}{2} \left[g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - \Upsilon_2^{\mu\nu} \right], \tag{A.38}$$

sendo

$$\Upsilon_2^{\mu\nu} \equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{k^\nu}{[k^2 - m^2]} \right]$$

outro termo de superfície.

Para o gráfico (d) temos as integrais:

$$\begin{aligned} \int_k \frac{1}{[k-p]^2} &= I_{quad}(\lambda^2) + 2p_\mu I^\mu - p^2 I = \\ &= I_{quad}(\lambda^2) + 2p_\mu \frac{1}{2} \left[p^\mu I - p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right] - p^2 I, \\ \int_k \frac{1}{[k-p]^2} &= I_{quad}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

e

$$\begin{aligned} \int_k \frac{1}{[k-p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) &= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I^{(2)\mu} - p^2 I^{(2)} = \\ &= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu \left[\frac{1}{2} \left(p^\mu I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{p^\mu}{2} I_{log}(\lambda^2) - p_\nu \Omega^{\mu\nu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right] - \\ &\quad - p^2 \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)} \right], \\ \int_k \frac{1}{[k-p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) &= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 I_{log}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Omega^{\mu\nu} + \\ &\quad + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)}; \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

A.3.2 Integrais da seção 4.2.2

Nas seções 4.2.2 e 4.3.2 utilizamos uma rotulação arbitrária nos gráficos a 1 e 2 loops, cujas amplitudes são funções de integrais que resolveremos pela abordagem dos *shifts*. A seguir temos uma lista destas integrais e a forma de resolução de algumas, onde sempre que for conveniente utilizaremos a conservação do quadrimomento $k_{1\mu} - k_{2\mu} = p_\mu$. A um loop, para as amplitudes (a) e (b) precisaremos das integrais:

$$\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} = \int_k \frac{1}{k^2} + \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{1}{k^2} \right) + \int_k \frac{1}{2!} k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{1\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right),$$

a série sendo truncada no termo de ordem dois, uma vez que os termos de ordem maior darão uma contribuição nula. Explicitando os termos, teremos:

$$\int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{1}{k^2} \right) = k_{1\mu} \int_k (-1)(k^2)^{-2} 2k^\mu = -2k_{1\mu} \int_k \frac{k^\mu}{k^4};$$

e por sua vez:

$$\int_k \frac{1}{2!} k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{1\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) = k_{1\mu} k_{1\nu} \frac{-2}{2} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{k^\nu}{k^4} \right) = -k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu}.$$

Com isto nossa integral fica:

$$\begin{aligned} \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= I_{quad}(\lambda^2) - 2k_{1\mu} \int_k \frac{k^\mu}{k^4} - k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} = \\ &= I_{quad}(\lambda^2) - k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Dessa forma, seguindo o mesmo procedimento as demais integrais em (4.12) resultam em:

$$\begin{aligned} \int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \Big|_{k+k_2 \rightarrow k} &= I_{quad}(\lambda^2) - 2k_{2\mu} \int_k \frac{k^\mu}{k^4} - k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} = \\ &= I_{quad}(\lambda^2) - k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \int_k \frac{1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} + \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{1}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} \right) = \\ &= \int_k \frac{1}{k^2 [k - p]^2} = \\ &= I_{log}(\lambda^2) + b \left[2 - \ln \left(- \frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

sendo a segunda integral do lado direito da primeira linha nula pelo Teorema de Gauss e na segunda linha usamos a conservação do quadrimomento $k_{1\mu} - k_{2\mu} = p_\mu$, sendo esta uma integral independente da escolha de k_1 e k_2 .

A integral do gráfico (c) é

$$\int_k \frac{k + k_1}{[k+k_1]^2 [k+k_2]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} = \int_k \frac{k}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} + \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{k}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} \right).$$

Na primeira integral utilizaremos a conservação do quadrimomento:

$$\begin{aligned} \int_k \frac{k}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} &= \int_k \frac{k}{k^2 [k - p]^2} = \\ &= \frac{1}{2} \gamma_\mu \left[p^\mu I_{log}(\lambda^2) + p^\mu b \left(2 - \ln \left(- \frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) - p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

e na segunda fazemos

$$\frac{1}{[k - (k_1 - k_2)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2}{[k - (k_1 - k_2)]^2},$$

de forma que

$$\begin{aligned} \int_k k_{1\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} \right) &= k_{1\nu} \gamma_\mu \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k^\mu}{k^4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left(\frac{k^\mu [-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2]}{k^4 [k - (k_1 - k_2)]^2} \right) \right\} = \\ &= k_{1\nu} \gamma_\mu \Upsilon_0^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

onde a integral da segunda linha se anula pelo Teorema de Gauss. Com estes resultados a integral inicial fica

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k + k_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \frac{1}{2} \not{p} \left[I_{\log}(\lambda^2) + b \left(2 - \ln \left(-\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] - \\
&- \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + \gamma_\mu k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} = \\
&= \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \left[I_{\log}(\lambda^2) + b \left(2 - \ln \left(-\frac{(k_1 - k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu}. \tag{A.46}
\end{aligned}$$

A.3.3 Integrais da seção 4.3.2

No gráfico (a) temos duas subdivergências cujas amplitudes são

$$\begin{aligned}
\Pi_A^{\mu\nu} &= -\text{tr} \int_l \frac{-l}{l^2} (-ig) \frac{-[l - (k + k_2)]}{[l - (k + k_2)]^2} (-ig) = \\
&= g^2 \int_l \frac{\text{tr}[l(l - (k + k_2))]}{l^2 [l - (k + k_2)]^2} = 4g^2 \int_l \frac{l^2 - l \cdot (k + k_2)}{l^2 [l - (k + k_2)]^2} \\
&= 4g^2 \left\{ \int_l \frac{1}{[l - (k + k_2)]^2} - (k_\mu + k_{2\mu}) \int_l \frac{l^\mu}{l^2 [l - (k + k_2)]^2} \right\} = \Pi_B^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

As integrais acima já foram resolvidas na seção anterior. Assim utilizando os resultados (A.43) e (A.44), com as trocas $k_\mu \leftrightarrow l_\mu$ e $p_\mu \leftrightarrow (k + k_2)_\mu$ e ignorando as partes divergentes e os TS, vem:

$$\Pi_A^{\mu\nu} \Big|_{fin} = \Pi_B^{\mu\nu} \Big|_{fin} = 4g^2 \left\{ -\frac{(k + k_2)^2}{2} \left[2b - b \ln \left(-\frac{(k + k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\}. \tag{A.47}$$

A segunda integral da amplitude do gráfico (a), equação (4.37), pode ser resolvida pela abordagem dos *shifts*, como segue:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k + k_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k + k_2)^2}{\lambda^2} \right) \Big|_{k+k_2 \rightarrow k} &= \int_k \frac{k - k_2 + k_1}{[k - k_2 + k_1]^2 k^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + \\
&+ \int_k k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{k - k_2 + k_1}{[k - k_2 + k_1]^2 k^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \tag{A.48}
\end{aligned}$$

A primeira integral em (A.48) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{k - k_2 + k_1}{[k - k_2 + k_1]^2 k^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) &= \gamma_\mu \int_k \frac{k^\mu + p^\mu}{k^2 [k + p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) = \\
&= \gamma_\mu I_+^{(2)\mu} + \not{p} I_+^{(2)},
\end{aligned}$$

onde as integrais $I_+^{(2)\mu}$ e $I_+^{(2)}$ são as habituais $I^{(2)\mu}$ e $I^{(2)}$, equações (A.30) e (A.29) respectivamente, com a troca $p_\mu \leftrightarrow -p_\mu$. Já na segunda integral de (A.48) fazemos

$$\frac{1}{[k + (k_1 - k_2)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2}{[k + (k_1 - k_2)]^2},$$

de forma que

$$\begin{aligned}
& k_{2\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k + k_1 - k_2}{k^2 [k + k_1 - k_2]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] = \\
& = k_{2\nu} \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k + k_1 - k_2}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{[k + k_1 - k_2][2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2]}{k^4 [k + k_1 - k_2]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\
& = \gamma_\mu k_{2\nu} \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k^\mu}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] + (k_1^\mu - k_2^\mu) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\
& = \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Com estes resultados (A.48) fica:

