

Eduardo Tadeu Stehling Saraiva

IDENTIFICAÇÃO DE UMA PLANTA PILOTO DE FLOTAÇÃO EM COLUNA

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Dr. Luis Antonio Aguirre

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte / MG

1999

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar a aplicação de técnicas de identificação de sistemas dinâmicos não lineares na obtenção de modelos NARMAX (nonlinear auto-regressive moving average with exogenous inputs) polinomiais multivariáveis de uma planta piloto de flotação em coluna do Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN. Flotação em coluna é atualmente uma das tecnologias mais empregadas no beneficiamento de minérios. No Brasil, e em diversas partes do mundo, ela tem se destacado pela eficiência e versatilidade na produção de concentrados minerais puros.

O trabalho pode ser dividido em três partes. Na primeira parte, que vai do primeiro ao terceiro capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica dos assuntos tratados na dissertação: *modelagem de sistemas, flotação em coluna e identificação de sistemas não lineares*. A segunda parte, composta pelo capítulo 4 e apêndice B, é dedicada à *identificação de sistemas não lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO)*. Nesta parte, os conceitos sobre identificação de sistemas com entrada única e saída única (SISO), abordados no capítulo 3, são estendidos aos sistemas MIMO. O capítulo 4 apresenta a base teórica a partir da qual foram desenvolvidas as rotinas computacionais utilizadas nos procedimentos de identificação MIMO. No apêndice B são mencionadas essas rotinas. Na terceira parte, composta pelos capítulos 5 e 6 e apêndice A, são apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação das técnicas de identificação sobre a planta piloto de flotação em coluna. No capítulo 5 e apêndice A são descritos os testes realizados e apresentados e analisados os melhores modelos obtidos. Estes modelos têm como entradas o *signal de controle de velocidade da bomba de não flotado da coluna*, a *vazão de água de lavagem* e a *vazão de alimentação de ar*. As variáveis de saída são a *pressão superior* e a *pressão inferior na seção de concentração*. No capítulo 6 são tecidas conclusões sobre os resultados obtidos.

Abstract

The aim of the present work is to investigate the application of nonlinear identification techniques to a pilot column flotation which belongs to Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear (CDTN). The flotation column technique used by the pilot plant is commonly used in ore beneficiation both in Brazil and other countries. This technique is well known for its efficiency and versatility in produce clean concentrates. The model representation used is multivariable nonlinear autoregressive, moving average models with exogenous inputs (NARMAX) of the polynomial type.

The present work can be divided in three parts. The first one, composed by chapters one to three, presents a brief survey on system modeling, column flotation and nonlinear system identification. The second part, composed by chapter four and appendix B, is devoted to identification of multiple input multiple output (MIMO) systems. The basis of identification of single input single output (SISO) systems described in chapter three is extended to MIMO systems in chapter four. The computational routines derived of that theory and used in this work are presented in appendix B. The last part, composed by chapters five, six and appendix A, presents the main results obtained by applying identification techniques to the pilot plant. In chapter five and appendix A the dynamical testing of the plant is described as well as the best identified models. Inputs are the signal that controls the tailing flow pumps, wash water flow and air flow. The model outputs are the pressure values at the measuring points in the collection zone. The main conclusions are presented in chapter six.

ÍNDICE ANALÍTICO

Resumo.....	i
Abstract.....	ii
Agradecimentos	iii
Índice Analítico.....	v
Lista de Figuras.....	viii
1. Introdução	
1.1 Modelagem de sistemas dinâmicos	1
1.1.1 Representação do conhecimento	2
1.1.2 Uso de modelos.....	3
1.2 Motivação do trabalho	4
1.3 Atividades realizadas durante a dissertação	5
1.4 Organização do trabalho.....	6
2. Flotação em coluna	
2.1 Introdução	7
2.2 Histórico da coluna de flotação	9
2.3 O processo de flotação	10
2.3.1 Mecanismo de separação das partículas minerais	10
2.3.2 Etapas de preparação do minério.....	11
2.3.3 Reagentes químicos utilizados no processo de flotação.....	12
2.3.4 Fatores físicos que influenciam o processo de flotação.....	14
2.4 Características de funcionamento da coluna de flotação	16
2.4.1 Seção de concentração	17
2.4.2 Seção de limpeza	18
2.5 Parâmetros da flotação em coluna.....	18
2.5.1 Fluxo e <i>holdup</i> de ar	19
2.5.2 Tamanho das bolhas	21
2.5.3 Fluxo de água de lavagem e <i>bias</i>	21
2.5.4 Altura da camada de espuma.....	22
2.5.5 Tempo médio de residência das partículas minerais.....	23
2.5.6 Percentagens de sólidos na alimentação da polpa.....	23
2.6 Medição de variáveis da flotação em coluna.....	24

2.6.1	Medição da altura da camada de espuma.....	24
2.6.2	Medição do <i>holdup</i> do ar	25
2.6.3	Medição do <i>bias</i>	25
2.7	Estratégias de controle aplicadas em colunas de flotação.....	26
2.7.1	Controle estabilizante de colunas de flotação.....	27
2.7.2	Controle otimizante de colunas de flotação	27
2.8	Modelagem do processo de flotação em coluna	28
2.9	A coluna de flotação de 2" do CDTN.....	29
2.9.1	Sistema de controle e monitoração da coluna.....	33
2.9.2	Alimentação de polpa de minério.....	34
2.9.3	Alimentação de ar	35
2.9.4	Alimentação de água de lavagem.....	35
2.9.5	Descarga de flotado e de não flotado	36
2.10	Considerações finais	37
3.	Identificação de sistemas não lineares	
3.1	Introdução	39
3.2	Identificação de sistemas	40
3.2.1	Experimentação do sistema e aquisição dos dados	41
3.2.1.1	Sinais de teste.....	41
3.2.1.2	Seleção do período de amostragem para a aquisição de dados	42
3.2.1.3	Seleção do período de amostragem para manipulação dos dados coletados	42
3.2.1.4	Ruído nos dados	44
3.2.2	Detecção de não linearidades	45
3.2.3	Escolha da estrutura do modelo	47
3.2.4	Detecção da estrutura	50
3.2.5	Estimação de parâmetros	52
3.2.6	Critérios de informação.....	54
3.2.7	Validação dos modelos.....	55
3.3	Considerações finais	59
4.	Identificação de sistemas não lineares MIMO	
4.1	Introdução	62
4.2	Representação dos sistemas MIMO	63

4.3	Detecção da estrutura e estimação de parâmetros de sistemas MIMO.....	65
4.3.1	Uso da Transformação de Householder na solução do problema de mínimos quadrados.....	68
4.3.2	Detecção de estrutura utilizando o ERR.....	71
4.3.3	Estimação de parâmetros.....	76
4.4	Validação de modelos MIMO.....	76
4.5	Considerações finais.....	77
5.	Modelos identificados para a coluna de flotação de 2" do CDTN	
5.1	Introdução.....	79
5.2.	Seleção das variáveis de entrada e saída dos modelos.....	80
5.3	Descrição dos testes.....	81
5.3.1	Aplicação dos sinais de teste.....	82
5.3.2	Taxa de amostragem dos sinais.....	85
5.4	Apresentação dos dados.....	85
5.5	Apresentação dos modelos.....	90
5.5.1	Equações dos modelos identificados.....	91
5.5.2	Validação dos modelos identificados.....	94
5.5.3	Índice de qualidade dos modelos.....	114
5.6	Análise dos resultados.....	115
5.6.1	Análise das equações dos modelos.....	115
5.6.2	Análise dos gráficos de validação.....	116
5.6.3	Obtenção de um modelo simplificado m2p_s.....	117
5.7	Considerações finais.....	123
6.	Conclusões.....	125
	Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados.....	128
	Apêndice B: Rotinas computacionais de identificação de sistemas MIMO.....	153
	Referências bibliográficas.....	161

Lista de figuras

Figura 2.1: Representação esquemática de uma coluna de flotação.

Figura 2.2: Relação entre a velocidade superficial específica do ar e o *holdup* do ar.

Figura 2.3: Fluxograma da coluna de flotação de 2" do CDTN.

Figura 2.4: Vista da coluna de flotação de 2" do CDTN.

Figura 2.5: Vista da instrumentação da coluna de flotação de 2" do CDTN. São mostrados os circuitos de alimentação de água de lavagem e a entrada de polpa de minério.

Figura 2.6: Vista da instrumentação da coluna de flotação de 2" do CDTN. São mostrados os circuitos de alimentação de ar e descarga de não flotado.

Figura 5.1: Perfis dos sinais de excitação utilizados no teste t25:

- (a) velocidade da bomba de não flotado;
- (b) abertura da válvula de controle de vazão de água de lavagem.

Figura 5.2: Perfis dos sinais de excitação utilizados no teste t26:

- (a) velocidade da bomba de não flotado;
- (b) abertura da válvula de controle de vazão de água de lavagem.

Figura 5.3: Sinais de entrada e saída obtidos no teste t25 e utilizados na obtenção dos modelos:

- (a) velocidade da bomba de não flotado (u_1);
- (b) vazão de água de lavagem (u_2);
- (c) vazão de ar (u_3);
- (d) pressão no ponto superior da seção de concentração da coluna (y_1);
- (e) pressão no ponto inferior da seção de concentração da coluna (y_2).

Figura 5.4: Sinais de entrada e saída obtidos no teste t25 e utilizados na validação dos modelos:

- (a) velocidade da bomba de não flotado (u_1);
- (b) vazão de água de lavagem (u_2);
- (c) vazão de ar (u_3);
- (d) pressão no ponto superior da seção de concentração da coluna (y_1);
- (e) pressão no ponto inferior da seção de concentração da coluna (y_2).

Figura 5.5: Sinais de entrada e saída obtidos no teste t26 e utilizados na validação dos modelos:

- (a) velocidade da bomba de não flotado (u_1);
- (b) vazão de água de lavagem (u_2);
- (c) vazão de ar (u_3);
- (d) pressão no ponto superior da seção de concentração da coluna (y_1);
- (e) pressão no ponto inferior da seção de concentração da coluna (y_2).

Figura 5.6. Comparação entre os sinais de controle de velocidade enviados para a bomba de não flotado e os sinais obtidos através da medição manual de vazão de não flotado durante o teste t25:

- (a) velocidade da bomba de não flotado;
- (b) vazão de não flotado medida manualmente.

Figura 5.7. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m1o:

- (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);
- (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.8. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m1o:

- (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);
- (b) *holdup* do ar (E_g).

Figura 5.9. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m1o:

- (a) altura da camada de espuma (h_{esp}), utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição;
- (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

Figura 5.10. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m1o:

- (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);
- (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.11. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m1o:

- (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);
- (b) *holdup* do ar (Eg).

Figura 5.12. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m1o:

- (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição;
- (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

Figura 5.13. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j:

- (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);
- (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.14. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j:

(a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);

(b) *holdup* do ar (E_g).

Figura 5.15. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j:

(a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição;

(b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

Figura 5.16. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j:

(a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);

(b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.17. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j:

(a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);

(b) *holdup* do ar (E_g).

Figura 5.18. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j:

(a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição;

(b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

Figura 5.19. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

- (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);
- (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.20. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

- (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);
- (b) *holdup* do ar (E_g).

Figura 5.21. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

- (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição;
- (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

Figura 5.22. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

- (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);
- (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.23. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

- (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);
- (b) *holdup* do ar (E_g).

Figura 5.24. Comparação entre os valores dos sinais coletados no teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

- (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição;

(b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

Figura 5.25. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p_s:

(a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);

(b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

Figura 5.26. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p:

(a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$);

(b) *holdup* do ar (E_g).

Figura 5.27. Comparação entre os valores de altura da camada de espuma (h_{esp}) coletados no teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p_s:

Capítulo 1

Introdução

1.1 Modelagem de sistemas dinâmicos

A tarefa de manipular, armazenar e transmitir o conhecimento sobre qualquer assunto pode ser facilitada quando o conjunto de informações disponibilizado é organizado e transformado em um modelo. Modelos são abstrações utilizadas nas mais diversas áreas do conhecimento humano, seja em áreas da física, biologia, sociologia ou economia (Bosch and Klauw, 1994; Garcia, 1997). No âmbito dos sistemas dinâmicos, um modelo pode tomar a “forma” de uma equação matemática, uma representação gráfica ou até mesmo de um conjunto de regras heurísticas. Qualquer que seja o formato, o modelo sempre reflete a percepção e o entendimento do modelador acerca do sistema modelado.

A construção de modelos é uma parte importante do trabalho científico, sendo tipicamente um processo iterativo. Refinando-se sucessivamente um primeiro modelo base e utilizando-se critérios de avaliação de desempenho, busca-se derivar uma representação cujo comportamento se aproxime do comportamento observado no sistema (Bosch and Klauw, 1994).

Quando o conhecimento sobre o fenômeno em estudo está bem assimilado, é possível, a partir de considerações teóricas, estabelecer um modelo funcional plausível. Modelos assim derivados são normalmente baseados em leis físicas expressas diretamente através de equações algébricas ou diferenciais (Leitch, 1987; Bosch and Klauw, 1994). Contudo, existem várias situações onde os mecanismos que governam um fenômeno

não são suficientemente bem entendidos, ou são muito complexos para se estabelecer um modelo a partir da teoria sobre o assunto. Nestes casos, modelos empíricos podem ser muito úteis, principalmente se o foco de interesse do trabalho está concentrado em uma faixa limitada de variáveis. Uma das técnicas de derivação de modelos empíricos é a *Identificação de Sistemas*, assunto principal deste trabalho que será extensamente discutido ao longo da dissertação (Norton, 1986; Ljung, 1987; Bosch and Klauw, 1994).

1.1.1 Representação do conhecimento

Um ponto chave na modelagem é a determinação do nível de abstração (símbolos ou números) adequado para representar as dinâmicas do sistema (Leitch, 1987). O nível de abstração irá definir a *unidade de representação fundamental* (primitiva) do conhecimento que será empregada. Além disso, a modelagem pode ser realizada utilizando-se um nível de detalhamento maior ou menor de informações. O nível de detalhamento determina a *granularidade* (resolução) das informações presentes no modelo. Desta forma, um modelo pode descrever um sistema segundo duas dimensões: abstração e detalhamento. Definido o nível de abstração deve então ser escolhido o *formalismo da representação*.

Na área de estudo do chamado “controle moderno de sistemas” são utilizadas como primitivas da modelagem as funções de valores numéricos reais em tempo contínuo ou tempo discreto. A resolução das informações contidas no modelo é dada pela ordem dos termos constituintes. Quanto ao formalismo na representação do conhecimento, podem ser utilizadas a representação por espaço de estados, funções de transferência, ou funções de resposta em frequência, dentre outras representações. Na área dos “sistemas baseados no conhecimento”, a primitiva da modelagem é o símbolo, {+, 0, -}, indicando se a observação é positiva, zero ou negativa. A resolução das informações contidas no modelo é determinada pelo tamanho da base de

conhecimento que relaciona as variáveis simbólicas. O formalismo na representação pode utilizar recursos da área de inteligência artificial como, por exemplo, redes neurais artificiais (Zurada, 1992), lógica nebulosa (Klir and Yuan, 1995) e algoritmos genéticos (Michell, 1998).

Embora seja de grande importância, a capacidade de reproduzir com precisão a dinâmica do sistema não é o único fator preponderante na avaliação da utilidade de um modelo. Também de grande relevância é o grau de simplicidade, ou seja, quanto mais simples for o modelo, mais fácil é a sua manipulação. Neste caso, uma das diretrizes que deve ser seguida na modelagem é tentar explicar a dinâmica de interesse em termos de um conjunto de variáveis facilmente analisáveis e que caracterizem somente eventos essenciais do sistema (Leitch, 1987; Bosch and Klauw, 1994).

1.1.2 Uso de modelos

Uma das áreas de maior aplicação de modelos é a área de *simulação de sistemas*, principalmente a simulação através computadores digitais. Simulação é uma ferramenta computacional de obtenção da resposta temporal das variáveis de interesse de um modelo quando se excita suas variáveis de entrada com sinais desejados e se definem os valores das condições iniciais das variáveis dependentes (Garcia, 1997).

Alguns exemplos onde a simulação pode se tornar proveitosa ou, até mesmo essencial, são (Bosch and Klauw, 1994):

- *restrições na experimentação do sistema real*, como, por exemplo, risco de acidentes (geração de calor em reatores nucleares), alto custo financeiro (movimento de satélites em órbita), dinâmicas muito rápidas ou muito lentas (fenômenos físicos em átomos, crescimento populacional), dentre outras;

- *predição de dados*, como, por exemplo, a previsão das condições climáticas;
- *solução numérica* em problemas onde a solução analítica é difícil ou mesmo impossível de ser encontrada;
- *projeto de sistemas de controle*.

1.2 Motivação do trabalho

Flotação é atualmente uma das tecnologias mais versáteis e eficientes empregadas no beneficiamento de minérios. A sua utilização tem permitido a exploração de minérios de baixos teores e jazidas de composição mineralógica complexa, que de outra forma teriam sido considerados sem valor econômico.

A Supervisão de Processos do Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear (CDTN) vem trabalhando, desde 1985, no desenvolvimento da tecnologia de flotação em coluna. No estágio atual de desenvolvimento destes trabalhos, tem-se manifestado o interesse de aprofundar os estudos na área de instrumentação e controle de colunas de flotação. Neste contexto, surgiu a oportunidade de realizar uma dissertação de mestrado na linha de pesquisa de *Identificação de Sistemas*. Neste trabalho, são utilizadas técnicas de identificação de sistemas dinâmicos não lineares na obtenção de modelos NARMAX (nonlinear auto-regressive moving average with exogenous inputs) polinomiais multivariáveis da coluna piloto de flotação de 2" do CDTN. A partir dos modelos matemáticos obtidos, pretende-se extrair informações a respeito da coluna que permitam prever e analisar o seu comportamento sob diversas condições de operação. O conhecimento daí resultante poderá ser aplicado de diversas maneiras, destacando-se aqui, o aprimoramento das estratégias de controle já existentes ou o desenvolvimento de novas estratégias de controle.

1.3 Atividades realizadas durante a dissertação

As atividades realizadas durante a dissertação podem ser divididas em três grupos: *modificação de rotinas computacionais de identificação, instrumentalização da coluna de flotação do CDTN e identificação da coluna*. O cerne da dissertação se encontra no terceiro grupo de atividades. Contudo, a execução dos dois primeiros grupos foi de grande relevância na medida em que elas viabilizaram a identificação multivariável da coluna (três sinais de entrada e dois sinais de saída). Caso estas atividades não tivessem sido executadas a dissertação estaria restrita a uma identificação monovariável (apenas um sinal de entrada e um sinal de saída).

No início dos trabalhos, tinha-se disponível um conjunto de treze rotinas computacionais que poderiam ser usadas somente na identificação de sistemas SISO (sistemas com uma única entrada e uma única saída) (Mendes e Aguirre, 1995). Para que o seu escopo de utilização fosse estendido para os sistemas MIMO (sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas), foram adequadas oito dessas rotinas. As modificações preservaram a estrutura básica das rotinas, concentrando-se principalmente no aumento da capacidade de manipulação de um elenco maior de combinações de vetores de sinais. Estas rotinas estão descritas no apêndice B. Além deste trabalho, o conjunto de rotinas de identificação MIMO também foi utilizado em outra dissertação do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFMG (Barros, 1997).

Com o intuito de dotar a coluna de flotação com os equipamentos adequados à execução dos procedimentos de identificação MIMO, foram acrescentados às linhas de ar e de água de lavagem da coluna instrumentos de medição e controle, com interfaceamento externo de sinais no padrão de corrente 4-20 mA. Nesta etapa do trabalho foram realizadas a especificação, compra, instalação e comissionamento de duas válvulas de controle de vazão e dois transmissores de vazão (um par transmissor/válvula para cada linha).

1.4 Organização do trabalho

O texto da dissertação está organizado em 6 capítulos. Este primeiro capítulo tem como objetivo definir o escopo do assunto tratado na dissertação, relatar as principais atividades executadas durante o trabalho e relacionar os tópicos abordados nos capítulos seguintes.

O assunto tratado no capítulo 2 é a *flotação em coluna*. São apresentados os principais conceitos referentes ao processo de flotação, focalizando, em especial, a *coluna de flotação canadense*, que foi objeto da aplicação das técnicas de identificação neste trabalho.

O capítulo 3 trata da identificação de sistemas não lineares, abordando os principais tópicos relativos aos procedimentos utilizados. Os conceitos apresentados tomam como referência a identificação de sistemas SISO. Esse capítulo serve de base para o capítulo 4, que trata da identificação de sistemas não lineares MIMO.

O capítulo 5 trata da identificação da coluna de flotação de 2" do CDTN. São apresentados os testes realizados para a coleta de dados, os modelos obtidos a partir da aplicação das rotinas de identificação, e, ao final, são analisados os resultados obtidos.

O capítulo 6 é dedicado às considerações gerais acerca do trabalho executado, aos resultados obtidos e às sugestões de trabalhos futuros.

Além dos seis capítulos, constam também do texto dois apêndices. No apêndice A são apresentados os gráficos de validação estatística dos modelos obtidos. No apêndice B são mencionadas as rotinas computacionais de identificação MIMO utilizadas.

Capítulo 2

Flotação em coluna

2.1 Introdução

Um dos impactos sobre o setor mineral advindos do consumo crescente de produtos industrializados tem sido a exaustão de minérios de teor elevado. Nas duas últimas décadas, novos equipamentos e tecnologias de beneficiamento de minérios têm sido desenvolvidos em função da necessidade de processar minérios de baixo teor ou de concentração mais complexa. Dentre as diversas tecnologias de beneficiamento, a *flotação* tem sido o processo de concentração mineral mais utilizado (Oliveira e Aquino, 1992). O processo de flotação em coluna tem adquirido um papel importante na área de processamento mineral em virtude da sua capacidade de produzir concentrados mais puros, com custo operacional e de capital relativamente baixos (Del Villar *et alii*, 1994).

O desenvolvimento da tecnologia de flotação tem sido impulsionado, substancialmente, pelos avanços alcançados pelas máquinas de flotação, destacando-se dentre elas a *coluna de flotação*. Comparativamente mais eficientes que as células mecânicas, as colunas de flotação têm sido introduzidas em várias plantas de beneficiamento de minérios (Murdock *et alii*, 1991; Aquino, 1992). Em algumas aplicações, um estágio de concentração constituído por uma única coluna é capaz de substituir vários estágios de células mecânicas. Quando o minério é de concentração mais complexa, ou quando se deseja um produto com melhor qualidade, é necessária a utilização de mais de um estágio de flotação em coluna.

Além de ser amplamente empregado na área mineral, o processo de flotação também tem sido aplicado em diversas outras áreas. Como exemplos, podem ser citados o beneficiamento de cereais (Mourad *et alii*, 1997), o tratamento primário e secundário de efluentes de água e esgoto doméstico (Gnirss *et alii*, 1996), a drenagem de minas ácidas (Leppinen *et alii*, 1997), o tratamento de águas residuais provenientes do processamento das indústrias têxteis (Lin e Lo, 1996), de papel (Chen e Horan, 1998), de couro (Ros e Gantar, 1998), gráfica (Naujock *et alii*, 1992) e carnes (Guerrero *et alii*, 1998) e o tratamento de resíduos de óleo em processos da área petrolífera (Stefess, 1998).

Neste capítulo serão abordados os principais tópicos relativos à tecnologia de flotação em coluna aplicada ao beneficiamento de minérios. O foco deste estudo será a coluna de flotação conhecida como *coluna canadense*, patenteada no início da década de 60 por Boutin e Tremblay (Wheeler, 1966; Boutin e Wheeler, 1967). Outros projetos de colunas tais como a *Norton-Leeds* (Dell e Jenkins, 1976), *células Flotaire* (Zipperian e Svensson, 1988), *célula Jameson* (Jameson, 1988) e a “*packed bed column*” (Yang, 1988), dentre outras, não serão aqui estudados. O método de flotação que será discutido é a *flotação em espuma*. Tecnologias concorrentes como as de flotação em óleo e flotação pelicular estão atualmente obsoletas em vista de severas limitações de aplicação (Guimarães, 1995). Em função do grau avançado de desenvolvimento alcançado pela tecnologia de flotação em espuma e da obsolescência das demais tecnologias de flotação, a expressão *flotação* passou a designar exclusivamente flotação em espuma.

2.2 Histórico da coluna de flotação

Descreve-se a seguir, de forma bem sucinta, o histórico da coluna de flotação canadense.

A coluna de flotação foi patenteada pelos cientistas canadenses P. Boutin e R. Tremblay em 1961 (patentes canadenses 680.576 e 694.547). As primeiras descrições da sua aplicação foram feitas por P. Boutin e D. A. Wheeler na segunda metade da década de 60 (Wheeler, 1966; Boutin e Wheeler, 1967).

O desenvolvimento da tecnologia de coluna foi lento e restrito a unidades piloto nas duas décadas seguintes. Problemas técnicos inviabilizaram a sua utilização em unidades de maior porte. O interesse comercial ressurgiu no ano de 1981, em Les Mines Gaspé, Quebec, Canadá, quando se utilizou a coluna no beneficiamento de molibdênio. Três colunas de flotação substituíram treze estágios compostos por células mecânicas, com resultados metalúrgicos superiores. Estas três colunas foram objeto de diversos estudos cujos resultados se mostraram de grande relevância para o aprimoramento de unidades de grande porte (Dobby, 1984; Yianatos, 1987).

A partir do sucesso da aplicação em Les Mines Gaspé, as colunas de flotação se difundiram rapidamente no Canadá, Austrália, África do Sul e América do Sul, principalmente no Chile e no Brasil. A primeira instalação de grande porte no Brasil foi implantada pela Samarco Mineração S.A., em 1991, utilizando quatro colunas de 3,66m de diâmetro e 13,6m de altura e uma coluna de 2,44m de diâmetro e 11,0m de altura no beneficiamento de minério de ferro. Merecem também destaque as unidades de grande porte para beneficiamento de minério fosfático que foram colocadas em operação pela Arafertil S.A. em 1993.

No Brasil, os estudos de flotação em coluna foram iniciados em 1985, no Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN, localizado em Belo Horizonte, Minas Gerais. O CDTN dispõe de colunas piloto que vêm sendo utilizadas no desenvolvimento de diversos projetos de pesquisa, principalmente com minérios de bauxita, carvão, ferro, fosfato, fluorita, lítio, ouro, talco e zinco, dentre outros (Aquino *et alii*, 1992; Oliveira e Peres, 1992; Aquino *et alii*, 1998).

Atualmente, as colunas de flotação estão sendo empregadas em número expressivo em diversas partes do mundo.

2.3 O processo de flotação

2.3.1 Mecanismo de separação das partículas minerais

Flotação é um processo de concentração de minérios onde as partículas, em meio aquoso, são separadas através da adição de reagentes específicos que adsorvem¹ seletivamente na sua superfície tornando-as hidrofóbicas ou hidrofílicas. Fazendo-se passar um fluxo de bolhas de ar através da polpa de minério, as partículas hidrofóbicas são coletadas e as hidrofílicas não coletadas permanecem em meio aquoso. Os agregados bolhas-partículas são transportados para a região superior das células de flotação (Gaudin, 1980; Arrunátegui, 1987).

Todos os processos de concentração de minerais são baseados nas diferenças das propriedades dos minerais constituintes (Peres *et alii*, 1986). O processo de flotação utiliza como principal propriedade diferenciadora as características físico-químicas da superfície das partículas dos diferentes minerais. Através da adição de reagentes específicos aumenta-se ou diminui o

¹ *Adsorção* é um fenômeno no qual átomos, moléculas ou íons são atraídos e retidos na superfície de sólidos ou líquidos com os quais estão em contato, sem a penetração da sua superfície (Gaudin, 1980).

grau de *hidrofobicidade* de uma partícula mineral. Isto determina a capacidade de interação entre as moléculas da partícula e as moléculas da água. Quanto maior for o grau de hidrofobicidade menor será a interação das moléculas das partículas minerais com as moléculas da água e, por conseguinte, maior será a interação com as moléculas do ar.

Outro conceito, também importante dentro do contexto da tecnologia de flotação, é o de *hidrofilicidade*, que é oposto ao de hidrofobicidade. Quanto maior for o grau de hidrofilicidade das partículas minerais maior será a interação com a água do que com o ar.

2.3.2 Etapas de preparação do minério

O minério passa por várias etapas de preparação entre a sua lavra na mina e a introdução na coluna de flotação. As etapas principais, que também estão presentes em vários outros processos de beneficiamento, incluem, seqüencialmente, a cominuição, a classificação granulométrica e o condicionamento.

A cominuição tem como objetivo a obtenção da liberação² física adequada dos minerais a serem separados, com uma granulometria adequada ao processo de flotação. Basicamente, a cominuição consiste na redução das dimensões físicas dos blocos ou partículas componentes do minério através da ruptura da coesão interna. A primeira fragmentação do minério ocorre na mina através de explosivos. A partir deste ponto a cominuição é realizada em máquinas, utilizando métodos de britagem e em seguida de moagem (Borges, 1996).

² *Liberação* de partículas minerais é um conceito referente a individualização das espécies a separar, em partículas livres. Partículas livres, ou *liberadas*, são aquelas constituídas de um só mineral e partículas mistas são aquelas constituídas por dois ou mais minerais (Peres *et alii*, 1986).

A etapa de classificação granulométrica tem como objetivo ajustar o tamanho ótimo das partículas minerais a serem alimentadas no processo de flotação. A partir de uma faixa granulométrica mais ampla produzida pela cominuição efetua-se na etapa de classificação a separação das partículas de tamanho mais adequado à flotação. Normalmente, o processo de flotação apresenta maior eficiência na faixa granulométrica entre 20 e 210 micra. Para flotação em coluna pode-se trabalhar com granulometrias de até 5 micra. Dentre os diversos equipamentos utilizados na classificação podem ser citados os classificadores tipo espiral, as peneiras vibratórias e os hidrociclones, além de vários outros.

A etapa final de preparação da polpa de minério é o condicionamento com reagentes químicos. O objetivo do condicionamento é alterar as propriedades químicas das partículas minerais de forma que se estabeleçam as condições químicas propícias ao processo de flotação. Normalmente, o condicionamento é realizado em tanques com mecanismo de agitação, conhecidos como condicionadores, que promovem o contato efetivo entre a polpa e reagentes químicos.

2.3.3 Reagentes químicos utilizados no processo de flotação

Os reagentes químicos utilizados na flotação podem ser classificados, segundo suas funções, em (Peres *et alii*, 1986):

- coletores;
- modificadores (depressores, reguladores de pH e ativadores);
- espumantes;
- outros reagentes (dispersantes e floculantes).

Esta classificação não é precisa, uma vez que certos reagentes podem ter mais de uma função, como por exemplo, óleos que atuam como coletores e como espumantes.

A hidrofobicidade ou hidrofilicidade das partículas pode ser natural, ou induzida. Os coletores são reagentes que alteram a característica de superfície das partículas minerais, tornando-as hidrofóbicas. Os poucos minerais conhecidos naturalmente hidrofóbicos são a molibdenita, a grafita, e o talco. A interação entre as moléculas dos coletores e a superfície das partículas minerais resulta na formação de uma camada, com característica hidrofóbica, que reveste a superfície das partículas minerais. Uma vez revestidas por essa camada, as partículas passam a se comportar como se fossem hidrofóbicas.

A interação entre coletores e partículas minerais pode ter a sua seletividade³ aumentada através da adição de reagentes conhecidos como modificadores. Estes reagentes modificam as superfícies das partículas minerais ou controlam as características do meio, estabelecendo uma condição otimizada para a flotação.

Os depressores são reagentes modificadores que têm a função de evitar, temporariamente, ou mesmo permanentemente, a ação dos coletores sobre determinados minerais presentes no minério. O mecanismo de atuação dos depressores sobre estas partículas ocorre de forma semelhante ao dos coletores, ou seja, através de interações físicas e/ou químicas. Isto impede a adsorção do coletor sobre esses minerais.

Existe uma faixa estreita de valores de pH para cada mineral onde a ação dos coletores se dá de forma ótima. Os reguladores de pH são substâncias ácidas ou básicas que podem, conforme o tipo de mineral e o efeito desejado, retardar, acelerar ou inibir a ação dos coletores. Em geral, a

³ *Seletividade* é uma referência à capacidade de separação de partículas com graus diferentes de hidrofobicidade (Finch e Dobby, 1990).

flotação é realizada em polpas ligeiramente ácidas ou alcalinas, com pH compreendido entre 4 e 12 (Arrunátegui, 1987).

Existem alguns minerais na natureza que não permitem a adsorção dos coletores. Nestes casos, é necessária a adição de reagentes conhecidos como ativadores, antes da introdução dos coletores.

Na separação das partículas hidrofóbicas e hidrofílicas, faz-se necessário a formação de uma espuma estável. Os espumantes são reagentes responsáveis por estabilizar a interface líquido-gás da bolha de ar, facilitando a adesão das partículas hidrofóbicas. Sem o espumante, existe uma tendência natural de rompimento das bolhas de ar e o conseqüente desprendimento das partículas hidrofóbicas a elas aderidas.

Os dispersantes são reagentes utilizados na dispersão de partículas minerais que muitas vezes se encontram agrupadas, formando “flocos”. A ação dos dispersantes tem como objetivo melhorar a área de contato destas partículas com a água ou com os depressores, e portanto, diminuir a sua possibilidade de flotação.

Os floculantes, também conhecidos como “aglomerantes”, são reagentes que produzem um efeito contrário ao dos dispersantes. Eles são responsáveis por aglutinar partículas muito finas, geralmente inúteis e muitas vezes prejudiciais ao processo de flotação.

2.3.4 Fatores físicos que influenciam o processo de flotação

Diversos fatores físicos influenciam a concentração de partículas minerais através das técnicas de flotação. Os de maior destaque, dentre outros, são o tamanho das partículas minerais, o tempo de condicionamento e a temperatura da polpa de minério (Arrunátegui, 1987). É interessante

mençãoar que até mesmo uma pequena variação das propriedades físico-químicas da água também pode interferir no processo de flotação. Nestas situações, duas instalações idênticas, beneficiando o mesmo minério em condições aparentemente idênticas, podem apresentar resultados diferentes (Peres *et alii*, 1986).

O tamanho das partículas minerais a ser obtido pelo processo de moagem, depende do grau de liberação necessário ao processo de flotação. Uma vez que o custo de moagem é elevado, ela tende a ser realizada somente até o ponto onde se consegue uma liberação satisfatória das partículas de interesse do minério. Alcançado este ponto, aumentos subsequentes no grau de moagem passam a ter menor influência no aumento da taxa de recuperação do mineral de interesse. Além disso, uma moagem mais grossa tem como efeito positivo a redução da proporção de partículas muito finas que poderiam produzir lamas⁴ que dificultariam o processo de flotação. Na flotação, e também em diversos outros métodos de beneficiamento de minérios, partículas menores que um certo tamanho crítico não respondem ao processo de beneficiamento.

Os reagentes químicos utilizados no processo de flotação exigem um tempo mínimo de contato com as partículas de minério para que ocorra a adsorção física e/ou química sobre a superfície das partículas minerais. Este tempo, conhecido como tempo de condicionamento, é variável e depende do tipo de minério, do tamanho das partículas e dos tipos de reagentes utilizados, dentre outros fatores.

Em geral, a temperatura tem o efeito de aumentar a velocidade de reação entre a superfície das partículas minerais e os reagentes químicos utilizados na flotação. Polpas muito frias podem exigir um consumo maior de reagentes, e portanto, aumentar os custos de produção. Contudo, em algumas

⁴ O termo *lamas* se refere a substâncias de granulometria tão fina que causam um efeito prejudicial à flotação, principalmente por provocarem um aumento exagerado do consumo de reagentes químicos (Peres *et alii*, 1986).

situações, temperaturas elevadas podem produzir a degradação dos reagentes.

2.4 Características de funcionamento da coluna de flotação

O processo de flotação em coluna de partículas minerais é efetuado em meio aquoso e dá origem a dois fluxos distintos de materiais: *flotado*, constituído pelos agregados formados por bolhas de ar e partículas hidrofóbicas, e *não flotado*, constituído por partículas hidrofílicas. O flotado flui para o topo da coluna e o não flotado para a base. Normalmente, o flotado é descarregado por transbordo. Quanto ao não flotado, as formas de descarga mais comumente empregadas são por bombeamento ou por efeito da gravidade, com a vazão regulada através de uma válvula.

A flotação é denominada *direta* quando o mineral de interesse constitui a fração flotada. De maneira oposta, a flotação é denominada *inversa* quando o mineral de interesse se concentra na fração não flotada.

A Figura 2.1 representa esquematicamente uma coluna de flotação. São observadas na coluna duas seções:

- seção de concentração;
- seção de limpeza.

O funcionamento da coluna pode ser melhor compreendido através da descrição dada a seguir.

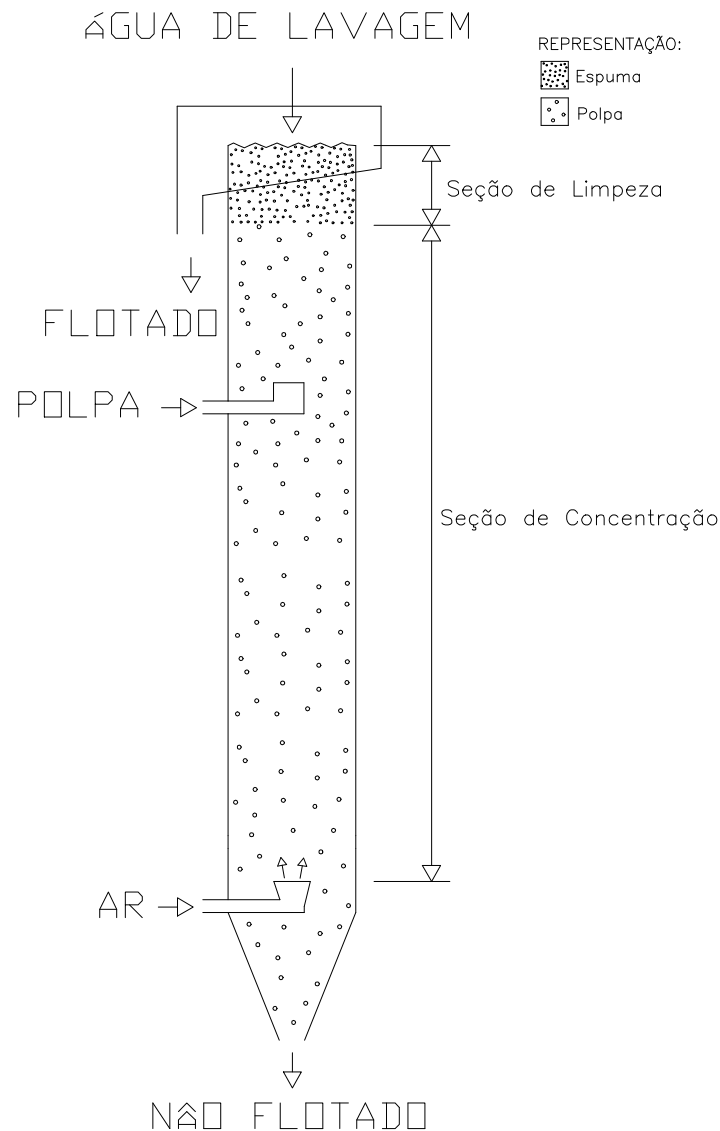


Figura 2.1: Representação esquemática de uma coluna de flotação.

2.4.1 Seção de concentração

A seção de concentração está compreendida entre o ponto de alimentação de ar e a interface polpa-espuma. Nesta seção ocorre o contato efetivo entre as partículas hidrofóbicas sedimentando pela ação da gravidade e as bolhas ascendentes de ar em condições hidrodinâmicas de baixa

turbulência. Estas condições provêm um meio hidrodinâmico favorável à adesão entre as partículas hidrofóbicas e as bolhas de ar.

2.4.2 Seção de limpeza

A seção de limpeza está compreendida entre a interface polpa-espuma e o transbordo da fração flotada no topo da coluna. Os agregados constituídos de partículas hidrofóbicas e bolhas de ar arrastam uma parcela das partículas hidrofílicas para a seção de limpeza onde encontram o fluxo água de lavagem em contra corrente. As partículas hidrofílicas, hidraulicamente arrastadas para a espuma, são lavadas e retornam para a seção de concentração.

2.5 Parâmetros da flotação em coluna

Os principais parâmetros da flotação em coluna são (Oliveira e Aquino, 1992):

- fluxo e *holdup* de ar;
- tamanho das bolhas;
- fluxo de água de lavagem;
- altura da camada de espuma;
- tempo médio de residência das partículas minerais;
- percentagens de sólido na alimentação da polpa.

Esses parâmetros, a exceção da água de lavagem, também afetam a flotação em células mecânicas agitadas. A grande diferença é que nas colunas é possível controlar os três primeiros e nas células mecânicas não.

2.5.1 Fluxo e *holdup* de ar

O fluxo de ar é um dos parâmetros da coluna de flotação cujos efeitos são marcantes sobre a recuperação do mineral. O seu valor ótimo depende do tipo de minério, da sua granulometria e do tamanho das bolhas. Baixas vazões de ar acarretam baixas recuperações das partículas devido à ineficiência do contato bolha-partícula e às dificuldades de transporte do agregado bolha-partícula até o transbordo da coluna. Por outro lado, o excesso de ar pode causar turbulência ou formação de espuma na seção de concentração.

O fluxo de ar pode ser expresso em termos da velocidade superficial específica do ar:

$$J_g = \frac{Q_g}{A_c}, \quad (2.1)$$

onde J_g é a velocidade superficial específica do ar dada em $(\text{cm}^3/\text{s de ar})/(\text{cm}^2 \text{ de área da coluna})$, ou simplificadaamente, cm/s , Q_g é o valor da vazão de ar dada em cm^3/s e A_c é a área da seção transversal da coluna dada em cm^2 . A vantagem da utilização desta representação é poder comparar o fluxo de ar para colunas de diâmetros diferentes.

O *holdup* do ar, E_g , é definido como a fração volumétrica da seção de concentração ocupada pelo ar injetado na coluna. Esta fração é função da taxa de alimentação de ar e de polpa de minério, do diâmetro de bolhas, da densidade do agregado bolha-partícula e do conteúdo de sólidos na polpa. Matematicamente, o *holdup* pode ser expresso como

$$E_g = 1 - \frac{\Delta P}{\rho_{polpa} g \Delta L}, \quad (2.2)$$

onde E_g é o *holdup* do ar, ΔP é a diferença de pressão entre dois pontos situados na seção de concentração e separados por uma distância ΔL , ρ_{polpa} é o valor da densidade da polpa do minério e g o valor da aceleração da gravidade.

A relação entre J_g e E_g é de grande importância na determinação do regime de funcionamento operacional de uma coluna de flotação. A Figura 2.2 mostra esta relação:

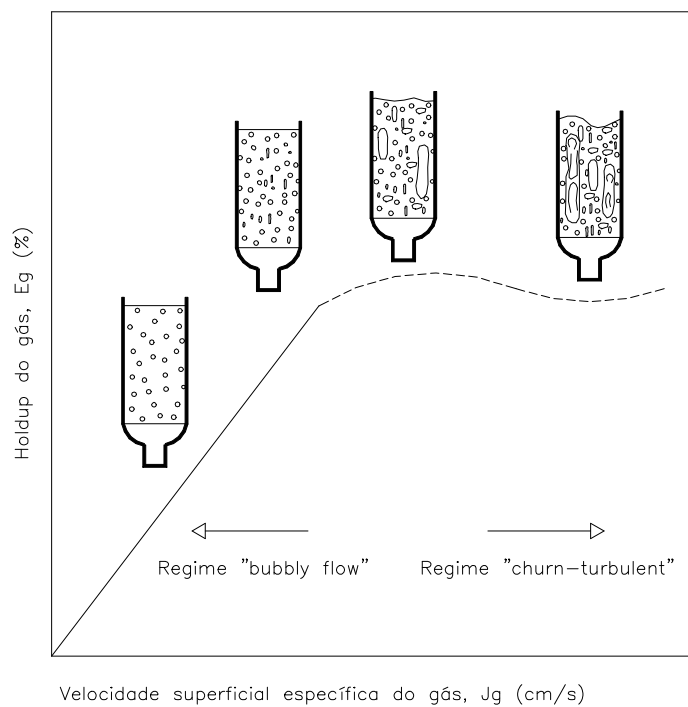


Figura 2.2: Relação entre a velocidade superficial específica do ar e o *holdup*.

A região linear da curva da Figura 2.2 representa o regime de fluxo conhecido como "bubbly flow". Nesta região a distribuição de bolhas de ar é homogênea no tamanho e na forma. A região não linear da curva representa o regime de fluxo "churn-turbulente", que apresenta bolhas de ar de tamanho grande, não uniformes, caracterizando movimento turbulento dentro da coluna.

Normalmente, os valores otimizados de recuperação e teor de flotado são obtidos quando se opera no regime “bubbly flow” (Oliveira e Aquino, 1992).

2.5.2 Tamanho das bolhas

O ar é injetado na coluna através de um dispositivo conhecido como *aerador*, responsável pela formação das bolhas. Em essência, os tipos mais simples de aeradores não industriais consistem em um tubo cilíndrico perfurado recoberto por um material poroso, com furos de dimensões bem definidas.

Embora seja normalmente difícil de controlar, o tamanho e a homogeneidade das bolhas é uma das variáveis de maior influência no processo de flotação. O tamanho das bolhas é controlado pela concentração de espumante. Normalmente, um fluxo de bolhas grandes possui área superficial de contato pequena, podendo ser insuficiente para proporcionar a coleta das partículas hidrofóbicas. Bolhas pequenas e de tamanho uniforme podem ser obtidas pelo ajuste das condições operacionais do sistema de geração de bolhas e/ou pela adição de reagentes tensoativos (espumantes) (Moys e Finch, 1988). A ordem de grandeza do tamanho adequado das bolhas está na faixa de 0,6 a 2,0mm de diâmetro.

2.5.3 Fluxo de água de lavagem e *bias*

A água de lavagem, introduzida no topo da seção de limpeza da coluna, tem como função eliminar as partículas hidrofílicas arrastadas pelas bolhas de ar para a camada de espuma. Adicionalmente, ela tem como função substituir a parcela da água de alimentação que se dirige para o flotado e que pode estar contaminada por lamas. Para que esta ação seja efetiva é necessário que o fluxo de água de lavagem seja maior que a parcela do fluxo de água de alimentação que se dirige para o flotado (Moys e Finch, 1988). O fluxo de água

descendente resultante da diferença destes dois fluxos é conhecido como “*bias* positivo”⁵. Uma das técnicas usadas para inferir o valor do *bias* leva em consideração o balanço de água, na seção de concentração, entre o fluxo da água de alimentação e o fluxo de água para o não flotado. Contudo, o valor de *bias* obtido por este método só é válido quando a coluna se encontra em regime estacionário de operação (Peres e Del Villar, 1986). O efeito benéfico produzido pela água de lavagem é o de aumento do teor do flotado.

Os dispositivos utilizados para se introduzir a água de lavagem na coluna são, em geral, bastante simples. Um tipo muito comum se assemelha a um chuveiro e é constituído por um prato perfurado posicionado a uma altura regulável do transbordo da coluna.

2.5.4 Altura da camada de espuma

A altura da camada de espuma está diretamente relacionada à seletividade do processo de flotação. A camada de espuma age como um filtro mecânico, retendo de modo eficiente as partículas que ali chegam por efeito de arraste (Peres *et alii*, 1986). Normalmente, se ela tiver um tamanho menor que o necessário, a recuperação do flotado aumenta e o teor diminui. Por outro lado, se ela tiver um tamanho maior que o necessário, a recuperação do flotado diminui e o teor aumenta (Moys e Finch, 1988). Em estudos realizados com diversos minerais foi observado um aumento significativo no teor do material flotado com o aumento da camada de espuma, sem perda apreciável da recuperação (Oliveira e Aquino, 1992). Cabe mencionar que este comportamento nem sempre é válido para todos os tipos de minerais.

