UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO COM INCERTEZAS

Claret Laurente Sabioni

Orientador: Prof. Dr. João Antônio de Vasconcelos

Belo Horizonte, 21 de fevereiro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DESENVOLVIMENTO DE MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO COM INCERTEZAS

LINHA DE PESQUISA: OTIMIZAÇÃO

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Claret Laurente Sabioni

Orientador: Prof. Dr. João Antônio de Vasconcelos

Belo Horizonte, 21 de fevereiro de 2017

Sabioni, Claret Laurente.
S116d Desenvolvimento de métodos para solução de problemas de otimização multiobjetivo com incertezas [recurso eletrônico] / Claret Laurente Sabioni. - 2017.
1 recurso online (xxx, 226 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: João Antônio de Vasconcelos

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 215-226.
Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Otimização multiobjetivo - Teses. 3. Algoritmos genéticos - Teses. I. Vasconcelos, João Antônio de. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

Ficha catalográfica: Biblioteca Prof. Mário Werneck, Escola de Engenharia da UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ATA DA 247ª DEFESA DE TESE DE DOUTORADO
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ATA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO do aluno **Claret Laurente Sabioni** - registro de matrícula de número 2012682400. Às 14:00 horas do dia 21 do mês de fevereiro de 2017, reuniu-se na Escola de Engenharia da UFMG a Comissão Examinadora da TESE DE DOUTORADO para julgar, em exame final, o trabalho intitulado **"Desenvolvimento de Métodos para Solução de Problemas de Otimização Multiobjetivo com Incertezas"** da Área de Concentração em Sistemas de Computação e Telecomunicações. O Prof. João Antônio de Vasconcelos, orientador do aluno, abriu a sessão apresentando os membros da Comissão e, dando continuidade aos trabalhos, informou aos presentes que, de acordo com o Regulamento do Programa no seu Art. 8.16, será considerado APROVADO na defesa da Tese de Doutorado o candidato que obtiver a aprovação unânime dos membros da Comissão Examinadora. Em seguida deu início à apresentação do trabalho pelo Candidato. Ao final da apresentação seguiu-se a arguição do candidato pelos examinadores. Logo após o término da arguição a Comissão Examinadora se reuniu, sem a presença do Candidato e do público, e elegeu o Prof João Antônio de Vasconcelos para presidir a fase de avaliação do trabalho, constituída de deliberação individual de APROVAÇÃO ou de REPROVAÇÃO e expedição do resultado final. As deliberações individuais de cada membro da Comissão Examinadora foram as seguintes:

Membro da Comissão Examinadora	**Instituição de Origem**	**Deliberação**
Prof. Dr. João Antônio de Vasconcelos - Orientador	DEE (UFMG)	Aprovado
Prof. Dr. Frederico Gadelha Guimarães	DEE (UFMG)	Aprovado
Prof. Dr. Lucas de Souza Batista	DEE (UFMG)	Aprovado
Prof. Dr. Gustavo Luis Soares	DEE (PUCMINAS)	Aprovado
Prof. Dr. Marcus Henrique Soares Mendes	Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas (UFV)	Aprovado
Prof. Dr. Agnaldo José da Rocha Reis	Departamento de Engenharia de Controle e Automação (UFOP)	Aprovado

Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza	Departamento de Computação (UFOP)	Aprovado

Tendo como base as deliberações dos membros da Comissão Examinadora a Tese de Doutorado foi Aprovada. O resultado final de aprovação foi comunicado publicamente ao Candidato pelo Presidente da Comissão, ressaltando que a obtenção do Grau de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA fica condicionada à entrega do TEXTO FINAL da Tese de Doutorado. O Candidato terá um prazo máximo de 30 (trinta) dias, a partir desta data, para fazer as CORREÇÕES DE FORMA e entregar o texto final da Tese de Doutorado na secretaria do PPGEE/UFMG. As correções de forma exigidas pelos membros da Comissão Examinadora deverão ser registradas em um exemplar do texto da Tese de Doutorado, cuja verificação ficará sob a responsabilidade do Presidente da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada pelo Presidente da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 21 de fevereiro de 2017.

Belo Horizonte, 08 de abril de 2021.

LUIS ANTONIO AGUIRRE
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Aguirre**, **Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 08/04/2021, às 22:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0666256** e o código CRC **0F924250**.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e luz em várias etapas do desenvolvimento desta tese.

À minha mãe Kátia Elizabeth e ao meu pai Antônio Claret pelo apoio, pela torcida, pelo carinho e amor que, com certeza, moldou minha mente e minha forma de pensar e de atacar os problemas, sejam sociais ou científicos.

Ao meu orientador prof. João Antônio de Vasconcelos pelo incentivo, motivação, direcionamentos, ideias, conversas e por me inserir no mundo da pesquisa desde cedo.

Ao prof. Selênio Rocha Silva (*in memoriam*) pelos ensinamentos e discussão a respeito de máquinas elétricas.

Aos profs. Frederico Gadelha Guimarães, Lucas de Souza Batista, Gustavo Luís Soares, Marcus Henrique Soares Mendes, Agnaldo José da Rocha Reis, e Marcone Jamilson Freitas Souza, por terem aceitado o convite para participar da banca.

Ao PPGEE-UFMG pela oportunidade de realização do curso de doutorado em Otimização Robusta e à FAPEMIG por financiar parte da pesquisa.

Aos meus primos(as), tios(as) e demais familiares de Minas Gerais, São Paulo e Rondônia pelos votos de sucesso recebidos.

Aos colegas do Laboratório de Computação Evolucionária pelo apoio mútuo e troca de ideias, dos quais se destacam Carlos Barbosa, João Batista, Marcos Felipe, Marcus Mendes, Moisés Ferber e Rafael Alexandre.

Aos amigos da UFMG, Douglas Max, Gabriel Vinicios, Ícaro Gonçalves, Marcos Paulo, Luiz Claudio, e demais, que sempre confabularam comigo e me motivavam.

Aos amigos e às amigas que conviveram comigo, me apoiaram, motivaram e compreenderam minhas repetidas ausências, especialmente Amanda Figueirêdo, Carlos Castelano, Bruno da Silva, Karen Pechin, Miguel Valverde e João Gabriel.

Aos colegas de Embraer, Celso Nakashima, Fernanda Altoe e demais, que sempre me apoiaram e me incentivaram a seguir em frente.

Aos recentes colegas da TFG, Lucas Amaro, Thibault Quillard, Victor Lambertucci, Vítor Margato, José Noblecilla, Rafael Feldberg e demais, que também abraçaram minha causa e me motivaram durante toda reta final.

"*Se você não concretizar o seu sonho, uma pessoa irá contratá-lo para ajudar a concretizar o sonho dela*."

Tony Gaskins

Resumo

A otimização multiobjetivo é muitas vezes empregada na fase de projeto de um sistema, com a qual se obtém um conjunto de soluções Pareto-ótimas aproximadas para o modelo do sistema projetado. Porém, no mundo real várias fontes de incertezas podem afetar negativamente a condição ótima das soluções encontradas. Estas incertezas devem ser identificadas, mensuradas e consideradas durante a fase de projeto, com o objetivo de minimizar seus impactos nas fases posteriores. Por isso, métodos de otimização robusta multiobjetivo têm sido cada vez mais utilizados nas fases de projeto para mitigar os efeitos nocivos das incertezas. Esta tese, além de apresentar os diferentes tipos de incertezas, o conceito de soluções robustas e os métodos comumente utilizados na literatura para processar otimizações robustas, também propõe um conjunto de funções teste para otimização robusta, um conjunto de novas métricas de robustez e métodos de otimização robusta, cuja combinação permitiu a criação de novos algoritmos de otimização robusta multiobjetivo. O foco desta tese se dá em três novos algoritmos para problemas com incertezas paramétricas intervalares: 1) *Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm* (WCEMOEA), que faz uso da formulação *minimax* juntamente com uma estimativa de pior caso de incertezas para encontrar soluções que minimizem o pior caso; 2) *Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm* (RHySPEA), que combina o uso de duas novas métricas de robustez ao uso de uma inédita base de dados externa para mensurar e minimizar a sensibilidade das soluções frente às incertezas com baixa reamostragem; 3) *Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor* (MDEA-RF), que consiste em um novo método interativo para minimização do maior desvio possível de uma solução frente às incertezas em função de um fator de robustez definido pelo tomador de decisão. Os algoritmos foram aplicados em funções teste e em problemas reais de engenharia, onde demonstraram alta capacidade de encontrar soluções robustas, de forma eficiente e com reduzido número de avaliações do modelo.

Palavras-chave:

Otimização robusta multiobjetivo; algoritmo genético; projeto robusto; otimização *minimax*.

Abstract

The multiobjective optimization is rather used on the design phase of a system, whereby a set of approximated Pareto-optimal solutions is obtained for the system model under design. However, many sources of uncertainties in real world may jeopardize the solutions optimal condition reach so far. These uncertainties must be identified, measured, and taken into account on the design phase, aiming to minimize their impact on the following phases. Thus, multiobjective robust optimization methods have been widely employed on design phases in order to reduce the harmful effects of uncertainties. This thesis presents the different types of uncertainties, the concept of robust solutions, the most common methods of robust optimization in the literature, and the proposal of a set of test functions for robust optimization, a set of new robust metrics and robust optimization methods, which were combined for developing new algorithms for multiobjective robust optimization. Three novel algorithms are highlighted in this thesis for solving problems with interval parametric uncertainties: 1) *Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm* (WCEMOEA), uses the *minimax* formulation jointly with a worst case scenario estimator to find solutions that minimize the worst case; 2) *Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm* (RHySPEA), combines the use of two new robustness metrics with the use of an external database to measure and minimize the solutions sensitivity against uncertainties with few resampling; 3) *Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor* (MDEA-RF), which is a novel iterative method aiming to minimize the maximum deviation of a perturbed solution based on the definition of a robustness factor by the decision maker. The algorithms were applied to test functions, and to real engineering problems, being successful to find robust solutions efficiently, with few model evaluations.

Keywords:
Multiobjective robust optimization; genetic algorithm; robust design; *minimax optimization*.

Lista de Figuras

Figura 2-1 - Mapeamento entre vetores do espaço de variáveis de decisão e vetores do espaço dos objetivos. Neste exemplo, tem-se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. 11
Figura 2-2 - Conjunto de soluções não-dominadas no espaço das variáveis de decisão e fronteira Pareto-ótima no espaço dos objetivos. Neste exemplo, tem-se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. 13
Figura 5-1 – Diferenciação entre a necessidade de uso de *Robust Design Optimization* e de *Reliability-based Design Optimization*. Adaptada de (ZANG *et al*., 2002). 34
Figura 5-2 – Quatro diferentes tipos de situações envolvendo a fronteira Pareto-ótima global e a fronteira Pareto-ótima robusta global em seus respectivos espaços. Adaptado de (DEB e GUPTA, 2006). 50
Figura 6-1 – Processo de identificação da necessidade de se utilizar um algoritmo de otimização robusta. 52
Figura 6-2 – Processo precedente ao desenvolvimento do algoritmo de otimização robusta. 54
Figura 6-3 – Diagrama de interação entre os agentes: otimizador e tomador de decisão, durante as diferentes fases do processo de MORDO. 60
Figura 7-1 – Curva de resposta da função teste *SinusoidalFunction*. 63
Figura 7-2 – Superfície de resposta da função teste *MultiPeaksFuncion* (a) em perspectiva, e (b) em formato de mapa de calor destacando as regiões de baixa e alta robustez. 64
Figura 7-3 - Representação 3D de duas funções multimodais: f_1 (em vermelho) e f_2 (em azul), que contêm quatro bacias de atração. 66
Figura 7-4 – Valores de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4. 67
Figura 7-5 – Função teste *ConcurrentSlopes* com destaque para as superfícies de resposta de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ em perspectiva (a) e em relação a seções transversais de x_2 (b). 68
Figura 7-6 – (a) Curva da função $f_2(\mathbf{x})$ de *ConcurrentSlopes* ao longo de x_2 para x_1=0, e (b) mapa de calor de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, com destaque para regiões crescentes de robustez de 1 a 5. 69

Figura 7-7 – Superfície de resposta em perspectiva dos objetivos $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, e da restrição $c(\mathbf{x})$ da função teste *ConcurrentSlopesContraint*..... 71
Figura 8-1 – Exemplo de função convexa no domínio $U(\mathbf{x_0})$..... 76
Figura 8-2 – Comparativo das respostas das métricas MR1 (vermelho contínuo) e MR2 (verde) em relação às métricas FFCG (vermelho pontilhado) e desvio padrão (azul), para a *SinusoidalFunction*..... 81
Figura 8-3 – Comparativo das respostas das métricas MR3 (vermelho contínuo) e MR4 (verde) em relação às métricas MR-GLR (vermelho pontilhado) e desvio padrão (azul), para a *SinusoidalFunction*..... 83
Figura 8-4 – Comparativo das respostas das métricas MR1 (vermelho contínuo) e MR2 (verde) em relação às métricas FFCG (vermelho pontilhado) e desvio padrão (azul), para a *SinusoidalFunction*. Zoom na região $0 \leq x \leq 3$..... 84
Figura 8-5 – Esquemático ilustrativo do perfil de uma função $f(x)$ com quatro pontos: a, b, c, d, sujeitos à mesma perturbação $\pm p$..... 85
Figura 9-1 - Exemplo de consolidação do pior caso de incertezas real (asterisco) e por meio de estimativas (quadrado)..... 90
Figura 9-2 - Sistema de armazenamento de dados do RHySPEA. Todos os dados gerados no espaço de decisão são armazenados em suas caixas (hipercubos) correspondentes..... 99
Figura 9-3 - Padrão de indexação dos hipercubos-n_v-D, para n_v=1, n_v=2 e n_v=3..... 99
Figura 9-4 – Exemplo de região de erro Γ, definida pela caixa real [$\mathbf{a}$] e pela caixa aproximada [$\tilde{\mathbf{a}}$], sendo $\mathbf{[x]_i}$ uma caixa elementar qualquer..... 101
Figura 9-5 - (a) Obtenção dos pontos ideais de minimização não-dominados frente à maximização, e (b) obtenção dos pontos ideais de maximização considerando a máxima tolerância aceitável dos objetivos..... 106
Figura 9-6 - Exemplo de delimitação da região Q de alto desempenho por meio da união de diferentes caixas..... 107
Figura 9-7 – Diagrama de funcionamento do MDEA-RF..... 114
Figura 10-1 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *OffsetValleys*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\mathbf{F^{max}}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções..... 124

Figura 10-2 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *ConcurrentSlopes*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\mathbf{F}^{max}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 126
Figura 10-3 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *ConcurrentSlopesConstraint*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\mathbf{F}^{max}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 127
Figura 10-4 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *Deb2Obj-1*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se os piores casos simulados não-dominados para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções..... 128
Figura 10-5 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *Deb2Obj-2*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\mathbf{F}^{max}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 129
Figura 10-6 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *Deb3Obj*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos na visão frontal, em (b) tem-se a $\mathbf{F}^{max}$ para cada conjunto de soluções na visão frontal, em (c) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos em perspectiva, em (d) tem-se a $\mathbf{F}^{max}$ para os conjuntos soluções em perspectiva e em (e) as variáveis de decisão dos conjuntos soluções. 131
Figura 10-7 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *OffsetValleys*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 137
Figura 10-8 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *ConcurrentSlopes*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 138
Figura 10-9 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *Deb2Obj-1*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 139

Figura 10-10 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *Deb2Obj-2*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 140
Figura 10-11 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *Deb3Obj*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções. 140
Figura 10-12 – Resultados do MOEA para *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço dos objetivos e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço dos objetivos com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas. 146
Figura 10-13 - Valores esperados de *OffsetValleys* na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4. 147
Figura 10-14 – Resultados do MOEA para o valor esperado de *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço dos objetivos e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço dos objetivos com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas. 148
Figura 10-15 – Valores do pior caso de incertezas de *OffsetValleys* na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4. 149
Figura 10-16 – Resultados do MOEA para o pior caso de incertezas de *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço dos objetivos e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço dos objetivos com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas. 150
Figura 10-17 – Delimitação da região de interesse $\mathcal{Q}$ (região de alto desempenho), pela união de caixas intervalares oriundas da tolerância de 10% de depreciação em cada objetivo de *OffsetValleys*. 151
Figura 10-18 – Varredura paramétrica no espaço das variáveis de *OffsetValleys* fazendo x_1 variar para x_2=1 e x_2=4. Pontos verdes e vermelhos mostram, respectivamente, soluções das funções-base 4 e 3 contidas na região de interesse. 152
Figura 10-19 – Espaço dos objetivos de *OffsetValleys* com a região $\mathcal{Q}$ em evidência. Em verde tem-se a fronteira Pareto-ótima das funções-base 4, e em vermelho tem-se parte da fronteira Pareto-ótima das funções-base 3. 152

Figura 10-20 – Valores da sensibilidade média de *OffsetValleys* na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4. Valores da máxima sensibilidade das funções f_1**(x)** e f_2**(x)** na (c) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (d) seção transversal em x_1 para x_2=4. A região de interesse é delimitada por linhas tracejadas. 154
Figura 10-21 – Resultados do RHySPEA-I para *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço das sensibilidades e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço das sensibilidades com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas. 155
Figura 10-22 – Resultados do RHySPEA-II para *OffsetValleys* com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço das sensibilidades e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se a fronteira Pareto-ótima global no espaço das sensibilidades com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas. 156
Figura 10-23 – Valores da sensibilidade média de *OffsetValleys2* na (a) seção transversal em x_1' para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1' para x_2=4. 157
Figura 10-24 – (a) fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos macro-objetivos de *Deb2Obj-1* obtidas pelo MOEA (losango preto), pelo WCEMOEA (losango vermelho) e segundo o valor esperado das funções objetivo (linha tracejada) para δ=0,007, (c) δ=0,008, (e) δ=0,009 e (g) δ=0,01, e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas do MOEA (preto) e do WCEMOEA (vermelho) para δ=0,007, (d) δ=0,008, (f) δ=0,009 e (h) δ=0,01. 160
Figura 10-25 – (a) fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço das sensibilidades de *Deb2Obj-1* obtidas pelo RHySPEA-I (losango azul) e pelo RHySPEA-II (losango magenta) para δ=0,007, (c) δ=0,008, (e) δ=0,009 e (g) δ=0,01, e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas do RHySPEA-I (azul) e do RHySPEA-II (magenta) para δ=0,007, (d) δ=0,008, (f) δ=0,009 e (h) δ=0,01. 163
Figura 10-26 – Distribuição das soluções Pareto-ótimas no espaço dos objetivos de *Deb2Obj-1* obtidas pelo MOEA (quadrado preto), pelo WCEMOEA (quadrado vermelho), pelo RHySPEA-I (quadrado azul), e pelo RHySPEA-II (quadrado magenta), e a fronteira Pareto-ótima teórica do valor esperado das funções objetivo (linha tracejada) para (a) δ=0,007, (b) δ=0,008, (c) δ=0,009 e (d) δ=0,01..... 164

Figura 10-27 – Valor das soluções ótimas robustas aproximadas da *SinusoidalFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no (a) espaço dos objetivos e no (b) espaço normalizado das sensibilidades. 167
Figura 10-28 – Pontos ótimos robustos aproximados da *SinusoidalFunction* gerados pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço dos macro-objetivos. 169
Figura 10-29 – Soluções ótimas robustas aproximadas da *SinusoidalFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço das variáveis de decisão, em que o subscrito 1 de λ refere-se ao MDEA-RF e o 2 ao *framework* com MR0. 170
Figura 10-30 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *SinusoidalFunction* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos, onde a métrica de robustez é definida como um objetivo. 171
Figura 10-31 – Valor das soluções ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no (a) espaço dos objetivos e no (b) espaço normalizado das sensibilidades. 171
Figura 10-32 – Pontos ótimos robustos aproximados da *MultiPeaksFunction* gerados pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço dos macro-objetivos. 172
Figura 10-33 – Soluções ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço das variáveis de decisão com visão (a) frontal e (b) em perspectiva, em que o subscrito 1 de λ refere-se ao MDEA-RF e o 2 ao *framework* com MR0. 173
Figura 10-34 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos, onde a métrica de robustez é definida como um objetivo. 174
Figura 10-35 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos variáveis de decisão. 175

Figura 10-36 – Valor das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo (a,b) MDEA-RF e pelo (c,d) *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no (a,c) espaço dos objetivos e no (b,d) espaço normalizado das sensibilidades..... 176
Figura 10-37 – Pontos ótimos robustos aproximados da *ConcurrentSlopes* gerados pelo (a) MDEA-RF e pelo (b) *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço dos macro-objetivos. 178
Figura 10-38 – Soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço das variáveis de decisão com visão (a) frontal e (b) em perspectiva, em que o subscrito 1 de λ refere-se ao MDEA-RF e o 2 ao *framework* com MR0. 178
Figura 10-39 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos com destaque para (a) os objetivos originais e (b) as métricas de robustez definidas como objetivos..... 180
Figura 10-40 – Valores das funções objetivo e das métricas de robustez normalizadas para as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* obtidas pelo NSGA-III tratando as métricas de robustez explicitamente como objetivos..... 181
Figura 10-41 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF com (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0{,}2$, (c) $\lambda = 0{,}5$ e (d) $\lambda = 1$ no espaço dos objetivos em coordenadas paralelas. 181
Figura 11-1 - Configuração do problema TEAM 22 com incertezas. Adaptado de (SOARES *et al*., 2009b). 184
Figura 11-2 – Efeito no espaço dos objetivos decorrente das perturbações nas soluções Pareto-ótimas do MOEA. 187
Figura 11-3 - Espaço dos objetivos com as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas obtidas pelo MOEA (losangos pretos), pelo WCEMOEA (losangos vermelhos) e pelo IRMOEA-M (losangos verdes). 189
Figura 11-4 – Respostas das soluções Pareto-ótimas perturbadas obtidas pelo MOEA (losangos pretos), pelo WCEMOEA (losangos vermelhos) e pelo IRMOEA-M (losangos verdes). 190

Figura 11-5 – Pior caso de incertezas estimado pelo WCEMOEA (x vermelho) e pelo IRMOEA-M (x verde), comparados com o pior caso de incertezas real das soluções obtidas pelo WCEMOEA (quadrado vermelho) e pelo IRMOEA-M (quadrado verde). 191
Figura 11-6 – Comparação das soluções Pareto-ótimas geradas pelo MOEA (em cinza), pelo WCEMOEA (em vermelho) e pelo IRMOEA-M (em verde), em três situações distintas: soluções na ausência de perturbações (círculos), média das soluções perturbadas (estrela) e soluções no pior caso de incertezas (quadrado). 192
Figura 11-7 – (a) Fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço das sensibilidades obtidas pelo RHySPEA-I (losango azul) e pelo RHySPEA-II (losango magenta), e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas do RHySPEA-I (azul) e do RHySPEA-II (magenta). 194
Figura 11-8 – (a) Fronteira Pareto-ótima aproximada no espaço dos objetivos calculada pelo MOEA, e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas..... 194
Figura 11-9 – Posicionamento das soluções robustas aproximadas obtidas pelo RHySPEA-I (azul) e pelo RHySPEA-II (magenta) no espaço dos objetivos, junto à fronteira Pareto-ótima aproximada obtida pelo MOEA (preto). 195
Figura 11-10 – Topologia da máquina TORUS de um único estágio. 197
Figura 11-11 – Principais parâmetros de dimensão do gerador AFPMSG com enrolamento toroidal. 202
Figura 11-12 – Fronteira Pareto-ótima não-robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço dos objetivos. 206
Figura 11-13 – Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço das sensibilidades. 206
Figura 11-14 – Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço das sensibilidades. 207
Figura 11-15 – Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço das sensibilidades. 208

Lista de Quadros

Quadro 1 – Contribuições desta tese. 6
Quadro 2 – Exemplos de partição para diferentes dimensões: $n_v=1$, $n_v=2$e $n_v=3$, e para diferentes níveis de profundidade de divisão de hipercubos, $n_{prof}=0$, $n_{prof}=1$, e $n_{prof}=4$.96
Quadro 3 – Formato geométrico das caixas elementares para diferentes dimensões: $n_v=1$, $n_v=2$, $n_v=3$ e $n_v=4$. 97

Lista de Tabelas

Tabela 7-1 – Funções teste para problemas de otimização robusta utilizadas nesta tese. 62
Tabela 7-2 – Parâmetros das quatro funções-base da *OffsetValleys*. As funções-base 3 e 4 são as de interesse por serem responsáveis pela formação da fronteira Pareto-ótima robusta e da fronteira Pareto-ótima não-robusta, respectivamente..... 66
Tabela 7-3 – Regiões das fronteiras Pareto-ótima locais da função *ConcurrentSlopes*. 70
Tabela 10-1 – Valores dos parâmetros do MOEA para teste das métricas de pior caso de incertezas: WCE, WCV, WCS-I, WCS-II, WCS-III nas funções teste..... 123
Tabela 10-2 – Valor médio e desvio padrão da métrica *Generational Distance* das soluções Pareto-ótimas aproximadas perturbadas ($\mathbf{F}^{max}$) em relação à fronteira original por cada método para cada função teste. 133
Tabela 10-3 – Valor médio e desvio padrão da ocorrência de violações de restrições na função *ConcurrentSlopesConstraints* a partir das soluções Pareto-ótimas aproximadas perturbadas por cada método para cada função teste. 133
Tabela 10-4 – Tempo de execução médio (em segundos) e desvio padrão de cada método de minimização do pior caso de incertezas para cada função teste. 134
Tabela 10-5 – Número de avaliações da função objetivo para cada método de minimização do pior caso de incertezas. 134
Tabela 10-6 – Valor da métrica *Pareto Dominance Indicator* (GOH e TAN, 2009) para as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas perturbadas ($\mathbf{F}^{max}$). 135
Tabela 10-7 – Valores dos parâmetros do MOEA para teste das métricas de robustez: desvio padrão, FFCG, MR1, MR2, MR3 e MR4 nas funções teste. 136
Tabela 10-8 – Média e desvio padrão das soluções Pareto-ótimas aproximadas das métricas de robustez perturbadas geradas por cada método para cada função teste. ... 142
Tabela 10-9 – Cardinalidade das soluções Pareto-ótimas aproximadas das métricas de robustez geradas por cada método para cada função teste. 143
Tabela 10-10 – Tempo de execução médio (em segundos) e desvio padrão de cada método de minimização das métricas de robustez para cada função teste. 144
Tabela 10-11 – Número de avaliações da função objetivo para cada método de minimização das métricas de robustez. 144

Tabela 10-12 – Valores dos parâmetros do WCEMOEA para resolução de *Deb2Obj-1*. 158
Tabela 10-13 – Valores dos parâmetros do RHySPEA para resolução de *Deb2Obj-1*. 161
Tabela 10-14 – Valores dos parâmetros do MDEA-RF para resolução das funções teste *SinusoidalFunction*, *MultiPeaksFunction* e *ConcurrentSlopes*..... 166
Tabela 11-1 – Variáveis e parâmetros fixos do problema TEAM 22 com incertezas proposto em (SOARES *et al*., 2009b). 185
Tabela 11-2 – Valores dos parâmetros do MOEA convencional para resolução do TEAM 22. 186
Tabela 11-3 – Valores dos parâmetros do WCEMOEA para resolução do TEAM 22. 188
Tabela 11-4 – Valores dos parâmetros do RHySPEA para resolução do TEAM 22. .. 193
Tabela 11-5 – Variáveis do problema de projeto do AFPMSG baseado em (AYDIN, 2004) (GIERAS, WANG e KAMPER, 2008). 203
Tabela 11-6 – Parâmetros submetidos a incertezas no problema de projeto do AFPMSG. 204
Tabela 11-7 – Valores dos parâmetros do MDEA-RF para o projeto ótimo robusto do AFPMSG. 205
Tabela 11-8 – Valores extremos das fronteiras Pareto-ótima não-robusta e robusta aproximadas para o projeto do AFPMSG. 207
Tabela 11-9 – Resultados em *boxplot* da perturbação das soluções de projeto ótimas do AFPMSG. 209
Tabela 11-10 – Resultados das variáveis de decisão, variáveis de dimensionamento e dos objetivos do projeto do AFPMSG a partir da definição de três critérios de tomada de decisão para escolha das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas fornecidas pelo MDEA-RF. 211

Lista de Algoritmos

Algoritmo 3-1 – Esquema geral de funcionamento de um Algoritmo Evolucionário. Adaptado de (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009). 18
Algoritmo 3-2 – Estrutura geral de um MOEA. Adaptado de (GOH e TAN, 2009). 20
Algoritmo 9-1 – Passo-a-passo em alto nível do algoritmo WCEMOEA..... 91
Algoritmo 9-2 – Passo-a-passo em alto nível do algoritmo RHySPEA. 103
Algoritmo 9-3 – Passo-a-passo do algoritmo para delimitar a região Q de alto desempenho. 106
Algoritmo 9-4 – Passo-a-passo do procedimento de avaliação da *fitness* do RHySPEA 109
Algoritmo 9-5 – Passo-a-passo em alto nível do algoritmo MDEA-RF. 117
Algoritmo 9-6 – Passo-a-passo em baixo nível para o cálculo da *fitness* do algoritmo MDEA-RF. 118

Lista de Abreviaturas

As abreviaturas da língua inglesa que são utilizadas de forma recorrente na literatura foram mantidas, para facilitar o entendimento e a associação das mesmas às suas formas extensas.

AFPMSG	*Axial Flux Permanent Magnet Synchronous Generator* – Gerador Síncrono a Ímãs Permanentes de Fluxo Axial.
AIS	*Artificial Immune Systems* – Sistemas Imunológicos Artificiais.
CA	*Cultural Algorithms* – Algoritmos Culturais.
CAD	*Computer Aided Design* – Desenho Assistido por Computador.
CAE	*Computer Aided Engineering* – Engenharia Assistida por Computador.
CdP	Critério de Parada.
CSA	*Clonal Selection Algorithm* – Algoritmo de Seleção Clonal.
DE	*Differential Evolution* – Evolução Diferencial.
DM	*Decision Maker* – Tomador de Decisão.
DOE	*Design of Experiments* – Planejamento de Experimentos.
EA	*Evolutionary Algorithm* – Algoritmo Evolucionário.
EC	*Evolutionary Computation* – Computação Evolucionária.
EP	*Evolutionary Programming* – Programação Evolucionária.
ES	*Evolution Strategies* – Estratégias Evolutivas.
FEM	*Finite Element Method* – Método de Elementos Finitos.
FFCG	Ferreira, Fonseca, Covas, Gaspar.
GA	*Genetic Algorithm* – Algoritmo Genético.
GD	*Generational Distance* – Distância Geracional.

GLR	Gadelha, Lowther, Ramírez.
GP	*Genetic Programming* – Programação Genética.
IRMOEA-M	*Interval Robust Multiobjective Evolutionary Algorithm – Minmax*.
LHS	*Latin Hypercube Sampling* – Amostragem por Hipercubo Latino.
MDEA-RF	*Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor* – Algoritmo Evolucionário de Desvio Mínimo baseado no Fator de Robustez.
MDO	*Multidisciplinary Design Optimization* – Otimização Multidisciplinar de Projeto.
MO	*Multiobjective Optimization* – Otimização Multiobjetivo.
MOEA	*Multiobjective Evolutionary Algorithm* – Algoritmo Evolucionário Multiobjetivo.
MOP	*Multiobjective Optimization Problem* – Problema de Otimização Multiobjetivo.
MORDM	*Multiobjective Robust Decision Making* – Tomada de Decisão Robusta Multiobjetivo.
MORDO	*Multiobjective Robust Design Optimization* – Otimização Robusta Multiobjetivo de Projeto.
MORO	*Multiobjective Robust Optimization* – Otimização Robusta Multiobjetivo.
NSGA	*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*.
NdFeB	*Neodymium Magnet* – Ímã de Neodímio Ferro Boro.
OF	*Objective Function* – Função Objetivo.
PAES	*Pareto Archived Evolution Strategy*.
PDF	*Probability Density Function* – Função Densidade de Probabilidade.
PDI	*Pareto Dominance Indicator* – Indicador de Dominância Pareto.

PESA	*Pareto Envelope-Based Selection Algorithm*.
PM	*Permanent Magnet* – Ímã Permanente.
PSO	*Particle Swarm Optimization* – Otimização por Enxame de Partículas.
RAM	*Random Access Memory* – Memória de Acesso Aleatório.
RBDO	*Reliability-Based Design Optimization* – Otimização de Projeto baseada em Confiabilidade.
RDO	*Robust Design Optimization* – Otimização Robusta de Projeto.
RF	*Robustness Factor* – Fator de Robustez.
RHySPEA	*Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm*.
RO	*Robust Optimization* – Otimização Robusta.
SBX	*Simulated Binary Crossover* – Cruzamento Binário Simulado.
SMES	*Superconducting Magnetic Energy Storage* – Dispositivo Supercondutor de Armazenamento de Energia Magnética.
SOEA	*Single-objective Evolutionary Algorithm* – Algoritmo Evolucionário Mono-objetivo.
SPEA	*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*.
WCE	*Worst Case Estimation* – Estimativa do Pior Caso.
WCEMOEA	*Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm*.
WCSMOEA	*Worst Case Sampling Multiobjective Evolutionary Algorithm*.
WCVMOEA	*Worst Case Vertex Multiobjective Evolutionary Algorithm*.

Lista de Símbolos

n_v	Dimensão do vetor de variáveis de decisão.
n_p	Dimensão dos parâmetros de perturbação.
n_f	Dimensão do vetor de objetivos.
n_h	Quantidade de restrições de igualdade.
n_g	Quantidade de restrições de desigualdade.
f	Função real.
f_{wc}	Função real para o pior caso de incertezas.
$\boldsymbol{f}$	Vetor de funções reais.
$f_i(\mathbf{x})$	i-ésimo elemento do vetor de funções.
$g_i(\mathbf{x})$	i-ésimo elemento do vetor de restrição de desigualdade.
$h_i(\mathbf{x})$	i-ésimo elemento do vetor de restrição de igualdade.
FP^*	Fronteira Pareto-ótima.
P^*	Solução Pareto-ótima.
$\widetilde{FP}^*$	Fronteira Pareto-ótima aproximada.
$\tilde{P}^*$	Solução Pareto-ótima aproximada.
FPR^*	Fronteira Pareto-ótima robusta.
PR^*	Solução Pareto-ótima robusta.
$\widetilde{FPR}^*$	Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada.
$\widetilde{PR}^*$	Solução Pareto-ótima robusta aproximada.
n_{prof}	Parâmetro de profundidade de divisão de hipercubos.
n_{prof}^X	Parâmetro de profundidade de divisão de hipercubos no espaço das variáveis.
n_{prof}^Y	Parâmetro de profundidade de divisão de hipercubos no espaço dos objetivos.

n_{pop}	Tamanho da população do algoritmo evolucionário.
n_{gen}	Número de gerações do algoritmo evolucionário.
n_{rep}	Número de execuções do algoritmo evolucionário.
$N_{samples}$	Número de amostras em torno da solução nominal.
$\overline{\mathbf{x}}$	Limite superior do vetor **x**.
$\underline{\mathbf{x}}$	Limite inferior do vetor **x**.
$\overline{\mathrm{x}}$	Limite superior da variável x.
$\underline{\mathrm{x}}$	Limite inferior da variável x.
$[\mathbf{x}] = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$	Vetor intervalar (caixa).
$[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$	Intervalo escalar.
$\mathbf{F}_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{max}}$	Fronteira ideal de maximização em torno de $\mathbf{x_0}$.
$\mathbf{F}^{\mathbf{max}}$	Fronteira ideal de maximização para P^*.
$\mathbf{u}_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{min}}$	Ponto ideal de minimização de $\mathbf{x_0}$.
$\mathbf{u}_{\mathbf{x_0}}^{\mathbf{max}}$	Ponto ideal de maximização de $\mathbf{x_0}$.
$\aleph(\mu, \sigma^2)$	Distribuição normal com média μ e desvio padrão σ.
$\mathcal{Q}$	Região de alto desempenho do RHySPEA.
$\mathcal{X}$	Domínio das variáveis de decisão.
$\mathcal{P}$	Domínio das incertezas.
$\mathcal{F}$	Domínio viável.
$\mathcal{Y}$	Imagem viável no espaço dos objetivos.
$\mathcal{R}$	Imagem viável no espaço das sensibilidades.
$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano de n dimensões.

Sumário

1 INTRODUÇÃO 1

1.1 Justificativa 2

1.2 Objetivos 4

1.2.1 Objetivo Geral 4

1.2.2 Metodologia do Desenvolvimento da Tese 4

1.3 Escopo 5

1.4 Contribuições 5

1.5 Organização da Tese 8

2 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO 10

2.1 Terminologia Pareto 12

2.2 Classificação dos Métodos de Otimização Multiobjetivo 13

2.3 Considerações Finais 15

3 ALGORITMOS EVOLUCIONÁRIOS 16

3.1 Fundamentos 16

3.2 Algoritmos Evolucionários Multiobjetivo 19

3.3 Considerações Finais 22

4 PROBLEMAS EM CENÁRIOS COM INCERTEZAS 24

4.1 Tipos de Incertezas 25

4.1.1 Incerteza na Resposta do Modelo 25

4.1.2 Incerteza nos Parâmetros do Modelo 26

4.1.3 Incerteza na Definição do Modelo 28

4.1.4 Incerteza na Resposta de Modelo Variante no Tempo 30

4.2 Representações de Incertezas 31

4.2.1 Incerteza Probabilística 32

4.2.2 Incerteza Determinística 33

4.2.3 Incerteza Possibilística 33

4.3 Considerações Finais 33

5 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA 34

5.1 Conceito 34

5.2 Obtenção de Soluções Robustas 35

5.2.1 Soluções Robustas de Modelos com Incerteza na Resposta 37
5.2.2 Soluções Robustas de Modelos com Incerteza nos Parâmetros..... 38
5.2.3 Soluções Robustas de Modelos Incertos..... 39
5.2.4 Soluções Robustas de Modelos Variantes no Tempo 41
5.3 Métricas de Robustez..... 41
5.3.1 Abordagem Mono-Objetivo 42
5.3.2 Abordagem Multiobjetivo 44
5.4 Espaço dos Objetivos e Espaço das Sensibilidades 48
5.5 Considerações Finais 51
6 PROCESSO PARA DESENVOLVIMENTO DE NOVOS ALGORITMOS PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO.....52
6.1 Definições Iniciais 52
6.2 Participação do Tomador de Decisão..... 55
6.3 Considerações Finais 61
7 FUNÇÕES TESTE PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA 62
7.1 SinusoidalFunction 63
7.2 MultiPeaksFunction..... 63
7.3 OffsetValleys 64
7.4 ConcurrentSlopes..... 67
7.5 ConcurrentSlopesConstraint 70
7.6 Deb2Obj-1 71
7.7 Deb2Obj-2 72
7.8 Deb3Obj..... 73
7.9 Considerações Finais 74
8 NOVAS MÉTRICAS DE ROBUSTEZ.....75
8.1 Método de Estimativa do Pior de Caso de Incertezas: WCE 75
8.2 Definição das Novas Métricas de Robustez: MR1, MR2, MR3 e MR4 79
8.2.1 Métricas MR1 e MR2..... 79
8.2.2 Métricas MR3 e MR4..... 81
8.3 Considerações Finais 85
9 ALGORITMOS E MÉTODOS PROPOSTOS PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO 87
9.1 Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm (WCEMOEA) 87
9.1.1 Introdução..... 87
9.1.2 Consolidação do Pior Caso de Incertezas..... 88

9.1.3 Funcionamento do WCEMOEA 91
9.1.4 Complexidade 92
9.1.5 Limitações 92
9.2 Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm (RHySPEA) 92
9.2.1 Introdução 93
9.2.2 Partição do Espaço e Armazenamento de Dados 94
9.2.3 *Framework* de Operações com Caixas 100
9.2.4 Métricas de Robustez do RHySPEA 102
9.2.5 Funcionamento do RHySPEA 103
9.2.6 Parâmetros do RHySPEA 110
9.2.7 Complexidade 111
9.2.8 Limitações 112
9.3 Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor (MDEA-RF) 112
9.3.1 Introdução 112
9.3.2 *Framework* Interativo 114
9.3.3 A *Fitness* e o Fator de Robustez λ 116
9.3.4 Funcionamento do MDEA-RF 117
9.3.5 Complexidade 119
9.3.6 Limitações 119
9.4 Considerações Finais 120
10 EXPERIMENTOS E DISCUSSÃO 122
10.1 Aplicação do WCEMOEA nas Funções Teste 122
10.1.1 Comparação Qualitativa 123
10.1.2 Comparação Quantitativa 132
10.2 Aplicação das Métricas MR1, MR2, MR3 e MR4 nas Funções Teste 135
10.2.1 Comparação Qualitativa 137
10.2.2 Comparação Quantitativa 141
10.3 Estudo da Aplicação do WCEMOEA e RHySPEA na Função OffsetValleys 145
10.3.1 Resolução da Função *OffsetValleys* com MOEA Convencional 145
10.3.2 Resolução da Função *OffsetValleys* com MOEA para Valor Esperado 146
10.3.3 Resolução da Função *OffsetValleys* com MOEA para Pior Caso de Incertezas . 148
10.3.4 Resolução da Função *OffsetValleys* com RHySPEA-I e RHySPEA-II 150
10.4 Estudo da Aplicação do WCEMOEA e RHySPEA na Função Deb2Obj-1 158

10.4.1 Resolução da Função *Deb2Obj-1* com o WCEMOEA 158
10.4.2 Resolução da Função *Deb2Obj-1* com o RHySPEA-I e RHySPEA-II 161
10.5 Estudo da Aplicação do MDEA-RF nas Funções SinusoidalFunction, MultiPeaksFunction e ConcurrentSlopes 165
10.5.1 Resolução da Função *SinusoidalFunction* com o MDEA-RF 167
10.5.2 Resolução da Função *MultiPeaksFunction* com o MDEA-RF 171
10.5.3 Resolução da Função *ConcurrentSlopes* com o MDEA-RF 175
10.6 Considerações Finais 182
11 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO APLICADA A PROBLEMAS DE ENGENHARIA ELÉTRICA 183
11.1 Projeto de um Dispositivo Supercondutor de Armazenamento de Energia Magnética 183
11.1.1 Descrição do Problema 184
11.1.2 Modelagem do Problema de Otimização Robusta Multiobjetivo para o SMES 185
11.1.3 Otimização do Projeto TEAM 22 com MOEA Convencional 186
11.1.4 Otimização do Projeto TEAM 22 com WCEMOEA 187
11.1.5 Otimização do Projeto TEAM 22 com RHySPEA 193
11.2 Projeto de um Gerador Elétrico de Fluxo Axial 196
11.2.1 Descrição do Problema 197
11.2.2 Modelagem do Problema de Otimização Robusta Multiobjetivo para o Gerador AFPMSG 202
11.2.3 Otimização do Projeto do AFPMSG com o MDEA-RF 205
11.3 Considerações Finais 212
12 CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 213
12.1 Conclusões 213
12.2 Sugestões para Trabalhos Futuros 214
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 215

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas reais requerem otimização simultânea de objetivos conflitantes entre si, o que impossibilita encontrar uma única solução ótima para todos os objetivos. Um dos meios mais eficazes de se encontrar soluções ótimas que atendam aos *trade-offs* é por meio da otimização multiobjetivo.

Como se não bastasse a dificuldade de se buscar pelo conjunto ótimo de soluções para problemas com objetivos conflitantes, problemas reais e de interesse prático podem apresentar algum grau de incerteza (FRANÇA e ZUBEN, 2009). Para evitar a influência negativa dessas incertezas sobre as soluções do problema, aconselha-se procurar por soluções robustas, o que torna o problema ainda mais complexo.

A presença de incertezas em problemas reais é uma realidade que deve ser considerada em sua modelagem e resolução. Dependendo das características do problema, se a presença das incertezas é ignorada no processo de otimização, por exemplo, pode ser que a solução ótima encontrada não seja a melhor possível quando implementada. Em algumas situações, as fontes das incertezas podem ser encontradas e eliminadas, porém em alguns casos isto pode não ser possível.

Para se otimizar problemas submetidos a fatores de incerteza, requer-se o uso de algoritmos de otimização adaptados para tal fim. Embora a adaptação dos algoritmos seja dependente das particularidades do problema-alvo, uma parte deles pertencem à classe de otimização de projeto robusto multiobjetivo, em inglês: *Multiobjective Robust Design Optimization* (MORDO)[1], com foco em problemas de dimensionamento e topologia de projetos de engenharia. Cabe ressaltar que estes algoritmos não têm como objetivo eliminar os fatores de incerteza, mas buscar por soluções ótimas robustas que apresentam melhor desempenho sob efeito de incertezas quando comparadas com soluções ótimas não-robustas sob efeito de incertezas. Entretanto, pode ser que o desempenho dessas soluções ótimas robustas seja pior que o desempenho de soluções ótimas não-robustas quando na ausência de incertezas ou quando as incertezas forem menores que o esperado. Poderão ainda existir casos em que ambas as soluções ótimas, robustas e não-robustas, coincidam.

[1] O termo "projeto" (*design*) na nomenclatura será muitas vezes omitido no decorrer deste texto, sendo adotada a seguinte expressão: otimização robusta multiobjetivo (*multiobjective robust optimization*).

Do exposto pode-se verificar que há um conflito de interesses no processo de escolha da solução ótima: alto desempenho versus alta robustez. Ao considerar cada um desses interesses como objetivos, o problema de se encontrar soluções ótimas robustas torna-se inerentemente multiobjetivo (JIN e SENDHOFF, 2003), (GUIMARÃES, LOWTHER e RAMÍREZ, 2006), e pode ser tratado por métodos de otimização segundo uma abordagem mono ou multiobjetivo (BEYER e SENDHOFF, 2007).

1.1 Justificativa

O mercado está cada vez mais competitivo. Para que determinada empresa do setor produtivo sobressaia sobre as demais e permaneça atuante em seu nicho, é necessário que ela forneça produtos de qualidade para seus clientes. Aproveitando-se dos recursos disponíveis, a empresa busca maximizar a qualidade de seus produtos e minimizar seu custo de produção. Entretanto, a alta qualidade muitas vezes está associada ao alto custo de produção, ou seja, existe um *trade-off* claro: qualidade versus custo. Por meio de inovações no processo produtivo, torna-se possível o aumento da qualidade com a simultânea redução de custo. A utilização de otimização multiobjetivo para lidar com objetivos conflitantes é um dos meios de se alcançar projetos inovadores de produtos, como apresentado em (DEB e SRINIVASAN, 2006). Ainda de acordo com (DEB e SRINIVASAN, 2006), a otimização multiobjetivo provê informação de diversas soluções com seus respectivos resultados, o que é muito valioso e não acontece na otimização mono-objetivo. Por meio de técnicas de *data-mining*, ou mesmo inspeção gráfica, pode-se obter resultados interessantes da correlação entre entradas e saídas dos sistemas, o que gera conhecimento, que por sua vez pode gerar inovação.

No caso de uma empresa fabricante de motores, por exemplo, todas as dimensões dos componentes do motor são especificadas de tal forma que a integração das diversas partes resulte em um motor de alta eficiência. Cada componente tem materiais e preços associados, sendo que suas dimensões são projetadas de forma a terem o menor volume ativo de material possível e, consequentemente, menor preço. Em alguns casos pode ser interessante trocar o material do componente para reduzir o custo de produção. O projeto de um motor, que consiste na integração de diversos componentes, tem o objetivo de maximizar sua eficiência e de minimizar seu custo produtivo, o que consiste em um problema complexo de otimização. O problema é multiobjetivo, pois se procura maximizar a eficiência e minimizar o custo, e também multidisciplinar, dado que a

otimização é feita em um sistema integrado que envolve diferentes disciplinas, tais como térmica, química e mecânica. A este tipo de otimização multidisciplinar de projeto dá-se o nome de *Multidisciplinary Design Optimization* (MDO).

A importância da otimização pode ser estendida para o projeto e desenvolvimento de produtos. Na maioria das vezes deseja-se que a eficiência de um produto seja acompanhada de robustez, de forma que sua eficiência seja mantida para diversas condições. A robustez pode ser embutida no processo de otimização, por meio da qual se obtém soluções ótimas robustas. Projetos baseados nesta abordagem fazem parte do grupo de *Robust Design Optimization* (RDO). Em se tratando de problemas com múltiplos objetivos a nomenclatura torna-se MORDO.

O MORDO pode, por exemplo, lidar simultaneamente com a maximização da eficiência de um produto, com a minimização de seu custo, e ainda garantir sua robustez operacional, o que demonstra o interesse do mercado em suas capacidades. A seguir são apresentadas algumas empresas que implementam e comercializam ferramentas que processam o MORDO:

1) "AIMMS" (AIMMS, 2016): Fornece *software* para otimização robusta de problemas lineares e inteiros-mistos com incertezas. A partir de intervalos fechados definidos para as variações paramétricas, o AIMMS gera modelos determinísticos e robustos com os quais um procedimento de otimização determinística é aplicado. Muito aplicado para problemas nos setores de planejamento e logística, com o envolvimento de uma ampla cadeia de fornecedores. A metodologia de otimização robusta implementada neste *software* foi desenvolvida pelos professores Ahraon Ben-Tal (Israel Institute of Technology) e Arkadi Nemirovski (Georgia Institute of Technology-U.S.A.) e é explicada em detalhes em (BEN-TAL, EL GHAOUI e NEMIROVSKI, 2009).
2) "modeFRONTIER" (ESTECO, 2016): Oferece um ambiente de integração que permite interconexão de interfaces com diferentes *softwares* e ferramentas de desenho assistido por computador (CADs). Neste ambiente são disponibilizadas várias ferramentas de otimização multiobjetivo, implementadas a partir de algoritmos evolucionários consagrados, além de outras ferramentas que suportam a geração de metamodelos e a análise de sensibilidade dos resultados. Sua aplicação é voltada para otimização multidisciplinar (MDO).
3) "Optimus" (NOESIS, 2016): O *software* tem várias funcionalidades com o objetivo de processar *Design Optimization*, fazendo uso de técnicas de

otimização multiobjetivo. Além disso, processa otimização robusta e verifica a confiabilidade das soluções, sendo apto a processar *Robust Design Optimization* e *Reliability-based Design Optimization*. Pode ser aplicado, por exemplo, nas fases de projeto da indústria automobilística, garantindo projetos seguros e de alta qualidade.

4) "Premium Solver Platform" (FRONTLINESOLVERS, 2016): Consiste em uma plataforma para Microsoft Excel® com vários módulos de otimização, entre eles métodos determinísticos e evolucionários capazes de resolver problemas de otimização contínua e discreta com incertezas.
5) "OptiY" (OPTIY, 2016): *Software* feito para a execução de MDO. Processa diversas tarefas, tais como análise de sensibilidade, metamodelagem de modelos complexos, otimização multiobjetivo e outras. Oferece a possibilidade de processar otimização robusta e de fazer análise de confiabilidade das soluções. Também oferece capacidade de integração com ferramentas de desenho e engenharia assistidos por computador (CAE/CAD).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver algoritmos evolucionários eficientes de otimização robusta multiobjetivo para a resolução de problemas não-lineares, restritos ou não, com múltiplos objetivos e com incertezas paramétricas.

1.2.2 Metodologia do Desenvolvimento da Tese

Para a consecução do objetivo geral desta tese, as seguintes etapas foram definidas e realizadas:

1) Revisão bibliográfica sobre os seguintes assuntos:
    1.1) Otimização multiobjetivo;
    1.2) Algoritmos evolucionários;
    1.3) Otimização robusta;
2) Levantamento das práticas adotadas em algoritmos existentes de otimização robusta multiobjetivo;
3) Identificação de estratégias que tornem os algoritmos de otimização robusta multiobjetivo mais rápidos, eficazes e eficientes;

4) Proposição de novos algoritmos de otimização robusta multiobjetivo;
5) Proposição de funções teste para estudo comparativo dos diferentes algoritmos desenvolvidos nesta tese;
6) Validação dos algoritmos em funções teste;
7) Aplicação dos algoritmos em problemas de engenharia.

1.3 Escopo

Dada a abrangência do objetivo geral e as diferentes classes existentes de problemas sujeitos a incertezas, as seguintes delimitações foram impostas nesta tese:

- A revisão bibliográfica se aprofunda até o nível suficiente de detalhes que dê suporte teórico necessário para as propostas desta tese. Informações adicionais constam nas referências citadas;
- São considerados somente problemas com tipo de incerteza paramétrica;
- A representação das incertezas é intervalar, e a probabilidade de ocorrência é sempre uniforme;
- Os intervalos das incertezas são sempre fechados e conexos;
- Para padronizar a notação, todos os problemas de otimização são tratados como problemas de minimização[2];
- Os algoritmos desenvolvidos buscam por soluções robustas e confiáveis (que satisfaçam as restrições)[3];
- Os algoritmos desenvolvidos são baseados no arcabouço dos algoritmos genéticos (GAs), e permitem a adaptação para outros algoritmos evolucionários (EAs);
- Os algoritmos desenvolvidos fazem uso da representação real das variáveis de decisão.

1.4 Contribuições

O Quadro 1 apresenta as contribuições desta tese. A primeira coluna descreve sucintamente a motivação para a contribuição, que é descrita resumidamente na segunda coluna. A terceira coluna indica a localização da descrição completa da contribuição no texto desta tese.

[2] A maximização de uma função $f(\mathbf{x})$ equivale à minimização de $-f(\mathbf{x})$ (MIETTINEN, 1999).
[3] Sobre a diferença dos termos robustez e confiabilidade, ver Seção 5.1.

Quadro 1 – Contribuições desta tese.

Problema	Contribuição	Local da Descrição
A literatura trata de otimização robusta de forma dispersa e pouco estruturada.	Descritivo conceitual estruturado sobre as definições acerca de otimização robusta multiobjetivo.	Capítulos 4 e 5.
Existe um número reduzido de funções *benchmark* didáticas na literatura sobre otimização robusta multiobjetivo.	Criação de novas funções teste para otimização robusta multiobjetivo: 1) Função *OffsetValleys* 2) Função *ConcurrentSlopes* 3) Função *ConcurrentSlopesConstraint*	*OffsetValleys*: Seção 7.3; *ConcurrentSlopes*: Seção 7.4; *ConcurrentSlopesConstraint*: Seção 7.5.
Não foi encontrado na literatura um esquema claro mostrando todos os aspectos envolvidos no processo de otimização robusta multiobjetivo de um problema.	Definição de um processo para desenvolvimento de algoritmos para otimização robusta multiobjetivo.	Capítulo 6.
Métricas de robustez citadas na literatura dependem de amostragem excessiva para estimativa do desvio padrão da solução.	Novas métricas de robustez que estimam o desvio padrão com poucas amostras: MR1 e MR2; E a partir da estimativa do pior caso (WCE): MR3 e MR4	MR1 e MR2: Subseção 8.2.1; WCE: Seção 8.1; MR3e MR4: Subseção 8.2.2.
A literatura carece de mais trabalhos que descrevam um algoritmo de *minimax* eficiente para o problema de otimização robusta.	Desenvolvimento do WCEMOEA, que encontra soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas a partir da minimização do pior caso estimado com a métrica WCE.	Algoritmo WCEMOEA: Subseção 9.1.3.
Não foi encontrado na literatura uma forma do tomador de decisão expressar os limites do desempenho aceitáveis para as soluções Pareto-ótimas robustas.	Criação do método de determinação da região de alto desempenho.	Subseção 9.2.5.1.
A literatura carece de mais trabalhos que tratem do problema de reaproveitamento de amostras para cálculo de métricas de robustez	Desenvolvimento de um *framework* para partição do espaço de busca e armazenamento eficiente de dados para reaproveitamento de amostras durante a otimização robusta.	Subseção 9.2.2.
Não foi encontrado na literatura método de otimização robusta multiobjetivo que reaproveite amostras eficientemente e envolva o tomador de decisão no processo de otimização simultaneamente.	Desenvolvimento do RHySPEA, que encontra soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas utilizando a definição de região de alto desempenho, a partição do espaço de busca e armazenamento eficiente de dados, e as métricas MR1 e MR2.	Algoritmo RHySPEA: Subseção 9.2.5.
Não foi encontrado na literatura trabalho que aborde a participação do tomador de decisão durante o processo de otimização robusta multiobjetivo.	Desenvolvimento do MDEA-RF, que encontra soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas com a métrica MR3 e com a definição de um fator de robustez pelo tomador de decisão a partir de um *framework* interativo de otimização robusta multiobjetivo.	*Framework* interativo: Subseção 9.3.2; Algoritmo MDEA-RF: Subseção 9.3.4.

As contribuições desta tese são classificadas nos sete tópicos descritos a seguir.

1) **Publicações em anais de congressos internacionais.**

[2013] **SABIONI, C. L.**; SILVA, S. R.; VASCONCELOS, J. A. Axial-Flux Generator Robust Design Aided by Numerical Electromagnetic Field Computation. **Proceedings on the 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields**, Budapest, Hungary, 2013, pp 1-2.

[2014] **SABIONI, C. L.**; MENDES, M. H. S.; VASCONCELOS, J. A. Robustness Assessment over TEAM 22 Problem Worst-Case-Based Optimal Solutions. **Proceedings of the 16th IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)**, Annecy, France, 2014, pp. 1-2.

2) **Trabalho publicado em revista internacional.**

[2016] **SABIONI, C. L.**; RIBEIRO, M. F. O.; VASCONCELOS, J. A. Decision Maker Iterative-based Framework for Multiobjective Robust Optimization. **Neurocomputing**, vol. 242, 2017, pp. 113-130.

3) **Conceitos.**

Esta tese introduz dois novos conceitos: região de alto desempenho Q e fator de robustez λ, ambos utilizados para auxiliar o tomador de decisão durante o processo de otimização robusta.

4) **Funções teste.**

Esta tese propõe três novas funções *benchmark* a serem usadas em testes de algoritmos de otimização robusta multiobjetivo: *OffsetValleys*, *ConcurrentSlopes*, *ConcurrentSlopesConstraint*.

5) **Métodos, métricas e algoritmos.**

Esta tese propõe uma metodologia completa para o desenvolvimento de novos algoritmos de otimização robusta multiobjetivo, com a qual são propostas cinco métricas: WCE, MR1, MR2, MR3 e MR4. O WCE (*Worst Case Estimation*) em conjunto com o método de consolidação do pior caso de incertezas dá origem ao WCEMOEA (*Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm*). As

métricas MR1 e MR2 em conjunto com o *framework* de operação com caixas intervalares e o método de determinação da região de alto desempenho no espaço dos objetivos formam RHySPEA-I e II (*Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm*), respectivamente. A métrica MR3 em conjunto com o *framework* interativo, que faz uso do fator de robustez, forma o MDEA-RF (*Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor*). A métrica MR4, no entanto, não compõe nenhum algoritmo específico.

6) **Aplicações.**

Os métodos e algoritmos propostos são aplicados e avaliados em funções teste, assim como em problemas de engenharia tais como (1) o projeto de um dispositivo supercondutor de armazenamento de energia e (2) o projeto de um gerador elétrico síncrono a ímãs permanentes de fluxo axial.

7) **Outras contribuições.**

Esta tese contribui também com o desenvolvimento da Linha de Pesquisa Otimização**,** do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, ao explorar a Otimização Robusta Multiobjetivo, ainda pouco investigada no âmbito do Programa.

1.5 Organização da Tese

Esta tese está organizada como segue. Os principais conceitos relacionados à otimização multiobjetivo são apresentados no Capítulo 2. O funcionamento geral dos algoritmos evolucionários e suas adaptações para lidar com problemas multiobjetivo são tratados no Capítulo 3. Os conceitos e definições sobre problemas em cenários com incerteza como, por exemplo, os tipos e representações das incertezas, são explicados no Capítulo 4. O conceito de otimização robusta e as diferentes abordagens para obtenção de soluções ótimas robustas aproximadas são introduzidos no Capítulo 5. O detalhamento do processo de desenvolvimento de um algoritmo de otimização robusta e sua interface com o tomador de decisão é feito no Capítulo 6. As funções teste *benchmark* de otimização robusta utilizadas nesta tese são apresentadas no Capítulo 7. As métricas de robustez propostas são detalhadas no Capítulo 8, e também analisadas quando aplicadas

às funções teste. O funcionamento dos métodos e algoritmos de otimização robusta multiobjetivo propostos nesta tese são descritos no Capítulo 9. Os resultados da aplicação dos algoritmos propostos de otimização robusta multiobjetivo nas funções teste são apresentados e discutidos no Capítulo 10, enquanto que a discussão dos resultados da aplicação em problemas de engenharia elétrica é feita no Capítulo 11. A tese é encerrada no Capítulo 12 com as conclusões e com sugestões de trabalhos futuros para continuidade da linha de pesquisa apresentada.

2 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Parte dos problemas reais de otimização requerem a otimização de várias funções simultaneamente. Como exemplo cita-se o projeto de determinado sistema, cuja eficiência deve ser maximizada e seu custo de produção minimizado. Neste caso, geralmente quanto maiores forem os custos de produção dos componentes do sistema, mais confiável, robusto e eficiente ele será. Eficiência e custo são objetivos conflitantes entre si, de tal forma que em determinado momento o aumento contínuo da eficiência do sistema leva ao aumento do custo de produção; e a redução contínua do custo de produção leva à redução da eficiência do sistema. Ou seja, encontrar uma única solução de projeto que ao mesmo tempo tenha a máxima eficiência e o menor custo pode não ser possível. Portanto, uma das características dos problemas de otimização multiobjetivo com objetivos conflitantes é o fato de não existir uma única solução, mas sim a possibilidade de existir um conjunto de soluções igualmente boas matematicamente. Essas soluções são citadas na literatura de diferentes formas: soluções não-dominadas, soluções eficientes, soluções não inferiores ou soluções Pareto-ótimas (BRANKE *et al*., 2008).

Na otimização multiobjetivo faz-se necessário definir a existência de dois espaços: o das variáveis de decisão ($\mathbf{x}$) e o dos objetivos ($\mathbf{y} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$). O vetor $\mathbf{x}$ das variáveis de decisão é representado da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_v} \end{bmatrix}, \tag{2-1}$$

em que n_v é o número de elementos variáveis do vetor.

O vetor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ de objetivos é representado de forma análoga:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{n_f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \tag{2-2}$$

em que n_f é o número de objetivos do problema de otimização.

Cada objetivo f_k equivale a uma saída y_k, ou seja, $y_k = f_k(\mathbf{x})$, o que define o seguinte vetor:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n_f} \end{bmatrix}. \tag{2-3}$$

Optou-se por separar a função $\boldsymbol{f}$ de sua saída $\mathbf{y}$, tal como feito por (MIETTINEN, 1999), pela conveniência desta representação para tratar aspectos de robustez.

Os vetores de entrada $\mathbf{x}$ e os vetores de saída $\mathbf{y}$ estão situados em espaços próprios, sendo que cada ponto $\mathbf{x}$ do espaço das variáveis de decisão representa uma solução e dá origem a um ponto $\mathbf{y}$ no espaço dos objetivos, que determina o desempenho daquela solução. Este mapeamento entre os vetores $\mathbf{x}$ e seus resultados $\mathbf{y}$ é ilustrado em seus respectivos espaços na Figura 2-1, considerando somente duas variáveis e dois objetivos.

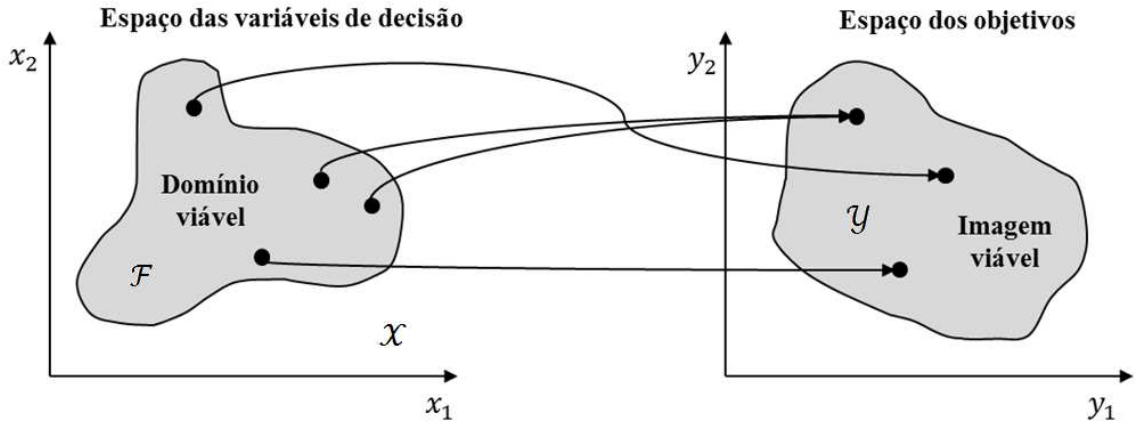


Figura 2-1 - Mapeamento entre vetores do espaço de variáveis de decisão e vetores do espaço dos objetivos. Neste exemplo, tem-se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

O domínio $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ das variáveis de decisão contém a região viável $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ representada pela região cinza do espaço das variáveis de decisão na Figura 2-1. A região viável $\mathcal{F}$ é definida pelos pontos $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ tal que satisfaçam às seguintes restrições de desigualdade:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_g, \tag{2-4}$$

e de igualdade:

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_h, \tag{2-5}$$

em que n_g e n_h representam o número de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

Como consequência das restrições impostas ao problema, a imagem da região viável $\mathcal{F}$ corresponde à região viável dos objetivos $\mathcal{Y}\left(=\boldsymbol{f}(\mathcal{F})\right)$, representada pela região cinza do espaço dos objetivos na Figura 2-1.

A formulação do problema de otimização multiobjetivo (do inglês, *Multiobjective Problem* – MOP) é colocada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \quad \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \\ &\boldsymbol{f}: \ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{Y}. \end{aligned} \tag{2-6}$$

2.1 Terminologia Pareto

Para se obter o conjunto de soluções eficientes do problema de otimização multiobjetivo, um mecanismo de comparação entre diferentes vetores no espaço dos objetivos deve ser utilizado. Este mecanismo é provido pelo critério de dominância que se estabelece entre dois vetores de dimensão k, $\mathbf{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{k})$ e $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_\mathrm{k})$ (MIETTINEN, 1999):

$$\forall \mathrm{i} \in \{1, \dots, k\}: u_i \leq v_i \wedge \exists \mathrm{j} \in \{1, \dots, k\}: u_j < v_j \ \rightarrow \ \mathbf{u} \preccurlyeq \mathbf{v}. \tag{2-7}$$

Da Equação (2-7), o vetor **u** domina o vetor **v,** sendo $\preccurlyeq$ o operador de dominância**.** Assim, para um problema de minimização, um vetor **u** domina o vetor **v** se, e somente se, todos os elementos de **u** são menores ou iguais aos elementos de **v**, sendo que ao menos um dos elementos de **u** é estritamente menor que o respectivo elemento em **v.** O operador $\prec$ trata da dominância estrita, em que $u_i < v_i \ \forall i$, e o operador $\npreccurlyeq$ trata da relação de não-dominância de **u** sobre **v**.

Da definição de dominância entre vetores, torna-se possível definir o conjunto Pareto-ótimo P^*, que corresponde ao conjunto de soluções não-dominadas do MOP (MIETTINEN, 1999):

$$P^* := \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} \mid \nexists \mathbf{x}' \in \mathcal{F}: \ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}') \preccurlyeq \boldsymbol{f}(\mathbf{x})\}. \tag{2-8}$$

A solução **x** é dita Pareto-ótima com respeito à $\mathcal{F}$, se não existe nenhuma outra solução $\mathbf{x}'$ em $\mathcal{F}$ que a domine. A imagem do conjunto Pareto-ótimo no espaço dos objetivos é denominada fronteira Pareto-ótima, cuja definição segue:

$$PF^* := \{\mathbf{u} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in P^*\}. \tag{2-9}$$

A Figura 2-2 ilustra o conceito das soluções não-dominadas, P^*, e da fronteira Pareto-ótima, PF^*, para o exemplo da Figura 2-1.

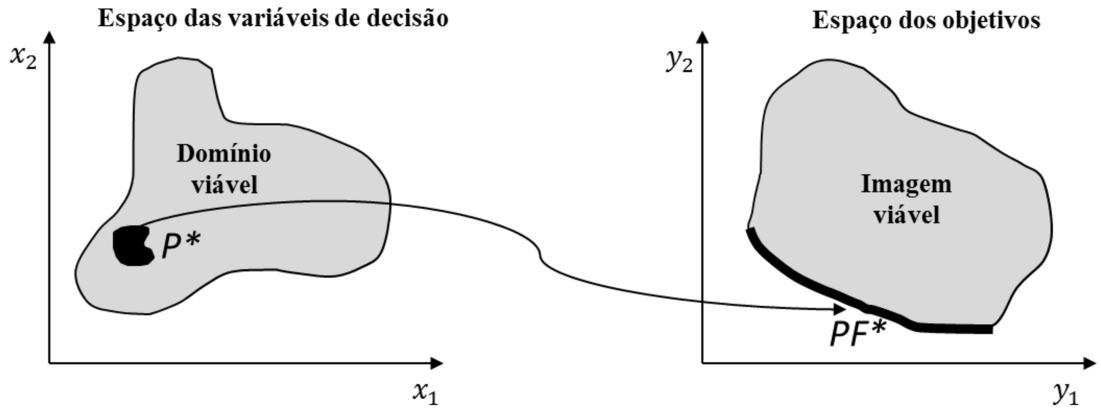


Figura 2-2 - Conjunto de soluções não-dominadas no espaço das variáveis de decisão e fronteira Pareto-ótima no espaço dos objetivos. Neste exemplo, tem-se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

De acordo com (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009), encontrar uma expressão analítica que defina inteiramente as regiões P^* e FP^* é muitas vezes impossível. O que se faz, geralmente, é encontrar um número representativo de amostras que pertençam a estas regiões. Estas amostras são obtidas por meio dos algoritmos de otimização multiobjetivo. Porém, dependendo da complexidade e da natureza do MOP, os algoritmos podem não fornecer soluções de P^* e FP^*, e sim soluções próximas. Nesta tese denota-se por $\tilde{P}^*$ o conjunto Solução Pareto-ótimo aproximado, e $\widetilde{FP}^*$, a fronteira Pareto-ótima aproximada. Se os algoritmos de otimização convergirem após finitas iterações, assume-se que $\tilde{P}^* \subset P^*$ e $\widetilde{FP}^* \subset FP^*$. Além disso, $\tilde{P}^*$ e $\widetilde{FP}^*$ contêm apenas amostras representativas de P^* e FP^*, visto que para problemas com variáveis contínuas, os conjuntos P^* e FP^* podem ser contínuos e, consequentemente, conter infinitos pontos.

Se a Equação (2-9) define a fronteira Pareto-ótima global do MOP para $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$, a definição da fronteira Pareto-ótima local do MOP ocorre da Equação (2-9) quando $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^* \mid \mathcal{S}^* \subset \mathcal{F}$. Note que a fronteira Pareto-ótima global é também uma fronteira Pareto-ótima local. Tem-se ainda que se o MOP for convexo, então toda solução Pareto-ótima local é também Pareto-ótima global (MIETTINEN, 1999).

2.2 Classificação dos Métodos de Otimização Multiobjetivo

Para classificar os métodos de Otimização Multiobjetivo, faz-se necessário separar as atribuições de dois agentes que participam durante o processo de resolução do MOP:

- Tomador de decisão;
- Otimizador.

O tomador de decisão (do inglês, *Decision* Maker – DM) é o responsável pela escolha da solução mais apropriada para o MOP. É ele quem detém o conhecimento do problema, sendo capaz de definir critérios, objetivos ou subjetivos, para julgar qual é a melhor solução. Em contrapartida, o Otimizador é o responsável por fornecer as soluções ótimas para o MOP, baseando-se nas preferências impostas pelo Tomador de decisão (MIETTINEN, 1999). Porém, o envolvimento do DM nem sempre é possível.

Os métodos de Otimização Multiobjetivo são classificados justamente pelo nível de envolvimento do DM. Embora não haja um consenso na literatura quanto às diferentes classes dos métodos de Otimização Multiobjetivo, três delas são normalmente citadas (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009):

- Métodos *a priori;*
- Métodos progressivos;
- Métodos *a posteriori*.

Métodos *a priori* requerem que o DM defina antecipadamente qual o peso (importância relativa) que cada objetivo tem sobre o problema. Com esta definição, os objetivos são ponderados e agregados para então serem resolvidos. Ao final da otimização, obtém-se uma única solução que satisfaça as preferências do DM.

Métodos progressivos, também conhecidos como métodos interativos, requerem participação ativa do DM durante o processo de otimização. Ao acompanhar o progresso das soluções, ele é capaz de corrigir sua preferência de forma a redirecionar continuamente o processo de busca. Funções de utilidade são responsáveis por incorporar as preferências do tomador de decisão no curso da otimização, até que ele fique satisfeito com a solução final.

Métodos *a posteriori* não contam com o envolvimento do DM antes e durante o processo de otimização. Como as preferências do DM não são conhecidas, os métodos *a posteriori* buscam um conjunto finito e representativo de soluções Pareto-ótimas aproximadas para o MOP, isto é, buscam por $\tilde{P}^*$ e $\widetilde{FP}^*$. Após o final do processo de otimização, caberá ao tomador de decisão escolher a solução mais apropriada dentre todas as soluções de compromisso contidas em $\tilde{P}^*$.

De acordo com (MIETTINEN, 1999), os métodos progressivos são os mais promissores a fornecerem soluções de interesse para o tomador de decisão, visto que ele acompanha e realimenta o processo com suas preferências. Porém, entende-se que o

envolvimento do DM tem custo elevado e, por isso, nem sempre é possível (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009).

2.3 Considerações Finais

Os algoritmos propostos nesta tese tratam de problema de otimização multiobjetivo e, por isso, os fundamentos sobre otimização multiobjetivo apresentados neste capítulo serão constantemente utilizados ao longo do texto.

Todos os algoritmos propostos nesta tese utilizam o conceito de dominância da Equação (2-7) para comparação de vetores de soluções.

Os algoritmos propostos nesta tese disponibilizam ao final da otimização um conjunto de soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas para escolha do DM. Neste sentido, eles poderiam ser classificados como métodos *a posteriori*. Porém, dada a necessidade de um maior grau de envolvimento DM em problemas de otimização robusta descrita na Seção 6.2, onde um processo interativo entre otimizador e DM é proposto, os algoritmos propostos dependem em menor ou maior grau de informações fornecidas pelo DM e, por isso, podem ser considerados métodos progressivos.

3 ALGORITMOS EVOLUCIONÁRIOS

Este capítulo apresenta os fundamentos dos algoritmos evolucionários (do inglês, *Evolutionary Algorithms* – EAs), e a aplicabilidade que têm na resolução de problemas multiobjetivo (MOPs). Mais detalhes sobre os algoritmos podem ser consultados nas referências bibliográficas indicadas.

3.1 Fundamentos

Otimização estocástica é o termo geral da classe de algoritmos que utilizam algum grau de aleatoriedade para encontrar soluções ótimas de um problema difícil (LUKE, 2013). Algoritmos que fazem uso de meta-heurísticas – métodos que fazem uso de heurísticas com a finalidade de se resolver um problema de otimização complexo – fazem parte dessa classe de otimização estocástica. Parte destes algoritmos que utilizam meta-heurísticas também são classificados como algoritmos populacionais, que fazem uso de diversas amostras de soluções candidatas no espaço de busca com o objetivo de que convirjam para a solução ótima global. Uma parte destes algoritmos populacionais fazem uso de técnicas de computação evolucionária, que se baseiam na verossimilhança com a biologia, genética e evolução das espécies.

O algoritmo genético desenvolvido por Holland (HOLLAND, 1975), por exemplo, é inspirado na teoria evolucionista de Charles Darwin sobre a origem das espécies (DARWIN, 1859). A teoria de Darwin trata basicamente da seleção natural, em que indivíduos fracos tendem a ser extintos, enquanto que indivíduos fortes têm maior chance de passarem seus conteúdos genéticos para gerações futuras por meio de cruzamentos. Assim, após finitas gerações, espera-se que os indivíduos dominantes de uma população sejam portadores de um bom material genético. Mutações genéticas podem ocorrer no processo, cujas alterações podem se perpetuar caso tornem os indivíduos mais fortes, ou não no caso contrário. O algoritmo genético (do inglês, *Genetic Algorithm* – GA) adota estes conceitos, sendo que o indivíduo é o vetor solução $\mathbf{x}$ de um problema de otimização. Cada variável da solução, x_i, é considerada um cromossomo, que pode ser dividida em genes, se a codificação binária for adotada, por exemplo. O valor do vetor solução $\mathbf{x}$, qualquer que seja a representação e codificação

adotada, é conhecido como genótipo, enquanto que a "força" (desempenho) da solução, $f(\mathbf{x})$, é conhecida como fenótipo (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009). Operadores matemáticos de seleção, cruzamento e mutação são aplicados sobre a população de indivíduos do GA de modo que, após um conjunto finito de iterações (gerações), a população final contenha indivíduos de ótimo desempenho (mais fortes segundo analogia à Darwin), em que o melhor entre eles corresponde à solução "ótima" do problema. A popularização do GA ocorreu principalmente por meio do trabalho de Goldberg (GOLDBERG, 1989).

Assim como o GA, outros diversos algoritmos bioinspirados baseados em população foram desenvolvidos para a resolução de problemas de otimização mono-objetivo. Alguns destes algoritmos são listados abaixo:

- *Evolution Strategies* (ES). Técnica simples desenvolvida por Ingo Rechenberg para resolução de um problema experimental na década de 60. A técnica é abordada em detalhes em (BEYER e SCHWEFEL, 2002).
- *Evolutionary Programming* (EP). Desenvolvida na década de 60 por Lawrence J. Fogel. Seu livro (FOGEL, 1999) discorre sobre o assunto.
- *Genetic Programming* (GP). Faz a evolução de programas computacionais para resolução de problemas. O método foi popularizado por John R. Koza, que escreveu uma série de livros sobre o assunto, com destaque ao último de uma série de 4 volumes (KOZA *et al*., 2003).
- *Differential Evolution* (DE). Baseia-se na evolução segundo perturbações diferenciais entre indivíduos. Foi desenvolvido por Rainer Storn e Ken Price (STORN e PRICE, 1997).
- *Cultural Algorithms* (CA). Baseia-se no GA, porém leva em consideração uma componente de conhecimento como auxiliar na busca. Foi introduzido por Robert G. Reynolds (REYNOLDS, 1994).
- *Clonal Selection Algorithm* (CSA). Baseia-se no princípio da resposta imunológica dos seres humanos (CASTRO e ZUBEN, 2002) e faz parte, em conjunto com diversos outros algoritmos, do grupo de sistemas imunológicos artificiais (*Artificial Immune Systems* - AIS).
- *Particle Swarm Optimization* (PSO). Pertencente à categoria das técnicas de inteligência coletiva, observada, por exemplo, na revoada de pássaros. Sua abordagem inicial pode ser vista em (KENNEDY e EBERHART, 1995).

O PSO, diferentemente dos demais, não é considerado um EA, mas um algoritmo do grupo de Inteligência Coletiva (*Swarm Intelligence*) no qual não há reamostragem da população, ou seja, não há seleção natural da população. A implementação específica destes e de outros algoritmos estocásticos podem ser vistos em (LUKE, 2013).

O procedimento geral de um EA é apresentado no Algoritmo 3-1.

Algoritmo 3-1 – Esquema geral de funcionamento de um Algoritmo Evolucionário. Adaptado de (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009).

```
1    g ≔ 0
2    Pop[g] ≔ inicialização(n_pop)
3    f_obj[g] ≔ avaliação(Pop[g])
4    Enquanto (CdP(Pop[g], g) ≠ verdadeiro)
   4.1   Pop'[g] ≔ recombinação(Θ_r[g], Pop[g])
   4.2   Pop''[g] ≔ mutação(Θ_m[g], Pop'[g])
   4.3   f''_obj[g] ≔ avaliação(Pop''[g])
   4.4   Se (Ʊ = falso)
      4.4.1   Pop[g + 1] ≔ seleção(Θ_s[g], f''_obj[g], Pop''[g])
   4.5   Se (Ʊ = verdadeiro)
      4.5.1   Pop[g + 1] ≔ seleção(Θ_s[g], f''_obj[g] ∪ f_obj[g], Pop''[g] ∪ Pop[g])
   4.6   g ≔ g + 1
5    Retorne Pop[g]
```

As variáveis do Algoritmo 3-1 representam as seguintes entidades:

g:	Número da geração.
n_{pop}:	Tamanho da população.
$\mathbf{Pop}$:	População de pais.
$\mathbf{Pop'}$:	População de filhos, pós-recombinação.
$\mathbf{Pop''}$:	População de filhos, pós-mutação e pós-recombinação.
Ʊ:	Presença de elitismo.
$\boldsymbol{\Theta_r}$:	Parâmetros de controle da recombinação.
$\boldsymbol{\Theta_m}$:	Parâmetros de controle da mutação.
$\boldsymbol{\Theta_s}$:	Parâmetros de controle da seleção.
f_{obj}:	Função objetivo de $\mathbf{Pop}$.
f''_{obj}:	Função objetivo de $\mathbf{Pop''}$.

As funções desempenham as seguintes atividades:

$inicialização$:	Inicializa a população com tamanho n_{pop}.
$avaliação$:	Avalia a *fitness*[4] dos indivíduos da população.
CdP:	Calcula a condição de parada levando-se em conta **Pop**[g] e a geração corrente g.
$recombinação$:	Efetua o cruzamento entre os indivíduos de **Pop**[g] por meio de métodos que utilizam $\boldsymbol{\Theta_r}$[g].
$mutação$:	Efetua a mutação entre os indivíduos de $\mathbf{Pop}'$[g] por meio de métodos que utilizam $\boldsymbol{\Theta_m}$[g].
$seleção$:	Efetua a seleção de indivíduos dentre os filhos $\mathbf{Pop}''$[g] (sem elitismo) ou dentre os pais **Pop**[g] e filhos $\mathbf{Pop}''$[g] (com elitismo).

O EA mostrado no Algoritmo 3-1, de fato, pode ser alterado e aprimorado de diferentes maneiras para assegurar uma rápida convergência e elevada acurácia das soluções. Os parâmetros de controle da recombinação (cruzamento), da mutação e da seleção dependem da geração corrente no Algoritmo 3-1, o que significa que eles podem ser adaptáveis ao longo da execução do algoritmo como proposto em (VASCONCELOS *et al*., 2001). O trabalho de (VASCONCELOS *et al*., 2001) faz um estudo comparativo de diferentes mecanismos de seleção, cruzamento, mutação e elitismo para um GA. Embora o tamanho da população seja fixo no Algoritmo 3-1, ele também pode ser variável ao longo das gerações (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009).