$$\begin{aligned}
& \int_k \frac{k + k_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k + k_2)^2}{\lambda^2} \right) = \gamma_\mu I_+^{(2)\mu} + \not{p} I_+^{(2)} + \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = \\
& = \gamma_\mu \left\{ -2p_\nu I_{\log}^{(2)\mu\nu}(\lambda^2) + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} + 2p^2 p_\nu I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1+}^{(2)\mu} \right\} + \\
& \quad + \not{p} \left\{ I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - 2p_\mu I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1+}^{(2)} \right\} + \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = \\
& = -2\gamma_\mu p_\nu \frac{1}{4} \left\{ g^{\mu\nu} \left[I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{\log}(\lambda^2) \right] - \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\} + \\
& \quad + \not{p} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
& \quad + 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} - (\gamma_\mu p^2 + 2\not{p} p_\mu) I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - \not{p} p^2 I_{f,2,1+}^{(2)} = \\
& = \frac{1}{2} \not{p} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{4} \not{p} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{1}{2} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \gamma_\mu k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \frac{1}{4} \gamma_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
& \quad + 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} - (\gamma_\mu p^2 + 2\not{p} p_\mu) I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - \not{p} p^2 I_{f,2,1+}^{(2)} = \\
& = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) - \frac{1}{4} (k_1 - k_2) I_{\log}(\lambda^2) + \\
& \quad + \frac{1}{2} \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \frac{1}{4} \gamma_\mu (k_{1\nu} - k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\
& \quad - 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} + 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} + (\gamma_\mu p^2 + 2\not{p} p_\mu) I_{f,2,1}^{(2)\mu} - \not{p} p^2 I_{f,2,1}^{(2)}, \tag{A.49}
\end{aligned}$$

onde as integrais finitas

$$I_{f,i,j+}^{(n)}, I_{f,i,j+}^{(n)\mu}, I_{f,i,j+}^{(n)\mu\nu}, I_{f,i,j+}^{(n)\mu\nu\rho} \equiv \int_k \frac{1, k^\mu, k^\mu k^\nu, k^\mu k^\nu k^\rho}{[k^2]^i [(k+p)^2]^j} \left[\ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right]^{n-1}$$

se relacionam com as integrais finitas anteriores na forma

$$I_{f,i,j+}^{(2)}, I_{f,i,j+}^{(2)\mu}, I_{f,i,j+}^{(2)\mu\nu}, I_{f,i,j+}^{(2)\mu\nu\rho} = I_{f,i,j}^{(2)}, -I_{f,i,j}^{(2)\mu}, I_{f,i,j}^{(2)\mu\nu}, -I_{f,i,j}^{(2)\mu\nu\rho}, \tag{A.50}$$

ou seja, temos um sinal oposto relativo para um número ímpar de índices de Lorentz.

Para as subdivergências do gráfico (b), temos a amplitude

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} &= \int_l \frac{-\not{l}}{l^2} (-ig) \frac{-i}{[l - (k + k_1)]^2} (-ig) = \\ &= -ig^2 \int_l \frac{\not{l}}{l^2 [l - (k + k_1)]^2} = \Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B}.\end{aligned}$$

A integral acima já foi resolvida na seção anterior, equação (A.44), de forma que fazendo as trocas $k_\mu \leftrightarrow l_\mu$ e $p_\mu \leftrightarrow (k + k_1)_\mu$ e ignorando as partes divergentes e os TS, teremos:

$$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A} \Big|_{fin} = \Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B} \Big|_{fin} = -\frac{b}{2} ig^2 (\not{k} + \not{k}_1) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (\text{A.51})$$

A segunda integral da amplitude do gráfico (b), equação (4.40), é resolvida pela abordagem dos *shifts*, na forma

$$\begin{aligned}\int_k \frac{\not{k} + \not{k}_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{\not{k}}{k^2 [k - k_1 + k_2]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + \\ &+ \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{\not{k}}{k^2 [k - k_1 + k_2]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right].\end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

A primeira integral de (A.52) é independente da escolha de k_1 e k_2 , de forma que

$$\int_k \frac{\not{k}}{k^2 [k - k_1 + k_2]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) = \gamma_\mu \int_k \frac{k^\mu}{k^2 [k - p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) = \gamma_\mu I^{(2)\mu}.$$

Já na segunda integral de (A.52) usamos a identidade

$$\frac{1}{[k - (k_1 - k_2)]^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2}{[k - (k_1 - k_2)]^2},$$

de forma a produzir

$$\begin{aligned}&k_{1\nu} \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{\not{k}}{k^2 [k - (k_1 - k_2)]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] = \\ &= \gamma_\mu k_{1\nu} \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k^\mu}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k^\mu [-2k \cdot (k_1 - k_2) + (k_1 - k_2)^2]}{k^4 [k - (k_1 - k_2)]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\ &= \gamma_\mu k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}.\end{aligned}$$

Com os desenvolvimentos acima, (A.52) resulta em:

$$\int_k \frac{\not{k} + \not{k}_1}{[k + k_1]^2 [k + k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) = \gamma_\mu I^{(2)\mu} + \gamma_\mu k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} =$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_\mu \left\{ 2p_\nu I_{log}^{(2)\mu\nu}(\lambda^2) + 4p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2p^2 p_\nu I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} \right\} + \\
&\quad + \gamma_\mu k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = \\
&= 2\gamma_\mu p_\nu \frac{1}{4} \left\{ g^{\mu\nu} \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] - \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} \Upsilon_0^{\mu\nu} \right\} + \\
&\quad + \gamma_\mu k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad + 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - \gamma_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} = \\
&= \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \left[I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} I_{log}(\lambda^2) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma_\mu (k_{1\nu} + k_{2\nu}) \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{4} \gamma_\mu (k_{1\nu} - k_{2\nu}) \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
&\quad + 4\gamma_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 2\gamma_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - \gamma_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu}. \tag{A.53}
\end{aligned}$$

Para o gráfico (c) temos quatro subdivergências, sendo as duas primeiras equivalentes às dadas pela equação (A.51). Para as outras duas, temos a amplitude

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A3} &= \int_l \frac{-l}{l^2} (-ig) \frac{-i}{[l - (k + k_2)]^2} (-ig) = \\
&= -ig^2 \int_l \frac{l}{l^2 [l - (k + k_2)]^2} = \Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B4}.
\end{aligned}$$

A integral acima já foi resolvida na seção anterior, equação (A.44), de forma que fazendo as trocas $k_\mu \leftrightarrow l_\mu$ e $p_\mu \leftrightarrow (k + k_2)_\mu$ e ignorando as partes divergentes e os TS, teremos:

$$\Sigma_{\Psi\bar{\Psi}A3} \Big|_{fin} = \Sigma_{\Psi\bar{\Psi}B4} \Big|_{fin} = -\frac{b}{2} ig^2 (k + k_2) \left[2 - \ln \left(-\frac{(k + k_2)^2}{\lambda^2} \right) \right]. \tag{A.54}$$

Para a amplitude (c), equação (4.42), vamos resolver as seis últimas integrais, uma vez que as três primeiras já foram resolvidas na seção anterior. A primeira é

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k + k_1]^2} \ln \left(-\frac{(k + k_1)^2}{\lambda^2} \right) \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + \\
&\quad + \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{k^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] + \\
&\quad + \int_k \frac{1}{2} k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{1\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{k^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + k_{1\mu} 2 \left[\int_k \frac{k^\mu}{k^4} - \int_k \frac{k^\mu}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} k_{1\mu} k_{1\nu} 2 \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k^\mu}{k^4} \right] - \int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{k^\mu}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} - k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}, \tag{A.55}
\end{aligned}$$

onde as integrais da quarta linha se anulam devido a seu integrando ser uma função ímpar num domínio simétrico de integração. A segunda integral é equivalente à anterior com a

troca $k_1 \leftrightarrow k_2$, na forma:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \ln\left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2}\right) \Big|_{k+k_2 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + \\
&+ \int_k \frac{1}{2} k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{2\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} - k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}. \quad (\text{A.56})
\end{aligned}$$

A terceira integral é:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \ln\left(-\frac{(k+k_1)^2}{\lambda^2}\right) \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{[k-k_1+k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k-k_1+k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + \\
&+ \int_k \frac{1}{2} k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{1\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{[k-k_1+k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= \int_k \frac{1}{[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + \\
&+ \int_k \frac{1}{2} k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{1\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right]. \quad (\text{A.57})
\end{aligned}$$

A primeira integral em (A.57) já foi resolvida e seu resultado é dado pela equação (A.40).

