

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Física

Erick Ribeiro de Carvalho

**CARACTERIZAÇÃO DE UM DISPOSITIVO DE  
CRISTAL LÍQUIDO PARA IMPLEMENTAÇÃO DE  
OPERAÇÕES PROGRAMÁVEIS SOBRE O  
ESTADO DE POLARIZAÇÃO DA LUZ**

Belo Horizonte  
2024

Erick Ribeiro de Carvalho

**CARACTERIZAÇÃO DE UM DISPOSITIVO DE  
CRISTAL LÍQUIDO PARA IMPLEMENTAÇÃO DE  
OPERAÇÕES PROGRAMÁVEIS SOBRE O ESTADO DE  
POLARIZAÇÃO DA LUZ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Leonardo Teixeira Neves

Belo Horizonte

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C331c Carvalho, Erick Ribeiro de.

Caracterização de um dispositivo de cristal líquido para implementação de operações programáveis sobre o estado de polarização da luz / Erick Ribeiro de Carvalho. – 2024.

74 f. : il.

Orientador: Leonardo Teixeira Neves.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 65-68.

1. Informação quântica. 2. Ótica. 3. Modulador espacial de luz. 4. Matriz de Mueller. I. Título. II. Neves, Leonardo Teixeira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

## ATA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 723ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR ERICK RIBEIRO DE CARVALHO**, orientado pelo professor Leonardo Teixeira Neves, para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 14 horas de vinte e nove de maio de 2024, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Leonardo Teixeira Neves** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Sebastião José Nascimento de Pádua** (Departamento de Física/UFMG), **Marco Antônio Sagiore Leal** (Departamento de Matemática e Estatística/UFVJM) e o doutor **Artur Araújo Matoso** (Departamento de Física/UFMG) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **ERICK RIBEIRO DE CARVALHO** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de “**Caracterização de um dispositivo de cristal líquido para implementação de operações programáveis sobre o estado de polarização da luz**”. O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 29 de maio de 2024.

Prof. Leonardo Teixeira Neves  
Orientador do aluno  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Marco Antônio Sagiore Leal  
Departamento de Matemática e Estatística/UFVJM

Dr. Artur Araújo Matoso  
Departamento de Física/UFMG

**Candidato:** Erick Ribeiro de Carvalho



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 04/07/2024, às 14:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Artur Araujo Matoso, Membro**, em 07/07/2024, às



07:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Erick Ribeiro de Carvalho, Usuário Externo**, em 08/07/2024, às 15:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastião Jose Nascimento de Padua, Professor(a)**, em 05/08/2024, às 14:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marco Antonio Sagioro Leal, Usuário Externo**, em 29/08/2024, às 16:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3347880** e o código CRC **3EDC3A96**.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, em especial à minha mãe, Elaine Gilmar, pelo apoio, incentivo e amor, que sempre me direcionou e sem o qual nada disso seria possível. Aos meus tios e tias, Eliene, Natalie, Levi e Leonardo, pelo apoio constante e pelas conversas inspiradoras. À minha avó, Ana Inês, pelo carinho, preocupação e apoio em toda minha jornada, e pela auxílio na obtenção dos documentos para minha matrícula na graduação. Sua contribuição foi fundamental e sou imensamente grato.

Ao meu orientador, Leonardo Teixeira, pelo excelente direcionamento, dedicação, paciência e disponibilidade. Sem a sua ajuda, nada disso seria possível.

Aos professores da pós-graduação em física da UFMG pelo excelente direcionamento em relação à pesquisa.

Ao corpo docente do ICEI da PUC Minas, pelas excelentes aulas ministradas e pelo incentivo ao meu desenvolvimento acadêmico.

Ao amor da minha vida, Iara Fernanda, pelo apoio constante, paciência, carinho e por aguentar minhas infinitas emoções. Com você, tudo se tornou mais leve e menos desafiador.

Por fim, aos meus amigos, Júlio, Mateus, Victor e Rodrigo, pelas horas de conversa e pelos jogos que tornaram essa jornada no mestrado mais tranquila.

*“Vamos com calma.”*

# Resumo

Os displays de cristal líquido (LCD) são dispositivos capazes de manipular propriedades de um feixe de luz incidente, como amplitude, fase e polarização em função da tensão aplicada às suas moléculas. Neste trabalho, faremos a caracterização experimental do efeito de um LCD sobre a polarização da luz, visando sua utilização como um modulador espacial de luz (SLM) programável em experimentos de ótica e informação quântica. Na primeira parte, vamos determinar a matriz de Mueller do dispositivo e, a partir dela, suas propriedades polarimétricas. Mostraremos que o LCD atua apenas de forma aproximada como uma placa retardadora ideal, uma vez que introduz despolarização à luz incidente. Na segunda parte, investigamos o comportamento do LCD através do formalismo de operações quânticas, tratando sua atuação como uma operação sobre estados de um qubit de polarização. Através da tomografia de processos, determinamos a matriz que caracteriza a operação do dispositivo e mostramos que ela é não unitária. Em seguida, derivamos uma expressão geral para a matriz de processo de um SLM, dado pela combinação do LCD com placas de onda. Esta expressão nos permitirá implementar operações programáveis sobre os estados de polarização da luz em função da configuração das placas de onda e da tensão no LCD. Como aplicação, vamos quantificar a fidelidade da operação real implementada pelo SLM com uma operação unitária ideal de interesse em protocolos de informação quântica.

**Palavras-chave:** lcd; modulação de polarização; slm; matriz de Mueller; matriz de processos quânticos.

# Abstract

Liquid crystal displays (LCDs) are devices capable of manipulating properties of an incident light beam, such as amplitude, phase, and polarization, based on the voltage applied to their molecules. In this work, we will experimentally characterize the effect of an LCD on light polarization, aiming at its use as a programmable spatial light modulator (SLM) in optics and quantum information experiments. In the first part, we will determine the Mueller matrix of the device and, from it, its polarimetric properties. We will show that the LCD acts only approximately as an ideal retarder plate since it introduces depolarization to the incident light. In the second part, we investigate the behavior of the LCD through the formalism of quantum operations, treating its action as an operation on polarization qubit states. Through process tomography, we determine the matrix characterizing the device's operation and show that it is non-unitary. Next, we derive a general expression for the process matrix of an SLM, given by the combination of the LCD with wave plates. This expression will allow us to implement programmable operations on the polarization states of light based on the configuration of the wave plates and the voltage on the LCD. As an application, we will quantify the fidelity of the actual operation implemented by the SLM with an ideal unitary operation of interest in quantum information protocols.

**Keywords:** lcd; polarization modulation; slm; Mueller matrix; quantum process matrix.

# Sumário

<b>1</b>	<b>PREFÁCIO</b>	<b>12</b>
<b>I</b>	<b>MATRIZ DE MUELLER DE UM DISPLAY DE CRISTAL LÍQUIDO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>POLARIZAÇÃO DA LUZ</b>	<b>15</b>
2.1	Equação de onda . . . . .	15
2.2	Estado de polarização da luz . . . . .	16
2.3	Vetores de Jones . . . . .	22
2.4	Vetores de Stokes . . . . .	23
2.5	Matriz de Mueller . . . . .	24
2.5.1	Matriz de Mueller de placas de onda e polarizadores. . . . .	25
2.5.2	Construção da matriz de Mueller de elementos ópticos arbitrários . . . . .	28
2.5.3	Extraindo propriedades polarimétricas da matriz de Mueller . . . . .	29
<b>3</b>	<b>CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE UM <i>DISPLAY</i> DE CRISTAL LÍQUIDO</b>	<b>31</b>
3.1	O cristal líquido nemático torcido . . . . .	31
3.2	Caracterização do LCD. . . . .	31
<b>4</b>	<b>RECONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE MUELLER DO <i>DISPLAY</i> DE CRISTAL LÍQUIDO</b>	<b>36</b>
4.1	A matriz de Mueller do LCD . . . . .	36
4.2	Propriedades polarimétricas do LCD . . . . .	37
4.2.1	Diatenuação . . . . .	37
4.2.2	Polarizância . . . . .	39
4.2.3	Retardância . . . . .	41
4.2.4	Despolarização . . . . .	42

<b>II</b>	<b>MATRIZ DE PROCESSOS DE UM MODULADOR ESPACIAL DE LUZ PROGRAMÁVEL</b>	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>ELEMENTOS DE MECÂNICA QUÂNTICA PARA SISTEMAS DE DOIS NÍVEIS</b>	<b>46</b>
5.1	Qubit codificado na polarização de um fóton . . . . .	46
5.2	Evolução de estados quânticos. . . . .	48
5.3	Tomografia quântica em sistemas de um qubit. . . . .	49
5.3.1	Tomografia de estados de um qubit . . . . .	49
5.3.2	Tomografia de processos para sistemas de um qubit . . . . .	49
<b>6</b>	<b>RECONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE PROCESSOS DO <i>DISPLAY DE CRISTAL LÍQUIDO</i></b>	<b>52</b>
6.1	Tomografia dos estados de polarização transformados pelo LCD . . . . .	52
6.2	A matriz de processos do LCD. . . . .	54
6.3	Operações programáveis utilizando o LCD . . . . .	58
6.3.1	Matriz de processos do SLM. . . . .	60
6.3.2	Fidelidade entre a operação do SLM e uma operação unitária de interesse em informação quântica. . . . .	61
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>64</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>69</b>
	<b>APÊNDICE A – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE MUELLER .</b>	<b>70</b>
	<b>APÊNDICE B – DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE PROCESSOS</b>	<b>73</b>

# 1 Prefácio

Um display de cristal líquido (LCD, sigla do inglês *liquid crystal display*) é um dispositivo eletro-óptico capaz de manipular características de um feixe de luz incidente. A modulação de um feixe de luz pelo LCD depende do nível de cinza configurado no display, o qual é determinado pelos níveis de tensão aplicados aos seus pixels. Neste trabalho, vamos caracterizar experimentalmente o efeito de um LCD baseado em cristal líquido nemático torcido sobre os estados de polarização da luz. Isto nos permitirá entender seu potencial e suas limitações como um modulador espacial de luz (SLM) programável em experimentos de óptica e informação quântica. A caracterização do LCD se dará através de dois formalismos distintos. O primeiro é baseado na óptica clássica e consiste na determinação da matriz de Mueller do dispositivo, através da qual podemos determinar suas propriedades polarimétricas. O segundo se baseia no formalismo de operações quânticas, em que a atuação do dispositivo é tratada como uma operação sobre estados de um qubit de polarização.

Dividiremos a dissertação em duas partes, onde discutiremos os seguintes tópicos:

- **Parte I**

No capítulo 2, apresentamos o formalismo da matriz de Mueller, que descreve as transformações que um dispositivo óptico implementa sobre os estados de polarização da luz. Discutimos as propriedades polarimétricas que podem ser extraídas desta matriz e como ela pode ser determinada a partir de um conjunto específico de intensidades de um feixe de luz que incide sobre o dispositivo. No capítulo 3, mostramos essas medições de intensidade para o LCD e, a partir delas, determinamos a matriz de Mueller desse dispositivo, em função do nível de cinza, no capítulo 4. De posse dessa matriz, derivamos e analisamos as propriedades polarimétricas do LCD.

- **Parte II**

No capítulo 5, apresentamos uma revisão de elementos fundamentais da mecânica quântica para sistemas de dois níveis (qubits), tendo como grau de liberdade a polarização de um fóton. Definimos estados puros e mistos e como eles são transformados através de operações quânticas. Em seguida, mostramos como essas operações podem ser determinadas através da tomografia de processos. No capítulo 6, nós implementamos a tomografia de processos para o LCD e obtemos a matriz correspondente em função do nível de cinza. De posse dessa matriz, derivamos uma expressão geral para a matriz de processo de um SLM, dispositivo que consiste de um arranjo do LCD entre placas de onda. Esta expressão nos permitirá implementar operações

programáveis sobre os estados de polarização da luz em função da configuração das placas de onda e da tensão no LCD. Por fim, usamos também esta expressão para quantificar a fidelidade da operação real implementada pelo SLM com uma operação unitária ideal de interesse em protocolos de informação quântica.

No capítulo 7 apresentamos as conclusões da dissertação que conta ainda com dois apêndices onde detalhamos os cálculos para determinação da matriz de Mueller (apêndice A) e de processos (apêndice B).

## Parte I

### Matriz de Mueller de um display de cristal líquido

## 2 Polarização da luz

Neste capítulo, faremos uma introdução à óptica de polarização da luz que será necessária para a construção do trabalho. Vamos apresentar os estados de polarização e sua representação através dos vetores de Jones e Stokes. Finalmente, descreveremos as transformações sobre esses estados através do formalismo da matriz de Mueller e mostraremos sua construção para um elemento óptico arbitrário.

### 2.1 Equação de onda

As equações de Maxwell no vácuo consistem em um conjunto de quatro formulações que caracterizam o comportamento dos campos elétricos e magnéticos. Essas formulações incluem:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(r, t) = -\frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(r, t) = 0, \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(r, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t}, \quad (2.1d)$$

onde  $\vec{E}(r, t)$  e  $\vec{B}(r, t)$  são os campos elétrico e magnético, respectivamente, na posição  $r$  e no tempo  $t$  e as constantes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são a permissividade elétrica do vácuo e a permeabilidade magnética no vácuo, respectivamente.

Visando a representação de uma equação que descreva a propagação de uma onda eletromagnética, aplicaremos inicialmente o rotacional na equação (2.1b) e utilizando a equação (2.1d), obteremos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}(r, t) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(r, t)}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Aplicando a identidade  $[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]] = \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] - \nabla^2 \vec{A}$  na equação (2.2) e sabendo que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r, t) = 0$ , temos como resultado da equação diferencial parcial para a componente elétrica  $\vec{E}$  que pode ser escrita da seguinte forma,

$$\nabla^2 \vec{E}(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(r, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

onde  $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . A equação (2.3) é conhecida como equação de onda por descrever uma onda se propagando no espaço e no tempo. A constante  $v$  é a velocidade de sua propagação.

## 2.2 Estado de polarização da luz

A partir das equações de Maxwell aplicadas ao espaço livre de cargas e correntes, temos as equações de onda para o campo elétrico e magnético, os quais oscilam ortogonalmente entre si no espaço e no tempo [1]. O campo elétrico ( $\vec{E}$ ) de uma onda transversal e monocromática se propagando na direção do eixo  $z$  pode ser descrito como [2]:

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y}, \quad (2.4)$$

onde

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x), \quad (2.5)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y). \quad (2.6)$$

$E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são as amplitudes dos campos elétricos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $\tau = \omega t - kz$  é chamado de propagador e  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são as fases. Se  $\delta_y > \delta_x$ ,  $\vec{E}_y$  estará retardando em relação a  $\vec{E}_x$  e reciprocamente. A partir desta construção poderemos parametrizar as equações para as polarizações lineares, circulares e elípticas que serão descritas detalhadamente a seguir.

### Polarização linear

A polarização linear ocorre quando a diferença de fase  $\delta = \delta_y - \delta_x$  das componentes do campo elétrico nas equações (2.5) e (2.6) for zero ou um múltiplo inteiro de  $\pm\pi$  elas estão em fase e, neste caso, a equação pode ser escrita como

$$\vec{E} = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}) \cos \tau. \quad (2.7)$$

A amplitude resultante da onda é igual a  $\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y}$ , sendo assim, está linearmente polarizada.

Consideraremos agora um caso importante em que uma das componentes é igual a zero, por exemplo, quando  $\vec{E}_{0y} = 0$ . Com isto, o vetor campo elétrico irá parametrizar uma curva no plano  $xy$  ( $z = 0$ ) de acordo com

$$\vec{E}_x(0, t) = E_{0x} \cos(\tau)\hat{x} \quad (2.8)$$

e

$$\vec{E}_y(0, t) = 0. \quad (2.9)$$

Com auxílio das equações (2.8) e (2.9) podemos notar que ocorre a parametrização de um seguimento de reta no eixo  $x$ . A cada instante de tempo, o módulo do campo elétrico  $\vec{E}$  varia na direção do eixo  $x$ , portanto, temos uma polarização linear nesta direção. Se

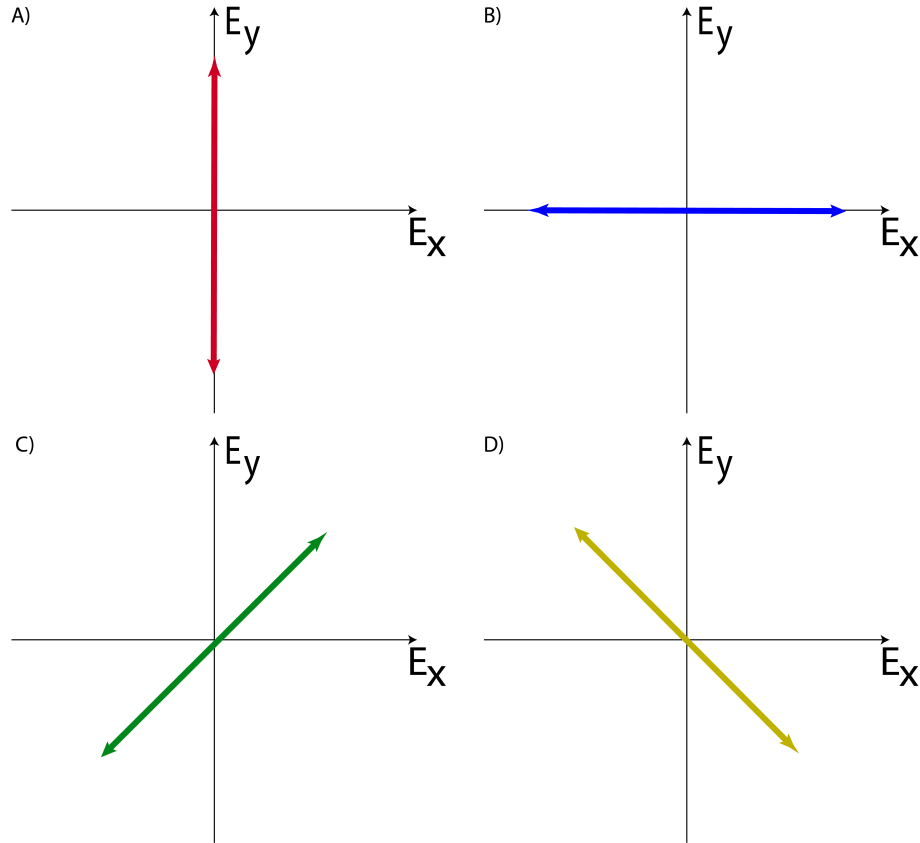


Figura 1 – A) Polarização vertical, B) Polarização horizontal, C) Polarização  $+45^\circ$  e D) Polarização  $-45^\circ$ .

$\vec{E}_{0x} = 0$ , observaríamos uma situação análoga à anteriormente descrita, entretanto, nesta circunstância, a polarização linear seria ao longo da direção  $y$ . A figura 1A e 1B ilustram as polarizações lineares ao longo do eixo  $y$  (vertical) e ao longo do eixo  $x$  (horizontal), respectivamente.

Outro caso importante de se ressaltar é quando as componentes  $\vec{E}_x$  e  $\vec{E}_y$  não são nulas. Como resultado podemos escrever as equações para o campo como

$$\vec{E}_x(0, t) = E_{0x} \cos(\omega t + \delta_x) \hat{x} \quad (2.10)$$

e

$$\vec{E}_y(0, t) = E_{0y} \cos(\omega t + \delta_y) \hat{y}. \quad (2.11)$$

Quando  $\delta_x = \delta_y$  as componentes estarão em fase. Com isto, as equações (2.10) e (2.11) parametrizam o vetor campo elétrico no plano  $z = 0$ . Ressaltando que em todos os instantes as componentes são proporcionais, ou seja,

$$E_y(0, t) = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x(0, t). \quad (2.12)$$

Assim, obtemos a parametrização de uma reta que passa pela origem. Nesse contexto, o ângulo de inclinação em relação ao eixo  $x$  é dado por  $\theta = \tan^{-1}(E_{0y}/E_{0x})$ . Dessa forma,

essa polarização é denominada polarização linear na direção  $\theta$ . Nas figuras 1C e 1D podemos ver a representação da polarização  $\theta = +45^\circ$  e  $\theta = -45^\circ$ , respectivamente.

Ao longo do trabalho, representaremos as polarizações lineares horizontal, vertical,  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$  como  $H$ ,  $V$ ,  $P$  e  $M$ , respectivamente.

## Polarização circular

Um caso interessante surge quando ambas as componentes do campo possuem amplitudes iguais, ou seja,  $E_{0y} = E_{0x} = E_0$ , e, além disso, apresentam uma diferença de fase de  $\delta = -\pi/2 + n\pi$ , em que  $n$  é um número inteiro. As componentes serão dadas por

$$\vec{E}_x(z, t) = E_0 \cos(\tau + \delta_x)\hat{x} \quad (2.13)$$

e

$$\vec{E}_y(z, t) = E_0 \cos(\tau + \delta_y)\hat{y}. \quad (2.14)$$

Supondo uma diferença de fase de  $-\pi/2$  podemos usar a seguinte relação trigonométrica  $\cos(a - \pi/2) = \sin a$ ; sendo assim temos

$$\vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \sin(\tau + \delta_x)\hat{y}. \quad (2.15)$$

A onda resultante pode ser descrita como

$$\vec{E} = E_0[\cos(\tau + \delta_x)\hat{x} + \sin(\tau + \delta_x)\hat{y}]. \quad (2.16)$$

Neste caso a amplitude da onda é constante, mas a direção  $\vec{E}$  varia com o tempo de acordo com

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{E_0 \sin(\tau + \delta_x)}{E_0 \cos(\tau + \delta_x)} \right] = \tau + \delta_x. \quad (2.17)$$

Considerando que  $\theta$  representa o ângulo formado entre a direção do vetor  $\vec{E}$  e o eixo  $x$ , e por se tratar de uma equação linear, podemos afirmar que a direção varia linearmente com o tempo.

Se considerarmos agora  $\delta_x = \delta_y - \frac{\pi}{2}$ , teremos que  $\theta = -\tau + \delta_x$ . Dessa forma, apresentamos dois conjuntos de equações paramétricas para circunferências. No primeiro conjunto, a extremidade do vetor campo elétrico realiza uma rotação periódica no sentido horário, conhecida como polarização circular à direita. No segundo conjunto, a rotação ocorre no sentido anti-horário, conhecida como polarização circular à esquerda. A figura 2 ilustra estas polarizações que serão representadas ao longo do trabalho como  $R$  e  $L$ , respectivamente.

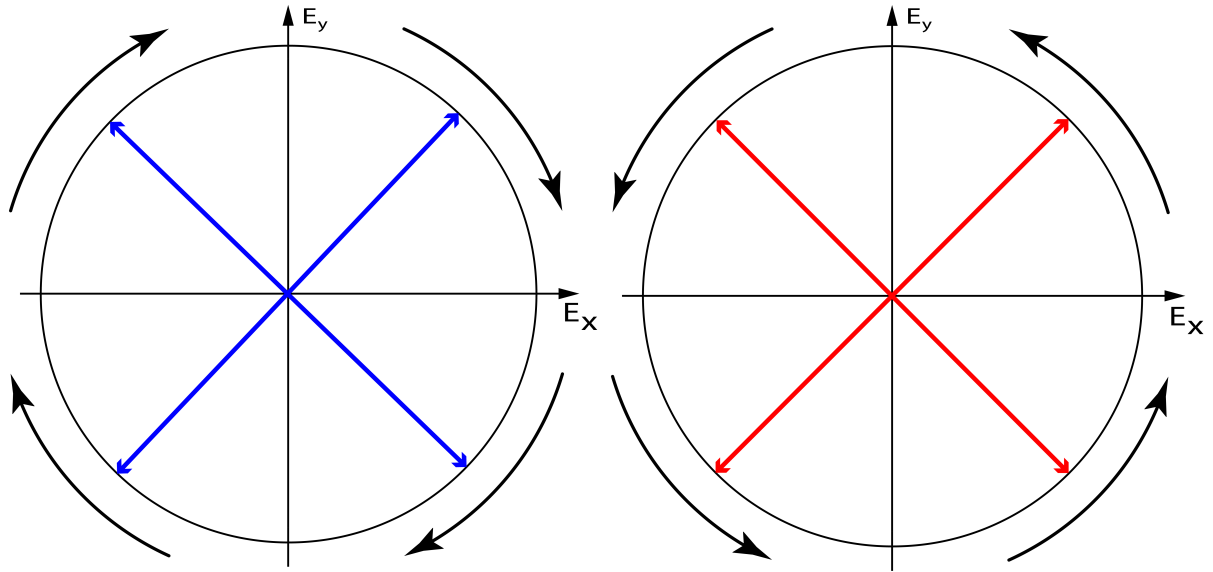


Figura 2 – Polarização circular à direita e polarização circular à esquerda.