3.2 Algoritmos Evolucionários Multiobjetivo

Vários foram os algoritmos desenvolvidos para resolverem um MOP por meio de técnicas de EC (do inglês, *Evolutionary Computation*), desde o pioneirismo do algoritmo *Vector Evaluated Genetic Algorithms* (VEGA) proposto em (SCHAFFER, 1985). Existem algoritmos evolucionários multiobjetivo (MOEAs) baseados em diferentes meta-heurísticas, entre elas o GA como o precursor MOGA (FONSECA e FLEMING, 1993), o ES como PAES (KNOWLES e CORNE, 2000), o DE como

[4] O termo *fitness* do inglês significa aptidão. No contexto de otimização este termo é amplamente utilizado na literatura para se referenciar à medição da qualidade das soluções de otimização. O termo em inglês será mantido ao longo deste texto.

DEMO (ROBIC e FILIPIC, 2005), o PSO como MOPSO (SIERRA e COELLO, 2006), e outros (DEB, 2008). Como visto, existem diferentes métodos bioinspirados para resolução de um MOP, e também existem diferentes combinações de métodos híbridos para tal fim, como descrito em detalhes em (ZHOU *et al*., 2011).

Embora cada EA se baseie em meta-heurísticas específicas para assegurar sua convergência, os MOEAs possuem uma estrutura padrão de funcionamento, que consiste na evolução de indivíduos (soluções) até a solução Pareto-ótima. Esta estrutura padrão é apresentada no Algoritmo 3-2.

Algoritmo 3-2 – Estrutura geral de um MOEA. Adaptado de (GOH e TAN, 2009).

```
1    g ≔ 0
2    Pop[g] ≔ inicialização(n_pop)
3    ExPop[g] ≔ ∅
4    avaliação(Pop[g])
5    Enquanto (CdP(Pop[g], g) ≠ verdadeiro)
   5.1   Pop′[g] ≔ seleção(Θ_s[g], Pop[g], ExPop[g])
   5.2   Pop″[g] ≔ variação(Θ_r[g], Θ_m[g], Pop′[g])
   5.3   avaliação(Pop″[g])
   5.4   Pop[g + 1] ≔ diversificação(Θ_d[g], Pop[g], Pop″[g], ExPop[g])
   5.5   ExPop[g + 1] ≔ atualização(Pop[g], ExPop[g])
   5.6   g ≔ g + 1
6    Retorne ExPop[g]
```

Nota: o cálculo da função *avaliação* não é atribuído a nenhuma variável, pois se assume que o valor calculado fique armazenado nos próprios argumentos de entrada: **Pop**[g] ou **Pop**″[g].

A variável $\boldsymbol{\Theta_d}$ no Algoritmo 3-1 refere-se ao parâmetro de controle da diversificação.

O processo de otimização do MOEA começa com a inicialização da população interna **Pop** de indivíduos. Uma população externa **ExPop** geralmente é mantida armazenada em paralelo, contendo os melhores indivíduos de gerações passadas. Naturalmente, a população externa **ExPop** é inicializada como um conjunto vazio. As funções objetivo dos indivíduos da população inicial são avaliadas. A próxima etapa consiste na seleção de bons indivíduos, **Pop′,** dentro de um grupo composto por indivíduos de ambas as populações **Pop** e **ExPop** para serem variados. O método de seleção é feito segundo o critério de dominância definido na Equação (2-8). Entende-se por variação o processo de modificação de indivíduos selecionados em novos indivíduos, potencialmente bons. A variação de **Pop″** pode ocorrer, por exemplo,

mediante mecanismos clássicos de EA, como cruzamento e mutação, apresentados no Algoritmo 3-1. Em seguida, avaliam-se as funções objetivo dos indivíduos das populações[5] e diversificam-se as soluções para que elas fiquem espalhadas entre si, respeitando o critério de dominância. Depois, faz-se a atualização da população externa **ExPop** com as novas soluções consideradas boas, isto é, as bem avaliadas e bem distantes umas das outras. O tamanho de **ExPop**, fixo ou variável, varia de algoritmo para algoritmo.

O procedimento do Algoritmo 3-2 se repete até que o critério de parada seja satisfeito, quando a população **ExPop** poderá conter uma boa aproximação do conjunto de soluções Pareto-ótimas, $\tilde{P}^*$.

A estrutura do MOEA apresentada no Algoritmo 3-2 é geral, independentemente do algoritmo evolucionário utilizado. Ao se confrontar o Algoritmo 3-2 com o Algoritmo 3-1, evidenciam-se algumas semelhanças entre o MOEA e o EA mono-objetivo (do inglês, *Single Objective Evolutionary Algorithm* – SOEA), principalmente com relação às técnicas iterativas para se adaptar um conjunto de soluções até se alcançar um critério pré-definido de parada. Uma diferença fundamental entre as duas abordagens é a forma pela qual as soluções são selecionadas. As operações de *diversificação* e *atualização* do Algoritmo 3-2 não são estritamente necessárias para um MOEA, mas favorecem a convergência do algoritmo.

De acordo com (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009), para que um MOEA seja considerado bem sucedido, ele deve garantir os seguintes objetivos:

- Preservar os pontos não-dominados no espaço dos objetivos e suas respectivas soluções no espaço das variáveis de decisão;
- Continuar o progresso sucessivo da $\widetilde{PF}^*$ em direção à PF^*;
- Manter a diversidade dos pontos da $\widetilde{PF}^*$ e/ou das soluções $\tilde{P}^*$;
- Prover ao DM um número de pontos da $\widetilde{PF}^*$ limitado, porém suficiente.

Em se tratando dos MOEAs que representam o estado da arte, destaca-se uma característica que eles têm em comum: o elitismo. O elitismo envolve basicamente dois processos (GOH e TAN, 2009):

- Preservação de boas soluções;
- Reinserção das boas soluções no processo evolutivo da população corrente.

[5] Para o caso de indivíduos de **ExPop** que tenham sido previamente avaliados, a reavaliação das funções objetivo em gerações posteriores é dispensável.

O mecanismo pelo qual ambos os processos acima são feitos varia de acordo com o algoritmo. Na estrutura geral do MOEA apresentada no Algoritmo 3-2, a existência e a atualização de uma população externa **ExPop,** com os melhores e mais diversificados indivíduos de cada geração, garante o elitismo do procedimento, em que as melhores soluções não são perdidas durante o processo evolutivo.

Alguns MOEAs que fazem uso de elitismo são o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), que se baseia no GA e são descritos em detalhes em (DEB *et al*., 2002), os algoritmos *Pareto Archived Evolution Strategy* (PAES), que faz uso de (1+1)-ES e é descrito em detalhes em (KNOWLES e CORNE, 2000), o *Pareto Envelope-Based Selection Algorithm I e II* (PESA e PESA-II), que se baseiam no GA e é descrito em detalhes em (CORNE, KNOWLES e OATES, 2000) e (CORNE *et al*., 2001), respectivamente, o *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2), que se baseia no GA e é descrito em detalhes em (ZITZLER, LAUMANNS e THIELE, 2001). Outros vários MOEAs com elitismo foram criados, entretanto, os citados anteriormente formaram a *baseline* dos MOEAs, e muitos outros derivaram de seus conceitos.

Os MOEAs baseados em GAs têm se mostrado promissores em relação aos MOEAs que adotam outros mecanismos de busca evolucionária. Uma explicação detalhada sobre o uso de GAs em Otimização Multiobjetivo (MO) pode ser encontrada em (KONAK, COIT e SMITH, 2006).

Mais recentemente a linha de pesquisa de otimização com muitos objetivos[6] (do inglês, *many-objective*) tem se fortalecido resolvendo problemas relacionados ao critério de dominância em espaços multidimensionais (KASPRZYK *et al*., 2013). Novos algoritmos de otimização *many-objective* surgiram como referências, tais como o MOEA/D (ZHANG e LI, 2007), o NSGA-III (DEB e JAIN, 2014) e o MOEA/DD (LI *et al*., 2015).

3.3 Considerações Finais

Embora exista uma grande diversidade de algoritmos evolucionários na literatura, com diferentes características e utilidades, todos os algoritmos propostos nesta tese foram desenvolvidos tendo como base os mecanismos evolucionários do NSGA-II (DEB *et al*., 2002), por ser um dos MOEAs mais citados e utilizados na literatura.

[6] Um problema é considerado com muitos objetivos se $n_{obj} > 3$ (KASPRZYK *et al*., 2013).

Ao padronizar e fixar o NSGA-II como o *baseline* de todos os algoritmos propostos, torna-se possível isolar o efeito do MOEA em relação ao objeto de estudo desta tese: métodos de busca por soluções ótimas robustas, evitando introduzir viés de algoritmos evolucionários distintos.

4 PROBLEMAS EM CENÁRIOS COM INCERTEZAS

É possível que problemas reais de engenharia sejam resolvidos diversas vezes por um mesmo método e apresentem resultados diferentes em todas as vezes. Isto se deve à falta de determinismo do problema. Por exemplo, dois experimentos realizados nas mesmas condições em determinado sistema podem fornecer resultados diferentes. Esta diferença origina-se de fatores incertos que são inerentes ao problema em questão (BEYER e SENDHOFF, 2007). Em algumas situações esses fatores podem ser identificados e controlados, o que possibilita a redução de suas influências no problema. Entretanto, em outras situações pode não ser possível, ou mesmo viável, controlar estes fatores de perturbação, sendo que para a correta análise do problema deve-se levar em conta os cenários com incertezas não controladas (BEYER e SENDHOFF, 2007).

Como se não bastassem as incertezas inerentes aos problemas reais, estes podem ser representados por modelos matemáticos, com os quais é possível reproduzir o comportamento do problema real. Porém, mesmo modelos matemáticos de alta fidelidade não fornecem resultados exatos correspondentes aos resultados reais do sistema modelado. Traduzir fenômenos reais por modelos matemáticos é por essência uma simplificação, e como toda simplificação, apresenta degradação de informação. Em se tratando de modelos, esta degradação de informação pode ser modelada como mais um fator de incerteza (JIN e BRANKE, 2005). Têm-se então modelos incertos que representam problemas em cenários com incerteza.

Em termos matemáticos pode-se representar um modelo qualquer sem incertezas como:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}). \tag{4-1}$$

Cada saída y_i é gerada por uma função correspondente $f_i(\mathbf{x})$**.** O vetor das n_f funções de saída é:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}), \dots, f_{n_f}(\mathbf{x})\right), \tag{4-2}$$

Em se tratando de modelos com incerteza, a representação matemática torna-se:

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \tag{4-3}$$

em que $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n_p})$ representa os parâmetros de incertezas, n_p o número de incertezas presentes no modelo e $\mathcal{P}$ o domínio da incerteza.

Quando fatores de incerteza são controláveis, pode-se repassá-los do vetor **p** para o vetor **x**, de tal modo que variáveis responsáveis pela incerteza do modelo tornem-se variáveis de decisão pertencentes ao vetor **x** sendo, portanto, passíveis de serem obtidas durante o processo de otimização.

A notação **y** se refere às saídas determinísticas, enquanto que a notação $\mathbf{y}'$ se refere às saídas estocásticas, sob efeito das incertezas.

4.1 Tipos de Incertezas

Um modelo representativo de um sistema real pode ter embutido em si incertezas do sistema real e incertezas relacionadas à sua própria formulação. Quanto mais simplificado o modelo, maior será a incerteza associada a ele. Devido à diversidade de incertezas que podem estar presentes em um modelo, torna-se necessário classificá-las.

Não há um consenso na literatura sobre a classificação dos diferentes tipos de incertezas em um problema de otimização. Entretanto, parte da comunidade científica procura dividir os tipos de incerteza em quatro grupos (JIN e BRANKE, 2005), (BEYER e SENDHOFF, 2006):

- Incerteza na resposta do modelo;
- Incerteza nos parâmetros do modelo;
- Incerteza na definição do modelo;
- Incerteza na resposta de modelo variante no tempo.

Cada um destes grupos de incerteza é apresentado separadamente nas Subseções a seguir. Note que todos eles são enquadrados no modelo de perturbação proposto na Equação (4-3).

4.1.1 Incerteza na Resposta do Modelo

Isto ocorre quando uma ou mais funções de saída sofrem interferência de um fator incerto, o ruído. O ruído por sua vez é uma variável aleatória cuja distribuição depende do problema em questão. Em problemas de engenharia, costuma-se atribuir distribuição normal às variáveis aleatórias. Sendo assim, a presença do ruído no modelo é feita a partir da adição de uma variável **z** com média $\mu = 0$ e variância σ^2. Em termos matemáticos tem-se:

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{z}, \tag{4-4}$$

em que $\mathbf{z} = \left(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n_p}\right)$ representa os n_p ruídos presentes em cada uma das n_f funções de saída y_i, desde que $n_p \leq n_f$. Se $n_p \neq n_f$, pode-se dizer que existirá alguma $f_i(\mathbf{x})$ sem ruído.

Modelos com incerteza na resposta são comuns quando há a impossibilidade de se extrair o resultado **y** de um modelo sem contaminação com ruído. Esta situação ocorre, por exemplo, em problemas que fazem uso de sensores (não ideais) em que os resultados aferidos são incertos. Para exemplificar, sensores de temperatura, pressão, luminosidade, entre outros, apresentam algum nível de ruído de medição que merece atenção.

Outra fonte de modelos com ruído na saída é o uso de algumas ferramentas de simulação computacional com instabilidade numérica, que fornecem na saída o resultado **y** com ruído (GRATSCH e BATHE, 2005), (HAUKAAS e GARDONI, 2011).

Algoritmos que tratam de problemas com ruídos costumam fazer parte do grupo de *Noisy Optimization*. Mais informações em (BEYER e SENDHOFF, 2006) e (GOH e TAN, 2007).

4.1.2 Incerteza nos Parâmetros do Modelo

A incerteza paramétrica se deve aos desvios não controlados de parâmetros "fixos" do modelo ou das próprias variáveis de decisão **x**. São diversas as causas de desvios paramétricos. Entre elas pode-se citar a imprecisão no cálculo dos parâmetros fixos do modelo, a dependência das constantes do modelo com agentes externos (ambientais) não modelados e a imprecisão na implementação prática das variáveis de decisão.

Tal como ocorre em modelos com incertezas na resposta, as incertezas associadas aos parâmetros do modelo são representadas por meio de variáveis aleatórias com uma distribuição de probabilidade determinada. A distribuição de probabilidade normal é geralmente empregada em problemas de engenharia com média $\mu = 0$ e variância σ^2.

Assumindo a possibilidade de variação do conjunto de parâmetros fixos **a**, o modelo do problema passa a ser função não somente das variáveis de decisão **x**, o que resulta no seguinte modelo matemático:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{a}). \tag{4-5}$$

Embutindo-se as incertezas, obtém-se:

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}', \mathbf{a}'), \tag{4-6}$$

dado que:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}, \tag{4-7}$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{a}}, \tag{4-8}$$

em que $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}} = (\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \delta_{x_3}, \dots, \delta_{x_{n_v}})$ e $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{a}} = (\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \delta_{a_3}, \dots, \delta_{a_{n_a}})$ são parâmetros de incerteza $\aleph(0; \sigma^2)$ associados às variáveis de decisão $\mathbf{x}$ e aos parâmetros fixos $\mathbf{a}$, respectivamente. O valor n_a representa o número de parâmetros fixos presentes no modelo. A incerteza também pode ser dada em função das variáveis de decisão, $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$.

Apesar dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{x}$ representarem grandezas completamente diferentes, ambos podem ser tratados da mesma forma na presença de incertezas em algumas abordagens (SOARES, 2008), (MENDES, 2013).

Modelos com parâmetros incertos são comuns quando há variação paramétrica $\mathbf{a}$ devido a fatores externos não modelados. A este tipo de variação dá-se o nome de mudança das condições ambientais. Para exemplificar, considere um circuito impresso cujas dimensões e propriedades dos componentes variam com a temperatura e que ele opere em um ambiente onde há variações de temperatura. Para que o circuito continue funcional, ele terá que ser robusto à faixa de variação da temperatura mesmo com as mudanças das propriedades de seus componentes (BURMEN *et al*., 2002). Outros exemplos de mudança das condições ambientais são: interferência eletromagnética em circuitos eletrônicos (FERBER *et al*., 2013a), mudança do ângulo de ataque de um aerofólio (SCHILLINGS, SCHIMIDT e SCHULZ, 2011), mudança de temperatura, pressão e umidade no ambiente, mudança de propriedades dos materiais, e outros.

A incerteza associada a $\mathbf{x}$ constitui outra fonte de modelos com parâmetros incertos. Este tipo de incerteza é comum, por exemplo, no momento de implementação de uma solução nominal $\mathbf{x_0}$ previamente calculada. Mesmo que a solução nominal seja ótima para o problema em questão, pode ser que não seja possível implementá-la no sistema/processo por conta de vários motivos, dos quais se destacam:

- Falta de ferramental adequado para implementar a solução exata $\mathbf{x_0}$;
- Imprecisão do ferramental utilizado para implementar a solução exata $\mathbf{x_0}$;
- Negligência ou desatenção na utilização do ferramental durante o processo de implementação da solução exata $\mathbf{x_0}$.

Entende-se por implementação qualquer conjunto de atividades necessárias para colocar a solução $\mathbf{x_0}$ em uso. Por exemplo, a implementação de um aerofólio com

dimensões $\mathbf{x_0}$ consiste na construção do mesmo. Entende-se por ferramental o recurso ou material ou humano necessário para implementar uma solução.

Em casos específicos, pode-se classificar uma incerteza como pertencente a mais de um tipo de incerteza. Suponha um modelo que contenha a seguinte função objetivo:

$$f(\mathbf{x}) = x_i. \tag{4-9}$$

Se existir alguma incerteza δ_i associada à x_i, a saída incerta do modelo poderá ser descrita tanto pela Equação(4-4), em que:

$$y' = f(\mathbf{x}) + z \mid f(\mathbf{x}) = x_i,\ \ z = \delta_i, \tag{4-10}$$

quanto pela Equação(4-6), em que:

$$y' = f(\mathbf{x}') \mid \mathbf{x}' = x_i + \delta_i. \tag{4-11}$$

Do exposto, o modelo representado pelas Equações (4-10) e (4-11) pode ser classificado como modelo com resposta incerta ou modelo com incerteza paramétrica. De fato esta similaridade se reflete nos métodos de busca de soluções robustas para estes dois tipos de incerteza.

Apesar das incertezas nas variáveis de decisão e nos parâmetros fixos do modelo surtirem o mesmo efeito na saída do modelo, o trabalho de (BEYER e SENDHOFF, 2007) propõe a divisão de ambos em tipos diferentes:

- Incertezas paramétricas de mudanças ambientais e de condições operacionais, para variações em $\mathbf{a}$.
- Incertezas paramétricas de tolerância de produção e de imprecisão de atuação, para variações em $\mathbf{x}$.

4.1.3 Incerteza na Definição do Modelo

Este tipo de incerteza pode ocorrer em situações em que o projetista não entende o fenômeno a ser modelado ou quando são feitas simplificações em modelos de alta fidelidade do fenômeno. Também ocorre quando modelos mais precisos não estão disponíveis ou são inviáveis de serem obtidos ou calculados. Estas simplificações são feitas com o intuito de se obter modelos mais simples que sejam capazes de aproximar suas saídas às respostas reais do sistema, dado o mesmo conjunto de entrada.

Em várias situações na computação científica, quanto maior a fidelidade de um modelo em expressar o comportamento real do sistema, maior será sua complexidade, o custo computacional para calculá-lo. Podem-se adotar duas estratégias para simplificar esses modelos (JIN, 2011):

- Simplificar o modelo, ignorando-se ou compensando-se termos desprezíveis do modelo;
- Criar metamodelos cujas saídas sejam próximas àquelas obtidas de experimentos do problema real ou calculadas por de modelos de alta fidelidade, dado o mesmo conjunto de entrada.

A primeira estratégia procura eliminar termos das equações do modelo que adicionam pouca informação na relação entrada-saída. Quando estes modelos são analíticos, também conhecidos como modelos caixa-branca, um estudo minucioso deve ser feito de cada parcela das equações que os compõem a fim de que as partes eliminadas não resultem em perda de informação significativa. Por questões práticas, muitas vezes a ordem dos modelos é limitada, o que pode gerar resultados menos precisos. Esta estratégia é classificada como incerteza paramétrica estrutural (BLUMEL, 2000), o que pode causar confusão com as incertezas paramétricas no modelo. A segunda estratégia, por outro lado, parte da criação de modelos inteiramente novos que não se preocupam com a física e dinâmica do sistema modelado, mas somente com sua relação entrada-saída. Os modelos obtidos desta forma são conhecidos como modelos caixa-preta, ou modelos caixa-cinza, caso alguma informação analítica do sistema a ser modelado seja utilizada.

Por se tratarem de aproximações, ambas as aproximações resultam em modelos incertos. Em termos matemáticos modelos incertos podem ser representados como:

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{E}(\mathbf{x}), \tag{4-12}$$

em que $\boldsymbol{E}(\mathbf{x})$ é a parcela residual não modelada que torna o resultado do modelo incerto diferente do resultado esperado, $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}'$**.** O erro representado por $\boldsymbol{E}(\mathbf{x})$ é função de $\mathbf{x}$, uma vez que normalmente as aproximações são feitas em torno de pontos de operação.

O trabalho de (BEYER e SENDHOFF, 2007) não separa as incertezas de modelos com respostas ruidosas das incertezas de modelos incertos, dada a semelhança das Equações (4-4) e (4-12). Ambas as incertezas são classificadas como incertezas de saída. Esta classificação, no entanto, pode ser questionada por conta da diferença conceitual das incertezas envolvidas.

Apesar da semelhança, as Equações (4-4) e (4-12) são diferentes, pois o ruído $\boldsymbol{z}$ do modelo com resposta ruidosa é aleatório enquanto que o erro $\boldsymbol{E}(\mathbf{x})$ do modelo incerto é determinístico. Dessa forma, a reamostragem da Equação (4-4) para um mesmo $\mathbf{x}$ fornece resultados diferentes, enquanto que a reamostragem da Equação (4-12) para um mesmo $\mathbf{x}$ fornece resultados idênticos.

Modelos incertos são muito comuns na solução de problemas de engenharia. Modelos aproximados e simples são derivados de problemas complexos, a fim de se facilitar o tratamento matemático destes e possibilitar solucioná-los em tempo hábil. Portanto, existe um *trade-off* necessário entre acurácia da resposta e tempo de resolução. Para exemplificar, destacam-se problemas de engenharia que requerem simulações computacionais que demandam horas ou até dias para obterem resultados, mas podem ser simplificadas por métodos de aproximação que fornecem em poucos segundos resultados menos precisos, porém satisfatórios (WANG e SHAN, 2006).

A criação de metamodelos para as funções objetivo de um problema de otimização robusta é uma alternativa citada na literatura para redução do tempo de cálculo das métricas de robustez, como feito em (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006) e (MENDES *et al*., 2013a). Neste caso, criam-se modelos incertos com o propósito de auxiliar na busca por soluções robustas.

4.1.4 Incerteza na Resposta de Modelo Variante no Tempo

Modelos variantes no tempo também são conhecidos como modelos dinâmicos, uma vez que sua saída varia com o tempo $t \mid t \in \mathbb{R}$. Isso decorre principalmente da mudança paramétrica do modelo em função do tempo, como mostra a Equação (4-13), adaptada da Equação (4-5):

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{f}\big(\mathbf{x}, \mathbf{a}(t)\big). \tag{4-13}$$

Assim, resultados avaliados em instantes t diferentes, dado o mesmo conjunto de entrada $\mathbf{x}$, poderão ser diferentes. Modelos variantes no tempo são determinísticos, pois dados um instante t_i e uma entrada $\mathbf{x_0}$ sua resposta é sempre a mesma para a tupla $\big(\mathbf{x_0}, \mathbf{a}(t_i)\big)$. Entretanto, para a tupla $\Big(\mathbf{x_0}, \mathbf{a}\big(t_j\big)\Big) \mid t_j \neq t_i$, a resposta poderá ser diferente da obtida com a tupla $\big(\mathbf{x_0}, \mathbf{a}(t_i)\big)$. Não há nenhum componente aleatório e de incerteza no modelo.

Como a característica do modelo variante no tempo se assemelha ao exposto na Equação (4-3), a variação temporal de $\mathbf{a}(t)$ pode ser vista como uma fonte de incerteza $\mathbf{p}$, caso o comportamento de $\mathbf{a}(t)$ seja desconhecido e, portanto, considerado aleatório.

Apesar de todos os tipos de incertezas mencionados nas Subseções precedentes terem se referido a funções objetivo $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$, Equação (4-1), as mesmas definições se estendem às funções de restrições do modelo, sejam elas de desigualdade, $\boldsymbol{g}(\mathbf{x})$, ou igualdade, $\boldsymbol{h}(\mathbf{x})$.

Algoritmos que tratam de problemas com modelos dinâmicos costumam fazer parte do grupo de *Dynamic Optimization*. Apesar disso, os trabalhos de (YU *et al*., 2010) e (FU *et al*., 2014) lidam com problemas dinâmicos como se fossem estáticos, indicando que ao se encontrar soluções ótimas robustas de forma apropriada para o problema estático, estas continuam ótimas para o problema dinâmico. Neste caso, a robustez se dá em torno da variabilidade das funções objetivo dinâmicas. Esta abordagem é válida quando as variações paramétricas são lentas, e a constante avaliação das funções objetivo é custosa.

4.2 Representações de Incertezas

Como visto na Seção 4.1 existem vários tipos de incertezas. A incerteza de cada tipo deve ser adequadamente representada matematicamente, dado que o sucesso de projetos de engenharia depende significativamente da representação de incertezas utilizadas nos modelos (CHEN, 2000). Modelos que desprezam incertezas podem levar a consequências trágicas, enquanto que modelos que as superestimam podem levar a soluções demasiadamente conservadoras e caras.

O trabalho de (BEYER e SENDHOFF, 2007) classifica a representação das incertezas em três grandes grupos, são eles:

- Incerteza probabilística:
  É definida uma função densidade de probabilidade para representar a incerteza.
- Incerteza determinística:
  É definido um intervalo fechado dentro do qual a incerteza pode variar.
- Incerteza possibilística:
  É definido um intervalo nebuloso (*fuzzy set)* dentro do qual a incerteza pode variar.

A incerteza probabilística é empregada em situações em que se tem informação *a priori* da distribuição da incerteza em torno de uma variável, com a qual é possível estimar funções densidade de probabilidade e descrevê-las no modelo (DUBOIS e PRADE, 2009). A incerteza determinística é empregada quando não se tem informação acerca da variabilidade da incerteza, mas se sabe que ela varia dentro de um intervalo bem definido (SOARES, 2008). Por fim, a incerteza possibilística é empregada quando

se tem informação imprecisa a respeito dela, fazendo uso de informação linguística para modelar e ponderar o conjunto a que pertence (KLIR e FILGER, 1998).

Em (CHEN, 2000) é feito um estudo comparativo entre a representação probabilística e possibilística de incertezas em problemas de detecção de falhas em projetos estruturais. O trabalho de (CHEN, 2000) demonstra que a representação probabilística é melhor que a possibilística caso haja informação suficiente disponível sobre o problema. Em suma, se o número de amostras é suficientemente grande e o tipo da distribuição é conhecido, métodos probabilísticos são indicados. Caso o número de amostras seja pequeno e o tipo da distribuição seja conhecido, métodos Bayesianos são indicados. Do contrário, métodos híbridos devem ser utilizados (probabilísticos + possibilísticos). Embora a representação de incertezas por meio de funções densidade de probabilidade seja aconselhável pela riqueza de informação, ela pode ser impraticável e extremamente custosa para problemas com mais de cinco variáveis (JIN e BRANKE, 2005).

De acordo com (KRUISSELBRINK, 2012), os três grupos de representação de incertezas podem ser classificados com base na informação sobre a natureza das incertezas. Isto é, a incerteza probabilística é aquela que contém mais informação sobre o comportamento e distribuição da incerteza, a incerteza determinística contém menos informação visto que só dispõe de um intervalo de variabilidade, enquanto que a incerteza possibilística é a que contém menos informação de todas pois nem mesmo o intervalo de incerteza é bem definido.

As Subseções seguintes apresentam brevemente cada uma destas representações.

4.2.1 Incerteza Probabilística

A incerteza probabilística fornece informação suficiente das incertezas por meio de funções densidade de probabilidade. Portanto, sabe-se *a priori* a probabilidade de que uma incerteza específica esteja em determinada faixa de valores (DUBOIS e PRADE, 2009). Existem funções clássicas de densidade de probabilidade, tais como: distribuição uniforme, distribuição normal, distribuição de Weibull, distribuição t-Student, distribuição beta, distribuição chi-quadrado, distribuição Fisher-Snedecor, e outras. A função densidade de probabilidade também pode ser estipulada por meio de experimentos e regressões. Os trabalhos de (DU e CHEN, 2000), (CIOFFI, FORMISANO e MARTONE, 2004) e (FERBER *et al*., 2013b) exploram esta representação de incerteza.

4.2.2 Incerteza Determinística

A única informação disponível para a incerteza determinística (ou intervalar) é o intervalo fechado dentro do qual se sabe que uma incerteza específica está. Porém, não se sabe a probabilidade dela assumir qualquer um dos valores dentro deste intervalo. O trabalho de (SOARES *et al*., 2009b) e (MENDES, 2013) exploram esta representação de incerteza por meio de técnicas intervalares, visto que sua representação matemática é um intervalo.

4.2.3 Incerteza Possibilística

Nesta representação não é possível definir um intervalo fechado dentro do qual se tem a garantia com 100% de certeza que a incerteza esteja presente. O que se sabe é a possibilidade de uma incerteza estar dentro de um intervalo. Há a necessidade, portanto, de definição de intervalos nebulosos (*fuzzy sets*) onde a presença de uma incerteza é feita por meio de inferências nebulosas, especificando-se funções de pertinência específicas. Várias funções de pertinência podem ser utilizadas: triangular, trapezoidal, Gaussiana, Bell generalizada, e outras. Neste contexto, faz-se necessário agrupar e extrair informação de termos linguísticos, comumente utilizados por tomadores de decisão e *experts* (PARREIRAS *et al*., 2010). Mais informações em (KLIR e FILGER, 1998) e (PEDRYCZ *et al*., 2010).

4.3 Considerações Finais

Esta tese considera somente as incertezas nos parâmetros do modelo, uma vez que os outros tipos de incertezas requerem métodos específicos pertencentes a outras linhas de pesquisa.

Os algoritmos propostos foram desenvolvidos para lidar somente com modelos cujas incertezas sejam determinísticas, uma vez que na maioria das vezes nenhuma informação da natureza das incertezas é conhecida nos problemas teste e/ou de engenharia.

5 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

5.1 Conceito

Uma solução robusta é definida como sendo aquela cujo resultado é pouco sensível à sua variabilidade (BEN-TAL, EL GHAOUI e NEMIROVSKI, 2009). Embora este conceito seja simples, ele é muito geral e, portanto, abre margem a várias interpretações alternativas do termo robustez. Isto de fato ocorre no meio científico, onde se percebe que cada autor define sua própria métrica de robustez para avaliar o quão robustas são suas soluções.

Em se tratando de Otimização de Projeto (*Design Optimization*) na presença de incertezas, existem dois segmentos na literatura que abordam o assunto: Otimização Robusta de Projeto (*Robust Design Optimization* - RDO) e Otimização de Projeto baseada em Confiabilidade (*Reliability-Based Design Optimization* - RBDO). Em suma, a diferença entre os segmentos pode ser elencada com base na frequência de ocorrência de eventos resultantes de perturbações e do impacto que estes eventos podem gerar no sistema sob análise (ZANG *et al*., 2002), como mostra a Figura 5-1.

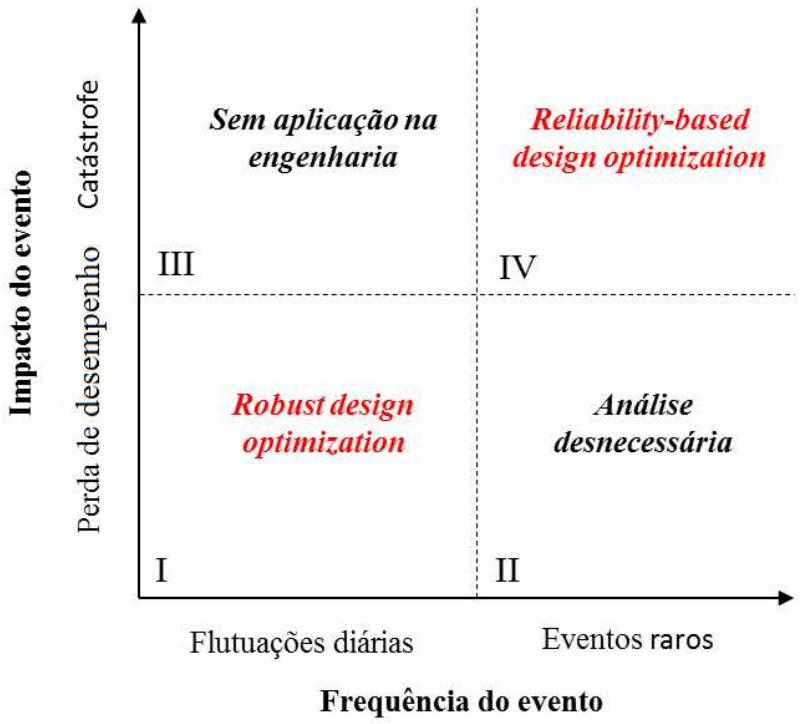


Figura 5-1 – Diferenciação entre a necessidade de uso de *Robust Design Optimization* e de *Reliability-based Design Optimization*. Adaptada de (ZANG *et al*., 2002).

Da Figura 5-1, percebe-se que a *Reliability-based Design Optimization* está mais voltada para a minimização da probabilidade de ocorrências de falhas catastróficas, enquanto que a RDO está voltada para a minimização da variabilidade do desempenho.

Embora esta tese seja focada em RDO para minimização da variabilidade do desempenho frente à variabilidade das soluções, ela trata as restrições como se fossem problemas de *Reliability-based Design Optimization*, procurando maximizar a probabilidade de não violação de restrição, uma vez que as soluções para um MOP devem sempre satisfazer as restrições, mesmo na presença de incertezas. Então, a Equação (2-6) é reescrita para o problema de otimização robusta multiobjetivo restrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \\ &P(\boldsymbol{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0) > \Gamma, \end{aligned} \tag{5-1}$$

em que o operador P(ç) indica a probabilidade de ocorrência do evento ç, e Γ é um valor limiar a partir do qual considera-se que a solução x é factível mesmo sob a presença de incertezas p.

É importante ressaltar que, segundo (GOH e TAN, 2007), na área de pesquisa operacional, a otimização robusta é considerada uma metodologia de modelagem na qual os problemas robustos são reformulados no formato de problemas de programação linear, cônica, quadrática ou semidefinida. Sendo assim, algumas simplificações para assegurar a maneabilidade computacional são feitas. Entretanto, essas simplificações podem se tornar em mais uma fonte de incertezas do problema, o que pode ser indesejável. Para mais detalhes sobre estas metodologias consulte (BEN-TAL, EL GHAOUI e NEMIROVSKI, 2009).

A Seção 5.2 apresenta alguns conceitos e estratégias utilizados para realizar RDO para os quatro diferentes tipos de incertezas da Seção 4.1, e a Seção 5.3 algumas métricas de robustez citadas na literatura.

5.2 Obtenção de Soluções Robustas

Em se tratando de incertezas, dois conceitos estatísticos se fazem muito recorrentes na área de otimização robusta: valor esperado e desvio padrão das funções objetivo, em função do caráter aleatório das variáveis de decisão afetadas por perturbações: $\mathbf{x} + \mathbf{p}$.

Considerando que um modelo possua diversos fatores de incerteza, e que as funções densidade de probabilidade destes fatores sejam conhecidas, pode-se calcular

qual seria o valor esperado (expectância) das saídas do modelo. Muitos trabalhos na literatura assumem que as incertezas do tipo probabilísticas ocorrem segundo uma função densidade de probabilidade (PDF) Gaussiana. Porém, nem sempre a forma funcional da densidade de probabilidade da incerteza é conhecida *a priori*, fazendo-se necessário avaliar amostras do problema para estimar o valor esperado das saídas perturbadas do modelo.

Entende-se por "valor esperado" de uma variável aleatória (incerta), $E[x]$, o valor médio de x considerando-se infinitas amostragens dela, levando-se em conta sua função de probabilidade para variável discreta e função densidade de probabilidade para variável contínua (HASTIE, TIBSHIRANI e FRIEDMAN, 2009). A Equação (5-2) apresenta o enunciado em termos matemáticos para variáveis aleatórias discretas e a Equação (5-3) para variáveis aleatórias contínuas:

$$E[x] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i), \tag{5-2}$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \tag{5-3}$$

em que $p(x_i)$ é a probabilidade de ocorrência de x_i e $p(x)$ a função densidade de probabilidade.

Do ponto de vista de um modelo sob presença de incertezas $\boldsymbol{\delta}$ (variáveis aleatórias), a saída do modelo $f(\mathbf{x})$ torna-se a variável aleatória em estudo e as Equações (5-2) e (5-3) são aplicáveis. Pode-se ainda extrapolar a definição de expectância para variáveis aleatórias multidimensionais, tal como mostram as Equações (5-4) e (5-5) para os casos discreto e contínuo, respectivamente.

$$E[f(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^{\infty} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta_i}) p(\boldsymbol{\delta_i}), \tag{5-4}$$

$$E[f(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}) p(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{d\delta}. \tag{5-5}$$

A complexidade, entretanto, aumenta em função do número de dimensões do problema.

Uma vez que se conhece a função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória representante de um fator de incerteza, pode-se calcular qual será o valor esperado do modelo.

O desvio padrão σ é definido em função do valor esperado, como sendo:

$$\sigma = \sqrt{E[(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) - E[\boldsymbol{f}(\mathbf{x})])^2]}. \tag{5-6}$$

Embora o valor esperado e o desvio padrão sejam adotados como métricas padrão de robustez na otimização robusta, a estimativa numérica de seus valores é um grande desafio (BEYER e SENDHOFF, 2007). As próximas seções mostram como estas duas métricas de robustez são estimadas no contexto dos algoritmos evolucionários.

5.2.1 Soluções Robustas de Modelos com Incerteza na Resposta

A revisão de (JIN e BRANKE, 2005) indica que estratégias evolutivas são algoritmos adequados para problemas envolvendo modelos com incerteza na saída. Em alguns casos o ruído é até mesmo benéfico, pois possibilita convergência prematura em bacias de atração locais.

Os algoritmos trabalham segundo duas abordagens diferentes: média explícita e média implícita. Não há um consenso na literatura sobre qual das médias, explícita ou implícita, apresenta os melhores resultados. A decisão de qual é melhor deve ser analisada individualmente para cada problema.

5.2.1.1 Média Explícita

Para se estimar o valor esperado de $f(\mathbf{x})$, procura-se aumentar o número de amostras de $f(\mathbf{x})$. A amostragem é a responsável, neste caso, em diminuir a variabilidade da resposta na razão de $\sqrt{N}$, sendo N o número de amostras.

No contexto dos algoritmos evolucionários, (JIN e BRANKE, 2005) propõem as seguintes alternativas:

1. Adaptação dinâmica do número de amostras avaliadas em função:
    a. do número de gerações;
    b. do nível de ruído na vizinhança da solução, caso seja mensurável;
    c. da variância da solução corrente.
2. Para a seleção (μ, λ) ou $(\mu + \lambda)$ de estratégias evolutivas, a amostragem é escolhida de acordo com a probabilidade de cada indivíduo estar entre os μ que serão selecionados.
3. Pode-se fazer a média de pontos da vizinhança em torno da solução a ser avaliada. A construção de modelos locais é aconselhada para este caso. A média neste caso não é temporal (*average over time*), mas espacial (*average over space*), uma vez que os resultados de soluções vizinhas são utilizados, não

ocorrendo reamostragem em torno da solução corrente. Esta abordagem requer, entretanto que o modelo local tenha um contorno (do inglês, *landscape*) suave.

4. Se uma solução tem alta probabilidade de estar entre as melhores e, consequentemente, ser escolhida para as próximas gerações, o número de amostras dela pode ser maior que o das demais soluções (FRANÇA e ZUBEN, 2009).
5. Escolher amostras não aleatórias por meio de técnicas de amostragem mais eficientes, tal como *Orthogonal Sampling* ou *Latin Hypercube Sampling*.

5.2.1.2 Média Implícita

Quanto maior for a população do algoritmo evolucionário, maior será o efeito sobre a média implícita. Em termos estatísticos, a influência do ruído na avaliação de uma solução é compensada pelo ruído presente em outra solução avaliada. Idealmente, tendo-se uma população infinita, o ruído será totalmente compensado (JIN e BRANKE, 2005).

5.2.2 Soluções Robustas de Modelos com Incerteza nos Parâmetros

A otimização de modelos com incerteza paramétrica é frequente em problemas de otimização de projeto (do inglês, *Design Optimization* – DO), principalmente na área de engenharia mecânica (DEB, 1991), (SANDGREN e CAMERON, 2002), e também em problemas de sequenciamento de produção (do inglês, *Scheduling*) (LI e IERAPETRITOU, 2008).

Soluções robustas e confiáveis para modelos com incerteza paramétrica devem atender basicamente a dois requisitos:

1) O resultado da solução ótima deve ser pouco sensível a variações[7] nas variáveis de decisão e/ou nos parâmetros do modelo.
2) A solução ótima e seu resultado devem continuar satisfazendo todas as restrições do problema mesmo na presença de incertezas nas variáveis de decisão e/ou nos parâmetros do modelo.

Dos requisitos acima, pode ocorrer de existir soluções robustas em locais diferentes do espaço de busca, que não estejam na mesma vizinhança.

[7] Variações decorrentes de eventos que causam perda de desempenho do sistema e não uma catástrofe, como mostra a região I da Figura 5-1.

O trabalho de (JIN e BRANKE, 2005) separa duas abordagens para otimização robusta: mono-objetivo e multiobjetivo. A abordagem mono-objetivo faz uso ou de uma função de qualidade tal como proposta em (TAGUCHI, 1984), ou da média calculada explícita ou implicitamente tal como enunciada na Subseção 5.2.1. Na prática, a integração de Monte Carlo é utilizada para se estimar a esperança da função objetivo, ou seja, faz-se a média do resultado de várias amostras aleatórias da Equação (5-5) em torno de uma solução nominal $\mathbf{x_0}$. A ideia neste caso é fazer uma boa estimativa utilizando-se poucas amostras.

A abordagem mono-objetivo, apesar de funcional, pode fornecer soluções ótimas robustas incorretas independentemente do número de amostras. Isto pode acontecer, por exemplo, se desvios opostos na função objetivo se cancelam mutuamente no cálculo da média, de tal modo que uma solução com alta variância possa ser considerada robusta equivocadamente. Desta limitação da abordagem mono-objetivo surge a necessidade de ter a variância (ou desvio padrão) como um dos objetivos também, e não somente o desempenho. Geralmente, a maximização do desempenho e a minimização da variância são objetivos conflitantes, o que torna a abordagem multiobjetivo interessante neste aspecto.

O que se costuma fazer é colocar alguma métrica de robustez como um dos objetivos e o desempenho como outro. A Subseção 5.3.2 mostra vários meios de se fazer isso.

5.2.3 Soluções Robustas de Modelos Incertos

No campo da engenharia é muito comum simplificar problemas reais ou modelos complexos por meio de modelos aproximados. A estes modelos aproximados dá-se o nome de metamodelos ou funções *surrogates*. Vários são os meios de obtê-los, dos quais se destacam (JIN, DU e CHEN, 2003), (JIN, 2011):

1) *Response Surface Methodology*;
2) *Artificial Neural Network*;
3) *Radial-basis-function*;
4) *Support Vector Machine*;
5) *Gaussian Process*;
6) *Bayes Inference*;
7) *Kriging Models*;
8) *Genetic Programming*.

O item 1 baseia-se em aproximações polinomiais de superfície de respostas. As superfícies de resposta são muito utilizadas em procedimentos que requerem planejamento e análise de experimentos (do inglês, *Design of Experiments* – DOE). Os itens 2, 3 e 4 são baseados em redes neurais artificiais cujos parâmetros de controle são ajustados em processos de otimização efetuados em conjuntos de treinamento (soluções e respectivas respostas conhecidas *a priori*). Os itens 5, 6 e 7 utilizam de ferramentas estatísticas para obtenção de modelos de inferência, sendo que o *Kriging* consiste, em parte, na junção dos itens 1 e 6. O item 8 utiliza métodos de computação evolucionária, como GA, para fazer regressão simbólica.

Várias são as motivações para se utilizar modelos aproximados. Abaixo são listadas algumas destas motivações:

- Função objetivo de elevado custo de avaliação, o que é comum em problemas de *Design Optimization*. Uma única avaliação da função objetivo pode levar horas ou até dias.
- Dificuldade de se obter expressões analíticas para as funções objetivo e/ou para as restrições.
- Necessidade de se avaliar a função objetivo muitas vezes, recorrente em problemas de otimização robusta.
- Quando o contorno (do inglês, *landscape*) do modelo é muito rugoso e deseja-se suavizar sua superfície, tornando-o mais tratável matematicamente.

Processos de otimização que fazem uso de algoritmos estocásticos populacionais requerem várias avaliações da função objetivo até convergirem para uma solução. Em se tratando de otimização robusta, mais avaliações da função objetivo devem ser feitas em torno de uma mesma solução para identificar sua robustez. Considere o uso de um algoritmo evolucionário cuja população é fixada em 50 indivíduos e que tenha como condição de parada a 100ª geração para resolver um problema de otimização robusta. Em torno de cada indivíduo em cada geração, 10 avaliações adicionais são feitas para se estimar com um nível de significância satisfatório a robustez do indivíduo. Considere ainda uma função objetivo que leva 1 segundo para ser avaliada. Desprezando o tempo gasto por métodos internos do algoritmo de otimização, o processo de otimização levaria pouco mais de 13 horas e meia para ser concluído. Se a função objetivo levasse 2 horas para ser avaliada, o processo de otimização anterior levaria pouco mais de 11 anos para ser concluído, o que é inviável para fins práticos.

Uma alternativa para tornar viável o problema de otimização robusta quando funções objetivo de custo elevado de avaliação existirem é o uso de modelos aproximados, tal como investigado em (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006). Outras alternativas consistem em tornar o algoritmo de otimização evolucionário mais eficiente, de forma que ele necessite de menos avaliações das funções objetivo, ou mesmo paralelizar seu processamento quando possível (POSPICHAL, JAROS e SCHWARZ, 2010).

5.2.4 Soluções Robustas de Modelos Variantes no Tempo

Para encontrar soluções ótimas de modelos dinâmicos, deve-se lançar mão de métodos de otimização dinâmica (YANG, 2008) que foge do escopo desta tese. Entretanto, existe uma relação entre otimização dinâmica e otimização robusta, pois em alguns casos é aconselhável encontrar soluções robustas em problemas de otimização dinâmica quando as variações paramétricas são lentas e a função objetivo requer elevado custo computacional para ser avaliada (JIN e BRANKE, 2005).

5.3 Métricas de Robustez

Existem várias formas de se incorporar métricas de robustez às soluções. Essas métricas representam o quão robustas são as soluções quando comparadas com outras soluções. A forma mais popular e direta de se obter esta métrica é por meio da otimização do valor esperado (esperança) da função objetivo. Para tal, utiliza-se a integração de Monte Carlo para estimar o valor esperado da função objetivo em torno de $\mathbf{x}$: $\tilde{E}[f(\mathbf{x})]$ (JIN e BRANKE, 2005).

Em problemas de otimização, procura-se determinar a solução ótima que maximiza ou minimiza uma métrica de desempenho, composta pela combinação entre uma ou mais funções objetivo. Quando a métrica de desempenho é única, trata-se o problema com algoritmos de otimização mono-objetivo. Porém, quando há mais de uma métrica de desempenho e elas são conflitantes entre si, deve-se tratar o problema com algoritmos de otimização multiobjetivo, como visto no Capítulo 2.

As métricas de robustez, entretanto, geralmente vão de encontro às métricas de desempenho de um determinado problema (JIN e SENDHOFF, 2003). Então, faz-se necessário considerar as métricas de desempenho e de robustez como macro-objetivos conflitantes entre si. Os conceitos de macro-objetivos e micro-objetivos são

apresentados a seguir, e foram criados nesta tese para facilitar a compreensão das métricas de robustez citadas.

- Micro-objetivos:

  Estão diretamente ligados ao desempenho do problema a ser otimizado. São as próprias funções objetivo originais do problema; aquelas que refletem o desempenho do sistema. A otimização única dos micro-objetivos resulta em soluções ótimas não-robustas. Soluções ótimas robustas podem até ser obtidas, caso essas sejam coincidentes com as soluções ótimas não-robustas.

- Macro-objetivos (*fitness*):

  Objetivos extras que incorporam tanto as métricas de robustez quanto o desempenho das soluções. A otimização dos macro-objetivos resulta em soluções ótimas robustas.

Para se encontrar soluções de compromisso dos micro e macro-objetivos pode-se recorrer à abordagem mono ou multiobjetivo, sendo que a primeira retorna apenas uma solução ótima e a segunda retorna um conjunto de soluções ótimas. As seções seguintes listam algumas métricas de robustez e desempenho utilizadas para resolução de problemas de otimização para cada uma das duas abordagens, procurando separar os micro dos macro-objetivos quando possível.

5.3.1 Abordagem Mono-Objetivo

Os tópicos seguintes listam algumas métricas utilizadas:

- O trabalho de (LEE e PARK, 2001) considera que todas as variáveis seguem uma distribuição normal, dado que as incertezas se limitam a $\pm 3\sigma$ da distribuição. Os dois macro-objetivos são a média μ_f e o desvio padrão σ_f do micro-objetivo $f(\cdot)$. Os macro-objetivos são agrupados em uma função mono-objetivo, cuja minimização gera soluções robustas de compromisso:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \ \phi(\mathbf{x}),$$
$$\phi(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1-\alpha) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{5-7}$$

  em que μ_f^* é o valor da média ótima considerando somente a minimização da média, e σ_f^* é o valor do desvio padrão ótimo considerando somente a minimização do desvio padrão.

Um termo de penalidade proporcional à sensibilidade da restrição g_j também é adicionado ao novo formato de restrição robusta $g_{new,j}$ do problema:

$$g_{new,j}(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x}) + k_j \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \,, \qquad j \in \{1,2,\dots,n_g\}. \tag{5-8}$$

Um fator de penalidade k_j é usado para aumentar ainda mais o intervalo de confiança. A sensibilidade da restrição advém do valor absoluto das derivadas parciais da *j*-ésima restrição em relação aos desvios nas variáveis de decisão x_i.

- O trabalho de (HAN e KWAK, 2004) faz uso do conceito de *Gradient Index* (GI) para obtenção de soluções ótimas robustas. O GI basicamente calcula o gradiente máximo da função $f(\cdot)$ em torno de uma solução $\mathbf{x}$, que quando minimizado fornece soluções robustas:

$$\begin{gathered} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \ \mathrm{GI}_f(\mathbf{x}), \\ \mathrm{GI}_f(\mathbf{x}) = \max_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|, \qquad i \in \{1,2,\dots,n_v\}. \end{gathered} \tag{5-9}$$

O GI é então um macro-objetivo a ser minimizado. As restrições incorporam em si fatores de penalidade, tais como feito em (LEE e PARK, 2001), porém considerando informações do GI.

A minimização do GI inicialmente proposta por (HAN e KWAK, 2004) para otimização estrutural robusta foi estendida para outras áreas, por exemplo, para a área de projeto de dispositivos eletromagnéticos robustos em (KIM *et al*., 2010).

- O trabalho de (CIOFFI *et al*., 2006) utiliza o conceito de função de qualidade (do inglês, *quality function* – QF), que traz conceitos introduzidos por (TAGUCHI, 1984) na área de *robust design*. A minimização desta função de qualidade, que é um macro-objetivo, fornece soluções ótimas robustas:

$$\begin{gathered} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \ QF(\mathbf{x}), \\ QF(\mathbf{x}) = E[f(\mathbf{x})] + k\sigma^2(\mathbf{x}), \end{gathered} \tag{5-10}$$

em que $\sigma^2(\mathbf{x})$ representa a variância de $f(\mathbf{x})$ e k é um peso definido pelo tomador de decisão.

- O trabalho de (LAMBERTI e TUCCI, 2007) propõe uma métrica de robustez associada à análise intervalar das variáveis com incertezas. Para obter soluções robustas, basta minimizar esta métrica:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \ w\big(f([\mathbf{X}])\big), \tag{5-11}$$

$$\mathcal{w}\big(f([\mathbf{X}])\big) = \max_{\mathbf{x}\in[\mathbf{X}]} f(\mathbf{x}) - \min_{\mathbf{x}\in[\mathbf{X}]} f(\mathbf{x}),$$

em que $[\mathbf{X}]$ representa a caixa intervalar dentro da qual as variações incertas de $\mathbf{x}$ ocorrem. A análise intervalar é feita mediante aproximação dos micro-objetivos $f(\cdot)$ por expansões de Taylor.

5.3.2 Abordagem Multiobjetivo

Os tópicos seguintes listam algumas métricas utilizadas:

- Em (RAY, 2002) o problema é tratado com três macro-objetivos: função objetivo, média e variância para cada micro-objetivo:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \begin{bmatrix} f_i(\mathbf{x}) \\ \mu_i \\ \sigma_i \end{bmatrix}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n_f\}, \tag{5-12}$$

em que μ_i é a média de $f_i(\mathbf{x})$ e σ_i é o desvio padrão.

- O trabalho de (JIN e SENDHOFF, 2003) tem como objetivo minimizar dois macro-objetivos por micro-objetivo:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \begin{bmatrix} f_i(\mathbf{x}) \\ f_i^R(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n_f\}. \tag{5-13}$$

Um deles é o micro-objetivo, ou seja, a própria função objetivo $f_i(\mathbf{x})$. O outro é definido como:

$$f_i^R(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_{samples}} \sum_{i=1}^{N_{samples}} \frac{\sigma_{f(\mathbf{x})}}{\sigma_{x_i}}. \tag{5-14}$$

em que $N_{samples}$ representa o número de amostras na vizinhança de $\mathbf{x}$. Os autores apresentam diferentes formas de se obter $\sigma_{f(\mathbf{x})}$ e σ_{x_i} de forma aproximada.

- O trabalho de (GUIMARÃES, LOWTHER e RAMÍREZ, 2006) trata o problema com dois macro-objetivos para cada micro-objetivo, são eles: média e variância da função objetivo. Uma forma simplificada de se obter a magnitude da variância da *i*-ésima função objetivo é dada por:

$$\tilde{V}[f_i(\mathbf{x})] = \sum_{j=1}^{n_v} \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sigma_{x_j} \right)^2, \tag{5-15}$$

em que n_v é o número de variáveis de decisão do modelo e σ_{x_j} é o desvio na variável x_j.

Porém, o cálculo das derivadas na Equação (5-15) nem sempre é possível. Então, é proposta uma forma alternativa de se estipular a variância da solução: a diferença do pior caso de incertezas da função objetivo em relação à sua média. A média da função objetivo de cada micro-objetivo é aproximada como sendo a própria função objetivo:

$$\mu_i \sim f_i(\mathbf{x}). \tag{5-16}$$

Em termos matemáticos, as soluções ótimas robustas são obtidas minimizando-se os seguintes macro-objetivos para cada *i*-ésimo micro-objetivo:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \begin{bmatrix} \mu_i \\ f_{i_{wc}}(\mathbf{x}) - \mu_i \end{bmatrix}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n_f\}, \tag{5-17}$$

dado que o índice wc se refere ao pior caso de incertezas (em inglês, *worst case*).

- O trabalho de (LI e AZARM, 2006) procura mapear no espaço dos objetivos e no espaço das restrições, as regiões de sensibilidade decorrentes das incertezas em **x**. Estas regiões de sensibilidades são encontradas por meio da identificação, via maximização, do pior caso de incertezas. Por fim, a minimização procura pelas menores regiões de sensibilidade, sendo este o macro-objetivo do problema. Os micro-objetivos são utilizados para encontrar estas regiões de sensibilidade.

  Conceito similar foi adotado no trabalho de (TAKAHASHI *et al*., 2001), onde foram definidas regiões elípticas de sensibilidade e procurava-se minimizá-las.

- O trabalho de (LIM *et al*., 2006) encontra as soluções ótimas robustas por meio da minimização de dois macro-objetivos para cada micro-objetivo:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} \begin{bmatrix} f_i(\mathbf{x}) \\ d_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n_f\}. \tag{5-18}$$

  Um dos macro-objetivos é a própria função objetivo. O outro procura medir o maior desvio em relação à função objetivo. Para tal, é feita a amostragem de j pontos em torno de **x** segundo procedimentos próprios de DOE. Após a amostragem, $d_i(\mathbf{x})$ é calculado:

$$d_i(\mathbf{x}) = \max_j \; f_i(\mathbf{x_j}) - f_i(\mathbf{x}). \tag{5-19}$$

  A formulação da Equação (5-18) é similar à apresentada na Equação (5-17). A diferença fundamental ocorre no método de estimativa do pior caso de incertezas.

- Em (DEB e GUPTA, 2006) a métrica de robustez é incorporada às restrições medindo-se a distância da função objetivo em relação ao pior caso de incertezas:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \\ \frac{\|\boldsymbol{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})-\boldsymbol{f}(\mathbf{x})\|}{\|\boldsymbol{f}(\mathbf{x})\|}\leq\eta, \ \ \mathbf{p}\in\mathcal{P}.\end{gathered} \tag{5-20}$$

O operador $\|\cdot\|$ indica a norma, que pode ser de qualquer ordem. Os valores perturbados de $\boldsymbol{f}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ são obtidos por amostragem, por exemplo via o *Latin Hypercube Sampling* (LHS). Cabe ao tomador de decisão decidir o valor η apropriado para a restrição.

O trabalho de (BARRICO e ANTUNES, 2006) também utiliza esta abordagem de distância da função objetivo em relação ao pior caso de incertezas, porém como um macro-objetivo a ser minimizado.

- O trabalho de (FERREIRA *et al*., 2008) apresenta um único macro-objetivo para cada *i*-ésimo micro-objetivo, com o qual se tem a seguinte formulação para obter soluções robustas:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \ f_i^R(\mathbf{x}), \qquad i\in\{1,2,\dots,n_f\}, \\ f_i^R(\mathbf{x})=\frac{1}{N_{samples}}\sum_{j=0}^{N_{samples}}\frac{\left|\widetilde{f}_i(\mathbf{x_j})-\widetilde{f}_i(\mathbf{x})\right|}{\left|\mathbf{x_j}-\mathbf{x}\right|},\end{gathered} \tag{5-21}$$

em que $N_{samples}$ representa o número de amostras incertas na vizinhança de $\mathbf{x}$, e $\mathbf{x_j}$ são estas amostras. A função $\widetilde{f}_i(\cdot)$ é a normalização da função original $f_i(\cdot)$.

- O trabalho de (SOARES *et al*., 2009b) utiliza a filosofia *minimax*, em que faz uso de um único macro-objetivo para cada um dos micro-objetivos. O macro-objetivo, neste caso, visa minimizar os valores de $f_i(\mathbf{x})$ no pior caso de incertezas das *i*-ésimas funções objetivo:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \ \max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}} \ f_i(\mathbf{x},\mathbf{p}), \qquad i\in\{1,2,\dots,n_f\}. \tag{5-22}$$

As *j*-ésimas restrições de desigualdade também assumem o valor do pior caso de incertezas:

$$g_{new,j}(\mathbf{x})=\max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}} \ g_j(\mathbf{x},\mathbf{p}), \qquad j\in\{1,2,\dots,n_g\}. \tag{5-23}$$

- O trabalho de (REN *et al*., 2011) faz uso do conceito de GI, porém considera dois macro-objetivos para obter soluções ótimas robustas:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \ \begin{bmatrix} f_i(\mathbf{x}) \\ GI_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \tag{5-24}$$

Note que o par de macro-objetivos está associado ao *i*-ésimo micro-objetivo.

- O trabalho de (MENDES, 2013) faz uso do operador *regret* (arrependimento em português), descrito em (KOUVELIS e YU, 1997), com o qual a filosofia *minimax* é empregada para que se minimize o maior arrependimento possível para cada função objetivo e se obtenha soluções ótimas robustas. Uma das formulações possíveis deste macro-objetivo é a seguinte:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{F}} \max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}} \frac{\left(f_i(\mathbf{x},\mathbf{p}) - f_i(\mathbf{x})\right)}{f_i(\mathbf{x})}, \qquad i \in \{1,2,\dots,n_f\}, \quad f_i(\mathbf{x}) \neq 0. \tag{5-25}$$

A formulação acima segue o critério do robusto relativo, que tem similaridade com a formulação da Equação (5-19).

5.3.2.1 Abordagem Minimax

É notado que as soluções robustas são muitas vezes obtidas por vias indiretas como, por exemplo, pela minimização da função $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ no pior caso de incertezas (*minimax*). Os resultados do *minimax* têm a mesma dimensão dos objetivos originais do problema, o que faz com que a minimização do pior caso de incertezas das soluções direcione a $\widetilde{FPR}^*$ à $\widetilde{FP}^*$. Por isso, muitos trabalhos, como por exemplo (SOARES, 2008) e (MENDES, 2013), se preocupam somente com a minimização do pior caso de incertezas (macro-objetivo). A formulação geral do *minimax* para encontrar as soluções Pareto-ótima robustas (PR^*) demonstra isso:

$$\begin{gathered} \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{p}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{F}, \mathbf{p}\in\mathcal{P}, \\ \boldsymbol{f}: \ \mathcal{X}\subset\mathbb{R}^{n_v}, \mathcal{P}\subset\mathbb{R}^{n_p} \mapsto \mathcal{Y}\subset\mathbb{R}^{n_f}, \\ \mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leq 0, & \mathrm{i} = 1,\dots,|\mathbf{g}| \\ h_j(\mathbf{x},\mathbf{p}) = 0, & \mathrm{j} = 1,\dots,|\mathbf{h}| \\ \mathbf{x}\in\mathcal{X} \\ \mathbf{p}\in\mathcal{P} \end{cases}, \end{gathered} \tag{5-26}$$

em que:

x : vetor de variáveis de decisão;

p : vetor de incertezas paramétricas incontroláveis;

$\boldsymbol{f}$: vetor de funções objetivo;

g_i : i-ésima restrição de desigualdade;

h_j : j-ésima restrição de igualdade.

Encontrar o pior caso de incertezas é por si só um problema de maximização, de tal forma que o *minimax* consiste na resolução de um problema de otimização de dois níveis: maximizar as respostas perturbadas da solução e minimizar as respostas perturbadas maximizadas anteriormente. O uso de computação evolucionária para resolver problemas *minimax* mono-objetivo vem de longa data (HERRMANN, 1999), enquanto que seu uso para problemas *minimax* multiobjetivo é mais recente (AVIGAD e BRANKE, 2008).

A essência do *minimax* consiste em identificar os potenciais cenários do problema e em seguida se preocupar em obter a melhor solução associada especificamente ao pior cenário identificado. Para obtenção do pior cenário, (KOUVELIS e YU, 1997) define três critérios diferentes: *robusto absoluto*, *desvio robusto* e *robusto relativo*. O primeiro utiliza o *minimax*, tal como apresentado na Equação (5-22) e (5-26), e os dois últimos o *minimax regret*, a exemplo da Equação (5-25).

5.4 Espaço dos Objetivos e Espaço das Sensibilidades

A seção anterior fez a distinção entre as classes de micro-objetivos e macro-objetivos de um problema de otimização robusta, sendo os primeiros relacionados às funções objetivo originais do problema e os segundos relacionados às funções que incorporam as métricas de robustez para o problema. Portanto, é recomendável que estes objetivos sejam avaliados separadamente em seus respectivos espaços. Nesta tese faz-se, então, a distinção de dois espaços:

- Espaço dos objetivos $\mathcal{Y}$ (para micro-objetivos);
- Espaço das sensibilidades $\mathcal{R}$ (para macro-objetivos).

Embora o trabalho de (DEB e GUPTA, 2006) não faça a distinção acima explicitamente, ele classifica as fronteiras Pareto-ótima robustas (macro-objetivos) segundo as fronteiras Pareto-ótima (micro-objetivos) da seguinte forma:

1. A fronteira Pareto-ótima global é igual à fronteira Pareto-ótima robusta global no espaço das sensibilidades.

$$\tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}(FP^*) \equiv FPR^*. \tag{5-27}$$

2. Apenas uma parte da fronteira Pareto-ótima global é igual à fronteira Pareto-ótima robusta global no espaço das sensibilidades, sendo que a última está contida na primeira.

$$\tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}(FP^*) \supset FPR^*. \tag{5-28}$$

3. As fronteiras Pareto-ótima global e Pareto-ótima robusta global são completamente diferentes e não têm elementos em comum no espaço das sensibilidades.

$$\tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}(FP^*) \cap FPR^* = \emptyset. \tag{5-29}$$

4. Apenas uma parte da fronteira Pareto-ótima global é igual à fronteira Pareto-ótima robusta global no espaço das sensibilidades, sendo que a última não está inteiramente contida na primeira.

$$\begin{gathered}\tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}(FP^*) \cap FPR^* \neq \emptyset \ \wedge \\ \tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}(FP^*) \not\subset FPR^* \ \wedge \ FPR^* \not\subset \tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}(FP^*).\end{gathered} \tag{5-30}$$

O operador $\tau_{\mathcal{Y}\to\mathcal{R}}$ significa o mapeamento das soluções P^* do espaço $\mathcal{Y}$ para o espaço $\mathcal{R}$.

Estas 4 classes de problemas são referenciadas por vários trabalhos na área de otimização robusta (GOH e TAN, 2007), (FERREIRA *et al*., 2008) e (MIRJALILI, LEWIS e MOSTAGHIM, 2015). O trabalho de (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006) faz uma classificação similar para problemas mono-objetivo.

A ênfase em fronteiras globais na classificação acima se deve ao fato de que as fronteiras Pareto-ótima robustas globais obtidas segundo a métrica do valor esperado em (DEB e GUPTA, 2006) correspondem às fronteiras Pareto-ótimas locais do problema original. A Figura 5-2 ilustra as definições acima separando os micro dos macro-objetivos.

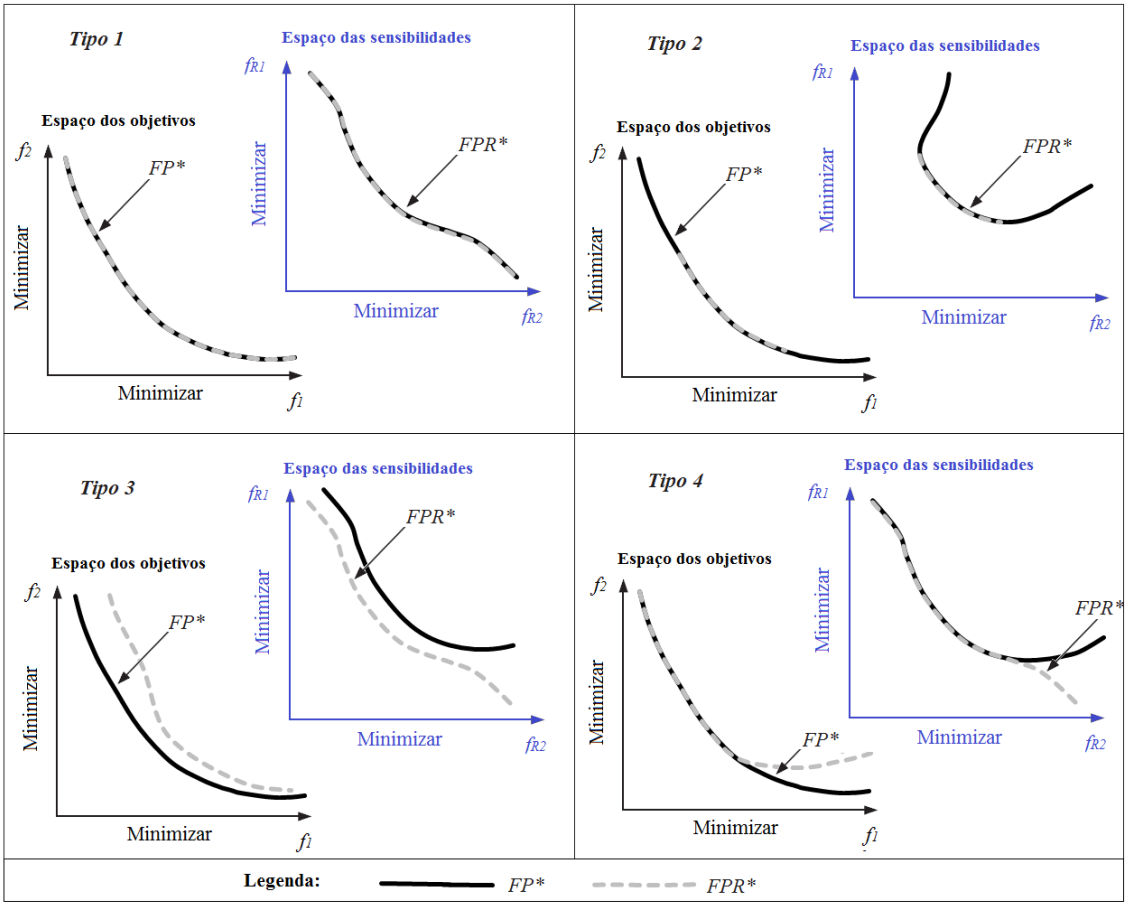


Figura 5-2 – Quatro diferentes tipos de situações envolvendo a fronteira Pareto-ótima global e a fronteira Pareto-ótima robusta global em seus respectivos espaços. Adaptado de (DEB e GUPTA, 2006).

Os quatros tipos de situações se baseiam no espaço das sensibilidades $\mathcal{R}$, onde se busca minimizar os macro-objetivos segundo o critério de dominância apresentado na Equação (2-8). Caso os micro-objetivos não sejam representados pelos macro-objetivos, é possível se obter soluções Pareto-ótima robustas que sejam dominadas entre si em $\mathcal{Y}$, como mostra o exemplo do Tipo 4 da Figura 5-2. Porém, como apresentado na Seção 5.3, os micro-objetivos são incorporados junto às métricas de robustez nos macro-objetivos, gerando soluções de compromisso ótimas em $\mathcal{R}$ e $\mathcal{Y}$.

Se as métricas de robustez utilizadas para obtenção das soluções robustas forem o valor esperado da função objetivo ou o pior caso de incertezas, por exemplo, o espaço das sensibilidades nos dois casos será o próprio espaço dos objetivos.

Cabe ressaltar que a classificação das quatro situações acima não é absoluta para o problema em questão. Ela depende do valor de incerteza conforme demonstrado em (DEB e GUPTA, 2006). O estudo de (KRUISSELBRINK, 2012) mostra graficamente que em algumas situações a fronteira Pareto-ótima robusta pode se deslocar em função dos valores das incertezas.

5.5 Considerações Finais

Nota-se que as métricas de robustez são diferentes e, por isso, não são passíveis de comparação entre si. Uma alternativa para se comparar duas soluções ótimas robustas segundo métricas de robustez distintas, se dá por meio da obtenção da solução nominal no espaço de decisão seguido da aplicação das diferentes métricas de robustez.

Os algoritmos propostos nesta tese apresentam diferentes métricas de robustez e mecanismos para obtenção de soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas. As métricas conjugadas a estes mecanismos correspondem aos macro-objetivos do problema, que por sua vez mapeiam estritamente um micro-objetivo (função objetivo original), evitando aumentar a dimensionalidade do problema.

Ao considerar as métricas de robustez de cada objetivo explicitamente como macro-objetivos isolados do problema, o número de macro-objetivos duplicaria, o que aumentaria a dimensionalidade e complexidade do problema, dificultando a interação do tomador de decisão com o processo de otimização robusta.

6 PROCESSO PARA DESENVOLVIMENTO DE NOVOS ALGORITMOS PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO

6.1 Definições Iniciais

Este capítulo faz um breve descritivo do processo metodológico adotado nesta tese.

A metodologia se inicia a partir da descoberta da necessidade de uso de otimização robusta em função das características do problema-alvo a ser resolvido, como mostra o fluxograma da Figura 6-1.

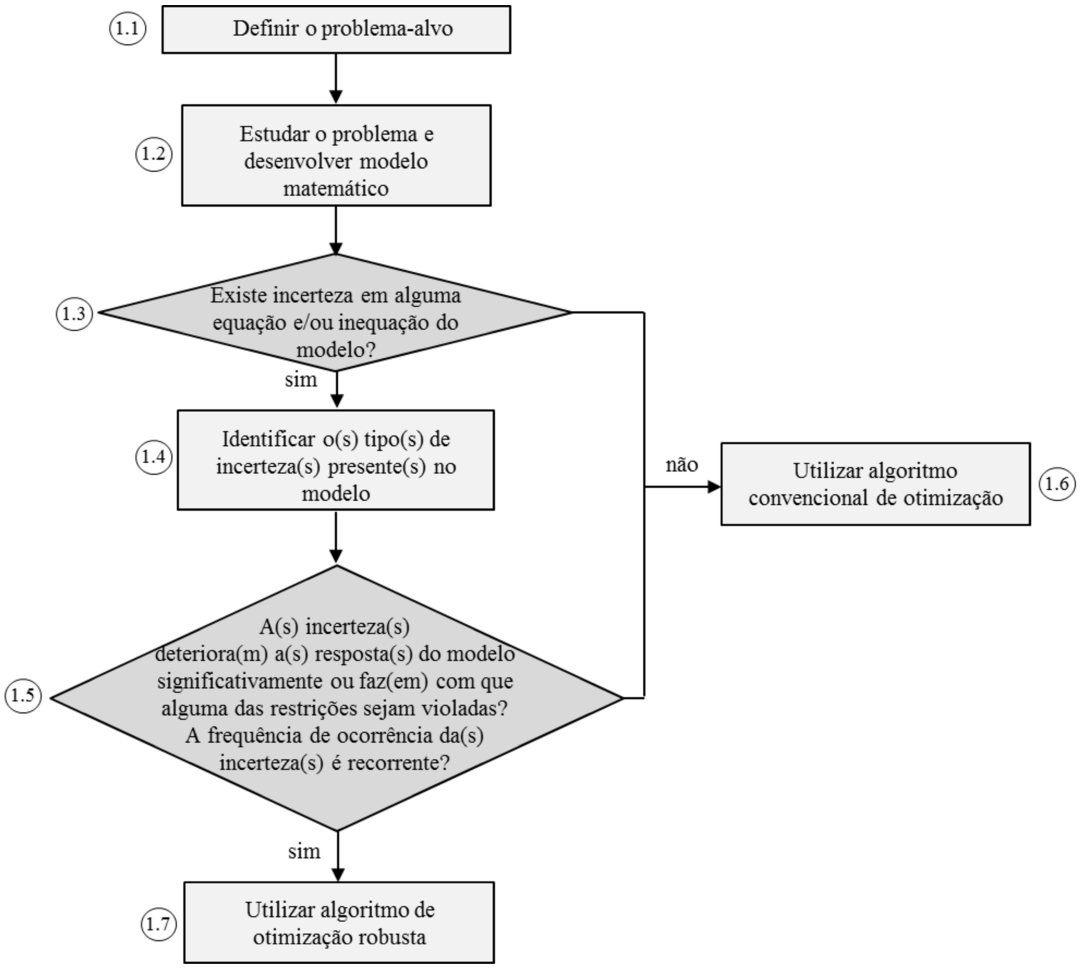


Figura 6-1 – Processo de identificação da necessidade de se utilizar um algoritmo de otimização robusta.

1.1) A definição do problema-alvo de otimização é crucial, visto que os métodos de otimização robusta a serem desenvolvidos serão gerados e adaptados para a resolução exclusiva dele.

1.2) O estudo do problema-alvo é o momento de se levantar seus requisitos e necessidades. O modelo matemático é desenvolvido procurando refletir as características do problema. Neste ponto o problema-alvo passa a ser representado por funções de desempenho $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ e por funções de restrições $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

1.3) Neste ponto é verificada a existência de algum tipo de incerteza nas equações do modelo: $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

1.4) As incertezas descobertas em (1.3) são classificadas em seus respectivos tipos, apresentados na Seção 4.1.

1.5) Verifica-se se as incertezas identificadas em (1.3) deterioram o valor de $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ significativamente ou provocam a violação de alguma restrição em uma frequência recorrente. Caso o evento seja raro, a otimização robusta não é aplicável, como visto na Figura 5-1.

1.6) Utilizar algum algoritmo de otimização capaz de resolver o problema-alvo sem levar em conta a robustez da solução, pois as incertezas são desprezíveis para o problema.

1.7) Utilizar algoritmo de otimização robusta capaz de resolver o problema-alvo levando em conta a robustez da solução, pois o problema é muito sensível à(s) incerteza(s).

A segunda etapa da metodologia consiste em resolver o problema-alvo com otimização robusta, o que pode ser feito, por exemplo, utilizando-se métodos publicados na literatura. Porém, o intuito desta tese consiste em desenvolver novos algoritmos eficientes de otimização robusta, que requer que as etapas do fluxograma da Figura 6-2 sejam cumpridas.

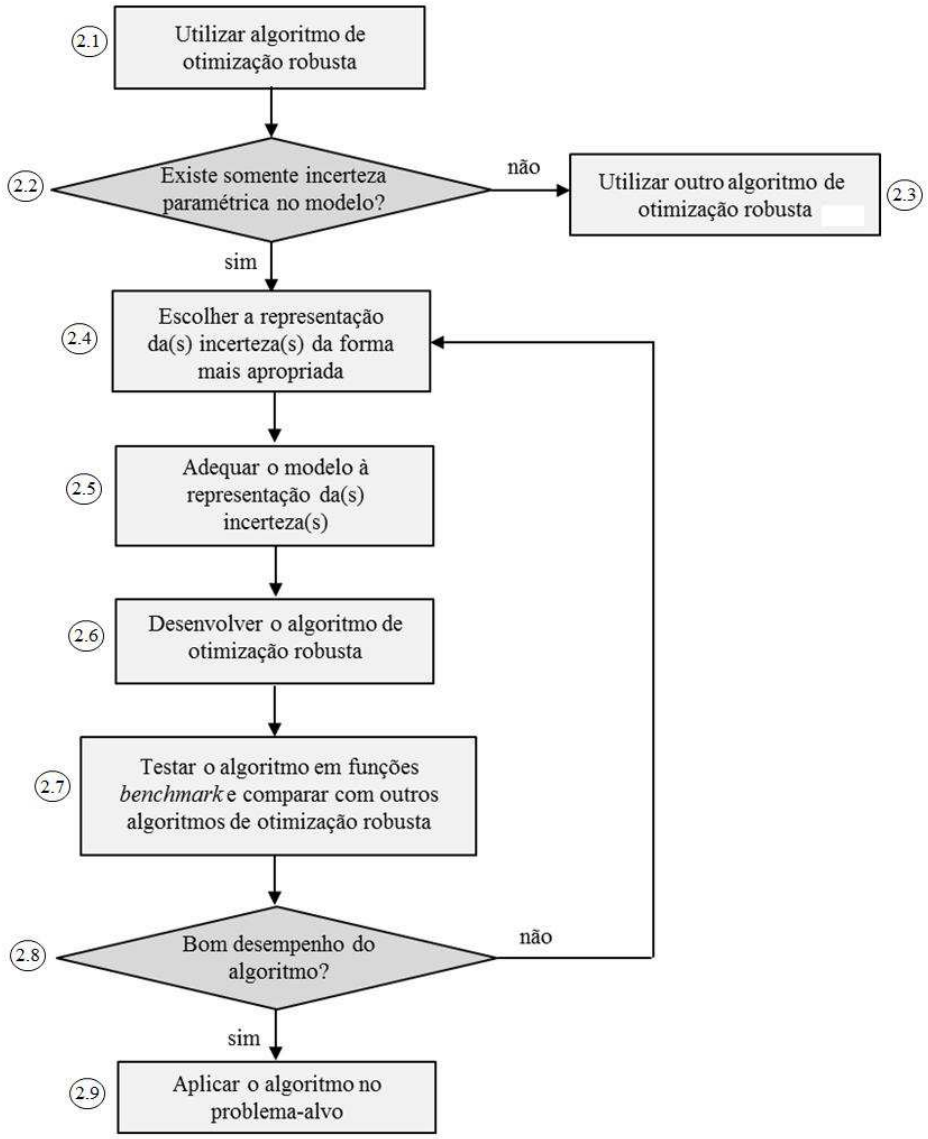


Figura 6-2 – Processo precedente ao desenvolvimento do algoritmo de otimização robusta.

2.1) Equivalente ao (1.7).

2.2) Neste ponto é verificado se o único tipo de incerteza presente no modelo do problema-alvo é a paramétrica.

2.3) Outro algoritmo de otimização robusta deve ser utilizado, pois a resolução de problemas com incertezas que não sejam de natureza paramétrica foge do escopo desta tese.

2.4) A escolha da representação da incerteza deve ser feita de forma apropriada e de forma independente para as funções objetivo e para as funções de restrição. Os requisitos do problema determinados em (1.2) e as incertezas identificas em (1.3) devem ser considerados aqui. Algumas perguntas devem ser respondidas, tais como:

- Quanta informação se tem sobre cada incerteza paramétrica?
- Quão flexíveis são as restrições?
- Existe alguma restrição que possa ser violada?

Caso haja mais de uma representação de incerteza no modelo, métodos híbridos para lidar com isso deverão ser desenvolvidos. O escopo desta tese, no entanto, considera somente modelos com incertezas determinísticas (intervalares).

2.5) As equações e as operações do modelo devem ser adaptadas para levarem em conta a presença das incertezas. Neste ponto, as incertezas são de fato incorporadas ao modelo. Geralmente esta incorporação ocorre na *fitness* do modelo, conforme visto na Seção 5.3.

2.6) O algoritmo de otimização robusta pode ter seu desenvolvimento iniciado, dado que todos os estudos e ajustes iniciais foram feitos.

2.7) O algoritmo desenvolvido deve ser testado em funções teste *benchmark* para otimização robusta e os resultados devem ser confrontados frente a outros métodos e algoritmos de otimização robusta.

2.8) Se a versão desenvolvida do algoritmo de otimização robusta se mostrar eficiente na etapa (2.7), ele poderá ser aplicado ao problema-alvo. Caso contrário, mais iterações deverão ser feitas no processo de desenvolvimento do algoritmo, retornando-se para a etapa (2.4).

2.9) Resolução do problema-alvo pelo algoritmo desenvolvido de otimização robusta.