Para que as condições operacionais da coluna sejam mantidas, a altura de camada de espuma deve ser ajustada de forma que a interface

⁵ Por convenção determina-se que o *bias* com sentido de fluxo na direção do não flotado é caracterizado como *positivo*.

polpa/espuma esteja acima do ponto de alimentação da polpa. Tipicamente, os valores operacionais estão situados na faixa de 0,5 a 1,0 metro, nas colunas pilotos e semi-industriais, e na faixa de 1,0 a 2,0 metros nas colunas industriais.

2.5.5 Tempo médio de residência das partículas minerais

Tanto o teor quanto a recuperação do material flotado são diretamente afetados pelo tempo de residência das partículas minerais dentro da coluna (Oliveira e Aquino, 1992). Um tempo de residência pequeno provoca um aumento no teor e uma redução na recuperação do flotado, pois somente partículas com hidrofobicidade suficiente para aderir às bolhas são coletadas.

A alteração da vazão de descarga do não flotado é uma das formas de se modificar o tempo de residência das partículas minerais. Outras alterações podem ser feitas no conteúdo de sólidos, na taxa de alimentação da polpa e na vazão de água de lavagem.

2.5.6 Percentagens de sólidos na alimentação da polpa

A coluna de flotação pode operar em uma faixa relativamente ampla de percentagem de sólidos na alimentação da polpa, da ordem de 15 a 50%, sem perdas significativas no teor e na recuperação do material flotado. Entretanto, deve ser avaliada a sua influência sobre o tempo de residência das partículas minerais e sobre a capacidade de carregamento da coluna, C_a (Oliveira e Aquino, 1992). A capacidade de carregamento pode ser definida como a máxima taxa na qual sólidos presentes no material flotado podem ser removidos da coluna, expresso em termos de massa por unidade de tempo por unidade de área da seção transversal da coluna (g/min/cm^2).

2.6 Medição de variáveis da flotação em coluna

Os resultados metalúrgicos do processo de flotação estão diretamente relacionados ao controle do teor e da recuperação do mineral flotado. Contudo, a medição “on-line” destas variáveis pode se tornar inviabilizada em função do alto custo dos equipamentos, ou ainda, em função do nível de imprecisão nas medições. Em decorrência destas dificuldades, normalmente são utilizadas outras variáveis como forma alternativa de monitorar e controlar a qualidade e a eficiência do processo de flotação. Algumas destas variáveis são a altura da camada de espuma, o *holdup* do ar e o *bias*.

2.6.1 Medição da altura da camada de espuma

Basicamente, existem quatro maneiras de se medir a altura da camada de espuma. A maneira mais freqüentemente utilizada emprega medidores de pressão. As outras empregam flutuadores, sensores de condutividade e sensores de temperatura. Os princípios básicos das técnicas de medição por condutividade e por temperatura também são aplicados na medição do *holdup* do ar e do *bias* (Bergh e Yianatos, 1991; Del Villar *et alii*, 1994; Peres e Del Villar, 1994).

A medição da altura da camada de espuma por meio de medidores de pressão pode ser feita com um, dois ou três instrumentos, sendo a medição com três instrumentos a mais precisa dentre elas (um instrumento fica posicionado na seção de limpeza em contato com a espuma e os outros dois na seção de concentração em contato com a polpa). A medição com apenas um instrumento, posicionado na seção de concentração, fica sujeita a erros devido à necessidade de se estimar tanto o valor da densidade de polpa quanto o valor da densidade de espuma, uma vez que estas densidades não são medidas. A medição com dois instrumentos fica sujeita a erros de estimação do valor da densidade de espuma (a densidade de polpa é

indiretamente medida pelos dois medidores de pressão posicionados na seção de concentração). As outras fontes de erros, comuns às medições tanto com um, dois ou três instrumentos, são decorrentes das variações da densidade de polpa e de espuma devido a não homogeneidade da densidade do minério dentro da coluna e também da não homogeneidade na distribuição das bolhas de ar (Del Villar *et alii*, 1994).

2.6.2 Medição do *holdup* do ar

A técnica de medição do *holdup* do ar mais freqüentemente utilizada emprega dois medidores de pressão posicionados na seção de concentração. Uma das vantagens desta técnica é a possibilidade de também se medir a altura da camada de espuma, conforme descrito na subseção anterior. Contudo, esta medição também está sujeita às mesmas fontes de erros da medição de altura de camada de espuma, ou seja, não homogeneidade da densidade do minério e da distribuição das bolhas de ar dentro da coluna. Contribui também de forma significativa para a imprecisão na medição do *holdup* do ar a variação no tamanho das bolhas de ar.

2.6.3 Medição do *bias*

Entre o *bias*, o *holdup* do ar e a altura da camada de espuma, o *bias* é a variável que apresenta a maior dificuldade na medição. Uma das técnicas de medição, ainda em desenvolvimento, explora a existência de uma relação entre o *bias* e o perfil de condutividade elétrica ao longo das fases de polpa e espuma dentro da coluna (Peres e Del Villar, 1994). Contudo, as características não lineares desta relação têm impedido a obtenção de um modelo matemático padrão que pudesse viabilizar a medição contínua do *bias*. Uma das alternativas encontradas para solucionar este problema foi o uso da técnica de *redes neurais artificiais* que manipulam as informações obtidas das medições

de sensores de condutividade em contato com a polpa e a espuma da coluna. Esta solução enfrenta sérias limitações práticas quando implementada em colunas industriais, devido à necessidade de submeter o sistema de medição a testes de calibração em faixas de operação muito diversas⁶. Informações detalhadas sobre o assunto *redes neurais artificiais* podem ser encontradas em (Zurada, 1992).

2.7 Estratégias de controle aplicadas em colunas de flotação

Como todo processo controlado, a flotação em coluna também está sujeita a variações indesejáveis de parâmetros que não são normalmente medidos mas que podem prejudicar o produto final do processo. As variações de maior influência estão associadas a parâmetros da polpa de alimentação. Elas ocorrem, principalmente, na percentagem de sólidos, no tamanho, composição mineralógica e flotabilidade das partículas minerais (Ynchausti *et alii*, 1988). Um sistema de controle de colunas de flotação eficiente deve ser capaz de manipular outras variáveis do processo de forma que o impacto destas perturbações seja minimizado.

Quando o objetivo da estratégia de controle se restringe a estabilizar a coluna de flotação dentro dos seus limites operacionais, pode-se atribuir ao sistema de controle somente a tarefa de controlar a altura da camada de espuma. Contudo, para se alcançar resultados metalúrgicos razoáveis é preciso que a estratégia de controle também leve em consideração a manipulação do *holdup* do ar e a manipulação do *bias* (Bergh e Yianatos, 1991). Estas estratégias de controle, conhecidas com *controle estabilizante* e *controle otimizante*, serão abordadas, de forma sucinta, a seguir.

⁶ No jargão da área de redes neurais artificiais, estes testes de calibração correspondem ao “treinamento” da rede neural utilizada na aplicação em questão.

2.7.1 Controle estabilizante de colunas de flotação

Uma das formas tipicamente empregadas no controle estabilizante da coluna é controlar a altura da camada de espuma através da regulação automática da vazão do não flotado, mantendo-se as vazões de ar e de água de lavagem constantes e nos seus valores otimizados. A principal vantagem desta estratégia é a simplicidade do esquema de controle. Contudo, o desempenho do sistema de controle é sensivelmente afetado por variações na percentagem de sólidos e líquidos da polpa de alimentação. Esta estratégia de controle é atualmente empregada na coluna de 2" do CDTN (Aquino *et alii*, 1998).

Outra estratégia de controle estabilizante, também muito utilizada, emprega duas malhas de controle. Na primeira malha controla-se a altura da camada de espuma através da regulação automática da vazão de água de lavagem. Na segunda malha, controla-se a vazão do não flotado através da regulação, automática ou manual, da vazão de alimentação de polpa de forma que seja mantida uma pequena diferença entre as duas vazões. O principal efeito desta estratégia de controle sobre o regime operacional da coluna de flotação é a variação lenta da altura da camada de espuma em resposta aos distúrbios gerados pela variação dos parâmetros da polpa de alimentação.

2.7.2 Controle otimizante de colunas de flotação

Em várias aplicações, o controle otimizante de colunas de flotação se baseia em modelos matemáticos ou em regras heurísticas que relacionam objetivos secundários do esquema de controle (altura da camada de espuma, *holdup* do ar e *bias*) com objetivos primários (teor e recuperação). Contudo, a grande interação entre as variáveis de processo e a presença de não linearidades agudas na relação entre elas são alguns dos principais fatores

responsáveis pela dificuldade no planejamento de uma estratégia de controle otimizante (Bergh e Acuña, 1994).

Várias arquiteturas de controle otimizante têm sido empregadas com sucesso. Alguns exemplos são o controle preditivo (Pu *et alii*, 1991), o controle baseado em sistemas especialistas (Oblad e Herbst, 1990) e o controle heurístico baseado em lógica fuzzy (Hirajima *et alii*, 1991), dentre outros.

2.8 Modelagem do processo de flotação em coluna

Os estudos de modelagem do processo de flotação em coluna têm se concentrado mais na linha de pesquisa da modelagem empírica do que na linha de modelagem a partir da teoria sobre o assunto (Tuteja *et alii*, 1994). As principais justificativas para tal fato são a grande complexidade do processo de flotação e a carência de informações a respeito dos mecanismos que o governam (Villeneuve *et alii*, 1995).

Alguns pesquisadores da área de flotação em coluna têm classificado os modelos disponíveis em cinéticos e não cinéticos (Tuteja *et alii*, 1994). Conforme o próprio nome sugere, os modelos cinéticos são baseados na cinética da flotação, ou seja, em parâmetros cujas grandezas estão relacionadas ao movimento dinâmico dos sólidos, líquidos e gases envolvidos no processo. Uma grande parte destes modelos tem como variável de saída a recuperação do mineral de interesse (Finch e Dobby, 1990; Tuteja *et alii*, 1994; Villeneuve *et alii*, 1995). Por exclusão, os modelos não cinéticos são todos aqueles que não são explicitamente baseados na cinética da flotação. Eles são baseados nas relações causa-efeito entre as variáveis de entrada e saída do processo (Oblad e Herbst, 1990; Bergh and Yianatos, 1993; Tuteja *et alii*, 1994; Bergh and Yianatos, 1995). Os modelos obtidos na presente dissertação podem ser incluídos na classe de modelos não cinéticos.

2.9 A coluna de flotação de 2" do CDTN

A planta piloto utilizada para testes neste trabalho foi uma coluna de flotação instalada na Usina Piloto de Tratamento de Minérios da Supervisão de Processos do CDTN.

A coluna, construída em material acrílico transparente, possui 2" de diâmetro e altura que pode variar de forma modular entre 3,60m e 7,20m. A montagem está fixada em uma estrutura metálica que permite acesso às partes principais da coluna: alimentação de polpa, alimentação de ar, alimentação de água de lavagem, descarga do flotado e descarga do não flotado. A Figura 2.3 mostra um fluxograma da coluna. Nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6 são mostradas fotos da coluna. As variáveis de processo medidas através da instrumentação da coluna são altura da camada de espuma, *holdup* do ar, vazão de água de lavagem e vazão de ar, sendo que destas, somente o *holdup* do ar não é controlado pelo sistema de controle automático da coluna. Atualmente, a coluna de 2" do CDTN não dispõe de instrumentação para medição do *bias*.

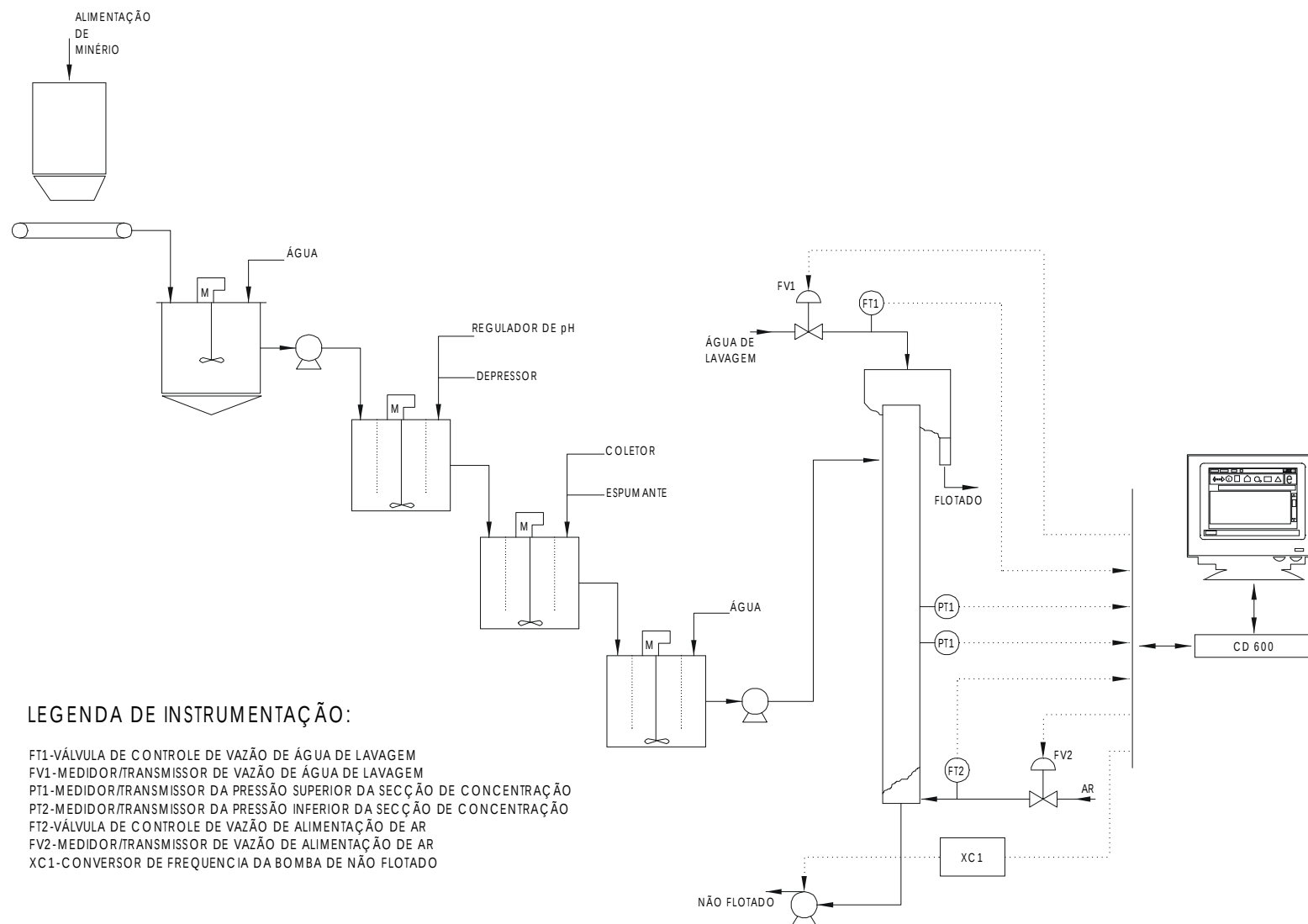


FIGURA 2.3: FLUXOGRAMA DA COLUNA DE FLOTAÇÃO DE 2" DO CDTN



Figura 2.4: Vista da coluna de flotação de 2" do CDTN.

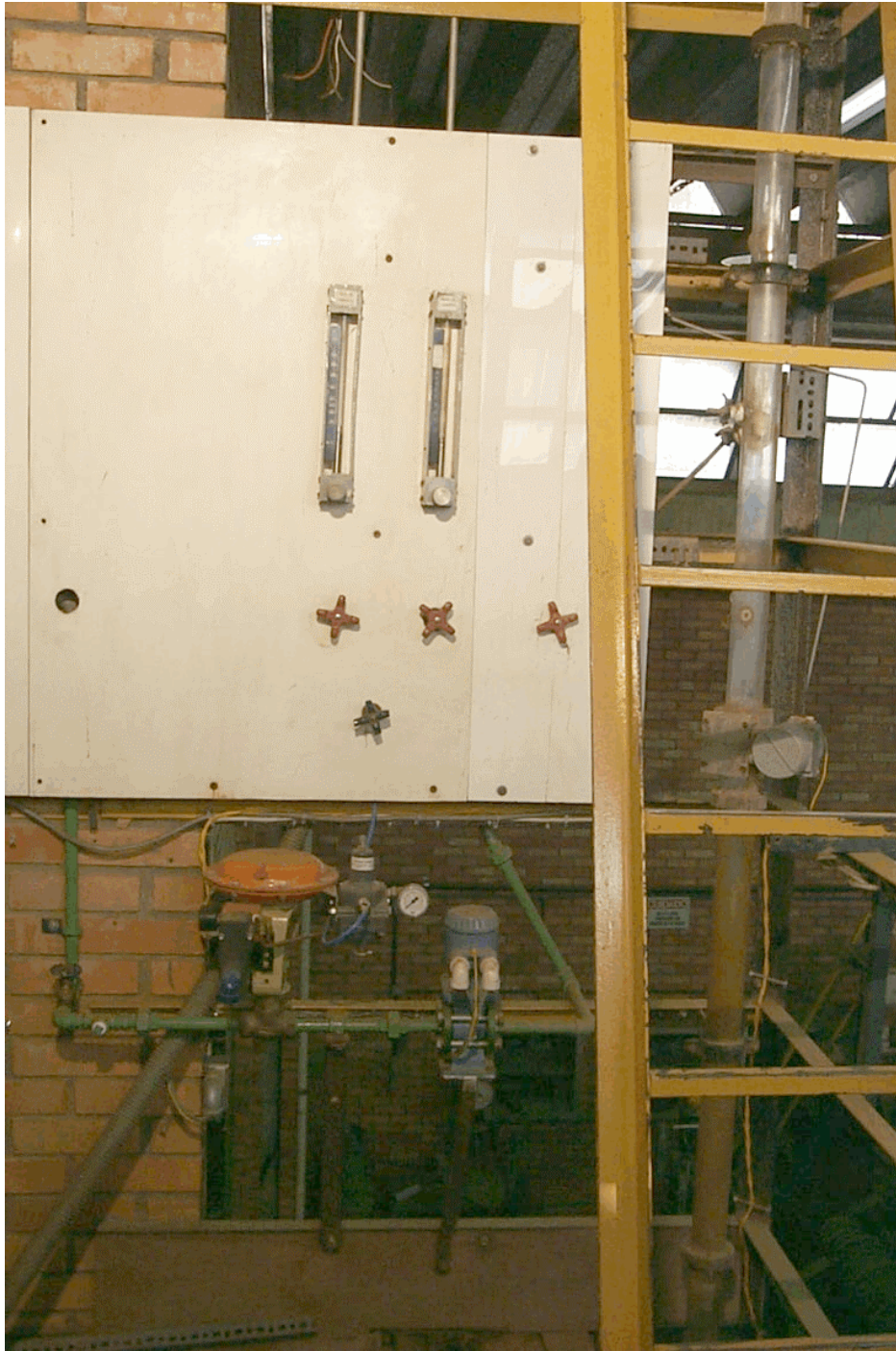


Figura 2.5: Vista da instrumentação da coluna de flotação de 2" do CDTN. São mostrados os circuitos de alimentação de água de lavagem e a entrada de polpa de minério



Figura 2.6: Vista da instrumentação da coluna de flotação de 2" do CDTN. São mostrados os circuitos de alimentação de ar e descarga de não flotado.

2.9.1 Sistema de controle e monitoração da coluna

O controle automático das variáveis de processo da coluna é gerenciado por um controlador de processos modelo CD600, fabricado pela SMAR™. O CD600 é um equipamento eletrônico, microprocessado, com lógica de controle programável. O interfaceamento operacional entre o usuário e o controlador pode ser feito por meio do seu painel frontal ou através de um microcomputador do tipo PC conectado ao controlador.

Atualmente, o CD600 está configurado para controlar a altura de camada da espuma, a vazão de ar e a vazão de água de lavagem da coluna utilizando algoritmos do tipo PI (ação de controle proporcional mais integral) implementados por meio de blocos lógicos internos do controlador. A comunicação entre o CD600 e a instrumentação de medição e controle da coluna (transmissores e elementos finais de controle) é feita via sinal de corrente, padrão 4-20 mA.

As medições de vazão de água de lavagem e de vazão de ar são realizadas pelos transmissores de vazão FT1 e FT2. Os valores de altura da camada de espuma e de *holdup* do ar são calculados a partir dos sinais de medição dos transmissores de pressão PT1 e PT2.

2.9.2 Alimentação de polpa de minério

Na Figura 2.3 pode ser observado um arranjo de condicionadores tipicamente usado na preparação da polpa de minério. Nos condicionadores é feita a adição e mistura de água e reagentes químicos (coletores, depressores, espumantes, reguladores de pH, etc) ao minério com a granulometria ajustada para o processo de flotação. A polpa condicionada é alimentada na coluna através de uma bomba peristáltica com sistema mecânico de redução da rotação do eixo do motor. O acionamento elétrico do motor da bomba é feito através de um conversor de frequência, permitindo o ajuste de vazão de polpa em função do ajuste de velocidade de rotação do motor. Atualmente, a coluna de flotação do CDTN não dispõe de instrumentação para medição contínua da vazão de polpa de minério alimentada na coluna. Como alternativa, efetua-se, em intervalos regulares durante a operação, a monitoração do nível de polpa do último tanque de condicionamento.

2.9.3 Alimentação de ar

O ar é injetado na coluna através de um aerador confeccionado no CDTN. Este dispositivo é constituído de um tubo de PVC de 32mm de diâmetro e 118mm de comprimento, revestido com um material sintético elástico de 2mm de espessura. A parte superior do tubo é vedada e a parte inferior possui rosca para fixação na base da coluna. O ar entra pela parte inferior e sai pela superfície lateral do aerador através de microfuros. O suprimento de ar é obtido a partir do sistema central de fornecimento de ar do CDTN. Na Usina de Tratamento de Minérios o fluxo de ar passa por um dispositivo de regulação de pressão e eliminação de contaminações por óleo ou partículas sólidas provenientes do compressor do sistema central.

A medição da vazão da linha de ar pode ser feita através de um rotâmetro (indicação local de vazão via escala graduada) ou através de um medidor de vazão do tipo placa de orifício com compensação de pressão e temperatura (indicação remota de vazão via sinal de corrente enviado para o CD600). O elemento final de controle de vazão é uma válvula pneumática (comando remoto enviado pelo CD600). A lógica da malha de controle não leva em consideração a interação com as outras variáveis do processo (como por exemplo, vazão de água e altura da camada de espuma)

2.9.4 Alimentação de água de lavagem

O dispositivo de introdução da água de lavagem na coluna, bastante simples, é constituído de um tubo de 8mm de diâmetro conjugado com um mecanismo de fixação do tubo e ajuste da posição de saída de água relativa ao transbordo da coluna. A água é suprida a partir de um reservatório de 1000 litros localizado na parte superior do galpão da Usina de Tratamento de Minérios.

Assim como na linha de ar, a instrumentação instalada na coluna também permite a medição e o controle de vazão de água de lavagem. A medição da vazão pode ser feita através de um rotâmetro (indicação local de vazão via escala graduada) ou de um medidor de vazão do tipo eletromagnético (indicação local de vazão via display alfanumérico e remota via sinal de corrente enviado para o CD600). O elemento final de controle é uma válvula pneumática (comando remoto enviado pelo CD600). A lógica da malha de controle também não leva em consideração a interação com as outras variáveis do processo.

2.9.5 Descarga de flotado e de não flotado

Na descarga de flotado não é utilizado nenhum equipamento. O material que transborda para fora da coluna é canalizado para um tubo flexível e flui, por gravidade, para um tanque posicionado ao nível da base da coluna.

O não flotado é descarregado da coluna através de uma bomba peristáltica com sistema mecânico de redução da rotação do eixo do motor e acionamento elétrico através de um conversor de frequência. Através do controle da descarga do não flotado é feito o controle da altura da camada de espuma da coluna. Um sinal de corrente é enviado do CD600 para o conversor de frequência da bomba de não flotado de forma a regular a altura da camada de espuma nos valores estabelecidos durante a operação da coluna. Além do controlador, a instrumentação envolvida nesta malha de controle é constituída por dois transmissores de pressão do tipo célula capacitiva, instalados na seção de concentração da coluna, que possibilitam a medição da altura da camada de espuma e do *holdup* do ar.

2.10 Considerações finais

Neste capítulo foram abordados os principais tópicos relativos à tecnologia de flotação em coluna aplicada ao beneficiamento de minérios. O foco do estudo foi a coluna “canadense”, patenteada em 1961 por Boutin e Tremblay. No Brasil, os estudos da tecnologia de flotação em coluna se iniciaram em 1985, no Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, CDTN.

Na flotação, a principal propriedade explorada para separar as partículas de interesse no minério são as diferenças nas características físico-químicas da superfície das partículas. As características hidrofóbicas das partículas minerais são seletivamente alteradas através de reagentes químicos que modificam o grau de interação com as moléculas de ar e de água presentes no meio.

Antes de ser introduzido na máquina de flotação, o minério passa por um processo de preparação físico-química para responder de forma eficiente ao processo de concentração. As etapas principais de preparação são a cominuição, a classificação granulométrica e o condicionamento com reagentes químicos.

A flotação em coluna é realizada em meio aquoso e divide as partículas minerais em dois fluxos, conhecidos como flotado e não flotado. Na seção de concentração, ocorre a adesão das partículas hidrofóbicas ao ar. Na seção de limpeza da coluna, partículas hidrofílicas que foram arrastadas por bolhas de ar são forçadas pela água de lavagem a retornarem para a seção de concentração.

A flotação é influenciada por diversos fatores físicos. Os de maior destaque são o tamanho das partículas minerais, o tempo de condicionamento, a temperatura e até mesmo as características físico-químicas da água. Quando a flotação é realizada em coluna somam-se a estes fatores diversos outros . Os

principais são o fluxo e o *holdup* do ar, o tamanho das bolhas, o fluxo de água de lavagem e *bias*, a altura da camada de espuma, o tempo médio de residência das partículas e a percentagem de sólidos na alimentação de polpa.

As variáveis normalmente utilizadas na monitoração e controle da qualidade e eficiência do processo de flotação são a altura da camada de espuma, o *holdup* do ar e o *bias*. As variáveis teor e recuperação do mineral flotado apresentam restrições técnicas e econômicas na sua medição “on line”.

Capítulo 3

Identificação de sistemas não lineares

3.1 Introdução

Identificação de sistemas é uma das técnicas aplicadas na modelagem de sistemas dinâmicos quando o conhecimento prévio sobre o sistema a ser modelado é insuficiente ou não está disponível. Apresenta-se, também, como uma alternativa menos dispendiosa de tempo na modelagem de sistemas complexos, em comparação às técnicas de modelagem pela física do processo. As técnicas de identificação de sistemas utilizam procedimentos de natureza essencialmente numérica que derivam o modelo a partir de um conjunto de dados gerados por sinais coletados do sistema (Norton, 1986; Ljung, 1987).

Os primeiros estudos de modelagem de sistemas dinâmicos, utilizando métodos de identificação, foram aplicados a sistemas linearizados¹ devido a limitações teóricas e computacionais vigentes na época (Norton, 1986; Ljung, 1987). Atualmente, estas dificuldades têm sido superadas, tendo surgido um grande número de trabalhos teóricos e práticos aplicados na área de identificação de sistemas não lineares (Billings e Voon, 1984; Kortmann e Unbehauen, 1988; Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989; Çinar, 1995; Sjöberg, 1997). No Brasil, o interesse pela identificação de sistemas não lineares tem se manifestado através de um significativo número de

¹ Os sistemas dinâmicos reais são não lineares. Normalmente, a descrição do comportamento dinâmico de sistemas reais através de modelos lineares é limitada às proximidades do ponto de operação para o qual o modelo foi derivado.
(continua na próxima página)

dissertações recentes (Rodrigues, 1996; Jácome, 1996; Corrêa, 1997; Barros, 1997; Jerônimo, 1998).

O objetivo deste capítulo é abordar os principais tópicos relativos aos procedimentos utilizados na identificação de sistemas não lineares, revisando os principais conceitos relativos a este assunto.

3.2 Identificação de sistemas

O problema de identificação de sistemas pode ser dividido nas seguintes etapas principais (Ljung, 1987; Bosch e Klauw, 1994):

- experimentação do sistema e aquisição dos dados;
- detecção de não linearidades nos dados;
- escolha e detecção da estrutura de representação do modelo;
- estimação de parâmetros do modelo;
- validação do modelo identificado.

A metodologia de abordagem do problema da identificação de sistemas, segundo a divisão em etapas descrita acima, é válida para a derivação de modelos lineares e não lineares. Ela pode ser aplicada na identificação de sistemas com *entrada única e saída única* (single input single output, SISO) ou sistemas com *múltiplas entradas e múltiplas saídas* (multi input multi output, MIMO).

Nas seções seguintes são descritos os procedimentos relativos a cada uma das etapas do problema da identificação de sistemas. Com o intuito de facilitar a compreensão deste assunto, será dado maior enfoque à aplicação das técnicas de identificação de sistemas SISO, devido à sua simplicidade em

relação aos sistemas MIMO. No próximo capítulo as discussões serão estendidas aos sistemas MIMO, utilizando a discussão do presente capítulo.

3.2.1 Experimentação do sistema e aquisição dos dados

Experimentação do sistema e aquisição de dados são procedimentos simultâneos de aplicação de sinais de teste nas entradas do sistema e coleta dos sinais de saída. Estes sinais de entrada e saída formam um conjunto de dados do qual serão retiradas as informações utilizadas na modelagem do sistema. Normalmente, a capacidade dos dados de conterem informação dinâmica do sistema está condicionada à execução bem planejada desta etapa.

3.2.1.1 Sinais de teste

Os sinais de teste mais empregados nos métodos de identificação determinística e estocástica são o *degrau*, *senóides*, os *sinais binários pseudo-aleatórios* (*pseudo random binary signal*, PRBS), *ruído branco gaussiano*, dentre outros, sendo os sinais do tipo PRBS os mais freqüentemente utilizados na derivação de modelos lineares. Contudo, foi argumentado que o uso deste tipo de sinal de teste tem-se mostrado inadequado na derivação de modelos não lineares por não produzir uma excitação persistente da entrada sobre toda a faixa de não linearidades do sistema (Billings e Fadzil, 1985).

No planejamento dos testes do sistema devem ser selecionados sinais que possuam um espectro de freqüências que excitem todas as dinâmicas de interesse na modelagem do sistema (Doebelin, 1980). A desconsideração desta característica chave pode conduzir a modelos que se ajustem bem aos dados mas com pequena capacidade de predição (Çinar, 1995).

Outra importante consideração em relação às características dos sinais de teste refere-se ao projeto do perfil de amplitude. Conforme relatado em (Aguirre e Billings, 1995a), sinais de teste com o espectro de frequências virtualmente idênticos, mas de amplitudes diferentes, podem apresentar respostas diferentes à excitação quando aplicados a sistemas não lineares.

3.2.1.2 Seleção do período de amostragem para a aquisição de dados

Na execução do procedimento de aquisição de dados deve-se selecionar criteriosamente o período de amostragem, T_{ss} , de forma a proporcionar um bom nível de qualidade no processo de captação das informações sobre o sistema. Este objetivo pode ser alcançado evitando-se a sub-amostragem dos sinais. A escolha de um valor de T_{ss} muito alto pode conduzir à perda de informação se a dinâmica do sistema for rápida. Para que os sinais coletados sejam satisfatoriamente reconstruídos, deve-se escolher uma frequência de amostragem $1/T_{ss}$ que evite a presença de componentes com frequências acima da frequência de Nyquist, $1/(2T_{ss})$ (Bosch e Kluw, 1994).

3.2.1.3 Seleção do período de amostragem para manipulação dos dados coletados

Tendo sido realizada a aquisição de dados do sistema, deve-se empreender um ajuste do período de amostragem com o objetivo de se evitar a manipulação tanto de dados sub-amostrados quanto de dados sobre-amostrados. A manipulação de dados sobre-amostrados pode gerar problemas de mau condicionamento numérico nas etapas seguintes da identificação. Caso ela seja constatada, deve-se realizar a dizimação dos dados coletados. O método de ajuste do período de amostragem adotado neste trabalho foi proposto por Aguirre (1995), sendo baseado em funções de autocorrelação linear e não linear. A descrição a seguir foi extraída de Barros (1997).

Funções de autocorrelação são funções que medem o “grau de similaridade” entre o sinal original e uma versão do sinal atrasada (Rosenstein *et alii*, 1994). Elas são definidas para o caso contínuo e sistemas ergódicos como

$$\Phi_{yy} = E\{y(t)y(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(t-\tau)dt, \quad (3.1)$$

onde $E\{\bullet\}$ refere-se à esperança matemática e τ à variável responsável pelos atrasos entre a função original e a função atrasada. Para o caso discreto e ergódico, a função de autocorrelação pode ser definida como

$$\Phi_{yy}[n] = E\{y[m+n]y[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]y[m]. \quad (3.2)$$

Um gráfico típico de uma função de autocorrelação apresenta o seu máximo para um atraso igual a zero.

Sendo T_{ss} o período de amostragem original dos dados coletados, calcula-se primeiramente as funções de autocorrelação linear e não linear do processo $y(t)$:

$$\Phi_{yy} = E\{y(t)y(t-\tau)\} \quad (3.3)$$

e

$$\Phi_{y^2, y^2}(\tau) = E\{[y^2(t) - E\{y^2(t)\}][y^2(t-\tau) - E\{y^2(t)\}]\}. \quad (3.4)$$

Em seguida, escolhe-se o menor entre τ_y e τ_{y^2} , ou seja

$$\tau_m = \min\{\tau_y, \tau_{y^2}\}, \quad (3.5)$$

onde τ_y e τ_{y^2} correspondem aos primeiros mínimos observados nas funções de autocorrelação linear e não linear. O valor de τ_m multiplicado por T_{ss} determina uma faixa de valores desejáveis para a escolha do período de amostragem (Aguirre, 1995):

$$\frac{\tau_m \times T_{ss}}{20} \leq T_s \leq \frac{\tau_m \times T_{ss}}{10}, \quad (3.6)$$

que em alguns casos pode ser relaxada em seu limite superior para $\frac{\tau_m \times T_{ss}}{5}$ e inferior para $\frac{\tau_m \times T_{ss}}{25}$. Segundo o método, se T_{ss} estiver dentro do intervalo proposto na equação 3.6, então os dados coletados originalmente podem ser manipulados sem alterar o tempo de amostragem. Caso $T_s < \frac{\tau_m \times T_{ss}}{20}$, os dados originais devem ser dizimados a fim de satisfazer 3.6.

3.2.1.4 Ruído nos dados

Os efeitos do ruído nos dados coletados do sistema podem ser reduzidos através de técnicas de processamento digital de sinais. Algumas destas técnicas implementam a filtragem digital dos dados utilizando algoritmos computacionais. Basicamente, estes algoritmos realizam operações aritméticas sobre os dados segundo uma função estabelecida para o tipo de filtragem que se deseja obter. Maiores informações sobre este assunto podem ser encontradas em (Johnson, 1989; Stearns e Hush, 1990).

3.2.2 Detecção de não linearidades

O comportamento dinâmico de um sistema é adequadamente descrito por modelos lineares quando as dinâmicas de interesse na modelagem estão restritas a uma região linear do sistema. Em alguns casos, os modelos lineares também se mostram eficientes na tarefa da modelagem quando as não linearidades presentes nas dinâmicas do sistema não são significativas. Normalmente, em todas as outras situações de modelagem de sistemas torna-se vantajoso o uso de modelos não lineares.

Na execução dos testes de não linearidades avalia-se o comportamento não linear reproduzido pelas saídas do sistema em resposta à excitação das entradas por sinais de teste especificamente projetados. Uma das principais propriedades destes sinais de teste é possuírem a mesma faixa de amplitude dos sinais utilizados na operação do sistema (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

Em situações onde não é possível a experimentação do sistema para a detecção de não linearidades, pode-se realizar este teste sobre um conjunto de dados pré-coletados do sistema, contanto que as propriedades básicas dos sinais de entrada proveniente do conjunto de dados satisfaçam os requisitos básicos exigidos pelo teste.

Alguns dos algoritmos utilizados na detecção de não linearidades em sistemas SISO são (Billings e Voon, 1983; Haber, 1985):

- teste no domínio do tempo;
- método da autocorrelação de ordem elevada;
- método da correlação-cruzada não linear;
- teste em estado estacionário;
- teste do valor médio do sinal de saída;

- método da frequência;
- método da densidade espectral linear;
- método da correlação linear;
- método da dispersão.

Segundo o relato de simulações com os testes de detecção de não linearidades citados acima (Haber, 1985), os três primeiros (teste no domínio do tempo, método da autocorrelação de ordem elevada e o método da correlação-cruzada não linear) apresentaram desempenho superior aos demais.

No teste de detecção de não linearidades utilizando o *método da autocorrelação de ordem elevada*, o sistema é excitado com um sinal de teste $u(t)+b$, onde $b \neq 0$, os momentos de terceira ordem de $u(t)$ são nulos e todos os momentos de ordem par existem². Calcula-se então, a seguinte função de autocorrelação:

$$\Phi_{y, y^2}(\tau) = E\{(y(t-\tau) - \bar{y})(y(t) - \bar{y})^2\} = 0 \quad \forall \tau \quad . \quad (3.7)$$

Para um conjunto de dados de comprimento N , define-se um intervalo de confiança de 95%, dado por $\pm 1,96 / \sqrt{N}$. Se as dinâmicas presentes nos dados forem lineares ou suavemente não lineares, a função de autocorrelação permanecerá dentro do intervalo de confiança com 95% de probabilidade. Qualquer correlação significativa será indicada por um ou mais pontos posicionados fora do intervalo de confiança de 95%, indicando portanto, a presença de não linearidades significativas nos dados utilizados no teste (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

² Alguns dos sinais que satisfazem estas propriedades são as senóides, sinais gaussianos e os do tipo PRBS (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

3.2.3 Escolha da estrutura do modelo

Um modelo matemático de um sistema é um análogo matemático das dinâmicas do sistema. A representação matemática usada na modelagem de um sistema pode assumir formas variadas dependendo do tipo e da quantidade de informação disponível para descrever o seu comportamento. Na tentativa de descrever satisfatoriamente os regimes dinâmicos não lineares de um sistema, as estruturas do modelo podem se tornar demasiadamente complexas e tornar a sua manipulação posterior difícil ou mesmo inviável.

Algumas das representações possíveis de serem utilizadas na modelagem de sistemas não lineares são (Çinar, 1995):

- séries de Volterra;
- séries de Wiener;
- redes neuronais;
- funções racionais;
- funções lineares por partes;
- modelos estruturados por blocos;
- modelos polinomiais.

Até o presente momento nenhuma representação em particular pode ser considerada como “a melhor” para qualquer aplicação, e o problema de encontrar uma boa representação é normalmente um problema de tentativa e erro (Aguirre, 1996).

As séries de Volterra foram uma das primeiras representações utilizadas na modelagem de sistemas não lineares. Uma das dificuldades relacionadas à sua utilização é a enorme quantidade de parâmetros necessária para aproximar não linearidades simples (Billings, 1980).

Neste trabalho, serão utilizados os modelos polinomiais *não lineares auto-regressivos com média móvel e entrada exógena* (*nonlinear autoregressive moving average with exogenous inputs*, NARMAX). A estrutura de um modelo NARMAX, com entrada única e saída única, é dada por (Leontaritis e Billings, 1985):

$$y(t) = F^l[y(t-1), y(t-2), \dots, y(t-n_y), u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n_u), e(t-1), e(t-2), \dots, e(t-n_e)] + e(t) \quad , \quad (3.8)$$

onde F é uma função não linear qualquer; $y(t)$ e $u(t)$ são respectivamente o sinal de saída e o sinal de entrada do sistema; $e(t)$ modela termos de ruído e incertezas do modelo; n_y , n_u e n_e são, respectivamente, os atrasos máximos dos termos em y , u e e . Em modelos polinomiais, l representa o grau de F .

Geralmente, a forma não linear de F não é conhecida. Contudo, em alguns casos, ela pode ser arbitrariamente bem aproximada por funções polinomiais. A expansão de F em um polinômio de grau l resulta em:

$$y(t) = \theta_0 + \sum_{i_1=1}^n \theta_{i_1} x_{i_1}(t) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=i_1}^n \theta_{i_1 i_2} x_{i_1}(t) x_{i_2}(t) + \dots \\ \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_l=i_1-1}^n \theta_{i_1 \dots i_l} x_{i_1}(t) \dots x_{i_l}(t) + e(t) \quad , \quad (3.9)$$

onde $n = n_y + n_u + n_e$, os θ s são os coeficientes escalares do modelo a serem estimados e $x(t)$ representam os termos em y , u , e e .

As formas polinomiais têm se mostrado adequadas para quantificar e modelar fenômenos complexos desde que a estrutura do modelo seja

apropriada (Kortmann *et alii*, 1988; Noshiro *et alii*, 1993; Jang e Kim, 1994; Aguirre e Billings, 1995b). Destacam-se também as seguintes vantagens:

- os modelos polinomiais são globais e conseqüentemente o particionamento dos dados não é necessário³;
- o comprimento de dados requerido para a derivação do modelo é relativamente pequeno (500 pontos ou menos);
- os modelos podem ser obtidos a partir de dados com nível moderado de ruído;
- facilidade de simulação e análise;
- as estruturas do modelo identificado são simples, tornando relativamente fácil a interpretação analítica de várias propriedades dinâmicas do modelo;
- os modelos polinomiais NARMAX são lineares nos parâmetros, o que torna possível o uso de um grande número de algoritmos de estimação de parâmetros utilizados na derivação de modelos lineares.

Uma das principais limitações do uso de modelos NARMAX refere-se à modelagem de sistemas com alto nível de ruído. O ruído presente nos dados pode comprometer o desempenho dos algoritmos de estimação se os dados forem caóticos, fazendo-se necessário o uso de técnicas de pré-filtragem dos dados antes da execução do procedimento de identificação (Aguirre *et alii*, 1996). Outra limitação que diz respeito ao uso de modelos NARMAX, reside na

³ As representações utilizadas na modelagem de sistemas podem ser classificadas em dois grupos principais, chamados *representações globais* e *representações locais*. Nas representações locais, os dados são divididos em grupos aos quais podem ser ajustadas funções lineares em torno dos pontos de operação. Portanto, a modelagem de sistemas, utilizando representações locais, resultam em modelos lineares por partes e descontínuos.

pouca capacidade em ajustar dados que contenham oscilações com variações abruptas na saída do modelo que não correspondam a variações abruptas na entrada do modelo. Em alguns casos, os modelos polinomiais falham na reprodução destas oscilações. Ocorrem também situações na modelagem onde a característica estática não linear do sistema não pode ser bem aproximada por modelos polinomiais com baixo grau de não linearidade (Aguirre, 1997).

3.2.4 Detecção da estrutura

Tendo definido os modelos polinomiais para a representação do sistema a ser modelado, a etapa de *detecção de estrutura* constitui-se na determinação de que termos, dentre todos os possíveis, serão incluídos no modelo.

O número total de termos candidatos a serem considerados na formação de um modelo polinomial SISO, pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$M = 1 + \sum_{j=1}^l n_j \quad (3.10)$$

onde

$$n_j = \frac{n_{j-1}(j-1+n_y+n_u+n_e)}{j}$$

e

$$n_0 = 1.$$

Observa-se que M cresce geometricamente com o aumento do grau de não linearidade l do modelo polinomial e com a ordem dos atrasos dos termos

em y , u e e . Nestas circunstâncias, a estrutura polinomial selecionada para modelar o sistema poderá se tornar exageradamente complexa e ter a sua manipulação inviabilizada se forem incluídos todos os termos possíveis.

Em geral, à medida que a complexidade do modelo aumenta, aumenta também a sua flexibilidade em se ajustar aos dados, capturando as principais dinâmicas necessárias à descrição do sistema. Por outro lado, modelos com excesso de termos (*sobreparametrizados*) tendem a apresentar dinâmicas não apresentadas pelo sistema original e eventualmente se tornam instáveis (Aguirre e Billings, 1995a).

Conforme verificado em diversos trabalhos (Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989; Jang e Kim, 1994; Aguirre e Billings, 1995a; Rodrigues, 1996; Jácome, 1996), modelos com um número reduzido de termos conseguem descrever satisfatoriamente o sistema na maioria dos casos. Além disto, modelos com representações parcimoniosas são desejáveis quando empregados no projeto de controladores, na análise e na predição do comportamento dinâmico de sistemas e em outras aplicações, mesmo quando não existam restrições computacionais à manipulação de modelos complexos (Chen *et alii*, 1989).

Um dos algoritmos disponíveis para fazer a detecção da estrutura de modelos polinomiais do tipo NARMAX é conhecido como *taxa de redução do erro* (error reduction ratio, ERR) (Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989). Neste algoritmo, é calculada a parcela da redução da soma dos quadrados dos resíduos do modelo devido à inclusão de cada termo. No próximo capítulo o ERR será descrito com detalhes. Outras técnicas que podem ser usadas em conjunto com o ERR são a *técnica de aproximação por zeramento e reajuste* (zeroing-and-refitting approach) (Kadtke *et alii*, 1993) e o conceito de *agrupamento de termos* (term clustering) (Aguirre e Billings, 1995c). Uma breve comparação destas técnicas pode ser encontrada em (Aguirre, 1994).

3.2.5 Estimação de parâmetros

Obtido o conjunto de dados composto pelos sinais de entrada e de saída do sistema e definida a estrutura do modelo, o passo seguinte no procedimento de identificação é a *estimação de parâmetros*, onde serão atribuídos valores numéricos aos coeficientes dos termos constituintes do modelo.

Nesta seção será discutida, brevemente, a estimação de parâmetros de modelos NARMAX aplicados na modelagem de sistemas SISO. No capítulo 4 este assunto será abordado com mais detalhes, junto com a implementação de um algoritmo de estimação ortogonal aplicado à identificação de sistemas MIMO. Mais informações sobre este assunto podem ser encontradas em (Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989).

O modelo descrito pela equação 3.9 pertence à família de modelos regressivos lineares nos parâmetros do tipo

$$y(t) = \sum_{j=1}^M p_j(t) \hat{\theta}_j(t) + \xi(t) \quad t = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

onde $y(t)$ representa o sinal de saída gerado pelo modelo e N o comprimento dos vetores de dados; $p_j(t)$ são os regressores do modelo, correspondendo à termos de grau 1 a l formados pela combinação de $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ definidos na equação 3.9; M é o número de regressores e $\hat{\theta}_j$ são os valores numéricos dos coeficientes dos regressores, ou seja, os parâmetros estimados. $\xi(t)$ são os resíduos do modelo.

A equação 3.11 pode ser reescrita em forma matricial como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\Theta + \Xi \quad (3.12)$$

O vetor de parâmetros Θ pode ser encontrado através da minimização da norma Euclidiana dos resíduos

$$\|\Xi\|_2^2 = \sum_{t=1}^N \xi(t)^2, \quad (3.13)$$

ou seja, resolvendo um problema de mínimos quadrados (Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989).

Uma das várias técnicas que podem ser aplicadas na solução de um problema de mínimos quadrados utiliza a decomposição ortogonal da matriz $\mathbf{P}$. Dentre os métodos numéricos que utilizam esta técnica destacam-se a *Transformação de Householder*, o *Método de Givens* e os *Métodos Clássico e Modificado de Ortogonalização de Gram-Schmidt*, dentre outros (Chen *et alii*, 1989; Bronson, 1993).

3.2.6 Critérios de informação

Até este ponto as considerações feitas sobre a seleção de modelos tem se orientado principalmente em escolher a representação mais concisa dentre todas as possíveis. O problema de como selecionar o melhor modelo final que concilie qualidade de ajuste aos dados com número reduzido de termos pode ser resolvido, em muitos casos, através de *critérios de informação* (Aguirre, 1994).

Os critérios de informação são normalmente implementados através de funções de custo estatísticas. Por este motivo, eles selecionam, geralmente, os modelos que são ótimos no sentido estatístico, ou seja, com boa capacidade de ajuste aos dados. Contudo, não existe garantia de que um modelo que seja ótimo no sentido estatístico também o seja no sentido dinâmico⁴.

Um dos critérios clássicos mais utilizados na estimação da ordem de modelos polinomiais é o *critério de informação de Akaike* (Akaike's information criterion, AIC) (Akaike, 1974). Pelo critério de Akaike o número de termos constituintes do modelo pode ser determinado minimizando-se a função de custo

$$J = N * \log(\text{VAR}\{\xi(t)\}) + (2 * n_p), \quad (3.14)$$

onde N representa o comprimento de dados, $\xi(t)$ os resíduos do modelo e n_p o número de termos. A qualidade de ajuste dos dados de identificação é representada pelo primeiro termo da função de custo ao passo que o segundo termo penaliza cada termo a mais do modelo.