Já a segunda desenvolvemos na forma:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] &= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\left(\frac{1}{k^2} - \frac{-2k \cdot p + p^2}{k^2[k-p]^2} \right) \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{k^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + 2p_\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{k^\nu}{k^2[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] - \\
&- p^2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{k^2[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= 2 \left[\int_k \frac{k^\mu}{k^4} - \int_k \frac{k^\mu}{k^4} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + \\
&+ 2p_\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\left(\frac{k^\nu}{k^4} - \frac{k^\nu(-2k \cdot p + p^2)}{k^4[k-p]^2} \right) \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= 2p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu}, \quad (\text{A.58})
\end{aligned}$$

onde a integral da terceira linha e a segunda integral da quinta linha se anulam por serem divergências totais, enquanto que as da quarta linha tem integrandos ímpares. Agora, na terceira integral de (A.57) podemos utilizar o resultado das derivadas do desenvolvimento

acima, na forma:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{[k-p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] &= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left\{ 2 \left[\frac{k^\nu}{k^4} - \frac{k^\nu}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2p_\rho \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\left(\frac{k^\rho}{k^4} - \frac{k^\rho (-2k \cdot p + p^2)}{k^4 [k-p]^2} \right) \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - p^2 \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{k^2 [k-p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \right\} = \\
&= 2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{k^\nu}{k^4} \right] - 2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{k^\nu}{k^4} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] + \\
&\quad + 2p_\rho \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\left(\frac{k^\rho}{k^4} - \frac{k^\rho (-2k \cdot p + p^2)}{k^4 [k-p]^2} \right) \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] - \\
&\quad - p^2 \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{k^2 [k-p]^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) \right] \Big\} = \\
&= 2\Upsilon_0^{\mu\nu} - 2\Upsilon_0^{(2)\mu\nu}, \tag{A.59}
\end{aligned}$$

sendo as integrais das quinta e sexta linhas nulas pelo Teorema de Gauss. Finalmente a integral (A.57), resulta em:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_2]^2} \ln \left(-\frac{(k+k_1)^2}{\lambda^2} \right) &= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I^{(2)\mu} - p^2 I^{(2)} + \\
&\quad + 2k_{1\mu} p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \frac{1}{2} k_{1\mu} k_{1\nu} [2\Upsilon_0^{\mu\nu} - 2\Upsilon_0^{(2)\mu\nu}] = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 I_{log}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
&\quad + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)} + \\
&\quad + 2k_{1\mu} p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} - k_{1\mu} k_{1\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) \\
&\quad + \left[-(k_{1\mu} - k_{2\mu})(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + 2k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) - k_{1\mu} k_{1\nu} \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad + \left[-\frac{1}{2}(k_{1\mu} - k_{2\mu})(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{1\mu} k_{1\nu} \right] \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
&\quad + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) + \\
&\quad + \left[-k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{2\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[k_{1\mu}(k_{1\nu} + k_{2\nu}) + k_{2\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) \right] \Upsilon_0^{\mu\nu} + \\
&\quad + 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1}^{(2)\mu\nu} - 4p_\mu p^2 I_{f,2,1}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1}^{(2)}. \tag{A.60}
\end{aligned}$$

A quarta integral de (4.42) é

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \ln\left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2}\right) \Big|_{k+k_2 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{[k+k_1-k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k+k_1-k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + \\
&+ \int_k \frac{1}{2} k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{2\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{[k+k_1-k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= \int_k \frac{1}{[k+p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{[k+p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] + \\
&+ \int_k \frac{1}{2} k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} k_{2\nu} \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left[\frac{1}{[k+p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right], \quad (\text{A.61})
\end{aligned}$$

a qual vemos ser análoga à integral (A.57) com as trocas $k_1 \leftrightarrow k_2$ e $p \leftrightarrow -p$, de forma que:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2} \ln\left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2}\right) &= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) - 2p_\mu I_+^{(2)\mu} - p^2 I_+^{(2)} - \\
&- 2k_{2\mu} p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \frac{1}{2} k_{2\mu} k_{2\nu} [2\Upsilon_0^{\mu\nu} - 2\Upsilon_0^{(2)\mu\nu}] = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} p^2 I_{log}(\lambda^2) - p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\
&- 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} + 4p_\mu p^2 I_{f,2,1+}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1+}^{(2)} - \\
&- 2k_{2\mu} p_\nu \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{\mu\nu} - k_{2\mu} k_{2\nu} \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) + \\
&+ \left[-(k_{1\mu} - k_{2\mu})(k_{1\nu} - k_{2\nu}) - 2k_{2\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) - k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} + \\
&+ \left[-\frac{1}{2}(k_{1\mu} - k_{2\mu})(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{2\mu} k_{2\nu} \right] \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\
&- 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} + 4p_\mu p^2 I_{f,2,1+}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1+}^{(2)} = \\
&= I_{quad}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{2} (k_1 - k_2)^2 I_{log}(\lambda^2) - \\
&- \left[k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) + k_{2\mu} k_{1\nu} \right] \Upsilon_0^{(2)\mu\nu} - \\
&- \frac{1}{2} \left[k_{1\mu}(k_{1\nu} - k_{2\nu}) - k_{2\mu}(k_{1\nu} + k_{2\nu}) \right] \Upsilon_0^{\mu\nu} - \\
&- 8p_\mu p_\nu p_\rho I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu\rho} - 4p_\mu p_\nu p^2 I_{f,3,1+}^{(2)\mu\nu} + 4p_\mu p^2 I_{f,2,1+}^{(2)\mu} + p^4 I_{f,2,1+}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Por sua vez, a quinta integral em (4.42) é:

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2[k+k_2]^2} \ln\left(-\frac{(k+k_1)^2}{\lambda^2}\right) \Big|_{k+k_1 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2[k-k_1+k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{1\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{k^2[k-k_1+k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= \int_k \frac{1}{k^2[k-p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = \\
&= I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + 2p_\mu I_{f,2,1}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1}^{(2)}, \tag{A.63}
\end{aligned}$$

onde a integral da segunda linha é nula por ser uma divergência total e na última linha utilizamos o resultado (A.29).

Finalmente, a última integral em (4.42) é

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{1}{[k+k_1]^2[k+k_2]^2} \ln\left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2}\right) \Big|_{k+k_2 \rightarrow k} &= \int_k \frac{1}{k^2[k+k_1-k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) + \\
&+ \int_k k_{2\mu} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{1}{k^2[k+k_1-k_2]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) \right] = \\
&= \int_k \frac{1}{k^2[k+p]^2} \ln\left(-\frac{k^2}{\lambda^2}\right) = \\
&= I_{log}^{(2)}(\lambda^2) - 2p_\mu I_{f,2,1+}^{(2)\mu} - p^2 I_{f,2,1+}^{(2)}, \tag{A.64}
\end{aligned}$$

onde utilizamos o resultado (A.63) com as trocas $k_1 \leftrightarrow k_2$ e $p \leftrightarrow -p$.

No gráfico (d) temos três subdivergências, com as respectivas amplitudes:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{FF,A} &= \int_l \frac{-i}{l^2} (ig) \frac{-i}{[l-(k+k_2)]^2} (ig) = \\
&= g^2 \int_l \frac{1}{l^2 [l-(k+k_2)]^2} = \\
&= g^2 \left\{ I_{log}(\lambda^2) + b \left[2 - \ln\left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2}\right) \right] \right\} = \Gamma_{FF,B} = \Gamma_{GG}, \tag{A.65}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\Gamma_{FF,A} \Big|_{fin} = \Gamma_{FF,B} \Big|_{fin} = \Gamma_{GG} \Big|_{fin} = bg^2 \left[2 - \ln\left(-\frac{(k+k_2)^2}{\lambda^2}\right) \right]. \tag{A.66}$$

APÊNDICE B – Parametrização dos Termos de Superfície

Aqui vamos fazer as parametrizações dos termos de superfície definidos nas equações (3.11) e (3.12). Seguindo o mesmo procedimento adotado para (3.10), comecemos com a parametrização de (3.11), a qual reescrevemos abaixo:

$$\Upsilon_0^{\mu\nu\rho\eta} = g^{\mu\nu} I_{\log}^{\rho\eta}(\lambda^2) + g^{\mu\rho} I_{\log}^{\nu\eta}(\lambda^2) + g^{\mu\eta} I_{\log}^{\nu\rho}(\lambda^2) - 6I_{\log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2). \quad (\text{B.1})$$

