UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Guilherme Augusto Dias Monteiro

ESTUDOS NUMÉRICOS DA VIABILIDADE DO DÍNAMO DE TAYLER-SPRUIT EM INTERIORES ESTELARES:
o papel da rotação na instabilidade de Tayler

Belo Horizonte
2024

Guilherme Augusto Dias Monteiro

ESTUDOS NUMÉRICOS DA VIABILIDADE DO DÍNAMO DE TAYLER-SPRUIT EM INTERIORES ESTELARES:
o papel da rotação na instabilidade de Tayler

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Andres Guerrero Eraso

Belo Horizonte

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M775e Monteiro, Guilherme Augusto Dias.
Estudos numéricos da viabilidade do dínamo de Tayler-Spruit em interiores estelares: o papel da rotação na instabilidade de Tayler / Guilherme Augusto Dias Monteiro. – 2024.
136 f. : il.

Orientador: Gustavo Andres Guerrero Eraso.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.
Bibliografia: f. 102-109.

1. Campo magnético. 2. Estrelas. 3. Simulação. I. Título. II. Eraso, Gustavo Andres Guerrero. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 537 (043)

Ficha catalográfica elaborada por Romário Martins Ribeiro – CRB6 3595
Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira – Departamento de Física - UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente tese, intitulada **"Estudos numéricos da viabilidade do dínamo de Tayler-Spruit em interiores estelares: O papel da rotação na instabilidade de Tayler"** de autoria de **GUILHERME AUGUSTO DIAS MONTEIRO** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**, em 14 de novembro de 2024.

Belo Horizonte, 14 de novembro de 2024.

Prof. Gustavo Andres Guerrero Eraso
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Wagner José Corradi Barbosa
Departamento de Física/UFMG

Profa. Sílvia Helena Paixão Alencar
Departamento de Física/UFMG

Prof. Erico Luiz Rempel
Departamento de Matemática/ITA

Prof. Adriano Hoth Cerqueira
Departamento de Ciências Exatas/UESC

Fabio del Sordo
Instituto de Ciencias del Espacio
ICE-CSIC - Barcelona

Documento assinado eletronicamente por **Adriano Hoth Cerqueira**, **Usuário Externo**, em 18/11/2024, às 07:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Wagner Jose Corradi Barbosa**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/11/2024, às 09:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Silvia Helena Paixão Alencar**, **Professora do Magistério Superior**, em 18/11/2024, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Erico Luiz Rempel**, **Usuário Externo**, em 18/11/2024, às 11:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Andres Guerrero Eraso**, **Professor(a)**, em 18/11/2024, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio Del Sordo**, **Usuário Externo**, em 22/11/2024, às 05:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3722176** e o código CRC **481158FC**.

Referência: Processo nº 23072.264284/2024-06 SEI nº 3722176

À minha esposa Alynne

Você embarcou comigo quando não tínhamos nada e,
ainda assim,
você me deu tudo.

Agradecimentos

À minha família, pelo suporte incondicional e por acreditarem em mim, mesmo quando eu não mais acreditava;

À minha esposa, por todo amor e dedicação a nós e a nossa família, pelos inúmeros sacrifícios e por nossa filha maravilhosa;

À Lis, pelos risos que iluminaram meu caminho;

A Gustavo, pela orientação, claro, mas principalmente por estar lá por mim nos momentos em que ele soube que eu precisava, e naqueles em que ele nunca soube;

Aos meus amigos de BH, em especial Alana, Cobra e Tati, vocês nos acolheram desde o instante zero até hoje. São nossa família por escolha, o que talvez indique um certo desajuste aí, vai saber;

Ao Laboratório de Astrofísica, por todos os cafés que eu nunca tomei, nem vou tomar. Pelo apoio, empatia e paciência ao longo dos anos;

To Matthias, for the patience and will, to share with me a bit of wisdom about codes, magnetic fields, nature, birds, climbing, and canned soups; To Maarit, for the support on this project, the experience and the opportunities;

A todos aqueles que, por um motivo ou outro, cruzaram meu caminho ao longo desses anos. Devo ter aprendido algo com vocês e espero ter podido ensinar algo;

À CAPES pelo apoio financeiro durante todo o processo e ao Instituto Max Planck para pesquisas do sistema solar pelo acolhimento e tempo computacional.

"O presente é a única coisa que pode ser privada de um homem,
pois em realidade é a única coisa que lhe pertence,
e um homem não pode ser privado
daquilo que não tem."
(Meditações, Livro II, 14 - Marcus Aurelius)

Resumo

A teoria do dínamo de campo médio tem sido amplamente empregada, ao longo de décadas, no estudo da origem e manutenção de campos magnéticos estelares. De acordo com essa teoria, o dínamo é sustentado por meio do cisalhamento entre camadas, relacionado ao efeito-Ω, e por movimentos helicoidais induzidos pela turbulência, associados ao efeito-α.

Contudo, a aplicabilidade da teoria do dínamo de campo médio em estrelas com envelopes radiativos, como as estrelas Ap/Bp, ou em regiões estáveis à convecção, como o interior de estrelas do tipo solar, é limitada. Nesse cenário, surgem alternativas teóricas, como o dínamo de Tayler-Spruit. Nessa abordagem, o efeito-α em zonas estáveis à convecção seria desempenhado por instabilidades magneto-hidrodinâmicas, tais como a instabilidade de Tayler, onde a energia é transferida entre diferentes componentes do campo magnético.

Na primeira parte deste trabalho, investigamos a evolução de um campo magnético puramente toroidal e anti-simétrico em relação ao equador, confinado em uma zona estável à convecção e, portanto, suscetível à instabilidade de Tayler. Utilizamos o código EULAG-MHD para realizar simulações tridimensionais e não lineares de uma camada esférica cuja estratificação se assemelha à da região estável à convecção localizada entre as zonas radiativa e convectiva do Sol. Nosso foco principal foi examinar como a evolução desse campo magnético é influenciada, a curto e longo prazo, pela rotação do modelo.

Os resultados indicam que a rotação tem a capacidade de estabilizar o campo magnético, retardando o crescimento da instabilidade. No entanto, em todos os modelos estudados, os campos magnéticos tornam-se eventualmente instáveis, perdendo sua topologia original e posteriormente decaindo devido à difusão turbulenta. Durante esse processo, observamos o surgimento de componentes significativas de campo poloidal, bem como de helicidades, tanto cinética quanto de corrente. Esses resultados corroboram a viabilidade da instabilidade de Tayler em desempenhar o papel do efeito-α no dínamo de Tayler-Spruit.

Na segunda parte deste trabalho realizamos o acoplamento entre os códigos EULAG-MHD e Pencil Code. Esse acoplamento nos permitiu aplicar o método de campos de teste (TFM), implementado no código Pencil, para calcular os coeficientes do dínamo em uma simulação teste realizada com o código EULAG-MHD. O desenvolvimento do código que permite o acoplamento foi concluído satisfatoriamente, e os resultados obtidos foram consistentes com estudos anteriores que utilizaram modelos semelhantes. Essa ferramenta abre a possibilidade de explorar, com maior profundidade, os mecanismos físicos que participam em processos instáveis, incluindo o mecanismo dínamo, em simulações de diferentes tipos realizadas com EULAG-MHD.

Palavras-chave: Campo Magnético, Estrelas, Simulações Numéricas

Abstract

The mean-field dynamo theory has been employed for decades in the study of the origin and maintenance of stellar magnetic fields. According to this theory, the dynamo is sustained through the shear between layers, related to the Ω-effect, and by helical motions induced by turbulence, associated with the α-effect. However, the applicability of the mean-field dynamo theory to stars with radiative envelopes, such as Ap/Bp stars, or to convectively stable regions, like the interior of solar-type stars, is limited. In this context, alternative theories such as the Tayler-Spruit dynamo emerge. In this approach, the α-effect in convectively stable zones would be driven by magnetohydrodynamic instabilities, such as the Tayler instability, where energy is transferred between different components of the magnetic field.

In the first part of this work, we investigate the evolution of a purely toroidal magnetic field that is anti-symmetric with respect to the equator, confined in a convectively stable zone and, therefore, prone to Tayler instability. We used the EULAG-MHD code to perform non-linear three-dimensional simulations of a spherical layer whose stratification resembles that of the stable region located between the radiative and convective zones of the Sun. Our main focus was to examine how the evolution of this magnetic field is influenced, both in the short and long term, by the rotation rate of the model.

The results indicate that rotation has the capacity to stabilize the magnetic field, delaying the growth of the instability. However, in all the models studied, the magnetic fields eventually become unstable, losing their original topology and later decaying due to turbulent diffusion. During this process, we observed the emergence of significant poloidal field components, as well as helicities, both kinetic and current. These results support the viability of Tayler instability in playing the role of the α-effect in the Tayler-Spruit dynamo.

In the second part of this work, we coupled the EULAG-MHD and Pencil Code. This coupling allowed us to apply the test-field method (TFM), implemented in the Pencil Code, to calculate the dynamo coefficients in a test simulation performed with the EULAG-MHD code. The development of the code that enables this coupling was completed successfully , and the results obtained were consistent with previous studies using similar models. This tool opens up the possibility of exploring, in greater depth, the physical mechanisms involved in unstable processes, including the dynamo mechanism, in various simulations conducted with EULAG-MHD.

Keywords: Magnetic field, Stars, Numerical Simulations

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ejeção de massa coronal 19
Figura 2 – *Loop* do dínamo 20
Figura 3 – Deserto Magnético 22
Figura 4 – Mergers - Ap/Bp 23
Figura 5 – Modos m=0 e m=1 - Tayler 25
Figura 6 – Esquematização Gradientes Temperatura 30
Figura 7 – Estrutura estelar 31
Figura 8 – Deslocamentos pela instabilidade de Tayler 37
Figura 9 – Desvio do campo devido aos modos instáveis 39
Figura 10 – Taxa de crescimento em Bonanno & Urpin (2012) 41
Figura 11 – Taxa de crescimento vs η 42
Figura 12 – Evolução energética dos modos longitudinais $m = 1$ para simulações de Braithwaite (2006b) 43
Figura 13 – Taxa de crescimento em Guerrero et al. (2019) 44
Figura 14 – Representação do Dínamo de Tayler-Spruit 45
Figura 15 – Estrutura Interna 49
Figura 16 – Campo magnético inicial 51
Figura 17 – Diagrama de tempo e latitude para A_NRB10 54
Figura 18 – Evolução temporal modos iniciais de A_NRB10 55
Figura 19 – Linhas de campo de A_NRB10 (saturação e decaimento) 56
Figura 20 – Evolução temporal para diferentes valores de τ 58
Figura 21 – Evolução temporal dos modos iniciais para simulações do conjunto A1 60
Figura 22 – Comparação entre a evolução inicial do modo longitudinal $m = 1$ para o conjunto A1 61
Figura 23 – Evolução temporal dos modos iniciais para o conjunto A3 63
Figura 24 – Evolução temporal dos modos iniciais para o conjunto B 64
Figura 25 – Linhas de campo de A_R300B10 (saturação e decaimento) 66
Figura 26 – Linhas de campo de A_R10B10 (saturação e decaimento) 67
Figura 27 – Linhas de campo para o conjunto B (saturação) 69
Figura 28 – Distribuição espectral de energia magnética para os conjuntos A1 e B . 70
Figura 29 – Evolução temporal de E_{B_ϕ} e Distribuição de Γ 72
Figura 30 – Distribuição de Γ 73
Figura 31 – B_P/B_T 74
Figura 32 – Helicidades 76
Figura 33 – MPI_COMM split 84
Figura 34 – Distribuição de processadores 1 86

Figura 35 – Distribuição de processadores 2 86
Figura 36 – Comparação latitudinal das velocidades Pencil-EULAG 88
Figura 37 – Gráfico meridional comparando as velocidades que são enviadas pelo EULAG com aquelas recebidas pelo PENCIL. 89
Figura 38 – Evolução temporal das componentes de α e β 90
Figura 39 – Coeficientes do dínamo - α 91
Figura 40 – Coeficientes do dínamo - α (Warnecke; Käpylä, 2020) 92
Figura 41 – Coeficientes do dínamo - γ 93
Figura 42 – Coeficientes do dínamo - γ (Warnecke; Käpylä, 2020) 94
Figura 43 – Coeficientes do dínamo - β 95
Figura 44 – Distribuição radial de α e β 96

Sumário

1 INTRODUÇÃO 18
1.0.1 Parâmetros observacionais das estrelas Ap/Bp 21
1.0.2 O campo magnético das estrelas Ap/Bp 21

2 ARCABOUÇO TEÓRICO 27
2.1 Interiores estelares 27
2.2 Teoria do dínamo 31
2.2.1 Teoria do dínamo de campo médio 32
2.2.2 Aproximação de suavização de primeira ordem 33
2.2.3 Método de campos de teste 35
2.3 Instabilidade de Tayler 36
2.3.1 Critérios de estabilidade: princípio da energia 37
2.3.2 Critérios de estabilidade: estudo de auto-valores 40
2.3.3 Critérios de estabilidade: estudos numéricos em 3D 43
2.4 Dínamo de Tayler-Spruit 45

3 SIMULAÇÕES GLOBAIS DA INSTABILIDADE DE TAYLER: O PAPEL DA ROTAÇÃO, E A DINÂMICA DO CAMPO MAGNÉTICO EM SUA EVOLUÇÃO 47
3.1 Código EULAG-MHD 47
3.1.1 Modelo numérico para o estudo da Instabilidade de Tayler 48
3.1.2 Campo inicial 50
3.2 Resultados 52
3.2.1 Instabilidade sem rotação 52
3.2.1.1 Cálculo da energia em diferentes modos longitudinais 53
3.2.1.2 Relaxação Térmica 57
3.2.2 Efeito estabilizante da rotação 59
3.2.2.1 Fase Linear 59
3.2.2.2 Influência da amplitude inicial do campo magnético, B_0 62
3.2.2.3 Efeitos da dissipação efetiva do modelo numérico 63
3.2.3 Fase não linear 66
3.2.4 Evolução a longo prazo 74
3.2.5 Helicidade 75
3.2.6 Conclusões parciais 77

4 CÁLCULO DOS COEFICIENTES TURBULENTOS DO DÍNAMO UTILIZANDO O MÉTODO DE CAMPOS DE TESTE 81
4.1 Acoplamento dos códigos 81
4.1.1 O código Pencil 81
4.1.2 MPI 82
4.1.2.1 Garantias iniciais de execução 83
4.1.2.2 A geometria dos códigos e a distribuição de dados 85
4.1.2.3 Modelo de teste 87
4.2 Resultados 87
4.2.1 Comparação das velocidades 88
4.2.2 Cálculo do coeficientes 88
4.3 Conclusões parciais 96

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS 99

REFERÊNCIAS 103

APÊNDICES 112

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DA MAGNETO-HIDRODINÂMICA 113
A.1 Conservação de massa 113
A.2 Conservação de momento 114
A.3 Equação de indução 116
A.4 Aproximação anelástica 117
A.4.1 Equação de momento modificada 118
A.4.2 Conservação de energia 120

APÊNDICE B – EULAG-MHD: MÉTODOS NUMÉRICOS 123
B.1 MPDATA 123
B.2 Solucionador elíptico 124
B.2.1 Funcional de energia 125
B.2.2 Erro residual 126
B.2.3 O algoritmo 126

APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES ADICIONAIS 128
C.1 Princípio da energia 128
C.2 Derivada material 133
C.3 Forças externas 133

APÊNDICE D – MÉTODO DE CAMPOS TESTE (TFM) 136

D.1 Demonstração do método 136
D.1.1 Coeficientes de transporte turbulento 138

1 Introdução

O Sol é uma estrela de significativa importância entre as estrelas conhecidas pela humanidade dada sua proximidade com a Terra o que lhe confere um papel fundamental na sustentação da vida no nosso planeta. A atividade solar afeta não apenas o clima espacial, mas também têm implicações no clima terrestre (Haigh, 2007), governando características como o ciclo de manchas solares de 11 anos, ejeções de massa coronal (EMC, Fig. 1), ventos e explosões solares (Leamon et al., 2022). Um exemplo notável da influência da atividade solar na Terra ocorreu em setembro de 1859, durante o "Evento de Carrington", quando uma EMC atingiu nosso planeta (Carrington, 1859). Nesse episódio, partículas carregadas emitidas pelo Sol sobrecarregaram as redes de transmissão elétrica, especialmente no hemisfério norte, resultando em apagões e na inoperância dos sistemas de comunicação. Nos dias de hoje, um evento similar acarretaria sobrecargas nesses sistemas, representando, apenas para os Estados Unidos, um custo diário entre 7 e 41 bilhões de dólares (Oughton et al., 2017).

Atualmente, está estabelecido que o Sol não é único quanto à presença de campos magnéticos. A detecção desses campos em outras estrelas (ex. Baliunas et al. (1995)) evidencia que sua ocorrência é comum no universo, ampliando assim o escopo do estudo do magnetismo estelar para uma diversidade de casos. Essas observações e detecções podem ser comparadas com modelos teóricos e numéricos, proporcionando um entendimento mais profundo dos processos que governam o fenômeno conhecido como dínamo estelar. Em termos gerais, um dínamo astrofísico é um processo contínuo que converte energia cinética em energia magnética e sustenta o campo magnético contra o decaimento difusivo. Atualmente, a formulação mais aceita para explicar a origem e a manutenção dos campos magnéticos estelares é a teoria do dínamo de campo médio (TCM) de Parker (Parker, 1955; Steenbeck et al., 1966). A TCM descreve como um dínamo pode operar no interior estelar, levando em consideração dois efeitos principais: o efeito-Ω e o efeito-α.

O efeito-Ω refere-se ao processo de alongamento das linhas de um campo poloidal inicial, que em coordenadas esféricas possui componentes em r e θ (ver Fig. 2(a, b, c)), através de um movimento de cisalhamento em grande escala, transformando-as em um campo toroidal, com componente na direção ϕ (Fig. 2(d)). Acredita-se que a rotação diferencial observada no Sol, e em várias outras estrelas (Benomar et al., 2018), seja a principal causa desse efeito.

Enquanto isso, o efeito-α é caracterizado pela torção das linhas de campo toroidal, geralmente associada a correntes helicoidais em pequena escala, que resulta no desenvolvimento de um campo magnético com componentes poloidais em pequena escala

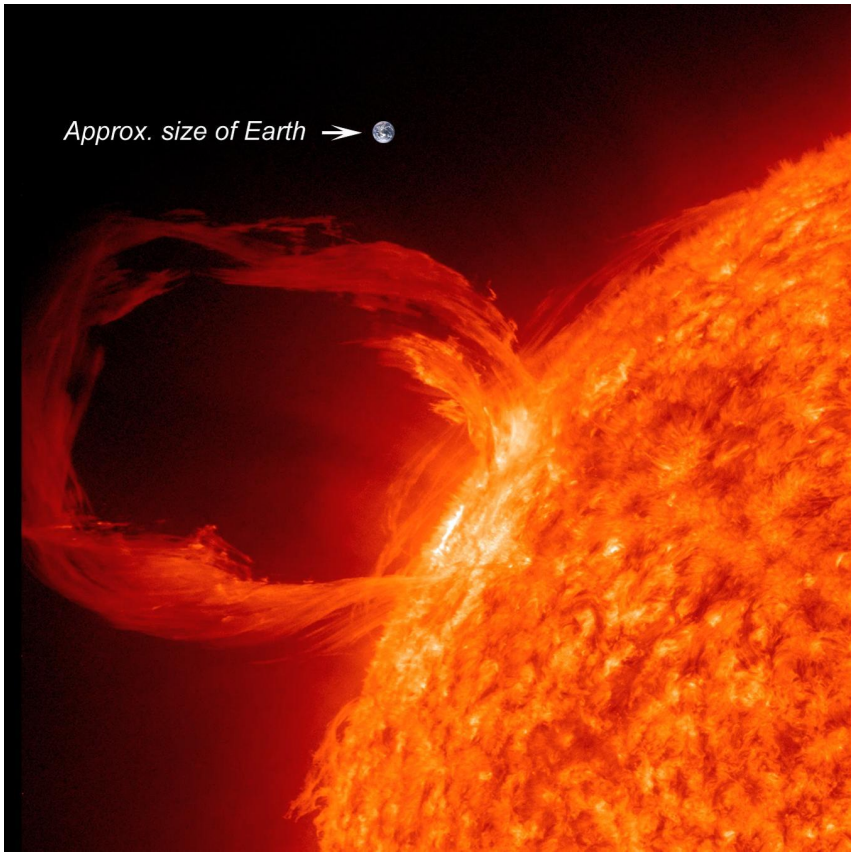


Figura 1 – Imagens em UV da ocorrência de uma EMC no Sol de março de 2010. O tamanho aproximado da Terra está indicado para um efeito comparativo. Fonte:Nasa

(ver Fig. 2(d, e, f)). A média global dessas componentes gera um campo poloidal de larga escala com polaridade oposta ao campo poloidal original. No entanto, apesar de se entender como funciona o efeito-α, o processo físico responsável por ele, bem como sua intensidade, localização na estrela e sinal, ainda não estão completamente estabelecidos (Guerrero, 2020). Em estrelas que possuem um envelope convectivo, como é o caso do Sol, o efeito-α é frequentemente associado aos movimentos convectivos, sendo gerados pela movimentação vertical de parcelas de fluido. O caráter cíclico do campo magnético solar deve-se também a um terceiro efeito da teoria de Parker, o efeito-β ou difusão magnética turbulenta. A amplitude de cada um desses três efeitos define o período do ciclo (Parker, 1955). Entretanto, é importante notar que também existem soluções estacionárias nas quais os campos magnéticos não apresentam reversões (e.g. Brandenburg & Subramanian (2005)). Além disso, nem todas as estrelas que apresentam campo magnético possuem envelopes convectivos.

A estrutura interna de uma estrela como o Sol é composta por três regiões distintas. A mais profunda delas é o núcleo, onde a energia é gerada pela fusão dos átomos de hidrogênio. Em seguida, encontra-se a zona radiativa, que é estável à convecção e onde a energia é transportada por meio de fótons absorvidos e reemitidos. Por fim, há a zona

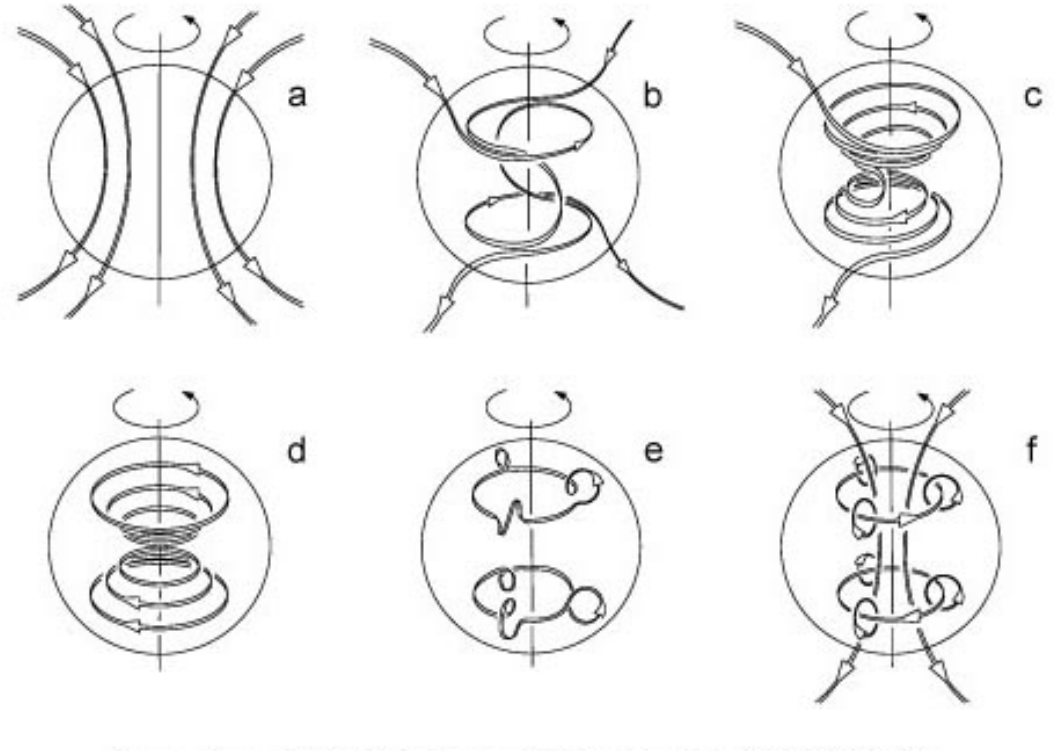


Figura 2 – Representação de um ciclo de dínamo ocorrendo em uma estrela. Nos painéis superiores vemos um campo inicial na direção poloidal (a) que é esticado pelo efeito-Ω (b) gerando um campo principalmente toroidal (c). Nos painéis inferiores vemos um campo toroidal (d) ter a suas linhas sendo localmente torcidas efeito-α (e). A contribuição média desses campos retorcidos em pequena escala é capaz de recompor o campo poloidal com polaridade contrária à original (f). Fonte:(Love, 1999)

convectiva, onde os elementos do plasma aquecido nas camadas inferiores se deslocam para as camadas mais externas e mais frias, transportando calor do interior até à superfície (Kippenhahn et al., 2013). Como apontado, a existência da rotação diferencial e dos deslocamentos convectivos do plasma permitem explicar o dínamo solar através da TCM. No entanto, a presença de um campo magnético bem estabelecido em estrelas que possuem um envelope externo radiativo (estável à convecção) impossibilita a aplicação da TCM, pois nesse caso é difícil justificar a origem dos efeitos α e Ω. A verificação da presença de campos magnéticos nesse tipo de estrela levanta também a possibilidade da zona radiativa solar ter uma maior participação no dínamo solar (Guerrero et al., 2019). Nessa camada, a turbulência geradora do efeito-α ainda poderia existir devido a instabilidades hidrodinâmicas (Dikpati; Gilman, 2001) ou magneto-hidrodinâmicas (Cally et al., 2003; Miesch et al., 2007; Monteiro et al., 2023). Para que se possa melhorar a TCM, ou para desenvolvermos uma nova teoria mais abrangente, é crucial que entendamos o papel da zona radiativa no campo magnético estelar. Nesse contexto, as estrelas Ap/Bp nos fornecem um bom laboratório.

1.0.1 Parâmetros observacionais das estrelas Ap/Bp

Estrelas Ap/Bp é a nomenclatura utilizada para descrever as estrelas de tipos espectrais A e B que possuem características químicas peculiares (Preston, 1974), ou seja possuem elementos químicos diferentes de suas contra partes. As estrelas de tipos A e B possuem massas variando entre 1.5 e 6 massas solares, um envelope externo radiativo e têm aproximadamente 10% de suas componentes classificadas como quimicamente peculiares, as estrelas Ap/Bp. Quanto ao período de rotação, P, as estrelas Ap/Bp abrangem valores muito distintos, que vão desde $P < 1$ dia a $P \gg 1000$ dias (Bychkov et al., 2006). Além disso, as estrelas Ap/Bp apresentam um campo magnético de dipolo simples. As observações mostram que esse campo magnético tende a ser mais intenso em estrelas com menor período de rotação ($P < 150$ dias) do que nas demais (Mathys, 2017). Para as 57 estrelas Ap/Bp próximas ao Sol, $d \leq 100$ parsec, Power et al. (2007) encontraram que o valor médio do período de rotação é de $3,5$ dias. Alguns dos campos magnéticos observados nessas estrelas possuem amplitudes superiores aos 300 G (Donati; Landstreet, 2009; Kochukhov et al., 2019), enquanto outras, como Vega (Lignières et al., 2009; Petit et al., 2010) e Sirius A (Petit et al., 2011), possuem campos magnéticos inferiores a 1 G. A identificação dessa distribuição particular dos campos magnéticos, com uma lacuna situada entre 1 G e 300 G, foi denominada de "deserto magnético", exemplificado na Fig. 3 (Aurière et al., 2007). A sua observação sugere a existência de mecanismos físicos, distintos de um dínamo convectivo, influenciando na geração e na manutenção dos seus campos magnéticos.

1.0.2 O campo magnético das estrelas Ap/Bp

Como resultado das observações, a origem do campo magnético nas estrelas Ap/Bp é um tema em aberto, levantando interesse devido às suas implicações fundamentais na compreensão da física estelar. Duas perspectivas principais têm emergido para explicar a geração desses campos magnéticos. A primeira delas, conhecida como a teoria dos campos magnéticos fósseis, postula que esses campos são remanescentes do ambiente onde a estrela se formou (Alecian, 2014). Segundo essa teoria, durante o processo de colapso estelar, o campo magnético presente no meio interestelar seria amplificado devido à compressão. No entanto, essa hipótese encontra resistência devido às observações que indicam a presença de campos magnéticos com amplitudes semelhantes em estrelas formadas em diferentes regiões do céu (Paunzen et al., 2005).

Por outro lado, uma segunda alternativa foi proposta por Ferrario et al. (2009), oferecendo uma visão diferente e promissora. Essa teoria considera a baixa incidência de sistemas binários em estrelas Ap/Bp, sugerindo que o campo magnético inicial dessas estrelas não seria fóssil, mas sim um campo toroidal resultante de uma forte rotação diferencial (efeito-Ω) gerada pela fusão de um par binário. Esse campo teria, então,

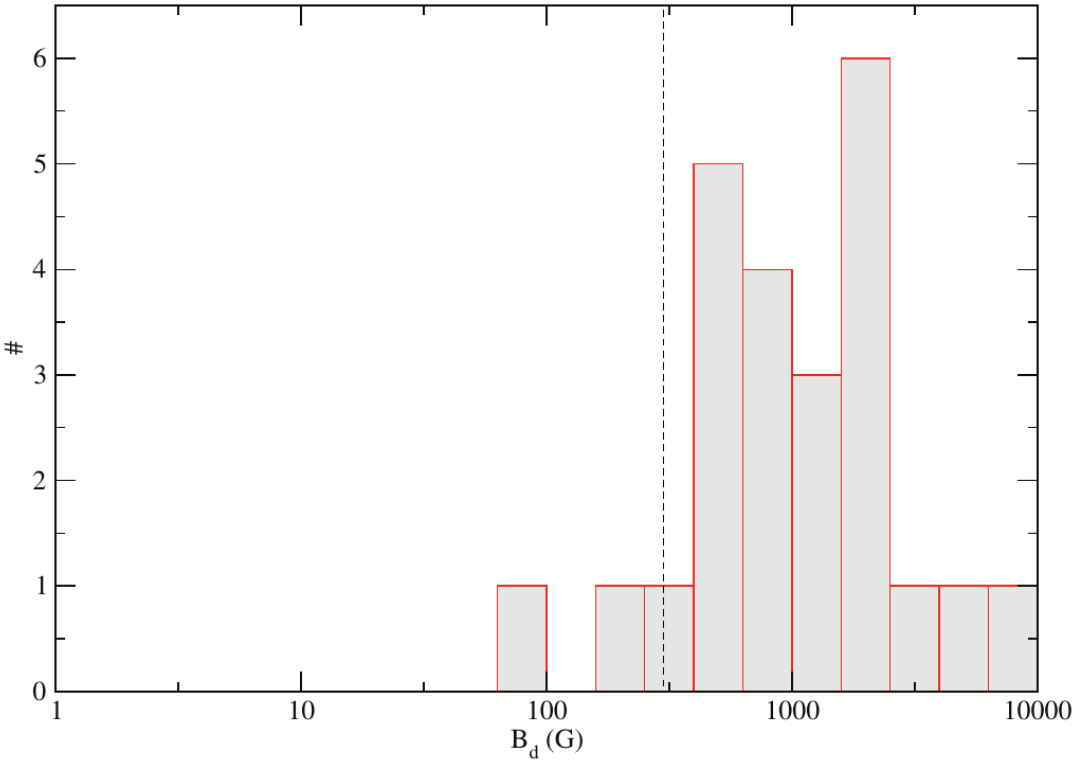


Figura 3 – Histograma mostrando o número de estrelas Ap/Bp com valor de campo magnético determinado na amostra de Aurière et al. (2007)

.

evoluído a partir de instabilidades magnéticas para uma configuração mais estável ao longo do tempo. Estudos numéricos, como os conduzidos por Schneider et al. (2019), têm explorado essa hipótese, demonstrando a viabilidade da formação do campo magnético a partir dessa fusão dos pares binários. Na Fig. 4 vemos quatro sequências de imagens referentes a uma das simulações realizadas por Schneider et al. (2019). Essas sequências representam a evolução da densidade do sistema em uma visão coplanar (perpendicular) na linha 1 (linha 4), da distribuição de massa da estrela na linha 2, e do campo magnético total na linha 3. Na linha 3 da figura, fica clara a amplificação do campo magnético como resultado da fusão do par binário em um intervalo de tempo de ≈ 10 dias. Entretanto, o trabalho não se aprofunda quanto aos mecanismos de geração nem de manutenção desse campo, estuda apenas a possibilidade de sua formação. No entanto, já existem teorias para explicar a origem desse campo.

Uma das possibilidades é que o campo fóssil existente nas estrelas progenitoras seja amplificado por uma forte rotação diferencial gerando assim um intenso campo toroidal. Esse campo estaria sujeito à Instabilidade de Tayler (IT) (Tayler, 1973) e, dependendo de sua taxa de rotação, decairia para uma configuração desorganizada, ou para uma configuração estável, devido a presença de componentes poloidais e toroidais, que se manteria estável em escalas de tempo seculares (Szklarski; Arlt, 2013; Jouve et al., 2020).

Uma outra teoria consiste na existência de um dínamo no interior dessas estrelas.

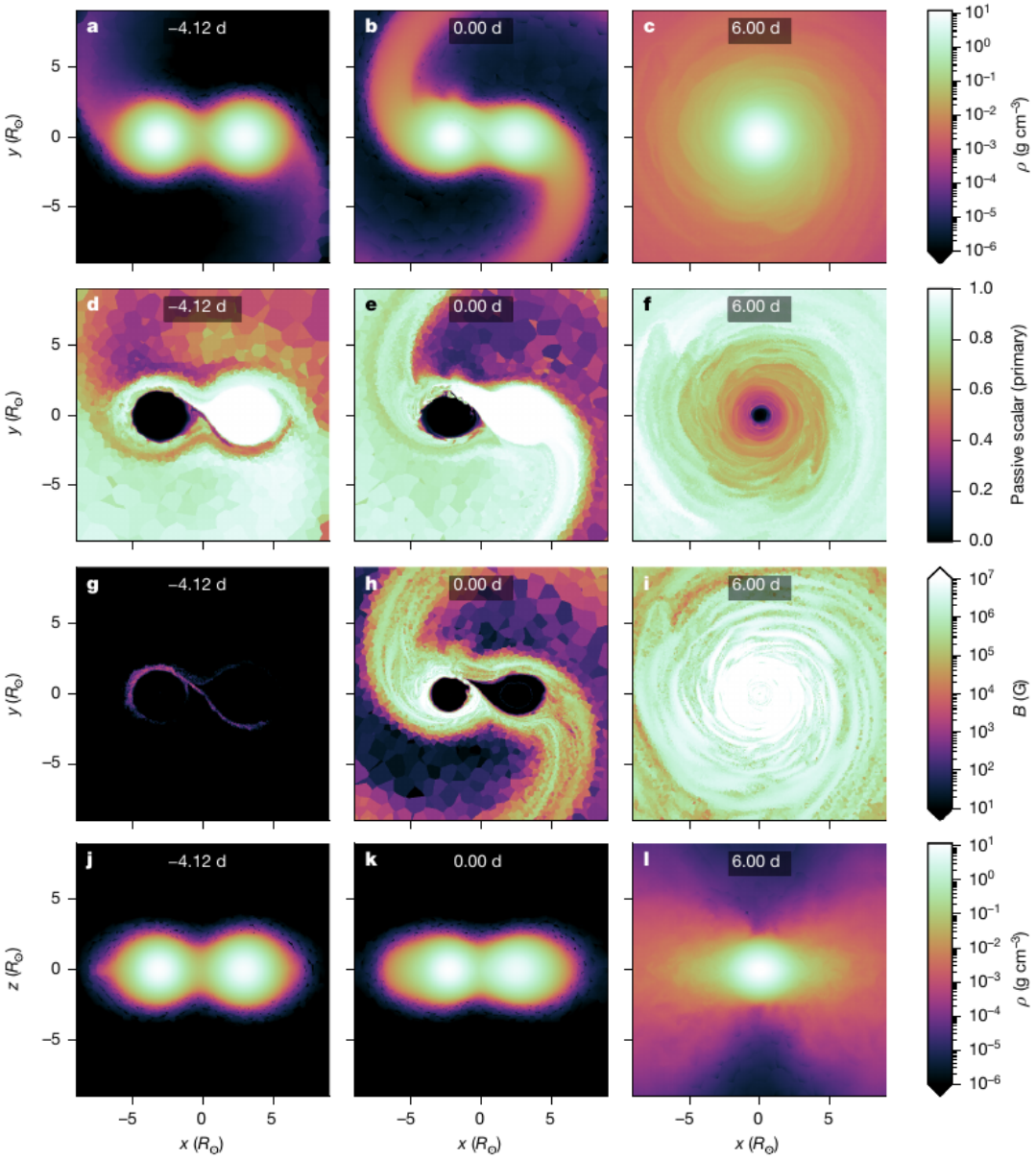


Figura 4 – Distribuição de densidade (linhas 1 e 4), da massa (linha 2) e do campo magnético total (linha 3) para um sistema de fusão entre duas estrelas de tipo A - Fonte:(Schneider et al., 2019)

Nesse contexto, Spruit (1999) apresentou uma alternativa à TCM aplicável a zonas radiativas. O dínamo operaria utilizando a rotação diferencial como efeito-Ω e instabilidades magneto-hidrodinâmicas, ex. instabilidade de Tayler, como efeito-α, sendo essa proposta conhecida como o Dínamo de Tayler-Spruit. A instabilidade de Tayler, proposta por Tayler (1973), é um tipo de instabilidade que afeta campos magnéticos presentes em regiões estáveis à convecção. Como na Fig. 5, sob perturbações, campos poloidais (Markey; Tayler, 1973) ou toroidais (Tayler, 1973) em grande escala tendem a se "contorcer"com modos oscilatórios característicos, até perderem completamente sua topologia inicial e eventualmente se dissiparem. Nesse processo, a instabilidade leva o campo a adquirir componentes perpendiculares ao campo original, semelhante ao efeito-α. Estudos teóricos (Zahn, 1974; Pitts; Tayler, 1985) demonstraram que a taxa de crescimento da instabilidade dessas perturbações depende de fatores como rotação, estratificação gravitacional e/ou condutividade térmica, podendo inclusive estabilizar completamente o campo inicial. Caso a instabilidade exista e produza um efeito-α, esses fatores irão determinar a escala temporal de um possível dínamo.

No entanto, uma comprovação da viabilidade desse tipo de dínamo ainda requer estudos mais aprofundados. A participação da IT como um possível efeito-α no dínamo de Tayler-Spruit é amplamente questionada, especialmente devido às componentes de campo geradas pela instabilidade de Tayler não serem axissimétricas e, portanto, incapazes de reproduzir uma componente em grande escala do campo magnético poloidal (Zahn et al., 2007; Keszthelyi, 2023). Entretanto, outros resultados indicam a produção de helicidades axissimétricas provenientes da IT (Weber et al., 2015). Embora a presença dessas helicidades não encerre a discussão sobre a viabilidade do dínamo de Tayler-Spruit, ela é um indicativo promissor da existência de efeitos geradores de campo magnético. Modelos apresentando esse tipo de dínamo já foram utilizados no contexto de estrelas de nêutrons e magnetares (Fuller et al., 2019; Barrère et al., 2022) e, mais recentemente, em modelos com estrutura mais próxima àquela da zona radiativa solar (Petitdemange et al., 2024).

A realização de estudos analíticos completos, envolvendo a instabilidade de Tayler, é complexa devido ao número de variáveis envolvidas. Por isso, esse tipo de análise se restringe à modelos simplificados, levando assim à necessidade de modelos numéricos para ampliar o escopo dos estudos. O mesmo também é verdade para modelos do dínamo de Tayler-Spruit ou, em geral, para modelos globais de dínamo.

É a partir de modelos numéricos que este trabalho busca expandir os conhecimentos sobre a instabilidade de Tayler e seu papel no dínamo de Tayler-Spruit. Aqui, utilizamos o código EULAG-MHD para simular uma casca esférica, cuja estratificação se assemelha à da região superior da zona radiativa solar. Dentro do domínio, inserimos um campo magnético toroidal e antissimétrico com relação ao equador. Desse modo, ao variarmos

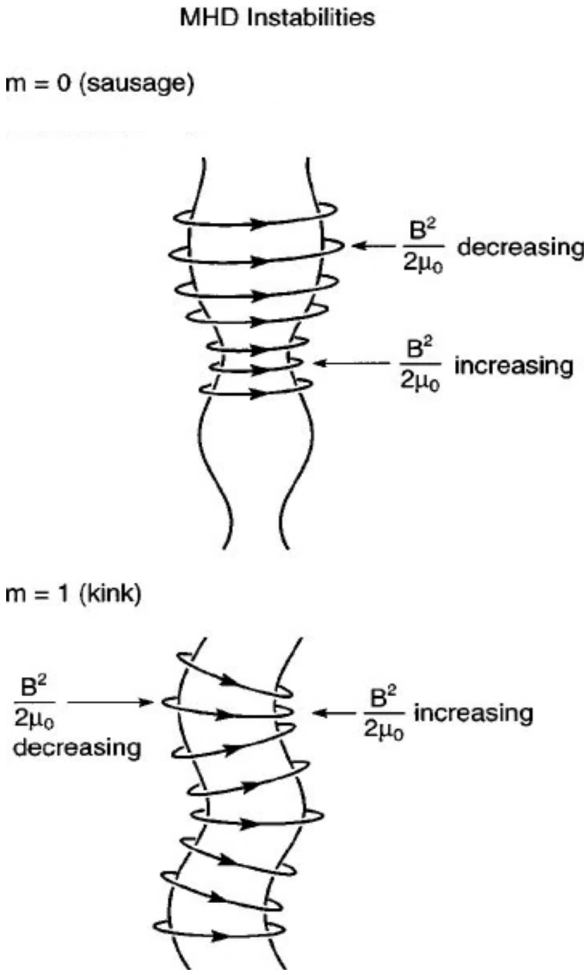


Figura 5 – Representação física dos modos $m = 0, 1$. As linhas de campos são representadas pelas setas circulares. Regiões de aumento e redução da pressão magnética ($\frac{B^2}{2\mu_0}$) estão destacadas na figura. A diferença de pressão entre as diferentes regiões do domínio causa o deslocamento do campo magnético.
Fonte:https://theoretical-physics-digest.fandom.com/wiki/Tayler_Instability

grandezas físicas como rotação, relaxação térmica e difusividade magnética (através da resolução numérica do modelo), podemos observar como a IT é afetada tanto no curto quanto no longo prazo.

