UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Classificação de $\lambda-$Hiperfícies Estáveis em Sólitons de Ricci Gradiente - Desigualdade de Faber-Khran em Espaços com Peso - Superfícies Estáveis com Bordo Livre em Domínios de Killing

FARLEY FRANCISCO SANTANA

Belo Horizonte

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FARLEY FRANCISCO SANTANA

Classificação de $\lambda-$Hiperfícies Estáveis em Sólitons de Ricci Gradiente - Desigualdade de Faber-Khran em Espaços com Peso - Superfícies Estáveis com Bordo Livre em Domínios de Killing

Tese submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Matemática.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte
2017

A minha família.

Sumário

Agradecimentos **vi**

Resumo **viii**

Abstract **x**

Introdução **xii**

0.1 Classificação de $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis em sólitons de Ricci gradiente xii

0.2 Desigualdade de Faber-Krahn em variedades com peso xvi

0.3 Superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing estritamente convexos xix

1 Preliminares **1**

1.1 Curvaturas 1

1.2 Equações básicas para subvariedades 2

1.3 Hiperfícies 5

1.4 Subvariedades mínimas e totalmente geodésicas 6

1.5 Indentidades integrais 7

2 $\lambda-$Hiperfícies em sólitons de Ricci gradiente shrinking **9**

2.1 Variedades com peso 9

2.1.1 Imersões em variedades com peso 11
2.2 Variações de área para hiperfícies com peso 12
2.3 Imersões próprias de $\lambda-$hiperfícies em variedades completas . 15
2.4 $\lambda-$Hiperfícies $f-$estáveis imersas em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$. 21
2.5 $\lambda-$Hiperfícies $f-$estáveis imersas em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$. 28

3 Uma desigualdade de Faber-Krahn em variedades com peso 34

3.1 Introdução 34
3.2 Espaços de Sobolev em variedades com peso 39
3.2.1 Compacidade da imersão de Sobolev 41
3.3 Simetrização Gaussiana 44
3.4 Demonstração do Teorema 3.3 48

4 Superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing estritamente convexos 49

4.1 Introdução 49
4.2 Campos de Killing 53
4.3 Grupos de Lie 53
4.4 Caracterização variacional e estabilidade 55
4.5 Superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing 57
4.6 Prova do Teorema principal 59

Bibliografia 62

Agradecimentos

Agradeço à minha família, principalmente minha avó Cândida (*in memorian*), minha mãe Almira, minha irmã Daniele e meus tios e tias Jorge, Didi, ti Gil, tia Deni e tia Irani. Eles foram e são meu porto seguro que sempre precisei ancorar nos momentos difíceis do meu percurso acadêmico longe de casa.

Agradeço meu orientador Ezequiel pela confiança nessa longa jornada que se iniciou ainda na graduação. Sua paixão pela matemática e sua ética serão referências que levarei para o resto da vida.

Agradeço aos amigos que fiz durante esse período: Chrystian, Reginaldo, Celso, Jailton, Miguel, Carlos Guzmán, Juliano, Carlos Salazar, José Almendras e ao Gilberto, que me ajudou muito nessa fase final do doutorado.

Agradeço aos professores que tive pelo conhecimento compartilhado.

Agradeço aos professores Marcos Petrúcio, Feliciano Vitório, Marcos Montenegro, Heleno Cunha e Emerson Abreu por terem aceito compor a banca e pelas valorosas sugestões.

Agradeço às secretárias da pós Eliane Andrea e Eliane Kelly pela competência e presteza com me atenderam, principalmente nos últimos anos do doutorado.

Agradeço imensamente à minha esposa Jadreussa pelo amor e o companheirismo em todos os momentos. Seu apoio foi fundamental para a conclusão desta tese.

Agradeço à CAPES e ao IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta tese consiste em três partes independentes.

Primeiramente, consideramos uma $\lambda-$hiperfície orientável suave propriamente imersa não-totalmente geodésica $\Sigma \subset \mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ que tenha área com peso finita e satisfaça $Ind_w Q \leqslant p-1$. Neste caso, obtemos que existe um número natural i, que satisfaz $p - Ind_w Q \leqslant i \leqslant p-1$, e segue que $\Sigma = \Sigma_0 \times \mathbb{R}^i$. Ainda consideramos o problema de classificar as $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis completas orientadas propriamente imersas no sóliton cilindro *shrinking* $(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}, \overline{g}, f)$, com $f(p,t) = \frac{t^2}{4}$, obtendo como resultado $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ ou $\mathbb{S}^{k-1}_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$.

Na segunda parte consideramos o primeiro autovalor de Dirichlet para o $p-$Laplaciano com peso em um domínio Ω de uma variedade com peso (M^n, g, φ) que satisfaça $Ric_\varphi \geqslant 1$. Obtemos que este autovalor é maior ou igual que o primeiro autovalor para o mesmo problema definido em um semi-espaço Ω^* do espaço de Gauss G^n, com mesmo volume que Ω.

Na terceira parte consideramos um domínio de Killing Ω em uma variedade tridimensional M. Obtemos que uma superfície $\Sigma \subset \Omega$ de curvatura média constante com bordo livre imersa estável orientável e compacta tem gênero 0 ou 1 e no máximo 3 componentes no bordo.

Palavas-Chaves: $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis, sólitons cilindros shrinking, variedades com peso, desigualdade de Faber-Krahn, superfícies de curvatura

média constante com bordo livre estáveis, grupos de Lie.

Abstract

This thesis is divided into three independent parts.

Firstly, we consider a orientable smooth properly immersed non-totally geodesic $\lambda-$hypersurface $\Sigma \subset \mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ that has finite weighted area and satisfies $Ind_w Q \leqslant p-1$. In this case, we show that there exists a natural number i, such that $p - Ind_w Q \leqslant i \leqslant p-1$, and it follows that
$\Sigma = \Sigma_0 \times \mathbb{R}^i$. We also consider the problem of classifying the $f-$stable complete oriented properly immersed $\lambda-$hypersurfaces in the cylinder shrinking soliton $(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}, \overline{g}, f)$, with $f(p,t) = \frac{t^2}{4}$, obtaining as result $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ or $\mathbb{S}^{k-1}_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$.

On the second part, we consider the first eigenvalue with Dirichlet boundary condition for the weighted $p-$Laplacian on a domain Ω of a smooth metric measure space (M^n, g, f) that satisfies $Ric_\varphi \geqslant 1$. We show that this eigenvalue is greater or equal that the first eigenvalue for the same problem in a half-space Ω^* of Gauss space G^n, with the same volume that Ω.

On the third part, we consider a Killing domain Ω on a three-dimensional manifold M. We prove that a constant mean curvature free-boundary orientable compact immersed surface $\Sigma \subset \Omega$ has genus 0 or 1 and at most 3 boundary components.

Keywords: $f-$stable $\lambda-$hypersurfaces, cylinder shrinking solitons, weighted manifolds, Faber-Krahn inequality, free-boundary stable constant mean

curvature surfaces, Lie groups.

Introdução

Esta tese consiste em três partes, contendo resultados sobre $\lambda-$hiperfícies em sólitons de Ricci gradiente, uma desigualdade de Faber-Krahn envolvendo o primeiro autovalor de Dirichlet do $p-$Laplaciano com peso e sobre superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing.

0.1 Classificação de $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis em sólitons de Ricci gradiente

Uma variedade com peso é uma tripla $(M, g, e^{-f}\mathrm{d}M)$, em que M é uma variedade Riemanniana tal que o elemento de volume $\mathrm{d}M$ induzido pela métrica g é substituído por $e^{-f}\mathrm{d}M$ e f é uma função suave em M chamada de função peso ou função densidade. De forma geral, a pesquisa em variedades com peso consiste em investigar teoremas clássicos da geometria Riemanniana e da análise, buscando adaptações que façam sentido no contexto com peso. Bakry e Émery [6] estudaram variedades com peso no contexto de operadores de difusão, definindo o tensor Bakry-Émery Ricci por

$$Ric_f := Ric + \nabla^2 f.$$

Wei e Wylie [83] obtiveram um teorema de comparação do volume a partir do tensor Bakry-Émery Ricci. Corwin [32] obteve uma versão generalizada do Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies com peso. Variedades com peso são importantes também na resolução de problemas em teorias como fluxo de curvatura média, fluxo de Ricci e transporte ótimo, algumas destas aplicações podem ser vistas em Espinar [40].

Gromov [48] ao estudar os espaços mm (que têm como caso particular as variedades com peso), definiu a curvatura média com peso de uma hiperfície orientável Σ imersa em $(M, g, e^{-f}\mathrm{d}M)$ como sendo $H_f = H - \langle\overline{\nabla} f, \nu\rangle$, em que ν é o campo normal unitário em Σ. Diremos que Σ é $f-$mínima se tivermos $H_f = 0$ e Σ será chamada uma $\lambda-$hiperfície quando $H_f = \lambda \in \mathbb{R}$. Tal notação vem dos trabalhos de Cheng e Guoxin [25], que consideraram $\lambda-$hiperfícies imersas em $(\mathbb{R}^n, \delta, f)$, com $f(x) = |x|^2/2$, mostrando que elas são pontos críticos do funcional área com peso para variações que preservam o volume com peso. Bayle [12], interessado no problema isoperimétrico para os espaços mm, obteve as fórmulas de primeira e segunda variação para a área e o volume de hiperfícies em variedades com peso (veja a Seção 3.4.6 de Bayle [12]). Além disso, mostrou que as $\lambda-$hiperfícies em variedades com peso fechadas são soluções para o problema isoperimétrico considerando o volume com peso.

No caso sem peso, importantes resultados de classificação foram obtidos para hiperfícies mínimas e de curvatura média constante, por exemplo, é sabido que não existem superfícies mínimas compactas no espaço Euclidiano e uma classificação das superfícies mínimas estáveis em variedades tridimensionais com curvatura escalar não-negativa foi obtida por Fisher-Colbrie e Schoen [43]. No caso CMC, López e Ros [60] provaram que as únicas superfícies orientáveis de curvatura média constante completas estáveis do espaço Euclidiano são o plano e a esfera e provaram ainda, que as únicas com índice 1 mínimas orientáveis completas são o catenóide e a superfície de Enneper. Para mais resultados sobre subvariedades e classificação de hiperfícies mínimas, uma ótima referência é Chen [24]. Faz sentido, então tentarmos obter resultados destes tipos para variedades com peso, que é o objetivo da primeira parte da tese.

Note que estudar hiperfícies em uma variedade com peso não é equivalente a escalonar a métrica por uma mudança conforme, pois no caso com peso os elementos de volume e área em $(M^n, \overline{g})$ e (Σ^{n-1}, g) são dados, respectivamente por

$$e^{-f}\mathrm{d}M \qquad \text{e} \qquad e^{-f}\mathrm{d}\Sigma,$$

em que $\mathrm{d}M$ e $\mathrm{d}\Sigma$ denotam, respectivamente, os elementos de volume e área induzidos por $\overline{g}$ e g. Para obtermos $e^{-f}\mathrm{d}M$, deveríamos considerar em M a métrica $e^{-\frac{2}{n}f}\overline{g}$ e para termos $e^{-f}\mathrm{d}\Sigma$ deveríamos considerar $e^{-\frac{2}{n-1}f}\overline{g}$, observe que g é a métrica induzida em Σ por $\overline{g}$.

McGonagle e Ross [64] estudaram $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis *two-sided* propriamente imersas $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Considerando $\mathbb{R}^n$ com medida Gaussiana $e^{-|x|^2/4}\mathrm{d}\delta$, eles mostraram que o hiperplano é a única solução para o problema isoperimétrico com estas características.

Vieira e Zhou [79] estudaram hiperfícies $f-$mínimas imersas nos sólitons de Ricci gradiente do tipo $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$, usando o *spectrum* do Laplaciano com peso eles obtiveram resultados de classificação. Achamos interessante estudar as $\lambda-$hiperfícies imersas nestes espaços através do índice fraco (Ind_wQ) da segunda variação do funcional área com peso e inspirados pelo trabalho de McGonagle e Ross [64], obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Considere qualquer hiperfície orientada suave propriamente imersa não-totalmente geodésica $\Sigma \subset \mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ que tenha área com peso finita e satisfaça $H = \langle \nabla f, \nu \rangle + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, se $Ind_wQ \leqslant p-1$, existe* *um número $i \leqslant p-1$ tal que $p-i \leqslant Ind_w Q$, e temos que*

$$\Sigma = \Sigma_0 \times \mathbb{R}^i. \tag{1}$$

A demonstração utiliza o fato que o operador de Jacobi com peso em Σ é dado por

$$L_f = \Delta - \frac{1}{2}\langle x^\top, \nabla \cdot \rangle + |A|^2 + \frac{1}{2}.$$

Ao tormarmos um campo paralelo X em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ temos que a função $\alpha = \langle X, \nu \rangle$, em que ν é o campo normal unitário a Σ, satisfaz

$$L_f \alpha = \overline{Ric}_f(X, \nu).$$

Esta observação, junto com as hipóteses do teorema, nos permitiu construir um espaço de funções testes em que a forma quadrática associada a L_f é negativa definida.

Cheng, Mejia e Zhou [26] e Cheng e Zhou [29] estudaram hiperfícies $f-$mínimas no sóliton cilindro *shrinking* $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$, classificando as L_f-estáveis (que são aquelas em que a segunda variação de área com peso é não-negativa). Obtivemos um resultado de classificação para $\lambda-$hiperfícies propriamente imersas neste espaço que enunciamos a seguir.

Teorema 0.2. *Seja Σ uma $\lambda-$hiperfície completa orientada propriamente imersa no cylinder shrinking soliton $(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}, \overline{g}, f)$, com $f(p,t) = \frac{t^2}{4}$. Σ é $f-$estável se, e somente se, Σ for $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ ou $\mathbb{S}^{k-1}_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$.*

A demonstração utiliza as técnicas do teorema anterior, à diferença que para $p = 1$, temos uma classificação das hiperfícies totalmente geodésicas, devida a de der Veken e Vrancken [78] (ver Teorema 2.22). Analisamos estes casos e verificamos que, nas hipóteses do teorema, estas são as $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis em $(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}, \overline{g}, f)$.

0.2 Desigualdade de Faber-Krahn em variedades com peso

Autovalores do Laplaciano dependem da geometria do domínio e portanto, é natural tentar encontrar desigualdades isoperimétricas envolvendo-os. O primeiro a considerar um problema deste tipo foi Rayleigh [70], que se perguntou:

Fixada a área, qual o domínio plano tem o menor primeiro auto-valor para o problema de Dirichlet?

A resposta a este problema foi dada de maneira independente por Faber [41] e Krahn [55], demonstrando que o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet em um domínio qualquer é sempre maior ou igual que no disco de mesma área, e caso haja igualdade o domínio em questão deve ser um disco. Este resultado ficou conhecido como desigualdade de Faber-Krahn e a partir de então foram estudadas diversas generalizações, veja por exemplo, Bhattacharya [16], Ehrhard [39], Betta et al. [15], Bérard e Meyer [13], Matei [62], Grigor'yan e Saloff-Coste [46], Contador [68], De Carli e Hudson [35], Abreu e Barbosa [1] etc. Na terceira parte da tese obtivemos uma desigualdade deste tipo para variedades com peso.

Um exemplo de variedade com peso bastante estudada na teoria das probabilidades é o espaço de Gauss $G^n = (\mathbb{R}^n, \delta, \Psi)$, em que δ é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$, e a função peso Ψ satisfaz

$$e^{-\Psi} = (1/2\pi)^{n/2} e^{-|x|^2/2}.$$

Dada uma variedade com peso (M^n, g, f), o Laplaciano com peso é definido por

$$\Delta_f u = e^f \operatorname{div}(e^{-f}\nabla u).$$

Da mesma forma, o $p-$Laplaciano com peso é dado por

$$\Delta_{p,f} u = e^f \operatorname{div}(e^{-f}|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Normalmente, as demonstrações das desigualdades de Faber-Krahn se baseiam em algum processo de simetrização do domínio. que nos casos sem peso são as simetrizações de Steiner e Schwarz e no caso Gaussiano é a simetrização Gaussiana. Tais simetrizações nos permitem construir funções definidas em domínios ótimos em relação à desigualdade isoperimétrica e que são correspondentes equimensuráveis às funções definidas no domínio original. Isso constitui uma ferramenta poderosa para relacionar problemas de autovalor com desigualdades isoperimétricas. Para um aprofundamento no estudo das simetrizações de Schwarz, Steiner e Gaussiana, ótimas referências são, respectivamente: Kesavan [54], Krantz e Parks [56] e Feo [42].

Teorema 0.3 (Desigualdade de Faber-Krahn)**.** *Seja (M^n, g, f) uma variedade Riemanniana suave completa conexa, com função peso suave f, volume unitário e tal que o tensor Barky-Émery Ricci satisfaz:*

$$Ric_f = Ric + \nabla^2 f \geqslant 1. \tag{2}$$

Seja $\lambda_{1,p}(\Omega, f)$ o primeiro autovalor para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{p,f} u = \lambda\,|u|^{p-2}u & em \quad \Omega, \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

em que $\Omega \subset M$ é um domínio e $2 \leqslant p < \infty$. O espaço de Gauss é definido por $G^n = (\mathbb{R}^n, \delta, \Psi)$, em que δ é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$, e a função peso

Ψ *satisfaz* $e^{-\Psi} = (1/2\pi)^{n/2} e^{-|x|^2/2}$.

Considere o semiespaço

$$\Omega^* = H(\alpha) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in G^n, \quad x_1 > \alpha\},$$

de forma que o volume com peso de Ω^* *em* G^n *seja igual ao de* Ω *em* M *e menor que 1, ou seja*

$$\mathcal{V}_\Psi(\Omega^*) = \int_\Omega e^{-\Psi} \mathrm{d}x = \mathcal{V}_f(\Omega) = \int_\Omega e^{-f} \mathrm{d}M < 1.$$

Sendo $\lambda_{1,p}(\Omega^*, \Psi)$ *o primeiro autovalor do* $p-$*Laplaciano com peso para o problema de Dirichlet em* Ω^**, vale a seguinte desigualdade,*

$$\lambda_{1,p}(\Omega, f) \geqslant \lambda_{1,p}(\Omega^*, \Psi).$$

Nossa demonstração faz uso da desigualdade isoperimétrica de Levy-Gromov para variedades com peso (ver Teorema 3.2) e uma adaptação da simetrização Gaussiana. Consideramos um semiespaço no espaço de Gauss de mesmo volume que Ω e, utilizando o Teorema 3.2, podemos comparar os quocientes de Rayleigh de uma função em Ω com sua simetrizada.