6.2 Participação do Tomador de Decisão

No Capítulo 4 foram apresentadas diferentes formas de se representar as incertezas de um problema, e no Capítulo 5 variadas abordagens e métricas de robustez para obtenção de soluções Pareto-ótimas robustas. Ao mesmo tempo, é importante que o tomador de decisão esteja ciente de todas as abordagens e premissas utilizadas durante o processo.

De acordo com (DU e CHEN, 2000), cabe ao próprio tomador de decisão definir o que é robustez: são soluções que não violam restrições mesmo quando perturbadas? São soluções cujo desempenho não degrada significativamente quando perturbadas? Ou são soluções cujo valor esperado do desempenho não degrada significativamente quando perturbadas? Ou são soluções cujo desempenho no pior caso de incertezas é o melhor possível?

Devido à importância de prover de informações o tomador de decisão durante o processo de otimização, alguns trabalhos na literatura focam a atenção exclusivamente no processo de tomada de decisão para obtenção de soluções robustas. O trabalho de (HU e MEHROTRA, 2012), por exemplo, utiliza um sistema multi-especialista *a posteriori* com soma ponderada dos diferentes critérios com a finalidade de escolher como solução robusta aquela que minimize o pior caso desta soma. O trabalho de (KASPRZYK *et al*., 2013) apresenta um *framework* para tomada de decisão robusta multiobjetivo (MORDM) que consiste em um procedimento *a posteriori* para que o tomador de decisão escolha soluções robustas fornecidas pelo MOEA por meios interativos e visuais.

Encontrar soluções robustas após procedimentos convencionais de otimização, na tomada de decisão *a posteriori*, não é recomendado para problemas cuja fronteira Pareto-ótima robusta não faz parte da fronteira Pareto-ótima nominal, tais como os problemas Tipo 3 e 4 descritos na Seção 5.4. Portanto, incorporar informações do tomador de decisão *a priori* ou durante o processo de otimização, permite que novas regiões robustas sejam descobertas e encontradas pelo otimizador.

O trabalho de (GONG *et al*., 2012), por exemplo, adota um procedimento interativo para resolver MOPs com incertezas intervalares nos parâmetros, em que as preferências do DM são atualizadas junto ao EA. O DM neste caso tem duas intervenções durante o processo, uma na fase inicial para guiar a busca por soluções robustas, e outra na fase final para fazer os ajustes finos das soluções encontradas. Em (CHAUDHURI e DEB, 2010) é proposto um *framework* de uso geral que integra as preferências do DM durante o processo de otimização em dois momentos distintos. O primeiro momento consiste em apresentar ao DM o formato e a extensão da fronteira Pareto-ótima nominal do problema, para fins de conhecimento e formação de opinião. O segundo momento consiste no DM fornecer suas preferências seja na forma de soma ponderada, pontos de referência ou funções utilidade incorporando a métrica de robustez que julgar mais apropriada.

Os trabalhos de (DU e CHEN, 2000) e (BOUYSSOU *et al*., 2006) destacam alguns pontos de interesse do tomador de decisão quando expostos a problemas de otimização multiobjetivo com incertezas. Os interesses foram agrupados e listados abaixo:

1) Conhecer a fronteira Pareto-ótima não-robusta;
2) Conhecer a fronteira Pareto-ótima robusta;

3) Conhecer a sensibilidade das soluções robustas e não-robustas para cada objetivo;
4) Conhecer o pior caso de incertezas das soluções robustas e não-robustas para cada objetivo;
5) Contabilizar quantas e quais soluções não-robustas violam restrições na presença de incertezas.

De posse das informações anteriores, o tomador de decisão está apto a escolher dentre todas as soluções (robustas e não-robustas) aquela que melhor lhe atende. A justificativa de cada item listado anteriormente é explicada a seguir.

1) Conhecer a fronteira Pareto-ótima não-robusta.

O conhecimento da fronteira Pareto-ótima não-robusta é negligenciado por diversos autores, como (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004) e (JIN e BRANKE, 2005), que tratam os resultados da otimização robusta como verdade absoluta. Porém, o conhecimento da FP^* é importante visto que serve como referência (ou *benchmarking*) aos resultados robustos obtidos (CHAUDHURI e DEB, 2010). Três vantagens são listadas em se conhecer a FP^* ou ao menos a $\widetilde{FP}^*$: i) o tomador de decisão sabe qual a perda de desempenho dos objetivos ao se escolher uma solução robusta e pode fazer a reopção por uma solução não-robusta, desde que seja confiável; ii) o tomador de decisão pode identificar as soluções robustas mais próximas de FP^* ou $\widetilde{FP}^*$; iii) o tomador de decisão pode verificar quando as soluções robustas fazem parte da própria FP^*ou $\widetilde{FP}^*$, o que ocorre para problemas do Tipo 1, 2 e 4 descritos na Seção 5.4. O Tipo 1 ocorre quando o *trade-off* entre desempenho e robustez não se evidencia em um grupo de soluções, que são ótimas e robustas ao mesmo tempo.

2) Conhecer a fronteira Pareto-ótima robusta.

A fronteira Pareto-ótima robusta deve conter todas as soluções robustas segundo uma métrica de robustez pré-definida pelo tomador de decisão. Neste caso, as soluções Pareto-ótima robustas devem ser não-dominadas no espaço dos macro-objetivos e formarem nele uma fronteira Pareto-ótima, como demostrado em (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006). Estas soluções, no entanto, não são necessariamente não-dominadas no espaço dos objetivos e no espaço das sensibilidades. A representação delas no espaço dos objetivos tem apenas caráter comparativo frente à FP^* ou $\widetilde{FP}^*$.

3) **Conhecer a sensibilidade das soluções robustas e não-robustas para cada objetivo.**

O conhecimento da sensibilidade das soluções robustas e não-robustas frente a perturbações é fundamental para que o tomador de decisão tenha informação suficiente sobre a variabilidade das soluções em cada objetivo individualmente (CAVALIERE *et al*., 2003).

Ocasionalmente, o impacto das incertezas sobre os objetivos pode ser diferente, podendo ocorrer até a constatação de que um objetivo é pouco afetado pelas incertezas. Uma análise de sensibilidade por objetivo seria aconselhável neste caso, como feito em (KASPRZYK *et al*., 2013), porém seu elevado custo computacional pode ser impeditivo.

Ao conhecer a sensibilidade de todas as soluções para cada objetivo, o tomador de decisão está apto a decidir, por exemplo, se vale a pena abrir mão do desempenho das soluções não-robustas frente à reduzida variabilidade das soluções robustas.

Este comparativo entre as sensibilidades das soluções deve ser feito no espaço das sensibilidades, definido a partir da métrica utilizada para cálculo da sensibilidade.

4) **Conhecer o pior caso de incertezas das soluções robustas e não-robustas para cada objetivo.**

Assim como ocorre com a sensibilidade, o conhecimento do pior caso das soluções robustas e não-robustas frente às perturbações é fundamental para que o tomador de decisão tenha informação suficiente sobre o quão ruim uma solução pode ficar em cada objetivo devido às incertezas. Alguns trabalhos de otimização robusta inclusive focam exclusivamente na análise de pior caso de incertezas (HERRMANN, 1999), (AVIGAD e BRANKE, 2008) e (SOARES *et al*., 2009b).

Como visto para o caso da sensibilidade, o impacto das incertezas sobre os objetivos pode ser diferente, podendo ocorrer situações em que o pior caso de incertezas em um dos objetivos seja mais crítico do que nos demais. Uma maximização no espaço das incertezas poderia ser feita para encontrar o pior cenário para cada objetivo, porém seu elevado custo computacional pode ser impeditivo.

Conhecer o pior caso de incertezas de uma solução em todos seus objetivos implica em saber o risco ao qual se está submetendo ao adotá-la. Isto colabora no processo de tomada de decisão.

Este comparativo entre os piores casos das soluções deve ser feito no espaço dos objetivos, que também é o espaço dos piores casos, como visto na Seção 5.4.

5) **Contabilizar quantas e quais soluções não-robustas violam restrições na presença de incertezas.**

É de se esperar que, mesmo na presença de incertezas, as soluções robustas não violem nenhuma restrição. Em contrapartida, as soluções não-robustas podem ocasionalmente violar alguma restrição na presença de incertezas.

O tomador de decisão deve ser capaz de identificar aquelas soluções não-robustas que podem violar restrições em cenários incertos. Dessa forma, o tomador de decisão pode, por exemplo, optar por uma solução robusta de baixo desempenho frente a uma solução não-robusta de alto desempenho que viola alguma restrição quando perturbada. O trabalho de (DU e CHEN, 2000), por exemplo, utiliza o número de soluções que violam as restrições como uma das métricas para averiguar a efetividade de algoritmos de otimização robusta.

O item 1 é satisfeito pela aplicação simples de um MOEA. O item 2 requer a definição da métrica de robustez para que seja aplicada durante o processo de otimização. Algumas dessas métricas foram apresentadas na Seção 5.3, sendo que o valor esperado e o pior caso de incertezas das funções objetivo são os dois casos mais típicos. O item 3 requer a definição de uma métrica de sensibilidade por objetivo a ser aplicada nas soluções não-robustas e robustas encontradas nos itens 1 e 2, respectivamente. Esta métrica de sensibilidade pode eventualmente ser igual à métrica de robustez definida no item 2. O item 4 encontra o pior caso de incertezas por objetivo das soluções não-robustas e robustas encontradas nos itens 1 e 2, respectivamente. Por fim, o item 5 indica quais soluções não-robustas violam restrições na presença de incertezas.

Como visto anteriormente, existe uma participação constante da figura do tomador de decisão frente ao processo de obtenção de soluções Pareto-ótimas robustas, sendo assim, o processo de obtenção dessas soluções se configura como sendo um processo interativo. A Figura 6-3 apresenta uma forma estruturada deste processo interativo do MORDO, separando em fases os diferentes momentos de participação do agente “Otimizador” e do agente “Tomador de Decisão”.

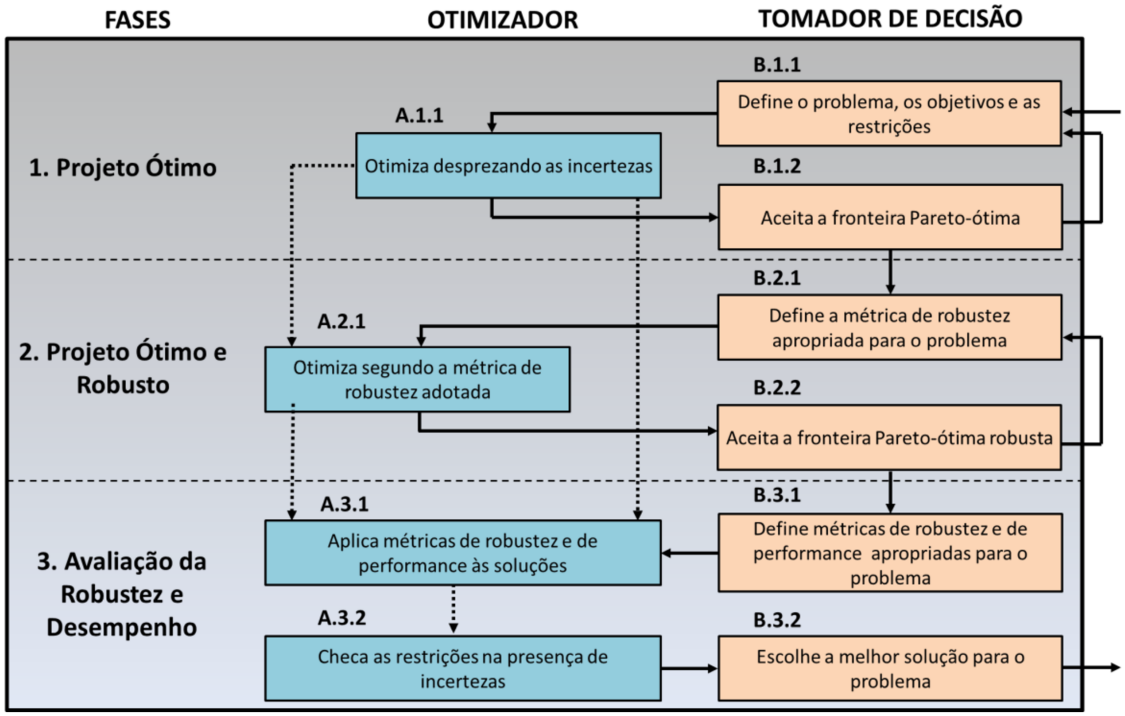


Figura 6-3 – Diagrama de interação entre os agentes: otimizador e tomador de decisão, durante as diferentes fases do processo de MORDO.

A primeira fase da Figura 6-3 consiste em formular o modelo do problema e resolvê-lo por meio de métodos de otimização convencionais. É nesta fase que o processo da Figura 6-1 pode ser feito. Esta primeira fase corresponde ao item 1 de interesse do DM e pode ser considerada a fase *a priori* do MORDO.

Se o problema requerer o uso de otimizador robusto, o DM deve definir na segunda fase qual a métrica de robustez mais adequada para o problema, e verificar se as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas pelo otimizador lhe atendem. Esta fase corresponde ao item 2 de interesse do DM e é a fase onde a otimização robusta é de fato processada.

Em seguida, na terceira fase, o DM deve escolher métricas de desempenho e robustez adequadas para avaliar as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas até então, e certificar-se de que as soluções, mesmo perturbadas, não violem as restrições do problema e sejam confiáveis. Por fim, o tomador de decisão escolhe a solução que mais lhe agradar. Esta última fase corresponde ao item 3 de interesse do DM e pode ser considerada a fase *a posteriori* do MORDO. Note que esta fase consiste apenas de análises das soluções robustas previamente calculadas.

A Figura 6-3 mostra algumas setas tracejadas, indicando que o otimizador pode reaproveitar os dados gerados de uma fase em fases subsequentes. Por exemplo,

amostras avaliadas durante a fase de projeto ótimo podem ser armazenadas e reaproveitadas na fase de projeto ótimo e robusto, fornecendo amostras extras durante o processo de amostragem da otimização robusta.

A não aceitação da fronteira Pareto-ótima robusta ou não-robusta exige que o processo seja reiniciado a partir da definição das métricas de robustez ou mesmo a partir da definição e modelagem do problema.

A etapa de checar as restrições na presença de incertezas pode servir como um *crosscheck* para as soluções Pareto-ótima robustas, visto que não se espera que alguma solução robusta viole as restrições impostas no problema. Em contrapartida, esta garantia não existe para as soluções Pareto-ótima não-robustas, que podem eventualmente violar as restrições quando submetidas às perturbações.

6.3 Considerações Finais

O desenvolvimento dos algoritmos propostos nesta tese seguiu os processos da Figura 6-1 e da Figura 6-2.

Como visto neste capítulo, existe uma forte interação do tomador de decisão no processo de otimização robusta. Portanto, os algoritmos propostos não se restringem somente ao agente otimizador, mas também ao tomador de decisão da Figura 6-3. Algumas considerações da postura do tomador de decisão foram feitas durante o desenvolvimento dos algoritmos de otimização robusta multiobjetivo. Isto porque as heurísticas adotadas como *fitness* (macro-objetivos) dos algoritmos refletem a métrica de robustez adotada para resolução do problema, que por sua vez reflete a opinião do tomador de decisão sobre a robustez apropriada para o problema em questão.

Além disso, os algoritmos propostos possuem alguns parâmetros que devem ser escolhidos pelo tomador de decisão com o objetivo, por exemplo, de delimitar o nível de robustez das soluções. Este processo pode ser repetitivo até a satisfação do tomador de decisão.

7 FUNÇÕES TESTE PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Este capítulo apresenta um conjunto de funções teste para problemas de otimização robusta. Algumas delas são descritas tal como propostas na literatura em seu formato original, enquanto que outras foram adaptadas para tornar o *trade-off* entre robustez e desempenho ainda mais acentuado e expô-lo visualmente, o que facilita o entendimento do comportamento das métricas apresentadas no Capítulo 8. Outra motivação da adaptação de algumas funções teste é o fato de existir uma escassez de funções *benchmark* de otimização robusta do Tipo 3 na literatura, como mencionado em (GOH *et al*., 2010) e (CUNHA, FERREIRA e RECIO, 2014).

A Tabela 7-1 apresenta a lista e as características das funções teste utilizadas nesta tese.

Tabela 7-1 – Funções teste para problemas de otimização robusta utilizadas nesta tese.

	Nome da Função Teste	**Objetivos**	**Variáveis**	**Restrição**	**Referências**
Problema Mono-Objetivo	*SinusoidalFunction*	1	1	Não	(JIN e SENDHOFF, 2003) (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006)
	MultiPeaksFunction	1	2	Não	(TSUTSUI e GHOSH, 1997) (JIN e SENDHOFF, 2003)
Problema Multiobjetivo	*OffsetValleys*	2	2	Não	(ONG, NAIR e LUM, 2006)
	ConcurrentSlopes	2	2	Não	(GOH *et al*., 2010)
	ConcurrentSlopesConstraint	2	2	Sim	(GOH *et al*., 2010)
	Deb2Obj-1	2	5	Não	(DEB e GUPTA, 2006)
	Deb2Obj-2	2	5	Não	(DEB e GUPTA, 2006)
	Deb3Obj	3	5	Não	(DEB e GUPTA, 2006)

As funções na Tabela 7-1 têm diferentes características que são detalhadas nas seções seguintes.

7.1 SinusoidalFunction

A *SinusoidalFunction* tem apenas um objetivo e optou-se por fazer $n_v = 1$ tendo, portanto, um caráter didático. Ela já foi utilizada em vários trabalhos, tais como (JIN e SENDHOFF, 2003) e (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006).

Sua formulação genérica é:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,10]^{n_v},$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_v}\sum_{i=1}^{n_v} f_b(x_i'), \tag{7-1}$$

$$f_b(x_i') = 2\sin\left(10e^{(-0.08x_i')}x_i'\right)e^{(-0.25x_i')}.$$

A Figura 7-1 apresenta a curva da *SinusoidalFunction*, em que regiões mais robustas são alcançadas fazendo-se x cada vez maior.

A incerteza foi incorporada na variável de decisão: $x \pm \delta$, com $\delta = 0{,}1$, tal como feito em (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006).

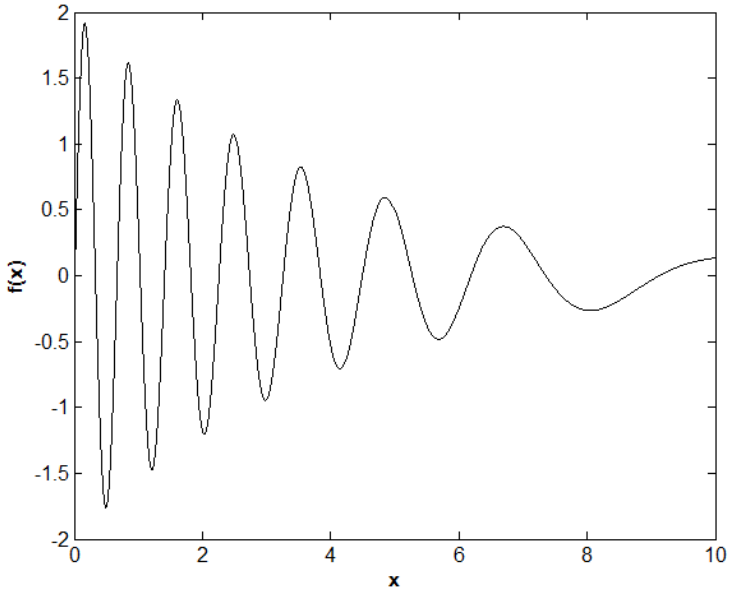


Figura 7-1 – Curva de resposta da função teste *SinusoidalFunction*.

7.2 MultiPeaksFunction

A *MultiPeaksFuncion* tem apenas um objetivo e optou-se por fazer $n_v = 2$, para facilitar a visualização e entendimento. Ela já foi utilizada em vários trabalhos, tais como (TSUTSUI e GHOSH, 1997) e (JIN e SENDHOFF, 2003).

Sua formulação genérica é:

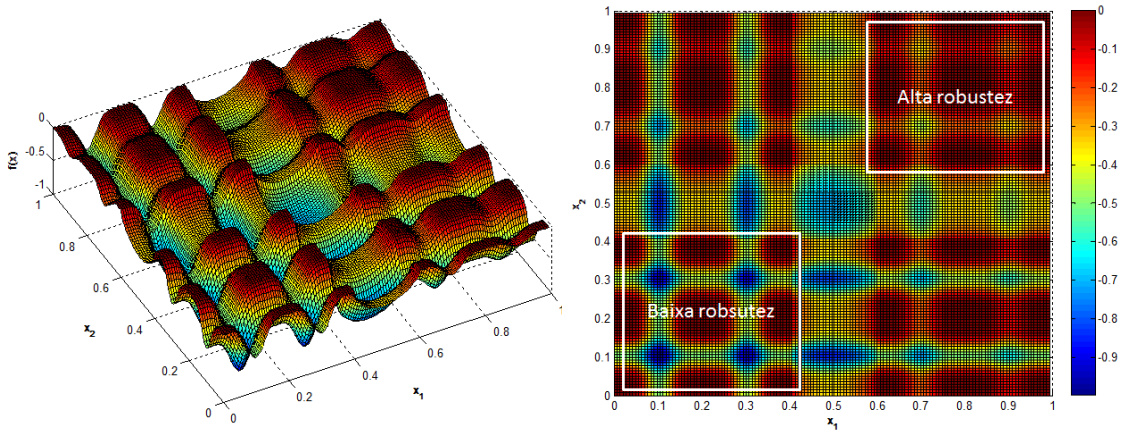
$$\min_{\mathbf{x}} \; f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^{n_v},$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_v}\sum_{i=1}^{n_v} f_b(x_i), \tag{7-2}$$

$$f_b(x_i) = \begin{cases} e^{-2\left(\frac{x_i-0.1}{0.8}\right)^2 \ln 2} \sin(5\pi x_i)^{0.5}, & 0.4 < x_i \leq 0.6 \\ e^{-2\left(\frac{x_i-0.1}{0.8}\right) \ln 2} \sin^6(5\pi x_i), & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 7-2 apresenta a superfície de resposta da *MultiPeaksFuncion* com destaque para as regiões de baixa robustez onde $x_1, x_2 < 0{,}4$ e de alta robustez onde $x_1, x_2 > 0{,}6$.

A incerteza foi incorporada nas variáveis de decisão: $\mathbf{x} \pm \boldsymbol{\delta}$. Foi considerada a mesma incerteza δ_i para todas as dimensões das variáveis com o valor de $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}0625$, tal como feito em (JIN e SENDHOFF, 2003).



(a) (b)

Figura 7-2 – Superfície de resposta da função teste *MultiPeaksFuncion* (a) em perspectiva, e (b) em formato de mapa de calor destacando as regiões de baixa e alta robustez.

7.3 OffsetValleys

A função *OffsetValleys* se baseia em uma função teste proposta em (ONG, NAIR e LUM, 2006). Alguns trabalhos a utilizaram para auxiliar no estudo de diferentes métodos de otimização robusta mono-objetivo (ONG, NAIR e LUM, 2006) e (HO *et al.*, 2008). A função se baseia na expansão de termos de uma função de base Gaussiana, como mostra a equação seguinte:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i e^{-\sum_{j=1}^{n_v} \frac{(x_j - c_{ij})^2}{2\sigma_i^2}}, \tag{7-3}$$

em que β_i, c_{ij}, σ_i são, respectivamente, a amplitude, o centro, e a largura das funções-base. Na equação anterior, m representa o número de funções-base e n_v o número de variáveis.

Assim como feito nos trabalhos (ONG, NAIR e LUM, 2006) e (HO *et al*., 2008), optou-se por lidar somente com duas variáveis, $n_v = 2$. Entretanto, nesta tese a formulação foi estendida para o problema multiobjetivo da seguinte forma:

$$\min_{\mathbf{x}} \ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in [0,5]^{n_v},$$

$$f_1(\mathbf{x}) = \overbrace{-0{,}6e^{-\frac{((x_1-1)^2+(x_2-1)^2)}{0{,}18}}}^{\text{Função-base 1}} \overbrace{-0{,}75e^{-\frac{((x_1-1)^2+(x_2-3)^2)}{0{,}32}}}^{\text{Função-base 2}} \underbrace{-0{,}9e^{-\frac{((x_1-3)^2+(x_2-1)^2)}{2{,}00}}}_{\text{Função-base 3}} \underbrace{-1{,}2e^{-\frac{((x_1-4)^2+(x_2-4)^2)}{0{,}32}}}_{\text{Função-base 4}} \quad (7\text{-}4)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \overbrace{-0{,}6e^{-\frac{((x_1-1)^2+(x_2-1)^2)}{0{,}18}}}^{\text{Função-base 1}} \overbrace{-0{,}75e^{-\frac{((x_1-1)^2+(x_2-3)^2)}{0{,}32}}}^{\text{Função-base 2}} \underbrace{-1{,}0e^{-\frac{((x_1-ctr_R)^2+(x_2-1)^2)}{2{,}00}}}_{\text{Função-base 3}} \underbrace{-1{,}1e^{-\frac{((x_1-ctr_{NR})^2+(x_2-4)^2)}{0{,}32}}}_{\text{Função-base 4}}$$

em que, ctr_R e ctr_{NR} são as posições em x_1 dos centros das funções-base 3 e 4, respectivamente. Cada uma das quatro funções-base é responsável por uma bacia de atração capaz de gerar uma fronteira Pareto-ótima local ou global. Porém, como as funções-base 1 e 2 geram Gaussianas idênticas para ambas as funções do problema, o resultado é um ponto de mínimo local na bacia de atração. A combinação das funções-base 3 e 4 gera duas fronteiras Pareto-ótimas, que podem ser: i) local e global, ou ii) mistas, em que ambas contribuem para a formação da fronteira Pareto-ótima global. Isto depende exclusivamente do valor de ctr_R – atuante na fronteira Pareto-ótima robusta, e do valor de ctr_{NR} – atuante na fronteira Pareto-ótima não-robusta.

A Tabela 7-2 resume as características descritas acima.

Tabela 7-2 – Parâmetros das quatro funções-base da *OffsetValleys*. As funções-base 3 e 4 são as de interesse por serem responsáveis pela formação da fronteira Pareto-ótima robusta e da fronteira Pareto-ótima não-robusta, respectivamente.

Funções-base	Centro ($\boldsymbol{c}$)		Largura ($\boldsymbol{\sigma}$)		Amplitude $\boldsymbol{\beta}$		Análise
	$\boldsymbol{f_1}$	$\boldsymbol{f_2}$	$\boldsymbol{f_1}$	$\boldsymbol{f_2}$	$\boldsymbol{f_1}$	$\boldsymbol{f_2}$	
1	(1,1)	(1,1)	0,3	0,3	-0,6	-0,6	Ponto mínimo local
2	(1,3)	(1,3)	0,4	0,4	-0,75	-0,75	Ponto mínimo local
3	(3,1)	(ctr_R,1)	1,0	1,0	-0,9	-1,0	FP Robusta
4	(4,4)	(ctr_{NR},4)	0,4	0,4	-1,2	-1,1	FP Não-Robusta

Para fins de análise, foi utilizado $ctr_R = 3{,}5$ e $ctr_{NR} = 3{,}6$. A Figura 7-3 mostra a representação gráfica das quatro funções-base.

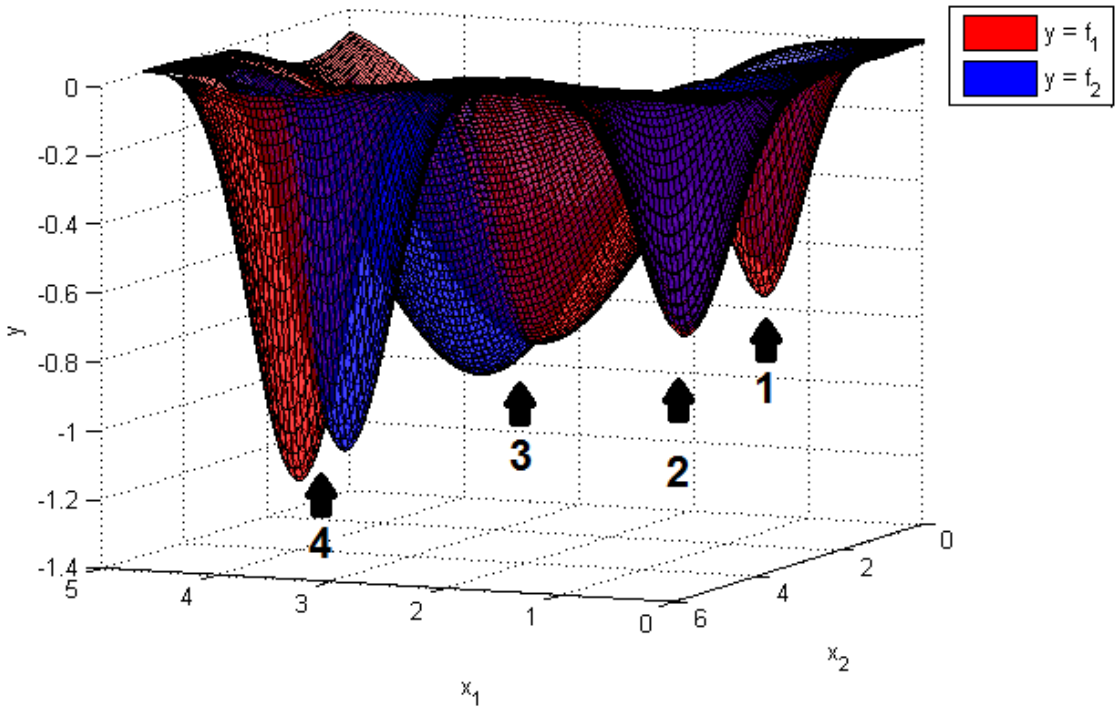
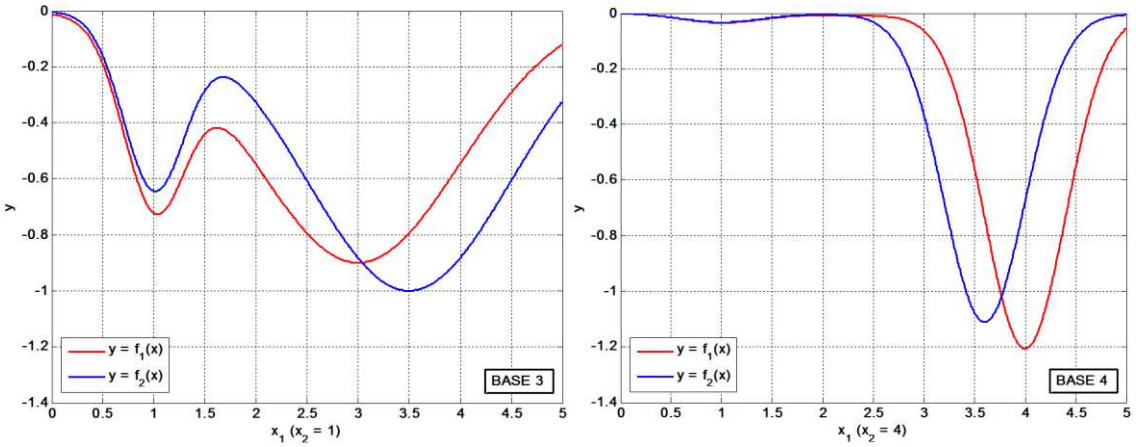


Figura 7-3 - Representação 3D de duas funções multimodais: f_1 (em vermelho) e f_2 (em azul), que contêm quatro bacias de atração.

A Figura 7-4(a) e a Figura 7-4(b) mostram as seções transversais das funções $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ fixadas para $x_2 = 1$ e $x_2 = 4$, respectivamente. De fato a fronteira Pareto-ótima robusta ocorre em $x_2 = 1$ para a combinação das funções-base 3, e a fronteira Pareto-ótima não-robusta ocorre em $x_2 = 4$ para a combinação das funções-base 4.



(a) (b)

Figura 7-4 – Valores de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4.

As imagens da Figura 7-4 mostram que os vales das funções-base 4 alcançam *valores* menores do que os vales das funções-base 3.

A incerteza foi incorporada nas variáveis de decisão: $\mathbf{x} \pm \boldsymbol{\delta}$. Foi considerada a mesma incerteza δ_i para todas as dimensões das variáveis com valor de $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}5$, tal como feito em (HO *et al*., 2008).

7.4 ConcurrentSlopes

A função *ConcurrentSlopes* foi adaptada da função rMOP3 apresentada em (GOH *et al*., 2010), a qual é uma versão multiobjetivo da função mono-objetivo TP5 proposta em (PAENKE, BRANKE e JIN, 2006).

O trabalho de (GOH *et al*., 2010) propõe um *framework* para criação de um conjunto de funções teste para problemas de otimização robusta, com o qual é possível definir o comportamento das funções mediante as incertezas. O *framework* foi utilizado para criar a *ConcurrentSlopes*.

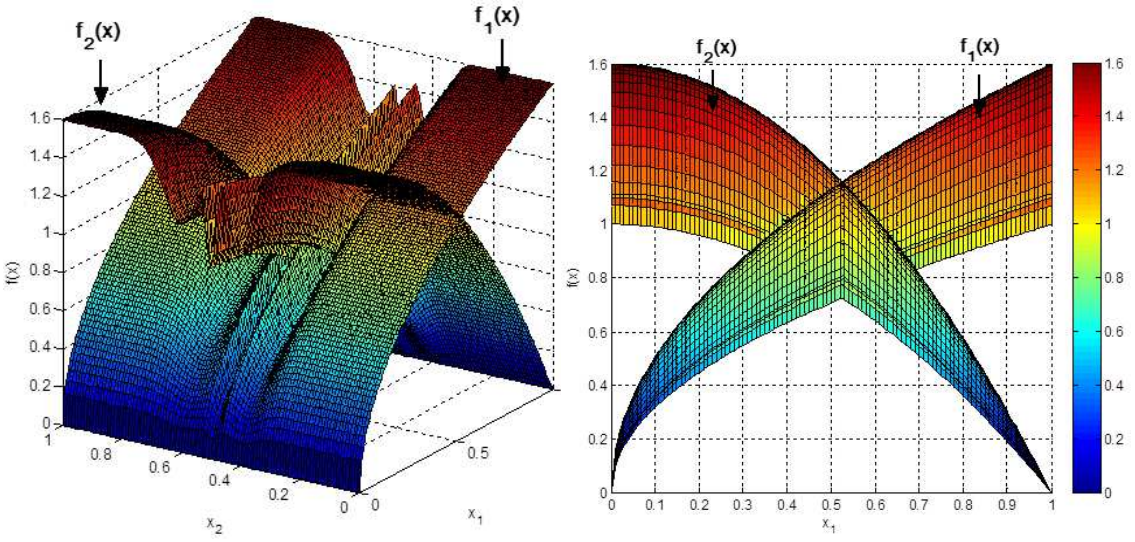
$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^{n_v}, \\ &f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\sqrt{x_1}, \\ &f_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(1 - x_1^2), \end{aligned} \tag{7-5}$$

em que:

$$g(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{i=2}^{n_v} G(x_i),$$

$$G(x_i) = \begin{cases} 0.6 - 0.5e^{-0.5\left(\frac{x_i - 0.4}{0.04}\right)^2}, & x_i < 0.4693 \\ 0.6 - 0.6e^{-0.5\left(\frac{x_i - 0.5}{0.02}\right)^2}, & 0.4693 \leq x_i \leq 0.5304 \\ 0.6 - 0.4e^{-0.5\left(\frac{x_i - 0.6}{0.06}\right)^2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As funções $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ são apresentadas sobrepostas na Figura 7-5.

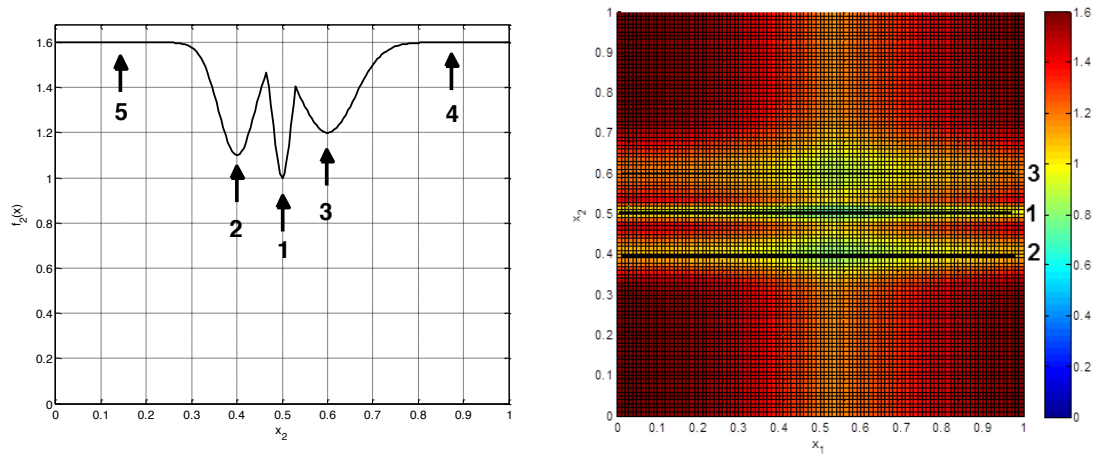


(a) (b)

Figura 7-5 – Função teste *ConcurrentSlopes* com destaque para as superfícies de resposta de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ em perspectiva (a) e em relação a seções transversais de x_2 (b).

Da Figura 7-5(a) é possível perceber que o conflito dos objetivos ocorre principalmente ao longo da variável x_1. A Figura 7-5(b) demonstra este efeito, tendo em $x_1 = 0{,}5249$ o ponto de equilíbrio em que $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$. Da Figura 7-5(b) é possível perceber que as funções não são exatamente simétricas em relação a $x_1 = 0{,}5249$, o que permite concluir, em relação à variável x_1, que $f_1(\mathbf{x})$ é menos robusta em $x_1 = 0$ do que $f_2(\mathbf{x})$ em $x_1 = 1$, pois $\left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 = 0, x_2)\right| > \left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 = 1, x_2)\right|$, e $f_2(\mathbf{x})$ é mais robusta em $x_1 = 0$ do que $f_1(\mathbf{x})$ em $x_1 = 1$, pois $\left|\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 = 0, x_2)\right| < \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 = 1, x_2)\right|$.

Enquanto a variável x_1 é a principal responsável pelo conflito dos objetivos, a variável x_2 é a principal responsável pela robustez da solução. Para ilustrar isto, a Figura 7-6(a) demonstra o perfil da função $f_2(\mathbf{x})$ ao longo da seção de x_2 para $x_1 = 0$.



(a) (b)

Figura 7-6 – (a) Curva da função $f_2(\mathbf{x})$ de *ConcurrentSlopes* ao longo de x_2 para $x_1 = 0$, e (b) mapa de calor de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, com destaque para regiões crescentes de robustez de 1 a 5.

Cinco regiões são destacadas na Figura 7-6(a). A região 1 é a que apresenta pontos com menor valor da função objetivo, porém é a menos robusta, pois é o vale mais estreito. A região 2 provoca um aumento nos valores da função objetivo e as soluções ficam mais robustas em relação à região 1. A região 3 também piora os valores da função objetivo em troca de uma maior robustez, quando comparada com a região 2. Por fim, as regiões 4 e 5 são as que têm pontos com os piores valores da função objetivo, mas que apresentam os mais altos valores de robustez, visto que estão em uma região plana.

Sendo assim, a região 1 da função *ConcurrentSlopes* contém a fronteira Pareto-ótima global $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}^*)$, cujo conjunto Pareto-ótimo é $P^* = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} \mid x_2 = 0{,}5\}$. As regiões 2 e 3 definem fronteiras Pareto-ótimas locais. A Tabela 7-3 faz um resumo sobre as fronteiras Pareto originadas de cada região e o mapa de calor na Figura 7-6(b) mostra o conjunto Pareto-ótimo das fronteiras Pareto-ótimas definidas na região 1, 2 e 3.

Tabela 7-3 – Regiões das fronteiras Pareto-ótima locais da função *ConcurrentSlopes*.

Região	Variáveis		Análise
	x_1	x_2	
1	[0,1]	0,5	FP Não-Robusta
2	[0,1]	0,4	FP baixa Robustez
3	[0,1]	0,6	FP média Robustez
4	[0,1]	$> 0{,}8$	FP alta Robustez
5	[0,1]	$< 0{,}25$	FP alta Robustez

A incerteza foi incorporada nas variáveis de decisão: $\mathbf{x} \pm \boldsymbol{\delta}$. Foi considerada a mesma incerteza δ_i para todas as dimensões das variáveis com valor de $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}05$.

7.5 ConcurrentSlopesConstraint

A função *ConcurrentSlopesContraint* tem formulação idêntica à função *ConcurrentSlopes* com o acréscimo de uma função de restrição de desigualdade $c(\mathbf{x})$, conforme apresentado abaixo:

$$\min_{\mathbf{x}} \ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^{n_v},$$

$$f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\sqrt{x_1},$$

$$f_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(1 - x_1^2),$$

sujeito a: $c(\mathbf{x}) \leq 0$

em que:

$$c(\mathbf{x}) = 0{,}01 - (x_1 - 0{,}5)^2 - (x_2 - 0{,}5)^2 \tag{7-6}$$

$$g(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{i=2}^{n_v} G(x_i),$$

$$G(x_i) = \begin{cases} 0.6 - 0.5e^{-0.5\left(\frac{x_i - 0.4}{0.04}\right)^2}, & x_i < 0.4693 \\ 0.6 - 0.6e^{-0.5\left(\frac{x_i - 0.5}{0.02}\right)^2}, & 0.4693 \leq x_i \leq 0.5304 \\ 0.6 - 0.4e^{-0.5\left(\frac{x_i - 0.6}{0.06}\right)^2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

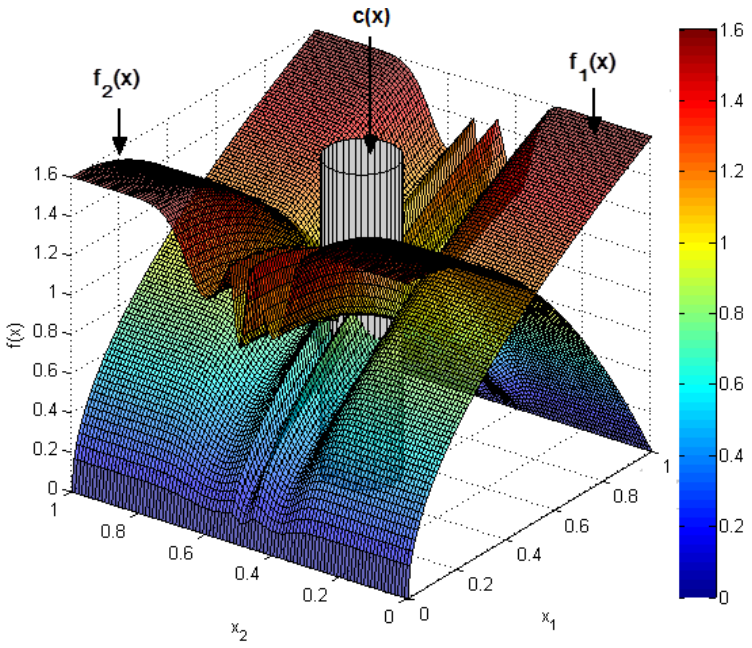


Figura 7-7 – Superfície de resposta em perspectiva dos objetivos $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, e da restrição $c(\mathbf{x})$ da função teste *ConcurrentSlopesContraint*.

Devido à restrição $c(\mathbf{x})$, o conjunto Pareto-ótimo, P^*, fica definido por $x_2 = 0{,}5$ e $x_1 \in [0{,}0\ ;\ 0{,}4] \cup [0{,}6\ ;\ 1{,}0]$, o que faz com que a fronteira Pareto-ótima não-robusta fique não-contínua no espaço dos objetivos.

A incerteza foi incorporada nas variáveis de decisão: $\mathbf{x} \pm \boldsymbol{\delta}$. Foi considerada a mesma incerteza δ_i para todas as dimensões das variáveis com valor de $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}05$.

7.6 Deb2Obj-1

A função *Deb2Obj-1* foi proposta no trabalho de (DEB e GUPTA, 2006) com o objetivo de investigar o uso de otimização robusta em problemas multiobjetivo do Tipo 1. Esta função e as outras, *Deb2Obj-2* e *Deb3Obj*, são comumente utilizadas como *benchmark* para algoritmos de otimização robusta em diversos trabalhos (BARRICO e ANTUNES, 2006), (AVIGAD e BRANKE, 2008), (SOARES, 2008), (MENDES, 2013), (GOH *et al*., 2010) e (SAHA e RAY, 2011).

A *Deb2Obj-1* conta com dois objetivos e optou-se por fazer $n_v = 5$. Segue sua formulação:

$$\min_{\mathbf{x}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

em que:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= h(x_1) + g(\mathbf{x})S(x_1), \end{aligned} \tag{7-7}$$

$$\mathcal{X} = \begin{Bmatrix} 0 \le x_1 \le 1 \\ -1 \le x_i \le 1, \end{Bmatrix} \quad i = 2,3,\dots,n_v \Big\},$$

$$h(x_1) = 1 - x_1^2,$$

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=2}^{n_v} (10 + x_1^2 - 10\cos(4\pi x_i)),$$

$$S(x_1) = \frac{\alpha}{0{,}2 + x_1} + \beta x_1^2.$$

Foram considerados $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. As soluções eficientes desta função são $x_1 = [0,1]$ e $x_i = 0$ para $i = 2,3,\dots,n_v$, o que compõe uma fronteira Pareto-ótima equacionada como $f_2 = 1 - f_1^2$.

A versão incerta desta função é obtida por meio da inserção de incerteza nas variáveis de decisão da seguinte forma: $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$. Para fins de teste, a incerteza é parametrizável em função de uma única grandeza δ, fazendo $\delta_1 = \delta$ e $\delta_i = 2\delta$ para $i = 2,3,\dots,n_v$.

Uma forma clássica de se tratar o problema de incerteza é utilizar o conceito de valor esperado como função objetivo, conforme apresentado na Seção 5.3. O trabalho (DEB e GUPTA, 2006) desenvolve as equações teóricas para obtenção da fronteira Pareto-ótima robusta considerando a minimização das funções objetivo: $\mathrm{E}[f_1(\mathbf{x})]$ e $\mathrm{E}[f_2(\mathbf{x})]$. Esta fronteira serve como referência frente aos resultados obtidos por outros métodos, tal como apresentado mais à frente na Seção 10.4.

Na trabalho de (DEB e GUPTA, 2006) diferentes cenários de incertezas são testados fazendo: $\delta = 0{,}007$, $\delta = 0{,}008$, $\delta = 0{,}009$ e $\delta = 0{,}01$, com os quais a função *Deb2Obj-1* tem como soluções Pareto-ótimas robustas as próprias soluções ótimas nominais da função sendo, portanto, uma função do Tipo 1 da Figura 5-2. Os mesmos valores de incerteza praticados em (DEB e GUPTA, 2006) foram utilizados nesta tese.

7.7 Deb2Obj-2

A função *Deb2Obj-2* também foi proposta no trabalho de (DEB e GUPTA, 2006) com o objetivo de investigar o uso de otimização robusta em problemas multiobjetivo do Tipo 3. Ela conta com dois objetivos e optou-se por fazer $n_v = 5$. Segue a formulação:

$$\min_{\mathbf{x}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

em que:

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1,$$
$$f_2(\mathbf{x}) = h(x_2)\big(g(\mathbf{x}) + S(x_1)\big), \tag{7-8}$$

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x_1, x_2 \le 1 \\ -1 \le x_i \le 1 \end{matrix}, \quad i = 3,4, \dots, n_v \right\},$$

$$h(x_2) = 2 - 0{,}8e^{-\left(\frac{(x_2 - 0{,}35)}{0{,}25}\right)^2} - e^{-\left(\frac{(x_2 - 0{,}85)}{0{,}03}\right)^2},$$

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=3}^{n_v} 50x_i^2,$$

$$S(x_1) = 1 - \sqrt{x_1}.$$

As soluções eficientes desta função ocorrem quando $x_i = 0$ para $i = 3,4, \dots, n_v$. Neste caso, surgem duas fronteiras, uma local $f_2 = 1{,}2\left(1 - \sqrt{f_1}\right)$ e outra global $f_2 = 1 - \sqrt{f_1}$.

A versão incerta desta função é obtida por meio da inserção de incerteza nas variáveis de decisão da seguinte forma: $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$. Para fins de teste, a incerteza é parametrizável em função de uma única grandeza δ, fazendo $\delta_1, \delta_2 = \delta$ e $\delta_i = 2\delta$ para $i = 3,4, \dots, n_v$.

Nesta tese o valor da incerteza é fixado em $\delta = 0{,}03$ fazendo com que a função *De2Obj-2* seja do tipo 3 da Figura 5-2, ou seja, suas soluções Pareto-ótimas robustas não são iguais às suas soluções Pareto-ótimas nominais.

7.8 Deb3Obj

A função *Deb3Obj* também foi proposta no trabalho de (DEB e GUPTA, 2006) com o objetivo de investigar o uso de otimização robusta em problemas multiobjetivo do Tipo 3 com 3 objetivos. Nesta tese, optou-se por fazer $n_v = 5$. Segue a formulação:

$$\min_{\mathbf{x}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

em que:

$$\begin{gathered} f_1(\mathbf{x}) = x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) = x_2, \\ f_3(\mathbf{x}) = h(x_3)\big(g(\mathbf{x}) + S(x_1, x_2)\big), \\ \mathcal{X} = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1 \\ -1 \le x_i \le 1 \end{matrix}, \quad i = 4,5, \dots, n_v \right\}, \\ h(x_3) = 2 - 0{,}8e^{-\left(\frac{(x_3 - 0{,}35)}{0{,}25}\right)^2} - e^{-\left(\frac{(x_3 - 0{,}85)}{0{,}03}\right)^2}, \\ g(\mathbf{x}) = \sum_{i=4}^{n_v} \big(10 + x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)\big), \\ S(x_1, x_2) = 10 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}. \end{gathered} \tag{7-9}$$

A função *Deb3Obj* é uma variante da *Deb2Obj-2* para 3 objetivos. De forma similar ao que ocorre com a *Deb2Obj-2*, as soluções eficientes da *Deb3Obj* ocorrem quando $x_i = 0$ para $i = 4{,}5, \ldots, n_v$. Neste caso, surgem duas fronteiras, uma local $f_3 = 1{,}2\left(10 - \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}\right)$ e outra global $f_3 = 10 - \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}$.

A versão incerta desta função é obtida por meio da inserção de incerteza nas variáveis de decisão da seguinte forma: $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$. Para fins de teste, a incerteza é parametrizável em função de uma única grandeza δ, fazendo $\delta_1, \delta_2, \delta_3 = \delta$ e $\delta_i = 2\delta$ para $i = 4{,}5, \ldots, n_v$.

Nesta tese o valor da incerteza é fixado em $\delta = 0{,}03$ fazendo com que a função *De3Obj* seja do tipo 3 da Figura 5-2, ou seja, suas soluções Pareto-ótimas robustas não são iguais às suas soluções Pareto-ótimas nominais.

7.9 Considerações Finais

O conjunto de funções teste apresentado neste capítulo abrange funções contínuas com diferentes características, entre elas: quantidade de objetivos variando de um a três; quantidade de variáveis de decisão variando de um a cinco; e presença de restrição na função *ConcurrentSlopesConstraint*.

A natureza e o formato das fronteiras Pareto-ótima robustas das funções teste também são diferentes podendo ser convexas, não-convexas, contínuas, ou descontínuas. Além disso, diferentes tipos da Figura 5-2 são explorados com essas funções teste.

8 NOVAS MÉTRICAS DE ROBUSTEZ

Conforme explicado no Capítulo 6, uma das formas de se obter soluções Pareto-ótimas robustas é a partir da definição de métricas de robustez coerentes para o problema e que satisfaçam aos requisitos do tomador de decisão. Na Seção 5.3 foram apresentadas algumas dessas métricas. Embora muitas vezes as métricas de robustez estejam associadas às funções objetivo originais do problema por meio de macro-objetivos, elas são definidas isoladamente, a exemplo do desvio padrão, que é a métrica de robustez mais utilizada.

Este Capítulo apresenta as novas métricas de robustez que procuram estimar eficientemente a variabilidade em torno de uma solução quando sob efeito de perturbação. Elas são chamadas assim: MR1, MR2, MR3 e MR4. As métricas MR3 e MR4, no entanto, dependem do cálculo do pior caso de incertezas da solução, que é estimado pelo método proposto WCE (do inglês, *Worst Case Estimation*), também apresentado neste Capítulo.

A Seção 8.1 apresenta o método de cálculo da estimativa do pior caso de incertezas (WCE) em torno de uma solução e, em seguida, a Seção 8.2 apresenta a definição das novas métricas de robustez.

8.1 Método de Estimativa do Pior de Caso de Incertezas: WCE

Como visto na Subseção 5.3.2.1, Equação (5-26), encontrar o pior caso de incertezas em torno de uma solução nominal é, por si só, um problema de maximização:

$$\max_{\mathbf{p}} \; \boldsymbol{f}(\mathbf{x_0}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x_0} \in \mathcal{F}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \tag{8-1}$$

em que $\mathbf{x_0}$ é a solução nominal em torno da qual se deseja encontrar o pior caso de incertezas. Para problemas multiobjetivo, o problema de se encontrar o pior caso se transforma em um problema de maximização multiobjetivo, como mostra o trabalho de (AVIGAD e BRANKE, 2008) e (MENDES, 2013). Neste caso, ao procurar o pior caso de incertezas de um problema multiobjetivo por meio da maximização das respostas perturbadas das soluções, dificilmente existirá uma única resposta que seja o pior caso de incertezas para todos os objetivos simultaneamente, fazendo com que cada solução nominal esteja associada a uma fronteira Pareto-ótima de "piores casos".

O problema multiobjetivo de se encontrar o conjunto $\mathbf{p}$ que maximiza $\boldsymbol{f}(\mathbf{x_0}, \mathbf{p})$ na Equação (8-1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}} \boldsymbol{f}(\mathbf{x_0}, \mathbf{p}) \equiv \boldsymbol{f_{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}). \tag{8-2}$$

Considerando a região incerta em torno de $\mathbf{x_0}$ como sendo $U(\mathbf{x_0}) \subset \mathbb{R}^{n_v}$, e que $\underline{\mathbf{p}}$ e $\overline{\mathbf{p}}$ sejam os limites inferiores (não positivos) e superiores (não negativos), respectivamente, do vetor perturbação $\mathbf{p}$, tem-se que:

$$U(\mathbf{x_0}) = \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_v} \,:\, \mathbf{x_0} + \underline{\mathbf{p}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \mathbf{x_0} + \overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}\right\}. \tag{8-3}$$

Se a incerteza for paramétrica e afetar somente as variáveis de decisão, a equação de pior caso de incertezas de $\mathbf{x_0}$ pode ser reescrita em função somente de sua região incerta:

$$\boldsymbol{f_{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) \equiv \boldsymbol{f_{wc}}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \in U(\mathbf{x_0}), \tag{8-4}$$

e o problema de *minimax* apresentado na Subseção 5.3.2.1, Equação (5-26), se resume a resolver:

$$\min_{\mathbf{x}} \boldsymbol{f_{wc}}(\boldsymbol{\xi}), \;\; \boldsymbol{\xi} \in U(\mathbf{x}). \tag{8-5}$$

A equação anterior revela que o procedimento *minimax* corresponde à formulação convencional de um problema de minimização desde que os valores da função $\boldsymbol{f_{wc}}(\boldsymbol{\xi})$ sejam obtidos.

De acordo com (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004), se a função $f_i(\mathbf{x})$ sob análise é monotônica em $U(\mathbf{x})$ com respeito a todas as variáveis de decisão, ou convexa, o pior caso de incertezas em torno de uma solução nominal $\mathbf{x_0}$ e o pior valor da restrição ocorrerá em um dos vértices do domínio $U(\mathbf{x_0})$ para a incerteza $\boldsymbol{\xi}^*$.

A Figura 8-1 mostra os vértices de uma função $f_i(\mathbf{x})$ convexa.

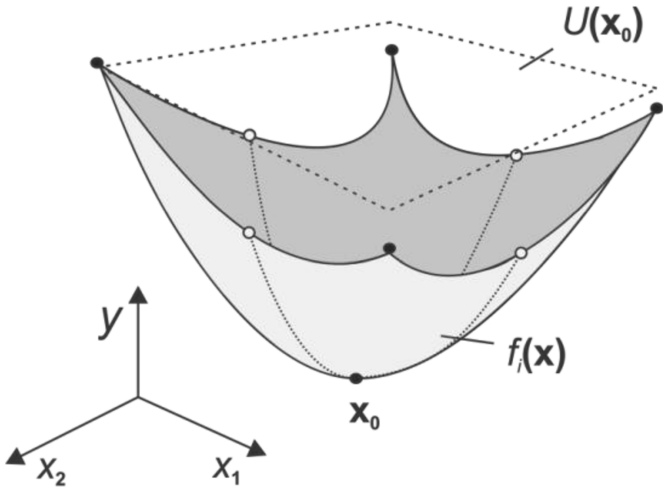


Figura 8-1 – Exemplo de função convexa no domínio $U(\mathbf{x_0})$.

Porém, a avaliação dos 2^{n_v} vértices de cada $f_i(\mathbf{x})$ (círculos pretos da Figura 8-1) pode ser inviável do ponto de vista computacional para problemas de elevada dimensão n_v. Justifica-se, portanto, estimar qual o vértice do pior caso de incertezas em vez de encontrá-lo efetivamente pela avaliação exaustiva de todos os vértices do domínio de incertezas. Ainda de acordo com (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004), é possível estimar o vértice de pior caso de incertezas com custo linear fazendo apenas $2n_v + 1$ avaliações, frente ao custo exponencial de 2^{n_v} avaliações.

A metodologia para estimativa de pior caso de incertezas proposta por (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004) consiste em avaliar o efeito dos limites intervalares das incertezas em cada dimensão n_v do problema (círculos brancos da Figura 8-1). O limite intervalar que gera o pior resultado em uma dada dimensão fornece informação útil da direção do vértice do pior caso de incertezas naquela dimensão.

Quanto menor a região definida por $U(\mathbf{x})$, maiores são as chances da i-ésima função objetivo, $f_i(\mathbf{x})$**,** ser convexa ou monotônica em seu interior e, consequentemente, maiores são as chances de se ter uma boa estimativa do pior vértice. Nesta tese, o uso desta metodologia foi estendida para ocasiões em que $f_i(\mathbf{x})$ não é nem monotônica nem convexa e para qualquer caso de incerteza paramétrica. A formulação para se estimar $f_{wc_i}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$ é a seguinte:

$$\tilde{f}_{wc_i}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) = max\, \mathbf{v} \;\; | \qquad (8\text{-}6)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} f_i(\mathbf{x_0}, \mathbf{p}^*) \\ f_i(\mathbf{x_0}) \\ f_i(\mathbf{x_0}, \overline{\mathrm{p}}_1) \\ f_i(\mathbf{x_0}, \overline{\mathrm{p}}_2) \\ \vdots \\ f_i\left(\mathbf{x_0}, \overline{\mathrm{p}}_{n_p}\right) \\ f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{\mathrm{p}}_1\right) \\ f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{\mathrm{p}}_2\right) \\ \vdots \\ f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{\mathrm{p}}_{n_p}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} sign\left(f_i(\mathbf{x_0}, \overline{\mathrm{p}}_1) - f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{\mathrm{p}}_1\right)\right)\Delta_1 \\ sign\left(f_i(\mathbf{x_0}, \overline{\mathrm{p}}_2) - f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{\mathrm{p}}_2\right)\right)\Delta_2 \\ \vdots \\ sign\left(f_i\left(\mathbf{x_0}, \overline{\mathrm{p}}_{n_p}\right) - f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{\mathrm{p}}_{n_p}\right)\right)\Delta_{n_p} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}^* \in P, \;\; \mathrm{i} = 1,2, \dots, n_f,$$

em que:

$$\Delta_j = \overline{p}_j, \quad \text{se } sign\left(f_i\left(\mathbf{x_0}, \overline{p}_j\right) - f_i\left(\mathbf{x_0}, \underline{p}_j\right)\right) > 0$$
$$\Delta_j = \underline{p}_j, \quad \text{caso contrário.} \tag{8-7}$$
$$j = 1,2,\ldots,n_p.$$

A função $sign(\Delta f)$ retorna o sinal de Δf, e é responsável por determinar para cada i-ésimo objetivo o sentido do pior caso de incerteza. O valor Δ_j representa a magnitude do passo em direção ao pior caso de incerteza para cada i-ésima dimensão, e assume um dos limites da perturbação, seja superior $\overline{p}_j$, ou inferior $\underline{p}_j$.

A formulação de (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004) estima o pior caso fazendo somente $\tilde{f}_{wc_i}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) = max\, f_i(\mathbf{x_0}, \mathbf{p}^*)$. Uma vez que para se encontrar $\mathbf{p}^*$ são feitas várias avaliações da função $f_i(\mathbf{x_0}, p_k)$ para diferentes valores de perturbação p_k, elas são aproveitadas e agrupadas em um vetor $\mathbf{v}$ junto à função objetivo sem perturbação, $f_i(\mathbf{x_0})$, e a própria função com a estimativa do pior caso de incerteza $f_i(\mathbf{x_0}, \mathbf{p}^*)$, para então estimar definitivamente o pior caso.

Apesar da formulação acima aceitar $n_v \neq n_p$, o trabalho de (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004) não considera este caso e restringe-se às incertezas paramétricas atuantes somente nas variáveis de decisão. Cabe ressaltar, entretanto, que a metodologia apresentada é extensível para quaisquer parâmetros do modelo – variáveis de decisão ou parâmetros fixos. Basta considerar os parâmetros fixos como variáveis somente em função de $\mathcal{P}$. Neste caso, a metodologia abrange diferentes situações: $n_v > n_p$, $n_v < n_p$ e $n_v = n_p$.

O método acima requer $2n_p + 2$ avaliações da função objetivo original, uma avaliação a mais em relação ao (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004), pois a Equação (8-6) faz avaliação da função objetivo original sem perturbação. Para n_f objetivos, tem-se $n_f(2n_p + 2)$ avaliações totais.

Se a função $f_i(\mathbf{x})$ não for nem convexa, nem monotônica em $U(\mathbf{x})$, não há garantia de que o pior caso de incertezas estimado esteja em um dos vértices de $U(\mathbf{x})$. Mesmo assim, o procedimento da Equação (8-6) continua sendo útil como uma heurística de estimativa do pior caso de incertezas.

8.2 Definição das Novas Métricas de Robustez: MR1, MR2, MR3 e MR4

8.2.1 Métricas MR1 e MR2

Estas métricas consistem em heurísticas que medem o nível de sensibilidade de uma dada solução com base em amostras de sua vizinhança. A vizinhança de uma solução é definida pela incerteza a qual está sujeita. Duas métricas de robustez são derivadas da medida de sensibilidade das soluções:

1) Sensibilidade média;
2) Máxima sensibilidade.

A primeira métrica refere-se a MR1, e a segunda a MR2. O principal objetivo das métricas de sensibilidade é conhecer o impacto das variações paramétricas do problema sobre as variações dos resultados. Este conhecimento geralmente é obtido por meio do cálculo de derivadas parciais de 1ª ordem (matriz Jacobiana), de derivadas parciais de 2ª ordem ou de mais alta ordem, em torno de um ponto nominal. A combinação das derivadas parciais permite inclusive a aproximação de funções por Séries de Taylor, quando os pontos não se distanciam muito do ponto nominal. Porém, o cálculo de derivadas muitas vezes requer que as funções sejam conhecidas e diferenciáveis. Isto muitas vezes não é possível, e faz-se o uso de métodos numéricos para o cálculo das derivadas, como exemplo o método das diferenças finitas.

As métricas MR1 e MR2 medem a sensibilidade da solução nominal $\mathbf{x}$ por meio de heurísticas, que indicam a grosso modo a variabilidade de cada objetivo (Δy_m) em função da variabilidade das variáveis de decisão ($\Delta\mathbf{x}$) em torno de sua vizinhança $\Omega(\mathbf{x})$. O número de amostras na vizinhança de $\mathbf{x}_i$ é igual a $|\Omega(\mathbf{x}_i)|$. Para um conjunto de soluções $\mathbf{x}_i$ temos:

$$\text{MR1:}\quad \hat{y}_{m,i} = \frac{1}{|\Omega(\mathbf{x}_i)|}\sum_{j\in\Omega(\mathbf{x}_i)}\left(\frac{|y_{m,j}-y_{m,i}|}{\sum_{k=1}^{n_v}|x_{k,j}-x_{k,i}|}\right),\quad \begin{matrix} j\neq i \\ m=1,2,\ldots,n_f \end{matrix}. \tag{8-8}$$

$$\text{MR2:}\quad \hat{y}_{m,i} = \max_{j\in\Omega(\mathbf{x}_i)}\left(\frac{|y_{m,j}-y_{m,i}|}{\sum_{k=1}^{n_v}|x_{k,j}-x_{k,i}|}\right),\quad \begin{matrix} j\neq i \\ m=1,2,\ldots,n_f \end{matrix}. \tag{8-9}$$

É notável a semelhança de MR1 com a formulação da Equação (5-21) proposta por (FERREIRA *et al*., 2008). Contudo, algumas diferenças existem entre as duas formulações, por exemplo, o denominador de MR1 faz apenas o somatório do módulo da diferença entre as coordenadas dos pontos, enquanto a formulação de (FERREIRA *et al*., 2008) considera a norma dois da diferença. Nenhuma métrica similar à MR2 foi encontrada na literatura, apesar de seu conceito se assemelhar ao GI proposto por (HAN e KWAK, 2004) na Equação (5-9).

O trabalho de (FERREIRA *et al*., 2008) faz a normalização das funções objetivo de modo que fiquem na mesma escala para utilização da métrica de robustez da Equação (5-21). A normalização dos objetivos, assim como das variáveis de decisão, se faz necessária em MR1 e MR2 quando têm escalas diferentes. O trabalho de (FERREIRA *et al*., 2008) não faz normalização das variáveis de decisão, logo assumem que dimensões de escalas reduzidas afetam menos a métrica de robustez do que as dimensões com escalas maiores. A seção 10.3.4.1 mais a frente apresenta com exemplos a importância de se normalizar as métricas MR1 e MR2. Nesta tese, como todas as funções teste têm a mesma escala para as variáveis de decisão e para os objetivos, a normalização torna-se dispensável.

A Figura 8-2 demonstra o valor das métricas MR1 e MR2 comparadas à métrica MR-FFCG[8] de (FERREIRA *et al*., 2008) e ao desvio padrão, quando aplicadas à função *SinusoidalFunction*.

[8] O nome MR-FFCG foi utilizado nesta tese para referir-se a: Métrica Robusta dos autores cujos sobrenomes são Ferreira, Fonseca, Covas e Gaspar.

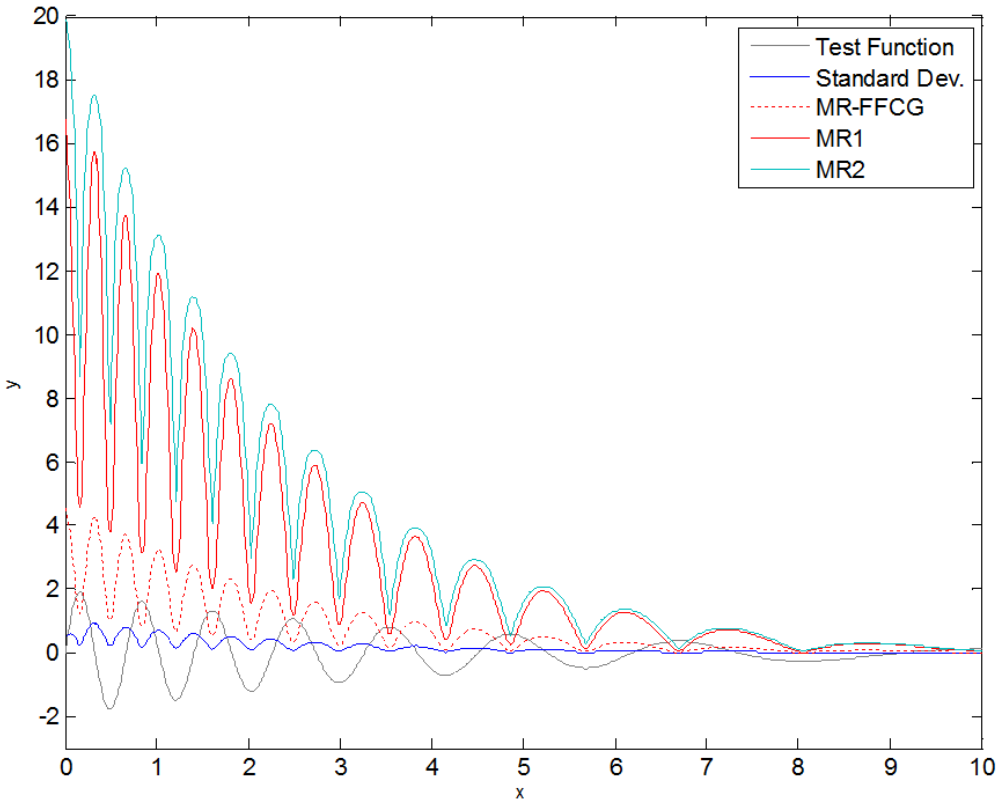


Figura 8-2 – Comparativo das respostas das métricas MR1 (vermelho contínuo) e MR2 (verde) em relação às métricas FFCG (vermelho pontilhado) e desvio padrão (azul), para a *SinusoidalFunction*.

É perceptível da Figura 8-2 que os formatos das curvas das métricas seguem o formato da curva do desvio padrão. Os valores das métricas MR1 e MR2 são elevados em regiões de baixa robustez em função da razão $\Delta y/\Delta x$ das métricas, enquanto que a métrica MR-FFCG tem fatores normalizados o que faz com que sua escala seja menor. Note que para problemas unidimensionais, tal como *SinusoidalFunction*, MR-FFCG e MR1 são idênticas a menos de um fator multiplicativo.

A amostragem aleatória em torno da solução avaliada faz com que MR1, MR2 e MR-FFCG sejam métricas estocásticas. Consequentemente, a qualidade dessas métricas depende do número de amostras disponíveis, $N_{samples}$, o que pode levar a um elevado custo computacional.

8.2.2 Métricas MR3 e MR4

Estas métricas também consistem em heurísticas que medem o nível de sensibilidade de uma dada solução, porém estas métricas não dependem da amostragem em torno da solução avaliada. Tanto MR3 quanto MR4 fazem uso do pior caso da vizinhança da

solução para cálculo da métrica de sensibilidade. A forma de obtenção do pior caso será o que definirá a natureza da métrica como sendo estocástica ou determinística.

As métricas MR3 e MR4 se basearam na métrica da Equação (5-17) proposta em (GUIMARÃES, LOWTHER e RAMÍREZ, 2006), que é uma tentativa de aproximação da variância da solução avaliada pelo cálculo da diferença entre o pior caso e o valor esperado da solução. Em linhas gerais, MR3 e MR4 também partem deste princípio, porém, também consideram informação do melhor caso em torno da solução. Isto se deve ao fato de que em problemas de minimização multiobjetivo, por exemplo, é comum que amostras em torno de uma solução Pareto-ótima tenham valor menor para uma das funções objetivo. Sendo assim, é importante que o desvio em relação ao melhor caso também seja contabilizado, caso contrário haveria uma preferência de minimização da distância somente ao pior caso durante o processo evolutivo da otimização.

As métricas são definidas a seguir:

$$\text{MR3:}\quad \hat{y}_m = \max\left(f_{wc_m}(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x}), f_m(\mathbf{x}) - f_{bc_m}(\mathbf{x})\right), \quad m = 1,2,\dots,n_f. \tag{8-10}$$

$$\text{MR4:}\quad \hat{y}_m = f_{wc_m}(\mathbf{x}) - f_{bc_m}(\mathbf{x}), \quad m = 1,2,\dots,n_f. \tag{8-11}$$

As fórmulas $f_{wc_m}(\cdot)$ e $f_{bc_m}(\cdot)$ correspondem aos métodos de obtenção do pior e melhor caso, respectivamente, para a m-ésima função objetivo. As métricas MR3 e MR4 são não-negativas, visto que se tem a garantia de que $f_{bc_m} \leq f_m(\mathbf{x}) \leq f_{wc_m}(\mathbf{x})$.

A métrica MR3 procura obter o maior desvio em relação à função objetivo original, o que dá uma ideia da magnitude da variância da solução, enquanto que MR4 calcula, de fato, a amplitude da variação possível em torno da solução.

A Figura 8-3 demonstra o valor das métricas MR3 e MR4 comparadas à métrica MR-GLR[9] e ao desvio padrão, quando aplicadas à função *SinusoidalFunction*.

[9] O nome MR-GLR foi utilizado nesta tese para referir-se a: Métrica Robusta dos autores cujos sobrenomes são Gadelha, Lowther e Ramírez.

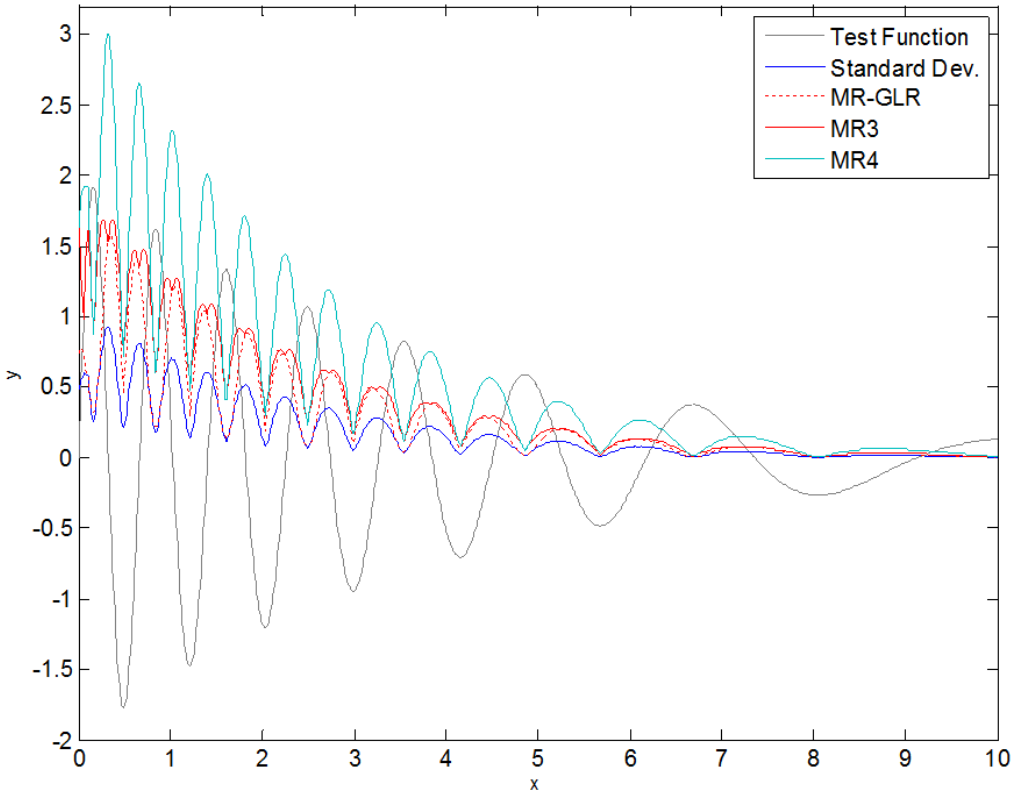


Figura 8-3 – Comparativo das respostas das métricas MR3 (vermelho contínuo) e MR4 (verde) em relação às métricas MR-GLR (vermelho pontilhado) e desvio padrão (azul), para a *SinusoidalFunction*.

Todas as métricas seguem a mesma tendência da curva do desvio padrão, embora com magnitudes diferentes. A Figura 8-4 fornece um zoom na região entre $0 \leq x \leq 3$.

Da Figura 8-4 é possível perceber que o desvio padrão nos mínimos e máximos locais da *SinusoidalFunction* é monotonamente decrescente quando x aumenta. Isto também é verdade para MR3 e MR4, que inclusive assumem valores idênticos nos pontos de mínimo e máximo. Porém, MR-GLR não decresce monotonamente nas regiões de máximo e mínimo, alternando entre valores altos e baixos em regiões de mínimo e máximo locais sucessivos.

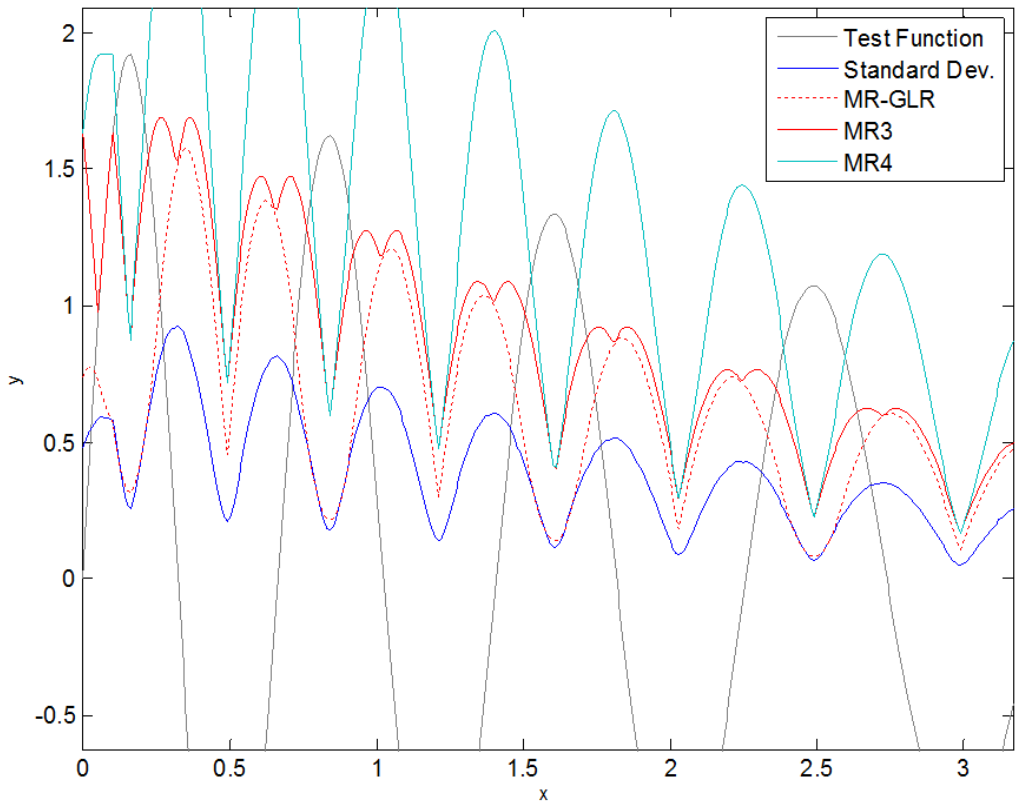


Figura 8-4 – Comparativo das respostas das métricas MR1 (vermelho contínuo) e MR2 (verde) em relação às métricas FFCG (vermelho pontilhado) e desvio padrão (azul), para a *SinusoidalFunction*. Zoom na região $0 \leq x \leq 3$.

Embora MR3 e MR4 sigam a mesma tendência em *SinusoidalFunction*, é importante ressaltar que MR4 é mais conservadora do que MR3, visto que ela considera a amplitude da variação possível e cujo resultado não é fisicamente realizável. Em contrapartida, MR3 expressa um valor fisicamente realizável visto que a perturbação pode levar a solução ao pior ou ao melhor caso, gerando o máximo desvio em relação à solução nominal. Quanto maior a derivada em torno da solução nominal, mais conservadora será MR4 frente à MR3. A Figura 8-5 demonstra esta constatação.

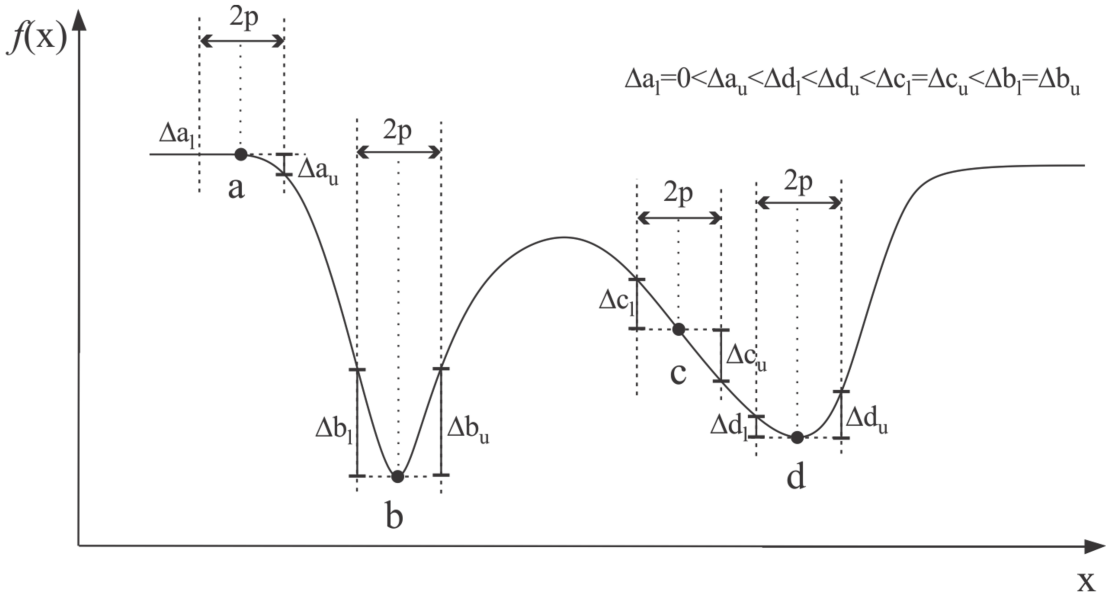


Figura 8-5 – Esquemático ilustrativo do perfil de uma função $f(\mathrm{x})$ com quatro pontos: a, b, c, d, sujeitos à mesma perturbação $\pm$p.