### Polarização elíptica

A polarização circular e a polarização linear descritas anteriormente podem ser consideradas casos específicos da polarização elíptica, onde a resultante do campo elétrico, além de variar a amplitude, rotaciona devido a uma diferença de fase entre os campos  $E_x$  e  $E_y$ . Em alguns casos o vetor campo elétrico irá traçar uma elipse no plano fixo perpendicular ao vetor de propagação  $\vec{k}$ . Podemos então visualizar esta descrição a partir das equações (2.5) e (2.6). Os vetores gerados representam uma série de pontos no espaço, e a curva resultante pode ser derivada deles. No entanto, para realizar esse processo, é necessário reescrever estas equações como

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\tau + \delta_x), \quad (2.18)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\tau + \delta_y). \quad (2.19)$$

Multiplicando a equação (2.18) por  $\sin \delta_y$ , a equação (2.19) por  $\sin \delta_x$  e subtraindo-as, teremos

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin(\delta_y - \delta_x). \quad (2.20)$$

Agora, multiplicando a equação (2.18) por  $\cos \delta_y$ , a equação (2.19) por  $\cos \delta_x$  e subtraindo-as, analogamente teremos

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin(\delta_y - \delta_x). \quad (2.21)$$

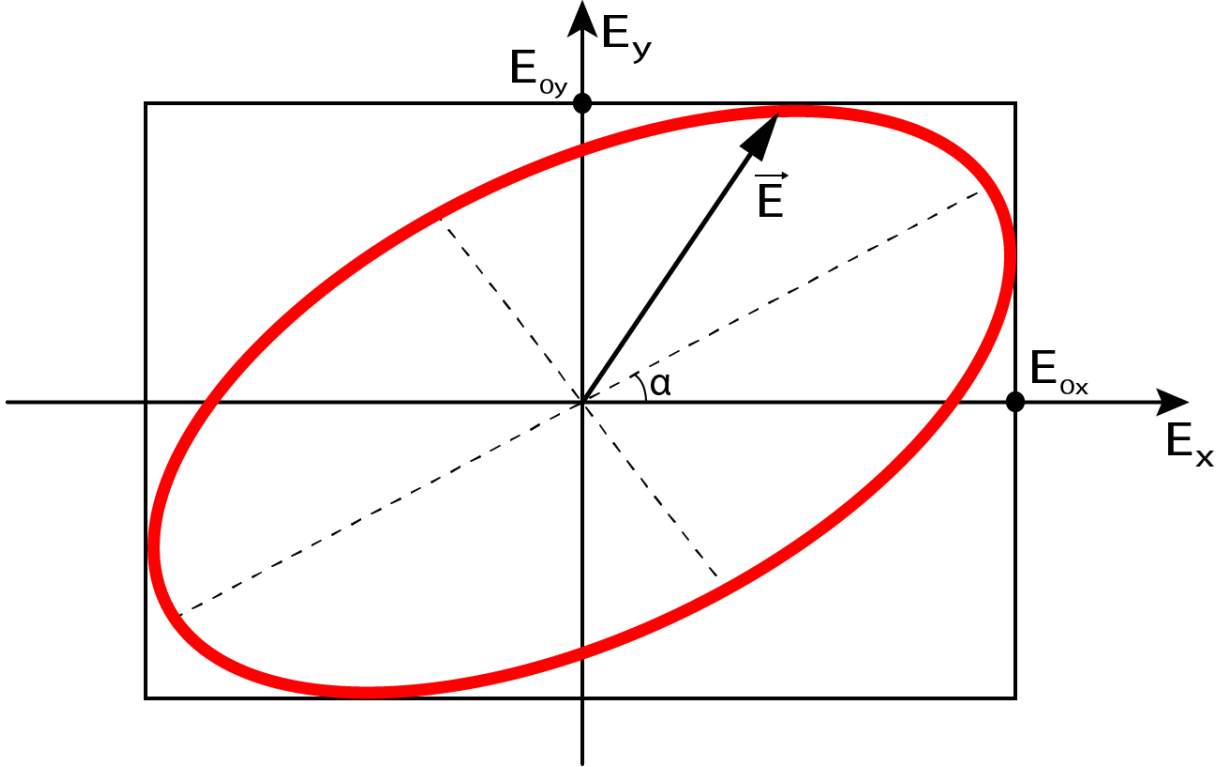


Figura 3 – Representação da elipse de polarização.

Elevando a equação (2.20) e (2.21) ao quadrado e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \sin^2 \delta_y + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \sin^2 \delta_x + 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x + \\ + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \cos^2 \delta_y + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} \cos^2 \delta_x + 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x \\ = \cos^2 \tau \sin^2 (\delta_y - \delta_x) + \sin^2 \tau \sin^2 (\delta_y - \delta_x), \end{aligned} \quad (2.22)$$

que pode ser reescrita, como

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (2.23)$$

em que  $\delta = \delta_y - \delta_x$ . Sendo assim, a equação (2.23) indica que, para um valor fixo de  $z$ , o campo elétrico forma uma elipse no plano  $xy$ . As formas específicas de polarização linear e circular, previamente abordadas, surgem como casos particulares da equação (2.23), para distintos valores dos parâmetros  $\delta$ ,  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$ .

A figura 3 representa um estado de polarização elíptica, onde o eixo vertical corresponde à componente  $y$  do campo elétrico  $\vec{E}$ , enquanto o eixo horizontal corresponde à componente  $x$ .

Na figura 4, observamos a representação do vetor campo elétrico  $\vec{E}(z, t)$  resultante de cada uma das polarizações mencionadas anteriormente. Na primeira linha, é apresentada a variação do campo elétrico de uma luz polarizada horizontal e verticalmente. Na segunda

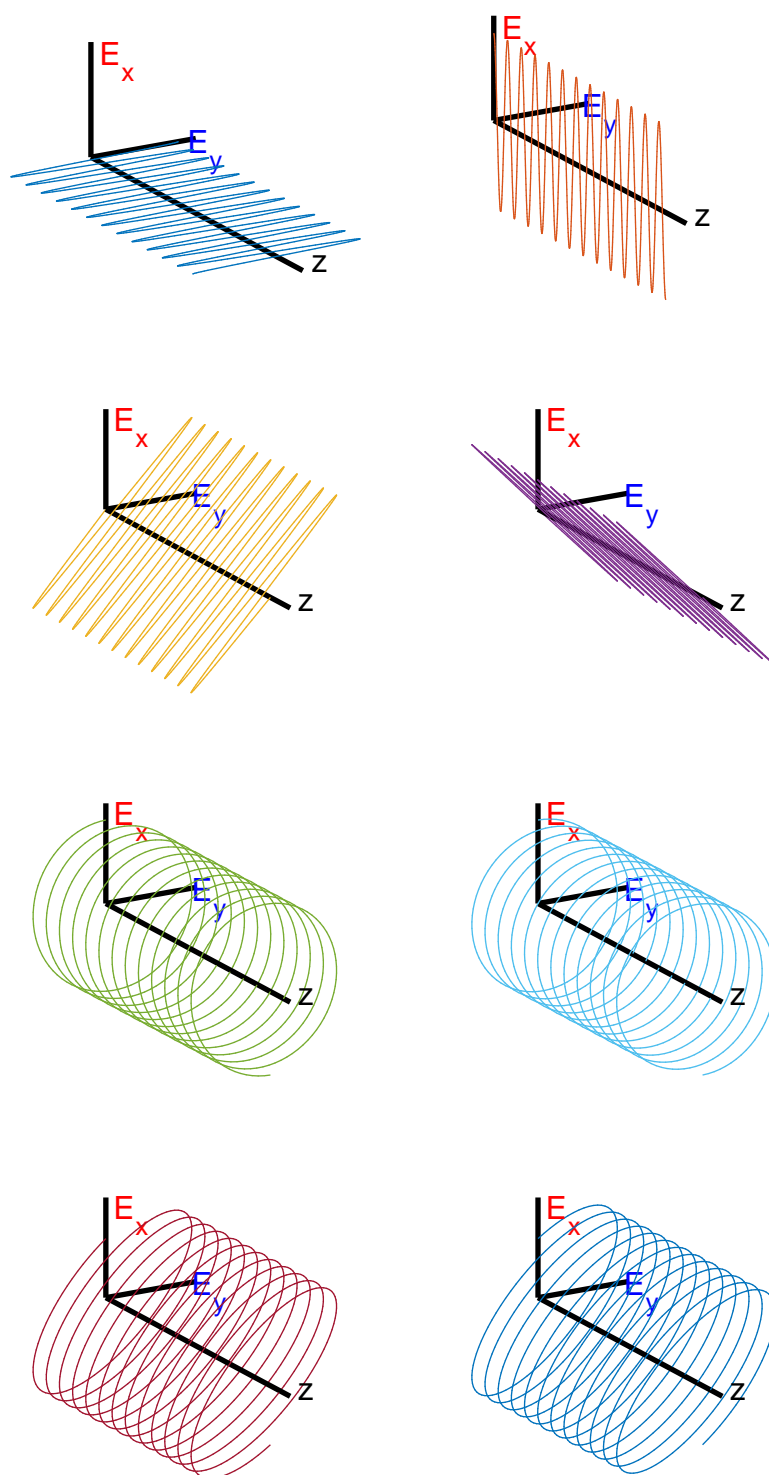


Figura 4 – Representação da propagação do vetor campo elétrico de uma luz nas polarizações horizontal, vertical (primeira linha),  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$  (segunda linha), circular à esquerda e à direita (terceira linha), elíptica à esquerda e à direita (quarta linha).

linha, são demonstrados os comportamentos da luz linearmente polarizada com ângulos de  $45^\circ$  e  $-45^\circ$ . A terceira linha representa a polarização circular, tanto para a esquerda quanto para a direita. Por fim, a última linha exibe a polarização elíptica variando para a esquerda e para a direita.

## 2.3 Vetores de Jones

Os estados de polarização descritos na seção anterior podem ser representados como

$$E_x(z, t) = E_{0x}e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}, \quad (2.24)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y}e^{i(kz - \omega t + \delta_y)}, \quad (2.25)$$

onde  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são quantidades reais. Suprimindo o fator de propagação  $kz - \omega t$ , o campo elétrico pode ser representado como componentes de um vetor coluna [3],

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

conhecido como vetor de Jones, que descreve a luz com polarização elíptica. Essa representação nos permite descrever os estados de polarização que serão abordados neste trabalho. Ao normalizarmos esses estados para uma intensidade unitária, obtemos os seguintes vetores de Jones para as polarizações  $\{H, V, P, M, R, L\}$ :

$$E_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, E_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, E_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

As matrizes de Jones são usadas para descrever a mudança de polarização de um estado que atravessa um dispositivo óptico linear. Elas consistem em matrizes  $2 \times 2$  que podem transformar um vetor incidente em outro vetor. Esta transformação pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

ou, equivalentemente,  $E' = JE$ , onde a matriz de Jones  $J$  é definida como

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Com isto podemos representar as matrizes de Jones de rotação, polarização e retardo, que serão utilizadas posteriormente no trabalho.

## 2.4 Vetores de Stokes

Na seção 2.2, foi desenvolvida a equação de uma onda com polarização elíptica se propagando na direção do eixo  $z$ . Partiremos da equação (2.23) para determinar os parâmetros de Stokes. Se considerarmos uma luz monocromática, onde a amplitude e a fase são constantes ao longo do tempo, obtemos

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - 2\frac{E_x(t)}{E_{0x}}\frac{E_y(t)}{E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta, \quad (2.30)$$

em que  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  e  $\delta$  são constantes, e  $E_x$  e  $E_y$  apresentam dependência temporal, conforme evidenciado nas equações (2.5) e (2.6). Para expressar a equação (2.30) em termos do campo elétrico, é necessário realizar uma média ao longo de um intervalo de tempo infinito. Dada a periodicidade de  $E_x$  e  $E_y$ , é suficiente considerar apenas uma média ao longo de um único período de oscilação [4]. Essa média temporal é representada pelo símbolo  $\langle \dots \rangle$ . Agora aplicamos a média temporal na equação (2.30),

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{2\langle E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta, \quad (2.31)$$

onde temos que  $\langle E_i(t)E_j(t) \rangle = T^{-1} \int_0^T E_i(t)E_j(t)dt$ . Multiplicando a equação (2.31) por  $4E_{0x}^2E_{0y}^2$ , obtemos

$$4E_{0y}^2\langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2\langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0x}E_{0y}\langle E_x(t)E_y(t) \rangle\cos\delta = 4E_{0x}^2E_{0y}^2\sin^2\delta. \quad (2.32)$$

Calculando a média temporal dos elementos da equação (2.32), teremos

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}^2, \quad (2.33)$$

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0y}^2, \quad (2.34)$$

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}E_{0y}\cos\delta. \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.33), (2.34) e (2.35) em (2.32), encontramos

$$2E_{0y}^2E_{0x}^2 + 2E_{0x}^2E_{0y}^2 - (2E_{0x}E_{0y}\cos\delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y}\sin\delta)^2. \quad (2.36)$$

Somando e subtraindo a quantidade  $4E_{0x}^4 + 4E_{0y}^4$  na equação (2.36), realizando a técnica de completar quadrados, reescrevemos a equação como:

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x}E_{0y}\cos\delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y}\sin\delta)^2. \quad (2.37)$$

As quantidades presentes na equação (2.37) são denominadas parâmetros de Stokes e são representadas como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (2.38a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (2.38b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y}\cos\delta, \quad (2.38c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y}\sin\delta. \quad (2.38d)$$

Desta forma, podemos representar o vetor de Stokes como:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

A representação do estado de polarização da luz pelo vetor de Stokes é mais geral que a representação de Jones. Esta última descreve apenas estados de luz polarizada, enquanto o formalismo de Stokes permite descrever a luz polarizada, parcialmente polarizada e não polarizada.

Utilizando as equações (2.38) e (2.39) podemos representar os vetores de Stokes dos estados de polarização do conjunto  $\{H, V, P, M, R, L\}$  como

$$S_H = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \quad (2.40a)$$

$$S_V = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T, \quad (2.40b)$$

$$S_P = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \quad (2.40c)$$

$$S_M = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad (2.40d)$$

$$S_R = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \quad (2.40e)$$

$$S_L = [1 \ 0 \ 0 \ -1]^T, \quad (2.40f)$$

onde  $T$  denota a operação de transposição do vetor. Este conjunto de polarizações será utilizado ao longo do trabalho, principalmente para a caracterização da matriz de Mueller do LCD.

## 2.5 Matriz de Mueller

A matriz de Mueller (MM) é a forma mais geral de representar transformações polarimétricas que ocorrem quando um feixe de luz interage com um meio óptico. Em contraponto aos cálculos de Jones, a MM é capaz de detectar diversos efeitos causados pelas transformações, tais como diatenuação, retardância e despolarização [5], que serão discutidos mais adiante.

Conforme discutido anteriormente, é possível descrever o estado de polarização de um feixe de luz utilizando o vetor de Stokes  $S$  [veja as equações (2.38) e (2.39)]. Quando este feixe interage com um elemento óptico, ele pode ser transformado e o feixe de saída será caracterizado por um novo vetor  $S'$ . Esta transformação é dada por

$$S' = MS, \quad (2.41)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

é a matriz de Mueller  $M$  do elemento óptico, caracterizado pelos elementos reais  $m_{ij}$ .

Nesta seção, exploraremos a representação de matrizes de Mueller de dispositivos ópticos lineares: inicialmente consideraremos dispositivos não despolarizantes e, posteriormente, um formalismo geral para obtenção da matriz de Mueller de qualquer dispositivo óptico. Finalmente, discutiremos as propriedades polarimétricas destas matrizes.

### 2.5.1 Matriz de Mueller de placas de onda e polarizadores

Placas de ondas são dispositivos construídos com materiais birrefringentes capazes de modificar o estado de polarização da luz incidente. Quando um raio de luz incide sobre um material birrefringente, ocorre a decomposição desse raio em dois: o raio no eixo ordinário ( $\hat{o}$ ) e o no eixo extraordinário ( $\hat{e}$ ). Na esta figura 5 está representado um feixe de luz incidente em um material birrefringente que o separa em dois raios,  $\hat{o}$  e  $\hat{e}$ . Nesse contexto, o índice de refração  $n_e$  refere-se ao raio extraordinário, enquanto o índice de refração  $n_o$  está associado ao raio ordinário [6].

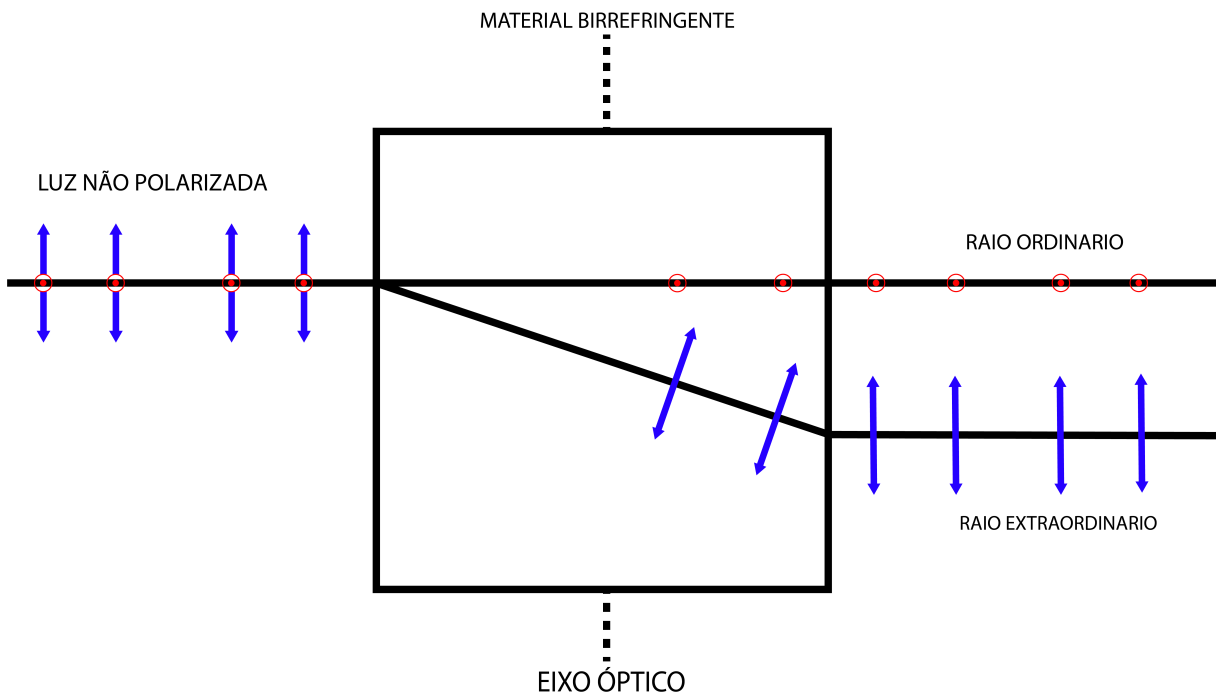


Figura 5 – Feixe de luz não polarizada incidindo em um material birrefringente, resultando na decomposição do feixe em dois raios distintos: o raio ordinário e o raio extraordinário.

Ao considerar uma luz incidente normal ao plano formado pelos eixos ordinário e extraordinário, a componente de polarização ao longo do eixo  $\hat{e}$  propaga-se com velocidade  $v = c/n_e$ , e a componente que se propaga em  $\hat{o}$  terá velocidade  $v = c/n_o$ , onde  $c$  é a velocidade da luz. Dependendo da construção da placa, da espessura utilizada, podemos gerar uma defasagem entre as componentes equivalente a uma diferença de caminho óptico de  $\lambda/2$  ou  $\lambda/4$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz.

Em meios ópticos lineares não despolarizantes, ou seja, meios que preservam o grau de polarização da luz, estabelece-se uma relação direta entre uma matriz de Mueller real  $4 \times 4$  e uma matriz complexa de Jones  $2 \times 2$ , considerando um fator de fase arbitrário. Podemos representar esta relação como [7]:

$$M = T(J \otimes J^*)T^{-1}. \quad (2.43)$$

O símbolo  $\otimes$  utilizado representa o produto tensorial, e a matriz de transformação  $T$  é expressa por <sup>1</sup>

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Compreendida esta transformação, torna-se possível aplicá-la às matrizes de Jones das placas de ondas, viabilizando a reescrita das matrizes de Mueller correspondentes a tais placas. A matriz de Jones de uma placa de onda ou placa retardadora, pode ser representada como [8]

$$J = \begin{bmatrix} e^{i\delta} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & (e^{i\delta} - 1) \sin \theta \cos \theta \\ (e^{i\delta} - 1) \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta + e^{i\delta} \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

em que  $\theta$  é o ângulo de rotação do eixo rápido e  $\delta$  é o retardo. Substituindo as equações (2.44) e (2.45) em (2.43), teremos então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) \cos(\delta) & (1 - \cos(\delta)) \sin(2\theta) \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \sin(\delta) \\ 0 & (1 - \cos(\delta)) \sin(2\theta) \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) \cos \delta + \sin^2(2\theta) & \cos(2\theta) \sin(\delta) \\ 0 & \sin(2\theta) \sin(\delta) & -\cos(2\theta) \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

### Placa de meia onda

Uma placa retardadora que introduz uma fase relativa de  $180^\circ$  (ou  $\pi$ ) entre as componentes do eixo  $\hat{o}$  e do eixo  $\hat{e}$  é chamada de placa de meia onda [9], conhecida pela

<sup>1</sup> Note que as linhas desta matriz correspondem à identidade e aos operadores de Pauli em um arranjo vetorial. Estes operadores estão definidos na equação (5.4).

sigla em inglês HWP (half-wave plate). Se fizermos  $\delta = \pi$  na equação (2.46), obteremos a MM para a HWP dependente de  $\theta$ , conforme apresentado na matriz abaixo:

$$M_{\text{HWP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta) & 2 \sin(2\theta) \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 2 \sin(2\theta) \cos(2\theta) & -\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

### Placa de quarto de onda

A placa de quarto de onda, conhecida pela sigla em inglês QWP (quarter-wave plate), é um elemento óptico que introduz uma fase relativa de  $90^\circ$  (ou  $\pi/2$ ) entre as componentes ortogonais  $\hat{o}$  e  $\hat{e}$  [9]. Substituindo  $\delta = \pi/2$  na equação (2.46), obtemos a MM para a QWP, que depende de  $\theta$ :

$$M_{\text{QWP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta) & \sin(2\theta) \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) \cos(2\theta) & \sin^2(2\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

### Polarizadores

Um polarizador é um dispositivo óptico que transmite ondas em uma direção de polarização específica, absorvendo campos elétricos que estejam em outras direções. Após atravessar um polarizador, a luz não polarizada emerge polarizada na direção correspondente ao alinhamento desse dispositivo, como representado na figura 6. A matriz de Jones de um polarizador linear é dada por [11]:

$$J_{\text{POL}} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Ao substituir as equações (2.49) e (2.44) na equação (2.43), conseguimos representar a matriz de Mueller deste polarizador linear como:

$$M_{\text{POL}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) & \sin(2\theta) \cos(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \sin(2\theta) & \sin^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

onde  $\theta$  é o seu ângulo de orientação. Se  $\theta = 0$ , o polarizador estará orientado ao longo do eixo horizontal; se  $\theta = \pi/2$ , estará orientado ao longo do eixo vertical.<sup>2</sup> Qualquer ângulo no intervalo  $0 < \theta < \pi/2$  indicará uma orientação intermediária.