Tomando a derivada de $I_{\log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2)$ em relação a λ^2 , vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda^2} I_{\log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left(\frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - \lambda^2]^4} \right) = 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - \lambda^2]^5} = \\ &= -\frac{b}{4!} [g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}] \frac{1}{\lambda^2}, \\ \frac{d}{d\lambda^2} I_{\log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2) &= -\frac{b}{4!} g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

com $g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} \equiv [g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}]$ sendo uma forma compacta de representação e a integral finita sendo dada por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\eta}{[k^2 - \lambda^2]^5} = -\frac{b}{4!} \frac{1}{4} [g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} + g^{\mu\rho} g^{\nu\eta} + g^{\mu\eta} g^{\nu\rho}] \frac{1}{\lambda^2}.$$

Tomando o caminho inverso, teremos:

$$I_{\log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2) = \int d\lambda^2 \frac{-b}{4!} g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{-b}{4!} g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} [\ln \lambda^2 + C_3], \quad (\text{B.2})$$

com C_3 sendo outra constante arbitrária de integração. Portanto, substituindo os resultados (3.14) e (B.2), na relação de consistência (B.1), produz

$$\begin{aligned} \Upsilon_0^{\mu\nu\rho\eta} &= g^{\mu\nu} I_{\log}^{\rho\eta}(\lambda^2) + g^{\mu\rho} I_{\log}^{\nu\eta}(\lambda^2) + g^{\mu\eta} I_{\log}^{\nu\rho}(\lambda^2) - 6I_{\log}^{\mu\nu\rho\eta}(\lambda^2) = \\ &= g^{\mu\nu} \frac{-bg^{\rho\eta}}{4} [\ln \lambda^2 + C_2] + g^{\mu\rho} \frac{-bg^{\nu\eta}}{4} [\ln \lambda^2 + C_2] + \\ &\quad + g^{\mu\eta} \frac{-bg^{\nu\rho}}{4} [\ln \lambda^2 + C_2] - 6 \frac{-b}{4!} g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} [\ln \lambda^2 + C_3], \end{aligned}$$

$$\Upsilon_0^{\mu\nu\rho\eta} = g^{\mu\{\nu} g^{\rho\eta\}} v_{0,4}, \quad (\text{B.3})$$

com $v_{0,4} \equiv \frac{b}{4} [C_3 - C_2]$.

De forma semelhante, para

$$\Upsilon_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - 2I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2), \quad (\text{B.4})$$

tomemos a derivada de $I_{quad}(\lambda^2)$ em relação a λ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda^2} I_{quad}(\lambda^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left(\frac{1}{k^2 - \lambda^2} \right) = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \lambda^2]^2} = I_{log}(\lambda^2), \\ \frac{d}{d\lambda^2} I_{quad}(\lambda^2) &= -b \left[\ln \lambda^2 + C_1 \right], \end{aligned}$$

onde na última linha usamos a parametrização do $I_{log}(\lambda^2)$, equação (3.13). Pela integral do resultado acima obtemos a primitiva:

$$\begin{aligned} I_{quad}(\lambda^2) &= \int d\lambda'^2 (-b) \left(\ln(\lambda'^2) + C_1 \right) = \\ &= -b \left[\int d\lambda'^2 \ln(\lambda'^2) - C_1 \int d\lambda'^2 \right], \\ I_{quad}(\lambda^2) &= -b \left[\lambda^2 \ln(\lambda^2) + (C_1 - 1)\lambda^2 + C_4 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

com C_4 sendo mais uma constante arbitrária de integração. Seguindo os mesmos passos para $I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda^2} I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left(\frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^2} \right) = \\ &= 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - \lambda^2]^3} = 2I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2), \\ \frac{d}{d\lambda^2} I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2) &= -\frac{b}{2} g^{\mu\nu} \left[\ln \lambda^2 + C_2 \right], \end{aligned}$$

onde na última linha usamos a parametrização do $I_{log}^{\mu\nu}(\lambda^2)$, equação (3.14). Pela integral do resultado acima obtemos a primitiva:

$$\begin{aligned} I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2) &= \int d\lambda'^2 \frac{(-b)}{2} g^{\mu\nu} \left(\ln(\lambda'^2) + C_2 \right) = \\ &= -\frac{b}{2} g^{\mu\nu} \left[\int d\lambda'^2 \ln(\lambda'^2) - C_2 \int d\lambda'^2 \right], \\ I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2) &= -\frac{b}{2} g^{\mu\nu} \left[\lambda^2 \ln(\lambda^2) + (C_2 - 1)\lambda^2 + C_5 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

sendo C_5 outra constante arbitrária de integração. Finalmente, substituindo os resultados (B.5) e (B.6), na relação de consistência (B.4), temos

$$\begin{aligned} \Upsilon_2^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{quad}(\lambda^2) - 2I_{quad}^{\mu\nu}(\lambda^2) = \\ &= g^{\mu\nu} (-b) \left[\lambda^2 \ln(\lambda^2) + (C_1 - 1)\lambda^2 + C_4 \right] - \\ &\quad - 2 \frac{(-b)}{2} g^{\mu\nu} \left[\lambda^2 \ln(\lambda^2) + (C_2 - 1)\lambda^2 + C_5 \right], \end{aligned}$$

$$\Upsilon_2^{\mu\nu} = v_{2,2} g^{\mu\nu} , \tag{B.7}$$

sendo $v_{2,2} \equiv b[(C_2 - C_1)\lambda^2 + (C_5 - C_4)]$, com todos os C_i denotando constantes arbitrárias de integração.

APÊNDICE C – Fatores de Simetria

C.1 Fatores de Simetria em 1 loop

No cálculo do fator de simetria do gráfico (a), vamos utilizar a fórmula de Gell-Mann-Low. Assim temos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{(a)} &= \langle 0|T\{A(x)A(y)\frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z'(A(z)\bar{\Psi}_\alpha(z)\Psi_\alpha(z))(A(z')\bar{\Psi}_\beta(z')\Psi_\beta(z'))\}|0\rangle = \\ &= \frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z' 2D_A(x-z)D_A(y-z')\langle 0|T\{\bar{\Psi}_\alpha(z)\Psi_\alpha(z)\bar{\Psi}_\beta(z')\Psi_\beta(z')\}|0\rangle,\end{aligned}\tag{C.1}$$

onde já contraímos os campos A e colocamos os índices espinoriais explicitamente.

O produto T na equação acima produz duas contribuições distintas:

$$\begin{aligned}T &\equiv \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\alpha(z)\Psi_\alpha(z)\bar{\Psi}_\beta(z')\Psi_\beta(z')\}|0\rangle = \\ &= -\langle 0|T(\Psi_\alpha(z)\bar{\Psi}_\beta(z'))|0\rangle\langle 0|T(\Psi_\beta(z')\bar{\Psi}_\alpha(z))|0\rangle + \\ &\quad + \langle 0|T(\bar{\Psi}_\alpha(z)\bar{\Psi}_\beta(z'))|0\rangle\langle 0|T(\Psi_\beta(z')\Psi_\alpha(z))|0\rangle,\end{aligned}\tag{C.2}$$

com os sinais sendo determinados pelo número de trocas entre os campos fermiônicos. O primeiro termo do lado direito da equação (C.2) é dado por:

$$-S_{F\alpha\beta}(z-z')S_{F\beta\alpha}(z'-z) = -\text{tr}(S_F(z-z')S_F(z'-z)),\tag{C.3}$$

sendo tr o traço e

$$\langle 0|T(\Psi_\alpha(z)\bar{\Psi}_\beta(z'))|0\rangle = S_{F\alpha\beta}(z-z').$$

O segundo termo do lado direito de (C.2) é por definição:

$$\begin{aligned}C_{\alpha\gamma}^T S_{F\gamma\beta}(z-z')S_{F\beta\delta}(z'-z)C_{\delta\alpha}^T &= \text{tr}(C^T S_F(z-z')S_F(z'-z)C^T) = \\ &= \text{tr}(C^T C^T S_F(z-z')S_F(z'-z)) = -\text{tr}(S_F(z-z')S_F(z'-z)),\end{aligned}\tag{C.4}$$

sendo $(C^T)^2 = -1$ e

$$\begin{aligned}\langle 0|(\Psi_\alpha(z)\Psi_\beta(z'))|0\rangle &= S_{F\alpha\gamma}(z-z')C_{\gamma\beta}^T, \\ \langle 0|(\bar{\Psi}_\alpha(z)\bar{\Psi}_\beta(z'))|0\rangle &= C_{\alpha\gamma}^T S_{F\gamma\beta}(z-z').\end{aligned}$$