Outros critérios de informação que também podem ser citados são o *critério do erro de predição final* (final prediction error, FPE) (Akaike, 1974), *lei de Khundrins do critério de iteração logaritmo* (Khundrin's law of iterated logarithm criterion, LILC) (Hannan e Quinn, 1979), *critério de informação Bayesiano* (Bayesian information criterion, BIC) (Kashyap, 1977), dentre outros. Uma revisão de tais critérios pode ser encontrada em (Gooijer *et alii*, 1985).

⁴ O sentido “dinâmico” neste contexto se refere à capacidade do modelo de reproduzir invariantes dinâmicos tais como bifurcações, mapas e seções de Poincaré, etc, presentes nos sistemas não lineares (Aguirre, 1994).

Na aplicação dos critérios AIC(4), LILC e BIC relatada em Aguirre (1994) foi observado que embora tais critérios normalmente não selecionem o modelo com a melhor propriedade dinâmica, o número de termos indicado como estatisticamente ótimo é, em geral, próximo do número de termos dinamicamente ótimo.

3.2.7 Validação dos modelos

O passo final do procedimento de identificação é a validação dos modelos obtidos. O objetivo da validação é confrontar o modelo identificado e o sistema original e avaliar a capacidade do modelo de representar adequadamente o sistema. Os testes de validação atuam como ferramentas de auxílio no refinamento dos modelos, revelando a presença de erros cometidos na realização dos procedimentos de identificação (Doebelin, 1980).

Uma das formas mais simples de se validar os modelos é efetuar uma comparação gráfica entre as curvas dos sinais de saída produzidos pelo modelo (predição temporal) e as curvas dos sinais de saída reais gerados pelo sistema (Bosch e Klauw, 1994). Neste caso, são avaliadas as semelhanças (ou diferenças) exibidas pelas duas curvas, tanto em relação aos valores de amplitude quanto ao perfil dinâmico exibido pelos sinais.

A literatura também descreve as seguintes formas de validação:

- validação estatística;
- validação dinâmica.

O procedimento de *validação estatística* consiste em verificar a presença de dinâmicas não modeladas nos resíduos dos parâmetros do modelo identificado. Em modelos lineares, são feitos testes de correlação para

verificar se os resíduos são brancos e não correlacionados com o sinal de entrada. Em modelos não lineares é necessário a realização de um conjunto de testes de correlação mais completo que detecte a presença de termos cruzados nos resíduos (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986; Billings e Zhu, 1994).

Na validação estatística de modelos não lineares SISO são normalmente verificadas as seguintes identidades:

$$\Phi_{\xi\xi}(\tau) = E\{\xi(t-\tau)\xi(t)\} = \delta(0) ; \quad (3.15)$$

$$\Phi_{u\xi}(\tau) = E\{u(t-\tau)\xi(t)\} = 0, \quad \forall \tau ; \quad (3.16)$$

$$\Phi_{\xi\xi(u)}(\tau) = E\{\xi(t)\xi(t-1-\tau)u(t-1-\tau)\} = 0 \quad \tau \geq 0 ; \quad (3.17)$$

$$\Phi_{u^2\xi}(\tau) = E\{(u^2(t-\tau) - \overline{u^2(t)})\xi(t)\} = 0 \quad \forall \tau ; \quad (3.18)$$

$$\Phi_{u^2\xi^2}(\tau) = E\{(u^2(t-\tau) - \overline{u^2(t)})\xi^2(t)\} = 0 \quad \forall \tau , \quad (3.19)$$

onde $\delta(0)$ é a função delta de Kronecker.

Em modelos sem termos de entrada do tipo $u(t)$, são verificadas as seguintes identidades (Billings e Tao, 1991):

$$\Phi_{\xi\xi}(\tau) = E\{(\xi(t) - \bar{\xi}(t))(\xi(t - \tau) - \bar{\xi}(t))\} = \delta(0) \quad ; \quad (3.20)$$

$$\Phi_{\xi\xi^2}(\tau) = E\{(\xi(t) - \bar{\xi}(t))(\xi(t - \tau) - \bar{\xi}(t))^2\} = \delta(0) \quad ; \quad (3.21)$$

$$\Phi_{\xi^2, \xi^2}(\tau) = E\{(\xi^2(t) - \bar{\xi}^2(t))(\xi^2(t - \tau) - \bar{\xi}^2(t))\} = \delta(0) \quad . \quad (3.22)$$

Para um conjunto de dados de comprimento N , define-se um intervalo de confiança de 95%, dado por $\pm 1,96 / \sqrt{N}$. Se o modelo for *não-polarizado*, os resíduos são brancos e as funções de correlação deverão permanecer dentro do intervalo de confiança com 95% de probabilidade. Qualquer correlação significativa será indicada por um ou mais pontos posicionados fora do intervalo de confiança de 95% (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986).

Os testes de correlação utilizando os resíduos do modelo e os dados do sistema são facilmente calculáveis. Contudo, eles se limitam a fornecer somente informações estatísticas sobre o modelo. Um modelo que seja estatisticamente válido pode não ser dinamicamente adequado, ou seja, os testes de correlação não indicam se o modelo capturou e está apto a reproduzir, satisfatoriamente, as dinâmicas do sistema original (Aguirre *et alii*, 1996).

Na *validação dinâmica*, as propriedades dinâmicas do modelo identificado são comparadas com invariantes desenvolvidos para a análise de dinâmicas não lineares. Os seguintes critérios podem ser utilizados em alguns casos (Aguirre e Billings, 1994; Brown *et alii*, 1994; Letellier *et alii*, 1995):

- diagramas de bifurcação;
- expoentes de Lyapunov;

- mapas de Poincaré;
- dimensão de correlação;
- gráficos fase-espço reconstruídos;
- caracterização topológica;
- sincronização.

Dentre os invariantes citados acima, os diagramas de bifurcação têm se mostrados como os mais rigorosos no procedimento de validação dinâmica, por serem mais sensíveis às variações na estrutura do modelo (Aguirre e Billings, 1994). Os expoentes de Lyapunov fornecem indicações da capacidade de predição do modelo e da sua sensibilidade à variação das condições iniciais. Na prática, a escolha de qual invariante utilizar vai depender da viabilidade de se obter o respectivo invariante do sistema original para uso na comparação.

3.3 Considerações finais

Foram abordados brevemente neste capítulo os principais conceitos relativos aos procedimentos de identificação de sistemas não lineares.

As técnicas de identificação de sistemas são ferramentas úteis na modelagem quando o conhecimento prévio sobre o sistema a ser modelado é insuficiente, dificultando, ou mesmo impossibilitando, o uso de técnicas tradicionais, como por exemplo, a modelagem pela física do processo.

Os procedimentos adotados na identificação de sistemas para a derivação de modelos não lineares são, em essência, os mesmos adotados para a derivação de modelos lineares, podendo ser aplicados a sistemas SISO ou MIMO.

A forma de execução e os cuidados tomados durante a etapa de experimentação do sistema e aquisição de dados são um dos fatores mais influentes no desempenho das etapas subsequentes da identificação do sistema. Normalmente, a sua execução bem planejada proporciona a geração de dados com boa capacidade de representar o sistema.

Na seleção dos sinais de excitação do sistema utilizados no procedimento de experimentação devem ser levados em consideração fatores como a excitação persistente do sistema sobre toda a faixa de não linearidades (no caso de identificação não linear), potência espectral suficiente para excitar a dinâmica de interesse na modelagem e o projeto do perfil de amplitude. Normalmente, tais requisitos são menos severos quando aplicados na derivação de modelos lineares.

Os testes de detecção de não linearidades indicam o grau de não linearidades presentes nos dados coletados do sistema, atuando como ferramentas de auxílio na seleção de uma estrutura linear ou não linear mais adequada para modelar o sistema.

A utilização de modelos polinomiais do tipo NARMAX normalmente mostra bons resultados quando aplicados na modelagem de sistemas reais. As principais vantagens no seu uso se referem à simplicidade de análise, facilidade na simulação e operação, não requer séries temporais muito longas e a existência de um grande número de algoritmos de estimação de parâmetros do modelo. Por outro lado, a principal deficiência dos modelos polinomiais NARMAX se refere à sua pouca capacidade em ajustar dados que contenham oscilações abruptas na saída do modelo que não correspondam a variações abruptas na sua entrada.

O número de termos dos modelos polinomiais não lineares tende a se tornar excessivamente grande à medida em que a ordem do modelo cresce.

Contudo, utilizando-se apenas uma pequena parcela dos termos é normalmente possível reproduzir, satisfatoriamente, a dinâmica do sistema modelado. A seleção destes termos dentre todos os termos possíveis é alcançada por algoritmos de detecção de estrutura, destacando-se entre eles o ERR a ser descrito no próximo capítulo.

Os critérios de informação são ferramentas que facilitam a seleção do modelo com melhor tamanho e ajuste aos dados. Contudo, por utilizarem funções de custo estatísticas, eles apresentam melhores resultados na indicação de modelos com um número ótimo de termos no “sentido estatístico” (ajuste aos dados), o que não necessariamente garante que o modelo tenha a capacidade de reprodução de propriedades dinâmicas do sistema.

A finalização do procedimento de identificação se dá com a validação do modelo obtido. Técnicas de validação subjetiva, estatística e dinâmica podem ser utilizadas para avaliar a capacidade do modelo identificado de representar adequadamente o sistema original. Se o modelo obtido for reprovado deverá ser feita uma avaliação sobre as suas deficiências com o objetivo de definir quais os passos, anteriores à etapa de validação, que deverão ser modificados e refeitos. Se o modelo for aprovado o trabalho de identificação estará concluído.

Capítulo 4

Identificação de sistemas não lineares MIMO

4.1 Introdução

Quando uma expansão de um modelo NARMAX polinomial é selecionada, o modelo se torna linear nos parâmetros. Uma vez determinada a estrutura mais adequada para modelar o sistema, somente os coeficientes dos parâmetros do modelo são desconhecidos e a identificação pode ser formulada como um problema padrão de mínimos quadrados (Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989). Contudo, raramente se conhece de antemão a estrutura do modelo e portanto o uso de algoritmos de seleção de estrutura se torna parte vital dos procedimentos de identificação.

O aumento da ordem e do número de termos são algumas das estratégias utilizadas na seleção da estrutura do modelo com o objetivo de se alcançar um ajuste satisfatório aos dados coletados do sistema. Contudo, o uso abusivo ou de forma isolada destes recursos pode resultar em modelos bastante complexos. Em geral, modelos complexos têm pouco valor prático e são difíceis de manipular. Problemas de seleção de estrutura de modelos estão presentes tanto nos sistemas com *entrada única e saída única* (single-input-single-output, SISO) quanto nos sistemas *com múltiplas entradas e múltiplas saídas* (multi-input-multi-output, MIMO), sendo nos sistemas MIMO, devido à sua maior complexidade, mais críticos.

O objetivo deste capítulo é abordar a identificação de sistemas MIMO não lineares apresentando um algoritmo de estimação ortogonal de

parâmetros baseado na Transformação de Householder. Este algoritmo realiza, de forma combinada, a *seleção da estrutura* e a *estimação de parâmetros* de modelos polinomiais NARMAX, utilizando o conjunto de dados coletados do sistema. Também serão apresentados os testes de *validação de modelos* MIMO. Os tópicos cobertos por este capítulo são uma extensão dos tópicos cobertos no capítulo 3, onde a base fundamental dos procedimentos usados na identificação de sistemas foi estabelecida.

4.2 Representação dos sistemas MIMO

Um sistema não linear, discreto, multivariável, com m saídas e r entradas, pode ser descrito por um modelo polinomial NARMAX com a seguinte forma geral (Leontaritis e Billings, 1985):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = F^l[\mathbf{y}(t-1), \mathbf{y}(t-2), \dots, \mathbf{y}(t-n_y), \mathbf{u}(t-1), \mathbf{u}(t-2), \dots, \mathbf{u}(t-n_u), \\ \mathbf{e}(t-1), \mathbf{e}(t-2), \dots, \mathbf{e}(t-n_e)] + e(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m(t) \end{bmatrix}.$$

Na equação 4.1, F é uma função não linear qualquer; $\{\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)\}$, $\{\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_r(t)\}$ e $\{\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_m(t)\}$, representam, respectivamente, vetores de séries temporais contendo os sinais de saída, entrada e ruído do sistema; $e(t)$ modela incertezas do modelo; n_y , n_u e n_e são, respectivamente, os atrasos

máximos dos termos de saída, entrada e ruído. Neste trabalho F^l será uma função polinomial de grau l .

Expressando a equação 4.1 em termos das suas componentes teremos, para o subsistema i , a seguinte representação:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) = & f_i(y_1(t-1), \dots, y_1(t-n_{y_1}^i), \dots, y_m(t-1), \dots, y_m(t-n_{y_m}^i), \\
 & u_1(t-1), \dots, u_1(t-n_{u_1}^i), \dots, u_r(t-1), \dots, u_r(t-n_{u_r}^i), \\
 & e_1(t-1), \dots, e_1(t-n_{e_1}^i), \dots, e_m(t-1), \dots, e_m(t-n_{e_m}^i)) \\
 & + e_i(t), \\
 & i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Normalmente, a forma não linear de f_i não é conhecida. Com o intuito de utilizar a equação 4.2 na identificação de sistemas torna-se necessário a sua parametrização. Este objetivo pode ser alcançado através da sua expansão polinomial. Expandindo $f_i(\cdot)$ como um polinômio de grau l_i obtemos:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) = & \theta_0^i + \sum_{i_1=1}^n \theta_{i_1}^i x_{i_1}(t) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=i_1}^n \theta_{i_1 i_2}^i x_{i_1}(t) x_{i_2}(t) + \dots \\
 & \dots + \sum_{i=1}^n \dots \sum_{i_l=i_{l-1}}^n \theta_{i_1 \dots i_l}^i x_{i_1}(t) \dots x_{i_l}(t) + e(t), \\
 & i = 1, \dots, m
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

onde

$$n = \sum_{i=1}^m n_{y_i}^{(i)} + \sum_{i=1}^r n_{u_i}^{(i)} + \sum_{i=1}^m n_{e_i}^{(i)},$$

os θ s são os coeficientes escalares do modelo a serem estimados e

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t-1), & x_2(t) = y_1(t-2), & \dots, & x_{m \times n_y^i}(t) = y_m(t - n_y), \\ x_{m \times n_y^i + 1}(t) = u_1(t-1), & \dots, & x_{m \times n_y^i + r \times n_u^i}(t) = u_r(t - n_u), \\ x_{m \times n_y^i + r \times n_u^i + 1}(t) = e_1(t-1), & \dots, & x_{n_i}(t) = e_m(t - n_e). \end{cases}$$

A seguir apresenta-se um exemplo de um modelo do tipo NARMAX polinomial:

$$\begin{aligned} y_1(t) = & 0,5y_1(t-1) + u_1(t-2) + 0,1y_2(t-1)u_1(t-1) + 0,5e_1(t-1) \\ & + 0,2y_1(t-2)e_1(t-2) + e_1(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

e

$$\begin{aligned} y_2(t) = & 0,9y_2(t-2) + u_2(t-1) + 0,2y_2(t-1)u_2(t-2) + 0,5e_2(t-1) \\ & + 0,1y_2(t-1)e_1(t-2) + e_2(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

As equações 4.4 e 4.5 representam, respectivamente, os modelos dos subsistemas 1 e 2. Em conjunto, 4.4 e 4.5 formam a representação global do sistema.

4.3 Detecção da estrutura e estimação de parâmetros de sistemas MIMO

A identificação de cada subsistema i , representado na equação 4.3, pode ser realizada de forma desacoplada da identificação dos outros $(m-1)$ subsistemas. Portanto, para $i=1, \dots, m$, são determinadas a estrutura do modelo e os valores dos parâmetros do i -ésimo subsistema de forma independente dos demais subsistemas (Billings *et alii*, 1989).

De maneira similar à abordagem feita para as equações (3.11) e (3.12) do capítulo anterior, pode-se definir o modelo do subsistema i como pertencente à família de modelos regressivos lineares nos parâmetros do tipo

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^M p_j(t) \hat{\theta}_j + \xi(t), \quad t = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Na equação 4.6 $y_i(t)$ representa o sinal de saída do subsistema i gerado pelo modelo correspondente e N o comprimento dos vetores de dados; $p_j(t)$ são os regressores do modelo, correspondendo a termos de grau 1 a l formados pela combinação de $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ definidos na equação 4.3; M é o número de regressores e $\hat{\theta}_j$ são os valores numéricos dos coeficientes dos regressores, ou seja, os parâmetros a serem estimados. $\xi(t)$ são os resíduos do modelo.

Em sistemas MIMO, o número de regressores pode ser calculado pela seguinte equação:

$$M_i = 1 + \sum_{j=1}^l n_j, \quad (4.7)$$

onde

$$n_j = \frac{n_{j-1} \left(j - 1 + \sum_{k=1}^m (n_{y_k}^i + n_{e_k}^i) + \sum_{k=1}^r n_{r_k}^i \right)}{j} \text{ e } n_0 = 1.$$

Reescrevendo a equação 4.6 na forma matricial encontra-se:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{P}_i \boldsymbol{\Theta}_i + \boldsymbol{\Xi}_i \quad (4.8)$$

onde

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} y_i(1) \\ \vdots \\ y_i(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_i = [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_M], \quad \Theta_i = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_M \end{bmatrix}, \quad \Xi_i = \begin{bmatrix} \xi(1) \\ \vdots \\ \xi(N) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{p}_j = \begin{bmatrix} p_j(1) \\ \vdots \\ p_j(N) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, M_i.$$

O vetor de parâmetros Θ_i pode ser encontrado através da minimização de $\|\Xi_i\|_2$, ou seja, resolvendo um problema de mínimos quadrados (Billings *et alii*, 1989; Chen *et alii*, 1989).

As rotinas computacionais de seleção da estrutura do modelo e estimação de parâmetros utilizadas neste trabalho fazem uso da Transformação de Householder (Chen *et alii*, 1989; Bronson, 1993). Este método numérico utiliza a técnica de decomposição ortogonal da matriz $\mathbf{P}$ na solução do problema de mínimos quadrados. O seu desempenho em trabalhos da área de identificação de sistemas não lineares tem se mostrado satisfatoriamente eficiente, conforme atestado por diversos trabalhos (Chen *et alii*, 1989; Aguirre e Billings, 1995a; Rodrigues, 1996; Jácome, 1996; Barros, 1997). As seções seguintes descrevem a Transformação de Householder e a sua aplicação em um algoritmo que realiza, de forma combinada, a seleção da estrutura do modelo e a estimação de parâmetros de sistemas MIMO.

4.3.1 Uso da Transformação de Householder na solução do problema de mínimos quadrados

Para facilitar a notação, nesta seção o subíndice 'i' será omitido. Assumindo que a matriz $\mathbf{P}$ tem posto pleno (Chen *et alii*, 1989) pode-se fatorá-la da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal ($\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$); $\mathbf{Q} \in \Re^{N \times M}$ e $\mathbf{R}$ é uma matriz triangular superior, onde $\mathbf{R} \in \Re^{M \times M}$.

Com o intuito de se obter um conjunto de N vetores ortonormais sobre um espaço Euclidiano de dimensão N , definimos uma matriz aumentada $\tilde{\mathbf{Q}}$ formada pela composição da matriz $\mathbf{Q}$ com $N-M$ vetores ortonormais:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = [\mathbf{Q}_M : \tilde{\mathbf{q}}_{M+1} \cdots \tilde{\mathbf{q}}_N] = [\mathbf{Q}_M : \tilde{\mathbf{Q}}_{N-M}]. \quad (4.10)$$

A equação 4.9 pode então ser reescrita como

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Premultiplicando a parte determinística da equação 4.8 por $\tilde{\mathbf{Q}}^T$ tem-se que

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{P} \Theta = \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Y} \quad (4.12)$$

e considerando a equação 4.11 chega-se a

$$\tilde{\mathbf{R}} \Theta = \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Y}. \quad (4.13)$$

Particionando a matriz $\tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Y}$ em

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_a \\ \mathbf{Y}_b \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{Y}_a$ é um vetor de comprimento M e $\mathbf{Y}_b$ um vetor de comprimento $N-M$, obtemos

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{P} \Theta\|_2 = \|\tilde{\mathbf{Q}}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{P} \Theta)\|_2 = \|\mathbf{Y}_a - \mathbf{R} \Theta\|_2 + \|\mathbf{Y}_b\|_2. \quad (4.15)$$

O vetor de parâmetros Θ é obtido resolvendo o sistema triangular

$$\mathbf{R} \Theta = \mathbf{Y}_a, \quad (4.16)$$

e a soma dos quadrados dos resíduos do modelo é dada por $\|\mathbf{Y}_b\|_2^2$.

A Transformação de Householder pode ser usada para encontrar a matriz $\mathbf{R}$ e o vetor $\mathbf{Y}_a$. Ela realiza uma série de operações do tipo

$$\mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{I} - \beta^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} (\mathbf{v}^{(k)})^T \quad k = 1, \dots, M \quad (4.17)$$

sobre a matriz aumentada

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{P}; \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & \cdots & \tilde{p}_{1M} & \tilde{p}_{1(M+1)} \\ \tilde{p}_{21} & \cdots & \tilde{p}_{2M} & \tilde{p}_{2(M+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{p}_{N1} & \cdots & \tilde{p}_{NM} & \tilde{p}_{N(M+1)} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

de dimensão $N \times (M+1)$, que resulta na matriz triangular inferior

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(M)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{Y}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_b \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Fazendo

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)} \quad k = 1, \dots, M \quad (4.20)$$

e

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad (4.21)$$

define-se a k -ésima Transformação de Householder como (Golub e Van Loan, 1989):

$$\sigma^{(k)} = \left(\sum_{i=k}^N (\tilde{p}_{ik}^{(k-1)})^2 \right)^{1/2}, \quad (4.22)$$

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\sigma^{(k)}(\sigma^{(k)} + |\tilde{p}_{kk}^{(k-1)}|)}, \quad (4.23)$$

$$v_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i < k \\ \tilde{p}_{kk}^{(k-1)} + \sin al[\tilde{p}_{kk}^{(k-1)}]\sigma^{(k)}, & i = k \\ \tilde{p}_{ik}^{(k-1)} & i > k \end{cases} \quad (4.24)$$

e

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)} - \mathbf{v}^{(k)}(\beta^{(k)}(\mathbf{v}^{(k)})^T \tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}). \quad (4.25)$$

4.3.2 Detecção de estrutura utilizando o ERR

A equação 4.7 pode ser usada para ilustrar a importância da utilização de algoritmos de seleção da estrutura de modelos polinomiais. Toma-se, como exemplo, um sistema MIMO com duas entradas e duas saídas ($m = r = 2$), todos os atrasos máximos dos termos de saída, entrada e ruído iguais a dois ($n_{y_m} = n_{u_r} = n_{e_m} = 2$) e o grau da função polinomial igual a três ($l = 3$). Neste caso, o número total de termos candidatos a serem considerados na formação do modelo polinomial de cada subsistema é igual a 455! O desconhecimento da estrutura do modelo polinomial que melhor represente o sistema pode induzir à tentativa de se utilizar a estrutura completa do modelo. Alguns dos problemas que podem aparecer em decorrência desta ação são a dificuldade de manipulação do modelo e problemas de mau-condicionamento numérico na etapa de estimação de parâmetros. Eles surgem do fato de que modelos polinomiais com estrutura completa são, em geral, de tamanho elevado e

comportam uma grande quantidade de termos sem qualquer representatividade das dinâmicas do sistema.

Sendo $\mathbf{P}$ a matriz de regressores que representa o modelo completo de cada subsistema (definida na equação 4.8), pode-se estabelecer o problema combinado da seleção da estrutura do modelo e estimação de parâmetros como “selecionar um submodelo $\mathbf{P}_s$ de $\mathbf{P}$ e encontrar a matriz de parâmetros estimados $\hat{\Theta}_s$ que se ajuste adequadamente aos dados”. No algoritmo de estimação ortogonal de parâmetros baseado na Transformação de Householder, a seleção da estrutura do submodelo $\mathbf{P}_s$ é efetuada selecionando-se uma coluna de $\mathbf{P}$ que faça com que a cada iteração seguinte do algoritmo a soma dos quadrados dos resíduos seja maximamente reduzida. Esta etapa do algoritmo usa como ferramenta básica a *taxa de redução do erro* (error reduction ratio, ERR) e será descrita a seguir.

Seja a matriz

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(0)} = [\mathbf{P}:\mathbf{Y}] = [\tilde{\mathbf{p}}_1^{(0)} \dots \tilde{\mathbf{p}}_M^{(0)}:\mathbf{Y}^{(0)}] \quad (4.26)$$

e $\mathbf{R}_k$ o menor principal, de dimensão $k \times k$, da matriz $\mathbf{R}$ definida na equação 4.9. Aplicando-se sucessivamente sobre a matriz $\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$ a Transformação de Householder $\mathbf{H}^{(i)}$, $i = 1, \dots, k-1$, ela é transformada em

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & & & \\ & \tilde{\mathbf{p}}_k^{(k-1)} & \dots & \tilde{\mathbf{p}}_M^{(k-1)}:\mathbf{Y}^{(k-1)} \\ & \mathbf{0} & & \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Se o processo for interrompido no $(k-1)$ -ésimo passo e um modelo composto por $(k-1)$ parâmetros for provisoriamente selecionado, obtém-se a seguinte expressão para a soma dos quadrados dos resíduos

$$\sum_{i=k}^N [y_i^{(k-1)}]^2, \quad (4.28)$$

que se reduz a

$$\sum_{i=k+1}^N (y_i^{(k)})^2 = \sum_{i=k}^N (y_i^{(k-1)})^2 - (y_k^{(k)})^2 \quad (4.29)$$

após $\mathbf{H}^{(k)}$ Transformações de Householder terem sido aplicadas a $\tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}$. Para que a soma dos quadrados dos resíduos seja maximamente reduzida na k -ésima iteração do algoritmo deve-se primeiramente selecionar uma coluna de $\tilde{\mathbf{p}}_k^{(k-1)} \dots \tilde{\mathbf{p}}_M^{(k-1)}$ que maximize $(y_k^{(k)})^2$. Em seguida, permutam-se a coluna selecionada e a coluna $\mathbf{p}_k^{(k-1)}$ e aplica-se sobre a matriz $\tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}$ a Transformação de Householder $\mathbf{H}^{(k)}$. Este objetivo pode ser alcançado da forma descrita a seguir.

Seja

$$\tilde{\mathbf{p}}_j^{(k-1)} = (\tilde{p}_j^{(k-1)}, \dots, \tilde{p}_{N_j}^{(k-1)})^T, \quad j = k, \dots, M. \quad (4.30)$$

Calcula-se

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j^{(k)} = \left(\sum_{i=k}^N \left(\tilde{p}_{ij}^{(k-1)} \right)^2 \right)^{1/2}, \\ b_j^{(k)} = \sum_{i=k}^N \tilde{p}_{ij}^{(k-1)} y_i^{(k-1)}, \\ j = k, \dots, M \end{array} \right. \quad (4.31)$$

e

$$[ERR]_j^{(k)} = \frac{\left(\frac{b_j^{(k)}}{a_j^{(k)}} \right)^2}{\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle} \quad j = k, \dots, M. \quad (4.32)$$

Encontra-se

$$h_j = \text{argumento} \left[\max \left\{ [ERR]_j^{(k)} \right\} \right] \quad j = k, \dots, M \quad (4.33)$$

e em seguida permutam-se as h_j -ésima e k -ésima colunas de $\tilde{\mathbf{P}}^{(k-1)}$.

O procedimento descrito acima pode ser empregado na seleção dos M_s termos da estrutura polinomial $\mathbf{P}_s$ de cada subsistema. A seqüência de passos é a seguinte:

- Como primeiro passo (iteração $k=1$) seleciona-se dentre as M colunas da matriz $\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$, definida na equação 4.26, a coluna associada ao maior valor do ERR calculado a partir das equações 4.30, 4.31, 4.32 e 4.33. Permuta-se a primeira coluna de $\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$ com a coluna selecionada e aplica-se sobre $\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$ a Transformação de Householder $\mathbf{H}^{(1)}$, utilizando-se as equações 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25. A matriz resultante ao final deste passo é $\tilde{\mathbf{P}}^{(1)}$.

- Repete-se o primeiro passo M_s-1 vezes (iterações $k=2,\dots,M_s$). Em cada um dos M_s-1 passos as operações relativas ao cálculo do ERR, permutação de colunas e aplicação da Transformação de Householder devem ser feitas sobre a matriz resultante no passo anterior desconsiderando-se a primeira coluna e a primeira linha. Além disto, o conjunto de equações 4.31 deve ser substituído por

$$\begin{cases} a_j^{(k+1)} = \left((a_j^{(k)})^2 - (\tilde{p}_{kj}^{(k)})^2 \right)^{1/2}, \\ b_j^{(k+1)} = b_j^{(k)} - \tilde{p}_{kj}^{(k)} y_k^{(k)}, \\ j = k = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (4.34)$$

O processo pode ser interrompido quando

$$1 - \sum_{k=1}^{M_s} \left\{ \max[ERR]^{(k)} \right\} < \rho, \quad (4.35)$$

onde $0 < \rho < 1$ é a tolerância desejada para os cálculos. Ao final do procedimento anterior, calculada a matriz $\tilde{\mathbf{P}}^{(M_s)}$, terão sido escolhidos M_s termos para o modelo do subsistema, dentre todos os possíveis termos candidatos. Na maioria das aplicações $M_s \ll M$. Critérios de informação podem ser usados para orientar sobre o melhor tamanho para o modelo (Aguirre, 1994).

4.3.3 Estimação de parâmetros

Definida a estrutura polinomial do modelo do subsistema, com os M_s termos mais representativos, pode-se calcular o subconjunto de parâmetros estimados, $\hat{\Theta}_s$, pela equação

$$\mathbf{R}_{M_s} \Theta_s = \mathbf{Y}_{M_s}, \quad (4.36)$$

onde a matriz triangular superior $\mathbf{R}_{M_s}$ de dimensão $M_s \times M_s$, e o vetor $\mathbf{Y}_{M_s}$ de comprimento M_s são obtidos a partir de

$$\tilde{\mathbf{p}}^{(M_s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{M_s} & & & \\ & \tilde{\mathbf{p}}_{M_s+1}^{(M_s)} & \cdots & \tilde{\mathbf{p}}_M^{(M_s)} : \mathbf{Y}^{(M_s)} \\ & \mathbf{0} & & \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

4.4 Validação de modelos MIMO

Os testes de validação estatística utilizados na validação de modelos SISO (Billings e Voon, 1983; Billings e Voon, 1986) podem ser estendidos para os modelos MIMO. Na validação estatística de modelos MIMO devem ser verificadas todas as possíveis correlações entre os resíduos e os sinais de entrada de todos os subsistemas. São normalmente verificadas as seguintes igualdades (Billings *et alii*, 1989):

$$\Phi_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\tau) = 0 \quad \tau \neq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad j = i, \dots, m; \quad (4.38)$$

$$\Phi_{u_i \varepsilon_j}(\tau) \quad \forall \tau \quad i = 1, \dots, r \quad \text{e} \quad j = i, \dots, m; \quad (4.39)$$

$$\Phi_{\varepsilon_i(\varepsilon_j u_k)}(\tau) \quad \tau \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad j = i, \dots, m \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, r; \quad (4.40)$$

$$\Phi_{(u_i u_j)' \varepsilon_k}(\tau) \quad \forall \tau \quad i = 1, \dots, r, \quad j = i, \dots, r \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, m; \quad (4.41)$$

$$\Phi_{(u_i u_j)'(\varepsilon_k \varepsilon_l)}(\tau) \quad \forall \tau \quad i = 1, \dots, r, \quad j = i, \dots, r, \quad k = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad l = k, \dots, m. \quad (4.42)$$

4.5 Considerações finais

Foi abordada neste capítulo a identificação de sistemas não lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas, MIMO.

A estrutura de um modelo polinomial NARMAX utilizada na identificação de um sistema MIMO com m saídas e r entradas é composta de um conjunto de termos formados pela combinação $\{\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)\}$, $\{\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_r(t)\}$ e $\{\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_m(t)\}$, representando, respectivamente, vetores de séries temporais contendo os sinais de saída, entrada e ruído do sistema.

Cada subsistema pode ser identificado de forma independente dos outros $(m-1)$ subsistemas. Os procedimentos de seleção da estrutura do modelo e identificação de parâmetros adotados neste trabalho utilizam um algoritmo de estimação ortogonal de parâmetros baseado na Transformação de Householder.

Estratégias de seleção de estrutura de modelos polinomiais são uma parte vital dos procedimentos de identificação de sistemas. Neste trabalho, a seleção da estrutura do modelo polinomial NARMAX de cada subsistema utiliza uma ferramenta conhecida como *taxa de redução do erro* (*error reduction ratio*, ERR). O ERR seleciona dentre todos os termos candidatos a fazerem parte do modelo aqueles que são mais representativos. Os termos selecionados são aqueles que maximizam a redução dos resíduos do modelo.

O algoritmo de estimação ortogonal de parâmetros realiza as etapas de seleção da estrutura do modelo e estimação de parâmetros de forma combinada. Ele manipula as matrizes de dados de forma que ao final da etapa de seleção da estrutura os termos mais representativos do sistema estão agrupados e em um formato simples para os cálculos do vetor de parâmetros.

Os testes de validação estatística de modelos MIMO são uma extensão dos testes dos modelos SISO. Nos testes devem ser verificadas todas as possíveis correlações entre os resíduos e os sinais de entrada de todos os subsistemas.

Capítulo 5

Modelos identificados para a coluna de flotação de 2" do CDTN

5.1 Introdução

Em todas as fases deste trabalho, em que as atividades executadas envolviam um contato prático com a coluna de flotação, utilizou-se *água* ao invés de *polpa de minério* e apenas *espumante* (Flotanol®) como reagente químico do processo. A motivação para esta escolha, além do aspecto econômico, foi a simplificação dos procedimentos de preparação e operação da coluna. Tal conduta vem sendo adotada em vários trabalhos da área de modelagem de colunas de flotação (Bergh and Yianatos, 1991; Bergh and Yianatos, 1993; Del Villar *et alii*, 1994; Bergh and Yianatos, 1995), uma vez que os resultados obtidos com água podem ser estendidos aos estudos utilizando minério devido às semelhanças entre os comportamentos dinâmicos investigados (Oliveira e Aquino, 1997).

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos pela aplicação dos procedimentos de identificação de sistemas MIMO à coluna de flotação de 2" do CDTN. Serão relatados os principais procedimentos realizados, desde a etapa de planejamento e execução dos testes até a obtenção final dos modelos. Em função do número elevado de gráficos gerados nas etapas de validação, decidiu-se apresentar os gráficos de validação estatística no apêndice A desta dissertação.

5.2. Seleção das variáveis de entrada e saída dos modelos

Dois aspectos foram considerados na seleção das variáveis de entrada e saída que deveriam compor os modelos da coluna: o grau de importância de cada uma delas e a disponibilidade de instrumentação da coluna para aplicação dos sinais de teste de experimentação e coleta de dados. De um consenso entre eles, resultou a seguinte seleção:

- entradas:

u_1 : *sinal de controle de velocidade da bomba de não flotado*;

u_2 : *vazão de água de lavagem*;

u_3 : *vazão de alimentação de ar*.

- saídas:

y_1 : *pressão no ponto superior na seção de concentração*;

y_2 : *pressão no ponto inferior na seção de concentração*.

Sob o ponto de vista do processo, escolher a *vazão de não flotado* como variável de entrada poderia ser mais útil na composição dos modelos ao invés de escolher como variável o *sinal de controle de velocidade da bomba de não flotado*. Contudo, não foi possível selecioná-la por não haver um instrumento disponível que pudesse fazer a medição. Alternativamente, durante a realização dos testes, foi feita, a cada dois minutos, uma medição indireta e manual desta vazão (medição de volume, em um intervalo fixo de tempo, executada por um dos operadores da instalação). Gráficos comparando os sinais de controle de velocidade enviados para a bomba e os sinais de vazão de não flotado obtidos nesta medição sugerem uma relação simples entre as duas variáveis. Embora seja baseada em uma medição sem o mesmo rigor das outras medições, esta relação pode ser aproveitada na manipulação dos

modelos. Os gráficos destes sinais obtidos no teste t25 serão apresentados na seção 5.4 (Figura 5.6).

5.3 Descrição dos testes

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos em dois testes de experimentação e aquisição de dados da coluna de flotação de 2” do CDTN. Estes testes, aqui nomeados t25 (arquivo de dados d25_1800.txt) e t26 (arquivo de dados d26_1610.txt), foram realizados em dias consecutivos e tiveram, respectivamente, uma duração útil de 110 e 90 minutos. A identificação da coluna foi realizada em malha aberta, ou seja, os sinais de saída não foram realimentados às entradas.

As condições de processo da alimentação foram as mesmas nos dois testes: vazão constante a 1230 ml/min com concentração de Flotanol a 12ml/min, 1%. Contudo, utilizou-se em cada um deles um perfil diferente de sinais de excitação das entradas da coluna. A opção pela realização de dois testes teve duas motivações. A primeira foi que, caso ambos se mostrassem válidos, poder-se-ia explorar um número maior de situações distintas de operação e, portanto, disponibilizar uma quantidade maior de informações sobre o comportamento dinâmico da coluna. A segunda motivação, foi dispensar uma eventual necessidade de experimentar novamente a coluna, por assegurar a disponibilidade de pelo menos uma massa de dados de trabalho útil, caso fosse detectada alguma dificuldade na manipulação de uma das massas. Esta motivação foi primordialmente econômica. Realizando-se os testes seguidamente, e de uma única vez, pôde-se otimizar a alocação de recursos humanos e materiais necessários às etapas de preparação.

5.3.1 Aplicação dos sinais de teste

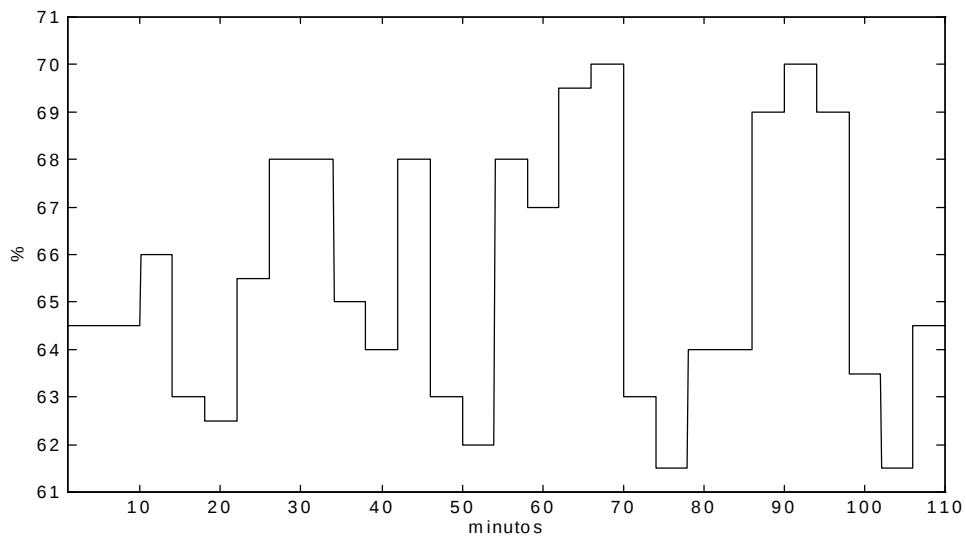
Em função da seleção das variáveis de entrada e saída que deveriam compor os modelos, definiu-se, a princípio, os seguintes parâmetros de controle da coluna que deveriam ser manipulados pelos sinais de teste:

- *velocidade da bomba de não flotado;*
- *posição de abertura da válvula de controle de vazão de água de lavagem;*
- *posição de abertura da válvula de controle de vazão de ar.*

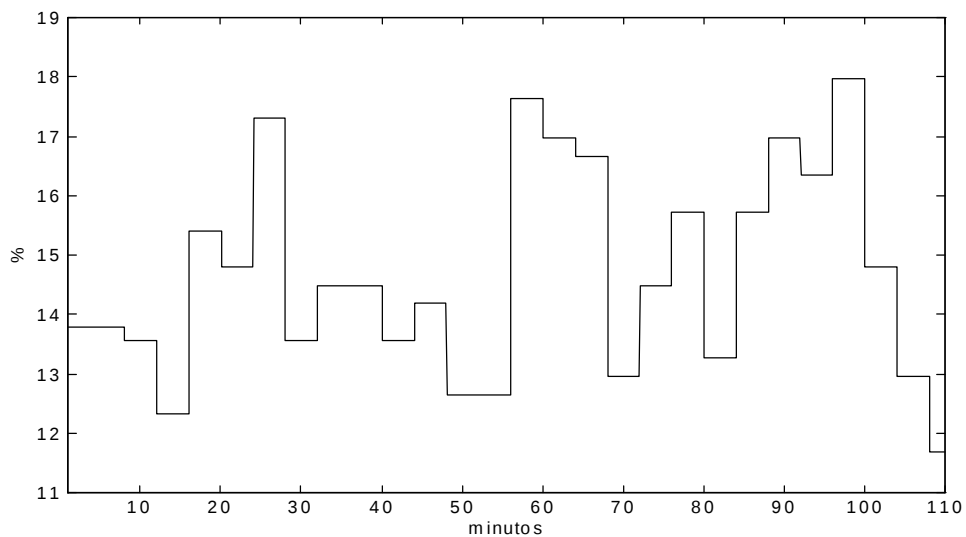
Devido a problemas técnicos, não foi possível a aplicação de sinais de teste na válvula de controle de vazão de ar. Contudo, este problema não impediu a utilização da *vazão de ar* como uma das variáveis de entrada utilizadas na identificação da coluna, conforme será mostrado nas seções seguintes. Uma das peculiaridades da alimentação de ar da coluna, é que ela é afetada por perturbações de carga geradas no sistema central de fornecimento de ar do CDTN, e que não são amortecidas pelo dispositivo de regulação de pressão instalado antes da entrada da coluna. Observações durante pré-testes evidenciaram que o processo de flotação é sensível a estas perturbações, mesmo sendo pequena a variação de amplitude da vazão.

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram os perfis dos sinais de excitação utilizados nos testes. A amplitude dos sinais foi estabelecida por meio de rotinas computacionais de geração de números aleatórios com distribuição gaussiana, com os valores restritos à faixa de operação da coluna. Cada valor gerado foi quantizado, aplicado à entrada correspondente da coluna e mantido por 4 minutos antes da aplicação do sinal subsequente. O critério para a escolha do período de duração dos sinais teve como base testes de resposta ao degrau, tendo este valor sido estabelecido como um terço da constante de tempo mais rápida da coluna obtida nesses testes (12 minutos). Uma defasagem de 2 minutos foi estabelecida entre a aplicação dos sinais de excitação na bomba de

não flotado e a aplicação dos sinais de excitação na válvula de controle de vazão de água de lavagem.



(a)

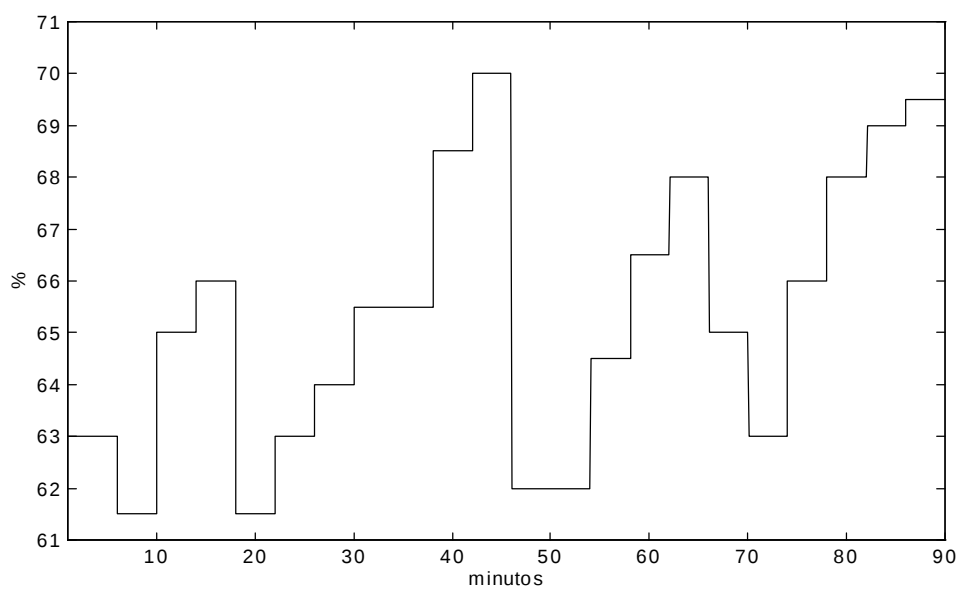


(b)

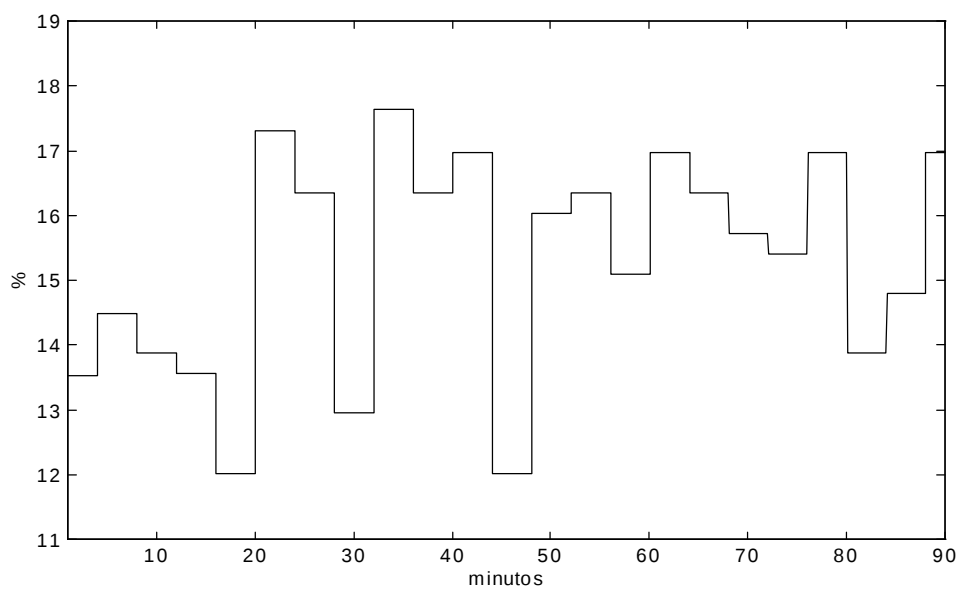
Figura 5.1. Perfis dos sinais de excitação utilizados no teste t25:

(a) velocidade da bomba de não flotado;

(b) abertura da válvula de controle de vazão de água de lavagem.



(a)



(b)

Figura 5.2. Perfis dos sinais de excitação utilizados no teste t26:

(a) velocidade da bomba de não flotado;

(b) abertura da válvula de controle de vazão de água de lavagem.

5.3.2 Taxa de amostragem dos sinais

Os testes de experimentação e aquisição de dados foram realizados utilizando-se um pacote computacional formado pelo *software* de controle e aquisição de dados REALFLEX® e um conjunto de rotinas computacionais desenvolvidas em linguagem C. Além de gerar os perfis dos sinais de teste (descritos na subseção anterior) estas rotinas tiveram como função básica elevar a taxa de amostragem de sinais efetuada pelo REALFLEX. Do sistema de controle e monitoração da coluna do CDTN, foi utilizada apenas a parte de *hardware*, uma vez que o *software* não oferecia os recursos de registro e manipulação de dados solicitados.

A aquisição de dados foi realizada a uma taxa de 0,5 amostragens por segundo, ou seja, uma leitura completa de dados a cada dois segundos. Mais tarde, quando foi avaliada a consistência dos dados coletados, foi constatada a necessidade de se proceder a uma dizimação dos dados, em função da sobre-amostragem dos sinais (os procedimentos de ajuste do período de amostragem estão descritos no capítulo 3). O fator de dizimação indicado foi 18. Após a sua realização, passou-se a trabalhar com uma massa de dados amostrados a cada 36 segundos.