<sup>2</sup> A definição de vertical e horizontal depende do sistema de coordenadas utilizado no laboratório.

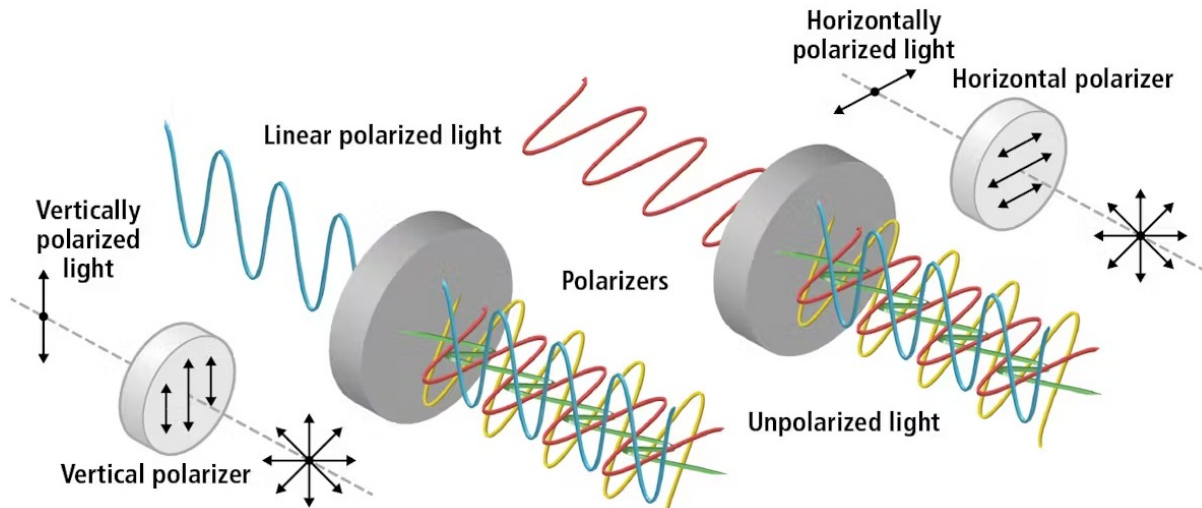


Figura 6 – Representação da incidência de luz não polarizada em polarizadores verticais e horizontais resultando na polarização da luz de saída na direção correspondente ao dispositivo óptico utilizado. Fonte: Retirado de [10].

### 2.5.2 Construção da matriz de Mueller de elementos ópticos arbitrários

A matriz de Mueller de um elemento óptico representada pela equação (2.42) contém todos os parâmetros necessários para expressar as componentes do vetor de Stokes de saída,  $S'$ , como uma combinação linear das componentes do vetor de entrada  $S$ . Utilizando as equações (2.41) e (2.42), teremos

$$S'_0 = m_{11}S_0 + m_{12}S_1 + m_{13}S_2 + m_{14}S_3, \quad (2.51a)$$

$$S'_1 = m_{21}S_0 + m_{22}S_1 + m_{23}S_2 + m_{24}S_3, \quad (2.51b)$$

$$S'_2 = m_{31}S_0 + m_{32}S_1 + m_{33}S_2 + m_{34}S_3, \quad (2.51c)$$

$$S'_3 = m_{41}S_0 + m_{42}S_1 + m_{43}S_2 + m_{44}S_3. \quad (2.51d)$$

Na construção da MM de um dispositivo óptico *arbitrário*, podemos utilizar o conjunto de seis vetores de Stokes descritos nas equações (2.40) como polarizações de entrada ( $S_{in}$ ). Fazendo  $S_{out} = MS_{in}$  para cada estado de entrada, obteremos um sistema com 24 equações lineares e 16 incógnitas  $\{m_{ij}\}$ . Ao resolvê-lo, temos como resultado a matriz de Mueller do dispositivo. A resolução deste sistema está detalhada no apêndice A e a matriz de Mueller resultante pode ser representada como

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} HH + HV + VH + VV & HH + HV - VH - VV & PH + PV - MH - MV & RH + RV - LH - LV \\ HH - HV + VH - VV & HH - HV - VH + VV & PH - PV - MH + MV & RH - RV - LH + LV \\ HP - HM + VP - VM & HP - HM - VP + VM & PP - PM - MP + MM & RP - RM - LP + LM \\ HR - HL + VR - VL & HR - HL - VR + VL & PR - PL - MR + ML & LL - RL - LR + RR \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Nesta matriz, os diferentes elementos  $AB \in \{H, V, P, M, R, L\}$ , representam a intensidade do feixe de luz, sendo  $A$  a polarização do feixe de entrada e  $B$  a sua projeção. Por exemplo, a combinação  $HV$  representa a intensidade quando o feixe de entrada está polarizado em

$H$  sendo medido em  $V$ . No capítulo 4, utilizaremos esta equação para obter a matriz de Mueller de um LCD.

### 2.5.3 Extraindo propriedades polarimétricas da matriz de Mueller

Quando um feixe de luz interage com uma amostra, seu estado de polarização pode ser modificado de diversas maneiras. Estas modificações estão codificadas na matriz de Mueller desta amostra, em propriedades conhecidas como diatenuação, polarizância, retardância e despolarização, as quais podem ser quantificadas. Sucintamente, o significado de cada uma delas está descrito no quadro abaixo e as suas definições serão apresentadas no capítulo 4.

#### Propriedades identificadas a partir da matriz de Mueller

A MM de um elemento óptico possui algumas propriedades que podem ser observadas a partir dos elementos da matriz; são eles:

- **Diatenuação:** Alteração na intensidade de uma componente de polarização da luz em relação à sua contraparte ortogonal.
- **Polarizância:** Descreve a capacidade do elemento óptico de polarizar a porção não polarizada do feixe de luz de entrada.
- **Retardância:** Refere-se à medida da alteração na fase da luz polarizada ao passar por um meio óptico retardante.
- **Despolarização:** Indica a redução do grau de polarização da luz incidente.

Para extrair estas propriedades é conveniente normalizar a matriz de Mueller da equação (2.42) dividindo todos os elementos por  $m_{11}$ . Assim, teremos uma nova matriz com elementos  $M_{ij} = m_{ij}/m_{11} \in [-1, 1]$ , dada por:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

As cores demarcadas nesta matriz indicam a localização dos elementos da MM relacionados com as características descritas no quadro acima <sup>3</sup>. A cor cinza refere-se à atenuação, os elementos em vermelho são analisados para verificar diatenuação, os elementos em verde são correspondentes à polarizância e os elementos da submatriz  $3 \times 3$  em amarelo

<sup>3</sup> A medida de despolarização depende de todos os elementos da matriz, sendo assim, não está representada apenas por uma cor na equação 2.53. Na seção 4.2.4 será analisada a despolarização utilizando a matriz de Mueller do dispositivo de estudo.

---

são elementos de retardância. Observe que as matrizes de Mueller das placas de meia onda e quarto de onda [equações (2.47) e (2.48)] possuem apenas elementos retardadores, enquanto a MM de polarização linear [equação (2.50)] possui elementos de diatenuação e polarizância.

## 3 Caracterização experimental de um *display* de cristal líquido

No capítulo anterior, mostramos a construção da matriz de Mueller de um dispositivo óptico qualquer a partir da medição de um conjunto específico de intensidades de um feixe de luz que incide sobre este dispositivo. Neste capítulo, apresentamos os resultados experimentais deste conjunto de medições para um *display* de cristal líquido, o que nos permitirá obter sua matriz de Mueller posteriormente.

### 3.1 O cristal líquido nemático torcido

Um *display* de cristal líquido (LCD, sigla do inglês *liquid crystal display*) é um dispositivo eletro-óptico que permite a manipulação das características fundamentais de um feixe de luz incidente, como amplitude, fase e polarização [12]. Em particular, vamos caracterizar um LCD de transmissão baseado em um microdisplay de cristal líquido nemático torcido, com uma resolução de  $1024 \times 768$  pixels (da empresa HOLOEYE, modelo LC-2012). As moléculas de cristal líquido nemático torcido apresentam uma tendência a uma orientação preferencial, a qual é alterada na presença de um campo elétrico [13]. Em outras palavras, ao controlarmos a orientação das moléculas do cristal líquido, podemos transformá-lo em lâminas de retardamento, moduladores ou interruptores de luz [14].

Visando criar um elemento óptico dinâmico, aplica-se uma tensão nas células do cristal líquido, causando uma alteração na orientação molecular. A figura 7, exemplifica o comportamento de um *display* de cristal líquido nemático torcido na presença de três tensões elétricas diferentes. Na imagem (A), com  $V_A = 0$ , as moléculas estão em sua condição inicial, com torção, porém não inclinadas. Ao aplicarmos uma tensão  $V_B$  maior que um determinado limite, as moléculas adquirem uma inclinação associada à tensão aplicada. Por último, na figura (C), ao aplicarmos uma tensão  $V_C$  muito maior que um limite determinado, grande parte das moléculas se alinha paralelamente à direção do campo elétrico.

### 3.2 Caracterização do LCD

A figura 8 ilustra a montagem experimental para a caracterização do LCD. Um laser de diodo emite um feixe circularmente polarizado de comprimento de onda 687 nm. Este feixe atravessa um gerador de estados de polarização (PSG, sigla do inglês, polarized

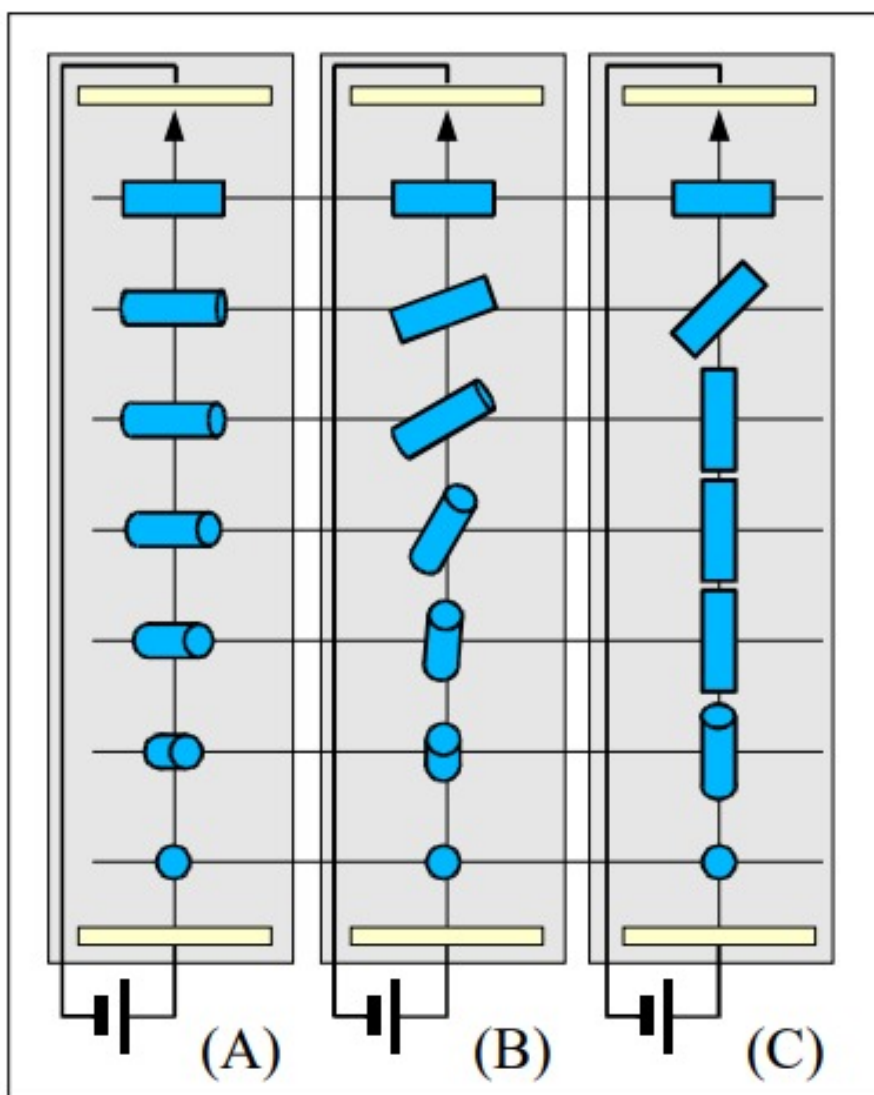


Figura 7 – Célula de cristal líquido com diferentes tensões aplicadas:  $V_A = 0$  tendo moléculas torcidas, mas alinhadas,  $V_B > V_{lim}$  com moléculas inclinadas e parcialmente alinhadas,  $V_C \gg V_{lim}$  com moléculas alinhadas na região central da célula. Fonte: Retirado de [15].

state generator), o LCD e um analisador de estados de polarização (PSA, sigla do inglês polarized state analyzer, tendo sua intensidade registrada por um medidor de potência ao final. O PSG é constituído pela combinação Polarizador+HWP+QWP e permite a preparação de qualquer estado de luz totalmente polarizada que interagirá com o LCD. Já o PSA é dado pela combinação QWP+HWP+Polarizador, e permite a medição da polarização da luz que emerge do LCD em qualquer direção.

Seja  $I_{AB}$  a intensidade registrada no detector, onde  $A$  e  $B$  são os estados de polarização definidos pelo PSG e PSA, respectivamente. Como foi visto no capítulo anterior, a matriz de Mueller de um dispositivo óptico qualquer pode ser obtida a partir de um conjunto de intensidades em que  $A, B \in \{H, V, P, M, R, L\}$  [veja equação (2.52)]. Portanto, este método requer a medição de 36 intensidades. No nosso caso, essas intensidades serão

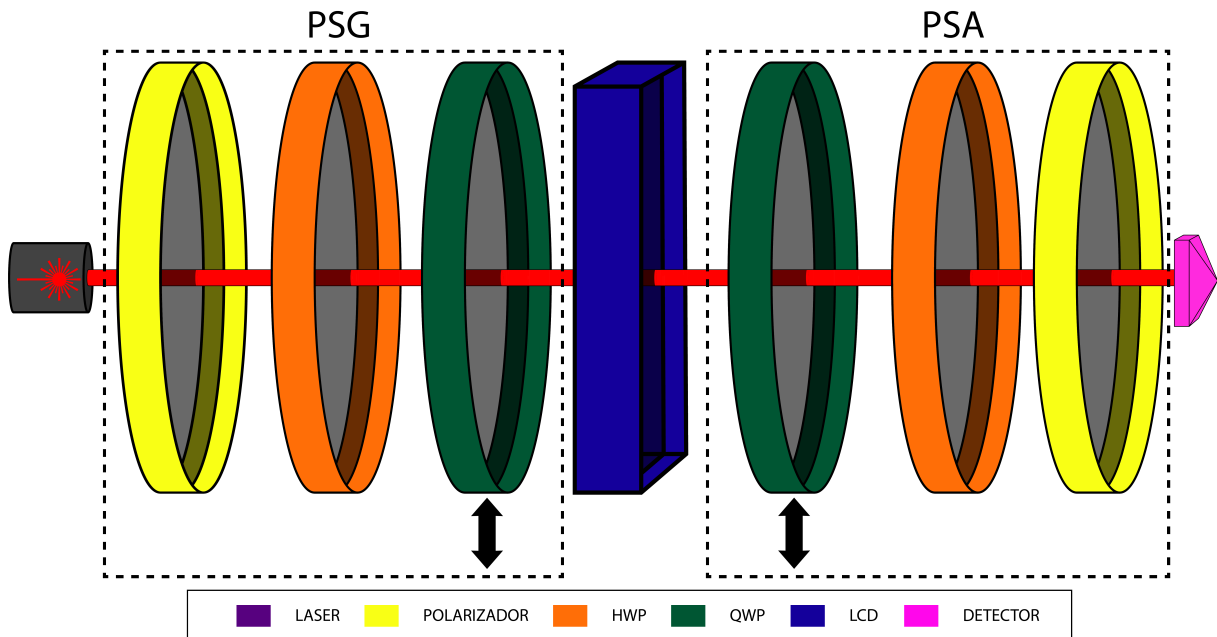


Figura 8 – Representação da montagem experimental para a caracterização do LCD. Um feixe de laser atravessa um gerador de estados de polarização (PSG), o SLM e um analisador de estados de polarização (PSA). Ao final, sua intensidade é registrada por um medidor de potência. As setas abaixo das placas QWP indicam que elas podem ser removidas para alterar as configurações do PSG e PSA. Veja o texto para maiores detalhes.

medidas em função dos 256 níveis de cinza do LCD, que correspondem aos níveis de tensão aplicadas aos pixels do display.

A sequência de 36 medições está esquematizada na tabela 1, onde  $(h_1, q_1)$  e  $(h_2, q_2)$  correspondem às placas (HWP, QWP) do PSG e PSA, respectivamente. Os ângulos dessas placas são referentes à direção vertical, que é a direção em que os polarizadores do PSG e PSA estão fixos; o símbolo “–” para as placas QWP indica configurações em que elas estão ausentes.

As 36 intensidades foram medidas variando o nível de cinza do LCD de 0 a 255, ou seja, para cada combinação  $\{A, B\}$ , foram realizadas 256 medições, que estão representadas na figura 9. A partir dessas intensidades, podemos obter as probabilidades em que cada estado de entrada no LCD,  $A \in \{H, V, P, M, R, L\}$ , é projetado em cada estado das bases ortonormais  $\{B, B^\perp\} = \{H, V\}, \{P, M\}, \{R, L\}$  na saída. Essas probabilidades são definidas como

$$P_{AB} = \frac{I_{AB}}{I_{AB} + I_{AB^\perp}}, \quad (3.1)$$

Os resultados obtidos são mostrados nos gráficos da figura 10, onde os estados de entrada são indicados no topo dos painéis e as bases de medição são indicadas na legenda.

Nos capítulos 4 e 6, utilizaremos estas probabilidades para obter a matriz de Mueller e a matriz de processo do LCD, respectivamente, em função do nível de cinza. Isso nos

n	PSG	PSA	$h_1$	$q_1$	$q_2$	$h_2$	n	PSG	PSA	$h_1$	$q_1$	$q_2$	$h_2$
1	V	V	0°	-	-	0°	19	R	P	0°	135°	-	22,5°
2	V	H	0°	-	-	45°	20	R	M	0°	135°	-	-22,5°
3	V	P	0°	-	-	22,5°	21	L	V	45°	135°	-	0°
4	V	M	0°	-	-	-22,5°	22	L	H	45°	135°	-	45°
5	H	V	45°	-	-	0°	23	L	P	45°	135°	-	22,5°
6	H	H	45°	-	-	45°	24	L	M	45°	135°	-	-22,5°
7	H	P	45°	-	-	22,5°	25	R	L	0°	135°	45°	0°
8	H	M	45°	-	-	-22,5°	26	R	R	0°	135°	45°	45°
9	P	V	22,5°	-	-	0°	27	L	L	45°	135°	45°	0°
10	P	H	22,5°	-	-	45°	28	L	R	45°	135°	45°	45°
11	P	P	22,5°	-	-	-22,5°	29	V	L	0°	-	45°	0°
12	P	M	22,5°	-	-	-22,5°	30	V	R	0°	-	45°	45°
13	M	V	-22,5°	-	-	0°	31	H	L	45°	-	45°	0°
14	M	H	-22,5°	-	-	45°	32	H	R	45°	-	45°	45°
15	M	P	-22,5°	-	-	22,5°	33	P	L	22,5°	-	45°	0°
16	M	M	-22,5°	-	-	-22,5°	34	P	R	22,5°	-	45°	45°
17	R	V	0°	135°	-	0°	35	M	L	-22,5°	-	45°	0°
18	R	H	0°	135°	-	45°	36	M	R	-22,5°	-	45°	45°

Tabela 1 – Sequência das 36 medições de intensidades  $I_{AB}$  com as configurações das placas de onda do PSG ( $h_1, q_1$ ) e PSA ( $h_2, q_2$ ), em relação à direção vertical.

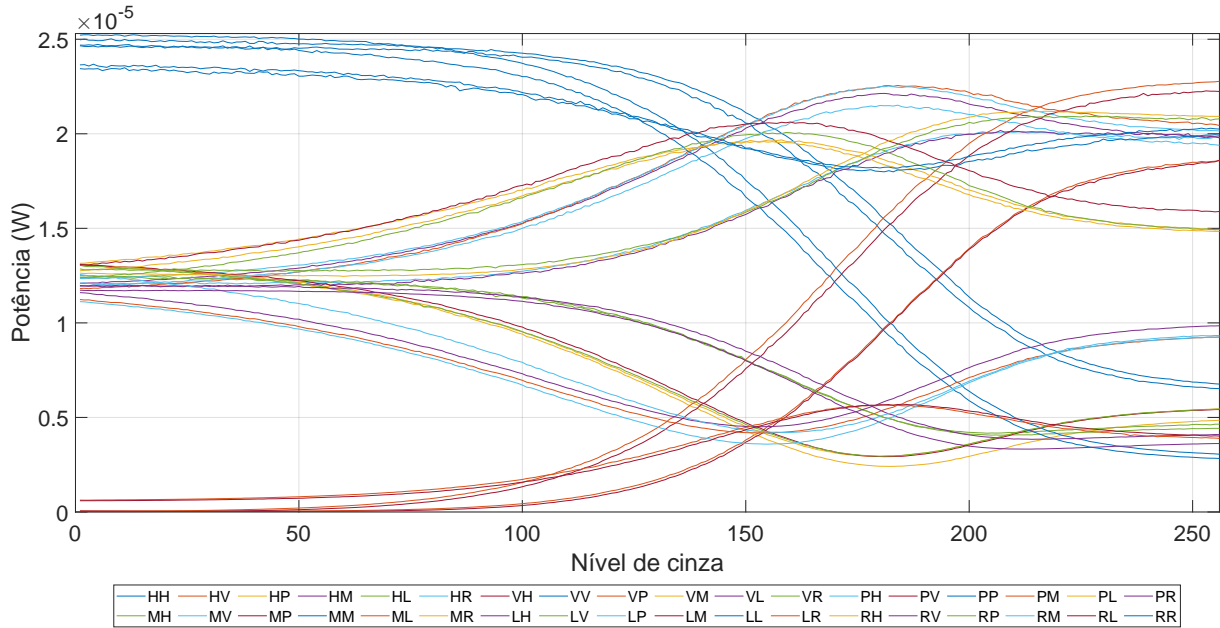


Figura 9 – Medições de potência ( $W$ )  $\times$  nível de cinza do LCD.

permitirá investigar sua atuação sobre os estados de polarização da luz.