No caso da igualdade, uma dificuldade para obtermos a rigidez é que não temos informação sobre a medida do conjunto dos pontos críticos da primeira autofunção em domínios não-compactos. Outra obstrução é o fato que a aplicação de simetrização pode não ser contínua nos espaços de Sobolev correspondentes, conforme foi observado por Almgren e Lieb [4] no caso do $\mathbb{R}^n$.

É interessante observar, que outras técnicas foram usadas para obter estimativas de autovalores para variedades com peso: A partir da generalização da fórmula de Reilly para variedades com peso, Ma e Du [61] obtiveram uma cota inferior para o primeiro autovalor do Laplaciano com peso em uma variedade fechada com tensor Bakry-Émery Ricci limitado inferiormente. Cheng e

Zhou [30] obtiveram um resultado análogo para variedades completas. Wang e Li [82], obtiveram uma fórmula de Reilly envolvendo o $p-$Laplaciano com peso e a partir dela obtiveram estimativas inferiores para o primeiro autovalor do $p-$Laplaciano com peso em variedades compactas; através da mesma fórmula Wang e Zhu [81] obtiveram uma cota superior. A diferença entre estes resultados e o nosso é que consideramos o autovalor de Dirichlet em domínios não necessariamente compactos, caso que ainda não foi considerado por outros autores, mesmo no caso do Laplaciano com peso.

0.3 Superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing estritamente convexos

Ros e Vergasta [72] e Barbosa [8] estudaram hiperfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em um domínio compacto estritamente convexo Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$. Combinando os resultados demonstrados em ambos, temos que, se Ω é uma bola, então Σ é totalmente geodésica ou estrelada. Para o caso $n = 2$, estes resultados significam que Σ deve ser um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica. Este último resultado, para o caso $n = 2$, foi primeiramente provado por Nunes [67] usando uma abordagem diferente. Por outro lado, Li e Xiong [57] provaram que uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre estável do tipo Delaunay em uma bola Euclideana unitária é um hiperplano totalmente geodésico ou uma calota esférica. Considerando-se novamente o caso $n = 2$, e assumindo que Ω é apenas um domínio estritamente convexo e compacto, Ros e Vergasta [72] provaram que, se Σ é uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre estável, então tem gênero 0 ou 1 e no máximo 3 componentes conexas no bordo.

Souam [74] estudou o mesmo problema no restante das formas espaciais simplesmente conexas, ou seja, a esfera e o espaço hiperbólico. Obtendo, entre outros resultados, que se Ω é uma bola de raio $r < \pi$ em $\mathbb{S}^3$ então, ou Σ é um disco totalmente umbílico ou tem gênero 1 no máximo 2 componentes conexas no bordo. Recentemente, Wang e Xia [80] mostraram que hiperfícies capilares estáveis imersas em bolas geodésicas nas formas espaciais são totalmente umbílicas.

Definiremos que um domínio $\Omega \subset M$ é de Killing, se existir um aberto $U \subset M$, com $\Omega \subset U$ e um referêncial ortonormal de Killing definido em U. Tal definição é inspirada em D'Atri e Nickerson [34], que mostraram que, neste caso, U possui curvatura seccional não-negativa.

Note que $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{S}^3$ possuem um referêncial ortonormal global de Killing. De maneira geral, qualquer grupo de Lie com uma métrica bi-invariante é paralelizável por um campo vetorial de Killing. Em particular, qualquer domínio Ω contido em um grupo de Lie com métrica bi-invariante é um domínio de Killing.

Usando a existência desse referencial ortonormal de Killing e o fato da curvatura seccional ser não-negativa e inspirados nas idéias de Nunes [67], provamos o seguinte teorema.

Teorema 0.4. *Seja (M^3, g) uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio de Killing compacto estritamente convexo. Se $\Sigma \subset \Omega$ for uma superfície de curvatura média constante com bordo livre imersa orientável e compacta, então Σ tem gênero 0 ou 1 e no máximo 3 componentes no bordo.*

Por um resultado de classificação (veja a Seção 4.3), nosso teorema aplica-se aos espaços $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ and $SO(3)$.

Como consequência direta da demonstração do teorema acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 0.5. *Seja $B \subset \mathbb{S}^3$ uma bola geodésica de raio $r < \frac{\pi}{2}$. Se $\Sigma \subset B$ é uma superfície de curvatura média constante com bordo livre estável em B, então Σ é um disco totalmente umbílico.*

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é estabelecer a notação e alguns resultados básicos que serão necessários ao longo desta tese.

1.1 Curvaturas

Seja M uma variedade Riemanniana, denotaremos o espaço das seções diferenciáveis de $T(M)$ por $\Gamma(M)$. O *Tensor Curvatura* é a aplicação $R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ definido por,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{1.1}$$

Definimos também o *Tensor Curvatura de Riemann*, como o campo tensorial do tipo $\binom{4}{0}$ dado por:

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle, \tag{1.2}$$

denotando $R_{ijkl} = Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$, temos que $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$.

Dados $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional, $\sigma \subset T_pM$, a *curvatura seccional* de M em p é o número real

$$K(X,Y) := \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

em que $\{X, Y\}$ é uma base qualquer de σ.

A *curvatura de Ricci* em um ponto $p \in M$ é dada por:

$$\begin{aligned} Ric\,(X,Y) &= \text{traço } Z \mapsto R(Z,X)Y \\ &= \text{traço } R(\,\cdot\,,X)Y, \end{aligned}$$

com $X, Y, Z \in T_pM$.

1.2 Equações básicas para subvariedades

Nesta seção são apresentados resultados de subvariedades. Suporemos sempre a variedade conexa.

Definição 1.1. Sejam M^n e $\bar{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente. Uma aplicação $f : M^n \to \bar{M}^m$ é uma imersão se a sua derivada $\mathrm{d}f_x : T_xM \to T_{f(x)}\bar{M}$ é injetiva, $\forall x \in M$. Se f for uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem, será chamada de mergulho. E f será chamada uma imersão isométrica se

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle \mathrm{d}f_x X, \mathrm{d}f_x Y \rangle_{\bar{M}}$$

$\forall x \in M$ e $\forall\, X, Y \in T_xM$, também pode se dizer que a variedade M tem a métrica induzida de $\bar{M}$ através da imersão f.

Seja $f : M^n \to \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Para todo $x \in M$, existe $U \subset M$ aberto, tal que $f|_U$ é um mergulho sobre $f(U)$, neste caso, identificamos U com $f(U)$, como se a aplicação f fosse a identidade. Então, podemos considerar o espaço tangente a M em um ponto x como um subespaço vetorial do espaço tangente a $\bar{M}$ no ponto x e escrevemos a seguinte soma direta:

$$T_x\bar{M} = T_xM \bigoplus T_xM^{\perp},$$

em que $T_xM^\perp$ é o complemento ortogonal de T_xM em $T_x\bar{M}$

Dessa decomposição, obtemos um fibrado vetorial $TM^\perp = \bigcup_{x\in M} T_xM^\perp$, chamado *fibrado normal* a M. Desta forma, o fibrado vetorial $T\bar{M}|_{f(M)} = \{X \in T\bar{M} : \pi(X) \in f(M)$, em que $\pi : T\bar{M} \to \bar{M}$ é a projeção$\}$ se decompõe na soma de Whitney

$$T\bar{M}|_{f(M)} = TM \oplus_W TM^\perp.$$

Definimos ainda as projeções tangencial e normal dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} (\ )^\top : T\bar{M}|_{f(M)} &\to TM \\ (\ )^\perp : T\bar{M}|_{f(M)} &\to TM^\perp, \end{aligned}$$

Seja $\bar{M}^{n+p}$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$, e seja $f : M^n \to \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Dados os campos vetorias $X, Y \in \Gamma(M)$, podemos decompor:

$$\bar{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Pela unicidade da conexão de Levi-Civita, segue que $(\bar{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita na variedade M. Então, obtemos a:

Fórmula de Gauss

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y), \tag{1.3}$$

a qual define uma aplicação $\Pi : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)^\perp$, chamada *segunda forma fundamental*, que é bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ da funções diferenciáveis em M e simétrica. Em particular, para qualquer ponto $x \in M$ e campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(M)$, a aplicação $\Pi_x : T_xM \times T_xM \to T_xM^\perp$, dada por $\Pi_x(X,Y) = \Pi(X,Y)(x)$, depende apenas dos valores de X e Y no ponto x.

Considerando os campos $X \in \Gamma(M)$ e $\xi \in \Gamma(M)^{\perp}$, denotamos

$$A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Já que,

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y\rangle \;+\; \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y\rangle, \quad \forall\, Y \in \Gamma(M),$$

a fórmula de Gauss (1.3) nos dá

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \Pi(X,Y), \xi\rangle.$$

A aplicação $A_\xi : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e autoadjunta. Essa aplicação será chamada de *operador de Weingarten*, ou *segunda forma fundamental na direção* ξ.

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, que denotamos por $\nabla^{\perp}_X \xi$, define uma conexão no fibrado normal $TM^{\perp}$. Dizemos que $\nabla^{\perp}$ é a *conexão normal* de f, e obtemos a:

Fórmula de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X \;+\; \nabla^{\perp}_X \xi. \tag{1.4}$$

Combinando as fórmulas de Weingarten e Gauss obtemos a equação de Gauss, cuja demonstração pode ser encontrada em Djaczer [33]. Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(M)$, vale a seguinte igualdade:

Equação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \bar{R}(X,Y)Z, W\rangle + \langle \Pi(X,W), \Pi(Y,Z)\rangle - \langle \Pi(X,Z), \Pi(Y,W)\rangle, \tag{1.5}$$

em que R e $\bar{R}$, são os tensores curvatura em M e $\bar{M}$, respectivamente. Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y, X\rangle$ e $\bar{K}(X,Y) = \langle \bar{R}(X,Y)Y, X\rangle$, denotam as curvaturas seccionais em M e $\bar{M}$ em relação ao plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_xM$, a equação de Gauss fica

$$K(X,Y) = \bar{K}(X,Y) + \langle \Pi(X,X), \Pi(Y,Y)\rangle - |\Pi(X,Y)|^2.$$

1.3 Hiperfícies

Nesta seção falaremos de hiperfícies, ou seja, imersões isométricas com codimensão 1. Vários resultados para hiperfícies no espaço $\mathbb{R}^n$ são generalizações dos mesmos resultados no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$. É conhecido que uma hiperfície possui um campo normal unitário diferenciável se, e somente se, for orientável. Mas, locamente toda hiperfície é orientável ao considerarmos uma vizinhança parametrizada.

Seja $f : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e consideremos um campo local $\eta \in \Gamma(M)^\perp$ definido em uma vizinhança U de $x \in M$, tal que $\langle \eta_y, \eta_y\rangle = 1$, $\forall\, y \in U$. Desta forma, a *fórmula de Gauss* (1.3) fica :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\eta X, Y\rangle \eta.$$

Usando o fato que $\Pi(X,Y) = \langle A_\eta X, Y\rangle\eta$, a *equação de Gauss* (1.5) fica

$$R(X,Y)Z = (\bar{R}(X,Y)Z)^\top + (A_\eta X \wedge A_\eta Y)Z.$$

A *equação de Codazzi* (**??**) fica

$$R(X,Y)Z = (\bar{R}(X,Y)\xi)^\top = (\nabla_Y A_\eta)X - (\nabla_X A_\eta)Y,$$

em que, por definição,

$$(\nabla_X A_\eta)Y = (\nabla_X(A_\eta)Y) - A_\eta \nabla_X Y.$$

No caso da variedade $\bar{M}^{n+1}$ ter curvatura seccional constante c, a equação de Gauss se torna

$$R(X,Y) = c(X \wedge Y) + A_\eta X \wedge A_\eta Y.$$

1.4 Subvariedades mínimas e totalmente geodésicas

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \bar{M}^{n+p}$, o *vetor curvatura média* $H(x)$ de f em $x \in M$ é definido como

$$H(x) = \sum_{j=1}^{n} \Pi(X_j, X_j),$$

em que $\{X_1, ..., X_n\} \in T_xM$ é uma base ortonormal. Podemos escrever, ainda, $H(x) = \sum_{j=1}^{p} (\text{traço} A_{\xi_j})\xi_j$, para qualquer conjunto de vetores ortonormais $\{\xi_1, \ldots \xi_p\} \in T_xM^\perp$. Concluímos então que $H(x)$ não depende do referencial escolhido.

Definição 1.2. Uma imersão isométrica f é *mínima* em $x \in M$ quando $H(x) = 0$, e f é dita uma *imersão mínima* quando for mínima em todos os pontos de M.

Definição 1.3. Uma imersão isométrica f é *totalmente geodésica* em $x \in M$ quando sua segunda forma fundamental Π for identicamente nula em x, e f é dita uma *imersão totalmente geodésica* quando for totalmente geodésica em todos os pontos de M.

No caso de uma imersão totalmente geodésica, as geodésicas de M são as geodésicas de $\bar{M}$ que estão contidas inteiramente em M.

1.5 Indentidades integrais

Listamos, nesta seção, algumas identidades com integrais, que serão utilizadas ao longo da tese.

Teorema 1.4 (Fórmulas de Green). *Em uma variedade Riemanniana* (M, g) *com* $u, v \in C^\infty(M)$ *temos*

(a) Se M for fechada,

$$\int_M \Delta u \, \mathrm{d}M = 0.$$

(b) Se M for compacta,

$$\int_M u\Delta v \, \mathrm{d}M + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, \mathrm{d}M = \int_{\partial M} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}a.$$

(c) Se M for orientável e u ou v tiver suporte compacto,

$$\int_M u\Delta v \, \mathrm{d}M + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, \mathrm{d}M = 0.$$

Um resultado importante que será usado ao longo do texto é a fórmula de co-área. Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio com fecho compacto, e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \in C^0(\overline{\Omega}) \cup C^\infty(\Omega)$, com $f|_{\partial\Omega} = 0$. Vamos definir

$$\begin{aligned} \Omega_t =& \{x \in \Omega;\ |f(x)| > t\}, \\ \mathcal{V}(t) =& Vol(\Omega_t) = Vol(f^{-1}(t, \infty)), \\ \Gamma(t) =& \{x \in \Omega;\ |f(x)| = t\}. \end{aligned}$$

Quando t for um valor regular de $|f|$, $\Gamma(t)$ é uma subvariedade de M com dimensão n e elemento de volume induzido $\mathrm{d}A_t$, denotaremos ainda a área induzida em $\Gamma(t)$ por $\mathcal{A}_t$. Com tais definições, a fórmula de co-área pode ser escrita na forma do seguinte teorema:

Teorema 1.5 (Fórmula de co-área)**.** *A função $\mathcal{V}_t$ é C^∞ no conjunto dos valores regulares de $|f|$ e sua derivada nesse conjunto é dada por*

$$\mathcal{V}'(t) = -\int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} \mathrm{d}A_t.$$

Para toda $h \in L^1(\Omega)$ temos

$$\iint_\Omega h|\nabla f|\mathrm{d}M = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{\Gamma_t} h\,\mathrm{d}A_t.$$

Em particular,

$$\iint_\Omega |\nabla f|\mathrm{d}M = \int_0^\infty \mathcal{A}_t\,\mathrm{d}t.$$

Demonstração. Ver Chavel [22], pág. 86, teorema 1. □

Um dos resultados mais importantes e intrigantes da geometria diferencial é o Teorema de Gauss-Bonnet, que estabelece uma relação entre a geometria e a topologia de uma superfície. Usaremos sua versão quando o bordo da superfície é não-vazio e suave, considerando k_g a curvatura geodésica de ∂M e K a curvatura gaussiana de M, temos:

Teorema 1.6. *Seja M uma superfície orientável, com fecho compacto e fronteira suave, temos que*

$$\int_{\partial M} k_g\,\mathrm{d}s + \int_M K\,\mathrm{d}M = 2\pi\chi(M).$$

Demonstração. Ver Chavel [23], pág. 244, teorema V.2.7. □

Capítulo 2

$\lambda-$Hiperfícies em sólitons de Ricci gradiente shrinking

2.1 Variedades com peso

Uma variedade Riemanniana com peso é uma tripla $(M, g, e^{-f}\mathrm{d}M)$, em que M é uma variedade Riemanniana que tem o elemento de volume $\mathrm{d}M$ induzido pela métrica g substituído por $e^{-f}\mathrm{d}M$ e f é uma função suave em M chamada de função peso ou função densidade. Objetos geométricos clássicos encontram equivalentes definidos para o contexto com peso, de forma que faça sentido a adaptação, bem como a aplicabilidade para a resolução de problemas das mais diversas teorias como fluxo de curvatura média, fluxo de Ricci e transporte ótimo, algumas destas aplicações podem ser vistas em Espinar [40].

Por exemplo, o Laplaciano com peso Δ_f é definido pela fórmula

$$\Delta_f u := \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle,$$

desta forma, o Laplaciano com peso se torna um operador diferencial autoadjunto no espaço de Hilbert das funções quadrado integráveis $L^2(M, e^{-f}\mathrm{d}M)$.

Adaptando o tensor de Ricci para o caso com peso, Bakry e Émery [6], para estudarem equações de difusão, criaram o tensor Bakry-Émery Ricci, que também foi definido por Lichnerowicz [58], [59] de forma independente por

$$Ric_f := Ric + \nabla^2 f,$$

onde Ric denota a curvatura de Ricci de M e $\nabla^2 f$ é o Hessiano da função f em M.

Resultados para variedades com peso generalizam o caso sem peso, pois ao considerarmos $f = 0$ obtemos o caso Riemanniano clássico.

Lembramos que uma variedade Riemanniana (M, g) é dita Einstein, se seu tensor de Ricci for múltiplo da métrica, ou seja, se exite $\kappa \in \mathbb{R}$, tal que $Ric = \kappa g$. A generalização deste conceito para variedades com peso caracteriza os sólitons de Ricci, que foram introduzidos por Hamilton [51] e são as variedades em que o tensor de Ricci satisfaz $Ric + \mathcal{L}_V g = \kappa g$, para algum campo diferenciável V em M e alguma constante real κ, com $\mathcal{L}$ denotando a derivada de Lie. Se $V = \nabla f$ a equação se transforma em $Ric_f = \kappa g$, neste caso, M é dita um sóliton de Ricci gradiente. Quando $\kappa = 0$, o sóliton de Ricci gradiente é chamado *steady*, para $\kappa > 0$ *shrinking* e se $\kappa < 0$ *expanding*. Estes termos vem da aplicação dos sólitons de Ricci no estudo de singularidades do fluxo de Ricci.

Exemplo 2.1. Exemplos de sólitons de Ricci gradiente *shrinking* incluem o $\mathbb{R}^n$ com função peso $f(x) = \frac{|x|^2}{4}$, os cilindros $\left(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p, g, f\right)$ com métrica produto g, e função peso $f(y, x) = \frac{|x|^2}{4}$. Petersen e Wylie [69] mostraram que os únicos sólitons de Ricci gradiente *shrinking* com tensor de Weyl nulo são quocientes das variedades $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.