Considere os pontos a, b, c, d da Figura 8-5. As seguintes relações podem ser obtidas:

$$f_{MR3}(a) = f_{MR4}(a) = \Delta \mathrm{a_u}$$
$$f_{MR3}(b) = f_{MR4}(b) = \Delta \mathrm{b_u}$$
$$2f_{MR3}(c) = f_{MR4}(c) = 2\Delta \mathrm{c_u}$$
$$f_{MR3}(d) = f_{MR4}(d) = \Delta \mathrm{d_u}$$

Note que $f_{MR4}(c) \approx f_{MR4}(b)$, para $\Delta \mathrm{b_u} \approx 2\Delta \mathrm{c_u}$. Ou seja, o ponto c tem robustez similar ao ponto b que está no vale mais profundo, enquanto que $f_{MR3}(c) \approx f_{MR3}(b)/2$. Cabe ao tomador de decisão escolher sua preferência em relação à métrica de robustez utilizada, conforme visto no Capítulo 6.

8.3 Considerações Finais

O WCE procura estimar o pior caso de incertezas em torno de uma solução por meio de um procedimento determinístico, sem necessidade de amostragem. O uso do WCE é apropriado para regiões do espaço que sejam convexas ou monotônicas em torno das soluções nominais. Tendo-se em mente suas limitações, o WCE pode ser utilizado para estimar o pior caso de incertezas para as métricas MR3 e MR4 que se baseiam, respectivamente, no maior desvio produzido pelo pior caso em relação à solução nominal e ao melhor caso.

Para as métricas MR1 e MR2 que são baseadas em amostragem, é recomendável o uso do LHS para que as amostras fiquem mais uniformemente espaçadas em comparação à amostragem aleatória. A formulação de MR1 e MR2 consiste em heurísticas que procuram se aproximar da média das derivadas parciais (MR1) e do seu máximo valor (MR2) em torno de uma solução nominal, uma vez que o conceito de robustez está muitas vezes atrelado às derivadas das funções.

9 ALGORITMOS E MÉTODOS PROPOSTOS PARA OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO

9.1 Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm (WCEMOEA)

O *Worst Case Estimation Multiobjective Evolutionary Algorithm* (WCEMOEA) é um algoritmo evolucionário de otimização multiobjetivo que faz uso de estimativas de pior caso de incertezas para conduzir o processo de otimização. Trata-se de um algoritmo de otimização robusta baseada no pior caso de incertezas.

9.1.1 Introdução

O WCEMOEA utiliza a estratégia *minimax* e o critério do *robusto absoluto* descritos na Subseção 5.3.2.1, em que a solução robusta é aquela com menor valor de benefício considerando-se todos os cenários (KOUVELIS e YU, 1997).

Encontrar soluções de menor pior caso de incertezas implica algumas premissas básicas, que não podem ser desprezadas pelo tomador de decisão dependendo da natureza do problema. São elas:

1) Não há garantia de que as soluções obtidas via *minimax* tenham baixa sensibilidade às perturbações quando comparadas às outras soluções, a garantia que se tem é de que as soluções têm o menor pior caso de incertezas;
2) O cenário de pior caso de atuação das incertezas, em geral, tem baixa probabilidade de ocorrer quando comparado a outros cenários, o que pode levar a uma solução robusta muito conservadora.

Devido ao problema de otimização de dois níveis visto na Subseção 5.3.2.1, a estratégia *minimax* consiste em um procedimento de alta complexidade computacional, demandando tempo excessivo para resolução de problemas de otimização. Esta característica muitas vezes o inviabiliza de ser usado. Para torná-lo viável, algumas alternativas podem ser adotadas, como o método WCE apresentado na Seção 8.1.

Vários autores, tais como (STEINER, WEBER e MAGELE, 2004) e (ONG, NAIR e LUM, 2006), mencionam o uso de estimativas do pior caso de incertezas como uma alternativa válida à complexidade imposta pelo problema interno de maximização do problema *minimax*.

O WCEMOEA emprega o método de estimativa do pior caso de incertezas WCE apresentado na Seção 8.1 juntamente com uma técnica de consolidação do pior caso, que agrupa toda a informação da fronteira Pareto-ótima aproximada dos piores casos de incertezas em um único ponto. A técnica de consolidação do pior caso de incertezas é explicada na Subseção 9.1.2.

As soluções geradas pelo WCEMOEA são baseadas nos seguintes requisitos:

1) Devem compor uma fronteira Pareto-ótima robusta no espaço dos objetivos;
2) Devem manter diversidade entre si no espaço dos objetivos.

Os dois requisitos são satisfeitos pelos mecanismos evolucionários de *ranking* das soluções não-dominadas e de manutenção da diversidade das soluções no espaço dos objetivos. Estes mecanismos foram implementados segundo a metodologia do NSGA-II (DEB *et al*., 2002).

O primeiro requisito, entretanto, prevê que a fronteira Pareto-ótima robusta, que é composta pelos piores casos de incertezas, assuma valores tão próximos quanto possível da fronteira Pareto-ótima.

Note que o procedimento de maximização interno gera resultados em $\mathcal{Y}$, que são logo em seguida minimizados. Dessa forma, garante-se o cumprimento do requisito 1, mesmo com a inclusão de incertezas.

A descrição completa do algoritmo encontra-se na Subseção 9.1.3.

9.1.2 Consolidação do Pior Caso de Incertezas

A Seção 8.1 apresentou o método WCE para estimativa do pior caso de incertezas para cada objetivo: $\tilde{f}_{wc_i}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$. Encontrar o pior caso de incertezas de cada objetivo, separadamente, vai contra a natureza multiobjetivo do problema de maximização do pior caso de incertezas. Porém, tratar um problema de maximização multiobjetivo dentro de um problema de minimização multiobjetivo impõe um elevado custo computacional para problemas de elevada dimensão. Os trabalhos de (AVIGAD e BRANKE, 2008) e (MENDES, 2013), por exemplo, fazem uso desta abordagem para problemas de baixa dimensão ($n_v \leq 5$). A escolha de um único ponto, que consolide em

si a informação dos piores casos de incertezas de cada objetivo, torna-se mais interessante do ponto de vista computacional.

Os trabalhos (SOARES, 2008) e (SOARES *et al*., 2009b) propõem o conceito de ponto ideal de maximização $\mathbf{u_{x_0}}^{\mathbf{max}}$ para consolidação do pior caso de incertezas em torno de $\mathbf{x_0}$, seja ele obtido de forma aleatória ou por meio de formas determinísticas via análise intervalar. Este conceito reúne em um único ponto os piores casos de incertezas de cada objetivo, como mostra a equação abaixo:

$$\mathbf{u_{x_0}}^{\mathbf{max}} \equiv \boldsymbol{f_{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) = \begin{bmatrix} f_{wc_1}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) \\ f_{wc_2}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) \\ \vdots \\ f_{wc_{n_f}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}) \end{bmatrix}. \tag{9-1}$$

A função do $\mathbf{u_{x_0}}^{\mathbf{max}}$ e do $\boldsymbol{f_{wc}}$ é exatamente a mesma, porém decidiu-se não adotar a nomenclatura $\mathbf{u_{x_0}}^{\mathbf{max}}$ por ela ter sido utilizada em caixas e subpavimentos intervalares em (SOARES, 2008), o que não acontece nesta tese.

Note que o procedimento anterior pode gerar pontos fora da imagem $\mathcal{Y}$ do problema, ou seja, $\nexists \mathbf{x} : \boldsymbol{f}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = \boldsymbol{f_{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$. De qualquer forma, a consolidação do pior caso de incertezas é útil para nortear o processo de busca das soluções.

A formação de $\boldsymbol{f_{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$ é ilustrada na Figura 9-1. Os possíveis valores intervalares das incertezas são representados em um espaço próprio denominado espaço das incertezas no canto superior esquerdo da Figura 9-1. A região de incerteza $\mathcal{P}$ somada à solução nominal $\mathbf{x_0}$ gera a região $\mathrm{U}(\mathbf{x_0})$ no espaço das variáveis de decisão, que por sua vez gera a imagem $f(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$ no espaço dos objetivos.

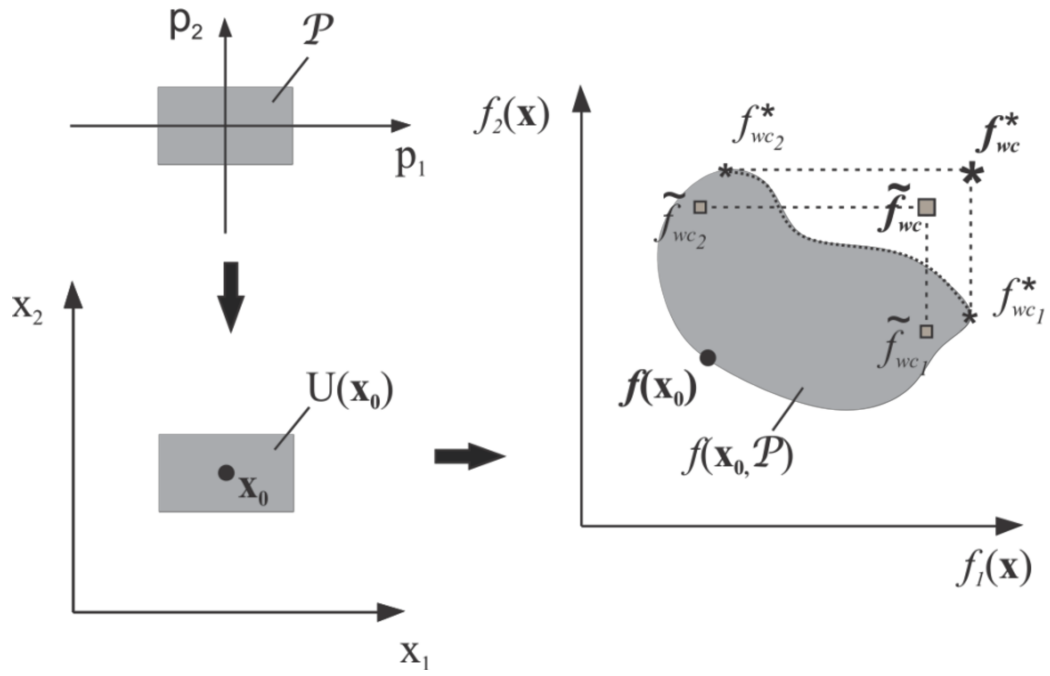


Figura 9-1 - Exemplo de consolidação do pior caso de incertezas real (asterisco) e por meio de estimativas (quadrado).

A Figura 9-1 faz distinção entre o ponto ideal de maximização real $\boldsymbol{f^*_{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$ do ponto ideal de maximização estimado $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$, gerado por meio da estimativa dos piores casos de incertezas na Equação (7-6).

A Figura 9-1 também mostra parte da fronteira da região $f(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$ pontilhada**.** Esta fronteira corresponde à fronteira Pareto-ótima do problema de maximização interna (AVIGAD e BRANKE, 2008), também chamada de fronteira ideal de maximização, $\mathbf{F}_{\mathbf{x_0}}{}^{\mathbf{max}}$, em (MENDES, 2013):

$$\max_{\mathcal{P}} f(\mathbf{x_0}, \mathcal{P}). \tag{9-2}$$

Embora $\mathbf{F}_{\mathbf{x_0}}{}^{\mathbf{max}}$ seja a solução de maior pessimismo, o elevado custo computacional para encontrá-la pode ser um impeditivo para diversas aplicações.

Em contrapartida, os pontos ideais de maximização (real e estimado) são pontos virtuais pessimistas, que não têm variáveis de decisão associadas, mas que dão suporte ao processo de busca da otimização. Portanto, não é aconselhável gastar esforço na etapa de obtenção do pior caso de incertezas real de cada objetivo, basta uma boa estimativa do pior caso de incertezas para que o ponto $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{wc}}(\mathbf{x_0}, \mathcal{P})$ seja gerado para auxiliar a otimização, conforme proposto na Seção 8.1.

9.1.3 Funcionamento do WCEMOEA

O Algoritmo 9-1 mostra quais são os passos realizados pelo WCEMOEA.

Algoritmo 9-1 – Passo-a-passo em alto nível do algoritmo WCEMOEA.

```
1   Gere população inicial aleatória Pp com n indivíduos.
2   Avalie a fitness de pior caso de incertezas de cada indivíduo i de Pp.
3   Faça o ranking dos indivíduos de Pp.
4   Até que o critério de parada seja satisfeito, itere pelas gerações g:
   4.1  Selecione n pais de Pp com base no ranking.
   4.2  Gere n filhos Pf a partir dos pais selecionados.
   4.3  Avalie a fitness de pior caso de incertezas de cada indivíduo i de
        Pf.
   4.4  Junte pais Pp e filhos Pf em Pt.
   4.5  Faça o ranking dos indivíduos de Pt.
   4.6  Faça dos n melhores indivíduos de Pt a nova população Pp de g+1
5   Retorne Pp
```

A meta-heurística do WCEMOEA se baseia no NSGA-II (DEB *et al*., 2002). Trata-se, portanto, de um algoritmo genético multiobjetivo que utiliza o mecanismo do *Fast Nondominated Sorting* para ordenar as soluções não-dominadas em fronteiras e o *Crowded-Comparison* para calcular a distância de multidão, utilizados em conjunto nos passos 3 e 4.5. A pressão seletiva dos pais no passo 4.1 se dá por meio de um torneio binário entre dois indivíduos aleatórios, em que o vencedor é aquele que tem o melhor *ranking*, obtido pelos mecanismos anteriores.

Os operadores de cruzamento e de mutação do WCEMOEA, atuantes no passo 4.2, foram os mesmos utilizados em (DEB *et al*., 2002): *simulated binary crossover* (AGRAWAL e DEB, 1995) para cruzamento, e *polynomial mutation* (DEB e GOYAL, 1996) para mutação. Como é baseado no NSGA-II, o elitismo do WCEMOEA também é garantido em 4.6.

O WCEMOEA diferencia-se do NSGA-II pelo cálculo da *fitness*, utilizada nos passos 2 e 4.3. Como visto na Seção 5.3, as modificações na *fitness* são, na maioria das vezes, as responsáveis por conferir robustez às soluções. A *fitness* do WCEMOEA recebe o valor da consolidação das estimativas de pior caso de incertezas de cada função objetivo, como explicado nas Seções anteriores. A Figura 9-1 mostra no ponto $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{wc}}$ um exemplo do valor recebido pela *fitness*.

O WCEMOEA também lida com problemas restritos, buscando soluções confiáveis que não violam as restrições do problema mesmo na presença de incertezas. Para tal, o método WCE também é aplicado às funções de restrições do problema para encontrar a estimativa dos piores casos de incertezas para as restrições, com um custo adicional de $n_g(2n_p + 2)$ avaliações de funções em relação ao problema sem restrição. O critério de dominância com restrição apresentado em (DEB *et al*., 2002) é então utilizado, em que entre duas soluções inviáveis, seleciona-se aquela cuja soma das violações seja menor; entre uma solução viável e uma inviável, seleciona-se a viável; e entre duas soluções viáveis, seleciona-se aquela com melhor *ranking* segundo o critério de não-dominância.

9.1.4 Complexidade

Considerando um custo constante de avaliação das funções objetivo, c_f, e um custo constante de avaliação das funções de restrições, c_g, o custo total, c_T, do WCEMOEA pode ser expresso da seguinte forma:

$$c_T = n_{gen} n_{pop}[(2 + 2n_p)(n_f c_f + n_g c_g)]. \quad (9\text{-}3)$$

9.1.5 Limitações

A estimativa do pior caso de incertezas feita pelo WCEMOEA baseia-se no cálculo do WCE apresentado na Seção 8.1, que encontra o pior caso real da função caso ela seja monotônica com respeito a todas as variáveis de decisão, ou convexa. Caso contrário, não se tem garantia de que o pior caso estimado seja igual ao pior caso real da função.

9.2 Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm (RHySPEA)

O *Robust Hypercube Space Partitioning Evolutionary Algorithm* (RHySPEA) é um algoritmo evolucionário de otimização robusta que faz uso de informação armazenada dinamicamente em um sistema externo de banco de dados para reaproveitamento em iterações futuras. O mecanismo de escrita e leitura no banco de dados do RHySPEA permite a atualização da métrica de robustez das soluções durante o processo evolutivo, sem a necessidade de reavaliar as funções objetivo para amostras previamente avaliadas.

Faz-se a distinção do RHySPEA em função da métrica de robustez utilizada. Nesta tese ele foi utilizado em conjunto com as métricas MR1 e MR2, descritas na

Subseção 8.2.1. Assim, duas versões do RHySPEA são investigadas: RHySPEA-I, que faz uso de MR1, e RHySPEA-II, que faz uso de MR2.

9.2.1 Introdução

O RHySPEA se baseia no fato de que todos os dados gerados durante o processo de otimização podem ser futuramente reaproveitados para determinação da robustez de uma solução. Sendo assim, dados gerados em um primeiro momento podem se reverter em informação útil no futuro. De fato, um dos principais gargalos relatados no processamento de otimização robusta é seu elevado custo computacional quando comparado com métodos de otimização convencionais (BEYER e SENDHOFF, 2007).

Este procedimento de armazenamento de dados para futura consulta é conhecido na literatura como memória externa ao algoritmo (BRANKE, 1999), e tem sido uma das alternativas para redução do custo computacional em problemas de otimização robusta (JIN e BRANKE, 2005) e dinâmica (YANG e YAO, 2008). Além disso, o trabalho de (SANO e KITA, 2000) o utiliza para acelerar o tempo de processamento por meio da geração e aprimoramento de metamodelos.

O espaço das variáveis é subdividido (particionado) em vários hipercubos. Cada hipercubo corresponde a um espaço delimitado em $\mathbb{R}^{n_v}$, que na prática representa uma caixa intervalar $[\mathbf{x}]$ com limites inferior $\underline{\mathbf{x}}$ e superior $\overline{\mathbf{x}}$:

$$\left[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\right] = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_v} \mid \underline{x_i} \leq x_i \leq \overline{x_i},\ \underline{x_i} \in \mathbb{R}, \overline{x_i} \in \mathbb{R}, i = 1,2,\dots,n_v\right\}. \quad (9\text{-}4)$$

A caixa intervalar $[\mathbf{x}]$ também pode ser definida em função do produto cartesiano de n_v intervalos fechados:

$$\left[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\right] = [x_1] \times [x_2] \times \dots [x_i] \times \dots \times \left[x_{n_v}\right], \quad (9\text{-}5)$$

sendo x_i o i-ésimo intervalo conectado fechado com limite inferior $\underline{x_i}$ e superior $\overline{x_i}$, definido da seguinte forma:

$$\left[\underline{x_i}, \overline{x_i}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x_i} \leq x \leq \overline{x_i},\ \underline{x_i} \in \mathbb{R}, \overline{x_i} \in \mathbb{R}\right\}. \quad (9\text{-}6)$$

Se $\underline{x_i} = \overline{x_i}$, o intervalo é dito degenerado ou pontual na dimensão i.

As operações aritméticas e lógicas realizadas pelo RHySPEA sobre os intervalos e caixas ocorrem de fato com as amostras pertencentes aos intervalos e caixas, e não com os intervalos. Portanto, a análise intervalar não é aplicável ao presente estudo, embora empreste algumas notações e definições de (MOORE, KEARFOOT e CLOUD, 2009).

Todo ponto $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$ que for avaliado durante o processo de otimização, terá seus dados armazenados: funções objetivo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_f}$, restrições $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_g}$, e a variável $\mathbf{x} \in$

$\mathbb{R}^{n_v}$. Mais informações sobre armazenamento de dados são fornecidas na Subseção 9.2.2. A operacionalização do conjunto de dados é explicada na Subseção 9.2.3.

O RHySPEA calcula e atualiza a métrica de robustez baseando-se em amostras e, por isso, requer um número mínimo de amostras em torno da vizinhança de uma solução incerta. A vizinhança de uma solução incerta $\mathbf{x_i}$ é definida por uma caixa de incerteza $[\mathbf{p_i}]$. Porém, em vez de se gerar uma quantidade fixa de amostras para o ponto $\mathbf{x_i}$ por ciclo de otimização, o RHySPEA aproveita os pontos já existentes nas caixas elementares contidas na caixa de incerteza, isto é, $[\mathbf{x}]_\mathbf{k} \subset [\mathbf{p_i}], \forall k$.

As soluções geradas pelo RHySPEA são baseadas nos seguintes requisitos:

1) Devem compor uma fronteira Pareto-ótima robusta no espaço das sensibilidades;
2) Devem manter diversidade entre si no espaço das sensibilidades;
3) Devem pertencer à região de alto desempenho[10].

Os requisitos acima são similares aos descritos para o WCEMOEA, porém, existem duas diferenças fundamentais: a fronteira Pareto-ótima robusta se dá no espaço das sensibilidades pela minimização das métricas MR1 ou MR2, e as soluções devem pertencer a uma região denominada de "alto desempenho" no espaço dos objetivos, dentro da qual qualquer solução é considerada igualmente boa frente às perturbações.

A formulação e o algoritmo que cumpre os requisitos são descritos, respectivamente, na Subseção 9.2.4 e 9.2.5.

9.2.2 Partição do Espaço e Armazenamento de Dados

O reaproveitamento de dados pelo RHySPEA necessita que o espaço de decisão do problema seja particionado para facilitar o armazenamento e consultas futuras às soluções que já tenham sido avaliadas em alguma região do espaço.

Existem várias estratégias na literatura a respeito do particionamento eficiente do espaço, principalmente em se tratando de representações gráficas de imagens 2D e 3D. Destacam-se, por exemplo, alguns métodos com estrutura em árvore para representar o espaço tais como *Binary Space Partitioning* (RADHA *et al*., 1991), *quadtree* e *octree* (KELKAR e GUPTA, 2008), e *k-d tree* (RAM e GRAY, 2013).

[10] Região no espaço dos objetivos dentro da qual se tem interesse que os objetivos estejam.

A partição do espaço proposta nesta tese é feita por meio de sucessivas bisseções, utilizando uma lógica recursiva e binária, similar ao que é feito no *quadtree* e no *octree*. Entretanto, enquanto que *quadtree* e *octree* se subdividem recursivamente para mapear regiões do espaço densamente povoadas por pontos, o esquema da partição proposta nesta tese faz a subdivisão de todo o espaço *a priori*, uma vez que os pontos são gerados dinamicamente durante o processo de otimização. Neste caso, somente as subdivisões que contenham pontos no espaço ocupam memória.

A partição do RHySPEA depende somente de um parâmetro de controle: n_{prof}. Se $n_{prof} = 1$, faz-se a partição da caixa somente uma vez; se $n_{prof} = 2$, repete-se o procedimento de partição nas caixas geradas anteriormente quando $n_{prof} = 1$; se $n_{prof} = 3$ o procedimento de partição é feito também nas caixas geradas por $n_{prof} = 2$; e assim sucessivamente. A partição é recursiva, sendo que o nível de recursividade é controlado pelo valor de n_{prof}. Cada nível de partição subdivide o espaço nos pontos médios de cada dimensão de tal forma que cada caixa $[\mathbf{x}]$ dê origem a 2^{n_v} novas caixas $[\mathbf{x}]'$ no espaço das variáveis.

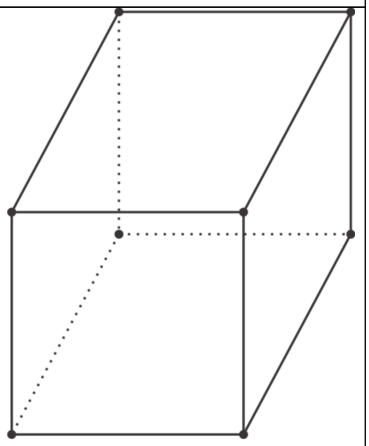
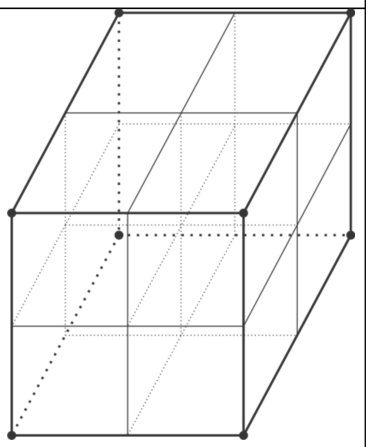
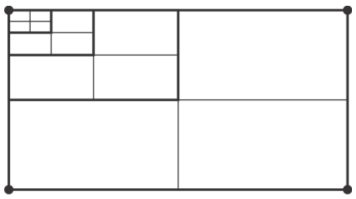
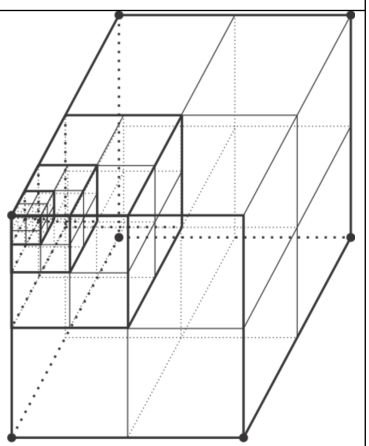
Denomina-se caixa elementar a menor caixa que compõe um espaço particionado, e caixa não-elementar qualquer caixa do espaço que seja maior que a caixa elementar. Sendo assim, é importante ressaltar que o método de partição não permite sobreposição de caixas elementares $[\mathbf{x}]'_i$, fazendo valer as seguintes relações:

$$[\mathbf{x}] = \bigcup_{i} [\mathbf{x}]'_i \,, \quad i = 1,2,\dots,2^{n_v}, \tag{9-7}$$

$$\forall i \forall \mathrm{j}, i \neq j \;:\; [\mathbf{x}]'_i \subset [\mathbf{x}] \wedge [\mathbf{x}]'_j \subset [\mathbf{x}] \;\rightarrow\; [\mathbf{x}]'_i \cap [\mathbf{x}]'_j = \emptyset. \tag{9-8}$$

O Quadro 2 mostra como é a dinâmica de partição do espaço das variáveis em caixas para diferentes valores n_{prof} e n_v. Se $n_{prof} = 0$, a caixa é o próprio domínio $\mathcal{X}$.

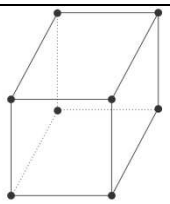
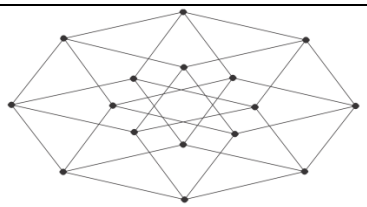
Quadro 2 – Exemplos de partição para diferentes dimensões: $n_v = 1$, $n_v = 2$ e $n_v = 3$, e para diferentes níveis de profundidade de divisão de hipercubos, $n_{prof} = 0$, $n_{prof} = 1$, e $n_{prof} = 4$.

	$n_v = 1$	$n_v = 2$	$n_v = 3$
$n_{prof} = 0$			
$n_{prof} = 1$			
...			
$n_{prof} = 4$ [a]			

[a] Os exemplos de $n_{prof} = 4$ estão sub-representados pois a recursão foi feita apenas em uma caixa para facilitar a visualização. De fato, para $n_v = 1$ tem-se 16 segmentos, para $n_v = 2$ tem-se 256 retângulos e para $n_v = 3$ tem-se 4096 cubos.

O resultado de uma partição é um conjunto de caixas elementares, e cada qual é geometricamente representada por um hiper-retângulo-n_v-*D*. Para $n_v = 1$ tem-se um hiper-retângulo-*1D* (segmento de reta), $n_v = 2$ tem-se um hiper-retângulo-*2D* (retângulo), $n_v = 3$ tem-se um hiper-retângulo-*3D* (paralelepípedo), e assim sucessivamente, conforme mostra o Quadro 3.

Quadro 3 – Formato geométrico das caixas elementares para diferentes dimensões: $n_v = 1$, $n_v = 2$, $n_v = 3$ e $n_v = 4$.

$\boldsymbol{n_v = 1}$	$\boldsymbol{n_v = 2}$	$\boldsymbol{n_v = 3}$	$\boldsymbol{n_v = 4}$
			

Quando as arestas da caixa $[\mathbf{x}]$ têm o mesmo comprimento L em todas as dimensões:

$$\overline{x_i} - \underline{x_i} = L\,, \;\; i = 1,2,\ldots,n_v, \tag{9-9}$$

trata-se de um caso particular de hiper-retângulo: o hipercubo. Para $n_v = 1$ tem-se um hipercubo-*1D* (segmento de reta), $n_v = 2$ tem-se um hipercubo-*2D* (quadrado), $n_v = 3$ tem-se um hipercubo-*3D* (cubo), $n_v = 4$ tem-se um hipercubo-*4D* (*tesseract*), e assim sucessivamente.

Nesta tese adotou-se o termo hipercubo para se referir às partições espaciais, por ser um termo muito mais difundido na literatura.

Com base no exposto, o sistema de armazenamento prevê a criação de $2^{n_v \cdot n^X{}_{prof}}$ caixas elementares (hipercubos) no espaço das variáveis (o índice sobrescrito *X* indica que o parâmetro é aplicável para o espaço das variáveis), cuja finalidade é indexar e armazenar dados. Para tal, é importante que este sistema não imponha um grande *overhead* de tempo durante o processamento da otimização, para que ele não seja um fator a mais de custo computacional.

Se por um lado o tempo de processamento do algoritmo é reduzido por conta do reaproveitamento de dados salvos nos hipercubos, por outro, mais espaço de memória é requerido. Para exemplificar a complexidade em termos de memória no problema de

indexação dos hipercubos, considere a memória gasta pelo Matlab® [11] para instanciar um *array* de *struct* vazio (sem dados) para cada hipercubo do espaço de variáveis, com $n_v = 5$ e ${n^X}_{prof} = 5$. Em uma máquina de 64bits, o *header* do *struct* tem custo fixo de 192Bytes, cada campo vazio do *struct* tem custo fixo de 112Bytes, o *struct* deve ter três campos para armazenar **y**, **g** e **x;** e o número de índices do *array* é igual ao número de hipercubos $n_{box}^X = 2^{25}$. Então, em uma perspectiva conservadora que despreza o gasto de memória para armazenamento das amostras, o gasto total de memória para criar a *struct* de partição do espaço, é:

$$192 + 112 \times 3 \times 2^{25} \text{ Bytes} \cong 10{,}5 \text{ Gigabytes}^{12}. \quad (9\text{-}10)$$

Para $n_v = 8$ e ${n^X}_{prof} = 7$, o gasto total de memória torna-se impeditivo:

$$192 + 112 \times 3 \times 2^{56} \text{ Bytes} \cong 21\ Ex\text{abytes}^{13}. \quad (9\text{-}11)$$

O problema da memória é exponencial tanto no número de variáveis quanto no número de partições. Para contornar este problema foi proposto o sistema de armazenamento de dados da Figura 9-2.

A primeira etapa da Figura 9-2 consiste em encontrar os índices espaciais de cada caixa elementar, que é feito pelo procedimento de partição recursiva do espaço por meio de um índice com n_{prof} posições, cujos valores variam de 1 a 2^{n_v}. Os valores de cada posição são mostrados na Figura 9-3 para valores de $n_v = 1, n_v = 2$ e $n_v = 3$. Estes valores são obtidos para cada uma das n_{prof} posições do índice, sendo que o valor de um índice à direita refere-se à posição do hipercubo indexado à sua esquerda. O 1º valor do índice refere-se à posição do hipercubo [**X**] que delimita o domínio $\mathcal{X}$ do problema. No caso da Figura 9-2, o domínio $\mathcal{X}$ é o próprio espaço de decisão.

[11] O Matlab® (MATHWORKS, 2016) foi o *software* utilizado para implementação e teste dos algoritmos e métodos mencionados nesta tese.

[12] 1 Gigabyte = 10^9 Bytes

[13] 1 Exabyte = 10^{18} Bytes

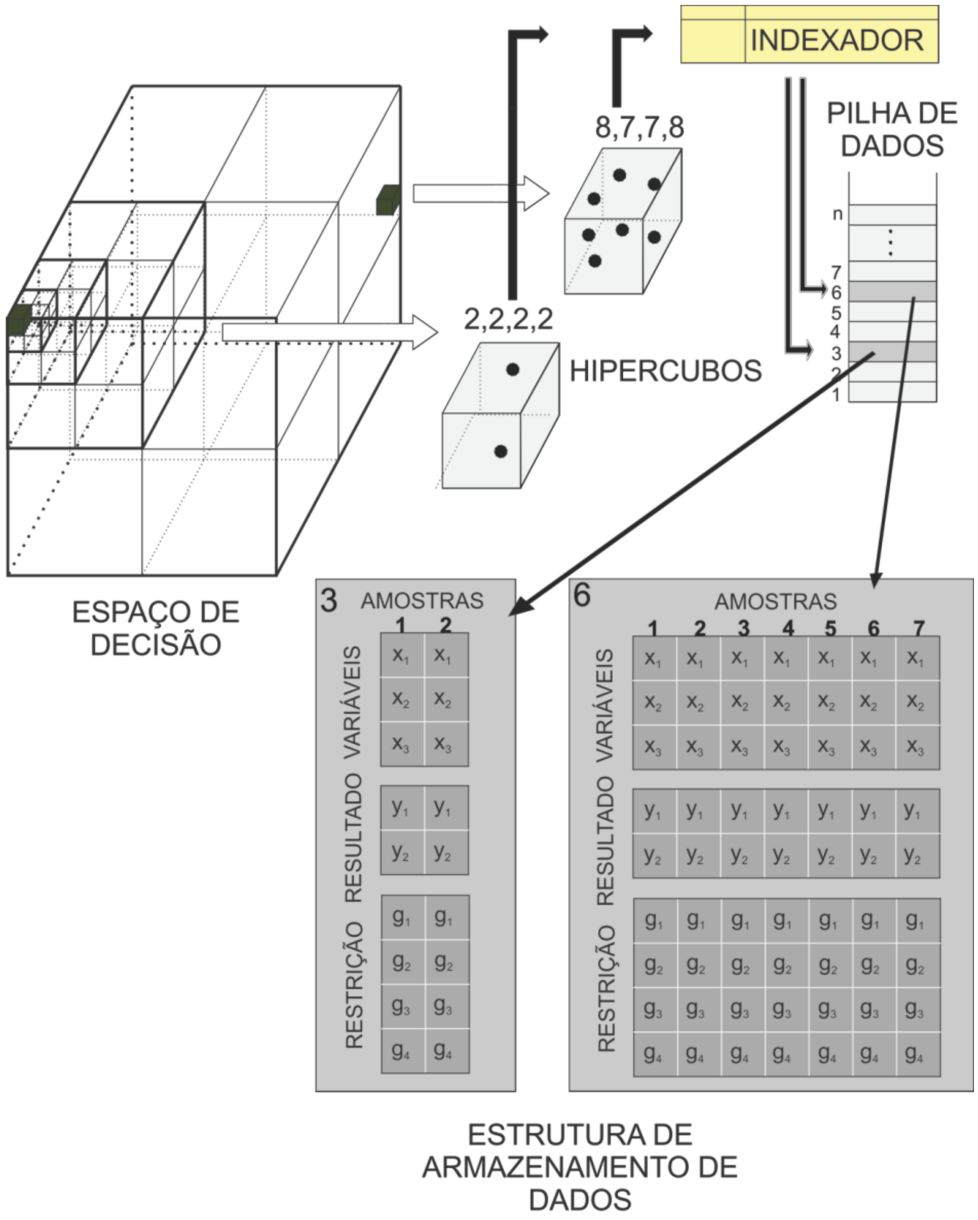


Figura 9-2 - Sistema de armazenamento de dados do RHySPEA. Todos os dados gerados no espaço de decisão são armazenados em suas caixas (hipercubos) correspondentes.

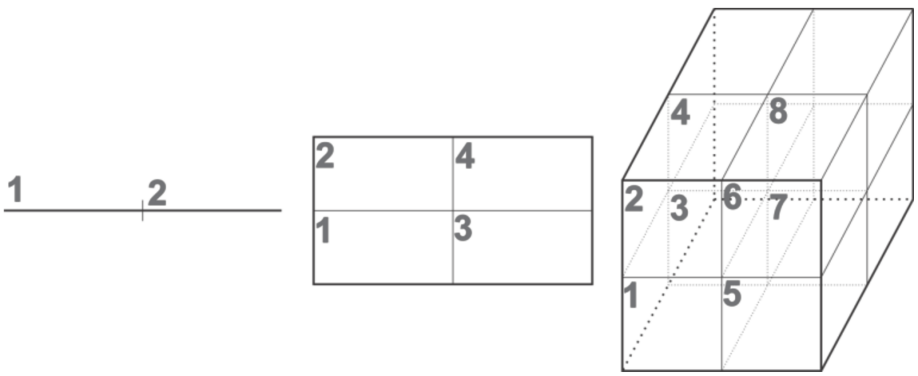


Figura 9-3 - Padrão de indexação dos hipercubos-n_v-D, para n_v=1, n_v=2 e n_v=3.

Os índices dos hipercubos em destaque na Figura 9-2 são: (8,7,7,8) e (2,2,2,2). Estes índices são enviados para o Indexador, que associa os índices dos hipercubos a índices inteiros, distribuídos em uma matriz esparsa com baixo consumo de memória. O Indexador é na verdade uma tabela de dispersão (do inglês, *Hash Table*), cuja inserção e pesquisa de elementos tem complexidade O(1). O índice inteiro de um hipercubo só é criado se ele alguma vez foi consultado durante o processo de particionamento recursivo. Cada índice inteiro emitido pelo Indexador aponta para uma posição da Pilha de Dados, que por sua vez armazena o *struct* no qual são armazenados os dados (**y**, **g** e **x**) de todos os pontos avaliados dentro do referido hipercubo.

O número de *structs* armazenados na Pilha de Dados corresponde ao número de hipercubos consultados durante o processo de otimização. Em se tratando de algoritmos evolucionários, em que poucos pontos são avaliados por geração, sabe-se que poucos hipercubos serão consultados. Para $n_{pop} = 100$ e $n_{gen} = 100$, por exemplo, serão consultados $n_{pop} \times n_{gen} = 10^4$ hipercubos no pior caso, assumindo que não exista mais de um indivíduo por hipercubo. Considerando novamente $n_v = 5$ e $n^X{}_{prof} = 5$, o pior caso consumiria de memória apenas:

$$192 + 112 \times 3 \times 10^4 \text{ Bytes} \cong 3{,}2 \text{ Megabytes.} \quad (9\text{-}12)$$

O sistema de armazenamento de dados descrito deve fazer uso da memória principal da máquina, onde o processador pode endereçar diretamente, pois a utilização de memórias secundárias tornaria o processo de escrita e leitura de dados muito lento. O Matlab® faz uso da memória RAM (*Random Access Memory*) para tal fim. Entretanto, ao fim do processo de otimização, as soluções e amostras geradas podem ser salvas na memória secundária de tal forma que sejam reaproveitadas no início de outra rodada de otimização, sendo carregadas parcial ou integralmente na memória principal para tal fim.

9.2.3 *Framework* de Operações com Caixas

Para lidar com as caixas de dados mencionadas na Subseção 9.2.2, foi necessário o desenvolvimento de um *framework* em Matlab® para manipulá-las ao longo do processo de otimização. Algumas operações são possíveis neste *framework*, entre elas:

- Armazenamento dos dados (**y**, **g** e **x**) de uma amostra **x** em uma caixa elementar [**x**]. Dados repetidos não são armazenados;
- Leitura dos dados (**y**, **g** e **x**) armazenados em uma caixa elementar [**x**];

- União de caixas não-elementares. O resultado da união é um conjunto de caixas elementares $[\mathbf{x}]_k$;
- Interseção de caixas não-elementares. O resultado da interseção é um conjunto de caixas elementares $[\mathbf{x}]_k$;
- Obtenção de caixas elementares contidas em uma caixa não-elementar;
- Geração de ponto aleatório $\mathbf{x_{rand}}$ que pertence a uma caixa específica: $\mathbf{x_{rand}} \in [\mathbf{x}]$;
- Geração de ponto médio $\mathbf{x_{med}}$ de uma caixa específica $[\mathbf{x}]$:

$$\mathbf{x_{med}} = \frac{[\underline{\mathbf{x}}] + [\overline{\mathbf{x}}]}{2}. \tag{9-13}$$

O procedimento de partição recursiva descrito na Subseção 9.2.2 procura discretizar o espaço contínuo em caixas discretas. Naturalmente, isto envolve erros de aproximação nas operações de união: $[\mathbf{a}] \cup [\mathbf{b}]$, e interseção: $[\mathbf{a}] \cap [\mathbf{b}]$, quando as caixas não-elementares $[\mathbf{a}]$ e $[\mathbf{b}]$ não são integralmente compostas por caixas elementares. Considere o caso em que a caixa $[\mathbf{a}]$ não seja integralmente composta por caixas elementares $[\mathbf{x}]_i$:

$$[\mathbf{a}] \cong [\tilde{\mathbf{a}}] = \bigcup_{i} [\mathbf{x}]_i. \tag{9-14}$$

Os erros de aproximação ocorrem nas caixas elementares que se situam na fronteira da caixa $[\tilde{\mathbf{a}}]$, e definem uma região politópica de erro $\Gamma([\mathbf{a}], [\tilde{\mathbf{a}}])$:

$$\Gamma([\mathbf{a}], [\tilde{\mathbf{a}}]) = ([\mathbf{a}] - [\tilde{\mathbf{a}}]) \cup ([\tilde{\mathbf{a}}] - [\mathbf{a}]), \tag{9-15}$$

que equivale a**:**

$$\Gamma([\mathbf{a}], [\tilde{\mathbf{a}}]) = \{\mathbf{a} : (\mathbf{a} \in [\mathbf{a}] \wedge \mathbf{a} \notin [\tilde{\mathbf{a}}]) \vee (\mathbf{a} \notin [\mathbf{a}] \wedge \mathbf{a} \in [\tilde{\mathbf{a}}])\}. \tag{9-16}$$

A Figura 9-4 mostra um exemplo da região $\Gamma([\mathbf{a}], [\tilde{\mathbf{a}}])$.

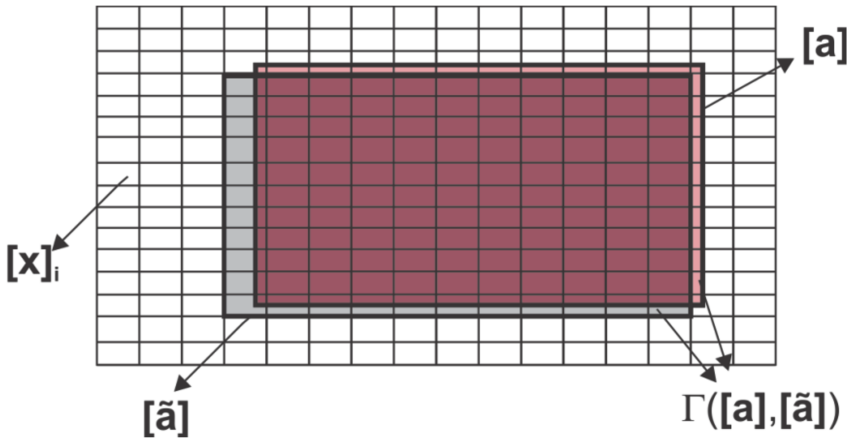


Figura 9-4 – Exemplo de região de erro Γ, definida pela caixa real [**a**] e pela caixa aproximada [$\tilde{\mathbf{a}}$], sendo $[\mathbf{x}]_i$ uma caixa elementar qualquer.

Quanto maior for o tamanho da caixa $[\mathbf{a}]$ em relação à caixa elementar $[\mathbf{x}]$, mais confiável será o resultado das operações, visto que no limite, quando uma caixa elementar $[\mathbf{x}]$ for igual a um ponto, o erro será zero. A equação abaixo mostra o conceito, sendo que $V(\cdot)$ é o operador que mede o volume de caixas e politopos:

$$\frac{V([\mathbf{a}])}{V([\mathbf{x}])} \to \infty \Rightarrow V\big(\Gamma([\mathbf{a}],[\tilde{\mathbf{a}}])\big) \to 0\,. \tag{9-17}$$

9.2.4 Métricas de Robustez do RHySPEA

O RHySPEA-I faz uso de MR1 e o RHySPEA-II faz uso de MR2. Ambas as métricas de robustez foram descritas na Subseção 8.2.1, e foram incorporadas ao *framework*.

Considere um indivíduo $\mathbf{i} \in \{1,2,3,\ldots \mathrm{n_{pop}}\}$ do processo evolutivo, cuja variável é $\mathbf{x_i}$, com valores $\mathbf{y_i}$ para as funções objetivo e $\mathbf{g_i}$ para as restrições. Sabe-se que $\mathbf{x_i} \in [\mathbf{x_i}]$ e que $\mathbf{x_i} \pm \mathbf{p} \in [\mathbf{p_i}]$**,** então a Equação (8-8) de MR1 pode ser reescrita da seguinte forma para o RHySPEA-I:

$$\hat{y}_{m,i} = \frac{1}{|[\mathbf{p_i}]|}\sum_{j\in[\mathbf{p_i}]}\left(\frac{|y_{m,j}-y_{m,i}|}{\sum_{k=1}^{n_v}|x_{k,j}-x_{k,i}|}\right), \quad \begin{matrix} j \neq i \\ m = 1,2,\ldots,n_f \end{matrix}, \tag{9-18}$$

e a Equação (8-9) de MR2 para o RHySPEA-II torna-se:

$$\hat{y}_{m,i} = \max_{j\in[\mathbf{p_i}]}\left(\frac{|y_{m,j}-y_{m,i}|}{\sum_{k=1}^{n_v}|x_{k,j}-x_{k,i}|}\right), \quad \begin{matrix} j \neq i \\ m = 1,2,\ldots,n_f \end{matrix}. \tag{9-19}$$

O cálculo da restrição de desigualdade é feito da seguinte forma:

$$\hat{g}_i = \frac{1}{|[\mathbf{p_i}]|}\sum_{j\in[\mathbf{p_i}]}\sum_{k=1}^{n_g}\max\left[g_{k,j},0\right]. \tag{9-20}$$

Note que qualquer violação da restrição do problema é capturada pela Equação (9-20) se $\hat{g}_i > 0$.

Nas equações acima, $\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{i}$ representa o resultado da função objetivo da sensibilidade $\hat{\boldsymbol{f}}(\cdot)$ do RHySPEA para o indivíduo **i**, enquanto $\hat{g}_i$ representa a média do somatório das violações das restrições do problema para o mesmo indivíduo **i**. A notação com "^" procura diferenciá-los das funções objetivo $\mathbf{y_i}$ e das restrições $\mathbf{g_i}$ originais do problema.

A formulação do problema de otimização torna-se:

$$
\begin{gathered}
\min_{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{f}}(\mathbf{x}, [\mathbf{p}_\mathbf{x}]), \quad [\mathbf{p}_\mathbf{x}] = \mathbf{x} \pm \mathbf{p}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \\
\hat{\boldsymbol{f}}: \ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_v}, \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p} \mapsto \hat{\mathcal{Y}} \subset \mathbb{R}_+^{n_f} \cup \{\mathbf{0}\}, \\
\hat{g}([\mathbf{p}_\mathbf{x}]) = 0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \\
[\mathbf{y}_\mathbf{x}] \subseteq \mathcal{Q} \subset \mathcal{Y} \mid \ \mathbf{y} \in [\mathbf{y}_\mathbf{x}] \ \wedge \ \mathbf{y} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \\
\boldsymbol{f}: \ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_v} \mapsto \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_f},
\end{gathered}
\tag{9-21}
$$

em que:

$\mathbf{x}$: vetor de variáveis de decisão;

$\mathbf{p}$: vetor de incertezas paramétricas incontroláveis;

$[\mathbf{p}_\mathbf{x}]$: caixa de incerteza de $\mathbf{x}$ sob efeito de $\mathbf{p}$;

$\boldsymbol{f}$: vetor de funções objetivo originais;

$\hat{\boldsymbol{f}}$: vetor de funções objetivo da sensibilidade de $\mathbf{x}$;

$\hat{g}$: média do somatório das violações de restrições;

$[\mathbf{y}_\mathbf{x}]$: caixa no espaço dos objetivos;

$\mathcal{Q}$: região de alto desempenho.

A Subseção 9.2.5.1 explica como a região $\mathcal{Q}$ é obtida.

9.2.5 Funcionamento do RHySPEA

O

Algoritmo 9-2 mostra quais são os passos realizados pelo RHySPEA.

Algoritmo 9-2 – Passo-a-passo em alto nível do algoritmo RHySPEA.

```
1   Gere população inicial aleatória Pp com n indivíduos.
2   Avalie a fitness da caixa de incerteza de cada indivíduo i de Pp.
3   Faça o ranking dos indivíduos de Pp com base em suas classes.
4   Até que o critério de parada seja satisfeito, itere pelas gerações g:
   4.1  Selecione n pais de Pp com base no ranking e nas suas classes.
   4.2  Gere n filhos Pf a partir dos pais selecionados.
   4.3  Avalie a fitness da caixa de incerteza de cada indivíduo i de Pf.
   4.4  Reavalie a fitness da caixa de incerteza dos pais afetados.
   4.5  Junte as populações de pais Pp e de filhos Pf em Pt.
   4.6  Faça o ranking dos indivíduos de Pt com base em suas classes.
   4.7  Faça dos n melhores indivíduos de Pt a nova população Pp de g+1.
5   Retorne Pp.
```

Assim como o WCEMOEA, a meta-heurística do RHySPEA também se baseia no NSGA-II (DEB *et al*., 2002). Trata-se, portanto, de um algoritmo genético multiobjetivo que utiliza o mecanismo do *Fast Nondominated Sorting* para ordenar as soluções não-dominadas em fronteiras e o *Crowded-Comparison* para calcular a distância à multidão, ambos os mecanismos são utilizados em conjunto nos passos 3 e 4.6. Porém, nota-se uma diferença: o *ranking* dos indivíduos é baseado nas classes às quais pertencem.

O algoritmo RHySPEA prevê a existência de três tipos de classes para os indivíduos de uma dada população, listadas abaixo em ordem decrescente de relevância.

1) Indivíduos viáveis e de alto desempenho;
2) Indivíduos viáveis e de baixo desempenho;
3) Indivíduos inviáveis.

Sendo assim, pode-se dizer que todos os indivíduos da classe 3 são dominados pelos da classe 2, e todos da classe 2 são dominados pelos da classe 1. A Subseção 9.2.5.1 descreve o procedimento de obtenção desta região de alto desempenho.

A pressão seletiva dos pais no passo 4.1 se dá por meio de um torneio binário entre dois indivíduos aleatórios, em que o vencedor é aquele que está em uma classe dominante e que, em caso de empate, tenha o melhor *ranking*, obtido pelos mecanismos do NSGA-II. Mais informações do critério de dominância estão na Subseção 9.2.5.2.

Os operadores de cruzamento e de mutação do RHySPEA, atuantes no passo 4.2, foram os mesmos utilizados em (DEB *et al*., 2002): *simulated binary crossover* (AGRAWAL e DEB, 1995) para cruzamento, e *polinomial mutation* (DEB e GOYAL, 1996) para mutação. Como é baseado no NSGA-II, o elitismo do RHySPEA também é garantido em 4.7, lembrando que os melhores indivíduos para o RHySPEA são vistos à luz da classe a que pertencem.

O RHySPEA faz o cálculo da *fitness* no espaço das sensibilidades com funções objetivo próprias à robustez, em contraste com as funções objetivo originais. O atendimento à proposta inicial do problema de minimização das funções objetivo originais transforma-se na restrição de que todas as soluções devem estar na região Q de alto desempenho. A avaliação da *fitness* nos passos 2, 4.3 e 4.4 é sempre aplicada à caixa de incerteza $[\mathbf{p_i}]$ definida em torno do indivíduo $\mathbf{i}$, de tal forma que as Equações (9-18) ou (9-19) sejam empregadas.

O passo 4.4 permite a atualização dos valores da *fitness* dos pais afetados. Um pai é considerado afetado quando novos indivíduos são avaliados em sua vizinhança, mais especificamente na sua caixa de incerteza. Portanto, o valor da *fitness* é dinâmico e pode

ser atualizado durante o processo evolutivo à medida que novos filhos e amostras de indivíduos são avaliados. Mais detalhes sobre a avaliação e atualização da *fitness* são fornecidos na Subseção 9.2.5.3.

O tratamento de restrições do RHySPEA é feito a partir da classificação dos indivíduos nas 3 classes possíveis, segregando as soluções da classe 3 (inviáveis) em fronteiras dominadas pelas fronteiras de soluções das classes 1 e 2 (viáveis).

9.2.5.1 Região de Alto Desempenho

O desempenho está diretamente ligado às funções-objetivo originais. Em se tratando de problemas multiobjetivo, o melhor referencial de alto desempenho são os próprios valores da fronteira Pareto-ótima nominal no espaço dos objetivos. O tomador de decisão é o responsável por definir o limiar do desempenho, sendo ele quem determina o que é alto e baixo desempenho. Para tal, é necessário que ele conheça *a priori* qual é a referência de alto desempenho (fronteira Pareto-ótima aproximada no espaço dos objetivos), como indica o item A.1.1 da Figura 6-3.

O RHySPEA permite que o tomador de decisão determine o que é alto e baixo desempenho por meio da definição do parâmetro τ_m, que indica qual a máxima tolerância (em %) aceitável de depreciação de cada indicador de desempenho m. Em processos de otimização convencionais, os indicadores de desempenho são as próprias funções-objetivo do problema, mas para o RHySPEA os indicadores de desempenho são modelados como uma restrição adicional ao problema, tendo característica própria e que não afeta a condição de viabilidade da solução. Esta nova restrição define uma região Q, cujas imagens em seu interior se referem a soluções de alto desempenho; imagens que residem fora de Q referem-se a soluções de baixo desempenho.

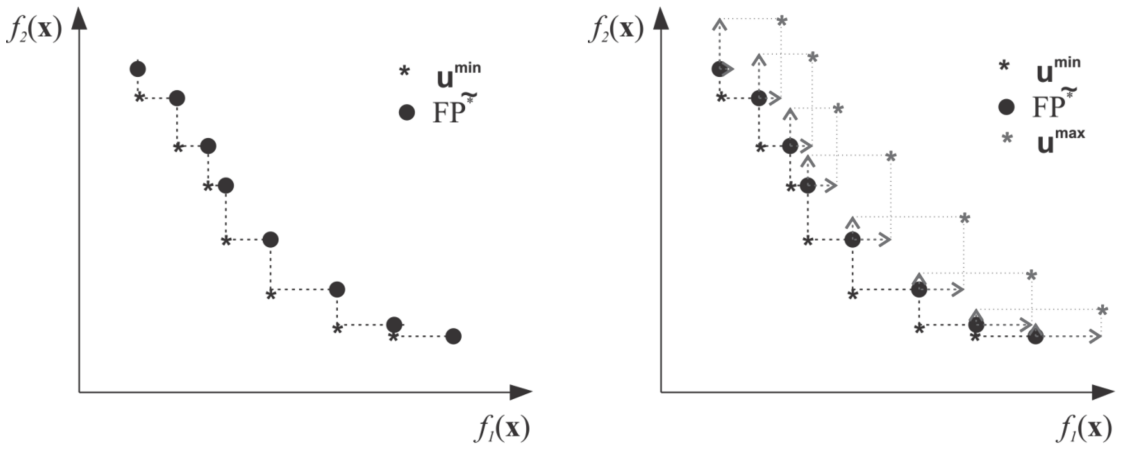
A partir da definição da máxima tolerância aceitável de depreciação de cada indicador de desempenho, τ_m, feita pelo tomador de decisão, cria-se uma região Q no espaço dos objetivos dentro da qual estarão as imagens das soluções de alto desempenho. Consequentemente, as imagens fora desta região serão classificadas como soluções de baixo desempenho.

O procedimento de obtenção da região de alto desempenho é descrito no Algoritmo 9-3, e assume que o tomador de decisão conheça a $\widetilde{FP}^*$. O índice $\mathbf{i} \in \{1,2,3,\dots,n_{pop}\}$ refere-se ao i-ésimo indivíduo da população, e o índice $\mathbf{m} \in \{1,2,\dots,n_f\}$ refere-se ao m-ésimo objetivo.

Algoritmo 9-3 – Passo-a-passo do algoritmo para delimitar a região Q de alto desempenho.

1	Obtenha os pontos ideais de minimização $\mathbf{u}^{\min}$ para as combinações de pontos de $\widetilde{FP}^*$ tomados n_f a n_f, isto é, $C_{\lvert\widetilde{FP}^*\rvert,n_f}$.
2	Encontre os $\mathbf{u_i}^{\min}$ não-dominados para maximização e seus respectivos pontos criadores: $\mathbf{y}_{1,i}, \mathbf{y}_{2,i}, \ldots, \mathbf{y}_{n_f,i}$.
3	Expanda os n_f pontos criadores de $\mathbf{u_i}^{\min}$ considerando a "máxima tolerância aceitável" de depreciação para cada objetivo, τ_m.
4	Obtenha os pontos ideais de maximização $\mathbf{u_i}^{\max}$ das expansões geradas anteriormente para cada $\mathbf{u_i}^{\min}$.
5	Crie uma caixa $[\mathbf{f_i}]$ com limites inferiores $\mathbf{u_i}^{\min}$ e superiores $\mathbf{u_i}^{\max}$.
6	Retorne $Q = \bigcup_i [\mathbf{f_i}]$.

O passo 2 do Algoritmo 9-3 é ilustrado pela Figura 9-5(a). Os passos 3 e 4 pela Figura 9-5(b) e os passos 5 e 6 pela Figura 9-6.



(a) (b)

Figura 9-5 - (a) Obtenção dos pontos ideais de minimização não-dominados frente à maximização, e (b) obtenção dos pontos ideais de maximização considerando a máxima tolerância aceitável dos objetivos.

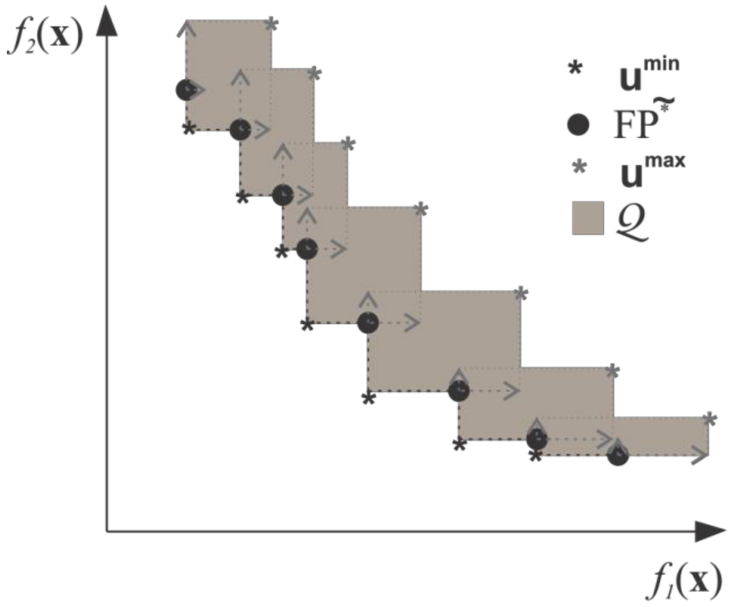


Figura 9-6 - Exemplo de delimitação da região $\mathcal{Q}$ de alto desempenho por meio da união de diferentes caixas.

O valor do parâmetro τ_m é constante, e define um percentual máximo aceitável de variação para cada objetivo m individualmente. Neste caso, quanto maior o valor da função objetivo, maior será a variação aceitável, como mostra a Figura 9-6, onde valores crescentes de $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ resultam em maiores valores aceitáveis de variação.

Note que a região $\mathcal{Q}$ é chamada de "região de alto desempenho" em função das soluções nominais sem incertezas cujas imagens estão contidas na região. Dessa forma, não há garantia de que as imagens destas mesmas soluções, quando perturbadas, fiquem dentro de $\mathcal{Q}$.

Como a região $\mathcal{Q}$ é gerada a partir da fronteira Pareto-ótima nominal aproximada, $\widetilde{FP}^*$, é importante que esta seja gerada repetidas vezes ($n_{rep} \geq 3$) para melhorar a estimativa. Em função da natureza da $\widetilde{FP}^*$, a região $\mathcal{Q}$ pode assumir diferentes formatos como, por exemplo, ser composta por caixas não conectadas, quando a $\widetilde{FP}^*$ é composta por pontos afastados entre si e o parâmetro τ_m tem valor pequeno.

A principal vantagem da forma programática de geração da região $\mathcal{Q}$ apresentada no Algoritmo 9-3 recai no fato de o DM ter que definir somente o valor da tolerância τ_m para cada objetivo, sem que ele saiba *a priori* as regiões de interesse no espaço dos objetivos. Entretanto, se o DM tiver *a priori* preferência por alguma região dentro da qual os objetivos estejam, o algoritmo faz dela a própria região $\mathcal{Q}$.

9.2.5.2 Critério de Dominância

Como mencionado no início da Subseção 9.2.5, os indivíduos do RHySPEA podem pertencer a 3 classes. Sendo assim, o critério de dominância se dá em dois níveis: dominância entre classes e dominância intraclasse. A dominância de um indivíduo **i** sobre um indivíduo **j** ocorre se pelo menos uma das condições listadas abaixo for satisfeita:

- O indivíduo **i** pertence à classe 2 e o indivíduo **j** pertence à classe 3;
- O indivíduo **i** pertence à classe 1 e o indivíduo **j** pertence à classe 2 ou 3;
- Os indivíduos **i** e **j** pertencem à classe 3, e o indivíduo **i** viola as restrições do problema em menor grau segundo a Equação (9-20);
- Os indivíduos **i** e **j** pertencem à classe 2, e o indivíduo **i** está mais próximo da região $\mathcal{Q}$ de alto desempenho;
- Os indivíduos **i** e **j** pertencem à classe 1, e o indivíduo **i** domina o indivíduo **j** no espaço das sensibilidades (segundo a Equação (9-18) ou Equação (9-19)).

As duas primeiras condições referem-se à dominância entre classes, e as três últimas à dominância intraclasses. O ordenamento dos indivíduos em fronteiras segue a lógica descrita acima, tendo sido utilizado o critério de distância de multidão para desempate de indivíduos situados na mesma fronteira Pareto.

A proximidade à região $\mathcal{Q}$ de alto desempenho, caso os indivíduos sejam da classe 2, é medida pela menor distância Euclidiana do indivíduo em relação ao ponto médio das caixas [$\mathbf{f_i}$] do Algoritmo 9-3.

Note que estes critérios de dominância incorporam preferências do tomador de decisão quanto às soluções. Por exemplo, é preferível uma solução viável a uma inviável; uma dentro da região $\mathcal{Q}$ de alto desempenho a uma fora; uma pouco sensível às perturbações a uma muito sensível. A determinação da região $\mathcal{Q}$ também depende das preferências do DM ao escolher os parâmetros τ_m da máxima tolerância aceitável por objetivo.

Caso o DM admita tolerâncias muito baixas para τ_m, gerando uma região $\mathcal{Q}$ muito estreita, a fronteira Pareto-ótima robusta pode ficar parcial ou totalmente de fora. Neste caso, serão buscadas as soluções mais robustas dentro de $\mathcal{Q}$ que, quando perturbadas, podem ter resultados piores que as soluções fora de $\mathcal{Q}$. O contrário também não é

desejável, visto que uma tolerância muito relaxada descarta a importância dos objetivos originais do problema.

9.2.5.3 Avaliação da Solução

O procedimento de avaliação da solução (indivíduo da população) é apresentado no Algoritmo 9-4.

Algoritmo 9-4 – Passo-a-passo do procedimento de avaliação da *fitness* do RHySPEA

```
1   Para cada indivíduo i da população P, faça:
   1.1  Avalie as respostas y_i e as restrições g_i do indivíduo i.
   1.2  Armazene y_i e g_i na caixa [x] | x_i ∈ [x].
   1.3  Obtenha a caixa [y] | y_i ∈ [y].
   1.4  Encontre a caixa de incerteza [p_i] que envolve o indivíduo i.
   1.5  Encontre todas as k caixas [x]_k | [x]_k ⊆ [p_i].
   1.6  Some o número de indivíduos arquivados em [x]_k ∀k.
   1.7  Se soma < s_min (amostragem mínima), faça:
      1.7.1  Obtenha novo indivíduo j dentro de [p_i].
      1.7.2  Avalie as respostas y_j e as restrições g_j de j.
      1.7.3  Armazene y_j e g_j na caixa [x] | x_i ∈ [x].
      1.7.4  Atualize a soma.
   1.8  Avalie fitness ŷ_i e restrição ĝ_i da caixa [p_i] para o indivíduo i.
2   Retorne y_i, g_i, ŷ_i, ĝ_i, [y].
```

O passo 1.1 é similar ao que é feito no MOEA convencional: avaliar as respostas e as restrições do indivíduo, segundo as funções objetivo e de restrições do problema. No passo 1.2, os dados gerados da avaliação do indivíduo **i** são armazenados na caixa que o contém no espaço das variáveis de decisão.

O passo 1.3 identifica a caixa no espaço dos objetivos que contém o vetor resposta do indivíduo. Esta caixa pode estar situada em diferentes locais do espaço em relação à região de alto desempenho $\mathcal{Q}$: completamente dentro, completamente fora ou parcialmente dentro, quando estiver na borda de $\mathcal{Q}$. Se a caixa estiver completamente fora, seu posicionamento deve ser conhecido para que seja possível calcular sua distância em relação à $\mathcal{Q}$, o que impacta nos critérios de dominância da Subseção 9.2.5.2.

Cada indivíduo **i** define no passo 1.4 uma caixa de incerteza em seu entorno segunda a equação:

$$[\mathbf{p_i}] = \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_v} \ : \ \mathbf{x_i} + \underline{\mathbf{p}} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \mathbf{x_i} + \overline{\mathbf{p}}, \mathbf{p} \in \mathcal{P}\right\}. \quad (9\text{-}22)$$

Nota-se a semelhança entre a definição de $[\mathbf{p_i}]$ com a definição de $U(\mathbf{x_0})$ na Subseção 8.1. De fato, são duas representações distintas: caixa de incerteza e a região incerta, para a mesma entidade matemática.

A caixa de incerteza $[\mathbf{p_i}]$ é a união de várias caixas elementares, como mostra o passo 1.5. Em seguida, o passo 1.6 obtém o número total de amostras de indivíduos armazenadas nestas caixas elementares que compõem a caixa de incerteza. Este total de amostras deve ser maior ou igual a um número mínimo de amostras $\mathbf{s_{min}}$, caso contrário, o passo 1.7 estabelece um *loop* onde são geradas novas amostras de indivíduos dentro de $[\mathbf{p_i}]$. A geração de novas amostras ocorre nas caixas elementares com menor número de amostras, a fim de cobrir o espaço de incerteza de forma mais homogênea.

O último passo, 1.8, calcula a *fitness* a partir das funções objetivo do espaço das sensibilidades: Equação (9-18) ou Equação (9-19), e também a restrição segundo a Equação (9-20).

Durante o processo evolutivo do algoritmo, ocorre maior concentração de indivíduos em regiões promissoras do espaço de decisão. Sendo assim, a própria convergência do algoritmo favorece o "refinamento" da *fitness* dos indivíduos, lembrando que ela é recalculada para cada indivíduo toda vez que uma nova amostra é armazenada em caixas elementares contidas em sua caixa de incerteza (passo 4.4 do

Algoritmo 9-2). Este "refinamento" favorece a obtenção de resultados mais confiáveis por parte da *fitness*, haja vista que a métrica é uma heurística.

9.2.6 Parâmetros do RHySPEA

Os seguintes parâmetros devem ser definidos para o RHySPEA para que seja feito o particionamento do espaço por caixas intervalares:

$n^X{}_{prof}$: índice de "profundidade" de partição de hipercubos no espaço das variáveis. Mede quantas vezes o domínio é bipartido em cada uma das n_v dimensões;

$n^Y{}_{prof}$: índice de "profundidade" de partição de hipercubos no espaço dos objetivos. Mede quantas vezes o domínio é bipartido em cada uma das n_f dimensões;

n_{box}^{X} : número de caixas no espaço das variáveis. $n_{box}^{X} = 2^{n_v \cdot n^X{}_{prof}}$;

n_{box}^{Y} : número de caixas no espaço dos objetivos. $n_{box}^{Y} = 2^{n_f \cdot n^Y{}_{prof}}$;

τ_m : máxima tolerância (em %) aceitável de depreciação do m-ésimo objetivo;

s_{min} : número mínimo de amostras para cada caixa de incertezas.

Além dos parâmetros acima, o algoritmo também depende dos parâmetros clássicos de um MOEA: n_{pop}, n_{gen}, e dos parâmetros de controle de mutação e cruzamento do NSGA-II.

A partição no espaço das variáveis geralmente não se dá somente na caixa definida pelo domínio do problema $\mathcal{X} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Ela ocorre em um domínio estendido que abrange os efeitos das incertezas. Considerando $\mathcal{P}$ o domínio das incertezas, o domínio estendido no espaço das variáveis define a seguinte caixa:

$$[\tilde{\mathbf{X}}] = \left\{ \begin{matrix} \tilde{\mathbf{x}} \ : \ min\left[\underline{x_i}, \underline{x_i} + \underline{p_i}\right] \leq \tilde{x}_i \leq \max[\overline{x_i}, \overline{x_i} + \overline{p_i}], \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathbf{p} \in \mathcal{P} \end{matrix} \right\}. \tag{9-23}$$

Tanto para o espaço dos objetivos quanto para o espaço das variáveis, as seguintes relações procedem:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}] &= \bigcup_{i} [\mathbf{y}]_i, \quad i = 1,2,\dots,n_{box}^{Y}, \\ [\tilde{\mathbf{X}}] &= \bigcup_{i} [\tilde{\mathbf{x}}]_i, \quad i = 1,2,\dots,n_{box}^{\tilde{X}}. \end{aligned} \tag{9-24}$$

Por meio dos parâmetros definidos acima, é possível obter a resolução das caixas unitárias:

$$\begin{aligned} r_{[\mathbf{y}]} &= \frac{\overline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{Y}}}{2^{n^Y{}_{prof}}}, \\ r_{[\tilde{\mathbf{x}}]} &= \frac{\overline{\tilde{\mathbf{X}}} - \underline{\tilde{\mathbf{X}}}}{2^{n^X{}_{prof}}}. \end{aligned} \tag{9-25}$$

9.2.7 Complexidade

Considerando um custo constante de avaliação das funções objetivo, c_f, e um custo constante de avaliação das funções de restrições, c_g, o custo total para se avaliar uma caixa de incerteza vazia, c_T, é:

$$c_T = n_{gen} n_{pop} \left[s_{min} \left(n_f c_f + n_g c_g \right) + c_{read} + c_{write} \right]. \tag{9-26}$$

O termo c_{read} refere-se ao custo de se localizar e acessar todos os pontos contidos na caixa de incerteza, enquanto que o termo c_{write} refere-se ao custo de se armazenar os

novos dados resultantes da *fitness* e das restrições avaliadas. Estes custos dependem dos valores $n^X{}_{prof}$ e $n^Y{}_{prof}$ e depende da implementação e estrutura de dados utilizada. A partir do momento que o número de amostras dentro da caixa de incerteza superar o valor s_{min}, basta acessá-las para avaliar a *fitness* e as restrições da caixa de incerteza. Dado que a reavaliação das amostras é desnecessária, pois os valores estão disponíveis, pode-se aproximar $c_f \approx c_g \approx 0$, e o custo c_T restringe-se ao *overhead* de leitura e escrita de dados para cada indivíduo da população.

9.2.8 Limitações

Quanto maior o número de caixas no espaço das variáveis de decisão, n_{box}^X, e no espaço dos objetivos, n_{box}^Y, mais preciso será o RHySPEA no cálculo das métricas de robustez. Porém, quanto maior o número de caixas, maior será o custo adicional de *overhead* do algoritmo para leitura e escrita de dados. Assim, o particionamento dos espaços por meio de caixas intervalares indexadas pode ser impraticável em termos de memória para problemas de elevada dimensão (variáveis ou objetivos). Supondo um problema com $n_v = 10$ e que exija uma partição espacial do espaço das variáveis de decisão com índice de profundidade $n^X{}_{prof} = 5$, o número de caixas criadas seria $n_{box}^X = 2^{50}$. Neste caso, mecanismos mais eficientes e robustos de indexação de caixas e armazenamento de dados deveriam ser utilizados como, por exemplo, o uso de árvores de partição *quadtree* (KELKAR e GUPTA, 2008).

9.3 Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor (MDEA-RF)

O *Minimum Deviation Evolutionary Algorithm based on Robustness Factor* (MDEA-RF) é um método que faz uso de algoritmo evolucionário de otimização robusta junto a um *framework* interativo que conta com a participação do tomador de decisão. Este método é interativo e flexível, o que permite que o tomador de decisão entenda e participe ativamente do processo de otimização robusta.

O método faz uso da métrica MR3 descrita na Subseção 8.2.2.

9.3.1 Introdução

Como visto na Seção 6.2, o processo de otimização robusta depende das preferências do tomador de decisão. O MDEA-RF tem seu funcionamento baseado em um *framework*

interativo proposto em (CHAUDHURI e DEB, 2010), porém com foco somente para otimização robusta. A interação do DM com o *framework* é detalhada na Subseção 9.3.2

O *framework* permite que o tomador de decisão participe do processo de otimização robusta sendo capaz de escolher o grau de robustez associado a cada objetivo separadamente. A preferência do tomador de decisão é traduzida individualmente para cada objetivo por meio da escolha de um fator de ponderação entre o objetivo original do problema e a métrica de robustez MR3. A este fator de ponderação dá-se o nome de fator de robustez (λ).

O fator de robustez varia entre 0 e 1, podendo ser escolhido *a priori* ou durante o processo de otimização. As soluções obtidas com $\lambda = 0$ são $\tilde{P}^*$, que desprezam a métrica de robustez, enquanto que as soluções obtidas com $\lambda = 1$ são soluções Pareto-ótimas aproximadas puramente robustas, que desprezam os objetivos originais do problema. Ou seja, a otimização fazendo $\lambda = 1$ corresponde a otimizar apenas as métricas de robustez. Soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas encontradas com $0 < \lambda < 1$ oferecem um compromisso entre desempenho e robustez que deve ser julgado pelo DM. Caso a solução não satisfaça os requisitos do DM, ele pode escolher outro valor de λ em um processo iterativo.

As soluções geradas pelo MDEA-RF são baseadas nos seguintes requisitos:

1) Devem compor uma fronteira Pareto-ótima robusta no espaço dos macro-objetivos;

2) Devem manter diversidade entre si no espaço dos macro-objetivos.

Note que os requisitos são praticamente os mesmos estabelecidos no WCEMOEA e no RHySPEA, e os mesmos de qualquer MOEA. A diferença se dá no espaço em que a relação de não-dominância entre as soluções ocorre, pois a fronteira Pareto-ótima robusta do WCEMOEA é formada no espaço dos objetivos, a do RHySPEA é formada no espaço das sensibilidades, enquanto que a do MDEA-RF é formada no espaço dos macro-objetivos definido pela *fitness* que pondera os objetivos originais do problema com a métrica de robustez.

O macro-objetivo a ser minimizado pelo MDEA-RF está diretamente relacionado ao valor do λ. Informações sobre a escolha de λ e como ele modifica a *fitness* do problema são fornecidas na Subseção 9.3.3. A descrição completa do algoritmo e detalhes de implementação são fornecidos na Subseção 9.3.4.

9.3.2 *Framework* Interativo

Dos algoritmos apresentados nesta tese, o MDEA-RF é o método que tem mais interação com o tomador de decisão segundo o *framework* apresentando na Seção 6.2, pois ele tem seu funcionamento baseado em um *framework* interativo. Este *framework* é flexível no sentido de que o DM pode escolher diferentes métricas de robustez para resolver o problema de otimização robusta, além de poder visualizar o efeito de suas decisões em cada etapa do processo. No caso específico do MDEA-RF, a métrica utilizada é a MR3, apresentada na Seção 8.2.2.

O fluxo do MDEA-RF é apresentado na Figura 9-7, em que setas de entrada representam informações fornecidas pelo DM. A linha tracejada separa o *framework* em duas partes, sendo que o lado esquerdo representa o espaço dos objetivos e o lado direito o espaço das sensibilidades.

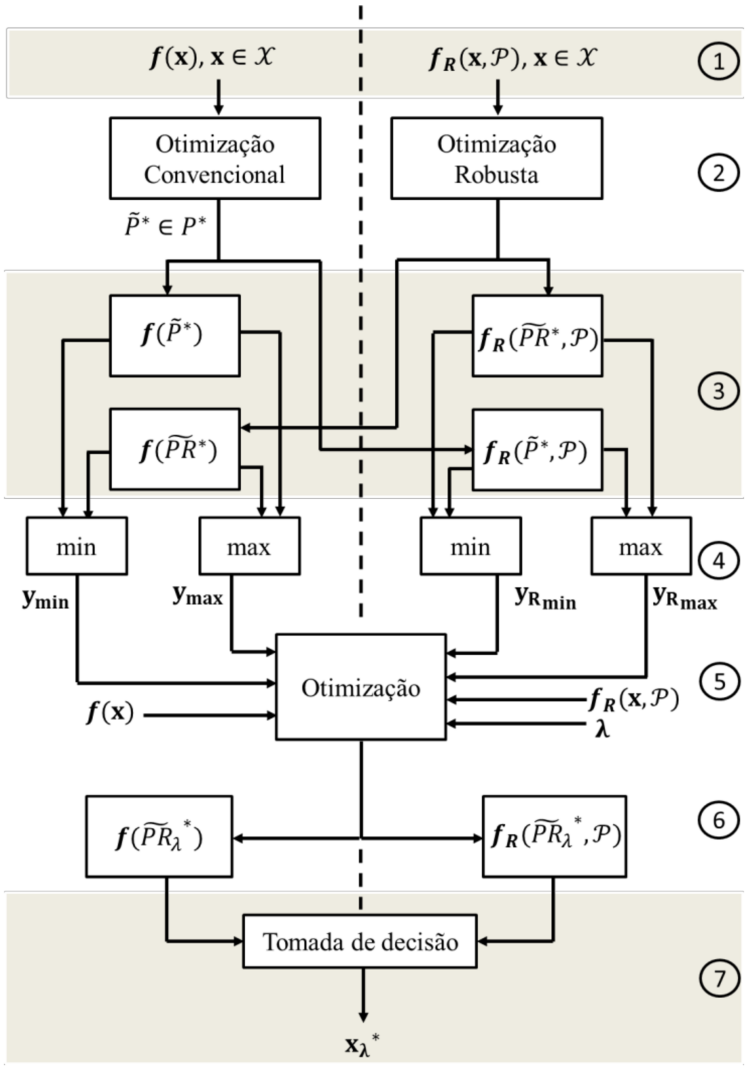


Figura 9-7 – Diagrama de funcionamento do MDEA-RF.

A Figura 9-7 apresenta o processo de otimização robusta para o MDEA-RF, no qual o tomador de decisão tem participação ativa em vários momentos. Os itens numerados são descritos a seguir:

1) Definição da função objetivo $\boldsymbol{f(x)}$ e da métrica de robustez $\boldsymbol{f_R(x)}$. O tomador de decisão deve definir a métrica de robustez que melhor satisfaça seus critérios de robustez, o que corresponde ao item B.2.1 da Figura 6-3. O DM também deve informar *a priori* quais os intervalos de incertezas esperados em $\mathcal{P}$.
2) Executa a otimização convencional e robusta em paralelo, a fim de se obter $\tilde{P}^*$ e $\widetilde{PR}^*$, respectivamente, como mencionado no item A.1.1 da Figura 6-3.
3) Faz-se um teste cruzado com os resultados obtidos na etapa anterior, de tal forma que o DM visualize o efeito de soluções puramente robustas no espaço dos objetivos, e de soluções puramente ótimas no espaço das sensibilidades. Esta etapa pode auxiliar o DM na escolha de um fator de robustez adequado ao problema que será utilizado na etapa 5.
4) Os valores mínimos e máximos das funções calculadas na etapa 3 são armazenados para que a *fitness* seja normalizada na etapa 5. Note que o *trade-off* entre desempenho e robustez pode não existir e, consequentemente, $\min_x f(x) \neq \max_x f_R(x)$ e $\max_x f(x) \neq \min_x f_R(x)$. Assim, esta etapa procura garantir que a solução ótima robusta produza valores entre $[\boldsymbol{y_{min}}, \boldsymbol{y_{max}}]$ e $[\boldsymbol{y_{R_{min}}}, \boldsymbol{y_{R_{max}}}]$.
5) Com base nos limites para normalização dos objetivos e da métrica de robustez, o tomador de decisão escolhe um fator de robustez $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfaça sua preferência sobre a ponderação dos objetivos com suas respectivas medidas de robustez. Em seguida, a otimização robusta é processada utilizando a métrica.
6) A solução $\widetilde{PR}_{\lambda}^{*}$, obtida na etapa 5 é avaliada tanto no espaço dos objetivos quanto no espaço das sensibilidades. A visualização pode ser feita com os valores normalizados ou não, a depender do interesse do tomador de decisão. Se os resultados não satisfizerem o tomador de decisão, um processo iterativo se inicia, escolhendo-se um novo fator de robustez na Etapa 5. Este processo corresponde ao item A.3.1 da Figura 6-3.
7) Por fim, o tomador de decisão escolhe a solução robusta que mais lhe agrade, seja usando sua própria experiência ou alguma ferramenta de auxílio à tomada de decisão.

O *framework* apresentado na Figura 9-7 foi desenhado para conferir grande flexibilidade ao tomador de decisão, não somente na escolha do fator de robustez, mas também no uso de diferentes métricas de robustez no item 1, e no uso de diferentes algoritmos nos itens 2 e 5 para realizar a otimização.

Se o tomador de decisão conhecer *a priori* os limites de variação das funções objetivo e das métricas de robustez associadas, ele pode suprimir os itens 2, 3 e 4 do *framework*, com o objetivo de reduzir o *overhead* da execução tornando-a mais rápida. Caso contrário, os itens 2, 3 e 4 são etapas necessárias para ajuste dos fatores de normalização. De toda forma, é recomendável que o DM visualize os resultados do item 2 e adquira mais conhecimento sobre o problema em questão.

9.3.3 A *Fitness* e o Fator de Robustez λ

A ideia do MDEA-RF reside na possibilidade do tomador de decisão controlar por meio do fator de robustez λ sua vontade de obter uma solução mais ou menos robusta. Baixos valores de λ implicam em soluções de baixa robustez, e altos valores de λ implicam em soluções de alta robustez. Para a escolha do λ é recomendável que o tomador de decisão conheça as soluções Pareto-ótimas não-robustas, $\tilde{P}^*$, e as soluções Pareto-ótimas aproximadas puramente robustas tanto no espaço dos objetivos quanto no espaço das sensibilidades, como indica o item 3 do *framework* interativo da Figura 9-7.