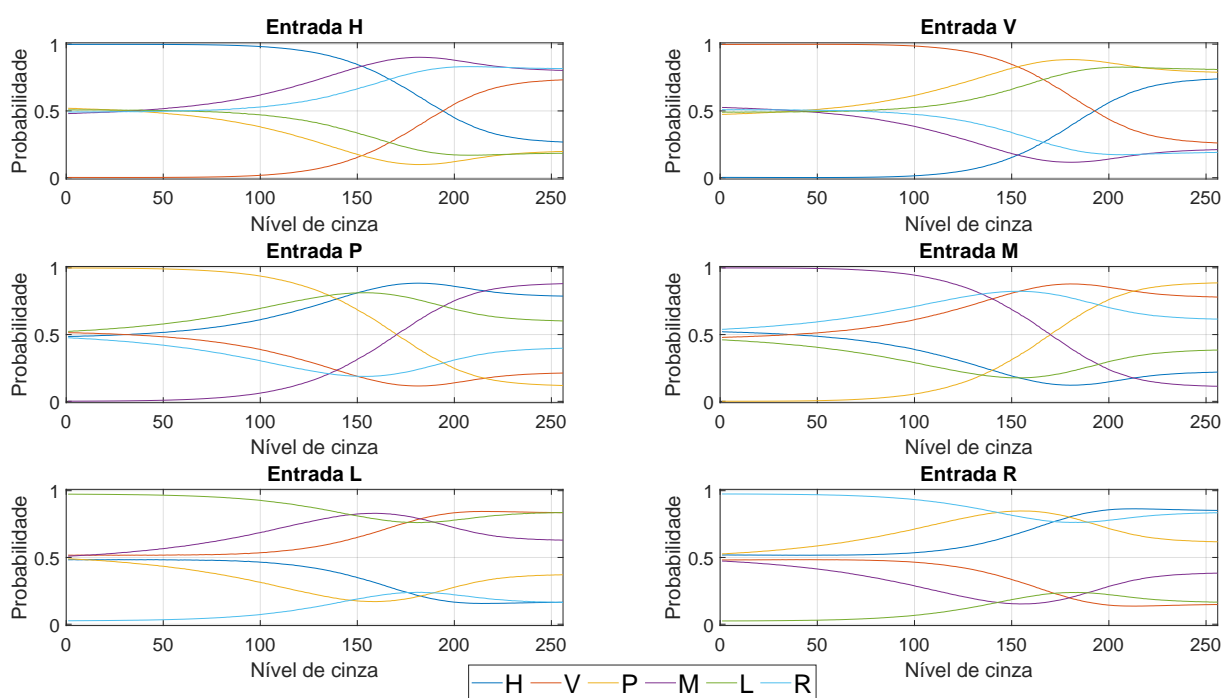


Figura 10 – Probabilidades em função do nível de cinza no SLM em que um estado entrada  $A$  é projetado em no estado  $B$  indicado na legenda.

## 4 Reconstrução da matriz de Mueller do *display* de cristal líquido

Neste capítulo, determinaremos a matriz de Mueller do LCD em função do nível de cinza utilizando os resultados mostrados no capítulo anterior. Na sequência, vamos derivar e discutir as propriedades polarimétricas do dispositivo.

### 4.1 A matriz de Mueller do LCD

Após realizar as medições e obter os resultados das intensidades para cada combinação de polarizações de entrada e saída, podemos substituir esses valores na equação (2.52). Com isto, teremos a matriz de Mueller do LCD para cada um dos 256 níveis de cinza. Para obter a versão normalizada dessa matriz [equação (2.53)] basta fazer  $m_{ij}/m_{11}$ ; no nosso caso, isso corresponde a dividir todos os elementos da MM pela soma de intensidades  $\frac{1}{2}(I_{HH} + I_{HV} + I_{VH} + I_{VV})$ . A representação gráfica da matriz de Mueller normalizada do LCD em função do nível de cinza é exibida na figura 11, onde cada gráfico corresponde a um dado elemento  $M_{ij}$ .

Para averiguar se as reconstruções da matriz de Mueller foram bem sucedidas, vamos comparar as probabilidades obtidas experimentalmente (figura 10), com as probabilidades extraídas a partir da MM experimental,  $M_{\text{EXP}}$ . Para isso, aplicamos  $M_{\text{EXP}}$  a cada um dos seis vetores de Stokes dados pelas equações (2.40), obtendo

$$S'_A = M_{\text{EXP}} S_A, \quad (4.1)$$

onde  $A \in \{H, V, P, M, R, L\}$ . Em seguida projetamos  $S'_A$  em cada uma das bases  $\{B, B^\perp\} \in \{H, V\}, \{P, M\}, \{R, L\}$ , e calculamos as intensidades como  $I'_{AB} = S_B^T S'_A / 2$ . Com essas intensidades, obtemos as probabilidades usando a equação (3.1).

A figura 12 mostra os 36 gráficos de probabilidades  $AB$  em função do nível de cinza no LCD. As curvas azuis correspondem às probabilidades experimentais, enquanto as curvas vermelhas correspondem às probabilidades estimadas a partir da MM experimental. Cada linha corresponde a uma dada polarização de entrada ( $A$ ) e cada coluna ao estado em que ela é projetada após passar pelo LCD ( $B$ ). Os gráficos mostram uma excelente concordância entre os resultados. Com isso, podemos agora analisar as propriedades polarimétricas do dispositivo.

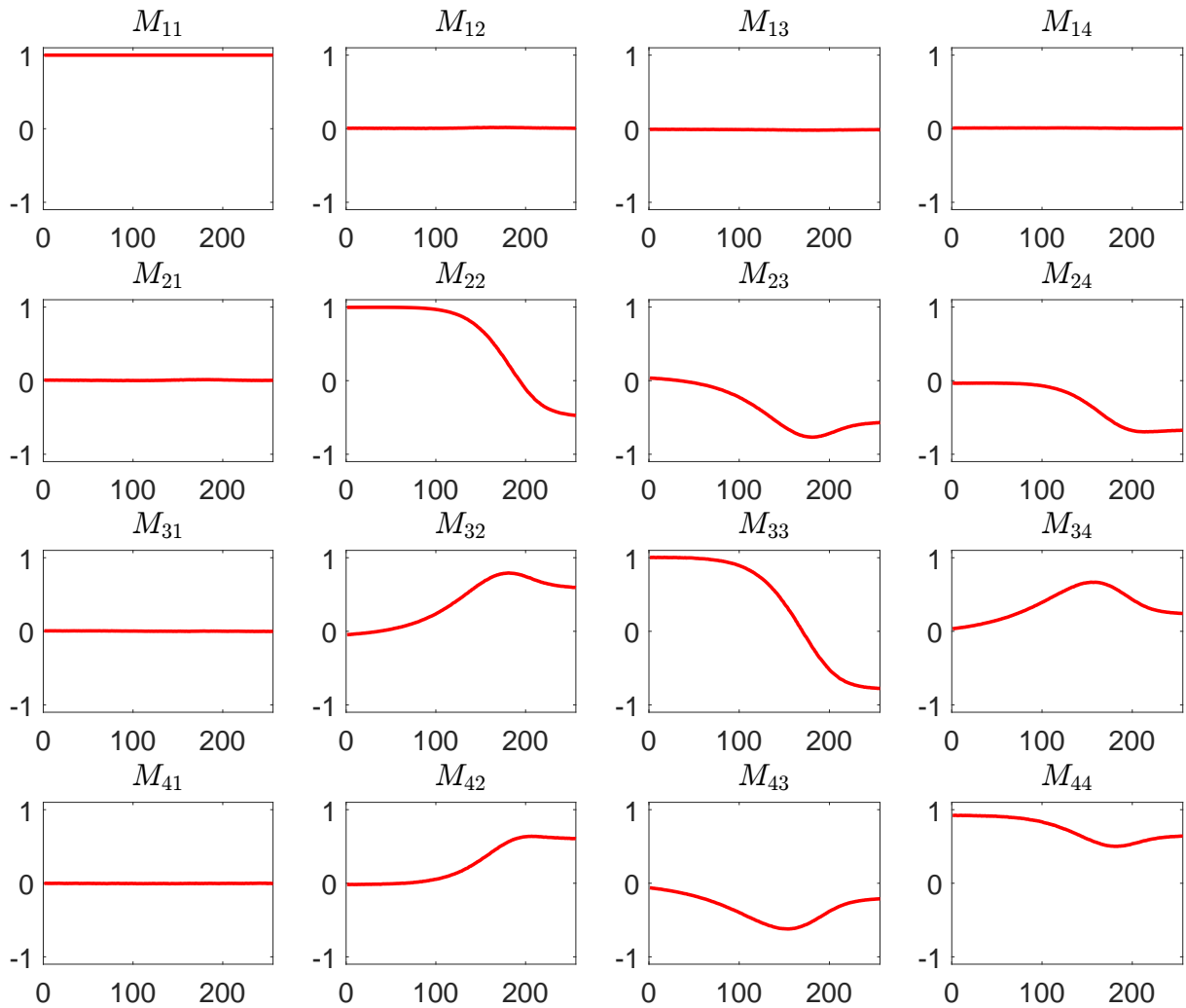


Figura 11 – Representação gráfica dos 16 elementos ( $M_{ij}$ ) da matriz de Mueller normalizada do LCD em função do nível de cinza.

## 4.2 Propriedades polarimétricas do LCD

Comparando as matrizes de Mueller do LCD na figura 11 com a equação (2.46), se tem a impressão que o LCD se comporta exatamente como uma placa retardadora. Porém, os elementos da primeira linha e primeira coluna (diferentes de  $M_{11}$ ) da MM do LCD, são, em geral, apenas próximos de 0. Com isso, o LCD será apenas uma boa aproximação de uma placa retardadora perfeita. Nesta seção, nós vamos mostrar isto, quantificando e analisando as propriedades polarimétricas descritas no quadro da seção 2.5.3.

### 4.2.1 Diatenuação

Inicialmente analisaremos o comportamento de diatenuação da matriz de Mueller. As componentes consideradas são:  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  e  $M_{14}$  (vermelho da equação (2.53)). A componente  $M_{12}$  está associada à diatenuação entre as polarizações  $\{H, V\}$ . Em outras

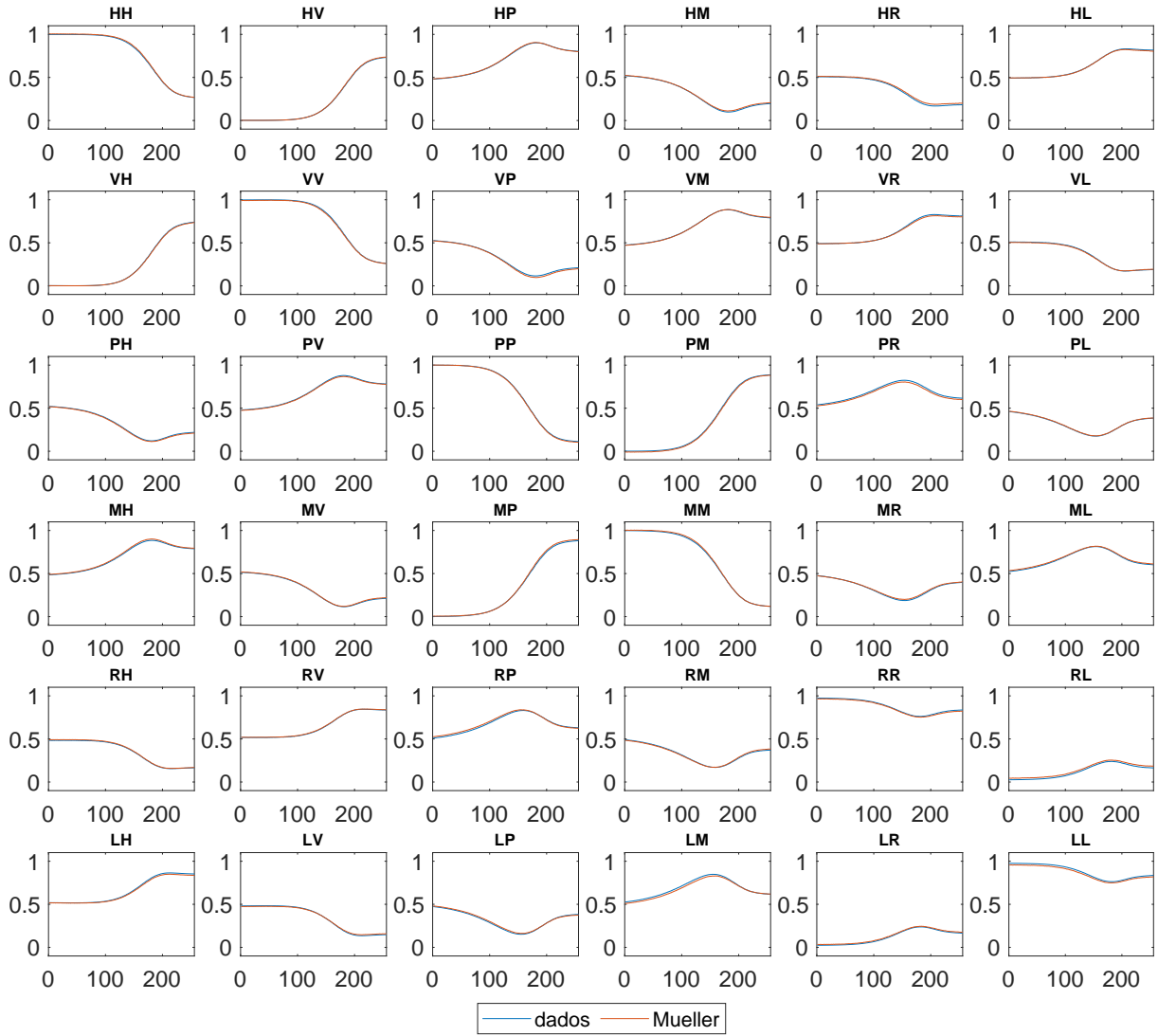


Figura 12 – Comparação entre as probabilidades obtidas experimentalmente (linha azul) e através da matriz de Mueller reconstruída (linha vermelha). Os elementos  $AB \in \{H, V, P, M, R, L\}$  correspondem às polarizações de entrada ( $A$ ) e o estado em que é projetada após passar pelo LCD ( $B$ ).

palavras, se esta componente for maior que 0, a intensidade do feixe de luz polarizado em  $H$  aumenta, enquanto a do feixe polarizado em  $V$  diminui; se o valor for menor que 0, ocorre o oposto. Quanto às componentes  $M_{13}$  e  $M_{14}$ , a relação é semelhante, mas  $M_{13}$  refere-se às polarizações  $\{P, M\}$ , enquanto  $M_{14}$  está relacionado às polarizações  $\{R, L\}$ . Nas matrizes da figura 11 estes três elementos são sempre próximos a 0; isto significa que o LCD, em relação à diatenuação, altera minimamente a intensidade do feixe de luz de entrada. Para uma avaliação mais precisa da quantidade de diatenuação em cada base e de forma total, adotamos um vetor que abrange integralmente as propriedades diatenuadoras, dada por [11]

$$\vec{D} \equiv \begin{bmatrix} D_{HV} \\ D_{PM} \\ D_{RL} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

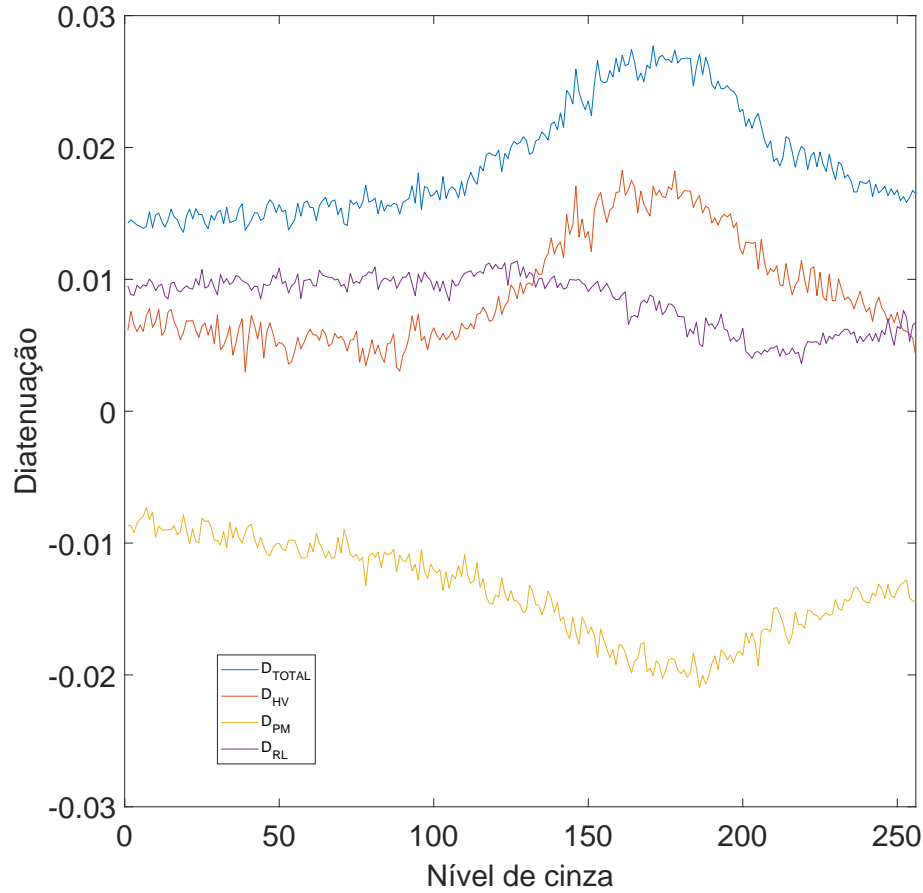


Figura 13 – Diatenuação  $\times$  Nível de cinza.  $D_{\text{TOTAL}}$  representa a diatenuação total,  $D_{\text{HV}}$  a diatenuação em relação a  $\{H, V\}$ ,  $D_{\text{PM}}$  a diatenuação em relação a  $\{P, M\}$  e  $D_{\text{RL}}$  a diatenuação em relação a  $\{R, L\}$ .

onde  $D_{\text{HV}}$ ,  $D_{\text{PM}}$  e  $D_{\text{RL}}$  representam as componentes de diatenuação para os pares de polarização  $\{H, V\}$ ,  $\{P, M\}$  e  $\{R, L\}$ , respectivamente. Em outras palavras,  $D_{\text{HV}}$  corresponde à componente da matriz de Mueller  $M_{12}$ ,  $D_{\text{PM}}$  está relacionada a  $M_{13}$  e  $D_{\text{RL}}$  refere-se a  $M_{14}$ . A diatenuação total é dada pelo módulo do vetor  $\vec{D}$ , ou seja,

$$D = \sqrt{M_{12}^2 + M_{13}^2 + M_{14}^2}. \quad (4.3)$$

A figura 13 mostra o comportamento da diatenuação em função do nível de cinza. Observa-se que as componentes da diatenuação estão, em geral, abaixo dos 2%, enquanto  $D_{\text{TOTAL}}$  ficou entre 1,5% e 3%.

#### 4.2.2 Polarizância

A polarizância representada na matriz de Mueller considera os elementos  $M_{21}$ ,  $M_{31}$  e  $M_{41}$  (verde na equação (2.53)) associados as polarizações  $\{H, V\}$ ,  $\{P, M\}$  e  $\{R, L\}$ ,

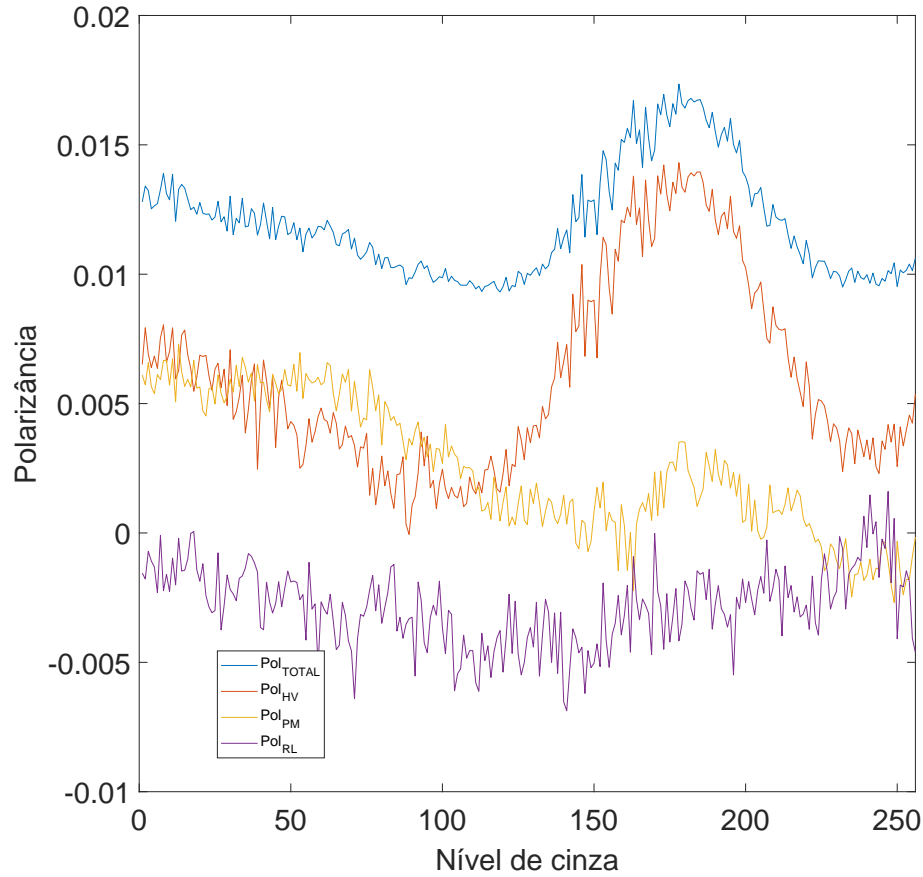


Figura 14 – Polarizância  $\times$  Nível de cinza.  $Pol_{total}$  representa a polarizância total,  $Pol_{HV}$  a polarizância em relação a  $\{H, V\}$ ,  $Pol_{PM}$  a polarizância em relação a  $\{P, M\}$  e  $Pol_{RL}$  a polarizância em relação a  $\{R, L\}$ .

respectivamente. Portanto, podemos definir um vetor de polarizância como [16]

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} Pol_{HV} \\ Pol_{PM} \\ Pol_{RL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{31} \\ M_{41} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

e a polarizância total será dada por  $Pol_{TOTAL} = |\vec{P}|$ . Para entender o significado da polarizância vamos tomar como exemplo a componente  $Pol_{HV} \in [-1, 1]$ ; para um valor  $Pol_{HV} = 1(-1)$  a parte não polarizada da luz incidente se tornará polarizada na direção  $H$  ( $V$ ); e para valores intermediários esta parte não polarizada será polarizada proporcionalmente.

Na figura 14 podemos ver o comportamento da polarizância total e das componentes em função do nível de cinza do LCD. Observa-se que as componentes apresentam valores muito pequenos que oscilam entre 0,5% e 1,5%, enquanto polarizância total varia entre 1% e 1,7%.

### 4.2.3 Retardância

A retardância, que indica como a direção de polarização será modificada, está associada com os elementos em amarelo na equação (2.53). A diagonal principal ( $M_{22}, M_{33}, M_{44}$ ) está relacionada diretamente com as polarizações  $\{H, V\}$ ,  $\{P, M\}$  e  $\{R, L\}$ , respectivamente. Se o elemento for igual a 1, isto significa que não haverá alteração na polarização de entrada; se o elemento for igual a  $-1$ , isto indica que a polarização será rotacionada para a sua contraparte ortogonal. Se o elemento da diagonal for diferente de  $\pm 1$ , isto indica uma polarização cruzada, ou seja, parte da polarização incidente irá rotacionar em outras direções. Esta polarização cruzada é descrita pelas componentes da linha e coluna deste elemento da diagonal, que neste caso serão não nulas. Para visualizar isso, basta observar como as componentes do vetor de Stokes após um dispositivo óptico são transformadas, conforme mostra as equações (2.51).