Em dimensão $n = 2$, Hamilton descobriu o Sóliton *cigar* $\Sigma = (\mathbb{R}^2, g)$, que é um sóliton de Ricci gradiente *steady* com métrica g dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2},$$

e função peso $f(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2)$.

Exemplos de sólitons de Ricci gradiente *expanding* podem ser o o $\mathbb{R}^n$ com função peso $f(x) = -\frac{|x|^2}{4}$ e produtos destes espaços com variedades Einstein com constante negativa.

Para um estudo das variedades do tipo Einstein, uma referência interessante é o livro do Besse [14]. Para um survey sobre os sólitons de Ricci, consultar Cao [20]. Para outros exemplos de sólitons de Ricci, além dos já citados, consultar Cao [19].

2.1.1 Imersões em variedades com peso

Seja Σ uma hiperfície orientável isometricamente imersa em $(M, \overline{g}, e^{-f}\mathrm{d}M)$. Podemos considerar a curvatura média com peso, que generaliza naturalmente a curvatura média. Ela foi definida por Gromov em [47], como sendo

$$H_f = H - < \overline{\nabla} f, \nu >,$$

em que H é a curvatura média de Σ, ou seja o traço da segunda forma fundamental, e ν é o campo normal unitário a Σ em M.

Definição 2.2. Dizemos que uma hiperfície Σ, imersa em M, é uma $\lambda-$hiperfície, se sua curvatura média com peso satisfaz

$$H_f = \lambda, \tag{2.1}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante fixada. Quando $\lambda = 0$ dizemos que Σ é $f-$mínima.

Exemplo 2.3. Assuma que Σ_1 é uma $\lambda-$hiperfície imersa em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$. Então o produto $\Sigma = \Sigma_1 \times \mathbb{R}^p$ é uma $\lambda-$hiperfície do sóliton de Ricci gradiente *shrinking* $\left(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p, g, f\right)$, se, e somente se, Σ_1 for uma hiperfície de curvatura média constante em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$. O motivo é que o campo normal unitário ν de Σ também é o campo normal unitário de Σ_1 e $\nu \in T\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(n-1)}}$. Então, dado um refencial $\{\partial_{x_1}, \dots \partial_{x_p}\}$ para $\mathbb{R}^p$, temos que $\langle \overline{\nabla} f, \nu\rangle = 0$ e $\overline{\nabla}_{\partial_{x_i}} \nu = 0$. Logo, $H_f(q', x) = H(q', x) = H_{\Sigma_1}(q')$, $(q', x) \in \Sigma_1 \times \mathbb{R}^p$. Isto implica que $H_f = \lambda$ em Σ se, e somente se, Σ_1 tiver curvatura média constante em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$.

Exemplo 2.4. Qualquer hiperplano imerso no sóliton de Ricci gradiente *shrinking* Gaussiano $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, f)$, com função peso $f = \frac{|x|^2}{4}$ e métrica canônica, é uma $\lambda-$hiperfície, pois $\langle \overline{\nabla} f, \nu\rangle = \frac{\langle x, \nu\rangle}{2}$ é constante e $H = 0$.

Ótimas referências para uma introdução ao estudo de variedades com peso podem ser o capítulo 18 do livro de Frank Morgan [66] e o Capítulo 3 da tese de Bayle [12]. Uma lista de importantes artigos sobre o tema pode ser consultada no site de Frank Morgan:
http://sites.williams.edu/Morgan/2010/03/16/manifolds-with-density-fuller-references/

2.2 Variações de área para hiperfícies com peso

Consideremos uma hiperfície Σ orientável suave e isometricamente imersa em uma variedade com peso $(M, \overline{g}, f)$. Definimos a área com peso da hiperfície Σ como sendo

$$\mathcal{A}_f(\Sigma) = \int_\Sigma e^{-f} d\Sigma.$$

E o volume com peso de uma região $\Omega \subset M$ como

$$\mathcal{V}_f(\Omega) = \int_{\Omega} e^{-f} \mathrm{d}M.$$

Assim como as hiperfícies de curvatura média constante são pontos críticos do funcional área, para variações que fixam o volume, as $\lambda-$hiperfícies são pontos críticos do funcional área com peso para variações que fixam o volume com peso, este problema foi considerado, de maneira mais geral por Castro e Rosales [21], que estudaram o caso em que a hiperfície é de bordo livre. As demonstrações das fórmulas de variação para a área e volume com peso que iremos apresentar nesta seção podem ser encontradas em qualquer uma das referências a seguir: Bayle [12] ou Castro e Rosales [21].

Consideramos uma família a $1-$parâmetro de deformações com suporte compacto dada por $\Sigma_t = \Phi(\Sigma, t) \subset M$, com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tal que $\Sigma = \Sigma_0$. Seja $X_t = \mathrm{d}\Phi(\frac{\partial}{\partial t})$ o campo variacional de Σ. Quando X_t for normal a Σ_t, diremos que a variação é normal. O elemento de área induzido em Σ_t será denotado por $\mathrm{d}\Sigma_t$.

Queremos motivar o que significa dizer que uma variação normal $\Phi(\Sigma, t)$ preserva o volume com peso. Considere o caso em que Σ é mergulhada e $\Sigma = \partial\Omega$. Seja $\Omega_t = \Phi(t, \Omega)$, neste caso, a variação preservar o volume com peso quer dizer que o volume se mantém constante em relação à variável t, ou seja $\mathcal{V}_f(\Omega) = \mathcal{V}_f(\Omega_t)$. Derivando ambos os lados em relação a t, obtemos que $\partial_t \mathcal{V}_f(\Omega_t) = \int_{\Sigma_t} \langle X_t, \nu \rangle e^{-f} \mathrm{d}\Sigma_t = 0$.

Assim, podemos generalizar o conceito de uma variação normal $\Phi(\Sigma, t)$ preservar o volume com peso para uma hiperfície orientável e isometricamente imersa Σ, definindo que $\int_{\Sigma_t} \langle X_t, \nu \rangle e^{-f} \mathrm{d}\Sigma_t = 0$ para todo t.

Fica claro, então, que se uma variação $\Phi(\Sigma, t)$ preserva o volume com peso, temos que $u = \langle X_0, \nu \rangle$ satisfaz $\int_{\Sigma} u e^{-f} \mathrm{d}\Sigma = 0$. Com um argumento baseado em do Carmo e Barbosa [9], podemos mostrar que recíproca é verdadeira.

Ou seja, dada uma hiperfície isometricamente imersa e orientável Σ, e uma função $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ que satisfaz $\int_\Sigma ue^{-f}\mathrm{d}\Sigma = 0$ Existe uma variação que preserva o volume com peso $\Phi(\Sigma, t)$, definida como anteriormente, tal que $u = \langle X_0, \nu\rangle$. Para uma prova deste fato veja Cheng e Guoxin [25], Lema 2.2.

Derivando o funcional área com peso em em relação a t, e considerando $u(\Sigma, t) = \langle X_t, \nu\rangle$ obtemos a fórmula

$$\partial_t \mathcal{A}_f(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} u\left(H - \langle\overline{\nabla} f, \nu\rangle\right) e^{-f}\mathrm{d}\Sigma_t. \tag{2.2}$$

Fica claro pela fórmula de primeira variação que uma hiperfície Σ que satisfaz $\delta\mathcal{A}_f(u) = \partial_t\mathcal{A}_f(\Sigma_t)|_{t=0} = 0$, para qualquer $\{u \in C_0^\infty(\Sigma) : \int_\Sigma ue^{-f}\,\mathrm{d}\Sigma = 0\}$ deve ser uma $\lambda-$hiperfície.

Tomando a segunda derivada do funcional área com peso para uma $\lambda-$hiperfície Σ que seja propriamente imersa e tenha área com peso finita obtemos a fórmula de segunda variação da área com peso

$$\delta^2\mathcal{A}_f(u) = \partial_t^2\mathcal{A}_f(\Sigma_t)|_{t=0} = -\int_\Sigma uL_f ue^{-f}\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.3}$$

Em que o operador L_f em Σ é definido por

$$L_f = \Delta_f + |A|^2 + \overline{Ric_f(\nu,\nu)}. \tag{2.4}$$

Associamos a L_f a forma quadrática $Q(u, v)$ definida em $C_0^\infty(\Sigma)$ por

$$Q(u, v) = -\int_\Sigma (uL_f v)e^{-f}\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.5}$$

Definição 2.5. Supondo Σ uma $\lambda-$hiperfície, definimos Ind_wQ como sendo a dimensão máxima do espaço $W \subset \{u \in C_0^\infty(\Sigma) : \int_\Sigma ue^{-f}\,\mathrm{d}\Sigma = 0\}$, tal que Q é negativa definida em W. Quando $Ind_wQ = 0$, dizemos que Σ é estável.

2.3 Imersões próprias de $\lambda-$hiperfícies em variedades completas

Uma aplicação entre espaços topológicos é chamada própria se a imagem inversa de conjuntos compactos da imagem for um subconjunto compacto do domínio. Dizemos que a hiperfície Σ é propriamente imersa em M, se a aplicação de imersão de Σ em M for própria. Nesta seção, obteremos algumas condições para que a imersão de $\lambda-$hiperfícies completas em uma variedade com peso completa $(M^{n+1}, \overline{g}, f)$ seja própria. Cheng e Zhou [28] obtiveram o seguinte teorema relacionando o fato de um *self-shrinker* ser propriamente imersa com limitações para o crescimento de seu volume.

Teorema 2.6 (Cheng e Zhou). *Para qualquer self-shrinker Σ^n propriamente imerso em $\mathbb{R}^{n+1}$, são equivalentes,*

- Σ *é propriamente imersa;*
- Σ *tem crescimento de volume Euclidiano*
- Σ *tem crescimento de volume polinomial*
- Σ *tem volume com peso finito, ou seja,* $\displaystyle\int_\Sigma e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\Sigma < +\infty$

Generalizando este teorema, Cheng, Mejia e Zhou [27] obtiveram que se $(M^m, \overline{g}, f)$ for um sóliton de Ricci gradiente *shrinking* completo com tensor Bakry-Émery Ricci satisfazendo $Ric_f \geqslant \dfrac{1}{2}$, tal que a função peso f satisfaz $|\nabla f|^2 \leqslant f$, e se Σ for uma subvariedade completa e $f-$minima imersa em M, então, para Σ as condições de ser propriamente imersa, crescimento polinomial do volume com peso e volume com peso finito são equivalentes.

Durante essa seção obteremos resultados semelhantes para $\lambda-$hiperfícies imersas em uma variedade com peso completa M. O Teorema 2.9 mostra que área com peso finita implica em ser propriamente imersa, a recíproca é verdadeira se supusermos a derivada normal da função f limitada, o que mostraremos no Teorema 2.11.

Definição 2.7. Seja Σ uma subvariedade imersa em M. Dizemos que Σ tem crescimento de área polinomial, se existirem um ponto $p \in \Sigma$ e constantes k e d tais que para todo $r \geqslant 1$

$$Area(B_r(p) \cap \Sigma) \leqslant kr^d.$$

Onde $B_r(p)$ denota a bola extrínseca em M de raio r e centrada em p.

Antes de provarmos a próxima proposição, lembremos uma estimativa conhecida, advinda do Teorema de comparação do Hessiano.

Lema 2.8. *Seja $(M, \overline{g}, f)$ uma variedade com peso completa com geometria limitada, ou seja, com curvatura seccional limitada por uma constante $(K_M \leqslant k)$, e raio de injetividade limitado inferiormente por $i_0 > 0$. Então uma função distância $r(x)$ satisfaz*

$$\left| \overline{\nabla}^2 r(V,V) - \frac{1}{r}|V - \langle V, \overline{\nabla} r\rangle \overline{\nabla} r|^2 \right| \leqslant \sqrt{k}, \tag{2.6}$$

para $r < min\{i_0, \frac{1}{\sqrt{k}}\}$ e qualquer vetor unitário $V \in T_p\Sigma$.

Demonstração. Veja Colding e Minicozzi [31], Lema 7.1. □

Observe que a equação (2.6) implica que

$$-\overline{\nabla}^2 r(V,V) + \frac{1}{r}|V - \langle V, \overline{\nabla} r\rangle \overline{\nabla} r|^2 \leqslant \sqrt{k},$$

ou seja

$$\frac{1}{r}|V|^2 - \frac{2}{r}\langle V, \overline{\nabla} r\rangle^2 + \frac{1}{r}\langle V, \overline{\nabla} r\rangle^2 |\overline{\nabla} r|^2 - \sqrt{k} \leqslant \overline{\nabla}^2 r(V,V).$$

Como r é função distância, temos $|\overline{\nabla} r| \equiv 1$, assim a desigualdade acima torna-se:

$$\frac{1}{r}|V|^2 - \frac{1}{r}\langle V, \overline{\nabla} r\rangle^2 - \sqrt{k} \leqslant \overline{\nabla}^2 r(V,V). \tag{2.7}$$

Teorema 2.9. *Seja Σ^n uma $\lambda-$hiperfície completa não-compacta e isometricamente imersa em uma variedade com peso completa $(M, \overline{g}, f)$. Se Σ tem área com peso finita, então Σ é propriamente imersa em M.*

Demonstração. Argumentamos por contradição. Como o argumento é local, podemos assumir que $(M, \overline{g})$ tem geometria limitada. Suponha que Σ não é propriamente imersa, e satisfaz $H_f = \lambda$. Então existe um número $2R < min\{i_0, \frac{1}{\sqrt{k}}\}$ e $o \in M$ tal que $\overline{B}_R^M(o) \cap \Sigma$ não é compacta em Σ, em que $\overline{B}_R^M(o)$ denota uma bola extrínseca de raio R centrada em o. Então, para qualquer $a > 0$, existe uma sequência $\{p_k\}$ de pontos em $\overline{B}_R^M(o) \cap \Sigma$ com $dist_\Sigma(p_k, p_j) \geqslant a > 0$, para qualquer $k \neq j$. Então $B^\Sigma_{\frac{a}{2}}(p_k) \cap B^\Sigma_{\frac{a}{2}}(p_j) = \emptyset$ para qualquer $k \neq j$. Escolha $a < 2R$. Então $B^\Sigma_{\frac{a}{2}}(p_k) \subset B^M_{2R}(o)$. Se $p \in B^\Sigma_{\frac{a}{2}}(p_k)$, a função distância extrínseca $r_j(p) = dist_M(p, p_j)$ de p a p_j, pelas equações (2.1) e (2.7), satisfaz as desigualdades:

$$\begin{aligned}
\Delta r_j =& \sum_{i=1}^n \overline{\nabla}^2 r_j(e_i, e_i) + H\langle \overline{\nabla} r_j, \nu\rangle \\
\geqslant& \frac{n}{r_j} - \frac{1}{r_j}|\nabla r_j|^2 - n\sqrt{k} - \langle \overline{\nabla} f^\perp, \overline{\nabla} r_j\rangle - \lambda\langle \overline{\nabla} r_j, \nu\rangle \\
\geqslant& \frac{n}{r_j} - \frac{1}{r_j}|\nabla r_j|^2 - c,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

em que $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal de Σ. Observe que na primeira desigualdade, substituímos na equação (2.7) $V = e_i$, $r = r_j$ e somamos em i, além de tomarmos $c = \lambda + n\sqrt{k} + sup_{B^M_{2R}(o)}|\overline{\nabla} f|$.

Logo, multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.8) por r_j e usando o fato que $\Delta r_j^2 = |\nabla r_j|^2 + r_j \Delta r_j$ obtemos

$$\Delta r_j^2 \geqslant 2n - 2cr_j.$$

Escolhendo $a \leqslant \{\frac{n}{2c}, 2R\}$, temos que para $0 < \mu \leqslant \frac{a}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{B_\mu^\Sigma(p_j)} (2n - 2cr_j) d\sigma &\leqslant \int_{B_\mu^\Sigma(p_j)} \Delta_\Sigma r_j^2 d\sigma \\ &= \int_{\partial B_\mu^\Sigma(p_j)} \langle \nabla^\Sigma r_j^2, \nu \rangle d\sigma \qquad \text{pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,} \\ &\leqslant \int_{\partial B_\mu^\Sigma(p_j)} |\nabla^\Sigma r_j^2||\nu| d\sigma \\ &\leqslant \int_{\partial B_\mu^\Sigma(p_j)} |\overline{\nabla} r_j^2| d\sigma \\ &= \int_{\partial B_\mu^\Sigma(p_j)} |2r_j||\overline{\nabla} r_j| d\sigma \\ &= 2\mu A(\mu), \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde ν denota o vetor normal exterior de $\partial B_\mu^\Sigma(p_j)$ e $A(\mu)$ denota a área sem peso de $\partial B_\mu^\Sigma(p_j)$. Observe que na última igualdade usamos o fato que $r_j|_{\partial B_\mu^\Sigma(p_j)} = \mu$ e $|\overline{\nabla} r_j| \equiv 1$. Aplicando a fórmula de co-área (Teorema 1.5) em (2.9), obtemos

$$\int_0^\mu (n - cs) A(s) ds \leqslant \int_0^\mu \int_{d_\Sigma(p,p_j)=s} (n - cr_j) d\sigma \leqslant \mu A(\mu). \tag{2.10}$$

Isso implica que

$$(n - c\mu) V(\mu) \leqslant \mu V'(\mu),$$

com $V(\mu)$ denotando o volume sem peso de $B_\mu^\Sigma(p_j)$. Portanto

$$\frac{V'(\mu)}{V(\mu)} \geqslant \frac{n}{\mu} - c. \tag{2.11}$$

Integrando a desigualdade (2.11) de $\varepsilon > 0$ para μ, temos

$$\frac{V(\mu)}{V(\varepsilon)} \geqslant \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^n e^{-c(\mu - \varepsilon)}.$$

Como $\lim_{s \to 0^+} \frac{V(s)}{s^n} = \omega_n$,

$$V(\mu) \geqslant \omega_n \mu^n e^{-c\mu}. \tag{2.12}$$

Logo, concluímos que

$$\int_{\Sigma} e^{-f} d\Sigma \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B^{\Sigma}_{\frac{a}{2}}(p_j)} e^{-f} d\Sigma \geqslant \inf_{B^M_{2R}(o)} (e^{-f}) \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B^{\Sigma}_{\frac{a}{2}}(p_j)} e^{-f} d\Sigma = \infty.$$

Isso contradiz a suposição que o volume com peso de Σ é finito. $\square$

No próximo teorema, queremos condições que garantam que uma $\lambda-$hiperfície propriamente imersa em um sóliton de Ricci gradiente tenha área com peso finita. Cheng, Mejia e Zhou [27] a provaram no caso $f-$mínimo. A ideia é encontrar condições necessárias para que $\Sigma \subset M$ satisfaça a seguinte proposição provada por Cheng e Zhou [28]:

Proposição 2.10 (Cheng e Zhou)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana não-compacta. Se f é uma função não-negativa, C^∞ e própria em M que satisfaz $|\overline{\nabla} f|^2 \leqslant f$ em $D_r = \{x \in M : 2\sqrt{f} < r\}$, para todo r e*

$$\Delta_f f + f \leqslant k$$

para alguma constante k, então M tem volume com peso finito

$$V_f(M) = \int_M e^{-f} \mathrm{d}M < +\infty$$

e

$$V(r) \leqslant C r^{2k},$$

para $r \geqslant 1$, em que C é uma constante dependendo apenas de $\int_M e^{-f} \mathrm{d}M$.