O fator de robustez funciona como um fator de ponderação estabelecendo a importância relativa das funções objetivo normalizadas, $\boldsymbol{f}'(\mathbf{x})$, frente às suas respectivas métricas de robustez normalizadas, $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{R}}(\mathbf{x})$, que no caso específico do MDEA-RF é a métrica MR3, detalhada na Subseção 8.2.2. Assim, a formulação genérica da *fitness* a ser minimizada fica sendo:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \ \boldsymbol{fitness}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}), \ \ \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{\lambda} \in [0,1]^{n_f}, \\ &\boldsymbol{fitness}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = ([\mathrm{I}] - [\,\lambda\,'])\boldsymbol{f}'(\mathbf{x}) + [\,\lambda\,']\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{R}}(\mathbf{x}) \\ &\boldsymbol{f}: \ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_v} \mapsto \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_f}, \\ &\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{R}}: \ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_v} \mapsto \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{n_f}, \end{aligned} \tag{9-27}$$

em que:

$\boldsymbol{fitness}$: vetor de *fitness*;

$\mathbf{x}$: vetor de variáveis de decisão;

$\boldsymbol{\lambda}$: fator de robustez em forma vetorial $\boldsymbol{\lambda} = \left\{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots \ \lambda_i, \ldots, \lambda_{n_f} \right\}$;

[I]: matriz identidade;

$[\lambda']$: matriz diagonal com elementos $\lambda'_{ii} = \lambda_i, \ \forall i$.

Da formulação acima nota-se que o fator de robustez pode assumir diferentes valores entre 0 e 1 para os diferentes pares de objetivos e métricas de robustez, de tal forma que o tomador de decisão priorize a robustez de alguns objetivos frente a outros.

A normalização das funções objetivo e das métricas de robustez, além de ser necessária para o correto funcionamento do MDEA-RF, também é útil para analisar e comparar diferentes métricas de robustez aplicadas ao problema.

Então, o fator de robustez deve ser interpretado como um peso que influencia o quão robusta uma solução será comparada às demais que foram geradas pelo mesmo procedimento, porém com diferentes valores de λ. É importante destacar que o incremento do fator de robustez não garante um aumento de robustez da solução, todavia garante que a nova solução será tão robusta quanto a solução anterior de menor valor de λ.

9.3.4 Funcionamento do MDEA-RF

O

Algoritmo 9-5 mostra quais são os passos realizados pelo MDEA-RF.

Algoritmo 9-5 – Passo-a-passo em alto nível do algoritmo MDEA-RF.

```
1   Gere população inicial aleatória Pp com n indivíduos.
2   Avalie a fitness de cada indivíduo i de Pp utilizando o fator de
    robustez fornecido e normalizando os objetivos e a métrica de robustez.
3   Faça o ranking dos indivíduos de Pp.
4   Até que o critério de parada seja satisfeito, itere pelas gerações g:
   4.1  Selecione n pais de Pp com base no ranking.
   4.2  Gere n filhos Pf a partir dos pais selecionados.
   4.3  Avalie a fitness de cada indivíduo i de Pf utilizando o fator de
        robustez fornecido e normalizando os objetivos e a métrica de
        robustez.
   4.4  Junte pais Pp e filhos Pf em Pt.
   4.5  Faça o ranking dos indivíduos de Pt.
   4.6  Faça dos n melhores indivíduos de Pt a nova população Pp de g+1
5   Retorne Pp
```

Assim como o WCEMOEA e o RHySPEA, a meta-heurística do MDEA-RF também se baseia no NSGA-II (DEB *et al*., 2002). Trata-se, portanto, de um algoritmo genético multiobjetivo que utiliza o mecanismo do *Fast Nondominated Sorting* para ordenar as soluções não-dominadas em fronteiras e o *Crowded-Comparison* para calcular a distância à multidão, ambos os mecanismos são utilizados em conjunto nos passos 3 e 4.6. O diferencial deste algoritmo está no passo 4.3, na avaliação da *fitness*, cuja implementação é detalhada pelo Algoritmo 9-6.

Algoritmo 9-6 – Passo-a-passo em baixo nível para o cálculo da *fitness* do algoritmo MDEA-RF.

```
1   Loop i de 1 a m passo +1 faça:
   1.1  y ← f_i(x)
   1.2  arquivo ← y
   1.3  Loop j de 1 a n passo +1 faça:
      1.3.1  y_lb ← f_i(x + p_lb(j))
      1.3.2  y_ub ← f_i(x + p_ub(j))
      1.3.3  arquivo ← [arquivo, y_lb, y_ub]
      1.3.4  pior_caso(i, j) ← estima_pior_caso(y_lb, y_ub)
      1.3.5  melhor_caso(i, j) ← estima_melhor_caso(y_lb, y_ub)
   1.4  Fim loop
   1.5  y_wc ← f_i(x + pior_caso(i))
   1.6  y_bc ← f_i(x + melhor_caso(i))
   1.7  arquivo ← [arquivo, y_wc, y_bc]
   1.8  y_wc ← max(arquivo )
   1.9  y_bc ← min(arquivo)
   1.10  f_R ← MR3(y_wc, y_bc, y)
   1.11  f′ ← normaliza_objectivo(y)
   1.12  f′_R ← normaliza_MR3(f_R)
   1.13  fitness(i) ← (1 − λ(i))f′ + λ(i)f′_R
   1.14  Fim loop
2   Fim loop
3   Retorna fitness
```

Do Algoritmo 9-6 tem-se que $p_{lb}(j)$ e $p_{ub}(j)$ representam, respectivamente, o limite inferior e superior ao longo da j-ésima dimensão. A função MR3 refere-se à aplicação direta da métrica MR3:

$$\mathrm{MR3}(y_{wc}, y_{bc}, y) = \max(y_{wc} - y, y - y_{bc}). \tag{9-28}$$

O MDEA-RF também lida com problemas restritos, buscando soluções confiáveis que não violam as restrições do problema mesmo na presença de incertezas. Para tal, o método WCE também é aplicado às funções de restrições do problema para encontrar a estimativa dos piores casos de incertezas para as restrições, com um custo adicional de $n_g(2n_p + 2)$ avaliações de funções em relação ao problema sem restrição. O critério de dominância com restrição apresentado em (DEB *et al*., 2002) é então utilizado, em que entre duas soluções inviáveis, seleciona-se aquela cuja soma das violações seja menor; entre uma solução viável e uma inviável, seleciona-se a viável; e entre duas soluções viáveis, seleciona-se aquela com melhor *ranking* segundo o critério de não-dominância.

9.3.5 Complexidade

Considerando um custo constante de avaliação das funções objetivo, c_f, e um custo constante de avaliação das funções de restrições, c_g, o custo total, c_T, do MDEA-RF pode ser expresso da seguinte forma:

$$c_T = n_{gen} n_{pop}\left[(3 + 2n_p)(n_f c_f) + (2 + 2n_p)(n_g c_g)\right] + c_{over}. \quad (9\text{-}29)$$

Note que para as restrições a expressão é $2 + 2n_p$ e não $3 + 2n_p$, uma vez que não há necessidade de calcular a função de restrição para o melhor caso de incertezas.

Caso seja necessário rodar a otimização robusta e a convencional no item 2 do *framework* da Figura 9-7, o termo de *overhead*, c_{over}, tem o seguinte custo:

$$c_{over} = 2n_{gen} n_{pop}(n_f c_f + n_g c_g). \quad (9\text{-}30)$$

Caso o item 2 seja dispensável, $c_{over} = 0$.

9.3.6 Limitações

O MDEA-RF faz uso de combinação linear dos objetivos originais do problema com suas respectivas métricas de robustez (MR3). Sendo assim, é possível que o método falhe na identificação de soluções que estejam em regiões côncavas da fronteira Pareto-ótima, conforme enunciado em (ATHAN e PAPALAMBROS, 1996).

As visualizações gráficas dos resultados no *framework* do MDEA-RF, que auxiliam o DM em suas decisões, ficam complicadas para problemas com mais de três objetivos.

9.4 Considerações Finais

Os algoritmos apresentados neste capítulo são bem diferentes entre si. O WCEMOEA trata da minimização do pior caso de incertezas e não conta com a participação do tomador de decisão. O RHySPEA faz uso de mecanismos de reaproveitamento de amostras e incorpora uma restrição adicional ao problema permitindo que o tomador de decisão participe do processo, definindo margens de tolerância aceitáveis de depreciação para cada objetivo em troca de soluções mais robustas. A própria escolha da métrica MR1 ou MR2 no RHySPEA também é responsabilidade do tomador de decisão. Por fim, o MDEA-RF é um *framework* interativo que permite forte interação com o tomador de decisão em diferentes etapas do processo, incluindo a definição da métrica de robustez (MR3, por exemplo), escolha do fator de robustez e a visualização das soluções nos espaços dos objetivos e das sensibilidades.

A seguir são enumerados os principais benefícios do WCEMOEA:

1) Algoritmo simples e de fácil utilização;
2) Baixa complexidade computacional para estimar o pior caso de incertezas;
3) Métrica determinística e, portanto, previsível.

Para o RHySPEA os benefícios de destaque são:

1) Utilização de um arquivamento externo de soluções avaliadas, de tal forma que quanto mais gerações e repetições forem feitas, maior será o volume de soluções armazenadas e mais rápido o algoritmo executará;
2) Oferece flexibilidade para que o DM escolha a região de alto desempenho de soluções e regule um limite até onde soluções robustas serão buscadas.
3) A recuperação e utilização de soluções arquivadas permite o recálculo de MR1 e de MR2 de forma muito mais precisa, pois o número de amostras por caixa sempre aumenta.

E por fim, seguem os benefícios do MDEA-RF:

1) O tomador de decisão tem papel ativo durante o processo de otimização robusta, visualizando todas as saídas e fornecendo os *feedbacks* necessários;
2) A métrica de robustez, MR3 com WCE, é determinística e de fácil entendimento pelo tomador de decisão;

3) A métrica de robustez, MR3 com WCE, requer poucas amostras para ser calculada;
4) O *framework* procura por soluções Pareto-ótimas robustas mais rapidamente que métodos que minimizam métricas de robustez como objetivos adicionais.
5) O fator de robustez, λ, é uma forma prática para o tomador de decisão medir o nível de robustez de uma solução frente às outras.

Em nenhum dos algoritmos mencionados acima há a garantia de confiabilidade da solução Pareto-ótima robusta aproximada, $\widetilde{PR}^*$, frente às perturbações. Eventualmente as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas podem violar as restrições do problema alvo, visto que é utilizado o método determinístico WCE para estimar o pior caso de incertezas para o WCEMOEA e para o MDEA-RF, cujas limitações são descritas na Seção 8.1 e Subseção 9.1.5, e é utilizada a amostragem mínima s_{min} no RHySPEA para identificar soluções inviáveis dentro das caixas de incertezas.

10 EXPERIMENTOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta diferentes experimentos realizados para testar as métricas, métodos e algoritmos propostos.

Todos os algoritmos e métodos mencionados nesta tese foram implementados e testados com o *software* Matlab® (MATHWORKS, 2016). Os testes foram feitos em um único computador, com 8GB de memória RAM e processador Intel® Core™ i7-4790 de 3,60GHz.

10.1Aplicação do WCEMOEA nas Funções Teste

Nesta seção a métrica de pior caso WCE, descrita na Seção 8.1, é analisada frente a outras métricas de pior caso quando aplicadas nas funções teste descritas no Capítulo 7. As outras métricas de pior caso comparadas com o WCE foram:

- WCV;
- WCS-I;
- WCS-II;
- WCS-III.

As métricas anteriores acopladas ao MOEA formam algoritmos de otimização do pior caso de incertezas. O WCVMOEA (*Worst Case Vertex Multiobjetive Evolutionary Algorithm)* consiste no algoritmo MOEA cuja *fitness* avalia todos os vértices do politopo definido pelas incertezas a fim de encontrar aquele com o pior caso. O WCSMOEA (*Worst Case Sampling Multiobjetive Evolutionary Algorithm)* consiste no algoritmo MOEA cuja *fitness* avalia o pior caso de incertezas por amostragem LHS (*Latin Hypercube Sampling*) tal como feito em (DEB e GUPTA, 2006). O WCSMOEA é categorizado com sufixos I, II e III, que correspondem ao LHS com diferentes quantidades de amostras, $N_{samples}$: 10, 100 e 1000, respectivamente. Os valores dos parâmetros do MOEA utilizado nos testes são apresentados na Tabela 10-1.

Tabela 10-1 – Valores dos parâmetros do MOEA para teste das métricas de pior caso de incertezas: WCE, WCV, WCS-I, WCS-II, WCS-III nas funções teste.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	150
n_{gen}	Número de gerações	200
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
n_{rep}	Número de execuções do MOEA	11

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

A Subseção 10.1.1 apresenta uma comparação qualitativa das métricas, e a Subseção 10.1.2 uma comparação quantitativa. Métricas de avaliação e análises são feitas tal como sugerido nos itens A.3.1 e A.3.2 da Figura 6-3.

10.1.1 Comparação Qualitativa

A comparação qualitativa consiste em aplicar as métricas de pior caso de incertezas nas funções teste segundo a abordagem *minimax*, descrita na Subseção 5.3.2.1, juntamente com o MOEA convencional para fins de comparação visual entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos. Os valores das soluções Pareto-ótimas também são expostos graficamente no espaço das variáveis de decisão. As soluções providas pelas métricas de pior caso são denominadas soluções robustas e compõem as fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas, $\widetilde{FPR}^*$, enquanto que a solução provida pelo MOEA convencional é denominada solução não-robusta ou solução nominal e compõe $\widetilde{FP}^*$.

Em se tratando da abordagem *minimax*, é de se esperar que as soluções das métricas de pior caso sejam aquelas cujos valores dos objetivos sejam os menores possíveis quando expostas ao pior cenário de incertezas. Dessa forma, para avaliar a efetividade dessas métricas, cada solução Pareto-ótima foi perturbada por um conjunto

de 10000 valores de incerteza gerados por LHS, dentre os quais foi aplicado o critério de não-dominância na perspectiva de maximização, a fim de se aproximar uma fronteira Pareto de pior caso de incertezas $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$. Note que $\mathbf{F}^{\mathbf{max}}$ difere de $\mathbf{F}_{\mathbf{x_0}}{}^{\mathbf{max}}$, apresentada na Subseção 9.1.2, uma vez que $\mathbf{F}^{\mathbf{max}}$ é a fronteira ideal de maximização gerada pelo conjunto Pareto-ótimo, P^*, e não somente uma solução particular $\mathbf{x_0}$. Assim, a métrica que gerar a fronteira $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ mais próxima da fronteira Pareto-ótima não-robusta aproximada, $\widetilde{FP}^*$, é a melhor métrica para *minimax*.

A Figura 10-1 apresenta o resultado da aplicação das métricas de pior caso de incertezas e do MOEA convencional na função teste *OffsetValleys*.

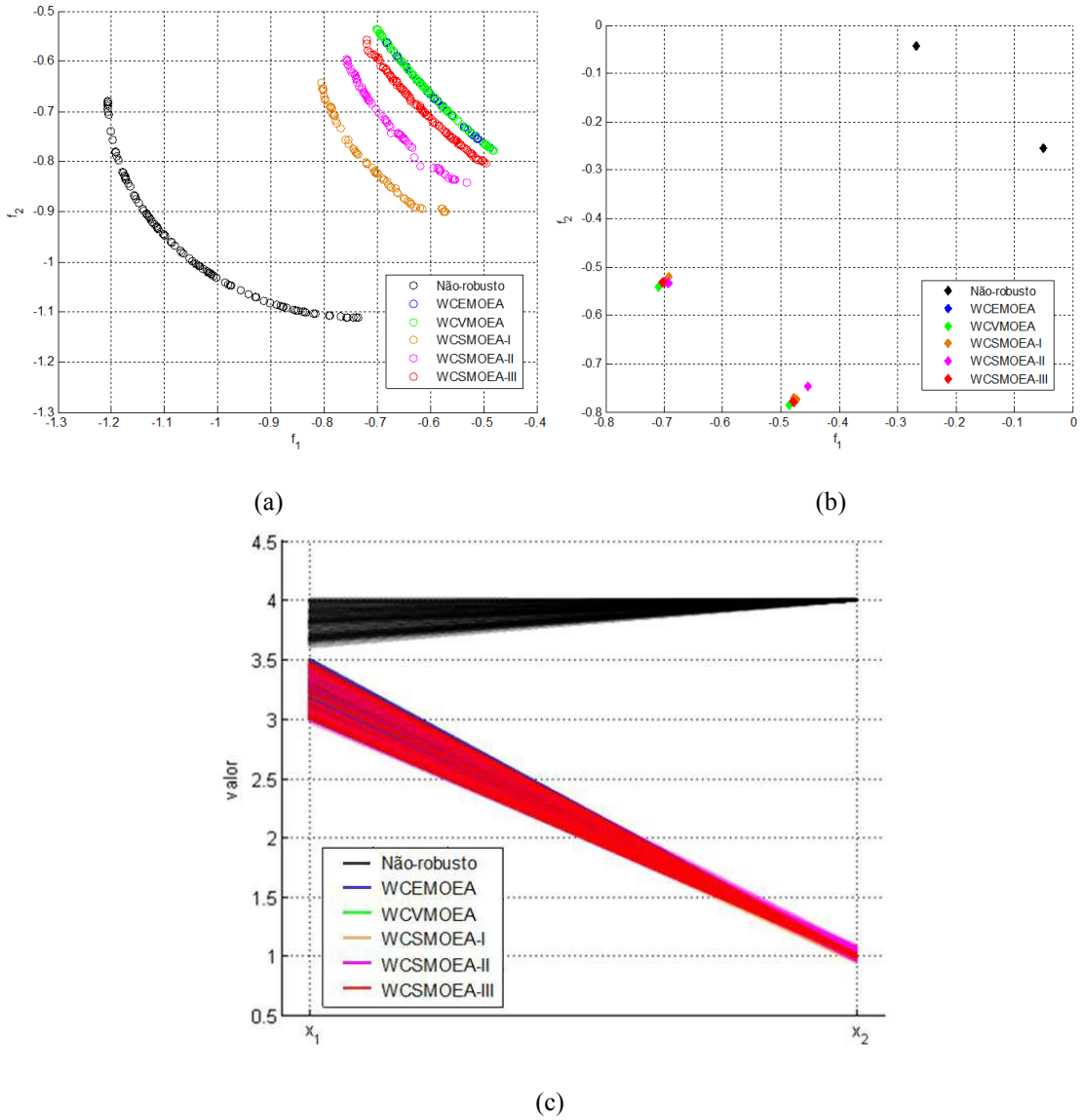


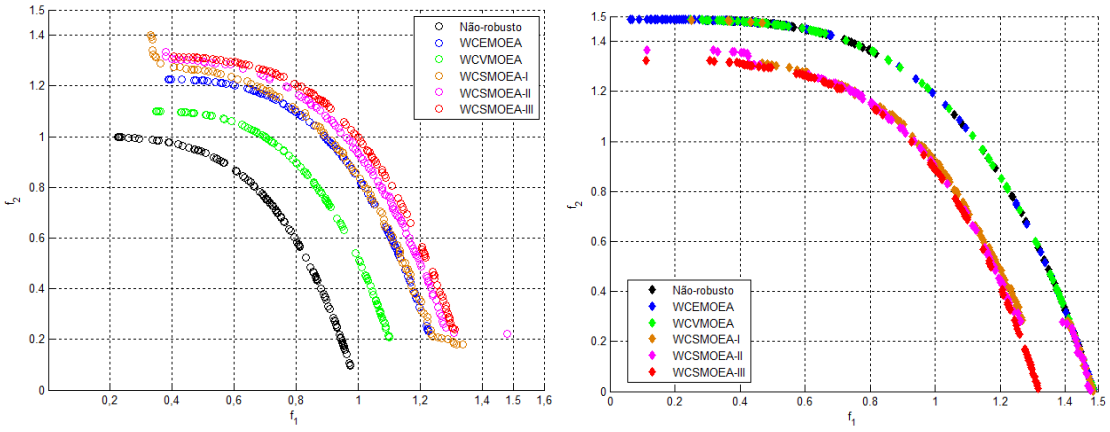
Figura 10-1 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *OffsetValleys*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

Os pontos gerados por WCEMOEA e WCVMOEA estão sobrepostos na Figura 10-1(a) e (b). Assim, as fronteiras Pareto aproximadas da Figura 10-1(a) revelam que as métricas do WCEMOEA e do WCVMOEA são as que levam a fronteira mais longe de $\widetilde{FP}^*$. Note que este afastamento não é condição nem suficiente nem necessária para afirmar que uma métrica de pior caso é melhor que a outra, pois o afastamento pode ser originado (i) pela falta de convergência do algoritmo e (ii) pela superestimativa do pior caso pois a consolidação do pior caso pode não pertencer ao domínio da imagem da solução. Por isso, observar $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ torna-se necessário para avaliar as métricas, o que mostra que WCEMOEA e WCVMOEA (coincidentes) na Figura 10-1(b) identificam melhor o pior caso de incertezas.

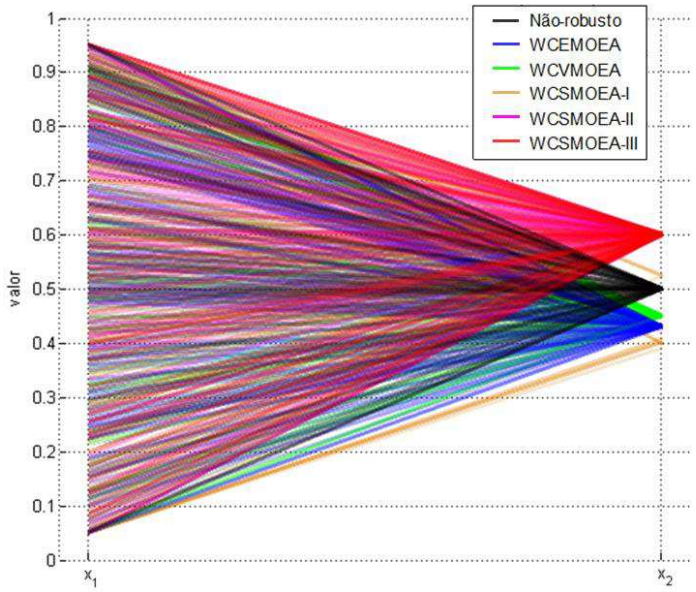
Da Figura 10-1(c) percebe-se que as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas (sobrepostas entre si) encontram-se em regiões completamente distintas das soluções Pareto-ótimas não-robustas aproximadas no espaço das variáveis de decisão. Isto é explicado pelo fato de a função *OffsetValleys* ter a região robusta (base 3) completamente segregada da região não-robusta (base 4), como mostra a Figura 7-3.

A Figura 10-2 apresenta o resultado da aplicação das métricas de pior caso de incertezas e do MOEA convencional na função teste *ConcurrentSlopes*.

Diferentemente do que foi observado para a função *OffsetValleys*, a Figura 10-2(a) demonstra que as fronteiras geradas pelo WCEMOEA e pelo WCVMOEA para a função *ConcurrentSlopes* não são coincidentes e não estão tão afastadas de $\widetilde{FP}^*$ como as fronteiras geradas pelos WCSMOEA, especialmente pelo WCSMOEA-III. A Figura 10-2(b) mostra que as melhores estimativas de pior caso de incertezas são as obtidas pelos WCSMOEAs. Mesmo o WCSMOEA-I com $N_{samples} = 10$, fornece resultados melhores que os fornecidos pelo WCEMOEA e pelo WCVMOEA, uma vez que estes últimos geram fronteiras de pior caso ($\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$) tão afastadas quanto a fronteira gerada pela otimização convencional.



(a) (b)



(c)

Figura 10-2 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *ConcurrentSlopes*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

A Figura 10-2(c) mostra que cada métrica converge para um valor específico de x_2, que é a dimensão responsável pela robustez da função *ConcurrentSlopes*. Fazendo um paralelo da Figura 10-2(c) com a Figura 7-6, nota-se que todos os WCSMOEAs identificam corretamente a região mais robusta ($x_2 = 0{,}6$), enquanto que o WCEMOEA ($x_2 = 0{,}43$) e o WCVMOEA ($x_2 = 0{,}45$) falham em identificá-la. O MOEA

convencional, como era de se esperar, identifica o mínimo global em $x_2 = 0{,}5$, que é o vale de menor robustez.

Para a função teste *ConcurrentSlopesConstraint* os resultados são similares aos obtidos para *ConcurrentSlopes* com a diferença que as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas são descontínuas em função da restrição imposta ao problema, como mostra a Figura 10-3(a). A Figura 10-3(b) indica um melhor desempenho das métricas WCSMOEA-II e WCSMOEA-III frente às demais, e a Figura 10-3(c) indica que, com exceção da solução não-robusta, as demais evitam a região em que $0{,}4 < x_1 < 0{,}6$.

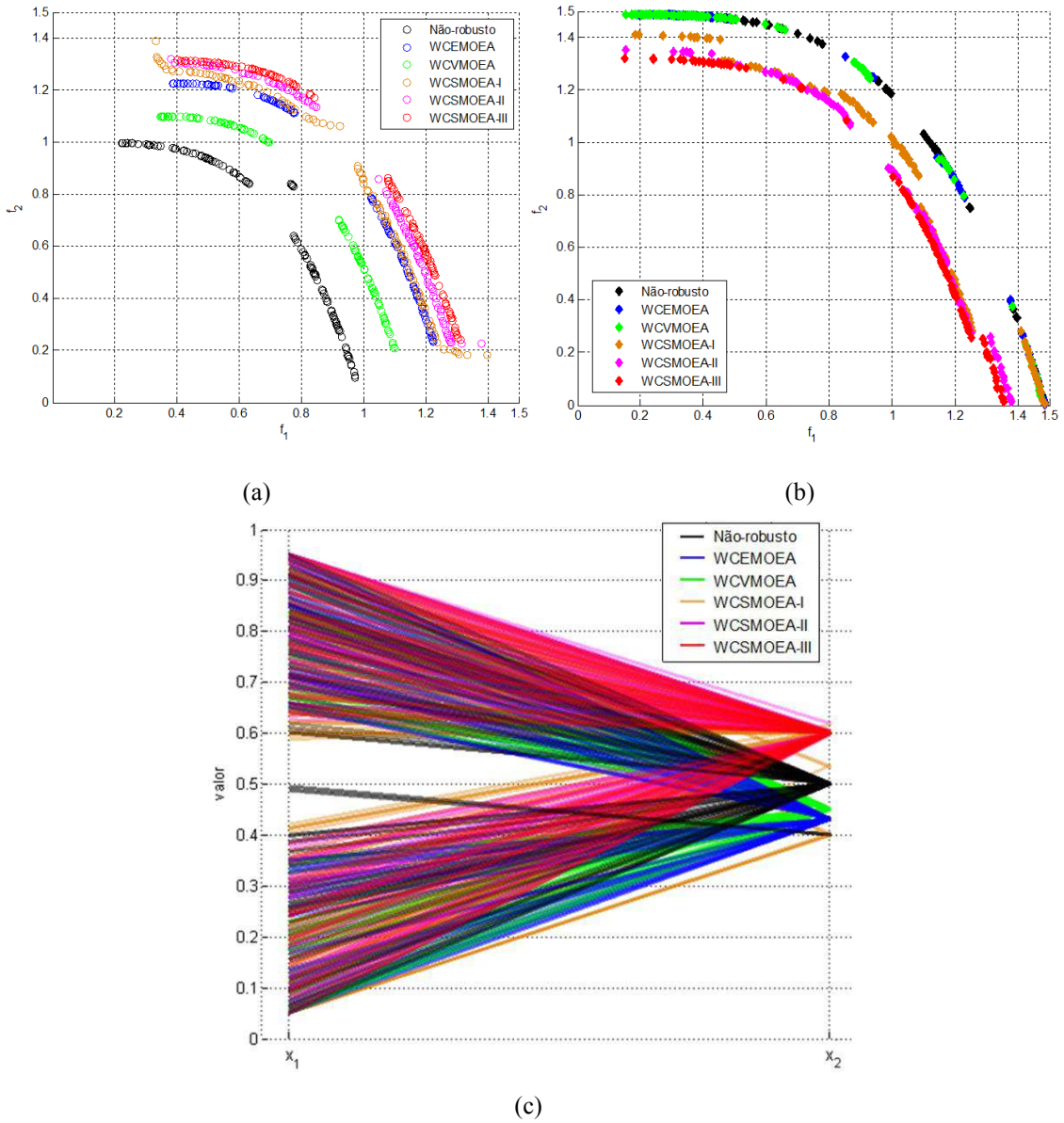


Figura 10-3 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *ConcurrentSlopesConstraint*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

A Figura 10-4 apresenta o resultado da aplicação das métricas de pior caso de incertezas e do MOEA convencional na função teste *Deb2Obj-1*.

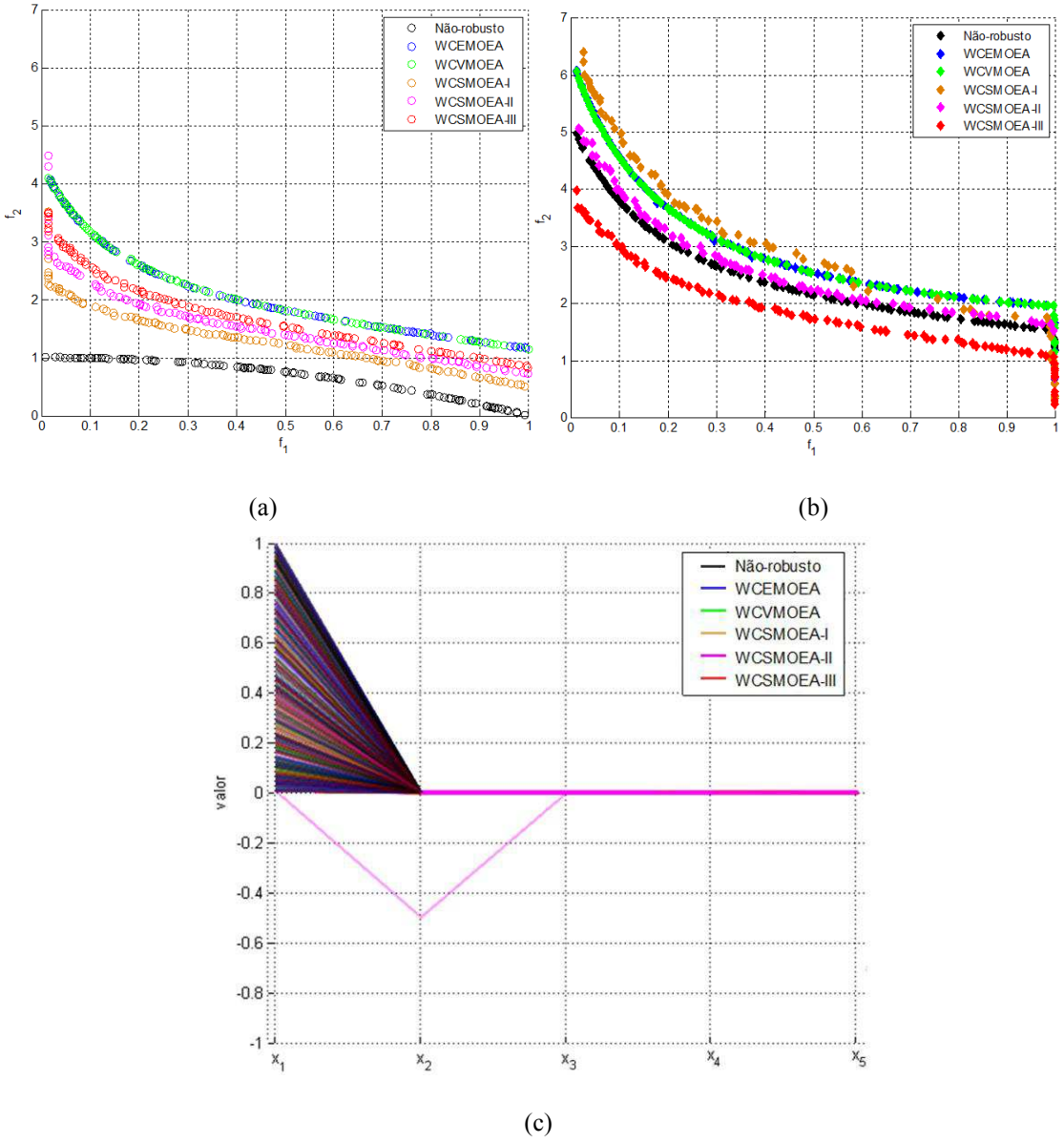


Figura 10-4 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *Deb2Obj-1*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se os piores casos simulados não-dominados para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

Da Figura 10-4(a) nota-se que o WCEMOEA e o WCVMOEA geram fronteiras aproximadas sobrepostas, que são as mais afastadas da $\widetilde{FP}^*$. Quanto mais amostras são utilizadas pelo WCSMOEA, mais afastadas suas fronteiras ficam de $\widetilde{FP}^*$. A Figura 10-4(b) revela que o WCSMOEA-III é a métrica com melhor desempenho frente às perturbações. É notável também, que a fronteira $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ da solução ótima não-robusta

aproximada, $\tilde{P}^*$, seja melhor que a $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ das soluções produzidas pelas outras métricas de robustez. Como visto na Seção 7.6 e enunciado em (DEB e GUPTA, 2006), isto é explicado pelo fato de a FP^* da função *Deb2Obj-1* ser idêntica à FPR^* que utiliza o valor esperado como métrica de robustez. Diferentes valores de x_1 na Figura 10-4(c) geram diferentes fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas.

Comportamento diferente é visto na Figura 10-5, que mostra os resultados da aplicação das métricas de pior caso de incertezas e do MOEA convencional na função *Deb2Obj-2*.

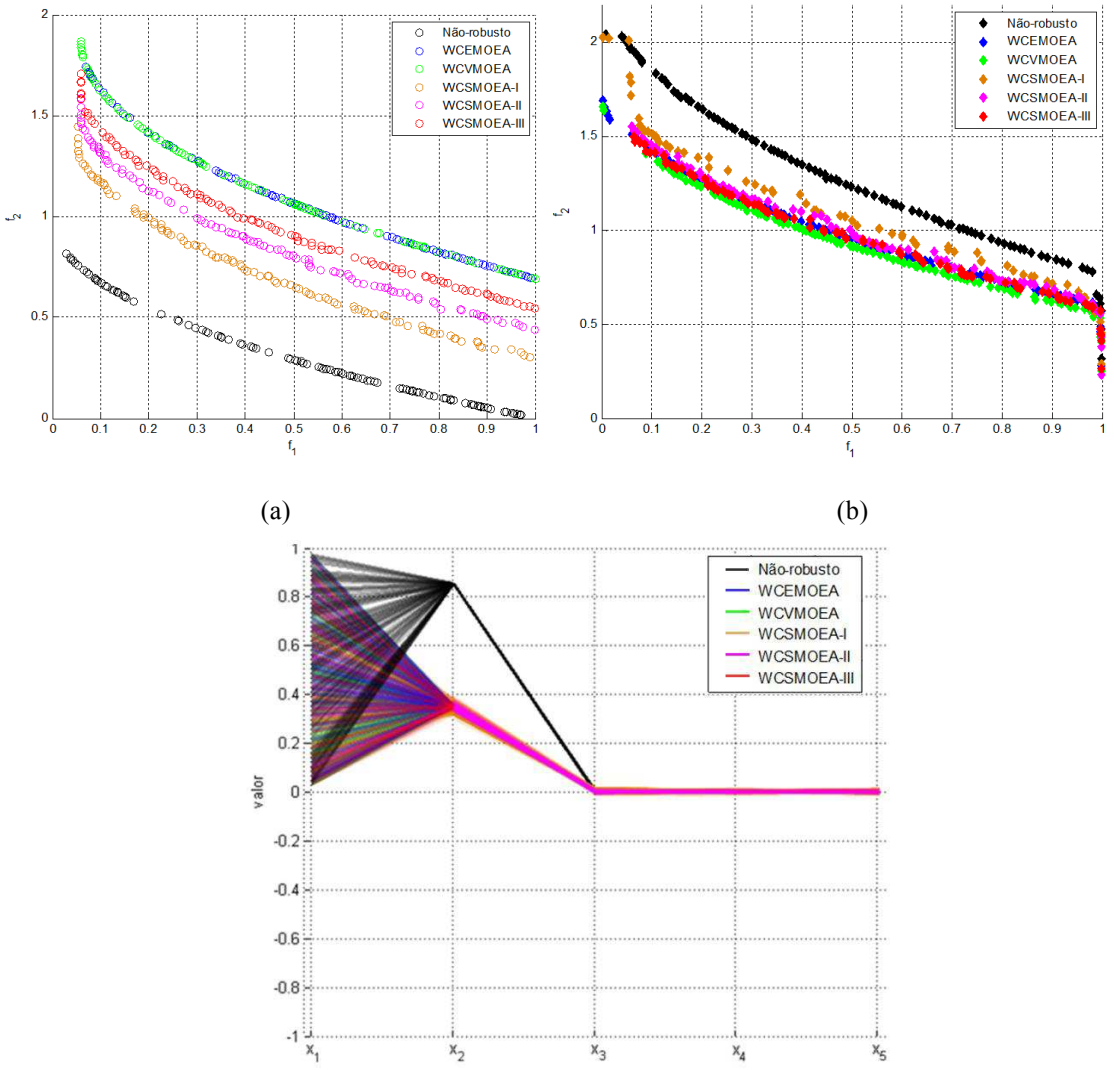


Figura 10-5 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *Deb2Obj-2*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em (b) tem-se a $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ para cada conjunto de soluções, e em (c) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

Na Figura 10-5(a) tem-se que as duas fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas mais afastadas da $\widetilde{FP}^*$ são as produzidas pelo WCEMOEA e pelo WCVMOEA. As duas fronteiras são coincidentes. Quanto mais amostras são utilizadas pelo WCSMOEA, mais afastadas suas fronteiras ficam de $\widetilde{FP}^*$. A Figura 10-5(b) revela que WCVMOEA é a métrica com melhor desempenho frente às perturbações, seguida bem próxima da WCEMOEA e WCSMOEA-III. Em seguida vem a WCSMOEA-II, a WCSMOEA-I, e por fim a fronteira $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ produzida pela $\tilde{P}^*$, que gera o pior cenário de incertezas. A Figura 10-5(c) mostra que $x_2 = 0{,}85$ para a $\tilde{P}^*$, enquanto que $x_2 \cong 0{,}35$ para $\widetilde{PR}^*$, utilizando-se as métricas de pior caso. De fato, como visto na Seção 7.7 e enunciado em (DEB e GUPTA, 2006), este é o comportamento esperado para a função *Deb2Obj-2*, em que a $\widetilde{PR}^*$ para o valor esperado da função tem $x_2 = 0{,}35$.

A Figura 10-6 apresenta o resultado da aplicação das métricas de pior caso de incertezas e do MOEA convencional na função teste *Deb3Obj*.

Conforme explicado na Seção 7.8, a *Deb3Obj* é uma variante da *Deb2Obj-2* com 3 objetivos e, como tal, a análise qualitativa de *Deb2Obj-2* também se aplica a *Deb3Obj*. Da Figura 10-6(a) nota-se que as fronteiras aproximadas de WCEMOEA e WCVMOEA são coincidentes. Na Figura 10-6(a) as $\widetilde{FPR}^*$ ficam afastadas de $\widetilde{FP}^*$, e na Figura 10-6(b) tem-se que a solução não-robusta perturbada é a que gera a $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ mais afastada de $\widetilde{FP}^*$. As fronteiras $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ oriundas do WCEMOEA e do WCVMOEA são as melhores, seguidas das oriundas dos WCSMOEAs. A Figura 10-6(c) e a Figura 10-6(d) mostram o resultado anterior em outra perspectiva. Destaca-se na Figura 10-6(d) os piores casos com altos valores de f_3 para as soluções geradas pelos WCSMOEAs, o que não acontece para as soluções geradas pelo WCEMOEA e WCVMOEA. A Figura 10-6(e) mostra que $x_3 \cong 0{,}85$ para $\tilde{P}^*$, enquanto que $x_3 \cong 0{,}35$ para $\widetilde{PR}^*$ utilizando-se as métricas de pior caso.

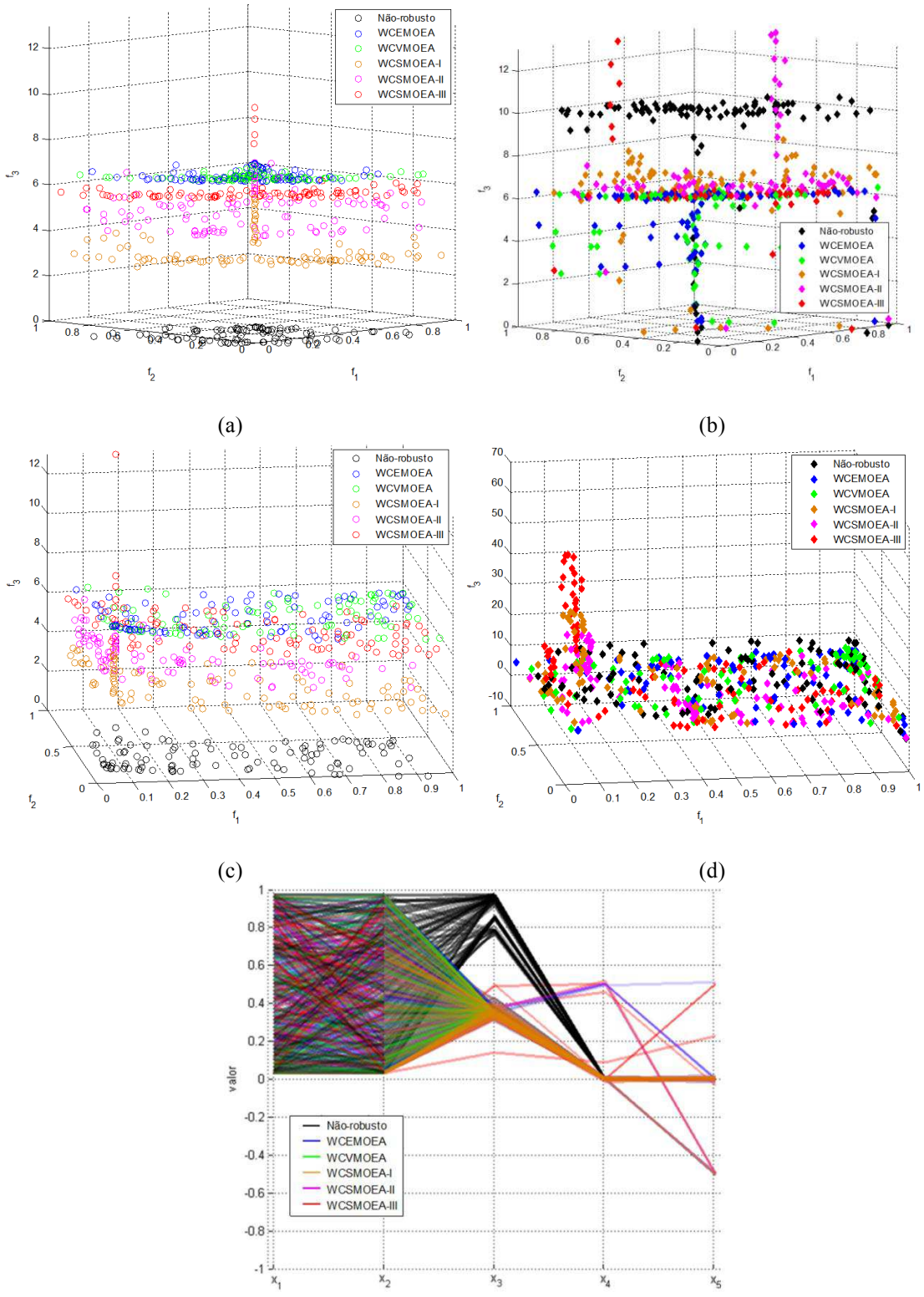


Figura 10-6 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de pior caso em relação à solução nominal na função *Deb3Obj*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos na visão frontal, em (b) tem-se a $\tilde{\mathbf{F}}^{\max}$ para cada conjunto de soluções na visão frontal, em (c) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos em perspectiva, em (d) tem-se a $\tilde{\mathbf{F}}^{\max}$ para os conjuntos soluções em perspectiva e em (e) as variáveis de decisão dos conjuntos soluções.

Como visto nesta Subseção e antecipado na Subseção 8.1, o WCEMOEA e o WCVMOEA geram de forma efetiva a fronteira Pareto-ótima robusta aproximada para o pior caso para problemas cuja fronteira Pareto-ótima não-robusta é convexa. Caso contrário, eles falham em encontrar o pior cenário de incertezas para problemas com fronteira não-convexa e, neste caso, os métodos WCSMOEA são os recomendados.

10.1.2 Comparação Quantitativa

As tabelas a seguir mostram algumas métricas de desempenho referentes ao processo de análise das métricas de pior caso de incertezas. Ao todo foram avaliados seis métodos aplicados em seis funções teste. A métrica WCSMOEA foi associada a três métodos distintos em função da quantidade de amostras $N_{samples}$ do LHS: 10, 100 e 1000, totalizando três métodos, além do MOEA convencional, WCEMOEA e WCVMOEA.

Os testes foram repetidos onze vezes permitindo o cálculo de um valor médio e do desvio padrão das métricas empregadas, a fim de reduzir qualquer viés introduzido pela geração aleatória da população inicial dos MOEAs.

Cada uma das soluções das fronteiras Pareto-ótimas aproximadas por cada método foi perturbada, gerando a fronteira $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$. Para os métodos de minimização do pior caso de incertezas, quanto mais próximas as soluções de suas fronteiras estiverem de $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$, melhor será o método em estimar o pior caso. Para resumir esta concepção em uma métrica, optou-se por utilizar o indicador de convergência: *Generational Distance* (GD) (COELLO, DHAENENS e JOURDAN, 2009), que mede em um único número o quão próximo de $\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$ a fronteira robusta obtida está. A média do GD junto ao seu desvio padrão são apresentados na Tabela 10-2.

De acordo com a Tabela 10-2 o WCSMOEA-III tem os menores valores do GD médio para *ConcurrenSlopes* e *ConcurrentSlopesConstrainst*. O mesmo não se pode afirmar para as outras funções, dado o alto desvio padrão associado à medição. O WCEMOEA e o WCVMOEA são as métricas com menor desvio padrão associada à média do GD calculado, o que é justificável pela natureza determinística das métricas. Outra observação interessante é que a solução nominal é a de menor GD para *Deb2Obj-1*, o que é explicado pelo fato da função ser do Tipo 1, ou seja, suas soluções nominais são idênticas às suas soluções robustas.

Tabela 10-2 – Valor médio e desvio padrão da métrica *Generational Distance* das soluções Pareto-ótimas aproximadas perturbadas ($\mathbf{F^{max}}$) em relação à fronteira original por cada método para cada função teste.

	Offset Valleys	*Concurrent Slopes*	*Concurrent Slopes Constraints*	*Deb2Obj-1*	*Deb2Obj-2*	*Deb3Obj*
MOEA	0,7887± 0,0001	0,0492± 0,0002	0,0470± 0,0002	**0,1091± 0,0264**	0,0696± 0,0094	0,7977± 0,0249
WCEMOEA	0,3295± 0,0000	0,0493± 0,0003	0,0477± 0,0002	0,1525± 0,0543	0,0501± 0,0013	**0,4271± 0,0159**
WCVMOEA	0,3295± 0,0000	0,0496± 0,0002	0,0478± 0,0002	0,1612± 0,0502	**0,0495± 0,0006**	0,4757± 0,0117
WCSMOEA-I	**0,2626± 0,0530**	0,0355± 0,0012	0,0340± 0,0010	0,7047± 1,5456	0,0754± 0,0099	0,7331± 0,4676
WCSMOEA-II	0,3206± 0,0283	0,0332± 0,0008	0,0316± 0,0003	0,5057± 0,1606	0,0682± 0,0165	0,6761± 0,3666
WCSMOEA-III	0,2981± 0,0356	**0,0321± 0,0001**	**0,0312± 0,0002**	0,1460± 0,0148	0,0628± 0,0174	1,2258± 0,7781

A Tabela 10-3 apresenta a ocorrência média de violações das restrições da função *ConcurrentSlopesConstraints* em relação ao total de soluções presentes na fronteira de cada método.

Tabela 10-3 – Valor médio e desvio padrão da ocorrência de violações de restrições na função *ConcurrentSlopesConstraints* a partir das soluções Pareto-ótimas aproximadas perturbadas por cada método para cada função teste.

	MOEA	WCEMOEA	WCVMOEA	WCSMOEA-I	WCSMOEA-II	WCSMOEA-III
Concurrent Slopes Constraints	14,09%± 2,12%	**0,00%**	**0,00%**	13,55%± 2,98%	4,36%± 2,11%	2,09%± 0,94%

Da Tabela 10-3 observa-se que, tanto o MOEA convencional, quanto os métodos de amostragem para identificação do pior caso de incertezas, geram soluções que violam as restrições. No entanto, nenhuma violação de restrição ocorreu ao utilizar o WCEMOEA e o WCVMOEA, o que permite que estes métodos sejam usados para conferir confiabilidade às soluções. Note, entretanto, que não se tem garantia da confiabilidade, visto as limitações mencionadas na Subseção 9.1.5.

A Tabela 10-4 mostra o tempo de execução de cada uma das métricas junto ao MOEA frente a cada uma das funções teste. O computador utilizado para realização dos experimentos tinha a seguinte configuração: 8GB de memória RAM e processador Intel® Core™ i7-4790 de 3,60GHz. O MOEA convencional é o mais rápido de todos, visto que nenhuma amostragem adicional é feita. O WCEMOEA, o WCVMOEA e o WCSMOEA-I são similares para as funções teste de duas variáveis de decisão, *OffsetValleys*, *ConcurrentSlopes* e *ConcurrentSlopesConstraints*. Para as outras funções com cinco variáveis de decisão, o WCSMOEA-I é mais rápido, seguido do WCEMOEA e por fim do WCVMOEA. A WCSMOEA-II e WCSMOEA-III são mais lentas, conforme esperado pelo aumento do número de amostras.

Tabela 10-4 – Tempo de execução médio (em segundos) e desvio padrão de cada método de minimização do pior caso de incertezas para cada função teste.

	OffsetValleys	*Concurrent Slopes*	*Concurrent Slopes Constraints*	*Deb2Obj-1*	*Deb2Obj-2*	*Deb3Obj*
MOEA	**12,51±0,43**	**12,54±0,18**	**11,78±0,10**	**11,64±0,21**	**11,77±0,27**	**10,56±0,16**
WCEMOEA	14,66±0,07	14,68±0,04	14,68±0,06	14,01±0,14	14,69±0,14	15,43±0,20
WCVMOEA	14,26±0,12	14,49±0,06	14,19±0,05	14,79±0,18	15,76±0,17	16,58±0,18
WCSMOEA-I	14,30±0,11	14,10±0,07	13,76±0,25	13,34±0,10	13,71±0,07	13,82±0,21
WCSMOEA-II	21,21±0,74	21,11±0,19	21,28±0,21	16,80±0,30	18,38±0,24	17,72±0,35
WCSMOEA-III	102,55±0,47	96,60±0,56	104,83±0,40	66,29±0,30	84,05±0,45	89,02±0,57

A Tabela 10-5 apresenta a complexidade dos métodos em termos do número de avaliações da função objetivo. Para um tamanho de população, n_{pop}, e número de gerações fixos do MOEA, n_{gen}, os métodos de amostragem, WCSMOEA, dependem unicamente do número de amostras escolhido. Por outro lado, os métodos WCEMOEA e WCVMOEA dependem unicamente do número de variáveis de decisão e dos objetivos do problema.

Tabela 10-5 – Número de avaliações da função objetivo para cada método de minimização do pior caso de incertezas.

	MOEA	WCEMOEA	WCVMOEA	WCSMOEA-I	WCSMOEA-II	WCSMOEA-III
Número de avaliações	**17040**	119280	68160	170400	1704000	17040000

A Tabela 10-6 apresenta a métrica *Pareto Dominance Indicator* (PDI) proposta em (GOH e TAN, 2009), cuja finalidade é calcular a contribuição individual de cada fronteira Pareto-ótima aproximada gerada por métodos diferentes para um mesmo problema em relação à fronteira Pareto-ótima global aproximada resultante da aplicação do critério de não-dominância entre todas as soluções. Neste sentido, o método que mais contribui na formação da fronteira Pareto-ótima global aproximada é o melhor.

No contexto da minimização do pior caso de incertezas, espera-se que a fronteira formada pelas soluções perturbadas ($\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$) seja a mais próxima da solução utópica (fronteira sem incerteza).

Tabela 10-6 – Valor da métrica *Pareto Dominance Indicator* (GOH e TAN, 2009) para as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas perturbadas ($\tilde{\mathbf{F}}^{\mathbf{max}}$).

	Offset Valleys	*Concurrent Slopes*	*Concurrent Slopes Constraints*	*Deb2Obj-1*	*Deb2Obj-2*	*Deb3Obj*
MOEA	0,00%	0,00%	0,69%	0,00%	0,00%	3,39%
WCEMOEA	**100%**	2,05%	1,39%	0,00%	4,42%	26,55%
WCVMOEA	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	**85,84%**	**31,64%**
WCSMOEA-I	0,00%	5,48%	0,00%	10,19%	0,88%	8,47%
WCSMOEA-II	0,00%	23,97%	28,47%	1,85%	3,54%	5,08%
WCSMOEA-III	0,00%	**68,49%**	**69,44%**	**87,96%**	5,31%	24,86%

Na função *OffsetValleys* o resultado do WCEMOEA e do WCVMOEA são idênticos, embora WCEMOEA tenha ficado com 100% do valor do PDI. Para as funções *ConcurrentSlopes*, *ConcurrentSlopesConstraints* e *Deb2Obj-1* o WCSMOEA-III é o com melhor PDI. O WCVMOEA tem melhor PDI para *Deb2Obj-2*, enquanto que o WCVMOEA juntamente com o WCEMOEA e o WCSMOEA-III são os melhores para *Deb3Obj*.

10.2 Aplicação das Métricas MR1, MR2, MR3 e MR4 nas Funções Teste

Nesta seção as métricas de robustez descritas nas Subseções 8.2.1 e 8.2.2 são analisadas em conjunto ao serem aplicadas nas funções teste descritas no Capítulo 7. A função restrita *ConcurrentSlopesConstraints* não foi incluída no rol de testes, visto que seria necessário incluir a métrica WCE para avaliação das restrições durante o processo de

otimização de cada uma das métricas de robustez MR1, MR2, MR3 e MR4, enquanto que o objetivo da análise é avaliar isoladamente o comportamento das métricas. Para efeito comparativo, outras duas métricas de robustez foram utilizadas no teste:

- Estimativa do desvio padrão;
- FFCG.

Como visto na Seção 5.3, a estimativa do desvio padrão é a métrica de robustez mais utilizada na literatura. O FFCG, descrito na Subseção 8.2.1, é a métrica que deu origem às variantes MR1 e MR2. Tanto MR1 e MR2 quanto FFCG e a estimativa do desvio padrão dependem do $N_{samples}$ em torno da solução a ser avaliada. Sendo assim, o método de amostragem LHS (DEB e GUPTA, 2006) foi utilizado para cada uma das quatro métricas com três valores diferentes de $N_{samples}$: 10, 100 e 1000. Além dessas métricas, que dependem do número de amostras, duas métricas independentes do número de amostras são analisadas: MR3 e MR4, que fazem uso do WCE para estimativa do pior caso de incerteza. Os valores dos parâmetros do MOEA utilizado nos testes são apresentados na Tabela 10-7.

Tabela 10-7 – Valores dos parâmetros do MOEA para teste das métricas de robustez: desvio padrão, FFCG, MR1, MR2, MR3 e MR4 nas funções teste.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	150
n_{gen}	Número de gerações	200
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
n_{rep}	Número de execuções do MOEA	11

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

A Subseção 10.2.1 apresenta uma comparação qualitativa das métricas, e a Subseção 10.2.2 uma comparação quantitativa. Métricas de avaliação e análises são feitas tal como sugerido nos itens A.3.1 e A.3.2 da Figura 6-3.

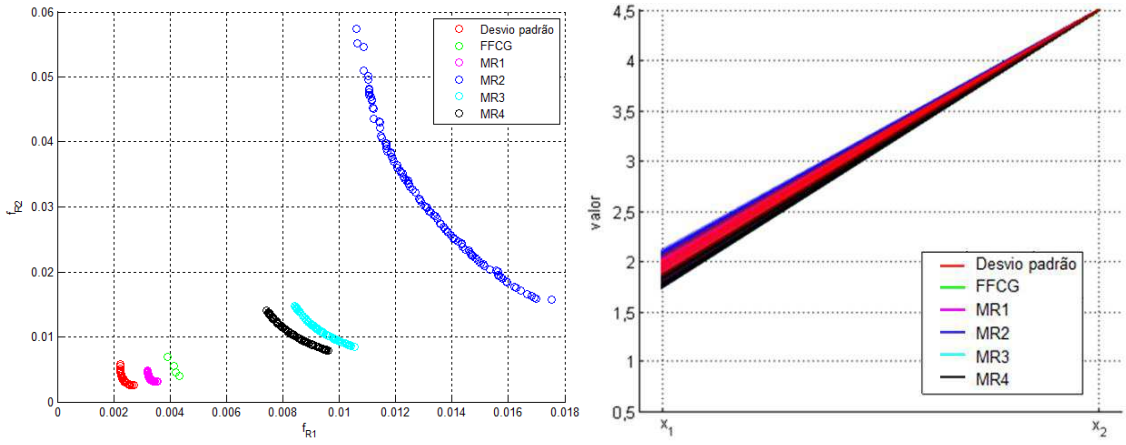
10.2.1 Comparação Qualitativa

A comparação qualitativa consiste em uma análise visual entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos, em que os objetivos são exclusivamente as métricas de robustez: MR1, MR2, MR3, MR4, e as métricas *benchmark*: estimativa do desvio padrão e FFCG. A fronteira Pareto-ótima aproximada de cada métrica foi encontrada por meio de um MOEA convencional. Os valores das soluções Pareto-ótimas também são expostos graficamente no espaço das variáveis de decisão.

Esta análise ignora por completo os objetivos originais (micro-objetivos) das funções teste e atem-se apenas à minimização das métricas de robustez, procurando pelo conjunto mais robusto de soluções. Embora as métricas de robustez sejam diferentes, e apresentem valores diferentes no espaço dos objetivos, espera-se que elas identifiquem o mesmo conjunto de soluções Pareto-ótimas, visto que todas se remetem à variabilidade da solução.

As soluções apresentadas graficamente nesta Subseção foram obtidas a partir da amostragem LHS com $N_{samples} = 1000$ para o caso da estimativa do desvio padrão e das métricas FFCG, MR1, MR2. As métricas MR3 e MR4 foram obtidas de forma determinística a partir da estimativa do pior de caso de incertezas com o WCE.

A Figura 10-7 apresenta o resultado da aplicação das métricas de robustez na função teste *OffsetValleys*.



(a) (b)

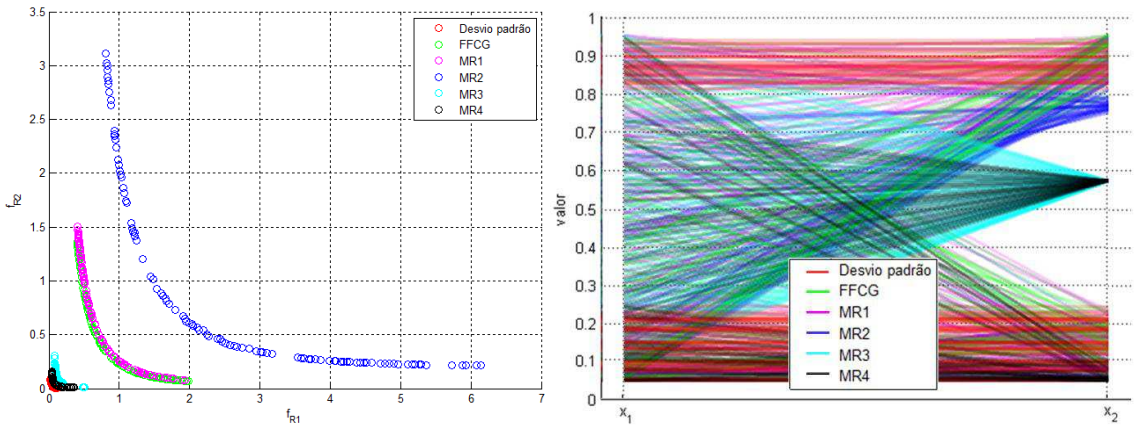
Figura 10-7 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *OffsetValleys*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

As fronteiras Pareto-ótimas aproximadas da Figura 10-7(a) têm diferentes valores de $f_{R1}(\cdot)$ e $f_{R2}(\cdot)$ para cada uma das métricas, conforme esperado. As métricas MR1 e

FFCG têm valores próximos aos valores do desvio padrão. A métrica MR2 é a que tem os maiores valores da função-objetivo, pois ela busca pelo pior caso das estimativas das derivadas parciais da função, enquanto que MR1 busca pela média das derivadas parciais, como explicado na Subseção 8.2.1. As métricas MR3 e MR4 tiveram valores próximos entre si, o que revela que o valor da diferença entre o pior caso para o melhor caso de incertezas é próximo ao valor do maior desvio em relação à solução nominal, conforme equacionamento da Subseção 8.2.2

Da Figura 10-7(b) percebe-se que as soluções Pareto-ótimas aproximadas encontradas por todas as métricas de robustez são próximas entre si, visto que $x_1 \approx 2$ e $x_2 = 4{,}5$. De fato, esta região é um patamar da função *OffsetValleys* com $dy/dx \approx 0$ em $y = 0$, segundo a Figura 7-3 e a Figura 7-4(b).

A Figura 10-8 apresenta o resultado da aplicação das métricas de robustez na função teste *ConcurrentSlopes*.



(a) (b)

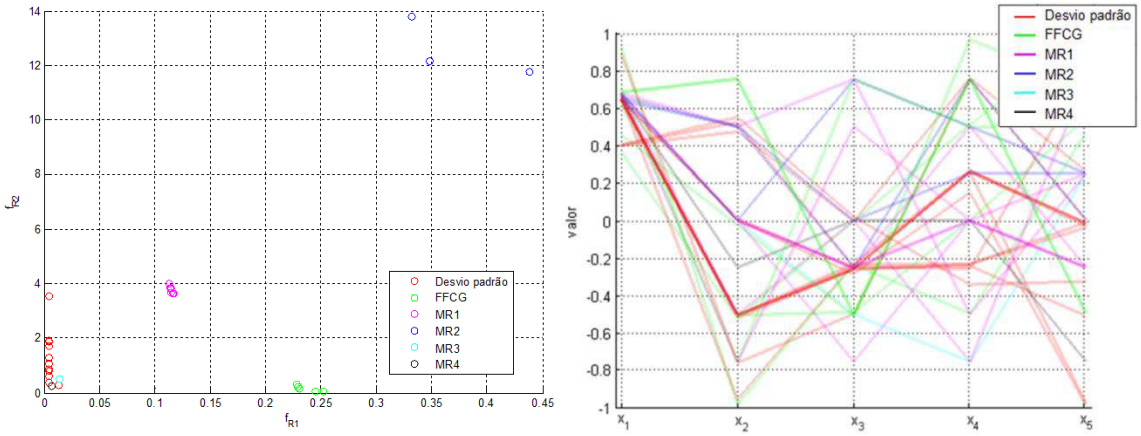
Figura 10-8 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *ConcurrentSlopes*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

Novamente o desvio padrão é a métrica com menores valores no espaço dos objetivos da Figura 10-8(a), seguida por MR4 e MR3, sendo que estas duas últimas têm valores próximos entre si. A métrica MR2 novamente é a que possui a fronteira com maiores valores de $f_{R1}(\cdot)$ e $f_{R2}(\cdot)$. As fronteiras das métricas FFCG e MR1 assumem valores intermediários, e próximos entre si.

A Figura 10-8(b) mostra que as métricas do desvio padrão, FFCG, MR1 e MR2 buscam por soluções nas regiões mais planas da *ConcurrentSlopes*, ou seja, nas regiões 4 e 5 da Figura 7-6(a). Porém, as métricas MR3 e MR4 convergem para pontos onde

$x_2 \approx 0{,}57$. Isto se deve a um fenômeno de *aliasing*, em que amostragem realizada pelo WCE é incapaz de identificar desvios (ruído) na função-objetivo. De fato, quando $x_2 \approx 0{,}57$, tem-se que $f_1(\mathrm{x}_1, x_2) \approx f_1(\mathrm{x}_1, x_2 \pm 0{,}5)$ e $f_2(\mathrm{x}_1, x_2) \approx f_2(\mathrm{x}_1, x_2 \pm 0{,}5)$ para qualquer x_1.

A Figura 10-9 apresenta o resultado da aplicação das métricas de robustez na função teste *Deb2Obj-1*.



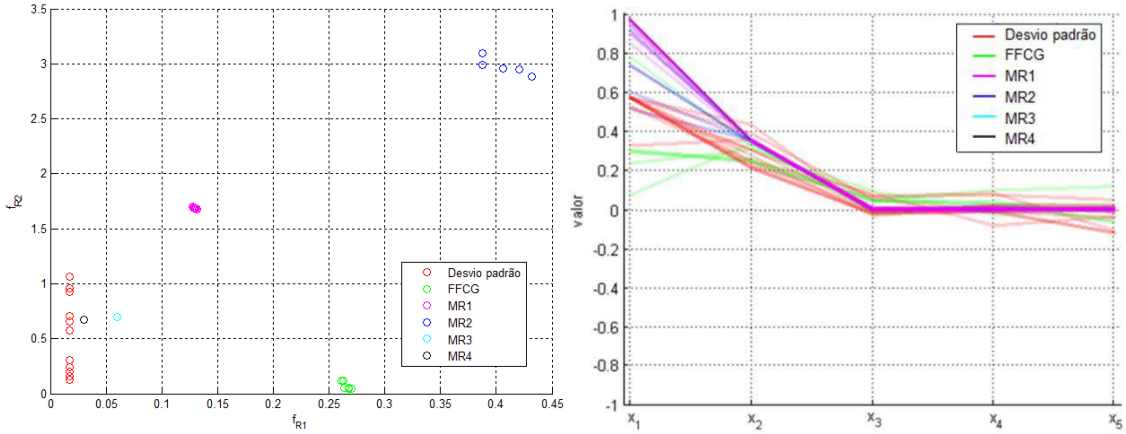
(a) (b)

Figura 10-9 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *Deb2Obj-1*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

Da Figura 10-9(a) nota-se que novamente o desvio padrão é a métrica com menores valores, seguida de MR4 e MR3. Tanto MR3 e MR4 encontram apenas um ponto no espaço dos objetivos. As métricas FFCG e MR1 possuem valores intermediários, e MR2 valores mais altos. Todas as fronteiras têm baixa cardinalidade.

Da Figura 10-9(b) percebe-se que a minimização das métricas de robustez não leva as soluções Pareto-ótimas aproximadas a nenhuma região específica do espaço das variáveis de decisão, o que é explicado pela própria natureza da função *Deb2Obj-1* descrita na Seção 7.6.

A Figura 10-10 apresenta o resultado da aplicação das métricas de robustez na função teste *Deb2Obj-2*.

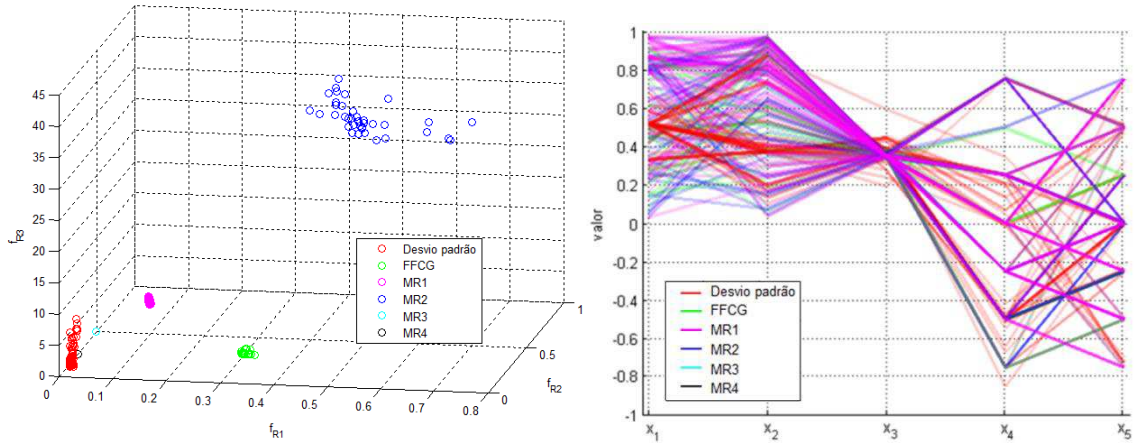


(a) (b)

Figura 10-10 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *Deb2Obj-2*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

A disposição das fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas na Figura 10-10(a) são similares às da Figura 10-9(a), apesar dos valores serem diferentes. No espaço das variáveis de decisão, Figura 10-10(b), tem-se que as métricas FFCG, MR1 e MR2 passam por $x_2 \approx 0{,}35$, tal como observado para o pior caso de incertezas da Figura 10-5(c). O desvio padrão, MR3 e MR4, também ficam próximos de $x_2 \approx 0{,}35$, mostrando que de fato esta é uma região de baixa variabilidade para as funções objetivo.

Por fim, a Figura 10-11 apresenta o resultado da aplicação das métricas de robustez na função teste *Deb3Obj*.



(a) (b)

Figura 10-11 – Comparativo das soluções providas pelas métricas de robustez na função *Deb3Obj*. Em (a) tem-se as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos objetivos e em (b) as variáveis de decisão de cada conjunto de soluções.

A *Deb3Obj* corresponde à própria função *Deb2Obj-2* para três objetivos. Assim, as fronteiras da Figura 10-11(a) apresentam disposição espacial similar às fronteiras da Figura 10-10(a), em que o desvio padrão assume os menores valores, seguido de uma solução única para MR3 e MR4. FFCG e MR1 assumem valores intermediários, enquanto MR2 assume os maiores valores.

A Figura 10-11(b) mostra que todas as soluções Pareto-ótimas aproximadas convergem para $x_3 \approx 0{,}35$, tal como visto na Figura 10-6(e) para o pior caso de incertezas. Ou seja, tanto a minimização do pior caso de incertezas quanto a minimização isolada das métricas de robustez identificam a mesma região robusta no espaço das variáveis de decisão.

10.2.2 Comparação Quantitativa

As tabelas a seguir mostram algumas métricas de desempenho referentes ao processo de minimização das métricas de robustez. Ao todo foram avaliados quatorze métodos aplicados em cinco funções teste. As métricas do desvio padrão, FFCG, MR1 e MR2 foram associadas, cada uma, a três métodos distintos em função do valor de $N_{samples}$ do LHS: 10, 100 e 1000, totalizando doze métodos, que somados às métricas MR3 e MR4 resultaram nos quatorze métodos.

Os testes foram repetidos onze vezes permitindo o cálculo de um valor médio e do desvio padrão das métricas empregadas, a fim de reduzir qualquer viés introduzido pela geração aleatória da população inicial dos MOEAs.

Cada uma das soluções das fronteiras Pareto-ótimas aproximadas por cada método foi perturbada. O desvio da solução perturbada em relação à solução nominal foi calculado para todas as soluções e sua média computada junto ao desvio padrão, sendo apresentados na Tabela 10-8.

A Tabela 10-9 apresenta a cardinalidade das fronteiras Pareto-ótimas aproximadas das métricas de robustez geradas por cada método para cada função teste. Isto é, o número de pontos distintos presentes em cada uma das fronteiras Pareto-ótimas geradas.

Tabela 10-8 – Média e desvio padrão das soluções Pareto-ótimas aproximadas das métricas de robustez perturbadas geradas por cada método para cada função teste.

	Offset Valleys	*ConcurrentSlopes*	*Deb2Obj-1*	*Deb2Obj-2*	*Deb3Obj*
Desvio padrão (10)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0024\\ 0{,}0021 \pm 0{,}0029\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0495 \pm 0{,}0290\\ 0{,}0132 \pm 0{,}0078\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}7892 \pm 0{,}5733\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 3{,}2633 \pm 2{,}1510\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}5627 \pm 1{,}1404\end{bmatrix}$
Desvio padrão (100)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0026\\ 0{,}0019 \pm 0{,}0027\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0251 \pm 0{,}0145\\ 0{,}0510 \pm 0{,}0295\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}6866 \pm 0{,}4825\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}4562 \pm 0{,}3365\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 2{,}4451 \pm 1{,}6235\end{bmatrix}$
Desvio padrão (1000)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0025\\ 0{,}0020 \pm 0{,}0028\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0237 \pm 0{,}0137\\ 0{,}0569 \pm 0{,}0329\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}5276 \pm 0{,}3764\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2225 \pm 0{,}1268\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0815 \pm 0{,}8343\end{bmatrix}$
FFCG (10)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0026\\ 0{,}0019 \pm 0{,}0027\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0506 \pm 0{,}0296\\ 0{,}0127 \pm 0{,}0075\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1703 \pm 0{,}1250\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2242 \pm 0{,}1771\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0859 \pm 0{,}8502\end{bmatrix}$
FFCG (100)	$\begin{bmatrix}0{,}0020 \pm 0{,}0028\\ 0{,}0019 \pm 0{,}0028\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0288 \pm 0{,}0166\\ 0{,}0387 \pm 0{,}0224\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}5985 \pm 0{,}4356\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}3982 \pm 0{,}3204\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}1186 \pm 0{,}8763\end{bmatrix}$
FFCG (1000)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0025\\ 0{,}0020 \pm 0{,}0028\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0475 \pm 0{,}0277\\ 0{,}0143 \pm 0{,}0085\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}7739 \pm 0{,}5594\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}3580 \pm 0{,}2805\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}1756 \pm 0{,}9181\end{bmatrix}$
MR1 (10)	$\begin{bmatrix}0{,}0024 \pm 0{,}0050\\ 0{,}0023 \pm 0{,}0049\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0350 \pm 0{,}0203\\ 0{,}0263 \pm 0{,}0153\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1218 \pm 0{,}0925\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2180 \pm 0{,}1483\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}1835 \pm 0{,}9526\end{bmatrix}$
MR1 (100)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0025\\ 0{,}0020 \pm 0{,}0028\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0356 \pm 0{,}0207\\ 0{,}0253 \pm 0{,}0148\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1250 \pm 0{,}0915\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2173 \pm 0{,}1291\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0743 \pm 0{,}8354\end{bmatrix}$
MR1 (1000)	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0024\\ 0{,}0021 \pm 0{,}0028\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0784 \pm 0{,}0488\\ 0{,}0056 \pm 0{,}0037\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1172 \pm 0{,}0873\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2169 \pm 0{,}1151\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0734 \pm 0{,}8338\end{bmatrix}$
MR2 (10)	$\begin{bmatrix}0{,}0027 \pm 0{,}0045\\ 0{,}0024 \pm 0{,}0043\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0419 \pm 0{,}0243\\ 0{,}0184 \pm 0{,}0108\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1281 \pm 0{,}0978\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2177 \pm 0{,}1169\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}1712 \pm 0{,}9515\end{bmatrix}$
MR2 (100)	$\begin{bmatrix}0{,}0018 \pm 0{,}0024\\ 0{,}0021 \pm 0{,}0029\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0213 \pm 0{,}0123\\ 0{,}0706 \pm 0{,}0408\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1270 \pm 0{,}0957\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2198 \pm 0{,}1130\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0927 \pm 0{,}8430\end{bmatrix}$
MR2 (1000)	$\begin{bmatrix}0{,}0018 \pm 0{,}0023\\ 0{,}0022 \pm 0{,}0030\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0261 \pm 0{,}0167\\ 0{,}0545 \pm 0{,}0320\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1231 \pm 0{,}0906\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2175 \pm 0{,}1107\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0792 \pm 0{,}8354\end{bmatrix}$
MR3	$\begin{bmatrix}0{,}0022 \pm 0{,}0033\\ 0{,}0019 \pm 0{,}0031\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0585 \pm 0{,}0346\\ 0{,}0096 \pm 0{,}0058\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1210 \pm 0{,}0870\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2168 \pm 0{,}1105\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0717 \pm 0{,}8333\end{bmatrix}$
MR4	$\begin{bmatrix}0{,}0019 \pm 0{,}0027\\ 0{,}0019 \pm 0{,}0027\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0426 \pm 0{,}0339\\ 0{,}0492 \pm 0{,}0375\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0035 \pm 0{,}0020\\ 0{,}1204 \pm 0{,}0907\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}2169 \pm 0{,}1106\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 0{,}0150 \pm 0{,}0087\\ 1{,}0759 \pm 0{,}8348\end{bmatrix}$

Tabela 10-9 – Cardinalidade das soluções Pareto-ótimas aproximadas das métricas de robustez geradas por cada método para cada função teste.

	OffsetValleys	*ConcurrentSlopes*	*Deb2Obj-1*	*Deb2Obj-2*	*Deb3Obj*
Desvio padrão (10)	6	15	10	18	30
Desvio padrão (100)	8	100	10	19	57
Desvio padrão (1000)	29	100	13	12	60
FFCG (10)	6	100	12	7	59
FFCG (100)	1	100	6	8	37
FFCG (1000)	4	100	7	6	27
MR1 (10)	1	100	3	7	51
MR1 (100)	71	100	13	10	53
MR1 (1000)	100	100	7	16	95
MR2 (10)	6	100	11	6	21
MR2 (100)	100	100	6	6	34
MR2 (1000)	100	100	3	5	37
MR3	100	100	1	1	1
MR4	100	100	1	1	1

Da Tabela 10-8 não é possível tirar conclusões entre os métodos testados, visto que o desvio padrão é elevado. Porém, é notável que MR3 e MR4, mesmo com uma única solução encontram soluções robustas de baixo desvio em relação à solução nominal, como era de se esperar, pois ambas as métricas partem exatamente deste objetivo. Em muitos casos o aumento do número de amostras não reduz a média dos desvios, o que pode ser explicado pelo aumento da cardinalidade como, por exemplo, no caso do desvio padrão na função *ConcurrentSlopes*. É importante ressaltar, no entanto, que as métricas MR3 e MR4 têm cardinalidade igual a um, como mostra a Tabela 10-9, de tal forma que a média não se aplica neste caso.

A Tabela 10-10 mostra o tempo de execução de cada uma das métricas junto ao MOEA frente a cada uma das funções teste. Baseando-se na implementação de cada um dos métodos e na amostragem de 1000 observações, tem-se que as métricas FFCG e MR2 são as mais lentas, seguidas da MR1 e depois do desvio padrão. As duas mais rápidas são as MR3 e MR4. Porém, como MR3 e MR4 dependem do número de variáveis de decisão, elas levam mais tempo para executar do que uma amostragem LHS de $N_{samples} = 100$ das funções teste com cinco variáveis: *Deb2Obj-1*, *Deb2Obj-2* e *Deb3Obj*, por exemplo.

Tabela 10-10 – Tempo de execução médio (em segundos) e desvio padrão de cada método de minimização das métricas de robustez para cada função teste.

	OffsetValleys	*ConcurrentSlopes*	*Deb2Obj-1*	*Deb2Obj-2*	*Deb3Obj*
Desvio padrão (10)	17,37±1,02	18,84±2,93	17,30±0,62	16,52±0,60	14,87±0,37
Desvio padrão (100)	23,76±0,68	23,42±0,78	22,62±0,29	23,79±0,40	21,81±0,43
Desvio padrão (1000)	104,41±0,65	95,01±0,49	73,16±0,69	91,00±0,40	92,99±0,37
FFCG (10)	23,10±2,51	15,45±1,28	26,85±0,46	31,81±2,75	25,17±0,68
FFCG (100)	35,18±3,89	27,28±0,51	34,73±1,22	3989±1,62	36,14±1,16
FFCG (1000)	142,11±2,77	131,82±0,35	110,02±2,19	139,81±3,17	138,08±1,42
MR1 (10)	25,26±4,09	15,78±0,92	28,29±2,62	29,03±0,87	24,93±1,12
MR1 (100)	27,64±1,59	27,18±0,29	35,16±1,27	37,77±1,24	33,52±0,45
MR1 (1000)	125,39±0,44	121,94±0,27	101,17±2,87	124,36±1,43	124,26±0,24
MR2 (10)	27,36±5,08	16,09±0,70	27,93±1,01	31,05±2,56	25,09±0,60
MR2 (100)	27,24±0,70	27,19±0,35	36,09±1,51	40,06±1,44	36,11±0,53
MR2 (1000)	140,95±1,24	136,21±0,51	113,93±1,39	142,39±1,63	141,51±0,46
MR3	15,90±0,13	17,02±0,79	68,99±0,51	68,22±0,48	71,11±0,90
MR4	15,91±0,15	16,49±1,67	68,26±0,51	68,32±0,19	70,19±0,86

A Tabela 10-11 apresenta a complexidade dos métodos em termos do número de avaliações da função objetivo. Para um tamanho de população, n_{pop} e número de gerações fixos do MOEA, n_{gen}, os métodos de amostragem dependem unicamente do número de amostras escolhido. Por outro lado, as métricas MR3 e MR4 dependem unicamente do número de variáveis de decisão e dos objetivos do problema.

Tabela 10-11 – Número de avaliações da função objetivo para cada método de minimização das métricas de robustez.

	$N_{samples} = 10$	$N_{samples} = 100$	$N_{samples} = 1000$	MR3	MR4
Número de avaliações	187440	1721040	17057040	153360 (*OffsetValleys*, *ConcurrentSlopes*) 255600 (*Deb2Obj-1*, *Deb2Obj-2*) 289680 *(Deb3Obj)*	153360 (*OffsetValleys*, *ConcurrentSlopes*) 255600 (*Deb2Obj-1*, *Deb2Obj-2*) 289680 *(Deb3Obj)*

10.3 Estudo da Aplicação do WCEMOEA e RHySPEA na Função OffsetValleys

As próximas Subseções apresentam diferentes soluções para a função *OffsetValleys* com incerteza, sendo que cada solução representa a solução teórica provida por diferentes métodos. As soluções são encontradas por meio de varreduras paramétricas com discretização de 0,005. Para encontrar soluções robustas são geradas amostras em torno de cada $\mathbf{x}$ avaliado, com discretização de 0,05. Para o valor da incerteza considerado, são geradas, portanto, $N_{samples} = 441$ em torno de cada solução nominal. Dessa forma, define-se um conjunto $\Omega(\mathbf{x})$ que representa a vizinhança da solução $\mathbf{x}$ com suas respectivas amostras, onde $|\Omega(\mathbf{x})| = N_{samples}$.