5.4 Apresentação dos dados

Os dados gerados pelos testes de experimentação e aquisição de dados foram divididos em dois grupos, sendo um deles destinado à obtenção dos modelos e o outro aos procedimentos de validação. Na obtenção de modelos foi utilizada a massa de dados do teste t25 coletada entre o 1° e o 80° minuto. Para a validação, foram utilizadas duas massas de dados: a primeira com os dados entre o 73° e o 110° minuto do teste t25 e a segunda com os dados entre o 1° e o 90° minuto do teste t26. Nas Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 são apresentados os gráficos desses sinais.

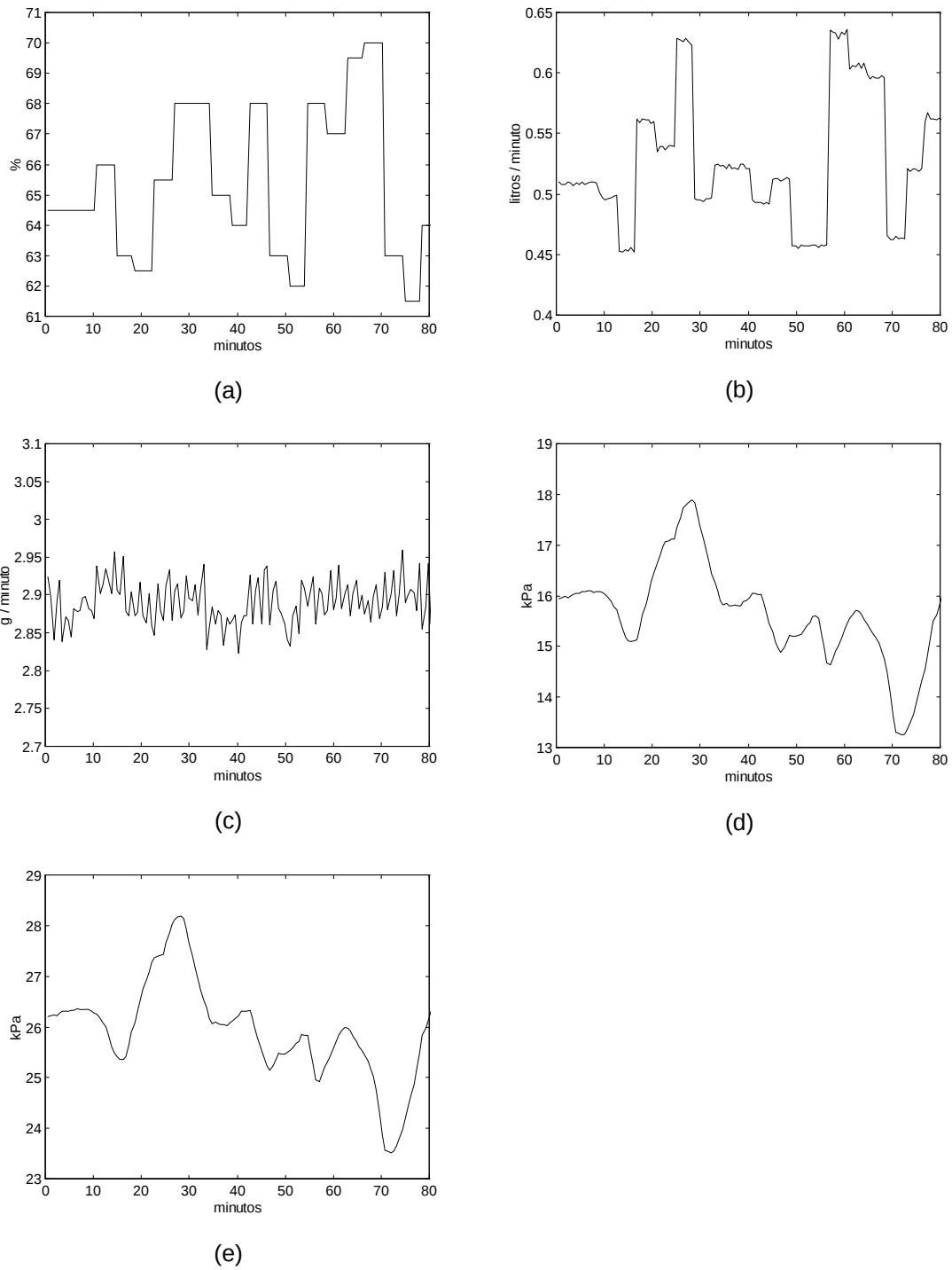


Figura 5.3. Sinais de entrada e saída obtidos no teste t25 e utilizados na obtenção dos modelos: (a) velocidade da bomba de não flotado (u_1); (b) vazão de água de lavagem (u_2); (c) vazão de ar (u_3); (d) pressão no ponto superior da seção de concentração da coluna (y_1); (e) pressão no ponto inferior da seção de concentração da coluna (y_2).

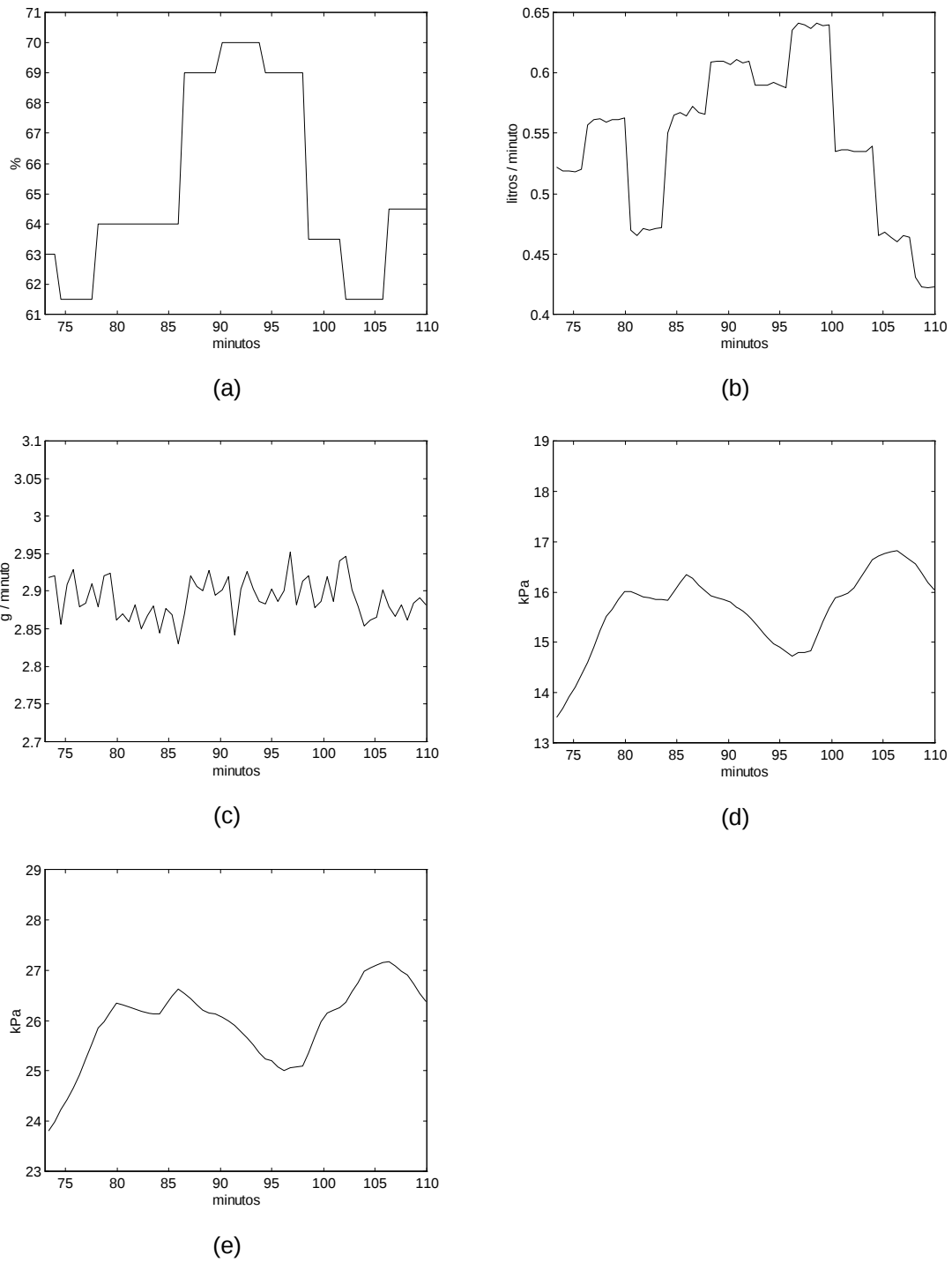


Figura 5.4. Sinais de entrada e saída obtidos no teste t25 e utilizados na validação dos modelos: (a) velocidade da bomba de não flotado (u_1); (b) vazão de água de lavagem (u_2); (c) vazão de ar (u_3); (d) pressão no ponto superior da seção de concentração da coluna (y_1); (e) pressão no ponto inferior da seção de concentração da coluna (y_2).

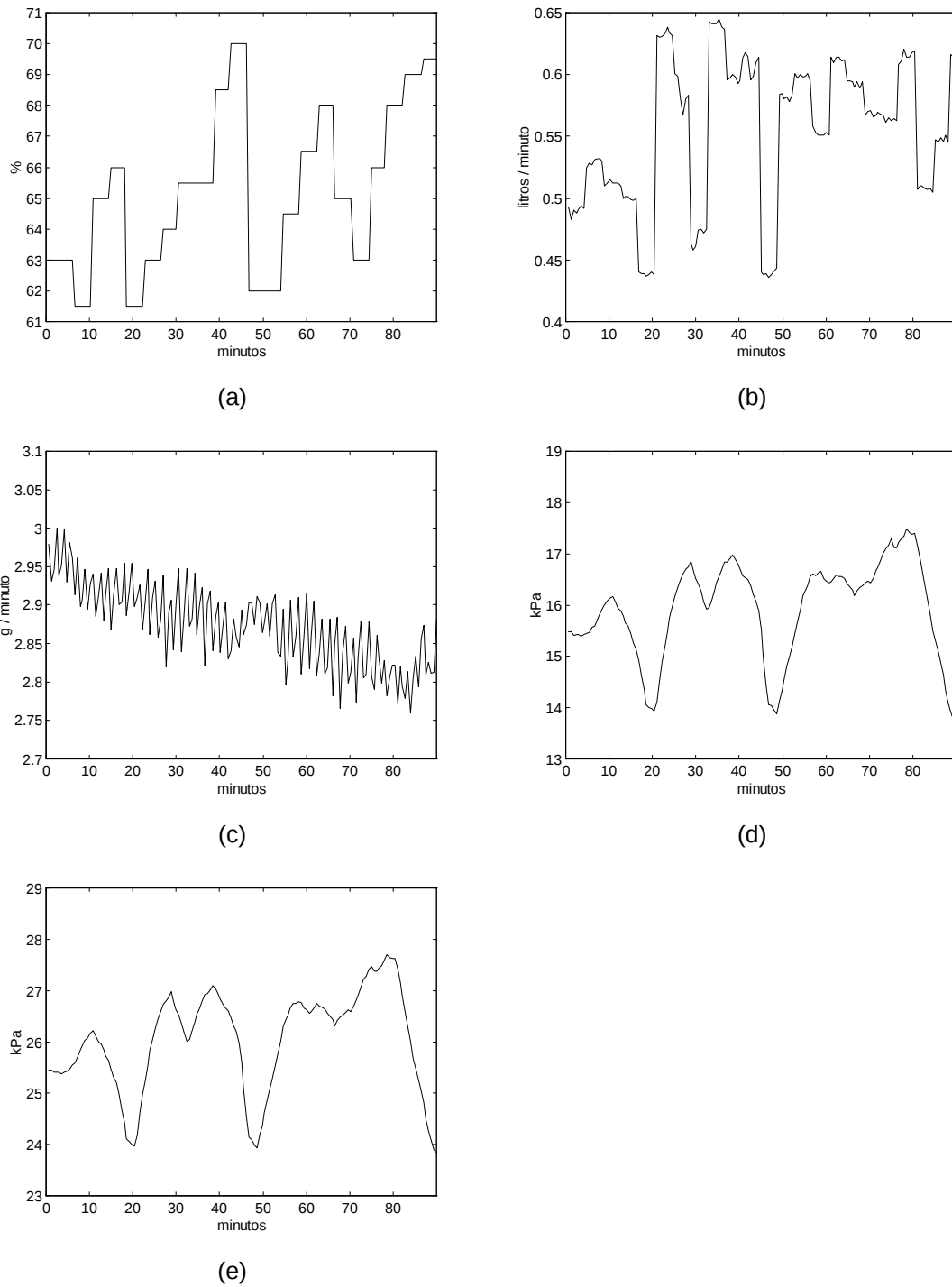


Figura 5.5. Sinais de entrada e saída obtidos no teste t26 e utilizados na validação dos modelos: (a) velocidade da bomba de não flotado (u_1); (b) vazão de água de lavagem (u_2); (c) vazão de ar (u_3); (d) pressão no ponto superior da seção de concentração da coluna (y_1); (e) pressão no ponto inferior da seção de concentração da coluna (y_2).

A figura a seguir apresenta os gráficos que comparam os sinais de controle de velocidade enviados para a bomba de não flotado e os sinais de vazão de não flotado medidos manualmente no teste t25 (ver seção 5.2).

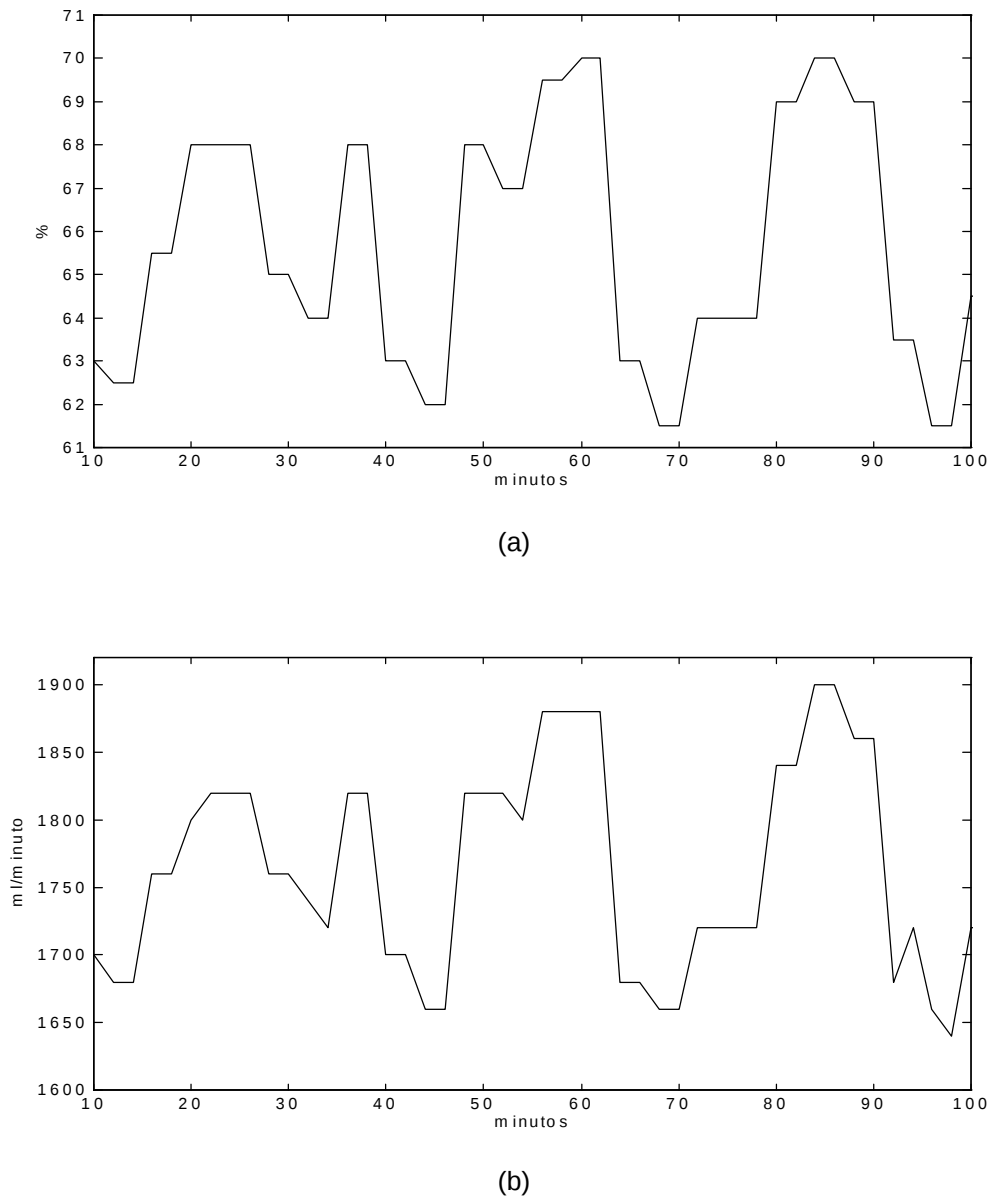


Figura 5.6. Comparação entre os sinais de controle de velocidade enviados para a bomba de não flotado e os sinais obtidos através da medição manual de vazão de não flotado durante o teste t25:

- (a) velocidade da bomba de não flotado;
- (b) vazão de não flotado medida manualmente.

5.5 Apresentação dos modelos

Centenas de testes de seleção de estrutura, estimação de parâmetros e simulação de modelos foram realizados utilizando o conjunto de rotinas computacionais de identificação MIMO desenvolvidas neste trabalho. Os testes para obtenção de modelos lineares ou com grau de não linearidade igual a dois tiveram, em geral, uma duração inferior a dez minutos. Contudo, quando se trabalhou com um grau de não linearidade igual a três ou quatro, a duração se estendeu desde dezenas de minutos até dias.

Todos os modelos com grau de não linearidade igual a três ou quatro apresentaram um desempenho ruim na representação da dinâmica da coluna. Dentre os vários modelos lineares estimados, somente um modelo linear, aqui nomeado m1o, foi julgado adequado. Por outro lado, diversos modelos não lineares quadráticos com boas propriedades dinâmicas foram encontrados. Isto sugere que tal tipo de não linearidade é importante na caracterização do processo em questão. Desses modelos, foram selecionados dois para apresentação neste trabalho, m2j e m2p. A Tabela 5.1 apresenta os principais parâmetros da estrutura dos três modelos identificados.

Tabela 5.1. Parâmetros da estrutura dos modelos m1o, m2j e m2p

	modelo m1o	modelo m2j	modelo m2p
grau de não linearidade	1	2	2
atraso mínimo de u_1 , u_2 e u_3	[1 1 1]	[1 1 1]	[1 1 1]
atraso máximo de u_1 , u_2 e u_3	[5 15 15]	[5 10 20]	[5 20 20]
atraso mínimo de y_1 e y_2	[1 1]	[1 1]	[1 1]
atraso máximo de y_1 e y_2	[5 5]	[5 5]	[5 5]
número de termos candidatos de processo	46	1081	1596
número de termos de processo do modelo	16	16	13
número de termos de ruído do modelo	41	45	43

Na escolha dos atrasos mínimos e máximos dos termos candidatos a fazerem parte dos modelos não foi utilizado nenhum conhecimento a priori acerca do processo, como, por exemplo, atrasos puros. A faixa de valores foi escolhida de forma arbitrária, deixando exclusivamente a cargo das rotinas de identificação a seleção dos termos mais representativos para comporem os modelos.

5.5.1 Equações dos modelos identificados

A seguir, são apresentadas as equações dos modelos. Os termos foram ordenados em valores decrescentes de ERR:

- equações do modelo m1o:

$$\begin{aligned}
 y_1(k) = & 0,57796y_1(k-1) - 0,24250y_1(k-2) + 0,02219y_2(k-4) \\
 & - 0,04753u_1(k-1) + 1,84570u_2(k-1) + 0,10344u_3(k-4) \\
 & - 0,22832u_2(k-10) - 0,01420u_1(k-5) + 0,62499y_2(k-1) \\
 & - 0,60520u_3(k-11) - 0,07072y_2(k-2) - 0,08588y_1(k-4) \\
 & + 0,08193u_3(k-12) - 0,42089u_3(k-5) - 0,06044u_3(k-8) \\
 & + 0,16549y_1(k-5) + \sum_{i=1}^{41} (\theta_i \xi_1(k-i)) + \xi_1(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.1.1}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(k) = & 1,44220y_2(k-1) - 0,05506y_2(k-2) + 0,26302u_3(k-7) \\
 & - 0,05089u_1(k-1) + 2,01250u_2(k-1) - 0,02416u_2(k-7) \\
 & - 0,40571y_1(k-1) + 0,07807u_2(k-15) - 0,22593u_2(k-3) \\
 & - 0,60516u_3(k-11) - 0,51117u_2(k-10) + 0,70885u_2(k-11) \\
 & - 0,04743u_2(k-8) - 0,57584u_2(k-13) + 0,07574u_3(k-4) \\
 & - 0,11753u_3(k-1) + \sum_{i=1}^{41} (\theta_i \xi_2(k-i)) + \xi_2(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.1.2}$$

- equações do modelo m2j:

$$\begin{aligned}
 y_1(k) = & 0,70398y_1(k-1) - 0,24930y_1(k-2) + 0,03081u_3(k-7)y_2(k-4) \\
 & + 0,01108u_3(k-11)u_1(k-1) + 0,00394u_3(k-19)u_1(k-2) \\
 & + 0,64112u_3(k-15)u_2(k-1) + 0,00328u_3(k-11)u_3(k-4) \\
 & - 0,72903u_2(k-10)u_2(k-2) + 0,11391u_3(k-19)u_3(k-8) \\
 & - 0,00247u_3(k-15)u_1(k-5) - 0,00668u_1(k-4)y_2(k-1) \\
 & + 0,00467u_1(k-4)y_2(k-2) - 0,00220u_1(k-4)u_1(k-4) \\
 & - 0,00534u_1(k-1)y_1(k-2) - 0,29187u_3(k-11)u_3(k-5) \\
 & + 0,11260u_3(k-4)u_2(k-8) + \sum_{i=1}^{45} (\theta_i \xi_1(k-i)) + \xi_1(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.1}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(k) = & 0,89964y_2(k-1) + 0,10372y_2(k-2) - 0,00279u_1(k-1)y_1(k-2) \\
 & - 0,55739 u_2(k-1)y_1(k-3) - 0,01883u_3(k-12)u_3(k-11) \\
 & - 0,72902u_2(k-10)u_2(k-3) - 0,04748u_3(k-17)u_1(k-5) \\
 & + 0,01583u_3(k-4)y_2(k-5) + 0,70586u_2(k-1)y_1(k-2) \\
 & - 0,04547u_3(k-19)u_2(k-8) - 0,00106u_2(k-8)u_2(k-7) \\
 & + 0,31629u_2(k-7)y_1(k-4) + 0,00608u_3(k-7)u_1(k-4) \\
 & + 0,06866u_3(k-17)u_2(k-8) + 0,03938u_3(k-19)u_1(k-5) \\
 & - 0,05332u_3(k-20)y_1(k-4) + \sum_{i=1}^{45} (\theta_i \xi_2(k-i)) + \xi_2(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.2.2}$$

- equações do modelo m2p:

$$\begin{aligned}
 y_1(k) = & 0,63647y_1(k-1) + 0,02436y_1(k-2) + 0,02043u_3(k-7)y_2(k-4) \\
 & - 0,00671u_3(k-11)u_1(k-1) + 0,01132u_3(k-19)u_1(k-2) \\
 & - 0,00449u_2(k-13)u_1(k-5) + 0,62576u_3(k-15)u_2(k-1) \\
 & - 0,00058u_1(k-2)u_1(k-1) - 0,85046u_2(k-19)u_2(k-7) \\
 & + 0,17118u_3(k-8)u_3(k-4) + 0,00522y_2(k-1)y_2(k-1) \\
 & + 0,00002u_1(k-4)u_1(k-2) - 0,00114u_3(k-2)u_1(k-5) \\
 & + \sum_{i=1}^{43} (\theta_i \xi_1(k-i)) + \xi_1(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.3.1}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(k) = & 0,10972y_2(k-1) - 0,02396y_2(k-2) - 0,00288u_1(k-1)y_1(k-2) \\
 & + 0,15428u_2(k-1)y_1(k-3) - 0,04017u_3(k-12)u_3(k-11) \\
 & - 0,64116u_2(k-10)u_2(k-3) - 0,00247u_3(k-17)u_1(k-5) \\
 & + 0,77827u_2(k-11)u_2(k-8) + 0,10517u_3(k-9)u_3(k-7) \\
 & - 0,01090u_3(k-13)u_3(k-7) - 0,00004u_1(k-4)y_1(k-2) \\
 & + 0,32941u_2(k-13)u_2(k-3) - 0,01302u_2(k-1)y_1(k-1) \\
 & + \sum_{i=1}^{43} (\theta_i \xi_2(k-i)) + \xi_2(k)
 \end{aligned}
 \tag{5.3.2}$$

5.5.2 Validação dos modelos identificados

Os modelos apresentados neste trabalho foram selecionados dentre um conjunto maior de modelos por apresentarem melhor desempenho nas etapas de validação. Os gráficos comparando os sinais de saída coletados da coluna e os sinais de saída produzidos pelas simulações dos modelos serão apresentados nesta seção. Os gráficos de validação estatística serão apresentados no apêndice A, por serem de número elevado (um total de 144).

Além dos gráficos das saídas y_1 e y_2 , foram também gerados gráficos da altura da camada de espuma (h_{esp}) e do *holdup* do ar (E_g). Os valores dessas variáveis foram calculados a partir das respectivas equações (Oliveira e Aquino, 1992):

$$h_{esp} = \frac{y_1 h_2 - y_2 h_1}{(y_1 - y_2) + 10^{-4} (h_2 - h_1) \rho_{esp} g}, \quad (5.4)$$

onde

h_{esp} : altura da camada de espuma, em cm;

y_1 : pressão no ponto superior na seção de concentração, em kPa;

y_2 : pressão no ponto inferior na seção de concentração, em kPa;

h_1 : distância entre o ponto de medição de y_1 e o transbordo da coluna (230 cm);

h_2 : distância entre o ponto de medição de y_2 e o transbordo da coluna (350 cm);

ρ_{esp} : densidade média da espuma (valor estimado em 0,34 g/cm³);

g : aceleração da gravidade (980 cm/s²),

e

$$E_g = 100 \left(1 - \frac{y_2 - y_1}{10^{-4} \rho_{polpa} g (h_2 - h_1)} \right), \quad (5.5)$$

onde

E_g : *holdup* do ar, em %;

y_1 : pressão no ponto superior na seção de concentração, em kPa;

y_2 : pressão no ponto inferior na seção de concentração, em kPa;

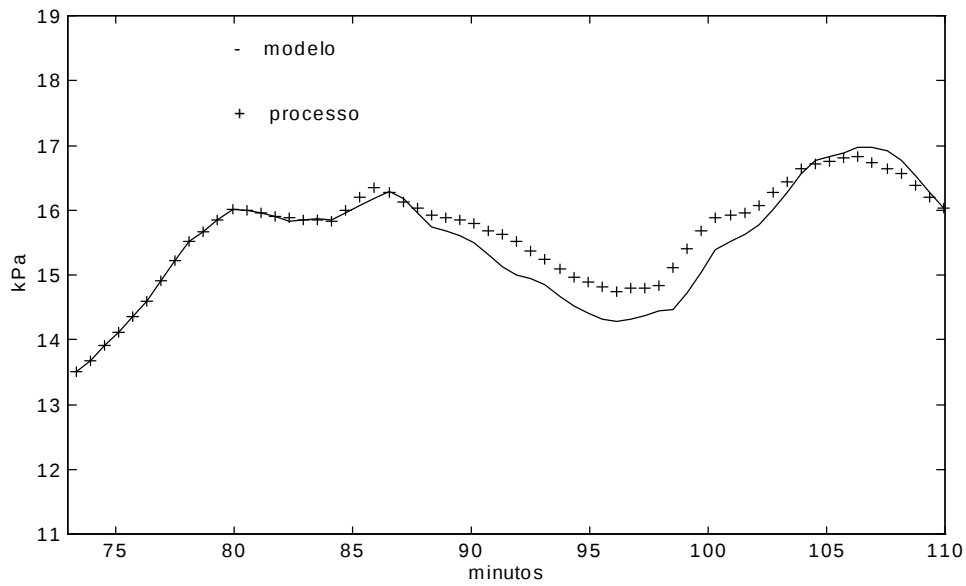
h_1 : distância entre o ponto de medição de y_1 e o transbordo da coluna (230 cm);

h_2 : distância entre o ponto de medição de y_2 e o transbordo da coluna (350 cm);

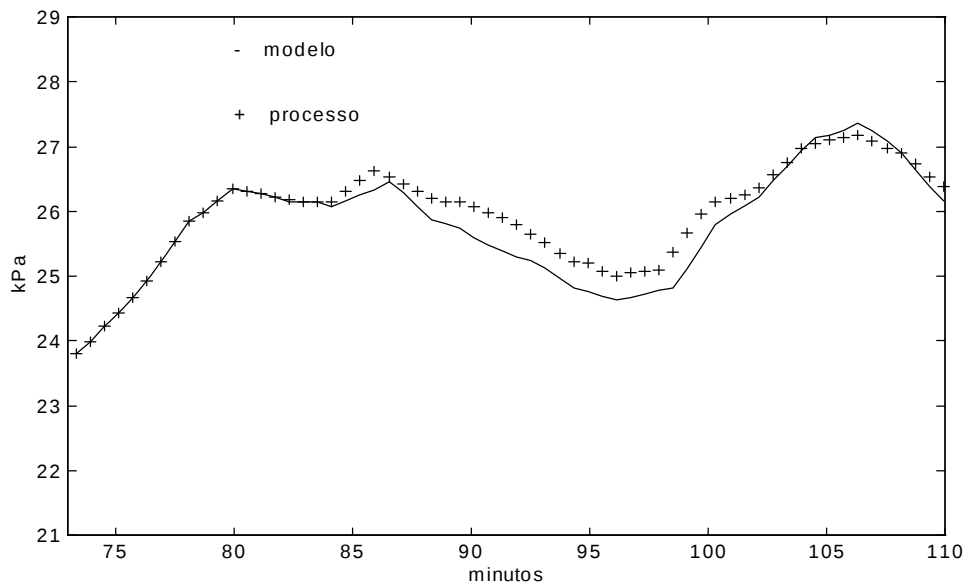
ρ_{polpa} : densidade média da polpa (valor estimado em 1 g/cm³);

g : aceleração da gravidade (980 cm/s²).

Nos gráficos de altura da camada de espuma são feitas duas comparações. A primeira, como as demais, compara os sinais coletados e os sinais produzidos pelo modelo. A segunda, compara os sinais produzidos pelo modelo com dados obtidos através de uma leitura visual da altura da camada de espuma, executada por um dos operadores da coluna durante os testes. Esta leitura foi registrada de minuto em minuto e tinha como função legitimar os dados coletados pela instrumentação.

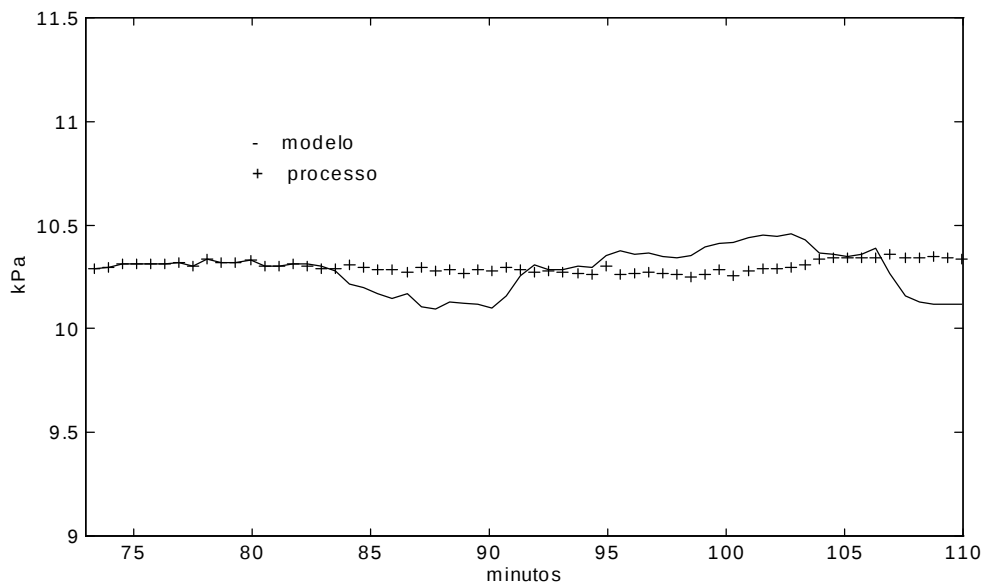


(a)

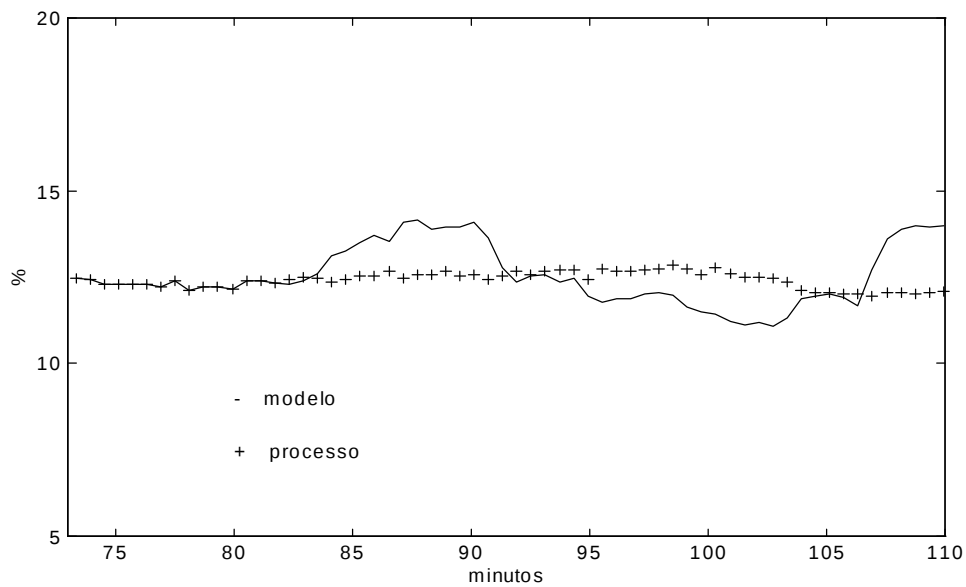


(b)

Figura 5.7. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m10: (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1); (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

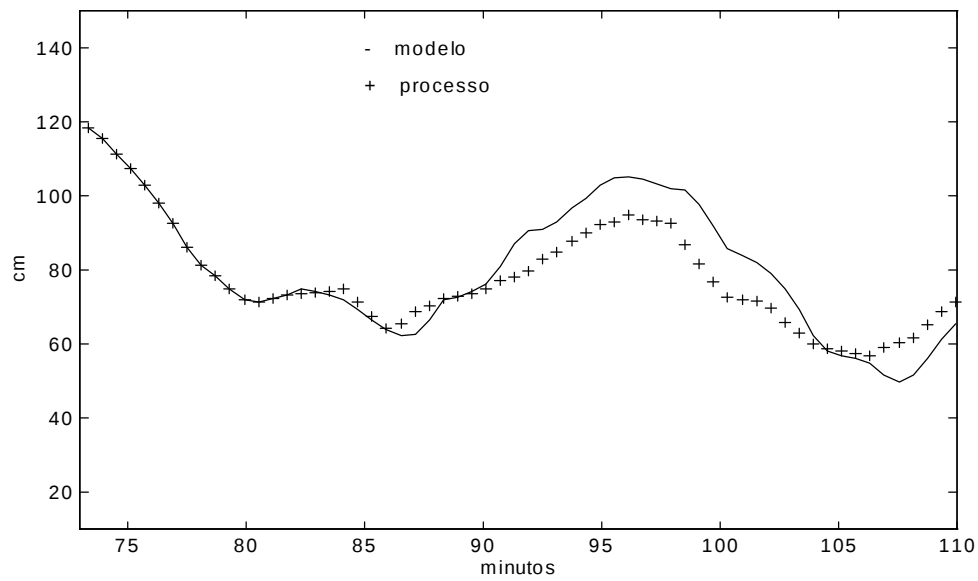


(a)

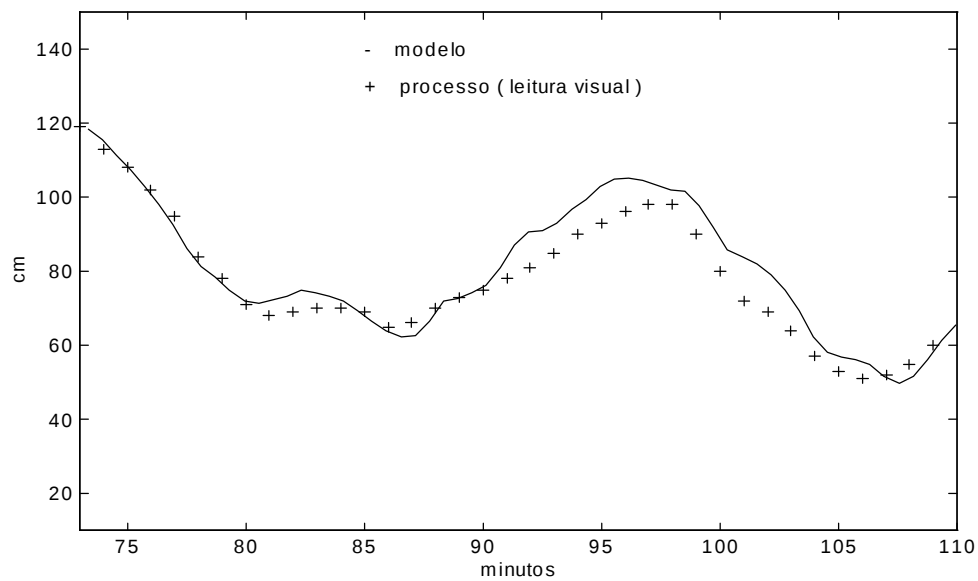


(b)

Figura 5.8. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m10: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).

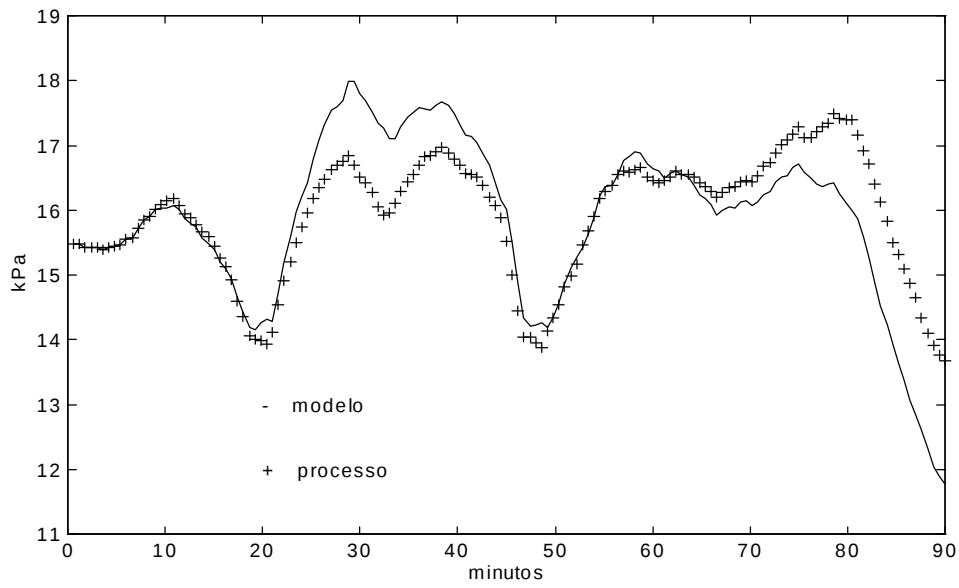


(a)

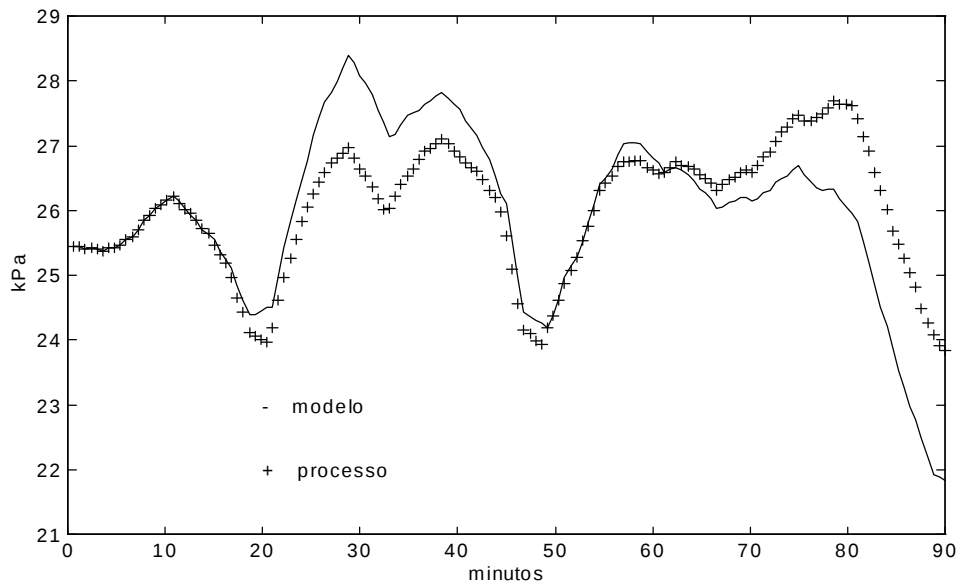


(b)

Figura 5.9. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m10: (a) altura da camada de espuma (h_{esp}), utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição; (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

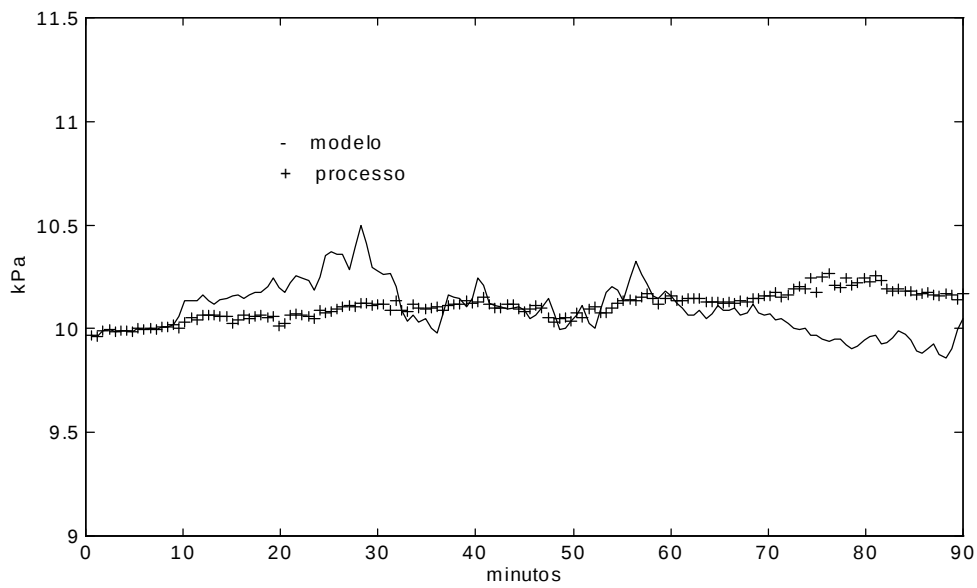


(a)

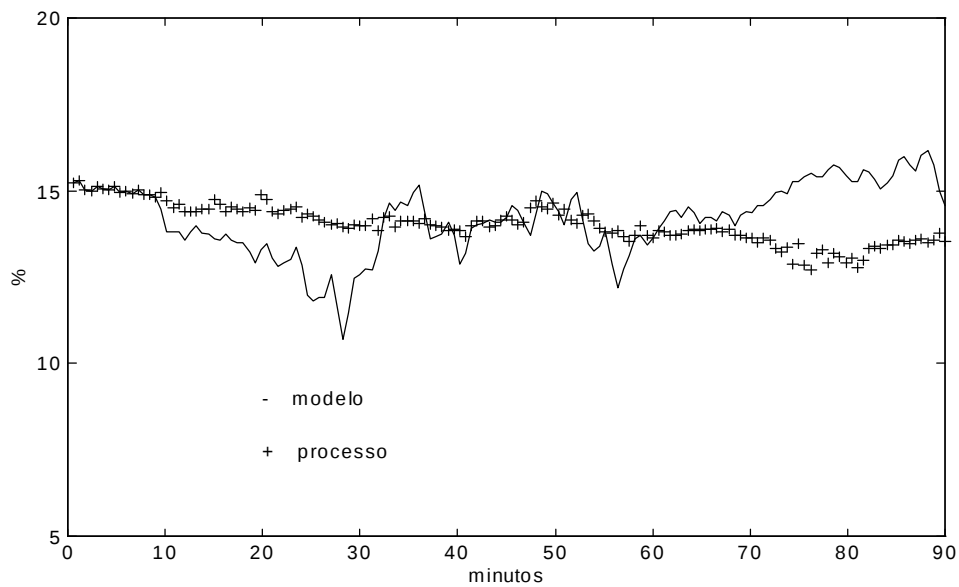


(b)

Figura 5.10. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m10: (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1); (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

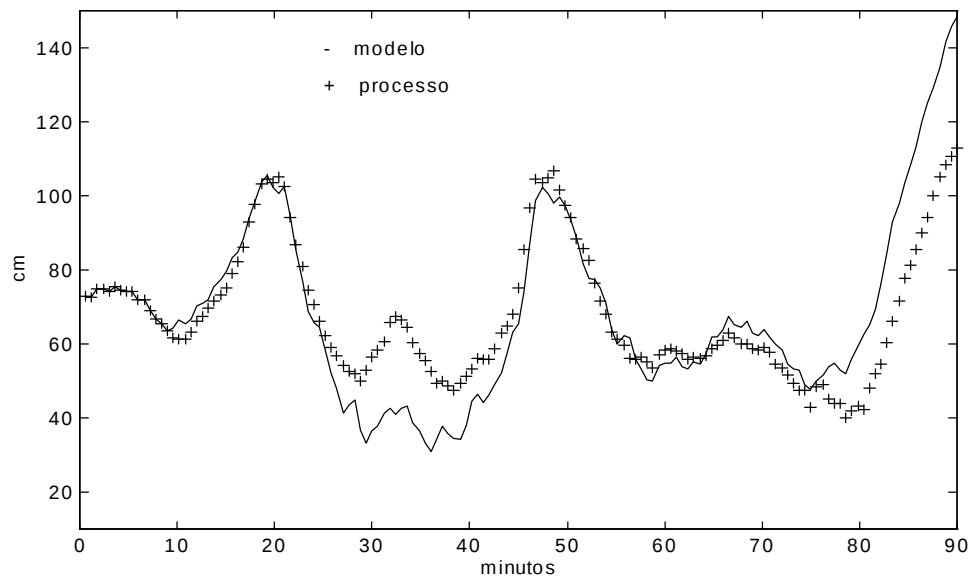


(a)

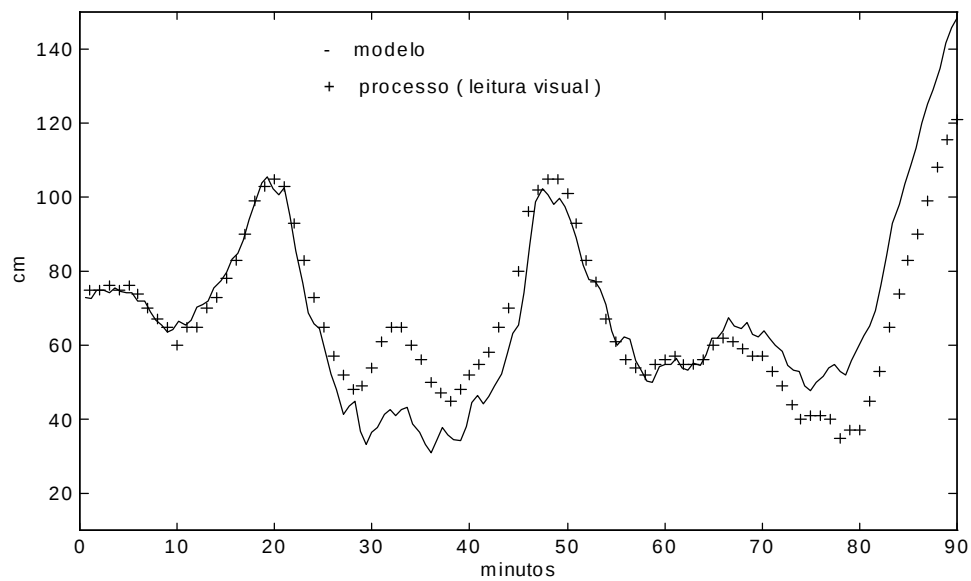


(b)

Figura 5.11. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m10: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).