Ao examinarmos os elementos da MM mostrados na figura 11, notamos que até próximo ao nível de cinza 100 as componentes da diagonal principal da submatriz de retardância são aproximadamente iguais a 1. Neste caso o LCD não vai alterar significativamente a polarização do feixe de luz de entrada. No entanto, após ultrapassarmos esse nível, observa-se uma grande alteração, resultando em uma polarização cruzada. Com objetivo de quantificar esta alteração na fase do feixe de luz incidente no LCD podemos utilizar a definição do vetor de retardância proposto por [11]

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_{\text{HV}} \\ R_{\text{PM}} \\ R_{\text{RL}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{34} - M_{43} - b(M_{31}M_{24} + M_{41}M_{13}) \\ M_{42} - M_{24} - b(M_{41}M_{12} + M_{21}M_{14}) \\ M_{23} - M_{32} - b(M_{21}M_{13} + M_{31}M_{12}) \end{bmatrix} \frac{R}{2 \sin R}, \quad (4.5)$$

onde  $R$  é o retardo total da MM, dado por

$$R = \cos^{-1} \left( \frac{1}{2a} [M_{22} + M_{33} + M_{44} - b(M_{21}M_{12} + M_{31}M_{13} + M_{41}M_{14}) - a] \right), \quad (4.6)$$

$a = \sqrt{1 - D^2}$  e  $b = (1 - a)/D^2$ , sendo  $D$  o módulo da diatenuação total, representado pela equação (4.3). A partir das equações acima podemos quantificar a propriedade de retardância do LCD em função do nível de cinza. A figura 15 evidencia o retardo total e das componentes que o LCD aplica nos estados de polarização de entrada, em que  $R_{\text{HV}}$ ,  $R_{\text{PM}}$  e  $R_{\text{RL}}$  são as retardâncias associadas às bases  $\{H, V\}$ ,  $\{P, M\}$ ,  $\{R, L\}$ , respectivamente. Confirmando o que foi dito acima, nesta imagem podemos observar que até aproximadamente o nível de cinza 100 não há uma alteração significativa da fase aplicada entre as componentes de polarização. A partir deste nível todas as componentes apresentam variações, mostrando então que o LCD atua como um elemento retardador variável, embora imperfeito.

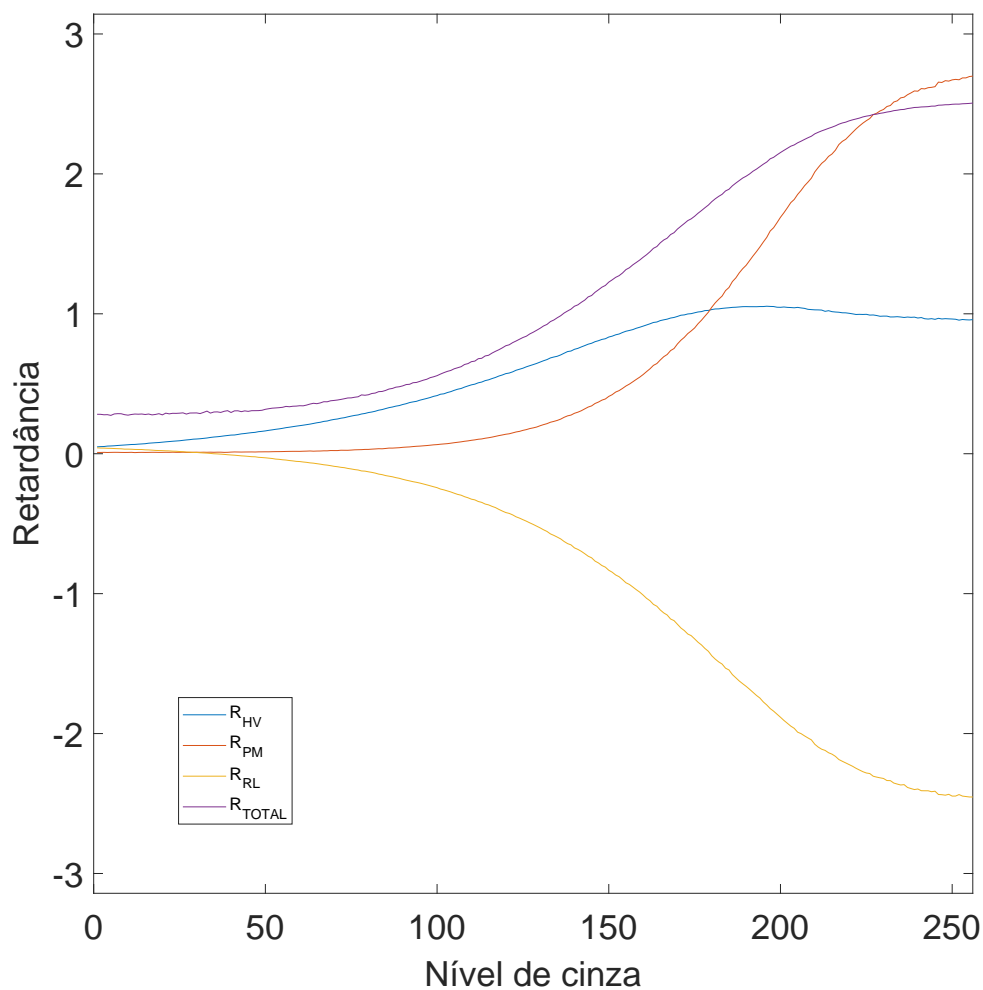


Figura 15 – Retardância  $\times$  Nível de cinza.  $R_{total}$  representa a retardância total,  $R_{HV}$  a retardância em relação a  $\{H, V\}$ ,  $R_{PM}$  a retardância em relação a  $\{P, M\}$  e  $R_{RL}$  a retardância em relação a  $\{R, L\}$ .

#### 4.2.4 Despolarização

A despolarização representa a redução do grau de polarização da luz [17]. Em um dispositivo óptico, cada elemento da sua matriz de Mueller pode ser afetado por ela, ou seja, esta propriedade não está contida apenas em um elemento da MM. Existe um valor único que a quantifica chamado índice de despolarização (DI, sigla do inglês *depolarization index*) o qual é definido como [5]

$$DI = \sqrt{\frac{(\sum_{ij} M_{ij}^2) - M_{11}^2}{3M_{11}^2}}. \quad (4.7)$$

Esta quantidade depende dos 15 elementos normalizados da MM e varia de 0 para um despolarizador ideal até 1 para um elemento óptico não despolarizante. O gráfico superior da figura 16 representa a evolução do  $DI$  em função do nível de cinza. Observamos que o LCD apresenta um índice de despolarização abaixo de 1, variando entre 0,9680 e 0,9782. O efeito da despolarização é mais evidente para os níveis de cinza acima de 100 que, conforme

vimos anteriormente, correspondem aos níveis em que o LCD atua mais efetivamente próximo a uma placa retardadora.

Como o DI é dado por um único valor independente do estado de polarização de entrada, ele não é capaz de captar como estados diferentes podem ser afetados pela despolarização. Para isto, outra medida importante que avalia o efeito de um dispositivo sobre o estado de polarização da luz é o grau de polarização (DoP, sigla do inglês *degree of polarization*). Esta quantidade é definida em termos dos parâmetros de Stokes como [18]

$$DoP = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_0^2}}. \quad (4.8)$$

Se  $DoP = 1$ , o feixe de luz é completamente polarizado; se  $0 < DoP < 1$ , a luz é parcialmente polarizada; por último, se  $DoP = 0$  temos um feixe de luz não polarizado.

Para avaliar como o LCD afeta o DoP, aplicaremos a sua matriz de Mueller experimental a cada um dos vetores de entrada  $\{H, V, P, M, R, L\}$  dados pelas equações (2.40). A partir dos vetores de Stokes de saída, calculamos o DoP pela equação (4.8). Os resultados obtidos são mostrados no gráfico inferior da figura 16.

Observa-se claramente que estados de entrada diferentes são despolarizados de maneira diferentes pelo LCD. Em particular, os estados de polarização circular são os mais afetados pela despolarização para um nível de cinza até 100, enquanto os demais começam a ser despolarizados a partir deste nível. Neste gráfico, os valores de DoP maiores que 1 são gerados por erros nas estimativas dos parâmetros de Stokes, decorrentes de erros experimentais. Usualmente, quando isto ocorre considera-se a luz como completamente polarizada [19]. Neste caso, para se obter uma informação mais precisa, o ideal é aplicar o método de máxima verossimilhança (MLE, sigla do inglês *maximum likelihood estimation*) à matriz de Mueller e realizar os cálculos posteriormente [20]. Tentamos aplicar o método, mas não obtivemos êxito.

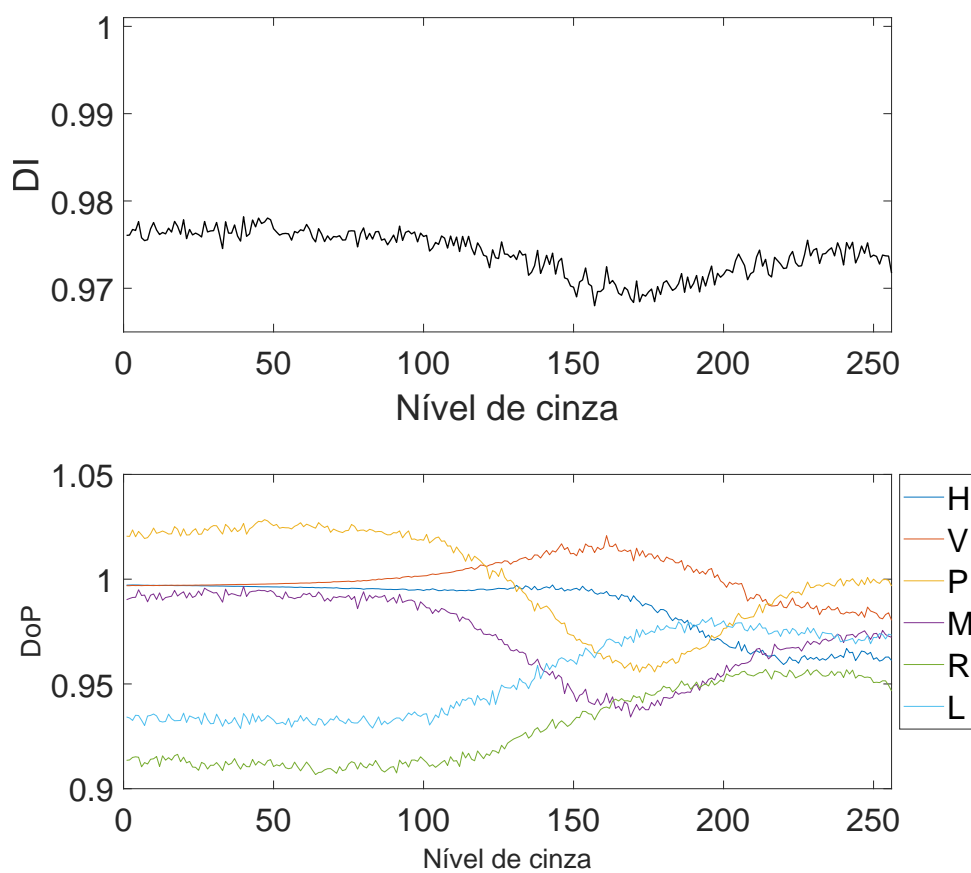


Figura 16 – Índice de despolarização (DI) da matriz de Mueller do LCD variando em relação ao nível de cinza (figura superior). Grau de polarização (DoP) do estado de saída do LCD em relação ao estado de entrada representado pela legenda variando em relação ao nível de cinza (figura inferior).

## Parte II

Matriz de processos de um modulador  
espacial de luz programável

## 5 Elementos de mecânica quântica para sistemas de dois níveis

Neste capítulo, apresentaremos uma fundamentação necessária para a construção da segunda parte deste trabalho. Revisaremos alguns elementos fundamentais da mecânica quântica para sistemas de dois níveis, os qubits. Primeiramente, dedicaremos uma seção à definição do estado de um qubit codificado na polarização de um fóton e à sua representação na esfera de Bloch. Com base nesses conceitos, avançaremos para a construção da matriz densidade associada a um estado de um qubit, permitindo-nos introduzir a ideia de operações quânticas unitárias e não-unitárias. Concluimos o capítulo, com uma construção teórica da tomografia quântica, uma técnica para caracterizar estados e processos quânticos.

### 5.1 Qubit codificado na polarização de um fóton

Sistemas quânticos de dois níveis, chamados de qubits [21], podem ser representados pelo spin de um elétron [22], pelos níveis de energia de um átomo [23], pelos caminhos possíveis de um fóton ao atravessar uma fenda dupla [24], etc. Neste trabalho vamos considerar um qubit codificado na polarização de um fóton e definiremos a base de polarizações horizontal e vertical,  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ , como a base computacional deste sistema. O estado puro mais geral de um qubit pode ser escrito nessa base como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |H\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |V\rangle, \quad (5.1)$$

onde  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Podemos representar este estado como um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário, definido pelos ângulos polar ( $\theta$ ) e azimutal ( $\varphi$ ), conhecida como esfera de Bloch, que é mostrada na figura 17. Nesta esfera, os estados dos polos norte e sul correspondem a  $|H\rangle$  e  $|V\rangle$ , respectivamente. Nos eixos  $x = \pm 1$  e  $y = \pm 1$ , temos os estados de polarização  $\{|P\rangle, |M\rangle\}$  e  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , respectivamente.

A forma mais geral para representar o estado de um qubit é dada pela matriz densidade [26]

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 r_i \sigma_i, \quad (5.2)$$

onde

$$r_i \equiv \text{Tr}\{\sigma_i \rho\}, \quad (5.3)$$

e  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli e a identidade, que podem ser expressas por:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

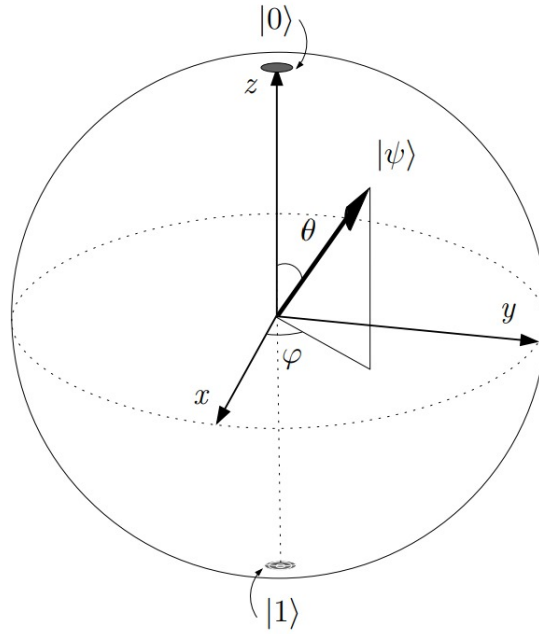


Figura 17 – Esfera de Bloch com a representação do estado puro de um qubit,  $|\psi\rangle$ , dado pela equação (5.1). Fonte: Retirado de [25].

A condição  $\text{Tr}\{\rho\} = 1$  implica que  $r_0 = 1$  e desta forma podemos reescrever a equação (5.2) na forma matricial, como

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Pela condição de positividade da matriz densidade é necessário e suficiente que  $\det\{\rho\} \geq 0$  [27]. Assim, temos:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1. \quad (5.6)$$

Para uma análise geométrica da expressão acima, podemos relacionar os elementos  $r_i$  às componentes de um vetor  $\vec{r}$  chamado vetor de Bloch, cuja representação em coordenadas esféricas é dada por:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

onde  $r = |\vec{r}|$ . Portanto, o estado dado pela matriz densidade (5.5) é representado por um ponto na esfera de Bloch localizado pelo vetor de Bloch correspondente.

Dado um estado quântico de um qubit  $\rho$  arbitrário podemos calcular seu grau de pureza por

$$\mathcal{P} = \text{Tr}\{\rho^2\} = \frac{1+r}{2}. \quad (5.8)$$

Portanto, se  $r = 1$  o estado é puro ( $\mathcal{P} = 1$ ) e será um ponto na superfície da esfera; se  $0 < r < 1$  teremos um estado misto ( $1/2 < \mathcal{P} < 1$ ) localizado no interior da esfera; se  $r = 0$  teremos um estado maximamente misto ( $\mathcal{P} = 1/2$ ) localizado no centro da esfera.

## 5.2 Evolução de estados quânticos

As operações quânticas são descritas formalmente como transformações lineares que atuam sobre os estados quânticos. Seja  $\rho$  um estado inicial de um sistema. Uma operação quântica  $\mathcal{E}$  aplicada a este estado irá resultar em um novo estado  $\rho'$ , ou seja,

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho). \quad (5.9)$$

Um exemplo importante de operação quântica é a evolução unitária, representada por:

$$\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger, \quad (5.10)$$

onde  $U$  é um operador unitário que satisfaz  $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathcal{I}$ , e  $\mathcal{I}$  é a identidade. Esta descrição é particularmente relevante para sistemas quânticos fechados, nos quais a evolução é determinística e reversível. Na transformação unitária a pureza é preservada, ou seja,  $\text{Tr}\{\rho^2\} = \text{Tr}\{(\rho')^2\}$ .

Agora, consideremos dois sistemas quânticos, um de interesse e outro externo. Suponhamos que o sistema de interesse esteja em um estado inicial qualquer  $\rho$ , mas o sistema externo comece em um estado puro  $\rho_{env} = |v_0\rangle\langle v_0|$ . Inicialmente ambos sistemas não possuem correlação entre si. No entanto, eles interagem evoluindo por meio de uma transformação unitária  $U$ . Desta forma, podemos representar a matriz densidade final do sistema de interesse, como [28]

$$\rho' = \text{Tr}_{env}\{U(\rho \otimes |v_0\rangle\langle v_0|)U^\dagger\}, \quad (5.11)$$

onde  $\text{Tr}_{env}$  representa o traço parcial no sistema externo. Tomando este traço na base  $\{|v_j\rangle\}$ , teremos

$$\rho' = \sum_j \langle v_j| U(\rho \otimes |v_0\rangle\langle v_0|) U^\dagger |v_j\rangle. \quad (5.12)$$

Definindo o operador  $E_j \equiv \langle v_j| U |v_0\rangle$  e utilizando a equação (5.9), podemos escrever a equação acima, como

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_j E_j \rho E_j^\dagger. \quad (5.13)$$

Os operadores  $\{E_j\}$ , conhecidos como operadores de Kraus, atuam no espaço do sistema de interesse e satisfazem a condição de completude  $\sum_j E_j^\dagger E_j = \mathcal{I}$ . A equação (5.13) é conhecida como a representação de Kraus de uma operação quântica  $\mathcal{E}$  e descreve de forma geral a evolução de estados quânticos. Na seção 5.3.2, utilizaremos esta representação para introduzir o método de tomografia de processos, com o qual se pode caracterizar uma operação quântica desconhecida.

## 5.3 Tomografia quântica em sistemas de um qubit

Nesta seção, descreveremos um método de tomografia quântica de estados e processos de aplicado a sistemas de um qubit.

### 5.3.1 Tomografia de estados de um qubit

A tomografia de estados é um procedimento experimental para determinar um estado quântico desconhecido [29]. No caso de um qubit, vimos que um estado arbitrário  $\rho$  é dado pela equação (5.5). Para determinar este estado, devemos determinar os elementos  $\{r_j\}$  dados pelos valores esperados dos operadores de Pauli, como mostra a equação (5.14). No caso de um qubit fotônico de polarização, podemos escrever esses elementos explicitamente como

$$r_1 = \text{Tr}\{\sigma_1\rho\} = \langle P|\rho|P\rangle - \langle M|\rho|M\rangle, \quad (5.14a)$$

$$r_2 = \text{Tr}\{\sigma_2\rho\} = \langle R|\rho|R\rangle - \langle L|\rho|L\rangle, \quad (5.14b)$$

$$r_3 = \text{Tr}\{\sigma_3\rho\} = \langle H|\rho|H\rangle - \langle V|\rho|V\rangle, \quad (5.14c)$$

onde  $\langle B|\rho|B\rangle$  é a probabilidade de se projetar  $\rho$  em  $|B\rangle$ . Portanto, preparando identicamente um *ensemble* de fótons e medindo nas bases de polarização  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ ,  $\{|P\rangle, |M\rangle\}$ ,  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ , podemos determinar os valores de  $r_j$  e, conseqüentemente, a matriz densidade que descreve este *ensemble*.

### 5.3.2 Tomografia de processos para sistemas de um qubit

A tomografia de processos é um procedimento para se determinar uma operação quântica desconhecida [23]. A figura 18 esquematiza como este procedimento é executado: em linhas gerais, submetemos um estado conhecido  $\rho$  a uma operação quântica desconhecida  $\mathcal{E}$  representada por uma caixa preta. O estado resultante desta operação,  $\rho' = \mathcal{E}(\rho)$ , é então reconstruído através da tomografia de estados quânticos (QST). Repetindo este procedimento para um conjunto completo de estados de entrada, é possível determinar  $\mathcal{E}$ , como vamos mostrar na sequência, para sistemas de um qubit.

Como foi visto na seção anterior, uma operação quântica qualquer pode ser representada em termos dos operadores de Kraus  $\{E_j\}$  como mostra a equação (5.13). Ou seja, conhecendo esses operadores, conheceremos a operação em si. Para determinar os operadores de Kraus desconhecidos, devemos primeiramente expandi-los em uma base completa de operadores. Para um qubit, consideremos a base dos operadores de Pauli, com uma pequena modificação em  $\sigma_2$  para simplificar os cálculos. Assim, temos:

$$\tilde{E}_0 = \sigma_0, \quad \tilde{E}_1 = \sigma_1, \quad \tilde{E}_2 = -i\sigma_2, \quad \tilde{E}_3 = \sigma_3, \quad (5.15)$$

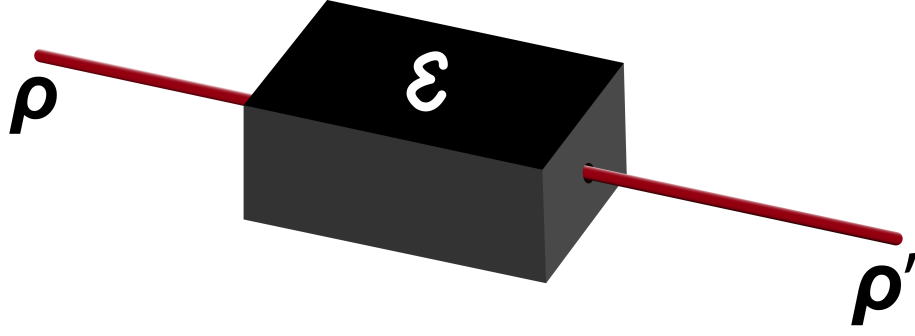


Figura 18 – Esquematização de uma caixa preta representando uma operação quântica desconhecida  $\mathcal{E}$  aplicada a um estado inicial  $\rho$  e resultando em um estado final  $\rho'$ .

onde  $\sigma_j$  é dado pela equação (5.4). Nesta base teremos, então

$$E_i = \sum_m e_{im} \tilde{E}_m, \quad (5.16)$$

onde  $e_{im}$  são coeficientes complexos. Substituindo esta equação em (5.13), obtemos

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{mn} \tilde{E}_m \rho \tilde{E}_n^\dagger \chi_{mn}, \quad (5.17)$$

onde  $\chi_{mn} = \sum_i e_{im} e_{in}^*$  são os elementos da chamada matriz de processo  $\chi$ , uma matriz positiva que descreve completamente a operação quântica  $\mathcal{E}$ . Portanto, determinando  $\chi$ , determinaremos  $\mathcal{E}$ .