As Subseções 10.3.1, 10.3.2 e 10.3.3 apresentam, respectivamente, as soluções teóricas geradas por um MOEA convencional, por um MOEA orientado ao valor esperado das funções objetivo e por um MOEA orientado ao pior caso das incertezas. Estas soluções foram geradas com objetivo de gerar soluções de *benchmark* a serem comparadas com as soluções geradas pelos algoritmos propostos. A Subseção 10.3.4 apresenta as soluções teóricas geradas pelo RHySPEA-I e pelo RHySPEA-II. A Subseção 10.3.4.1 faz uma ressalva sobre a utilização do RHySPEA-I e do RHySPEA-II em problemas cujas dimensões tenham escalas diferentes.

10.3.1 Resolução da Função *OffsetValleys* com MOEA Convencional

O MOEA convencional não trata incertezas. Sendo assim, ele minimiza a função *OffsetValleys* sem efeito de perturbações em $\mathbf{x}$.

Durante o processo evolutivo do MOEA, quatro bacias de atração geradas pelas funções-base do problema podem ser encontradas, sendo duas de especial interesse: a gerada pelas funções-base 3 e a gerada pelas funções-base 4, conforme mostra a Tabela 7-2.

As funções-base 3 são responsáveis pela geração de uma fronteira Pareto-ótima local, enquanto as funções-base 4 são responsáveis pela geração de um fronteira Pareto-ótima global. A Figura 10-12(a) e a Figura 10-12(b) mostram, respectivamente, as fronteiras Pareto-ótimas locais teóricas e seus respectivos conjuntos de soluções eficientes locais, para as combinações das funções-base 3 e 4. A Figura 10-12(c) e a Figura 10-12(d) mostram, respectivamente, a fronteira Pareto-ótima global teórica e seu respectivo conjunto de soluções eficientes globais.

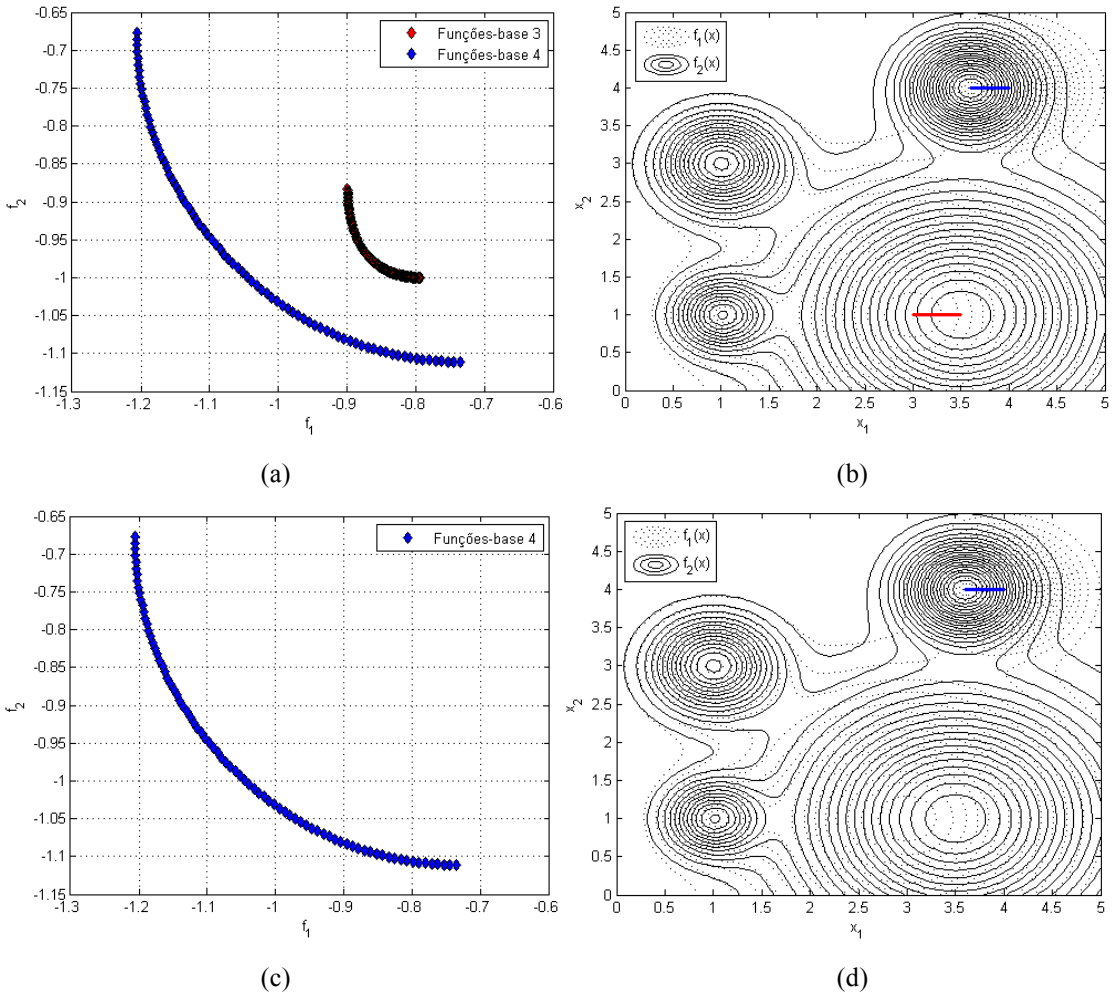


Figura 10-12 – Resultados do MOEA para *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço dos objetivos e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço dos objetivos com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas.

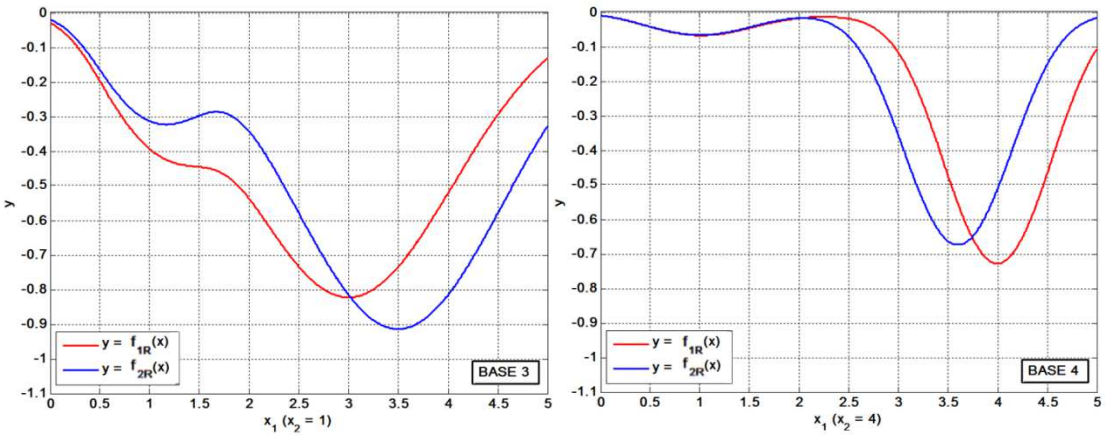
Das imagens da Figura 10-12, percebe-se que as soluções eficientes globais teoricamente obtidas pelo MOEA pertencem à bacia de atração menos robusta.

10.3.2 Resolução da Função *OffsetValleys* com MOEA para Valor Esperado

A utilização do valor esperado das funções objetivo é um dos métodos mais comuns de se obter soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas para um problema em cenário com incerteza. Em termos gerais, o método é o próprio MOEA com *fitness* modificada para cálculo do valor esperado das funções objetivo. Considerando o intervalo de incertezas $[-0{,}5\ ;\ 0{,}5]$ com densidade de probabilidade uniforme, a equação de média foi utilizada como aproximação do valor esperado, $f_{iR}(\mathbf{x})$ para cada objetivo i:

$$f_{iR}(\mathbf{x}): \quad y_i = \frac{1}{|\Omega(\mathbf{x})|} \sum_{\mathbf{x}' \in \Omega(\mathbf{x})} f_i(\mathbf{x}'). \tag{10-1}$$

A *fitness* modificada para a métrica de robustez, $f_{iR}(\mathbf{x})$, gera um novo contorno no espaço dos objetivos para a função *OffsetValleys*, cujo formato é apresentado em seções transversais na Figura 10-13(a) e na Figura 10-13(b) para $x_2 = 1$ e $x_2 = 4$, respectivamente.



(a) (b)

Figura 10-13 - Valores esperados de *OffsetValleys* na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4.

A Figura 10-13(a) e a Figura 10-13(b) mostram que os mínimos das funções-base 3 alcançam *fitness* menores do que os mínimos das funções-base 4.

De forma análoga ao que foi feito na Subseção 10.3.1, a Figura 10-14(a) e a Figura 10-14(b) mostram, respectivamente, as fronteiras Pareto-ótimas locais teóricas e seus respectivos conjuntos de soluções eficientes locais, para as combinações das funções-base 3 e 4. Neste caso, os valores mostrados no espaço dos objetivos advêm dos "valores esperados" da Equação (10-1). As soluções eficientes são mostradas ao longo das curvas de nível do contorno original. A Figura 10-14(c) e Figura 10-14(d) mostram, respectivamente, a fronteira Pareto-ótima global teórica e seu respectivo conjunto de soluções eficientes globais.

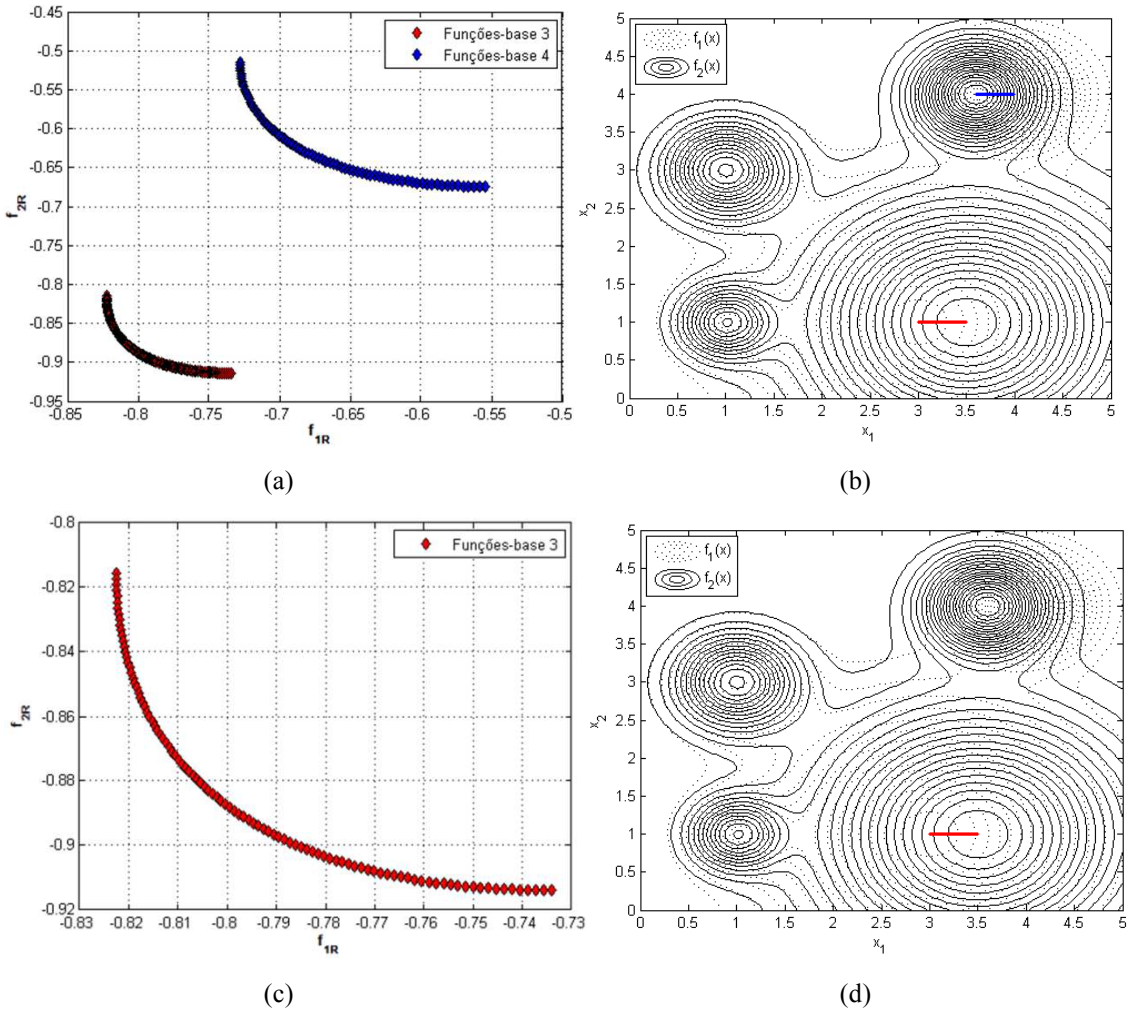


Figura 10-14 – Resultados do MOEA para o valor esperado de *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço dos objetivos e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço dos objetivos com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas.

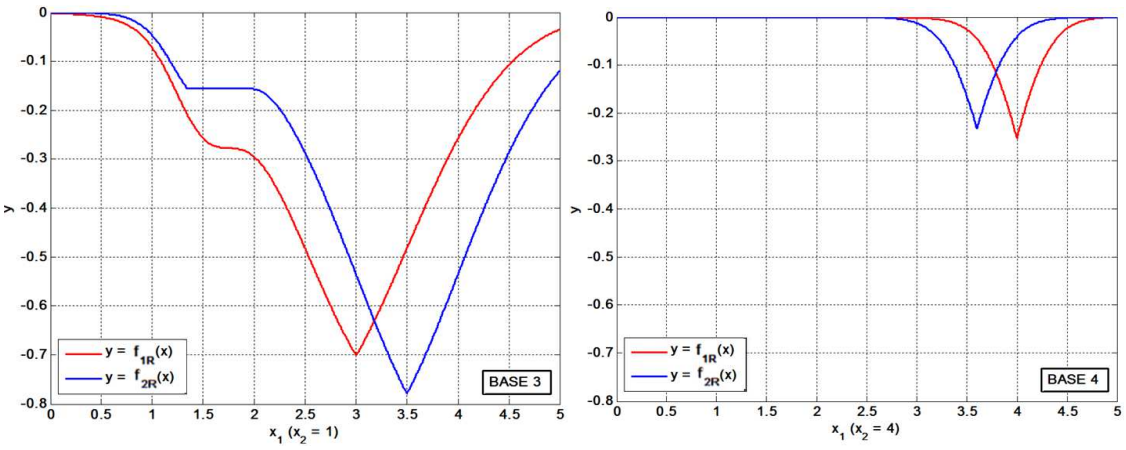
Das figuras acima, percebe-se que as soluções eficientes globais teoricamente obtidas pelo MOEA para o valor esperado pertencem à bacia de atração mais robusta.

10.3.3 Resolução da Função *OffsetValleys* com MOEA para Pior Caso de Incertezas

A utilização do pior caso de incertezas é um método também muito utilizado na literatura para se obter soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas para um problema em cenário com incerteza, e se baseia na filosofia do *minimax*. Em termos gerais, o método é o próprio MOEA com *fitness* modificada para cálculo do pior caso de incertezas. A equação de pior caso utilizada foi:

$$f_{iR}(\mathbf{x}) : \; y_i = \max_{\mathbf{x}' \in \Omega(\mathbf{x})} f_i(\mathbf{x}'). \qquad (10\text{-}2)$$

A *fitness* modificada para a métrica de robustez, $f_{iR}(\mathbf{x})$, gera um novo contorno no espaço dos objetivos para a função *OffsetValleys*, cujo formato é apresentado em seções transversais na Figura 10-15(a) e na Figura 10-15(b) para $x_2 = 1$ e $x_2 = 4$, respectivamente.



(a) (b)

Figura 10-15 – Valores do pior caso de incertezas de *OffsetValleys* na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4.

As figuras acima mostram que os mínimos das funções-base 3 alcançam *fitness* menores do que as funções-base 4.

De forma análoga ao que foi feito nas seções precedentes, a Figura 10-16(a) e a Figura 10-16(b) mostram, respectivamente, as fronteiras Pareto-ótimas locais teóricas e seus respectivos conjuntos de soluções eficientes locais, para as combinações das funções-base 3 e 4. Neste caso, os valores mostrados no espaço dos objetivos advêm dos "piores casos de incertezas" da Equação (10-2). As soluções eficientes são mostradas ao longo das curvas de nível do contorno original. A Figura 10-16(c) e a Figura 10-16(d) mostram, respectivamente, a fronteira Pareto-ótima global teórica e seu respectivo conjunto de soluções eficientes globais.

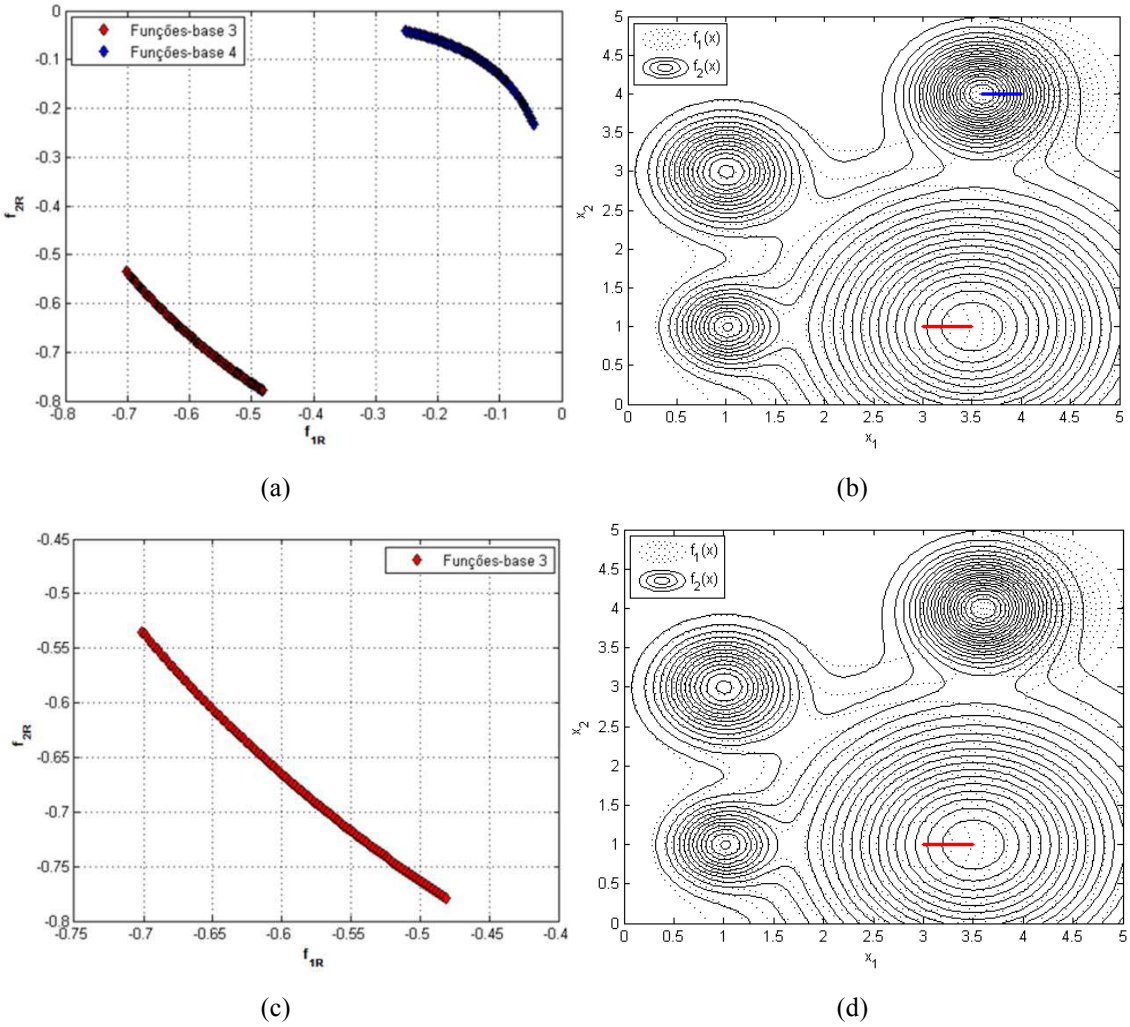


Figura 10-16 – Resultados do MOEA para o pior caso de incertezas de *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço dos objetivos e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço dos objetivos com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas.

Das imagens da Figura 10-16, percebe-se que as soluções eficientes globais teoricamente obtidas pelo MOEA para o pior caso de incertezas pertencem à bacia de atração mais robusta – funções-base 3. Note que a Figura 10-16(a) é um zoom da Figura 10-1(a) para o algoritmo WCEMOEA.

10.3.4 Resolução da Função *OffsetValleys* com RHySPEA-I e RHySPEA-II

Tanto o RHySPEA-I quanto o RHySPEA-II exigem que o tomador de decisão determine uma região de interesse no espaço dos objetivos dentro da qual as soluções são consideradas de alto desempenho, conforme explicado na Subseção 9.2.5.1. Esta determinação deve ser feita de posse da fronteira Pareto-ótima nominal apresentada na

Subseção 10.3.1. Para o presente estudo, utilizou-se uma tolerância de $\tau = 10\%$ para cada um dos dois objetivos.

A região de interesse é apresentada na Figura 10-17, como sendo a interseção de todos os retângulos no espaço dos objetivos.

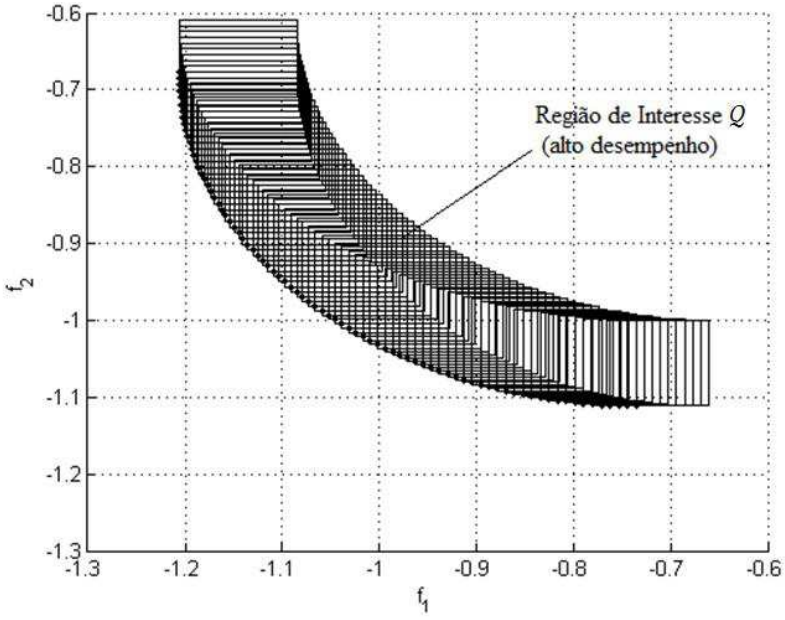


Figura 10-17 – Delimitação da região de interesse Q (região de alto desempenho), pela união de caixas intervalares oriundas da tolerância de 10% de depreciação em cada objetivo de *OffsetValleys*.

Fazendo a varredura paramétrica em $x_2 = 1$ e $x_2 = 4$ de forma a passar pelas fronteiras Pareto-ótimas definidas respectivamente pelas funções-base 3 e pelas funções-base 4, como mostra a Figura 10-18, percebe-se pela Figura 10-19 que ambas as fronteiras se encontram dentro da região de interesse. Na realidade, uma análise mais detalhada indica que a fronteira Pareto-ótima não-robusta (em verde) está totalmente contida na região de interesse, enquanto que a fronteira Pareto-ótima robusta (em vermelho) está parcialmente contida na região de interesse, visto que suas soluções extremas não estão contidas na região.

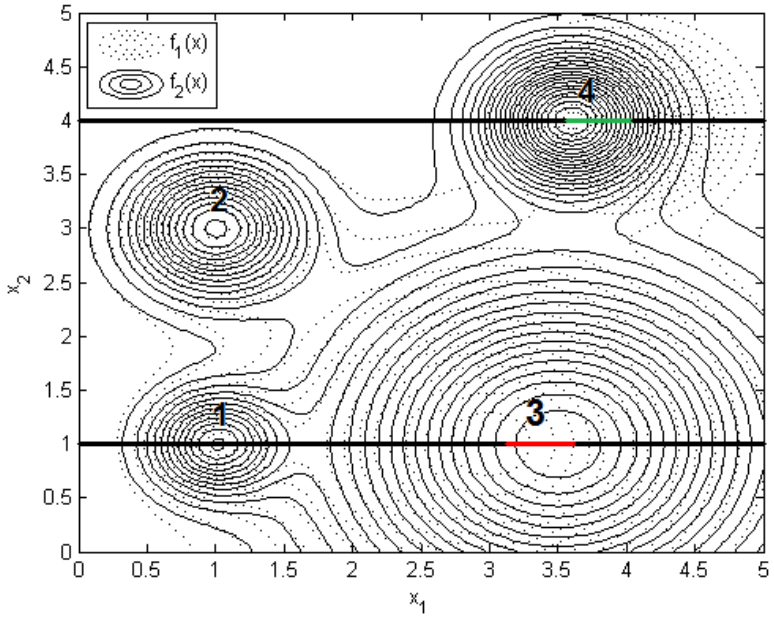


Figura 10-18 – Varredura paramétrica no espaço das variáveis de *OffsetValleys* fazendo x_1 variar para x_2=1 e x_2=4. Pontos verdes e vermelhos mostram, respectivamente, soluções das funções-base 4 e 3 contidas na região de interesse.

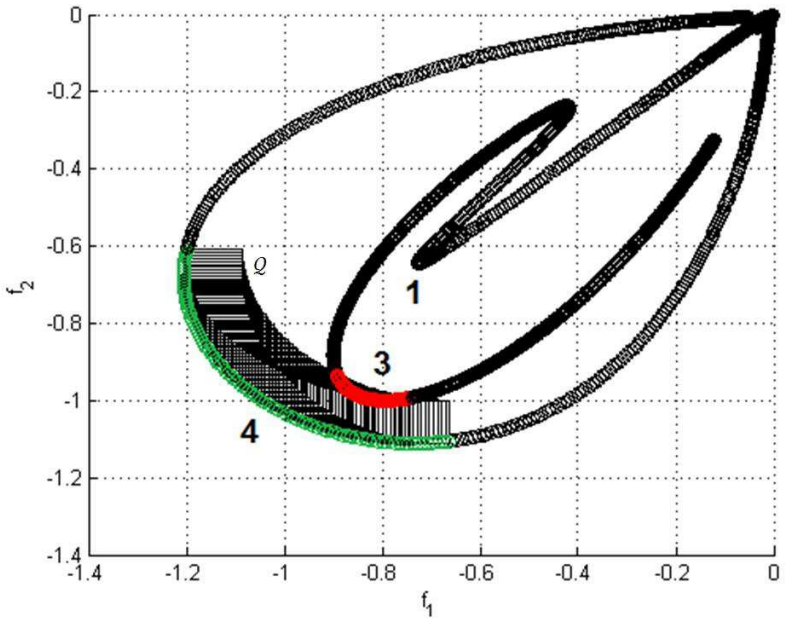


Figura 10-19 – Espaço dos objetivos de *OffsetValleys* com a região *Q* em evidência. Em verde tem-se a fronteira Pareto-ótima das funções-base 4, e em vermelho tem-se parte da fronteira Pareto-ótima das funções-base 3.

Todas as soluções situadas fora da região de interesse são consideradas soluções de baixo desempenho e, por isso, não atendem às preferências do DM.

Os métodos RHySPEA-I e RHySPEA-II asseguram a minimização das funções objetivo originais: $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, colocando-as em forma de restrições a serem atendidas, que se materializam como sendo a própria região de interesse. Para as soluções viáveis é aplicada uma *fitness* modificada para estimativa da sensibilidade das soluções. Considerando o intervalo de incertezas $[-0{,}5\,;\,0{,}5]$ com densidade de probabilidade uniforme, o RHySPEA-I utilizou a equação de média como aproximação do valor esperado da sensibilidade:

$$f_{iR}(\mathbf{x}):\ \ y_i = \frac{1}{|\Omega(\mathbf{x})|}\sum_{\mathbf{x}'\in\,\Omega(\mathbf{x})}\left(\frac{|f_i(\mathbf{x}')-f_i(\mathbf{x})|}{\sum_{k=1}^{2}|x'_k - x_k|}\right), \tag{10-3}$$

e o RHySPEA-II utilizou a seguinte equação de pior caso da sensibilidade:

$$f_{iR}(\mathbf{x}):\ \ y_i = \max_{\mathbf{x}'\in\,\Omega(\mathbf{x})}\left(\frac{|f_i(\mathbf{x}')-f_i(\mathbf{x})|}{\sum_{k=1}^{2}|x'_k - x_k|}\right). \tag{10-4}$$

A *fitness* modificada para a métrica de robustez, $f_{iR}(\mathbf{x})$, para os dois casos acima gera um contorno no espaço das sensibilidades para a função *OffsetValleys*, cujo formato é apresentado em seções transversais para o RHySPEA-I na Figura 10-20(a) com $x_2 = 1$ e na Figura 10-20(b) com $x_2 = 4$, e para o RHySPEA-II na Figura 10-20(c) com $x_2 = 1$ e na Figura 10-20(d) com $x_2 = 4$. A região de interesse nas figuras é delimitada por linhas tracejadas.

A aplicação do RHySPEA-I e do RHySPEA-II mostra que os mínimos das funções-base 3 na Figura 10-20(a) e na Figura 10-20(c) alcançam *fitness* menores que os mínimos das funções-base 4, considerando somente a região de interesse Q na Figura 10-20(b) e na Figura 10-20(d). Note, entretanto, que a *fitness* das funções-base 3 não é a de menor valor da Figura 10-20(a), dado que o ponto $\mathbf{x} = (0;\,1)$ apresenta valores ainda menores. Porém, a análise da *fitness* só é válida dentro da região de interesse Q demarcada nas figuras acima, denominada região de alto desempenho. Do contrário, a região em torno do ponto $\mathbf{x} = (2{,}25;\,4)$ seria a mais robusta em detrimento do desempenho, o que de fato é mostrado na Figura 7-3 e nas demais curvas de nível.

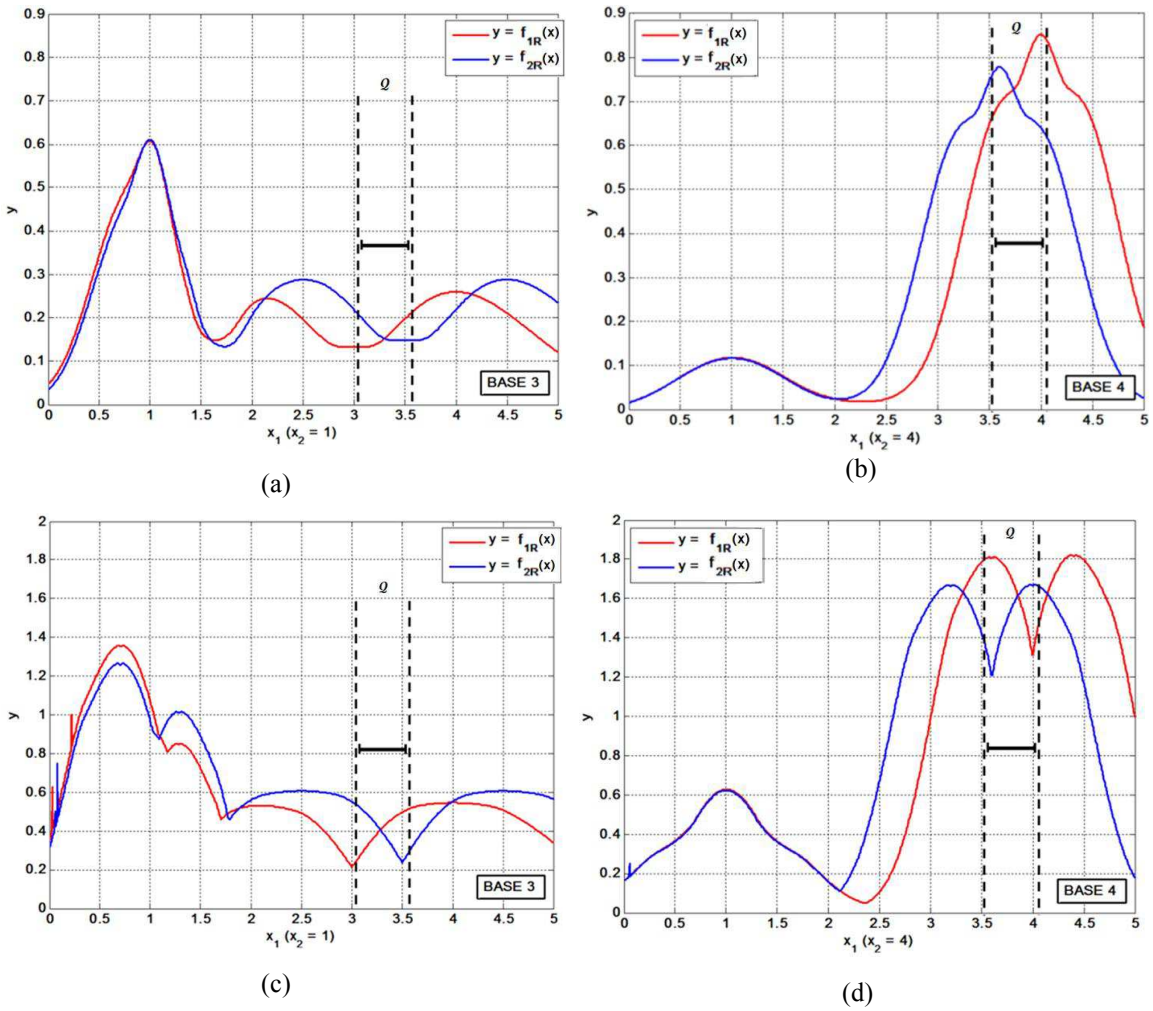


Figura 10-20 – Valores da sensibilidade média de *OffsetValleys* na (a) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1 para x_2=4. Valores da máxima sensibilidade das funções $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ na (c) seção transversal em x_1 para x_2=1, e na (d) seção transversal em x_1 para x_2=4. A região de interesse é delimitada por linhas tracejadas.

A Figura 10-21(a) e a Figura 10-21(b) mostram, respectivamente, as fronteiras Pareto-ótimas locais teóricas do RHySPEA-I no espaço das sensibilidades e seus respectivos conjuntos de soluções eficientes locais, para as combinações das funções-base 3 e 4. Neste caso, os valores mostrados no espaço das sensibilidades advêm da minimização da Equação (10-3). As soluções eficientes são mostradas ao longo das curvas de nível do contorno original. A Figura 10-21(c) e a Figura 10-21(d) mostram, respectivamente, a fronteira Pareto-ótima global teórica do RHySPEA-I no espaço das sensibilidades e seu respectivo conjunto de soluções eficientes globais.

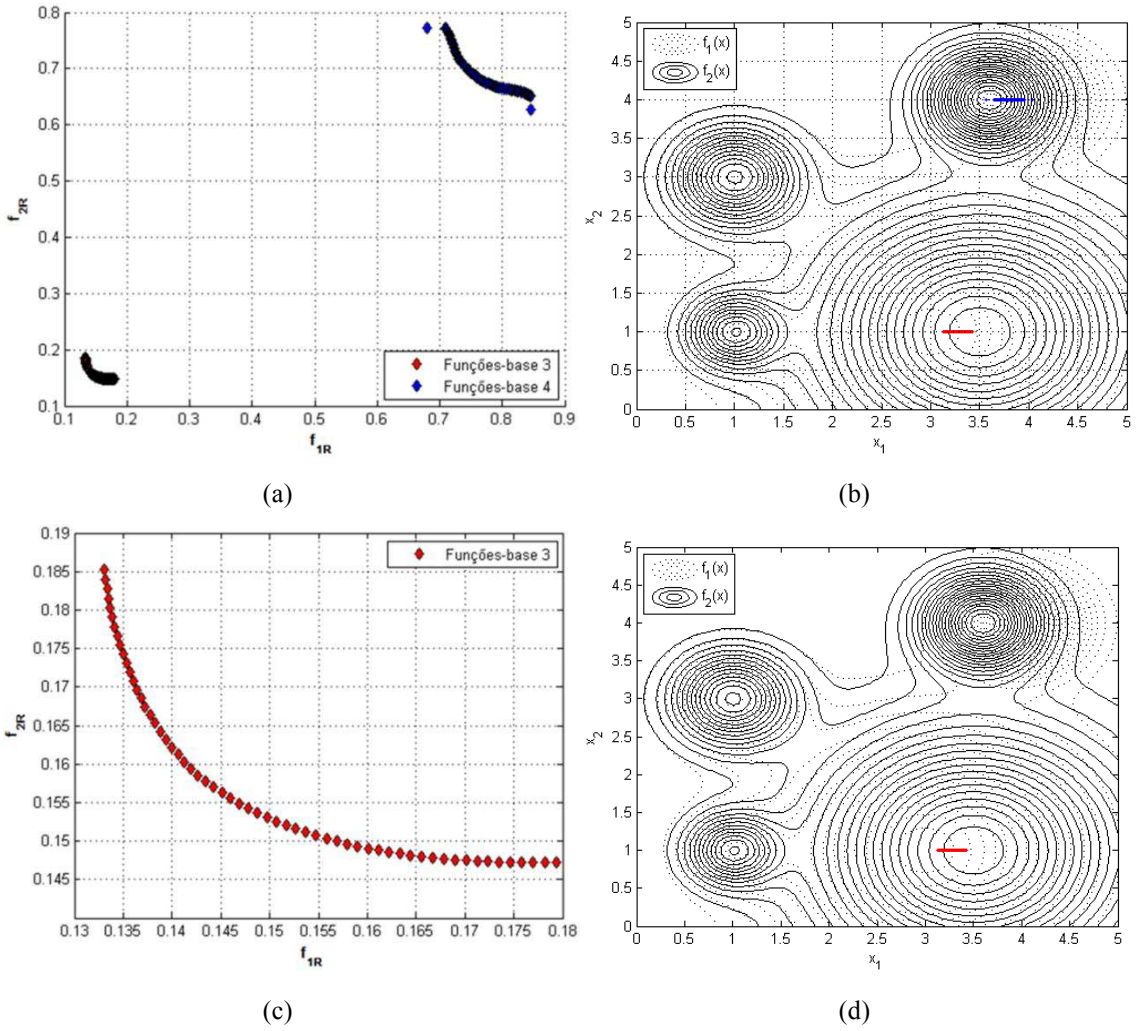


Figura 10-21 – Resultados do RHySPEA-I para *OffsetValleys*, com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço das sensibilidades e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se o zoom da fronteira Pareto-ótima global no espaço das sensibilidades com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas.

A Figura 10-21(a) acima revela que a fronteira Pareto-ótima local formada pelas funções-base 3 domina a fronteira Pareto-ótima local formada pelas funções-base 4 no espaço das sensibilidades, o que indica que as soluções das funções-base 3 são robustas.

A mesma análise procede ao aplicar o RHySPEA-II. A Figura 10-22(a) e a Figura 10-22(b) mostram, respectivamente, as fronteiras Pareto-ótimas locais teóricas do RHySPEA-II no espaço das sensibilidades e seus respectivos conjuntos de soluções eficientes locais, para as combinações das funções-base 3 e 4. Neste caso, os valores mostrados no espaço das sensibilidades advêm da minimização da Equação (10-4). As soluções eficientes são mostradas ao longo das curvas de nível do contorno original. A Figura 10-22(c) e a Figura 10-22(d) mostram, respectivamente, a fronteira Pareto-ótima

global teórica do RHySPEA-II no espaço das sensibilidades e seu respectivo conjunto de soluções eficientes globais.

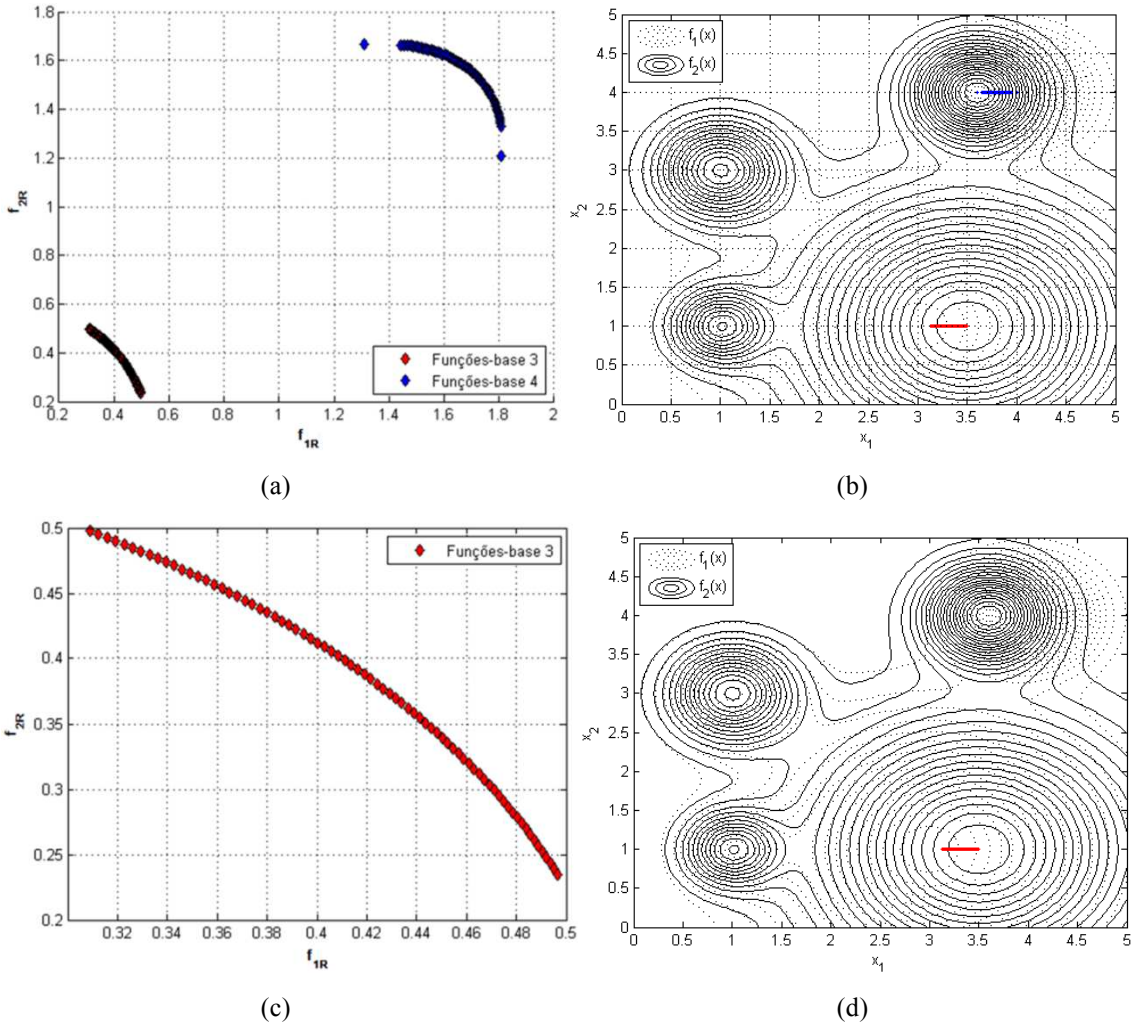


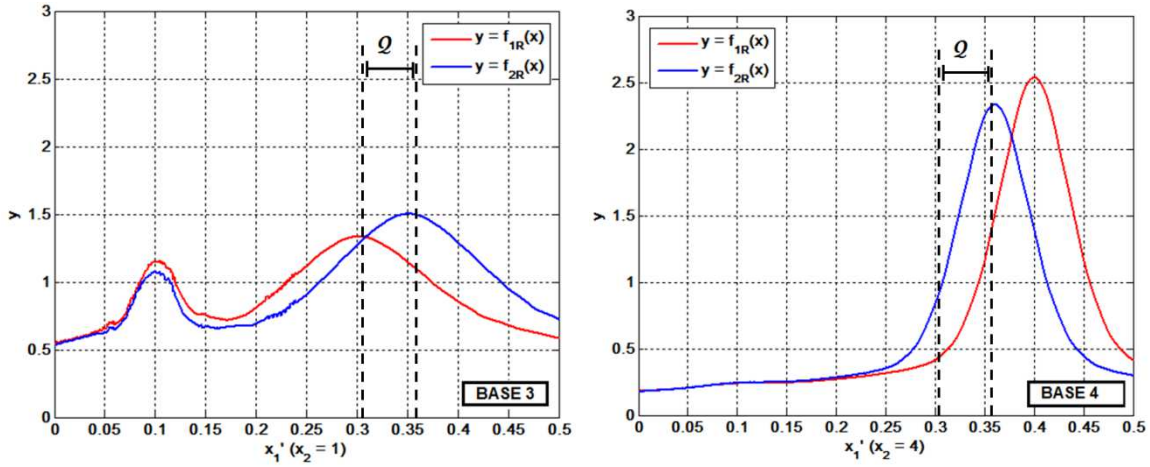
Figura 10-22 – Resultados do RHySPEA-II para *OffsetValleys* com as (a) fronteiras Pareto-ótimas locais aproximadas das funções-base 3 e 4 no espaço das sensibilidades e (b) suas respectivas soluções locais não-dominadas. Em (c) tem-se a fronteira Pareto-ótima global no espaço das sensibilidades com (d) suas respectivas soluções globais não-dominadas.

As soluções Pareto-ótimas robustas obtidas tanto pelo RHySPEA-I quanto pelo RHySPEA-II são idênticas, porém diferem das soluções Pareto-ótimas robustas obtidas nas Seções 10.3.2 e 10.3.3. Isto ocorre devido ao fato das soluções dos RHySPEAs serem não-dominadas no espaço das sensibilidades e somente dentro da região de alto desempenho, como apontado pela Figura 10-19.

10.3.4.1 Sobre a Normalização das Métricas do RHySPEA-I e RHySPEA-II

As dimensões x_1 e x_2 da função teste *OffsetValleys* têm a mesma escala. Logo o efeito da incerteza em uma dimensão é equivalente ao efeito da mesma incerteza na outra dimensão. As escalas das funções objetivo também são equivalentes. Ou seja, não há disparidade de escala em nenhuma dimensão da função teste. Portanto, as métricas MR1 e MR2 podem ser utilizadas, respectivamente, no RHySPEA-I e no RHySPEA-II sem qualquer tipo de normalização, como apresentadas nas Equações (9-18) e (9-19). Porém, cabe ressaltar que as funções objetivo e as variáveis de decisão devem ser normalizadas caso as escalas sejam muito diferentes entre si.

Para ilustrar a necessidade de normalização das métricas, considere uma nova função teste chamada *OffsetValleys2* cuja formulação seja representada pela Equação (7-4) com uma alteração de escala de dez vezes na dimensão de x_1, obtendo-se assim uma nova dimensão x_1' ($x_1' = 10x_1$), em que $x_1' \in [0; 0{,}5]$. A aplicação do RHySPEA-I e RHySPEA-II na *OffsetValleys2*, sem normalização das métricas MR1 e MR2, resultará em valores distintos dos observados na Subseção anterior, e consequentemente soluções diferentes para o problema de otimização robusta. Para ilustrar o exposto, as imagens da Figura 10-23 replicam para a *OffsetValleys2* a análise da sensibilidade média feita para a *OffsetValleys* nas imagens (a) e (b) da Figura 10-20.



(a) (b)

Figura 10-23 – Valores da sensibilidade média de *OffsetValleys2* na (a) seção transversal em x_1' para x_2=1, e na (b) seção transversal em x_1' para x_2=4.

A Figura 10-23(a) revela que a mudança de escala e a aplicação do RHySPEA-I sem normalização nas variáveis de decisão gera valores de métricas de robustez

diferentes dos obtidos na Figura 10-20(a). De fato, a região de alto desempenho, Q, é a região menos robusta nas funções-base 3 da *OffsetValleys2*, o que não ocorre na *OffsetValleys*. Em relação à região Q das funções-base 4, ela permanece sendo a região menos robusta. No entanto, as funções $f_{1R}(\mathbf{x})$ e $f_{2R}(\mathbf{x})$ deixam de ser conflitantes nesta região.

Todas estas diferenças de métricas de robustez entre as funções teste *OffsetValleys* e *OffsetValleys2* decorrem da diferença de escala nas variáveis de decisão, e levam a soluções ótimas robustas diferentes.

10.4 Estudo da Aplicação do WCEMOEA e RHySPEA na Função Deb2Obj-1

10.4.1 Resolução da Função *Deb2Obj-1* com o WCEMOEA

Os parâmetros do WCEMOEA são apresentados na Tabela 10-12.

Tabela 10-12 – Valores dos parâmetros do WCEMOEA para resolução de *Deb2Obj-1*.

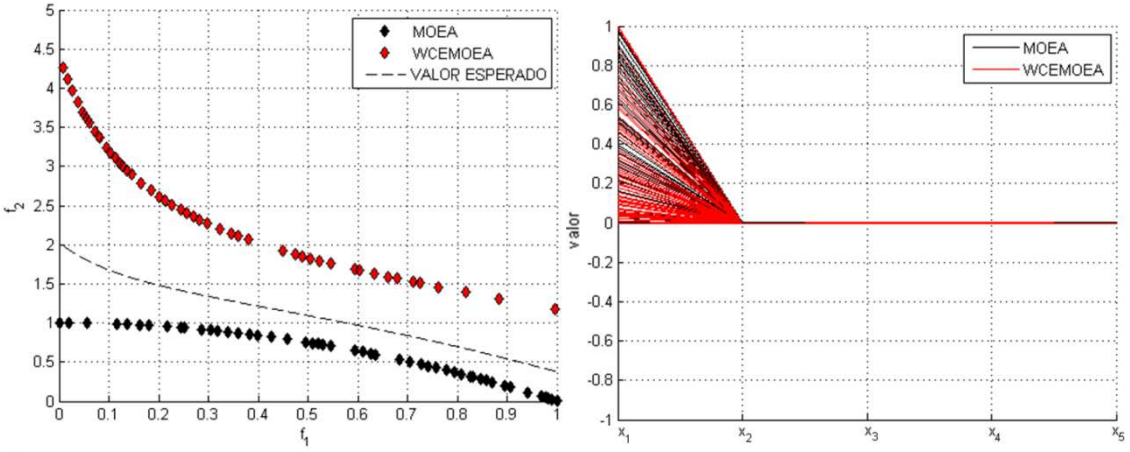
Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	120
n_{gen}	Número de gerações	150
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
n_{rep}	Número de execuções do WCEMOEA	8

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

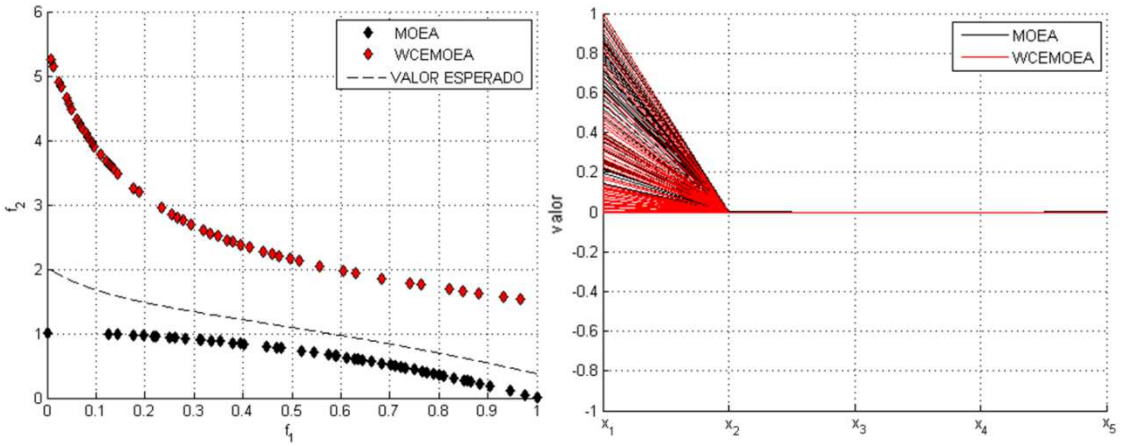
A Figura 10-24(a), a Figura 10-24(c), a Figura 10-24(e) e a Figura 10-24(g) expõem um comparativo entre $\widetilde{FP}^*$ do problema calculada pelo MOEA convencional (NSGA-II), a fronteira Pareto-ótima robusta teórica dos valores esperados das funções objetivo fornecida em (DEB e GUPTA, 2006) e a $\widetilde{FPR}^*$ do pior caso de incertezas obtida pelo WCEMOEA, todas para a função *Deb2Obj-1* com $\delta = 0{,}007$, $\delta = 0{,}008$,

$\delta = 0{,}009$ e $\delta = 0{,}01$, respectivamente. A Figura 10-24(b), a Figura 10-24(d), a Figura 10-24(f) e a Figura 10-24(h) expõem as soluções Pareto-ótimas aproximadas obtidas por cada método para a função *Deb2Obj-1* com $\delta = 0{,}007$, $\delta = 0{,}008$, $\delta = 0{,}009$ e $\delta = 0{,}01$, respectivamente.

A solução Pareto-ótima do valor esperado para *Deb2Obj-1* é idêntica à solução nominal calculada pelo MOEA (DEB e GUPTA, 2006) e, por isso, não é representada no espaço das variáveis de decisão da Figura 10-24.



(a) (b)



(c) (d)

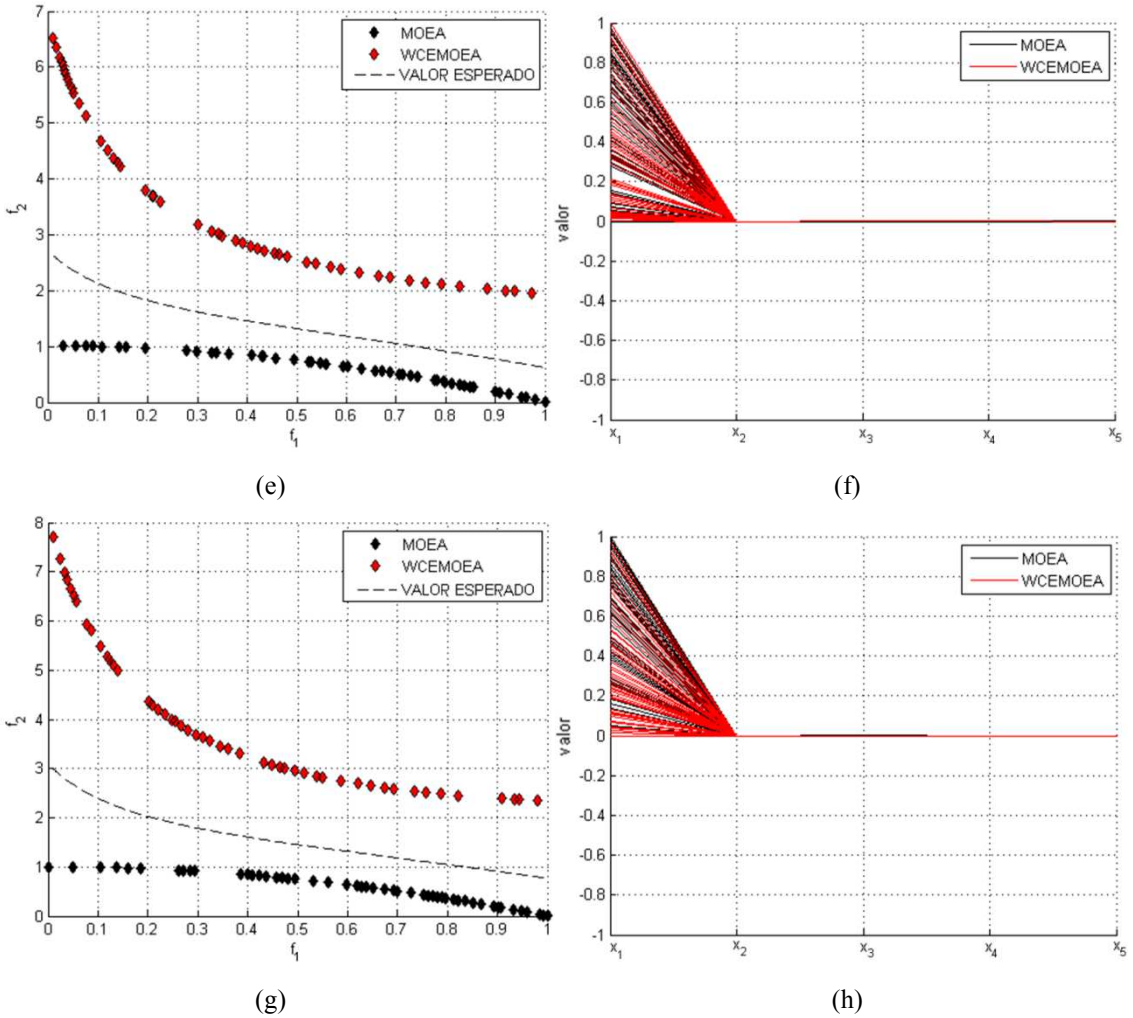


Figura 10-24 – (a) fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço dos macro-objetivos de *Deb2Obj-1* obtidas pelo MOEA (losango preto), pelo WCEMOEA (losango vermelho) e segundo o valor esperado das funções objetivo (linha tracejada) para δ=0,007, (c) δ=0,008, (e) δ=0,009 e (g) δ=0,01, e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas do MOEA (preto) e do WCEMOEA (vermelho) para δ=0,007, (d) δ=0,008, (f) δ=0,009 e (h) δ=0,01.

As imagens à esquerda da Figura 10-24 demonstram que as fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas tanto para o valor esperado dos objetivos quanto para o pior caso das incertezas são gradativamente deslocadas para cima em função do aumento de δ. A formação das fronteiras se dá de forma uniforme e espalhada ao longo do espaço dos objetivos. Também é possível perceber das figuras a mudança no formato das fronteiras Pareto-ótimas aproximadas quando elas passam a ser robustas, deixam de ser côncavas para serem cada vez mais convexas à medida que δ aumenta.

Os macro-objetivos do MOEA na Figura 10-24 são os próprios objetivos de *Deb2Obj-1*.

10.4.2 Resolução da Função *Deb2Obj-1* com o RHySPEA-I e RHySPEA-II

Os parâmetros do RHySPEA-I e RHySPEA-II são apresentados na Tabela 10-13.

Tabela 10-13 – Valores dos parâmetros do RHySPEA para resolução de *Deb2Obj-1*.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	120
n_{gen}	Número de gerações	150
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
$n^X{}_{prof}$	Profundidade de partição no espaço de decisão	9
$n^Y{}_{prof}$	Profundidade de partição no espaço dos objetivos	7
s_{min}	Amostragem mínima nas caixas de incertezas	30
n_{rep}	Número de execuções do RHySPEA	8

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

Além dos parâmetros da Tabela 10-13, os seguintes parâmetros foram ajustados para a função *Deb2Obj-1*:

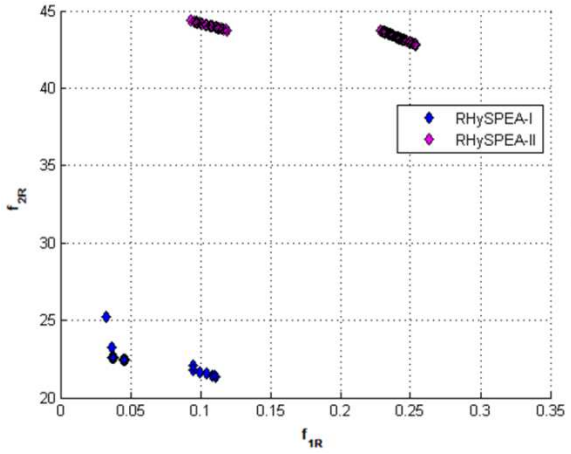
$$\tau = \begin{bmatrix} 40\% \\ 200\% \end{bmatrix},$$

$$\left[\underline{\tilde{\mathbf{X}}}\ \overline{\tilde{\mathbf{X}}}\right] = \begin{bmatrix} -\delta & 1+\delta \\ -1-2\delta & 1+2\delta \\ -1-2\delta & 1+2\delta \\ -1-2\delta & 1+2\delta \\ -1-2\delta & 1+2\delta \end{bmatrix},$$

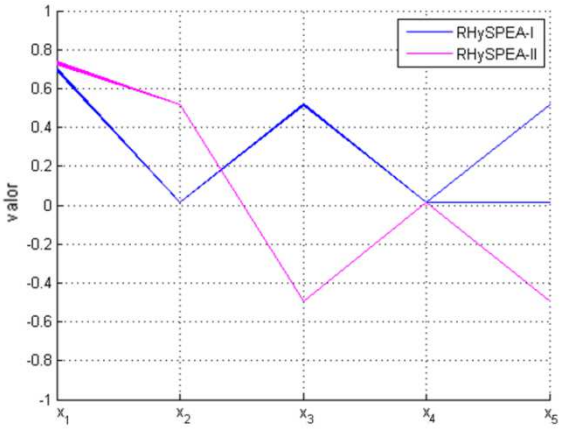
$$[\mathbf{Y}] = \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \begin{matrix} 0 \le y_1 \le 1{,}5 \\ 0 \le y_2 \le 80 \end{matrix} \right\}.$$

Do exposto acima, se observa que a caixa $[\mathbf{Y}]$ é grande em demasia para comportar altos valores de $y_2 = f_2(\mathbf{x})$. Note que, se $x_1 = 0$ e $x_i = 0{,}25\ \forall i$, então $y_2 = 400$. Para estes casos em que $y_2 > 80$, o indexador mapeia hipercubos na borda de $[\mathbf{Y}]$ como se $y_2 = 80$. A alta tolerância de y_2 (200%) é justificada pelo mesmo motivo.

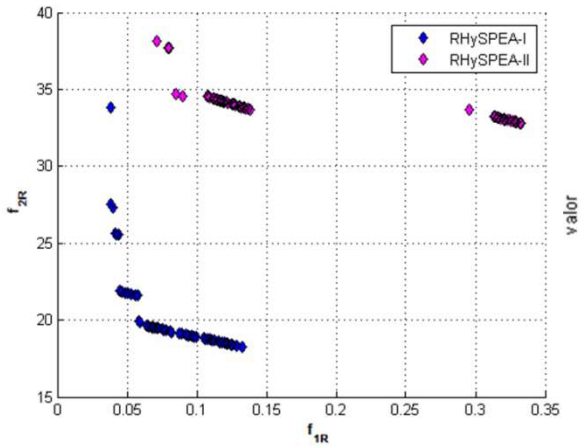
A Figura 10-25(a), Figura 10-25(c), Figura 10-25(e) e a Figura 10-25(g) expõem um comparativo entre as fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas pelo RHySPEA-I e pelo RHySPEA-II no espaço das sensibilidades para a função *Deb2Obj-1* com $\delta = 0{,}007$, $\delta = 0{,}008$, $\delta = 0{,}009$ e $\delta = 0{,}01$, respectivamente. A Figura 10-25(b), a Figura 10-25(d), a Figura 10-25(f) e a Figura 10-25(h) expõem as soluções Pareto-ótimas aproximadas obtidas por cada método para a função *Deb2Obj-1* com $\delta = 0{,}007$, $\delta = 0{,}008$, $\delta = 0{,}009$ e $\delta = 0{,}01$, respectivamente.



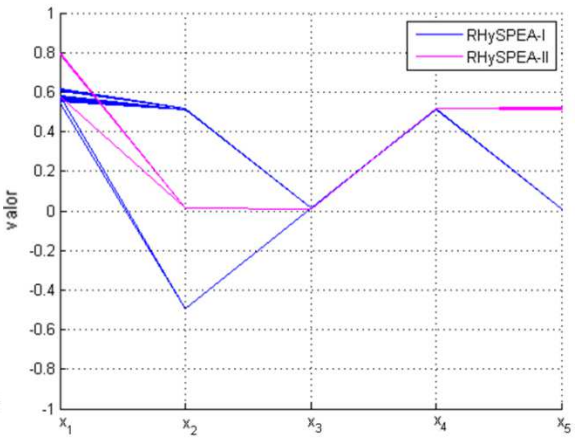
(a)



(b)



(c)



(d)

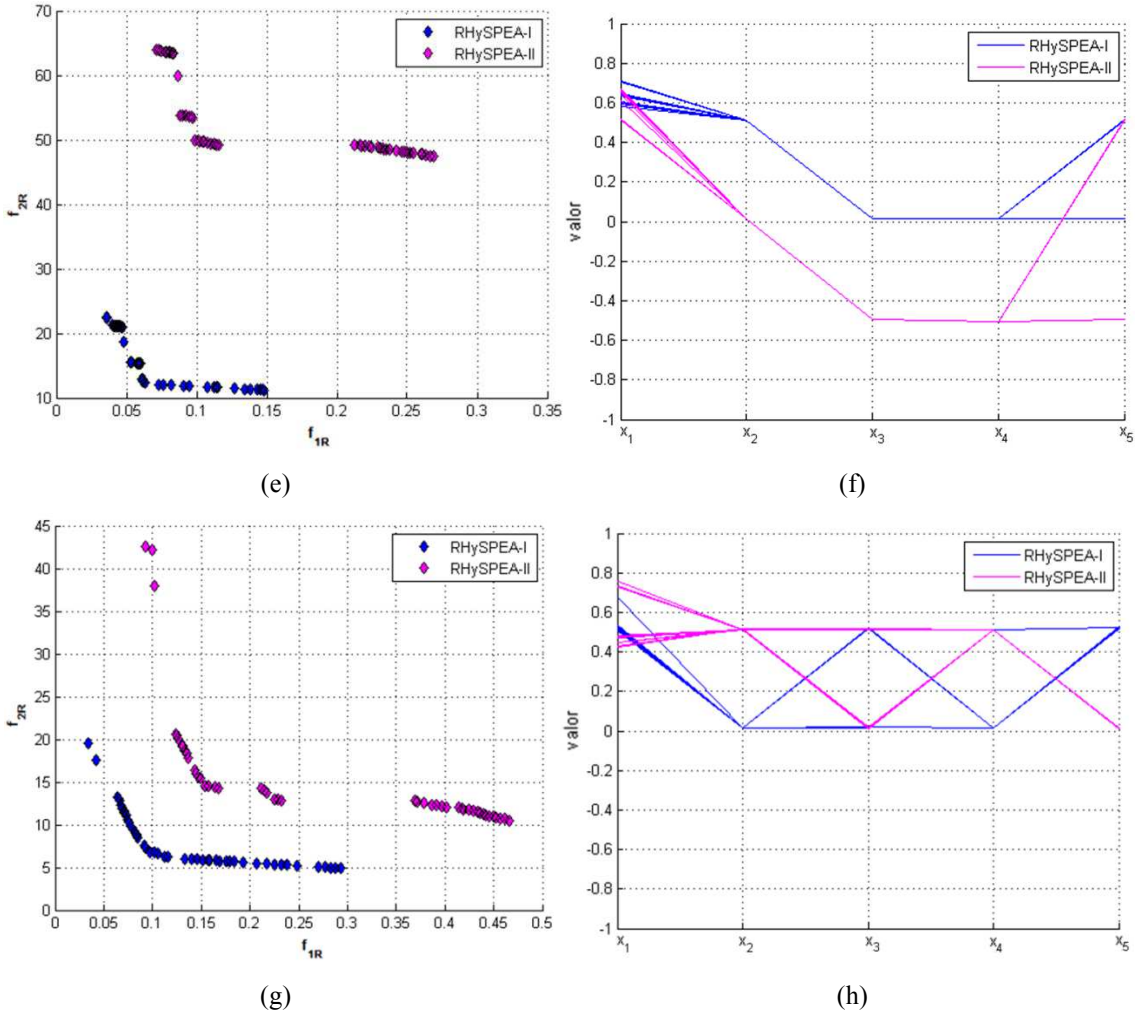


Figura 10-25 – (a) fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço das sensibilidades de *Deb2Obj-1* obtidas pelo RHySPEA-I (losango azul) e pelo RHySPEA-II (losango magenta) para δ=0,007, (c) δ=0,008, (e) δ=0,009 e (g) δ=0,01, e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas do RHySPEA-I (azul) e do RHySPEA-II (magenta) para δ=0,007, (d) δ=0,008, (f) δ=0,009 e (h) δ=0,01.

As imagens à esquerda da Figura 10-25 demonstram que as fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas no espaço das sensibilidades, tanto para o valor esperado dos objetivos quanto para o pior caso das sensibilidades, são gradativamente deslocadas para baixo em função do aumento de δ. Exceto para a $\widetilde{FPR}^*$ do RHySPEA-II na Figura 10-25(e). Outro comportamento possível de ser observado é o fato das fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas pelo RHySPEA-II serem mais descontínuas que as aproximadas pelo RHySPEA-I. Apesar disso, a formação das fronteiras-Pareto ótimas robustas se dá de forma uniforme e espalhada ao longo do espaço das sensibilidades. Também é possível perceber pelas imagens à esquerda da Figura 10-25 uma mudança no formato das fronteira Pareto-ótimas aproximadas quando

elas passam a ser robustas; elas deixam de ser côncavas para serem cada vez mais convexas à medida que δ aumenta.

Diferentemente do que ocorreu para as soluções Pareto-ótimas robustas da Subseção 10.4.1, as soluções Pareto-ótimas robustas encontradas pelos RHySPEAs não são as mesmas das soluções Pareto-ótimas não-robustas, como mostram as imagens à direita da Figura 10-25. Isto revela que o conceito de robustez é relativo e depende fundamentalmente da métrica de robustez utilizada pelo algoritmo de otimização.

A Figura 10-26(a), a Figura 10-26(b), a Figura 10-26(c) e a Figura 10-26(d) mostram as respostas das soluções robustas obtidas pelo RHySPEA-I e RHySPEA-II no espaço dos objetivos da função *Deb2Obj-1* com $\delta = 0{,}007$, $\delta = 0{,}008$, $\delta = 0{,}009$ e $\delta = 0{,}01$, respectivamente.

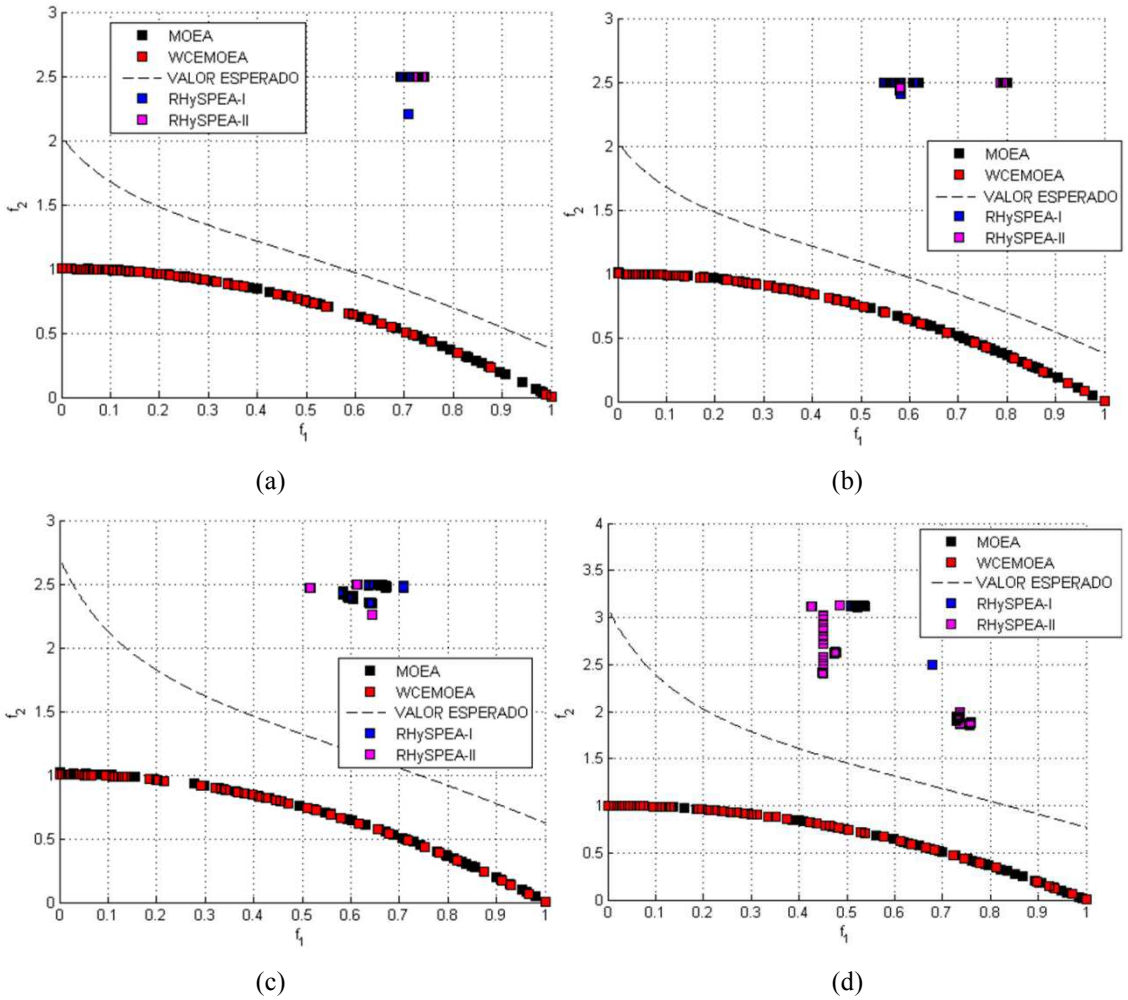


Figura 10-26 – Distribuição das soluções Pareto-ótimas no espaço dos objetivos de *Deb2Obj-1* obtidas pelo MOEA (quadrado preto), pelo WCEMOEA (quadrado vermelho), pelo RHySPEA-I (quadrado azul), e pelo RHySPEA-II (quadrado magenta), e a fronteira Pareto-ótima teórica do valor esperado das funções objetivo (linha tracejada) para (a) δ=0,007, (b) δ=0,008, (c) δ=0,009 e (d) δ=0,01.

Das imagens da Figura 10-26 é possível perceber um distanciamento das soluções robustas dos RHySPEAs em relação à $\widetilde{FP}^*$, composta por soluções nominais do MOEA e por soluções robustas do WCEMOEA. Apesar disso, as soluções dos RHySPEAs estão dentro da região de alto desempenho e, teoricamente, são tão boas quanto as soluções pertencentes à $\widetilde{FP}^*$. No mais, tem-se a garantia que as soluções do RHySPEA-I são as de menor média de sensibilidade dentro da região de interesse, e as do RHySPEA-II são as de menor pior caso de sensibilidade dentro da região de interesse.

Comparando-se os resultados do WCEMOEA da Figura 10-26 e Figura 10-4, nota-se que as soluções são as mesmas produzidas pelo MOEA convencional, ou seja, coincidem com as soluções Pareto-ótimas não-robustas, como é de se esperar para a *Deb2Obj-1*. Por outro lado, o RHySPEA, tanto para a métrica MR1 quanto para a métrica MR2, encontra soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas para a *Deb2Obj-1* em diferentes regiões do espaço, conforme visto na Figura 10-9(b), o que impede qualquer tipo de convergência para a fronteira Pareto-ótima não-robusta.

10.5Estudo da Aplicação do MDEA-RF nas Funções SinusoidalFunction, MultiPeaksFunction e ConcurrentSlopes

As próximas Subseções apresentam diferentes soluções para as funções *SinusoidalFunction*, *MultiPeaksFunction* e *ConcurrentSlopes* com incertezas por meio da aplicação do MDEA-RF com diferentes valores para o fator de robustez λ. Como visto na Seção 9.3, o MDEA-RF faz uso da métrica MR3 explicada na Subseção 8.2.2, que se baseia no máximo desvio em torno da solução nominal. Esta é uma heurística para o desvio padrão da função objetivo da solução nominal e, portanto, seus resultados nas subseções seguintes foram comparados com os resultados obtidos pela métrica MR0, que é a estimativa do próprio desvio padrão da função objetivo $f_i(\mathbf{x})$ calculada por simulação Monte Carlo da seguinte forma (JIN e BRANKE, 2005):

$$\text{MR0:}\quad \tilde{\sigma}\big(f_i(\mathbf{x})\big) = \sqrt{\frac{1}{N_{samples}-1}\sum_{\mathrm{k}=1}^{N_{samples}}\big(f_i(\mathbf{x}+\mathbf{p_k}) - \tilde{E}[f_i(\mathbf{x})]\big)^2}, \qquad (10\text{-}5)$$

$$\mathbf{p_k} \in \mathcal{P}, \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \mathrm{i} = \{1,2,\dots,n_f\},$$

em que a estimativa do valor esperado da função objetivo é calculada assim:

$$\tilde{E}[f_i(\mathbf{x})] = \frac{1}{N_{samples}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{N_{samples}} f_i(\mathbf{x}+\mathbf{p_k}). \qquad (10\text{-}6)$$

A Equação (10-5) calcula a estimativa do desvio padrão $\sigma(\cdot)$ da Equação (5-6). O valor $N_{samples}$ representa o número de amostras em torno da solução $\mathbf{x}$. A simulação Monte Carlo foi feita escolhendo-se aleatoriamente as perturbações $\mathbf{p_k}$ em torno da solução com $N_{samples} = 1000$. O *framework* da Figura 9-7 foi o mesmo utilizado para ambas as métricas de robustez $f_R(\cdot)$: MR0 e MR3.

Como MR3 é uma heurística de MR0, espera-se que ambas as métricas guiem o processo de otimização robusta para o mesmo conjunto de soluções em função do λ escolhido.

Embora o fator de robustez $\boldsymbol{\lambda}$ descrito na Subseção 9.3.3 seja um vetor de mesmo tamanho que o número de objetivos, n_f, nos testes realizados ele foi considerado escalar (λ), o que significa que o mesmo peso para robustez foi aplicado a todas as funções objetivo, não existindo nenhuma preferência de um objetivo em relação aos demais. Vinte e um resultados ótimos robustos foram gerados para cada função teste por conta da variação incremental de $0{,}05$ do fator de robustez, de tal forma que $\lambda = \{0{,}00;\ 0{,}05;\ 0{,}10; \ldots; 0{,}95;\ 1{,}00\}$, possibilitando a análise do comportamento das soluções ótimas robustas aproximadas em função da variação de λ.

Com exceção do fator de robustez, os outros parâmetros foram mantidos constantes em todas as execuções e são apresentados na Tabela 10-14.

Tabela 10-14 – Valores dos parâmetros do MDEA-RF para resolução das funções teste *SinusoidalFunction*, *MultiPeaksFunction* e *ConcurrentSlopes*.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	100
n_{gen}	Número de gerações	150
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
λ	Fator de robustez	(variável)
n_{rep}	Número de execuções do método	10

Devido à limitação do MDEA-RF em lidar com regiões côncavas da fronteira Pareto explicada na Subseção 9.3.6, seus resultados foram comparados com os

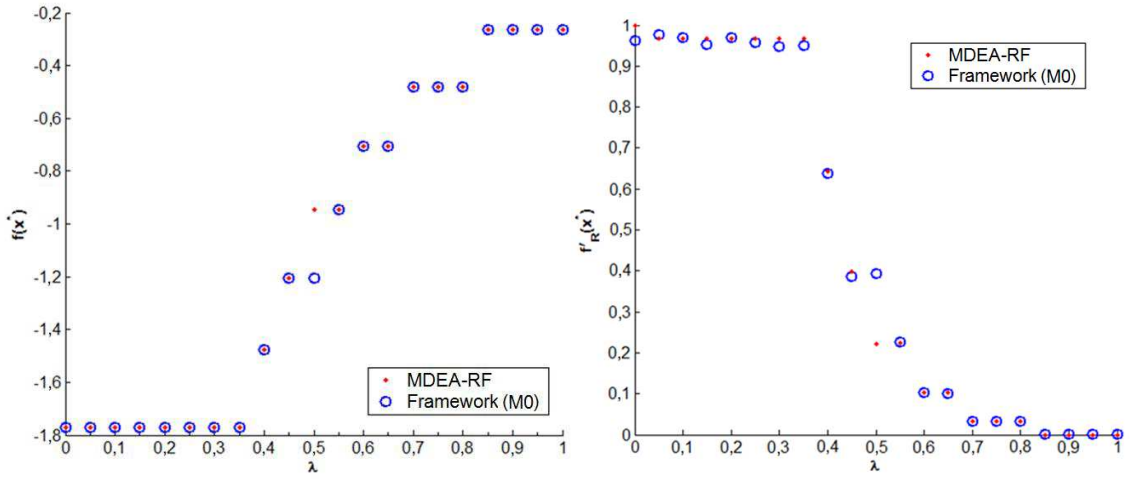
resultados gerados pelo NSGA-III (DEB e JAIN, 2014) em que as métricas de robustez MR0 e MR3 foram tratadas explicitamente como um dos macro-objetivos das funções teste. A otimização com o NSGA-III aproxima a fronteira Pareto-ótima robusta completa, com a qual é possível identificar a abrangência das soluções do MDEA-RF no espaço dos objetivos e no espaço das sensibilidades. Os valores dos parâmetros utilizados no NSGA-III são os mesmos dos apresentados na Tabela 10-14.

As execuções feitas com o MDEA-RF e com o NSGA-III foram repetidas $n_{rep} = 10$ vezes, com o objetivo de reduzir o efeito gerado pela escolha aleatória da população inicial, tal como feito nos testes dos outros algoritmos. Ao final das execuções, o critério de não-dominância é aplicado entre todas as soluções geradas a fim de se obter o conjunto final de soluções não-dominadas, assim como feito em (KASPRZYK *et al*., 2013).

As Subseções 10.5.1, 10.5.2 e 10.5.3 apresentam as soluções geradas pelo MDEA-RF e pelo NSGA-III nas funções teste *SinusoidalFunction*, *MultiPeaksFunction* e *ConcurrentSlopes*, respectivamente.

10.5.1 Resolução da Função *SinusoidalFunction* com o MDEA-RF

A Figura 10-27 mostra os resultados das soluções ótimas robustas aproximadas obtidas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo da Figura 9-7 com a métrica MR0 na *SinusoidalFunction*, tanto no espaço dos objetivos $f(\cdot)$ quanto no espaço normalizado das sensibilidades $f_R'(\cdot)$, o que corresponde ao item 6 do *framework*.



(a) (b)

Figura 10-27 – Valor das soluções ótimas robustas aproximadas da *SinusoidalFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no (a) espaço dos objetivos e no (b) espaço normalizado das sensibilidades.