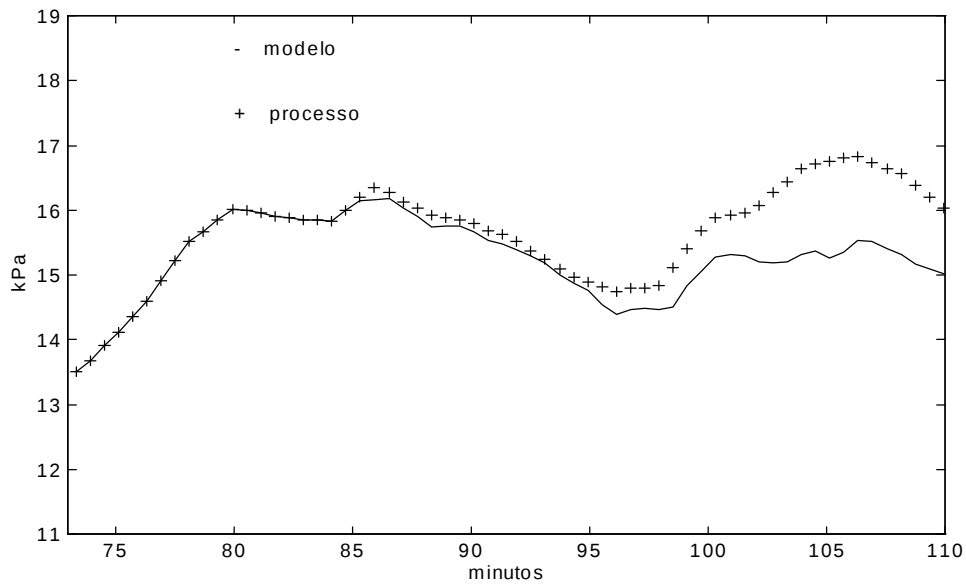


(a)

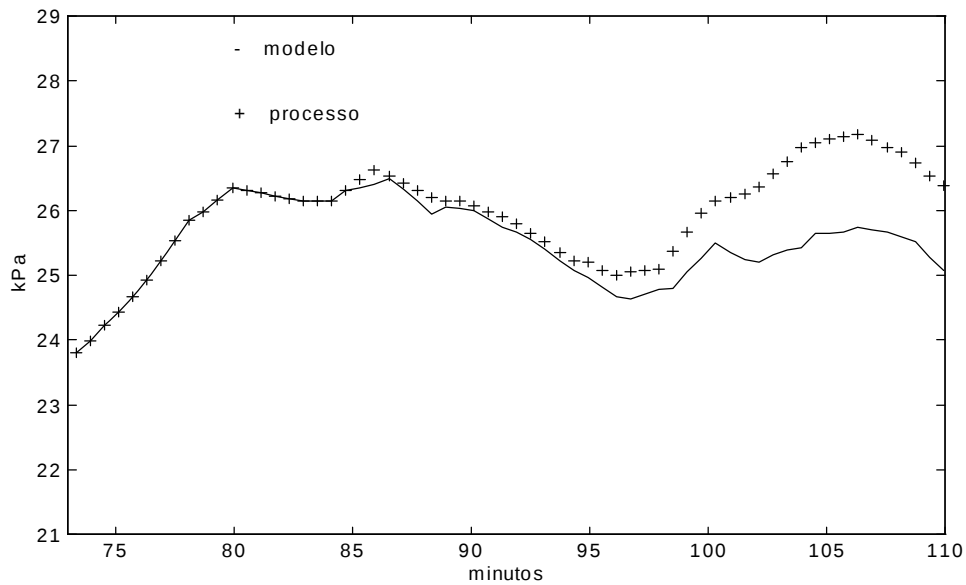


(b)

Figura 5.12. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m10: (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição; (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

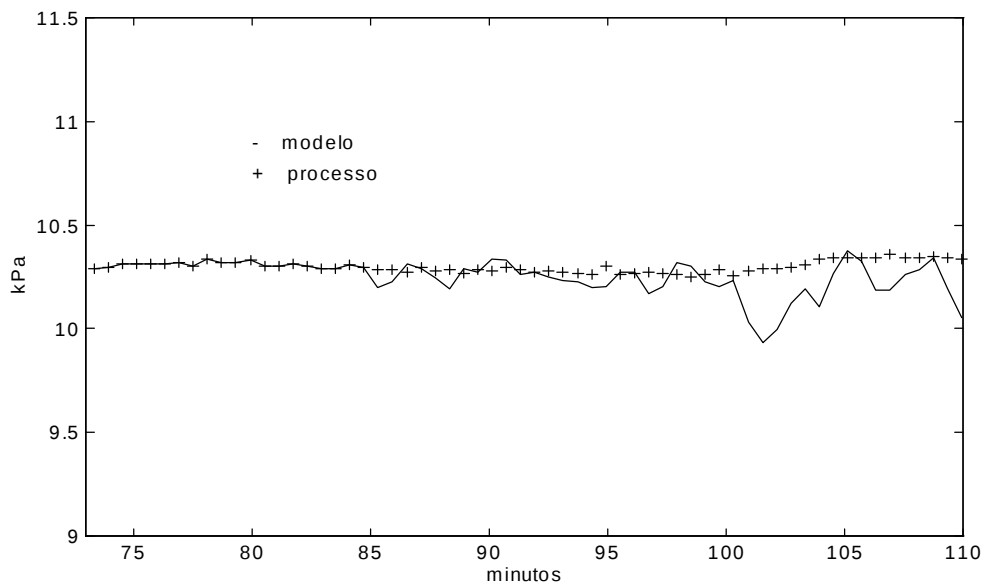


(a)

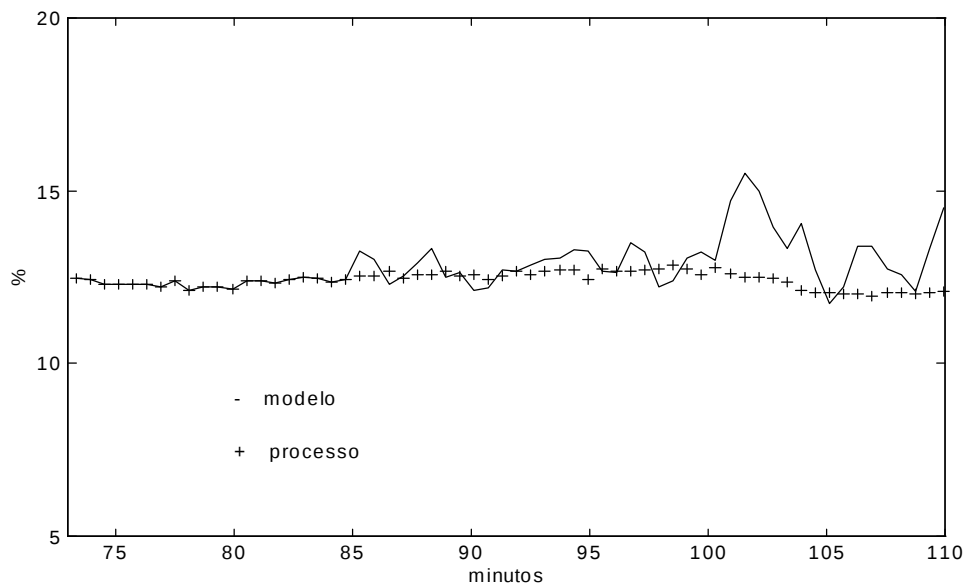


(b)

Figura 5.13. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j: (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (Y_1); (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (Y_2).

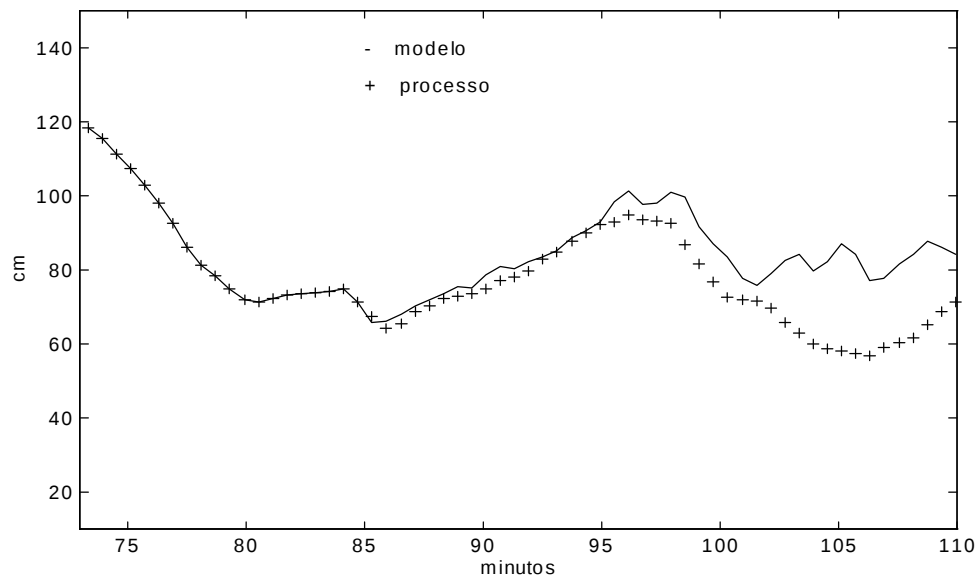


(a)

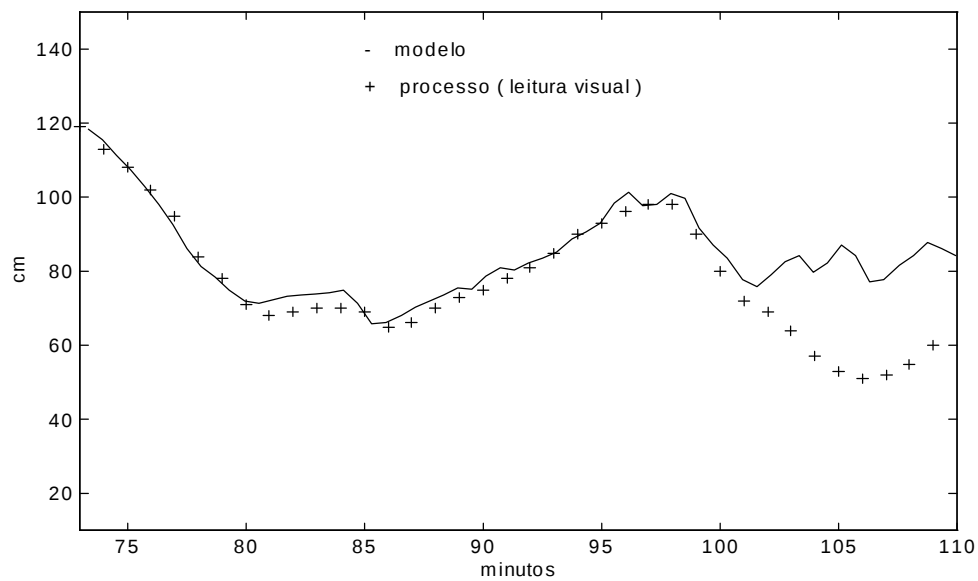


(b)

Figura 5.14. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).

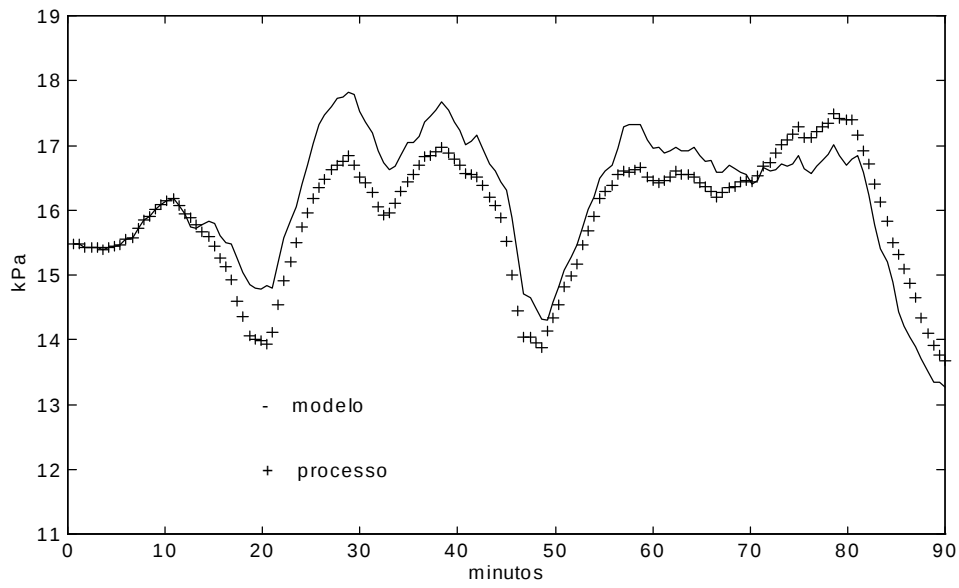


(a)

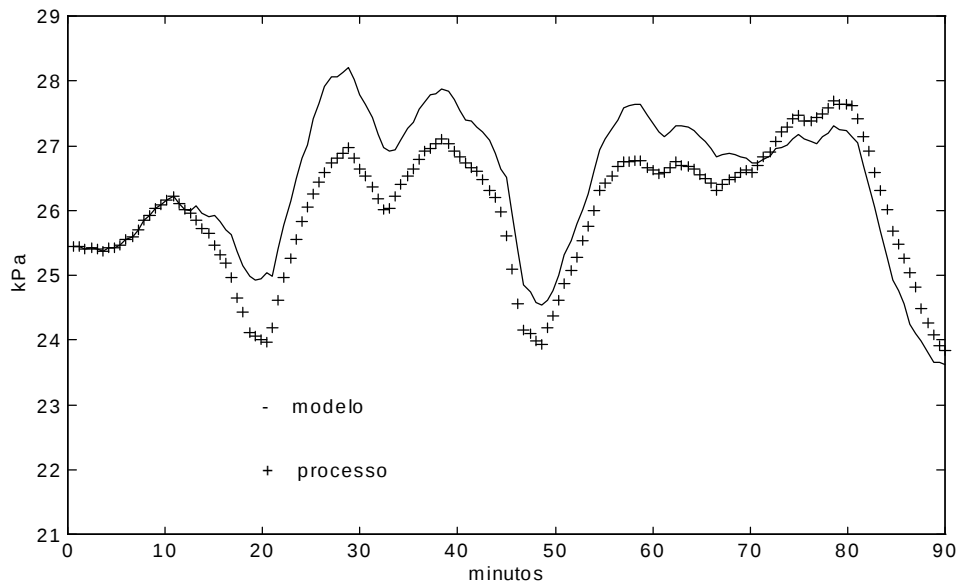


(b)

Figura 5.15. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j: (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição; (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

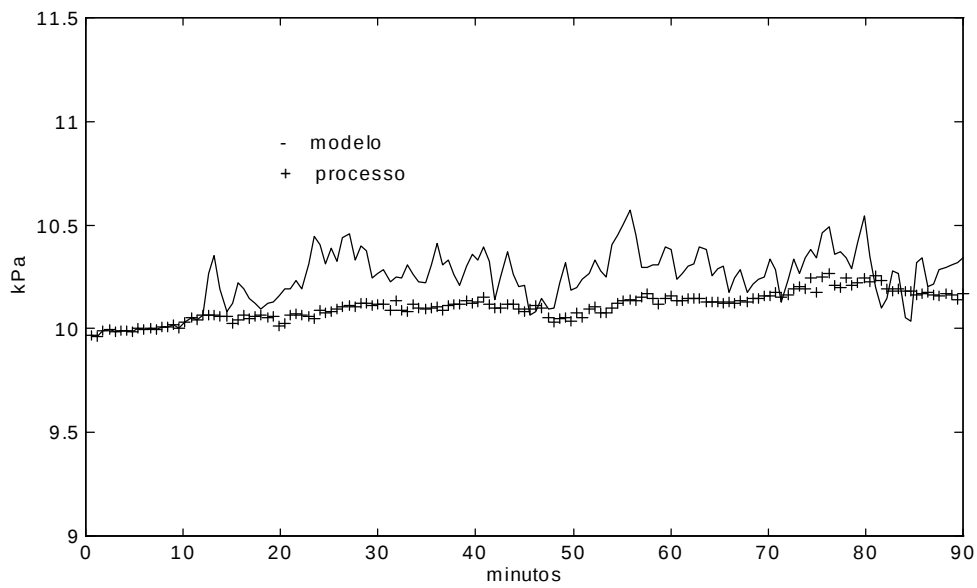


(a)

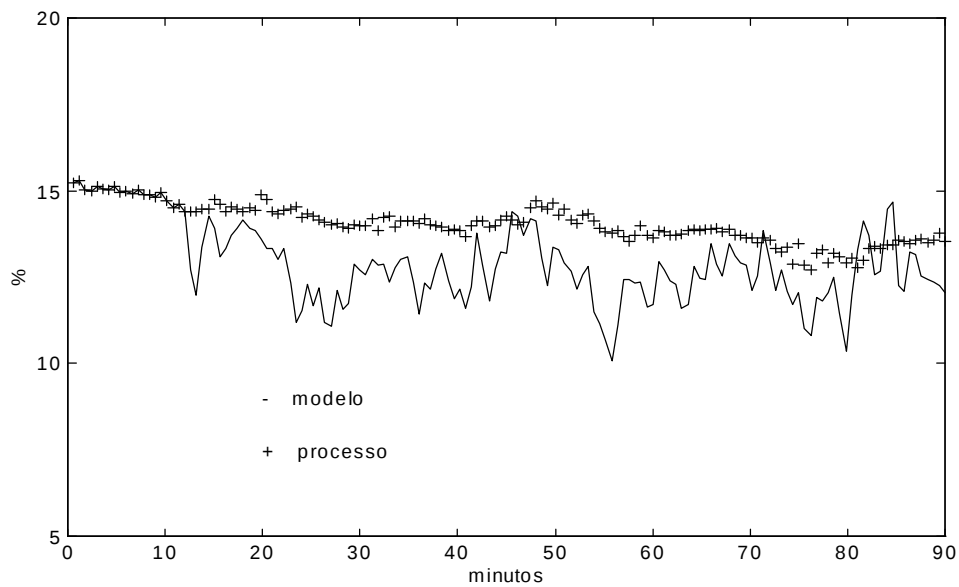


(b)

Figura 5.16. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j: (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1); (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

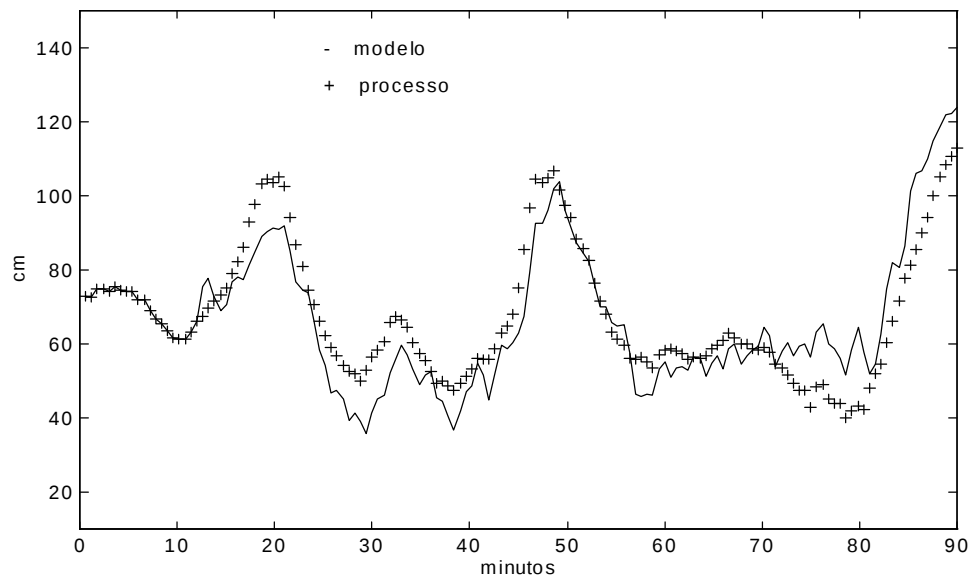


(a)

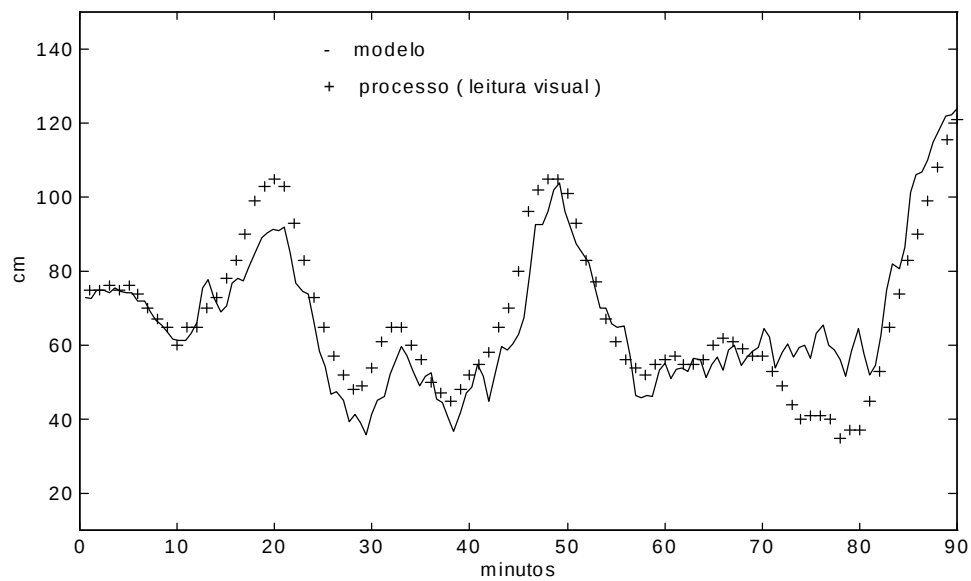


(b)

Figura 5.17. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).

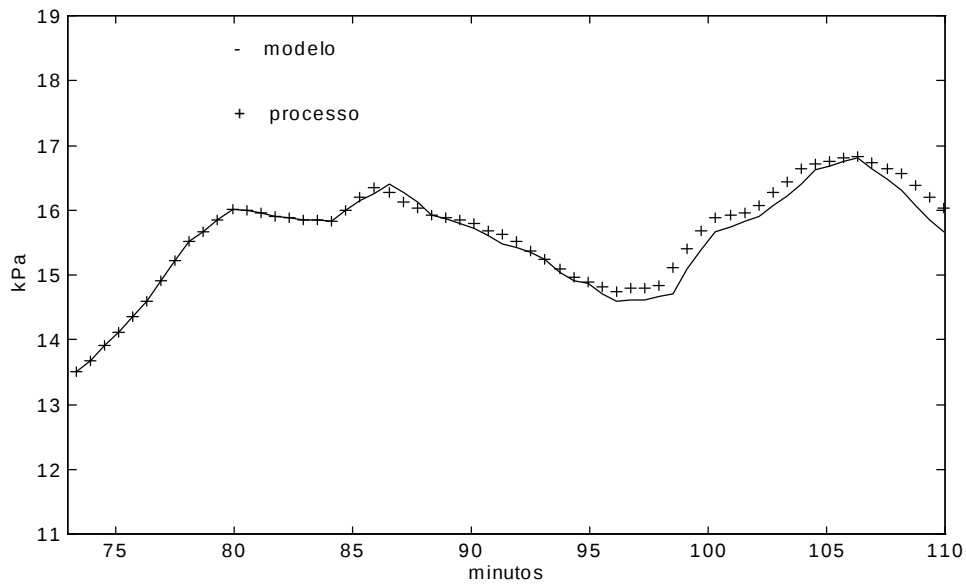


(a)

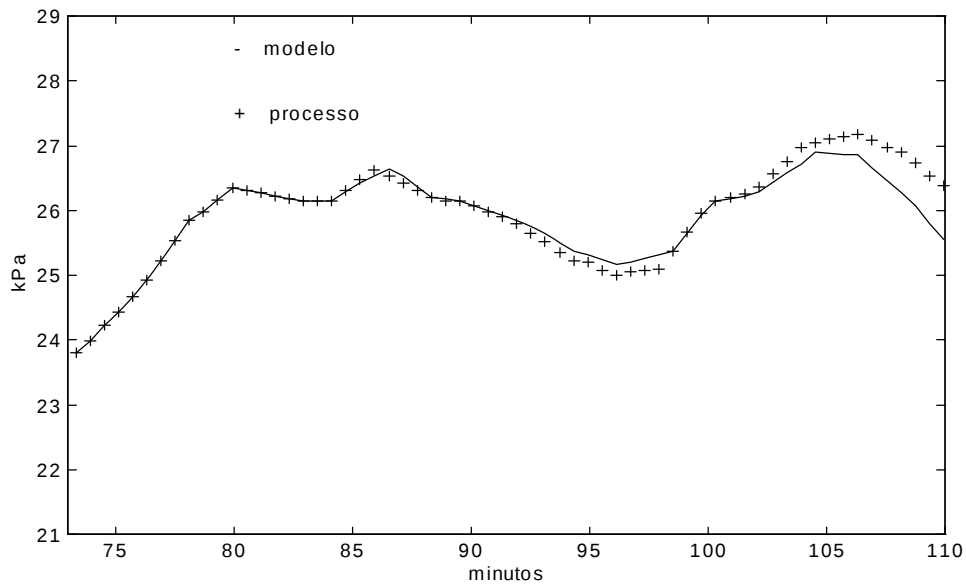


(b)

Figura 5.18. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2j: (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição; (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

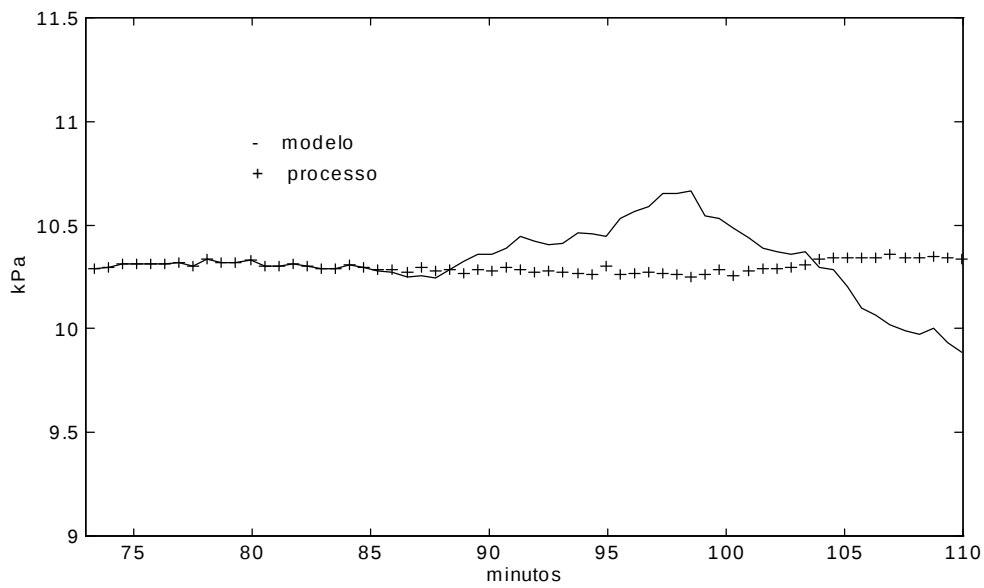


(a)

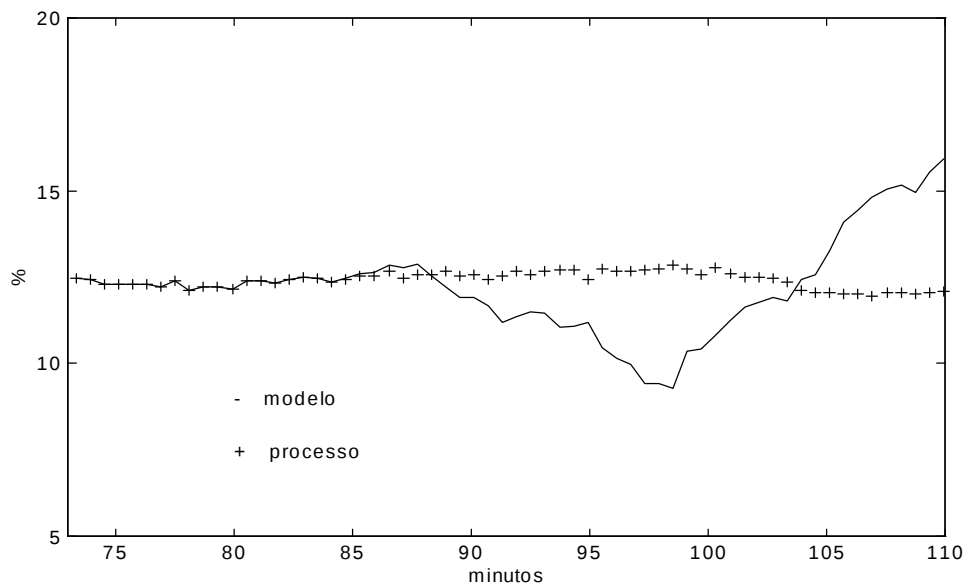


(b)

Figura 5.19. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1); (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

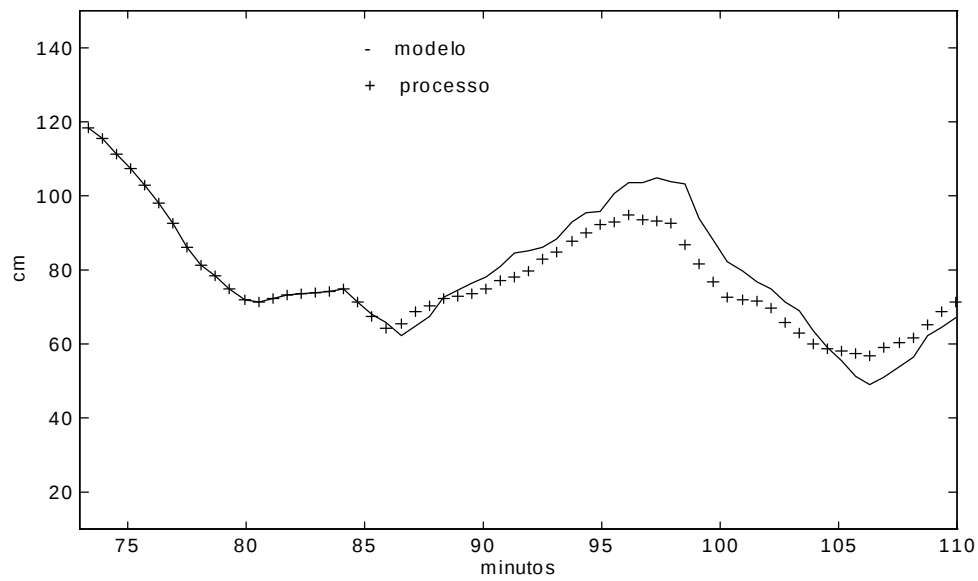


(a)

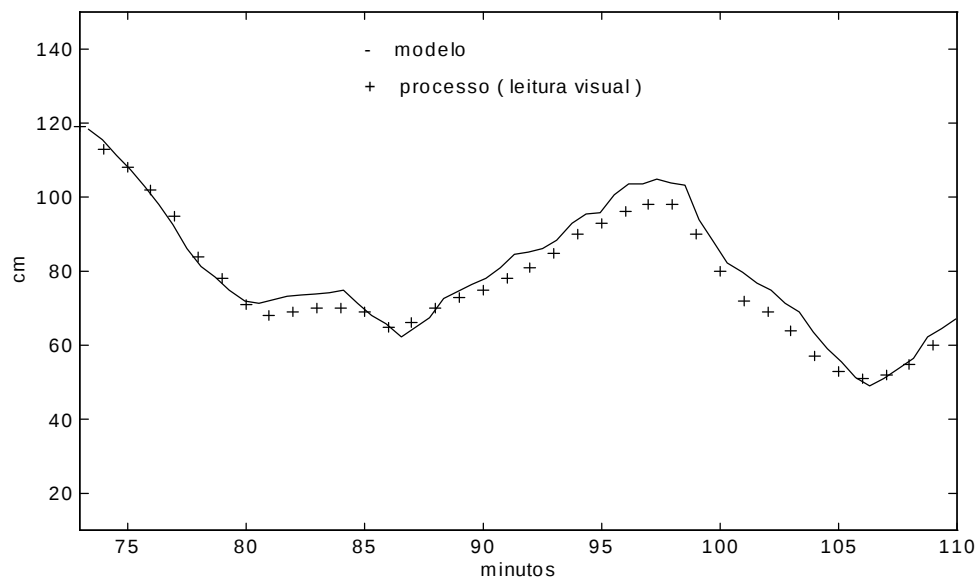


(b)

Figura 5.20. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).

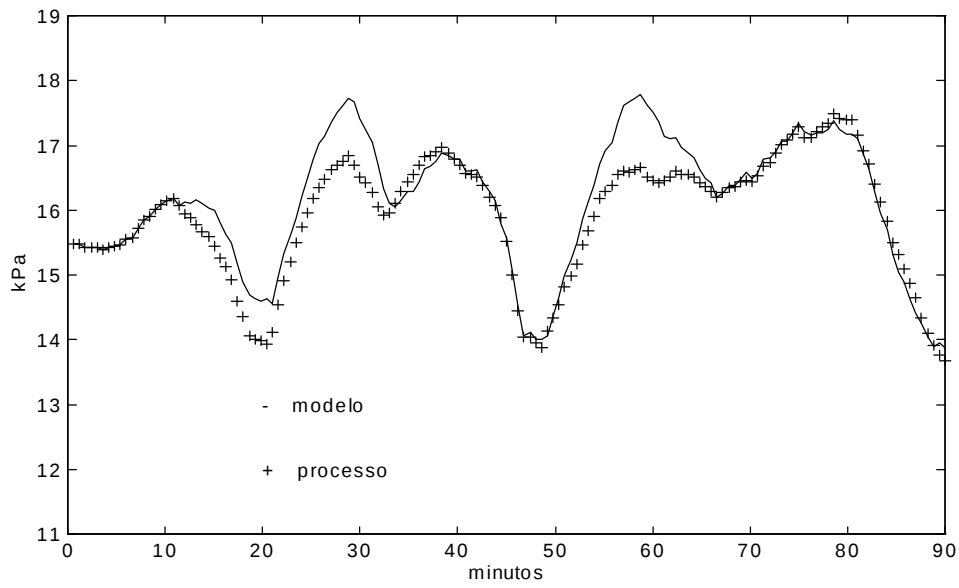


(a)

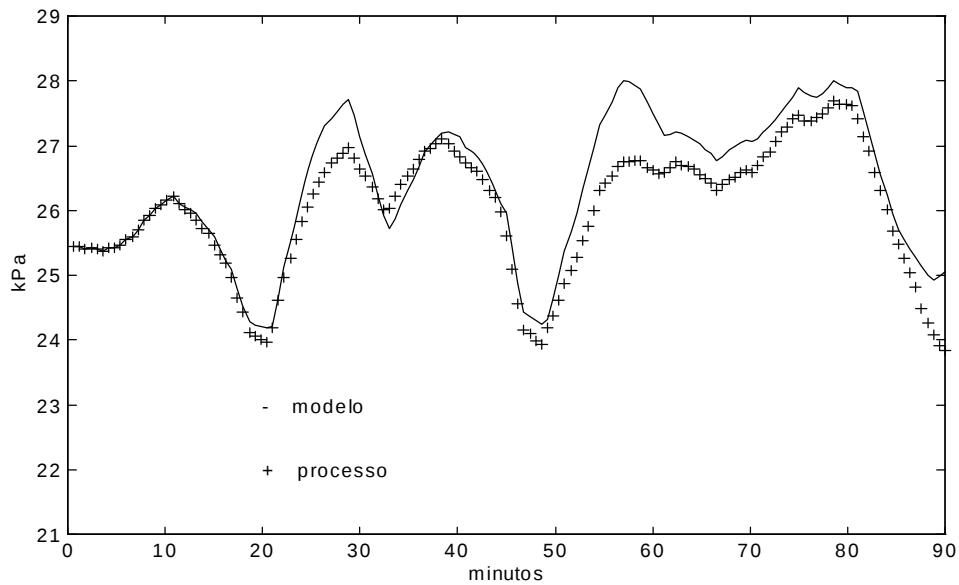


(b)

Figura 5.21. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t25 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição; (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

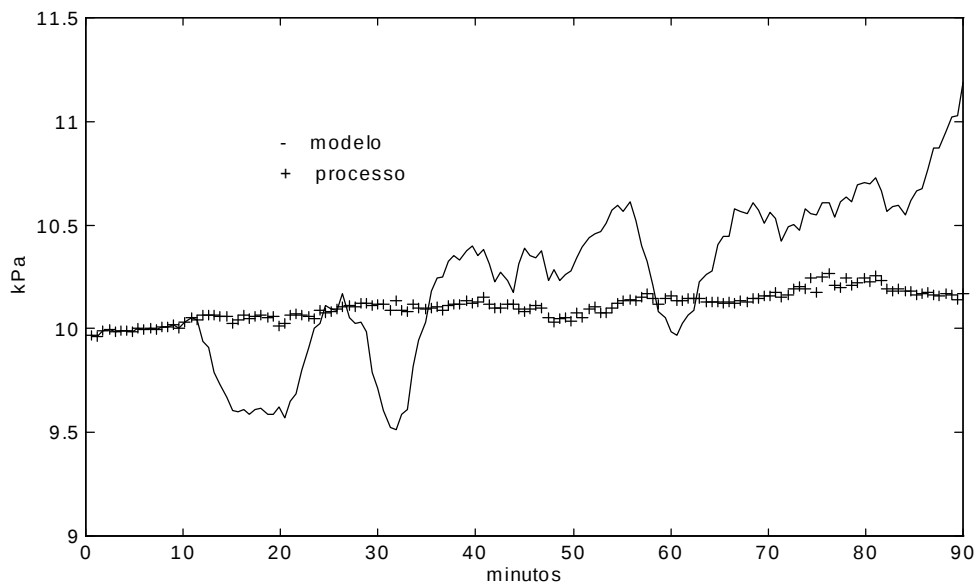


(a)

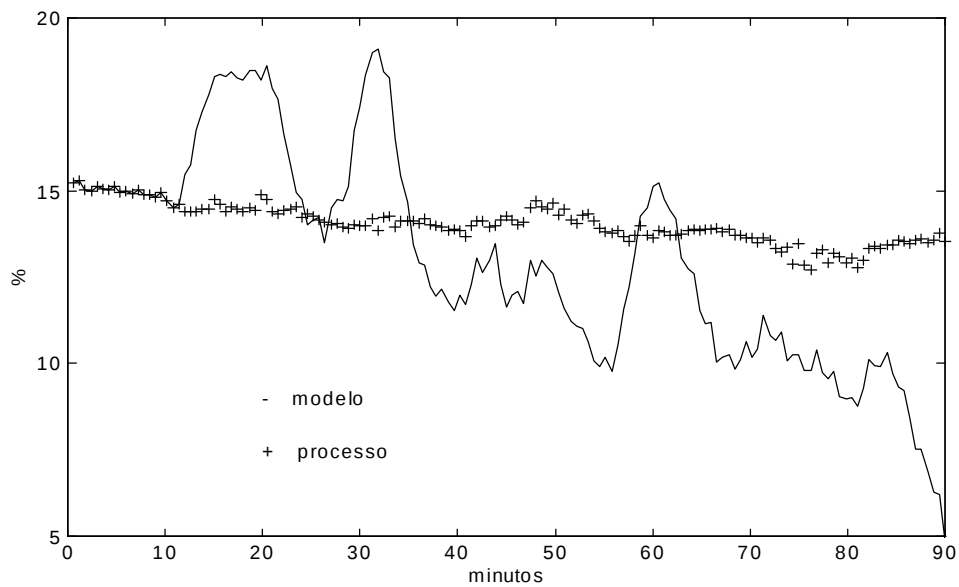


(b)

Figura 5.22. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1); (b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).

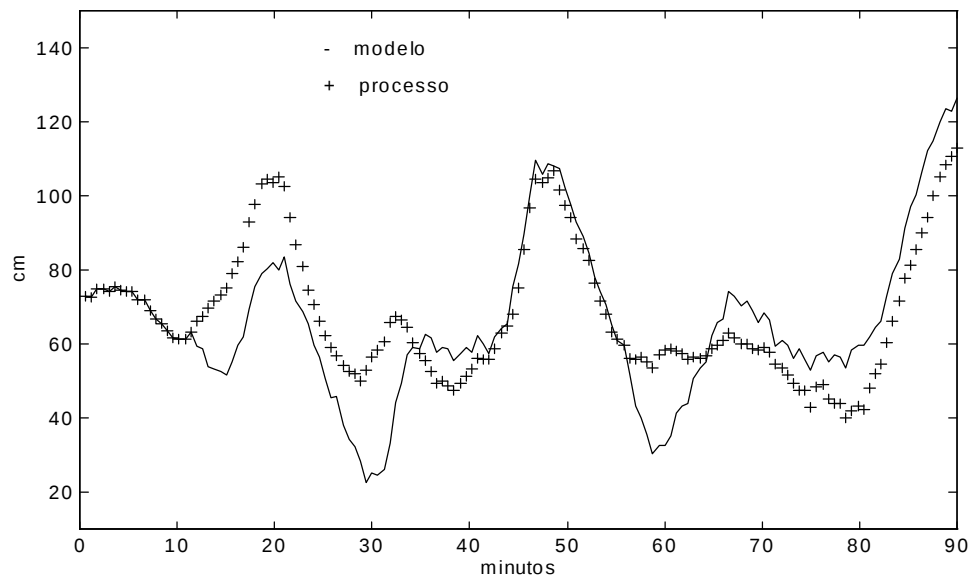


(a)

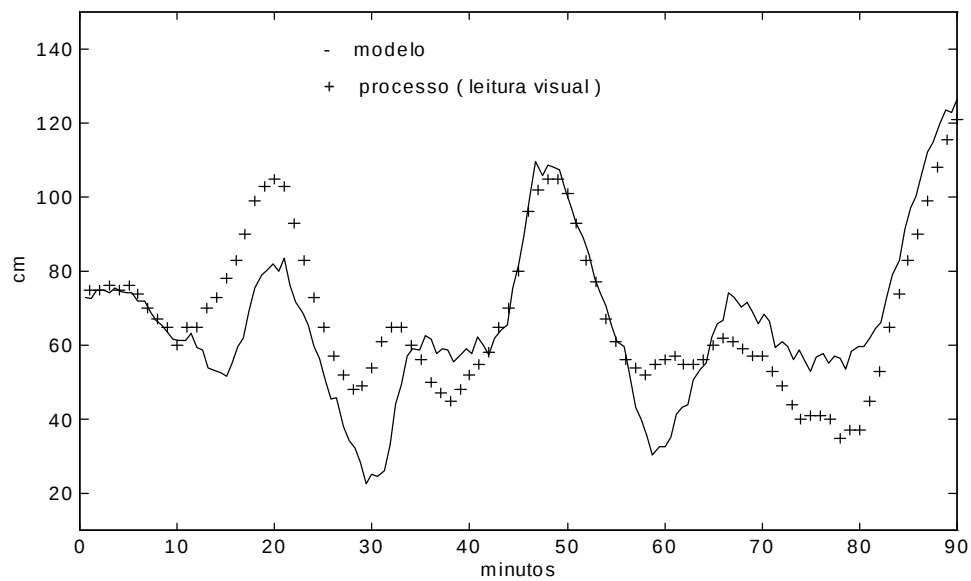


(b)

Figura 5.23. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).



(a)



(b)

Figura 5.24. Comparação entre os valores dos sinais coletados no teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos pelo sistema de aquisição; (b) altura da camada de espuma (h_{esp}) utilizando os dados obtidos a partir da leitura visual pelo operador.

5.5.3 Índice de qualidade dos modelos

Com o objetivo de auxiliar os procedimentos de validação, foi estabelecido um índice de avaliação de desempenho dos modelos para quantificar numericamente as análises efetuadas sobre os gráficos. Este índice de qualidade foi definido da seguinte forma:

$$i_q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{100(s_c(i) - s_m(i))}{s_c(i)} \right)^2, \quad (5.6)$$

onde

i_q : índice de qualidade dos modelos identificados;

N : número de dados utilizados no cálculo de i_q ;

$s_c(i)$: valor do sinal coletado no instante de amostragem i ;

$s_m(i)$: valor do sinal gerado pelo modelo no instante de amostragem i .

Na aplicação da equação 5.6 são penalizadas as diferenças existentes entre os valores dos sinais coletados e os valores dos sinais gerados pelo modelo. Quanto maior for esta diferença maior será o valor de i_q . Além disso, o termo $1/N$ permite a sua utilização na comparação de grupos de sinais de duração diferentes. Os resultados da aplicação de i_q sobre os modelos m1o, m2j e m2p são apresentados na Tabela 5.2, onde os melhores resultados obtidos estão destacados em negrito.

Tabela 5.2. Índice de qualidade dos modelos identificados

	y_1		y_2		h_{esp}		E_g	
	t25	t26	t25	t26	t25	t26	t25	t26
m1o	3,56	23,31	1,08	11,36	82,69	353,35	56,02	90,82
m2j	14,58	12,05	6,79	6,30	284,05	221,04	47,24	108,09
m2p	0,87	6,77	0,72	3,39	49,89	455,70	168,50	455,78

5.6 Análise dos resultados

5.6.1 Análise das equações dos modelos

Uma primeira inspeção sobre as equações dos três modelos revela a presença, em todas elas, de termos representativos de todos os sinais de entrada e saída selecionados para comporem o modelo. Este fato confirma duas expectativas fundamentais a respeito dos termos das equações. A primeira, era de que as equações dos modelos deveriam necessariamente conter termos de todas as entradas utilizadas, reforçando a premissa de que as saídas do processo são afetadas pelas entradas selecionadas para excitar a coluna. Este aspecto, válido para todas as entradas, foi abordado na subseção 5.3.1 em relação à variável de entrada *vazão de ar*, quando foi levantada a hipótese de que se poderia estar utilizando um perfil de sinais que não produzisse excitação nos sinais de saída da coluna. A segunda expectativa era que o primeiro e o segundo termos de maior ERR fossem termos lineares de saída do mesmo subsistema, com defasagem de, respectivamente, um e dois intervalos de amostragem. Esta característica de resultado dos termos de saída vem sendo regularmente observada em trabalhos utilizando as rotinas de identificação SISO e MIMO baseadas na Transformação de Householder (Rodrigues, 1996; Jácome, 1996; Barros, 1997).

Comparando-se as saídas y_1 de m2j e de m2p, observa-se que elas apresentam a mesma estrutura de modelo do primeiro ao quinto termo, com coeficientes de mesma ordem de grandeza, embora de valores absolutos diferentes. O mesmo comportamento se repete na saída y_2 , porém, com os sete primeiros termos. Estes fatos sugerem que tais termos sejam importantes na composição das equações dos dois subsistemas da coluna. Uma comparação dos dois modelos não lineares com m1o revela algumas semelhanças apenas nos dois primeiros termos da equação da saída y_1 .