Para determinar a matriz de processo é necessário escolher um conjunto de operadores que formem uma base para o espaço de operadores. Poderíamos escolher a base de Pauli, mas uma opção mais simples é a base canônica, dada por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = |H\rangle\langle H|, & \rho_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = |H\rangle\langle V|, \\ \rho_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |V\rangle\langle H|, & \rho_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |V\rangle\langle V|. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Aplicando a operação  $\mathcal{E}$  sobre uma cada um destes operadores, obtemos

$$\rho'_1 = \mathcal{E}(|H\rangle\langle H|), \quad (5.19a)$$

$$\rho'_4 = \mathcal{E}(|V\rangle\langle V|), \quad (5.19b)$$

$$\rho'_2 = \mathcal{E}(|P\rangle\langle P|) - i\mathcal{E}(|R\rangle\langle R|) - (1 - i)(\rho'_1 + \rho'_4)/2, \quad (5.19c)$$

$$\rho'_3 = \mathcal{E}(|P\rangle\langle P|) + i\mathcal{E}(|R\rangle\langle R|) - (1 + i)(\rho'_1 + \rho'_4)/2. \quad (5.19d)$$

Observe que  $\mathcal{E}(\rho_j)$  pode ser obtido, a partir das relações acima, preparando os estados de polarização de entrada  $|H\rangle, |V\rangle, |P\rangle, |R\rangle$  e realizando QST nos estados de saída. Podemos

expressar os estados resultantes da tomografia como uma combinação linear dos operadores da base canônica [equação (5.18)]:

$$\mathcal{E}(\rho_j) = \sum_k \lambda_{jk} \rho_k. \quad (5.20)$$

onde  $\lambda_{jk}$  são os coeficientes da expansão (conhecidos através da QST). Usando a equação (5.17), podemos escrever (5.20) como

$$\sum_k \lambda_{jk} \rho_k = \sum_{mn} \tilde{E}_m \rho_j \tilde{E}_n^\dagger \chi_{mn}. \quad (5.21)$$

Isto gera um conjunto de 16 equações lineares cujas incógnitas são os elementos  $\chi_{mn}$  da matriz de processos. Resolvendo este sistema (veja apêndice B), obtemos

$$\chi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} + \lambda_{44} & \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{34} + \lambda_{43} & \lambda_{21} - \lambda_{12} - \lambda_{34} + \lambda_{43} & \lambda_{11} - \lambda_{22} + \lambda_{33} - \lambda_{44} \\ \lambda_{13} + \lambda_{24} + \lambda_{31} + \lambda_{42} & \lambda_{14} + \lambda_{23} + \lambda_{32} + \lambda_{41} & \lambda_{23} - \lambda_{14} - \lambda_{32} + \lambda_{41} & \lambda_{13} - \lambda_{24} + \lambda_{31} - \lambda_{42} \\ \lambda_{13} + \lambda_{24} - \lambda_{31} - \lambda_{42} & \lambda_{14} + \lambda_{23} - \lambda_{32} - \lambda_{41} & \lambda_{23} - \lambda_{14} + \lambda_{32} - \lambda_{41} & \lambda_{13} - \lambda_{24} - \lambda_{31} + \lambda_{42} \\ \lambda_{11} + \lambda_{22} - \lambda_{33} - \lambda_{44} & \lambda_{12} + \lambda_{21} - \lambda_{34} - \lambda_{43} & \lambda_{21} - \lambda_{12} + \lambda_{34} - \lambda_{43} & \lambda_{11} - \lambda_{22} - \lambda_{33} + \lambda_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Definindo

$$\Lambda \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{E}_0 & \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_1 & -\tilde{E}_0 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

podemos escrever a matriz de processos da equação (5.22), como:

$$\chi = \Lambda \begin{bmatrix} \rho'_1 & \rho'_2 \\ \rho'_3 & \rho'_4 \end{bmatrix} \Lambda. \quad (5.24)$$

No próximo capítulo, vamos aplicar o método descrito acima para caracterizar a operação quântica realizada pelo LCD sobre o estado de polarização de um fóton.

## 6 Reconstrução da matriz de processos do *display de cristal líquido*

Neste capítulo, determinaremos a matriz de processo do LCD em função do nível de cinza. Com isso, vamos derivar uma expressão geral para a matriz de processo de um modulador espacial de luz (SLM) programável, dispositivo que consiste de um arranjo do LCD entre placas de onda. Esta expressão nos permitirá quantificar a fidelidade da operação do SLM com operações unitárias de interesse em informação quântica e também fazer previsões sobre transformações dos estados de polarização em função da configuração das placas de onda.

### 6.1 Tomografia dos estados de polarização transformados pelo LCD

Como foi visto na seção 5.3.2, o primeiro passo para realizar uma tomografia de processos é realizar a tomografia de um conjunto completo de estados conhecidos após estes serem transformados pela operação. Dessa forma, para caracterizar o processo do LCD, vamos realizar a tomografia do conjunto de seis estados puros de entrada  $\{|H\rangle, |V\rangle, |P\rangle, |M\rangle, |R\rangle, |L\rangle\}$  após sua passagem pelo dispositivo, em função do nível de cinza. As medições para implementar a QST foram apresentadas no capítulo 3. Usando as probabilidades mostradas na figura 10 para cada estado de entrada, obtemos os elementos do vetor de Bloch  $r_j$  através das equações (5.14). Em seguida, substituindo esses elementos na equação (5.5), teremos o estado de polarização após o display.

A estimativa das probabilidades no experimento tomográfico está sujeita a diversas fontes de erros, tais como na preparação do estado de entrada, no aparato de medição, flutuações de intensidade da fonte, etc. Esses erros fazem com que os operadores obtidos ao final do processo tenham propriedades não físicas, tais como autovalores negativos.<sup>1</sup> Para contornar este problema, aplicamos o método de estimativa de máxima verossimilhança (MLE, sigla do inglês *maximum likelihood estimation*) que, no caso de um qubit, é resumida no quadro abaixo.

#### Método de estimativa por máxima verossimilhança (MLE)

A MLE consiste em gerar uma matriz densidade física que satisfaça as propriedades de normalização, hermiticidade e positividade. Sendo assim, esta matriz será uma

<sup>1</sup> A matriz densidade é hermitiana, positiva semidefinida (possui autovalores não negativos) e tem traço 1.

função de 4 variáveis  $(t_1, t_2, t_3, t_4)$ , representa por:

$$\tilde{\rho} = \frac{T^\dagger T}{\text{Tr}\{T^\dagger T\}}, \quad (6.1)$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ t_3 + it_4 & t_2 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Agora introduzimos uma função de verossimilhança que quantifica a “qualidade” da matriz densidade  $\rho$  em relação aos dados experimentais, definida como:

$$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_4) = \sum_{\nu=1}^6 \frac{[\text{Tr}\{\rho_\nu \tilde{\rho}\} - \text{Tr}\{\rho_\nu \rho\}]^2}{2 \text{Tr}\{\rho_\nu \tilde{\rho}\}}, \quad (6.3)$$

onde  $\rho_\nu$  representam os estados de polarização do conjunto  $\{H, V, P, M, R, L\}$ . Encontrando os parâmetros  $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  que minimizam a função  $\mathcal{L}$ , podemos reescrever a matriz  $\tilde{\rho}$  (equação (6.1)) em função de  $t_j^{\text{IDEAL}}$  e assim teremos uma matriz densidade fisicamente aceitável dos estados reconstruídos por QST. Para uma compreensão mais detalhada da técnica de MLE, recomenda-se consultar a referência [29].

Realizamos então o processo tomográfico descrito acima e aplicamos a MLE. Para avaliar a positividade dos operadores reconstruídos antes e depois da MLE, nós calculamos seus autovalores nos dois casos. A figura 19 mostra, para cada estado de entrada, os autovalores  $\lambda_0$  (azul) e  $\lambda_1$  (laranja) em função do nível de cinza no LCD. As curvas contínuas representam os autovalores antes e os círculos representam os autovalores depois do MLE. Podemos notar que, antes da MLE, os estados de entrada  $|H\rangle, |V\rangle, |P\rangle$  e  $|R\rangle$  possuíam autovalores negativos em um certo intervalo de níveis de cinza. Após a aplicação da técnica, a positividade dos operadores foi restaurada.

Os resultados que seguem utilizam os estados reconstruídos pela QST após aplicar o MLE. A figura 20 mostra a representação na esfera de Bloch da transformação de cada estado de entrada pelo LCD à medida que o nível de cinza aumenta. Para melhor compreensão dessas transformações, dividimos cada par de polarizações de entrada ortogonais em esferas de Bloch independentes e plotamos ao seu lado a pureza de cada estado de saída do LCD usando a equação (5.8). Os resultados são mostrados na figura 21 para as polarizações de entrada  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  (primeira linha),  $\{|P\rangle, |M\rangle\}$  (segunda linha) e  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$  (terceira linha). Em linhas gerais, todos os estados de entrada, de polarização linear ou circular, se transformam em estados de polarização elíptica com o aumento do nível de cinza. Além disso, a pureza desses estados é afetada de diferentes maneiras, o que evidencia que o LCD não implementa uma transformação unitária.

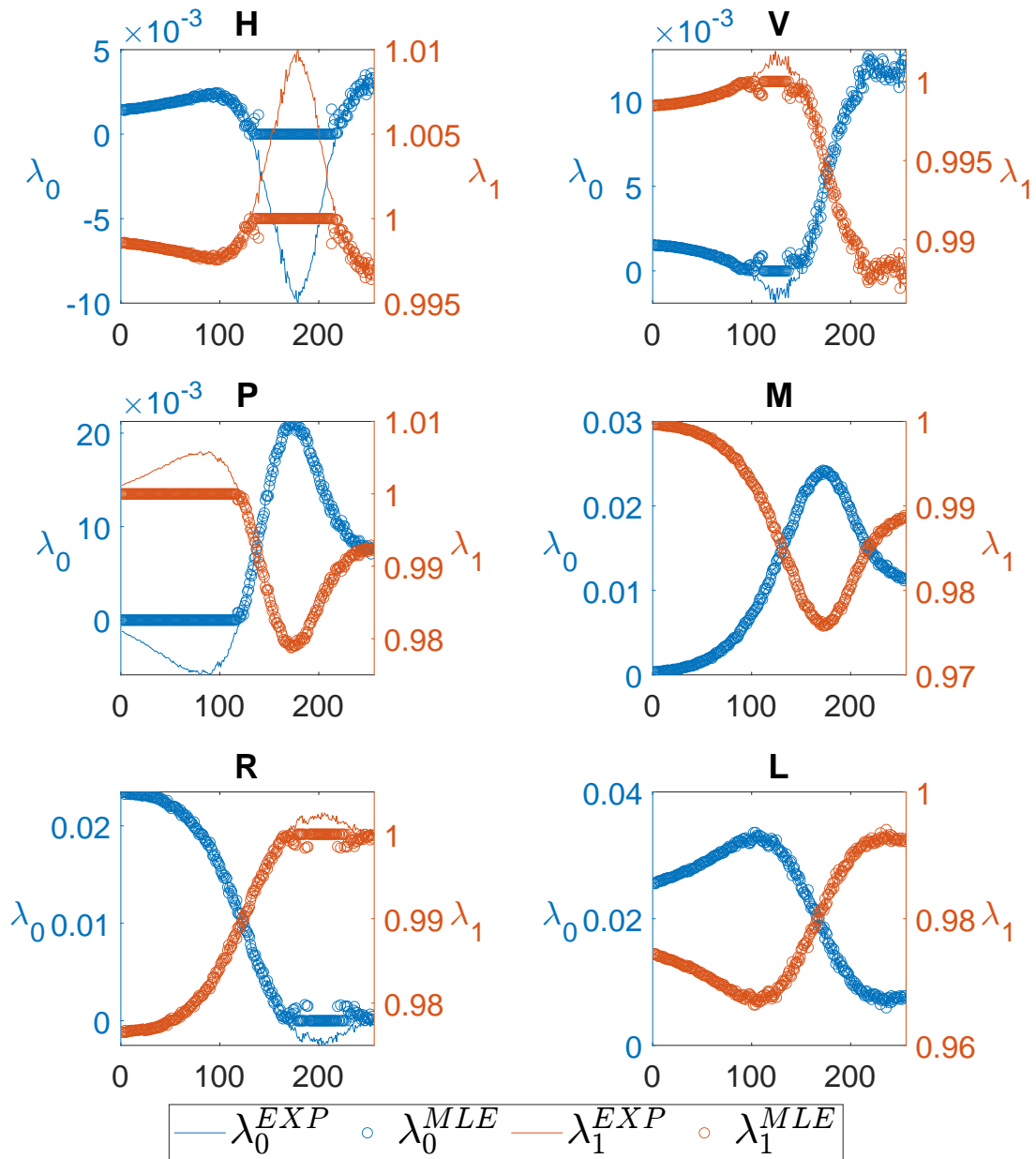


Figura 19 – Autovalores do estado do feixe de luz de saída do display antes e depois do MLE, dado que o estado de entrada é aquele representado na parte superior de cada figura.

Na próxima seção, utilizaremos os estados reconstruídos por QST para reconstruir a matriz de processo do LCD.

## 6.2 A matriz de processos do LCD

Os estados reconstruídos após a interação com o LCD correspondem a  $\mathcal{E}^{LCD}(|A\rangle\langle A|)$ , onde  $\mathcal{E}^{LCD}$  representa a operação efetuada pelo dispositivo sobre um dado estado de entrada  $|A\rangle \in \{|H\rangle, |V\rangle, |P\rangle, |M\rangle, |R\rangle, |L\rangle\}$ . Usando os resultados da QST, obtemos os operadores  $\{\rho_j\}_{j=1}^4$  dados pela equação (5.19) e substituindo-os na equação (5.24),

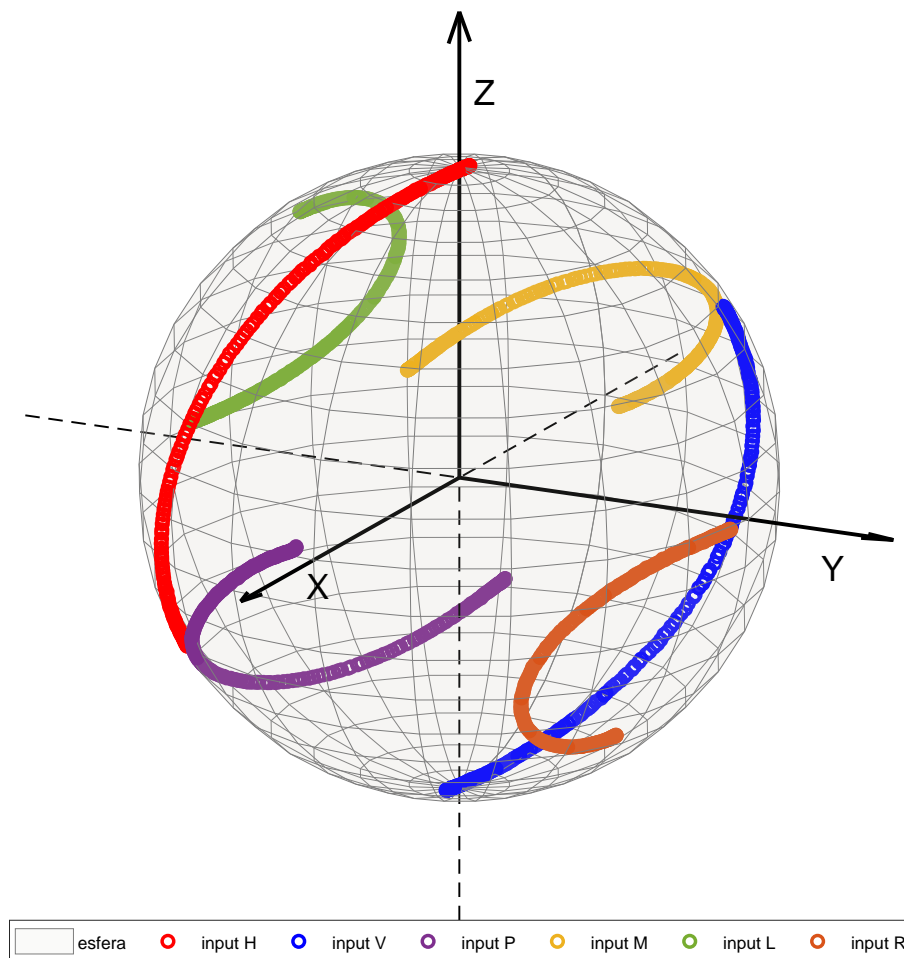


Figura 20 – Representação dos estados de polarização de entrada na esfera de Bloch à medida que o nível de cinza do LCD aumenta de 0 a 255.

obtemos a matriz de processo do LCD em função do nível de cinza, que vamos denotar como  $\tilde{\chi}^{\text{LCD}}$ . Os autovalores de  $\tilde{\chi}^{\text{LCD}}$  foram calculados e estão representados em azul na figura 22. É perceptível que  $\lambda_3 < 0$  para todos os níveis de cinza e, portanto, as matrizes de processos correspondentes não são positivas.<sup>2</sup> Nesta situação, o ideal é aplicar algum método numérico de otimização (como o MLE) que permita estimar uma matriz positiva. No entanto, quando os autovalores negativos são suficientemente pequenos, é possível adotar métodos mais simples que não envolvam otimização. Um destes métodos envolve a combinação convexa da matriz obtida experimentalmente com a identidade, de forma que cada autovalor se torne não negativo [30]. Aplicando este método no nosso caso, a versão positiva da matriz de processo do LCD,  $\chi^{\text{LCD}}$ , será dada por

$$\chi^{\text{LCD}} = \frac{1}{N} (\tilde{\chi}^{\text{LCD}} + |\lambda_3| \mathcal{I}), \quad (6.4)$$

onde  $N = \text{Tr}\{\tilde{\chi}^{\text{LCD}}\} + 4|\lambda_3|$  é uma constante de renormalização e  $\mathcal{I}$  é uma matriz identidade  $4 \times 4$ . Os autovalores de  $\chi^{\text{LCD}}$  são dados pelas curvas laranjas da figura 22, onde podemos

<sup>2</sup> Assim como na QST, erros experimentais na tomografia de processos podem gerar uma matriz com um ou mais autovalores negativos. Neste caso, os erros são produzidos pela própria estimativa dos estados via MLE e refletem sobre os operadores  $\rho_j$ .

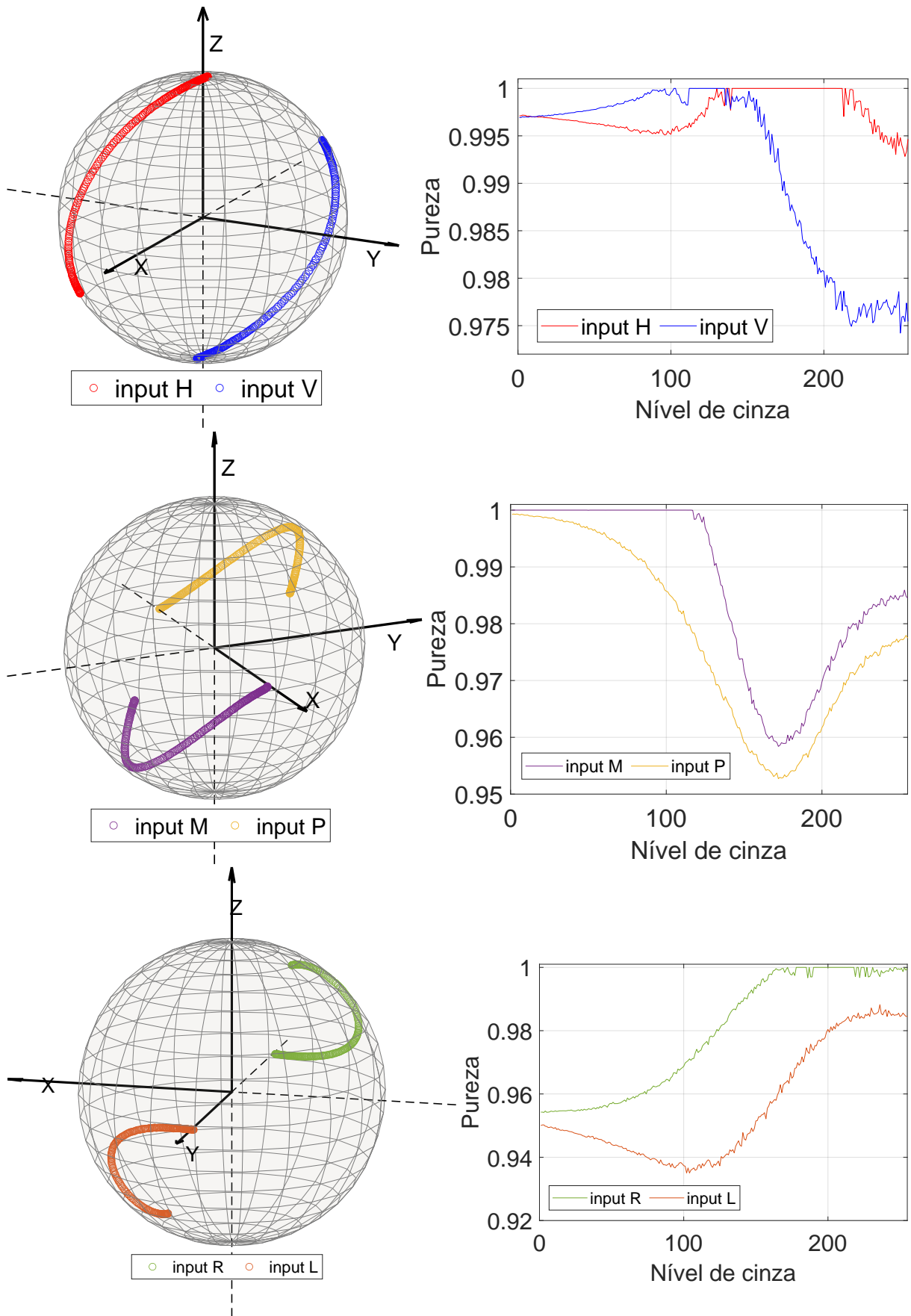


Figura 21 – Representação dos estados de polarização de entrada na esfera de Bloch à medida que o nível de cinza do LCD aumenta de 0 a 255 (primeira coluna); pureza dos estados transformados pelo LCD (segunda coluna).