Além disso, realizamos o cálculo das helicidades presentes na simulação, buscando entender qual a participação da IT no processo de geração do campo magnético do dínamo de Tayler-Spruit. Em análises como a Aproximação de Suavização de Primeira Ordem (FOSA, em inglês) as helicidades são parte integrante da determinação dos coeficientes do dínamo. Com elas, é possível observarmos, por exemplo, regiões de maior produção do campo magnético, seu sinal e estimarmos sua intensidade. No entanto, métodos como o FOSA funcionam apenas como aproximações, sendo necessário utilizar outros métodos mais completos para estimar as grandezas físicas envolvidas no dínamo. Dentre esses, acredita-se que o que leva aos resultados mais precisos é o método de campos de teste (Schrinner et al., 2007; Käpylä et al., 2023).

O método de campos de teste (TFM, em inglês) utiliza-se do campo de velocidades da simulação, e de seus campos de teste independentes, para determinar a força eletromotriz resultante no modelo. A partir disso, é possível determinarmos, através dos coeficientes do dínamo, quais grandezas físicas participam do desenvolvimento do campo magnético, sua intensidade e sua localização no domínio. Como o EULAG-MHD não apresenta tal ferramenta, decidimos acessá-la através de um acoplamento entre o EULAG e o Pencil Code (Pencil Code Collaboration et al., 2021) , onde o TFM está implementado. Com isso, passará a ser possível um estudo mais aprofundado dos dínamos simulados com o EULAG, inclusive o de Tayler-Spruit, para o qual não há análises desse tipo ainda.

O presente trabalho contém as ferramentas e métodos necessários para alcançarmos os objetivos propostos, também apresenta e discute os resultados obtidos. O documento divide-se da seguinte forma: No Cap. 2 abordamos os conceitos de teoria dínamo, instabilidade de Tayler e do dínamo de Tayler-Spruit. Em seguida, no Cap. 3 fazemos uma descrição detalhada do modelo numérico utilizado para estudar a instabilidade de Tayler, bem como a análise completa dos resultados obtidos para simulações com e sem rotação, e para modelos com maior resolução numérica. No final do capítulo, apresentamos os resultados referentes à presença de helicidades no modelo, bem como as conclusões referentes a estes resultados.

A seguir, temos no Cap. 4 o passo a passo do acoplamento que realizamos entre os códigos EULAG-MHD e Pencil Code, bem como a análise dos coeficientes obtidos com o TFM para um modelo HD, com as conclusões extraídas desses resultados expostas ao final do capítulo. Por fim, no Cap. 5, realizamos um apanhado dos resultados obtidos ao longo do trabalho, ressaltando seus principais pontos e elencando possíveis caminhos a seguirmos a partir dele. Ao final deste texto, temos uma série de Apêndices, A a D, onde apresentamos várias demonstrações relevantes a este trabalho. Acreditamos que incluir essas demonstrações no meio do texto poderia dificultar a fluidez da sua leitura. Contudo, esses apêndices são referenciados quando necessário.

2 Arcabouço Teórico

Neste capítulo, são descritos os principais contextos teóricos que embasaram a execução deste trabalho. Inicialmente abordaremos a estrutura estelar como função da massa das estrelas para objetos na sequência principal. Em seguida, discutimos sobre os mecanismos de amplificação do campo magnético no interior das estrelas baseados na teoria de dínamo, incluindo formalismos para quantificar os coeficientes que sustentam esse processo. Historicamente, essa teoria foi aplicada a regiões convectivas, contudo, campos magnéticos intensos são também observados em algumas estrelas cujo envelope é radiativo. Por isso, exploramos um possível mecanismo capaz de amplificar e sustentar o campo magnético nessas regiões, a instabilidade de Tayler. Juntamente com a rotação diferencial, essa instabilidade é capaz de fechar o ciclo do dínamo, em um processo conhecido como dínamo de Tayler-Spruit.

2.1 Interiores estelares

No interior estelar, a distribuição de temperatura e densidade em função do raio está determinada pela massa e pela composição química da estrela. Esses perfis determinam quão opaco é o meio para o fluxo da radiação gerado no núcleo estelar. A opacidade, por sua vez, determina o mecanismo mais eficiente de transporte de energia. Quando a opacidade é baixa, o livre caminho médio dos fótons é grande o suficiente para que a energia seja transportada através da radiação. Nesse caso, o fluxo de energia pode ser definido com uma equação de difusão para temperatura[1],

$$F = -k_{\mathrm{rad}} \nabla T, \tag{2.1}$$

onde

$$k_{\mathrm{rad}} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho}, \tag{2.2}$$

com $a = 7.57 \times 10^{-15}$ erg cm^{-3} K^{-4} sendo a constante de densidade de radiação, $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1} sendo a velocidade da luz, ρ é a densidade e κ é a opacidade do meio, que depende do comprimento de onda da radiação. É possível então encontrarmos o gradiente de temperatura a partir da Eq. 2.1 e da luminosidade local $l = 4\pi r^2 F$ como sendo

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\kappa l}{r^4 T^3}, \tag{2.3}$$

[1] Essa abordagem é válida apenas para o interior estelar. Na proximidade da superfície torna-se necessário um tratamento a partir da transferência radiativa.

onde o gradiente foi tomado em relação à massa da estrela, m, contida no interior do raio r. Supondo então equilíbrio hidrostático, podemos encontrar um gradiente semelhante para a pressão, P, como

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}. \tag{2.4}$$

Assim, ao dividirmos as Eqs. 2.3 e 2.4, encontramos dT/dP que fornece a variação da temperatura com a profundidade, representada pela pressão P. Esse gradiente é escrito normalmente a partir do logaritmo natural, de modo que podemos reescrevê-lo como sendo

$$\nabla_{rad} \coloneqq \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{rad} = \frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa l P}{m T^4}. \tag{2.5}$$

Em regiões de opacidade alta, o livre caminho médio é reduzido. Isso gera um aquecimento das camadas do interior estelar e torna o transporte por radiação pouco eficiente, tornando a convecção a forma mais eficiente para o transporte de energia. Para entendermos quando e qual método é mais vantajoso definimos um critério de estabilidade.

Primeiramente, é preciso entender que em uma dada região do interior estelar, os valores das grandezas físicas (temperatura, densidade, etc.) podem apresentar algumas flutuações. Desse modo, um determinado elemento de massa (subscrito e) pode apresentar valores constantes de suas grandezas, mas que são ligeiramente diferentes do ambiente (subscrito s) ao seu redor. Definimos então para uma grandeza genérica A a diferença entre o elemento e o ambiente como sendo

$$DA \coloneqq A_e - A_s. \tag{2.6}$$

Aqui, iremos supor que o elemento está sempre em equilíbrio de pressão com o ambiente ($DP = 0$). Desse modo, quando um certo elemento apresenta $DT > 0$, o que ocorrerá será uma expansão volumétrica do elemento resultando em pressão constante. Nesse caso, porém, para um gás ideal ($\rho \propto P/T$), teremos que $D\rho < 0$, tornando o elemento mais leve que o material ao seu redor e sujeito às forças de empuxo.

Imaginemos então um certo elemento, originalmente em completo equilíbrio, que foi levantado radialmente em Δr ($\Delta r > 0$) por uma perturbação. Utilizando a Eq. 2.6 para densidade, vemos que

$$D\rho = \left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_e - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_s\right]\Delta r. \tag{2.7}$$

Podemos então definir uma força de empuxo $\boldsymbol{K}$ cuja componente radial é dada por $K_r = -gD\rho$, onde g é o módulo da aceleração gravitacional. Assim, temos que quando $D\rho < 0$ o elemento será mais leve que o ambiente e $K_r > 0$. Nesse caso, temos uma situação instável, com $\boldsymbol{K}$ amplificando a perturbação original e empurrando o elemento

para regiões mais externas. Na situação oposta, onde $D\rho > 0$, temos que $K_r < 0$. Com isso, o elemento será empurrado de volta a sua posição original em uma configuração, portanto, estável. Logo, a condição de estabilidade que extraímos da Eq. 2.7 é de que

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_e - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_s > 0. \tag{2.8}$$

A Eq. 2.8, embora represente o critério para estabilidade, requer um conhecimento prévio da distribuição de densidade tanto para o meio quanto para o elemento. Devemos então representar a Eq. 2.8 como fizemos na Eq. 2.5, através dos gradientes de temperatura. Para isso, assumimos que o elemento de massa se desloca de forma adiabática em um interior estelar quimicamente homogêneo. Podemos então escrever a equação de estado $\rho = \rho(P, T)$ na forma diferencial como sendo

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha\frac{dP}{P} - \delta\frac{dT}{T}, \tag{2.9}$$

onde

$$\alpha \coloneqq \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}\right), \ \delta \coloneqq -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right). \tag{2.10}$$

Aqui, as derivadas parciais de α e δ[2] são tomadas com valores constantes de T e P, respectivamente, onde, para o gás ideal $\rho \propto P/T$.

Utilizando então a Eq. 2.9, podemos reescrever a Eq. 2.8 na forma

$$\left(\frac{\alpha}{P}\frac{dP}{dr}\right)_e - \left(\frac{\delta}{T}\frac{dT}{dr}\right)_e - \left(\frac{\alpha}{P}\frac{dP}{dr}\right)_s + \left(\frac{\delta}{T}\frac{dT}{dr}\right)_s . > 0 \tag{2.11}$$

Como vimos anteriormente, o elemento de massa e o ambiente encontram-se sempre em equilíbrio de pressão. Desse modo, o primeiro e o terceiro termo cancelam-se. Multiplicamos então os termos restantes pela escala de altura da pressão, definida por

$$H_P \coloneqq -\frac{dr}{d\ln P} = -P\frac{dr}{dP} = \frac{P}{\rho g}, \tag{2.12}$$

onde utilizamos a condição para o equilíbrio hidrostático de que $dP/dr = -\rho g$. Nesse contexto, H_P representa na prática a distância em r na qual P varia um fator de e. Assim, encontramos que a condição de estabilidade pode ser dada por

$$\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_s < \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_e \tag{2.13}$$

e definimos os gradientes de transporte como sendo

$$\nabla \coloneqq \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_s, \ \nabla_e \coloneqq \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_e. \tag{2.14}$$

Definimos ∇ como o gradiente de temperatura do ambiente ou gradiente real. Enquanto isso, ∇_e é o gradiente do elemento de massa, descrevendo como sua temperatura varia durante o movimento.

[2] As variáveis α e δ serão utilizadas em outros pontos desse trabalho, mas com significados distintos. Essa distinção pode ser observada imediatamente pelo contexto.

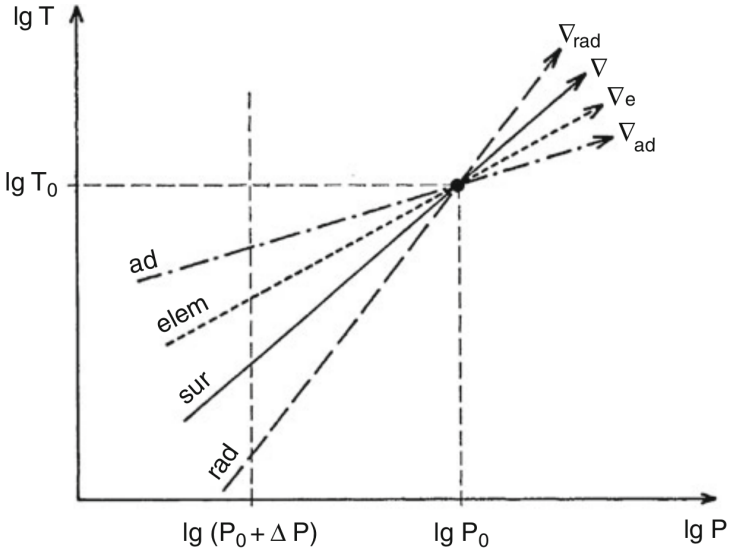


Figura 6 – Esquematização da relação temperatura-pressão para os gradientes adiabático (∇_{ad}), do elemento (∇_e), do meio (∇) e radiativo (∇_{rad}) para um elemento que se encontra originalmente em ($\ln T_0$, $\ln P_0$). É necessário ressaltar que a superfície da estrela se encontra na origem do plano. . Fonte: Kippenhahn et al. (2013)

Para o caso onde a energia é completamente transportada de forma radiativa, teremos que $\nabla = \nabla_{rad}$. Ao supormos que o elemento de massa se desloca no meio sem trocar calor encontramos que $\nabla_e = \nabla_{ad}$, e portanto que

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad}. \tag{2.15}$$

A Eq. 2.15 representa o critério de Schwarzschild. Quando respeitado, significa que o meio é estável à convecção e todo o fluxo de energia é transportado por radiação, do contrário, pequenas perturbações levarão a região inteira à convecção. Na Fig. 6 observamos um esquema com a relação entre os diferentes gradientes quando um elemento de massa é perturbado no interior estelar. Considerando que o elemento estava em equilíbrio em P_0 é perturbado e se desloca para o ponto $P_0 + \Delta P$, a relação entre seus gradientes será alterada e, portanto, sua interação com o meio. Durante a definição da Eq. 2.9, consideramos que o meio era quimicamente homogêneo, uma aproximação válida para a maioria dos casos. No entanto, quando o gradiente químico é importante sua dependência aparece na equação de estado e, por fim, no critério de estabilidade. Tal dependência não está presente em nosso trabalho e, por isso, foi deixada de lado.

Como discutido no início desta seção o que finalmente determina qual situação é mais favorável para o transporte de energia é a opacidade do meio. Esta, por sua vez, depende da massa do objeto. Não existe uma relação simples e direta entre essas duas grandezas, esta relação depende do tipo de interação entre a radiação e a matéria a diferentes temperaturas. Para modelos de estrutura estelar foram desenvolvidas tabelas com esta relação (ex. Iglesias & Rogers (1996)). Na Sequência Principal, como exemplificado na Fig. 7, encontra-se que

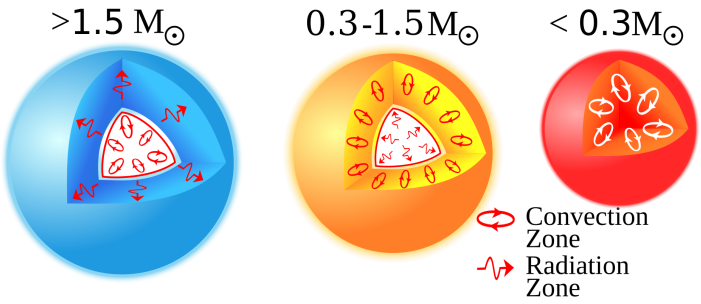


Figura 7 – Representação gráfica da estrutura estelar baseada na massa da estrela. Estrelas mais massivas, $M > 1.5M_\odot$, possuem um interior convectivo e um envelope radiativo, enquanto que em estrelas de baixa massa, $M < 0.3M_\odot$, todo o interior é convectivo. Já para massas intermediárias, $0.3M_\odot < M < 1.5M_\odot$, o interior estelar é radiativo, cercado por um envelope convectivo. Fonte: https: Sun.org - www.sun.org [Modificado]

estrelas de baixa massa ($M \lesssim 0.3M_\odot$) possuem alta opacidade e o transporte de energia acontece inteiramente por convecção. Para $0.3M_\odot \lesssim M < 1.5M_\odot$, é desenvolvida na estrela uma camada radiativa interna, rodeada por um envelope convectivo. Finalmente, para estrelas com $M > 1.5M_\odot$ a opacidade no interior estelar é baixa o suficiente para a estrela ser completamente radiativa. Contudo, as altas temperaturas geradas pelo ciclo CNO no núcleo estelar geram um gradiente de temperatura grande o suficiente para formar um núcleo convectivo.

A teoria canônica do dínamo pressupõe a existência de turbulência convectiva para amplificar os campos magnéticos. No entanto, existem autores que defendem a possibilidade de um dínamo sustentado exclusivamente em zonas radiativas (Spruit, 1999; Braithwaite, 2006a; Zahn et al., 2007) e as simulações de Guerrero et al. (2019) apontam também um dínamo acontecendo na região radiativa. Nas próximas seções, discutiremos os fundamentos do dínamo canônico assim como uma teoria complementar que prevê a ocorrência de dínamos em zonas estáveis à convecção.

2.2 Teoria do dínamo

Podemos pensar no interior estelar como composto por um fluido eletricamente neutro, mas cujas componentes são eletricamente carregadas e onde as colisões dominam o transporte energético devido a um curto livre caminho médio. O estudo das interações desse fluido junto aos campos que o permeiam é feito pela da magneto-hidrodinâmica (MHD, sigla em inglês), cuja equação chave, que possibilita estudar a evolução do campo magnético, é a chamada equação de indução (a demonstração da Eq. 2.16 pode ser vista na Sec. A.3):

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} - \eta_{\rm d} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}). \tag{2.16}$$

O primeiro termo na direita da Eq. 2.16 representa a indução e transporte de um campo magnético, $\boldsymbol{B}$, gerado por um fluxo carregado, $\boldsymbol{u}$. Enquanto isso, o segundo termo descreve a dissipação ôhmica do campo magnético, onde $\eta_{\rm d} = \frac{1}{\mu_0 \sigma_{\rm c}}$ é a *difusividade magnética*. A dinâmica do campo magnético pode ser avaliada considerando o balanço entre os termos geradores e dissipativos da Eq. 2.16. Com isso, é possível explorar em quais condições o campo magnético aumenta e em quais ele decai. É importante ressaltar que as interações entre componentes do sistema são quase sempre complexas e não lineares. Por exemplo, a força magnética proveniente do campo também atua sobre o fluido, resistindo ao seu movimento, reduzindo $\boldsymbol{u}$ e potencialmente cessando a indução de $\boldsymbol{B}$. Dessa forma, geralmente é necessário o uso de ferramentas computacionais para abordar esse tipo de problema. Entretanto, um grande passo para o entendimento do dínamo veio com a formulação analítica da teoria do dínamo de campo médio.

2.2.1 Teoria do dínamo de campo médio

A teoria do dínamo de campo médio (Parker, 1955; Steenbeck et al., 1966) (MFD, sigla em inglês) é a estrutura mais compreensível para explicar a origem e manutenção do campo magnético em objetos estelares. De forma direta, a teoria assume a existência de uma separação explícita entre as escalas de comprimento tanto para o campo magnético quanto para as velocidades. Desse modo, ambas possuem componentes em pequena escala, de comprimento ℓ, e em grande escala, ou escala *média* de comprimento L, onde $L \gg \ell$. Assim, podemos decompor o campo magnético e o campo de velocidade da seguinte forma,

$$\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{b}', \qquad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}', \tag{2.17}$$

onde $\overline{x}$ representa o valor médio da grandeza x e x' a sua perturbação. Por definição, temos que $\overline{\boldsymbol{b'}} = \overline{\boldsymbol{u'}} = 0$. Ao aplicarmos a Eq. 2.17 na Eq. 2.16 temos que

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u'} \times \boldsymbol{b'}} \right) + \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \overline{\boldsymbol{B}}, \tag{2.18}$$

onde definimos a força eletromotriz média (FEM) resultante da interação entre as grandezas em pequena escala como sendo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \overline{\boldsymbol{u'} \times \boldsymbol{b'}}. \tag{2.19}$$

A existência da FEM pode contribuir como uma fonte para $\overline{\boldsymbol{B}}$ e é o que diferencia a equação de indução para o campo total (Eq. 2.16) da sua versão para o campo médio

(Eq. 2.18). Podemos então substituir os valores da Eq. 2.17 na Eq. 2.16 e subtrair o resultado da Eq. 2.18 para obtermos

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}'}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{\mathcal{E}} \right) + \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}', \tag{2.20}$$

que representa a evolução temporal da perturbação do campo magnético, $\boldsymbol{b}'$. O teorema de Cowling nos diz que a solução da Eq. 2.16 para campos magnéticos axissimétricos implica no decaimento completo do campo (Hide; Palmer, 1982), dada a inexistência de uma fonte para a componente poloidal do campo magnético. No entanto, a separação de escalas permite a existência de um termo fonte na forma de uma FEM (Eq. 2.19). Vemos assim, pelas Eqs. 2.16 e 2.20, que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ depende de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ e $\overline{\boldsymbol{B}}$ e, uma vez que tenhamos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ se torna linear com $\overline{\boldsymbol{B}}$. Uma suposição comum para simplificar o sistema de equações é a de que $\boldsymbol{b}'$ desaparece quando $\overline{\boldsymbol{B}} = 0$, tornando assim $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ não apenas linear, mas também homogênea com respeito a $\overline{\boldsymbol{B}}$. Assim, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ pode ser expressa em função do campo magnético médio como sendo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{B}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\nabla}^2 \overline{\boldsymbol{B}}), \tag{2.21}$$

onde $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$ e $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}$, são tensores dependentes apenas do campo de velocidades e que possuem ordens dois e três, respectivamente. Para um fluido com turbulência homogênea e isotrópica, os tensores $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$ e $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}$ podem ser escritos na forma $\boldsymbol{a}_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ e $\boldsymbol{b}_{ij} = \beta \mathcal{E}_{ijk}$, onde i,j e k representam as coordenadas do sistema.

Com essa suposição, desprezando os termos de ordem superior e substituindo a Eq. 2.21 na Eq. 2.18 temos que

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \alpha \overline{\boldsymbol{B}} \right) + (\eta_d + \beta) \boldsymbol{\nabla}^2 \overline{\boldsymbol{B}}, \tag{2.22}$$

onde β é a contribuição turbulenta à difusividade magnética. É de se esperar que β seja majoritariamente positivo, mas é importante notar que, em alguns casos, ele pode ser negativo (Krause; Raedler, 1980). Enquanto o termo com β é conhecido como termo dissipativo da Eq. 2.22, o termo com α é chamado de termo gerador, responsável pelo crescimento do campo médio. O que nos resta então é determinar esses coeficientes como função das grandezas físicas conhecidas.

2.2.2 Aproximação de suavização de primeira ordem

A aproximação de suavização de primeira ordem (FOSA, em inglês) é a maneira mais simples de se calcular os coeficientes do dínamo. Esta aproximação consiste em linearizar as equações para as componentes perturbadas do campo magnético, ignorando as contribuições de termos de segunda ordem. Assim, partimos então da equação de indução

para a perturbação do campo magnético $\boldsymbol{b}'$, Eq. 2.20:

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}'}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{\mathcal{E}} \right) + \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}', \tag{2.23}$$

onde devemos descartar os termos $\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'$ e $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ por serem não lineares com respeito às perturbações $\boldsymbol{u}'$ e $\boldsymbol{b}'$. Essa aproximação é válida quando as perturbações são pequenas, o que ocorre, por exemplo, quando o número de Reynolds magnético, $R_m = \frac{uL}{\eta_d}$, é pequeno. Em seguida, desconsiderando as contribuições do termo $\overline{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{b}'$ e a derivada temporal de $\boldsymbol{b}'$, encontramos a equação

$$\eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}' = -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}} \right). \tag{2.24}$$

Resolvendo então a Eq. 2.24 para $\boldsymbol{b}'$, para um dado $\boldsymbol{u}'$, é possível calcular $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ de forma direta. Como vimos, essa aproximação é condicionada a casos onde R_m é pequeno, contudo a maioria dos casos de estudo em astrofísica apresentam $R_m \gg 1$. Nesses casos, ainda é possível utilizar o FOSA. Para isso, é preciso que exista um tempo de correlação, τ_{cor}, pequeno o suficiente para que $\tau_{cor} u_{rms} k_f \ll 1$, onde u_{rms} é a velocidade RMS e k_f o número de onda associados ao campo de velocidades $\boldsymbol{u}'$, ou seja o tempo de correlação é muito menor do que o da propagação de uma perturbação. Atendida essa condição temos que, da Eq. 2.23, os termos $\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'$ e $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ainda podem ser desprezados, mas não mais a derivada temporal e que, como $R_m \gg 1 \therefore \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}' \to 0$. Assim, a Eq. 2.23 teria a forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}'}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}} \right). \tag{2.25}$$

Podemos agora integrar a Eq. 2.25 e substituir $\boldsymbol{b}'$ na Eq. 2.19 para encontrarmos que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \overline{\boldsymbol{u}'(t) \times \int_0^t \boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{u}'(t') \times \overline{\boldsymbol{B}}(t') \right] dt'}. \tag{2.26}$$

Por simplicidade, foram suprimidas as representações das dependências espaciais das variáveis. Utilizando a notação de índices para determinarmos as componentes temos que

$$\mathcal{E}_i(t) = \int_0^t \left[\overleftrightarrow{\alpha}_{ip}(t,t') \overline{B}_p(t') + \overleftrightarrow{\beta}_{ilp}(t,t') \frac{\partial \overline{B}_p(t')}{\partial l} \right] dt'. \tag{2.27}$$

onde $\overleftrightarrow{\alpha}_{ip}(t,t') = \epsilon_{ijk} \overline{u_j(t) \partial u_k(t')/\partial p}$ e $\overleftrightarrow{\beta}_{ilp}(t,t') = \epsilon_{ijp} \overline{u_j(t) u_l(t')}$.

Faremos agora duas suposições. A primeira é de que o estado é estatisticamente estacionário e assim que $\overleftrightarrow{\alpha}_{ip}$ e $\overleftrightarrow{\beta}_{ilp}$ dependem apenas da diferença temporal, $t - t'$. A segunda é de que o sistema é isotrópico e, portanto, que $\overleftrightarrow{\alpha}_{ip}$ e $\overleftrightarrow{\beta}_{ilp}$ devem ser proporcionais aos tensores isotrópicos δ_{ip} e ϵ_{ilp}, respectivamente. Sendo assim, temos que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(t) = \int_0^t \left[\overleftrightarrow{\alpha}(t-t') \overline{\boldsymbol{B}}_p(t') - \overleftrightarrow{\beta}_t(t-t') \overline{\boldsymbol{J}}(t') \right] dt', \tag{2.28}$$

onde $\overleftrightarrow{\alpha} = -\frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t')}$ e $\overleftrightarrow{\beta}_t = \frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t')}$ são os núcleos da integral e $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}'$ é a vorticidade das perturbações de velocidade. Se supormos que o campo varia lentamente com o tempo, encontramos que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \alpha\overline{\boldsymbol{B}} - \beta_t\overline{\boldsymbol{J}}, \tag{2.29}$$

com

$$\alpha \approx -\frac{1}{3}\tau_{cor}\overline{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}} \tag{2.30}$$

e

$$\beta_t \approx \frac{1}{3}\tau_{cor}\overline{\boldsymbol{u}'^2}, \tag{2.31}$$

onde τ_{cor} é o tempo de correlação. Assim, temos os coeficientes de transporte turbulento calculados com o FOSA, α e β_t, que dependem respectivamente da helicidade e da densidade de energia da turbulência.

Como vimos anteriormente, a utilização do FOSA baseia-se em valores de $\boldsymbol{b}'$ serem relativamente pequenos em comparação com $\overline{\boldsymbol{B}}$. No entanto, sistemas onde $R_m \gg 1$ podem desenvolver dínamo em pequena escala, fazendo com que $\boldsymbol{b}'$ cresça exponencialmente, quebrando a suposição de que $\boldsymbol{b}' \ll \overline{\boldsymbol{B}}$. É possível então utilizarmos outro métodos para encontrar os coeficientes de transporte turbulento. Um deles é o método de campos teste que descreveremos a seguir.

2.2.3 Método de campos de teste

O Método dos Campos de Teste foi proposto por Schrinner et al. (2005) e visa encontrar, para campos médios estáveis (sem variações bruscas), quais efeitos físicos são responsáveis pela sua geração e dissipação. Uma descrição mais detalhada do método pode ser encontrada no Apêndice D, e aqui partiremos da Eq. 2.21, onde separamos os tensores do lado direito da equação em componentes simétricas e antissimétricas, encontrando que:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\gamma}\times\overline{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}}) - \boldsymbol{\delta}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\overline{\boldsymbol{B}}) - \boldsymbol{\kappa}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{B}})^{(s)}. \tag{2.32}$$

Os coeficientes acompanhando os termos da Eq. 2.32 são chamados de coeficientes de transporte turbulento e, através deles, podemos caracterizar as contribuições da física do sistema para $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Aqui, $\boldsymbol{\alpha}$ representa o efeito-α, que gera campo magnético através de movimentos helicoidais do plasma. Enquanto $\boldsymbol{\gamma}$ é o responsável pela advecção do campo magnético (Ossendrijver et al., 2002). Já $\boldsymbol{\beta}$ caracteriza a difusividade magnética turbulenta dos sistema, enquanto $\boldsymbol{\delta}$ está associado ao efeito Rädler (Rädler, 1969), que poderia constituir uma outra fonte de campo magnético. Por completeza, temos também o coeficiente de ordem superior $\boldsymbol{\kappa}$ que, embora exista do ponto de vista matemático, ainda não possui uma interpretação física (Schrinner et al., 2007).

Para que possamos calcular os coeficientes de transporte turbulento de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, utilizamos a Eq. 2.20 em sua forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}'_T}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}}_T + \overline{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{b}'_T + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'_T - \boldsymbol{\mathcal{E}}_T \right) + \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}'_T, \tag{2.33}$$

onde, para dados valores de $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\boldsymbol{u}'$, utilizamos os campos teste, $\overline{\boldsymbol{B}}_T$, para resolvermos a equação e encontrarmos $\boldsymbol{b}'_T$. Com isso, podemos encontrar os coeficientes de transporte turbulento utilizando as Eqs. 2.19 e 2.32.

O ponto crucial do Método de Campos Teste é a independência entre os coeficientes de transporte e os parâmetros dos campos de teste (i.e.,intensidade e geometria). Desse modo, para os mesmos campos de velocidade $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\boldsymbol{u}'$, os coeficientes turbulentos devem ser os mesmos independentemente dos campos teste utilizados. Assim, como está explícito no Apêndice D, os coeficientes são caracterizados por um sistema de 27 equações, que podem ser resolvidas através de 9 campos teste com três componentes cada, contanto que estes sejam independentes entre si. Um bom exemplo, inclusive o utilizado neste trabalho, desse conjunto de campos teste está caracterizado na Tabela 1.

$\overline{\boldsymbol{B}}_T$/ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}_{Tr}$	1	0	0	r	0	0	θ	0	0
$\overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}_{T\theta}$	0	1	0	0	r	0	0	θ	0
$\overline{\boldsymbol{B}}^{(i)}_{T\phi}$	0	0	-1	0	0	-r	0	0	$-\theta$

Tabela 1 – Apresentação dos campos de teste utilizados neste trabalho. Cada campo i é representado por uma coluna, onde as linhas representam suas componentes, em coordenadas esféricas.

Quando pensamos em simulações globais, as condições necessárias para a aplicação do TFM podem ser encontradas inclusive em casos hidrodinâmicos, pois para resolvermos o sistema de 27 equações diferenciais precisamos apenas de $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\boldsymbol{u}'$ provenientes da simulação. Nesses casos temos o chamado TFM cinético, onde os coeficientes refletem apenas as propriedades de escoamento do fluido, sem dependências ou reações à existência de um campo magnético. Para o caso MHD, o que nós temos é o TFM *quase*-cinético, onde há um campo magnético que permeia a simulação. Os coeficientes passam a conter uma dependência do campo magnético do sistema devido à reação dinâmica que o campo magnético exerce sobre o campo de velocidades.

2.3 Instabilidade de Tayler

Um longo estudo foi realizado por Tayler (i.e., Tayler (1973), Markey & Tayler (1973), Tayler (1982), Pitts & Tayler (1985)) por quase duas décadas, no qual a estabilidade do campo magnético em zonas estáveis à convecção foi explorada de forma analítica. Em Tayler (1973), o objeto de estudo foi um campo puramente toroidal, $\boldsymbol{B}_0 = (0, B_\phi(s,z), 0)$,

em um sistema cilíndrico, (s,ϕ,z), estável à convecção e sem rotação, no qual perturbações adiabáticas foram induzidas. A instabilidade acontece quando linhas de fluxo toroidal, e a matéria que as contém, realizam trocas adiabáticas através de deslocamentos locais como demonstrado na Fig. 8. Tayler (1973) caracterizou os critérios para estabilidade do campo descrito a partir de uma técnica chamada princípio da energia (Bernstein et al., 1958). O desenvolvimento destes critérios para a instabilidade de Tayler será descrito brevemente a seguir, mas pode ser visto em detalhes no Apêndice C.1.

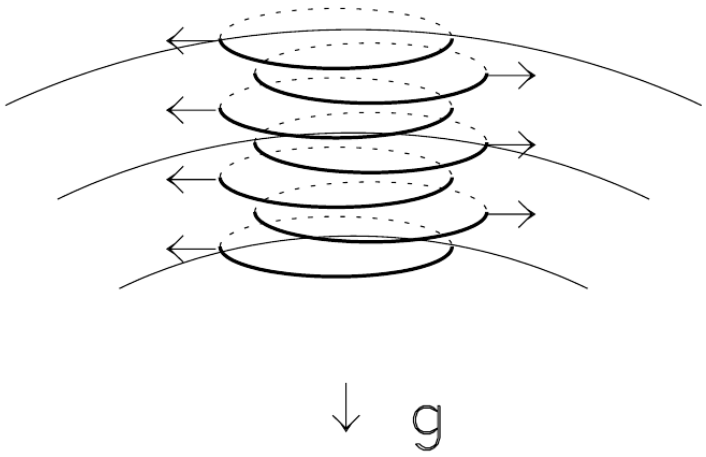


Figura 8 – Representação dos deslocamentos do campo toroidal promovidos pela instabilidade de Tayler. Fonte: Spruit (1999)

2.3.1 Critérios de estabilidade: princípio da energia

O princípio da energia (Bernstein et al., 1958) baseia-se na capacidade de escrever a equação de movimento para uma perturbação causada pelo deslocamento do fluido. A parte do princípio da energia que nos interessa é a do critério de estabilidade, segundo o qual aumento da energia potencial de uma dada perturbação implica na estabilidade do sistema. Por outro lado, a diminuição dessa mesma energia acarreta na possibilidade do crescimento da energia magnética de forma instável. Assim, considerando perturbações harmônicas, somos capazes de identificar quais modos serão estáveis e quais serão instáveis.

Em Tayler (1973), as condições encontradas para que o sistema seja estável são,

$$\mathcal{A} > 0, \quad \mathcal{C} > 0, \quad 4\mathcal{A}\mathcal{C} > \mathcal{B}^2. \tag{2.34}$$

Onde,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \equiv & -\rho_0 g_s \left(\frac{\rho_0 g_s}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial s}\right) \\ & + m^2 \frac{B_\phi^2}{4\pi s^2} - \frac{B_\phi}{2\pi s^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(sB_\phi\right)\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \equiv & -\rho_0 g_s \left(\frac{\rho_0 g_z}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) \\ & -\rho_0 g_z \left(\frac{\rho_0 g_s}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial s}\right) - \frac{B_\phi}{2\pi s}\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\mathcal{C} \equiv -\rho_0 g_z \left(\frac{\rho_0 g_z}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) + m^2 \frac{B_\phi^2}{4\pi s^2}. \tag{2.37}$$

Nesse caso, ρ_0 é a densidade média, g_s e g_z são as componentes radial e axial da gravidade, B_ϕ a componente azimutal do campo magnético e m é o numero de onda azimutal. Assim, se conseguirmos provar que ao menos uma das condições na Eq. (2.34) não é verdadeira, garantiremos a existência de uma instabilidade. Testaremos então a condição onde $A > 0$ para $m > 0$, que pode ser escrita a partir da Eq. (2.35) como

$$g_s \frac{\partial \rho_0}{\partial s} - \frac{\rho_0^2 g_s^2}{\gamma P_0} + \frac{m^2 B_\phi^2}{4\pi s^2} - \frac{B_\phi}{2\pi s^2}\frac{\partial B_\phi}{\partial s} > 0, \tag{2.38}$$

na região onde $s \to 0$. Podemos assim considerar que

$$\begin{array}{ll} g_s & \propto s \\ \partial\rho/\partial s & \propto s \end{array}, \tag{2.39}$$

e expandir

$$B_\phi = B_1 \frac{s}{s_0} + B_2 (\frac{s}{s_0})^2 + ..., \tag{2.40}$$

com s_0, B_1 e B_2 constantes. Ao descartarmos termos de ordens superiores e substituirmos essas aproximações na Eq. (2.38) vemos que

$$\frac{B_1^2}{4\pi s_0^2}(m^2 - 4) > 0. \tag{2.41}$$

Pela Eq. (2.41) fica evidente que, para os modos longitudinais $m = 1, 2$, as condições necessárias para a estabilidade do sistema não são mantidas próximas ao eixo. Tayler (1973) encontra a equação análoga à Eq. (2.38) para o modo $m = 0$ na forma

$$g_s \frac{\partial \rho}{\partial s} - \frac{(\rho g_s - 2B_\phi^2/s)^2}{B_\phi^2 + \gamma P_0} - \frac{2B_\phi}{s}\frac{\partial B_\phi}{\partial s} + \frac{2B_\phi^2}{s^2} > 0 \ \ (m = 0). \tag{2.42}$$

Ao considerarmos as aproximações para regiões próximas ao eixo (Eqs. 2.39 e 2.40) e substituirmos na Eq. (2.42) não é possível observar analiticamente uma instabilidade. A Fig. 9 demonstra a estrutura física de superfícies sujeitas aos modos longitudinais m, onde as linhas de campo são representadas pelas setas. Na figura, podemos observar que os modos instáveis apresentam uma maior densidade de linhas de campo devido ao modo m dominante. Com o aumento da densidade de linhas, o que ocorre é um aumento na pressão magnética na região, deslocando assim o plasma para regiões de menor densidade.

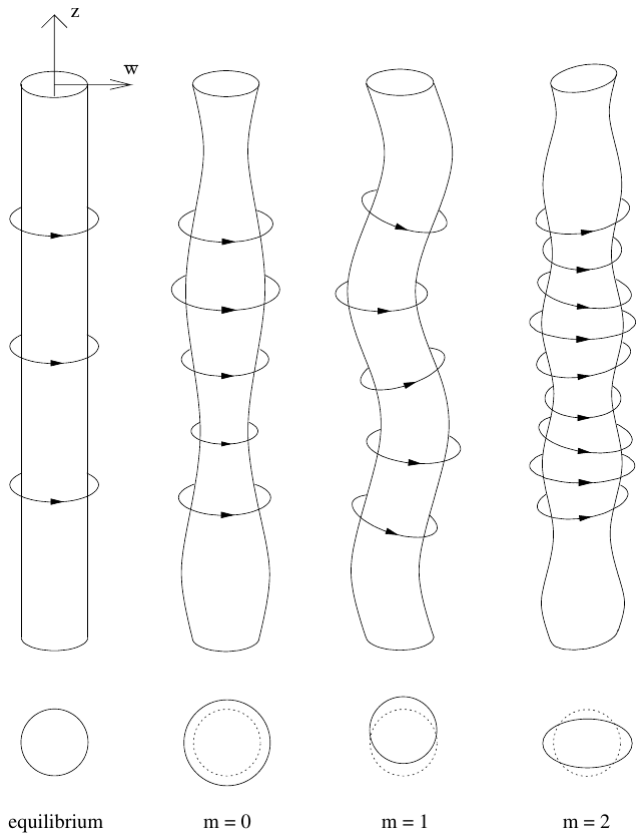


Figura 9 – Representação física do campo em equilíbrio e os modos $m = 0, 1, 2$. As linhas de campos são representadas pelas setas. Na parte de baixo vemos a posição de equilíbrio da superfície e em linha contínua seu deslocamento pela instabilidade. Fonte:(Braithwaite, 2006b)

Podemos então concluir, assim como Tayler (1973), que um campo puramente toroidal será sempre instável devido aos modos $m = 1$, caso haja formação de correntes próximas ao eixo da estrela. O autor indica também a possibilidade da estabilização dos modos instáveis pela influência de rotação ou a presença de componentes poloidais de campo magnético.

Trabalhos subsequentes a Tayler (1973) buscaram encontrar as condições de estabilidade em diferentes configurações geométricas e físicas. Em Goossens et al. (1981), o problema é revisitado, utilizando-se dessa vez coordenadas esféricas e a aproximação WKB[3]. Nesse caso, para um campo resultante da torção de linhas poloidais, $B_\phi \sim sin\theta cos\theta$, o modo $m = 0$ seria sempre estável. No entanto o modo $m = 1$ desse campo toroidal apresentaria instabilidades próximas aos polos.