5.6.2 Análise dos gráficos de validação

Uma avaliação geral das curvas mostra que os três modelos apresentaram um desempenho considerado satisfatório na tarefa de reprodução dos sinais de saída y_1 e y_2 coletados da coluna. Este desempenho se traduz na capacidade dos modelos de gerarem sinais de aparência semelhante aos das dinâmicas do processo, com uma diferença relativamente pequena entre valores numéricos dos sinais.

Constata-se, porém, que o desempenho dos modelos na reprodução dos sinais de altura da camada de espuma (h_{esp}) e *holdup* do ar (E_g) foram inferiores aos de reprodução de y_1 e y_2 , sendo que no caso do *holdup* do ar o desempenho foi bastante ruim. Fica nítida, nos gráficos de E_g , a grande discrepância entre os sinais gerados a partir dos modelos e os sinais gerados a partir dos dados coletados da coluna (o caso mais extremo é apresentado na figura 5.23b). Certamente, um dos fatores geradores desses problemas são as incertezas nos valores de densidade de espuma e de polpa utilizadas nas equações de cálculo destas variáveis (equações 5.4 e 5.5). Devido a impossibilidade de se medir os valores exatos dessas parâmetros, que variam durante o processo de flotação, foram utilizados valores médios estimados ($\rho_{esp} = 0,34 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_{polpa} = 1 \text{ g/cm}^3$). A densidade de espuma, por exemplo, varia com a vazão de água de lavagem. No caso da densidade de polpa, existe a influência da vazão de ar.

Quando se comparam os resultados entre testes, fica evidenciado que os resultados obtidos a partir da massa de dados de t25 são melhores que os de t26. Contudo, deve ser considerada nesta análise o fato de t26 ser potencialmente mais rica em oscilações do que t25. Consequentemente, o “esforço” empreendido pelos modelos na reprodução de t26 é maior que em t25.

Os resultados numéricos apresentados na Tabela 5.2 confirmam as avaliações efetuadas acima, baseadas na inspeção dos gráficos, além de facilitar a comparação entre o desempenho dos três modelos. Comparando-se os valores de i_q exibidos por cada um dos modelos, observa-se um melhor desempenho de m2p, exceto em alguns casos aparentemente contraditórios. À primeira vista, não se consegue explicar porque m2p apresenta o melhor resultado na reprodução de y_1 e y_2 e o pior resultado na reprodução de h_{esp} a partir de t26 e E_g a partir de t25 e t26. Uma possível explicação para tal fato é a seguinte: quando comparamos os sinais coletados da coluna (y_1 e y_2), e os sinais gerados pelos modelos ($\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$), estamos apenas comparando formas de onda e, neste caso, o modelo m2p apresenta melhor desempenho pela maior proximidade entre os valores numéricos das curvas. Contudo, quando analisamos h_{esp} e E_g , o que interessa não é se y_1 se aproxima de $\hat{y}_1$ ou, da mesma forma, se y_2 se aproxima de $\hat{y}_2$. A questão aqui parece ser a diferença $(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$, ou seja, a semelhança entre os sinais gerados pelo modelo. Por m2p ser menos “simétrico” do que os outros modelos, o seu desempenho no cálculo de h_{esp} e E_g é pior (ver figuras 5.23 e 5.24). Por simétrico, refere-se à característica do modelo de gerar as formas de onda de $\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$ com perfis semelhantes. Uma inspeção sobre as equações 5.4 e 5.5 mostra que os valores de E_g e h_{esp} são dependentes do termo $y_2 - y_1$.

5.6.3 Obtenção de um modelo simplificado m2p_s

Em função dos problemas apresentados pelo modelo m2p na reprodução de h_{esp} e E_g a partir dos dados de t26, propõe-se aqui, a derivação de um modelo simplificado m2p_s.

Os sinais de y_1 serão obtidos a partir da função de ajuste de curvas *polyfit* do software MATLAB™ (MathWorks, 1994). Utilizando *polyfit* sobre os

dados coletados da coluna e apresentados na figura 5.23a, obtém-se a seguinte equação algébrica:

$$y_1(k) = y_2(k) - 10,0090 - 0,0022k. \quad (5.7.1)$$

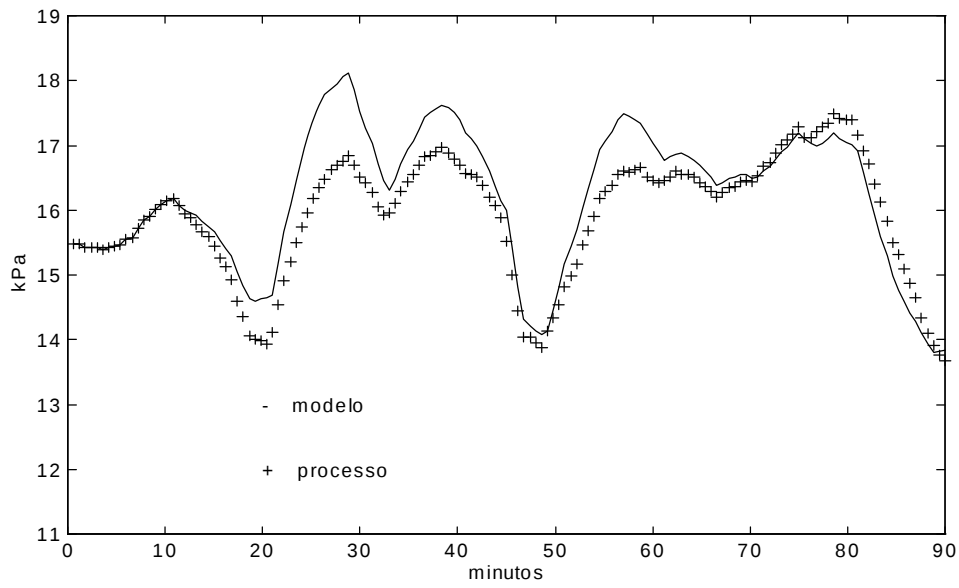
Para o sinal y_2 , mantém-se a equação 5.3.2 de m2p, ou seja,

$$\begin{aligned} y_2(k) = & 0,10972y_2(k-1) - 0,02396y_2(k-2) - 0,00288u_1(k-1)y_1(k-2) \\ & + 0,15428u_2(k-1)y_1(k-3) - 0,04017u_3(k-12)u_3(k-11) \\ & - 0,64116u_2(k-10)u_2(k-3) - 0,00247u_3(k-17)u_1(k-5) \\ & + 0,77827u_2(k-11)u_2(k-8) + 0,10517u_3(k-9)u_3(k-7) \\ & - 0,01090u_3(k-13)u_3(k-7) - 0,00004u_1(k-4)y_1(k-2) \\ & + 0,32941u_2(k-13)u_2(k-3) - 0,01302u_2(k-1)y_1(k-1). \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

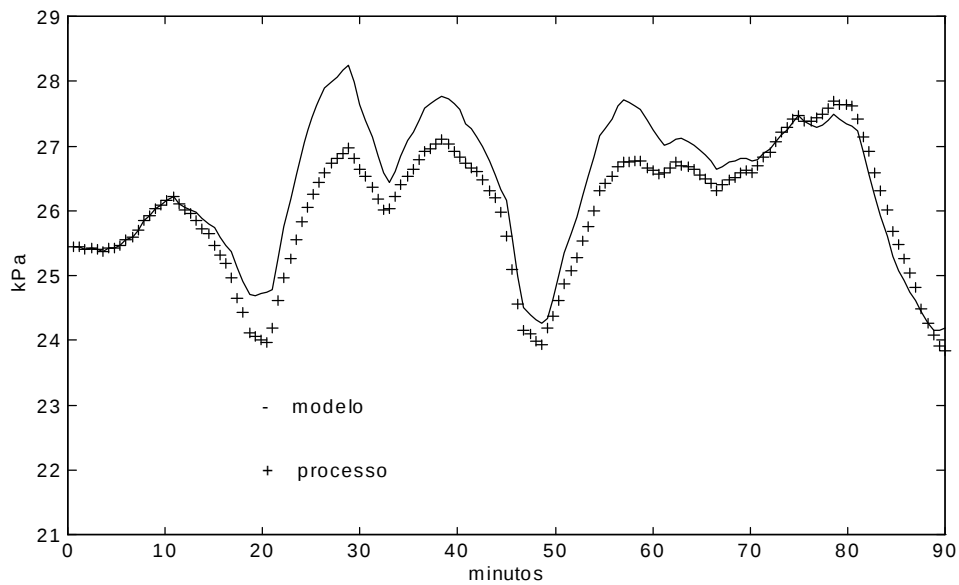
Observando-se a equação 5.7.1, chama a atenção a presença do termo $-0,0022k$, que poderia denotar a existência de um *drift* na medição dos valores de pressão. Embora tal problema possa ter ocorrido durante a realização dos testes, um outro fato parece explicar melhor a composição de termos da equação 5.7.1. Ao inspecionarmos a figura 5.5c, verifica-se que durante o transcorrer do teste t26 houve um decaimento gradual da vazão de ar, u_3 (provavelmente devido a um entupimento progressivo do aerador da coluna, manifestado também em diversos pré-testes). Por este motivo, houve um aumento gradual da diferença de pressão $y_2 - y_1$, uma vez que o aumento ou o

decaimento da vazão do ar injetado na coluna provoca, respectivamente, um decaimento ou aumento da diferença de pressão $y_2 - y_1$.

A simulação das equações 5.7.1 e 5.7.2 do modelo m2p_s geram as figuras 5.25, 5.26 e 5.27 que devem ser, respectivamente, comparadas com as figuras 5.22, 5.23 e 5.24a apresentadas anteriormente:



(a)

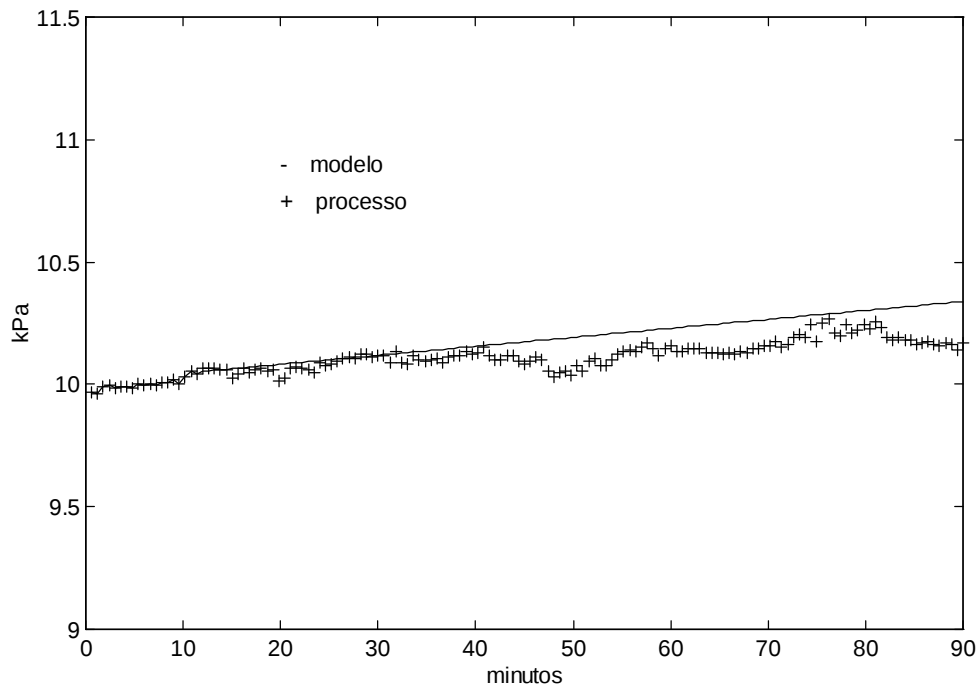


(b)

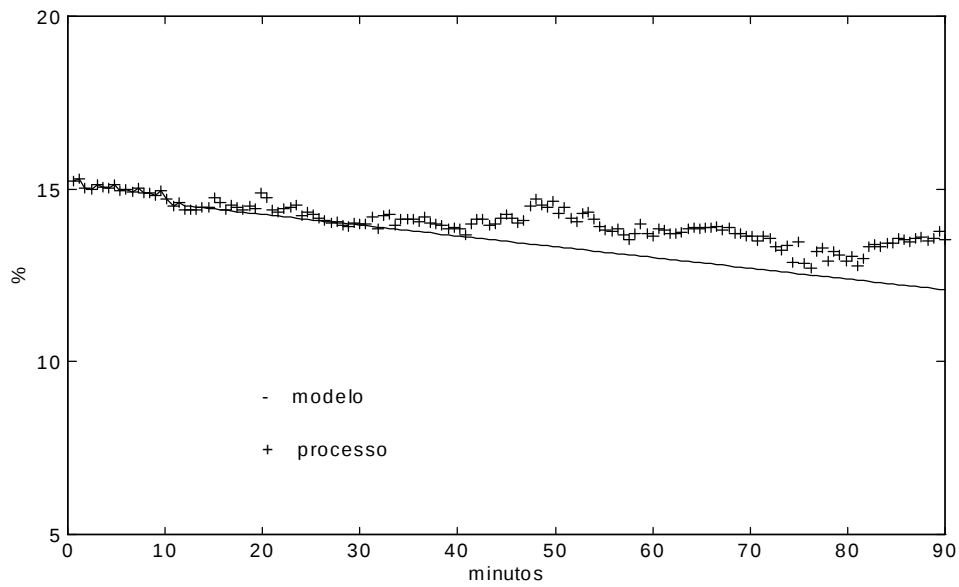
Figura 5.25. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p_s:

(a) pressão no ponto superior na seção de concentração (y_1);

(b) pressão no ponto inferior na seção de concentração (y_2).



(a)



(b)

Figura 5.26. Comparação entre os valores dos dados de validação do teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p: (a) diferença entre a pressão no ponto inferior e a pressão no ponto superior na seção de concentração ($y_2 - y_1$); (b) *holdup* do ar (E_g).

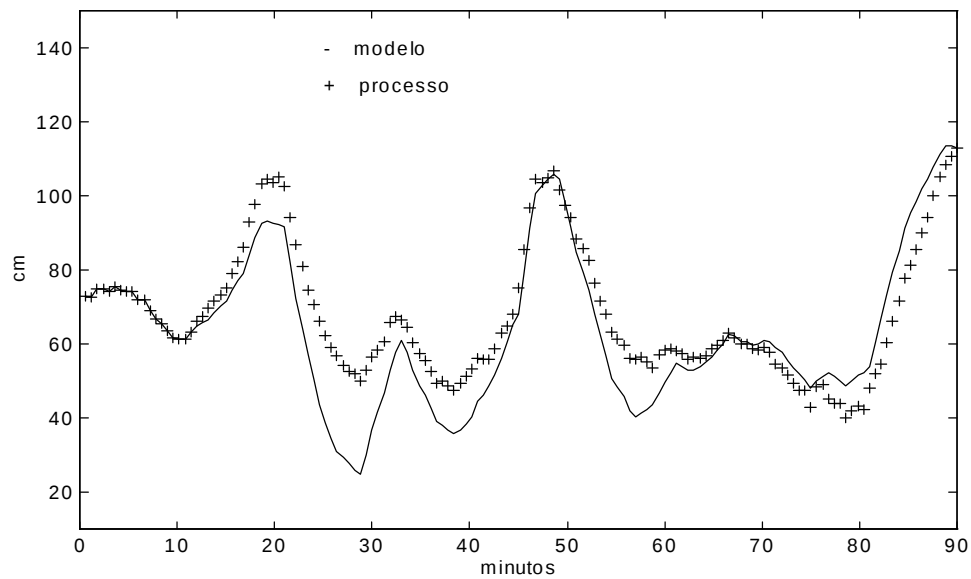


Figura 5.27. Comparação entre os valores de altura da camada de espuma (h_{esp}) coletados no teste t26 e os valores produzidos pela simulação do modelo m2p_s:

Os resultados da aplicação de i_q sobre m2p_s e sobre os três modelos identificados com os dados de t26 são apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3. Índice de qualidade de m2p_s e dos modelos identificados para t26

	y_1	y_2	h_{esp}	E_g
m1o	23,31	11,36	353,35	90,82
m2j	12,05	6,30	221,04	108,09
m2p	6,77	3,39	455,70	455,78
m2p_s	10,90	4,50	287,00	25,57

Uma inspeção sobre as curvas acima mostra que o modelo m2p_s consegue melhorar a semelhança entre as curvas das variáveis de saída.

Portanto, houve uma melhora muito significativa na reprodução de h_{esp} e E_g , mesmo tendo havido um maior distanciamento entre as curvas geradas pelo modelo e as curvas geradas a partir dos dados coletados de y_1 e y_2 (fato confirmado pelo aumento de i_q apresentado na Tabela 5.3).

5.7 Considerações finais

Foram apresentados neste capítulo os resultados obtidos a partir da aplicação dos procedimentos de identificação de sistemas MIMO na coluna de flotação de 2" do CDTN. Estes procedimentos tomaram por base toda a teoria descrita nos capítulos 3 e 4. A parte referente à coluna foi baseada nas descrições realizadas no capítulo 2.

Foram realizados dois testes de experimentação e aquisição de dados da coluna, nomeados t25 e t26. Uma parcela dos dados do teste t25 foi utilizada na obtenção dos modelos. A parcela restante foi utilizada nas etapas de validação junto com os dados do teste t26.

Dentre os vários modelos obtidos, foram selecionados para apresentação dois modelos não lineares (m2j e m2p) e um modelo linear (m1o). Os três modelos apresentaram um desempenho considerado satisfatório na reprodução das formas de onda dos sinais de saída da coluna, y_1 e y_2 . Tais sinais foram então usados para determinar outras duas variáveis a saber: altura da camada de espuma (h_{esp}) e *holdup* do ar (E_g). Os resultados revelaram que as predições de h_{esp} e E_g foram inferiores às predições de y_1 e y_2 . Uma das explicações mais prováveis para este fato é que no cálculo de h_{esp} e de E_g são utilizados valores estimados de densidade de espuma e de polpa que estão sujeitos a incertezas nos seus valores devido à variação destes parâmetros durante o processo de flotação.

Na comparação entre o desempenho dos três modelos, verificou-se que m2p apresentou o melhor desempenho na reprodução y_1 e y_2 mas os piores resultados na reprodução de h_{esp} e E_g . Foi conjecturado que uma possível razão para esse fato é que a altura da camada de espuma e o *holdup* do ar dependem fortemente da diferença $(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$ e não tanto do erro de cada variável do modelo $(y_1 - \hat{y}_1)$ e $(y_2 - \hat{y}_2)$. Tal observação levou ao desenvolvimento de um modelo simplificado que “força” uma redução em $(\hat{y}_2 - \hat{y}_1)$ às custas de um aumento nos erros $(y_1 - \hat{y}_1)$ e $(y_2 - \hat{y}_2)$. Como era de se esperar, o modelo simplificado apresenta uma melhora significativa nos valores calculados de altura da camada de espuma e *holdup* do ar.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação, foi estudada a aplicação de técnicas de identificação de sistemas dinâmicos não lineares sobre a coluna de flotação de 2" do CDTN. Como resultados deste estudo, foram obtidos diversos modelos. Desses, foram escolhidos para apresentação três modelos polinomiais multivariáveis, sendo um modelo ARMAX (m1o) e dois modelos NARMAX (m2j e m2p).

A revisão bibliográfica dos assuntos tratados na dissertação foi apresentada nos capítulos 1, 2 e 3. No capítulo 4, os conceitos sobre identificação de sistemas com entrada única e saída única (SISO), abordados no capítulo 3, foram estendidos aos sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). O capítulo 4 apresenta a base teórica a partir da qual foram desenvolvidas as rotinas computacionais utilizadas nos procedimentos de identificação MIMO. Finalmente, no capítulo 5 e apêndice A, foram apresentados os testes experimentação e aquisição de dados da coluna, os modelos obtidos e a análise dos resultados.

Dentre as ferramentas computacionais que foram utilizadas, destaca-se o conjunto de rotinas computacionais de identificação de sistemas MIMO. Estas rotinas estão descritas no apêndice B do texto. Elas foram obtidas a partir da adequação, realizada na primeira etapa dos trabalhos, de um conjunto de rotinas de identificação de sistemas SISO. As rotinas de identificação MIMO também foram utilizadas em outra dissertação do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFMG (Barros, 1997). Nos dois trabalhos, essas ferramentas se mostraram eficientes na obtenção de modelos com boas propriedades dinâmicas.

As variáveis de entrada da coluna de flotação escolhidas para comporem os modelos foram o *signal de controle de velocidade da bomba de não flotado* (u_1), a *vazão de água de lavagem* (u_2) e a *vazão de alimentação de ar* (u_3). Como variáveis de saída foram escolhidas a *pressão superior* (y_1) e a *pressão inferior na seção de concentração da coluna* (y_2). Estas cinco variáveis foram escolhidas em função da sua representatividade no processo de flotação e também da disponibilidade de instrumentação da coluna para aplicação dos sinais de teste de experimentação e coleta de dados.

Os dados utilizados nos procedimentos de identificação foram obtidos em dois testes de experimentação e aquisição de dados. Estes testes, t25 e t26, duraram, respectivamente, 110 e 90 minutos. Uma parcela dos dados de t25 foi utilizada na obtenção dos modelos. A parcela restante e o os dados de t26 foram utilizados na validação dos modelos obtidos.

Dentre os vários modelos lineares estimados, somente um modelo linear (m1o) foi considerado adequado. Diversos modelos não lineares quadráticos com boas propriedades dinâmicas foram encontrados. Tal fato sugere que não linearidades quadráticas são importantes na caracterização do processo de flotação em coluna. Desses modelos, escolheu-se dois para apresentação neste trabalho (m2j e m2p).

Uma inspeção sobre as curvas que comparam os sinais coletados da coluna (y_1 e y_2) e os sinais gerados pelos modelos ($\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$), mostra que m1o, m2j e m2p conseguiram reproduzir de forma satisfatória os sinais de saída coletados da coluna. Este desempenho teve uma pequena degradação na predição dos valores de altura da camada de espuma (h_{esp}), calculados a partir de $\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$. Já na predição dos valores de *holdup* do ar (E_g), que também são calculados a partir de $\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$, a degradação de desempenho foi bastante acentuada. Tal fato reduz a utilidade destes modelos na predição dos valores de *holdup* do ar. Uma solução para esses problemas, seria realizar os

procedimentos de seleção de estrutura e estimação de parâmetros utilizando como saída dos modelos as variáveis h_{esp} e E_g , ao invés de y_1 e y_2 . Neste caso, os algoritmos poderiam contornar uma das fontes potenciais destes problemas, que são as incertezas presentes nos valores de densidade de espuma e de polpa utilizados nos cálculos de h_{esp} e E_g (equações 5.4 e 5.5).

Quando se confronta os resultados apresentados por cada modelo, revela-se uma supremacia de m2p na reprodução de y_1 e y_2 . Contudo, m2p apresentou o pior resultado na reprodução de h_{esp} e E_g . Neste caso, o problema constatado foi a falta de semelhança entre os valores de saída gerados por m2p, $\hat{y}_1$ e $\hat{y}_2$. O modelo simplificado m2p_s apresentado na subseção 5.6.3 pode ser uma alternativa à solução deste problema.

Finalmente, a título de sugestões para trabalhos futuros, propõem-se os seguintes itens:

- utilizar minério ao invés de água na alimentação da coluna de flotação e confrontar os modelos assim obtidos com os modelos desta dissertação;
- utilizar nas etapas de seleção de estrutura e estimação de parâmetros como variáveis de saída dos modelos a altura da camada de espuma e *holdup* do ar;
- aplicar técnicas de agrupamento de termos como ferramenta auxiliar de seleção dos termos das equações dos modelos (Aguirre e Billings, 1995c);
- utilização das técnicas de redes neurais artificiais na obtenção de modelos da coluna utilizando os dados desta dissertação;
- utilização dos modelos aqui obtidos no desenvolvimento de estratégias de controle da coluna de flotação.

Referências bibliográficas

- Aguirre, L. A. (1994). Some remarks on structure selection for nonlinear models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(6):1707-1714.
- Aguirre, L. A. (1995). A nonlinear correlation function for selecting the delay time in dynamical reconstructions. *Physics Letters A*, 203(1):88-94.
- Aguirre, L. A. (1996). A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos, part II: modeling and control. *Controle & Automação*, 7(1):50-66.
- Aguirre, L. A. (1997). Recovering map static nonlinearities from chaotic data using dynamical models. *Physica D*, 100(1-2):41-57.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1994). Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(1):109-125.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995a). Dynamical effects of overparametrization in nonlinear models. *Physica D*, 80:26-40.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995b). Retrieving dynamical invariants from chaotic data using NARMAX models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(2):449-474.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995c). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *International Journal of Control*, 62(3):569-587.
- Aguirre, L. A. and Mendes, E. M. (1996). Global nonlinear polynomial models: Structure, term clusters and fixed points. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(2):279-294.
- Aguirre, L. A., Mendes, E. M. and Billings, S. A. (1996). Smoothing data with local instabilities for the identification of chaotic systems. *International Journal of Control*, 63(3):483-505.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716-723.
- Aquino, J. A. (1992). Estudo comparativo de flotação em célula mecânica e coluna para o minério de Itataia. XV Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Hidrometalurgia, São Lourenço, Minas Gerais.

Aquino, J. A., Albuquerque, R. e Júnior, W. (1998). Estudo de flotação em coluna aplicado a minério de ferro. XVII Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Hidrometalurgia, Águas de São Pedro, São Paulo.

Aquino, J. A., Luz, I., Coelho, S., Oliveira, M., Benedetto, J. e Fernandes, M. (1992). Aplicação da flotação em coluna a minérios brasileiros. XV Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Hidrometalurgia, São Lourenço, Minas Gerais.

Arrunátegui, H. (1987). *Processamento de minerais II - Flotação*. Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.

Barros, V. C. (1997). Caracterização e identificação de séries temporais biomédicas através de modelos NARMAX polinomiais multivariáveis. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.

Bergh, L. G. and Yianatos, J. B. (1991). Advances on flotation column dynamics and measurements. Column Flotation '91, International Conference on Column Flotation, Ontario-Canada.

Bergh, L. G. and Yianatos, J. B. (1993). Experimental studies on flotation column dynamics. *Mineral Engineering*, 7(2):345-355.

Bergh, L. G. and Acuña, P. (1994). Hierarchical control of flotation columns. IV meeting of the Southern Hemisphere on Mineral Technology and III Latin-American Congress on Froth Flotation, Concepción-Chile.

Bergh, L. G. and Yianatos, J. B. (1995). Dynamic simulation of operating variables in flotation columns. *Mineral Engineering*, 8(6):603-613.

Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems - a survey. *IEE Proceedings Pt D*, 127(6):272-285.

Billings, S. A. and Voon, W. S. (1983). Structure detection and model validity tests in the identification of nonlinear systems. *IEEE Proceedings, Part D*, 130(4):193-199.

Billings, S. A. and Voon, W. S. (1984). Least squares parameter estimation algorithms for non-linear systems. *International Journal of Systems and Science*, 15(6):601-615.

Billings, S. A. and Fadzil, M. B. (1985). The practical identification of systems with nonlinearities. In IFAC Identification and System Parameter Estimation, pages 155-160, York, UK.

Billings, S. A. and Voon, W. S. (1986). Correlation based models validity tests for nonlinear models. *International Journal of Control*, 44(1):235-244.

- Billings, S. A., Chen, S. and Korenberg, M. J. (1989). Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *International Journal of Control*, 49(6):2157-2189.
- Billings, S. A. e Tao, Q. H. (1991). Model validation tests for nonlinear signal processing applications. *International Journal of Control*, 54:157-194.
- Billings, S. A. e Zhu, Q. M. (1994). Nonlinear model validation using correlation tests for nonlinear signal processing applications. *International Journal of Control*, 60(6):1107-1120.
- Borges, A. (1996). *Processamento de minerais I*. Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Bosch, P. P. J. van den and A. Klauw (1994). *Modeling, identification and simulation of dynamical systems*. CRC Press, Florida.
- Boutin, P. and Wheeler, D. (1967). Column flotation. *Mining World*, 20(3):47-50.
- Bronson, Richard (1993). *Matrizes*. McGraw-Hill, Lisboa.
- Casdagli, M. (1989). Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D*, 35:335-356.
- Chen, S., Billings, S. A. and Luo, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *International Journal of Control*, 50(5):1873-1896.
- Chen, W., Horan, N. (1998). The treatment of a high strength pulp and paper mill effluent for wastewater re-use. *Environmental Technology*, 19(2):173-182.
- Çinar, A. (1995). Nonlinear time series models for multivariable dynamic processes. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 30:147-158.
- Corrêa, M. V. (1997). Identificação de sistemas dinâmicos não lineares utilizando modelos NARMAX racionais - Aplicação a sistemas reais. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Del Villar, R., Pérez, R. Gómez, P. O. and Finch, J. A. (1994). Use of a neural network algorithm for level sensing in flotation columns. IV meeting of the Southern Hemisphere on Mineral Technology and III Latin-American Congress on Froth Flotation, Concepción-Chile.
- Dell, C. C. and Jenkins, B. W. (1976). The Leeds Flotation Column. Seventh International Coal Preparation Congress, Sydney-Australia.

- Dobby, G. S. (1984). A fundamental flotation model and flotation scale-up. Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada.
- Doebelin, E. O. (1980). *System modeling and response*. John Wiley & Sons, Canada.
- Farmer, J. D. and Sidorowich, J. J. (1988). Exploiting chaos to predict the future and reduce noise. In Lee, Y. editor, *Evolution, learning and Cognition*. Word Scientific, Singapore.
- Finch, J. A. and Dobby, G. (1990). *Column Flotation*. Pergamon Press, Oxford, UK.
- Garcia, C. (1997). *Modelagem e simulação*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Gaudin, A. M. (1980). *Principles of mineral dressing*. McGraw-Hill, New York, USA.
- Golub, G. H. and Van Loan, C.F. (1989). *Matrix Computations*. 2nd Edition, John Hopkins, London.
- Gooijer, J. G., Abraham, B., Gould, A. and Robinson, L. (1985). Methods for determining the order of an auto-regressive moving average process: a survey. *International Journal of Statistical Review*, 53(3):301-329.
- Gnirss, R., Peter, A. and Schmidt, V. (1996). Municipal wastewater treatment in Berlin with deep tanks and flotation for secondary clarification. *Water Science and Technology*, 33(12):199-210.
- Guerrero, L., Omil, F., Mendez, R. and Lema, J. (1998). Protein recovery during the overall treatment of wastewater from fish-meal factories. *Bioresource Technology*, 63(3):221-229.
- Guimarães, R. C. (1995). Máquinas de flotação. Boletim técnico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Minas, BT/PMI/046.
- Haber, R. (1985). Nonlinearity testes for dynamic processes. In IFAC Identification and System Parameter Estimation, York, UK.
- Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979). The determination of the order of an autoregression. *Journal of The Royal Statistic Society*, 41(2):190-195.
- Hirajima, T., Takamori, T., Tsunekawa, M., Matsubara, T., Oshima, K., Imai, T., Sawaki, K. and Kubo, S. (1991). The application of fuzzy logic to control concentrate grade in column flotation at Toyoha Mines. Column Flotation '91, International Conference on Column Flotation, Ontario-Canada.

Jácome, C. R. F. (1996). Uso de conhecimento prévio na identificação de modelos polinomiais NARMAX. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.

Jameson, G. J. (1988). A new concept in flotation column design. Column Flotation '88, International Symposium on Column Flotation, SME Annual Meeting, Phoenix-Arizona.

Jang, H. and Kim, K. (1994). Identification of loudspeaker nonlinearities using the NARMAX modeling technique. *Journal of Audio Engineering Society*, 42(1/2):50-59.

Jerônimo, R. A. (1998). Identificação não linear de um processo de neutralização de pH multivariável utilizando modelos polinomiais. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Johnson, J. R. (1989). *Introduction to digital signal processing*. Prentice-Hall International, New Jersey.

Kadtke, J. B., Brush, J. and Holzfuss, J. (1993). Global dynamical equations and Lyapunov exponents from noise chaotic time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(3):279-294.

Kashyap, R. L. (1977). A Bayesian comparison of different classes of dynamical models using empirical data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):607:616.

Klir, G. and Yuan B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*. Prentice-Hall International, New Jersey

Kortmann, M. and Unbehauen, H. (1988). Two algorithms for model structure identification of nonlinear dynamic systems with applications to industrial processes. In IFAC Identification and System Parameter Estimation, pages 649-656, Beijing, China.

Kortmann, M., Janiszowski, K. and Unbehauen, H. (1988). Application and comparison of different identification schemes under industrial conditions. *International Journal of Control*, 48(6):2275-2296.

Leitch, R. R. (1987). Modeling of complex dynamic systems. *IEE Proceedings Pt D*, 134(4):245-250.

Leontaritis, I. J. and Billings, S. A. (1985). Input-output parametric models for nonlinear systems part I: deterministic nonlinear systems. *International Journal of Control*, 41(2):303-328.

- Leppinen, J., Salonsaari, P. and Palosaari, V. (1997). Flotation in acid mine drainage control: Beneficiation of concentrate. *Canadian Metallurgical Quarterly*, 36(4):225-230.
- Lin, S. and Lo, C. (1996). Treatment of textile wastewater by foam flotation. *Environmental Technology*, 17(8):841-849.
- Letellier, C., Sceller, L. L., Maréchal, E., Dutertre, P., Maheu, B., Gouesbet, G., Fei, Z. and Hudson, J. L. (1985). Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution. *Physics Review Letters*, 51(5):4262-4266.
- Ljung, L. (1987). *System identification - Theory for the user*. Prentice-Hall International, New Jersey.
- MathWorks, Inc (1994). MATLAB for personal computers. Software users guide.
- Mendes, E. M. A. M. and Aguirre, L. A. (1995). Orthogonal estimation of models. Relatório de Pesquisa CPDEE/LCPI/01-95, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Michell, M (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms (Complex Adaptive Systems Series)*. MIT Press, Massachusetts.
- Mourad, M., Hemati and M. Laguerie, C. (1997). Intermittent drying of corns in a flotation fluidized bed. Experimental study and modeling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(5):1109-1119.
- Moys, M. H. and Finch, J. (1988). Developments in the control of flotation columns. *International Journal of Mineral Processing*, 23:265-278.
- Murdock, D. J., Tucker, R., Jacobi, H. (1991). Column cells versus conventional flotation, a cost comparison. Column Flotation '91, International Conference on Column Flotation, Ontario-Canada.
- Naujock, H., Strunz, A. and Wolf, W. (1992). Flotation of particles of print. *Papier*, 46(10A):V121-V130.
- Norton, J. P. (1986). *An introduction to identification*. Academic Press, London. UK.
- Noshiro, M., Furuya, M., Linkens, D. and Goode, K. (1993). Nonlinear identification of the PCO₂ control system in man. *Journal of Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 40:189-202.

Oblad, A. and Herbst, J. (1990). Industrial results using model-based expert system control of mineral processing plants. XIV Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Hidrometalurgia, Salvador, Bahia.

Oliveira, M. L. M., Aquino, J. (1992). *Flotação em Coluna*. Apostila do curso de flotação em coluna, Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear, Belo Horizonte, Minas Gerais.

Oliveira, M. L. M., Aquino, J. (1997). *Comunicação pessoal*.

Oliveira, M. L. M. e Peres, A. (1992). Flotação em coluna aplicada ao beneficiamento de carvão. XV Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Hidrometalurgia, São Lourenço, Minas Gerais.

Peres, R., and Del Villar, R. (1994). Measurement of bias and water entrainment in flotation columns using conductivity. IV meeting of the Southern Hemisphere on Mineral Technology and III Latin-American Congress on Froth Flotation, Concepción-Chile.

Peres, A. E. C., Pereira, C., Silva, J. e Galery, R. (1986). Apostila do curso de beneficiamento de minérios, Associação Brasileira de Metais e Fundação Christiano Ottoni.

Pu, M., Gupta, Y. and Taweel, A. (1991). Model predictive of flotation columns. Column Flotation '91, International Conference on Column Flotation, Ontario-Canada.

Rodrigues, G. G. (1996). Identificação de sistemas dinâmicos não lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais - aplicação a sistemas reais. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais.

Ros, M. and Gantar, A. (1998). Possibilities of reduction of recipient of tannery wastewater in Slovenia. *Water science and Technology*, 37(8):145-152.

Rosenstein, M. T., Collins, J. and De Luca, C. (1994). Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times. *Physica D*, 65:117-134.

Sjoberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Deylon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H. and Juditsky, A. (1997). Nonlinear black-box modeling in system identification. *Automática*, 31(12): 1691-1724.

Stearns, S. D. and Hush, D. (1990). *Digital Signal Analysis*. Prentice-Hall International, New Jersey.

Stefess, G. (1998). Monitoring of environmental effects and process performance during treatment of sediment from petroleum harbour in Amsterdam. *Water science and Technology*, 37(6-7):395-402.

Tuteja, R. K., Spottiswood, D. and Misra, V. (1994). Mathematical models of the column flotation process - a review. *Mineral Engineering*, 7(12):1459-1472.

Wheeler, D. A. (1966). Big flotation column mill tested. *Engineering & Mining Journal*, 167(11):98-99.

Villeneuve, J., Guillaneau, J. and Durance, M. (1995). Flotation modelling: A wide range of solutions for solving industrial problems. *Mineral Engineering*, 8(4/5):409-420.

Yang, D. C. (1988). New packed column flotation system. Column Flotation '88, International Symposium on Column Flotation, SME Annual Meeting, Phoenix-Arizona.

Yianatos, J. B. (1987). Flotation column froths. Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada.

Ynchausti, R. A., Herbst, J. and Hales, L. (1988). Unique problems and opportunities associated with automation of column flotation cells. Column Flotation '88, International Symposium on Column Flotation, SME Annual Meeting, Phoenix-Arizona.

Zipperian, D. E. and Svensson, U. (1988). Plant practice of the Flotaire column flotation machine for metallic, nonmetallic and coal flotation. Column Flotation '88, International Symposium on Column Flotation, SME Annual Meeting, Phoenix-Arizona.

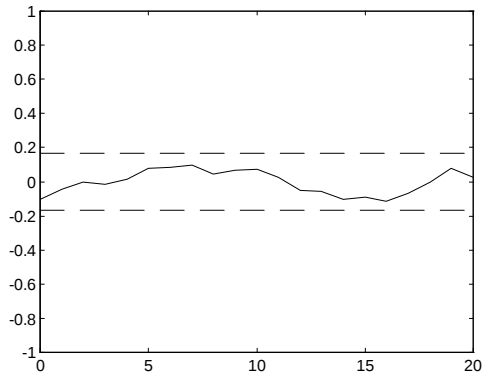
Zurada, J. (1992). *Introduction to artificial neural systems*. West Publishing Company, Minnesota, USA.

Apêndice A

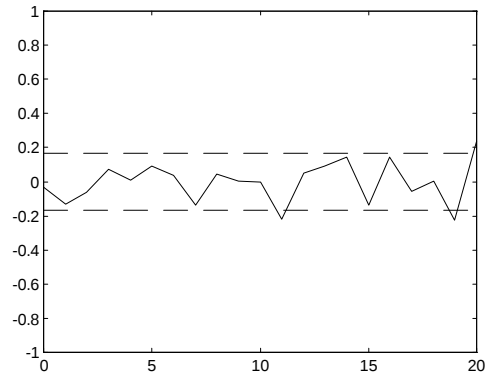
Gráficos de validação estatística dos modelos identificados

São apresentados neste apêndice os gráficos de validação estatística do modelo linear m_{1o} e dos modelos não lineares m_{2j} e m_{2p} . Conforme poderá ser observado, os três modelos apresentam um desempenho considerado satisfatório nas avaliações efetuadas. Dentre as curvas que ficaram fora do intervalo de confiança, somente algumas poucas apresentaram desvios acentuados. Contudo, estes desvios não comprometem o procedimento de validação dos modelos.

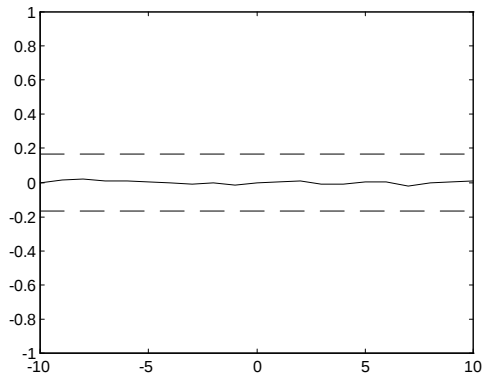
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



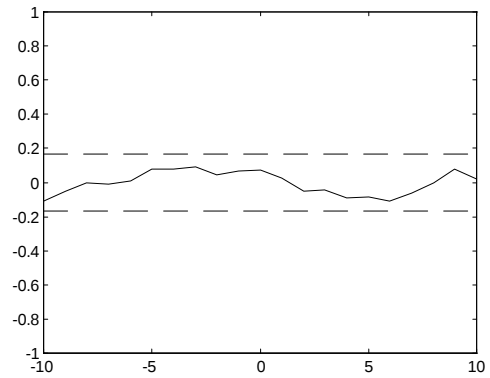
(1)



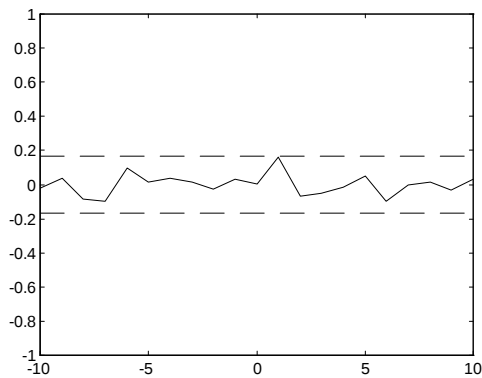
(2)



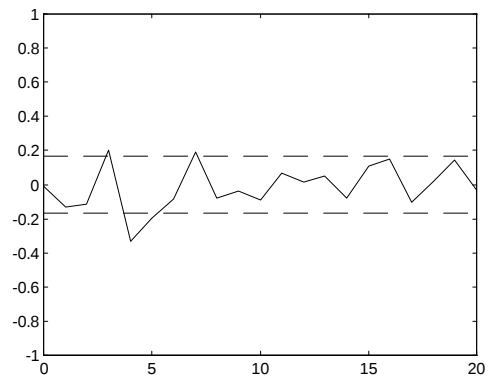
(3)



(4)



(5)



(6)

Figura A1. Validação estatística do modelo m1o. Correlações calculadas:

(1) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_1^2(t)$

(2) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times \xi_1^2(t)$

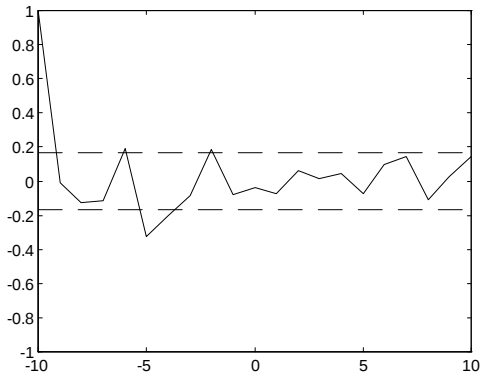
(3) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_1(t)$

(4) $u_1^2(t) \times \xi_1(t)$

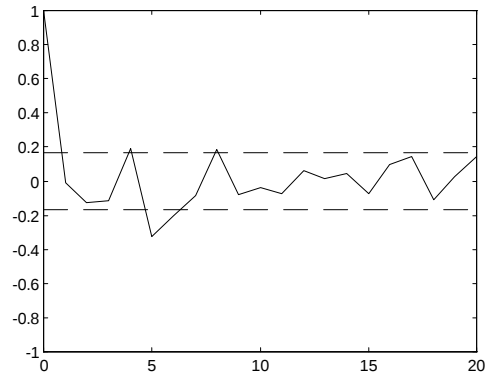
(5) $u_1^2(t) \times \xi_1^2(t)$

(6) $u_1(t) \times \xi_1(t)$

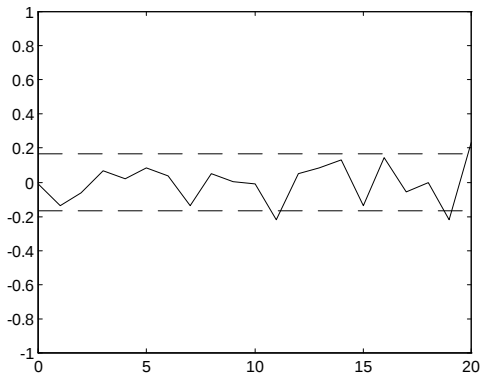
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



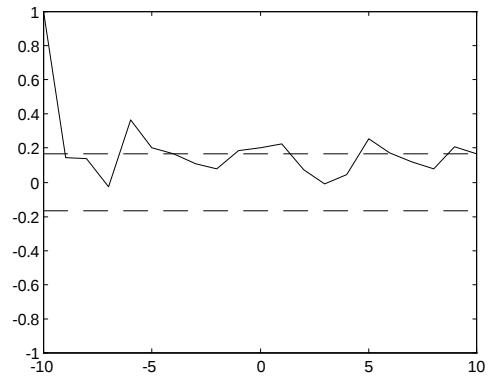
(7)



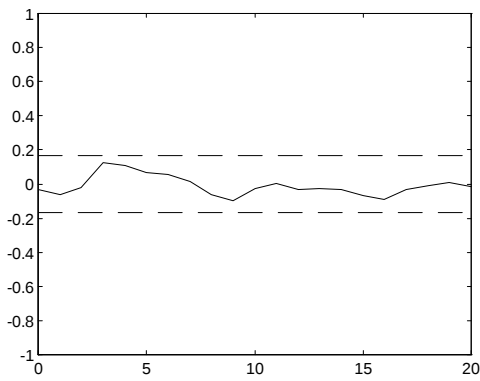
(8)



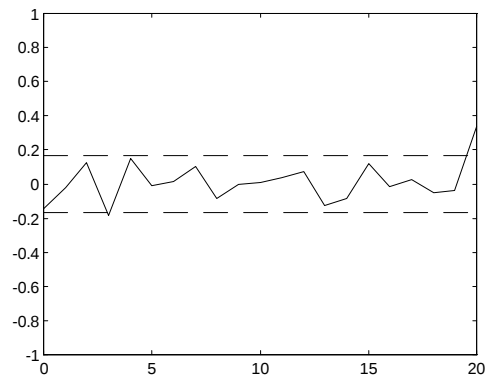
(9)



(10)



(11)



(12)

(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

(7) $\xi_1(t) \times \xi_1(t)$

(8) $\xi_1'(t) \times \xi_1'(t)$

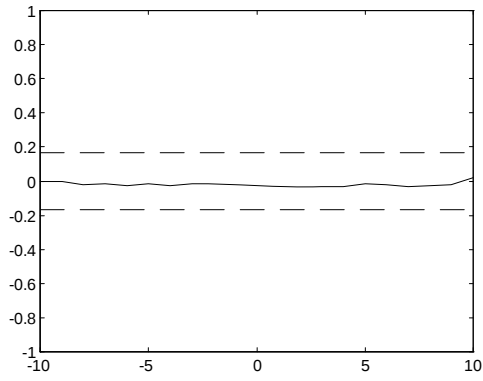
(9) $\xi_1'(t) \times \xi_1^{2'}(t)$

(10) $\xi_1^{2'}(t) \times \xi_1^{2'}(t)$

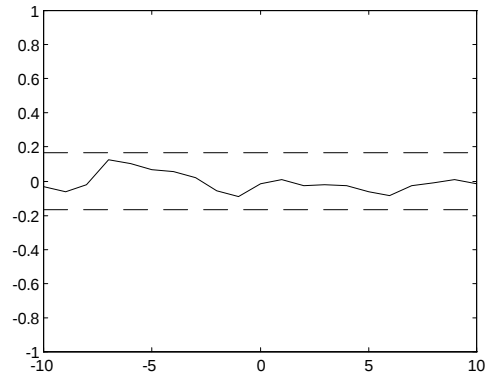
(11) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_1^{2'}(t)$