Teorema 2.11. *Seja $(M^{n+1}, \overline{g}, e^{-f} dM)$ uma variedade com peso suave com $\overline{Ric}_f = k\overline{g}$, em que k é uma constante positiva. Se Σ^n for uma $\lambda-$hiperfície completa não-compacta propriamente imersa e f for uma função convexa, com derivada normal f_ν limitada em Σ, então Σ tem área com peso finita e crescimento Euclidiano do volume (e portanto polinomial).*

Demonstração. Foi demonstrado por Hamilton [52] que existe uma constante α tal que a curvatura escalar $\overline{R}$ de M e f satisfazem

$$\overline{R} + |\overline{\nabla} f|^2 - f = \alpha.$$

Como $(M^{n+1}, \overline{g}, e^{-f}dM)$ é um *gradient shrinking Ricci soliton*, podemos re-escalonar a métrica $\overline{g}$ e tomar uma translação de f, que ainda denotados por $\overline{g}$ e f, de modo que

$$\begin{aligned}\overline{R} + |\overline{\nabla} f|^2 - f &= 0,\\ \overline{R} + \overline{\Delta} f &= \frac{n+1}{2},\\ \overline{R} &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Observe que a segunda igualdade foi obtida a partir do fato que $Ric_f = k$, pois, através da normalização da métrica, assumimos que $k = \frac{1}{2}$ e tomamos o traço em ambos os lados. A partir dessas equações, temos que:

$$\overline{\Delta} f - |\overline{\nabla} f|^2 + f = \tfrac{n+1}{2} \qquad \text{e} \qquad |\overline{\nabla} f|^2 \leqslant f.$$

Foi provado por Cao e Zhou [19] que existe uma constante positiva c, tal que

$$\frac{1}{4}(r(x) - c)^2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}(r(x) + c)^2, \tag{2.13}$$

para qualquer $x \in M$ com $r(x) = dist_M(p, x) \geqslant r_0$, em que p é um ponto fixo de M, c e r_0 são constantes positivas que dependem apenas de $n+1$ e $f(p)$. Por (2.13), sabemos que f é uma função própria em M. Como Σ é uma hiperfície propriamente imersa em M e f é própria em M, $f|_\Sigma$ é também uma função suave e própria em Σ. Observe que escalonando a métrica e transladando f, Σ continua sendo uma $\lambda-$hiperfície. Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, \nu\}$ para M temos

$$\overline{\Delta} f = \Delta f + f_{\nu\nu} + H f_\nu,$$

segue do fato que $H_f = \lambda$, temos

$$\overline{\Delta} f = \Delta f + f_{\nu\nu} + |\overline{\nabla} f^{\perp}|^2 + \lambda f_{\nu}.$$

Como consequência

$$\begin{aligned}
\Delta f - |\nabla f|^2 + f =& (\overline{\Delta} f - f_{\nu\nu} - |\overline{\nabla} f^{\perp}|^2 - \lambda f_{\nu}) - |\overline{\nabla} f^{\top}|^2 + f \\
=& \overline{\Delta} f - |\overline{\nabla} f|^2 + f - \lambda f_{\nu} - f_{\nu\nu} \\
\leqslant& \frac{n+1}{2} - \lambda f_{\nu}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Também temos

$$|\nabla f|^2 = |\overline{\nabla} f^{\top}|^2 \leqslant |\overline{\nabla} f|^2 \leqslant f.$$

Pela Proposição 2.10, Σ tem volume com peso finito e crescimento euclidiano do volume nos conjuntos de nível de f com respeito à métrica original e a f. Mais ainda, pela estimativa (2.13), temos que Σ tem crescimento Euclideano do volume. $\square$

2.4 $\lambda-$Hiperfícies $f-$estáveis imersas em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$.

Nesta seção, consideramos o sóliton de Ricci gradiente *shrinking* $\left(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p, g, f\right)$ com métrica produto g, e função peso $f(y,x) = \frac{|x|^2}{4}$. Observamos que $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ tem tensor Bakry-Émery-Ricci satisfazendo

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_f =& \overline{Ric} + \overline{\nabla}^2 f \\
=& \frac{1}{2} g_{\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}} + \frac{1}{2} \mathrm{d}x^2 \\
=& \frac{1}{2} g. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Em que $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \cdots \mathrm{d}x_p^2$ é a métrica canônica do $\mathbb{R}^p$. Lembramos que uma hiperfície Σ imersa em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ é chamada $\lambda-$hiperfície, se satisfaz

$$\lambda = H_f = H - \frac{1}{2}\alpha,$$

em que $\alpha = \langle x, \nu \rangle$, e λ é uma constante.

O operador L_f em Σ é definido por

$$L_f = \Delta - \frac{1}{2} < x^\top, \nabla \cdot > + |A|^2 + \frac{1}{2}. \tag{2.16}$$

Associamos a L_f a forma quadrática $Q(u,v)$ definida em $C_0^\infty(\Sigma)$ por

$$Q(u,v) = -\int_\Sigma (uL_f v)e^{-f}\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.17}$$

Nesta seção iremos encontrar uma relação entre o $Ind_w Q$ de uma hiperfície $\Sigma \subset \mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$ e um número i, de forma que Σ seja uma variedade produto $\Sigma_0 \times \mathbb{R}^i$. Fato este, que será provado no Teorema 2.18.

Um resultado importante provado por Cheng, Mejia e Zhou para hiperfícies $f-$mínimas é a Proposição 2 de [26]. Usaremos uma versão para $\lambda-$hiperfícies como segue.

Proposição 2.12. *Seja $(M, g, e^{-f}\mathrm{d}M)$ uma variedade com peso e X um campo paralelo em M, se Σ é uma $\lambda-$hiperfície isometricamente imersa em M, então a função $\alpha : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por $\alpha = \langle X, \nu \rangle$ satisfaz.*

$$L_f \alpha = \overline{Ric}_f(X, \nu). \tag{2.18}$$

Observação 2.13. A demonstração é a mesma que foi feita por por Cheng, Mejia e Zhou [26], pois utiliza apenas derivadas da curvatura média com peso, que são as mesmas tanto no caso $f-$mínimo, quanto no caso de $\lambda-$hiperfícies.

Para o próximo lema, iremos considerar Σ uma $\lambda-$hiperfície compacta orientada não-totalmente geodésica propriamente imersa no sóliton de Ricci gradiente *shrinking* $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$. Definimos o espaço vetorial gerado pelas funções do tipo $\langle v, \nu \rangle$, em que $v \in \mathbb{R}^p$, acrescido das funções constantes em Σ. Denotaremos este espaço por $Span\{1, \langle v, \nu\rangle \ : \ v \in \mathbb{R}^p\}$.

Lema 2.14. *Seja Σ uma $\lambda-$hiperfície compacta orientada não-totalmente geodésica propriamente imersa no sólitons de Ricci gradiente shrinking $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$. Então Q é negativa definida em $Span\{1, \langle v, \nu\rangle \ : \ v \in \mathbb{R}^p\}$.*

Demonstração. Temos, pela Proposição 2.12, que Q é negativa definida em $Span\{\langle v, \nu\rangle \ : \ v \in \mathbb{R}^p\}$. É suficiente verificar que $Q(1+u, 1+u) < 0$, para algum $u = \langle v, \nu\rangle$ Usando o teorema da divergência e o fato que $L_f u = \frac{1}{2}u$,

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma ue^{-f}\mathrm{d}\Sigma = \int_\Sigma (L_f u)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma = \int_\Sigma \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) ue^{-f}\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.19}$$

Portanto, $\int_\Sigma |A|^2 ue^{-f}\mathrm{d}\Sigma = 0$, e, então, u é ortogonal a $|A|^2$. Concluímos que

$$\begin{aligned} Q(1+u, 1+u) &= -\int_\Sigma \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) e^{-f}\mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma ue^{-f}\mathrm{d}\Sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma u^2 e^{-f}\mathrm{d}\Sigma \\ &= -\int_\Sigma |A|^2 e^{-f}\mathrm{d}\Sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma (u+1)^2 e^{-f}\mathrm{d}\Sigma < 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

□

Observação 2.15. O lema acima nos garante que se a dimensão do espaço $Span\{1, \langle v, \nu\rangle \ : \ v \in \mathbb{R}^p\}$ for maior ou igual que 2, a hiperfície Σ, nas condições do enunciado, não pode ser estável. De fato, se existisse $u = \langle v, \nu\rangle$ que não fosse constante, com $\int_\Sigma ue^{-f}\mathrm{d}\Sigma = a$, poderíamos tomar a função $\tilde{u} = u - \frac{a}{\mathcal{A}_f(\Sigma)}$, que satisfaz $\int_\Sigma \tilde{u}e^{-f}\mathrm{d}\Sigma = 0$ e $Q(\tilde{u}, \tilde{u}) < 0$.

Lema 2.16. *Seja Σ uma $\lambda-$hiperfície compacta orientada que tenha área com peso finita e seja propriamente imersa no sóliton de Ricci gradiente* *shrinking* $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$. *Para quaisquer funções* $\phi \in C_0^\infty(\Sigma)$ *e* $u \in C^\infty(\Sigma)$ *temos que*

$$\int_\Sigma \phi u(L_f \phi u)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma = \int_\Sigma \phi^2 u(L_f u)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 u^2 e^{-f}\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.21}$$

Em particular, se $u = \langle v, \nu\rangle$, $v \in \mathbb{R}^p$, *então*

$$\int_\Sigma \phi^2 |A|^2 \langle v, \nu\rangle e^{-f}\mathrm{d}\Sigma = 2\int_\Sigma \phi A(\nabla\phi, v^\top)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma, \tag{2.22}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \phi u(L_f\phi u)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma &= \int_\Sigma \left(u^2\phi\Delta_f\phi + \frac{1}{2}\langle\nabla\phi^2, \nabla u^2\rangle + \phi^2 u L_f u\right)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma \\
&= \int_\Sigma \left(u^2\phi\Delta_f\phi - u^2\phi\Delta_f\phi - u^2|\nabla\phi|^2 + \phi^2 u L_f u\right)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma \\
&= \int_\Sigma \left(\phi^2 u L_f u - u^2|\nabla\phi|^2\right)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Observe que, da primeira para a segunda linha usamos a integração por partes na forma (c) do Teorema 1.4.

Isso demonstra a equação (2.21).

Vamos, agora, demonstrar a equação (2.22). De acordo com a Proposição 2.12, temos $L_f\langle v, \nu\rangle = \frac{1}{2}\langle v, \nu\rangle$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Sigma \phi\langle v, \nu\rangle e^{-f}\mathrm{d}\Sigma &= \int_\Sigma \phi L_f\langle v, \nu\rangle e^{-f}\mathrm{d}\Sigma, \\
&= \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} + |A|^2\right)\phi\langle v, \nu\rangle e^{-f}\mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma \langle\nabla\phi, \nabla\langle v, \nu\rangle\rangle e^{-f}\mathrm{d}\Sigma.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Portanto, temos

$$\int_\Sigma |A|^2\phi\langle v, \nu\rangle e^{-f}\mathrm{d}\Sigma = \int_\Sigma A(\nabla\phi, v^\top)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma.$$

Substituindo ϕ por ϕ^2, obtemos (2.22). □

Lema 2.17. *Seja Σ uma $\lambda-$hiperfície orientada que tenha área com peso finita e seja propriamente imersa no sóliton de Ricci gradiente shrinking $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$. Considerando o espaço V, definido como um espaço vetorial sobre os números reais por*

$$V \equiv Span\{1, \langle v, \nu\rangle \; : \; v \in \mathbb{R}^p\}.$$

Então, existe $\phi \in C_0^\infty(\Sigma)$ tal que Q é negativa definida em ϕV e $Dim(\phi V) = DimV$.

Demonstração. Tome $u \equiv a + \langle v, \nu\rangle$, $a \in \mathbb{R}$ e considere $Q(\phi u, \phi u)$. Da equação (2.21) temos que

$$\begin{aligned} Q(\phi u, \phi u) &= -\int_\Sigma \left(\phi^2 u L_f u - u^2|\nabla\phi|^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma \\ &= -\int_\Sigma \left(\phi^2 u a \left(\frac{1}{2} + |A|^2\right)\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma \left(\phi^2 u \frac{1}{2}\langle v, \nu\rangle\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma \\ &\quad + \int_\Sigma \left(|\nabla\phi|^2 u^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma. \end{aligned}$$

Usando o fato que $u = a + \langle v, \nu\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} Q(\phi u, \phi u) &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\phi^2 u^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma \left(\phi^2 |A|^2 a^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma \\ &\quad - \int_\Sigma \left(\phi^2 |A|^2 a \langle v, \nu\rangle\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \left(|\nabla\phi|^2 u^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma. \end{aligned}$$

Usando a equação (2.22), a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* e uma desigualdade do tipo $2xy \leqslant x^2 + y^2$, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \left|\int_\Sigma \left(\phi^2 |A|^2 a \langle v, \nu\rangle\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma\right| &= 2\left|\int_\Sigma \left(\phi A(\nabla\phi, v^\top) a\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma\right| \\ &\leqslant \int_\Sigma \left(\phi^2 |A|^2 a^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \left(|\nabla\phi|^2 |v^\top|^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Portanto,

$$Q(\phi u, \phi u) \leqslant -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\phi^2 u^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \left(|\nabla\phi|^2 (u^2 + |v^\top|^2)\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma. \tag{2.26}$$

Fixando um ponto $q \in \Sigma$, no espaço ambiente q é da forma (q', x). Para $R > 0$ grande, definimos a função de corte ϕ_R por

$$\phi_R(x, q') = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant R \\ 1 - (1/R)(r - R) & R \leqslant |x| \leqslant 2R \\ 0 & r \geqslant 2R. \end{cases} \tag{2.27}$$

Tomamos a restrição de $\phi_R|_\Sigma$, que ainda denotaremos por ϕ_R. Observe que $|\nabla \phi_R| \leqslant 1/R$. Também temos que $\phi_R \in C_0^\infty(\Sigma)$, pois Σ é própria.
Logo, a equação (2.26) pode ser escrita como

$$Q(\phi_R u, \phi_R u) \leqslant -\frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\phi_R^2 u^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{R^2}\int_{\Sigma \cap \left\{\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \left(\mathbb{R}^p \setminus B_R^p(0)\right)\right\}} |v|^2 \, e^{-f} \mathrm{d}\Sigma. \tag{2.28}$$

Como a área com peso de Σ é finita, temos que $\displaystyle\int_\Sigma |v|^2 e^{-f} \mathrm{d}\Sigma < +\infty$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^p$. Fixando v, de forma que tenhamos $u \not\equiv 0$, e tomando $R \to \infty$, verificamos que existe R_v tal que $Q(\phi_{R_v}, \phi_{R_v}) < 0$. Queremos encontrar um R que seja independente de $v \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Em que $\mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ é o conjunto formado pelos vetores v, tais que $\langle v, \nu \rangle \not\equiv 0$.

Observe que a dimensão de V não é necessariamente p. Seja $\{a_i + \langle v_i, \nu \rangle\}$ uma base de V, com $|a_i|^2 + |v_i|^2 = 1$. Defina $S \equiv \{d_i(a_i + \langle v_i, \nu \rangle) : \sum d_i^2 = 1\}$ e observe que como $DimV < \infty$, temos que S é um compacto. Isso implica que existe R_0 tal que, para todo $u \in S$ temos que $\left(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(n-1)}} \times B^p_{R_0}(0)\right) \cap \{u \neq 0\} \neq \emptyset$; se não, existiria uma sequencia $u_j = d_i^j(a_i + \langle v_i, \nu \rangle) \in S$ tal que $u_j \equiv 0$ em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(n-1)}} \times B_j$. Passando a uma subsequência e tomando o limite $d_i^j \to d_i^\infty$, teríamos que $(d_i^\infty(a_i + \langle v_i, \nu \rangle)) \equiv 0 \in S$ o que é uma contradição. Portanto, para $R > R_0$ e $u \in S$ segue que

$$\int_\Sigma \left(\phi_R^2 u^2\right) e^{-f} \mathrm{d}\Sigma \geqslant M_R > 0. \tag{2.29}$$

Observe que M_R é crescente em R, e que $Dim(\phi_R V) = DimV$. Como $|v_i| < 1$, obtemos $\displaystyle\int_\Sigma |v_i|^2 e^{-f} \mathrm{d}\Sigma < \mathcal{A}_f(\Sigma)$. Logo, a equação (2.28) pode ser escrita como

$$Q(\phi_R u, \phi_R u) < -\frac{M_R}{2} + \frac{\mathcal{A}_f(\Sigma)}{R^2}, \tag{2.30}$$

para todo $u \in S$ e $R \geqslant R_0$. Tomando $R \to \infty$, podemos encontrar R independente de u tal que $Q(\phi_R u, \phi_R u) < 0$ para todo $u \in S$. Portanto, temos que $DimV = Dim(\phi_R V)$ e que Q é negativa definida em $\phi_R V$. □

No próximo teorema iremos considerar o espaço ϕV do Lema 2.17, e usar sua dimensão para mostrar que uma limitação no $Ind_w Q$ força Σ a separar um espaço linear.

Teorema 2.18. *Considere uma hiperfície two-sided suave propriamente imersa não-totalmente geodésica $\Sigma \subset \mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}^p$, que tenha área com peso finita, e satisfaça as seguintes condições: $H = \langle \overline{\nabla} f, \nu \rangle + \lambda$ e $Ind_w Q \leqslant p-1$. Então, existe um número natural i tal que $p - Ind_w Q \leqslant i \leqslant p-1$ e temos que*

$$\Sigma = \Sigma_0 \times \mathbb{R}^i. \tag{2.31}$$

Demonstração. Seja $V \equiv Span\{1, \langle v, \nu \rangle\}_{v \in \mathbb{R}^p}$. Primeiro vamos avaliar a dimensão de V $(DimV)$. Considere o caso que as funções constantes $a \in Span\{\langle v, \nu \rangle\}_{v \in \mathbb{R}^p}$. Temos, pela Proposição 2.12, que $L_f a = \frac{1}{2} a$, mas, como a também é constante, então $L_f a = (\frac{1}{2} + |A|^2) a$. Portanto $|A|^2 a \equiv 0$ e como Σ é não-totalmente geodésica, temos que $a = 0$. Logo,

$$DimV = 1 + DimSpan\{\langle v, \nu \rangle\}_{v \in \mathbb{R}^p}. \tag{2.32}$$

Pelo Lema 2.17, temos que para alguma $\phi \in C_0^\infty(\Sigma)$, $Dim\phi V = DimV$ e que Q é negativa definida em ϕV.