Desta forma, com as relações (C.3) e (C.4), vemos que (C.1) fica:

$$\Gamma_{AA}^{(a)} = \frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z' 2 D_A(x-z)D_A(y-z')(-2)\text{tr}(S_F(z-z')S_F(z'-z)).\tag{C.5}$$

Assim, temos que o fator de simetria deve ser:

$$S^{(a)} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2. \quad (\text{C.6})$$

Para os gráficos (b), o fator de simetria de cada contribuição é:

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(b1)} &= \langle 0|T\{A(x)A(y)\frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' (F(z)F(z)A(z))(F(z')F(z')A(z'))\}|0\rangle = \\ &= \frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' 4 D_A(x-z) 2 D_A(y-z') D_A(z-z') D_F(z-z'), \end{aligned}$$

e teremos

$$S^{(b1)} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4. \quad (\text{C.7})$$

Por sua vez temos $S^{(b2)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(b2)} &= \langle 0|T\{A(x)A(y)\frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' (2G(z)A(z)B(z))(2G(z')A(z')B(z'))\}|0\rangle = \\ &= \frac{i^2}{2} 4 \int d^4z d^4z' 2 D_A(x-z) D_A(y-z') D_B(z-z') D_G(z-z'), \end{aligned}$$

e teremos

$$S^{(b2)} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4. \quad (\text{C.8})$$

Somando-se as duas contribuições temos

$$S^{(b)} = S^{(b1)} + S^{(b2)} = 8. \quad (\text{C.9})$$

Por fim, para os gráficos (c), começamos com $S^{(c1)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c1)} &= \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)\frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' (A(z)\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\gamma(z))(A(z')\bar{\Psi}_\rho(z')\Psi_\rho(z'))\}|0\rangle = \\ &= \frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' \left\{ \begin{aligned} &+2 - \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle - \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle + \\ &+2 - \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle + \\ &+2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle - \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle + \\ &+2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle \end{aligned} \right\} \times \\ &\quad \times D_A(z-z'). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Neste arranjo, vemos que utilizamos todas as possibilidades de contração dos campos fermiônicos, a saber, $\langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle$, $\langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle$, $\langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle$ e $\langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle$.

As três primeiras possibilidades já aparecerem no gráfico (a). Para a quarta, temos a relação

$$\langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle = C_{\gamma\pi}^T \langle 0|T\{\Psi_\pi(z)\bar{\Psi}_\delta(z')\}|0\rangle C_{\delta\rho}^T,$$

e utilizando-a e rearranjando os fatores dos termos restantes, teremos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c1)} &= \frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' \left\{ \right. \\
&\quad 2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle - \\
&\quad -2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle - \\
&\quad -2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle + \\
&\quad \left. +2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle \right\} \\
&\quad \times D_A(z - z') = \\
&= \frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' \left\{ \right. \\
&\quad 2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle - \\
&\quad -2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle - \\
&\quad -2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle + \\
&\quad \left. +2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \right\} \\
&\quad \times D_A(z - z') = \\
&= \frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' \left\{ \right. \\
&\quad 2 S_{F\alpha\gamma}(x - z) S_{F\gamma\rho}(z - z') S_{F\rho\beta}(z' - y) - \\
&\quad -2 S_{F\alpha\gamma}(x - z) S_{F\alpha\pi}(z - z') C_{\pi\rho}^T C_{\rho\eta}^T S_{F\eta\beta}(z' - y) - \\
&\quad -2 S_{F\alpha\pi}(x - z) C_{\pi\gamma}^T C_{\gamma\eta}^T S_{F\eta\rho}(z - z') S_{F\rho\beta}(z' - y) + \\
&\quad \left. -2 S_{F\alpha\pi}(x - z) C_{\pi\gamma}^T C_{\gamma\eta}^T S_{F\eta\sigma}(z - z') C_{\sigma\rho}^T C_{\rho\zeta}^T S_{F\zeta\beta}(z' - y) \right\} \\
&\quad \times D_A(z - z') \\
&= \frac{i^2}{2} \int d^4z d^4z' 8 S_{F\alpha\gamma}(x - z) S_{F\gamma\rho}(z - z') S_{F\rho\beta}(z' - y) D_A(z - z'), \tag{C.11}
\end{aligned}$$

onde, uma vez que é dada a relação matricial $C^T C^T = -1$, usamos a relação entre as componentes $C_{\pi\rho}^T C_{\rho\eta}^T = -\delta_{\pi\eta}$. Assim, temos o fator de simetria

$$S^{(c1)} = \frac{1}{2} \times 8 = 4. \tag{C.12}$$

Para $S^{(c2)}$, vem:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(c2)} &= \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)\frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z'(B(z)\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\gamma(z))(B(z')\bar{\Psi}_\rho(z')\Psi_\rho(z'))\}|0\rangle = \\
&= \frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z'\left\{ \begin{aligned}
&+2 - \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle - \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle + \\
&+2 - \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\Psi_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle + \\
&+2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle - \langle 0|T\{\Psi_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\bar{\Psi}_\rho(z')\}|0\rangle + \\
&+2 \langle 0|T\{\Psi_\alpha(x)\Psi_\gamma(z)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\rho(z')\bar{\Psi}_\beta(y)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\Psi}_\gamma(z)\Psi_\rho(z')\}|0\rangle \end{aligned} \right\} \times \\
&\quad \times D_B(z - z'), \tag{C.13}
\end{aligned}$$

e vemos que a equação (C.13) é idêntica à (C.10), com a diferença de, na última o campo bosônico ser o campo A e na primeira, ser o campo B . Assim, usando o resultado (C.11), temos:

$$S^{(c2)} = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \tag{C.14}$$

e finalmente

$$S^{(c1)} + S^{(c2)} = 4 + 4 = 8. \tag{C.15}$$

C.2 Fatores de Simetria em 2 loops

No cálculo dos fatores de simetria a 2 loops temos diferença de tratamento entre os gráficos com sub-divergências (os ditos aninhados) daqueles que não contém. Para cada tipo adotamos um método específico, embora ambos sejam embasados na fórmula de Gell-Mann-Low.

C.2.1 Gráficos (a), (b), (c), (d) e (e)

Para os gráficos com sub-divergências o fator de simetria total será o produto entre o fator de simetria da sub-divergência pelo fator de simetria do gráfico restante, a 1 loop, onde a sub-divergência está conectada.

Assim, para os gráficos (a) teremos:

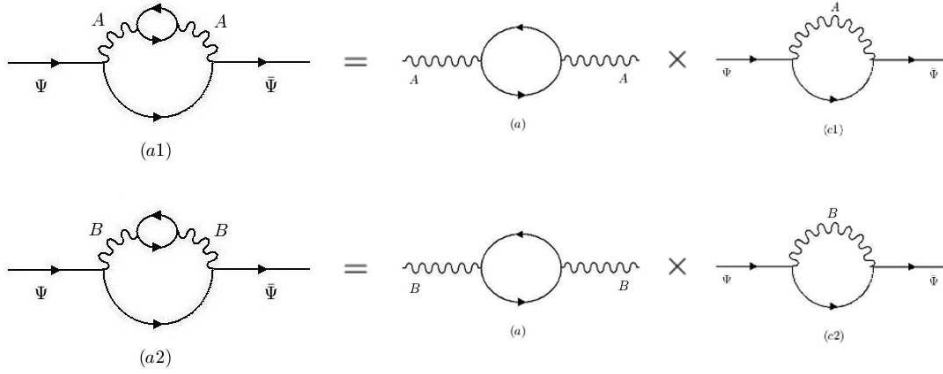


Figura 33 – Gráficos (a) com suas sub-divergências. O fator de simetria total é o produto entre o fator de simetria da sub-divergência pelo fator de simetria do gráfico restante a 1 loop.

$$S^{(a1)} = S_{AA}^{(a)} \times S^{(c1)} = 2 \times 4 = 8,$$

$$S^{(a2)} = S_{BB}^{(a)} \times S^{(c2)} = 2 \times 4 = 8,$$

onde os fatores de simetria a um loop foram obtidos na seção anterior: $S_{AA}^{(a)}$ é o resultado (C.6), $S^{(c1)}$ e $S^{(c2)}$ vem do resultado (C.15), e $S_{BB}^{(a)} = S_{AA}^{(a)}$, uma vez que os campos B são pernas externas assim como os campos A , contraindo apenas consigo mesmos, não alterando assim o resultado direto do fator de simetria. Dessa forma,

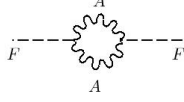
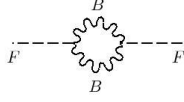
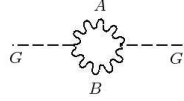
$$S^{(a)} = S^{(a1)} + S^{(a2)} = 16. \quad (\text{C.16})$$

Para os gráficos (b) os fatores de simetria são dados na Figura 34, e assim

$$S^{(b)} = S^{(b1)} + S^{(b2)} + S^{(b3)} + S^{(b4)} = S^{(b12)} + S^{(b34)} = 64. \quad (\text{C.17})$$

como descrito na tabela 16

Tabela 16 – Fatores de simetria das autoenergias relacionadas aos gráficos (d) em dois loops.