Em Pitts & Tayler (1985), os autores avaliaram a hipótese de que a rotação seria capaz de estabilizar o sistema, novamente em coordenadas cilíndricas, para uma zona estável à convecção na qual existe um campo magnético puramente toroidal. De maneira explícita, a rotação é incorporada através de uma versão modificada da Eq. (C.14) na

[3] O método WKB, acrônimo para Wentzel–Kramers–Brillouin, é utilizado para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais parciais onde os coeficientes variam no espaço.

forma

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{u_0}}{\partial t} + \mathbf{u_0} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u_0} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u_0} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}) \right] = -\boldsymbol{\nabla} P_0 + \mathbf{J_0} \times \mathbf{B_0} + \rho_0 \mathbf{g}, \tag{2.43}$$

onde $\mathbf{u_0}$ é a velocidade relativa à rotação uniforme, $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular e $\mathbf{J_0}$ a densidade de corrente. A partir dessa equação, o desenvolvimento é o mesmo que para o caso sem rotação, utilizando o princípio da energia. Pitts & Tayler (1985) concluem que a rotação pode estabilizar parcialmente o sistema, embora valores elevados de $\boldsymbol{\Omega}$ fossem capazes apenas de reduzir a taxa de crescimento das instabilidades quando comparado ao caso sem rotação.

Quando o sistema apresenta rotação, a força de Coriolis se torna a principal responsável por resistir aos deslocamentos causados pela instabilidade do campo toroidal. Contudo, está não é a única força atuante sobre o plasma. Em casos onde temos a presença de componentes poloidais do campo, a força de Lorentz também exerce este papel estabilizador. Outras condições importantes são a estratificação e a difusividade térmica do meio. É esperado que em um sistema com maior influência da gravidade, as perturbações causadas pela instabilidade sejam contidas pela estratificação, através das forças de empuxo. Em contra partida, a difusividade térmica tende a reduzir as flutuações de temperatura, enfraquecendo as forças de empuxo e tornando o meio mais propenso às instabilidades (Zahn, 1974).

2.3.2 Critérios de estabilidade: estudo de auto-valores

Para um entendimento da instabilidade de Tayler sob condições físicas mais realistas, tornou-se necessária a utilização de uma abordagem numérica. Fazendo isso, é possível expandir a análise para outras geometrias, não apenas cilíndrica, bem como melhor correlacionar as relações das componentes físicas com a estabilização do sistema.

Para estudos lineares procede-se linearizando as equações MHD e estudando soluções da forma $e^{\sigma t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$, onde σ é a taxa de crescimento da instabilidade, k o número de onda espacial. Isto leva a um sistema equações diferenciais ordinárias cujos parâmetros desconhecidos são os auto-valores do sistema. A solução desse conjunto de equações permite encontrar a taxa de crescimento da instabilidade para diferentes números de onda espaciais.

Nesse contexto, estudos importantes foram realizados por Kitchatinov & Rüdiger (2008) e Bonanno & Urpin (2012), Bonanno & Urpin (2013), onde foi avaliado o comportamento instável de perturbações magnéticas em uma região esférica estável à convecção, com densidade constante, into é aproximação Boussinesq, sem (Bonanno; Urpin, 2012) e com (Kitchatinov; Rüdiger, 2008; Bonanno; Urpin, 2013) rotação.

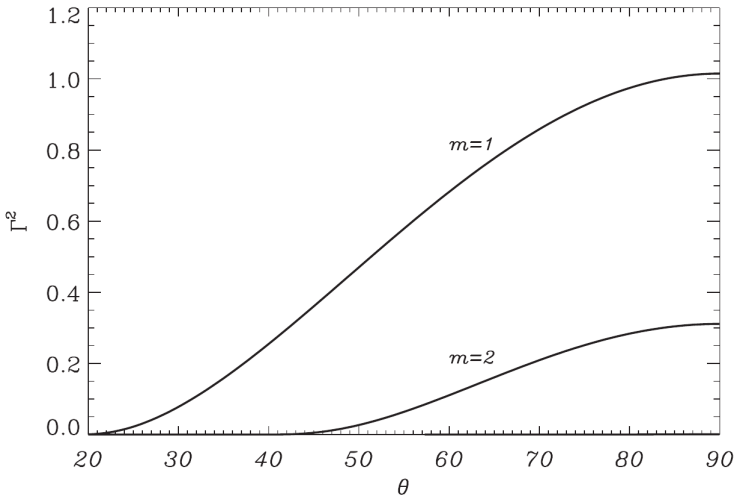


Figura 10 – Taxa de crescimento, Γ da instabilidade de Tayler em função do ângulo polar θ.
Fonte:(Bonanno; Urpin, 2012)

Para o caso sem rotação, Bonanno & Urpin (2012) mostraram que o crescimento da instabilidade se dá mais intensamente no equador, como vemos na Fig. 10, onde θ é o ângulo polar. Esse resultado é interessante pois é o oposto do encontrado em coordenadas cilíndricas, onde as zonas de maior instabilidade estão próximas ao eixo. Os autores também exploraram a relação entre a taxa de crescimento, Γ, da instabilidade e a estratificação. Neste caso, a estratificação é representada pelo parâmetro não dimensional

$$\delta^2 = \frac{\omega_{BV}^2}{\omega_{A0}^2}, \tag{2.44}$$

onde

$$\omega_{BV} = -g\zeta(\nabla_{ad}T - \nabla T)/T, \tag{2.45}$$

$$\omega_{A0} = B_0/R\sqrt{4\pi\rho} \tag{2.46}$$

são a frequência de Brunt-Väisälä e de Alfven, respectivamente, com ζ sendo o coeficiente de expansão térmica. Os autores observaram que $\Gamma \propto \delta^{-2}$. Contudo, mesmo para grandes valores de δ a taxa de crescimento é diferente de zero.

Para poder considerar o efeito da rotação na instabilidade de Tayler em coordenadas esféricas, Bonanno & Urpin (2013) definem o fator

$$\eta = \frac{2\Omega}{\omega_{A0}}, \tag{2.47}$$

que relaciona a frequência angular Ω, com a frequência de Alfven (Eq. 2.46). A partir de variações no perfil e intensidade do campo magnético e na rotação do sistema, é possível observar quais valores de η são capazes de suprimir o crescimento da instabilidade. Nesse caso, foi utilizada uma configuração de campo magnético na forma $B_\phi = B_0(x/x_i)^\kappa sin\theta$, que permite a variação da intensidade do campo inicial através dos parâmetros B_0 e do κ, determinante no perfil do campo com o raio, x.

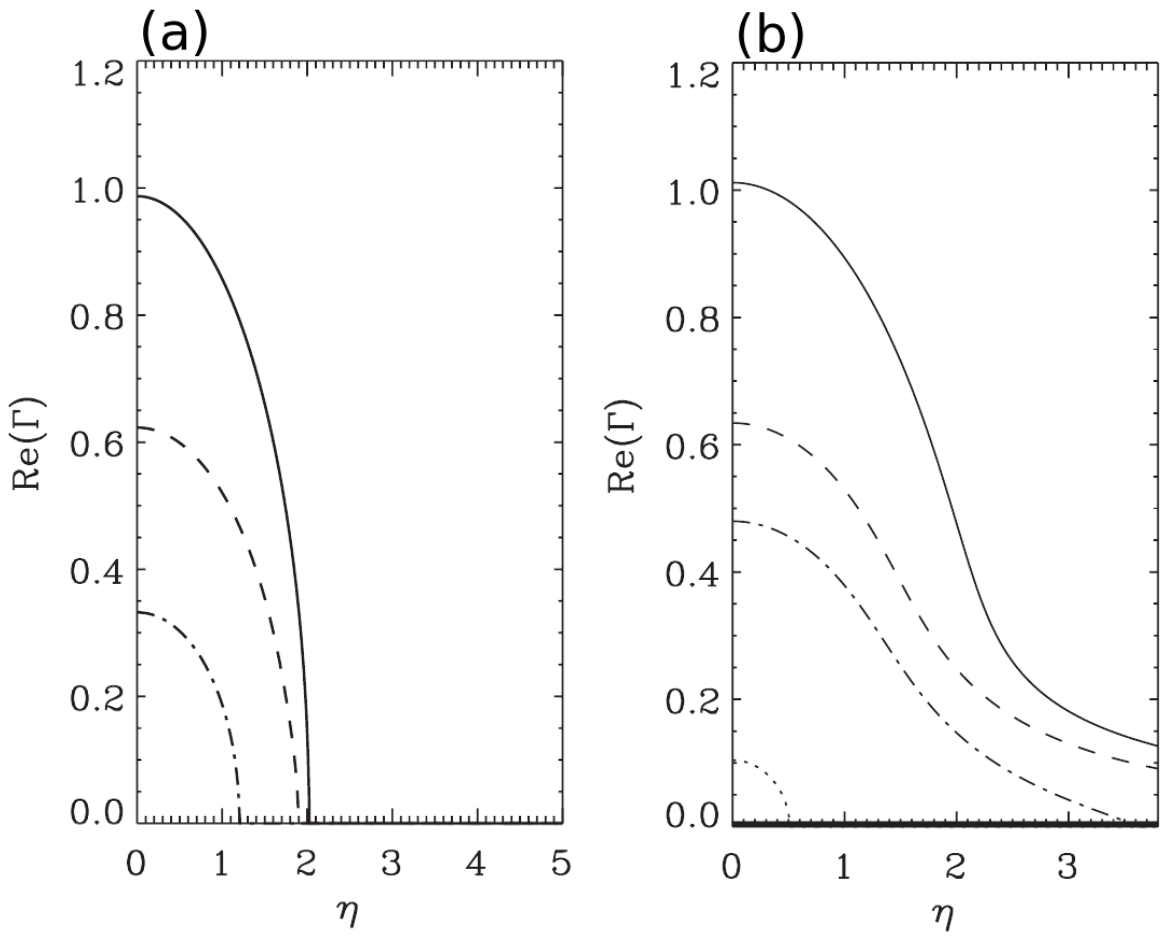


Figura 11 – Vemos a taxa de crescimento da instabilidade dos modos energéticos da instabilidade de Tayler em função do parâmetro η para (a)$\kappa = 1$ e (b)$\kappa = 2$. Em (a) temos as co-latitudes, 90° (linha sólida), 45° (tracejada) e 37° (ponto-traço), já em (b) temos 90° (linha sólida), 45° (tracejada), 37° (ponto-traço) e 26° (ponto). Fonte:(Bonanno; Urpin, 2013)

Como resultado, Bonanno & Urpin (2013) confirmaram a supressão da taxa de crescimento das instabilidades pela rotação, mas apenas nos casos onde $\eta > \eta_{cr}$, onde η_{cr} depende principalmente do perfil radial do campo magnético. Quando $\kappa = 1$, o campo cresce linearmente com o raio e valores de $\eta \geq 2$, como vemos na Fig. 11(a), são suficientes para estabilizar o sistema em todas as latitudes. No entanto, vemos na Fig. 11(b) que, para $\kappa \geq 2$, latitudes próximas ao polo não são estabilizadas, mesmo para valores mais altos de η. Por outro lado, através da definição do η_{cr}, Bonanno & Urpin (2013) demonstram que a instabilidade de Tayler é suprimida quando

$$\Omega > \frac{\eta_{cr}}{2} \frac{B_0}{R\sqrt{4\pi\rho}}, \tag{2.48}$$

ou,

$$B_0 < \frac{2}{\eta_{cr}} \Omega R \sqrt{4\pi\rho}. \tag{2.49}$$

Através da Eq. (2.49), pode-se também estimar que, para a zona radiativa solar, o valor do campo inicial para que a instabilidade de Tayler esteja presente é de $B_0 \gtrsim 1$T. Já para

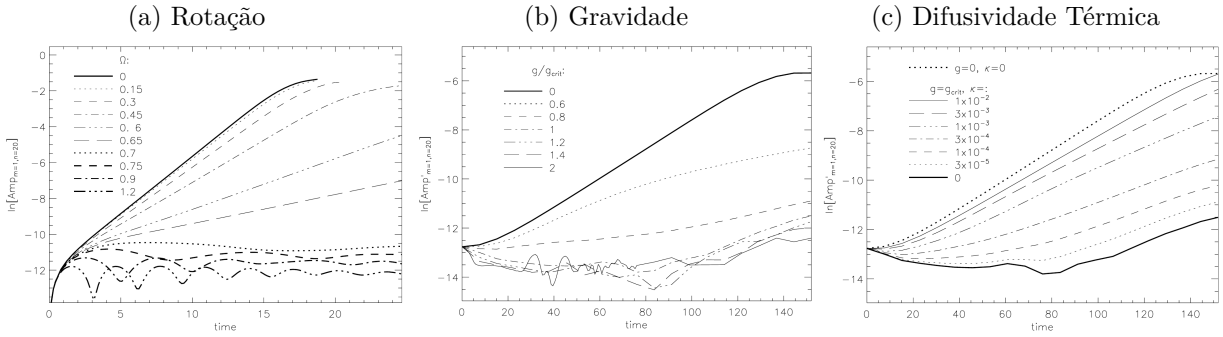


Figura 12 – Evolução energética dos modos longitudinais $m = 1$ para simulações de Braithwaite (2006b). Figuras diferentes representam cenários diferentes com variações de (a) rotação, (b) gravidade e (c) difusividade térmica. Fonte:(Braithwaite, 2006b).

Kitchatinov & Rüdiger (2008), a condição de estabilidade é mais simples que a Eq. (2.49), sendo necessário apenas que $\Omega > \omega_{A0}$, onde é assumida a rotação de corpo rígido para o modelo. Nesse caso, os autores estimam que um campo magnético puramente toroidal seria estável no Sol caso $B_0 \leq 0,06$ T. No entanto, eles acreditam que esse valor deve ser mais alto, considerando perfis de rotação mais próximos da realidade.

2.3.3 Critérios de estabilidade: estudos numéricos em 3D

O desenvolvimento da instabilidade de Tayler também tem sido estudado através de simulações numéricas em três dimensões. Um estudo pioneiro foi realizado por Braithwaite (2006b). Nele, o autor utiliza simulações cartesianas consistentes em uma caixa localizada na região polar de uma estrela para estudar a influência de alguns parâmetros físicos como rotação, gravidade e difusividade térmica na evolução dos modos instáveis. Na Fig. 12 é possível observar a evolução temporal da energia do modo longitudinal mais instável, $m = 1$, para diferentes valores desses parâmetros.

Na Fig. 12a observamos uma série de diferentes valores de frequência de rotação, Ω, sendo empregados a uma simulação sem estratificação de densidade. Nesse caso, observamos que existe um valor de rotação limite, $\Omega \gtrsim 0.7$, para o qual o crescimento do modo longitudinal $m = 1$ é suprimido. Quanto à gravidade, Braithwaite (2006b) encontra analiticamente um valor, g_{crit}, para o qual a instabilidade não deve mais crescer. A Fig. 12b mostra que o incremento de g torna o sistema estável quando $g = g_{crit}$, sem crescimento significativo do modo $m = 1$. O estudo também correlaciona o aumento da instabilidade, ou a facilidade em seu crescimento, com a presença da difusividade térmica. Isso pode ser visto claramente na Fig. 12c onde a instabilidade cresce mais rapidamente, quanto maior o valor de difusividade térmica, κ, para o caso estável onde $g = g_{crit}$.

Para entender melhor o papel das frequências de Brunt-Väisälä e de Alfven no desenvolvimento da instabilidade de Tayler Guerrero et al. (2019) utilizaram o código

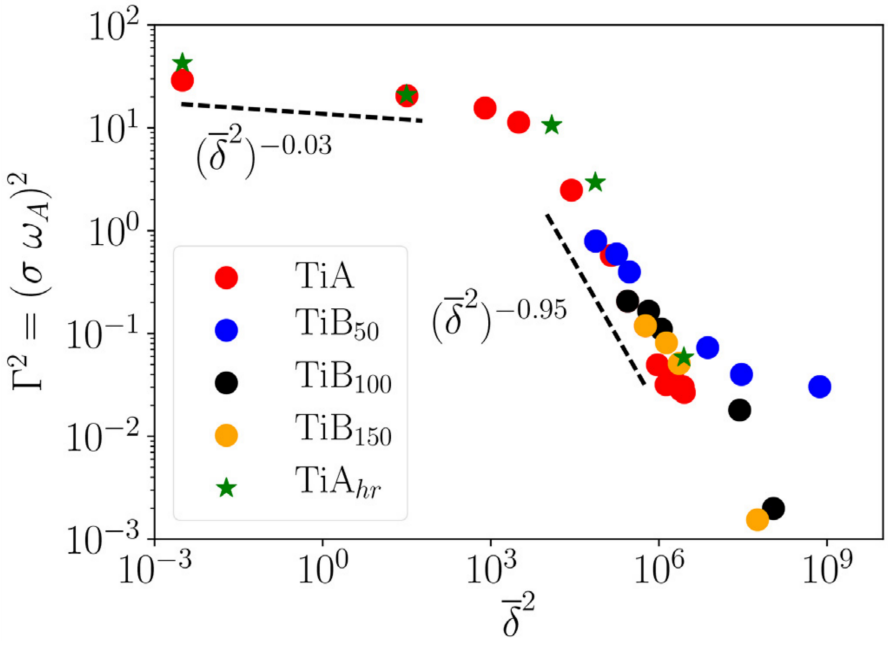


Figura 13 – Taxa de crescimento ao quadrado para o modo $m = 1$ em função do parâmetro δ^2 para as simulações presentes em Guerrero et al. (2019). É possível observar a presença de dois regimes distintos que ocorrem com o incremento de δ^2. Fonte:(Guerrero et al., 2019)

EULAG-MHD para realizar simulações globais sem rotação e na aproximação anelástica. Através de mudanças nos valores da gravidade inicial, g_0, e da amplitude inicial do campo magnético, B_0 eles variam essas frequências e, por consequência, o parâmetro adimensional δ (Eq. 2.44). Suas simulações utilizam uma casca esférica estratificada, na qual existe um campo magnético puramente toroidal e antissimétrico em relação ao equador dado por

$$B_{\phi 0}(r, \theta, \phi) = B_0 f(r) \sin\theta \cos\theta \hat{e}_\varphi, \tag{2.50}$$

com

$$f(r) = \exp(-(r - r_c)^2/d^2), \tag{2.51}$$

onde r_c é o raio de maior intensidade do campo inicial e d é o desvio padrão dessa gaussiana.

Em suas simulações, Guerrero et al. (2019) confirmaram que o modo mais instável é o modo longitudinal $m = 1$, como o número de modos radiais aumentando conforme g_0 aumenta. No entanto, ao analisarem se o aumento da estratificação é capaz de suprimir o crescimento da instabilidade, eles acabaram por observar dois regimes distintos, como mostrado na Fig. 13. Para valores de $\delta \lesssim 50$, o quadrado da taxa de crescimento da instabilidade, Γ, diminui com $\Gamma^2 \propto (\delta^2)^{-0.03}$, enquanto que para valores maiores de δ, vemos que $\Gamma^2 \propto (\delta^2)^{-0.95}$. Essa mudança no regime implica em uma desaceleração no crescimento da instabilidade, embora não tenha sido possível suprimi-la.

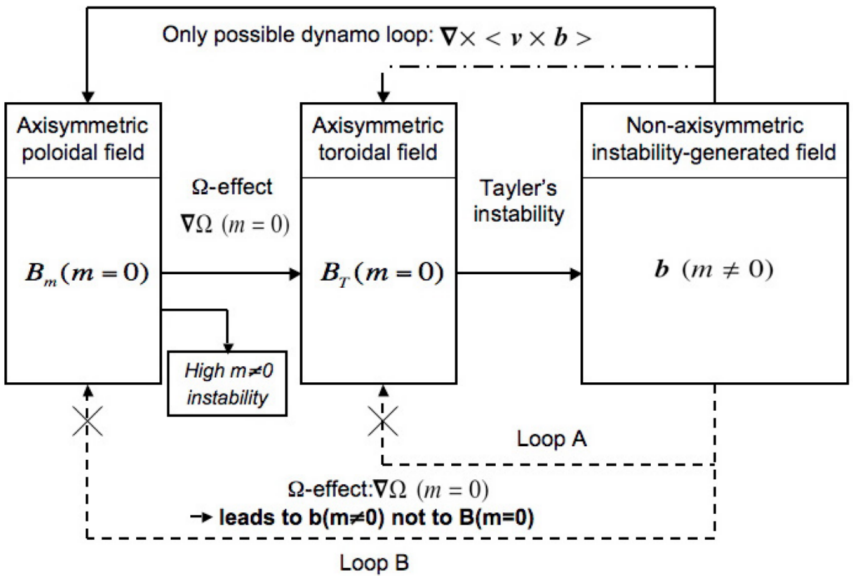


Figura 14 – Representação de possíveis formas de se completar o ciclo do dínamo em zonas radiativas de acordo com Spruit (2002) (*loop* A) e Braithwaite (2006a) (*loop* B). O *loop* superior é sugerido por Zahn et al. (2007), com um mecanismo diferente do presente no *loop* B. Fonte:(Zahn et al., 2007)

2.4 Dínamo de Tayler-Spruit

Após os estudos de Pitts e Tayler (Tayler, 1973; Pitts; Tayler, 1985), Spruit (2002) sugeriu, através de uma abordagem analítica, que a instabilidade descrita por eles pode ser responsável pela manutenção de um dínamo em zonas radiativas, isto é estáveis à convecção. Esse dínamo funcionaria seguindo a sequência esquematizada na Fig. 14. A partir da torção, devido a rotação diferencial, efeito Ω, de um campo inicialmente poloidal, B_m (parte esquerda da figura), temos a geração de um campo toroidal B_T (centro da figura). Esse campo sofrerá a instabilidade de Tayler, gerando assim componentes não axi-simétricas do campo magnético. Seguindo o *loop* A, Spruit (2002) sugere que essas componentes não axi-simétricas serão mais uma vez rearranjadas pela rotação diferencial, renovando o campo toroidal e mantendo o dínamo ativo.

Em Braithwaite (2006a), os autores encontram, como resultado de uma simulação numérica direta, o equivalente ao *loop* B na Fig. 14, utilizando a rotação diferencial para amplificar o campo toroidal, como sugerido por Spruit (2002). A amplificação do campo poloidal, pela IT, ocorre até que as componentes poloidal e toroidal do campo magnético encontrem um estado de saturação estacionário. Quando isso ocorre, o campo toroidal decai pela instabilidade de Tayler na mesma proporção em que é criado pela rotação diferencial.

Em Zahn et al. (2007), os dínamos propostos por Spruit (2002) & Braithwaite (2006a) são reavaliados. Após apontar negligência aos efeitos de curvatura, influência do campo poloidal e do modelo de rotação diferencial utilizado, os autores concluem

que o modelo analítico (Spruit, 2002) não é aplicável em estruturas mais realistas. Suas simulações também não foram capazes de reproduzir o dínamo encontrado por Braithwaite (2006a). Zahn et al. (2007) apontam que o campo poloidal médio não foi reconstruído e que a presença do efeito α foi insignificante. Logo, eles indicam que o efeito restaurador não pode vir exclusivamente da instabilidade de Tayler, e é necessária a existência de outro mecanismo associado ao efeito α.

Trabalhos realizados por Fuller et al. (2019) e Barrère et al. (2022) apresentam, no contexto de estrelas de nêutrons e magnetares a utilização do dínamo de Tayler-Spruit de forma efetiva. O mesmo é feito por Petitdemange et al. (2024) para modelos com estrutura estelar mais próxima àquela da zona radiativa solar. No entanto, mesmo com a amplificação do campo magnético e a obediência a algumas leis de escalamento, ainda não foi possível entender completamente como esse dínamo opera.

3 Simulações globais da instabilidade de Tayler: O papel da rotação, e a dinâmica do campo magnético em sua evolução

Neste capítulo, descreveremos a parte numérica do nosso trabalho. Primeiramente, descreveremos as características do código EULAG-MHD e do modelo utilizado para realizarmos o estudo sobre a instabilidade de Tayler. Em seguida trazemos os resultados obtidos em nossas simulações bem como suas respectivas análises.

3.1 Código EULAG-MHD

O EULAG (PRUSA et al., 2008) é um código utilizado para a resolução de equações que contenham fluidos e fluxos de matéria, originalmente desenvolvido para resolver sistemas com circulação atmosférica através das equações da hidrodinâmica, utilizando a aproximação anelástica (ver Apêndice A.4). Nessa aproximação filtram-se as ondas sonoras que impõem um limite máximo ao passo temporal que torna as simulações computacionalmente mais exigentes. Ainda assim, a capacidade de resolução do EULAG já provou-se ser bastante ampla, sendo utilizado na solução de problemas com escoamentos microscópicos (Smolarkiewicz; Larrabee Winter, 2010) até de clima planetário (Smolarkiewicz et al., 2001). A sua extensão, o EULAG-MHD[1] (Smolarkiewicz; Charbonneau, 2013), incluiu no código a possibilidade de resolver sistemas magneto-hidrodinâmicos através do esquema ILES e tem sido utilizado com sucesso desde então (Guerrero et al., 2016; Strugarek et al., 2017; Guerrero et al., 2019).

Dentro do EULAG, a advecção das grandezas físicas é realizada através do *Multi-dimensional positive definite advection transport algorithm*, ou MPDATA. Uma descrição completa tanto do método como de outras funcionalidades presentes no EULAG-MHD, pode ser vista no Apêndice B. É através do MPDATA que as contribuições de escalas menores do sistema são consideradas implicitamente, ou seja, de forma numérica. Desse modo, as contribuições dissipativas das escalas menores ficam a cargo do método e, portanto, acabam sendo afetadas diretamente pela resolução escolhida para a simulação. Nesse contexto, Guerrero et al. (2022) avaliaram como a resolução da grade afeta a convergência do código e concluíram que, com o aumento da resolução, os coeficientes dissipativos tendem a se reduzir. Esse resultado é utilizado em nosso trabalho para explorar os efeitos da dissipação na instabilidade de Tayler.

[1] Disponível em:<http://www.astro.umontreal.ca/~paulchar/grps/eulag-mhd.html>

3.1.1 Modelo numérico para o estudo da Instabilidade de Tayler

O principal objetivo deste trabalho é avaliar numericamente a influência de propriedades físicas, como rotação e intensidade do campo magnético, na estabilização de um campo toroidal presente em zona radiativa estável à convecção. Já vimos anteriormente (Sec. 2.3) que essa configuração de campo torna-se instável quando perturbada. Para realizarmos esse estudo, então, utilizamos o código EULAG-MHD para resolver as equações MHD para um modelo com as características descritas. Em nosso modelo, utilizamos a abordagem anelástica, (Ogura; Phillips, 1962) (ver Apêndice A.4), que nos permite uma maior amplitude do passo temporal, levando a uma melhor performance computacional, em troca de desconsiderar a contribuição de ondas sonoras no sistema. Essa aproximação é válida no interior de estrelas onde a velocidade dos movimentos é muito menor que a velocidade do som.

As equações MHD, na aproximação anelástica adotada, possuem a seguinte forma

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_{ad} \boldsymbol{u}) = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p'}{\rho_{ad}}\right) + \boldsymbol{g}\frac{\Theta'}{\Theta_{ad}} + \frac{1}{\mu_0 \rho_{ad}} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{B}, \tag{3.2}$$

$$\frac{D\Theta'}{Dt} = -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Theta_{amb} - \frac{\Theta'}{\tau}, \tag{3.3}$$

$$\frac{D\boldsymbol{B}}{Dt} = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\,. \tag{3.4}$$

Elas representam respectivamente a conservação de massa, conservação de momento, conservação de energia e a equação de indução. A demonstração da obtenção dessas equações a partir das equações gerais da hidrodinâmica é apresentada no Apêndice A. Quando comparamos a equação de momento da demonstração (Eq. A.48) com a Eq. 3.2, vemos que foi adicionada a força de Lorentz (Eq. C.49). Aqui, temos que $D/Dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ é a derivada material. $\boldsymbol{u}$ é o campo de velocidade no referencial com rotação dada por $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0(cos\theta, -sin\theta, 0)$. O termo Θ representa a temperatura potencial, relacionada com a entropia do sistema através da equação $s = c_p ln\Theta + cte$. Como apresentado no Apêndice A.4, a aproximação anelástica considera um estado de referência, denotado pelo subíndice ad. Os termos ρ_{ad} e Θ_{ad} são, respectivamente, a densidade e a temperatura potencial nesse estado o qual consideramos adiabático. Podemos supor que existe uma solução estacionária desse estado que, porém, permite perturbações. Chamamos essa solução de estado ambiente, descrita com o subíndice amb. As perturbações ao redor do estado ambiente são denotadas pelo $\prime$. Assim, p' corresponde à perturbação da pressão. Nesse termo, estão incluídas tanto a pressão do gás quanto a magnética, i.e., $p' = p'_g + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}$,

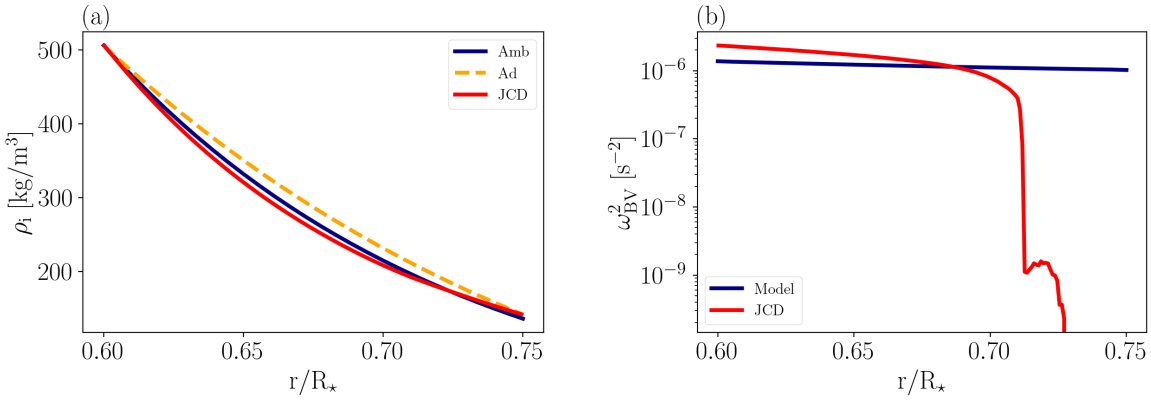


Figura 15 – Perfis da estrutura interna da nossa simulação. Painel (a) mostra os perfis de densidade ambiente (azul), adiabático (linha tracejada laranja) e do modelo padrão (Christiansen et al., 2013, JCD) (vermelho). No painel (b) temos a representação da Frequência de Brunt-Väisälä (Eq. 3.12) do nosso modelo (azul) com o modelo padrão (JCD, vermelho) para tacoclina.

com $\boldsymbol{B}$ sendo o campo magnético e μ_0 a permeabilidade magnética no vácuo. O termo Θ' representa a perturbação na temperatura potencial. O último termo da Eq. 3.3 representa um relaxamento das perturbações Θ' em uma escala temporal τ. Pela sua formulação matemática, esse termo é chamado de resfriamento Newtoniano. Por fim, $\boldsymbol{g}$ é a aceleração gravitacional, ajustada a partir do modelo padrão solar (Christiansen et al., 2013, JCD) através da frequência de Brunt-Väisälä.

As Eqs. 3.1-3.4 são resolvidas para um sistema que consiste de uma casca esférica com $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, e que se estende de $r = 0,6R_\star$ até $r = 0,75R_\star$ onde $R_\star = 6,96 \times 10^8$ m é o raio da estrela. A maioria das simulações utiliza uma resolução de grade de dimensões de $126 \times 64 \times 28$ em longitude (ϕ), latitude (θ) e raio (r), respectivamente. Chamaremos as simulações realizadas com essa resolução de conjunto A. Para avaliarmos os efeitos da resolução nos resultados, realizamos simulações também com resolução dobrada em todas as direções ($252 \times 128 \times 56$), e dobrada apenas na direção radial ($126 \times 64 \times 56$), correspondendo aos conjuntos de simulações B e C, respectivamente. As condições de contorno são definidas como: superfícies impermeáveis e sem estresse nas partes superior e inferior para o campo de velocidades; o campo magnético é vertical na superfície superior e um condutor perfeito na inferior; Θ' assume fluxo zero de energia tanto na parte superior quanto inferior do domínio.

Os estados ambiente e adiabáticos são calculados considerando o equilíbrio hidrostático de um gás politrópico em um sistema sem rotação e sem campo magnético. Eles são construídos a partir da solução numérica das seguintes equações para temperatura, T, e densidade, ρ,

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} = -\frac{g}{R_g\,(m_i + 1)}; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial r} = -\frac{\rho_i}{T_i}\left(\frac{g}{R_g} + \frac{\partial T_i}{\partial r}\right). \tag{3.6}$$

O subíndice i pode assumir os valores "ad"(adiabático) ou "amb"(ambiente) e $R_g = 13732$ é o valor da constante dos gases para um gás de hidrogênio monoatômico. Densidade, temperatura e pressão relacionam-se através da equação de estado de um gás ideal: $p_i = R_g \rho_i T_i$. Os valores na borda inferior do modelo, r_b, utilizados para resolver as Eqs. 3.5 e 3.6 são $T_b = 3,12 \times 10^6$ K and $\rho_b = 506\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Nas nossas simulações, o estado referência é adiabático, portanto $m_{\mathrm{ad}} = 1,5$. O estado ambiente é definido a partir da frequência de Brunt-Väisälä , com valores similares àqueles da região inferior da tacoclina solar, logo, $m_{\mathrm{amb}} = 2,5$, tornando o estado ambiente estável à convecção. A razão entre as densidades na borda inferior e exterior, ρ_t, é de $\rho_b/\rho_t \approx 3,7$. Os perfis radiais para ρ_{amb} e ρ_{ad} estão representados na Fig. 15(a) através das linhas contínua azul e tracejada amarela, respectivamente. Enquanto o perfil radial da frequência de Brunt-Väisälä ,

$$\omega_{BV}^2 = \frac{g}{\Theta_{\mathrm{amb}}}\frac{\partial \Theta_{\mathrm{amb}}}{\partial r}, \tag{3.7}$$

está representado na Fig. 15(b). Para comparação, as linhas vermelhas em ambos os painéis mostram o perfil do modelo JCD para o Sol.

3.1.2 Campo inicial

Para avaliarmos a instabilidade de Tayler, definimos um campo magnético inicial com componente toroidal unicamente, $\boldsymbol{B_0} = (B_{\phi 0}, 0, 0)$. O perfil desse campo é semelhante ao proposto por Guerrero et al. (2019), diferindo apenas nos valores das constantes, assim

$$B_{\phi 0}(r, \theta, \phi) = B_0 f(r) \sin\theta \cos\theta \hat{e}_\varphi, \tag{3.8}$$

onde

$$f(r) = \exp(-(r - r_c)^2/d^2), \tag{3.9}$$

é o perfil radial do campo toroidal inicial, $r_c = 0,675 R_\star$, $d = 0,03 R_\star$, e $B_0 = 1,3$T é a amplitude máxima do campo. A Eq. 3.8 dá ao campo magnético inicial o perfil de uma distribuição Gaussiana ao longo do raio, onde o valor máximo se encontra em r_c, enquanto possui uma configuração latitudinal anti-simétrica com relação ao equador, como pode ser observado na Fig. 16. No painel esquerdo da Fig. 16, vemos a configuração inicial das linhas do campo, puramente toroidal. Já no painel da direita, temos uma superfície feita em $r = 0,65 R_\star$ mostrando $B_{\phi 0}$, enquanto o corte meridional mostra a intensidade desse campo para os raios maiores, com a região de campo mais intenso correspondendo a $r = r_c$.

A existência do campo magnético permite o desenvolvimento de ondas que se propagam através do mesmo. Essas ondas são chamadas de ondas de Alfven. Ao longo

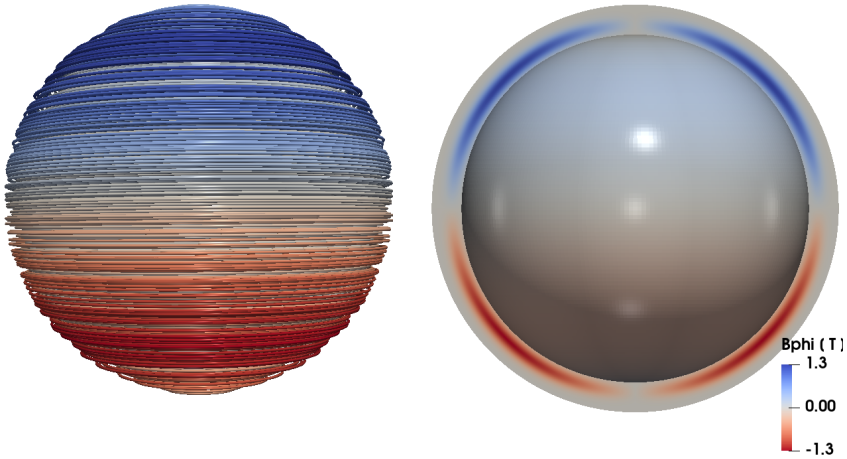


Figura 16 – Campo magnético inicial correspondente à Eq. (3.8). O painel da esquerda representa as linhas de campo magnético e o painel da direita mostra o campo em uma superfície esférica em $r = 0,65R_\star$ e em um corte meridional (r, θ). A cor vermelha (azul) representa uma circulação horária (anti-horária) do campo.

deste trabalho, utilizaremos a frequência dessas ondas como fator normalizante do tempo, logo a unidade temporal será representada em ciclos de Alfven. No Cap. 2, quando definimos o termo δ (Eq. 2.44), definimos também essa frequência de onda. Contudo, para modelos globais onde a densidade varia com o raio, é conveniente redefinir as frequências de Alfven (Eq. 2.46) e de Brunt-Väisälä (Eq. 3.7) bem como as razões η (Eq. 2.47) e δ (Eq. 2.44) como sendo

$$\delta^2 = \frac{\overline{\omega}_{BV}^2}{\overline{\omega}_A^2}, \tag{3.10}$$

e

$$\eta^2 = \frac{4\Omega_0^2}{\overline{\omega}_A^2}, \tag{3.11}$$

onde

$$\overline{\omega}_{BV}^2 = \left\langle \frac{g}{\Theta_{\rm amb}} \frac{\partial \Theta_{\rm amb}}{\partial r} \right\rangle_r, \tag{3.12}$$

e

$$\overline{\omega}_A^2 = \left\langle \frac{B_{\phi 0}^2}{\mu_0 \rho_{amb} \varpi_c^2} \right\rangle_{r,\theta}, \tag{3.13}$$

são valores médios das frequências Brunt-Väisälä e Alfven. Como vimos, ρ_{amb} é a densidade ambiente enquanto que $\langle ... \rangle$ representa uma média realizada nas dimensões de r e r, θ para as frequências Brunt-Väisälä e Alfven, respectivamente. Para a escala espacial utilizada no cálculo da frequência de Alfven, escolhemos o braço de alavanca em 45°, onde $\varpi_c = r_c \sin(\pi/4)$. A normalização da evolução temporal do sistema através desse valor médio da frequência Alfven ($t_A = 1/\overline{\omega}_A$) é especialmente relevante, pois associa a evolução do sistema tanto à intensidade inicial do campo magnético quanto com a sua distribuição

de densidade. Permitimos então a evolução desse campo magnético inicial seguindo a dinâmica dada pelas Eqs. 3.1- 3.4, com as condições iniciais e de contorno descritas acima. Os resultados das simulações variando os parâmetros Ω_0, $\boldsymbol{B}_0$ e τ, assim como a resolução da grade espacial são apresentados na seguinte seção. Esses resultados estão publicados em Monteiro et al. (2023).

3.2 Resultados

Nesta seção, descreveremos os resultados obtidos com nossas simulações cujos principais parâmetros estão demonstrados na Tabela 2. O acrônimo dado às simulações especifica a qual conjunto ela pertence (A, B ou C), seu período de rotação em dias terrestres, e a intensidade do campo inicial, da esquerda para a direita.

Idealmente, as simulações se iniciariam de um estado de equilíbrio magnético e hidrostático, onde as pressões magnética e do gás se balanceariam. Assim, permitindo que uma perturbação controlada fosse realizada, dando início à instabilidade de Tayler. No entanto, as configurações do nosso modelo tornam essa tarefa difícil, em especial nos casos com rotação onde a força de Coriolis também influencia no balanço. Dessa forma, o equilíbrio hidrostático inicial (Eqs. 3.5 e 3.6) é desbalanceado pelo campo magnético inicial. Com isso, no início de nossas simulações, um novo equilíbrio é atingido com o desenvolvimento de perfis radiais e latitudinais para Θ' e $\boldsymbol{u}$. Embora a maior parte da energia desses perfis encontre-se no modo $m = 0$, ela também surge em modos com $m > 0$ devido a ruídos numéricos (i.e. erros de arredondamento). Apesar da energia desses modos maiores serem compatíveis com a precisão de máquina, eles acabam sendo suficientes para dar início à instabilidade de Tayler.