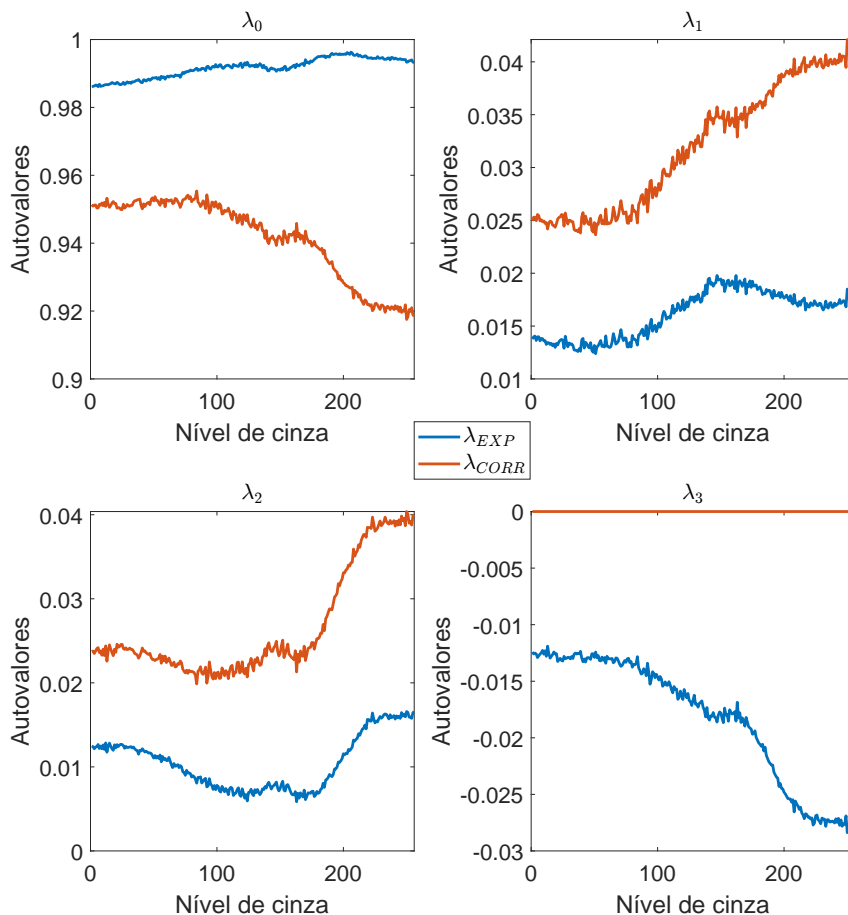


Figura 22 – Autovalores da matriz de processos antes (azul) e após (laranja) a aplicação do método de correção dado pela equação (6.4).

verificar o autovalor  $\lambda_3$  se anulou, e assim a matriz de processo é positiva.

A matriz de processos de uma operação unitária tem um autovalor igual a um e os demais são nulos. A figura 22 mostra que o maior autovalor de  $\chi^{\text{LCD}}$ ,  $\lambda_0$ , é apenas aproximadamente 1, de forma que a operação implementada pelo LCD apenas se aproxima de uma unitária. A representação da parte real e imaginária dos coeficientes  $\chi_{ij}^{\text{LCD}}$  de  $\chi^{\text{LCD}}$  é mostrada na figura 23. Ao contrário da matriz de Mueller, não é possível extrair propriedades físicas de forma imediata a partir da observação dos coeficientes.

Após essa caracterização, podemos analisar a “qualidade” da matriz de processo utilizando a mesma técnica aplicada para qualificar a matriz de Mueller (consulte a figura 12). Em outras palavras, podemos comparar as probabilidades experimentais (figura 10) e as probabilidades estimadas a partir de  $\chi^{\text{LCD}}$ . Para isto calculamos

$$P_{AB} = \langle B | \mathcal{E}^{\text{LCD}}(|A\rangle\langle A|) | B \rangle, \quad (6.5)$$

onde  $|B\rangle \in \{|H\rangle, |V\rangle, |P\rangle, |M\rangle, |R\rangle, |L\rangle\}$ . A figura 24 mostra os 36 gráficos de probabilidades  $P_{AB}$  em função do nível de cinza no LCD. As curvas azuis correspondem às probabilidades experimentais, enquanto as curvas vermelhas correspondem às probabilidades estimadas a partir de  $\chi^{\text{LCD}}$ . Cada linha corresponde a uma dada polarização de

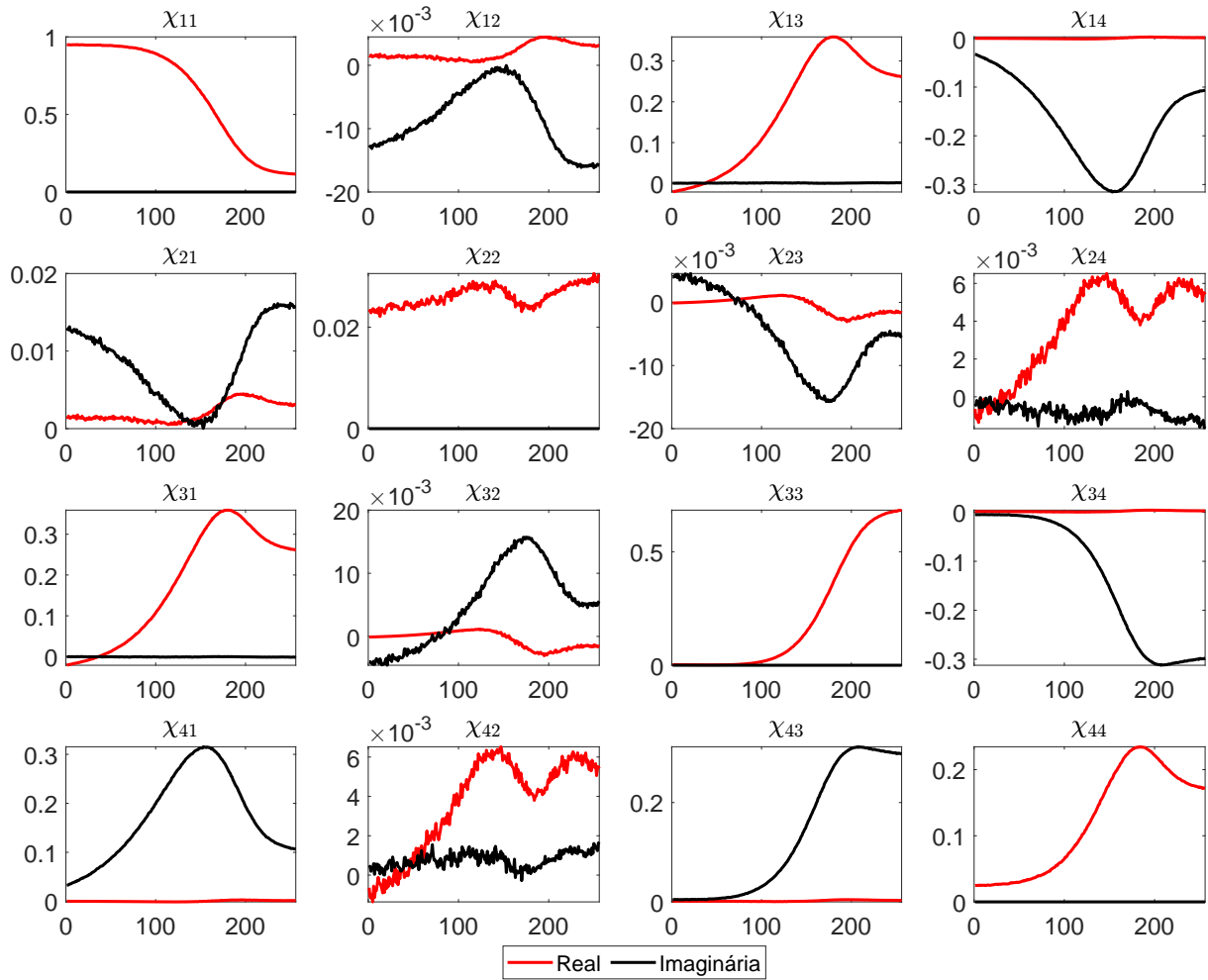


Figura 23 – Representação da parte real (vermelho) e da parte imaginária (preto) dos elementos da matriz de processo  $\chi^{\text{LCD}}$  em função do nível de cinza.

entrada ( $A$ ) e cada coluna ao estado em que ela é projetada após passar pelo LCD ( $B$ ). Novamente, os gráficos mostram uma ótima concordância entre os resultados. Em comparação com a figura 12, esta concordância é ligeiramente pior em alguns casos. Isto se deve, provavelmente, ao método que empregamos para obter a matriz de processo positiva, o qual fornece apenas uma boa aproximação para esta matriz em relação à métodos de otimização mais robustos.

### 6.3 Operações programáveis utilizando o LCD

O LCD transforma a polarização da luz em função apenas dos níveis de cinza, ou seja, o dispositivo realizará sempre a mesma operação,  $\mathcal{E}^{\text{LCD}}$ , sobre o estado incidente. No entanto, é possível implementar diferentes transformações de forma controlável combinando o LCD com placas de onda. Uma combinação geral consiste de duas placas HWP e duas QWP, configuradas como mostrado na figura 25. Chamaremos este arranjo de modulador espacial de luz (SLM) e denotaremos as operações das placas como  $\{H_1, H_4\}$  para as HWP

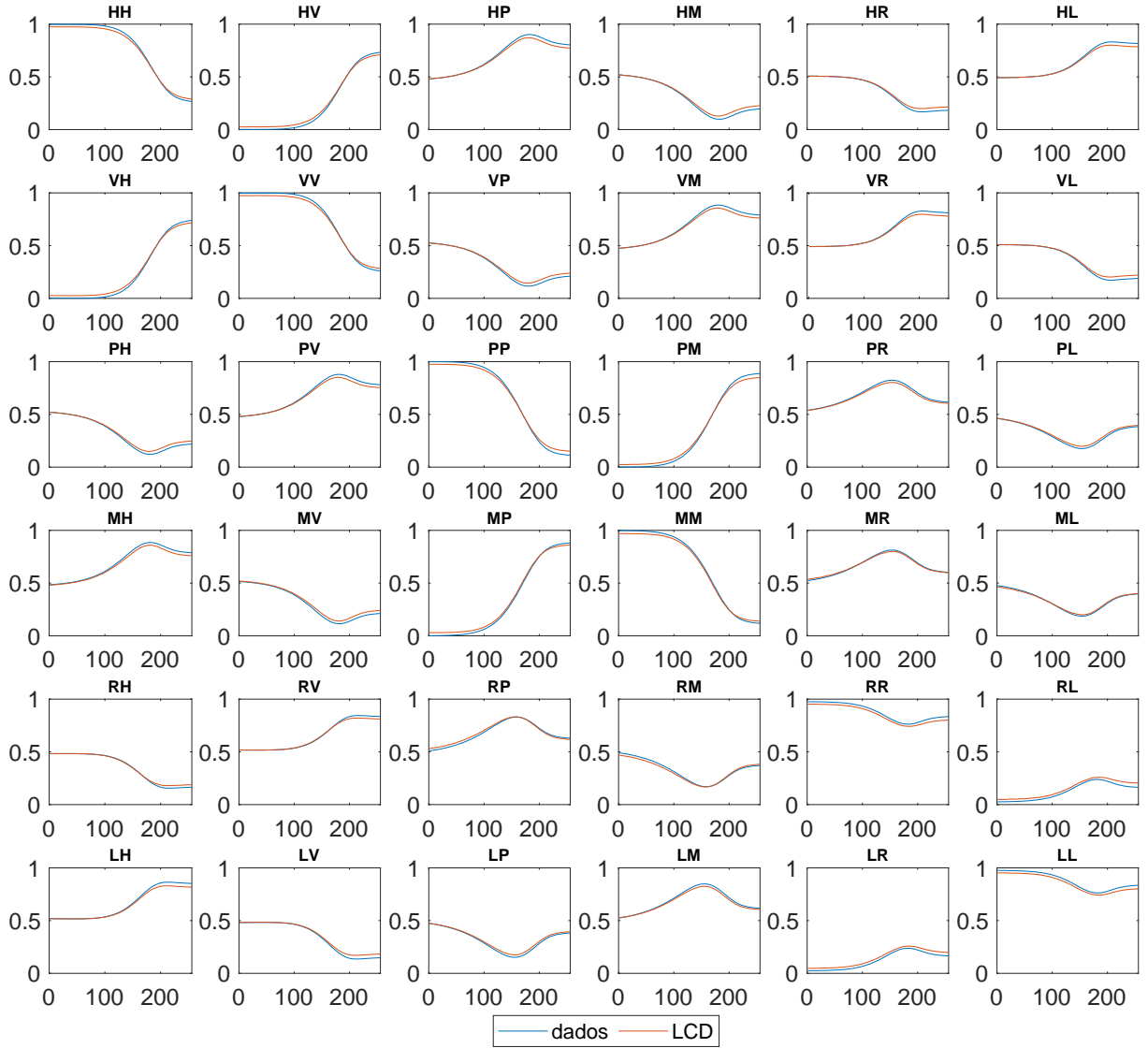


Figura 24 – Comparação entre as probabilidades obtidas experimentalmente (linha azul) e através da matriz de processos reconstruída (linha vermelha). Os elementos  $AB \in \{H, V, P, M, R, L\}$  correspondem às polarizações de entrada ( $A$ ) e o estado em que é projetada após passar pelo LCD ( $B$ ).

e  $\{Q_2, Q_3\}$  para as QWP, onde o índice  $j$  refere-se à ordem que a placa aparece e está vinculado também com o seu ângulo  $\theta_j$ . Com o SLM, podemos implementar diferentes operações sobre a polarização que serão funções tanto do nível de cinza do LCD quanto dos ângulos fixos das placas de onda. Nesta seção, vamos derivar uma expressão geral para esta operação que será denotada como  $\mathcal{E}^{\text{SLM}}$ . Visando simplificar a notação, omitiremos a dependência das placas de onda com o ângulo  $\theta_j$  nesta construção.

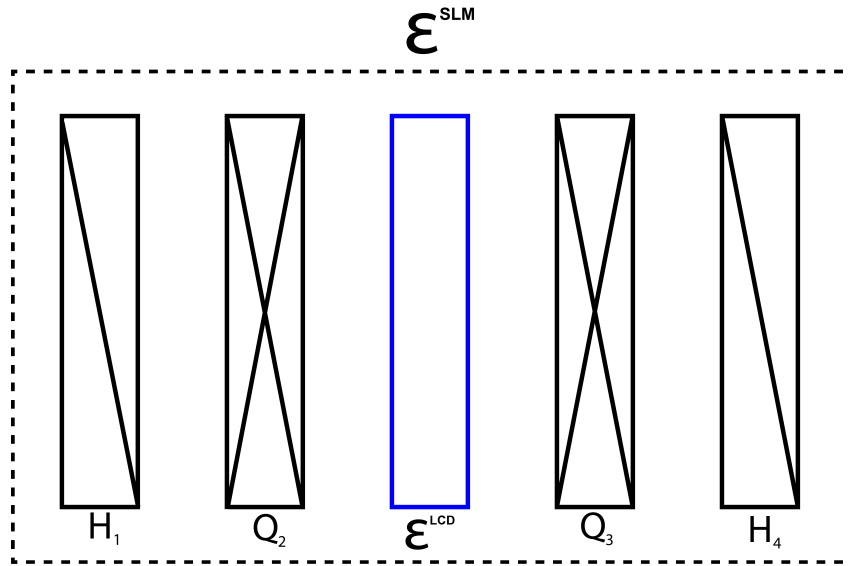


Figura 25 – Representação da operação quântica realizada pelo SLM descrita pela equação (6.7).

### 6.3.1 Matriz de processos do SLM

A operação realizada pelo LCD sobre um estado  $\rho$  pode ser descrita por

$$\mathcal{E}^{\text{LCD}}(\rho) = \sum_{mn} \chi_{mn}^{\text{LCD}} \tilde{E}_m \rho \tilde{E}_n^\dagger, \quad (6.6)$$

onde  $\chi^{\text{LCD}}$  é a matriz de processo do LCD e  $\{\tilde{E}_j\}$  é a base de operadores dados pela equação (5.15). Agora, a operação quântica que queremos caracterizar é dada pela seguinte sequência de operações:

$$H_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \mathcal{E}^{\text{LCD}} \rightarrow Q_3 \rightarrow H_4. \quad (6.7)$$

As placas de onda implementam transformações unitárias dadas pela matriz de Jones da equação (2.45), onde  $\delta = \pi$  para a HWP e  $\delta = \pi/2$  para QWP.

Inicialmente, o estado  $\rho$  é transformado pela primeira HWP como

$$\mathcal{E}^{H_1}(\rho) = H_1 \rho H_1^\dagger. \quad (6.8)$$

Na sequência, o estado  $\mathcal{E}^{H_1}(\rho)$  é transformado pela primeira QWP

$$\mathcal{E}^{Q_2}(\mathcal{E}^{H_1}(\rho)) = Q_2 (H_1 \rho H_1^\dagger) Q_2^\dagger, \quad (6.9)$$

Seguindo este procedimento, o estado resultante será transformado pelo LCD, e pela segunda QWP e HWP. Usando a equação (6.6), podemos escrever a operação implementada pelo SLM como

$$\mathcal{E}^{\text{SLM}}(\rho) = \sum_{mn} \chi_{mn}^{\text{LCD}} [H_4 Q_3 \tilde{E}_m Q_2 H_1] \rho [H_1^\dagger Q_2^\dagger \tilde{E}_n^\dagger Q_3^\dagger H_4^\dagger]. \quad (6.10)$$

Podemos expandir o operador entre  $[\dots]$  na base  $\{\tilde{E}_j\}$ , obtendo

$$H_4 Q_3 \tilde{E}_m Q_2 H_1 = \sum_k e_{mk} \tilde{E}_k. \quad (6.11)$$

Substituindo em (6.10), teremos

$$\mathcal{E}^{\text{SLM}}(\rho) = \sum_{kl} \chi_{kl}^{\text{SLM}} \tilde{E}_k \rho \tilde{E}_l^\dagger, \quad (6.12)$$

onde

$$\chi_{kl}^{\text{SLM}} = \sum_{mn} \chi_{mn}^{\text{LCD}} e_{mk} e_{nl}^*, \quad (6.13)$$

é a matriz de processo do SLM. Com isso, temos agora uma expressão geral para a operação implementada pelo SLM que depende da orientação das placas de onda e do nível de cinza do LCD. Dada uma operação de interesse sobre a polarização, caracterizada por uma matriz de processo  $\chi$ , podemos buscar numericamente uma configuração de placas tal que a matriz do SLM  $\chi^{\text{SLM}}$  seja a mais próxima possível. Isto pode ser feito, por exemplo, buscando a configuração que maximize a fidelidade média do processo, definida para o caso de um qubit como [31]

$$F = \frac{2 \text{Tr}\{\chi \chi^{\text{SLM}}\} + 1}{3}, \quad (6.14)$$

Esta quantidade representa a fidelidade entre os estados resultantes da operação ideal e real, tomando a média sobre todos os estados de entrada; a fidelidade máxima,  $F = 1$ , significa que as operações são idênticas.

### 6.3.2 Fidelidade entre a operação do SLM e uma operação unitária de interesse em informação quântica

Com os resultados apresentados acima, podemos avaliar a fidelidade entre a operação real implementada pelo SLM e uma dada operação unitária ideal que gostaríamos de implementar. Para isto, vamos considerar a seguinte unitária sobre um qubit:

$$\mathcal{U} = a \tilde{E}_0 - \sqrt{1 - a^2} \tilde{E}_2, \quad (6.15)$$

onde  $a \in [0, 1]$  e  $\tilde{E}_0$  e  $\tilde{E}_2$  são dados pela equação (5.15). Para obter a matriz de processo correspondente,  $\chi^{\mathcal{U}}$ , primeiramente aplicamos esta operação em um estado  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\mathcal{U}}(\rho) &= \mathcal{U} \rho \mathcal{U}^\dagger \\ &= a^2 \tilde{E}_0 \rho \tilde{E}_0 - a \sqrt{1 - a^2} \tilde{E}_0 \rho \tilde{E}_2 - a \sqrt{1 - a^2} \tilde{E}_2 \rho \tilde{E}_0 - (1 - a^2) \tilde{E}_2 \rho \tilde{E}_2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Em seguida, usando a equação (5.17), pode-se verificar que

$$\chi^{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & -a\sqrt{1 - a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a\sqrt{1 - a^2} & 0 & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

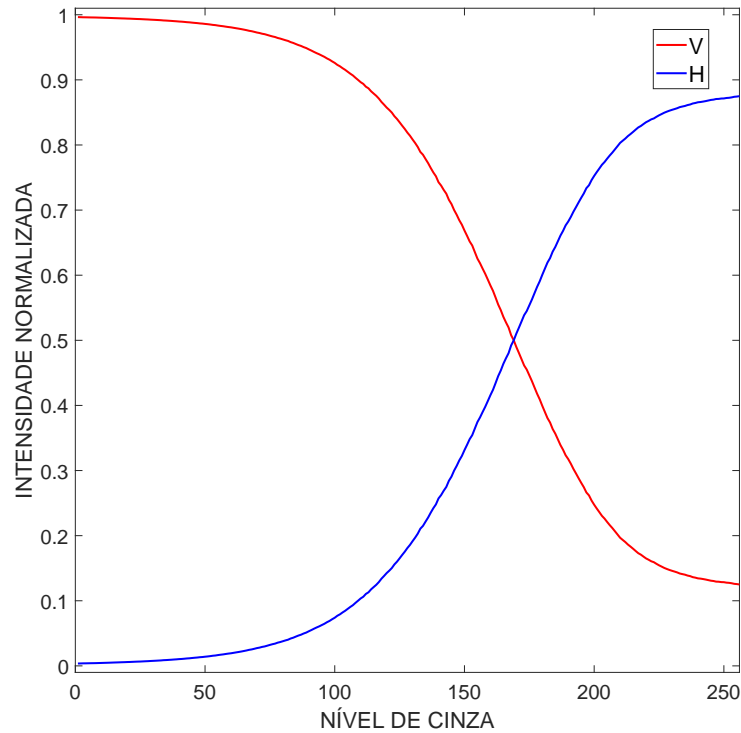


Figura 26 – Intensidade normalizada em função do nível de cinza de um feixe verticalmente polarizado medido na base  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  após passar pelo SLM. Dados de [34].

A operação unitária em (6.15) é de grande interesse em protocolos de informação quântica tais como teleporte quântico [32] e discriminação de estados [33]. Em experimentos de discriminação de estados, ela pode implementar rotações do estado de polarização de um fóton condicionadas ao seu estado de caminho. Isto cria uma correlação entres esses graus de liberdade que permite realizar transformações sobre o estado espacial fotônico.

Nas referências [34, 35], os autores utilizaram um SLM para implementar uma operação que mais se aproximasse de  $\mathcal{U}$ . Com este propósito, eles encontraram uma configuração que utilizava apenas HWPs, ou seja,  $H_1 \rightarrow \mathcal{E}^{\text{LCD}} \rightarrow H_2$ , onde  $\theta_1 = 28^\circ$  e  $\theta_2 = 29^\circ$  são os ângulos fixos de cada placa. O controle do parâmetro  $a$  é dado pelo nível de cinza (nc) do LCD e foi obtido incidindo-se um feixe verticalmente polarizado sobre o SLM e medindo-se a intensidade do feixe de saída na base  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  em função de nc. Os resultados obtidos estão reproduzidos na figura 26. Fazendo  $a(\text{nc}) = \sqrt{I_V/(I_V + I_H)}$ , verificou-se que para  $\text{nc} = 0, \dots, 255$ , o parâmetro  $a$  decresce monotonicamente de  $a_{\text{max}} \equiv a(0) = 0,9982$  a  $a_{\text{min}} \equiv a(255) = 0,3536$ . Isto significa que o SLM só poderia implementar  $\mathcal{U}$  no intervalo  $a_{\text{min}} \leq a \leq a_{\text{max}}$ .