Fator de Simetria	Gráfico
$S_{FF,A}$	
$S_{FF,B}$	
S_{GG}	

Assim utilizando a fórmula de Gell-Mann-Low teremos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{FF,A} &= \langle 0|T\{F(x)F(y)\frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z'(F(z)F(z)A(z))(F(z')F(z')A(z'))\}|0\rangle = \\ &= \frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z' 2 D_F(x-z)D_F(y-z') 2 D_A(z-z')D_A(z-z'),\end{aligned}$$

e teremos

$$S_{FF,A} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2. \quad (\text{C.19})$$

Por questão de simetria vemos que $S_{FF,B} = S_{FF,A} = 2$. E por sua vez

$$\begin{aligned}\Gamma_{GG} &= \langle 0|T\{G(x)G(y)\frac{i^2}{2}\int d^4z d^4z'(2G(z)A(z)B(z))(2G(z')A(z')B(z'))\}|0\rangle = \\ &= \frac{i^2}{2}4\int d^4z d^4z' 2 D_G(x-z)D_G(y-z')D_A(z-z')D_B(z-z'),\end{aligned}$$

e teremos

$$S_{GG} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4. \quad (\text{C.20})$$

Ainda necessitaremos de fatores de simetria de algumas autoenergias já calculadas e de suas análogas, como descrito na tabela 17.

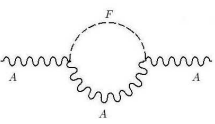
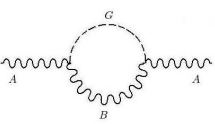
Finalmente, com estes resultados o fator de simetria dos gráficos (d), Figura 36, são

$$S^{(d)} = S^{(d1)} + S^{(d2)} + S^{(d3)} = 32. \quad (\text{C.21})$$

No caso dos gráficos (e), Figura 37, o fator de simetria resulta em

$$S^{(e)} = S^{(e1)} + S^{(e2)} = 16. \quad (\text{C.22})$$

Tabela 17 – Fatores de simetria das autoenergias relacionadas aos gráficos (d) e (e) em dois loops.

Fator de Simetria	Gráfico	Resultado Análogo a
$S_{AA,F}$		Equação (C.7)
$S_{AA,G}$		Equação (C.8)

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (d1): } S^{(d1)} = S_{FF,A} \times S_{AA,F} = 2 \times 4 = 8, \\
 & \text{Diagram (d2): } S^{(d2)} = S_{FF,B} \times S_{AA,F} = 2 \times 4 = 8, \\
 & \text{Diagram (d3): } S^{(d3)} = S_{GG} \times S_{AA,G} = 4 \times 4 = 16,
 \end{aligned}$$

Figura 36 – Gráficos (d) com suas sub-divergências. O fator de simetria total é o produto entre o fator de simetria da sub-divergência pelo fator de simetria do gráfico restante a 1 loop.

C.2.2 Gráficos (g) e (i)

Como descrito na seção 4.3, os gráficos (g) e (i), não contribuem para as respectivas funções de dois pontos, uma vez que suas sub-divergências não contém termos finitos. Aqui mostraremos isto.

Para o gráfico (g), as contribuições estão dadas na Figura 38.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (e1)}: S^{(e1)} = S_{AA}^{(a)} \times S_{AA,F} = 2 \times 4 = 8, \\
 & \text{Diagram (e2)}: S^{(e2)} = S_{BB}^{(a)} \times S_{AA,G} = 2 \times 4 = 8,
 \end{aligned}$$

Figura 37 – Gráficos (e) com suas sub-divergências. O fator de simetria total é o produto entre o fator de simetria da sub-divergência pelo fator de simetria do gráfico restante a 1 loop.

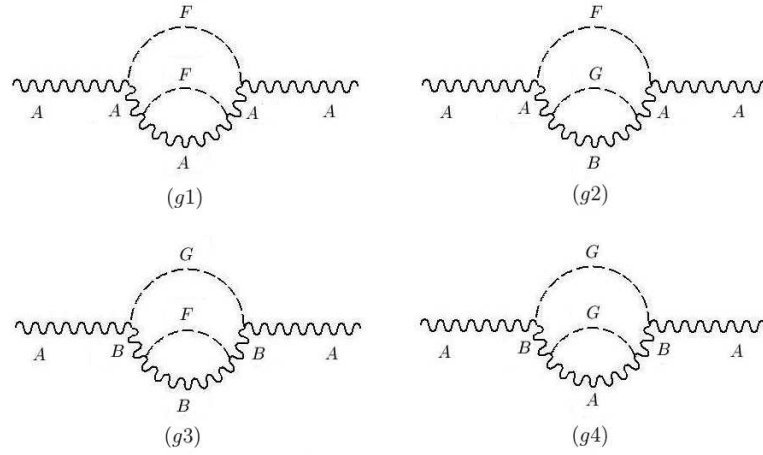


Figura 38 – Diagramas que contribuem para a amplitude (g) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

À estas contribuições, corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{AA}^{(g)} &= S^{(g1)} \times \int_k \frac{-i}{k^2} \left[\Gamma_{AA,F} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (ig) \frac{i[k-p]^2}{[k-p]^2} (ig) + \\
 &+ S^{(g2)} \times \int_k \frac{-i}{k^2} \left[\Gamma_{AA,G} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (ig) \frac{i[k-p]^2}{[k-p]^2} (ig) + \\
 &+ S^{(g3)} \times \int_k \frac{-i}{k^2} \left[\Gamma_{BB,F} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (-ig) \frac{i[k-p]^2}{[k-p]^2} (-ig) + \\
 &+ S^{(g4)} \times \int_k \frac{-i}{k^2} \left[\Gamma_{BB,G} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{k^2} (-ig) \frac{i[k-p]^2}{[k-p]^2} (-ig), \tag{C.23}
 \end{aligned}$$

onde as sub-divergências, calculadas a um loop na seção 4.2, resultado (4.7), são

$$\Gamma_{AA,F} = S_{AA,F} \times -g^2 I_{quad}(\lambda^2) = \Gamma_{AA,G} = \Gamma_{BB,F} = \Gamma_{BB,G},$$

de forma que

$$\Gamma_{AA,F} \Big|_{fin} = \Gamma_{AA,G} \Big|_{fin} = \Gamma_{BB,F} \Big|_{fin} = \Gamma_{BB,G} \Big|_{fin} = 0.$$

Com este resultado, vemos que independentemente do resultado dos fatores de simetria

$$\Gamma_{AA}^{(g)} = 0. \quad (\text{C.24})$$

O mesmo ocorre para os gráficos (i), cujas contribuições são dadas na Figura 39.

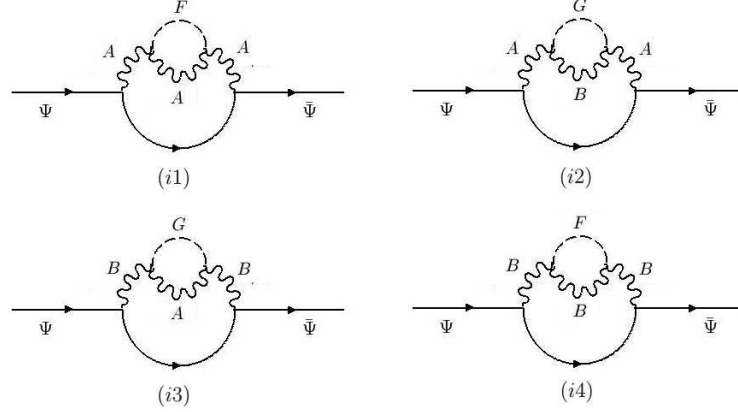


Figura 39 – Diagramas que contribuem para a amplitude (i) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

À estas contribuições, corresponde a seguinte amplitude:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(i)} &= S^{(i1)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-p]^2} \left[\Gamma_{AA,F} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + \\ &+ S^{(i2)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-p]^2} \left[\Gamma_{AA,G} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + \\ &+ S^{(i3)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-p]^2} \left[\Gamma_{BB,G} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5) + \\ &+ S^{(i4)} \times \int_k \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-p]^2} \left[\Gamma_{BB,F} \Big|_{fin} \right] \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5), \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

e como no caso do gráfico (g), vemos que as partes finitas das sub-divergências são nulas.