Como estamos analisando variações que preservam volume, nos restringimos às funções $\{u \in C_0^\infty(\Sigma) : \int_\Sigma u e^{-f} \mathrm{d}\Sigma = 0\}$. Ou seja, precisamos considerar o espaço $\phi V \cap 1^{\perp}$, pois cada função neste espaço adiciona 1 no cálculo do $Ind_w Q$.

Observe que $Dim(\phi V \cap 1^{\perp}) = DimV$ ou $Dim(\phi V \cap 1^{\perp}) = DimV - 1$, pois considerando uma base $\{\phi u_i\}$ para ϕV, se tivermos $\phi u_i \perp 1$ para todo i, temos que $Dim(\phi V \cap 1^{\perp}) = Dim(\phi V) = DimV$. Caso isso não ocorra, podemos proceder conforme a observação 2.15 e encontrar constantes $\{a_i\} \in \mathbb{R}$ de forma que as funções $\tilde{u}_i = \phi(u_i - a_i)$ satisfaçam $\int_\Sigma \tilde{u} e^{-f} \mathrm{d}\Sigma = 0$. Portanto, temos que $Dim(\phi V \cap 1^{\perp}) \geqslant DimSpan\{\langle v, \nu\rangle\}_{v \in \mathbb{R}^p}$. Então, $DimSpan\{\langle v, \nu\rangle\}_{v \in \mathbb{R}^p} \leqslant Ind_w Q$.

Considerando o núcleo da transformação linear $\mathbb{R}^p \to C^\infty(\Sigma)$ dada por $v \to \langle v, \nu\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} Dim\{v \,:\, \langle v, \nu\rangle \equiv 0\} &= p - DimSpan\{\langle v, \nu\rangle\}_{v \in \mathbb{R}^p} \\ &\geqslant p - Ind_w Q. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Finalmente, observe que

$$\Sigma = \Sigma_0 \times \{v \,:\, \langle v, \nu\rangle \equiv 0\}. \tag{2.34}$$

Pois se $\langle v, \nu\rangle \equiv 0$, a curva $\gamma(t) = tv \subset \Sigma$. O que conclui a demonstração.

□

2.5 $\lambda-$Hiperfícies $f-$estáveis imersas em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$.

O objetivo da presente seção é classificar as $\lambda-$hiperfícies $f-$estáveis, que tenham área com peso finita e sejam imersas na variedade produto $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$ com função peso $f(p,t) = \dfrac{t^2}{4}$.

Consideraremos $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$ uma variedade Riemanniana com a métrica produto

$$\overline{g} = g_{\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}} + \mathrm{d}t^2.$$

Uma $\lambda-$ hiperfície Σ imersa em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$ satisfaz

$$\lambda = H_f = H - \frac{t}{2}\alpha,$$

em que $\alpha = \langle \partial_t, \nu \rangle$ e λ é uma constante. O operador L_f em Σ é definido por

$$L_f = \Delta - \frac{t}{2}\langle (\partial_t)^\top, \nabla \cdot \rangle + |A|^2 + \frac{1}{2}. \tag{2.35}$$

Associamos a L_f a forma quadrática $Q(u,v)$ definida em $C_0^\infty(\Sigma)$ por

$$Q(u,v) = -\int_\Sigma (uL_f v)e^{-f}\mathrm{d}\Sigma. \tag{2.36}$$

Lema 2.19. *O slice $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$, com $t \in \mathbb{R}$ fixado, é uma $\lambda-$hiperfície em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$. Mais ainda, uma $\lambda-$hiperfície Σ completa é imersa em um slice horizontal $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ se, e somente se, Σ é $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$.*

Demonstração. O normal unitário ν de Σ satisfaz $\nu = \partial_t$ e portanto $A_\nu X = \overline{\nabla}_X \nu = 0$, $\forall X \in T\Sigma$. Portanto Σ é totalmente geodésica. Como

$$\langle \overline{\nabla} f, \nu \rangle = \frac{t}{2},$$

$$H_f = H - < \overline{\nabla} f, \nu > = -\frac{t}{2}. \tag{2.37}$$

Segue que Σ é $\lambda-$hiperfície se, e somente se, $t = -2\lambda$. Mais ainda, pela equação de Gauss (1.5) sabemos que Σ tem curvatura seccional positiva constante e, portanto, é fechada. Como Σ é fechada e tem dimensão k e $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$ é simplesmente-conexa, Σ deve ser $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$. $\square$

Lema 2.20. $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ *é estável para variações que preservam volume.*

Demonstração. Temos que $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ satisfaz $\nabla f = (\overline{\nabla} f)^\top = 0$ e por isso, conforme o Lema 2.19, é uma hiperfície totalmente geodésica. Portanto,

$$L_f = \Delta_{\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}} + \frac{1}{2}. \tag{2.38}$$

Conforme Cheng, Mejia e Zhou ([26] Lema 2) os autovalores de L_f são

$$\tilde{\mu}_j = \mu_j - \frac{1}{2},$$

em que $\mu_j = \frac{j(j+k-1)}{2(k-1)}$, $j = 0, 1, \ldots$ são os autovalores do laplaciano $\Delta_{\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}}$. Usando o Princípio do máximo e o Teorema 2 de Cheng, Mejia e Zhou [26], verificamos que as funções associadas ao primeiro autovalor são as constantes. Pela Teoria espectral, as próximas auto-funções são ortogonais às funções constantes na norma L^2 com peso, pois em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$ a função f é constante e a norma L^2 com peso é múltipla da norma L^2 sem peso. □

Lema 2.21. *Seja* Σ *uma* $\lambda-$*hiperfície compacta orientada não-totalmente geodésica e propriamente imersa no sóliton de Ricci cilindro shrinking* $(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}, \overline{g}, f)$. *Então* Q *é negativa definida em* $Span\{1, \alpha\}$. *Em que* $\alpha = \langle \partial_t, \nu \rangle$.

Demonstração. É suficiente verificar que $Q(1+\alpha, 1+\alpha) < 0$. Usando o Teorema da divergência e o fato que $L_f\alpha = \frac{1}{2}\alpha$,

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \alpha e^{-f} d\Sigma = \int_\Sigma (L_f \alpha) e^{-f} d\Sigma = \int_\Sigma \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) \alpha e^{-f} d\Sigma. \tag{2.39}$$

Portanto, $\int_\Sigma |A|^2 \alpha e^{-f} d\Sigma = 0$ se, e somente se, α é ortogonal a $|A|^2$. Então, conforme o Lema 2.21 temos

$$Q(1+\alpha, 1+\alpha) = -\int_\Sigma |A|^2 e^{-f} \mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma (\alpha+1)^2 e^{-f} d\Sigma < 0. \tag{2.40}$$

□

Para a demonstração do próximo teorema, iremos fazer uso do Teorema 3 de Vaken e Vrancken [78], o qual enunciamos abaixo:

Teorema 2.22 ([78])**.** *Seja M^n uma hiperfície totalmente geodésica de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Então, há duas opções:*

(i) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^n \times \{t\}$, com $t \in \mathbb{R}$, ou,

(ii) M^n é um aberto de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Ao aplicar este resultado ao nosso teorema a seguir, temos que o caso em que Σ for um aberto próprio das variedades acima não ocorrerá, pois, como suporemos Σ completa e propriamente imersa, pela Proposição 2.3 de do Carmo [36], uma variedade completa é também não-extensível.

Teorema 2.23. *Seja Σ uma $\lambda-$hiperfície completa orientada, com área com peso finita propriamente imersa no sóliton de Ricci cilindro shrinking $(\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}, \overline{g}, f)$. Então Σ é estável se, e somente se, Σ for $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$ ou $\mathbb{S}^{k-1}_{\sqrt{2(k-1)}} \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Observamos que em Σ temos

$$\nabla t = (\overline{\nabla} t)^{\top} = \partial_t - \langle \partial_t, \nu \rangle \nu.$$

Então,

$$|\nabla t|^2 = 1 - \langle \partial_t, \nu \rangle^2 = 1 - \alpha^2. \tag{2.41}$$

Dividiremos a prova em duas partes. Na primeira, supomos Σ compacta. E na segunda parte, supomos que Σ não é compacta.

i) **Suponha Σ compacta**

Então, existe um ponto $p \in \Sigma$ tal que $t(p) = max_{\Sigma} t$ e $|\nabla t|(p) = 0$. Pela equação (2.41), temos

$$0 = |\nabla t|^2(p) = 1 - \alpha^2(p).$$

Logo $\alpha(p) = \pm 1$ e então $\alpha \not\equiv 0$. Se $\alpha \equiv 1$ ou $\alpha \equiv -1$, pela equação acima temos $\nabla t = 0$ e portanto, de acordo com o Lema 2.19, Σ é um *slice* horizontal $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}} \times \{t\}$.

Se $\alpha \not\equiv 1$ então, pelo Lema 2.21, $Ind_w Q \geqslant 1$, e portanto Σ não pode ser estável. O que conclui o caso compacto.

ii) **Suponha que Σ não é compacta.**

De acordo com a Proposição 3 de Cheng e Zhou [29], temos $\alpha > 0$ e se α não for constante, então, de acordo com o Lema 2.17, Σ não é estável.

Se $\alpha \equiv a \neq 0 \in \mathbb{R}$, como $L_f a = (1/2 + |A|^2)a$ e $L_f \alpha = \frac{1}{2}\alpha$, temos que Σ é totalmente geodésica.

Resta, portanto, analisarmos a situação em que $\alpha \equiv 0$. Pela equação (2.41), isto implica que $\partial_t \in T_q\Sigma$ para qualquer $q \in \Sigma$. Logo, qualquer reta vertical $\{q'\} \times \mathbb{R}$ passando por Σ deve ser uma curva em Σ. Segue então que $\Sigma = \Sigma_1 \times \mathbb{R}$, em que $\Sigma_1 \subset \mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$.

Pelo Exemplo 2.3, Σ é uma $\lambda-$hiperfície se, e somente se, Σ_1 tiver curvatura média constante em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$. Neste caso, o operador de estabilidade se escreve como:

$$\begin{aligned} L_f &= \Delta_f + |A|^2 + \frac{1}{2} \\ &= \Delta + \langle \nabla f, \nabla \cdot \rangle + |A_{\Sigma_1}|^2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(\Delta_{\Sigma_1} + |A_{\Sigma_1}|^2 + \overline{Ric}_{\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}}(\nu, \nu) \right) + \left(\partial_t^2 + \frac{1}{2}\partial_t \right). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Observe que a primeira parte do lado direito da equação (2.42) é o operador de Jacobi J_{Σ_1} para a hiperfície de curvatura média constante Σ_1 em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$. Se o $Ind_w Q_{\Sigma_1}$ de Σ_1 for maior que 1, então existe uma função ψ com $\int_{\Sigma_1} \psi \mathrm{d}\Sigma_1 = 0$ e $Q_{\Sigma_1}(\psi, \psi) < 0$. Escolhendo $\varphi(q,t) = \psi(q)$ com $(q,t) \in \Sigma_1 \times \mathbb{R}$ temos $Q(\varphi, \varphi) < 0$. E portanto, o $Ind_w Q$ de Σ é pelo menos 1. Logo Σ_1 é estável no sentido clássico e como também é uma hiperfície de curvatura média constante em $\mathbb{S}^k_{\sqrt{2(k-1)}}$ propriamente imersa e fechada, então, pelo Teorema 1.2 de Barbosa, do Carmo e Eschenburg [10], sabemos que Σ_1 é uma esfera geodésica.

$\square$

Capítulo 3

Uma desigualdade de Faber-Krahn em variedades com peso

3.1 Introdução

As estimativas para autovalores de operadores diferenciais, parciais, elípticos são um velho problema em análise. Relacionar este autovalor com alguma desigualdade isoperimétrica gerou muitos teoremas interessantes em análise e geometria. Um dos mais importantes é a desigualdade de Faber-Krahn, primeiro conjecturada por Rayleigh [70], foi provada, independentemente, por Faber [41] e Krahn [55]. A desigualdade de Faber-Krahn afirma que o disco, entre todos os domínios planos de igual área, tem o menor primeiro autovalor do Laplaciano para o problema de Dirichlet. E além disso, caso haja igualdade entre os autovalores o domínio deve ser um disco.

Em 1999, Bhattacharya [16] generalizou este resultado, mostrando que entre os domínios limitados do $\mathbb{R}^n$, a bola é o que possui o menor primeiro autovalor do $p-$Laplaciano, $1 < p < \infty$, para o problema de Dirichlet. E, da mesma forma, em caso de igualdade o domínio deve ser uma bola.

Desigualdades do tipo Faber-Krahn também foram obtidas em outros ambientes. Um deles, muito importante na teoria das probabilidades, é o espaço de Gauss, que definiremos como segue:

Definição 3.1. O espaço de Gauss G^n é a variedade com peso $(\mathbb{R}^n, \delta, \Psi)$, em que δ é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$, e a função peso Ψ satisfaz

$$e^{-\Psi} = (1/2\pi)^{n/2} e^{-|x|^2/2}.$$

Com tal medida, G^n possui volume com peso unitário, ou seja $\mathcal{V}_\Psi(G^n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\Psi} \mathrm{d}x = 1$.

Conforme o Exemplo 2.1, G^n é um sóliton de Ricci gradiente *shrinking*, pois satisfaz $Ric_\Psi = \delta$. Na teoria das probabilidades as medidas da forma $(\gamma/2\pi)^{n/2} e^{-\gamma x^2/2} \mathrm{d}x$, com $\gamma > 0$, também são chamadas Gaussianas. Todos os resultados que provaremos, seguem de forma análoga para tal família de medidas, tomando o cuidado de escalonar sempre que necessário, assumiremos $\gamma = 1$, a fim de não carregar a notação.

Uma desigualdade isoperimétrica para o espaço de Gauss foi obtida de maneira independente por Borel [18] em 1975 e por Sudakov e Tirel'son [75] em 1978, demonstrando que os semi-espaços são as regiões de menor perímetro dentre todas as regiões de volume fixado. Em 1982 Ehrhard [39] deu uma nova demonstração desta propriedade através do método de simetrização Gausssiana.

Utilizando esta desigualdade isoperimétrica, junto com a simetrização Gaussiana, Betta, Chiacchio e Ferone [15] obtiveram uma versão da desigualdade de Faber-Krahn para o espaço de Gauss. Eles mostraram que dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathcal{V}_\Psi(\Omega) < 1$, o primeiro autovalor do Laplaciano com peso com condição de Dirichlet em Ω é maior ou igual que em Ω^*. Em que Ω^* é um semi-espaço de mesmo volume que Ω obtido através do processo de simetrização Gaussiana. Caso haja igualdade entre os autovalores, então a menos de uma rotação $\Omega = \Omega^*$.

Em 1980, Gromov [47] obteve uma desigualdade isoperimétrica, conhecida como desigualdade isoperimétrica de Levy-Gromov. Considerando uma variedade compacta (M^{n+1}, g), com tensor de Ricci satisfazendo $Ric_M \geqslant Ric_{\mathbb{S}^{n+1}} = n$ e tomando um domínio $V \subset M$ com fronteira suave e $B \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma bola geodésica, de forma que

$$\frac{Vol(V)}{Vol(M)} = \frac{Vol(B)}{Vol(\mathbb{S}^{n+1})}.$$

Então, segue que

$$\frac{Vol(\partial V)}{Vol(M)} \geqslant \frac{Vol(\partial B)}{Vol(\mathbb{S}^{n+1})}.$$

Tal resultado, junto com a simetrização de Schwarz, possibilitou obter desigualdades de Faber-Krahn, comparando auto-valores do problema de Dirichlet entre os domínios V e B.

Mais especificamente, nas mesmas condições da desigualdade isoperimétrica de Levy-Gromov [47], Bérard e Meyer [13] mostraram que o primeiro autovalor do Laplaciano, com a condição de Dirichlet, em uma bola geodésica B na esfera $\mathbb{S}^n$, que tenha mesmo volume que $V \subset M$ é sempre menor ou igual que em V. Se houver igualdade temos rigidez, ou seja, M é isométrica a esfera. Este resultado foi generalizado por Matei [62], considerando o mesmo problema com o operador $p-$Laplaciano, para $1 < p < \infty$.

Percebemos que seria interessante obter uma desigualdade de Faber-Krahn entre variedades com peso. Em todos as versões citadas, um ingrediente fundamental foi uma desigualdade isoperimétrica. Uma versão da desigualdade isoperimétrica de Levy-Gromov para variedades com peso foi obtida em 1980 por Bakry e Ledoux [7] usando semi-grupos de Markov. Outras abordagens obtiveram este mesmo resultado: Bayle [12] a partir das fórmulas de primeira e segunda variação de área e Frank Morgan [65] a partir de uma versão do Teorema de Heintze–Karcher para variedades com peso. A versão contida em Morgan [65] é a que segue:

Teorema 3.2 (Levy-Gromov Generalizado)**.** *Seja* (M^n, g, f) *uma variedade Riemanniana suave completa conexa com função peso suave* f*, volume com peso unitário, e curvatura Bakry-Émery Ricci dada por*

$$Ric_f = Ric + \nabla^2 f \geqslant \gamma > 0.$$

Então, o perfil isoperimétrico $P(V)$ *(menor perímetro a englobar determinado volume) satisfaz*

$$P \geqslant P_{G_\gamma}, \tag{3.1}$$

em que P_{G_γ} *é o perfil isoperimétrico do espaço de Gauss com peso* Ψ*, de forma que*

$$e^{-\Psi} = (\gamma/2\pi)^{n/2} e^{-\gamma x^2/2}$$

e $Ric_\Psi = -\nabla^2\, \Psi = \gamma$*.*

No espaço de Gauss, os minimizadores de perímetro são hiperplanos. Se a igualdade valer em (3.1) *para algum* $0 < V < 1$*, então* M *é o produto do espaço de Gauss unidimensional com algum espaço Euclidiano* $(n-1)$*-dimensional com peso.*

A partir daqui, vamos considerar, (M, g, f) uma variedade com peso completa e que tenha volume com peso unitário, ou seja

$$\mathcal{V}_f(M) = \int_M e^{-f} \mathrm{d}M = 1.$$

Definimos o operador $p-$Laplaciano com peso por

$$\Delta_{p,f} u = e^f \operatorname{div}(e^{-f} |\nabla u|^{p-2} \nabla u), \tag{3.2}$$

em que u está no espaço de Sobolev com peso $W_0^{1,p}(\Omega, f)$, sendo $\Omega \subset M$ um domínio (ver Definição 3.4).