(12) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times \xi_2^{2'}(t)$

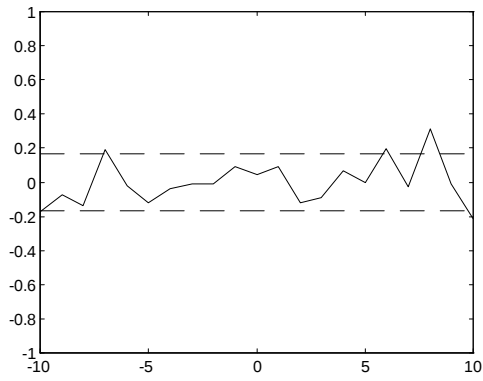
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



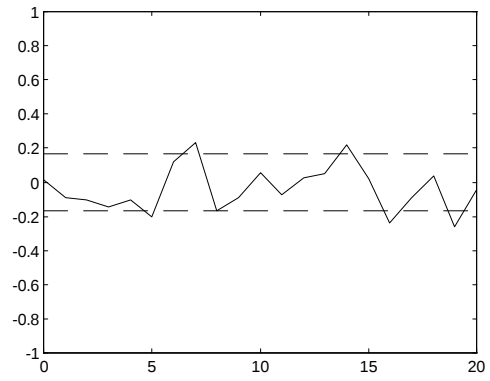
(13)



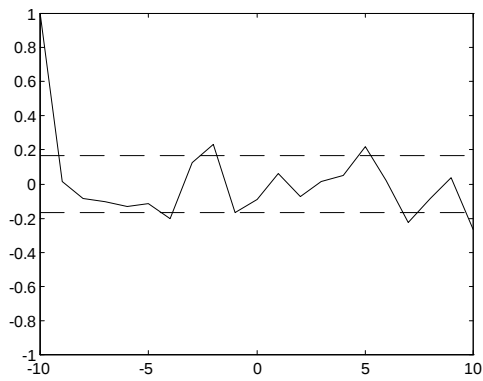
(14)



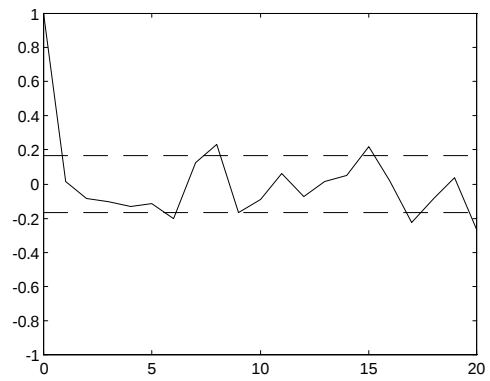
(15)



(16)



(17)

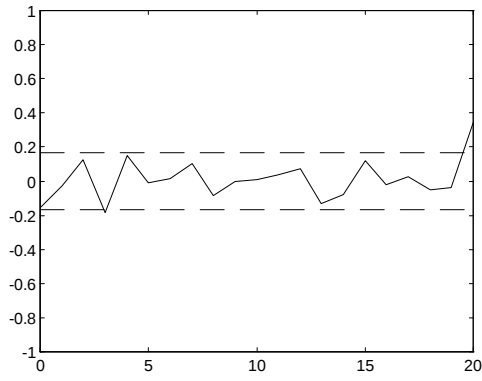


(18)

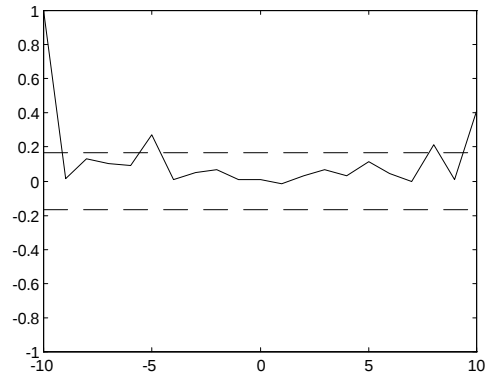
(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (13) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_1(t)$ | (14) $u_1^2(t) \times \xi_2(t)$ |
| (15) $u_1^2(t) \times \xi_2^2(t)$ | (16) $u_1(t) \times \xi_2(t)$ |
| (17) $\xi_2(t) \times \xi_2(t)$ | (18) $\xi_2'(t) \times \xi_2'(t)$ |

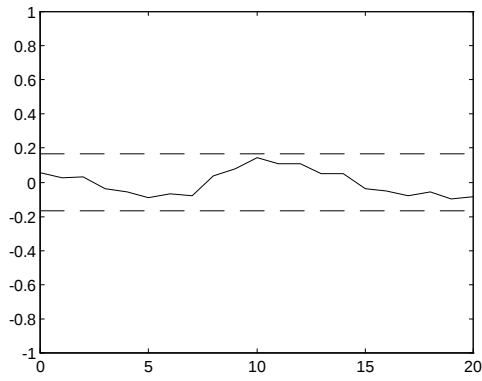
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



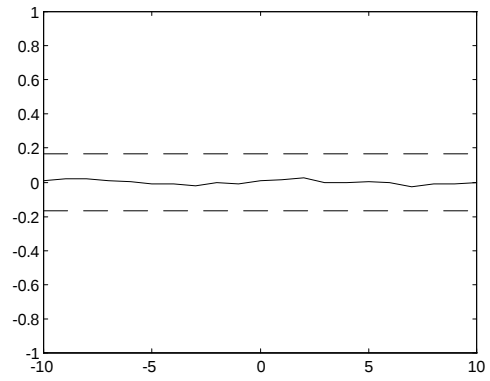
(20)



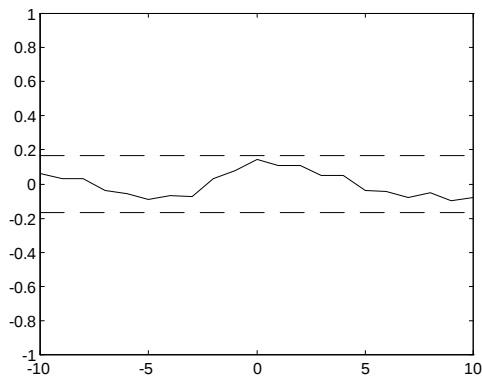
(21)



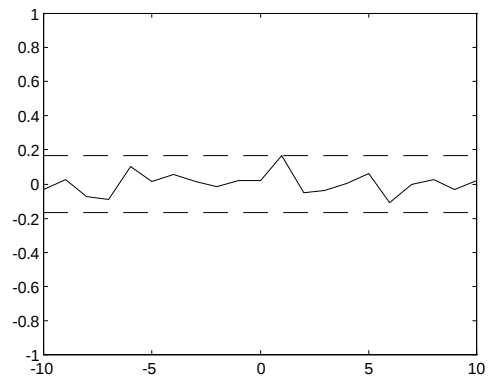
(21)



(22)



(23)



(24)

(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

(19) $\xi_2^1(t) \times \xi_2^2(t)$

(20) $\xi_2^2(t) \times \xi_2^2(t)$

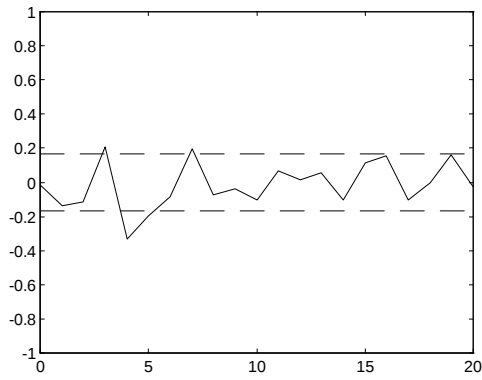
(21) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_2^2(t)$

(22) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_2(t)$

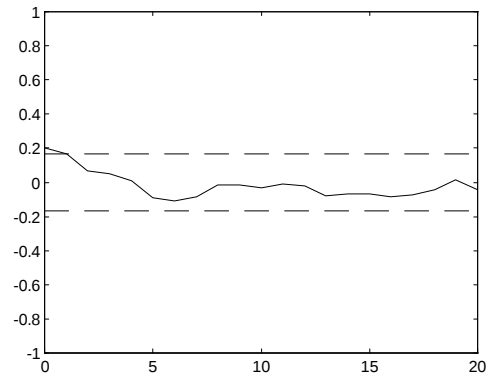
(23) $u_2^2(t) \times \xi_1(t)$

(24) $u_2^2(t) \times \xi_1^2(t)$

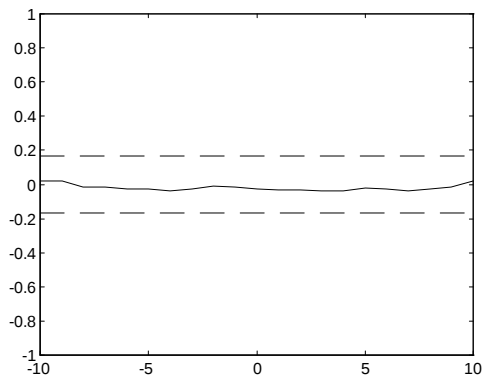
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



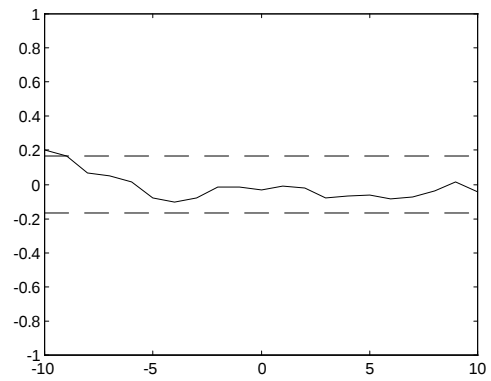
(25)



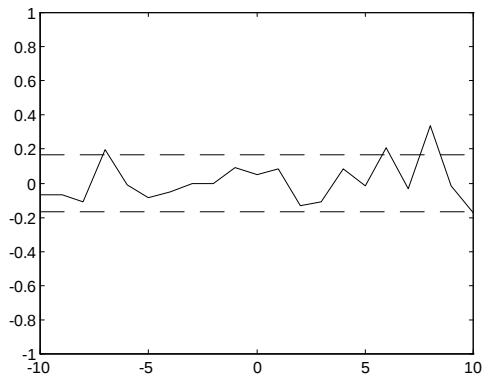
(26)



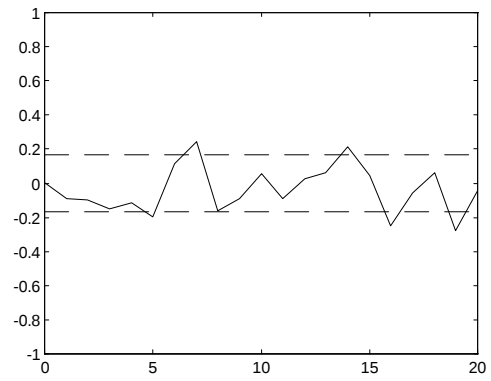
(27)



(28)



(29)



(30)

(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

(25) $u_2(t) \times \xi_1(t)$

(26) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_2^2(t)$

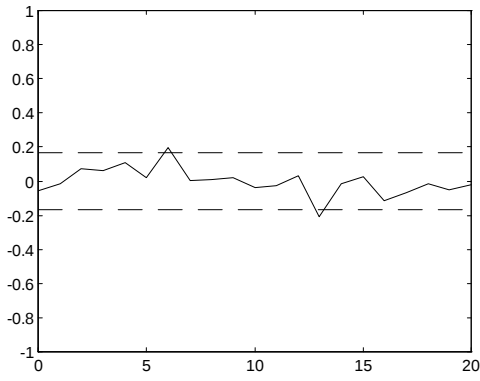
(27) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_2(t)$

(28) $u_2^2(t) \times \xi_2(t)$

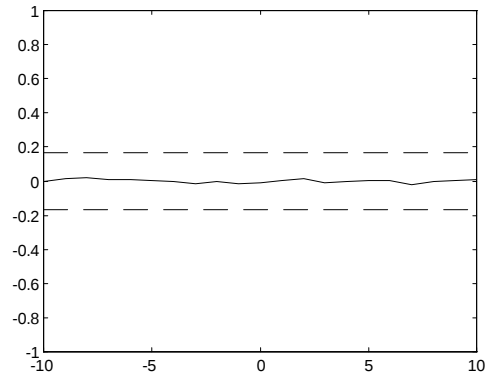
(29) $u_2^2(t) \times \xi_2^2(t)$

(30) $u_2(t) \times \xi_2(t)$

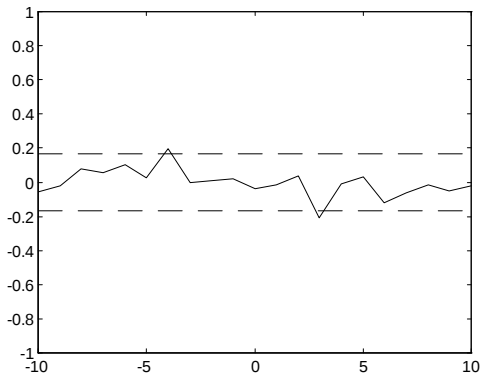
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



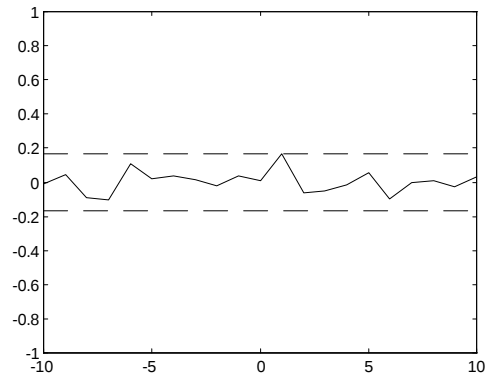
(31)



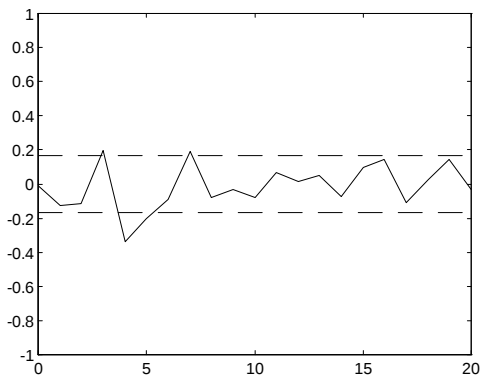
(32)



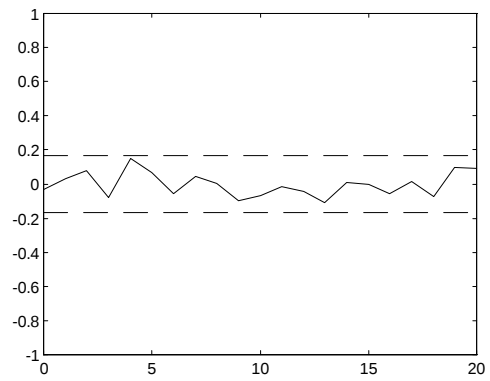
(33)



(34)



(36)



(37)

(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

(31) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_3^2(t)$

(32) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_3(t)$

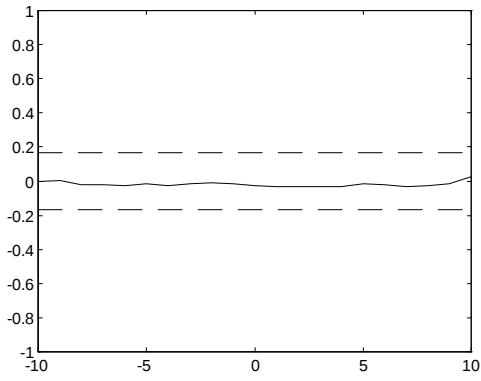
(33) $u_3^2(t) \times \xi_1(t)$

(34) $u_3^2(t) \times \xi_1^2(t)$

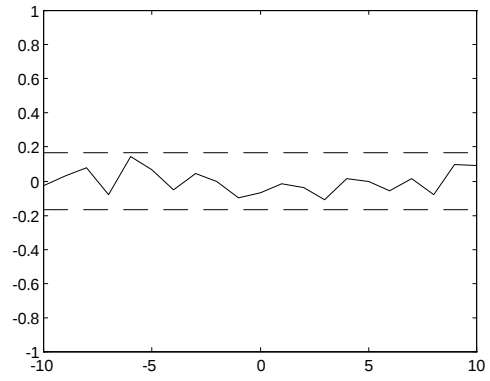
(35) $u_3(t) \times \xi_1(t)$

(36) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_3^2(t)$

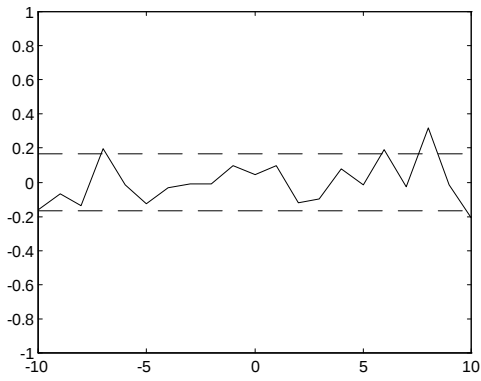
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



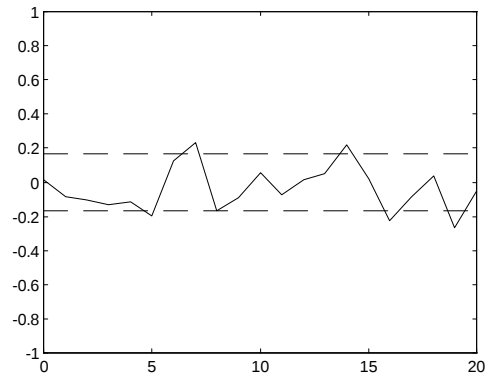
(37)



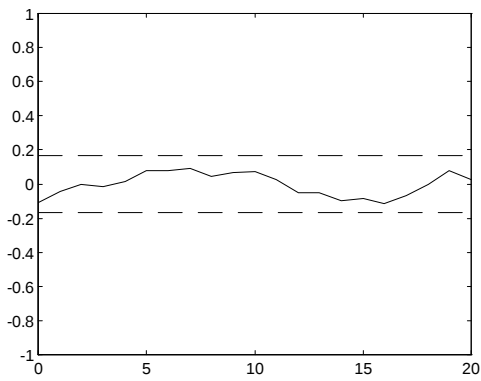
(38)



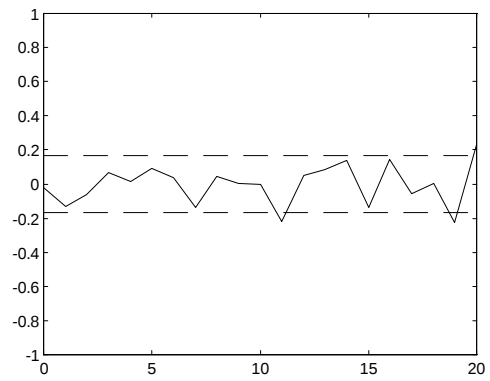
(39)



(40)



(41)



(42)

(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

(37) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_3(t)$

(38) $u_3^{2\cdot}(t) \times \xi_2(t)$

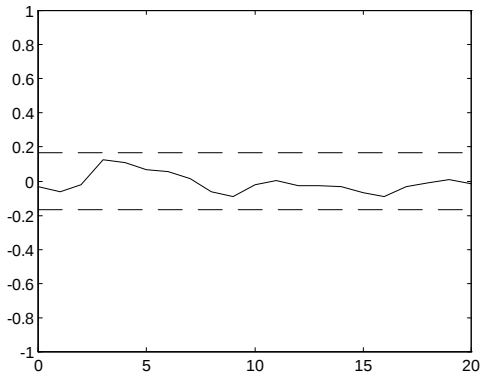
(39) $u_3^{2\cdot}(t) \times \xi_2^{2\cdot}(t)$

(40) $u_3(t) \times \xi_2(t)$

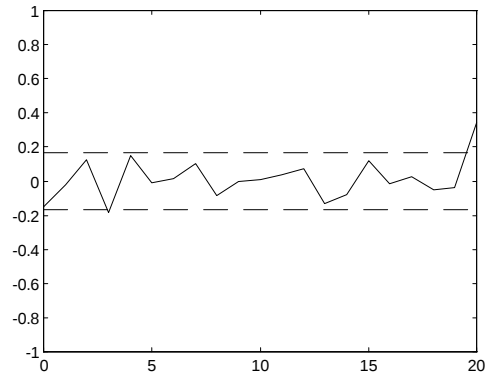
(41) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_1^{2\cdot}(t)$

(42) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times \xi_1^{2\cdot}(t)$

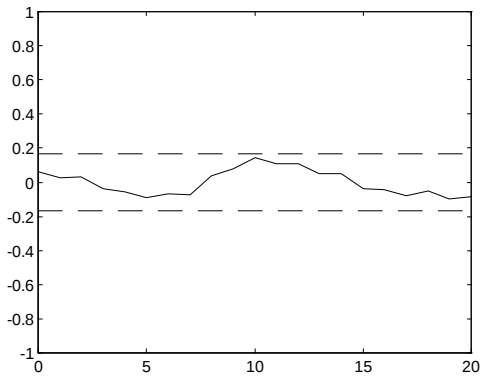
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



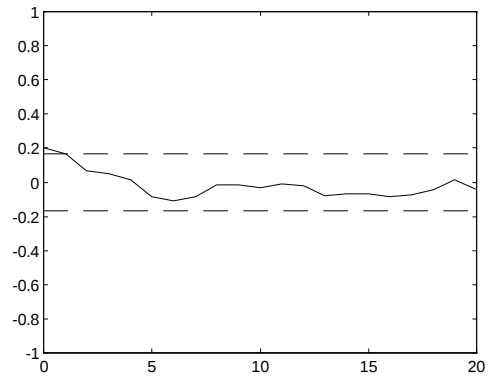
(43)



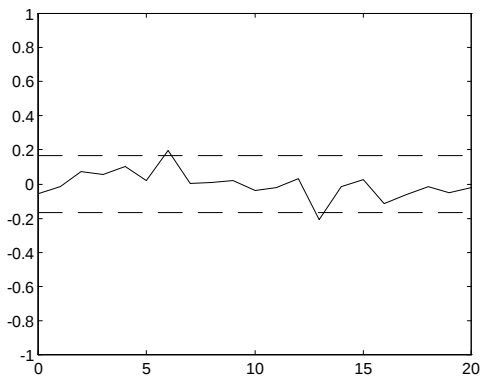
(44)



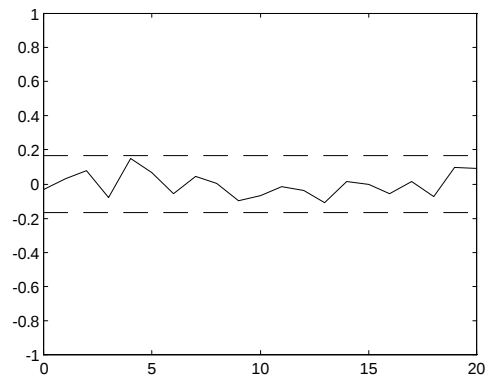
(45)



(46)



(47)



(48)

(Continuação da Figura A1). Correlações calculadas:

(43) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times u_1^2(t)$

(44) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times \xi_2^2(t)$

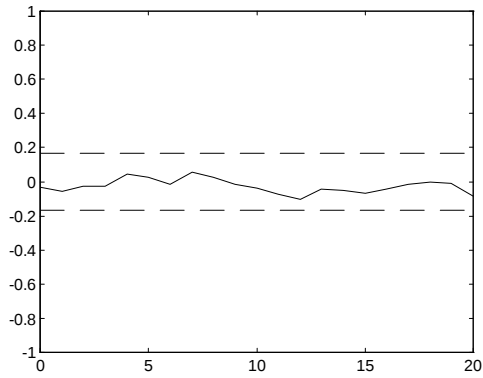
(45) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_2^2(t)$

(46) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times u_2^2(t)$

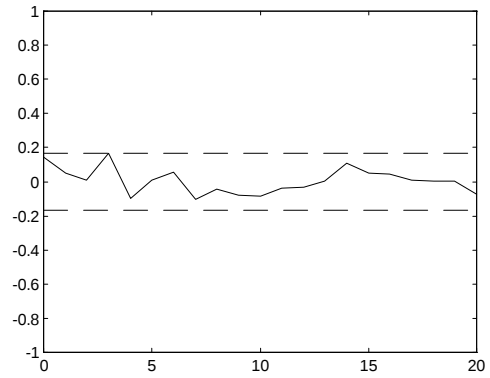
(47) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_3^2(t)$

(48) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times u_3^2(t)$

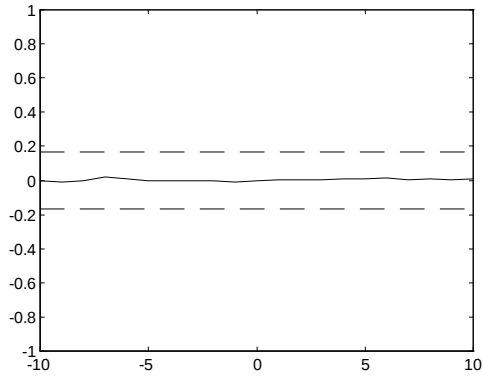
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



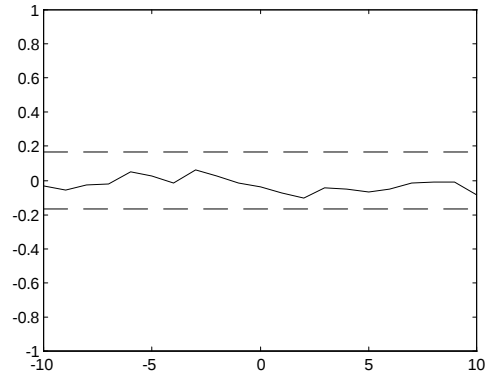
(1)



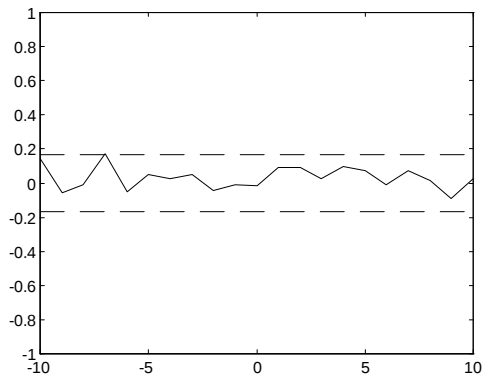
(2)



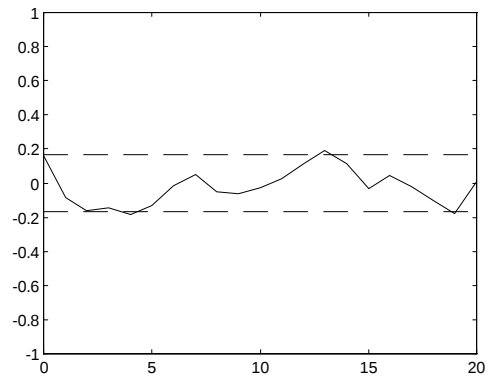
(3)



(4)



(5)

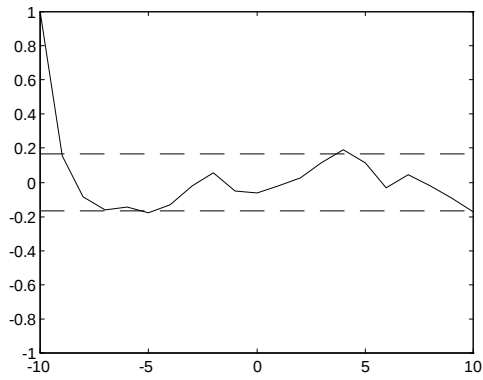


(6)

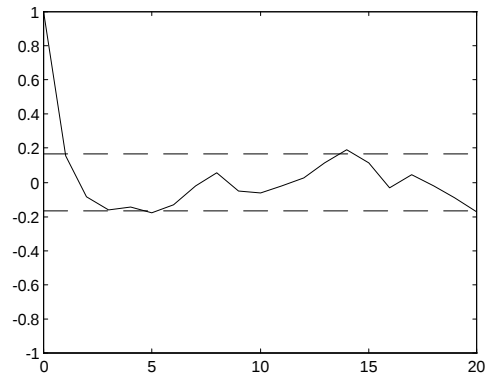
Figura A2. Validação estatística do modelo m2j. Correlações calculadas:

- | | |
|--|--|
| (1) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_1^{2'}(t)$ | (2) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times \xi_1^{2'}(t)$ |
| (3) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_1(t)$ | (4) $u_1^{2'}(t) \times \xi_1(t)$ |
| (5) $u_1^{2'}(t) \times \xi_1^{2'}(t)$ | (6) $u_1(t) \times \xi_1(t)$ |

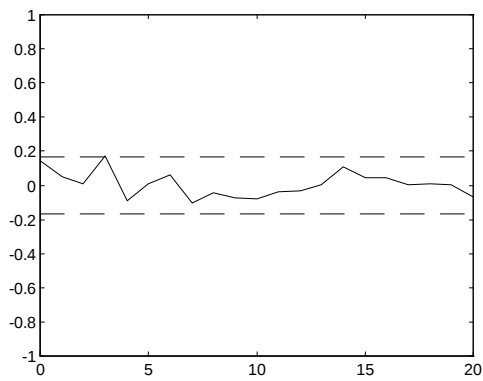
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



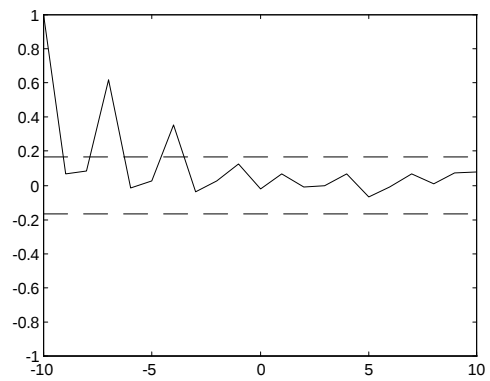
(7)



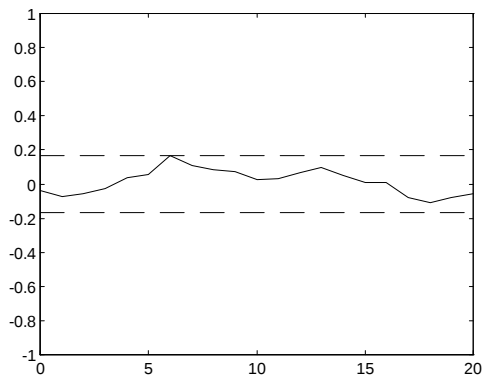
(8)



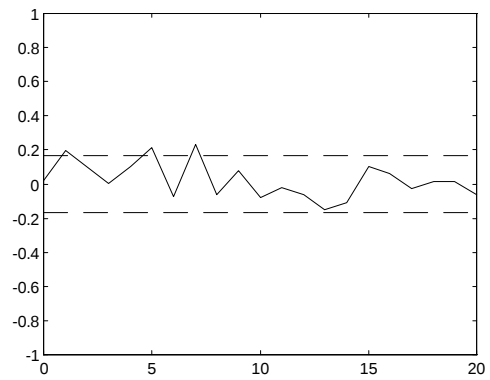
(9)



(10)



(11)



(12)

(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

(7) $\xi_1(t) \times \xi_1(t)$

(8) $\xi_1'(t) \times \xi_1'(t)$

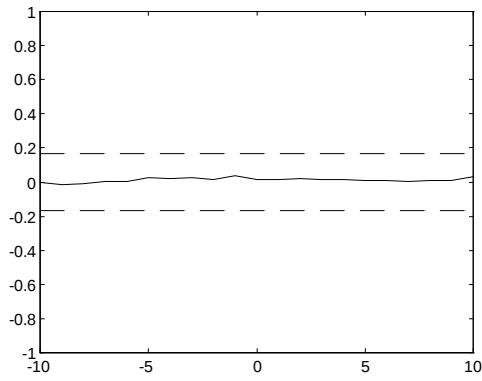
(9) $\xi_1'(t) \times \xi_1'^2(t)$

(10) $\xi_1'^2(t) \times \xi_1'^2(t)$

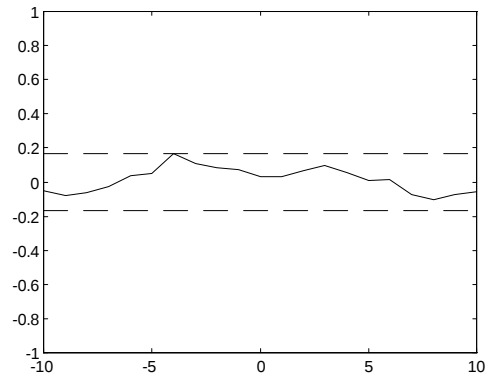
(11) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_1'^2(t)$

(12) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times \xi_2'^2(t)$

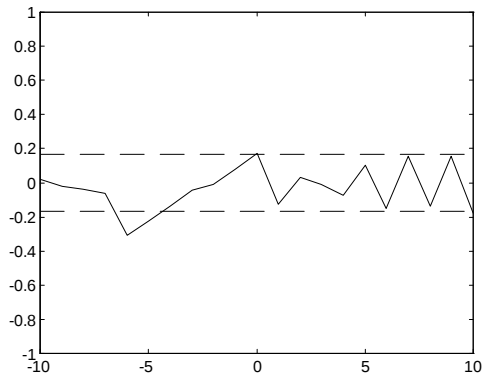
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



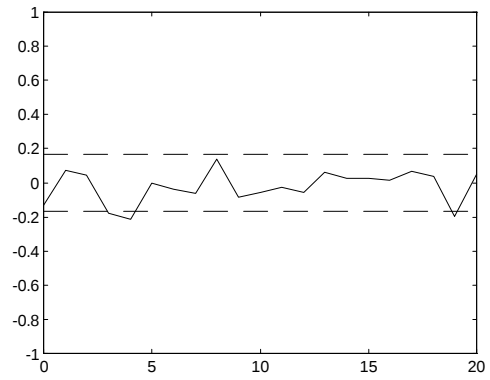
(13)



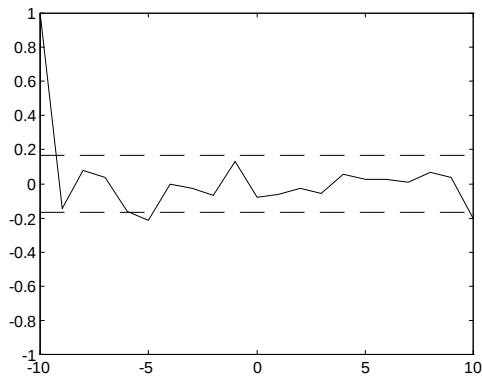
(14)



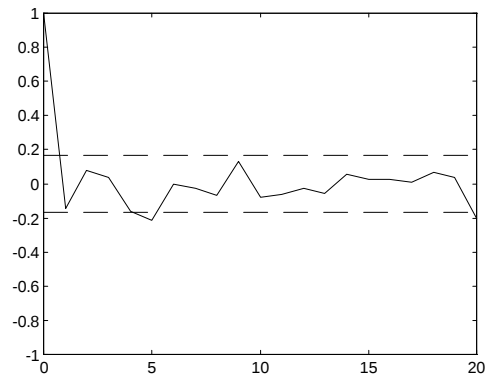
(15)



(16)



(17)

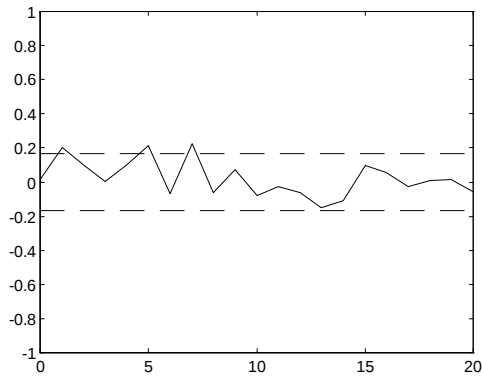


(18)

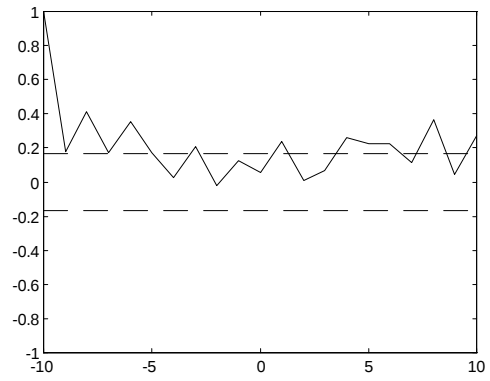
(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (13) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_1(t)$ | (14) $u_1^2(t) \times \xi_2(t)$ |
| (15) $u_1^2(t) \times \xi_2^2(t)$ | (16) $u_1(t) \times \xi_2(t)$ |
| (17) $\xi_2(t) \times \xi_2(t)$ | (18) $\xi_2'(t) \times \xi_2'(t)$ |

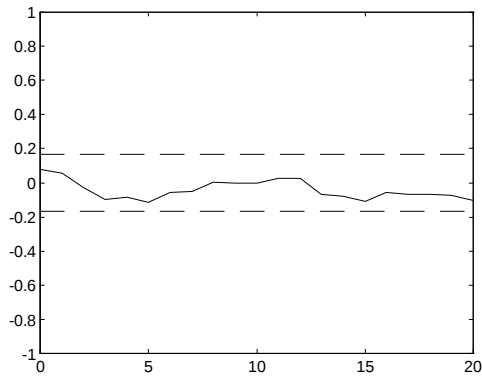
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



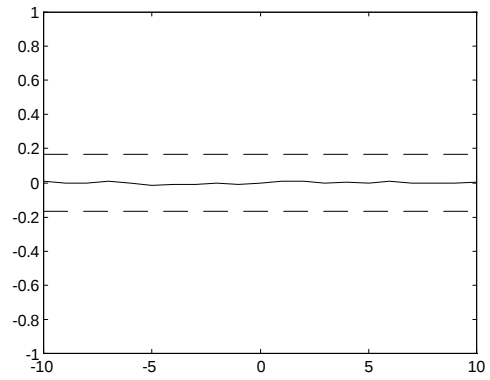
(19)



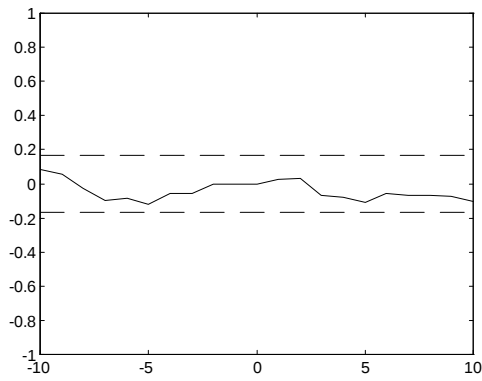
(20)



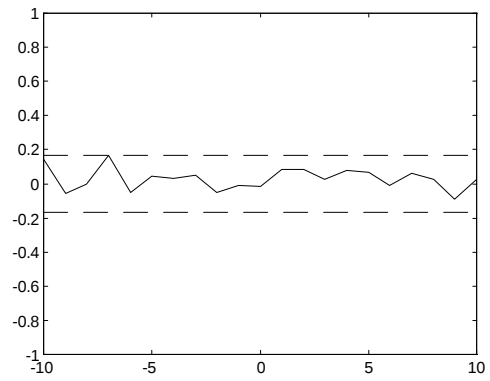
(21)



(22)



(23)



(24)

(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

(19) $\xi_2^1(t) \times \xi_2^2(t)$

(20) $\xi_2^2(t) \times \xi_2^2(t)$

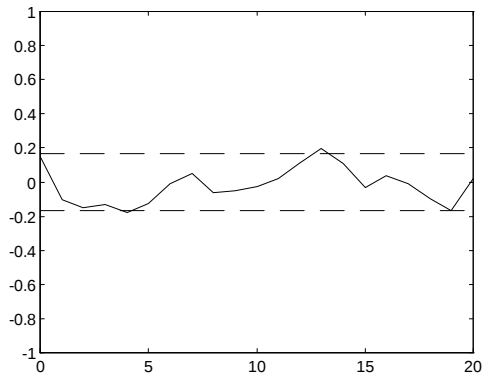
(21) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_2^2(t)$

(22) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_2(t)$

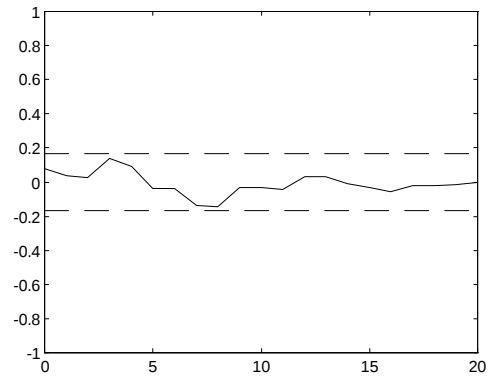
(23) $u_2^2(t) \times \xi_1(t)$

(24) $u_2^2(t) \times \xi_1^2(t)$

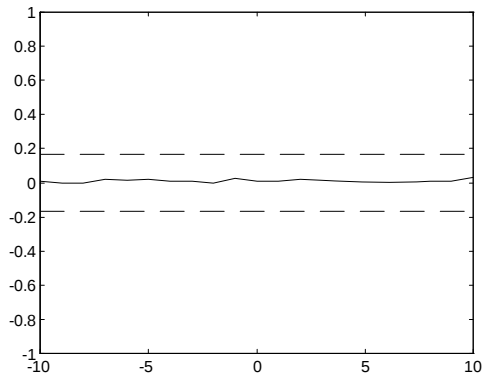
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



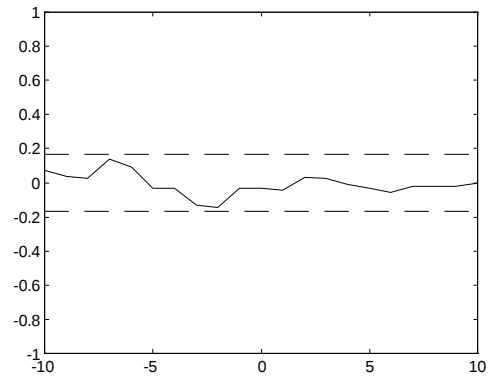
(25)



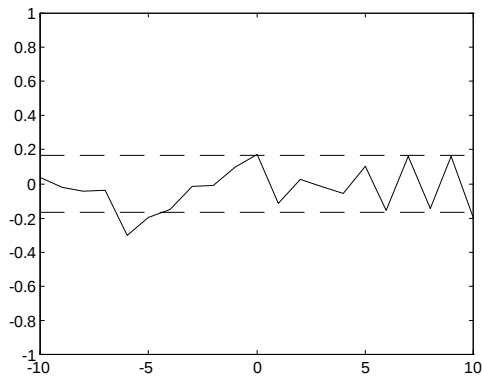
(26)



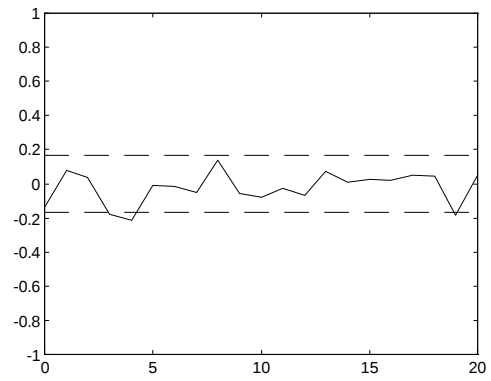
(27)



(28)



(29)



(30)

(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

(25) $u_2(t) \times \xi_1(t)$

(26) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_2^{-2}(t)$

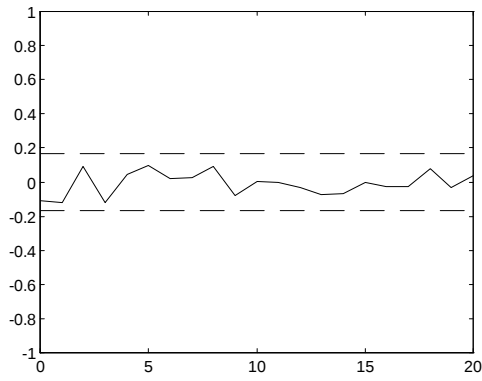
(27) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_2(t)$

(28) $u_2^{-2}(t) \times \xi_2(t)$

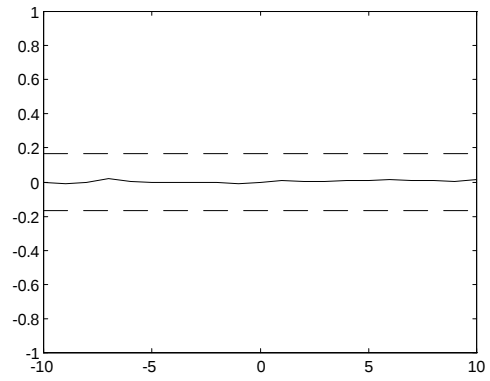
(29) $u_2^{-2}(t) \times \xi_2^{-2}(t)$

(30) $u_2(t) \times \xi_2(t)$

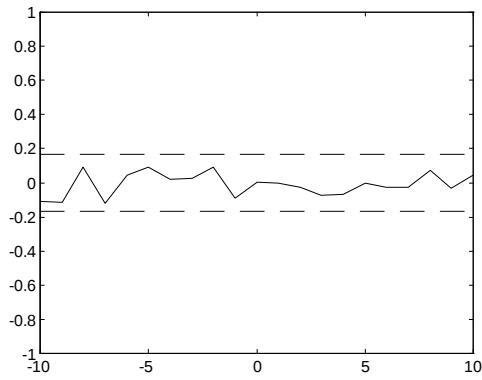
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



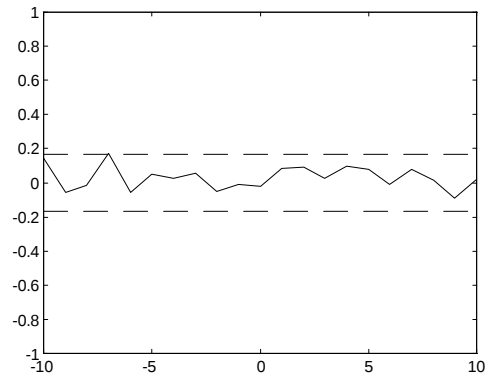
(31)



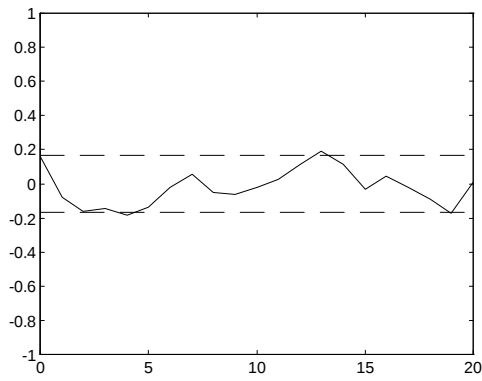
(32)



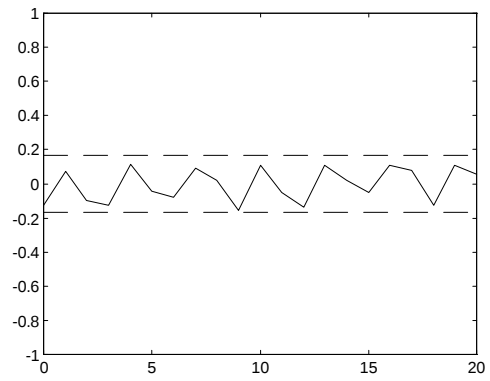
(33)



(34)



(35)



(36)

(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

(31) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_3^2(t)$

(32) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_3(t)$

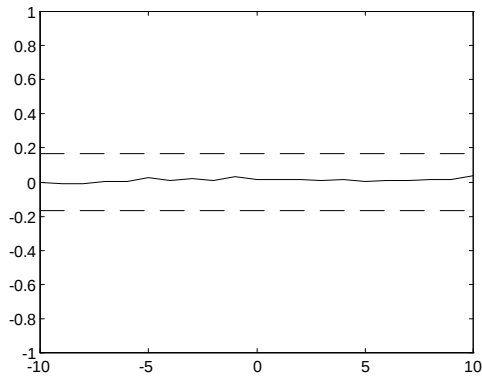
(33) $u_3^2(t) \times \xi_1(t)$

(34) $u_3^2(t) \times \xi_1^2(t)$

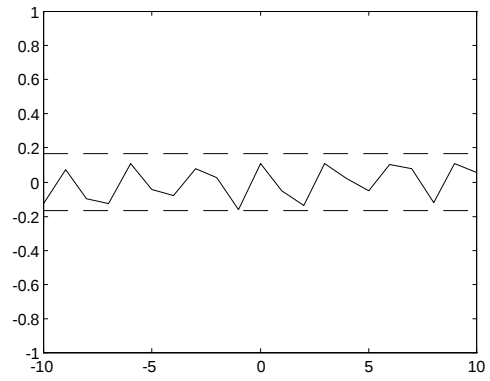
(35) $u_3(t) \times \xi_1(t)$

(36) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_3^2(t)$

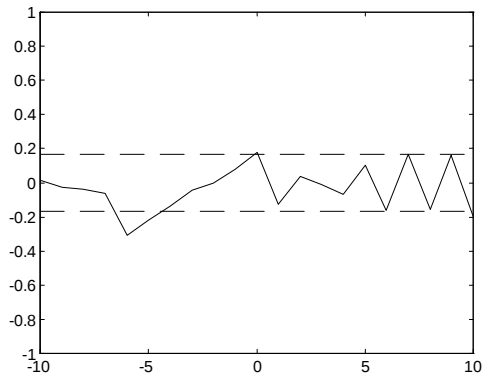
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