3.2.1 Instabilidade sem rotação

Os primeiros resultados apresentados serão aqueles das simulações sem rotação. Como vimos no Cap. 2, esta configuração é instável e, portanto, o campo toroidal inicial decai devido ao crescimento dos modos instáveis. Ao fazermos $\boldsymbol{\Omega} = 0$ na Eq (3.2), temos o modelo sem rotação A_NRB10. Na Fig. 17 observamos a evolução do campo B_ϕ como função da latitude e do tempo expresso em termos dos ciclos de Alfven, no raio $r = 0,7R_\star$ e na longitude $\phi = 90°$. O decaimento de intensidade do campo magnético ocorre desde o início da simulação, no entanto torna-se visível apenas a partir do momento em que os modos instáveis atingem seus valores máximos. O padrão observado neste caso assemelha-se ao obtido por Guerrero et al. (2019). Sendo axissimétrico, esse efeito está presente em distintas combinações de raios e longitudes, apresentando pequenas mudanças no padrão dissipativo e na intensidade do campo. Embora o decaimento do campo B_ϕ na Fig. 17 seja condição para a instabilidade, ele não é suficiente para caracterizar a sua presença.

Grupo	Modelo	$\Omega_0 \cdot 10^{-6}$	$\varpi_A \cdot 10^{-8}$	$\varpi_{BV} \cdot 10^{-3}$	$\delta \cdot 10^4$	η	B_P/B_T	$\sigma \cdot 10^{-1}$ $[\omega_A^{-1}]$	$\lvert\Gamma\rvert \cdot 10^{-9}$
A1	A_NRB10	0	7,35	1,08	1,48	0	0,11	0,69	6,25
	A_R300B10	0,24	7,35	1,08	1,48	6,70	0,09	0,41	3,31
	A_R150B10	0,49	7,35	1,08	1,48	13,40	0,04	0,38	2,47
	A_R130B10	0,56	7,35	1,08	1,48	15,46	0,05	0,40	2,57
	A_R110B10	0,66	7,35	1,08	1,48	18,26	0,08	0,41	2,49
	A_R70B10	1,04	7,35	1,08	1,48	28,71	0,08	0,27	2,23
	A_R50B10	1,45	7,35	1,08	1,48	40,19	0,05	0,28	2,26
	A_R30B10	2,42	7,35	1,08	1,48	66,98	0,08	0,22	1,94
	A_R20B10	3,64	7,35	1,08	1,48	98,94	0,07	0,16	1,98
	A_R10B10	7,27	7,35	1,08	1,48	197,80	0,06	0,04	1,55
A2	A_NRB10τ05	0	7,35	1,08	1,48	0	3,29	3,28	7,19
	A_NRB10τ5	0	7,35	1,08	1,48	0	1,44	1,46	7,26
	A_NRB10τ50	0	7,35	1,08	1,48	0	0,74	0,71	6,94
A3	A_R10B80	7,27	58,81	1,08	0,18	24,73	0,03	0,30	9,88
	A_R10B40	7,27	29,4	1,08	0,37	49,45	0,06	0,47	5,95
	A_R10B20	7,27	14,7	1,08	0,74	98,90	0,06	0,113	3,56
	A_R10B5	7,27	3,68	1,08	2,95	395,76	0,06	0,39	0,56
B	B_NRB10	0	7,42	1,08	1,46	0	0,09	0,36	3,16
	B_R300B10	0,24	7,42	1,08	1,46	6,70	0,17	0,40	1,93
	B_R10B10	7,27	7,42	1,08	1,46	197,80	0,05	0,08	0,87
C	C_R300B10	0,24	7,35	1,08	1,48	6,70	0,07	0,46	2,83
	C_R10B10	7,27	7,35	1,08	1,48	197,80	0,03	0,06	1,56

Tabela 2 – Resultados e parâmetros das simulações apresentadas neste trabalho. A taxa de rotação é dada por Ω_0, com ϖ_{BV}, δ e η definidos nas Eqs. 3.12, 3.10, 3.11, respectivamente. B_P/B_T mostra a razão entre as componentes poloidal e toroidal do campo magnético ao final da fase linear (ver texto). σ representa a taxa de crescimento do modo longitudinal magnético $m = 1$ nos ciclos de Alfven iniciais, enquanto $|\Gamma|$ representa a taxa de decaimento calculada para o modo longitudinal $m = 0$. Os grupos são divididos por resolução, intensidade do campo inicial e/ou tempo de relaxação. Enquanto isso, o acrônimo de cada simulação representa seu grupo, período de rotação em dias terrestres e intensidade do campo inicial.

3.2.1.1 Cálculo da energia em diferentes modos longitudinais

Como foi demonstrado na Sec. 2.3, é esperado que todos os modos energéticos se desenvolvam, embora seja do modo longitudinal $m = 1$ que se espere a maior taxa de crescimento. Utilizaremos assim o espectro de potências para avaliarmos a evolução temporal dos modos longitudinais tanto para a energia magnética quanto cinética, calculadas em um raio específico, r_c, e em três diferentes faixas de latitude. Com isso, buscamos entender se existe uma latitude preferencial para o desenvolvimento da instabilidade.

Assim, definimos a energia magnética e a energia cinética em função do modo longitudinal m e do tempo. Como ambas as definições são similares, demonstraremos apenas os cálculos da energia magnética que é dada por

$$\tilde{E}_B(m,t) = \frac{1}{2\mu_0}\tilde{B_\phi^R}(m,t)^2 + \tilde{B}_\theta(m,t)^2 + \tilde{B}_r(m,t)^2, \tag{3.14}$$

onde μ_0 é permeabilidade magnética no vácuo, $\tilde{B}_\theta$ e $\tilde{B}_r$ representam as componentes latitudinal e radial do campo magnético no espaço de Fourier. Já o termo $\tilde{B_\phi^R}$ deve ser

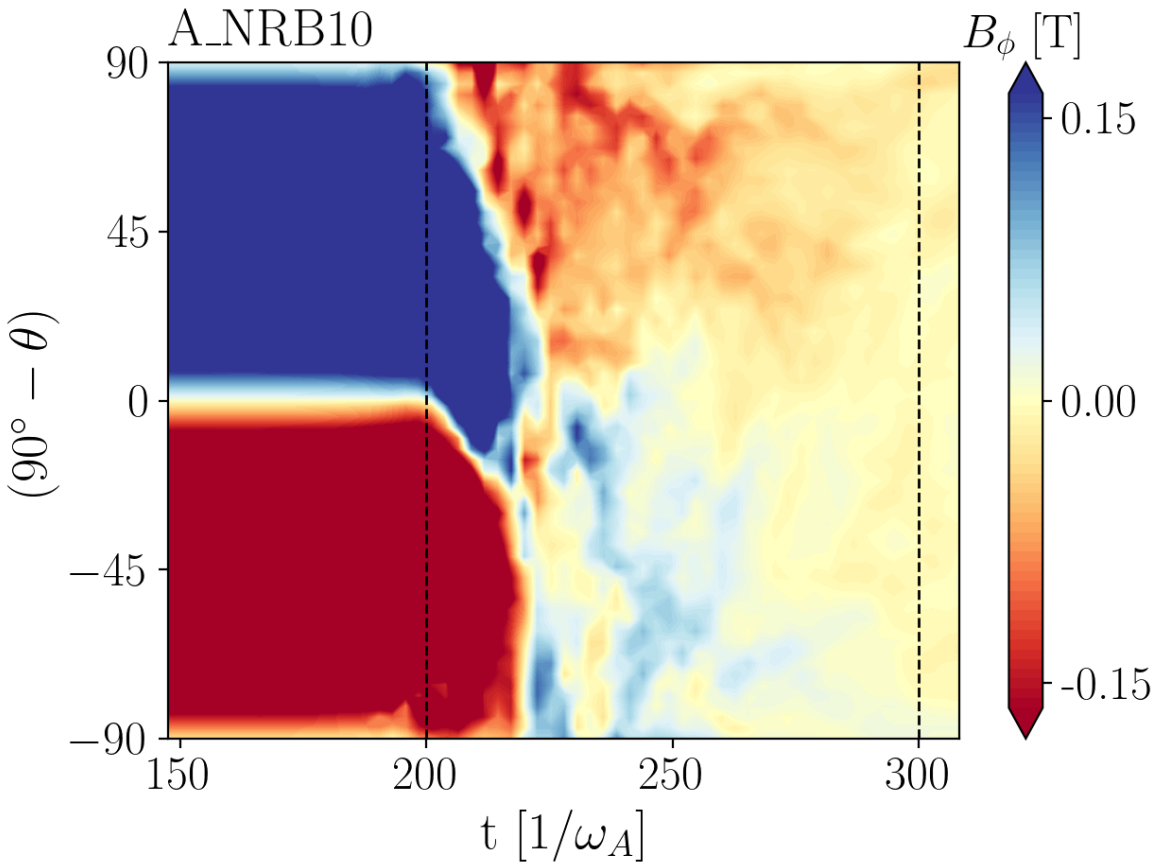


Figura 17 – Diagrama de tempo e latitude para a simulação sem rotação A_NRB10 $r = 0,7R_\star$ e $\phi = 90°$. As cores vermelha (azul) representam um campo toroidal no sentido horário (anti-horário). A escala de tempo está em termos de ciclos de Alfven.

calculado através da equação

$$\tilde{B}_\phi^R = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)}\int_0^{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} B_\phi^R \exp(-im\phi)d\theta d\phi. \tag{3.15}$$

Perceba que B_ϕ^R nada mais é do que o residual da componente toroidal do campo magnético obtido com a subtração

$$B_\phi^R(r_c, \theta, \phi, t) = B_{\phi 0}(r_c, \theta, \phi, t) - B_\phi(r_c, \theta, \phi, t). \tag{3.16}$$

Essa subtração é necessária apenas para a componente ϕ do campo magnético, uma vez que ela retem todo o campo magnético inicial (Eq. 3.8), enquanto as demais componentes são inicialmente nulas. Com isso, conseguimos calcular o crescimento do modo longitudinal $m = 0$ que, do contrário, estaria oculto pelo decaimento do campo inicial.

As faixas latitudinais consideradas na Eq. 3.15, $[\theta_1, \theta_2]$, representam o polo norte ($NP = [0, \pi/9]$), equador ($EQ = [\pi/3, 2\pi/3]$) e o polo sul ($SP = [8\pi/9, \pi]$). Essas latitudes são representativas de regiões onde a instabilidade de Tayler poderia ter diferentes comportamentos.

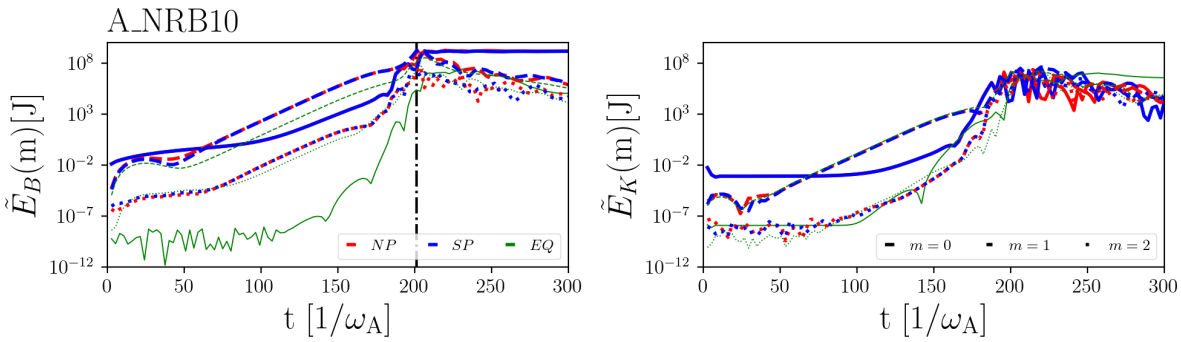


Figura 18 – Evolução temporal dos modos longitudinais da simulação sem rotação A_NRB10. Estão representados os modos $m = 0$ (Eq. 3.15, linha continua), $m = 1$ (linha tracejada) e $m = 2$ (linha pontilhada) para as energias magnética (painel da esquerda) e cinética (painel da direita). Cores diferentes correspondem às diferentes latitudes onde os modos foram calculados, com vermelho e azul representando os polos norte e sul, enquanto a linha fina verde representa o equador. A linha vertical preta traço-pontilhada indica o início da fase de saturação (ver texto).

Na Fig. 18, mostramos a evolução temporal das energias magnética (painel da esquerda) e cinética (painel da direita) da simulação A_NRB10. Para maior clareza da figura estão sendo representados apenas os modos $m = 0$ (linhas contínuas), $m = 1$ (linhas tracejadas) e $m = 2$ (linhas pontilhadas). A evolução dos primeiros modos longitudinais magnéticos é completamente instável, como podemos ver no painel da esquerda. No início da sua evolução, após uma curta fase transiente onde o fluido busca equilibrar as forças magnéticas, os modos longitudinais passam a se desenvolver. O crescimento dos modos magnéticos $m = 1$ e $m = 2$ é mais rápido do que o do modo $m = 0$, demonstrando serem mais instáveis, comportamento que é similar nos modos cinéticos. É interessante perceber que a instabilidade se desenvolve primeiro nos polos norte (vermelho) e sul (azul). Contudo, a taxa de crescimento da instabilidade não apresenta diferenças significativas quando comparada ao equador (verde) para os modos $m = 1$ e $m = 2$.

Durante a evolução desses modos, podemos identificar três fases distintas. A primeira delas é a que chamamos de fase linear, onde os modos instáveis crescem exponencialmente. A grande maioria dos trabalhos anteriores sobre a instabilidade de Tayler foram focados nessa fase, visando determinar qual é o modo mais instável. A segunda fase ocorre quando a energia do campo magnético inicial apresenta um rápido decaimento e a dos modos instáveis atinge seu valor máximo. Essa fase é chamada de fase de saturação. Por último temos a fase de decaimento difusivo. Durante essa fase o espectro de energia, que compara a energia com o número de onda, possui uma inclinação na forma $E \propto m^{-5/3}$, que entendemos como sendo um decaimento turbulento. Na Fig. 18, a fase linear chega até $\sim$ 200 ciclos de Alfven, onde se inicia a fase de saturação (marcada pela linha traço pontilhada preta vertical). Após a saturação, vemos que a energia dos modos começa a

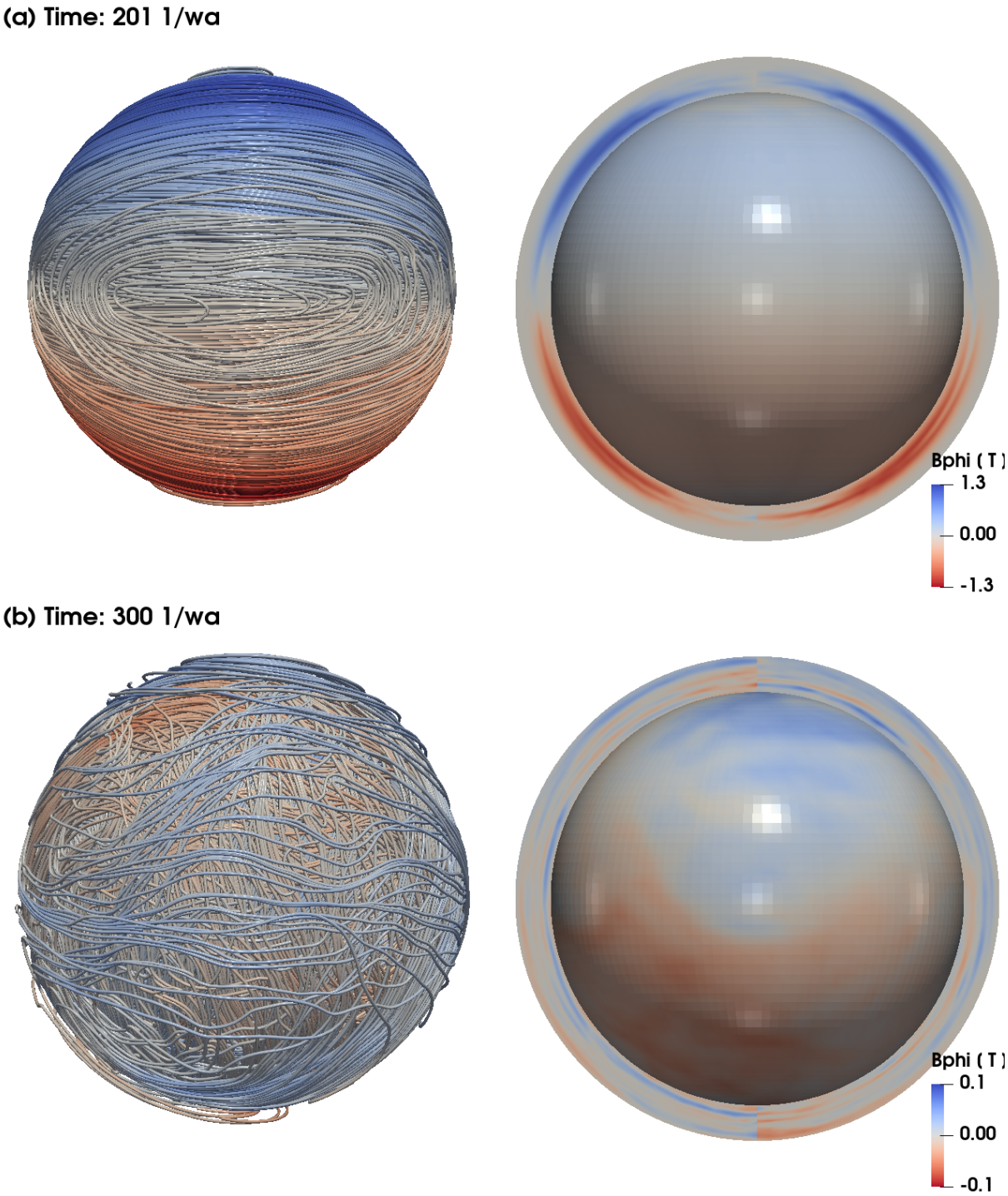


Figura 19 – Figura similar à Fig. 16 para a simulação A_NRB10 nos instantes de tempo (a) 201 e (b) 300 $[1/\omega_A]$. Esses tempos estão marcados por linhas tracejadas pretas na Fig. 17.

decair devido a efeitos dissipativos. Esses efeitos compreendem as dissipações implícitas do modelo numérico mais as dissipações turbulentas que surgem devido à presença de modos instáveis em diferentes escalas. Mais à frente discutiremos o papel da dissipação numérica na evolução do campo magnético.

Na Fig. 19 é apresentada a topologia do campo em dois instantes de sua evolução temporal, demarcados pelas linhas pretas tracejadas na Fig. 17. No painel (a) vemos a topologia do campo magnético durante a fase de saturação, em $t = 201$ $[1/\omega_A]$. A intensidade do campo quase não é reduzida, com exceção dos polos e equador, sua forma ainda conserva algumas características do campo inicial (Fig. 16), porém as linhas de campo exibem componentes não toroidais. É visível a inclinação das linhas de campo em relação ao eixo de rotação, uma abertura na região do equador e o consequente deslocamento do eixo magnético nos polos. Esses efeitos são característicos da instabilidade hidromagnética e possuem uma clara assinatura do modo $m = 1$. Em $t = 300$ $[1/\omega_A]$, Fig. 19(b), vemos que a intensidade de B_ϕ foi reduzida consideravelmente enquanto a sua topologia não apresenta nenhuma característica do campo inicial. Isso se dá devido ao campo ter entrado em um decaimento difusivo onde não há mais modos predominantes.

Como descrito por Tayler (1973) (ver Sec. 2.3), é esperado que o campo poloidal seja um fator estabilizante. De fato, observamos o desenvolvimento de componentes poloidais do campo em grande escala. Contudo, apenas o crescimento da componente poloidal não é suficiente para levar a uma topologia estável, resultando apenas em um campo cuja topologia muda rapidamente com o tempo. O desenvolvimento da componente poloidal do campo magnético é um fator importante de ser estudado uma vez que pode levar a uma configuração magnética estável influenciada, por exemplo, pela rotação. Esse campo é também necessário para a existência de um dínamo do tipo Tayler-Spruit em zonas radiativas (ver Sec. 2.4).

O seguinte passo é explorar os efeitos do parâmetro de relaxação, τ (Eq. 3.3), na evolução do campo magnético.

3.2.1.2 Relaxação Térmica

O estudo analítico realizado por Zahn (1974) demonstrou que a resistência do plasma a instabilidades dinâmicas está correlacionada com as escalas de tempo térmicas e/ou com a frequência de Brunt-Väisälä . No contexto da instabilidade de Tayler, esse tipo de relação já havia sido confirmado por Braithwaite (2006b) para mudanças na frequência de Brunt-Väisälä e na condutividade térmica, e por Guerrero et al. (2019) para alterações apenas na frequência de Brunt-Väisälä . A evolução de parcelas instáveis do fluido depende das propriedades térmicas do gás, representadas nas nossas equações pelo termo Θ'. Nessas equações, a escala de tempo térmica é obtida através do tempo de relaxação térmica do modelo, τ (Eq. 3.3). Assim, a utilização de valores menores para τ resulta diretamente em

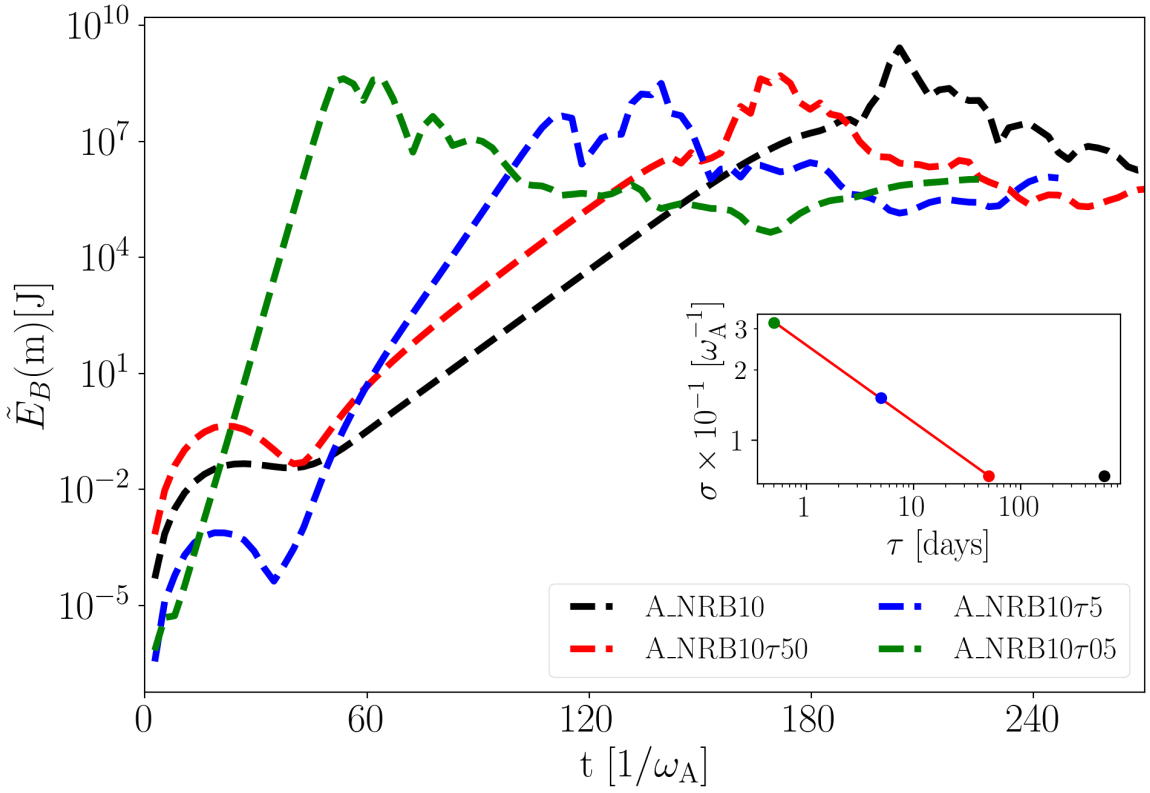


Figura 20 – Evolução temporal do modo longitudinal $m = 1$ no polo sul para as simulações sem rotação do conjunto A2. Cores diferentes correspondem a valores de τ de 600 dias (preta, simulação A_NRB10), 50 dias (vermelha), 5 dias (azul) e $0,5$ dias (verde). O gráfico inserido mostra a relação entre as taxas de crescimento dos modos e seus respectivos valores de τ com a mesma correspondência de cores.

perturbações de temperatura com durações mais curtas e menores amplitudes, e vice-versa. Desse modo, podemos explorar os efeitos térmicos sobre a instabilidade de Tayler ao alterarmos os valores de τ.

Esse estudo foi realizado através das simulações do conjunto A2 (ver Tabela 2), juntamente com a simulação A_NRB10. Juntas, elas possuem valores de τ que vão desde $0,5$ à 600 dias. A evolução temporal do campo magnético para essas simulações está mostrada na Fig.20. Podemos observar que há uma clara redução da taxa de crescimento, σ, com o aumento de τ. A linha de tendência vermelha no gráfico inserido na Fig.20 mostra que essa relação é de $\sigma \propto \tau^{-0,32}$. Desse modo, podemos concluir que o aumento de τ, assim como foi para o aumento da frequência de Brunt-Väisälä em Guerrero et al. (2019), apenas reduz a taxa de crescimento da instabilidade de Tayler e não a suprime totalmente.

Ainda no gráfico inserido, é possível observar que a taxa de crescimento não se altera para valores de τ suficientemente altos. Isso ocorre pois a amplitude de Θ' dependerá da menor escala temporal do modelo. Sendo assim, quando o tempo de relaxação é muito

grande, Θ' se torna independente de τ e passa a depender da frequência de Alfven (~ 150 dias para o valor de B_0 utilizado no conjunto A2).

3.2.2 Efeito estabilizante da rotação

No Cap. 2 discutimos as condições necessárias para que a rotação seja capaz de suprimir parcialmente o surgimento da instabilidade de Tayler. Como mostrado na Sec. 2.3, Bonanno & Urpin (2013) foram capazes de apontar valores de η, Eq. (2.47), para os quais as instabilidades devem ser suprimidas pela rotação. De maneira geral, diferentes autores demonstram que a estabilização do campo magnético passa a ocorrer quando Ω possui valores comparáveis com $\overline{\omega_{\rm A}}$ ($\eta \sim 1$) (Braithwaite, 2006b). Mesmo assim, para um meio difusivo, a estabilização total do campo só deve ser alcançada quando $\omega_{\rm A} \ll \Omega_0$ ($\eta \gg 1$). Caso contrário, a rotação deve apenas reduzir a taxa de crescimento da instabilidade.

Nesta seção, será explorada a possibilidade de encontrar um regime da parâmetros para os quais a instabilidade apresentada na Sec. 3.2.1 seja total ou parcialmente suprimida. Para tanto, utilizamos simulações que incluem o termo de Coriolis na Eq. 3.2. As simulações utilizadas foram divididas em conjuntos específicos e seus parâmetros estão representados na Tabela 2, onde os dois números que seguem a letra R representam o seu período de rotação e os dois números que seguem o B representam a intensidade do campo magnético inicial. No subconjunto de simulações A1 ω_A é mantido constante, com $B_0 = 1,3$T. Enquanto isso, Ω_0 varia entre $\Omega = 0,24 \cdot 10^{-6}$ Hz e $\Omega = 7,27 \cdot 10^{-6}$ Hz, correspondendo a períodos de rotação entre 300 e 10 dias e $6,7 \leq \eta \leq 197,8$. Já no conjunto A3 a rotação é mantida constante, $\Omega_0 = 7,27 \cdot 10^{-6}$ Hz (10 dias), e ω_A varia entre $3,68 \times 10^{-8}$ Hz $\leq \omega_{\rm A} \leq 58,81 \times 10^{-8}$ Hz. Para isso, variamos B_0 entre $0,65$ e $10,4$ T, e $24,7 \leq \eta \leq 395,7$. Essas simulações são então evoluídas por centenas de ciclos de Alfven, cobrindo as três fases de evolução do campo magnético descritas em § 3.2.1.1. Desse modo, dividimos esta seção na análise dessas fases.

3.2.2.1 Fase Linear

Explorar os efeitos de alterar Ω_0 e ω_A na fase linear da instabilidade de Tayler nos permite uma comparação entre os resultados das simulações globais e não lineares que realizamos com as previsões teóricas (Pitts; Tayler, 1985) e com outros resultados numéricos (Braithwaite, 2006b). Na Fig. 21, os painéis (b) a (d) mostram a evolução temporal da densidade de energia magnética (esquerda) e cinética (direita) para as simulações A_R300B10, A_R150B10 e A_R10B10, respectivamente. No painel (a) vemos novamente a Fig. 18 para efeito de comparação.

Os efeitos da inclusão de uma baixa taxa de rotação em nossas simulações pode ser observado na Fig. 21(b), através da evolução temporal da simulação A_R300B10 ($\eta \sim 7$). A evolução linear do modo magnético $m = 1$ no gráfico log-normal é um importante

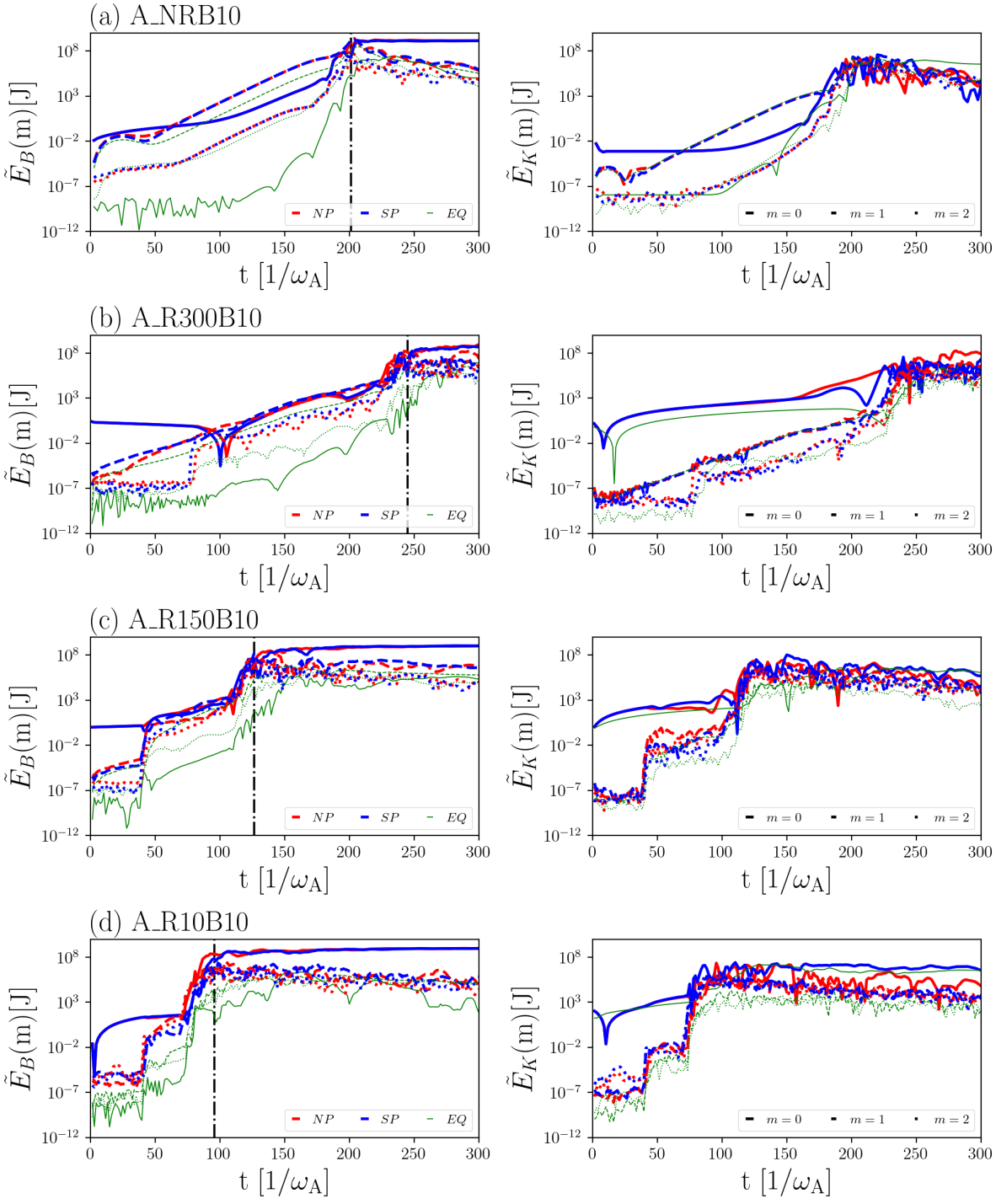


Figura 21 – Figura similar à Fig. 18 onde, além da simulação (a) A_NRB10 (sem rotação), foram incluídas as simulações: (b) A_R300B10 ($P_{\rm rot}$ = 300 dias), (c) A_R150B10 ($P_{\rm rot}$ = 150 dias) e (d) A_R10B10 ($P_{\rm rot}$ = 10 dias).

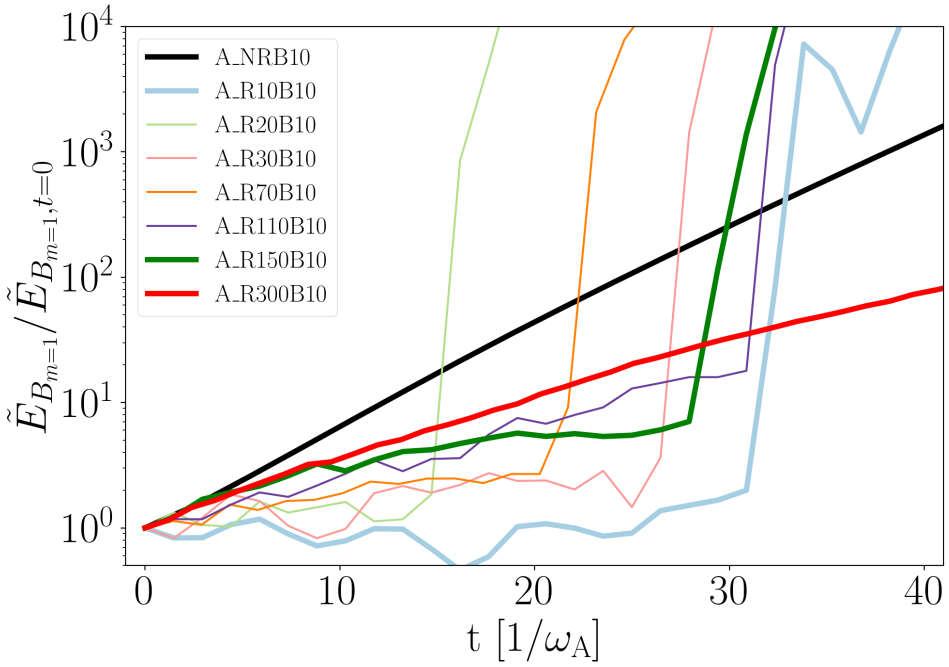


Figura 22 – Evolução temporal inicial para as simulações presentes no conjunto A1. Para uma melhor comparação de suas taxas de crescimento a energia dos modos foi normalizada pelo seu valor inicial ($t = 0$), e a fase transiente inicial foi removida.

indicador de que, para esse valor de η, a rotação é insuficiente para suprimir a instabilidade de Tayler. É interessante observar na figura que não há diferenças significativas entre a evolução do modo para baixas (linha tracejada verde) e altas (linhas tracejadas azul e vermelha) latitudes. No entanto, outros modos, como o $m = 0$ e $m = 2$, mantêm-se estáveis até $t \sim 75\ 1/\varpi_A$. Após este instante esses modos passam a crescer com uma taxa similar à do modo $m = 1$. Os modos cinéticos $m = 1$ e $m = 2$ apresentam um desenvolvimento similar aos equivalentes magnéticos, enquanto o modo $m = 0$ apresenta um valor energético constante durante a fase linear e mais alto que o equivalente magnético.

A Fig. 21(c) mostra a evolução da simulação A_R150B10, onde a taxa de rotação foi dobrada (com $\eta \sim 14$). Nesse caso, o modo magnético $m = 1$ cresce linearmente até $t \sim 40\ 1/\varpi_A$, enquanto o mesmo modo cinético permanece estável. Curiosamente, os modos $m = 1$ e $m = 2$ (e outros modos de ordem maior não representados na figura) magnéticos e cinéticos, tanto nos polos quanto no equador, alcançam a energia de saturação após dois saltos energéticos subsequentes. Um efeito similar foi observado também na evolução temporal das energias $\tilde{E}_B$ e $\tilde{E}_K$ para simulações com $\eta > 14$. Um crescimento linear inicialmente lento, com uma clara dependência de ω_0 (ver Tabela 2), seguido de um salto energético. Para a simulação de mais alta rotação, A_R10B10 ($\eta = 197$), esse crescimento inicial é quase totalmente suprimido, como podemos ver na Fig. 21(d).

A teoria da instabilidade de Tayler, assim como outras análises numéricas (ver Cap. 2), nos diz que é durante os primeiros ciclos de Alfven que a instabilidade se desenvolve.

Desse modo, é esperado que a estabilização do campo, causada pela rotação, esteja evidente no início da fase linear. E, de fato, a estabilização está presente. Na Fig. 22 vemos o início da evolução do modo magnético $m = 1$. As linhas mais espessas correspondem às simulações que foram apresentadas na Fig. 21, enquanto as linhas mais finas correspondem ao restante das simulações do conjunto A1 (ver legenda). No gráfico, para uma melhor comparação, foi removida da série temporal a fase transiente inicial, onde o modelo equilibra as forças magnéticas, e os valores de energia foram normalizados pela energia inicial. Na figura, observamos uma redução na taxa de crescimento do modo instável com o aumento de η, que varia neste caso através da taxa de rotação do modelo. No geral, os saltos energéticos ocorrem após $\sim 40\ 1/\overline{\omega}_A$ para $\eta \gtrsim 13$. Já para valores intermediários de η a instabilidade de Tayler coexiste com o processo gerando tais saltos. Para as simulações com alta rotação, $\eta \gtrsim 100$, a instabilidade de Tayler é inicialmente suprimida, mas os saltos ainda ocorrem. Esses resultados concordam parcialmente com os resultados das simulações locais de Braithwaite (2006b), onde os saltos energéticos não são observados. Contudo, esse incremento súbito da energia já foi observado por outros autores que atribuíram a sua ocorrência a presença de uma instabilidade secundária (Jouve et al., 2020; Ji et al., 2023).

3.2.2.2 Influência da amplitude inicial do campo magnético, B_0

A análise da evolução dos modos iniciais, através das Figs. 21 e 22, nos mostra que alguns valores de η são capazes de conter o crescimento do modo longitudinal $m = 1$. Na análise anterior, exploramos a variação de η através da mudança na taxa de rotação do modelo, Ω_0. Contudo, essa não é a única forma de realizar esse estudo. Seguindo a Eq.3.11 vemos que, para um mesmo Ω_0, η se altera com variações de $\overline{\omega_{\rm A}}$, que, por sua vez, muda com a intensidade do campo inicial, B_0. Uma vez que a simulação A_R10B10 é a que apresenta maior estabilidade dentre aquelas do conjunto A1, utilizaremos sua configuração para explorar a variação de B_0 (conjunto A3).

A Fig. 23 apresenta a evolução temporal dos modos magnéticos longitudinais mais baixos para as simulações do conjunto A3. Embora todas as simulações apresentem a mesma taxa de rotação com $\Omega_0 = 7.27 \times 10^{-6}$ Hz, elas possuem diferentes valores de η sendo: (a) A_R10B5, com $\eta = 395.76$ ($B_0 = 0.65$ T), (b) A_R10B20, com $\eta = 98.90$ ($B_0 = 2.6$ T), (c) A_R10B40, com $\eta = 49.45$ ($B_0 = 5.2$ T), e (d) A_R10B80, com $\eta = 24.73$ ($B_0 = 10.4$ T). Podemos observar que para valores elevados de η, painel (a), a instabilidade de Tayler é suprimida e a energia cresce através de sucessivos saltos energéticos. Já para valores de $\eta \lesssim 100$, painéis (b) a (d), a instabilidade coexiste com os saltos. É possível observarmos também que o aumento de B_0 reduz a taxa de crescimento da instabilidade. Isso acontece porque alterando o valor de B_0 alteramos também o valor de δ (Eq. 3.10). É por esse motivo que comparações diretas entre os conjuntos A1 e A3 devem ser feitas com cautela.