Dizemos que um número λ é um autovalor do $p-$Laplaciano com peso para o problema de Dirichlet, se existir função $u \in W_0^{1,p}(\Omega, f)\backslash\{0\}$, tal que

$$\begin{cases} \Delta_{p,f} u = \lambda\, |u|^{p-2} u & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

no sentido das distribuições.

Definimos o primeiro autovalor, $\lambda_{1,p}(\Omega, f)$, para o problema (3.3) como sendo o menor autovalor não-nulo e podemos caracterizá-lo variacionalmente por

$$\lambda_{1,p}(\Omega, f) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M}{\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M};\ u \in W_0^{1,p}(\Omega, f),\ u \not\equiv 0 \right\}. \tag{3.4}$$

O fato que existe uma autofunção associada ao primeiro autovalor é garantida pelo Lema 3.1 de Drábek, Kufner e Nicolosi [38] e ainda o Teorema 3.1 de Drábek, Kufner e Nicolosi [38] garante que esta primeira autofunção é simples.

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema

Teorema 3.3 (Desigualdade de Faber-Krahn)**.** *Seja (M^n, g, f) uma variedade Riemanniana suave completa conexa, com função peso suave f, volume com peso unitário, e tal que seu tensor Barky-Émery Ricci satisfaz:*

$$Ric_f = Ric + \nabla^2 f \geqslant 1. \tag{3.5}$$

Seja $\lambda_{1,p}(\Omega, f)$ o primeiro autovalor para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{p,f} u = \lambda\, |u|^{p-2} u & em \quad \Omega \\ f = 0 & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

com $2 \leqslant p < \infty$. *Considere o seguinte semi-espaço no espaço de Gauss:*

$$\Omega^* = H(\alpha) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in G^n, \quad x_1 > \alpha\}.$$

de forma que o volume com peso de Ω^* *em* G^n *seja igual ao de* Ω *em* M *e menor que 1, ou seja*

$$\mathcal{V}_\Psi(\Omega^*) = \int_\Omega e^{-\Psi} \mathrm{d}x = \mathcal{V}_f(\Omega) = \int_\Omega e^{-f} \mathrm{d}M < 1.$$

Sendo $\lambda_{1,p}(\Omega^*, \Psi)$ *o primeiro autovalor do* $p-$*Laplaciano com peso para o problema de Dirichlet em* Ω^*, *vale a seguinte desigualdade,*

$$\lambda_{1,p}(\Omega, f) \geqslant \lambda_{1,p}(\Omega^*, \Psi).$$

O capítulo está organizado da seguinte forma:

Na Seção 3.2 iremos estudar as versões com peso dos espaços de Sobolev e dos espaços L^p. O resultado mais importante é a compacidade da imersão de $W_0^{1,p}(\Omega, f)$ em $L^p(\Omega, f)$.

A Seção 3.3 é dedicada ao estudo da simetrização Gaussiana de funções, iremos obter uma desigualdade do tipo Pólya–Szegő (Proposição 3.9) e uma desigualdade de Poincaré em $W_0^{1,p}(\Omega, f)$ (Proposição 3.11).

Finalmente, na Seção 3.4 iremos demonstrar o Teorema 3.3.

Ao longo do texto iremos considerar $2 \leqslant p < \infty$.

3.2 Espaços de Sobolev em variedades com peso

Seja (M, g, f) uma variedade com peso e $\Omega \subset M$ um domínio. Considerando uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável com $|u|^p$ também mensurável, definimos

$$\|u\|_{L^p(\Omega,f)} = \left(\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$L^p(\Omega, f) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ \text{mensurável, com } \|u\|_{L^p(\Omega,f)} < \infty\}.$$

Definição 3.4. [Espaço de Sobolev em variedades com peso] Considere (M, g, f) uma variedade com peso e $\Omega \subset M$ um domínio. Seja

$$\mathfrak{C}^p(\Omega, f) = \left\{ u \in C^\infty(\Omega);\ \|u\|_{L^p(\Omega,f)} < \infty \ e \int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M < \infty \right\}.$$

Para $u \in \mathfrak{C}^p(\Omega, f)$, definimos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega,f)} = \left(\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos o espaço de Sobolev, $W^{1,p}(\Omega, f)$, como o completamento do espaço $\mathfrak{C}^p(\Omega, f)$, em relação a norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega,f)}$ dada acima. Com tal definição, $W^{1,p}(\Omega, f)$ é um espaço de Bannach uniformemente convexo e, portanto, reflexivo (ver Teorema 1.3 (i) de Drábek, Kufner e Nicolosi [38]).

Podemos ainda considerar

$$\mathfrak{C}^p_0(\Omega, f) = \left\{ u \in C_0^\infty(\Omega);\ \|u\|_{L^p(\Omega,f)} < \infty \ e \int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M < \infty \right\}.$$

Neste caso denotaremos o completamento deste espaço em relação à norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega,f)}$ por $W_0^{1,p}(\Omega, f)$ (Graças ao Teorema 1.3 (ii) de Drábek, Kufner e Nicolosi [38], poderíamos também ter definido $W_0^{1,p}(\Omega, f)$ como o completamento das funções em $C_0^\infty(\Omega)$ em relação à norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega,f)}$). A fim de distinguir os espaços, usaremos a notação $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega,f)}$ para a norma, quando o espaço que estivermos considerando for $W_0^{1,p}(\Omega, f)$.

Lema 3.5. *Seja (M, g, f) uma variedade com peso que tenha volume com peso unitário e $\Omega \subset M$ um domínio tal que $\mathcal{V}_f(\Omega) < 1$. Se $\lambda_{1,p}(\Omega, f)$ é o primeiro autovalor do problema* (3.3) *e u a autofunção correspondente, temos que u não muda de sinal e possui regularidade $C^{1,\alpha}(\Omega)$.*

Esse lema segue dos resultados provados por Tolksdoff [76], que demonstrou regularidade de soluções para uma classe de $EDP's$ que tem como caso particular o problema (3.3). O fato que u não troca de sinal pode ser argumentado como no caso clássico. De fato, se u é uma autofunção relativa a $\lambda_{1,p}(\Omega, f)$ então, tanto u quanto $|u|$ minimizam (3.4), logo $|u|$ também é uma autofunção associada ao primeiro autovalor. Pela desigualdade de Harnack (ver Trundinger [77]) segue que ou $|u| > 0$ em Ω ou $|u| \equiv 0$ em Ω.

3.2.1 Compacidade da imersão de Sobolev

Lembramos que estamos considerando $2 \leqslant p < \infty$. Bakry e Émery [6] mostraram que se (M, g, f) satisfaz $Ric_f \geqslant \frac{a}{2}g$, para alguma constante $a > 0$, e tem volume com peso finito $\mathcal{V}_f(M)$, então vale a seguinte desigualdade de Sobolev logarítmica:

$$\int_\Omega u^2 \log\left(\frac{u^2}{\int_\Omega u^2 e^{-f} \mathrm{d}M}\right) e^{-f} \mathrm{d}M \leqslant \frac{4}{a} \int_\Omega |\nabla u|^2 e^{-f} \mathrm{d}M, \tag{3.7}$$

para um domínio $\Omega \subset M$ e toda função $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Para uma demonstração desta e de outras desigualdades logarítmicas consultar Guionnet e Zegarlinski [50].

Considerando apenas as funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ que satisfazem $\int_M u^2\, e^{-f} \mathrm{d}M = \int_M e^{-f} \mathrm{d}M = 1$, obtemos

$$\int_\Omega u^2 \log u^2 e^{-f} \mathrm{d}M \leqslant \frac{4}{a} \int_\Omega |\nabla u|^2 e^{-f} \mathrm{d}M. \tag{3.8}$$

Cheng e Zhou [30] mostraram que a desigualdade (3.8) vale para as funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se, e somente se, vale para as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega, f)$.

Podemos usar um argumento como em Gross [49], e considerarmos $\tilde{u} = |u|^{\frac{p}{2}}$, com $\int_M \tilde{u}^2\, e^{-f} \mathrm{d}M = \int_M e^{-f} \mathrm{d}M = 1$. Observe que se $u \in C_0^\infty(\Omega)$ então $\tilde{u} \in C_0^1(\Omega)$, pois estamos considerando $p \geqslant 2$. Substituindo $\tilde{u}$ em (3.8),

obtemos
$$\int_\Omega |u|^p \log u^p e^{-f} \mathrm{d}M \leqslant \frac{2p}{a} \int_\Omega |u|^{p-2} |\nabla u|^2 e^{-f} \mathrm{d}M. \tag{3.9}$$
Utilizando a desigualdade de Hölder no lado direito da desigualdade (3.9) obtemos
$$\int_\Omega |u|^p \log |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \leqslant \frac{2p}{a} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right)^{\frac{p-2}{p}}.$$
Utilizando a desigualdade de Young no lado direito da desigualdade acima, obtemos
$$\int_\Omega |u|^p \log |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \leqslant \frac{4}{a} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right) + \frac{2(p-2)}{a} \left(\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \right). \tag{3.10}$$
Por um argumento análogo ao feito por Cheng e Zhou [30], podemos mostrar que a desigualdade (3.10) vale para as funções $u \in C_0^\infty(\Omega)$ se, e somente se, vale para as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega, f)$.

Antes de provarmos a compacidade da imersão, vamos recordar alguns fatos da teoria da medida. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, com medida total finita $\mu(\Omega)$ e $L^p(\mu)$ o espaço de Banach das funções de valor real em Ω, mensuráveis e cuja $p-$ésima potência é μ-integrável.

Um subconjunto K de $L^1(\mu)$ é chamado uniformemente integrável se dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\sup\{\int_E |u| \mathrm{d}\mu : u \in K\} < \varepsilon$ sempre que $\mu(E) < \delta$. Iremos precisar do seguinte lema, cuja demosntração pode ser encontrada em Bogachev [17], Teorema 4.5.9.

Lema 3.6 (De La Vallée Poussin)**.** *Nas condições descritas acima, um subconjunto K de $L^1(\mu)$ é uniformemente integrável se, e somente se, existe uma função Q convexa e não-negativa, tal que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{Q(t)}{t} = \infty$ de forma que*
$$\sup\left\{ \int_\Omega Q(|u|) \mathrm{d}\mu : f \in K \right\} < \infty.$$

Suponha (M, g, f) uma variedade com peso completa e que tenha volume com peso finito. Considere $\Omega \subset M$ um domínio com ou sem bordo. Podemos pensar Ω como sendo um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, em que $\mathcal{F}$ é a sigma álgebra gerada pela métrica e μ é a medida dada por $\mu(\Omega) = \int_\Omega e^{-f} \mathrm{d}M$.

Teorema 3.7. *Seja (M, g, f) uma variedade com peso completa e que tenha volume com peso finito. Considerando $\Omega \subset M$ um domínio que admite uma desigualdade de Sobolev logarítmica* (3.10)*, então a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega, f) \subset L^p(\Omega, f)$ é um mergulho compacto.*

Demonstração. Comparando as normas, vemos que a aplicação identidade $W_0^{1,p}(\Omega, f) \to L^p(\Omega, f)$ é contínua e, portanto, um mergulho. Para verificar a compacidade, basta mostrarmos que qualquer sequência $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, limitada na norma $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega,f)}$, possui subsequência convergente na norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,f)}$. Da teoria clássica de espaços de Sobolev em variedades, sabemos que tal fato é verdade se Ω for compacto. Então, assumiremos que Ω não é compacto.

Seja $\{\Omega_i\}$ uma exaustão compacta de Ω com fronteira $\partial\Omega_i$ de classe C^1 para cada i. É conhecido que neste caso, a imersão $W_0^{1,p}(\Omega_i, f) \hookrightarrow L^p(\Omega_i, f)$ é compacta (ver Hebey e Robert [53]). Portanto, a sequência $\{u_k\}$, restrita a Ω_i, possui uma subsequência convergindo em $L^p(\Omega_i, f)$. Pela Teoria da medida, uma sequência convergindo na norma L^p possui uma subsequência convergindo q.t.p. Passando à sequencia diagonal, conseguimos uma subsequência de funções $\{u_k\}$, que ainda denotaremos por $\{u_k\}$, e uma função u definida em Ω, tal que $\{u_k\}$ converge q.t.p para u em Ω_i, para cada i, e portanto, converge em Ω. Pelo Lema de Fatou, $\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \leqslant \liminf \int_\Omega |u_k|^p e^{-f} \mathrm{d}M < \infty$.

Pela desigualdade de Sobolev logarítmica (3.10), temos que toda u_k satisfaz

$$\int_\Omega |u_k|^p \log |u_k|^p e^{-f}\mathrm{d}M \leqslant \frac{4}{a}\left(\int_\Omega |\nabla u_k|^p e^{-f}\mathrm{d}M\right)+\frac{2(p-2)}{a}\left(\int_\Omega |u_k|^p e^{-f}\mathrm{d}M\right). \tag{3.11}$$

Como cada u_k é limitada na norma $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega,f)}$, podemos encontrar uma constante C, de forma que tenhamos

$$\int_\Omega |u_k|^p \log |u_k|^p e^{-f}\mathrm{d}M \leqslant C.$$

Tomando $Q(t) = t\log t - a_0 \geqslant 0$, $t \in [0,+\infty)$, para algum $a_0 > 0$. Temos que $Q(t)$ e $\{u_k^p\}$ satisfazem as condições do Lema 3.6 e, portanto, $\{u_k^p\}$ é uniformemente integrável. Pelo Teorema de Ergorov (ver Teorema 7.12 de Bartle [11]) como $\{u_k\}$ converge a $\{u\}$ q.t.p e Ω tem medida finita, temos convergência em medida. Como a sequência $\{u_k\}$ é limitada na norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega,f)}$, também será na norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,f)}$. Assim, estamos nas condições do Teorema da convergência de Vitali (ver Teorema 7.13 de Bartle [11]) e portanto temos que $\int_\Omega |u_k - u|^p e^{-f}\mathrm{d}M \to 0$. Ou seja, $u_k \to u$ em $L^p(\Omega,f)$. O que mostra a compacidade do mergulho $W^{1,p}(\Omega_i,f) \hookrightarrow L^p(\Omega_i,f)$. □

3.3 Simetrização Gaussiana

Seja (M,g,f) uma variedade com peso e $\Omega \subset M$ um domínio. Definimos $\mathfrak{m}_0(\Omega,f)$, como sendo o subespaço de $\mathfrak{C}_0^p(\Omega,f)$ constituído pelas funções que tem pontos críticos não-degenerados contidos no interior de seu suporte, e ainda $\mathfrak{m}_0^+(\Omega,f)$ como sendo o subconjunto de $\mathfrak{m}_0(\Omega,f)$ formado pelas funções não-negativas. Temos, pelo Lema 1 de Aubin [5], que $\mathfrak{m}_0(\Omega,f)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega,f)$.

Definição 3.8 (Simetrização Gaussiana de funções)**.** Seja $u \in \mathfrak{m}_0^+(\Omega, f)$. Considerando os conjuntos $\Omega_t := \{x \in \Omega;\ u(x) > t\}$, vamos tomar uma correspondência entre Ω_t e uma família de semi-espaços $H(\alpha_t) \subset G^n$, de forma que $H(\alpha_t) = \Omega_t^* := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > \alpha_t\}$ satisfaz $\mathcal{V}_f(\Omega_t) = \mathcal{V}_\Psi(\Omega_t^*)$, para qualquer valor de t. Observe que, tomando a função real Φ, definida por

$$\Phi(x) = \int_x^\infty \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

temos que $\mathcal{V}_\Psi(\Omega_t^*) = \Phi(\alpha_t)$.

Seja

$$r : [0, \operatorname{ess\,sup} u] \to [\alpha_0, +\infty]$$

$$t \quad \longrightarrow \quad \alpha_t,$$

a correspondência entre os parâmetros, temos que $r = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_f(\Omega_t))$ é uma função crescente, contínua, e diferenciável nos mesmos pontos em que u é diferenciável (ver Berárd e Meyer [13], apêndice B). Por isso, podemos tomar sua inversa $u^\star = r^{-1}$. Se Π_1 é a projeção sobre a primeira coordenada de $\mathbb{R}^n$,

$$u^* = u^\star \circ \Pi_1$$

está bem definida e

$$u^*|_{\partial\Omega_t^*} = t.$$

Chamamos u^* de simetrização Gaussiana da função u.

Proposição 3.9. *Seja $u \in \mathfrak{m}_0^+(\Omega, f)$, temos que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \geqslant \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p e^{-\Psi}\, dx. \tag{3.12}$$

Demonstração. Vamos definir

$$\mathcal{V}_f(t) = Vol(\Omega_t) = Vol(u^{-1}(t, \infty)),$$

$$\mathcal{A}_f(t) = Vol_{n-1}(\partial\Omega_t) = Vol_{n-1}(u^{-1}(t)),$$

$$\mathcal{V}^*_\Psi(t) = Vol(\Omega^*_t) = \Phi(\lambda_t) = \int_{\lambda_t}^{\infty} \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

$$\mathcal{A}^*_\Psi(t) = Vol_{n-1}(\partial\Omega^*_t) = \frac{e^{\frac{-\alpha_t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Da fórmula da co-área (1.5), tomando um valor regular t de u, temos que

$$\mathcal{V}_f(t) = \int_{\Omega_t} e^{-f} \mathrm{d}M = \int_t^{\operatorname{ess\,sup} u} \mathrm{d}s \int_{u^{-1}(s)} |\nabla u|^{-1} e^{-f} \mathrm{d}A_s,$$

$$\mathcal{V}'_f(t) = -\int_{u^{-1}(t)} |\nabla u|^{-1} e^{-f} \mathrm{d}A_t.$$

Usando que $p \geqslant 2$, segue da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_{u^{-1}(t)} |\nabla u|^{p-1} e^{-f} \mathrm{d}A_t \geqslant & \left(\int_{u^{-1}(t)} 1^{1/p} e^{-f} \mathrm{d}A_t \right)^p \left(\int_{u^{-1}(t)} (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{1}{1-p}} e^{-f} \mathrm{d}A_t \right)^{1-p} \\
= & \big(\mathcal{A}_f(t)\big)^p \left(\int_{u^{-1}(t)} (|\nabla u|^{-1}) e^{-f} \mathrm{d}A_t \right)^{1-p} \\
= & \frac{(\mathcal{A}_f(t))^p}{[-\mathcal{V}'_f(t)]^{p-1}} \\
= & \frac{(\mathcal{A}_f(t))^p}{[-(\mathcal{V}^*_\Psi(t))']^{p-1}} \\
\geqslant & \frac{(A^*(t))^p}{[-(\mathcal{V}^*_\Psi(t))']^{p-1}} \\
= & \frac{\left(\dfrac{e^{\frac{-\alpha_t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)^p}{\left(\dfrac{e^{\frac{-\alpha_t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \alpha'_t \right)^{p-1}} \\
= & \int_{(u^*)^{-1}(t)} |\nabla u^*|^{p-1} e^{-\Psi} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue do Teorema 3.2. Usando a fórmula de co-área 1.5 e o fato de que o conjunto onde $u^\star$ não é diferenciável tem medida zero, podemos integrar ambos os lados da desigualdade de 0 para $\operatorname{ess\,sup} u$ obtendo (3.12). □

Proposição 3.10. *Seja $u \in \mathfrak{m}_0^+(\Omega, f)$, temos que*

$$\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M = \int_{\Omega^*} |u^*|^p e^{-\Psi} dx. \tag{3.13}$$

Com os mesmos argumentos de (3.12),

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p(\Omega,f)} &= \int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M \\
&= \int_0^{\operatorname{ess\,sup} u} \mathrm{d}s \int_{u^{-1}(t)} t^p |\nabla u|^{-1} e^{-f} \mathrm{d}A_t \\
&= -\int_0^{\operatorname{ess\,sup} u} t^p \mathcal{V}_f'(t) \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{\operatorname{ess\,sup} u} t^p (\mathcal{V}_\Psi^*(t))' \mathrm{d}t. \\
&= \|u^*\|^p_{L^p(\Omega^*,\Psi)}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Podemos obter uma desigualdade de Poincaré para uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega, f)$.