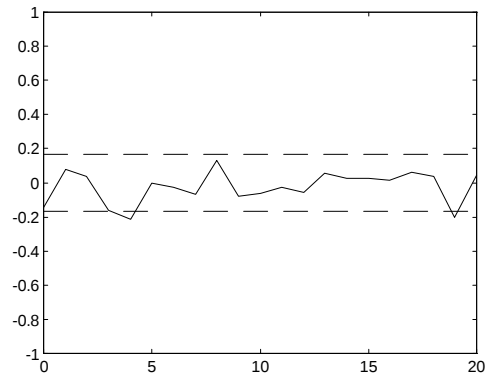
(37)



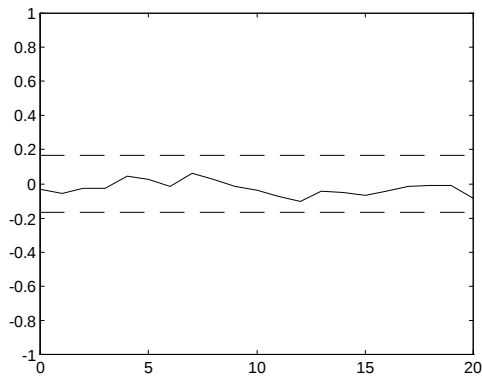
(38)



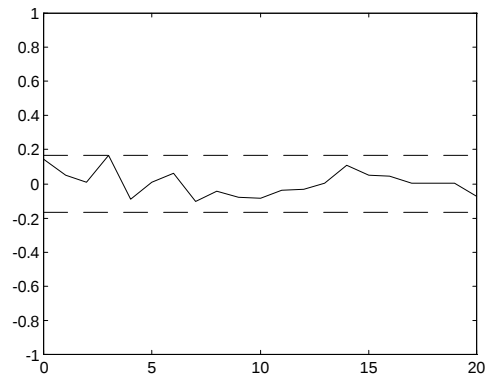
(39)



(40)



(41)



(42)

(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

(37) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_3(t)$

(38) $u_3^{(2)}(t) \times \xi_2(t)$

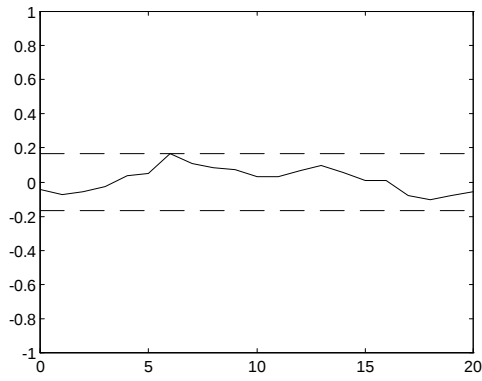
(39) $u_3^{(2)}(t) \times \xi_2^{(2)}(t)$

(40) $u_3(t) \times \xi_2(t)$

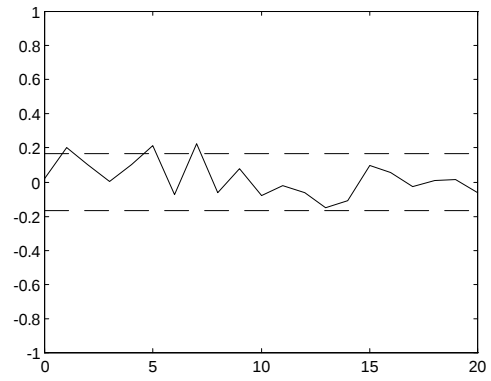
(41) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_1^{(2)}(t)$

(42) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times \xi_1^{(2)}(t)$

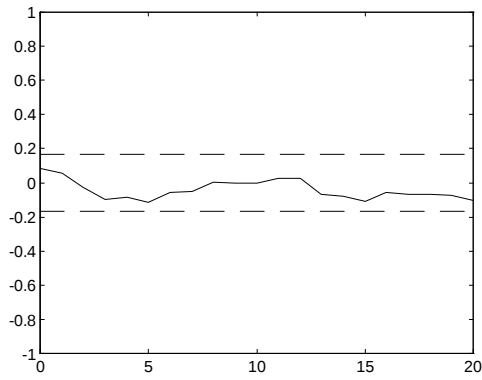
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



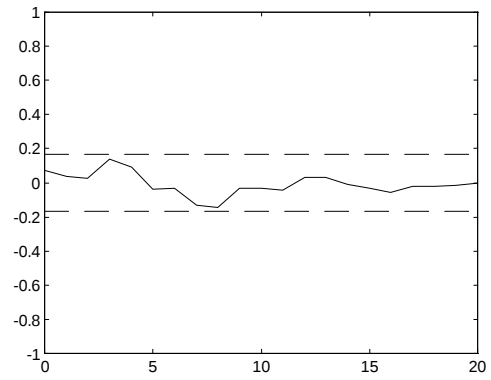
(43)



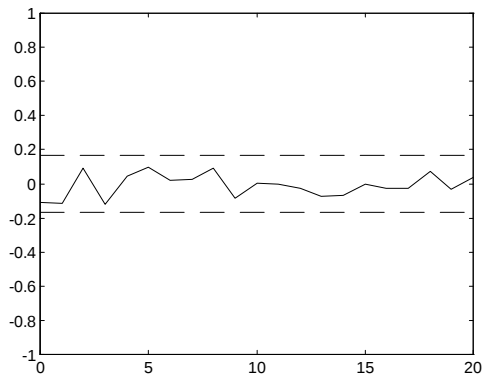
(44)



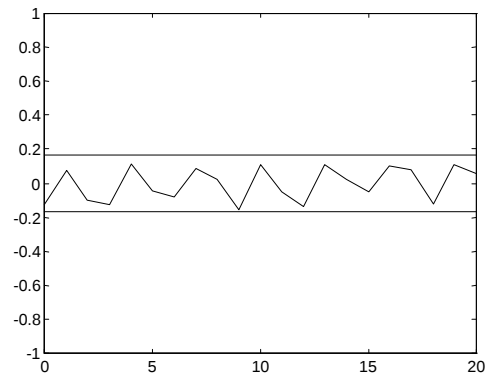
(45)



(46)



(47)



(48)

(Continuação da Figura A2). Correlações calculadas:

$$(43) (y_2(t) \times e_2(t))' \times u_1^2(t)$$

$$(44) (y_2(t) \times e_2(t))' \times \xi_2^2(t)$$

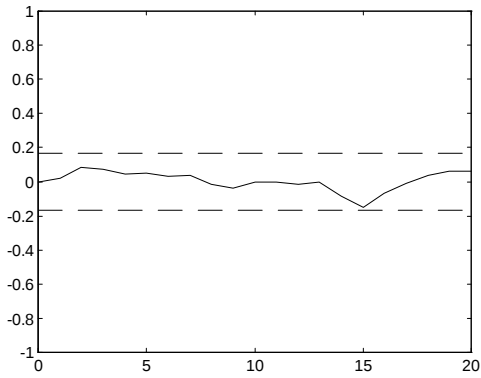
$$(45) (y_2(t) \times e_1(t))' \times u_2^2(t)$$

$$(46) (y_2(t) \times e_2(t))' \times u_2^2(t)$$

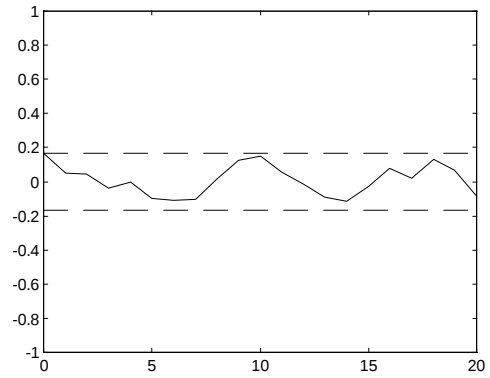
$$(47) (y_2(t) \times e_1(t))' \times u_3^2(t)$$

$$(48) (y_2(t) \times e_2(t))' \times u_3^2(t)$$

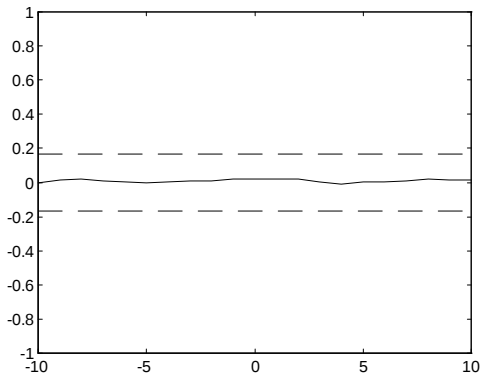
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



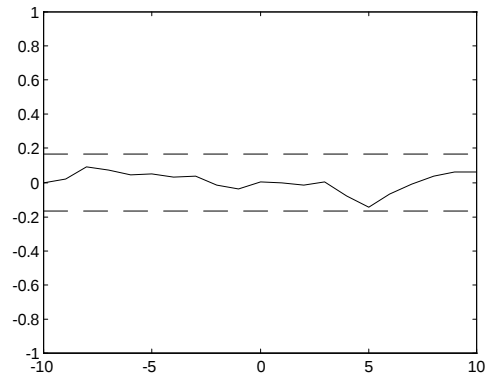
(1)



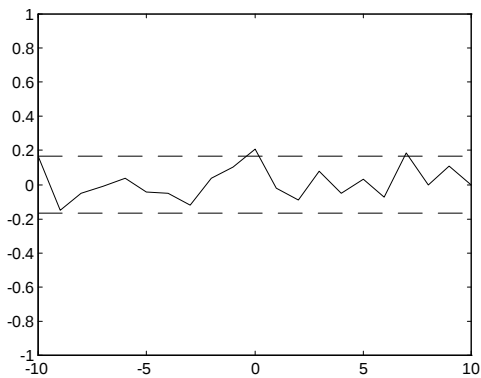
(2)



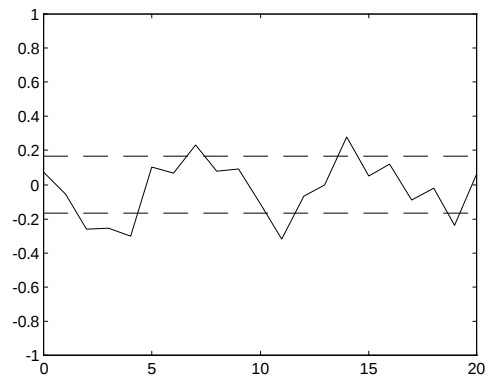
(3)



(4)



(5)



(6)

Figura A3. Validação estatística do modelo m2p. Correlações calculadas:

(1) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_1^2(t)$

(2) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times \xi_1^2(t)$

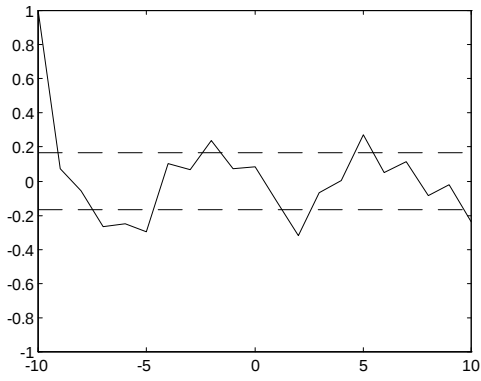
(3) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_1(t)$

(4) $u_1^2(t) \times \xi_1(t)$

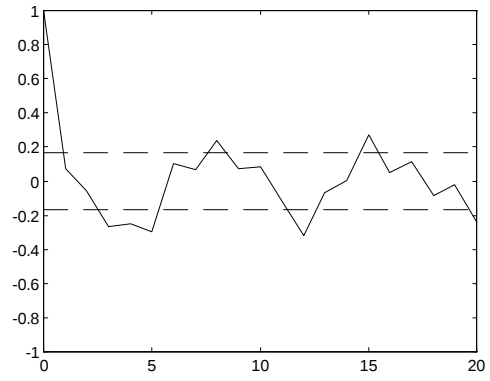
(5) $u_1^2(t) \times \xi_1^2(t)$

(6) $u_1(t) \times \xi_1(t)$

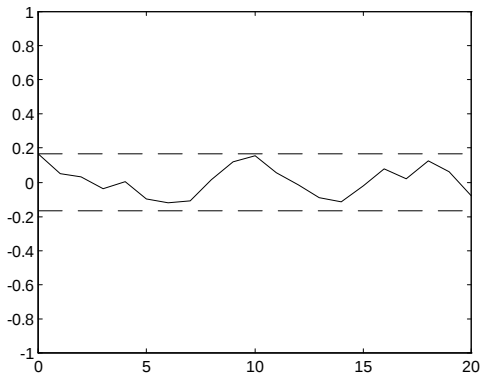
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



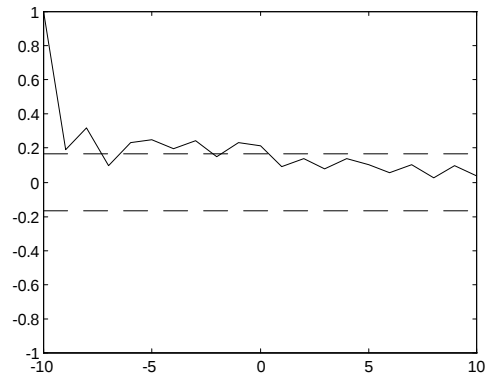
(7)



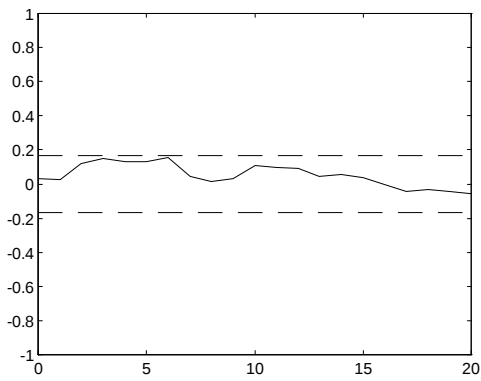
(8)



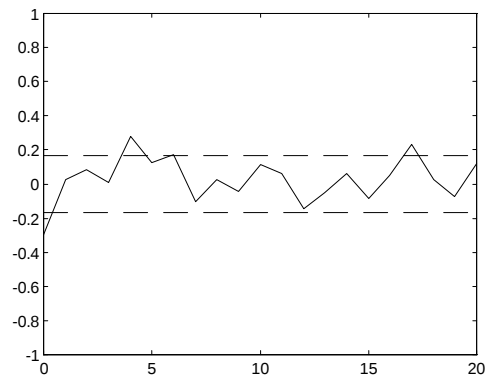
(9)



(10)



(11)



(12)

(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

(7) $\xi_1(t) \times \xi_1(t)$

(8) $\xi_1'(t) \times \xi_1'(t)$

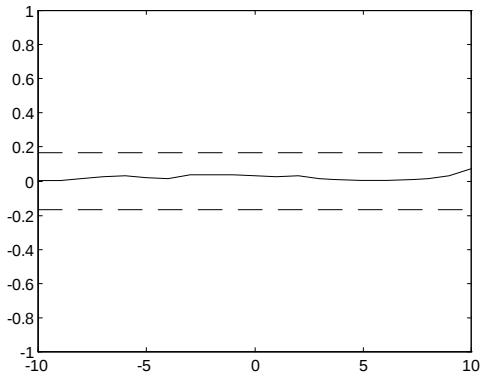
(9) $\xi_1'(t) \times \xi_1'^2(t)$

(10) $\xi_1'^2(t) \times \xi_1'^2(t)$

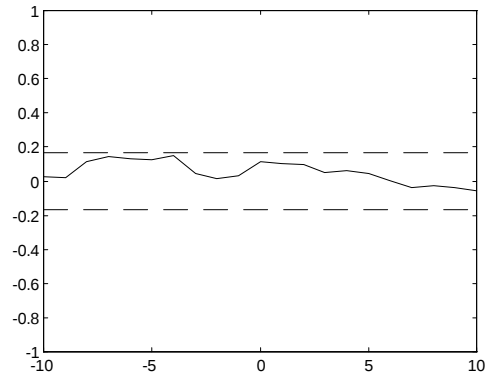
(11) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_1'^2(t)$

(12) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times \xi_2'^2(t)$

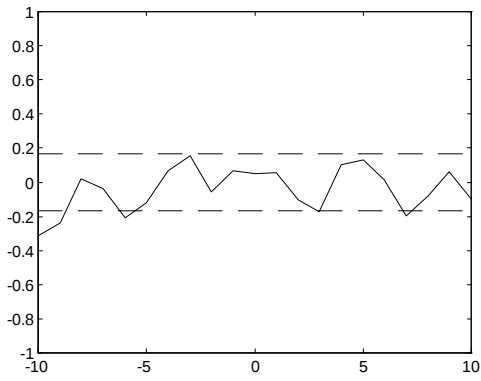
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



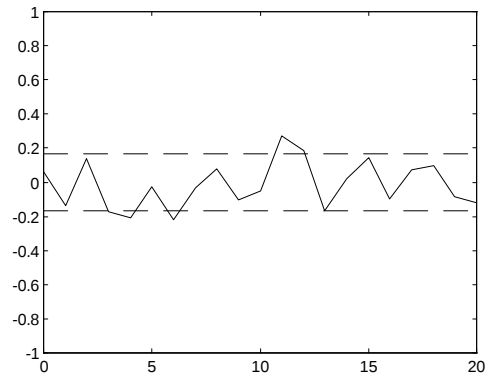
(13)



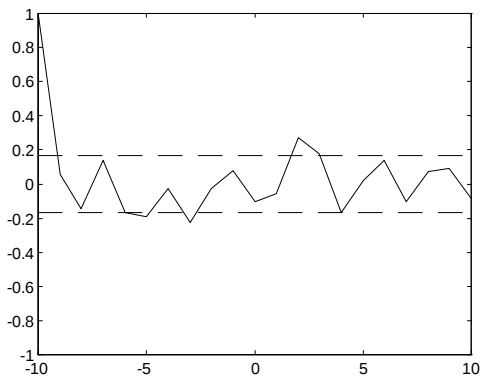
(14)



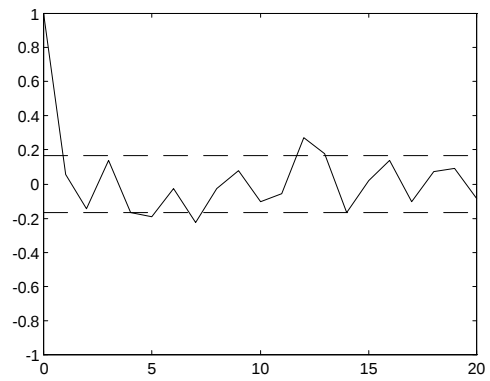
(15)



(16)



(17)

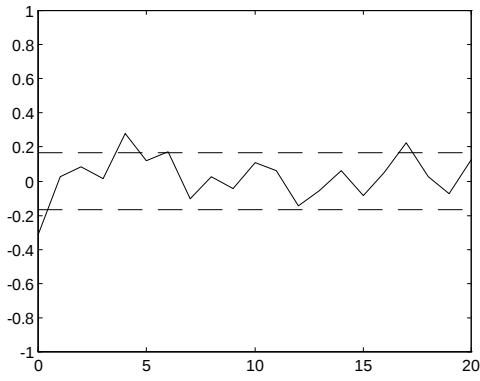


(18)

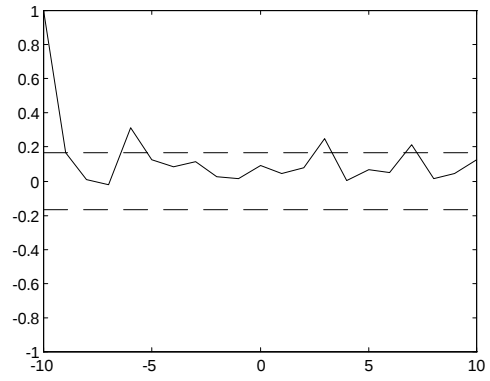
(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| (13) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_1(t)$ | (14) $u_1^2(t) \times \xi_2(t)$ |
| (15) $u_1^2(t) \times \xi_2^2(t)$ | (16) $u_1(t) \times \xi_2(t)$ |
| (17) $\xi_2(t) \times \xi_2(t)$ | (18) $\xi_2'(t) \times \xi_2'(t)$ |

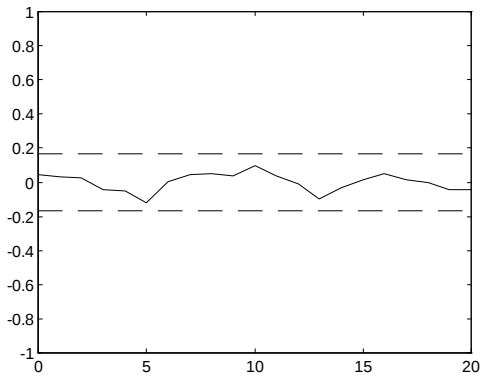
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



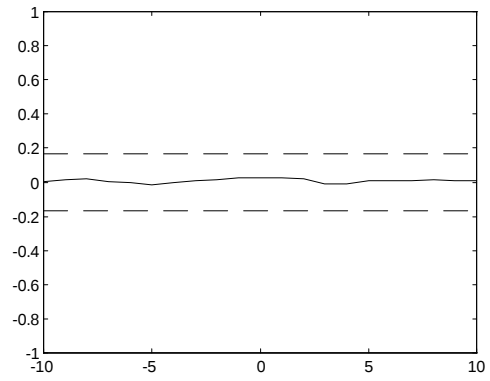
(19)



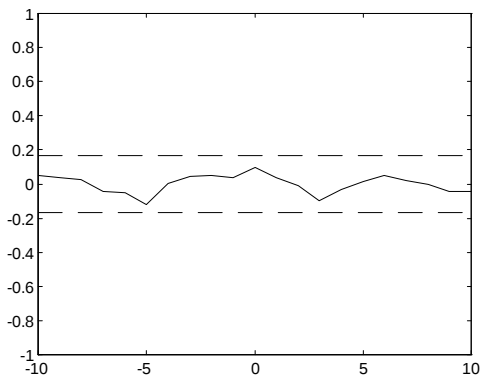
(20)



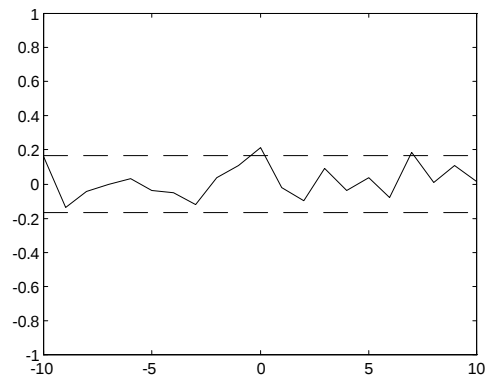
(21)



(22)



(23)



(24)

(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

(19) $\xi_2^1(t) \times \xi_2^{2^2}(t)$

(20) $\xi_2^{2^2}(t) \times \xi_2^{2^2}(t)$

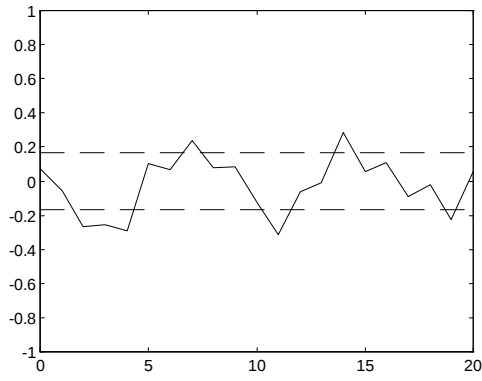
(21) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_2^{2^2}(t)$

(22) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_2(t)$

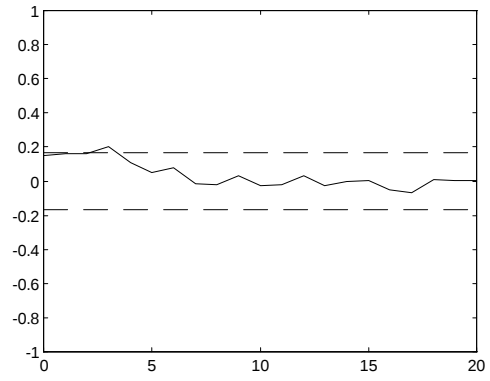
(23) $u_2^{2^2}(t) \times \xi_1(t)$

(24) $u_2^{2^2}(t) \times \xi_1^{2^2}(t)$

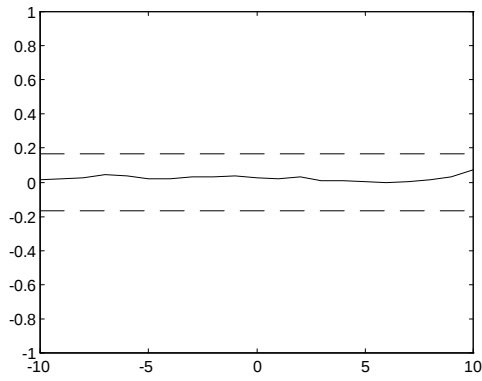
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



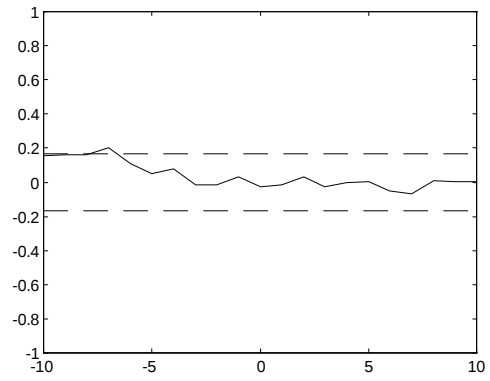
(25)



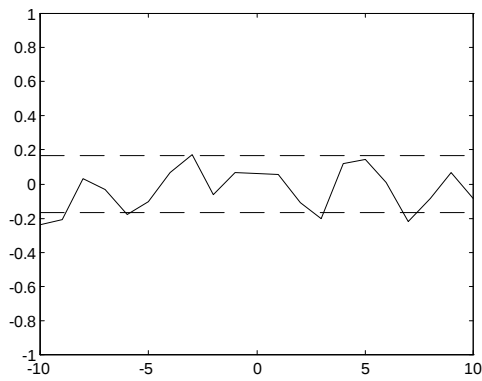
(26)



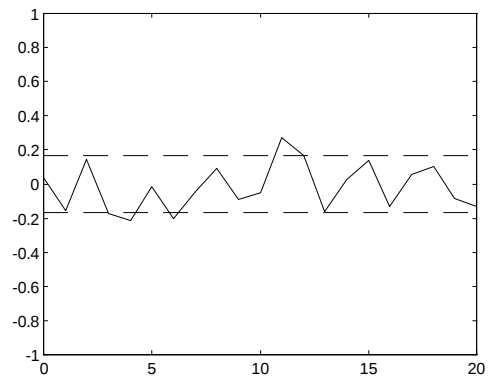
(27)



(28)



(29)



(30)

(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

(25) $u_2(t) \times \xi_1(t)$

(26) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_2^{-2}(t)$

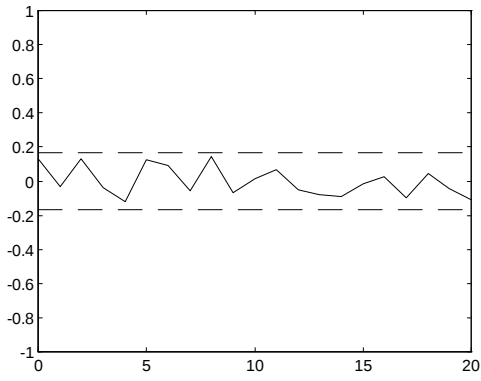
(27) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_2(t)$

(28) $u_2^{-2}(t) \times \xi_2(t)$

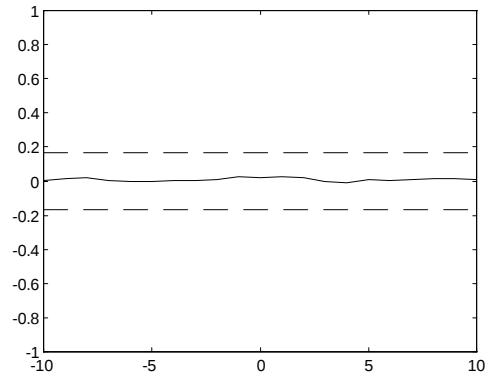
(29) $u_2^{-2}(t) \times \xi_2^{-2}(t)$

(30) $u_2(t) \times \xi_2(t)$

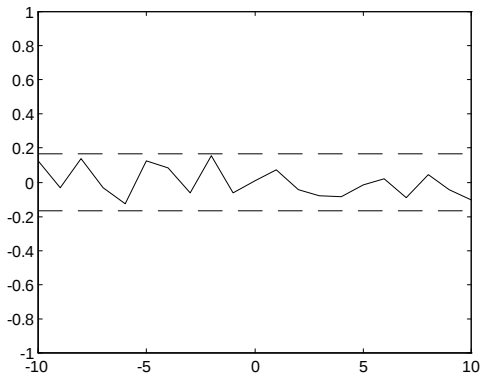
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



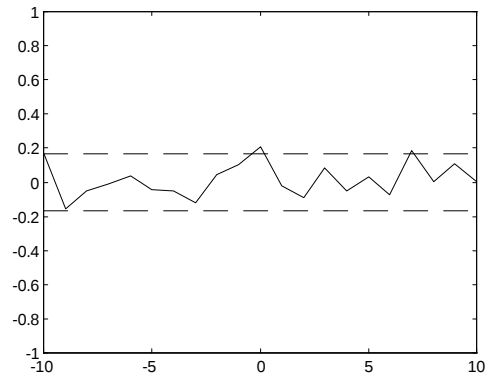
(31)



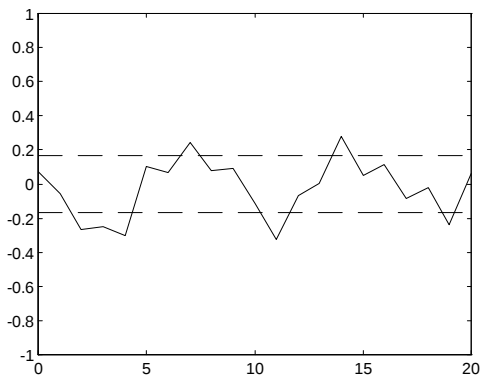
(32)



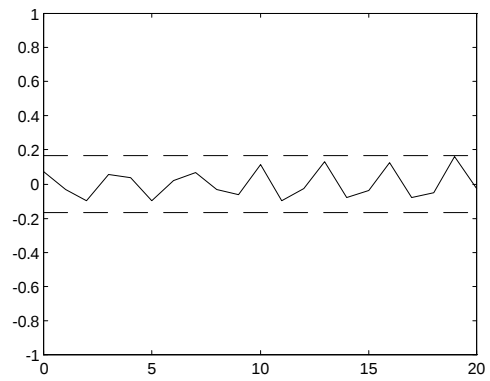
(33)



(34)



(35)



(36)

(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

(31) $(y_1(t) \times e_1(t))' \times u_3^{-2}(t)$

(32) $\xi_1(t) \times \xi_1(t) \times u_3(t)$

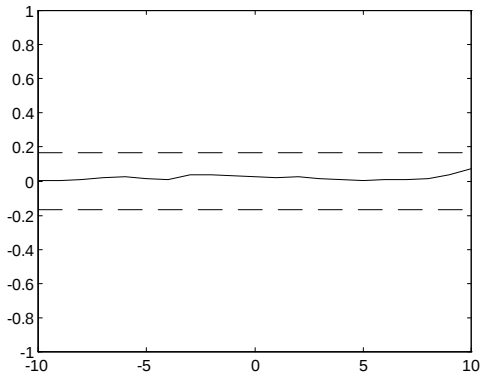
(33) $u_3^{-2}(t) \times \xi_1(t)$

(34) $u_3^{-2}(t) \times \xi_1^{-2}(t)$

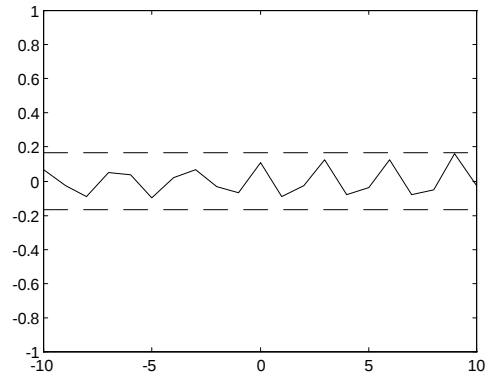
(35) $u_3(t) \times \xi_1(t)$

(36) $(y_1(t) \times e_2(t))' \times u_3^{-2}(t)$

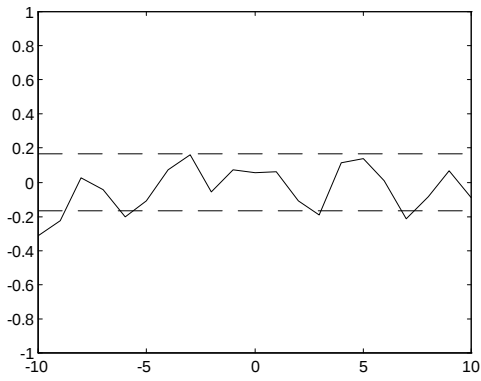
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



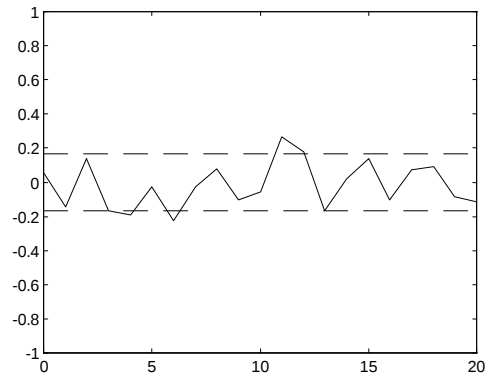
(37)



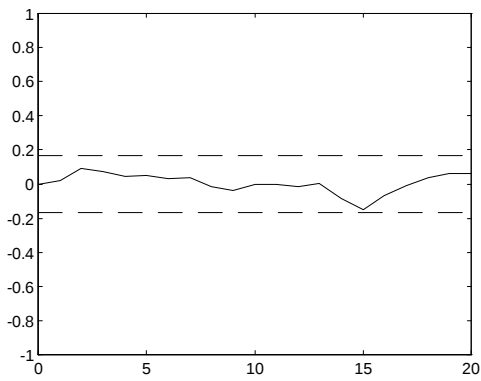
(38)



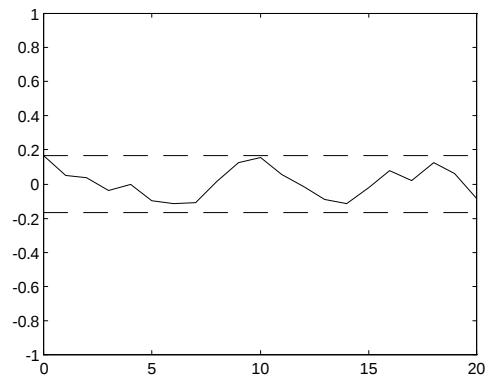
(39)



(40)



(41)



(42)

(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

(37) $\xi_2(t) \times \xi_2(t) \times u_3(t)$

(38) $u_3^{(2)}(t) \times \xi_2(t)$

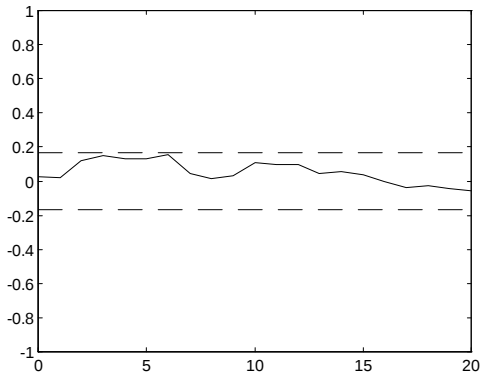
(39) $u_3^{(2)}(t) \times \xi_2^{(2)}(t)$

(40) $u_3(t) \times \xi_2(t)$

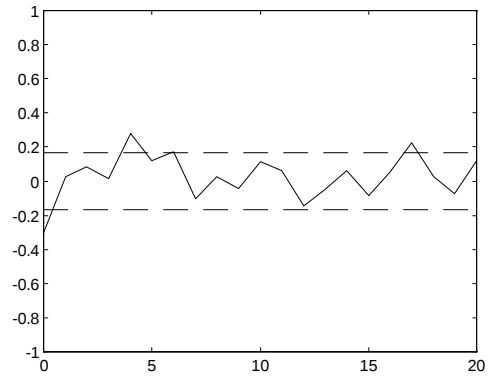
(41) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_1^{(2)}(t)$

(42) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times \xi_1^{(2)}(t)$

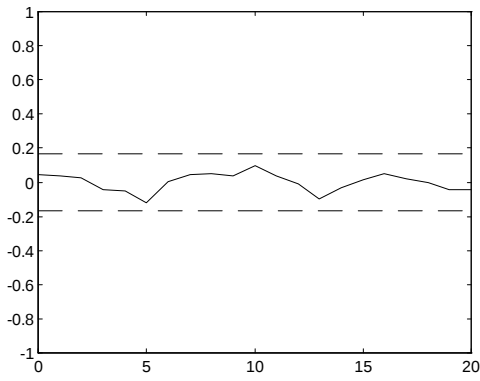
Apêndice A: Gráficos de validação estatística dos modelos identificados



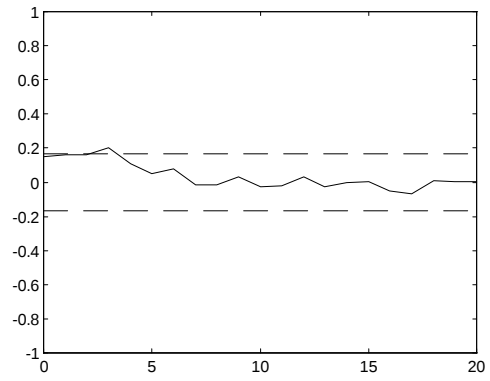
(43)



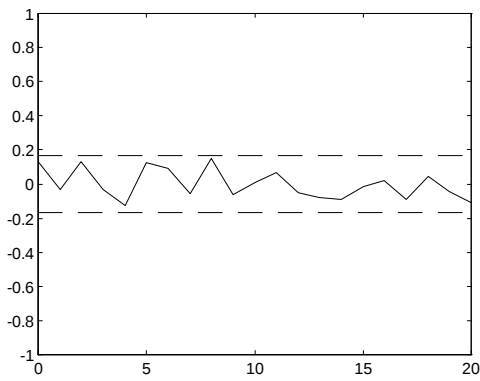
(44)



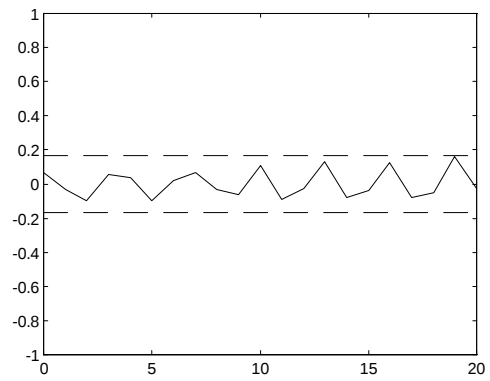
(45)



(46)



(47)



(48)

(Continuação da Figura A3). Correlações calculadas:

(43) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times u_1^2(t)$

(44) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times \xi_2^2(t)$

(45) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_2^2(t)$

(46) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times u_2^2(t)$

(47) $(y_2(t) \times e_1(t))' \times u_3^2(t)$

(48) $(y_2(t) \times e_2(t))' \times u_3^2(t)$

Apêndice B

Rotinas computacionais de identificação de sistemas MIMO

As rotinas computacionais utilizadas nos procedimentos de identificação de sistemas MIMO deste trabalho são executadas dentro do ambiente computacional do MATLAB™ (MathWorks, 1994).

MATLAB, abreviatura de *matrix laboratory*, é um pacote de *softwares* de alta performance utilizado na computação numérica científica e de engenharia. As aplicações do MATLAB incluem análise numérica, computação de matrizes, processamento de sinais, dentre várias outras, executadas em um ambiente gráfico amigável onde os problemas e soluções são expressos da mesma forma em que eles são escritos matematicamente, sem a necessidade de utilização de linguagens de programação tradicionais.

As rotinas executadas no MATLAB são escritas em arquivos *script*. Esses arquivos são compostos de uma seqüência de comandos que são processados pelo MATLAB quando o arquivo é executado a partir da linha de comando, ou a partir de outro arquivo *script*. Adicionalmente, qualquer arquivo *script* pode receber um conjunto de argumentos que poderão ser utilizados durante a sua execução. Neste caso, eles devem conter a palavra *function* na primeira linha junto com uma declaração dos argumentos.

Descreve-se a seguir cada uma das rotinas utilizadas na identificação da coluna. Originalmente, as rotinas de número um a oito eram utilizadas somente nos procedimentos de identificação de sistemas SISO (Mendes e Aguirre,

1995). Neste trabalho, essas rotinas foram adequadas para que o seu escopo de utilização também contemplasse os sistemas MIMO.

1) *mimo_dem*: rotina de demonstração estruturada de maneira a ilustrar o uso das demais rotinas do pacote de identificação MIMO.

- sintaxe:

mimo_dem;

- rotinas acionadas: *mgenterm*, *mget_inf*, *morthreg*, *msimodel* e *eq*.

2) *mgenterm*: rotina de geração do conjunto de termos candidatos, a partir do qual serão selecionados os termos de maior relevância que deverão compor o modelo identificado.

- sintaxe:

[model, TotTerms] = mgenterm(DG, nys, lagy, nus, lagu, nes, lage);

- parâmetros de entrada:

DG: grau de não linearidade;

nys: número de saídas do modelo;

lagy: atraso máximo dos sinais de saída;

nus: número de entradas do modelo;

lagu: atraso máximo dos sinais de entrada;

nes: número de sinais de ruído do modelo;

lage: atraso máximo dos sinais de ruído;

- parâmetros de saída:

model: código utilizado para representar o modelo;

TotTerms: número total de termos candidatos do modelo;

- rotinas acionadas: *mget_inf*.

3) *mget_inf*: rotina que fornece informações a respeito da estrutura do modelo.

- sintaxe:

[npr,nno,lag,ny,nu,ne,newmodel] = mget_inf(model,nt);

- parâmetros de entrada:

model: código utilizado para representar o modelo;

nt: número de termos no modelo de cada subsistema;

- parâmetros de saída:

npr: número de termos de processo do modelo;

nno: número de termos de ruído do modelo;

lag: atraso máximo dos termos do modelo;

ny: número de saídas do modelo;

nu: número de entradas do modelo;

ne: número de entradas de ruído do modelo;

newmodel: código do modelo onde os termos de processo vem primeiro;

- rotinas acionadas: nenhuma.

4) *morthreg*: rotina que realiza a seleção da estrutura e a estimação de parâmetros do modelo, sendo portanto, a principal rotina do pacote de identificação.

- sintaxe:

[m,x,ME,va] = morthreg(model,sy,MU,MY,values,N);

- parâmetros de entrada:

model: código utilizado para representar o modelo;

sy: número do subsistema que será identificado;

MU: matriz dos sinais de entrada;

MY: matriz dos sinais de saída;

values: [(número de termos de processo) (número de termos de ruído)];

N: número de iterações de ruído;

- parâmetros de saída:

m: código utilizado para representar o modelo;

x: [(coeficientes dos termos do modelo) (ERR dos termos do modelo)
(desvio padrão dos termos do modelo)];

ME: matriz de resíduos;

va: variância dos termos do modelo;

- rotinas acionadas: *mget_inf*, *mbuild_p*, *mbuild_n*, *apply_qr* e *houses*.

5) *mbuild_p*: rotina de construção da matriz de regressores dos termos de processo do modelo.

- sintaxe:

$P = mbuild_process(model, MY, MU);$

- parâmetros de entrada:

model: código utilizado para representar o modelo;

MY: matriz dos sinais de saída;

MU: matriz dos sinais de entrada;

- parâmetros de saída:

P: matriz de regressores;

- rotinas acionadas: *mget_inf* e *shift_col*.

6) *mbuild_n*: rotina de construção da matriz de regressores dos termos de ruído do modelo.

- sintaxe:

$P = mbuild_noise(model, MU, MY, ME);$

- parâmetros de entrada:

model: código utilizado para representar o modelo;

MY: matriz dos sinais de saída;

MU: matriz dos sinais de entrada;

ME: matriz dos sinais de ruído;

- parâmetros de saída:

P: matriz de regressores;

- rotinas acionadas: *mget_inf* e *shift_col*.

7) *msimodel*: rotina de simulação de modelos.

- sintaxe:

$YS = msimodel(model, x0, nt, MY0, MU, ME);$

- parâmetros de entrada:

model: código utilizado para representar o modelo;

x0: coeficientes do modelo;

nt: número de termos no modelo de cada subsistema;

MY0: matriz com as condições iniciais dos sinais de saída;

MU: matriz dos sinais de entrada;

ME: matriz dos sinais de entrada de ruído;

- parâmetros de saída:

YS: matriz dos sinais de saída gerados pelo modelo;

- rotinas acionadas: *mget_inf*.

8) *eq*: rotina de apresentação do modelo decodificado.

- sintaxe:

t = eq(model,x,sy,prec);

- parâmetros de entrada:

model: código utilizado para representar o modelo;

x: coeficientes do modelo;

sy: número do subsistema;

prec: precisão de apresentação dos coeficientes;

- parâmetros de saída:

t: modelo decodificado;

- rotinas acionadas: *mget_inf*.

9) *shift_col*: rotina de manipulação de vetores.

- sintaxe:

newcol = shift_col(oldcol,lag);

- parâmetros de entrada:

oldcol: vetor original;

lag: índice da coluna do vetor a partir do qual os dados serão deslocados;

- parâmetros de saída:

newcol: vetor modificado com dados deslocados;

- rotinas acionadas: nenhuma.

10) *houses*: rotina de aplicação da Transformação de Householder sobre as matrizes de regressores.

- sintaxe:

$[xls, piv, var, B, y, a, b, c, A] = houses(A, y, Nterms, sqy, ERR, piv, a, b, c);$

- parâmetros de entrada e parâmetros de saída: ver Golub e Van Loan (1989), página 235.

- rotinas acionadas: *house* e *rowhouse*.

11) *house*: rotina de suporte à rotina *houses*.

- sintaxe:

$v = house(x);$

- parâmetros de entrada:

x: vetor de dados;

- parâmetros de saída:

v: vetor de dados manipulado ortogonalmente;

- rotinas acionadas: nenhuma.

12) *apply_qr*: rotina de aplicação da fatoração QR sobre a matriz de regressores.

- sintaxe:

$P1 = \text{apply_qr}(P0, A);$

- parâmetros de entrada:

$P0$: matriz de regressores;

A : vetor de fatoração;

- parâmetros de saída:

$P1$: matriz fatorada;

- rotinas acionadas: *rowhouse*.

13) *rowhouse*: rotina de suporte à rotina *apply_qr*.

- sintaxe:

$B = \text{rowhouse}(A, v);$

- parâmetros de entrada:

A : matriz de regressores;

v : vetor de fatoração;

- parâmetros de saída:

B : matriz ortogonalizada;

- rotinas acionadas: nenhuma.