De acordo com a Figura 10-27, o valor da função objetivo da solução ótima não-robusta aproximada ($x^*_{\lambda=0}$) é -1,8, enquanto que para a solução puramente robusta ($x^*_{\lambda=1}$) é -0,2. É notável a tendência de aumento de $f(x^*_\lambda)$ e decréscimo de $f'_R(x^*_\lambda)$ a medida que λ aumenta, para ambas as métricas. Os resultados são coincidentes para ambas as métricas, exceto em $\lambda = 0{,}5$ em que o MDEA-RF tem um maior valor de $f(x^*_{\lambda=0{,}5})$ e menor valor de $f'_R(x^*_{\lambda=0{,}5})$. Embora as métricas de robustez utilizadas sejam diferentes, elas percebem a robustez da mesma forma uma vez que as curvas da Figura 10-27 têm a mesma tendência em função de λ. Por exemplo, a mudança de $\lambda = 0{,}35$ para $\lambda = 0{,}4$ para as duas métricas gera soluções ótimas aproximadamente 30% mais robustas.

Da Figura 10-27 nota-se que a transição de soluções ótimas não-robustas para soluções ótimas puramente robustas ocorre entre o intervalo $0{,}35 \leq \lambda \leq 0{,}85$. A função *SinusoidalFunction* é bem didática no sentido de mostrar ao tomador de decisão o potencial efeito da variação de λ sobre a função objetivo e sobre a métrica de robustez. Para a *SinusoidalFunction* a seguinte aproximação ocorre:

$$f(x^*_{\lambda=0.5}) \approx \frac{f(x^*_{\lambda=0}) + f(x^*_{\lambda=1})}{2}, \qquad f'_R(x^*_{\lambda=0.5}) \approx \frac{f'_R(x^*_{\lambda=0}) + f'_R(x^*_{\lambda=1})}{2}. \tag{10-7}$$

Apesar do item 6 do *framework* da Figura 9-7 indicar que o tomador de decisão deve averiguar as soluções ótimas robustas somente nos espaços dos objetivos e das sensibilidades, pode também ser de interesse ver o resultado no espaço dos macro-objetivos, onde se procura minimizar a *fitness* do problema, e onde se tem ou o ponto ótimo robusto aproximado para o caso mono-objetivo ou a fronteira Pareto-ótima robusta aproximada para o caso multiobjetivo. A Figura 10-28 mostra os resultados das soluções ótimas robustas aproximadas no espaço dos macro-objetivos.

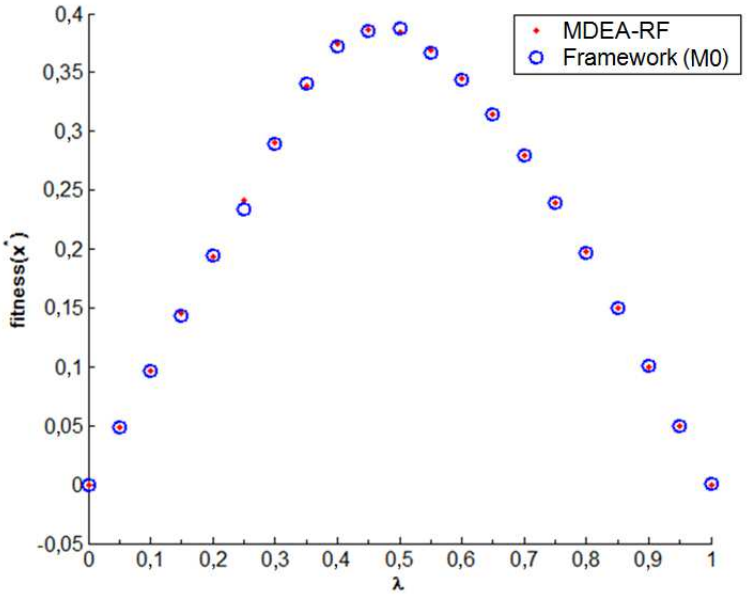


Figura 10-28 – Pontos ótimos robustos aproximados da *SinusoidalFunction* gerados pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço dos macro-objetivos.

Da Figura 10-28 nota-se que o valor da *fitness* do MDEA-RF, definida na Subseção 9.3.3, varia em função do valor de λ. Além disso, os valores são nulos para os extremos, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, consequência direta da etapa de normalização no item 4 do *framework* interativo. As curvas da *fitness* no espaço dos macro-objetivos para ambas as métricas são praticamente idênticas.

A Figura 10-29 mostra as soluções ótimas robustas aproximadas obtidas para cada valor de λ no espaço das variáveis de decisão. Os colchetes usados na Figura 10-29 contêm um intervalo discreto de λ, do contrário o λ é representado isoladamente. Os subscritos 1 e 2 do fator de robustez, λ_1 e λ_2 referem-se ao MDEA-RF e ao *framework* interativo com a métrica MR0, respectivamente.

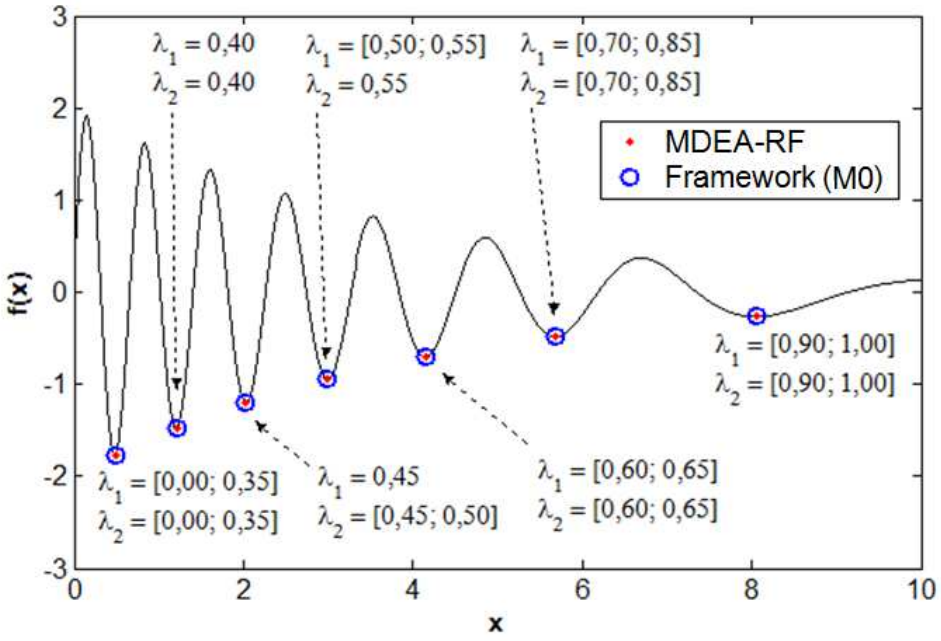


Figura 10-29 – Soluções ótimas robustas aproximadas da *SinusoidalFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço das variáveis de decisão, em que o subscrito 1 de λ refere-se ao MDEA-RF e o 2 ao *framework* com MR0.

A Figura 10-30 mostra o comparativo dos resultados obtidos com o NSGA-III utilizando as métricas MR0 e MR3, e os obtidos pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos em que a métrica de robustez foi explicitamente definida como objetivo do problema. As fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas pelo NSGA-III na Figura 10-30 revelam que as soluções ótimas robustas aproximadas geradas pelo MDEA-RF, com apenas um objetivo minimizado, correspondem às soluções geradas pelo NSGA-III, com dois objetivos minimizados.

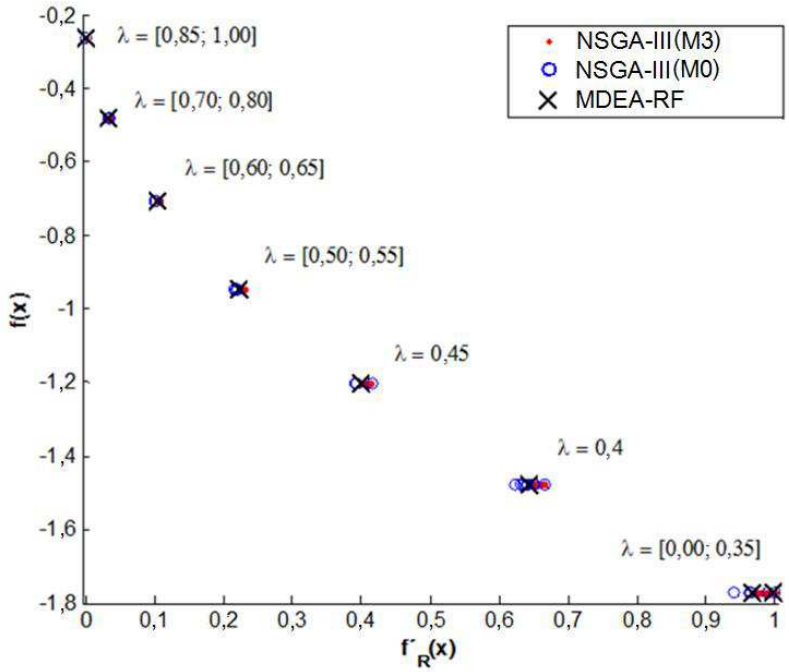
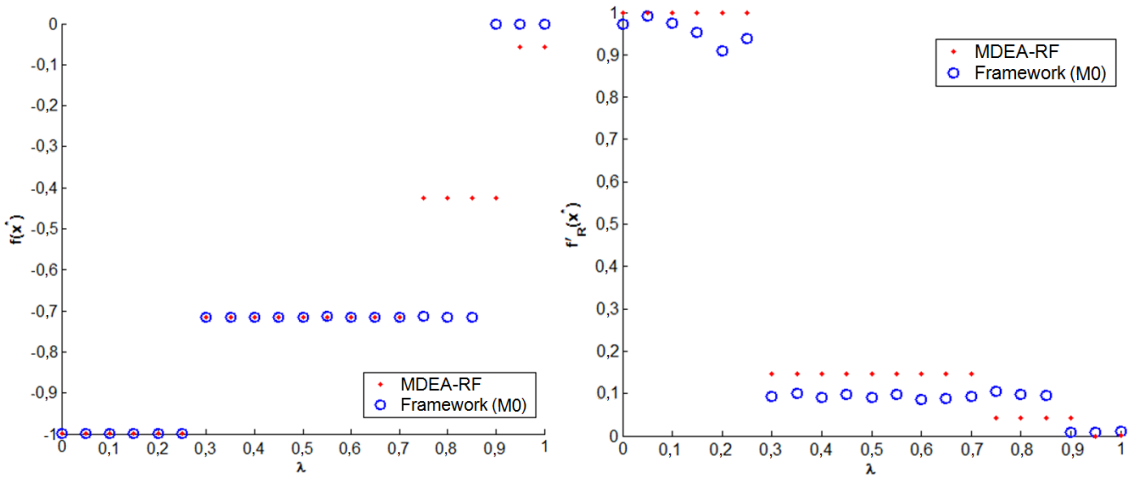


Figura 10-30 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *SinusoidalFunction* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos, onde a métrica de robustez é definida como um objetivo.

10.5.2 Resolução da Função *MultiPeaksFunction* com o MDEA-RF

A Figura 10-31 mostra os resultados das soluções ótimas robustas aproximadas obtidas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo da Figura 9-7 com a métrica MR0 na *MultiPeaksFunction*, tanto no espaço dos objetivos $f(\cdot)$ quanto no espaço normalizado das sensibilidades $f_R'(\cdot)$, o que corresponde ao item 6 do *framework*.



(a) (b)

Figura 10-31 – Valor das soluções ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no (a) espaço dos objetivos e no (b) espaço normalizado das sensibilidades.

De acordo com a Figura 10-31(a), tem-se que -1 é o valor da função objetivo da solução ótima não-robusta aproximada ($\mathbf{x}^*_{\boldsymbol{\lambda=0}}$), enquanto que a solução puramente robusta ($\mathbf{x}^*_{\boldsymbol{\lambda=1}}$) assume dois valores diferentes, 0 para o *framework* interativo com MR0 e -0,5 para o MDEA-RF. Isto ocorre porque as soluções puramente robustas situam-se em regiões diferentes no espaço das variáveis de decisão, como mostrado mais à frente na Figura 10-33.

Assim como observado na *SinusoidalFunction*, nota-se da Figura 10-31 a tendência de aumento de $f(\mathbf{x}^*_{\boldsymbol{\lambda}})$ e decréscimo de $f'_R(\mathbf{x}^*_{\boldsymbol{\lambda}})$ a medida que λ aumenta, em que a transição de soluções ótimas não-robustas para soluções ótimas puramente robustas ocorre entre o intervalo $0{,}25 \leq \lambda \leq 0{,}95$. Entretanto, o MDEA-RF encontrou um conjunto intermediário de soluções ótimas robustas aproximadas em torno de $f(\mathbf{x}^*_{\boldsymbol{\lambda}}) = -0{,}4$ e $f_R(\mathbf{x}^*_{\boldsymbol{\lambda}}) = -0{,}05$ para $0{,}75 \leq \lambda \leq 0{,}9$, não encontrado pelo *framework* (MR0), o que demonstra novamente uma diferença nos conjuntos de soluções fornecidos por cada métrica.

Também é possível perceber da Figura 10-31(a) que as soluções entre $0{,}3 \leq \lambda \leq 0{,}7$ possuem o mesmo valor do objetivo, e da Figura 10-31(b) que essas mesmas soluções têm diferentes níveis normalizados de robustez, devido às diferentes métricas de robustez empregadas. Esta diferença também se reflete na Figura 10-32, que mostra o resultado das soluções ótimas robustas aproximadas no espaço dos macro-objetivos.

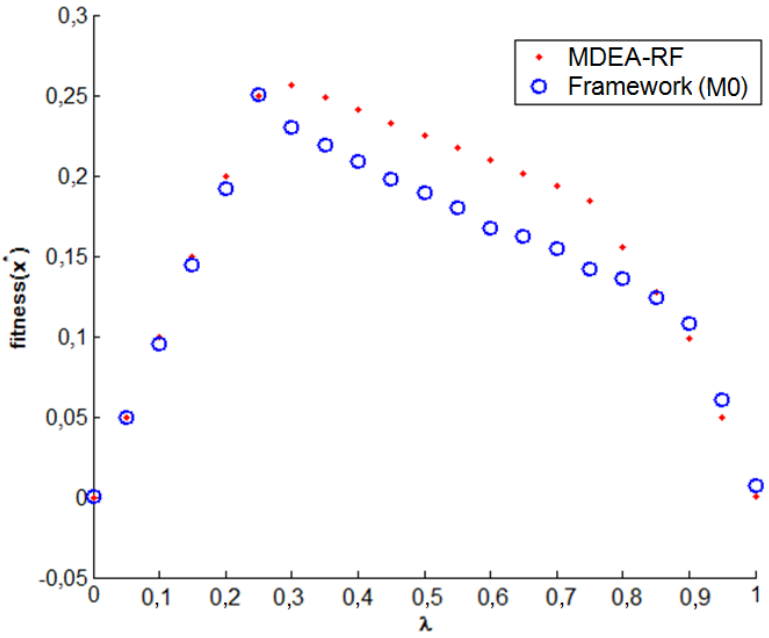
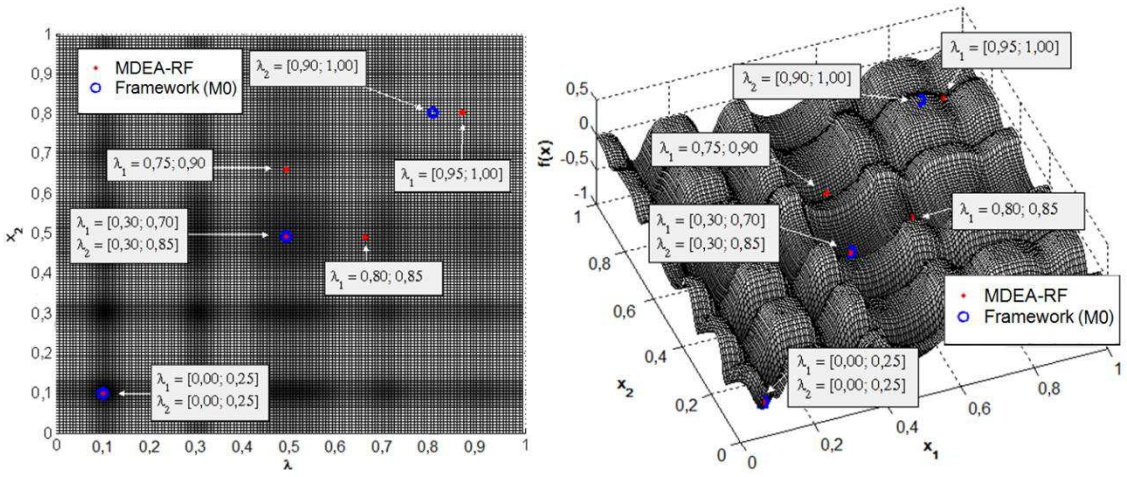


Figura 10-32 – Pontos ótimos robustos aproximados da *MultiPeaksFunction* gerados pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço dos macro-objetivos.

Assim como observado na *SinusoidalFunction*, nota-se que o valor da *fitness* do MDEA-RF definida na Subseção 9.3.3 varia em função do valor de λ na Figura 10-32, com valores nulos para os extremos, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. Embora, as curvas da *fitness* no espaço dos macro-objetivos para ambas as métricas sigam a mesma tendência em função da variação de λ, elas não são idênticas como observado para a *SinusoidalFunction*.

A Figura 10-33 mostra as soluções ótimas robustas aproximadas obtidas para cada valor de λ no espaço das variáveis de decisão. Os colchetes usados na Figura 10-33 contêm um intervalo discreto de λ, do contrário o λ é representado isoladamente. Os subscritos 1 e 2 do fator de robustez, λ_1 e λ_2 referem-se ao MDEA-RF e ao *framework* interativo com a métrica MR0, respectivamente.



(a) (b)

Figura 10-33 – Soluções ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço das variáveis de decisão com visão (a) frontal e (b) em perspectiva, em que o subscrito 1 de λ refere-se ao MDEA-RF e o 2 ao *framework* com MR0.

Da Figura 10-33 tem-se que o MDEA-RF fornece um conjunto de soluções mais diverso. Isto explica os diferentes níveis observados nos valores de $f(x)$ e $f_R(x)$ da Figura 10-31.

A Figura 10-33 revela que as soluções ótimas robustas aproximadas encontradas por ambas as métricas são idênticas até $\lambda = 0{,}7$, onde $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}1; 0{,}1)$ para $0 \leq \lambda \leq 0{,}25$, e $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}5; 0{,}5)$ para $0{,}3 \leq \lambda \leq 0{,}7$. Entretanto, para $0{,}75 \leq \lambda \leq 0{,}85$, a métrica MR0 permanece com a solução $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}5; 0{,}5)$, enquanto que o MDEA-RF encontra outras duas diferentes soluções: $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}5; 0{,}65)$ para $\lambda = \{0{,}75; 0{,}9\}$ e $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}65; 0{,}5)$ para $\lambda = \{0{,}8; 0{,}85\}$. Este efeito fica evidente na Figura 10-31 para

$0{,}75 \leq \lambda \leq 0{,}9$, em que $f(x)$ aumenta de $-0{,}7$ para $-0{,}4$, em troca de uma redução em $f_R(x)$ de 0,15 para 0,05. Tem-se que $f(\mathbf{x}) = -0{,}4$ e $f_R(\mathbf{x}) = 0{,}05$ para $\mathbf{x} = (0{,}5; 0{,}65)$ e $\mathbf{x} = (0{,}65; 0{,}5)$, pois *MultiPeaksFunction* é simétrica em torno do plano $x_1 = x_2$.

Outra divergência ocorre para as soluções de maior robustez, em que o MDEA-RF encontra $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}85; 0{,}8)$ para $\lambda \geq 0{,}95$ como o ponto de mais alta robustez, e o *framework* interativo com MR0 encontra $\mathbf{x}_\lambda^* = (0{,}8; 0{,}8)$ para $\lambda \geq 0{,}9$ como o ponto mais robusto. Analisando a Figura 10-31(a) tem-se que a solução mais robusta encontrada pelo MDEA-RF tem menor função objetivo $f(\mathbf{x})$ do que a solução mais robusta encontrada pelo *framework* (MR0).

A Figura 10-34 mostra o comparativo dos resultados obtidos com o NSGA-III utilizando as métricas MR0 e MR3, e os obtidos pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos em que a métrica de robustez foi explicitamente definida como objetivo do problema.

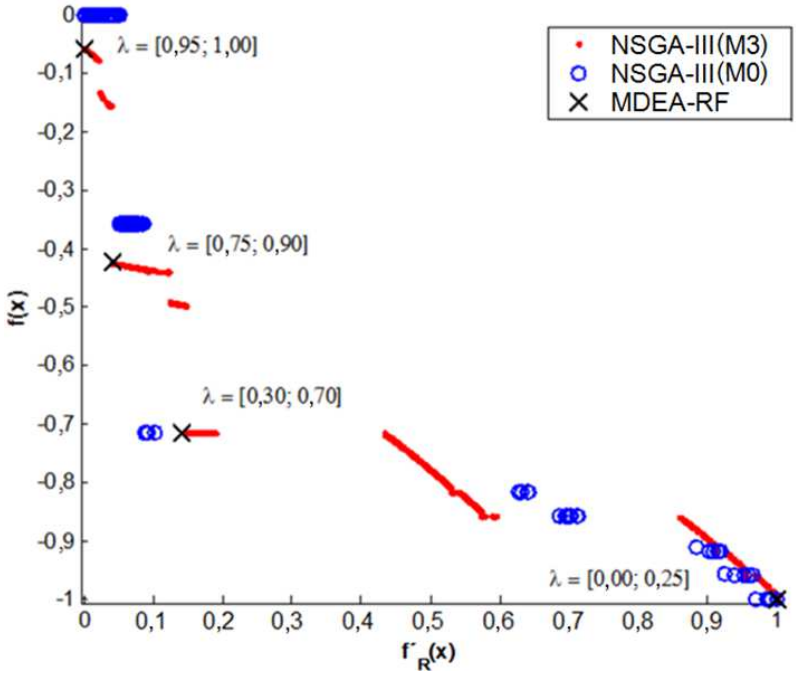


Figura 10-34 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos, onde a métrica de robustez é definida como um objetivo.

As fronteiras Pareto-ótima robustas aproximadas pelo NSGA-III para MR0 e MR3 na Figura 10-34 são discretas e côncavas em determinadas regiões. A abordagem multiobjetivo utilizando-se o NSGA-III com a métrica MR3 do MDEA-RF provê maior diversidade de soluções em comparação com a métrica MR0. O MDEA-RF em contrapartida não produz soluções em toda a $\widetilde{FPR}^*$. Isto é explicado por conta da

combinação linear entre $f(\mathbf{x})$ e $f_R(\mathbf{x})$ que não mapeia regiões côncavas da fronteira (ATHAN e PAPALAMBROS, 1996). Esta limitação também se reflete no espaço das variáveis de decisão, onde muitas soluções ótimas robustas são perdidas, como mostra a Figura 10-35.

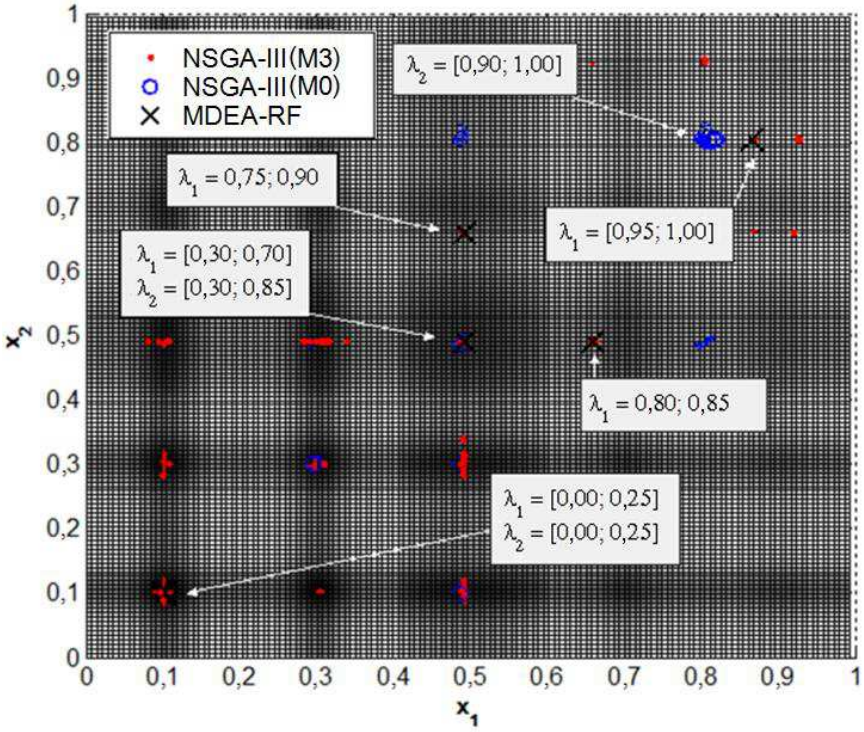


Figura 10-35 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *MultiPeaksFunction* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos variáveis de decisão.

10.5.3 Resolução da Função *ConcurrentSlopes* com o MDEA-RF

A Figura 10-36(a) e a Figura 10-36(b) mostram os resultados das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas pelo MDEA-RF na *ConcurrentSlopes* no espaço dos objetivos $f(\cdot)$ e no espaço normalizado das sensibilidades $f_R'(\cdot)$, respectivamente. De forma similar, a Figura 10-36(c) e a Figura 10-36(d), mostram os resultados das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas pelo *framework* interativo da Figura 9-7 com a métrica MR0 na *ConcurrentSlopes* no espaço de $f(\cdot)$ e de $f_R'(\cdot)$, respectivamente. Note, entretanto, que como a função *ConcurrentSlopes* tem dois objetivos, as curvas da Figura 10-36consistem em curvas de nível do fator de robustez, em que a dimensão perpendicular ao plano definido pelas funções objetivos e pelas métricas de robustez corresponde aos valores discretos de λ.

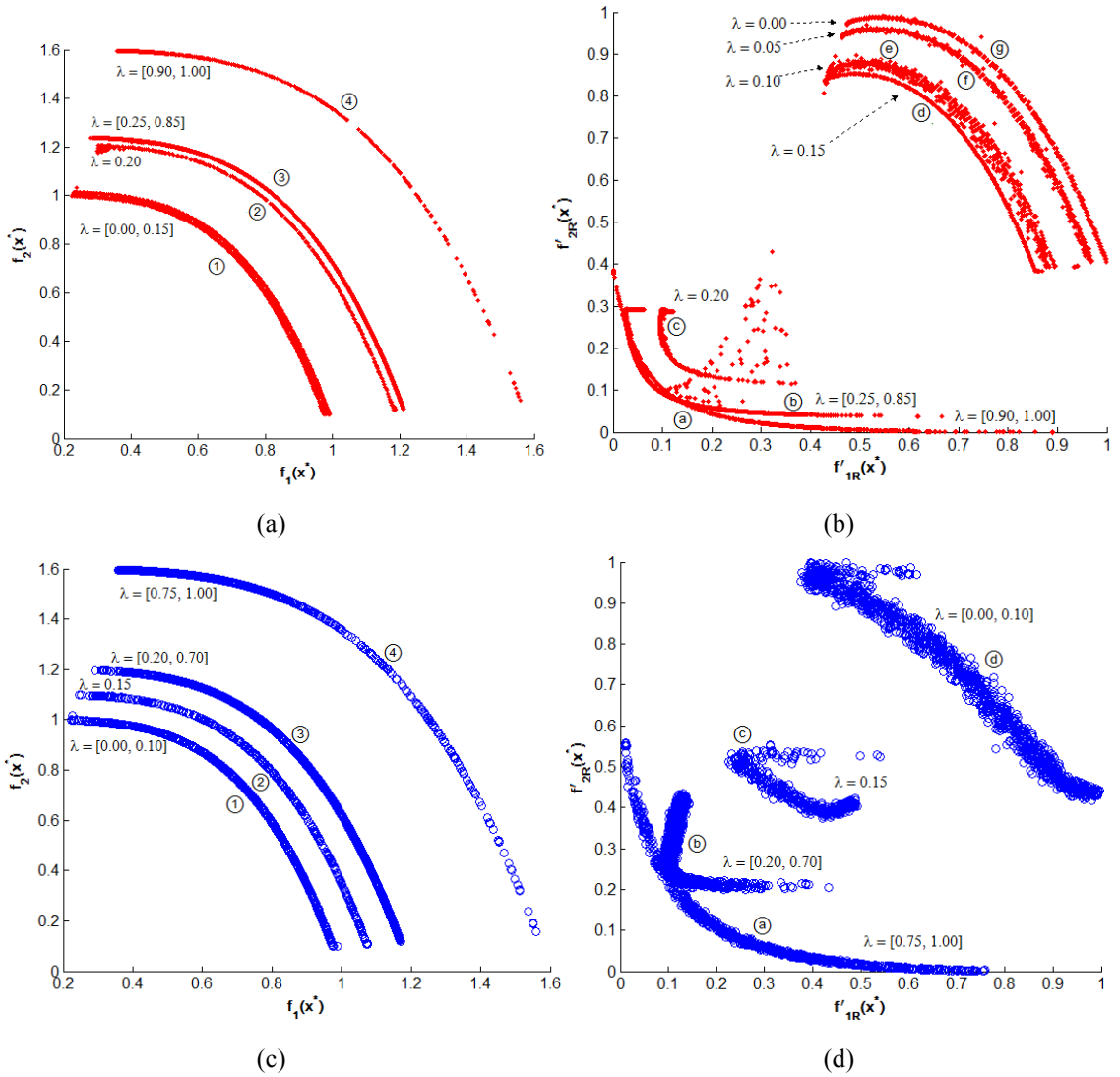


Figura 10-36 – Valor das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo (a,b) MDEA-RF e pelo (c,d) *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no (a,c) espaço dos objetivos e no (b,d) espaço normalizado das sensibilidades.

As curvas da Figura 10-36 não são fronteiras Pareto, embora se pareçam com elas, pois as fronteiras Pareto-ótima robustas só ocorrem, por definição, no espaço dos macro-objetivos, onde as funções de *fitness* são minimizadas.

Com base na Figura 10-36 é possível distinguir quatro fronteiras que correspondem às diferentes regiões de robustez da *ConcurrentSlopes* apresentadas na Seção 7.4. As fronteiras no espaço dos objetivos, rotuladas por ①, ②, ③ e ④, se distanciam da origem à medida que o fator de robustez aumenta, sendo ① a fronteira que mais minimiza os objetivos. Em contrapartida, as fronteiras no espaço das sensibilidades, rotuladas por ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ, se aproximam da origem à

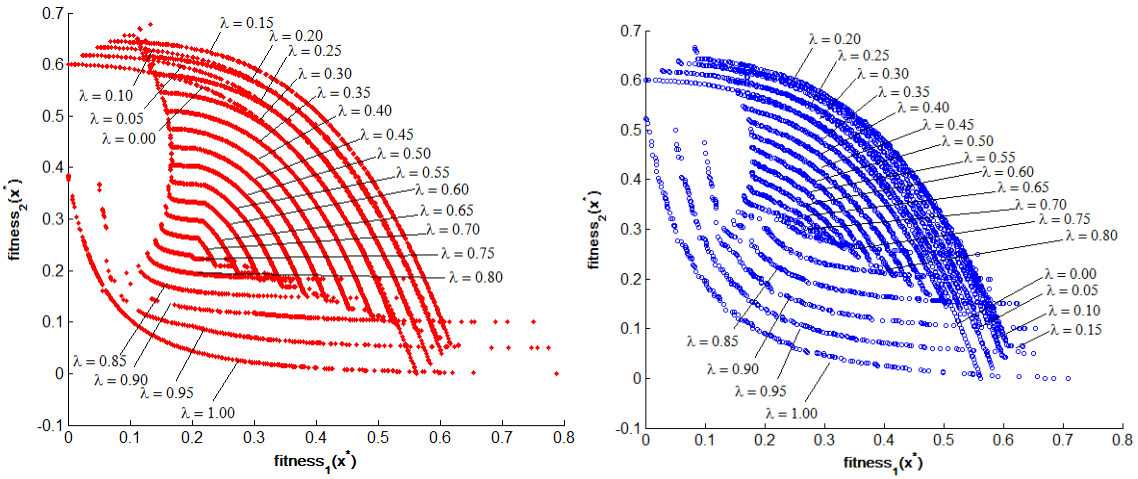
medida que o fator de robustez aumenta, sendo ⓐ a fronteira que mais minimiza as métricas de robustez.

Para valores pequenos do fator de robustez ($0 \leq \lambda \leq 0{,}05$) as fronteiras ① do MDEA-RF e do *framework* (MR0) são coincidentes, cujos pontos extremos são $f(\mathbf{x_\lambda}) = (1; 0{,}1)$ e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (0{,}22; 1)$ no espaço dos objetivos, ocorrendo quando $x_2 = 0{,}5$ na Figura 7-6(a). Para valores elevados do fator de robustez ($0{,}9 \leq \lambda \leq 1$) as fronteiras ④ das duas métricas também são coincidentes, cujos pontos extremos são $f(\mathbf{x_\lambda}) = (1{,}58; 0{,}1)$ e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (0{,}37; 1{,}6)$ no espaço dos objetivos, ocorrendo quando $x_2 \leq 0{,}3$ ou $x_2 \geq 0{,}7$ na Figura 7-6(a).

Entretanto, para valores intermediários de λ as fronteiras não são as mesmas. A fronteira ② encontrada pelo MDEA-RF tem os pontos extremos iguais a $f(\mathbf{x_\lambda}) = (1{,}9; 0{,}1)$ e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (0{,}3; 1{,}2)$, enquanto que a fronteira ② encontrada pelo *framework* (RMR0) tem os pontos extremos iguais a $f(\mathbf{x_\lambda}) = (1{,}1; 0{,}1)$ e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (0{,}25; 1{,}1)$. A desigualdade também ocorre para fronteira ③ com pontos extremos iguais a $f(\mathbf{x_\lambda}) = (1{,}21; 0{,}1)$ e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (0{,}25; 1{,}1)$ para o MDF-RF, e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (1{,}19; 0{,}1)$ e $f(\mathbf{x_\lambda}) = (0{,}3; 1{,}2)$ para o *framework* (MR0).

Da Figura 10-36(b) e da Figura 10-36(d) nota-se que a fronteira obtida pelo MDEA-RF é mais delimitada que a fronteira ruidosa obtida pelo *framework* interativo com a métrica MR0. Isto se deve ao fato de a métrica MR0 ser estocástica e a métrica MR3 determinística para cada solução avaliada. As quatro nuvens de pontos do *framework* (MR0) da Figura 10-36(d) são mapeadas nas quatro fronteiras da Figura 10-36(c) da seguinte forma: ⓐ→④, ⓑ→③, ⓒ→②, ⓓ→①. O mapeamento entre fronteiras do espaço dos objetivos e das sensibilidades para o MDEA-RF não é tão evidente, tem-se: ⓐ→④, ⓑ→③, ⓒ→②, {ⓓ,ⓔ, ⓕ, ⓖ}→①. Os últimos mapeamentos revelam que as soluções com $\lambda \in \{0; 0{,}05; 0{,}1; 0{,}15\}$ têm variação de robustez na Figura 10-36(b) sem aparente penalidade nas funções objetivo da Figura 10-36(a).

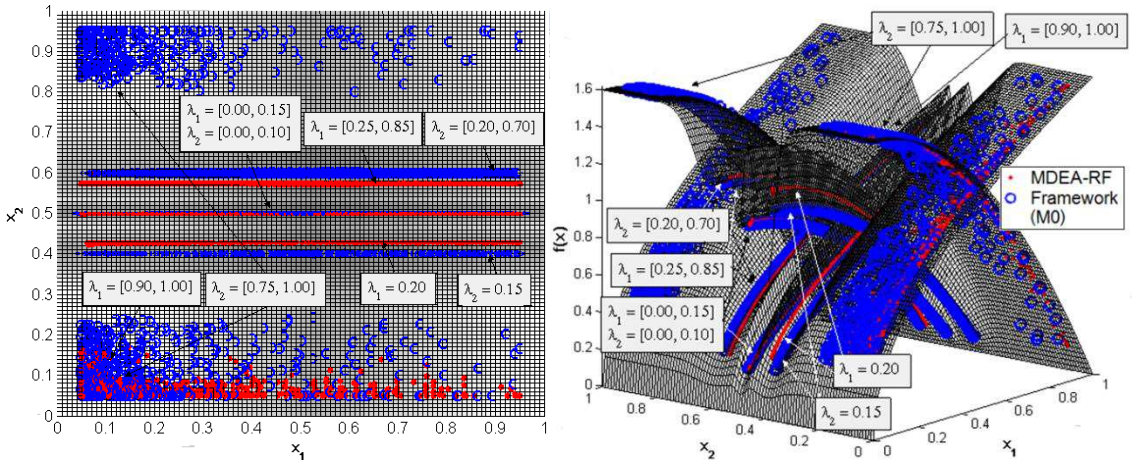
Assim como feito para as funções teste das Subseções anteriores, a Figura 10-37 mostra os resultados das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas no espaço dos macro-objetivos, onde se observa diferentes fronteiras Pareto-ótima robustas aproximadas para cada valor de fator de robustez escolhido.



(a) (b)

Figura 10-37 – Pontos ótimos robustos aproximados da *ConcurrentSlopes* gerados pelo (a) MDEA-RF e pelo (b) *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço dos macro-objetivos.

As fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas da Figura 10-37 para ambas as métricas têm a mesma tendência em função da variação de λ. Elas têm um formato côncavo para $\lambda \leq 0{,}7$ e um formato convexo para $\lambda \geq 0{,}85$. A convexidade muda ao longo de $0{,}75 \leq \lambda \leq 0{,}8$. As diferentes fronteiras indicam que as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas pelas duas métricas são diferentes, como também pode ser averiguado pela Figura 10-38 que apresenta as mesmas soluções no espaço das variáveis de decisão.



(a) (b)

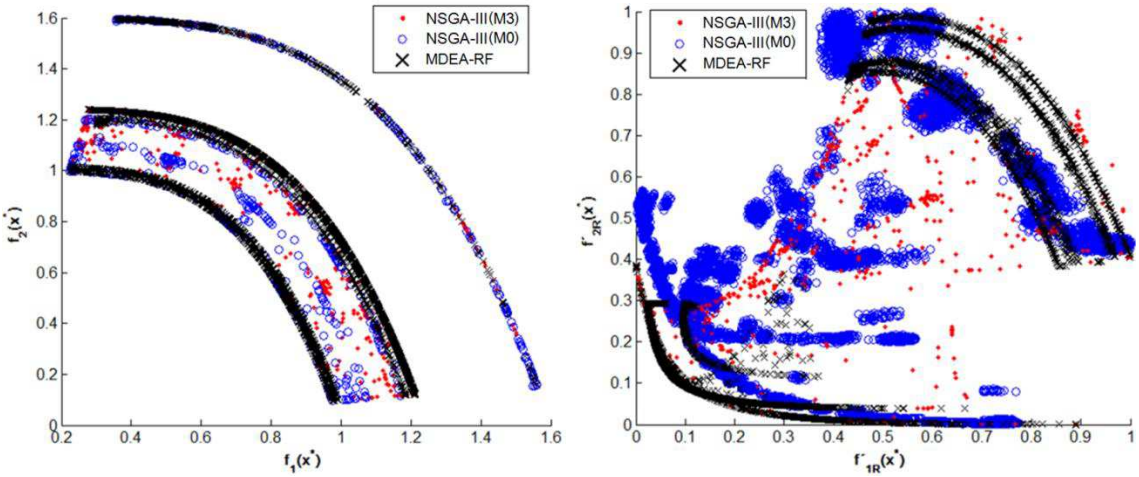
Figura 10-38 – Soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo MDEA-RF e pelo *framework* interativo com a métrica MR0 em função da variação de λ no espaço das variáveis de decisão com visão (a) frontal e (b) em perspectiva, em que o subscrito 1 de λ refere-se ao MDEA-RF e o 2 ao *framework* com MR0.

As soluções localizadas em $x_2 = 0{,}5$ na Figura 10-38 são as mesmas que resultam nas fronteiras ① de ambas as métricas. As fronteiras ④, por outro lado, são resultantes do conjunto de soluções localizado em $x_2 \leq 0{,}3$ e $x_2 \geq 0{,}7$.

Também é notável da Figura 10-38 que existe uma maior densidade de soluções próximas a $x_1 = 0$ em vez de $x_1 = 1$ para $\lambda \geq 0{,}9$. Isto ocorre porque as funções formadoras da *ConcurrentSlopes*, $f_1(x)$ e $f_2(x)$, não são simetricamente opostas, tal que $f_2(x)$ abrange uma região mais plana em $x_1 = 0$ do que $f_1(x)$ em $x_1 = 1$, conforme explicado na Seção 7.4.

A Figura 10-38(a) revela que as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas intermediárias providas pelas duas métricas não são iguais. O *framework* com a métrica MR0 encontrou para $\lambda = 0{,}15$ um conjunto de soluções alinhadas em $x_2 = 0{,}4$, que resultaram na fronteira ② da Figura 10-36(c), enquanto o MDEA-RF encontrou para $\lambda = 0{,}2$ um conjunto de soluções alinhadas em $x_2 = 0{,}425$, que resultaram na fronteira ② da Figura 10-36(a). Diferença similar ocorre com a formação da fronteira ③, em que o *framework* (MR0) encontrou para $0{,}2 \leq \lambda \leq 0{,}7$ um conjunto de soluções alinhadas em $x_2 = 0{,}6$, enquanto o MDEA-RF encontrou para $0{,}25 \leq \lambda \leq 0{,}85$ um conjunto de soluções alinhadas em $x_2 = 0{,}575$. Essa diferença é explicada pela própria diferença das métricas de robustez e pelo intervalo de incerteza considerado. A métrica MR3 faz uso da estimativa do pior caso por meio do WCE sendo, portanto, uma métrica determinística e dependente do tamanho do intervalo de incerteza, conforme visto na Seção 8.1.

A Figura 10-39 mostra o comparativo dos resultados obtidos com o NSGA-III utilizando as métricas MR0 e MR3, e os obtidos pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos em que as métricas de robustez foram explicitamente definidas como objetivos do problema. Como cada métrica de robustez está associada a um objetivo original do problema, o NSGA-III lida com a minimização de quatro objetivos em sua totalidade.



(a) (b)

Figura 10-39 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF no espaço dos objetivos com destaque para (a) os objetivos originais e (b) as métricas de robustez definidas como objetivos.

Com base na Figura 10-39 e nas soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas pelos NSGA-III tanto com MR0 quanto com MR3, é possível perceber que o MDEA-RF não produz um conjunto completo de soluções Pareto-ótimas robustas. Apesar de gerar soluções pouco diversificadas frente ao NSGA-III, o custo computacional do MDEA-RF é menor que o custo do NSGA-III, visto que ele usa apenas metade dos objetivos utilizados pelo NSGA-III.

Outra forma de se analisar as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas providas pelo NSGA-III é por meio da representação de cada um dos quatro objetivos minimizados em coordenadas paralelas, como mostra a Figura 10-40 para as métricas MR0 e MR3. A Figura 10-40 mostra que tanto MR0 quanto MR3 encontram regiões similares para os objetivos, não havendo regiões exclusivas para apenas uma das métricas.

As soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas produzidas pelo MDEA-RF para a *ConcurrentSlopes* com $\lambda = 0$, $\lambda = 0{,}2$, $\lambda = 0{,}5$ e $\lambda = 1$ também foram colocadas no formato de coordenadas paralelas respectivamente na Figura 10-41(a), Figura 10-41(b), Figura 10-41(c) e Figura 10-41(d) para fins de comparação com as soluções geradas pelo NSGA-III com MR0 e MR3 da Figura 10-40. Apesar da Figura 10-41 contar com apenas quatro valores diferentes de λ, pode-se ver que o MDEA-RF tem a capacidade de cobrir diferentes regiões encontradas pelo NSGA-III para diferentes valores de λ.

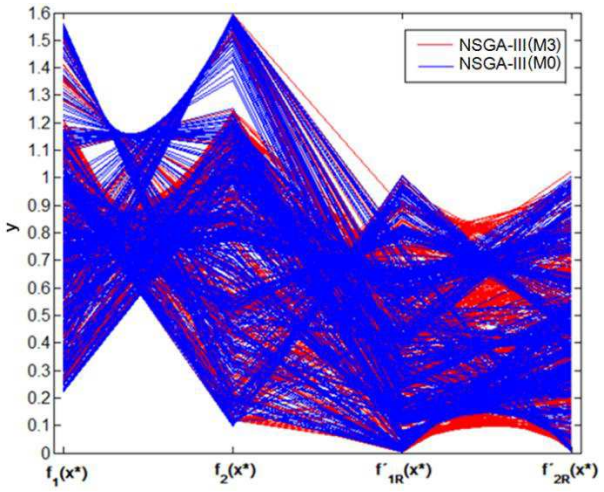
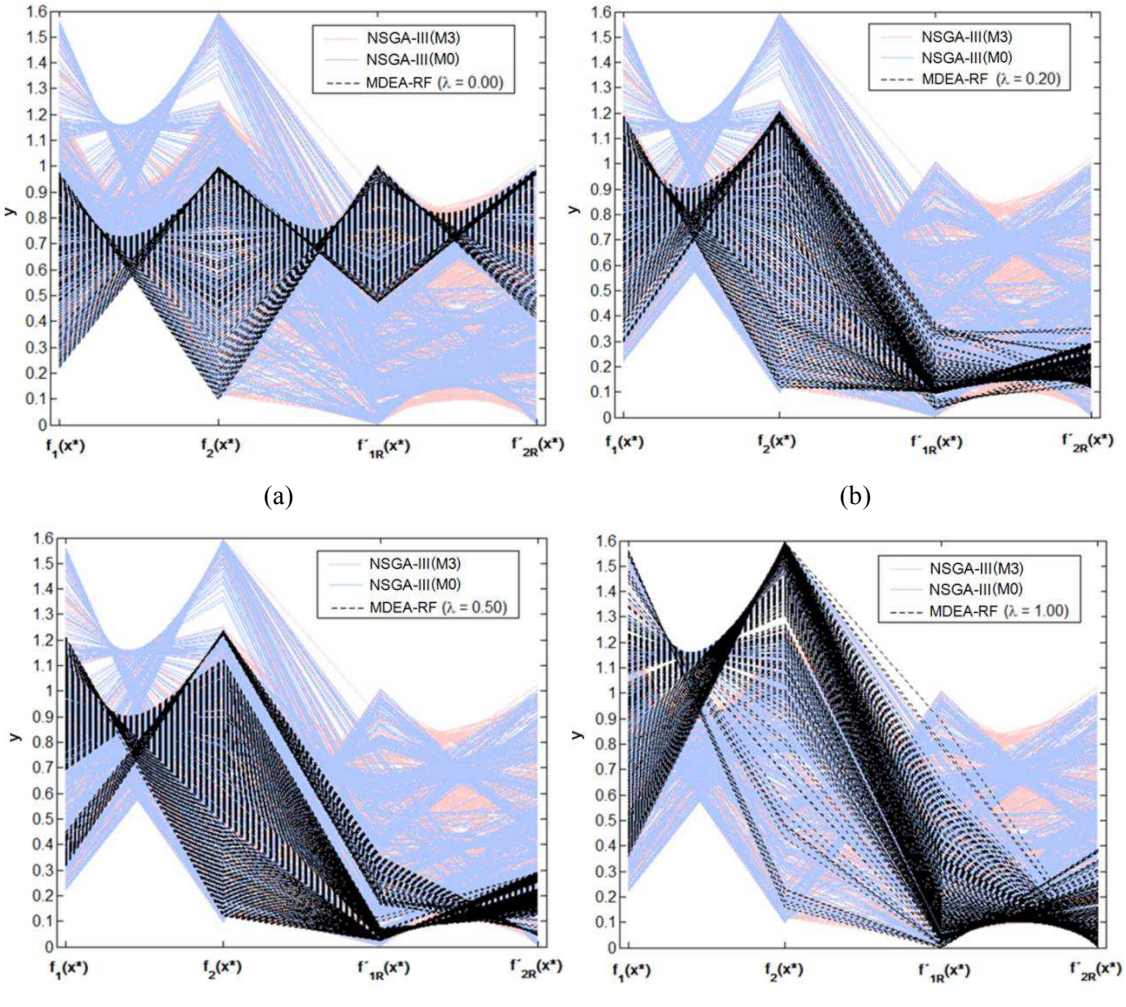


Figura 10-40 – Valores das funções objetivo e das métricas de robustez normalizadas para as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* obtidas pelo NSGA-III tratando as métricas de robustez explicitamente como objetivos.



(a) (b)

(c) (d)

Figura 10-41 – Comparativo das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas da *ConcurrentSlopes* geradas pelo NSGA-III com as métricas MR0 e MR3, frente às soluções geradas pelo MDEA-RF com (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0{,}2$, (c) $\lambda = 0{,}5$ e (d) $\lambda = 1$ no espaço dos objetivos em coordenadas paralelas.

10.6Considerações Finais

Os algoritmos WCEMOEA, RHySPEA em suas duas variantes I e II, e o MDEA-RF demonstraram ser eficazes em buscar por soluções ótimas robustas nas funções teste, cada um se baseando em sua respectiva métrica de robustez.

Em várias situações ilustradas neste capítulo foram encontradas soluções ótimas robustas idênticas, porém com métricas de robustez diferentes, revelando que uma das formas mais efetivas em se comparar algoritmos de otimização robusta é por meio da avaliação de $\widetilde{PR}^*$ no espaço das variáveis de decisão em conjunto com seu efeito sobre os objetivos originais do problema.

As comparações qualitativas e quantitativas das métricas aplicadas às funções teste revelam que elas podem ser usadas em substituição a métodos tradicionais e custosos de otimização robusta multiobjetivo como, por exemplo, métodos que fazem uso de amostragem LHS.

O WCEMOEA é o método de uso mais direto, entretanto esta abordagem é conservadora e nem sempre desejável (SABIONI, SILVA e VASCONCELOS, 2013). O RHySPEA tem um grande *overhead* no momento de inicialização e no momento de geração das primeiras amostras. Porém, rodá-lo partindo-se de uma base de amostras previamente armazenada torna-o rápido e eficiente.

Mesmo com a limitação do MDEA-RF em se obter todas as soluções ótimas robustas para problemas cujos objetivos e métricas de robustez MR3 formam conjuntos côncavos no espaço dos objetivos, ele se mostrou aplicável a diferentes tipos de problemas de otimização robusta, seja mono ou multiobjetivo, seja uni ou multivariado. Sua grande vantagem se dá na redução dos objetivos do problema pela metade em situações em que as incertezas são explicitamente definidas como objetivos.

Embora o conceito de fator de robustez do MDEA-RF seja intuitivo para o tomador de decisão, ele deve se atentar ao fato de que o λ pode não ter uma relação linear direta com a métrica de robustez para grande parte dos problemas. A relação é muitas vezes não-linear como mostram a Figura 10-27(b) e a Figura 10-31(b), por exemplo.

A flexibilidade do *framework* interativo também foi explorada, permitindo o uso e estudo de duas métricas: MR0, como a métrica *benchmark*; e MR3, como a métrica do MDEA-RF.

11 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA MULTIOBJETIVO APLICADA A PROBLEMAS DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Os algoritmos propostos nesta tese foram aplicados em dois problemas de engenharia elétrica:

1. Projeto de um dispositivo supercondutor de armazenamento de energia magnética, conhecido como problema *benchmark* TEAM 22 (ALOTTO *et al*., 1996).
2. Projeto de um gerador síncrono de fluxo axial a ímãs permanentes para aplicação em turbinas eólicas (SABIONI *et al*., 2010).

Embora o problema de engenharia TEAM 22 envolva alguma incerteza no modelo de cálculo de campo e o problema de projeto do gerador envolva alguma incerteza na definição e premissas do modelo, estas incertezas não foram consideradas.

11.1 Projeto de um Dispositivo Supercondutor de Armazenamento de Energia Magnética

O problema TEAM 22 (ALOTTO *et al*., 1996) consiste no projeto de um dispositivo semicondutor de armazenamento de energia magnética, e é um problema *benchmark* de MORDO na área de eletromagnetismo computacional. Portanto, ele foi escolhido para estudo da aplicabilidade dos algoritmos propostos nesta tese. O TEAM 22 é um dos vários problemas *benchmark* intitulados TEAM (*Testing Electromagnetic Analysis Methods*) estabelecidos pela sociedade internacional COMPUMAG[14].

Dada sua difusão na literatura como um problema bem conhecido e o fato de ser um problema multiobjetivo, o TEAM 22 tem sido por muito tempo alvo de algoritmos evolucionários multiobjetivo (DIAS e VASCONCELOS, 2002). Mais de dez anos

[14] http://www.compumag.org/jsite/

sendo resolvido por diferentes MOEAs o torna um candidato ideal para estudo. Além disso, ele tem se mostrado um problema de otimização multiobjetivo muito susceptível às variações paramétricas (SABIONI, MENDES e VASCONCELOS, 2014), demandando a aplicação de métodos de otimização robusta multiobjetivo.

11.1.1 Descrição do Problema

O problema consiste na otimização do projeto de um SMES (*Superconducting Magnetic Energy Storage*), que é composto por duas bobinas concêntricas carregadas por correntes em direções opostas e em condições de supercondutividade. O SMES deve ser capaz de armazenar uma quantidade pré-definida de energia com a menor dispersão de fluxo possível.

A seção transversal das bobinas é apresentada na Figura 11-1 com seus respetivos parâmetros de projeto.

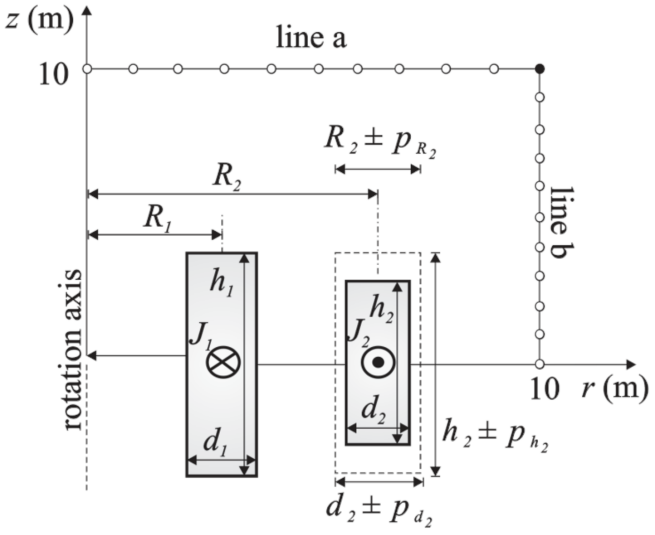


Figura 11-1 - Configuração do problema TEAM 22 com incertezas. Adaptado de (SOARES *et al*., 2009b).

R_1: raio da bobina 1;

R_2: raio da bobina 2;

d_1: espessura da bobina 1;

d_2: espessura da bobina 2;

h_1: altura da bobina 1;

h_2: altura da bobina 2;

J_1: densidade de corrente na bobina 1;

J_2: densidade de corrente na bobina 2;

p_{R_2}: incerteza do raio da bobina 2;

p_{d_2}: incerteza da espessura da bobina 2;

p_{h_2}: incerteza da altura da bobina 2.

Embora existam diferentes variações de configurações para o problema do TEAM 22, optou-se pela versão proposta em (SOARES *et al*., 2009b), onde são selecionadas três variáveis contínuas da bobina 2: R_2, d_2 e h_2, acrescidas de perturbações **p**. A Tabela 11-1 mostra os valores dos parâmetros de projeto fixados e os limites máximos e mínimos para as variáveis da bobina 2, conforme (SOARES *et al*., 2009b).

Tabela 11-1 – Variáveis e parâmetros fixos do problema TEAM 22 com incertezas proposto em (SOARES *et al*., 2009b).

x	R_1	R_2	h_1	h_2	d_1	d_2	J_1	J_2
Unidades	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	MA/m^2	MA/m^2
Min	-	2,60	-	0,408	-	0,10	-	-
Max	-	3,40	-	2,200	-	0,40	-	-
Fixo	2,00	-	1,60	-	0,27	-	22,50	22,50
p	-	0,03	-	0,010	-	0,01	-	-

11.1.2 Modelagem do Problema de Otimização Robusta Multiobjetivo para o SMES

A formulação das funções objetivo do TEAM 22 com incertezas é apresentada abaixo:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f_1(\mathbf{x},\mathbf{p}) : y_1 = \frac{B_{stray}^2}{B_{norm}^2},\ \mathbf{p}\in\mathcal{P}, \tag{11-1}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f_2(\mathbf{x},\mathbf{p}) : y_2 = \frac{\|E-E_0\|}{E_0},\ \mathbf{p}\in\mathcal{P}, \tag{11-2}$$

$$g(\mathbf{x},\mathbf{p}) \le 0,\ \mathbf{x}\in\mathcal{X},\mathbf{p}\in\mathcal{P}. \tag{11-3}$$

A primeira função objetivo procura minimizar a dispersão do fluxo, sendo que B_{stray} é a densidade de fluxo magnético calculado nos pontos equidistantes das linhas "a" e "b" da Figura 11-1 segundo a equação abaixo e $B_{norm} = 3{,}0$ mT.

$$B_{stray}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{22}\left|B_{stray,i}\right|^2}{22}. \tag{11-4}$$

A segunda função objetivo calcula o desvio entre o valor de energia armazenada, E, ao valor desejado $E_0 = 180$MJ. Com isto, procura-se soluções em que $E = E_0$.

Por fim, a restrição garante que o material supercondutor não viole a condição denominada *quench condition* (ALOTTO *et al*., 1996) cuja curva é equacionada da seguinte forma para:

$$g(\mathbf{x},\mathbf{p}) = |\mathbf{J}| + 6{,}4|\mathbf{B_{max}}| - 54 \le 0,\ \mathbf{x}\in\mathcal{X},\mathbf{p}\in\mathcal{P}. \tag{11-5}$$

Para o caso específico apresentado na Tabela 11-1, a restrição se resume a:

$$g(\mathbf{x},\mathbf{p}) = |\mathbf{B_{max}}| - 4{,}9219 \le 0,\ \mathbf{x}\in\mathcal{X},\mathbf{p}\in\mathcal{P}. \tag{11-6}$$

A perturbação **p** é paramétrica e afeta a variável de decisão diretamente: $\mathbf{x}\pm\mathbf{p}$.

Os trabalhos (SOARES *et al*., 2009b), (MENDES *et al*., 2013a), (MENDES *et al*., 2013b) utilizaram esta configuração do TEAM 22 para testes de algoritmos de

otimização robusta multiobjetivo, visto a alta sensibilidade do problema frente às perturbações da Tabela 11-1(SOARES *et al*., 2009b).

A Subseção 11.1.3 mostra a aplicação do MOEA convencional na resolução do TEAM 22, com destaque para a alta sensibilidade das soluções frente às perturbações. A Subseção 11.1.4 e a Subseção 11.1.5 mostram, respectivamente, a aplicação do WCEMOEA e do RHySPEA na resolução robusta do TEAM 22.

Os resultados das Equações anteriores foram calculados segundo uma rotina computacional de Método de Elementos Finitos (FEM) de elementos triangulares, 1ª ordem e com fator de malha de 0,75, como feito em (MENDES *et al*., 2013a).

11.1.3 Otimização do Projeto TEAM 22 com MOEA Convencional

O MOEA convencional foi aplicado ao TEAM 22 com os parâmetros da Tabela 11-2.

Tabela 11-2 – Valores dos parâmetros do MOEA convencional para resolução do TEAM 22.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	120
n_{gen}	Número de gerações	120
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
n_{rep}	Número de execuções do MOEA	11

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

A Figura 11-2 mostra com losangos cinzas as soluções da $\widetilde{FP}^*$ obtidas pelo MOEA, portanto, sem consideração de incertezas: $\boldsymbol{f}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \mathbf{0})$, tal que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Na mesma Figura 11-2 uma região preta é apresentada como sendo os resultados perturbados de cada uma das soluções Pareto-ótimas aproximadas encontradas previamente: $\boldsymbol{f}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \mathbf{p})$. A perturbação foi aplicada a cada solução $\tilde{\mathbf{x}}^*$, com passos fixos de 10% ao longo de cada dimensão de $\mathcal{P}$. Ou seja, foi gerado um conjunto discreto $\hat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ de $N_{samples} = 1331$ amostras perturbadas para cada solução $\tilde{\mathbf{x}}^*$, compondo a região preta: $\boldsymbol{f}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \hat{\mathcal{P}})$.

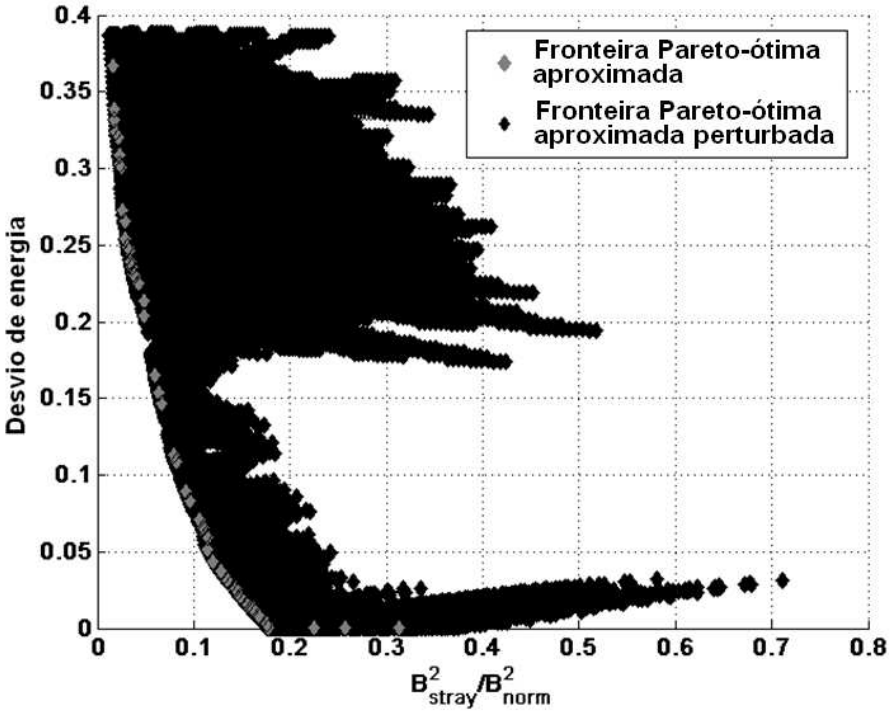


Figura 11-2 – Efeito no espaço dos objetivos decorrente das perturbações nas soluções Pareto-ótimas do MOEA.

É notável da Figura 11-2 a variabilidade no espaço dos objetivos devido às perturbações das soluções nominais $\mathbf{x}^*$ obtidas pelo MOEA.

11.1.4 Otimização do Projeto TEAM 22 com WCEMOEA

Visto a sensibilidade do TEAM 22 frente às incertezas, na Figura 11-2, optou-se por reduzir o domínio $\mathcal{X}$ das variáveis para $\mathcal{X}'$ em função da extrapolação nos limites de $\mathcal{X}$ em decorrência de $\mathcal{P}$. Foi feita uma mudança de tal forma que $\mathbf{x}' \pm \mathbf{p} \in \mathcal{X}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}', \mathbf{p} \in \mathcal{P}$. Assim, $\mathcal{X}'$ é definida como:

$$\mathcal{X}' = \left\{ \begin{array}{c} (R_2, h_2, d_2) \mid \\ R_2 \in [2{,}63;\ 3{,}37], h_2 \in [0{,}418;\ 2{,}190] \text{ e } d_2 \in [0{,}11;\ 0{,}39] \end{array} \right\}. \quad (11\text{-}7)$$

Note que os intervalos de variação das variáveis de decisão foram reduzidos se comparados aos intervalos inicialmente apresentados na Tabela 11-1. Isto foi feito para evitar que o efeito das perturbações ultrapasse os limites inferiores e superiores definidos na mesma tabela.

O WCEMOEA foi aplicado ao TEAM 22 com os parâmetros apresentados na Tabela 11-3.

Tabela 11-3 – Valores dos parâmetros do WCEMOEA para resolução do TEAM 22.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	50
n_{gen}	Número de gerações	50
p_m	Probabilidade de mutação	5%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
n_{rep}	Número de execuções do WCEMOEA	11

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

Os resultados obtidos pelo WCEMOEA foram comparados aos resultados gerados pelo algoritmo de otimização robusta multiobjetivo intervalar chamado IRMOEA-M (*Interval Robust Multiobjective Evolutionary Algorithm – Minmax*), proposto em (MENDES, 2013). A comparação é válida visto que ambos os algoritmos utilizam a mesma métrica de robustez *minimax*.

Os dois algoritmos utilizaram a mesma configuração dos parâmetros de controle (número de gerações, n_{gen}, tamanho da população, n_{pop}, número de repetições, n_{rep}, tipo de seleção binária, e probabilidades de mutação de 5% e de cruzamento de 100%). A grande diferença entre os dois está basicamente no modo como o pior caso de incertezas é calculado, que é justamente a parte que demanda maior esforço computacional. O tempo de cálculo não foi considerado neste trabalho, mas estima-se que o IRMOEA-M leve três vezes mais tempo de cálculo do que o WCEMOEA. Ademais, o IRMOEA-M ainda consome tempo gerando o modelo *surrogate* das funções de inclusão para permitir o uso de análise intervalar no tratamento das incertezas (MENDES *et al*., 2013a).

O IRMOEA-M utilizou $N_{samples} = 20$ amostras perturbadas aleatoriamente em torno de cada indivíduo para estimar o pior caso de incertezas, tendo o parâmetro de precisão da caixa intervalar $\varepsilon_{[\mathbf{p}]} = 0{,}2$. Este número foi investigado em (SOARES *et al*., 2009a), onde foi considerado um número adequado para o problema. Ao contrário do

IRMOEA-M, o WCEMOEA é dependente da dimensão n_p do problema. Como as rotinas de FEM fornecem todos os resultados das funções e restrições em uma única rodada, o WCEMOEA deve fazer $2n_p + n_f$ avaliações das rotinas para estimar simultaneamente o pior caso de incertezas das n_f funções objetivo. Para o problema em questão, o WCEMOEA faz oito avaliações das rotinas de FEM para cada indivíduo.

Após as onze execuções de cada algoritmo, juntaram-se todas as soluções em uma única fronteira Pareto-ótima aproximada. O resultado é mostrado na Figura 11-3 para os algoritmos: MOEA, WCEMOEA e IRMOEA-M.

A Figura 11-4 mostra o efeito da perturbação $\hat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ nas soluções Pareto-ótimas aproximadas geradoras das fronteiras Pareto-ótimas aproximadas da Figura 11-3.

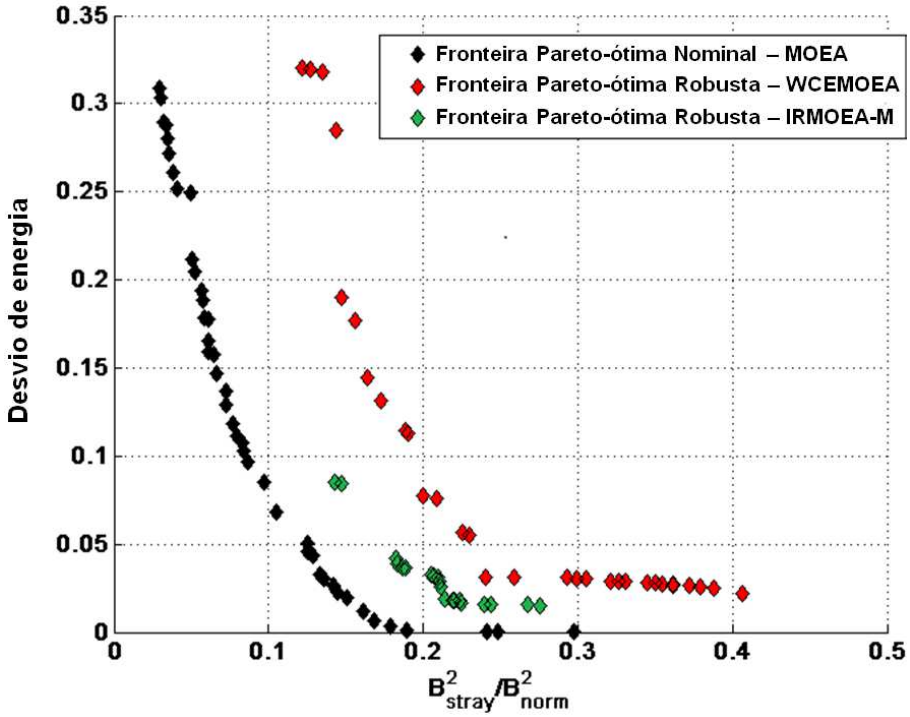


Figura 11-3 - Espaço dos objetivos com as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas obtidas pelo MOEA (losangos pretos), pelo WCEMOEA (losangos vermelhos) e pelo IRMOEA-M (losangos verdes).

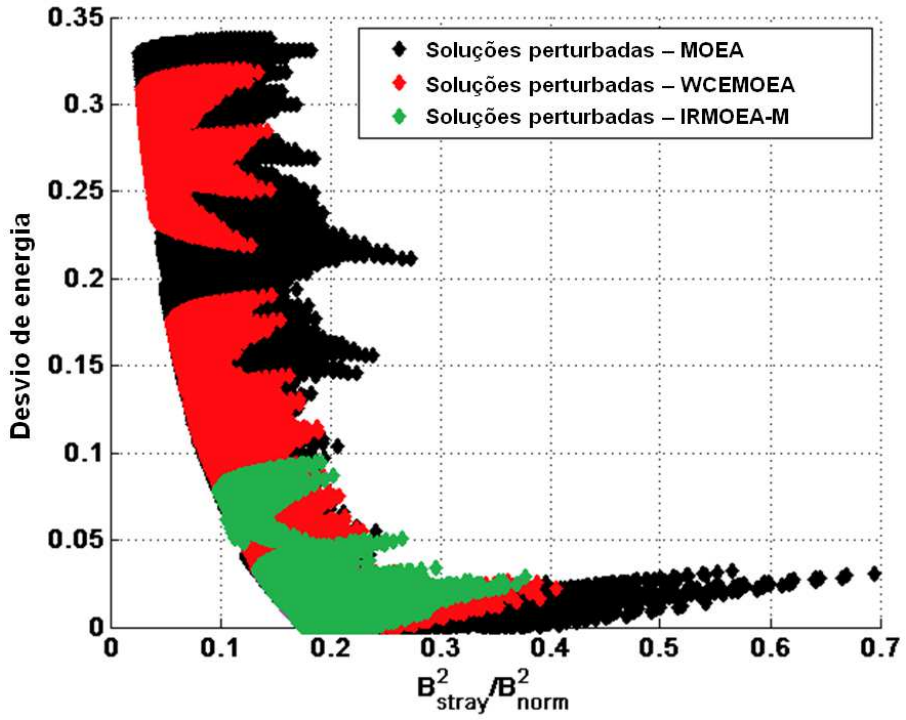


Figura 11-4 – Respostas das soluções Pareto-ótimas perturbadas obtidas pelo MOEA (losangos pretos), pelo WCEMOEA (losangos vermelhos) e pelo IRMOEA-M (losangos verdes).

Embora o IRMOEA-M utilize um esquema de partição determinística das caixas de incertezas, e o WCEMOEA use apenas uma heurística para estimar o pior caso de incertezas, a Figura 11-4 revela que o WCEMOEA é mais conservador ao estimar os piores casos de incertezas do que o IRMOEA-M e do que o método intervalar por amostragem apresentado em (SOARES *et al*., 2009b). Esta diferença na estimativa dos piores casos pode ser explicada por dois motivos: i) a utilização de amostragem com $N_{samples} = 20$ é insuficiente para identificar os piores casos e, ii) o uso de metamodelos no IRMOEA-M para obtenção das funções de inclusão (MENDES, 2013) pode introduzir erros de aproximação.

As soluções fornecidas pelo IRMOEA-M não apresentam uma grande diversidade como as fornecidas pelo WCEMOEA. Apesar disso, as soluções do IRMOEA-M ficam na região mais próxima da solução utópica do TEAM 22, que pode ser a região de maior interesse para o DM.

A Figura 11-4 mostra um resultado interessante: o fato de que as soluções robustas tangenciam a fronteira Pareto-ótima aproximada, $\widetilde{FP}^*$, em certas condições de perturbações. De fato, algumas das soluções Pareto-ótimas aproximadas obtidas pelo MOEA, que não trata robustez, são também soluções Pareto-ótimas robustas. Outra conclusão da Figura 11-4 é o fato de que as soluções robustas encontradas pelo

WCEMOEA e pelo IRMOEA-M, mesmo perturbadas, não atingem regiões muito distantes de $\widetilde{FP}^*$, por exemplo, os pontos (0,2 ; 0,22) e (0,5; 0,02), que são atingidos por soluções perturbadas do MOEA.

A Figura 11-5 compara os piores casos de incertezas obtidos pelos dois algoritmos com os piores casos ditos "reais" obtidos pela avaliação exaustiva das perturbações $\hat{\mathcal{P}}$ em torno de cada solução. A Figura 11-5 revela que, de fato, o IRMOEA-M tem um índice de exatidão menor do que o WCEMOEA para determinação do pior caso de incertezas.

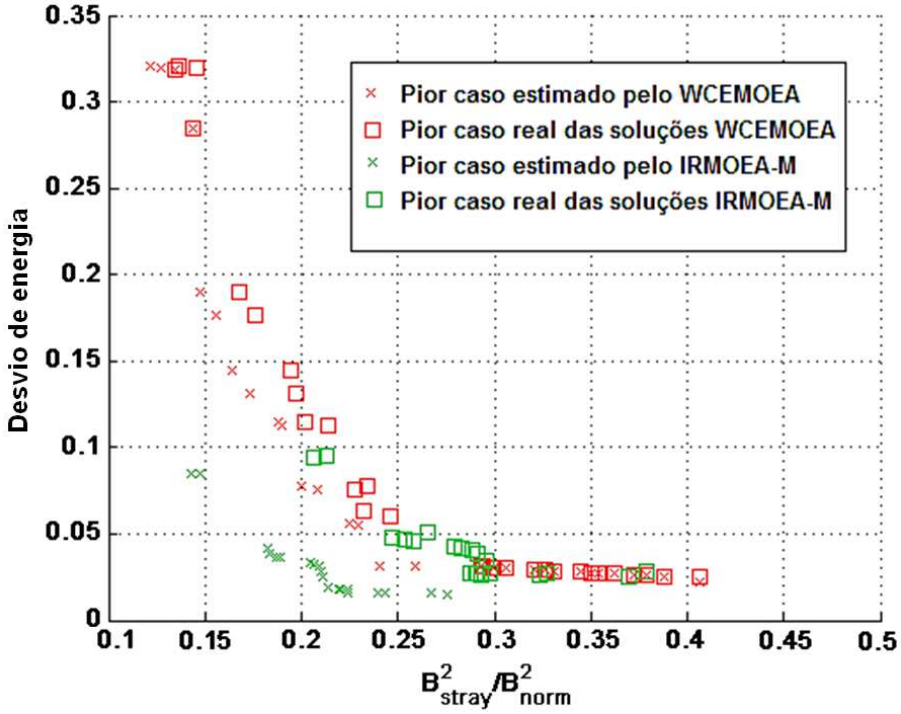


Figura 11-5 – Pior caso de incertezas estimado pelo WCEMOEA (x vermelho) e pelo IRMOEA-M (x verde), comparados com o pior caso de incertezas real das soluções obtidas pelo WCEMOEA (quadrado vermelho) e pelo IRMOEA-M (quadrado verde).

A Figura 11-6 mostra a média das perturbações de cada solução (estrela), o pior caso das perturbações (quadrado) e o resultado nominal das soluções sem incerteza (círculo). Nota-se que todas as soluções sem incerteza se encontram em $\widetilde{FP}^*$. Se o tomador de decisão desejar assumir o risco e considerar a média como métrica de robustez, qualquer dos três métodos de otimização pode ser utilizado: MOEA, WCEMOEA ou IRMOEA-M. Porém, se o tomador de decisão considerar a métrica de robustez como sendo o do pior caso de incertezas, somente as soluções providas pelo WCEMOEA e IRMOEA-M devem ser escolhidas, visto que algumas soluções

perturbadas do MOEA assumem piores casos de incertezas piores para desvios de energia superiores a 0,2.

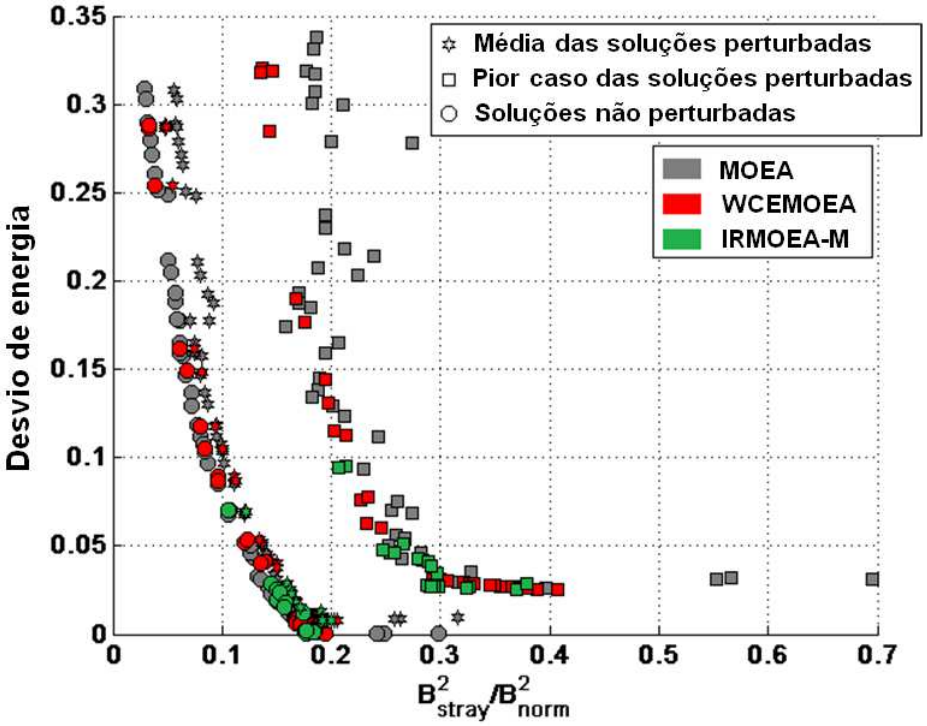


Figura 11-6 – Comparação das soluções Pareto-ótimas geradas pelo MOEA (em cinza), pelo WCEMOEA (em vermelho) e pelo IRMOEA-M (em verde), em três situações distintas: soluções na ausência de perturbações (círculos), média das soluções perturbadas (estrela) e soluções no pior caso de incertezas (quadrado).

Como a média das perturbações encontram-se próximas à $\widetilde{FP}^*$, também se conclui da Figura 11-6 que o pior caso de incertezas tem baixa probabilidade de ocorrência, ocorrendo para situações específicas de **p**, o que justificaria o tomador de decisão assumir o risco e escolher uma solução não-robusta.

11.1.5 Otimização do Projeto TEAM 22 com RHySPEA

Os parâmetros do RHySPEA-I e RHySPEA-II apresentados na Tabela 11-4.

Tabela 11-4 – Valores dos parâmetros do RHySPEA para resolução do TEAM 22.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	50
n_{gen}	Número de gerações	50
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
$n^X{}_{prof}$	Profundidade de partição no espaço de decisão	9
$n^Y{}_{prof}$	Profundidade de partição no espaço dos objetivos	7
s_{min}	Amostragem mínima nas caixas de incertezas	12
n_{rep}	Número de execuções do RHySPEA	5[(a)]

[(a)] O número de execuções foi 5 e não 11, como de praxe, para evitar tempos longos de execução (superiores a 24 horas). O tempo longo ocorre devido ao elevado custo computacional para cálculo das funções objetivo do TEAM22 adicionado ao tempo de *overhead* do RHySPEA.

Além dos parâmetros da Tabela 11-4, os seguintes parâmetros foram ajustados para o TEAM 22:

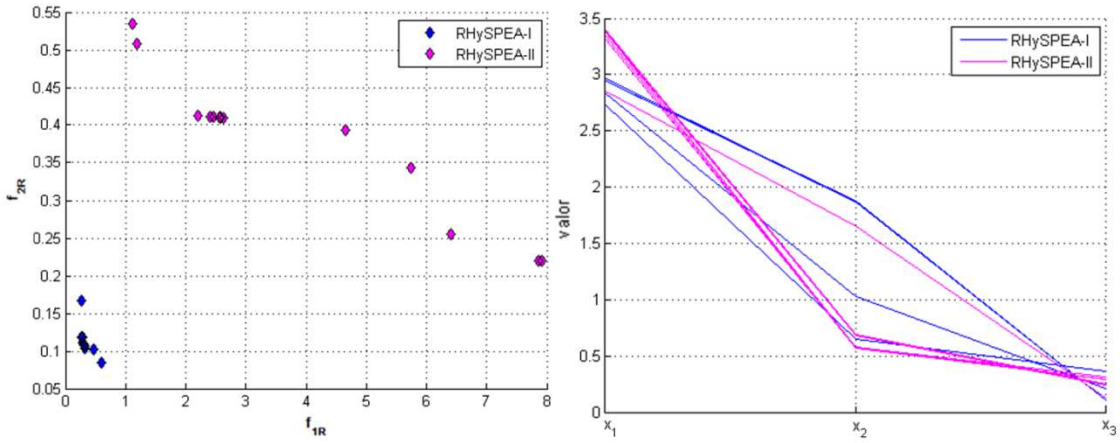
$$\tau = \begin{bmatrix} 25\% \\ 25\% \end{bmatrix},$$

$$[\widetilde{\mathbf{X}}] = \mathcal{X}' \text{ (vide Equação (9-23))},$$

$$[\mathbf{Y}] = \left\{ \mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \begin{matrix} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 0{,}6 \end{matrix} \right\}.$$

Todas as soluções Pareto-ótimas das cinco execuções foram agrupadas, sendo que as soluções não-dominadas resultantes do agrupamento formaram uma única fronteira Pareto-ótima aproximada no espaço das sensibilidades por algoritmo.

As fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas do RHySPEA-I e do RHySPEA-II, resultantes do procedimento anterior, são apresentadas no espaço das sensibilidades pela Figura 11-7(a). As soluções Pareto-ótimas aproximadas são mostradas na Figura 11-7(b).