Proposição 3.11 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset M$ um domínio em M que tenha volume com peso $\mathcal{V}_f(\Omega)$ menor que* 1*. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega, f)$, então, existe uma constante C, dependendo apenas de Ω e da dimensão de M, de forma que $\|u\|_{L^p(\Omega,f)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega,f)}$*

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u \in \mathfrak{m}_0^+(\Omega, f)$, pois $|\nabla u| = |\nabla |u||$ q.t.p. Assim, combinando as equações (3.12) e (3.13) obtemos

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p e^{-f} \mathrm{d}M}{\int_\Omega |u|^p e^{-f} \mathrm{d}M} \geqslant \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p e^{-\Psi} \mathrm{d}x}{\int_{\Omega^*} |u^*|^p e^{-\Psi} \mathrm{d}x} = \frac{\displaystyle\int_{\alpha_0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} u^\star(x_1)\right)^p e^{-\frac{x_1^2}{2}} \mathrm{d}x_1}{\displaystyle\int_{\alpha_0}^{+\infty} u^\star(x_1)^p e^{-\frac{x_1^2}{2}} \mathrm{d}x_1}. \tag{3.15}$$

O quociente encontrado é limitado por uma constante, de acordo com o Teorema 1.3.1./2 de Maz'ja [63]. Pela densidade de $\mathfrak{m}_0(\Omega, f)$ em $W_0^{1,p}(\Omega, f)$, concluímos a demonstração. □

3.4 Demonstração do Teorema 3.3

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega, f)$ a primeira autofunção associada a $\lambda_{1,p}(\Omega, f)$. Como u é não-negativa, por densidade existe uma sequência $\{u_k\} \subset \mathfrak{m}_0^+(\Omega, f)$ que converge para u em $W_0^{1,p}(\Omega, f)$. Tomando u_k^* como sendo a simetrização Gaussiana de cada u_k e combinando as equações (3.12) e (3.13) obtemos

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u_k|^p e^{-f} \mathrm{d}M}{\int_\Omega |u_k|^p e^{-f} \mathrm{d}M} \geqslant \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_k^*|^p e^{-\Psi} \mathrm{d}x}{\int_{\Omega^*} |u_k^*|^p e^{-\Psi} \mathrm{d}x} \geqslant \lambda_{1,p}(\Omega^*, \Psi) \tag{3.16}$$

para todo k. Fazendo $k \to \infty$ do lado esquerdo, obtemos a desigualdade. $\square$

Capítulo 4

Superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing estritamente convexos

4.1 Introdução

Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana e Ω um domínio suave e compacto. Denotamos por $\partial\Omega$ e $\operatorname{int}\Omega$ a fronteira e o interior de Ω, respectivamente. Uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre em Ω é uma hiperfície imersa que satisfaz $\operatorname{int}\Sigma \subset \operatorname{int}\Omega$, $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ e encontra $\partial\Omega$ de maneira ortogonal ao longo de $\partial\Sigma$. Esse tipo de hiperfície é solução para o problema de encontrar pontos críticos do funcional área, entre todas as hiperfícies compactas $\Sigma \subset \Omega$ com $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ e $\operatorname{int}\Sigma \subset \operatorname{int}\Omega$, que dividem Ω em dois subconjuntos de volumes prescritos (ver Seção 4.4 para mais detalhes). Se uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre, $\Sigma \subset \Omega$, tem segunda variação de área não-negativa para todas as variações de área que preservam o volume, denominamos Σ como uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre estável. Para obter mais detalhes sobre as hiperfícies de curvatura média constante com bordo livre, consulte alguma das referências a seguir: Nunes [67], Ross [73], Ros e Vergasta [72] ou Souam [74].

Definição 4.1. Diremos que um domínio suave e compacto $\Omega \subset M$ é estritamente convexo se existir uma constante $c > 0$ tal que a segunda forma fundamental $\Pi^{\partial\Omega}$ da fronteira $\partial\Omega$ satisfaz $\Pi^{\partial\Omega} \geq c$.

Ros e Vergasta [72] e Barbosa [8] estudaram hiperfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em um domínio compacto estritamente convexo Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$. Combinando os resultados demonstrados em ambos, temos que, se Σ é estável e Ω é uma bola, então Σ é totalmente geodésica ou estrelada. Para o caso $n = 2$, estes resultados significam que Σ deve ser um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica. Este último resultado, para o caso $n = 2$, foi primeiramente provado por Nunes [67] usando uma abordagem diferente. Por outro lado, Li e Xiong [57] provaram que a única hiperfície de curvatura média constante com bordo livre estável do tipo Delaunay em uma bola Euclideana unitária é um hiperplano totalmente geodésico ou um calota esférica. Considerando-se novamente o caso $n = 2$, e assumindo que Ω é apenas um domínio estritamente convexo e compacto, Ros e Vergasta [72] provaram que, se Σ é uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre estável, então tem gênero 0 ou 1 e no máximo 3 componentes conexas no bordo.

Souam [74] estudou o mesmo problema no restante das formas espaciais simplesmente conexas, ou seja, a esfera e o espaço hiperbólico. Obtendo, entre outros resultados, que se Ω é uma bola de raio $r < \pi$ em $\mathbb{S}^3$ então, ou Σ é um disco totalmente umbílico ou tem gênero 1 no máximo 2 componentes conexas no bordo. Em [67], Nunes apontou que, no caso de uma bola geodésica em $\mathbb{S}^3$, de raio $r < \frac{\pi}{2}$, a possibilidade de Σ ter gênero 1 não acontece. Gostaríamos de dar uma nova demonstração para este fato.

Definiremos que um domínio $\Omega \subset M$ é de Killing, se existir um aberto $U \subset M$, com $\Omega \subset U$ e um referêncial ortonormal de Killing definido em U. Tal definição é inspirada em D'Atri e Nickerson [34], que definiram que uma variedade Riemanniana M possui a propriedade de Killing se, em alguma vizinhança de cada ponto de M, existe um referêncial ortonormal de Killing. Pela proposição 3.2 de D'Atri e Nickerson [34], temos que M possui curvatura seccional não-negativa.

Note que $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{S}^3$ possuem um referêncial ortonormal global de Killing. De maneira geral, qualquer grupo de Lie com uma métrica bi-invariante é paralelizável por um campo vetorial de Killing. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$, um referencial de Killing ortonormal e global é dado por $\{e_1, e_2, e_3\}$. Olhando $\mathbb{S}^3$ como subgrupo unitário dos quatérnios, os vetores tangentes $\{i, j, k\} \in T_1\mathbb{S}^3$ formam uma base ortonormal e sua extensão gera um referencial de Killing ortonormal. Em particular, qualquer domínio Ω contido em um grupo de Lie com métrica bi-invariante é um domínio de Killing.

Usando a existência deste referencial ortonormal de Killing e o fato da curvatura seccional ser não-negativa, podemos, baseando-se nas idéias de Nunes [67], provar o seguinte resultado.

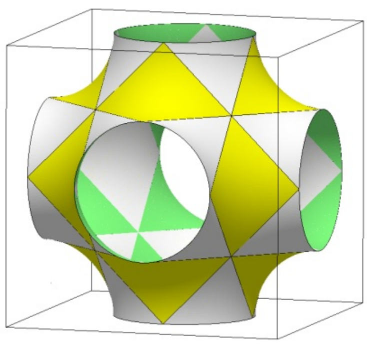
Teorema 4.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio de Killing compacto estritamente convexo. Se $\Sigma \subset \Omega$ for uma superfície de curvatura média constante com bordo livre estável imersa orientável e compacta, então Σ tem gênero 0 ou 1 e no máximo 3 componentes no bordo.*

Observação 4.3. Por um resultado de classificação (veja seção 4.3), nosso resultado aplica-se, de fato, aos espaços $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ e $SO(3)$.

Como consequência direta da demonstração do teorema acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $B \subset \mathbb{S}^3$ uma bola geodésica de raio $r < \frac{\pi}{2}$. Se $\Sigma \subset B$ é uma superfície de curvatura média constante com bordo livre estável em B, então Σ tem gênero 0. Concluímos então que Σ é um disco totalmente umbílico.*

É interessante mencionar que não podemos esperar melhorar o Teorema 4.2 no sentido de obter que o gênero é sempre 0 para todos os domínios em grupos de Lie bi-invariantes. De fato, Ross [73] mostrou que a P superfície mínima de Schwarz no tri-toro cúbico $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ é estável para variações que preservam volume e em [71], Ros mostrou que se tomarmos um pedaço dessa superfície entre dois planos horizontais consecutivos e simétricos, obtemos uma superfície que é ponto crítico do funcional área para variações que preservam volume e estável em $T^2 \times [0, 1/2]$, em que T^2 é o toro *flat* bidimensional gerado por $(1, 0)$, $(0, 1)$. Esta superfície tem gênero 1 e duas componentes no bordo. Abaixo segue uma representação dessa superfície feita por Ros [71]:



4.2 Campos de Killing

Um campo vetorial suave X, em uma variedade Riemanniana (M^{n+1}, g) é dito de Killing, se o fluxo local gerado por X age por isometrias ou, de maneira equivalente, se a derivada de Lie da métrica em relação a X é nula, ou seja $L_X g = 0$. Campos de Killing desempenharam um papel importante no estudo de hiperfícies em M, veja por exemplo: Fornari e Ripoll [44] e Espírito-Santo et al. [37]. Considerando Σ uma hiperfície orientada de M, N o campo normal unitário de Σ em M e X um campo de Killing em M, Fornari e Ripoll [44] mostraram que a função f, definida por

$$f(p) := \langle N(p), X(p) \rangle \, , \, p \in \Sigma,$$

satisfaz a seguinte equação

$$\Delta f = -n\langle V, \nabla H\rangle - (Ric(N, N) + |A|^2)f, \tag{4.1}$$

em que H é a curvatura média de Σ com respeito a N e ∇H seu gradiente. Em particular, se Σ tem curvatura média constante, então f satisfaz

$$\Delta f = -(Ric(N, N) + |A|^2)f. \tag{4.2}$$

4.3 Grupos de Lie

Nesta seção, vamos apresentar algumas definições e resultados básicos sobre os grupos de Lie. Um grupo de Lie $\mathbb{G}$ é ao mesmo tempo um grupo e uma variedade diferenciável, de forma que a aplicação de multiplicação $\mathbb{G}\times\mathbb{G} \to \mathbb{G}$ é suave, como também o é a aplicação $inv : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ que leva um elemento do grupo em seu inverso. Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ em um grupo de Lie $\mathbb{G}$ é dita invariante à esquerda se a translação à esquerda $L_a : G \to G$ é uma isometria, isto é,

$$\langle u, v\rangle_x = \langle (L_a)_* u, (L_a)_* v\rangle \; a, x \in \mathbb{G},\ u, v \in T_x\mathbb{G}.$$

Analogamente, uma métrica Riemanniana $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$ é invariante à direita se cada $R_b : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ é uma isometria, onde R_b é a translação à direita determinada por b. Uma métrica em $\mathbb{G}$ que é invariante à esquerda e à direita é chamada bi-invariante. Um resultado bem conhecido afirma que cada grupo de Lie compacto possui uma métrica bi-invariante (para uma demonstração deste fato veja a proposição 2.24 de Alexandrino e Bettiol [3]). Espírito-Santo, Fornari, Frensel e Ripoll [37] observaram que um grupo de Lie tridimensional e conexo $\mathbb{G}$, que admite uma métrica bi-invariante, deve ser, necessariamente, a esfera $\mathbb{S}^3$, o espaço projetivo $\mathbb{RP}^3 = SO(3)$ ou um grupo comutativo, ou seja, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ ou as variedades produto: $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Considerando ainda o caso em que $\mathbb{G}$ é um grupo Lie com uma métrica bi-invariante, as curvaturas tem expressões simplificadas. O tensor curvatura, o tensor curvatura de Riemann e a curvatura escalar em $\mathbb{G}$ são dados, respectivamente, pelas seguintes expressões

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$$

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \frac{1}{4}\langle [[X, Y], [W, Z]\rangle$$

$$K(X, Y) = \frac{1}{4}\frac{|[X, Y]|^2}{|X|^2|Y|^2},$$

em que $X, Y, Z, W \in \Gamma(\mathbb{G})$. Temos também que $\mathbb{G}$ é paralelizável por um campo vetorial de Killing e, pelo processo de Gram-Schmidt, obtemos uma referencial ortonormal de Killing global: existem $n + 1$ campos vetoriais de Killing $V_1, ..., V_{n+1}$ em $\mathbb{G}$ tal que, para cada $p \in M$, $\{V_1(p), ..., V_{n+1}(p)\}$ é uma base ortonormal para $T_p\mathbb{G}$. Considerando uma hiperfície imersa e orientada $\Sigma \subset \mathbb{G}$, se N é um campo normal unitário em Σ, temos

$$1 = |N|^2 = u_1^2 + ... + u_{n+1}^2\,,$$

em que, $u_i = \langle N, V_i \rangle$, $i = 1, ..., n+1$.

4.4 Caracterização variacional e estabilidade

No que segue (M^{n+1}, g) denotará uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio compacto. A intenção desta subseção é caracterizar variacionalmente o problema de encontrar pontos críticos do funcional área entre todas as hiperfícies compactas $\Sigma \subset \Omega$ com $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$ que dividem Ω em dois subconjuntos de volumes prescritos. As soluções para este problema são as hiperfícies de curvatura média constante com bordo livre.

Consideramos uma hiperfície compacta com bordo não vazio Σ e $\phi : \Sigma \to \Omega$ uma imersão própria, o que significa que ϕ envia int Σ em intΩ e $\partial\Sigma$ em $\partial\Omega$. Estamos interessados nas variações diferenciáveis da imersão ϕ, isto é, uma família a $1-$parâmetro de imersões próprias $\Phi_t : \Sigma \to \Omega$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\Phi_0 = \phi$. Isso é suficiente para que $\Phi_t(\Sigma)$ seja uma superfície suave. Tomando o pull-back por Φ_t, podemos calcular a área de cada superfície $\Phi_t(\Sigma)$, e criar a função área $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ que associa a cada número $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a área da hiperfície $\Phi_t(\Sigma)$, e é definida por:

$$\mathcal{A}(t) = \int_\Sigma \mathrm{d}a_t,$$

em que $\mathrm{d}a_t$ é o elemento de volume de Σ induzido pela métrica induzida por Φ_t. Como Σ é um ponto crítico do funcional área, devemos ter

$$\mathcal{A}'(0) = \int_\Sigma Hf\mathrm{d}a + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle \,\mathrm{d}l = 0, \tag{4.3}$$

Onde ν é o campo normal exterior ao longo de $\partial\Sigma$, dl o elemento de volume de $\partial\Sigma$ induzido por ϕ, H é a curvatura média de ϕ , X é o campo vetorial de variação de Φ definido em Ω por

$$X(p) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(p)\Big|_{t=0}$$

e $f = \langle X, N \rangle$ (N é o campo normal a Σ) é a componente normal do campo vetorial de variação. A condição imposta ao volume é equivalente a dizer que o volume entre Σ e $\Phi_t(\Sigma)$ em Ω é constante, ou seja, a função volume com sinal $\mathcal{V} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{V}(t) = \int_{[0,t]\times\Sigma} \Phi^* \mathrm{d}V = 0$$

é identicamente zero. Onde dV é o elemento de volume de G. Portanto, sua derivada em $t = 0$ é dada por

$$\mathcal{V}'(0) = \int_{\Sigma} f \mathrm{d}a = 0. \tag{4.4}$$

A variação é chamada normal se $X = fN$ e é dita ser estacionária se $\mathcal{A}'(0) = 0$ para qualquer variação própria que preserve o volume de ϕ. Segue de (4.3) e (4.4) que ϕ é estacionária se, e somente se, ϕ tem curvatura média constante e intercepta $\partial\Omega$ ortogonalmente.