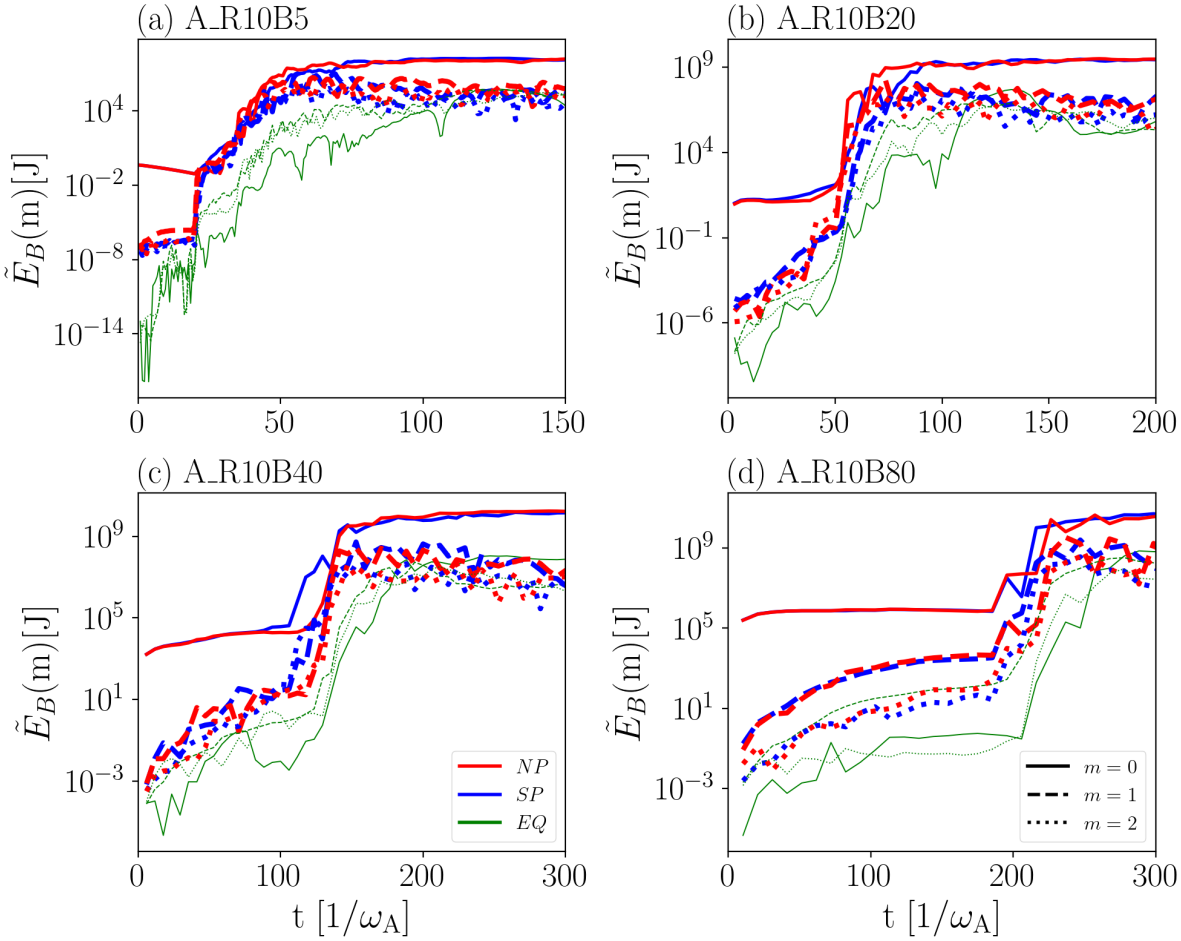


Figura 23 – Similar à Fig. 21, para as energias magnéticas das simulações do conjunto A3. As simulações apresentadas possuem um incremento gradual da intensidade do campo magnético inicial, B_0, sendo elas: (a) A_R10B5 ($B_0 = 0.65$ T), (b) A_R10B20 ($B_0 = 2.6$ T), (c) A_R10B40 ($B_0 = 5.2$ T), e (d) A_R10B80 ($B_0 = 10.4$ T).

3.2.2.3 Efeitos da dissipação efetiva do modelo numérico

Como foi mostrado no Cap. 2, é esperado que a difusividade magnética afete a evolução da instabilidade de Tayler. Na Sec. 3.1, vimos que o código utilizado por nós resolve as equações da MHD na sua formulação inviscida. Nesse caso, os efeitos dissipativos como viscosidade, condutividade térmica e difusividade magnética estão a cargo do modelo numérico (MPDATA). Desse modo, é esperado que o aumento ou a redução da resolução numérica do modelo altere a dissipação das quantidades físicas da simulação. Criamos assim os conjuntos B e C, visando estudar como as mudanças de resolução afetam os nossos resultados.

Como já foi descrito anteriormente (ver Sec. 3.1.1), o conjunto B de simulações possui o dobro da resolução numérica do conjunto A com $252 \times 128 \times 56$ pontos de grade em ϕ, θ e r, respectivamente, enquanto o conjunto C possui o dobro de resolução apenas na direção radial, $126 \times 64 \times 56$. Perfis de estrutura, condições iniciais e de contorno são

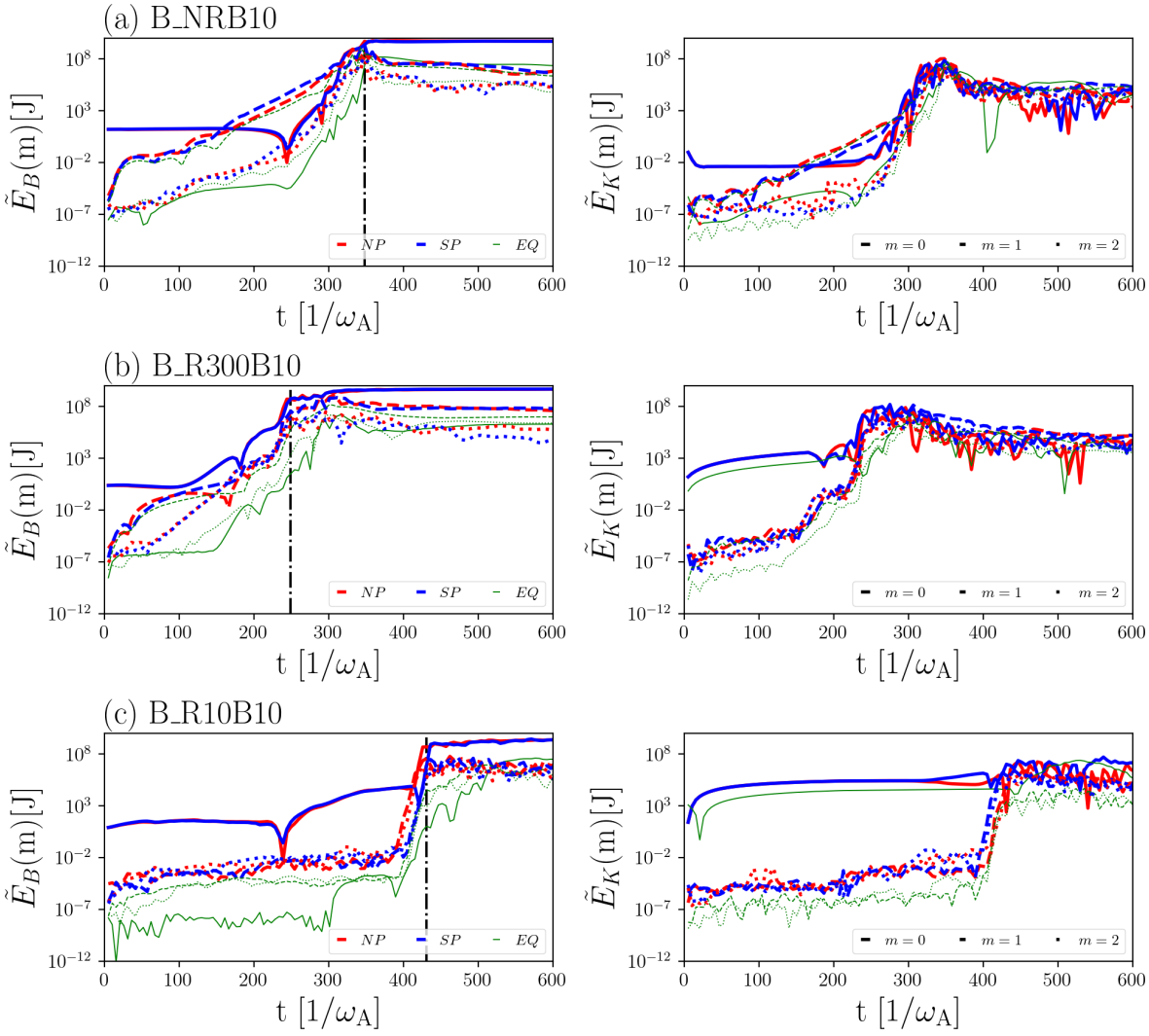


Figura 24 – Evolução energética dos primeiros modos longitudinais para as simulações com resolução dobrada (conjunto B). As propriedades das linhas e o esquema de cores são os mesmos utilizados na Fig.18.

as mesmas do conjunto A. É esperado que os coeficientes de viscosidade, condutividade térmica e difusividade magnética sejam reduzidos com o aumento da resolução.

A evolução temporal dos primeiros modos longitudinais para as simulações do conjunto B estão retratadas na Fig. 24. Os painéis correspondem a diferentes valores de η, obtidos através do aumento da taxa de rotação, enquanto o esquema de cores e as características das linhas são os mesmos que os da Fig. 18. A Fig. 24(a) representa a simulação B_NRB10 sem rotação ($\Omega_0 = 0, \eta = 0$), na Fig. 24(b) temos a simulação B_R300B10 com rotação de 300 dias ($\Omega_0 = 0.24 \times 10^{-6}, \eta = 6.70$) e na Fig. 24(c) temos B_R10B10 com uma rotação de 10 dias ($\Omega_0 = 7.27 \times 10^{-6}, \eta = 197.80$).

Como explicado anteriormente, o aumento na resolução implica na redução dos coeficientes de difusão térmica e magnética. No entanto, essas grandezas influenciam a instabilidade de Tayler de forma antagônica. Por exemplo, uma difusividade térmica mais

baixa tende a tornar o campo magnético mais estável ao permitir que perturbações térmicas cresçam e se oponham à instabilidade de Tayler. Já quando temos uma baixa difusividade magnética vemos que o campo magnético inicial não se dissipa, tornando-se mais propenso à instabilidade de Tayler. Assim, ao compararmos a Fig. 24(a) (maior resolução) com a Fig. 21(a) (menor resolução) vemos algumas das mudanças na evolução temporal do caso sem rotação para os dois conjuntos. As principais diferenças encontram-se na menor taxa de crescimento no conjunto B e, por consequência, no retardo na chegada à fase de saturação. Tal redução em σ implica em uma dominância dos efeitos térmicos nesse caso. Essa observação é coerente tanto com resultados analíticos prévios (Spruit, 1999), quanto numéricos (Braithwaite, 2006b).

Para os casos com rotação, contudo, as mudanças em σ são desprezíveis. Na Fig. 24(b) vemos que o momento de saturação energética da simulação é similar ao de sua contraparte na Fig. 21(b), demonstrando assim uma baixa influência da mudança no regime de difusividades para esse valor de η. Enquanto isso, vemos no caso de maior rotação (Fig. 24(c)) uma duração do intervalo estável dez vezes superior durante a fase linear, em comparação com a simulação de menor resolução.

Dos resultados apresentados nesta seção, podemos concluir que a rotação possui o efeito de estabilizar o desenvolvimento da instabilidade de Tayler. Valores maiores, tanto de η quanto de δ, são capazes de suprimir completamente o desenvolvimento do modo longitudinal magnético $m = 1$ por algumas dezenas de ciclos de Alfven. Depois disso, uma nova instabilidade se manifesta através dos saltos energéticos. Em simulações de baixa rotação, como A_R300B10 (Fig. 21(b)) por exemplo, tais saltos não são observados e vemos apenas a instabilidade de Tayler. Embora a determinação dos efeitos físicos responsáveis pelos saltos esteja fora do escopo desse trabalho, os conjuntos A1, A3 e B nos mostram que seu desenvolvimento depende da intensidade do campo magnético e dos coeficientes dissipativos, sendo necessário um tempo maior para o surgimento dos saltos quando temos um campo magnético mais intenso e menores coeficientes dissipativos. As claras dependências destes saltos energéticos com os parâmetros introduzidos em cada um dos conjuntos de simulações nos leva a concluir que sua natureza seja física e não numérica.

Seja por causa da instabilidade de Tayler ou seja em virtude dos saltos energéticos, os modos instáveis acabam por alcançar níveis energéticos compatíveis com os do campo magnético inicial no fim da fase linear. Os modos extraem energia do campo magnético inicial, fazendo-o mais rapidamente a partir do estado de saturação, levando a mudanças visíveis na topologia do campo magnético. Uma vez que o EULAG-MHD resolve as equações não lineares do modelo, é possível explorar o comportamento do campo magnético no longo prazo, após a fase linear. Assim, na próxima seção, mostraremos os resultados acerca das subsequentes fases de evolução: a de saturação e a de decaimento.

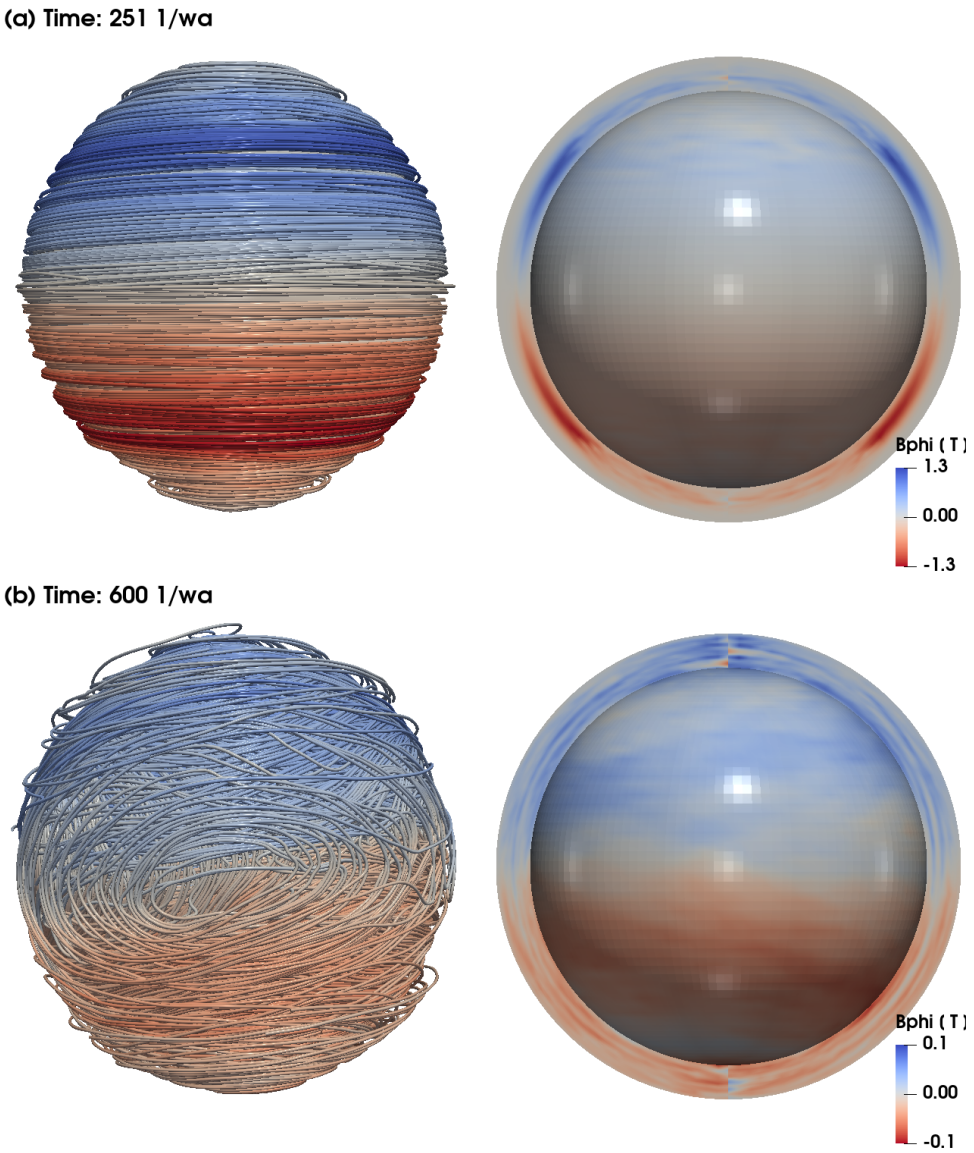


Figura 25 – Linhas de campo da simulação A_R300B10 nos instantes (a) fim da fase linear ($251\,1/\omega_A$) e (b) durante a fase de decaimento ($600\,1/\omega_A$). Foi utilizado o mesmo esquema de cores que o da Fig. 16.

3.2.3 Fase não linear

Nesta seção iremos explorar os resultados que foram obtidos para as fases que seguem a fase linear, as fases de saturação e decaimento, respectivamente. Estes resultados são inéditos na literatura, uma vez que a maioria dos trabalhos se restringe apenas à fase linear.

O fim da fase linear de evolução da instabilidade de Tayler é marcado pela saturação dos modos instáveis. Ou seja, esses modos atingem um valor máximo de energia em um momento que depende exclusivamente das condições iniciais impostas pelo modelo, como a intensidade do campo inicial, e em especial do seu período de rotação. Mesmo com diferentes condições iniciais, uma vez que os modos instáveis atingem a saturação, é esperado que a

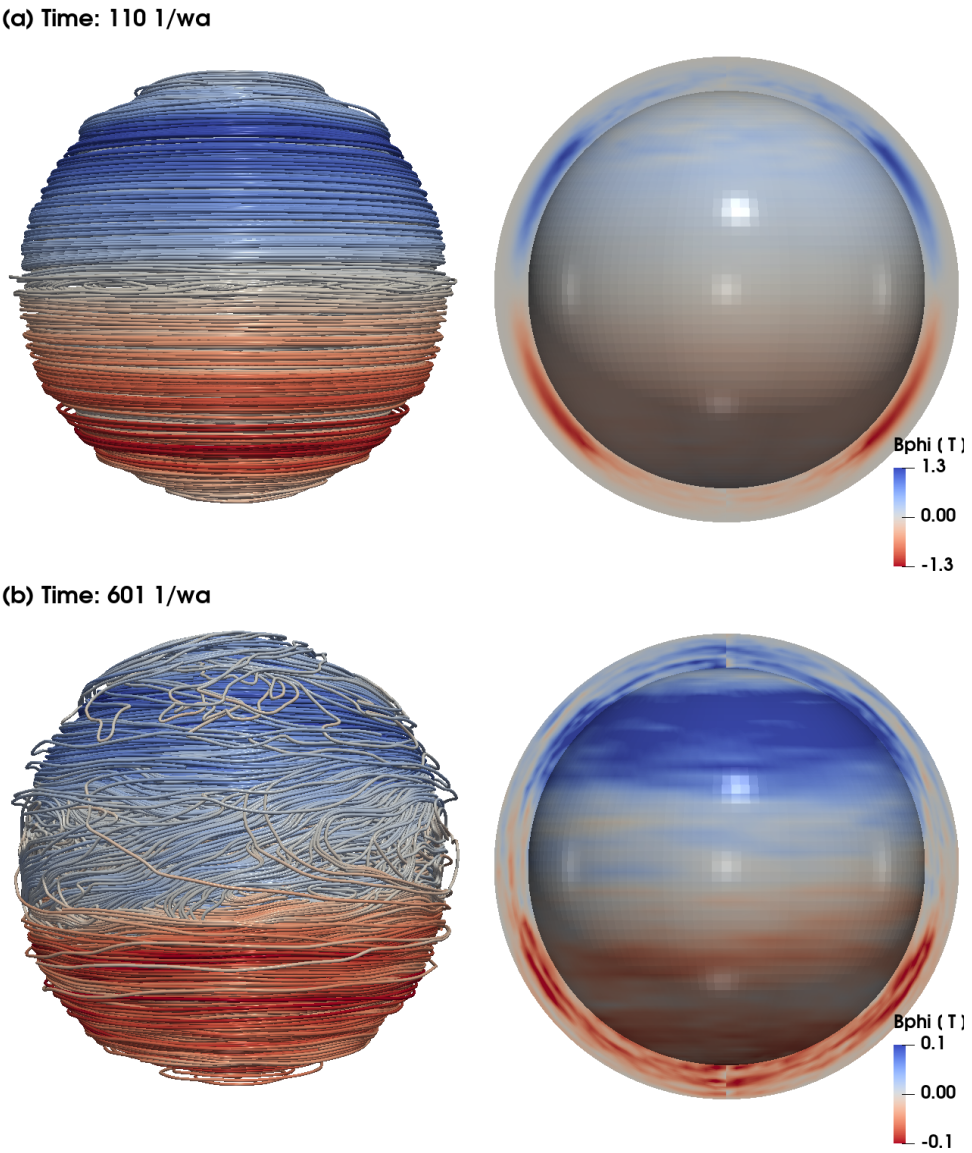


Figura 26 – Figura similar à Fig.25, mas para a simulação A_R10B10 onde vemos (a) o fim da fase linear (110 $1/\omega_A$) e (b) a fase de decaimento (601 $1/\omega_A$).

topologia do campo magnético seja modificada para todas as simulações. Nas Figs. 25 e 26 observamos estágios evoluídos das linhas de campo das simulações do conjunto A1 com menor (A_R300B10, $\eta = 6.7$) e maior rotação (A_R10B10, $\eta = 197$), respectivamente. Nelas, os painéis (a) mostram o fim da fase linear/início da fase de saturação, enquanto os painéis (b) mostram um instante de tempo um pouco mais avançado: a fase de decaimento.

No painel da esquerda da Fig. 25(a) vemos que, ao final da fase linear, a topologia das linhas de campo ainda é majoritariamente toroidal. Mesmo assim, um desvio da topologia apresentada na Fig. 16 é perceptível através da abertura das linhas no equador e uma leve inclinação das linhas de campo com respeito ao eixo de rotação em médias latitudes. No painel da direita, vemos que a intensidade do campo, embora mantida em médias latitudes, vem diminuindo gradativamente tanto no equador quanto nos polos. Quando avançamos na evolução e entramos na fase de decaimento, Fig. 25(b), observamos

que a intensidade do campo foi reduzida em uma ordem de magnitude (ver barra de cores), quando comparada a seu valor inicial. Enquanto isso, as linhas de campo no painel da esquerda estão completamente disformes, ainda que apresentem uma estrutura toroidal com uma clara assinatura do modo longitudinal $m = 1$. Esse resultado demonstra como um pouco de rotação é capaz de sustentar a topologia do campo magnético inicial quando comparado ao caso sem rotação (A_NRB10, $\eta = 0$), apresentado na Fig. 19.

O efeito estabilizante da rotação é ainda mais evidente quando observamos a Fig. 26, onde a simulação possui um período de rotação de apenas 10 dias. Para a Fig. 26(a), vemos uma situação similar à encontrada na Fig. 25(a). A exceção é que, no painel da esquerda, já não observamos a inclinação das linhas de campo em médias latitudes e a abertura equatorial das linhas é ainda menor. Mesmo assim, a tendência na redução de intensidade do campo em baixas e altas latitudes é mantida. No entanto, quando estendemos nossa análise para a fase de decaimento (Fig. 26(b)), observamos que a intensidade do campo não é reduzida na mesma proporção que o caso anterior. Vemos também que as linhas de campo (esquerda) ainda apresentam uma forma toroidal, mas com o surgimento do campo poloidal. É importante ressaltar que a presença de campo poloidal (linhas de campo verticais) na simulação é também um fator estabilizante, contribuindo para preservar uma configuração estável.

O mesmo comportamento observado nas simulações do conjunto A1 está presente nas simulações de alta resolução (conjunto B). Um comparativo entre os casos B_NRB10 ($\eta = 0$), B_R300B10 ($\eta = 6.7$) e B_R10B10 ($\eta = 197$) durante as fases de saturação e decaimento é apresentado nas Figs. 27(a) a (c), respectivamente. A fileira superior mostra a projeção do polo norte geométrico, enquanto a fileira inferior mostra a projeção equatorial da mesma simulação. Mais uma vez, o esquema de cores é o mesmo da Fig. 16.

Nos casos sem rotação (Figs. 27(a)) e com rotação mais lenta (Figs. 27(b)), podemos observar o aparecimento do modo longitudinal mais instável, $m = 1$, como uma estrutura desalinhada que realiza um movimento de precessão em torno do eixo de rotação. Já no equador, ele se apresenta como uma abertura nas linhas de campo, formando uma estrutura que se assemelha a uma concha. Além disso, para o caso sem rotação, observamos uma significativa inclinação do eixo magnético. Por outro lado, as linhas de campo obtidas para a simulação com rotação rápida (Figs. 27(c)) não apresentam nenhuma inclinação significativa do eixo magnético. Enquanto isso, na região do equador, a abertura das linhas de campo é mínima, apresentando uma leve assinatura do modo $m = 1$ e também de alguns modos superiores.

A análise qualitativa apresentada na seção anterior, para os conjuntos A1 e B, nos fornece duas conclusões imediatas: 1) A topologia do campo magnético é alterada principalmente pelo crescimento dos modos instáveis e 2) esse efeito é drasticamente reduzido na presença de uma rotação significativa. Essas conclusões podem ser quantificadas

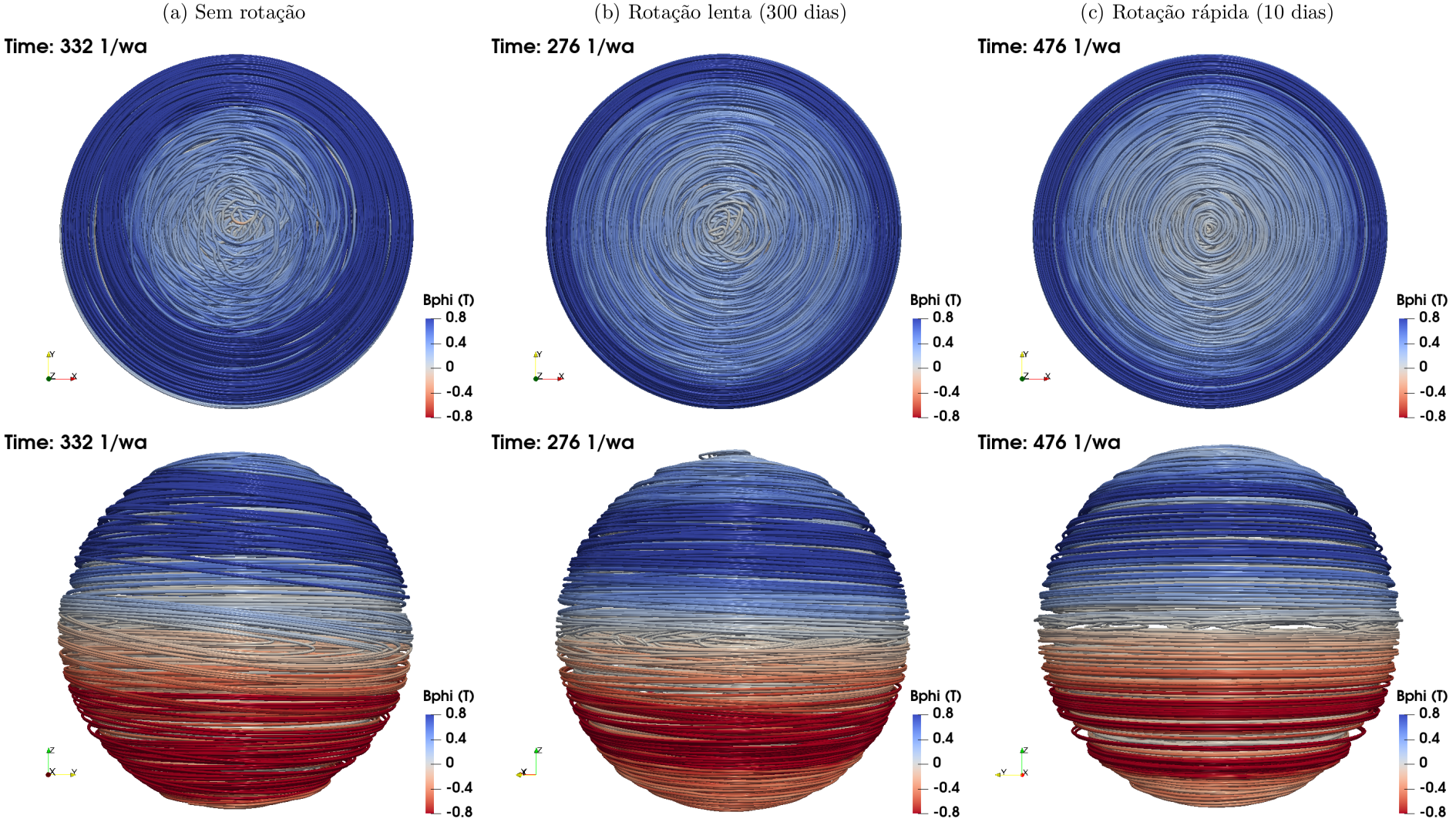


Figura 27 – Linhas de campo magnético para as simulações (a) sem rotação (B_NRB10), (b) com rotação lenta (B_R300B10) e (c) com rotação rápida (B_R10B10) do conjunto B. As imagens foram geradas em $r = 0.68R_\star$, durante a fase de saturação, onde a energia dos modos instáveis atinge seu valor máximo. Os painéis superiores mostram a projeção do polo norte geométrico, enquanto que os painéis inferiores mostram a projeção equatorial da simulação. Foi utilizado o mesmo esquema de cores que o da Fig. 16.

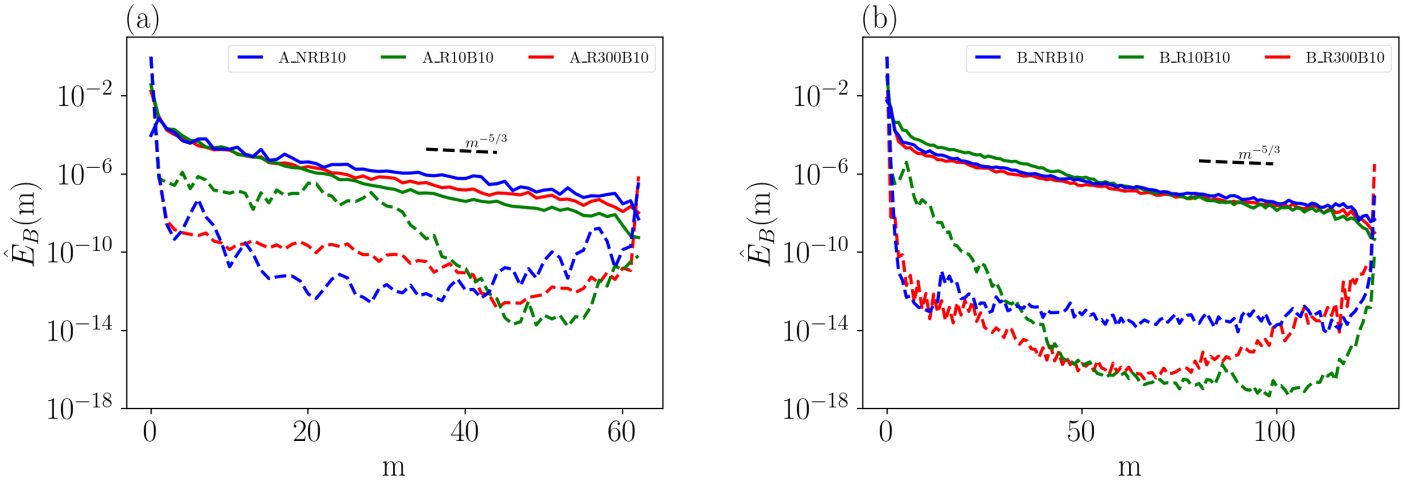


Figura 28 – Distribuição espectral da densidade de energia magnética, $\hat{E}_B$, nos modos longitudinais para as simulações (a) do conjunto A1, A_NRB10 (linha azul), A_R10B10 (verde) e A_R300B10 (vermelho); e (b) do conjunto B, B_NRB10 (linha azul), B_R10B10 (verde) e B_R300B10 (vermelho). As linhas tracejadas correspondem a um instante durante a fase linear onde as simulações apresentam valores energéticos similares. As linhas contínuas correspondem à fase de decaimento. É nesta fase que observamos uma inclinação $\sim m^{-5/3}$ (linha tracejada preta), típica de um meio com turbulência homogênea e isotrópica.

através do espectro da densidade de energia magnética.

O espectro de energia magnética, $\hat{E}_B$, pode ser calculado através da decomposição do campo magnético total em harmônicos esféricos na forma

$$\boldsymbol{B}(l,m) = \sum_{l,m} Q_l^m Y_l^m(\theta,\phi) + S_l^m r \boldsymbol{\nabla} Y_l^m(\theta,\phi) - T_l^m \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} Y_l^m(\theta,\phi), \tag{3.17}$$

onde os coeficientes da expansão são calculados pela rotina SHTns (Schaeffer, 2013). Após a realização da decomposição, é possível então calcular $\hat{E}_B$ com a expressão

$$\hat{E}_B = 4\pi \frac{1}{2\mu_0} \sum_{m=-l}^{l} \left[|Q_l^m|^2 + l(l+1)\left(|S_l^m|^2 + |T_l^m|^2\right)\right]. \tag{3.18}$$

A Fig. 28 mostra esse espectro magnético calculado em $r = 0.675R_\star$ para simulações características do (a) conjunto A1, A_NRB10 (linha azul), A_R10B10 (verde) e A_R300B10 (vermelho) ; e (b) do conjunto B, B_NRB10 (linha azul), B_R10B10 (verde) e B_R300B10 (vermelho). Enquanto isso, as linhas tracejadas representam um instante de tempo na fase linear onde a energia do modo $m = 1$ magnético é similar entre as simulações. O mesmo é verdade para as linhas contínuas, porém o instante de tempo escolhido foi durante a fase de decaimento. É importante pontuar que a Fig. 28 representa

apenas instantes que foram escolhidos para uma abordagem didática. Esse tipo de análise requer a visualização de toda a evolução temporal desse espectro.

Durante a fase linear (linhas tracejadas na Fig. 28), as simulações sem rotação (linhas azuis) e com baixa rotação (linhas vermelhas) possuem um espectro similar. Em ambos os casos, a energia magnética está concentrada majoritariamente nos modos longitudinais $m = 0$ (devido à configuração do campo magnético inicial) e no modo $m = 1$ (que é o modo instável com maior taxa de crescimento). Em contrapartida, nas simulações com alta rotação (linhas verdes) modos bem mais altos (com $20 \lesssim m \lesssim 40$) apresentam níveis energéticos similares ao modo $m = 1$. Ao compararmos as figuras 28(a) e 28(b), vemos que esse efeito independe da resolução do modelo. O crescimento energético desses modos mais altos está relacionado com os saltos de energia descritos anteriormente.

Ao longo da fase de decaimento (linhas contínuas na Fig. 28), observamos que o perfil espectral torna-se similar para todas as simulações. Elas assumem um perfil compatível com o decaimento turbulento, onde $\hat{E} \propto m^{-5/3}$ (Kolmogorov, 1941). É importante observar também que a energia do modo $m = 0$ é reduzida substancialmente apenas nos casos sem rotação (ver linha contínua azul). Isso implica que com a rotação, mesmo no caso mais lento, o campo magnético inicial é parcialmente conservado como discutido anteriormente.

Outra forma de observar os efeitos da rotação na parte não linear da evolução é observando a evolução temporal da energia contida na componente toroidal do campo magnético, $E_{B_\phi} = \overline{B^2}_\phi / B_0^2$. Nesse caso, a média em $\overline{B^2}$ é feita nas direções ϕ, θ e r entre $0.65R_\star$ e $0.70R_\star$, correspondendo à largura a meia altura ($FWHM$, em inglês) do perfil gaussiano do campo inicial (Eq. 3.8). Assim, a Fig. 29 mostra a evolução temporal de E_{B_ϕ}, onde as linhas contínuas correspondem a simulações do conjunto A1 enquanto as linhas tracejadas correspondem ao conjunto B. Já as cores diferentes correspondem a diferentes taxas de rotação. Na figura estão representadas as fases linear, de saturação e de decaimento até $t \sim 800\ 1/\overline{\omega}_A$. As escalas apresentadas na figura não tornam evidente a redução de E_{B_ϕ} durante a fase linear. Isso se dá pois essa redução é da ordem de 10^{-6}, que é a energia do campo magnético toroidal residual. O gráfico demonstra que a rotação previne o decaimento energético do campo toroidal. Para os casos sem rotação (linhas pretas) existe um intenso decaimento dessa energia, o que não ocorre nos casos com rotação. Incrementos progressivos na taxa de rotação resultam em um decaimento cada vez mais lento. A taxa de decaimento da energia do campo toroidal, Γ, pode ser estimada em intervalos de tempo onde a derivada de E_{B_ϕ} seja constante (ver valores de Γ na Tabela 2). As linhas pontilhadas pretas na Fig. 29 servem para exemplificar tais segmentos.

Ademais, Γ também possui uma dependência com a resolução numérica, isto é, com a difusividade magnética efetiva. Isso torna-se evidente quando comparamos as linhas contínuas (conjunto A1) e tracejadas (conjunto B) na Fig. 29. Contudo, o incremento apenas da resolução radial (conjunto C, não representado na figura) não demonstra a

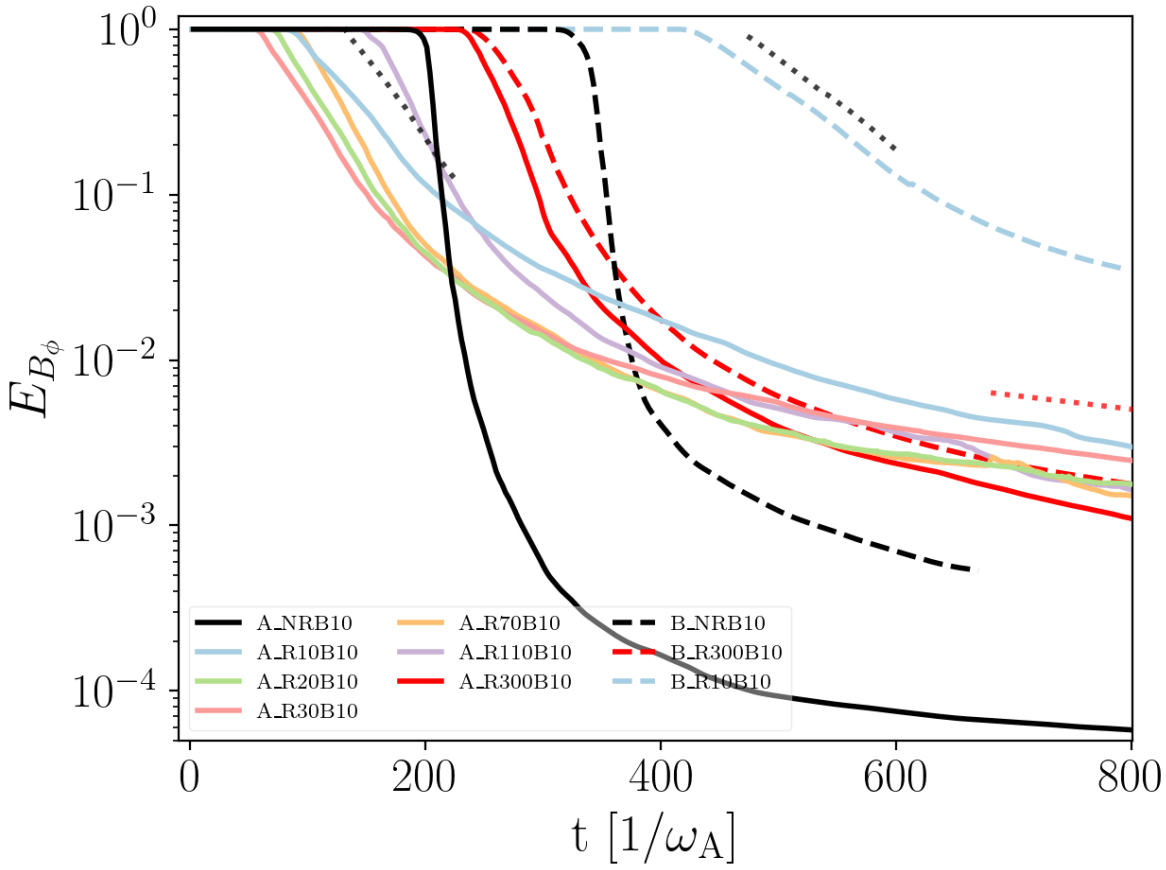


Figura 29 – (a) Evolução temporal de E_{B_ϕ}. As linhas contínuas (tracejadas) correspondem a simulações do conjunto A1 (B). Cores diferentes representam as diferentes taxas de rotação, como indicado na legenda. As linhas pontilhadas pretas correspondem aos intervalos de tempo nos quais a taxa de decaimento, Γ, é calculada. Visando uma maior clareza da figura, apenas os segmentos correspondentes a três simulações características são exibidos. O coeficiente de difusividade magnética turbulenta, η_t, é estimado nas fases finais da evolução ($t \geq 500\ [1/\omega_A]$) onde a energia de todas as simulações decai aproximadamente com a mesma taxa (ver linha pontilhada vermelha como exemplo).

mesma a diferença significativa em Γ que existe quando o incremento inclui as demais coordenadas (conjunto B). Esse resultado confirma que a evolução do campo ocorre majoritariamente nas direções não radiais sempre que δ seja grande o suficiente.