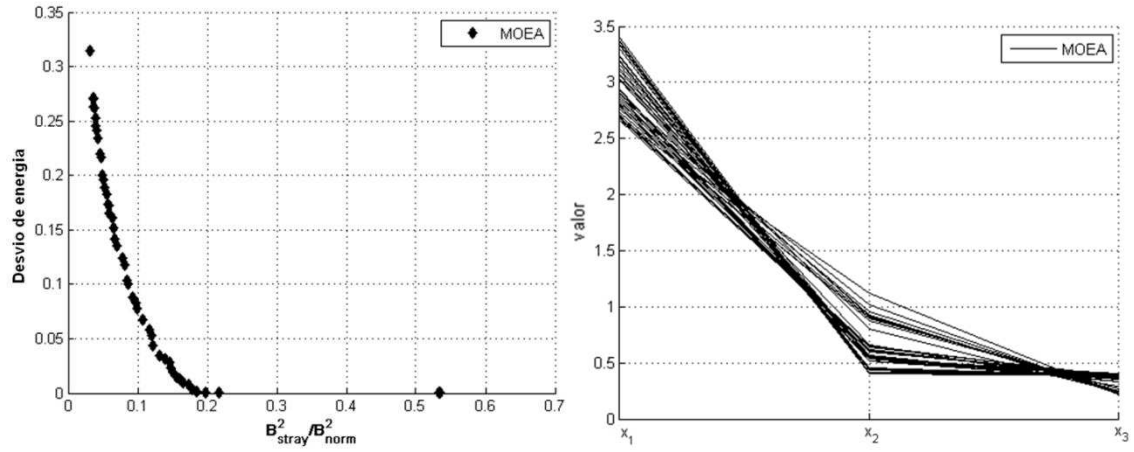


(a) (b)

Figura 11-7 – (a) Fronteiras Pareto-ótimas aproximadas no espaço das sensibilidades obtidas pelo RHySPEA-I (losango azul) e pelo RHySPEA-II (losango magenta), e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas do RHySPEA-I (azul) e do RHySPEA-II (magenta).

Da Figura 11-7(a) e Figura 11-7(b) percebe-se que as soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas são completamente diferentes dependendo da métrica de robustez adotada para o RHySPEA. A $\widetilde{FPR}^*$ gerada pelo RHySPEA-II tem maior diversidade do que a gerada pelo RHySPEA-I, o que permite maiores possibilidades de escolha para o tomador de decisão.

Para fins de comparação, a Figura 11-8(a) mostra a $\widetilde{FP}^*$ do problema calculada pelo MOEA, juntamente com suas soluções Pareto-ótimas aproximadas, $\tilde{P}^*$, na Figura 11-8(b).



(a) (b)

Figura 11-8 – (a) Fronteira Pareto-ótima aproximada no espaço dos objetivos calculada pelo MOEA, e (b) o valor das variáveis das soluções não-dominadas.

Da Figura 11-8(b) e da Figura 11-7(b) é possível perceber por inspeção que grande parte das soluções robustas obtidas não segue a tendência observada pelas soluções não-robustas. Isto é, muitas soluções robustas não fazem parte da $\widetilde{FP}^*$, o que difere dos resultados obtidos pelo WCEMOEA e IRMOEA-M na Subseção 11.1.4. A Figura 11-9 mostra os resultados das soluções robustas obtidas pelo RHySPEA-I e RHySPEA-II no espaço dos objetivos.

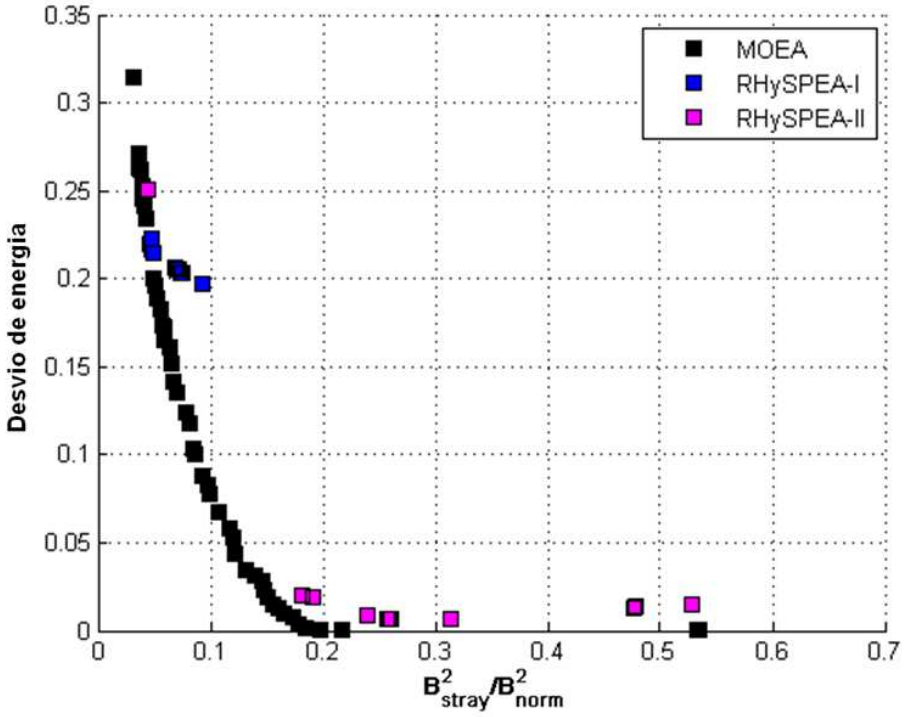


Figura 11-9 – Posicionamento das soluções robustas aproximadas obtidas pelo RHySPEA-I (azul) e pelo RHySPEA-II (magenta) no espaço dos objetivos, junto à fronteira Pareto-ótima aproximada obtida pelo MOEA (preto).

A Figura 11-9 mostra que as soluções robustas de fato não compõem a $\widetilde{FP}^*$. Além disso, as soluções se encontram em regiões do espaço dos objetivos evitadas pelo WCEMOEA e pelo IRMOEA-M, conforme apresentado na Figura 11-6. Isto mostra que as soluções robustas obtidas pelo RHySPEA-I e RHySPEA-II têm, respectivamente, baixa sensibilidade na média e no pior caso, e ao mesmo tempo podem ter elevados valores das funções objetivo nos piores casos de incertezas.

Este resultado mostra, mais uma vez, que as soluções robustas dependem diretamente da métrica de robustez e, consequentemente, do tomador de decisão que a define.

11.2Projeto de um Gerador Elétrico de Fluxo Axial

O projeto de máquinas elétricas deve atender diversos requisitos em diferentes aspectos, sejam econômicos, comerciais ou operacionais. Do ponto de vista econômico, o objetivo é que a fabricação da máquina (motor ou gerador) seja viável e de baixo custo; do ponto de vista comercial, o objetivo é mostrar ao mercado que sua máquina tenha um diferencial, por exemplo, baixo peso, o que favorece sua instalação; do ponto de vista operacional, o objetivo é que seu desempenho seja equiparado ou mesmo melhor que a concorrência, procurando a maximização da eficiência energética. Portanto, o projeto de uma máquina elétrica caracteriza-se como sendo um problema multiobjetivo, com no mínimo 3 objetivos (VASCONCELOS *et al*., 2009).

As dimensões da máquina e os materiais constituintes da máquina são variáveis de projeto que impactam diretamente nas funções objetivo de interesse: minimizar o custo e o peso, e maximizar a eficiência. Entretanto, os parâmetros elétricos da máquina, as propriedades de seus materiais constituintes e as condições ambientais de operação podem sofrer perturbações e impactar negativamente o desempenho da máquina. Outro fator de incerteza é o próprio processo de fabricação da máquina, em que as ferramentas disponíveis não são capazes de produzir peças e componentes da máquina com a precisão e complexidade requerida (KIM *et al*., 2012). Nestes casos, as dimensões reais da máquina não corresponderão exatamente aos valores ótimos teóricos calculados, podendo impactar negativamente o desempenho da máquina. Cabe ressaltar que nem sempre é viável economicamente a aquisição e manutenção de ferramentas de alta precisão para a fabricação de peças e componentes de máquinas.

Na prática as incertezas descritas anteriormente são incontroláveis no momento de manufatura e de operação da máquina. Porém, elas são previstas e, consequentemente, podem ser incorporadas na fase de projeto da máquina por meio de métodos de otimização robusta, tais como os apresentados nos capítulos anteriores.

As seções seguintes deste capítulo tratam da otimização robusta multiobjetivo de um gerador síncrono de fluxo axial a ímãs permanentes com potência nominal de 10 kW. Este gerador será muitas vezes referenciado pela sua sigla em inglês: AFPMSG (*Axial Flux Permanent Magnet Synchronous Generator*).

11.2.1 Descrição do Problema

11.2.1.1 Topologia e Características do Gerador AFPMSG

Conforme o próprio nome enuncia, o gerador AFPMSG é um gerador síncrono de fluxo axial a ímãs permanentes. Um estudo detalhado desta topologia de gerador é feito em (AYDIN, 2004). Muitas variações de topologias são possiveis, desde a quantidade de estágios da máquina até a disposição geométrica e de assentamento dos ímãs permanentes. A topologia do gerador estudado nesta tese tem as seguites características:

- Estágio único;
- Núcleo de estator ferromagnético sem ranhuras (do inglês, *slotless*);
- Ímãs permanentes nos dois rotores;
- Ímãs alocados na superfície do rotor;
- Enrolamento do tipo toroidal.

A topologia do gerador listada acima é do tipo toroidal, também denominada máquina TORUS. Ela foi introduzida por (SPOONER e CHALMERS, 1992). Esta topologia basicamente consiste em um estator localizado entre dois discos externos de rotor que são solidamente conectados a um eixo mecânico rotativo, como mostra a Figura 11-10. Os ímãs permanentes alocados sincronamente nos dois discos de rotor possuem direção oposta do fluxo magnético e têm polarização NN[15].

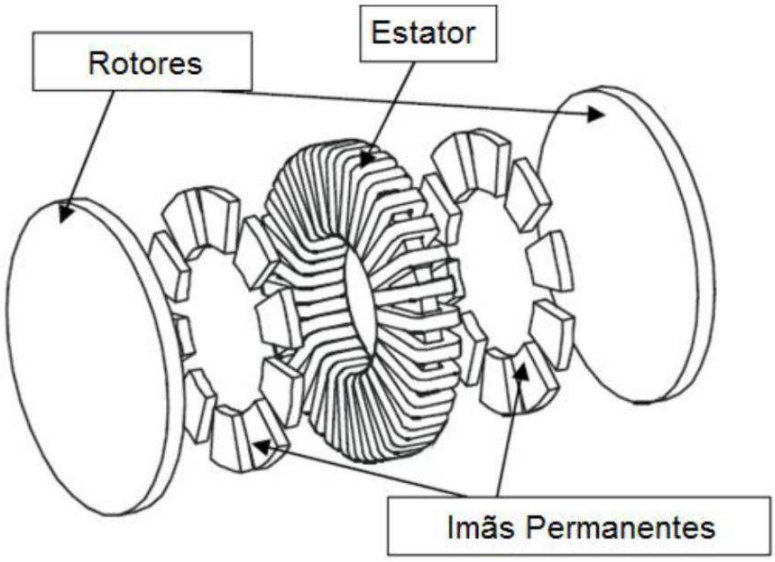


Figura 11-10 – Topologia da máquina TORUS de um único estágio.

[15] Polarização NN: quando os ímãs face a face são de mesma polaridade. O contrário é polarização NS.

Dentre as vantagens da topologia TORUS (SPOONER e CHALMERS, 1992), pode-se citar sua forma compacta e leve, com um pequeno comprimento axial, boa ventilação e resfriamento dos enrolamentos de estator; ausência de ranhuras e grande entreferro efetivo, que levam a desprezível *cogging* torque e perdas desprezíveis no rotor. No entanto, o grande entreferro efetivo trás como desvantagem a necessidade de um grande volume em ímãs permanentes o que gera um custo mais elevado.

Além da escolha da topologia, são listadas a seguir outras características do AFPMSG estudado nesta tese:

- Acoplamento direto ao eixo da turbina eólica;
- Utilização de NdFeB como ímãs permanentes;
- Rotores maciços de aço, agregados à carcaça rotativa;
- Estator de aço silício de grão não-orientado enrolados em direção radial.

As características acima conferem à máquina TORUS um alto desempenho frente a diferentes velocidades de ventos (CHAN e LAI, 2007).

11.2.1.2 Dimensionamento do Gerador AFPMSG

O projeto de um gerador é multidisciplinar (MDO). Neste sentido, vários aspectos devem ser considerados simultaneamente: projeto mecânico, estrutural, elétrico e magnético. A integração destas disciplinas é complexa e, por vezes, exige muitas iterações. Porém, muitas vezes, a fim de se simplificar o projeto, cada disciplina é tratada separadamente, o que é válido para o AFPMSG segundo o trabalho de (GIERAS, WANG e KAMPER, 2008). Em se tratando do gerador com as características mencionadas na Subseção 11.2.1.1, o trabalho de (AZZOUZI *et al*., 2005), (SABIONI *et al*., 2010) e (MAIA *et al*., 2014) demonstram a viabilidade de se tratar cada projeto separadamente e acoplá-los em uma etapa posterior.

O foco desta tese está na otimização do projeto eletromagnético do AFPMSG, cujo dimensionamento é regido por algumas equações analíticas desenvolvidas e estudadas em (LIBERT, 2004), (AYDIN, 2004) e (GIERAS, WANG e KAMPER, 2008). Um resumo das equações é apresentado a seguir.

Para geradores tem-se a seguinte relação entre a força eletromotriz EMF de fase (E_f) e a tensão de fase (V_{nom}):

$$\epsilon = \frac{E_f}{V_{nom}} > 1. \quad (11\text{-}8)$$

A eficiência, η, do gerador é determinada por:

$$\eta = \frac{P_{nom}}{P_{in}}, \quad (11\text{-}9)$$

em que:

$$P_{in} = P_{nom} + \Delta P_{losses}, \quad (11\text{-}10)$$

$$\Delta P_{losses} = \Delta P_{rot} + \Delta P_{Fe} + \Delta P_w. \quad (11\text{-}11)$$

Ou seja, a eficiência é obtida pela razão entre a potência ativa (P_{nom}) e potência total gerada incluindo as perdas (ΔP_{losses}). As perdas podem ser separadas em: (i) perdas rotacionais (ΔP_{rot}), que basicamente consiste em perdas por fricção no enrolamento; (ii) perdas no núcleo do estator e do rotor (ΔP_{Fe}), devido à histerese magnética e correntes de Foucault; (iii) perdas nos enrolamentos do estator (ΔP_w). Não existe perda por ventilação, pois não é utilizado nenhum sistema de refrigeramento forçado. A ventilação ocorre naturalmente pela rotação da máquina.

Os ímãs permanentes são os responsáveis por gerar o fluxo magnético (ϕ_f) segundo a equação:

$$\phi_f = \alpha_i B_{mg} \frac{\pi}{8p} D_{out}^2 \left(1 - k_d^2\right), \quad (11\text{-}12)$$

cujos parâmetros são:

B_{mg} *:* valor de pico da densidade do fluxo magnético no entreferro;

p *:* número de par de pólos;

D_{out} *:* diâmetro externo do gerador.

Os parâmetros α_i e k_d são definidos da seguinte forma:

$$\alpha_i = \frac{B_{avg}}{B_{mg}}, \quad (11\text{-}13)$$

$$k_d = \frac{D_{in}}{D_{out}}, \quad (11\text{-}14)$$

em que B_{avg} é valor médio da densidade do fluxo magnético no entreferro, e D_{in} o diâmetro interno do gerador. Para distribuição senoidal da forma de onda da densidade de fluxo magnético, tem-se $\alpha_i = \frac{2}{\pi}$.

A força eletromotriz (E_f) sem carga do gerador é definida como:

$$E_f = \pi\sqrt{2} p N_{ph} k_{w1} \phi_f n_s, \quad (11\text{-}15)$$

cujos parâmetros são:

N_{ph} *:* número de voltas do enrolamento (armadura por fase);

k_{w1} *:* fator de enrolamento para forma de onda fundamental. Para tipo de enrolamento toroidal tem-se $\mathrm{k_{w1}} = 1$;

n_s *:* velocidade rotacional (rpm).

Substituindo a equação do fluxo magnético ϕ_f na equação da força eletromotriz E_f tem-se:

$$E_f = \frac{\pi^2}{8}\sqrt{2}N_{ph}k_{w1}n_s\alpha_i B_{mg}D_{out}^2\left(1-k_d^2\right). \quad (11\text{-}16)$$

A equação da potência ativa, P_{nom}, é:

$$P_{nom} = mV_{nom}I_{nom}cos\varphi_{nom}, \quad (11\text{-}17)$$

em que:

m *:* número de fases. O AFPMSG considerado tem $m = 3$;

V_{nom} *:* tensão de linha;

I_{nom} *:* corrente de fase nominal;

φ_{nom} *:* ângulo do fator de potência.

A corrente de fase nominal, I_{nom}, no entanto, pode ser descrita em termos da densidade linear de corrente A_m:

$$I_{nom} = \frac{\pi A_m D_{avg}}{2\sqrt{2}mN_{ph}}, \quad (11\text{-}18)$$

em que D_{avg} é diâmetro médio do gerador definido como:

$$D_{avg} = \frac{D_{in}+D_{out}}{2}, \quad (11\text{-}19)$$

Reescrevendo a equação da potência ativa em termos da densidade de corrente, A_m, e da força eletromotriz, E_f, tem-se:

$$P_{nom} = \frac{E_f}{\epsilon}\frac{\pi A_m D_{avg}}{2\sqrt{2}N_{ph}}cos\varphi_{nom}. \quad (11\text{-}20)$$

Substituindo E_f na equação anterior tem-se:

$$P_{nom} = \frac{\pi^3}{32\epsilon}k_{w1}n_s\alpha_i B_{mg}D_{out}^3(1-k_d^2)A_m(1+k_d)cos\varphi_{nom}, \quad (11\text{-}21)$$

com a qual é possível isolar a dimensão do diâmetro externo D_{out}:

$$D_{out} = \sqrt[3]{\frac{32\epsilon P_{nom}}{\alpha_i\pi^3 k_{w1}n_s B_{mg}A_m k_D cos\varphi_{nom}}}, \quad (11\text{-}22)$$

em que k_D é definido como:

$$k_D = (1+k_d)\left(1-k_d^2\right). \quad (11\text{-}23)$$

A partir da obtenção do diâmetro externo, D_{out}, é possível derivar as outras dimensões do gerador como, por exemplo, o comprimento axial do núcleo do estator (L_{cs}), o comprimento axial do núcleo do rotor (L_{cr}) e o comprimento do ímã permanente (L_{pm}), definidos assim:

$$L_{cs} = \frac{B_{mg}\pi\alpha_i D_{out}(1+k_d)}{4pB_{cs}}, \tag{11-24}$$

$$L_{cr} = \frac{B_u\pi D_{out}(1+k_d)}{8pB_{cr}}, \tag{11-25}$$

$$L_{pm} = \frac{\mu_r B_{mg} g}{B_r - \frac{B_{mg}}{\lambda}}, \tag{11-26}$$

em que:

B_{cs} : valor de pico da densidade de fluxo magnético no núcleo do estator;

B_u *:* densidade de fluxo magnético na superfície do ímã permanente;

B_{cr} : valor de pico da densidade de fluxo magnético no núcleo do rotor;

μ_r *:* permeabilidade relativa do ímã permanente;

g : comprimento do entreferro;

B_r *:* remanência do ímã permanente;

λ *:* fator de dispersão de fluxo.

Com a obtenção de D_{out} e, consequentemente, D_{in}, é possível calcular a largura da cabeça do enrolamento toroidal W_{cu}:

$$W_{cu} = \frac{D_{in} - \sqrt{D_{in}^2 - \frac{2A_m D_{avg}}{k_{cu} J_a}}}{2}, \tag{11-27}$$

em que:

k_{cu} : fator de preenchimento de cobre no enrolamento;

J_a : densidade superficial de corrente no enrolamento de armadura do estator.

O comprimento axial total do rotor (L_r) é definido como:

$$L_r = L_{cr} + L_{pm}. \tag{11-28}$$

Por fim, tem-se que o comprimento axial total (L_T) do gerador AFPMSG é:

$$L_t = L_s + 2L_r + 2g, \tag{11-29}$$

e seu diâmetro total (D_t) é:

$$D_t = \frac{(D_{out} - D_{in})}{k_i} + D_{in} + 2W_{cu}, \tag{11-30}$$

em que k_i é o fator de empilhamento das laminas de aço.

A Figura 11-11 apresenta as principais dimensões do gerador AFPMSG. A distância entre dois ímãs adjacentes é representada por d_{pm}.

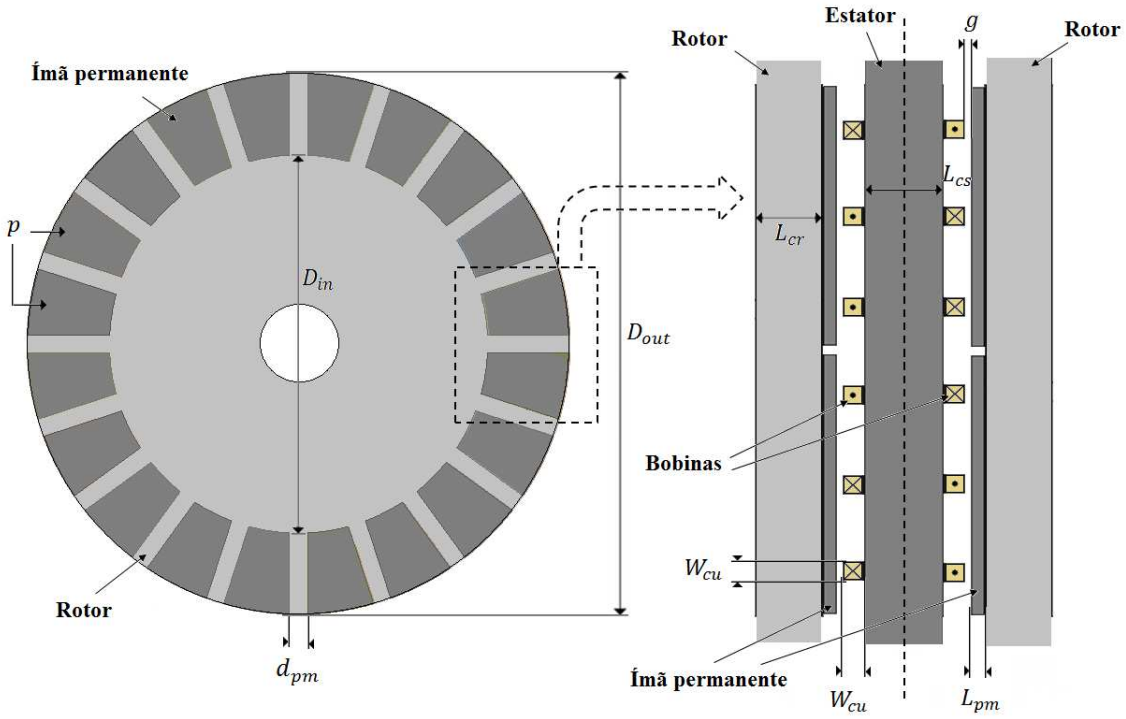


Figura 11-11 – Principais parâmetros de dimensão do gerador AFPMSG com enrolamento toroidal.

11.2.1.3 Validação dos Modelos de Dimensionamento do Gerador AFPMSG

O modelo analítico apresentado na Subseção 11.2.1.2 foi validado por meio de ferramentas de simulação para cálculo de campo eletromagnético (SABIONI *et al*., 2010) e (MAIA *et al*., 2014). Nestes trabalhos constam, além da validação dos modelos eletromagnéticos descritos, a validação dos modelos elétricos, termodinâmicos e mecânicos do gerador, que fogem do escopo desta tese.

11.2.2 Modelagem do Problema de Otimização Robusta Multiobjetivo para o Gerador AFPMSG

Alguns trabalhos se destacam na literatura sobre projeto ótimo de máquinas síncronas a ímãs permanentes, como o (WANG *et al*., 2005) especificamente para máquinas de fluxo axial. Outros lidam com o projeto ótimo robusto por diferentes abordagens, tais como a metodologia Taguchi de múltiplas respostas (KIM *et al*., 2012), em que se consideram incertas as medidas do ímã e das ranhuras do estator, e o projeto baseado em *Six Sigma* (MENG *et al*., 2011), que minimiza o valor esperado da eficiência.

Métodos de otimização multiobjetivo já foram utilizados no gerador AFPMSG sob estudo (VASCONCELOS *et al*., 2009). Seu projeto robusto multiobjetivo também já foi explorado em (SABIONI, SILVA e VASCONCELOS, 2013), em que a otimização se baseou na abordagem conservadora de *minimax* utilizando o WCEMOEA. No entanto, a aplicação do MDEA-RF neste caso é recomendável, visto que uma solução muito conservadora pode não ser interessante para fins práticos.

O trabalho de (MAHMOUDI *et al*., 2013) apresenta um modelo para projeto do AFPMSG similar ao exposto na Subseção 11.2.1.2, e faz uso de GA para otimizar as dimensões do gerador em função das seguintes variáveis: $B_{mg}, k_d, g, k_{w1}, J_a, N_{ph}$. As variáveis de decisão para o projeto do gerador consideradas nesta tese são apresentadas na Tabela 11-5.

Tabela 11-5 – Variáveis do problema de projeto do AFPMSG baseado em (AYDIN, 2004) (GIERAS, WANG e KAMPER, 2008).

x	J_a	A_m	B_{mg}	B_{cs}	B_{cr}	k_d	g	kd_{pm}	p	N_{ph}
Unidades	MA/m^2	KA/m	T	T	T	-	mm	-	-	-
Min	3	42	0,3	1,7	1,4	0,4	1	1	6	1
Max	9	98	0,9	1,9	1,6	0,8	2,5	3	16	32

A variável kd_{pm} é o fator de distanciamento entre ímãs adjacentes, usado na seguinte relação (AZZOUZI *et al*., 2005):

$$d_{pm} = kd_{pm}(g + W_{cu}). \tag{11-31}$$

A Tabela 11-5 apresenta um conjunto de variáveis mistas a serem otimizadas, das quais todas são contínuas, exceto p e N_{ph}, que são discretas. Os valores admissíveis para N_{ph} dependem do valor de p, uma vez que N_{ph} deve ser um dos divisores de $2p$ (GIERAS, WANG e KAMPER, 2008). Ou seja, se $p = 14$, então $N_{ph} \in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$.

A partir da determinação das variáveis de decisão (**x**) da Tabela 11-5 e com as equações de dimensionamento apresentadas na Subseção 11.2.1.2, é possível obter todas as dimensões do gerador e parâmetros eletromagnéticos do gerador (**x**′). Estes parâmetros e dimensões, no entanto, podem ser submetidos a incertezas provenientes do processo de manufatura (KIM *et al*., 2012) ou da própria operação do gerador onde flutuações das condições ambientes e operacionais podem ocorrer (MENG *et al*., 2011).

A Tabela 11-6 apresenta quais as dimensões e parâmetros susceptíveis às incertezas, com seus respectivos valores de intervalo de incerteza.

Tabela 11-6 – Parâmetros submetidos a incertezas no problema de projeto do AFPMSG.

$\mathbf{x}'$	B_{cs}	g	D_{out}	D_{in}	L_{cs}	L_{cr}	L_{pm}	I_{nom}	f	K_{disp}
Unidades	T	mm	mm	mm	mm	mm	mm	A	Hz	-
Incerteza ($\mathbf{p}$)	±10%	±1	±2	±2	±2	±2	±1	±10%	±10%	±10%

O parâmetro f é a frequência nominal do estator, cuja variação impacta nas perdas por correntes de Foucault e por histerese magnética no núcleo do estator (AYDIN, 2004). O parâmetro K_{disp} refere-se ao fator de dispersão do fluxo magnético gerado pelos ímãs permanentes, e também impacta nas perdas magnéticas (AYDIN, 2004).

A formulação das funções objetivo do projeto do AFPMSG com incertezas é apresentada abaixo, com a qual se procura maximizar a eficiência do gerador (η), minimizando seu custo total em dólares (C_t) e seu peso total em kg (W_t), simultaneamente.

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f_1(\mathbf{x},\mathbf{p}) : y_1 = \eta, \ \mathbf{p}\in\mathcal{P}, \tag{11-32}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f_2(\mathbf{x},\mathbf{p}) : y_2 = C_t, \ \mathbf{p}\in\mathcal{P}, \tag{11-33}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}} f_3(\mathbf{x},\mathbf{p}) : y_3 = W_t, \ \mathbf{p}\in\mathcal{P}, \tag{11-34}$$

$$g_1(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \frac{0{,}8-\eta}{0{,}8} \le 0, \ \mathbf{x}\in\mathcal{X}, \mathbf{p}\in\mathcal{P}. \tag{11-35}$$

$$g_2(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \frac{D_{out}-700}{700} \le 0, \ \mathbf{x}\in\mathcal{X}, \mathbf{p}\in\mathcal{P}. \tag{11-36}$$

$$g_3(\mathbf{x},\mathbf{p}) : \frac{W_t-150}{150} \le 0, \ \mathbf{x}\in\mathcal{X}, \mathbf{p}\in\mathcal{P}. \tag{11-37}$$

Para o cálculo do custo total, são considerados os custos em dólares de cada material constituinte do gerador, sendo o NdFeB do ímã permanente o material de maior valor por unidade de peso. Mais detalhes dos materiais são fornecidos em (MAIA *et al*., 2014).

As restrições do problema $g_1(\mathbf{x},\mathbf{p})$ e $g_3(\mathbf{x},\mathbf{p})$ se aplicam justamente aos objetivos $f_1(\mathbf{x},\mathbf{p})$ e $f_3(\mathbf{x},\mathbf{p})$, limitando uma eficiência mínima aceitável de 80% e um peso máximo aceitável 150kg. A restrição $g_2(\mathbf{x},\mathbf{p})$ limita o diâmetro externo do gerador em 700mm, impedindo um volume externo muito grande, favorecendo um menor valor para o objetivo $f_3(\mathbf{x},\mathbf{p})$.

11.2.3 Otimização do Projeto do AFPMSG com o MDEA-RF

O *framework* do MDEA-RF, apresentado na Figura 9-7, foi aplicado ao problema de projeto ótimo robusto do gerador AFPMSG com os parâmetros da Tabela 11-7.

Tabela 11-7 – Valores dos parâmetros do MDEA-RF para o projeto ótimo robusto do AFPMSG.

Parâmetro	Descrição	Valor
n_{pop}	Tamanho da população	150
n_{gen}	Número de gerações	200
p_m	Probabilidade de mutação	20%
η_m	Coeficiente do *polynomial mutation*	20
p_c	Probabilidade de cruzamento	100%
η_c	Coeficiente do *simulated binary crossover*	15
pd	Probabilidade de mutação discreta	30%
pd_p	Probabilidade de permutação dos pólos	40%
pd_w	Probabilidade de permutação dos enrolamentos	60%
λ	Fator de robustez	(variável)
n_{rep}	Número de execuções do MDEA-RF	11

Ao término das n_{rep} execuções, a fronteira Pareto-ótima aproximada final é calculada pelo critério de não-dominância entre as fronteiras Pareto-ótimas aproximadas geradas em cada execução.

Como o número de par de pólos, p, e o número de enrolamentos, N_{ph}, são variáveis discretas do modelo, três parâmetros adicionais foram incorporados ao MDEA-RF para tratar variáveis discretas: pd, pd_p e pd_w. O parâmetro pd refere-se à probabilidade de alguma mutação discreta ocorrer. Se ocorrer, pd_p regula a probabilidade de que ocorra a permutação dos pólos entre dois indivíduos que, caso ocorra, pd_w regula a probabilidade de que os enrolamentos também sejam permutados. Se os enrolamentos não forem permutados, novos valores de enrolamentos são gerados aleatoriamente. Caso não ocorra permutação dos pólos, a mutação restringe-se a gerar aleatoriamente novos valores de enrolamentos para os pólos do indivíduo. Esta abordagem é baseada no procedimento descrito em (BESNERAIS *et al*., 2008).

A fronteira Pareto-ótima não-robusta aproximada ($\lambda = 0$), resultante da aplicação da otimização convencional ao problema, é apresentada na Figura 11-12. A fronteira Pareto-ótima robusta aproximada ($\lambda = 1$), resultante da minimização exclusiva da métrica de robustez MR3 para cada objetivo, é apresentada na Figura 11-13.

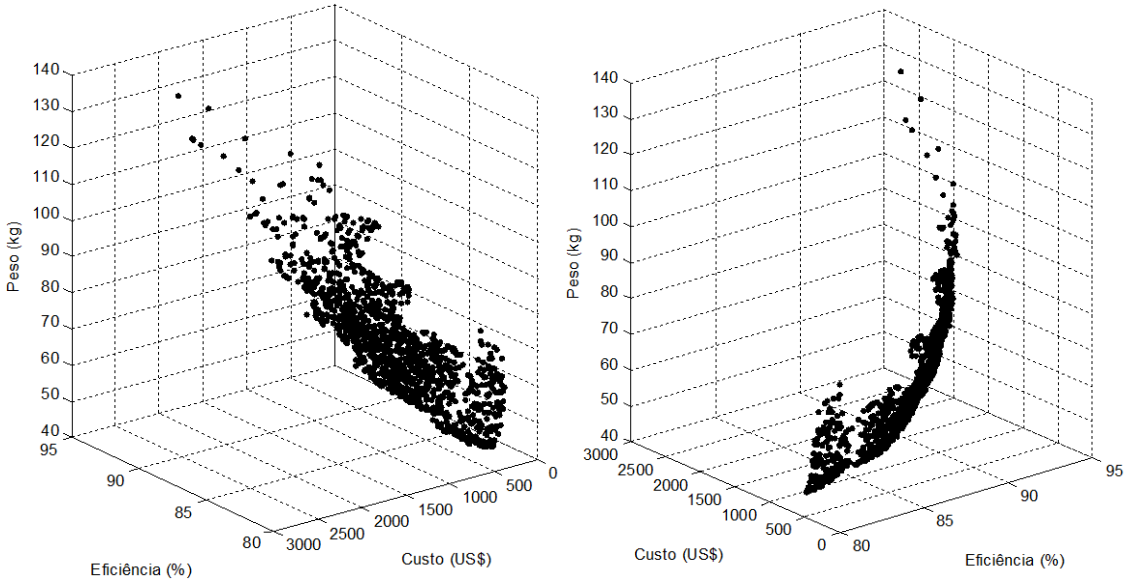


Figura 11-12 – Fronteira Pareto-ótima não-robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço dos objetivos.

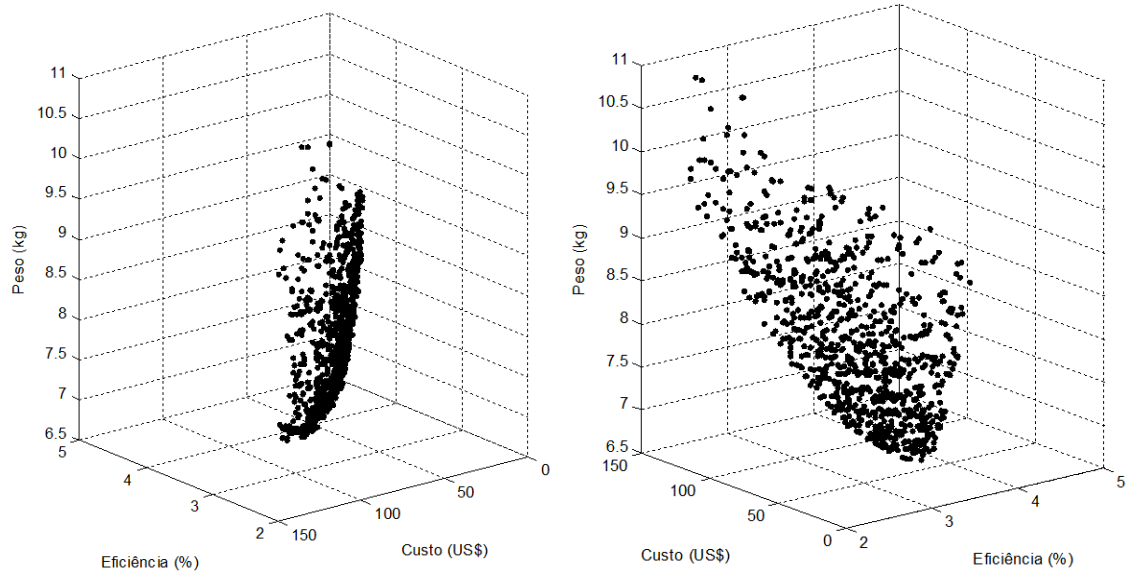


Figura 11-13 – Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço das sensibilidades.

Da Figura 11-12 nota-se que $\widetilde{FP}^*$ é convexa, fato também constatado em (VASCONCELOS *et al.*, 2009), o que torna possível o uso da métrica WCE para estimar o valor do pior caso de incertezas da métrica MR3 utilizada no MDEA-RF. A $\widetilde{FPR}^*$ da Figura 11-13 também é convexa.

A Tabela 11-8 fornece os limites superiores e inferiores das fronteiras Pareto-ótima não-robusta e robusta aproximadas, respectivamente, pelo processo de otimização dos objetivos originais, $\boldsymbol{f(x)}$, e das métricas de robustez, $\boldsymbol{f_R(x)}$, associadas a cada um deles. Esta etapa é calculada no item 4 do MDEA-RF durante o processo de normalização.

Tabela 11-8 – Valores extremos das fronteiras Pareto-ótima não-robusta e robusta aproximadas para o projeto do AFPMSG.

	$\widetilde{FP}^*$			$\widetilde{FPR}^*$		
Objetivos	η	C_t	W_t	η	C_t	W_t
Min	80,00 %	US$ 368,33	45,00 kg	2,31 %	US$ 34,88	6,54 kg
Max	92,38 %	US$ 2499,99	139,95 kg	4,51 %	US$ 140,65	12,03 kg

A Figura 11-14 apresenta os resultados das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas obtidas pelo MDEA-RF no espaço das sensibilidades, enquanto que a Figura 11-15 apresenta os resultados das mesmas soluções no espaço dos objetivos, para diferentes valores do fator de robustez, $\lambda \in \{0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1\}$.

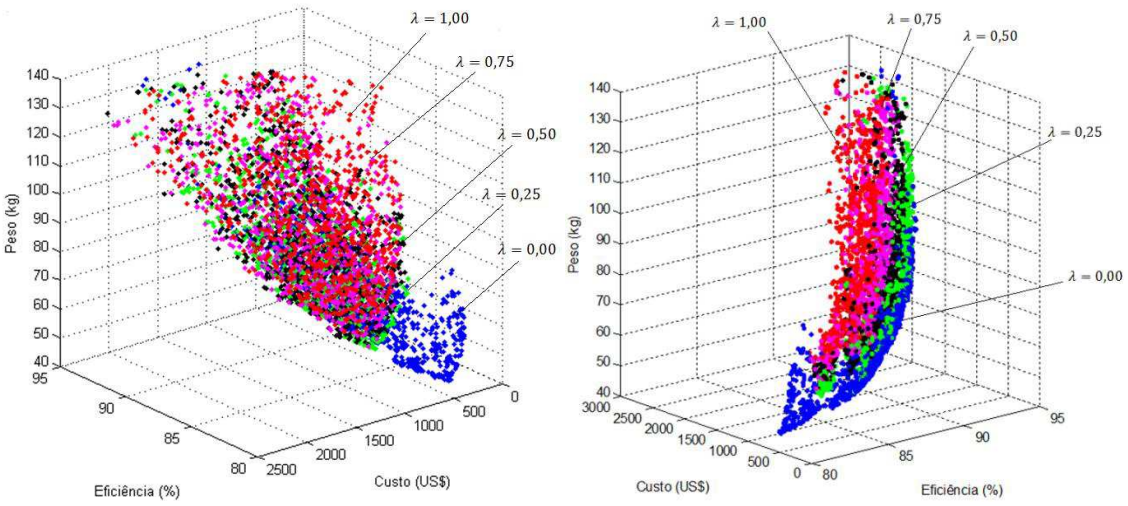


Figura 11-14 – Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço das sensibilidades.

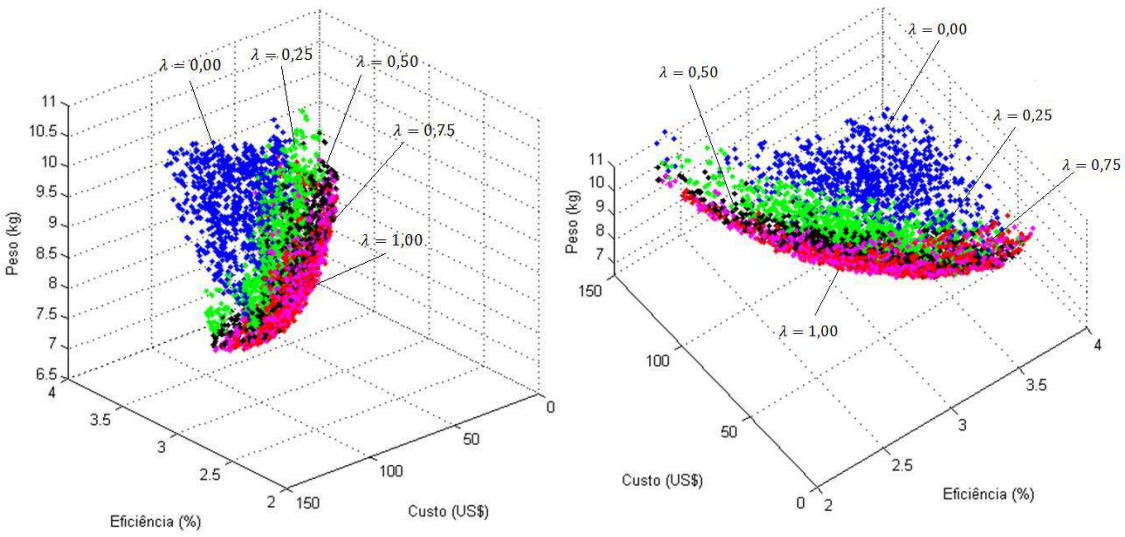


Figura 11-15 – Fronteira Pareto-ótima robusta aproximada do projeto do AFPMSG em duas perspectivas no espaço das sensibilidades.

Da Figura 11-14 e da Figura 11-15 é possível perceber que quanto maior o valor do fator de robustez mais afastada a fronteira das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas fica da solução ótima utópica $(\eta;\ C_t;\ W_t) = (100;\ 0;\ 0)$ no espaço dos objetivos e, em contrapartida, mais próxima a fronteira fica da solução robusta utópica $MR3(\eta;\ C_t;\ W_t) = (0;\ 0;\ 0)$ no espaço das sensibilidades. A expressão $MR3(\cdot)$ refere-se à aplicação da métrica de robustez sobre os objetivos do problema.

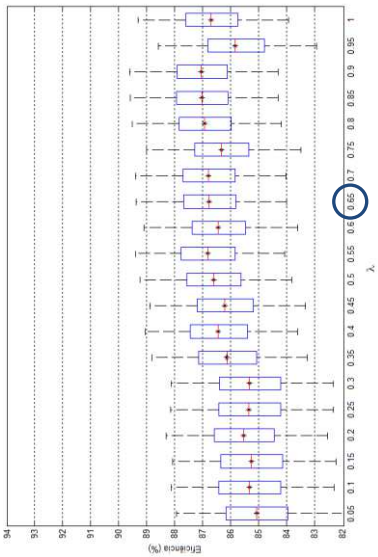
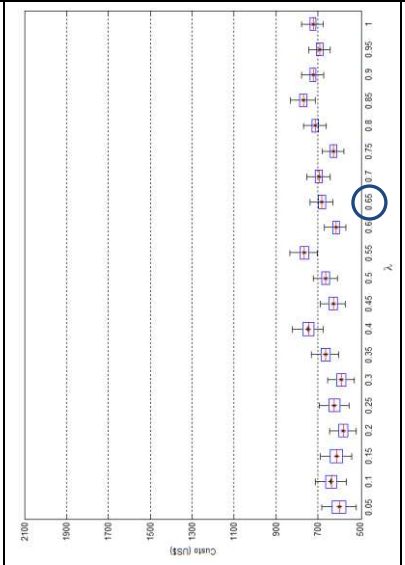
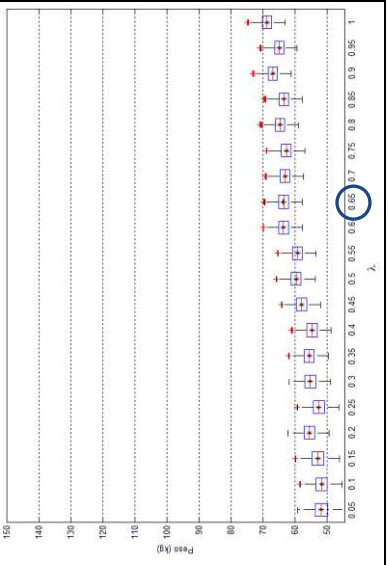
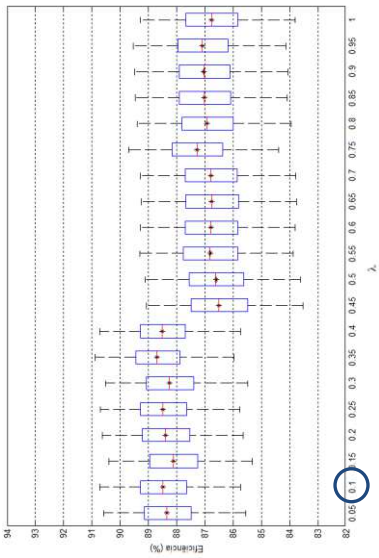
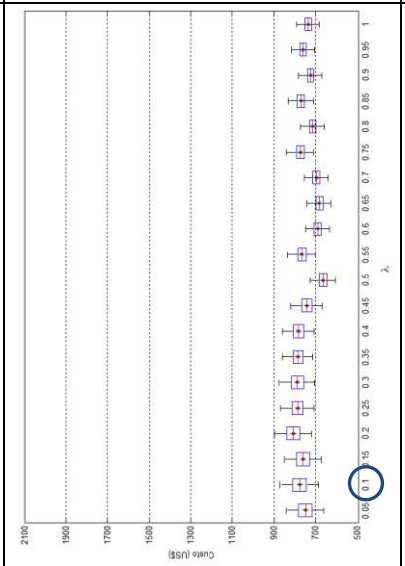
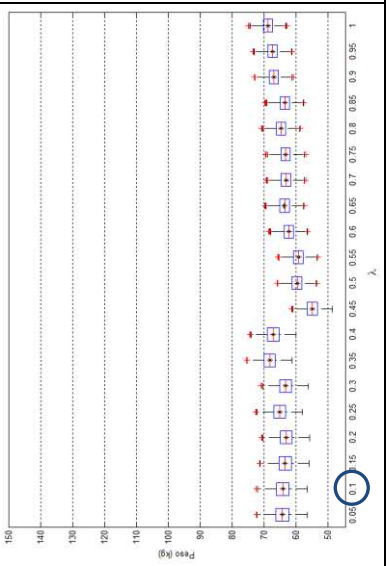
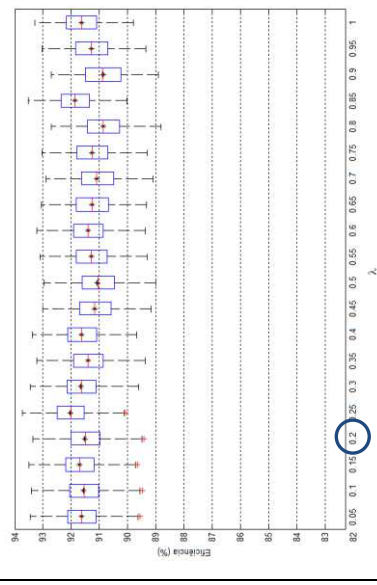
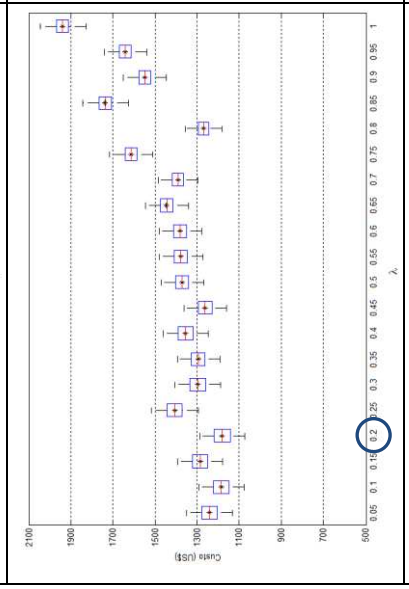
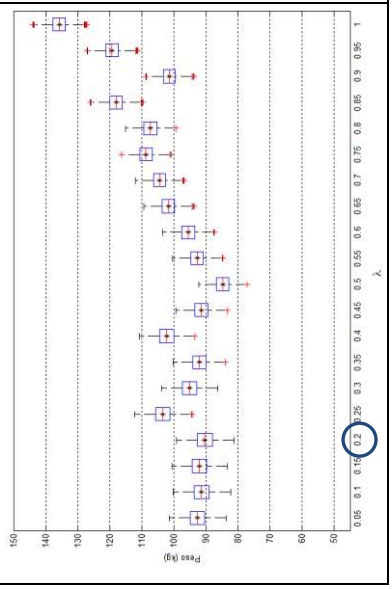
Conforme visto na Seção 9.3, cabe ao tomador de decisão escolher o fator de robustez, λ, que atenda melhor às suas preferências. Note que cada λ está associado a uma única fronteira no espaço dos objetivos e no espaço das sensibilidades.

Para exemplificar um possível procedimento de tomada de decisão, que corresponde ao item B.3.2 da Figura 6-3, optou-se por definir três vetores de preferência:

- η *(70%);* C_t *(15%);* W_t *(15%)*
- η *(34%);* C_t *(33%);* W_t *(33%)*
- η *(20%);* C_t *(40%);* W_t *(40%)*

As soluções candidatas à escolha são aquelas mais próximas deste vetor definido no espaço dos objetivos. Porém, para cada λ tem-se uma solução candidata. A Tabela 11-9 apresenta o conjunto de soluções candidatas para cada vetor de preferência em função da variação do fator de robustez. Todas as soluções foram submetidas a um conjunto de 10000 possíveis perturbações, e seu efeito sobre os objetivos é apresentado em formato de *boxplot*.

Tabela 11-9 – Resultados em *boxplot* da perturbação das soluções de projeto ótimas do AFPMSG.

	Eficiência (%)	**Custo (US$)**	**Peso (kg)**
η (20%); C_t (40%); W_t (40%)			
η (34%); C_t (33%); W_t (33%)			
η (70%); C_t (15%); W_t (15%)*			

A partir da análise das figuras da Tabela 11-9, o tomador de decisão está apto a escolher aquela que mais lhe atende. Várias conclusões são possíveis a partir das figuras, entre elas destacam-se:

1. A preferência por alta eficiência (~91,5%) leva a projetos muito caros (~US$1300) e geradores pesados (~90kg);
2. A preferência por custo baixo (~US$600) e peso baixo (~60kg) leva a geradores de menor eficiência (~86%);
3. Preferências equilibradas entre os objetivos resultam em geradores de eficiência intermediária (~87,5%) ainda com custo baixo (~US$700) e peso baixo (~65kg);
4. A variabilidade da eficiência não diminui com o aumento do fator de robustez, a redução da variabilidade ocorre somente para o custo e o peso total.
5. A redução da variabilidade do custo e do peso total para valores crescentes de λ geralmente incorre em aumento absoluto do custo e do peso total.

O tópico 5 elucida bem o *trade-off* entre os objetivos e as métricas de robustez, em que a redução na métrica de robustez é acompanhada do aumento dos objetivos.

A Tabela 11-10 apresenta os resultados de três soluções escolhidas para cada um dos vetores de preferência.

Tabela 11-10 – Resultados das variáveis de decisão, variáveis de dimensionamento e dos objetivos do projeto do AFPMSG a partir da definição de três critérios de tomada de decisão para escolha das soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas fornecidas pelo MDEA-RF.

			η (70%); C_t (15%); W_t (15%); $\lambda = 0,2$	***η (34%); C_t (33%); W_t (33%); $\lambda = 0,1$***	***η (20%); C_t (40%); W_t (50%); $\lambda = 0,65$***
	Parâmetros	Unidades			
Variáveis de decisão **x**	J_a	MA/m^2	4,408	7,014	8,922
	A_m	KA/m	50,142	66,284	79,082
	B_{mg}	T	0,619	0,567	0,757
	B_{cs}	T	1,701	1,716	1,710
	B_{cr}	T	1,600	1,600	1,600
	k_d	-	0,800	0,800	0,800
	g	mm	1,080	1,010	1,128
	kd_{pm}	-	1,052	1,050	2,236
	p	-	16	16	16
	N_{ph}	-	16	8	16
Dimensões calculadas **x′**	D_{out}	mm	694,119	651,278	557,638
	D_{in}	mm	555,294	521,015	446,110
	L_{cs}	mm	14,202	12,095	13,876
	L_{cr}	mm	16,772	13,999	23,742
	L_{pm}	mm	12,063	8,513	15,386
	W_{cu}	mm	11,264	9,335	8,771
	d_{pm}	mm	12,988	10,861	22,130
	I_{nom}	A	46,188	46,188	46,188
	f	Hz	50,930	50,930	50,930
Objetivos	$\boldsymbol{\eta}$	%	91,51	88,50	86,77
	$\boldsymbol{c_t}$	US$	1180,84	776,23	680,73
	$\boldsymbol{W_t}$	kg	90,30	64,12	63,56

11.3Considerações Finais

Embora a aplicação do WCEMOEA, do RHySPEA-I e do RHySPEA-II no TEAM-22 tenha fornecido soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas diferentes, em função das métricas de robustez diferentes, o procedimento de otimização robusta demonstrou que os algoritmos estão aptos a resolver problemas reais de engenharia em variáveis contínuas. É possível observar que as fronteiras Pareto-ótimas robustas aproximadas para o TEAM-22 por cada um dos algoritmos, inclusive o IRMOEA-M, fazem parte da $\widetilde{FP}^*$, o que demonstra que o TEAM-22 é um problema do Tipo 2 na Figura 5-2.

Uma única avaliação das funções objetivo do TEAM-22 leva aproximadamente cinco segundos no computador utilizado (8GB de memória RAM e processador Intel® Core™ i7-4790 de 3,60GHz). Ao resolver o TEAM 22 com o RHySPEA, foi constatado um decréscimo significativo no tempo de cálculo gasto, por geração, ao longo do processo de otimização. Este decréscimo não foi tão significativo para a resolução da função teste *Deb2Obj-1*, que roda em milésimos de segundos, o que revela que as operações com caixas intervalares impõem um *overhead* de cálculo a mais durante o processo de otimização, que é perceptível principalmente em problemas que rodam em menos de 0,001s.

A aplicação do MDEA-RF no projeto do gerador AFPMSG permitiu demonstrar o passo-a-passo do *framework* interativo da Figura 9-7 com o tomador de decisão até a escolha final das três soluções candidatas. Também foi possível observar que a redução da variabilidade dos objetivos do AFPMSG vem acompanhada de uma substancial piora nos objetivos, o que pode levar o tomador de decisão à conclusão de que uma solução ótima nominal aproximada, $\tilde{P}^*$, para o projeto do gerador seja melhor que uma solução ótima robusta aproximada, $\widetilde{PR}^*$, mesmo na presença de incertezas.

12 CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

12.1Conclusões

Dada a diversidade de definições de robustez e os diversos métodos propostos na literatura para se obter soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas, conclui-se que não existe um procedimento único para realizar otimização robusta multiobjetivo.

Embora a métrica de robustez possa ser definida de diferentes formas e por meio de diferentes métodos, existe um consenso de que a solução robusta é aquela que sofre pouca influência de incertezas.

A presente tese propõe quatro algoritmos de otimização robusta multiobjetivo: WCEMOEA, RHySPEA-I, RHySPEA-II e MDEA-RF, com diferentes métricas de robustez e com diferentes mecanismos de manipulação das incertezas. Cada um apresenta suas particularidades e funcionamento frente a problemas de *benchmark*, cumprindo com seus diferentes macro-objetivos para cada problema. A análise dos resultados mostra que o critério de robustez é relativo e depende substancialmente de preferências do tomador de decisão. O que vale mais? Menor pior caso de incertezas estimado ou menor sensibilidade média estimada? A resposta a estas questões, feita pelo tomador de decisão, é crucial para se escolher o método de otimização robusta multiobjetivo a ser utilizado em determinado problema.

Os algoritmos propostos, além de terem sido bem sucedidos nos seus propósitos de obtenção de soluções Pareto-ótimas robustas aproximadas segundo seus critérios, também apresentaram estratégias úteis para tornar a otimização robusta multiobjetivo mais rápida, eficiente e interativa. Estas estratégias foram:

- proposição de um estimador do pior caso de incertezas (WCE) que exige poucas avaliações das funções objetivo;
- proposição de um eficiente sistema de armazenamento e operação de dados em hipercubos (RHySPEA);
- proposição da métrica MR1 para estimar sensibilidade média da solução;
- proposição da métrica MR2 para estimar a máxima sensibilidade da solução;
- proposição das métricas MR3 e MR4 para estimar o desvio máximo da solução;

- consolidação da estimativa de pior caso de incertezas de uma função em um ponto ideal de maximização (WCEMOEA);
- proposição de um *framework* interativo (MDEA-RF) para envolvimento do tomador de decisão no processo de otimização robusta;
- proposição de um fator de robustez (MDEA-RF) com o qual o tomador de decisão escolhe um nível de robustez que satisfaça suas preferências.

12.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Para continuidade do presente estudo, são listadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Adaptar os algoritmos para que eles suportem modelos com outras representações de incertezas, além da incerteza determinística;
- Utilizar uma estrutura de dados mais eficiente para particionamento do espaço e armazenamento de dados para o RHySPEA, tornando-o mais escalável. A utilização de árvores binárias tal como feita no *k-d tree* para segmentação espacial pode ser promissor;
- Criar mecanismos que permitam que os algoritmos propostos enderecem problemas não convexos sem nenhuma limitação;
- Adaptar os algoritmos propostos para que sejam usados em problemas com muitos objetivos (*many-objective*);
- Criar metamodelos das funções objetivo e/ou das métricas de robustez possibilitando que amostras sejam avaliadas neles de forma mais rápida que nas funções objetivo originais ou nas métricas de robustez;
- Explorar novos mecanismos e/ou métricas de robustez que agreguem informação do grau de robustez nas soluções;
- Estudar empiricamente o impacto da variação dos parâmetros de controle dos algoritmos de otimização robusta desenvolvidos sobre os resultados;
- Acoplar ao MDEA-RF algum método que encontre o pior caso de incertezas em torno das soluções de forma exata;
- Definir e criar *dashboards* com os quais o tomador de decisão seja capaz de analisar e avaliar a robustez de uma solução frente às outras soluções, e que indique os efeitos do provável *trade-off* na perda de desempenho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGRAWAL, R. B.; DEB, K. Simulated Binary Crossover for Continuous Search Space. **Complex Systems**, vol. 9, 1995. p. 115-148.

AIMMS. AIMMS, 2016. Disponivel em: <http://www.aimms.com/>. Acesso em: 18 Novembro 2016.

ALOTTO, P. et al. Multiobjective Optimization in Magnetostatics: A Proposal for a Benchmark Problem. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 32, 1996. p. 1238-1241.

ATHAN, T. W.; PAPALAMBROS, P. Y. A Note on Weighted Criteria Methods for Compromise Solutions in Multi-Objective Optimization. **Engineering Optimization**, vol. 27, 1996. p. 155-176.

AVIGAD, G.; BRANKE, J. Embedded Evolutionary Multi-Objective Optimization for Worst Case Robustness. **Proceedings of the 10th annual conference on genetic and evolutionary computation (GECCO)**, vol. 1, 2008. p. 617-624.

AYDIN, M. **Aixal Flux Surface Mounted Permanent Magnet Disc Motors for Smooth Torque Traction Drive Applications**. Tese de Doutorado. University of Wisconsin. Madison. 2004.

AZZOUZI, J. et al. Axial Flux PM Synchronous Generator Design Optimization: Robustness Test of the Genetic Algorithm Approach. **European Conference on Power Electronics and Applications**, vol. 1, 2005. p. 1-10.

BARRICO, C.; ANTUNES, C. H. Robustness Analysis in Multi-objective Optimization Using a Degree of Robustness Concept. **IEEE Congress on Evolutionary Computation**, vol. 1, 2006. p. 1887-1892.

BEN-TAL, A.; EL GHAOUI, L.; NEMIROVSKI, A. **Robust Optimization**. United States of America: Princeton University Press, 2009.

BESNERAIS, J. L. et al. Multiobjective Optimization of Induction Machines including Mixed Variables and Noise Minimization. **IEEE Transcations on Magnetics**, vol. 44, 2008. p. 1102-1105.

BEYER, H. G.; SENDHOFF, B. Functions With Noise-Induced Multimodality: A Test for Evolutionary Robust Optimization—Properties and Performance Analysis. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 10, 2006. p. 507-526.

BEYER, H. G.; SENDHOFF, B. Robust Optimization - A Comprehensive Survey. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 196, 2007. p. 3190-3218.

BEYER, H.; SCHWEFEL, H. Evolution Strategies: A Comprehensive Introduction. **Natural Computing**, vol. 1, 2002. p. 3-52.

BLUMEL, A. L. **Robust Fuzzy Autopilot Design using Multi-objective Optimisation for a Highly Non-linear Missile**. Shrivenham. 2000.

BOUYSSOU, D. et al. **Evaluation and Decision Models with Multiple Criteria:** Stepping Stones for the Analyst. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2006.

BRANKE, J. Memory Enhanced Evolutionary Algorithms for Changing Optimization Problems. **Congress on Evolutionary Computation CEC99**, vol. 1, 1999. p. 1875-1882.

BRANKE, J. et al. **Multiobjective Optimization:** Interactive and Evolutionary Approaches. Berlin: Springer, v. 1, 2008. p. 470 p.

BURMEN, A. et al. Automated Robust Design and Optimization of Integrated Circuits by Means of Penalty Functions. **International Journal of Electronics and Communications**, vol. 57, 2002. p. 1-10.

CASTRO, L. N.; ZUBEN, F. J. V. Learning and Optimization Using the Clonal Selection Principle. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Special Issue on Artificial Immune Systems**, vol. 6, 2002. p. 239-251.

CAVALIERE, V. et al. Robust Design of High Field Magnets Through Monte Carlo Analysis. **International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, vol. 22, 2003. p. 589-602.

CHAN, T. F.; LAI, L. L. An Axial-Flux Permanent-Magnet Synchronous Generator for a Direct-CoupledWind-Turbine System. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, vol. 22, 2007. p. 86-94.

CHAUDHURI, S.; DEB, K. An Interactive Evolutionary Multiobjective Optimization and Decision Making Procedure. **Applied Soft Computing**, vol. 10, 2010. p. 496-511.

CHEN, S. Q. **Comparing Probabilistic and Fuzzy Set Approaches for Design in the Presence of Uncertainty**. Blacksburg. 2000.

CIOFFI, M. et al. A Fast Method for Statistical Robust Optimization. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 42, 2006. p. 1099-1102.

CIOFFI, M.; FORMISANO, A.; MARTONE, R. Increasing Design Robustness in Evolutionary Optimisation. **COMPEL: The International Journal for Computation**

and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, vol. 23, 2004. p. 187-196.

COELLO, C. A. C.; DHAENENS, C.; JOURDAN, L. **Advances in Multi-Objective Nature Inspired Computing**. [S.l.]: Springer, 2009. ISBN no. 272.

CORNE, D. W. et al. PESA-II: Region-based Selection in Evolutionary Multiobjective Optimization. **Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)**, vol. 1, 2001. p. 283-290.

CORNE, D. W.; KNOWLES, J. D.; OATES, M. J. The Pareto Envelope-based Selection Algorithm for Multiobjective Optimization. **Parallel Problem Solving from Nature VI Conference. Lecture Notes in Computer and Information Science**, vol. 1917, 2000. p. 839-848.

CUNHA, A. G.; FERREIRA, J.; RECIO, G. Evolutionary Robustness Analysis for Multi-Objective Optimization: Benchmark Problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 49, 2014. p. 771–793.

DARWIN, C. **On the Origin of Species**. [S.l.]: John Murray, 1859. p. 502 p.

DEB, K. Optimal Design of a Welded Beam via Genetic Algorithms. **AIAA Journal**, vol. 29, 1991. p. 2013-2015.

DEB, K. Introduction to Evolutionary Multiobjective Optimization. **Lecture Notes in Computer Science**, vol. 5252 , 2008. p. 59-96.

DEB, K. et al. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 6, 2002. p. 182-197.

DEB, K.; GOYAL, M. A Combined Genetic Adaptive Search (Geneas) for Engineering Design. **Computer Science and Informatics**, vol. 26, 1996. p. 30-45.

DEB, K.; GUPTA, H. Introducing Robustness in Multi-Objective Optimization. **Evolutionary Computation**, vol. 14, 2006. p. 463-494.

DEB, K.; JAIN, H. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems with Box Constraints. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 18, 2014. p. 577-601.

DEB, K.; SRINIVASAN, A. Innovization: Innovative Design Principles Through Optimization. **Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)**, vol. 1, 2006. p. 1629-1636.

DIAS, A. H. F.; VASCONCELOS, J. A. Multiobjective Genetic Algorithms Applied to Solve Optimization Problems. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 38, 2002. p. 1133-1136.

DU, X.; CHEN, W. Towards a Better Understanding of Modeling Feasibility Robustness in Engineering Design. **Journal of Mechanical Design**, vol. 122, 2000. p. 385-394.

DUBOIS, D.; PRADE, H. Formal Representations of Uncertainty. In: BOUYSSOU, D., et al. **Decision-making Process:** Concepts and Methods. [S.l.]: [s.n.], 2009. Cap. 3.

ESTECO. modeFRONTIER, 2016. Disponivel em: <http://www.esteco.com/modefrontier>. Acesso em: 12 Março 2016.

FERBER, M. et al. Conducted EMI of DC–DC Converters with Parametric Uncertainties. **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, vol. 55, 2013a. p. 699-706.

FERBER, M. et al. Uncertainty Analysis of the Conducted Interferences in a Power Converter. **Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications**, vol. 12, 2013b. p. 454-465.

FERREIRA, J. et al. Evolutionary Multi-Objective Robust Optimization. In: KOSIńSKI, W. **Advances in Evolutionary Algorithms**. Viena: I-Tech Education and Publishing, 2008. Cap. 13, p. p. 261-278.

FOGEL, L. W. **Intelligence Through Simulated Evolution:** Forty Years of Evolutionary Programming. 1. ed. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1999. 162 p.

FONSECA, C. M.; FLEMING, P. J. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. **Proceedings of the Fifth International Conference in Genetic Algorithms**, vol. 1, 1993. p. 1-8.

FRANÇA, F. O.; ZUBEN, F. J. V. Otimização em Ambientes Incertos. **Apresentação Unicamp**, vol. 1, 2009. p. 1- 96.

FRONTLINESOLVERS. FrontlineSolvers, 2016. Disponivel em: <http://www.solver.com/>. Acesso em: 21 Fevereiro 2016.

FU, H. et al. Robust Optimization Over Time: Problem Difficulties and Benchmark Problems. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 19, 2014. p. 731-745.

GIERAS, J. F.; WANG, R. J.; KAMPER, M. J. **Axial Flux Permanent Magnet Brushless Machines**. Second. ed. [S.l.]: Springer, 2008.

GOH, C. K. et al. An Investigation on Noise-Induced Features in Robust Evolutionary Multi-Objective Optimization. **Expert Systems with Applications**, vol. 37, 2010. p. 5960-5980.

GOH, C. K.; TAN, K. C. An Investigation on Noisy Environments in Evolutionary Multiobjective Optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 11, 2007. p. 354-381.

GOH, C.-K.; TAN, K. C. **Evolutionary Multi-objective Optimization in Uncertain Environments:** Issues and Algorithms. Berlin: Springer, 2009. ISBN 186.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1989. 432 p. ISBN 1.

GONG, D. et al. Interactive Evolutionary Algorithms with Decision-Maker's Preferences for Solving Interval Multi-Objective Optimization Problems. **Neurocomputing**, vol. 137, 2012. p. 241–251.

GRATSCH, T.; BATHE, K. J. A Posteriori Error Estimation Techniques in Practical Finite Element analysis. **Computers & Structures**, vol. 83, 2005. p. 235-265.

GUIMARÃES, F. G.; LOWTHER, D. A.; RAMÍREZ, J. A. Multiobjective Approaches for Robust Electromagnetic Design. **IEEE Transaction on Magnetics**, vol. 42, 2006. p. 1207-1210.

HAN, J. S.; KWAK, B. M. Robust Optimization using a Gradient index: MEMS Applications. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 27, 2004. p. 469-478.

HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. **The Elements of Statistical Learning:** Data Mining, Inference, and Prediction. [S.l.]: Springer, 2009.

HAUKAAS, T.; GARDONI, P. Model Uncertainty in Finite-Element Analysis: Bayesian Finite Elements. **Journal of Engineering Mechanics**, vol. 137, 2011. p. 519-526.

HERRMANN, J. W. A Genetic Algorithm for Minimax Optimization Problems. **Proceedings of the 1999 IEEE Congress on Evolutionary Computation**, vol. 1, 1999. p. 1099-1103.

HO, S. L. et al. An Efficient Tabu Search Algorithm for Robust Solutions of Electromagnetic Design Problems. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 44, 2008. p. 1042-1045.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. [S.l.]: University of Michigan Press, 1975.

HU, J.; MEHROTRA, S. Robust and Stochastically Weighted Multiobjective Optimization Models and Reformulations. **Journal of Operations Research**, vol. 60, 2012. p. 936-953.

JIN, R.; DU, X.; CHEN, W. The Use of Metamodeling Techniques for Optimization under Uncertainty. **Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 25, 2003. p. 99-116.

JIN, Y. Surrogate-Assisted Evolutionary Computation: Recent Advances and Future Challenges. **Swarm and Evolutionary Computation**, vol. 1, 2011. p. 61-70.

JIN, Y.; BRANKE, J. Evolutionary Optimization in Uncertain Environments - A Survey. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 9, 2005. p. 303-317.

JIN, Y.; SENDHOFF, B. Tradeoff between Performance and Robustness: An Evolutionary Multiobjective Approach. **Proceedings of Second International Conference on Evolutionary Multi-criteria Optimization**, vol. 1, 2003. p. 237-252.

KASPRZYK, J. R. et al. Many Objective Robust Decision Making for Complex Environmental Systems Undergoing Change. **Environmental Modelling & Software**, vol. 42, 2013. p. 55-71.

KELKAR, D.; GUPTA, S. Improved Quadtree Method for Split Merge Image Segmentation. **IEEE Emerging Trends in Engineering and Technology**, vol. 1, 2008. p. 44-47.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. Particle Swarm Optimization. **IEEE International Conference on Neural Networks**, vol. 1, 1995. p. 1942-1948.

KIM, K. S. et al. Multi-Response Taguchi Robust Design of Back Electromotive Force and Cogging Torque Considering the Manufacturing Tolerance for Electric Machine. **IEEE International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment**, vol. 1, 2012. p. 379-387.

KIM, N. K. et al. Robust Optimization Utilizing the Second-Order Design Sensitivity Information. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 46, 2010. p. 3117-3120.

KLIR, G.; FILGER, T. **Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1998.

KNOWLES, J. D.; CORNE, D. W. Approximating the Nondominated Front Using the Pareto Archived Evolution Strategy. **Journal of Evolutionary Computation**, vol. 8, 2000. p. 149-172.

KONAK, A.; COIT, D. W.; SMITH, A. E. Multi-Objective Optimization using Genetic Algorithms: A Tutorial. **Reliability Engineering and System Safety. Genetic Algorithms and Reliability**, vol. 91, 2006. p. 992-1007.

KOUVELIS, P.; YU, G. **Robust Discret Optimization and its Application**. [S.l.]: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, v. 14, 1997. 358 p.

KOZA, J. R. et al. **Genetic Programming IV:** Routine Human-Competitive Machine Intelligence. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2003. 624 p.

KRUISSELBRINK, J. W. **Evolution Strategies for Robust Optimization**. Tese de Doutorado. Universiteit Leiden. Holanda, p. p. 265. 2012.

LAMBERTI, P.; TUCCI, V. Interval Approach to Robust Design. **The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)**, vol. 26, 2007. p. 280-292.

LEE, K. H.; PARK, G. J. Robust Optimization considering Tolerances of Design Variables. **Computers and Structures**, vol. 79, 2001. p. 77-86.

LI, K. et al. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm based on Dominance and Decomposition. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 19, 2015. p. 694-716.

LI, M.; AZARM, S. A New Deterministic Approach Using Sensitivity Region Measures for Multi-Objective Robust and Feasibility Robust Design Optimization. **Transactions of the ASME**, vol. 128, 2006. p. 874-883.

LI, Z.; IERAPETRITOU, M. Process Scheduling Under Uncertainty: Review and Challenges. **Computers & Chemical Engineering**, vol. 32, 2008. p. 715-727.

LIBERT, F. **Technical Licenciate Report: Design, Optimization and Comparison of Permanent Magnet Motors for a Low Speed Direct-Driven Mixer**. Royal Institute of Technology. Stockholm. 2004.

LIM, D. et al. Inverse Multi-Objective Robust Evolutionary Design. **Genetic Programming and Evolvable Machines**, vol. 7, 2006. p. 383-404.

LUKE, S. **Essentials of Metaheuristics**. [S.l.]: Department of Computer Science. George Mason University, 2013. 253 p. ISBN Online version 2.0. http://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/.

MAHMOUDI, A. et al. Design, Analysis, and Prototyping of an Axial-Flux Permanent Magnet Motor Based on Genetic Algorithm and Finite-Element Analysis. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 49, 2013. p. 1479-1492.

MAIA, T. A. C. et al. Metodologia de Projeto de um Gerador de Fluxo Axial de Alta Eficiência para Aplicações em Turbinas Eólicas de Pequeno Porte. **Eletroevolução**, vol. 75, p. p. 48-53, 2014.

MATHWORKS. MATLAB, 2016. Disponivel em: <http://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Acesso em: 18 Agosto 2016.

MENDES, H. S. M. **Algoritmos Evolucionários Intervalares para Otimização Robusta Multiobjetivo**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. p. 134. 2013.

MENDES, M. H. S. et al. A Surrogate Genetic Programming Based Model to Facilitate Robust Multi-Objective Optimization: a Case Study in Magnetostatics. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 49, 2013a. p. 2065-2068.

MENDES, M. H. S. et al. Appraisal of Surrogate Modeling Techniques: A Case Study of Electromagnetic Device. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 49, 2013b. p. 1993-1996.

MENG, X. et al. Robust Multilevel Optimization of PMSM Using Design for Six Sigma. **IEEE Transaction on Magnetics**, vol. 47, 2011. p. 3248-3251.

MIETTINEN, K. M. **Nonlinear Multiobjective Optimization**. [S.l.]: [s.n.], 1999. 298 p.

MIRJALILI, S.; LEWIS, A.; MOSTAGHIM, S. Confidence Measure: A Novel Metric for Robust Meta-Heuristic Optimisation Algorithms. **Information Sciences**, vol. 317, 2015. p. 114-142.

MOORE, R. E.; KEARFOOT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to Interval Analysis**. 1. ed. [S.l.]: Philadelphia: SIAM, 2009.

NOESIS. Noesis Solutions, 2016. Disponivel em: <http://www.noesissolutions.com/Noesis/>. Acesso em: 21 Fevereiro 2016.

ONG, Y. S.; NAIR, P. B.; LUM, K. Y. Max–Min Surrogate-Assisted Evolutionary Algorithm for Robust Design. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 10, 2006. p. 392-404.

OPTIY. OptiY, 21 Fevereiro 2016. Disponivel em: <http://www.optiy.eu/>.

PAENKE, I.; BRANKE, J.; JIN, J. Efficient Search for Robust Solutions by Means of Evolutionary Algorithms and Fitness Approximation. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 10, 2006. p. 405-420.

PARREIRAS, R. O. et al. A Flexible Consensus Scheme for Multicriteria Group Decision Making under Linguistic Assessments. **Information Sciences**, vol. 180, 2010. p. 1075-1089.

PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy Multicriteria Decision-Making:** Models, Methods and Applications. [S.l.]: Wiley, v. 1, 2010. 360 p.

POSPICHAL, P.; JAROS, J.; SCHWARZ, J. Parallel Genetic Algorithm on the CUDA Architecture. **Proceedings of the 2010 International Conference on Applications of Evolutionary Computation**, vol. 1, 2010. p. 442-451.

RADHA, H. et al. Binary Space Partitioning Tree Representation of Images. **Journal of Visual Communication and Image Representation**, vol. 2, 1991. p. 201-221.

RAM, P.; GRAY, A. G. Which Space Partitioning Tree to Use for Search? **Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems**, vol. 1, 2013. p. 656-664.

RAY, T. Constrained Robust Optimal Design using a Multiobjective Evolutionary Algorithm. **IEEE Congress on Evolutionary Computation**, vol. 1, 2002. p. 419-424.

REN, Z. et al. A Robust Global Optimization Algorithm of Electromagnetic Devices Utilizing Gradient Index and Multi-Objective Optimization Method. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 47, 2011. p. 1254-1257.

REYNOLDS, R. G. An Introduction to Cultural Algorithms. **3rd Annual Conference on Evolutionary Programming**, vol. 1, 1994. p. 131-139.

ROBIC, T.; FILIPIC, B. DEMO: Differential Evolution for Multiobjective Optimization. **Lecture Notes in Computer Science**, vol. 3410 , 2005. p. 520-533.

SABIONI, C. L. et al. Acoplamento de Técnicas dos Projetos Eletromagnético e Térmico de um Gerador de Fluxo Axial a Ímãs Permanentes para Operação em Turbinas Eólicas de Baixa Velocidade. **XVIII Congresso Brasileiro de Automática**, vol. 1, 2010. p. 1-8.

SABIONI, C. L.; MENDES, M. H. S.; VASCONCELOS, J. A. Robustness Assessment over TEAM 22 Problem Worst-Case-Based Optimal Solutions. **Proceedings of the 16th IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)**, vol. 1, 2014. p. 1-2.

SABIONI, C. L.; SILVA, S. R.; VASCONCELOS, J. A. Axial-Flux Generator Robust Design Aided by Numerical Electromagnetic Field Computation. **Proceedings on the 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields**, vol. 1, 2013. p. 1-2.

SAHA, A.; RAY, T. Practical Robust Design Optimization Using Evolutionary Algorithms. **Journal of Mechanical Design**, vol. 10, 2011. p. 1-19.

SANDGREN, E.; CAMERON, T. M. Robust Design Optimization of Structures through Consideration of Variation. **Computers & Structures**, vol. 80, 2002. p. 1605-1613.

SANO, Y.; KITA, H. Optimization of Noisy Fitness Functions by means of Genetic Algorithms using History of Search. **Parallel Problem Solving from Nature - LNCS**, vol. 1917, 2000. p. 571–580.

SCHAFFER, J. D. Multi-Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms. **First International Conference on Genetic Algorithms**, vol. 1, 1985. p. 93-100.

SCHILLINGS, C.; SCHIMIDT, S.; SCHULZ, V. Efficient Shape Optimization for Certain and Uncertain Aerodynamic Design. **Computers & Fluids**, vol. 46, 2011. p. 78-87.

SIERRA, M. R.; COELLO, C. A. C. Multi-Objective Particle Swarm Optimizers: A Survey of the State-of-the-Art. **International Journal of Computational Intelligence Research**, vol. 2, 2006. p. 287-308.

SOARES, G. L. **Algoritmos Determinístico e Evolucionário Intervalares para Otimização Robusta Multi-Objetivo**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. p. 267. 2008.

SOARES, G. L. et al. Interval Robust Multi-Objective Evolutionary Algorithm. **IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**, vol. 1, 2009a. p. 1637-1643.

SOARES, G. L. et al. Robust Multi-Objective TEAM 22 Problem: A Case Study of Uncertainties in Design Optimization. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 45, 2009b. p. 1028-1031.

SPOONER, E.; CHALMERS, B. J. "TORUS": a Slotless, Toroidal-Stator, Permanent-Magnet Generator. **IEE Proceedings B, Electric Power Applications**, vol. 1, 1992. p. 497-506.

STEINER, G.; WEBER, A.; MAGELE, C. Managing Uncertainties in Electromagnetic Design Problems with Robust Optimization. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 40, 2004. p. 1094-1099.

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficien tHeuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. **Journal of Global Optimization**, vol. 11, 1997. p. 341-359.

TAGUCHI, G. **Quality Engineering Through Design Optimization**. New York: Kraus International Publications, 1984.

TAKAHASHI, R. H. C. et al. Sensitivity Analysis for Optimization Problems Solved by Stochatic Methods. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 37, 2001. p. 3566-3569.

TSUTSUI, S.; GHOSH, A. Genetic Algorithms with a Robust Solution Searching Scheme. **IEEE transactions on Evolutionary Computation**, vol. 1, 1997. p. 201-208.

VASCONCELOS, J. A. et al. Improvements in Genetic Algorithms. **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 37, 2001. p. 3414-3417.

VASCONCELOS, J. A. et al. Multi-objective Optimization of an Axial Flux Wind Generator. **Proceedings of the 17th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields**, vol. 1, 2009. p. 1-2.

WANG, G. G.; SHAN, S. Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization. **Journal of Mechanical Design**, vol. 129, 2006. p. 370-380.

WANG, R. J. et al. Optimal Design of a Coreless Stator Axial Flux Permanent-Magnet Generator. **IEEE Transaction on Magnetics**, vol. 41, 2005. p. 55-64.

YANG, S. Genetic Algorithms with Memory and Elitism-Based Immigrants in Dynamic Environments. **Evolutionary Computation**, vol. 16, 2008. p. 385-416.

YANG, S.; YAO, X. Population-Based Incremental Learning With Associative Memory for Dynamic Environments. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 12, 2008. p. 542-561.

YU, X. et al. Robust Optimization over Time – A New Perspective on Dynamic Optimization Problems. **IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)**, vol. 1, 2010. p. 1-6.

ZANG, T. A. et al. **Needs and Opportunities for Uncertainty-Based Multidisciplinary Design Methods for Aerospace Vehicles**. Langley Research Center, Hampton, Virginia, p. p. 62. 2002. (L-18174).

ZHANG, Q.; LI, H. MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, vol. 11, 2007. p. 712-731.

ZHOU, A. et al. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Survey of the State of the Art. **Swarm and Evolutionary Computation**, vol. 1, 2011. p. 32-49.

ZITZLER, E.; LAUMANNS, M.; THIELE, L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. **Proceedings of the EUROGEN**, vol. 1, 2001. p. 1-21.