Assim

$$\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(i)} = 0. \quad (\text{C.26})$$

C.2.3 Gráficos (f), (h) e (j)

No caso destes gráficos, como dito anteriormente, o tratamento para o cálculo dos fatores de simetria será diferente. Aqui vamos abordar o gráfico (f) (Figura 40), de forma que procedimento similar pode ser feito para os demais.

Assim, para calcular a função de dois pontos $\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(f)}$, utilizamos a Fórmula de Gell-Mann-Low

$$\langle \Omega | T(\bar{\Psi}(x_1)\Psi(x_2)) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T\left\{ \bar{\Psi}(x_1)\Psi(x_2) \exp \left[i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left[i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z) \right] | 0 \rangle},$$

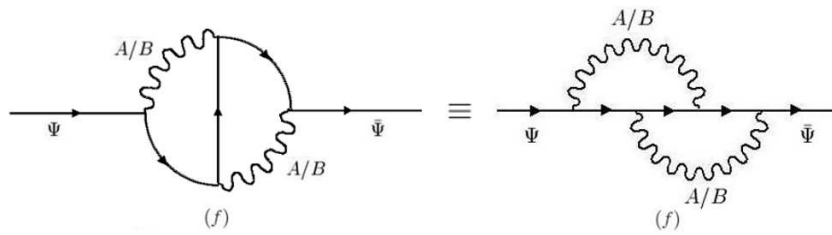


Figura 40 – Diagramas relacionados á amplitude (f). À esquerda está como foi apresentado na Figura 20, e à direita está apresentada forma equivalente de representá-lo.

sendo Ω o vácuo na representação de interação, assim como no lado direito da equação, todos os campos e \mathcal{L}_{int} são na representação de interação.

Os gráficos que contribuem para a amplitude (f) estão dados na Figura 41, e para se encontrar o fator de simetria destes diagramas necessitamos expandir o termo $\exp \left[i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(z) \right]$ até a 4ª ordem nos campos bosônicos.

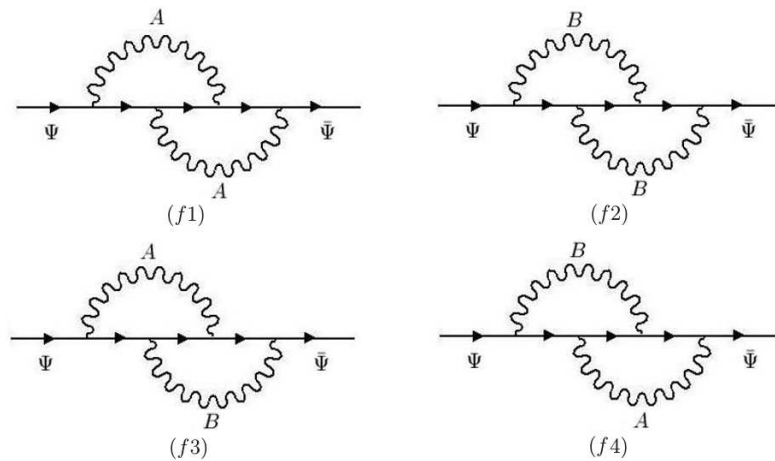


Figura 41 – Diagramas que contribuem para a amplitude (f) em 2 loops. O momento externo é p e os momentos internos são k e l .

Vamos primeiro supor que os campos ainda não estão contraídos, como ilustrado na Figura 42.

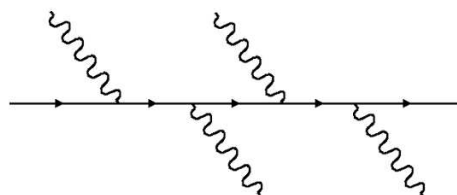


Figura 42 – Diagrama (f) antes da contração dos campos bosônicos. Aqui os bósons podem ser tanto A quanto B .

A parte da \mathcal{L}_{int} com férmions é

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi}(A + i\gamma_5 B)\Psi = \bar{\Psi}A\Psi + \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi, \quad \text{onde } \tilde{B} \equiv i\gamma_5 B,$$

e por sua vez a expansão da exponencial fica

$$\begin{aligned} \exp \left[\int d^4z \mathcal{L}_{int}(z) \right] &= 1 + \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x) + \frac{1}{2!} \int d^4x \int d^4y \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y) + \\ &+ \frac{1}{3!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y) \mathcal{L}_{int}(z) + \\ &+ \frac{1}{4!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int d^4w \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y) \mathcal{L}_{int}(z) \mathcal{L}_{int}(w) + \dots \end{aligned}$$

O termo de ordem 4 na expansão acima é o que vai contribuir para os diagramas citados, ou seja,

$$\frac{1}{4!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int d^4w \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(y) \mathcal{L}_{int}(z) \mathcal{L}_{int}(w). \quad (\text{C.27})$$

Agora temos que ver quais são as combinações que conduzem a campos adjacentes, por exemplo, A adjacente a A , \tilde{B} adjacente a \tilde{B} , ou a campos intercalados, A intercalando com \tilde{B} . No caso de termos apenas campos A ou apenas \tilde{B} , também temos de fazer esta distinção, pois é assim que eles vão contrair: A não contrai com seu vizinho, mas com o *next to his neighbour*.

Comecemos com o caso em que temos campos distintos A e \tilde{B} , onde utilizaremos a notação compacta $\bar{\Psi}(x)A(x)\Psi(x) \equiv \bar{\Psi}A\Psi[x]$:

$$\begin{aligned} (\text{C.27}) &= \frac{1}{4!} \int d^4x \int d^4y \int d^4z \int d^4w \left\{ \bar{\Psi}A\Psi[x] \bar{\Psi}A\Psi[y] \bar{\Psi}A\Psi[z] \bar{\Psi}A\Psi[w] + \right. \\ &+ \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[x] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[y] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[z] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[w] + \\ &+ \bar{\Psi}A\Psi[x] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[y] \bar{\Psi}A\Psi[z] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[w] + \\ &+ \bar{\Psi}A\Psi[x] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[y] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[z] \bar{\Psi}A\Psi[w] + \\ &+ \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[x] \bar{\Psi}A\Psi[y] \bar{\Psi}A\Psi[z] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[w] + \\ &+ \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[x] \bar{\Psi}A\Psi[y] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[z] \bar{\Psi}A\Psi[w] + \\ &+ \bar{\Psi}A\Psi[x] \bar{\Psi}A\Psi[y] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[z] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[w] + \\ &\left. + \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[x] \bar{\Psi}\tilde{B}\Psi[y] \bar{\Psi}A\Psi[z] \bar{\Psi}A\Psi[w] \right\}. \quad (\text{C.28}) \end{aligned}$$

Assim, vemos que nos casos em que temos A e \tilde{B} , vemos que há 4 maneiras de organizar A adjacente a A ou \tilde{B} adjacente a \tilde{B} (linhas 4, 5, 7 e 8 do lado direito de (C.28)), e 2 maneiras de organizar A intercalando com \tilde{B} (linhas 3 e 6).

Nos casos de A intercalando com \tilde{B} , temos de considerar ainda que podemos trocar $x \leftrightarrow z$ e $y \leftrightarrow w$, e os pares (x, z) e (y, w) simultaneamente. Portanto esta combinação

ocorre com a probabilidade

$$\underbrace{\frac{1}{4!}}_{\text{fator comum}} \times \underbrace{2}_{\text{duas maneiras}} \times \underbrace{2^3}_{\text{trocas de posição}} = \frac{2}{3}. \quad (\text{C.29})$$

No caso de A adjacente a A ou \tilde{B} adjacente a \tilde{B} , também podemos trocar $x \leftrightarrow z$ e $y \leftrightarrow w$, e (x, z) e (y, w) simultaneamente, o que produz a ocorrência

$$\underbrace{\frac{1}{4!}}_{\text{fator comum}} \times \underbrace{4}_{\text{quatro maneiras}} \times \underbrace{2^3}_{\text{trocas de posição}} = \frac{4}{3}. \quad (\text{C.30})$$

No caso em que se tem quatro campos A ou quatro campos \tilde{B} , duas primeiras linhas do lado direito de (C.28), qualquer troca entre x, y, z e w é permitida, o que resulta em

$$\underbrace{\frac{1}{4!}}_{\text{fator comum}} \times \underbrace{4!}_{\text{trocas de posição}} = 1, \text{ para os campos } A \quad (\text{C.31})$$

e

$$\underbrace{\frac{1}{4!}}_{\text{fator comum}} \times \underbrace{4!}_{\text{trocas de posição}} = 1, \text{ para os campos } \tilde{B}, \quad (\text{C.32})$$

ou seja, quando a ordem dos campos é irrelevante, temos a probabilidade 1 de ocorrência para os quatro campos A , e o mesmo para os quatro campos \tilde{B} .