Na Fig. 30 apresentamos $|\Gamma|$ como função de η para as simulações do conjuntos A1 (círculos azuis), B (triângulos pretos) e C (losangos verdes). Para as simulações do conjunto A1, o valor de $|\Gamma|$ é reduzido por um fator de 2.15 entre as taxas de rotação mais baixas (menor η) e as mais altas (maior η) com um escalonamento que pode ser aproximado pela lei de potência $|\Gamma| \propto \eta^{-0.19}$. Extrapolar essa relação para o caso $|\Gamma| \to 0$ (completamente estável) implica em valores de rotação irreais. Ainda assim, os triângulos pretos (conjunto B) mostram que esse resultado é sensível à resolução. Por exemplo, existe uma redução na taxa de decaimento por um fator de 1.8 entre as simulações A_R10B10 e

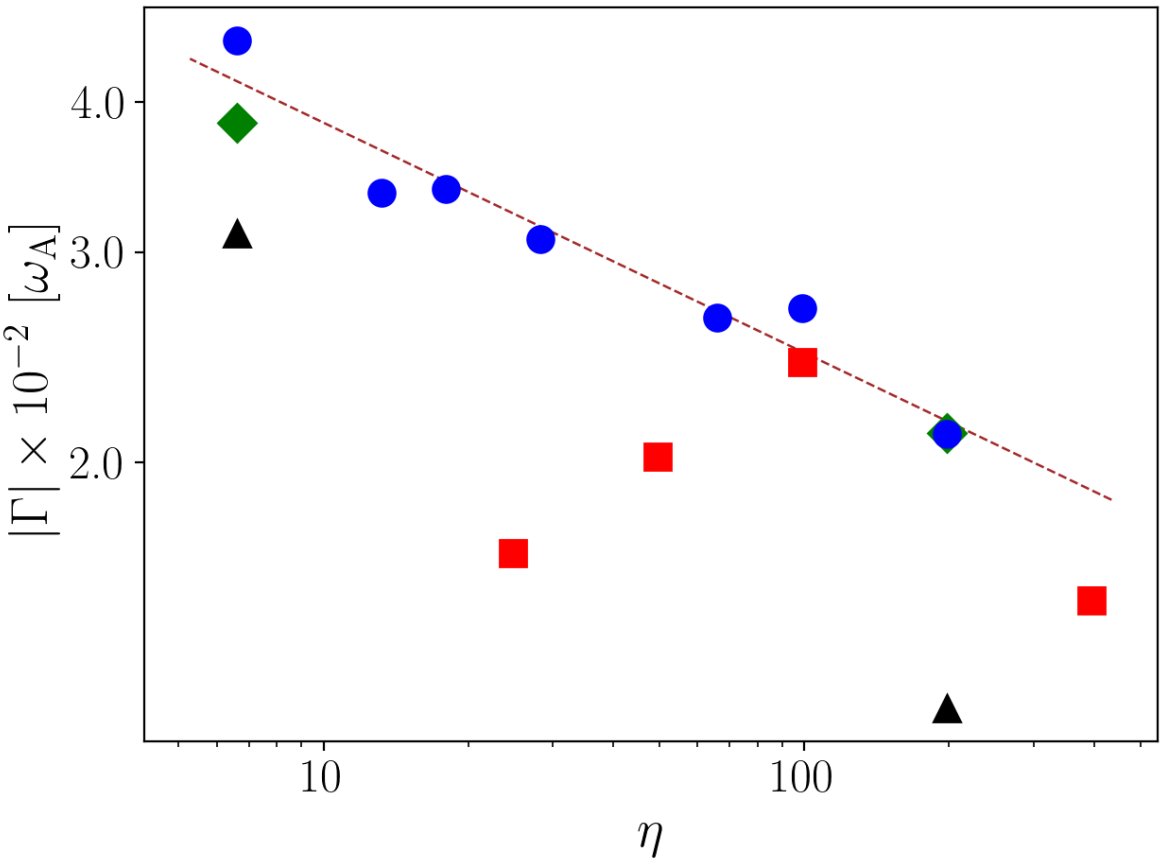


Figura 30 – (b) Distribuição de Γ como função de η (Eq. 3.11) para as simulações dos conjuntos A1 (círculos azuis), B (triângulos pretos) e C (losangos verdes). Simulações do conjunto A2, com a rotação fixa e variação do campo magnético, estão representadas por quadrados vermelhos (ver Tabela 2).

B_R10B10 ($\eta = 197.8$), e por um fator de 1.7 entre A_R300B10 e B_R300B10 ($\eta = 6.7$).

Os quadrados vermelhos na Fig. 30 mostram a distribuição de $|\Gamma|$ para simulações com a mesma taxa de rotação, $\Omega_0 = 7.27 \cdot 10^{-6}$ Hz, e variações de η devido a diferentes amplitudes de B_0 (conjunto A2). Nesse caso, simulações com valores mais baixos de η (campos magnéticos mais fortes) apresentam valores mais baixos de $|\Gamma|$, um máximo em $\eta = 98.9$ e uma queda para valores mais altos de η (campos magnéticos mais fracos). Essa tendência ocorre pois ao alterarmos η dessa forma, estamos também alterando a escala de normalização do tempo. Em unidades físicas, para valores de B_0 maiores (menores) que 1.3 T, os valores de Γ são maiores (menores) que os correspondentes do conjunto A1. Portanto, concluímos que o decaimento do campo magnético inicial é menos afetado pela instabilidade de Tayler sempre que a escala de tempo dominante seja proveniente da rotação.

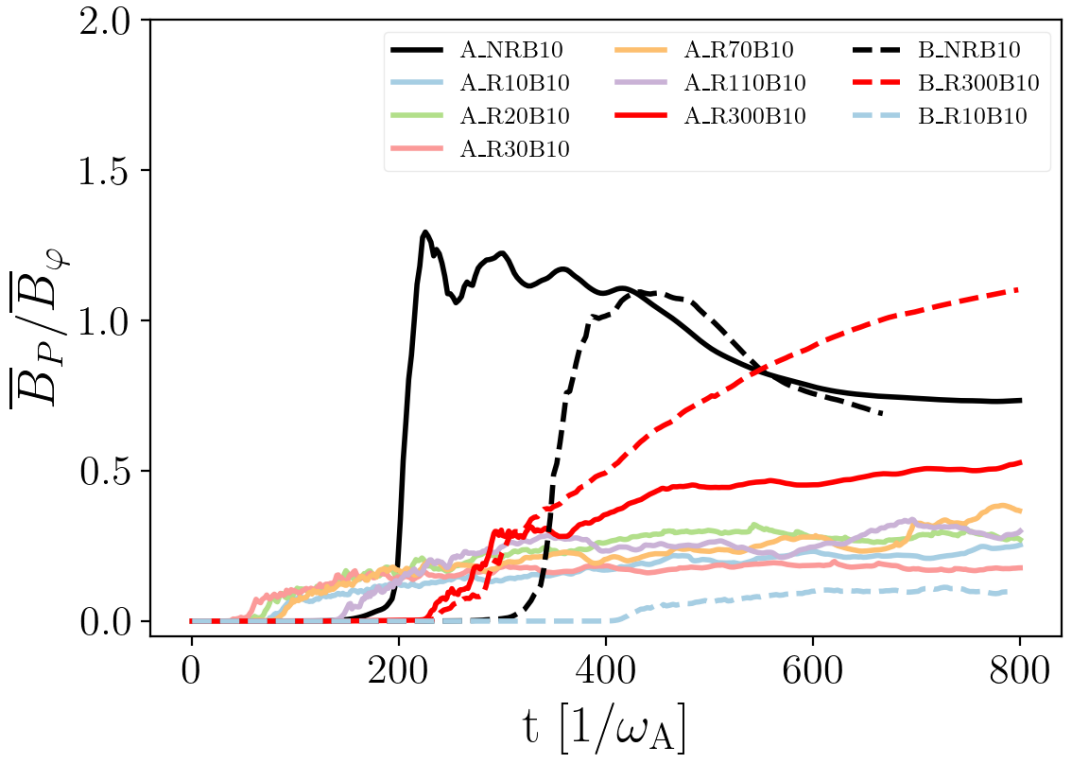


Figura 31 – Evolução temporal da razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$ para simulações do conjunto A1 (linhas contínuas) e do conjunto B (linhas tracejadas). Observe que as simulações com maior rotação parecem convergir para um valor constante dessa grandeza.

3.2.4 Evolução a longo prazo

Após apresentar uma queda acentuada durante a fase de saturação, E_{B_ϕ} passa a cair com uma inclinação menor. Nesse ponto, todas as simulações, independentemente da taxa de rotação e/ou da resolução numérica (ver $t > 700\ 1/\varpi_A$ na Fig. 29), possuem o mesmo decaimento. Esse resultado pode ser interpretado como a entrada em um regime de decaimento difusivo, o que é confirmado pelo escalamento $\approx m^{-5/3}$ observado no espectro de potências magnético. Portanto, ao multiplicarmos o valor de $|\Gamma|$ estimado neste momento (ver a linha pontilhada vermelha na Fig. 29) por $\varpi_c^2/2$, onde ϖ_c é o braço de alavanca, é possível estimarmos a difusividade magnética turbulenta, β_t, da simulação. O valor estimado para o conjunto de simulações A1 foi de $\beta_\mathrm{t} \sim 8 \times 10^7$ m^2/s, enquanto para o conjunto B, $\beta_\mathrm{t} \sim 5 \times 10^7$ m^2/s.

O decaimento do campo toroidal observado na Fig. 29 ocorre concomitantemente com o surgimento de componentes poloidais do campo magnético que ajudam a estabilizar o campo. Na Fig. 31 observamos a evolução temporal da razão entre as componentes poloidais e toroidais do campo magnético, $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$, em termo dos ciclos de Alfven. Nesse caso, $\overline{B}_P = \sqrt{\overline{B_\theta^2} + \overline{B_r^2}}$ e $\overline{B}_\phi$ são as médias volumétricas do campo magnético poloidal e

toroidal, respectivamente. Na Fig. 31, as linhas contínuas representam as simulações do conjunto A1, enquanto as linhas tracejadas representam as simulações do conjunto B. A coloração de cada linha representa a rotação da simulação, sendo as pretas aquelas sem rotação e às demais cores associadas as rotações restantes, como descrito na legenda.

Como vemos na Fig. 31, um significativo aumento na componentes poloidal do campo é observado quando a simulação atinge a fase de saturação. Os casos sem rotação, bem como aqueles com baixa rotação ($\eta = 6, 7$) demonstram um rápido aumento na componente poloidal, seguido de uma redução gradativa uma vez que a simulação atinge a fase de decaimento. Para simulações com $\eta \gtrsim 30$, a razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$ converge para um platô em $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi \sim 0,3$. A mesma razão é também observada nas simulações do conjunto A3, não representadas na figura, onde tanto η quanto δ são diferentes. Assim, podemos concluir que tanto a rotação quanto as componentes poloidais do campo magnético contribuem para manter o campo total estável. Em alguns casos, essa topologia mista mantém-se estável por centenas de tempos de Alfven. Assim sendo, o campo passa a sujeitar-se apenas ao decaimento turbulento, imposto pela difusividade do meio. Dentre todas as simulações, B_R10B10 (linha tracejada azul claro na Fig. 31) é a que apresenta menor valor de $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$ (linha tracejada azul claro na Fig. 31). Mesmo quando comparada com a simulação de mesma rotação do conjunto A (A_R10B10, linha contínua azul claro). Assim, podemos concluir que, mesmo com a instabilidade do campo magnético inicial, o crescimento acentuado dos modos instáveis é freado devido à rotação. Além disso, o surgimento de pequenas frações de campo magnético poloidal auxilia na formação de uma nova configuração, estável à instabilidade de Tayler, mas ainda sujeita à difusão turbulenta. Com o aumento da resolução, observamos que as fases de saturação e decaimento ocorrem muito mais tarde (compare as linhas contínuas e tracejadas azul claro na Fig. 29). Isso torna impraticável a realização de simulações de alta resolução devido ao seu alto custo computacional. Por isso, ainda é incerto como a razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$ se comportará em casos onde a difusividade efetiva se aproxime dos valores da difusividade ôhmica dentro de zonas radiativas. Para a zona radiativa solar, abaixo da tacoclina, por exemplo, estima-se que $\eta_d \sim 10^3$ m^2/s (Zahn et al., 2007).

3.2.5 Helicidade

O surgimento da componente poloidal do campo magnético ocorre naturalmente enquanto o modelo tenta atingir uma configuração estável (Tayler, 1973). Como foi visto anteriormente, casos com rotação suficientemente elevada levam o campo magnético a atingir um estado de equilíbrio, onde parte majoritária do campo é toroidal, mas com uma pequena parcela do campo sendo poloidal. Para a teoria do dínamo (Steenbeck et al., 1966), o surgimento de componentes poloidais do campo magnético está associado ao aparecimento de movimentos ou de correntes helicoidais no plasma. Devemos observar,

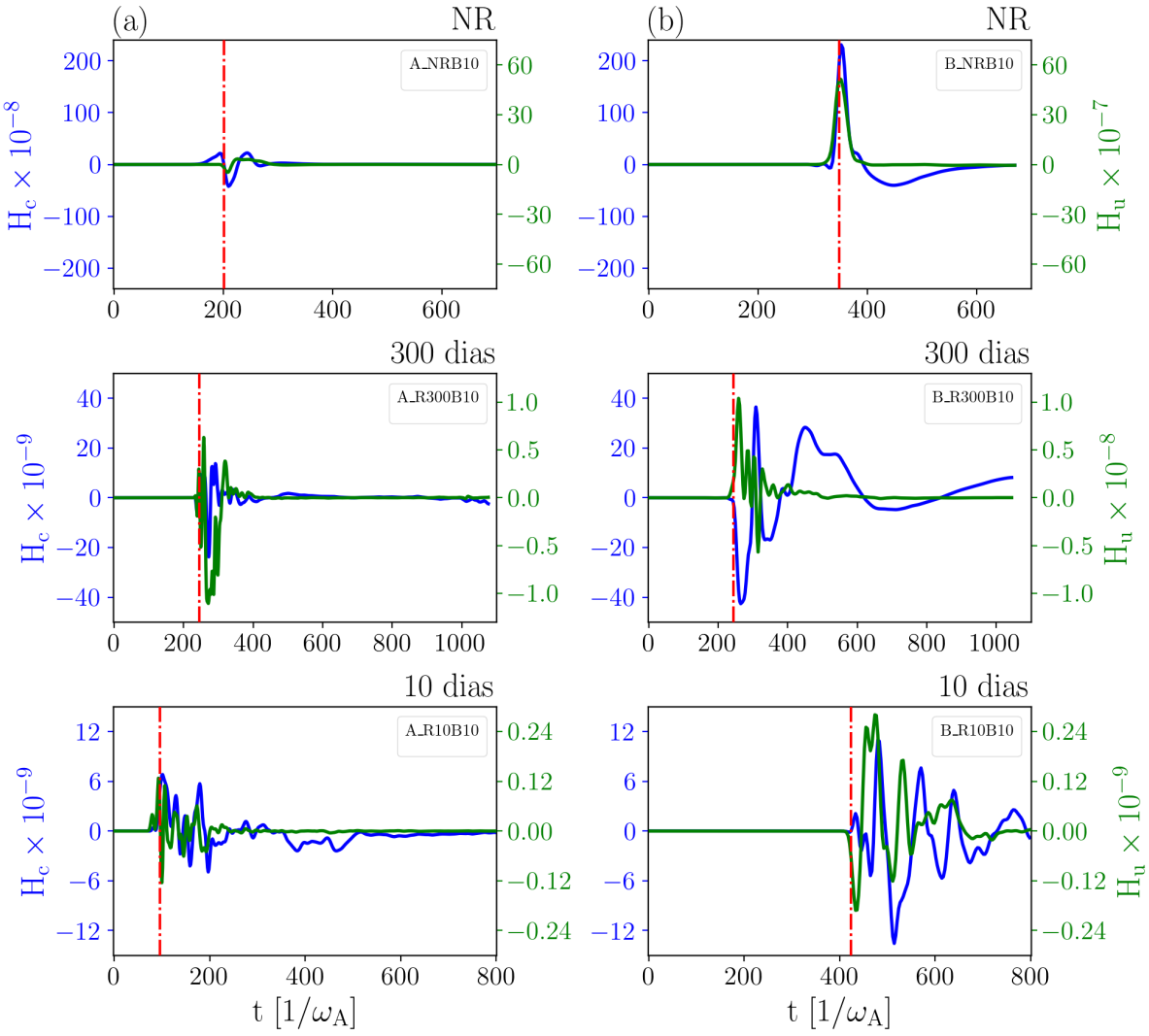


Figura 32 – Evolução temporal de H_c (azul) e H_u (verde) para algumas simulações dos conjuntos A1 (coluna da esquerda) e B (coluna da direita), onde cada fileira corresponde ao mesmo período de rotação. O valor das helicidades na coluna (a) estão multiplicados por um fator 5, para uma melhor visualização/comparação.

contudo, que o modo magnético com crescimento mais rápido associado à instabilidade de Tayler é o modo $m = 1$, não-axissimétrico. No entanto, na teoria do dínamo de campo médio, as grandes escalas são consideradas axissimétricas, assim como seus coeficientes. Logo, é necessário calcularmos as helicidades cinética e de corrente para a pequena escala das nossas simulações, inferindo assim se existem, ou não, contribuições axissimétricas para os coeficientes do dínamo.

Temos que as helicidades cinética e de corrente podem ser dadas respectivamente

por

$$H_u = \overline{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}') \cdot \boldsymbol{u}'}$$
$$H_c = \overline{(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}') \cdot \boldsymbol{B}'}/(\mu_0 \rho_{ad}), \tag{3.19}$$

onde o $'$ refere-se grandezas perturbadas de velocidade e campo magnético em relação à média longitudinal, isto é, todos os modos exceto $m = 0$. Aqui a média volumétrica (barra sobre os termos) é realizada apenas no hemisfério norte. Na Fig. 32, as linhas verde e azul correspondem a H_u e H_c, respectivamente. Enquanto isso, as colunas da esquerda e da direita mostram as três simulações características do conjunto A1, A_NRB10, A_R300B10 e A_R10B10, e as três do conjunto B, B_NRB10, B_R300B10 e B_R10B10.

Assinaturas de helicidades são observadas em todas simulações e aparecem logo antes da fase de saturação (demonstrada pela linha vermelha vertical). Esse início correlaciona-se muito bem com o incremento da razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\phi$ observado na Fig. 31. Mesmo não havendo um sinal preferencial para as helicidades, há ocorrências de mudanças dele ao longo de todas as simulações. Em todos os casos H_u e H_c apresentam a mesma ordem de magnitude para a mesma rotação nos conjuntos A e B, com a magnitude de H_u decaindo mais rapidamente. Contudo, é visível que as simulações do conjunto B possuem uma amplitude ligeiramente maior que aquelas do conjunto A. Particularmente, os casos sem rotação (primeira fileira) possuem assinaturas de helicidade bem mais intensas que aquelas onde há rotação. Enquanto isso, nas simulações com rotação, as helicidades perduram por vários tempos de Alfven, apresentando diversas reversões de sinal bem como uma evolução amortecida.

Estudos anteriores já haviam demonstrado que a presença de cisalhamentos em larga escala, combinados com alternâncias de sinal, poderiam levar a um efeito-α incoerente, o que poderia sustentar o dínamo (ex., Vishniac & Brandenburg (1997), Guerrero & Käpylä (2011), Mitra & Brandenburg (2012)). Portanto, os resultados apresentados aqui reforçam a possibilidade de um dínamo em larga escala atuando em zonas radiativas, em contradição com os resultados de Zahn et al. (2007) que sugerem que um efeito-α axissimétrico não resultaria da instabilidade de Tayler. Simulações onde o cisalhamento das camadas é incluído no modelo fazem parte de um trabalho futuro. Simulações numéricas recentes, no contexto de campos magnéticos em estrelas de nêutrons, sugerem que o dínamo de Tayler-Spruit é de fato possível (Fuller et al., 2019).

3.2.6 Conclusões parciais

Neste trabalho, utilizamos simulações MHD não lineares e em geometria esférica, para explorar a estabilização causada pela rotação em um campo magnético toroidal e antissimétrico em relação ao equador. A região simulada possui valores da frequência

de Brunt-Väisälä similares àqueles da parte inferior da tacoclina solar. As simulações foram realizadas resolvendo as equações da MHD em sua forma anelástica, através do código EULAG-MHD. Para tornar possível entender o papel da rotação na instabilidade de Tayler, consideramos casos sem e com rotação, com períodos que variam entre 300 e 10 dias. Adicionalmente, também trouxemos casos onde a rotação foi mantida fixa, mas a intensidade do campo o magnético inicial foi variada. Nossas análises foram realizadas em função das quantidades não dimensionais η (Eq. 3.11), que indica a importância relativa das forças de Coriolis e Lorentz, e δ (Eq. 3.10, que relaciona as contribuições das forças de empuxo e magnéticas.

Uma vez que é esperado que a difusividade magnética, bem como outros processos dissipativos, tenham valores desprezíveis na zona radiativa solar, utilizamos o código sem a aplicação explicita desses termos. Contudo, está sempre presente a dissipação numérica efetiva que, para o EULAG-MHD, é não linear, intermitente no espaço e no tempo, e dependente do tamanho da grade. Portanto, o aumento na resolução numérica do modelo resulta em uma menor dissipação, o que afeta a dinâmica do campo magnético de diferentes formas. Vale ressaltar que a redução simultânea das difusividades térmica e magnética pode ter efeitos opostos com relação a instabilidade de Tayler, confirmando neste trabalho os resultados apresentados por Zahn (1974) e Braithwaite (2006b).

Durante a evolução do campo magnético, distinguimos três estágios. Primeiro a fase linear, onde os modos instáveis crescem exponencialmente. A maioria dos trabalhos anteriores, com respeito à instabilidade de Tayler, estão focados nesse estágio. O segundo é quando os modos crescentes atingem seu valor máximo de energia e o campo magnético inicial apresenta um decaimento acentuado, identificada como a fase de saturação. O terceiro estágio é a fase de decaimento. Nessa fase, o espectro de energia segue uma lei de escalamento $E \sim m^{-5/3}$ que, portanto, identificamos como sendo um decaimento turbulento.

Para todos os conjuntos de simulações apresentados na Tabela 2 encontramos que os casos sem rotação ou com rotação lenta ($\eta < 6,7$) mostram um claro crescimento exponencial do modo longitudinal $m = 1$ durante a fase linear. Esta é a assinatura canônica da instabilidade de Tayler. Apesar dos modos instáveis iniciarem seu desenvolvimento na região polar, não houve diferença significativa na taxa de crescimento desses modos quando comparados com a região equatorial.

Para rotações mais rápidas ($\eta > 13,4$), a influência da rotação já se torna evidente e o modo $m = 1$ é mantido estável por vários ciclos de Alfven. Contudo, após este período de estabilidade, um surto repentino de energia ocorre para os modos $m \geq 1$, elevando seus níveis de energia próximos à energia do campo inicial, B_0. Esse resultado foi inesperado e, até onde sabemos, não foi reportado na literatura. Durante este trabalho não conseguimos identificar a natureza desses saltos energéticos e eles serão alvo de trabalhos futuros.

Mesmo assim, os resultados dos conjuntos de simulações A1, A3 e B indicam que o intervalo de tempo onde os modos $m \geq 1$ permanecem estáveis depende da amplitude inicial do campo magnético e da resolução das simulações, assim como da intensidade dos processos dissipativos. Essas dependências nos levam a crer que os surtos energéticos são um fenômeno físico e não um artefato numérico.

Seja através da instabilidade de Tayler ou dos saltos de energia, os modos instáveis alcançam níveis energéticos compatíveis com os do campo inicial, $B_{\phi 0}$. Isto é, em ambos os casos a energia para o crescimento dos modos é extraída do campo magnético inicial, que por sua vez decai durante a fase de saturação. Como consequência, uma mudança substancial na topologia do campo magnético é observada durante a fase de saturação. A taxa de decaimento dessas mudanças, $|\Gamma|$, depende do valor de η. Os resultados demonstram que a topologia do campo magnético inicial é menos afetado pela instabilidade de Tayler quando a rotação domina a escala de tempo do sistema.

Enquanto o campo toroidal decai, é possível observar a formação de componentes poloidais em todas as simulações. Nossa análise mostra que, para simulações com $\eta \gtrsim 30$, a razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\phi$ converge para um platô em $\sim 0,3$. O mesmo platô é observado para as simulações do conjunto A3, onde os parâmetros δ e η mudam. Para a simulação com alta resolução e alta rotação, B_R10B10, essa razão é ainda menor, $\overline{B}_P/\overline{B}_\phi \sim 0.1$. A implicação desse resultado é que, apesar da instabilidade inicial, o crescimento dos modos instáveis é efetivamente suprimido pela força de Coriolis. Esses modos transferem apenas uma pequena parcela da energia do campo toroidal para a componente poloidal. A topologia resultante passa a ser estável por centenas de ciclos de Alfven (ver Fig. 27).

Após atingir este platô em $\overline{B}_P/\overline{B}_\phi$ as simulações evoluem em um estado de equilíbrio, sujeitas apenas à difusão turbulenta. Para esses casos, mesmo com a redução na amplitude, o campo magnético apresenta poucas mudanças topológicas. Por outro lado, em simulações sem rotação ou com baixo η, a topologia inicial do campo desaparece. A componente poloidal cresce muito rapidamente e eventualmente leva ao término da simulação, exigindo passos temporais cada vez menores.

Enquanto ocorre a geração das componentes poloidais, antes da fase de saturação, as simulações passam a apresentar movimentações e correntes helicoidais, estas, por sua vez, associadas à existência de efeitos-α magnético e cinético. Apesar de não apresentarem um sinal preferencial em cada hemisfério, elas demonstram uma clara alternação de sinal durante uma evolução amortecida. Curiosamente, as helicidades apresentam maior amplitude nas simulações onde não há rotação, embora nesses casos sua duração também seja consideravelmente mais curta. A presença desse efeito-α incoerente pode ser suficiente para sustentar um dínamo. Assim, os resultados apresentados aqui podem auxiliar a ideia de um dínamo de Tayler-Spruit ocorrer em uma camada radiativa. Contudo, para que esse dínamo possa existir, uma certa quantidade de cisalhamento ainda é necessária

para recompor continuamente a componente toroidal do campo. A evolução do campo magnético sob tais circunstâncias será tratada em um trabalho futuro. Em um contexto de magnetares, resultados recentes (Fuller et al., 2019) já demonstraram a funcionalidade deste tipo de dínamo.

4 Cálculo dos coeficientes turbulentos do dínamo utilizando o método de campos de teste

Uma segunda parte deste trabalho é a construção de uma ferramenta que permita calcular, através do método de campos teste (TFM, em inglês), os coeficientes de transporte turbulento das simulações realizadas com o EULAG-MHD. Nesse capítulo, descreveremos a criação dessa ferramenta, através do acoplamento entre os códigos EULAG-MHD e o PENCIL Code, no qual o TFM já está implementado. Serão apresentados apenas resultados para simulações hidrodinâmicas de convecção turbulenta no interior solar (Guerrero et al., 2022). O principal motivo para trabalharmos inicialmente com essas simulações é que já existem resultados publicados dos coeficientes do dínamo obtidos para modelos similares. Isto permitiu termos pontos de comparação. Ainda não existe na literatura a avaliação dos coeficientes do dínamo para a instabilidade de Tayler através do TFM. Os resultados para as simulações apresentadas no capítulo anterior ainda estão em processo de desenvolvimento.

4.1 Acoplamento dos códigos

Como estamos interessados em descobrir os coeficientes do dínamo associados a simulações computacionais realizadas com o código EULAG-MHD, utilizando o TFM que está implementado no código PENCIL, torna-se necessário o acoplamento entre os dois códigos. Começaremos então por descrever o código Pencil, seguido de uma descrição das técnicas computacionais utilizadas para o acoplamento. Falaremos também dos obstáculos que se apresentaram no processo, bem como das soluções utilizadas para contorná-los. Por fim, traremos os resultados obtidos com esse acoplamento e suas análises.

4.1.1 O código Pencil

O Pencil Code (Pencil Code Collaboration et al., 2021) é um código desenvolvido originalmente para a solução de equações diferenciais parciais em simulações hidrodinâmicas e magneto-hidrodinâmicas, sendo aplicado majoritariamente na solução de modelos astrofísicos (Haugen et al., 2003). No entanto, sua estrutura modularizada permite aos seus usuários uma gama de modificações, permitindo a sua aplicação em diferentes modelos físicos desde a microfísica climática (Li et al., 2017) até modelos de combustão (Babkovskaia et al., 2011). O Pencil foi também adaptado para calcular os coeficientes de transporte

turbulento do dínamo utilizando o métodos dos campos de teste. Quando ativado, este módulo calcula as componentes dos tensores $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$ e $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}$, Eq. D.7, em paralelo com a evolução temporal do campo magnético simulado.

Para que fosse possível obter a mesma análise em simulações realizadas com o EULAG deveríamos recriar ou utilizar a ferramenta já disponível no Pencil. Dada a complexidade de sua implementação, bem como o fato dos resultado obtidos com o código Pencil terem sido validados pela comunidade científica, optamos pelo acoplamento entre os códigos. Desse modo, o EULAG transmite os dados relevantes para que os coeficientes do dínamo sejam calculados pelo Pencil. A complexidade do acoplamento reside no paralelismo implementado em ambos os códigos utilizando a passagem de dados entre processadores através da biblioteca MPI.

4.1.2 MPI

Uma forma de realizar a comunicação de dados entre os códigos EULAG e Pencil é através da biblioteca MPI (Message Passing Interface Forum, 2023) (sigla em inglês para *Message Passing Interface*), que fornece um conjunto robusto de funcionalidades para o desenvolvimento de aplicações paralelas e distribuídas em sistemas de computação de alto desempenho. É utilizando o MPI que EULAG e Pencil acessam os processadores das máquinas em que são executados. Assim, uma vez que sua utilização é nativa a ambos, nos aproveitamos dessa funcionalidade para acoplar os códigos. Além disso, existem funções no MPI que são essenciais para garantir a integridade dos dados comunicados. Entre elas estão:

1. **Inicialização e Finalização:** O MPI_Init e o $MPI_Finalize$ são rotinas essenciais que inicializam e finalizam o ambiente MPI, respectivamente. Elas preparam o ambiente para comunicação entre unidades de memória localizadas em diferentes núcleos de processamento (chamados daqui em diante de processadores);

2. **Comunicação entre processadores:** O MPI fornece uma variedade de rotinas para enviar e receber mensagens entre processadores. Isso inclui MPI_Send e MPI_Recv para comunicação síncrona, e MPI_Isend e MPI_Irecv para comunicação assíncrona, permitindo que os processos continuem sua execução enquanto a comunicação ocorre em segundo plano;

3. **Manipulação de Grupos de Processos:** O MPI permite que os programas criem grupos de processadores e determinem o número de processadores em um grupo, bem como atribuir identificadores exclusivos a cada processador. Isso é feito com rotinas como MPI_Comm_size e MPI_Comm_rank;

4. **Operações Coletivas:** O MPI suporta operações coletivas, como operações matemáticas que reduzem a informação de vários processadores à um único valor (MPI_Reduce), dispersão ($MPI_Scatter$) e agrupamento (MPI_Gather) de dados entre processos. Essas operações são fundamentais para sincronizar e compartilhar informações entre processadores de forma eficiente;

5. **Manipulação de Dados Distribuídos:** O MPI fornece rotinas para manipulação de dados distribuídos, como $MPI_Scatterv$ e $MPI_Gatherv$, que permitem enviar e receber partes de matrizes ou vetores entre os processos de maneira eficiente;

6. **Sincronização e Barreiras:** O MPI oferece rotinas para sincronização entre processos, como $MPI_Barrier$, que garante que todos os processos alcancem um ponto de execução antes de continuar;

Essas são apenas algumas das funções essenciais do MPI, com as quais os códigos optimizam sua comunicação e utilização do *hardware* disponível. É através delas que desenvolvemos nossa ferramenta.

4.1.2.1 Garantias iniciais de execução

O primeiro ponto que devemos garantir com nossa ferramenta é que, tanto EULAG quanto Pencil, possam ser executados de forma independente após nossas modificações. Com isso, um usuário que queira realizar uma simulação sem a presença da análise do TFM, não precisaria alterar suas rotinas ou sofrer perda de performance. Para isso, atuamos dentro do segmento de inicialização do ambiente MPI. Com MPI_Init, os processadores disponíveis na execução são interligados a um comunicador denominado MPI_Comm_World, independentemente do número de códigos executado simultaneamente. Aqui, nós alteramos as menções locais à MPI_Comm_World por MPI_Comm_EULAG, para o EULAG e MPI_Comm_PENCIL, para o PENCIL[1]. Em seguida, informamos aos códigos quantos programas estão sendo executados simultaneamente, através do comando $MPI_Comm_Get_Attr$, e utilizamos a rotina MPI_Comm_Split para "dividirmos"o comunicador MPI_Comm_World nos comunicadores locais. Quando apenas um dos códigos está sendo executado, esse passo faz apenas com que $MPI_Comm_World \rightarrow MPI_Comm_Local$, mudando seu nome, mas ainda mantendo sua funcionalidade original. No entanto, quando possuímos duas aplicações simultâneas, esse passo divide a variável global em suas contrapartes locais.

Na sequência utilizamos a rotina MPI_Comm_size, para definir o número de processadores disponíveis, e MPI_Comm_rank, onde os processadores recebem identificadores exclusivos, *ranks*, tanto no comunicador global, como nos locais. Esse passo está exempli-

[1] Por praticidade as variáveis locais serão denominadas como tal quando necessário Ex.: MPI_Comm_Local

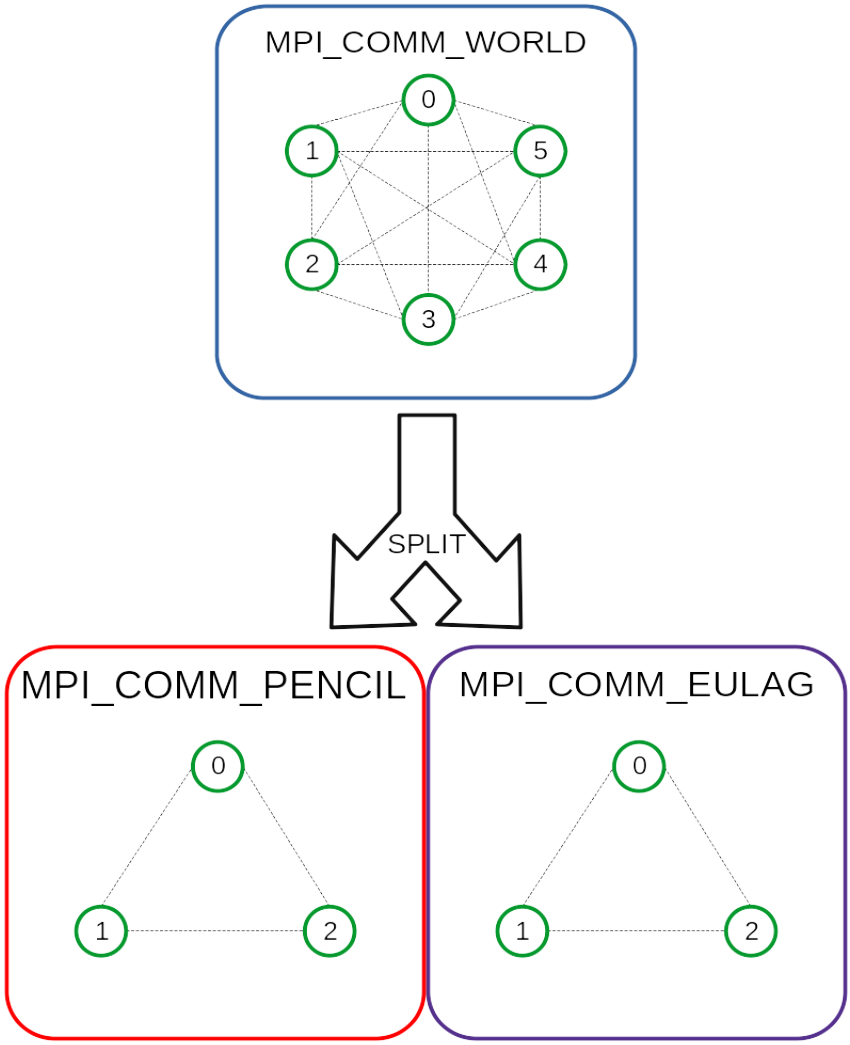


Figura 33 – Exemplo de como os processadores associados ao comunicador MPI_Comm_World são separados, após o comando MPI_Comm_Split, entre os comunicadores MPI_Comm_PENCIL e MPI_Comm_EULAG.

ficado na Fig. 33, onde vemos que os processadores associados à MPI_Comm_World são divididos igualmente entre às variáveis MPI_Comm_PENCIL e MPI_Comm_EULAG. É importante ressaltar que a variável e os *ranks* globais não desaparecem após o processo, podendo ser utilizados normalmente quando necessário. Além disso, a divisão dos processadores entre os novos comunicadores não necessita ser igualitária como na figura, podendo a nova distribuição ocorrer conforme a necessidade de processamento de cada código. Para a nossa ferramenta, foi escolhido de forma arbitrária que o MPI_Comm_PENCIL, receberia os primeiros *ranks* e os seguintes ficariam para MPI_Comm_EULAG.

4.1.2.2 A geometria dos códigos e a distribuição de dados

Agora que temos os processadores disponíveis divididos entre EULAG e Pencil, nós podemos iniciar de fato o acoplamento entre os códigos. Para isso, transmitimos entre eles, através dos processadores de ranking 0, algumas informações básicas como: a distribuição dos processadores nas componentes espaciais do modelo, tag[2], qual esquema de grade está sendo utilizado, tamanho do passo temporal, unidades básicas de medida físicas utilizadas, bem como a extensão do domínio, etc. Uma vez que o Pencil utiliza de unidades de código e o EULAG de unidades físicas, esses passos são necessários para garantir que os dados recebidos pelo Pencil possam ser normalizados da forma correta e retenham seu significado físico. Outro ponto importante neste momento é que o ambiente simulado pelo Pencil não consegue incluir a região dos polos, devido a presença de singularidades e do algoritmo de diferenças finitas de sexta ordem usado nele. O que fizemos então foi comprimir os dados do EULAG no espaço disponível, acarretando num ligeiro estreitamento das grandezas físicas quando comparamos as saídas dos dois códigos. Como foi possível chegar a uma perda de apenas 2 graus em cada hemisfério, consideramos justificável manter a abordagem.

Esse primeiro passo é essencial e facilmente executado uma vez que a transmissão é realizada através dos processadores de ranking 0. Contudo, a partir desse momento a geometria dos códigos torna a comunicação entre eles muito mais complexa. Isso ocorre pois na construção de um código há a necessidade de determinar prioridades quanto a distribuição de processadores. A escolha pode ter as mais diversas razões, mas quase sempre são arbitrárias e determinadas pelos desenvolvedores. No entanto, EULAG e Pencil apresentam prioridades distintas nessa distribuição. Peguemos, por exemplo a geometria esférica. Nesse caso, o PENCIL Code identifica seus processadores na ordem de prioridade r, θ, ϕ, já o EULAG utiliza ϕ, θ, r na construção dessa prioridade e, como possui paralelização apenas nas componentes ϕ e θ, r receberá apenas um processador sempre.

Um exemplo de como isso ocorre está demonstrado na Fig. 34 onde 4 processadores são designados para cada um dos códigos sendo 2 para θ, 2 para ϕ e 1 em r[3] Na figura, vemos os rankings dos processadores representados em preto, enquanto que em verde, azul e vermelho vermos as "coordenadas"dos processadores em r, ϕ e θ, respectivamente. Vemos então que o processador de ranking 0 ocupará sempre a coordenada $(0, 0, 0)$, enquanto que os rankings 1 e 2 possuem coordenadas opostas nos códigos. Na prática, nem o número de processadores nos códigos, nem a distribuição entre as componentes precisa ser igualitária como no exemplo anterior. No entanto, mesmo sendo um exemplo simples, é fácil perceber que o envio de dados não pode ser feito diretamente entre processadores de mesmo ranking, já que não necessariamente representam a mesma região do espaço simulado.

[2] identificador numérico arbitrário utilizado nos dois lados da comunicação para garantir reconhecimento entre o emissor e o receptor. Evita "linhas cruzadas"na comunicação.

[3] O número total de processadores é calculado através da multiplicação direta entre os processadores em cada dimensão. Logo, neste exemplo, temos: $2 \times 2 \times 1$ resultando num total de 4 processadores.

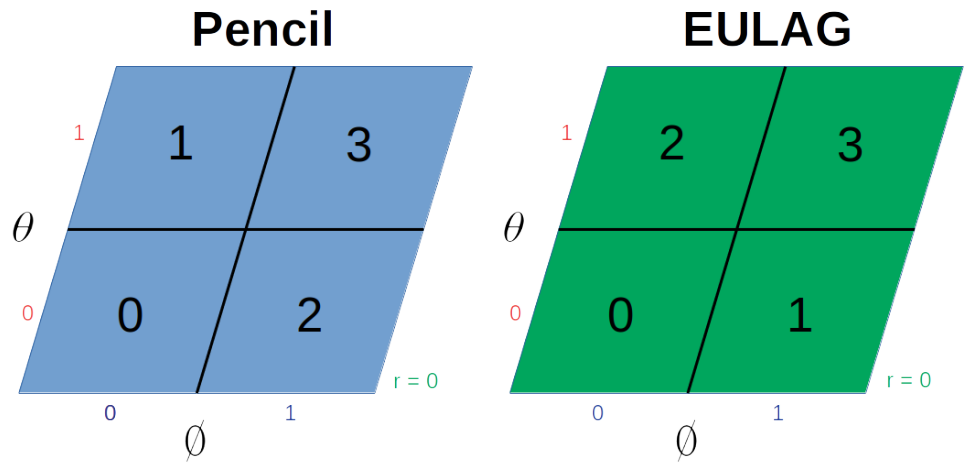


Figura 34 – Demonstração de como a alocação de processadores é realizada no EULAG e no Pencil, com as coordenadas de cada processador sendo expressa com relação a devida dimensão.