Substituindo os valores de  $a(\text{nc})$  na equação (6.17), obtemos a matriz de processo desta operação unitária ideal em função do nível de cinza. Vamos agora compará-la com a operação real implementada pelo SLM. Para isto, calculamos  $\chi^{\text{SLM}}$  usando a equação (6.13) com a configuração de placas descrita acima e, em seguida, a sua fidelidade com  $\chi^{\mathcal{U}}$  usando a equação (6.14). Os resultados obtidos são mostrados na figura 27. Observa-se que até o

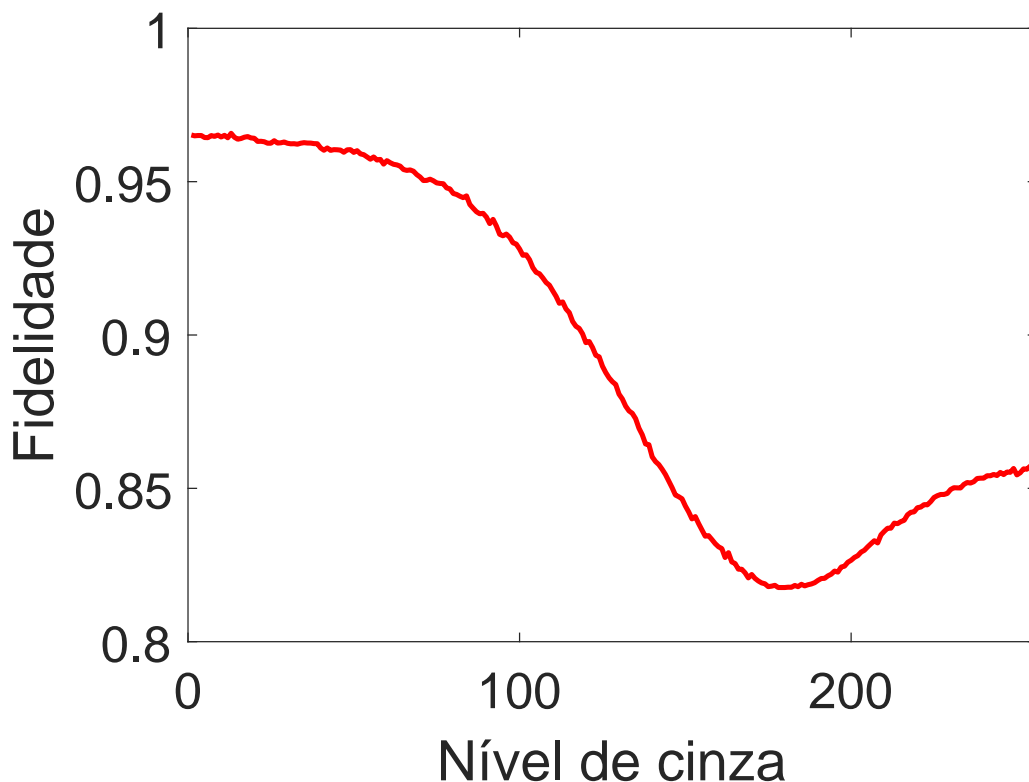


Figura 27 – Fidelidade média do processo [veja equação (6.14)] entre a operação unitária ideal  $\mathcal{U}$  e a operação real implementada pelo SLM  $\mathcal{E}^{\text{SLM}}$  nos experimentos reportados em [34,35].

nível de cinza próximo de 100, as fidelidades ficaram acima de 90%. Como foi visto na reconstrução das matrizes de Mueller e de processos (figuras 11 e 23, respectivamente), até esse nível o LCD se comporta aproximadamente como uma operação identidade. Além disso, como mostra a figura 26, os coeficientes  $a(nc)$  são muito próximos de 1 até  $nc \approx 100$  e, neste caso, a equação (6.15) mostra que  $\mathcal{U} \approx \tilde{E}_0 = I$ . Para valores maiores de  $nc$ , o LCD (e, conseqüentemente, o SLM) atua mais efetivamente como uma placa retardadora. Na figura 27, observa-se que as fidelidades se reduzem, chegando ao mínimo de 0,834 para  $nc = 175$ . Esses resultados mostram que a operação implementada pelo SLM é apenas uma boa aproximação da operação unitária ideal  $\mathcal{U}$ .

## 7 Conclusões

No nosso trabalho tínhamos como objetivo caracterizar um LCD, do ponto de vista de sua atuação sobre a polarização da luz, visando utilizá-lo como um SLM programável em experimentos de óptica e informação quântica. Na primeira parte do trabalho, utilizamos as equações de Maxwell para descrever a equação de onda da luz e dela explorar o comportamento do campo elétrico de um feixe monocromático se propagando na direção  $z$ . A partir disto, descrevemos as polarizações do feixe e a sua representação utilizando os vetores de Jones e Stokes. Através do formalismo de Mueller construímos uma matriz  $4 \times 4$  que codifica as propriedades polarimétricas de um dispositivo qualquer em seus elementos. Em seguida determinamos experimentalmente a matriz de Mueller do LCD em função do nível de cinza e verificamos a consistência dos resultados, mostrando que as previsões de sua atuação sobre um conjunto de estados de polarização estavam de acordo com o que foi medido. A partir dos elementos da matriz de Mueller do dispositivo, foi possível observar que ele possui níveis de diatenuação e polarizância próximos a zero. Em relação à retardância, observamos que o LCD atua na luz polarizada de entrada gerando uma polarização elíptica na saída. No entanto, verificamos que a atuação do dispositivo é compatível à de uma placa retardadora ideal apenas de forma aproximada, uma vez que ele introduz despolarização na luz incidente.

Na segunda parte do trabalho, o objetivo foi caracterizar a atuação do LCD sobre a polarização da luz a partir do formalismo de operações quânticas. Para isto, descrevemos a polarização como um estado de um qubit cujas transformações podem ser feitas através de operações unitárias e não unitárias. Em seguida, apresentamos o método de reconstrução tomográfica para operações sobre um qubit e o aplicamos para determinar a matriz de processos do LCD em função do nível de cinza. Analisando a atuação do LCD sobre os estados de polarização de entrada e também os autovalores da sua matriz de processos, verificamos que a operação implementada pelo dispositivo é apenas aproximadamente unitária. De posse da matriz de processos do LCD, derivamos uma expressão geral para a matriz de processo de um SLM, dispositivo formado por uma combinação do LCD entre placas de onda. Com esta expressão, é possível buscar numericamente por configurações das placas de onda tal que o SLM implemente operações de interesse sobre os estados de polarização da luz em função do nível de cinza no LCD. Como aplicação, usamos a expressão obtida para quantificar a fidelidade da operação real implementada pelo SLM com uma operação unitária ideal de interesse em protocolos de informação quântica, cujos dados estavam disponíveis na literatura.

## Referências

- [1] Griffiths, D.J.: *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 3rd edição, 1999. Citado na página 16.
- [2] Lima, RLS, ES Silva, AG Rodrigues, PT Araujo e NM Barbosa Neto: *Medindo os parâmetros de Stokes: Uma nova prática para ensino de óptica*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 42:e20200153, 2020. Citado na página 16.
- [3] Tompkins, Harland e Eugene A Irene: *Handbook of ellipsometry*. William Andrew, 2005. Citado na página 22.
- [4] Collett, Edward: *Measurement of the four Stokes polarization parameters with a single circular polarizer*. Optics Communications, 52(2):77–80, 1984, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401884902864>. Citado na página 23.
- [5] Hilfiker, James N, Nina Hong e Stefan Schoeche: *Mueller matrix spectroscopic ellipsometry*. Advanced Optical Technologies, 11(3-4):59–91, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 42.
- [6] Carlin, N, Eloisa Madeira Szanto, WA Seale, FO Jorge, FA Souza, IH Bechtold e LR Gasques: *Birrefringência em placas de onda e atividade óptica de uma solução de açúcar*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 27:349–355, 2005. Citado na página 25.
- [7] Ossikovski, Razvigor, Makrina Anastasiadou, Sami Ben Hatit, Enric García-Caurel e Antonello De Martino: *Depolarizing Mueller matrices: how to decompose them?* physica status solidi (a), 205, 2008. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123452744>. Citado na página 26.
- [8] Theocaris, Pericles S e Emmanuel E Gdoutos: *Matrix theory of photoelasticity*, volume 11. Springer, 2013. Citado na página 26.
- [9] Hecht, E.: *Optics*. Pearson Education, Incorporated, 2017, ISBN 9780133977226. <https://books.google.com.br/books?id=ZarLoQEACAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- [10] Vision Systems Design: *Polarization: Definition of Concepts, Techniques, Technologies*, 2024. <https://www.vision-systems.com/cameras-accessories/article/14092924/polarization-definition-of-concepts-techniques-technologies>, acesso em 2024-03-11. Citado na página 28.

- [11] Goldstein, Dennis H: *Polarized light*. CRC press, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 27, 38 e 41.
- [12] Tiwari, Vipin e Nandan S. Bisht: *Spatial Light Modulators and Their Applications in Polarization Holography*. Em Rosen, Joseph (editor): *Holography*, capítulo 1. IntechOpen, Rijeka, 2022. <https://doi.org/10.5772/intechopen.107110>. Citado na página 31.
- [13] Lu, Kanghua e Bahaa EA Saleh: *Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator*. *Optical Engineering*, 29(3):240–246, 1990. Citado na página 31.
- [14] Betiol, Anderson Duarte: *Verificação da autenticidade de impressões digitais em tempo real utilizando-se o correlator óptico compacto*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2002. Citado na página 31.
- [15] HOLOEYE Photonics AG: *Laboratory Tutorials: Hardware Operating Instructions & Software Operating Instructions*, 2007. Citado na página 32.
- [16] Dev, Kapil e Anand Asundi: *Mueller–Stokes polarimetric characterization of transmissive liquid crystal spatial light modulator*. *Optics and Lasers in Engineering*, 50(4):599–607, 2012. Citado na página 40.
- [17] DeBoo, Brian, J Sasian e R Chipman: *Degree of polarization surfaces and maps for analysis of depolarization*. *Optics express*, 12(20):4941–4958, 2004. Citado na página 42.
- [18] Gil, Jose e Eusebio Bernabeu: *Depolarization and Polarization Indices of an Optical System*. *Journal of Modern Optics - J MOD OPTIC*, 33:185–189, fevereiro 1986. Citado na página 43.
- [19] Márquez, Andrés, I Moreno, Claudio Iemmi, A Lizana, J Campos e MJ Yzuel: *Mueller–Stokes characterization and optimization of a liquid crystal on silicon display showing depolarization*. *Optics express*, 16(3):1669–1685, 2008. Citado na página 43.
- [20] Aiello, A., G. Puentes, D. Voigt e J. P. Woerdman: *Maximum-likelihood estimation of Mueller matrices*. *Opt. Lett.*, 31(6):817–819, Mar 2006. <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-31-6-817>. Citado na página 43.
- [21] Barnett, Stephen: *Quantum information*, volume 16. Oxford University Press, 2009. Citado na página 46.
- [22] Russ, Maximilian e Guido Burkard: *Three-electron spin qubits*. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 29(39):393001, 2017. Citado na página 46.

- [23] Nielsen, Michael A e Isaac L Chuang: *Quantum computation and quantum information*, volume 2. Cambridge university press Cambridge, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 49.
- [24] Taguchi, Gen, Tatsuo Dougakiuchi, Nobuaki Yoshimoto, Katsuya Kasai, Masataka Iinuma, Holger F Hofmann e Yutaka Kadoya: *Measurement and control of spatial qubits generated by passing photons through double slits*. Physical Review A, 78(1):012307, 2008. Citado na página 46.
- [25] Carvalho, LM, C Lavor e VS Motta: *Caracterização matemática e visualização da esfera de Bloch: ferramentas para computação quântica*. Trends in Computational and Applied Mathematics, 8(3):351–360, 2007. Citado na página 47.
- [26] Bergou, János A e Mark Hillery: *Introduction to the theory of quantum information processing*. Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 46.
- [27] Amaral, Bárbara, Alexandre T Baraviera e MO Terra Cunha: *Mecânica quântica para matemáticos em formação*. Impa-28th Colóquio Brasileiro de Matemática, 2011. Citado na página 47.
- [28] Schumacher, Benjamin e Michael Westmoreland: *Quantum processes systems, and information*. Cambridge University Press, 2010. Citado na página 48.
- [29] James, Daniel FV, Paul G Kwiat, William J Munro e Andrew G White: *Measurement of qubits*. Physical Review A, 64(5):052312, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.
- [30] Jong, Jarn de: *Fault-tolerant quantum computation: Implementation of a fault-tolerant SWAP operation on the IBM 5-qubit device*. Tese de Mestrado, Delft University of Technology, January 2019. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:39258a70-a347-40bb-a2f9-9ca301a71652>. Citado na página 55.
- [31] O’Brien, J. L., G. J. Pryde, A. Gilchrist, D. F. V. James, N. K. Langford, T. C. Ralph e A. G. White: *Quantum Process Tomography of a Controlled-NOT Gate*. Phys. Rev. Lett., 93:080502, Aug 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.080502>. Citado na página 61.
- [32] Neves, L., M. A. Solís-Prosser, A. Delgado e O. Jiménez: *Quantum teleportation via maximum-confidence quantum measurements*. Phys. Rev. A, 85:062322, Jun 2012. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.062322>. Citado na página 62.
- [33] Jiménez, O., M. A. Solís-Prosser, A. Delgado e L. Neves: *Maximum-confidence discrimination among symmetric qudit states*. Phys. Rev. A, 84:062315, Dec 2011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.062315>. Citado na página 62.

- 
- [34] Solís-Prosser, M A, O Jiménez, A Delgado e L Neves: *Enhanced discrimination of high-dimensional quantum states by concatenated optimal measurement strategies*. Quantum Science and Technology, 7(1):015017, dec 2021. <https://dx.doi.org/10.1088/2058-9565/ac37c4>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.
- [35] Melo, L. F., M. A. Solís-Prosser, O. Jiménez, A. Delgado e L. Neves: *Experimental optimal discrimination of  $N$  states of a qubit with fixed rates of inconclusive outcomes*. Phys. Rev. Res., 5:043149, Nov 2023. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.5.043149>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 63.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Determinação da matriz de Mueller

Para obter a matriz de Mueller,  $M$ , de um dispositivo óptico, vamos considerar sua atuação sobre estados de polarização de entrada dados pelos vetores de Stokes  $S^A$ , onde  $A \in \{H, V, M, P, R, L\}$ . Denotando os vetores de Stokes de saída como  $S_{\text{out}}^A$ , podemos escrever  $S_{\text{out}}^A = MS^A$ , e usando as equações (2.40) e (2.42), teremos

$$S_{\text{out}}^H = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}^H = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12} \\ m_{21} + m_{22} \\ m_{31} + m_{32} \\ m_{41} + m_{42} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$S_{\text{out}}^V = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}^V = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} - m_{12} \\ m_{21} - m_{22} \\ m_{31} - m_{32} \\ m_{41} - m_{42} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$S_{\text{out}}^P = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}^P = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{13} \\ m_{21} + m_{23} \\ m_{31} + m_{33} \\ m_{41} + m_{43} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$S_{\text{out}}^M = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}^M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} - m_{13} \\ m_{21} - m_{23} \\ m_{31} - m_{33} \\ m_{41} - m_{43} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$S_{\text{out}}^R = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}^R = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{14} \\ m_{21} + m_{24} \\ m_{31} + m_{34} \\ m_{41} + m_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$S_{\text{out}}^L = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}^L = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} - m_{14} \\ m_{21} - m_{24} \\ m_{31} - m_{34} \\ m_{41} - m_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Os vetores de Stokes de saída podem ser determinados a partir das intensidades medidas nas bases  $\{H, V\}$ ,  $\{P, M\}$  e  $\{R, L\}$ , como

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}^A = \begin{bmatrix} I_H^A + I_V^A \\ I_H^A - I_V^A \\ I_P^A - I_M^A \\ I_R^A - I_L^A \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde o índice superior indica a polarização de entrada  $A$  e o inferior indica o estado em que ela é medida após o dispositivo. Com isso, podemos resolver o sistema de equações acima e obter os elementos da matriz de Mueller em função das intensidades. Por exemplo, das equações (A.1) e (A.2) temos que

$$S_0^H = m_{11} + m_{12} \quad (\text{A.8})$$

$$S_0^V = m_{11} - m_{12}. \quad (\text{A.9})$$

Resolvendo o sistema para  $m_{11}$  e  $m_{12}$  e usando a equação (A.7), teremos como solução

$$m_{11} = \frac{1}{2}(S_0^H + S_0^V) = \frac{1}{2}((I_H^H + I_V^H) + (I_H^V + I_V^V)), \quad (\text{A.10})$$

$$m_{12} = \frac{1}{2}(S_0^H - S_0^V) = \frac{1}{2}((I_H^H + I_V^H) - (I_H^V + I_V^V)). \quad (\text{A.11})$$

Para simplificar a notação vamos representar as intensidades como

$$I_B^A \equiv AB. \quad (\text{A.12})$$

Dessa forma, as equações (A.10) e (A.11) serão reescritas como

$$m_{11} = \frac{1}{2}(HH + HV + VH + VV), \quad (\text{A.13})$$

$$m_{12} = \frac{1}{2}(HH + HV - VH - VV). \quad (\text{A.14})$$

Realizando o mesmo procedimento descrito acima, determinamos os demais ele-

mentos da matriz de Mueller ( $m_{ij}$ )

$$m_{13} = 1/2(PH + PV - MH - MV), \quad (\text{A.15})$$

$$m_{14} = 1/2(RH + RV - LH - LV), \quad (\text{A.16})$$

$$m_{21} = 1/2(HH - HV + VH - VV), \quad (\text{A.17})$$

$$m_{22} = 1/2(HH - HV - VH + VV), \quad (\text{A.18})$$

$$m_{23} = 1/2(PH - PV - MH + MV), \quad (\text{A.19})$$

$$m_{24} = 1/2(RH - RV - LH + LV), \quad (\text{A.20})$$

$$m_{31} = 1/2(HP - HM + VP - VM), \quad (\text{A.21})$$

$$m_{32} = 1/2(HP - HM - VP + VM), \quad (\text{A.22})$$

$$m_{33} = 1/2(PP - PM - MP + MM), \quad (\text{A.23})$$

$$m_{34} = 1/2(RP - RM - LP + LM), \quad (\text{A.24})$$

$$m_{41} = 1/2(HR - HL + VR - VL), \quad (\text{A.25})$$

$$m_{42} = 1/2(HR - HL - VR + VL), \quad (\text{A.26})$$

$$m_{43} = 1/2(PR - PL - MR + ML), \quad (\text{A.27})$$

$$m_{44} = 1/2(LL - RL - LR + RR), \quad (\text{A.28})$$

conforme mostrado na equação (2.52).

# APÊNDICE B – Determinação da matriz de processos

Seja  $\rho'_j = \mathcal{E}(\rho_j)$ . Usando as equações (5.17) e (5.20), temos

$$\mathcal{E}(\rho_j) = \sum_k \lambda_{jk} \rho_k = \sum_{mn} \tilde{E}_m \rho_j \tilde{E}_n^\dagger \chi_{mn}. \quad (\text{B.1})$$

Expandindo os somatórios da relação anterior, teremos

$$\begin{aligned} & \lambda_{j1}\rho_1 + \lambda_{j2}\rho_2 + \lambda_{j3}\rho_3 + \lambda_{j4}\rho_4 = \\ & = \tilde{E}_0 \rho_j \tilde{E}_0 \chi_{11} + \tilde{E}_0 \rho_j \tilde{E}_1 \chi_{12} + \tilde{E}_0 \rho_j \tilde{E}_2 \chi_{13} + \tilde{E}_0 \rho_j \tilde{E}_3 \chi_{14} + \\ & + \tilde{E}_1 \rho_j \tilde{E}_0 \chi_{21} + \tilde{E}_1 \rho_j \tilde{E}_1 \chi_{22} + \tilde{E}_1 \rho_j \tilde{E}_2 \chi_{23} + \tilde{E}_1 \rho_j \tilde{E}_3 \chi_{24} + \\ & + \tilde{E}_2 \rho_j \tilde{E}_0 \chi_{31} + \tilde{E}_2 \rho_j \tilde{E}_1 \chi_{32} + \tilde{E}_2 \rho_j \tilde{E}_2 \chi_{33} + \tilde{E}_2 \rho_j \tilde{E}_3 \chi_{34} + \\ & + \tilde{E}_3 \rho_j \tilde{E}_0 \chi_{41} + \tilde{E}_3 \rho_j \tilde{E}_1 \chi_{42} + \tilde{E}_3 \rho_j \tilde{E}_2 \chi_{43} + \tilde{E}_3 \rho_j \tilde{E}_3 \chi_{44}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde os termos do lado esquerdo da equação são referentes à expansão da tomografia de estado para determinação do operador  $\rho'_j$  e os do lado direito representam o operador após a interação, mas associado ao processo aplicado. Considerando os 4 operadores da base canônica dados pela equação (5.18), teremos

1. Para  $j = 1$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{13} & \lambda_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{11} + \chi_{14} + \chi_{41} + \chi_{44} & \chi_{12} - \chi_{13} + \chi_{42} - \chi_{43} \\ \chi_{21} + \chi_{24} + \chi_{31} + \chi_{34} & \chi_{22} - \chi_{23} + \chi_{32} - \chi_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

2. Para  $j = 2$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{23} & \lambda_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{12} + \chi_{13} + \chi_{42} + \chi_{43} & \chi_{11} - \chi_{14} + \chi_{41} - \chi_{44} \\ \chi_{22} + \chi_{23} + \chi_{32} + \chi_{33} & \chi_{21} - \chi_{24} + \chi_{31} - \chi_{34} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

3. Para  $j = 3$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{31} & \lambda_{32} \\ \lambda_{33} & \lambda_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{21} + \chi_{24} - \chi_{31} - \chi_{34} & \chi_{22} - \chi_{23} - \chi_{32} + \chi_{33} \\ \chi_{11} + \chi_{14} - \chi_{41} - \chi_{44} & \chi_{12} - \chi_{13} - \chi_{42} + \chi_{43} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

4. Para  $j = 4$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{41} & \lambda_{42} \\ \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{22} + \chi_{23} - \chi_{32} - \chi_{33} & \chi_{21} - \chi_{24} - \chi_{31} + \chi_{34} \\ \chi_{12} + \chi_{13} - \chi_{42} - \chi_{43} & \chi_{11} - \chi_{14} - \chi_{41} + \chi_{44} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o sistema de equações, determinamos a matriz de processo  $\chi$  em função dos elementos  $\lambda_{jk}$  obtidos via QST, que será dada por

$$\chi = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} + \lambda_{44} & \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{34} + \lambda_{43} & \lambda_{21} - \lambda_{12} - \lambda_{34} + \lambda_{43} & \lambda_{11} - \lambda_{22} + \lambda_{33} - \lambda_{44} \\ \lambda_{13} + \lambda_{24} + \lambda_{31} + \lambda_{42} & \lambda_{14} + \lambda_{23} + \lambda_{32} + \lambda_{41} & \lambda_{23} - \lambda_{14} - \lambda_{32} + \lambda_{41} & \lambda_{13} - \lambda_{24} + \lambda_{31} - \lambda_{42} \\ \lambda_{13} + \lambda_{24} - \lambda_{31} - \lambda_{42} & \lambda_{14} + \lambda_{23} - \lambda_{32} - \lambda_{41} & \lambda_{23} - \lambda_{14} + \lambda_{32} - \lambda_{41} & \lambda_{13} - \lambda_{24} - \lambda_{31} + \lambda_{42} \\ \lambda_{11} + \lambda_{22} - \lambda_{33} - \lambda_{44} & \lambda_{12} + \lambda_{21} - \lambda_{34} - \lambda_{43} & \lambda_{21} - \lambda_{12} + \lambda_{34} - \lambda_{43} & \lambda_{11} - \lambda_{22} - \lambda_{33} + \lambda_{44} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Definindo  $\Lambda \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{E}_0 & \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_2 & -\tilde{E}_0 \end{bmatrix}$  e reescrevendo a equação anterior de forma mais conveniente em termos de blocos de matrizes, podemos expressar a matriz de processos da seguinte maneira:

$$\chi = \Lambda \begin{bmatrix} \rho'_1 & \rho'_2 \\ \rho'_3 & \rho'_4 \end{bmatrix} \Lambda. \quad (\text{B.8})$$