Portanto, o fator de simetria para os campos intercalados e distintos é $2/3$ e contempla os diagramas da Figura 43.

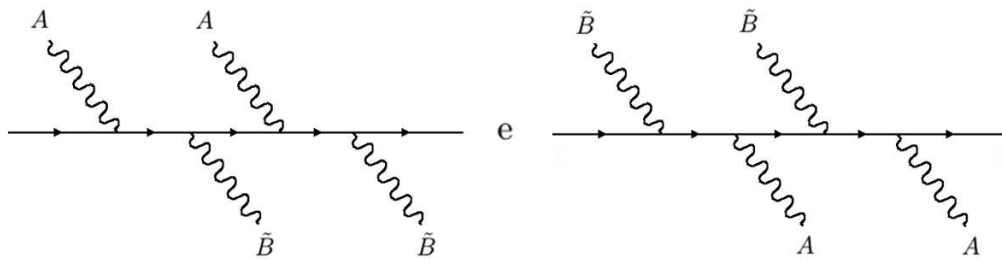


Figura 43 – Diagramas (f) que representam os campos bosônicos A e \tilde{B} intercalados, antes da contração com o próximo a seu vizinho.

Pode-se agora contrair \overline{AA} e $\overline{\tilde{B}\tilde{B}}$, Figura 44, e o fator de simetria não se atera.

Finalmente, no caso em que todos os campos são iguais, já vimos que se a ordem é irrelevante, se tem para a combinação com probabilidade de ocorrência

$$\textcircled{x_1} \textcircled{x_2} \textcircled{x_3} \textcircled{x_4} \rightarrow \frac{4!}{4!} = 1, \quad (\text{C.33})$$

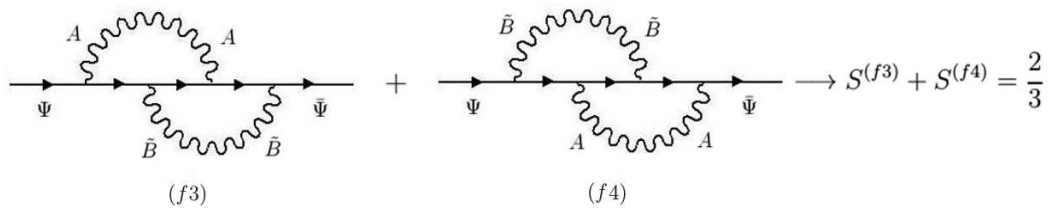
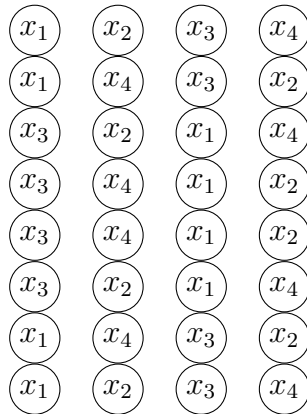


Figura 44 – Diagramas (f) que representam os campos bosônicos A e \tilde{B} intercalados, depois da contração com o próximo a seu vizinho. O fator de simetria total é a soma dos fatores de simetria individuais.

Tabela 18 – Combinações de contrações dos campos A , fazendo a troca alternada entre os mesmos, num total de 8 possíveis modos. O mesmo é válido para os campos \tilde{B} .



onde usamos a notação compacta $(x_1) \equiv \bar{\Psi}A\Psi[x_1]$. Se apenas contarmos os casos em que as posições trocam alternadamente, temos

o que ao todo resulta em (Figura 45)

$$\frac{1}{4!} \times 2^3 = \frac{1}{3}.$$

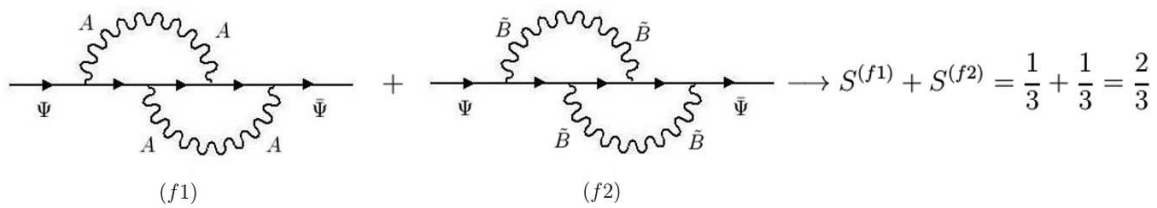


Figura 45 – Diagramas (f) que representam os campos bosônicos A e \tilde{B} individualmente, depois da contração com o próximo a seu vizinho. O fator de simetria total é a soma dos fatores de simetria individuais.

No caso de serem combinações adjacentes teríamos

$$\frac{1}{4!} \times 2^4 = \frac{2}{3},$$

ou seja, metade do valor obtido quando temos campos A e \tilde{B} presentes.

Com os valores dos fatores de simetria encontrados, partamos para a amplitude correspondente aos gráficos da Figura 41:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(f)} &= S^{(f1)} \times \int_k \int_l \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-l]^2} (-ig) \frac{-(l-\not{k}+\not{p})}{[l-k+p]^2} (-ig) \frac{-l}{l^2} \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + \\
&+ S^{(f2)} \times \int_k \int_l \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-l]^2} (g\gamma_5) \frac{-(l-\not{k}+\not{p})}{[l-k+p]^2} (g\gamma_5) \frac{-l}{l^2} \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5) + \\
&+ S^{(f3)} \times \int_k \int_l \frac{-\not{k}}{k^2} (g\gamma_5) \frac{-i}{[k-l]^2} (g\gamma_5) \frac{-(l-\not{k}+\not{p})}{[l-k+p]^2} (-ig) \frac{-l}{l^2} \frac{-i}{[k-p]^2} (-ig) + \\
&+ S^{(f4)} \times \int_k \int_l \frac{-\not{k}}{k^2} (-ig) \frac{-i}{[k-l]^2} (-ig) \frac{-(l-\not{k}+\not{p})}{[l-k+p]^2} (g\gamma_5) \frac{-l}{l^2} \frac{-i}{[k-p]^2} (g\gamma_5) = \\
&= S^{(f1)} \times g^4 \int_k \int_l \frac{\not{k}(l-\not{k}+\not{p})l}{k^2 l^2 [k-l]^2 [k-p]^2 [l-k+p]^2} + \\
&+ S^{(f2)} \times g^4 \int_k \int_l \frac{\not{k}\gamma_5\gamma_5(l-\not{k}+\not{p})\gamma_5 l\gamma_5}{k^2 l^2 [k-l]^2 [k-p]^2 [l-k+p]^2} - \\
&- S^{(f3)} \times g^4 \int_k \int_l \frac{\not{k}\gamma_5\gamma_5(l-\not{k}+\not{p})l}{k^2 l^2 [k-l]^2 [k-p]^2 [l-k+p]^2} - \\
&- S^{(f4)} \times g^4 \int_k \int_l \frac{\not{k}(l-\not{k}+\not{p})\gamma_5 l\gamma_5}{k^2 l^2 [k-l]^2 [k-p]^2 [l-k+p]^2} = \\
&= (S^{(f1)} - S^{(f2)} + S^{(f3)} - S^{(f4)}) \times g^4 \int_k \int_l \frac{\not{k}(l-\not{k}+\not{p})l}{k^2 l^2 [k-l]^2 [k-p]^2 [l-k+p]^2}, \\
\Gamma_{\Psi\bar{\Psi}}^{(f)} &= 0, \tag{C.34}
\end{aligned}$$

uma vez que $S^{(f1)} = S^{(f2)}$ e $S^{(f3)} = S^{(f4)}$, como visto nas Figuras 44 e 45.