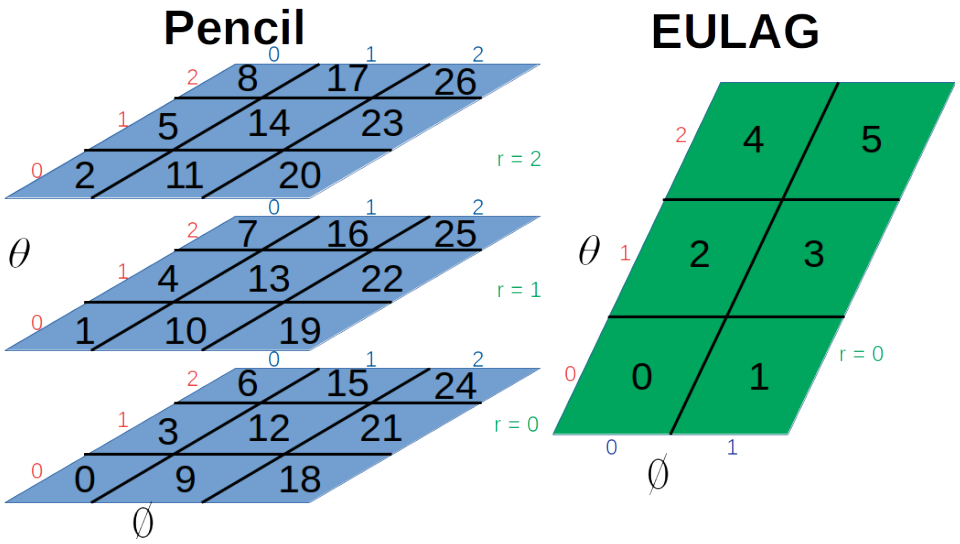


Figura 35 – Figura similar a Fig. 34, mas com uma distribuição mais realista dos processadores. Aqui, podemos observar um maior número de processadores em r, gerando novas camadas de processamento.

Além da troca nas coordenadas dos rankings devido a ordem de prioridade, outra diferença importante na estrutura dos códigos é o paralelismo em r, que existe no Pencil, mas não no EULAG. Dada a demanda computacional do TFM, é essencial que o Pencil utilize de todos os recursos disponíveis. Desse modo, é necessário não apenas enviar os dados ao processador correto, mas sim distribui-lo no número máximo de processadores disponíveis.

A Fig. 35 mostra, em uma menor proporção, como foi realizada a distribuição dos dados. No lado direito, observamos os dados do EULAG distribuídos em seus 6 processadores sendo 2 em ϕ, 3 em θ e 1 em r. Enquanto isso, a esquerda, vemos que o Pencil

se utiliza de 27 processadores sendo 3 em ϕ, 3 em θ e 3 em r. Uma vez que a distribuição de dados precisaria ser refeita para a dimensão r, optamos também por estender o mesmo princípio as demais dimensões, tornando possível a configuração final de processadores utilizada em nosso trabalho onde tivemos o EULAG trabalhando com 32 processadores, enquanto que o Pencil utilizou 256 no total. Esses valores foram limitados pelo hardware ao qual tivemos acesso, mas, da forma como foi construída esta ferramenta, não existe limite para o número de processadores exceto àquele definido pela grade computacional. Agora, nos resta apenas escolher um modelo no qual testar nossa ferramenta.

4.1.2.3 Modelo de teste

Como explicado na seção anterior, o modelo escolhido para testar o acoplamento é um modelo global com convecção turbulenta nos casos HD e MHD (resultados não apresentados neste documento). O principal motivo para escolhermos esse modelo é a possibilidade de comparação com resultados dos coeficientes dínamo obtidos com modelos similares que utilizam técnicas diferentes (Simard et al., 2016; Warnecke et al., 2018; Guerrero et al., 2019). Vale notar que o TFM requer apenas os campos de velocidade para calcular os coeficientes do dínamo. Desse modo, o campo magnético da simulação não seria explicitamente relevante nesse cálculo, mas apareceria de forma implícita através do *feedback* causado pela força de Lorentz no campo de velocidades.

Assim, escolhemos o modelo R1x24, com uma resolução $128 \times 64 \times 256$ em ϕ, θ e r, apresentado em Guerrero et al. (2022). Esse modelo possui uma casca esférica que se estende de $0.6R_\odot$ à $0.96R_\odot$ e cuja termodinâmica e estratificação se assemelham à solar, incluindo zona radiativa, tacoclina e zona convectiva. Aqui, são utilizadas as Eqs. 3.1- 3.3, sem as contribuições de $\boldsymbol{B}$ na Eqs. 3.3 e com um período de rotação equivalente a 24 dias. Sendo assim, evoluímos a simulação apenas no EULAG até um estado onde as velocidades são consideradas estatisticamente estáveis, ou seja, sem variações significativas com o tempo. É nesse momento que iniciamos o acoplamento.

4.2 Resultados

Ao realizarmos esse o acoplamento, podemos inicialmente direcionar todos os nossos recursos para o EULAG, acelerando a evolução do modelo de convecção até atingir o estado estacionário. Em seguida, redistribuímos os processadores, alocando a maioria deles para o Pencil, optimizando o tempo necessário para o cálculo dos coeficientes do dínamo. Nosso primeiro passo então é confirmar que os dados enviados pelo EULAG são fidedignos.

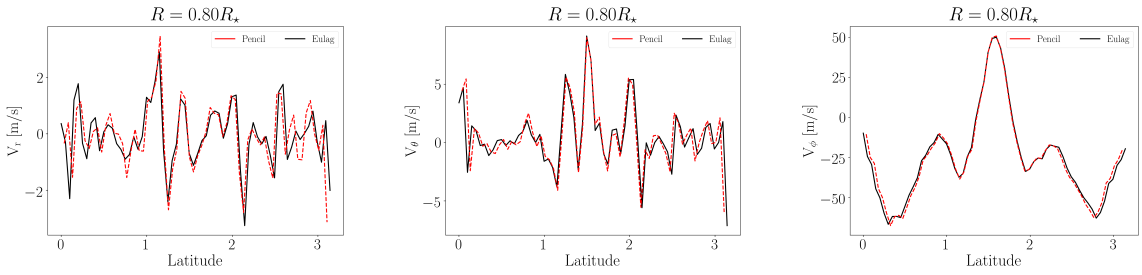


Figura 36 – Esquema comparativo entre as componentes da velocidade enviada pelo EULAG (preto) e recebidas pelo Pencil (vermelho). É possível observar a diferença nas velocidades causada pela compressão do domínio latitudinal no código Pencil.

4.2.1 Comparação das velocidades

Como mencionado anteriormente, o Pencil não é capaz de alcançar os polos em suas simulações devido à singularidades. No entanto, as simulações ainda podem ser realizadas através da exclusão de um "cone"nas regiões polares. O ângulo correspondente ao cone está diretamente associado ao passo temporal da simulação, que se torna menor conforme reduzimos o ângulo. Em nosso acoplamento, desejamos reduzi-lo ao máximo para tornar o espaço simulado pelo Pencil o mais fidedigno com a esfera completa simulada pelo EULAG. Após realizarmos testes com diferentes ângulos, escolhemos um ângulo de 2° como um comprometimento razoável entre a precisão do acoplamento e o passo temporal requerido pela simulação. Sendo assim, a resolução de grade usada no Pencil é a mesma da grade usada no EULAG porém com os dados confinados a um domínio latitudinal que exclui 2° em cada polo.

Na Fig. 36 podemos observar a comparação entre os perfis latitudinais das componentes da velocidade. Esses perfis foram feitos a partir de uma média longitudinal da velocidade, em $r = 0.8R_\star$ e com o resultado do Pencil em vermelho e o do EULAG em preto. É possível observar a clara compressão das velocidades ao serem transmitidas para o Pencil. Fora isso os perfis são coerentes, divergindo um pouco apenas em V_r devido à efeitos de borda que tendem a ser mais proeminentes nesta componente. Essa coerência é reforçada pela Fig. 37 onde vemos perfis meridionais das componentes V_r (esquerda), V_θ (centro) e V_ϕ (direita) obtidas com EULAG (fileira superior) no momento exato do primeiro envio, e recebidas pelo Pencil (fileira inferior). Tanto a estrutura quanto a intensidade das velocidades são idênticas em ambas as fileiras. Com esse resultado, temos a condição inicial para calcularmos os coeficientes do dínamo.

4.2.2 Cálculo do coeficientes

Como explicamos na Sec.2.2.3, o sistema de 27 equações resolvido pelo TFM é construído a partir de 9 campos teste linearmente independentes. Os campos utilizados

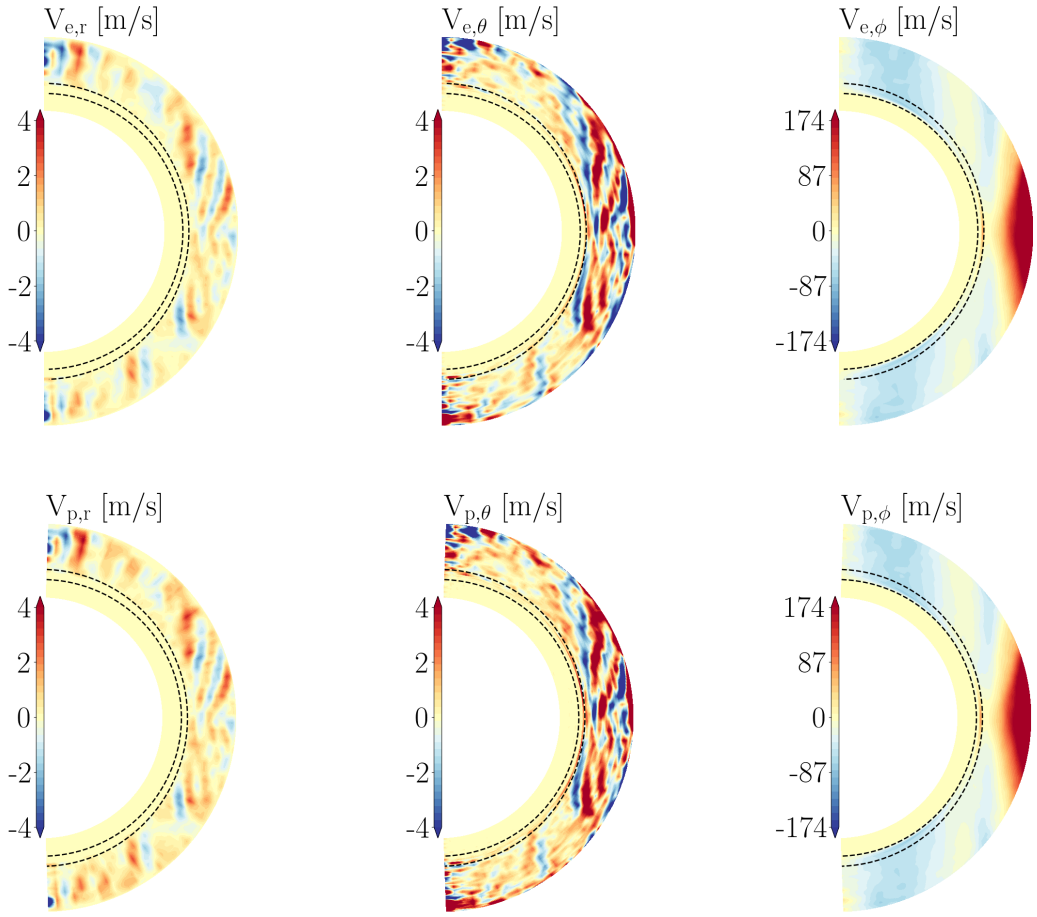


Figura 37 – Gráfico meridional comparando as velocidades que são enviadas pelo EULAG (fileira superior) com aquelas recebidas pelo PENCIL (fileira inferior). Cada coluna corresponde a uma componente do campo de velocidade, sendo elas da esquerda para direita: r, θ e ϕ, respectivamente. A compressão dos dados na fileira inferior é causada pela diferença na componente θ do espaço simulado.

neste trabalho estão reproduzidos na Tabela 3. Além deles, devemos indicar também o valor de η_d (ver Eq. 2.33) uma vez que a simulação progenitora foi calculada no EULAG sem coeficientes explícitos de difusividade.

$\overline{\boldsymbol{B}}_T$/ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{\boldsymbol{B}}_{Tr}^{(i)}$	1	0	0	r	0	0	θ	0	0
$\overline{\boldsymbol{B}}_{T\theta}^{(i)}$	0	1	0	0	r	0	0	θ	0
$\overline{\boldsymbol{B}}_{T\phi}^{(i)}$	0	0	-1	0	0	-r	0	0	$-\theta$

Tabela 3 – Campos de teste utilizados neste trabalho. Cada campo i é representado por uma coluna, onde cada uma das linhas representa as suas componentes em coordenadas esféricas.

Para que possamos estimar os coeficientes do dínamo em nossas simulações devemos avaliar primeiro a sua série temporal. Em algumas situações é comum que durante a evolução dos coeficientes, estes não encontrem convergência e cresçam indefinidamente

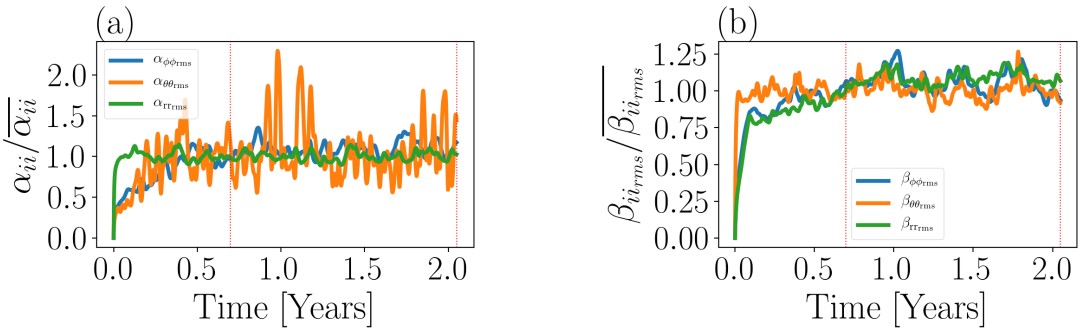


Figura 38 – Evolução temporal dos valores rms dos coeficientes α e β. As linhas pontilhadas verticais delimitam o intervalo de tempo utilizado para o cálculo efetivo dos coeficientes, denominado no texto de platô. Esse intervalo é aquele onde os coeficientes podem ser considerados estatisticamente estáveis.

devido à instabilidades numéricas. Nesses casos, é necessário reiniciar o TFM zerando os coeficientes e recalculando-os. Entre essas reinicializações, acabam formando-se platôs, intervalos de tempo onde o valor dos coeficientes se encontra estatisticamente estável e onde é possível estimar os seus valores. Em nosso modelo, com um valor de difusividade magnética, $\eta_d = 1,87 \times 10^9$ m^2/s (simulação A01 na Tabela 3), não houve necessidade de reinicialização pois os coeficientes apresentaram convergência. Na Fig. 38, representamos a evolução temporal do valor rms para os coeficientes α (painel a) e β (painel b), ambos normalizados pelos seus respectivos valores médios durante o platô, estado estacionário de $\sim$ 1.5 anos (ver linhas pontilhadas verticais). Na figura, percebemos que cada um dos coeficientes atinge a estabilização em momentos diferentes. Por isso, utilizamos um algoritmo que determina, a partir do valor médio do coeficiente, se o coeficiente está ou não no platô.

A Fig. 39 mostra a média longitudinal e temporal das componentes da diagonal principal do tensor α para nossa simulação. Para comparação, a Fig. 40 trás as mesmas quantidades obtidas para a simulação H1 apresentada em Warnecke & Käpylä (2020)[4] realizada e analisada inteiramente no Pencil Code. A simulação H1 corresponde a um modelo de convecção em um domínio de tipo "wedge", hidrodinâmico, sem a presença de uma camada radiativa na parte inferior do seu domínio e com rotação ligeiramente inferior a utilizada na simulação A01. O "wedge"é uma casca esférica na qual foram retirados cones de 15° nos polos. Na Fig. 40 os valores dos coeficientes α aparecem em unidades de código, contudo, estimativas indicam que eles sejam da ordem de 10^5 m/s[5]. Contudo podemos observar que o coeficiente $\alpha_{\rm rr}$ é o mais intenso nas duas simulações, aproximadamente

[4] Durante a comparação estaremos nos referindo a esta simulação como H1

[5] Buscando acelerar o relaxamento térmico da simulação, alguns autores optam por aumentar a luminosidade do modelo. Esse processo acaba por aumentar a energia interna do meio e, como consequência, as velocidades.

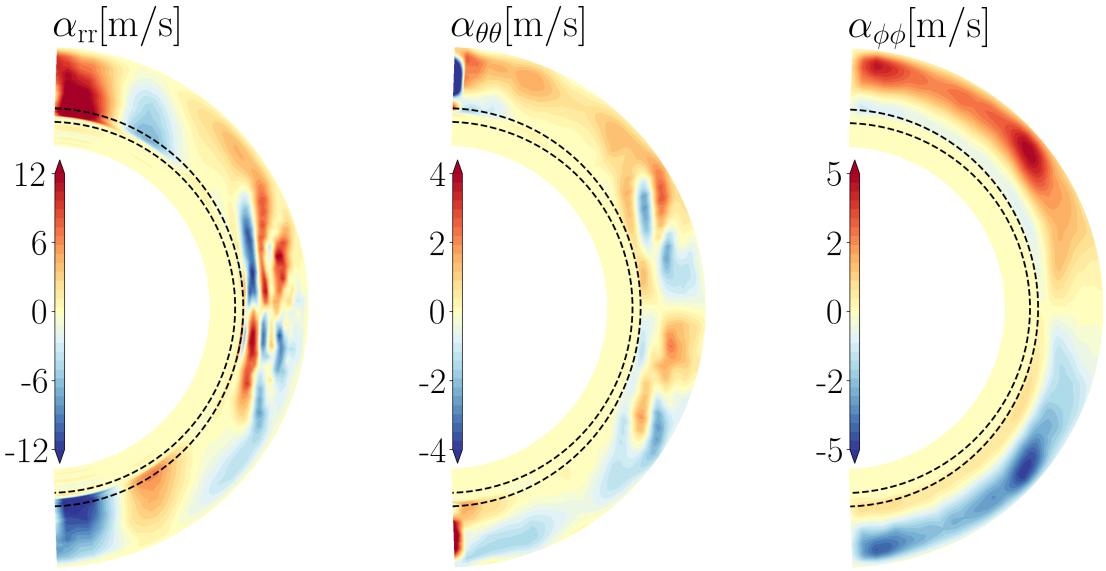


Figura 39 – Distribuição meridional dos coeficientes da diagonal principal de α com α_{rr} (esquerda), $\alpha_{\theta\theta}$ (centro) e $\alpha_{\phi\phi}$ (direita). As linhas tracejadas pretas demarcam a região da tacoclina no modelo.

duas vezes maior do que $\alpha_{\phi\phi}$. Vemos também que $\alpha_{\phi\phi}$ apresenta uma estrutura idêntica em ambos os casos, sendo majoritariamente positivo no hemisfério norte e negativo no hemisfério sul, com reversão de sinal na base da zona convectiva. Para $\alpha_{\theta\theta}$, observamos uma anti-simetria com respeito ao equador com reversão de sinal quando vamos de altas para médias latitudes. Já α_{rr} apresenta também anti-simetria com respeito ao equador em ambas as simulações, o sinal predominante é o mesmo em ambas as simulações porém, a simulação A01 apresenta variações radiais melhor definidas e apresenta valores bem definidos nos polos, região ausente na simulação H1. Isto ressalta a importância da região polar nas simulações convectivas. Essa região deve ser cuidadosamente incorporada nas simulações.

Com respeito à teoria dínamo, o fato desses três coeficientes terem valores semelhantes e diferentes de zero implica em um dínamo que, na sua fase cinemática, é de tipo $\alpha^2\Omega$. Isto significa que o efeito-α é fonte tanto do campo poloidal quanto do toroidal.

Além disso, nossa simulação mostra uma presença considerável de α_{rr} na região da tacoclina, especialmente em latitudes mais altas. Esse resultado é importante pois reforça a relevância da tacoclina no processo de geração e manutenção do dínamo. Guerrero et al. (2022) acreditam que a origem desse sinal pode estar relacionada com a presença de ondas inerciais. Contudo, apesar das diferenças descritas acima, os resultados de ambas as simulações são consistentes entre si.

Além do efeito-α outra grandeza importante para o dínamo proveniente do tensor $\overleftrightarrow{a}$ é o efeito de bombeamento turbulento (*turbulent puping*), efeito-γ. Matematicamente

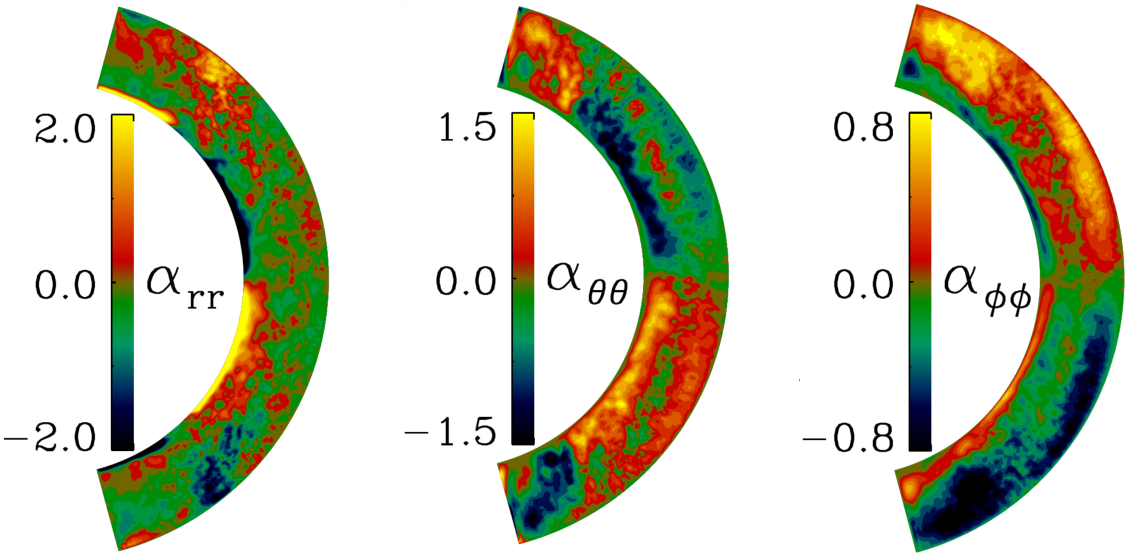


Figura 40 – Distribuição meridional dos coeficientes da diagonal principal de α com $\alpha_{\rm rr}$ (esquerda), $\alpha_{\theta\theta}$ (centro) e $\alpha_{\phi\phi}$ (direita) para a simulação H1 de Warnecke & Käpylä (2020).

pode-se observar (ver Eq. D.8) que esse efeito é responsável pela advecção do campo magnético. Do ponto de vista físico, entende-se esse efeito como a tendência do campo magnético escapar das regiões mais turbulentas. Na Fig. 41 são apresentados os coeficientes $\gamma_{\rm r}$, γ_θ e γ_ϕ ($\gamma_i = \frac{1}{2}(a_{j,k} - a_{k,j})$, onde $i, j, k = \{r, \theta, \phi\}$) obtidos na simulação A01. Para comparação, na Fig. 42 apresentamos os mesmos coeficientes para a simulação H1. Vemos que os nossos resultados reproduzem adequadamente a simetria desses coeficientes com respeito ao equador. No entanto, uma comparação mais detalhada não mostra maiores semelhanças entre eles. Um possível motivo para essa discrepância pode estar relacionado a diferenças na estrutura estelar em ambos os modelos.

Na Fig. 41 (painel direito), γ_ϕ nos mostra como o plasma tende a se deslocar longitudinalmente. Como vemos, a sua intensidade é relativamente pequena quando comparada à velocidade de rotação do modelo ($\sim$ 2000 m/s), tornando desprezíveis possíveis contribuições suas para o dínamo. Já γ_θ e γ_r competem com a circulação meridional cuja amplitude nas simulações é de $\sim$ 30 m/s (ver Fig.7a de (Guerrero et al., 2022)), ou seja, têm valores comparáveis. Portanto, poderiam contribuir para o dínamo deslocando o campo magnético.

Vemos na Fig 41 (painel esquerdo) que γ_r mostra valores positivos em raios externos (região mais turbulenta), enquanto que em raios mais internos (região menos turbulenta) esses valores são negativos. Assim, um campo magnético seria transportado verticalmente para cima na parte superior do domínio, e bombeado para baixo na parte inferior. Já na Fig 41 (painel central) vemos que γ_θ transportaria um campo magnético principalmente em

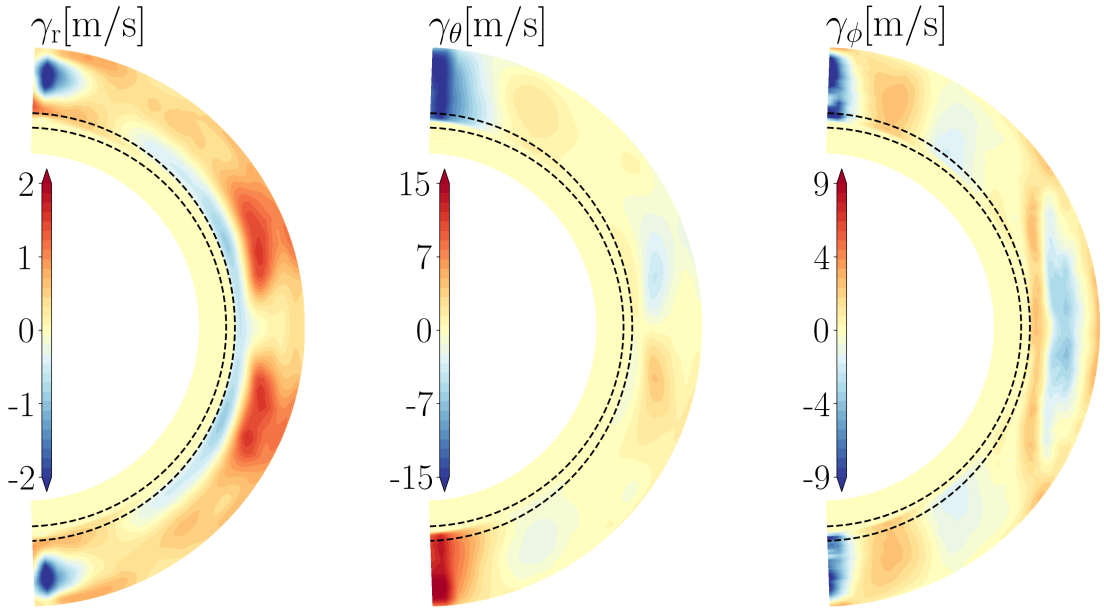


Figura 41 – Distribuição meridional dos coeficientes bombeamento turbulento γ_r (esquerda), γ_θ (centro) e γ_ϕ (direita). As linhas tracejadas demarcam a região da tacoclina.

direção aos polos em cada hemisfério. Observamos também um acúmulo desse transporte em ambos os polos que, em modelos MHD, não apresentados neste trabalho, é inexistente.

As componentes de γ também alcançam a região da tacoclina, indicando o possível transporte de campo magnético a regiões mais estáveis onde o campo poderia ser estocado e/ou amplificado (Guerrero; Käpylä, 2011). Isto reforça a contribuição da tacoclina, quando presente nas simulações, nos processos associados com o dínamo turbulento.

O último dos coeficientes apresentados nesse texto é a parte simétrica do tensor $\overleftrightarrow{b}$, o coeficiente β, conhecido como a difusidade magnética turbulenta do meio. Fisicamente esse coeficiente representa o quão efetiva é a turbulência do meio em dissipar o campo magnético. Na Fig. 43 podemos observar o traço do tensor β, $\beta_{tr} = \beta_{rr} + \beta_{\theta\theta} + \beta_{\phi\phi}$, calculado pelo TFM para a simulação A01 (esquerda) e para a simulação H1 (direita). Como vemos, no painel da direita da figura, a simulação H1 apresenta valores sempre positivos de β, sendo mais intenso na borda superior do domínio. Nossas estimativas indicam valores de β_{tr} para H1 da ordem de $10^{14} - 10^{15}$ [m^2/s], ou seja, até seis ordens a mais que nosso resultado. No painel da esquerda, observamos que em nossa simulação, esse coeficiente, embora majoritariamente positivo, apresenta regiões com valores negativos em locais próximos à tacoclina na região equatorial. Do ponto de vista físico, esse resultado indicaria uma região de intensificação espontânea do campo magnético. Embora não tenhamos sido capazes de determinar se a origem dessas estruturas é física ou numérica para esta simulação, alguns trabalhos apontam para a possibilidade de que pequenas regiões de difusividade turbulenta negativa, como a mostrada na figura, possuam origem

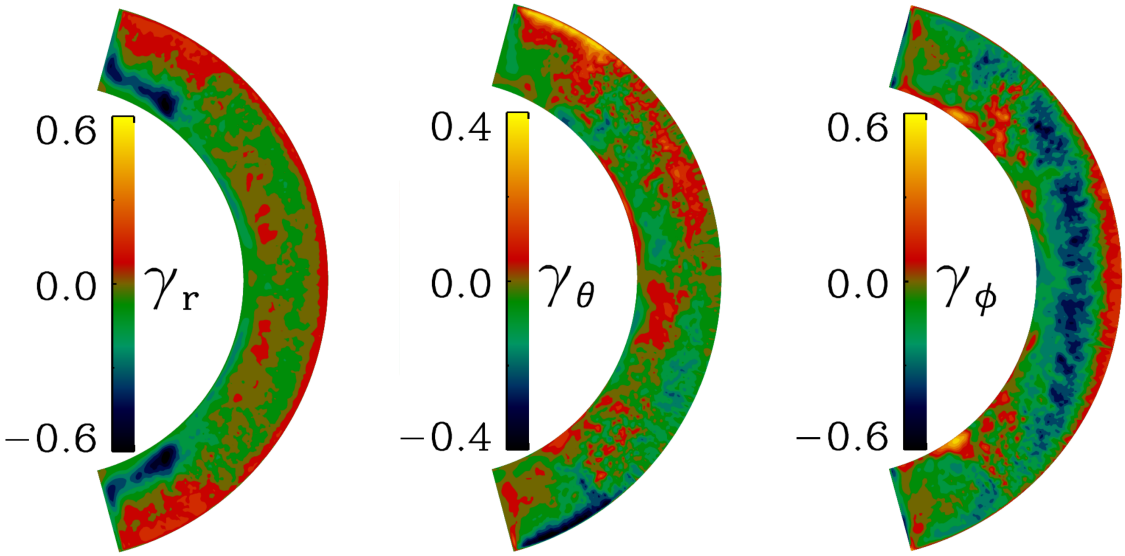


Figura 42 – Distribuição meridional dos coeficientes bombeamento turbulento γ_r (esquerda), γ_θ (centro) e γ_ϕ (direita) para a simulação H1 presente em (Warnecke; Käpylä, 2020).

física (Ryu, 2021).

Em Guerrero et al. (2019), os autores estimaram a difusividade magnética turbulenta em simulações de dínamo convectivo utilizando FOSA (ver Sec. 2.2.2). Os valores encontrados para a região convectiva se encontram entre 10^8 e 10^9 em concordância com os valores encontrados com o TFM na simulação A01. Para a simulação H1, nossas estimativas de conversão da unidade de código indicam valores da ordem de 10^4 [m/s].

Os demais coeficientes calculados pelo TFM, possuem uma influência pequena, ex. efeito-δ (Rädler, 1969) no dínamo ou tem a sua natureza física indeterminada ex. efeito-κ (Schrinner et al., 2005). As suas contribuições são quase sempre negligenciadas em detrimento de efeitos de ordem superior como os efeitos α, β e γ. Dessa forma, deixaremos o estudo dos efeitos δ e κ fora das análises apresentadas neste documento.

Para analisarmos uma simulação utilizando o TFM, vimos que era necessário extrair dela o campo de velocidades. Além disso, se faz necessário considerar uma difusividade magnética para os campos de teste, η_d, pois o Pencil Code utiliza termos dissipativos de forma explícita. Sendo esse um parâmetro livre, torna-se necessário testar a influência desse parâmetro nos coeficientes resultantes. A Tabela 4 mostra os valores de η_d utilizados nos modelos A01-A06, que diferem apenas nesse parâmetro.

A Fig. 44 mostra os perfis radiais, considerando uma média em tempo, longitude e latitude, dos coeficientes da diagonal principal de (a) α e (b) β. A cor de cada linha está associada a uma simulação com diferente valor de η_d, enquanto que as linhas pretas

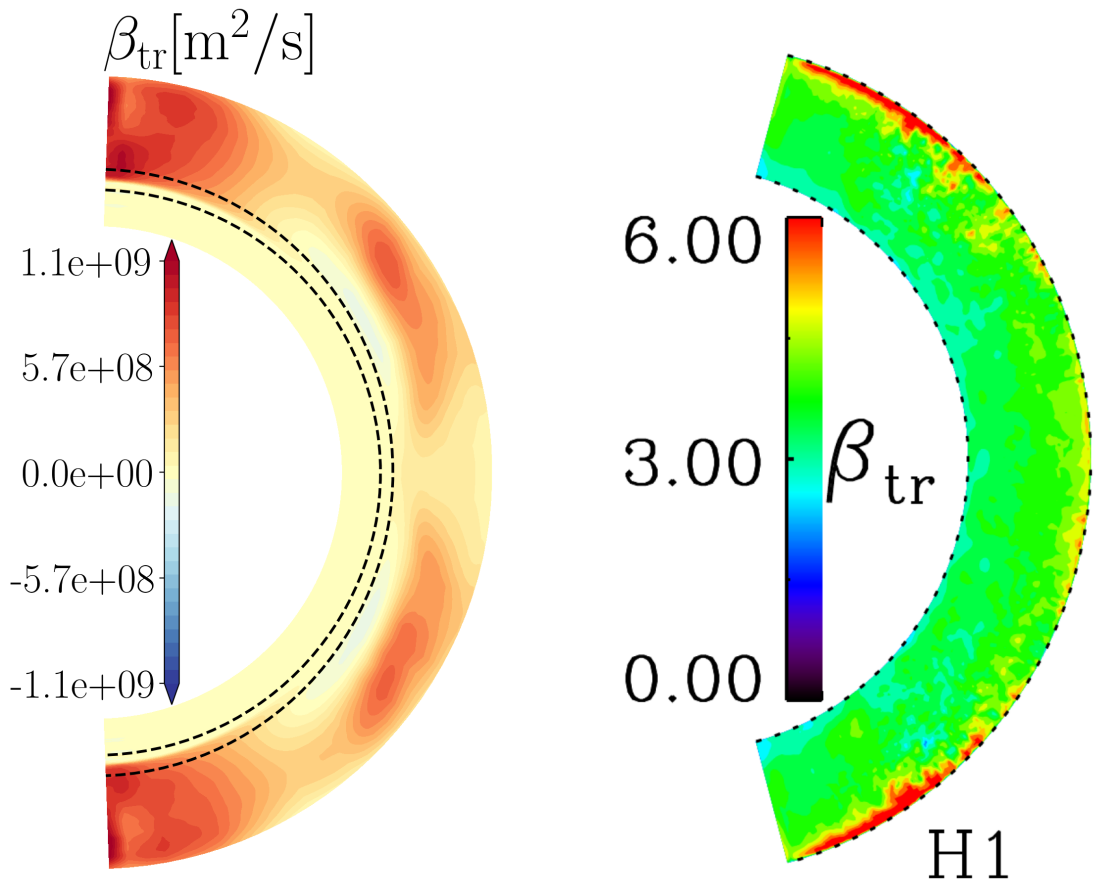


Figura 43 – Representação meridional do traço da difusividade turbulenta, $\beta_{tr} = \beta_{rr} + \beta_{\theta\theta} + \beta_{\phi\phi}$, para a simulação A01 (esquerda) e para a simulação H1 (direita) (Warnecke; Käpylä, 2020). As linhas tracejadas no painel esquerdo demarcam a região da tacoclina.

Set	Model	$\Omega_0 \cdot 10^{-6}$ [Hz]	$\eta_d \times 10^8$ [m^2/s]
A	A01	3.03	1.87
	A02	3.03	0.23
	A03	3.03	0.47
	A04	3.03	0.94
	A05	3.03	3.74
	A06	3.03	7.48

Tabela 4 – Simulações e parâmetros utilizados na Fig.. 44. Ω_0 é proveniente do modelo no EULAG, enquanto que η_d é incluído como definição no TFM.

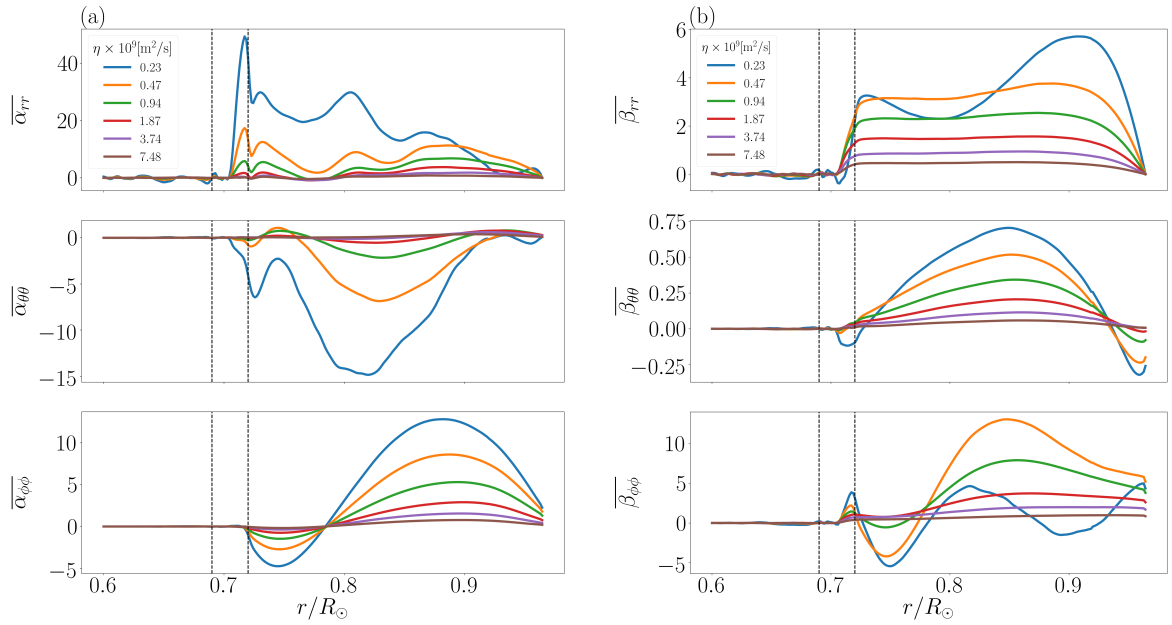


Figura 44 – Distribuição radial dos coeficientes da diagonal principal de (a) α e de (b)β para as simulações apresentas na Tabela 4. Cada simulação está associada a uma cor no gráfico pelo valor de η_d. As linhas tracejadas verticais representam os limites radiais da tacoclina na simulação.

tracejadas verticais demarcam a região da tacoclina. Observamos que a escolha de η_d não influencia significativamente no perfil dos coeficientes. Contudo, menores valores de η_d resultam em coeficientes com maiores amplitudes. Espera-se que a medida que o valor de η_d diminui, a amplitude dos coeficientes fique independente desse valor. No entanto, isso não aconteceu com a resolução numérica utilizada. Por motivos de estabilidade numérica, para podermos reduzir ainda mais o valor de η_d, é necessário aumentar a resolução numérica utilizada no código Pencil. Até o momento essas simulações não foram realizadas.

Os perfis médios apresentados na Fig. 44 permitem observar mais claramente a existência dos efeitos α e β abaixo da zona convectiva. Isto confirmaria a existência de instabilidades e turbulência em uma região comumente considerada estável. Infelizmente, a contribuição desses efeitos nessa camada é dependente do valor de η_d. Assim, por enquanto, não é possível determinar esta contribuição.

4.3 Conclusões parciais

Nesta parte do trabalho construímos uma ferramenta que permite calcular, através do método de campos teste (TFM, em inglês), os coeficientes de transporte turbulento das simulações realizadas com o EULAG-MHD. Dada a complexidade de implementar tal método, bem como o fato dos resultado obtidos com a ferramenta preexistente no código Pencil já terem sido validados pela comunidade científica, optamos pelo acoplamento entre

os códigos.

O modelo escolhido para testar o acoplamento é um modelo global de convecção turbulenta nos casos HD e MHD (resultados não apresentados neste documento). O principal motivo para escolhermos esse modelo é a possibilidade de comparação com resultados dos coeficientes de dínamo obtidos com modelos similares que utilizam técnicas diferentes. Vale notar que o TFM requer apenas os campos de velocidade para calcular os coeficientes do dínamo. Desse modo, o campo magnético da simulação não seria explicitamente relevante. Assim, escolhemos o modelo R1x24, apresentado em Guerrero et al. (2022). Evoluímos a simulação apenas no EULAG até um estado onde as velocidades são consideradas estatisticamente estáveis, ou seja, sem variações significativas com o tempo e, nesse momento, iniciamos o acoplamento. A partir desse momento, os dois códigos passam a rodar simultaneamente, com o EULAG evoluindo o modelo convectivo e o Pencil calculando os coeficientes do dínamo. A simulação acoplada avança temporalmente até esses coeficientes atingirem um estado estatisticamente estacionário.

O resultado do acoplamento considerando nove campos de teste são 27 coeficientes dentre os quais os mais relevantes para o mecanismo dínamo são três coeficientes para o efeito-α, três para o efeito-γ e três para o efeito-β cujo traço interpretamos como a difusividade magnética turbulenta.

As componentes da diagonal principal do tensor α (Fig. 39) reproduzem de maneira satisfatória resultados para uma simulação HD similar realizada com o Pencil code (Warnecke; Käpylä, 2020). Tanto a amplitude, a simetria de cada coeficiente com respeito ao equador, quanto a sua distribuição meridional mostram-se coerentes com a teoria dínamo. Esse resultado implica em um possível dínamo que, na sua fase cinemática, seria de tipo $\alpha^2\Omega$. Além disso, nossa simulação mostra uma presença considerável de $\alpha_{\rm rr}$ na região da tacoclina, especialmente em latitudes mais altas. Resultado que reforça a relevância da tacoclina e dos polos no processo de geração e manutenção do dínamo.