Seja A a segunda forma fundamental de ϕ com respeito ao campo normal unitário fixado N, e seja $\Pi^{\partial\Omega}$ a segunda forma fundamental de $\partial\Omega$ em G em relação vetor normal unitário que aponta para dentro. Tomando a segunda derivada da função de área em $t = 0$, obtemos

$$\mathcal{A}''(0) = \int_{\Sigma} \{f\Delta f + (|A|^2 + Ric(N,N))f^2\}\mathrm{d}a + \int_{\partial\Sigma} \{f\frac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi^{\partial\Omega}(N,N)f^2\}\mathrm{d}l, \tag{4.5}$$

em que Δ é o laplaciano na métrica induzida por ϕ e $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}$ é a derivada de f na direcção do normal exterior ν. Pode-se mostrar (cf. Ros e Vergasta [72] e Barbosa e do Carmo [9]) que para cada função suave f em M com média zero, isto é $\int_\Sigma f \mathrm{d}a = 0$, existe uma variação normal que preserva volume ϕ com campo vetorial de variação fN. Dizemos que uma imersão estacionária $\phi : \Sigma \to \Omega$ é estável, se $\mathcal{A}''(0) \geqslant 0$ para todas as variações de volume de ϕ normais admissíveis. Seja $\mathcal{F} = \{f \in H^1(\Sigma), \int_\Sigma f \,\mathrm{d}a = 0\}$, em que $H^1(\Sigma)$ é o primeiro espaço de Sobolev de Σ, definimos a forma índice I de ϕ como a forma bilinear e simétrica em $H^1(\Sigma)$, definida por

$$I(f,g) = \int_\Sigma \{\langle \nabla f, \nabla g\rangle - (|A|^2 + Ric(N,N))fg\}\mathrm{d}a - \int_{\partial\Sigma} \Pi^{\partial\Omega}(N,N)fg\mathrm{d}l, \tag{4.6}$$

em que ∇f é o gradiente de f na métrica induzida por ϕ. Segue-se do que precede que a imersão estacionária ϕ é estável se, e somente se, $I(f,f) \geqslant 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

4.5 Superfícies de curvatura média constante com bordo livre estáveis em domínios de Killing

Seja (M,g) uma variedade Riemannaina de dimensão $(n+1)$ e $\Omega \subset M$ um domínio de Killing compacto estritamente convexo em M. Seja $\Sigma \subset \Omega$ uma hiperfície de curvatura média constante com bordo livre orientável, com N denotando o campo vetorial normal unitário de Σ em M. Definimos em Σ a seguinte família de funções:

$$\varphi_i = \langle V_i, N\rangle, \qquad i = 1, ..., n+1, \tag{4.7}$$

em que V_i é um referencial ortonormal de Killing em algum aberto $U \subset M$, com $\Omega \subset U$. Temos que

$$1 = |N|^2 = \varphi_1^2 + ... + \varphi_{n+1}^2$$

e a partir da equação (4.2), obtemos

$$\Delta\varphi_i = -(Ric_g(N, N) + |A|^2)\varphi_i \,. \tag{4.8}$$

Usando a equação acima podemos nos basear em Nunes [67], para obtermos a seguinte proposição.

Proposição 4.5. *Seja $\Omega \subset M^3$ um domínio de Killing compacto e estritamente convexo. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície propriamente imersa de curvatura média constante com bordo livre estável então,*

$$Q(\psi, \psi) = \int_\Sigma \{|\nabla\psi|^2 - (Ric_g(N, N) + |A|^2)\psi^2\}\mathrm{d}a \geqslant 0 \tag{4.9}$$

para qualquer função ψ que satisfaz $\psi = 0$ em $\partial\Sigma$.

Demonstração. Considerando um referencial ortonormal de Killing $\{V_1, V_2, V_3\}$ em um aberto $U \subset M$, com $\Omega \subset U$, definimos $\varphi_i(x) = \langle V_i, N(x)\rangle \,, x \in \Sigma$, para cada $i = 1, 2, 3$. Como V_i é campo de Killing, segue da equação (4.2) que

$$L\varphi_i = 0,$$

em que $L\varphi = \Delta\varphi - (Ric_g(N, N) + |A|^2)\varphi$ é o operador de Jacobi de Σ. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} Q(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{\partial\Sigma} \varphi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\mathrm{d}l - \int_{\partial\Omega} \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\varphi_i^2\mathrm{d}a \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} \frac{\partial}{\partial\nu}(\varphi_i^2)\mathrm{d}l - \int_{\partial\Omega} \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\varphi_i^2\mathrm{d}a \,, \end{aligned} \tag{4.10}$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Somando ao longo de $i = 1, 2, 3$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} Q(\varphi_i, \varphi_i) &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} \frac{\partial}{\partial\nu}(\sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2)\mathrm{d}l - \int_{\partial\Omega} \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\left(\sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2\right)\mathrm{d}a \\ &= -\textstyle\int_{\partial\Omega}\Pi^{\partial\Omega}(N, N)\mathrm{d}a < 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Então, existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $Q(\varphi_i, \varphi_i) < 0$. Em particular temos $\int_\Sigma \varphi_i \mathrm{d}a \neq 0$, por causa da estabilidade de Σ. Agora, seja v a primeira autofunção de L com condição de fronteira de Dirichlet , ou seja, $v = 0$ em $\partial\Sigma$. Após multiplicar v por uma constante, podemos supor que $\int_\Sigma \varphi_i da = \int_\Sigma v da$. Note que, como $v = 0$ em $\partial\Sigma$ e $Q(\varphi_i, \varphi_i) < 0$, temos que $v - \varphi_i \neq 0$. Logo, como Σ é uma superfície de curvatura média constante com bordo livre estável, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant Q(v - \varphi_i, v - \varphi_i) \\ &= Q(v, v) - 2Q(v, \varphi_i) + Q(\varphi_i, \varphi_i) \\ &< Q(v, v). \end{aligned} \tag{4.12}$$

□

4.6 Prova do Teorema principal

Demonstração. Utilizando um resultado de Gabard [45], que melhorou um resultado anterior devido a Alfhors [2], existe um *branched cover* conforme e próprio $\psi : \Sigma \to \mathbb{D}^2$, em que $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco fechado, unitário de grau no máximo $g + r$, onde g é o gênero de Σ e r é o número de componentes na fronteira $\partial\Sigma$. Como $\mathbb{D}^2$ é conformalmente equivalente à semi-esfera $\mathbb{S}^2_+ \subset \mathbb{R}^3$ de raio um, podemos assumir que $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \Sigma \to \mathbb{S}^2_+$. Mais ainda, usando um difeomorfismo conforme de $\mathbb{S}^2_+$, podemos supor que

$$\int_\Sigma \psi_i da = 0$$

para $i = 1, 2$ e $\psi_3 = 0$ em $\partial\Sigma$. Logo, obtemos

(a)

$$\int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N)\mathrm{d}l + \sum_{i=1}^{2}\int_{\Sigma}(Ric_g(N,N) + |A|^2)\phi_i^2\mathrm{d}a \leq \sum_{i=1}^{2}\int_{\Sigma}|\nabla\phi_i|^2\mathrm{d}a$$

(b)

$$\int_{\Sigma}(Ric_g(N,N) + |A|^2)\phi_3^2\mathrm{d}a \leq \int_{\Sigma}|\nabla\phi_3|^2\mathrm{d}a\,.$$

Denote por K e K_s respectivamente a curvatura intrínseca de Σ e a curvatura seccional de $\mathbb{G}$ avaliada no plano tangente a Σ. Pela equação de Gauss (1.5) temos $|A|^2 = 4H^2 + 2K_s - 2K$, o que implica (somando (a) e (b)),

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma}\Pi^{\partial\Omega}(N,N)\mathrm{d}l + \int_{\Sigma}(Ric_g(N,N) + 4H^2 + 2K_s)\mathrm{d}a &\leq \int_{\Sigma}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}a + 2\int_{\Sigma}K\mathrm{d}a \\ &\leqslant 4\pi(g+r) + 4\pi(2-2g-r) - 2\int_{\partial\Sigma}k_g\mathrm{d}l\,.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\Sigma}(Ric_g(N,N) + 2K_s)\mathrm{d}a + \int_{\partial\Sigma}\Pi^{\partial\Omega}(N,N)\mathrm{d}l + 2\int_{\partial\Sigma}k_g\mathrm{d}l + 4\int_{\Sigma}H^2\mathrm{d}a \leqslant 4\pi(2-g). \tag{4.13}$$

Uma vez que Ω é estritamente convexo e Σ é uma superfície de curvatura média constante com bordo livre, o lado esquerdo da desigualdade acima é estritamente positivo. Portanto, ou $g = 0$ ou $g = 1$. Finalmente, por um argumento análogo ao usado por Ros e vergasta [72], obtemos que $\partial\Sigma$ tem no máximo 3 componentes de fronteira. □

Como consequência direta, vamos a prova do Teorema 4.4.

Demonstração. Por Souam [74], o bordo $\partial B^2(r)$ da bola de raio r em $\mathbb{S}^3$ é uma esfera totalmente umbílica cuja curvatura média (em relação ao normal unitário exterior) é $\cot(r)$ e é estritamente convexa apenas para $r < \pi/2$.

Pelo lema 1.1 de Souam [74], a segunda forma fundamental de $\partial\Sigma$ em Σ com respeito a $-\nu$ é dada por $\cot(r)\langle\, ,\, \rangle$. Portanto, a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ em Σ em qualquer ponto é dada por $\cot(r)$. Como $\mathbb{S}^3$ é um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante, possui um referencial de Killing. A prova do teorema 4.2 funciona nesta configuração e a desigualdade (4.13) torna-se

$$3\cot(r)L(\partial\Sigma) + 4\int_{\Sigma}(1+H^2)\mathrm{d}a \leqslant 4\pi(2-g). \tag{4.14}$$

Observe que as condições deste teorema, satisfazem as hipóteses da proposição 1.2 de Souam [74] e portanto, temos a seguinte desigualdade isoperimétrica

$$\cot(r)L(\partial\Sigma) + \int_{\Sigma}(1+H^2)\mathrm{d}a \geqslant 2\pi. \tag{4.15}$$

Comparando as desigualdades (4.14) e (4.15), temos que o lado esquerdo da desigualdade (4.14) é maior ou igual a 6π, daí obtemos $g \leqslant \frac{1}{2}$. O que conclui a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] E. Abreu and E. Barbosa. A Faber–Krahn inequality for solutions of Schrödinger's equation on riemannian manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, pages 1–13, 2017.

[2] L. V. Ahlfors. Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Comment. Math. Helv.*, 24:100–134, 1950.

[3] M. M. Alexandrino and R. G. Bettiol. *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*. Springer, Cham, 2015.

[4] F. J. Almgren, Jr. and E. H. Lieb. Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4):683–773, 1989.

[5] T. Aubin. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry*, 11(4):573–598, 1976.

[6] D. Bakry and M. Émery. Diffusions hypercontractives. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–206. Springer, Berlin, 1985.

[7] D. Bakry and M. Ledoux. Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator. *Invent. Math.*, 123(2):259–281, 1996.

[8] E. Barbosa. On stable cmc hypersurfaces with free-boundary in a euclidean ball. *arXiv preprint arXiv:1607.00038*, 2016.

[9] J. L. Barbosa and M. do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185(3):339–353, 1984.

[10] J. L. Barbosa, M. do Carmo, and J. Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197(1):123–138, 1988.

[11] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995. Containing a corrected reprint of the 1966 original [ıt The elements of integration, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.

[12] V. Bayle. *Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2003.

[13] P. Bérard and D. Meyer. Inégalités isopérimétriques et applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):513–541, 1982.

[14] A. L. Besse. *Einstein manifolds*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.

[15] M. F. Betta, F. Chiacchio, and A. Ferone. Isoperimetric estimates for the first eigenfunction of a class of linear elliptic problems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 58(1):37–52, 2007.

[16] T. Bhattacharya. A proof of the Faber-Krahn inequality for the first eigenvalue of the p-Laplacian. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 177:225–240, 1999.

[17] V. I. Bogachev and M. Ruas. Measure theory, vol. 1, 2007.

[18] C. Borell. The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.*, 30(2):207–216, 1975.

[19] H.-D. Cao. Geometry of Ricci solitons. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 27(2):121–142, 2006.

[20] H.-D. Cao. Recent progress on Ricci solitons. *arXiv preprint arXiv:0908.2006*, 2009.

[21] K. Castro and C. Rosales. Free boundary stable hypersurfaces in manifolds with density and rigidity results. *J. Geom. Phys.*, 79:14–28, 2014.

[22] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.

[23] I. Chavel. *Riemannian geometry*, volume 98 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2006. A modern introduction.

[24] B.-Y. Chen. Riemannian submanifolds: a survey. *arXiv preprint arXiv:1307.1875*, 2013.

[25] Q.-M. Cheng and G. Wei. Complete λ-hypersurfaces of weighted volume-preserving mean curvature flow. *arXiv preprint arXiv:1403.3177*, 2014.

[26] X. Cheng, T. Mejia, and D. Zhou. Simons-type equation for f-minimal hypersurfaces and applications. *J. Geom. Anal.*, 25(4):2667–2686, 2015.

[27] X. Cheng, T. Mejia, and D. Zhou. Stability and compactness for complete f-minimal surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(6):4041–4059, 2015.

[28] X. Cheng and D. Zhou. Volume estimate about shrinkers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(2):687–696, 2013.

[29] X. Cheng and D. Zhou. Stability properties and gap theorem for complete f- minimal hypersurfaces. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 46(2):251–274, 2015.

[30] X. Cheng and D. Zhou. Eigenvalues of the drifted laplacian on complete metric measure spaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, 19(01):1650001, 2017.

[31] T. H. Colding and W. P. Minicozzi, II. *A course in minimal surfaces*, volume 121 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[32] I. Corwin. Differential geometry of manifolds with density. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 7(1):2, 2006.

[33] M. Dajczer. *Submanifolds and isometric immersions*, volume 13 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Based on the notes prepared by Mauricio Antonucci, Gilvan Oliveira, Paulo Lima-Filho and Rui Tojeiro.

[34] J. E. D'Atri and H. K. Nickerson. The existence of special orthonormal frames. *J. Differential Geometry*, 2:393–409, 1968.

[35] L. De Carli and S. M. Hudson. A Faber-Krahn inequality for solutions of Schrödinger's equation. *Adv. Math.*, 230(4-6):2416–2427, 2012.

[36] M. P. a. do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[37] N. do Espí rito Santo, S. Fornari, K. Frensel, and J. Ripoll. Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric. *Manuscripta Math.*, 111(4):459–470, 2003.

[38] P. Drábek, A. Kufner, and F. Nicolosi. *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities*, volume 5 of *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications.* Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1997.

[39] A. Ehrhard. Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 17(2):317–332, 1984.

[40] J. M. Espinar. Gradient schrödinger operators, manifolds with density and applications. *arXiv preprint arXiv:1209.6162*, 2012.

[41] G. Faber. *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt.* Verlagd. Bayer. Akad. d. Wiss., 1923.

[42] F. Feo. Simmetrizzazione gaussiana ed equazioni ellittiche. *Bollettino della Unione Matematica Italiana A*, 10, 01 2006.

[43] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(2):199–211, 1980.

[44] S. Fornari and J. Ripoll. Killing fields, mean curvature, translation maps. *Illinois J. Math.*, 48(4):1385–1403, 2004.

[45] A. Gabard. Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes. *Comment. Math. Helv.*, 81(4):945–964, 2006.

[46] A. Grigor'yan and L. Saloff-Coste. Surgery of the Faber-Krahn inequality and applications to heat kernel bounds. *Nonlinear Anal.*, 131:243–272, 2016.

[47] M. Gromov. Paul levy's isoperimetric inequality. *preprint IHES*, 1980.

[48] M. Gromov. Isoperimetry of waists and concentration of maps. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1):178–215, 2003.

[49] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, 97(4):1061–1083, 1975.

[50] A. Guionnet and B. Zegarlinski. Lectures on logarithmic Sobolev inequalities. In *Séminaire de Probabilités, XXXVI*, volume 1801 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–134. Springer, Berlin, 2003.

[51] R. S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. In *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 71 of *Contemp. Math.*, pages 237–262. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[52] R. S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, pages 7–136. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[53] E. Hebey and F. Robert. Sobolev spaces on manifolds. In *Handbook of global analysis*, pages 375–415, 1213. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008.

[54] S. Kesavan. *Symmetrization & applications*, volume 3 of *Series in Analysis.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[55] E. Krahn. über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. *Math. Ann.*, 94(1):97–100, 1925.

[56] S. G. Krantz and H. R. Parks. *The geometry of domains in space.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[57] H. Li and C. Xiong. Stability of capillary hypersurfaces in a euclidean ball. *arXiv preprint arXiv:1408.2086*, 2014.

[58] A. Lichnerowicz. Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 271:A650–A653, 1970.

[59] A. Lichnerowicz. Variétés kählériennes à première classe de Chern non negative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non negative. *J. Differential Geometry*, 6:47–94, 1971/72.

[60] F. J. López and A. Ros. Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 64(1):34–43, 1989.

[61] L. Ma and S.-H. Du. Extension of Reilly formula with applications to eigenvalue estimates for drifting Laplacians. *Comptes Rendus Mathematique*, 348(21-22):1203–1206, 2010.

[62] A.-M. Matei. First eigenvalue for the p-Laplace operator. *Nonlinear Anal.*, 39(8, Ser. A: Theory Methods):1051–1068, 2000.

[63] V. G. Maz'ja. *Sobolev Spaces.* Springer Berlin Heidelberg, 1985.

[64] M. McGonagle and J. Ross. The hyperplane is the only stable, smooth solution to the isoperimetric problem in Gaussian space. *Geom. Dedicata*, 178:277–296, 2015.

[65] F. Morgan. Manifolds with density. *Notices Amer. Math. Soc.*, 52(8):853–858, 2005.

[66] F. Morgan. *Geometric measure theory.* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 5th edition, 2016. A beginner's guide, Illustrated by James F. Bredt.

[67] I. Nunes. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. *Mathematische Zeitschrift*, pages 1–7, 2016.

[68] F. Olivares Contador. The faber–krahn inequality for the first eigenvalue of the fractional dirichlet p-laplacian for triangles and quadrilaterals. *Pacific Journal of Mathematics*, 288(2):425–434, 2017.

[69] P. Petersen and W. Wylie. On the classification of gradient Ricci solitons. *Geom. Topol.*, 14(4):2277–2300, 2010.

[70] J. W. S. Rayleigh, Baron. *The Theory of Sound.* Dover Publications, New York, N. Y., 1945. 2d ed.

[71] A. Ros. Stability of minimal and constant mean curvature surfaces with free boundary. *Mat. Contemp.*, 35:221–240, 2008.

[72] A. Ros and E. Vergasta. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geom. Dedicata*, 56(1):19–33, 1995.

[73] M. Ross. Schwarz' P and D surfaces are stable. *Differential Geom. Appl.*, 2(2):179–195, 1992.

[74] R. Souam. On stability of stationary hypersurfaces for the partitioning problem for balls in space forms. *Math. Z.*, 224(2):195–208, 1997.

[75] V. N. Sudakov and B. S. Tsirel'son. Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 41:14–24, 165, 1974. Problems in the theory of probability distributions, II.

[76] P. Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1):126–150, 1984.

[77] N. S. Trudinger. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20:721–747, 1967.

[78] J. Van der Veken and L. Vrancken. Parallel and semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 39(3):355–370, 2008.

[79] M. Vieira and D. Zhou. Geometric properties of self-shrinkers in cylinder shrinking ricci solitons. *The Journal of Geometric Analysis*, pages 1–20, 2016.

[80] G. Wang and C. Xia. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *arXiv preprint arXiv:1708.06861*, 2017.

[81] L.-f. Wang and Y.-p. Zhu. A sharp gradient estimate for the weighted p-laplacian. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 27(4):462–474, 2012.

[82] Y.-Z. Wang and H.-Q. Li. Lower bound estimates for the first eigenvalue of the weighted p-laplacian on smooth metric measure spaces. *Differential Geometry and its Applications*, 45:23–42, 2016.

[83] G. Wei and W. Wylie. Comparison geometry for the bakry-emery ricci tensor. *arXiv preprint arXiv:0706.1120*, 2007.