Quanto ao efeito-γ (Fig. 41), nossos resultados reproduzem adequadamente a simetria dos coeficientes com respeito ao equador. No entanto, uma comparação mais detalhada não mostra maiores semelhanças com os resultados de Warnecke & Käpylä (2020). Um possível motivo para essa discrepância pode estar relacionado a diferenças na estrutura estelar em ambos os modelos.

Com respeito ao coeficiente β_{tr} (Fig. 43), observamos que em nossa simulação, esse coeficiente, embora majoritariamente positivo, apresenta regiões com valores negativos em locais próximos à tacoclina na região equatorial. Do ponto de vista físico, esse resultado indicaria uma região de intensificação espontânea do campo magnético. Embora não tenhamos sido capazes de determinar se a origem dessas estruturas é física ou numérica para esta simulação, alguns trabalhos apontam para a possibilidade de que pequenas regiões de difusividade turbulenta negativa, como a mostrada na figura, possuam origem

física (Ryu, 2021). Os valores de β_{tr} encontrados para a região convectiva encontram-se entre 10^8 e 10^9 m^2/s, compatíveis com valores estimados para a zona convectiva solar e em concordância com os valores encontrados utilizando FOSA em Guerrero et al. (2019).

Uma análise complementar foi realizada através do parâmetro livre η_d, que representa a difusividade magnética dos campos de teste. Observamos que a escolha de η_d não influencia significativamente o perfil radial dos coeficientes. Contudo, menores valores de η_d resultam em coeficientes com maiores amplitudes (Fig. 44). Espera-se que à medida que o valor de η_d diminui, a amplitude dos coeficientes fique independente desse valor. No entanto, isso não aconteceu com a resolução numérica utilizada neste estudo. Por motivos de estabilidade numérica, para podermos reduzir ainda mais o valor de η_d, é necessário aumentar a resolução numérica utilizada no código Pencil. Até o momento essas simulações não foram realizadas.

5 Conclusões e perspectivas

A teoria do dínamo de campo médio (TCM) (Parker, 1955; Steenbeck et al., 1966) vem sendo utilizada há décadas para estudar o desenvolvimento do campo magnético em interiores estelares. Nessa teoria, os principais efeitos, responsáveis pela geração e manutenção do campo magnético, são melhor entendidos em meios onde a turbulência predomina, como é o caso das zonas convectivas. No entanto, campos magnéticos já foram observados na superfície das estrelas massivas, cuja estrutura externa é radiativa (ex., Ap/Bp, Aurière et al. (2007)). Além disso, a contribuição das regiões radiativas para o dínamo em estrelas de tipo solar ainda é um tema em aberto. Nesse contexto, teorias como o dínamo de Tayler-Spruit (Spruit, 1999) colocam-se como alternativas, ou complementos, à teoria do dínamo de campo médio, visando explicar a atuação das zonas radiativas no dínamo.

Em Spruit (1999), os autores propõem que o ciclo do dínamo seria composto, assim como na TCM, por um efeito-Ω proveniente da rotação diferencial, e um efeito-α cuja origem estaria relacionada à instabilidades do campo magnético no plasma, sendo uma dessas a instabilidade de Tayler. A instabilidade de Tayler (IT), proposta por Tayler (1973), afeta campos magnéticos presentes em regiões estáveis à convecção. Sob perturbações, campos poloidais (Markey; Tayler, 1973) ou toroidais (Tayler, 1973) em grande escala tendem a se "contorcer"com modos oscilatórios característicos, até perderem completamente sua topologia inicial e eventualmente se dissiparem. Nesse processo, a instabilidade leva o campo magnético a adquirir componentes perpendiculares ao campo original, semelhante ao efeito-α. Estudos teóricos (Zahn, 1974; Pitts; Tayler, 1985) demonstraram que a taxa de crescimento da instabilidade depende de fatores como rotação, frequência de Brunt-Väisälä e/ou condutividade térmica, sendo ainda possível, sob algumas condições, estabilizar o campo magnético. No entanto, a comprovação da viabilidade desse tipo de dínamo ainda requer estudos mais aprofundados. A participação da IT como um possível efeito-α no dínamo de Tayler-Spruit é amplamente questionada, especialmente devido às componentes de campo geradas pela instabilidade de Tayler não serem axissimétricas e, portanto, sendo incompatíveis com o dínamo de campo médio (Zahn et al., 2007; Keszthelyi, 2023). Entretanto, outros resultados indicam a produção de helicidades axissimétricas provenientes da IT (Weber et al., 2015), e trabalhos mais recentes obtêm a amplificação (Barrère et al., 2022; Petitdemange et al., 2024).

Neste estudo, buscamos ampliar o entendimento sobre a instabilidade de Tayler e, consequentemente, a viabilidade do dínamo de Tayler-Spruit. Para isso, realizamos estudos focados na estabilização de um campo magnético toroidal, que permeia uma região esférica estável a convecção. Nossos resultados mostram que, para baixas rotações, a instabilidade

de Tayler não é suprimida. No entanto, para rotações altas o suficiente, é possível suprimir o crescimento dos modo mais instáveis por dezenas de tempos de Alfven. A partir desse momento, uma instabilidade secundária surge, elevando a energia dos modos instáveis a níveis compatíveis com os do campo magnético inicial. Não foi possível determinar a origem dessa segunda instabilidade, mas acreditamos que sua origem seja física.

Mesmo para taxas de rotação baixas, mostrou-se que o campo conserva parcialmente a topologia toroidal do campo inicial. Esse efeito é mais proeminente para rotações maiores. Ainda assim, em todos os modelos estudados, encontramos o desenvolvimento de uma componente poloidal do campo magnético. Nos casos sem rotação ou com baixa rotação, a razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$ atingiu valores altos, sendo dominadas pela componente poloidal. Casos com taxas de rotação intermediárias ou altas (períodos $\lesssim 70$ dias), $\overline{B}_P/\overline{B}_\varphi$ converge para um platô em ~ 0.3 e mantém-se assim por centenas de tempos de Alfven. A partir do momento de saturação dos modos instáveis, o campo magnético passa a decair difusivamente a uma taxa que associamos à difusividade turbulenta. Na presença de rotação diferencial, a componente toroidal do campo seria regerada pelo efeito-Ω, fechando o ciclo do dínamo com a instabilidade de Tayler.

No contexto das estrelas do tipo Ap/Bp, vimos que um campo magnético com configuração toroidal pode ser formado a partir da fusão do par binário. Nossos resultados mostram que esse campo pode evoluir, após sofrer a IT, para uma configuração mista de campos poloidal-toroidal, tornando-se assim estável e sujeito apenas ao decaimento turbulento. Acreditamos que este o campo observado hoje nas estrelas Ap/Bp possa ser o resultado desse processo.

Para a teoria do dínamo, o surgimento de componentes poloidais do campo está associado ao surgimento de correntes helicoidais axissimétricas. Contudo, como confirmado nas nossas simulações, o modo magnético com crescimento mais rápido associado à instabilidade de Tayler é o modo m = 1, não-axissimétrico. Logo, foi necessário calcularmos as helicidades cinética e de corrente para velocidades e correntes em pequena escala nas nossas simulações, inferindo assim se existem, ou não, contribuições axissimétricas para os coeficientes do dínamo. Nossos resultados mostraram que assinaturas de helicidades são observadas em todas as simulações, aparecendo logo antes da fase de saturação, correlacionando-se bem com o incremento da razão $\overline{B}_P/\overline{B}_\phi$, e decaindo posteriormente de forma oscilatória, tal como observado em Weber et al. (2015) .

Estudos anteriores já haviam demonstrado que a presença de cisalhamentos em larga escala, combinados com alternâncias de sinal das helicidades geradas , poderiam levar a um efeito-α incoerente, o que poderia sustentar o dínamo (ex., Vishniac & Brandenburg (1997), Guerrero & Käpylä (2011), Mitra & Brandenburg (2012)). Portanto, os resultados apresentados aqui reforçam a possibilidade de um dínamo em larga escala atuando em zonas radiativas, em contradição com os resultados de Zahn et al. (2007). Em trabalhos

recentes, o dínamo de Tayler-Spruit foi testado em um contexto de estrelas de nêutrons e magnetares (Barrère et al., 2022; Fuller et al., 2019) e também em modelos com estrutura mais próxima àquela da zona radiativa solar (Petitdemange et al., 2024). Ambos os casos demonstram ser possível sua ocorrência.

Para que possamos determinar as características do dínamo de Tayler-Spruit tais como o tipo de dínamo, a região de origem e os mecanismos físicos envolvidos em sua geração e transporte, é necessário calcularmos os coeficientes turbulentos do dínamo. Uma das técnicas mais precisas para esse cálculo é o método de campos de teste (TFM). Diferente de outros métodos (Kowal et al., 2006; Simard et al., 2016; Guerrero et al., 2019), o TFM utiliza os campos de velocidade, provenientes da simulação, e campos teste independentes para determinar os coeficientes do dínamo (ver Sec. D). Como o código que utilizamos, EULAG-MHD, não possui essa funcionalidade, optamos por utilizar o TFM a partir do acoplamento entre o EULAG e código Pencil Code, onde o TFM já está implementado.

Antes de usar o TFM nas simulações apresentadas neste trabalho, utilizamos um modelo global de convecção turbulenta para testar o acoplamento e avaliarmos os coeficientes, contrastando-os com resultados prévios encontrados na literatura.

Mostramos que o acoplamento é capaz de encontrar os 27 coeficientes para o nosso modelo de teste e que estes são compatíveis com os resultados apresentados na literatura para modelos similares (ex. Warnecke & Käpylä (2020)). Além disso, a presença de uma região estável à convecção na parte inferior do domínio, característica deste tipo de simulações realizadas com o código EULAG, trouxe uma perspectiva diferente. Para vários coeficientes, essa região apresentou valores comparáveis com aqueles da zona convectiva, em especial na região da tacoclina. Enquanto o acoplamento está funcionando plenamente, diferentes testes ainda precisam ser realizados para garantirmos resultados fiduciais. Exemplo disto é a análise de convergência numérica, ainda a ser realizada, no cálculo dos campos de teste.

A partir do estudo e da ferramenta de acoplamento desenvolvidos neste trabalho, foram abertas diversas frentes de pesquisa. Dentre elas, pretendemos abordar as seguintes:

- **Instabilidade de Tayler na presença de cisalhamento**: Pretendemos estudar como a instabilidade de Tayler se comporta em um modelo onde existe um cisalhamento forçado (efeito-Ω). Esse estudo seria um teste direto do dínamo de Tayler-Spruit, a ser comparado a outros trabalhos recentes onde esse mecanismo foi verificado;
- **Coeficientes do dínamo para o dínamo de Tayler-Spruit**: Nosso próximo objetivo é aplicar o TFM, através do acoplamento desenvolvido aqui, no processo

do dínamo de Tayler-Spruit. Vale notar que os trabalhos citados anteriormente que demonstram esse mecanismo não realizam tal análise;

- **Verificação de modelos de dínamo com a TCM**: O método de campo de teste, incorporado ao código EULAG-MHD pelo acoplamento realizado neste trabalho, possui utilidade geral. Desse modo, é possível determinar os mecanismos participantes em um processo de dínamo se a sua origem corresponde à convecção turbulenta, à instabilidade de Tayler, ou a outras instabilidades HD ou MHD acontecendo em uma simulação. Esta ferramente estará disponível publicamente para o uso em trabalhos vindouros.

Referências

Alecian, E. Magnetic fields along the pre-main-sequence phase. In: Mathys, G. et al. (Ed.). *Putting A Stars into Context: Evolution, Environment, and Related Stars*. [s.n.], 2014. p. 84–92. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014psce.conf...84A>. Citado na página 21.

Aurière, M. et al. Weak magnetic fields in Ap/Bp stars. Evidence for a dipole field lower limit and a tentative interpretation of the magnetic dichotomy. *A&A*, v. 475, n. 3, p. 1053–1065, Dec 2007. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007A&A...475.1053A>. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 99.

Babkovskaia, N.; Haugen, N. E. L.; Brandenburg, A. A high-order public domain code for direct numerical simulations of turbulent combustion. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 1, p. 1–12, jan. 2011. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011JCoPh.230....1B>. Citado na página 81.

Baliunas, S. L. et al. Chromospheric Variations in Main-Sequence Stars. II. *ApJ*, v. 438, p. 269, jan. 1995. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1995ApJ...438..269B>. Citado na página 18.

Barrère, P. et al. A new scenario for magnetar formation: Tayler-Spruit dynamo in a proto-neutron star spun up by fallback. *A&A*, v. 668, p. A79, dez. 2022. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2022A&A...668A..79B>. Citado 4 vezes nas páginas 24, 46, 99 e 101.

Benomar, O. et al. Asteroseismic detection of latitudinal differential rotation in 13 Sun-like stars. *Science*, v. 361, n. 6408, p. 1231–1234, Sep 2018. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018Sci...361.1231B>. Citado na página 18.

Bernstein, I. B. et al. An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 244, n. 1236, p. 17–40, fev. 1958. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1958RSPSA.244...17B>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 128.

Bonanno, A.; Urpin, V. Stability of the Toroidal Magnetic Field in Stellar Radiation Zones. *ApJ*, v. 747, n. 2, p. 137, mar. 2012. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012ApJ...747..137B>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 40 e 41.

Bonanno, A.; Urpin, V. Rotational suppression of the Tayler instability in stellar radiation zones. *MNRAS*, v. 431, n. 4, p. 3663–3669, jun. 2013. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2013MNRAS.431.3663B>. Citado 4 vezes nas páginas 40, 41, 42 e 59.

Braithwaite, J. A differential rotation driven dynamo in a stably stratified star. *A&A*, v. 449, n. 2, p. 451–460, abr. 2006. Citado 3 vezes nas páginas 31, 45 e 46.

Braithwaite, J. The stability of toroidal fields in stars. *A&A*, v. 453, n. 2, p. 687–698, jul. 2006. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2006A&A...453..687B>. Citado 8 vezes nas páginas 13, 39, 43, 57, 59, 62, 65 e 78.

Brandenburg, A.; Subramanian, K. Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *PhR*, v. 417, n. 1-4, p. 1–209, out. 2005. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005PhR...417....1B>. Citado na página 19.

Brown, B. P.; Vasil, G. M.; Zweibel, E. G. Energy Conservation and Gravity Waves in Sound-proof Treatments of Stellar Interiors. Part I. Anelastic Approximations. *ApJ*, v. 756, n. 2, p. 109, set. 2012. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012ApJ...756..109B>. Citado na página 130.

Bychkov, V. D.; Bychkova, L. V.; Madej, J. Secular variability of the longitudinal magnetic field of the Ap star γ Equ. *MNRAS*, v. 365, n. 2, p. 585–589, jan. 2006. Citado na página 21.

Cally, P. S.; Dikpati, M.; Gilman, P. A. Clamshell and Tipping Instabilities in a Two-dimensional Magnetohydrodynamic Tachocline. *ApJ*, v. 582, n. 2, p. 1190–1205, jan. 2003. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...582.1190C>. Citado na página 20.

Carrington, R. C. Description of a Singular Appearance seen in the Sun on September 1, 1859. *MNRAS*, v. 20, p. 13–15, nov. 1859. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1859MNRAS..20...13C>. Citado na página 18.

Christiansen, J. L. et al. *Kepler* Data Characteristics Handbook (KSCI-19040-004). v. 4, maio 2013. Citado na página 49.

Cossette, J.-F. et al. Magnetically Modulated Heat Transport in a Global Simulation of Solar Magneto-convection. *ApJ*, v. 841, n. 1, p. 65, maio 2017. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017ApJ...841...65C>. Citado na página 120.

Dikpati, M.; Gilman, P. A. Analysis of Hydrodynamic Stability of Solar Tachocline Latitudinal Differential Rotation using a Shallow-Water Model. *ApJ*, v. 551, n. 1, p. 536–564, abr. 2001. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...551..536D>. Citado na página 20.

Donati, J. F.; Landstreet, J. D. Magnetic Fields of Nondegenerate Stars. *ARA&A*, v. 47, n. 1, p. 333–370, set. 2009. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009ARA&A..47..333D>. Citado na página 21.

Ferrario, L. et al. The origin of magnetism on the upper main sequence. *MNRAS*, v. 400, n. 1, p. L71–L74, Nov 2009. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009MNRAS.400L..71F>. Citado na página 21.

Fuller, J.; Piro, A. L.; Jermyn, A. S. Slowing the spins of stellar cores. *MNRAS*, v. 485, n. 3, p. 3661–3680, maio 2019. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019MNRAS.485.3661F>. Citado 5 vezes nas páginas 24, 46, 77, 80 e 101.

Goldstein, J.; Townsend, R. H. D.; Zweibel, E. G. The Tayler Instability in the Anelastic Approximation. *ApJ*, v. 881, n. 1, p. 66, ago. 2019. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019ApJ...881...66G>. Citado na página 129.

Goossens, M.; Biront, D.; Tayler, R. J. Additional Results for Unstable Stratified Toroidal Magnetic Fields in Stars. *Ap&SS*, v. 75, n. 2, p. 521–526, abr. 1981. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1981Ap&SS..75..521G>. Citado na página 39.

Guerrero, G. Global simulations of stellar dynamos. *IAU Symposium*, v. 354, p. 65–85, jan. 2020. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020IAUS..354...65G>. Citado na página 19.

Guerrero, G. et al. Global simulations of Tayler instability in stellar interiors: the stabilizing effect of gravity. *MNRAS*, v. 490, n. 3, p. 4281–4291, Dec 2019. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019MNRAS.490.4281G>. Citado 8 vezes nas páginas 13, 20, 43, 44, 50, 52, 57 e 58.

Guerrero, G.; Käpylä, P. J. Dynamo action and magnetic buoyancy in convection simulations with vertical shear. *A&A*, v. 533, p. A40, set. 2011. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011A&A...533A..40G>. Citado 3 vezes nas páginas 77, 93 e 100.

Guerrero, G. et al. On the Role of Tachoclines in Solar and Stellar Dynamos. *ApJ*, v. 819, n. 2, p. 104, Mar 2016. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016ApJ...819..104G>. Citado na página 47.

Guerrero, G. et al. Implicit Large-eddy Simulations of Global Solar Convection: Effects of Numerical Resolution in Nonrotating and Rotating Cases. *ApJ*, v. 940, n. 2, p. 151, dez. 2022. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2022ApJ...940..151G>. Citado 6 vezes nas páginas 47, 81, 87, 91, 92 e 97.

Guerrero, G. et al. What Sets the Magnetic Field Strength and Cycle Period in Solar-type Stars? *ApJ*, v. 880, n. 1, p. 6, Jul 2019. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019ApJ...880....6G>. Citado 6 vezes nas páginas 31, 47, 87, 94, 98 e 101.

Haigh, J. D. Solar Variability and Climate. In: _____. *Space Weather : Research Towards Applications in Europe 2nd European Space Weather Week (ESWW2)*. [s.n.], 2007. v. 344, p. 65. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007ASSL..344...65H>. Citado na página 18.

Haugen, N. E. L.; Brandenburg, A.; Dobler, W. Is Nonhelical Hydromagnetic Turbulence Peaked at Small Scales? *ApJL*, v. 597, n. 2, p. L141–L144, nov. 2003. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003ApJ...597L.141H>. Citado na página 81.

Hide, R.; Palmer, T. N. Generalization of Cowling's theorem. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, v. 19, n. 3, p. 301–309, jan. 1982. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982GApFD..19..301H>. Citado na página 33.

Iglesias, C. A.; Rogers, F. J. Updated Opal Opacities. *ApJ*, v. 464, p. 943, jun. 1996. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...464..943I>. Citado na página 30.

Ji, S.; Fuller, J.; Lecoanet, D. Magnetohydrodynamic simulations of the Tayler instability in rotating stellar interiors. *MNRAS*, v. 521, n. 4, p. 5372–5383, jun. 2023. Citado na página 62.

Jouve, L.; Lignières, F.; Gaurat, M. Interplay between magnetic fields and differential rotation in a stably stratified stellar radiative zone. *A&A*, v. 641, p. A13, set. 2020. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020A&A...641A..13J>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 62.

Käpylä, P. J. et al. Simulations of Solar and Stellar Dynamos and Their Theoretical Interpretation. *SSRv*, v. 219, n. 7, p. 58, out. 2023. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2023SSRv..219...58K>. Citado na página 25.

Keszthelyi, Z. Magnetism in High-Mass Stars. *Galaxies*, v. 11, n. 2, p. 40, mar. 2023. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2023Galax..11...40K>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 99.

Kippenhahn, R.; Weigert, A.; Weiss, A. *Stellar Structure and Evolution*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 30.

Kitchatinov, L.; Rüdiger, G. Stability of toroidal magnetic fields in rotating stellar radiation zones. *A&A*, v. 478, n. 1, p. 1–8, jan. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 43.

Kochukhov, O.; Shultz, M.; Neiner, C. Magnetic field topologies of the bright, weak-field Ap stars θ Aurigae and e Ursae Majoris. *A&A*, v. 621, p. A47, jan. 2019. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019A&A...621A..47K>. Citado na página 21.

Kolmogorov, A. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, v. 30, p. 301–305, jan. 1941. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1941DoSSR..30..301K>. Citado na página 71.

Kowal, G.; Otmianowska-Mazur, K.; Hanasz, M. Dynamo coefficients in Parker unstable disks with cosmic rays and shear. The new methods of estimation. *A&A*, v. 445, n. 3, p. 915–929, jan. 2006. Citado na página 101.

Krause, F.; Raedler, K. H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. [s.n.], 1980. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1980mfmd.book.....K>. Citado na página 33.

Leamon, R. J.; McIntosh, S. W.; Title, A. M. Deciphering Solar Magnetic Activity: The Solar Cycle Clock. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, v. 9, p. 886670, maio 2022. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2022FrASS...9.6670L>. Citado na página 18.

Li, X.-Y. et al. Eulerian and Lagrangian approaches to multidimensional condensation and collection. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, v. 9, n. 2, p. 1116–1137, jun. 2017. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017JAMES...9.1116L>. Citado na página 81.

Lignières, F. et al. First evidence of a magnetic field on <ASTROBJ>Vega</ASTROBJ>. Towards a new class of magnetic A-type stars. *A&A*, v. 500, n. 3, p. L41–L44, jun. 2009. Citado na página 21.

Lipps, F. B.; Hemler, R. S. A Scale Analysis of Deep Moist Convection and Some Related Numerical Calculations. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 39, n. 10, p. 2192–2210, out. 1982. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982JAtS...39.2192L>. Citado na página 120.

Love, J. Reversals and excursions of the geodynamo. *Astronomy and Geophysics*, v. 40, n. 6, p. 14, dez. 1999. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/234323426_Reversals_and_excursions_of_the_geodynamo>. Citado na página 20.

Markey, P.; Tayler, R. J. The adiabatic stability of stars containing magnetic fields. II. Poloidal fields. *MNRAS*, v. 163, p. 77–91, mar. 1973. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973MNRAS.163...77M>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 36 e 99.

Mathys, G. Ap stars with resolved magnetically split lines: Magnetic field determinations from Stokes I and V spectra⋆. *A&A*, v. 601, p. A14, maio 2017. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017A&A...601A..14M>. Citado na página 21.

Message Passing Interface Forum. *MPI: A Message-Passing Interface Standard Version 4.1*. [S.l.], 2023. Disponível em: <https://www.mpi-forum.org/docs/mpi-4.1/mpi41-report.pdf>. Citado na página 82.

Miesch, M. S.; Gilman, P. A.; Dikpati, M. Nonlinear Evolution of Global Magnetoshear Instabilities in a Three-dimensional Thin-Shell Model of the Solar Tachocline. *ApJS*, v. 168, n. 2, p. 337–361, fev. 2007. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007ApJS..168..337M>. Citado na página 20.

Mitra, D.; Brandenburg, A. Scaling and intermittency in incoherent α-shear dynamo. *MNRAS*, v. 420, n. 3, p. 2170–2177, mar. 2012. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 100.

Monteiro, G. et al. Global simulations of Tayler instability in stellar interiors: a long-time multistage evolution of the magnetic field. *MNRAS*, v. 521, n. 1, p. 1415–1428, maio 2023. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2023MNRAS.521.1415M>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 52.

Ogura, Y.; Phillips, N. A. Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, v. 19, n. 2, p. 173–179, mar. 1962. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1962JAtS...19..173O>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 117.

Ossendrijver, M. et al. Magnetoconvection and dynamo coefficients. II. Field-direction dependent pumping of magnetic field. *A&A*, v. 394, p. 735–745, nov. 2002. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2002A&A...394..735O>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 137.

Oughton, E. J. et al. Quantifying the daily economic impact of extreme space weather due to failure in electricity transmission infrastructure. *Space Weather*, v. 15, n. 1, p. 65–83, jan. 2017. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017SpWea..15...65O>. Citado na página 18.

Parker, E. N. Hydromagnetic Dynamo Models. *ApJ*, v. 122, p. 293, Sep 1955. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1955ApJ...122..293P>. Citado 4 vezes nas páginas 18, 19, 32 e 99.

Paunzen, E. et al. On the incidence of chemically peculiar stars in the Large Magellanic Cloud. *MNRAS*, v. 362, n. 3, p. 1025–1030, Sep 2005. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005MNRAS.362.1025P>. Citado na página 21.

Pencil Code Collaboration et al. The Pencil Code, a modular MPI code for partial differential equations and particles: multipurpose and multiuser-maintained. *The Journal of Open Source Software*, v. 6, n. 58, p. 2807, fev. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 81.

Petit, P. et al. Detection of a weak surface magnetic field on Sirius A: are all tepid stars magnetic? *A&A*, v. 532, p. L13, ago. 2011. Citado na página 21.

Petit, P. et al. The rapid rotation and complex magnetic field geometry of Vega. *A&A*, v. 523, p. A41, nov. 2010. Citado na página 21.

Petitdemange, L. et al. Tayler-Spruit dynamo simulations for the modeling of radiative stellar layers. *A&A*, v. 681, p. A75, jan. 2024. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2024A&A...681A..75P>. Citado 4 vezes nas páginas 24, 46, 99 e 101.

Pitts, E.; Tayler, R. J. The adiabatic stability of stars containing magnetic fields. IV - The influence of rotation. *MNRAS*, v. 216, p. 139–154, set. 1985. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985MNRAS.216..139P>. Citado 7 vezes nas páginas 24, 36, 39, 40, 45, 59 e 99.

Power, J. et al. Properties of a volume-limited sample of magnetic Ap/Bp stars. In: Romanyuk, I. I. et al. (Ed.). *Physics of Magnetic Stars*. [s.n.], 2007. p. 89–97. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007pms..conf...89P>. Citado na página 21.

Preston, G. W. The chemically peculiar stars of the upper main sequence. *ARA&A*, v. 12, p. 257–277, jan. 1974. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1974ARA&A..12..257P>. Citado na página 21.

PRUSA, J. M.; SMOLARKIEWICZ, P. K.; WYSZOGRODZKI, A. A. Eulag, a computational model for multiscale flows. *Computers & Fluids*, v. 37, n. 9, p. 1193–1207, 2008. ISSN 0045-7930. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004579300700206X>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 124.

Rädler, K. H. On some electromagnetic phenomena in electrically conducting turbulently moving matter, especially in the presence of Coriolis forces. *Veroeffentlichungen der Geod. Geophys*, v. 13, p. 131–135, jan. 1969. Citado 3 vezes nas páginas 35, 94 e 137.

Ryu, C.-M. Turbulence-induced transport dynamo mechanism. *Plasma Research Express*, v. 3, n. 3, p. 035002, set. 2021. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021PlREx...3c5002R>. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 98.

Schaeffer, N. Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudospectral numerical simulations. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, v. 14, n. 3, p. 751–758, mar. 2013. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2013GGG....14..751S>. Citado na página 70.

Schneider, F. R. N. et al. Stellar mergers as the origin of magnetic massive stars. *Nature*, v. 574, n. 7777, p. 211–214, Oct 2019. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019Natur.574..211S>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

Schrinner, M. et al. Mean-field view on rotating magnetoconvection and a geodynamo model. *Astronomische Nachrichten*, v. 326, n. 3, p. 245–249, Apr 2005. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2005AN....326..245S>. Citado 3 vezes nas páginas 35, 94 e 138.

Schrinner, M. et al. Mean-field concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, v. 101, n. 2, p. 81–116, abr. 2007. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007GApFD.101...81S>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 35 e 138.

Simard, C.; Charbonneau, P.; Dubé, C. Characterisation of the turbulent electromotive force and its magnetically-mediated quenching in a global EULAG-MHD simulation of solar convection. *Advances in Space Research*, v. 58, n. 8, p. 1522–1537, out. 2016. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016AdSpR..58.1522S>. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 101.

Smolarkiewicz, P.; Margolin, L. Variational methods for elliptic problems in fluid models. 01 2000. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/255270337_Variational_methods_for_elliptic_problems_in_fluid_models>. Citado 3 vezes nas páginas 124, 125 e 127.

SMOLARKIEWICZ, P. K. Multidimensional positive definite advection transport algorithm: an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 50, n. 10, p. 1123–1144, 2006. Citado na página 123.

Smolarkiewicz, P. K.; Charbonneau, P. EULAG, a computational model for multiscale flows: An MHD extension. *Journal of Computational Physics*, Elsevier BV, v. 236, p. 608–623, mar. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.11.008>. Citado na página 47.

Smolarkiewicz, P. K.; Larrabee Winter, C. Pores resolving simulation of Darcy flows. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 9, p. 3121–3133, maio

2010. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010JCoPh.229.3121S>. Citado na página 47.

Smolarkiewicz, P. K.; Margolin, L. G.; Wyszogrodzki, A. A. A Class of Nonhydrostatic Global Models. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 58, n. 4, p. 349–364, fev. 2001. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001JAtS...58..349S>. Citado na página 47.

Spruit, H. C. Differential rotation and magnetic fields in stellar interiors. *A&A*, v. 349, p. 189–202, set. 1999. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1999A&A...349..189S>. Citado 5 vezes nas páginas 24, 31, 37, 65 e 99.

Spruit, H. C. Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior. *A&A*, v. 381, p. 923–932, jan. 2002. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2002A&A...381..923S>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

Steenbeck, M.; Krause, F.; Rädler, K. H. Berechnung der mittleren LORENTZ-Feldstärke ???? X ???? für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch CORIOLIS-Kräfte beeinflußter Bewegung. *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, v. 21, p. 369, Apr 1966. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1966ZNatA..21..369S>. Citado 4 vezes nas páginas 18, 32, 75 e 99.

Strugarek, A. et al. Reconciling solar and stellar magnetic cycles with nonlinear dynamo simulations. *Science*, v. 357, n. 6347, p. 185–187, jul. 2017. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017Sci...357..185S>. Citado na página 47.

Szklarski, J.; Arlt, R. Nonlinear simulations explaining Ap star magnetic fields by instability remnants. *A&A*, v. 550, p. A94, fev. 2013. Citado na página 22.

Tayler, R. J. The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I.Toroidal fields. *MNRAS*, v. 161, p. 365, jan. 1973. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973MNRAS.161..365T>. Citado 11 vezes nas páginas 22, 24, 36, 37, 38, 39, 45, 57, 75, 99 e 132.

Tayler, R. J. The adiabatic stability of stars containing magnetic fields. V Effect of ohmic diffusion on stable fields. *MNRAS*, v. 198, p. 811–815, mar. 1982. Citado na página 36.

Vishniac, E. T.; Brandenburg, A. An Incoherent α-Ω Dynamo in Accretion Disks. *ApJ*, v. 475, n. 1, p. 263–274, jan. 1997. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 100.

Warnecke, J.; Käpylä, M. J. Rotational dependence of turbulent transport coefficients in global convective dynamo simulations of solar-like stars. *A&A*, v. 642, p. A66, out. 2020. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020A&A...642A..66W>. Citado 7 vezes nas páginas 14, 90, 92, 94, 95, 97 e 101.

Warnecke, J. et al. Turbulent transport coefficients in spherical wedge dynamo simulations of solar-like stars. *A&A*, v. 609, p. A51, Jan 2018. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018A&A...609A..51W>. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 137.

Weber, N. et al. The Tayler instability at low magnetic Prandtl numbers: between chiral symmetry breaking and helicity oscillations. *New Journal of Physics*, v. 17, n. 11, p. 113013, nov. 2015. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2015NJPh...17k3013W>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 99 e 100.

Zahn, J. P. Rotational Instabilities and Stellar Evolution. In: Ledoux, P.; Noels, A.; Rodgers, A. W. (Ed.). *Stellar Instability and Evolution*. [S.l.: s.n.], 1974. (Stellar Instability and Evolution, v. 59), p. 185. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System. Citado 5 vezes nas páginas 24, 40, 57, 78 e 99.

Zahn, J. P.; Brun, A. S.; Mathis, S. On magnetic instabilities and dynamo action in stellar radiation zones. *A&A*, v. 474, n. 1, p. 145–154, out. 2007. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007A&A...474..145Z>. Citado 8 vezes nas páginas 24, 31, 45, 46, 75, 77, 99 e 100.

Apêndices

APÊNDICE A – Equações da magneto-hidrodinâmica

Neste apêndice serão demonstradas as principais equações utilizadas em nosso trabalho.

A.1 Conservação de massa

Considerando um fluido de com densidade, $\varrho(\boldsymbol{x})$, e volume, V, atravessando uma superfície qualquer, S, com certa velocidade, $\boldsymbol{u}(x)$, temos que o fluxo de massa que passa por esta superfície é determinado pela equação

$$\Phi = \oint_S \varrho \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS, \tag{A.1}$$

onde $\hat{\boldsymbol{n}}$ é o vetor unitário perpendicular à superfície e orientado para seu exterior. A massa contida pela superfície S é

$$M = \int_V \varrho\, dV, \tag{A.2}$$

podendo variar caso o fluxo, Eq. A.1, seja não nulo. Nesse caso, teremos que

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\Phi, \tag{A.3}$$

onde o sinal negativo do fluxo se dá apenas pela convenção que foi adotada para $\hat{\boldsymbol{n}}$. Substituindo então na Eq. A.3 as Eqs. A.1 e A.2, e utilizando o teorema da divergência encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho\, dV = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho\boldsymbol{u})\, dV. \tag{A.4}$$

Ao considerar que o volume, V, seja fixo no espaço, é possível comutar os operadores $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\int_V dV$ de modo que

$$\int_V \Big[\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho\boldsymbol{u})\Big]\, dV = 0. \tag{A.5}$$

Uma vez que V é um volume escolhido de maneira geral e arbitrária, essa expressão só será válida quando

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varrho\boldsymbol{u}) = 0. \tag{A.6}$$

Assim, a Eq. A.6 é conhecida como a *equação da continuidade* e expressa a conservação de massa.

Quando estamos lidando com um fluido incompressível temos que, dado um determinado volume, é impossível de se adicionar ou retirar uma certa quantidade sem que seu volume seja alterado. Ou seja, sua densidade não varia no tempo ou no espaço. Nesse caso, a Eq. A.6 pode ser reescrita simplesmente como sendo

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{A.7}$$

A.2 Conservação de momento

Pela Segunda Lei de Newton, sabemos que a força que atua sobre um elemento de fluido de massa, m, deve obedecer a lei

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{A.8}$$

Entendemos aqui que esta força atua sobre o elemento de volume que se desloca no fluido. Assim, para o fluido, utilizamos a Eq. C.45 e vemos que

$$\boldsymbol{F} = \rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \rho\Big[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\Big]. \tag{A.9}$$

Podemos então assumir que a força, $\boldsymbol{F}$, atuando sobre o fluido é composta por duas componentes: os estresses do fluido e as forças externas. De forma que

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{f}. \tag{A.10}$$

Onde $\boldsymbol{s}$ é o tensor de estresse e $\boldsymbol{f}$ representa todas as outras forças externas (gravidade, Lorentz, etc.). É possível dividir o tensor de estresse em duas componentes sendo a primeira delas o tensor de estresse volumétrico, que representa as forças atuando para mudar o volume do corpo (i.e., pressão). Já a segunda parte representa as forças que determinam a deformação e o movimento do corpo, chamado de tensor de estresse viscoso. Assim sendo, temos que

$$\boldsymbol{s} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}, \tag{A.11}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade, $-p\boldsymbol{I}$ é o tensor de estresse volumétrico (o sinal negativo é uma convenção quanto à como a pressão age) e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de estresse viscoso. Uma vez que $\boldsymbol{\nabla}\cdot(p\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{\nabla}p$, a Eq. A.10 se torna

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f}. \tag{A.12}$$

Substituindo esse resultado na Eq. A.9 e rearranjando os termos, chegamos à

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{f}.} \tag{A.13}$$

A Eq. A.13 é conhecida como a *equação de Navier-Stokes* em sua formulação geral. O próximo passo então é obtermos uma expressão para o termo do tensor τ.

A viscosidade pode ser interpretada como uma força que atua entre as camadas do fluido que se movem com diferentes velocidades. Desse modo, podemos definir a componente τ_{ij} como sendo

$$\tau_{ij} = \mu\Big[\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)}_{D_{ij}} + \underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)}_{\Omega_{ij}}\Big]. \tag{A.14}$$

onde μ é a viscosidade do fluido e determina a sua dificuldade em fluir. D_{ij} e Ω_{ij} descrevem o movimento da componente do fluido quanto ao cisalhamento e quanto sua rotação, respectivamente. Para um fluido newtoniano, o estresse deve ser proporcional a sua taxa de deformação. Como é possível mostrar que Ω_{ij}, não gera deformação no fluido, apenas D_{ij} precisa ser considerado. Desse modo, temos que

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{A.15}$$

onde $i, j = (1, 2, 3) \equiv (x, y, z)$ e portanto,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33}\end{pmatrix} = \mu\boldsymbol{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\\ \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\\ \frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z}.\end{pmatrix} \tag{A.16}$$

Calculando o divergente para a componente x teremos que

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}\big)_x &= \mu\Big[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\Big]\\ &= \mu\Big[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}\Big]\\ &= \mu\Big[\boldsymbol{\nabla}^2 u_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Big]\\ &= \mu\boldsymbol{\nabla}^2 u_x + \mu\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{A.17}$$

Se estendermos essa relação para as demais componentes e utilizarmos a Eq. A.7, encontramos que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}. \tag{A.18}$$

Podemos assim reescrever a Eq. A.13 na forma

$$\boxed{\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p - \nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{f}}\ \Big[\text{Incompressível}\Big]. \tag{A.19}$$

Onde $\nu = \mu/\rho$ é o que chamamos de *viscosidade cinemática*. Em geral, é com esta forma da equação de Navier-Stokes que trabalhamos. Nela adicionaremos as forças externas descritas posteriormente e aplicaremos ainda algumas condições extras.

A.3 Equação de indução

Para derivarmos a equação que rege a evolução temporal dos campos magnéticos em um fluido condutor, chamada de *equação de indução*, nos utilizamos das equações de Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\varrho_e}{\varepsilon_0} \qquad \text{[Lei de Gauss]} , \tag{A.20}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{[Lei de Gauss do Magnetismo]} , \tag{A.21}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{[Lei de Faraday]} , \tag{A.22}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{[Lei de Ampère-Maxwell]} . \tag{A.23}$$

Partindo então da Eq.A.23, levamos em consideração que o fluido em questão é não relativístico e que não há fontes elétricas em seu interior. Desse modo, o último termo da equação pode ser desconsiderado, resultando em,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}. \tag{A.24}$$

De forma geral, a densidade de corrente $\boldsymbol{J}$ gerada por um campo $\boldsymbol{E}$ atuando sobre o meio é regida pela lei de Ohm

$$\boldsymbol{J'} = \sigma_c \boldsymbol{E'}. \tag{A.25}$$

onde σ_c é a condutividade elétrica do meio. Nesse caso, o super-escrito $'$ indica apenas que o meio se encontra em repouso. Assim, em um fluido com velocidade $|\boldsymbol{u}| << c$, podemos utilizar as transformadas de Lorentz e demonstrar $\boldsymbol{J'} = \boldsymbol{J}$ e que $\boldsymbol{E'} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$. Com isso, podemos generalizar a Eq.A.25 para a forma

$$\boldsymbol{J} = \sigma_c (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}). \tag{A.26}$$

Nos utilizando agora da Eq. A.24 e reorganizando os seus termos, temos que

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma_c} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}), \tag{A.27}$$

que pode ser substituída na Lei de Faraday (Eq.A.22) para chegarmos à equação de indução:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} - \eta_d \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}), \tag{A.28}$$

onde $\eta_d = \frac{1}{\mu_0 \sigma_c}$ é a *difusividade magnética*. Seu papel é análogo àquele da viscosidade de um fluido: ela dissipa o campo magnético. Em nosso modelo numérico, utilizaremos a versão

inviscida desta equação, ou seja, ela não carregará propriedades dissipativas explicitas, já que estas estarão a cargo do método numérico (ver Sec. 3.1.1). Assim, a equação de indução se reduz ao caso MHD ideal,

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}). \tag{A.29}$$

Através da identidade vetorial $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$, da Eq.A.21 e da definição da derivada material (Eq. C.44), podemos reescrever essa equação na forma

$$\boxed{\frac{D\boldsymbol{B}}{Dt} = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\, (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u})\,.} \tag{A.30}$$

Essa é a forma que o código EULAG-MHD utiliza para a solução dos modelos numéricos apresentados neste trabalho.

A.4 Aproximação anelástica

Em linhas gerais, a solução computacional de problemas MHD requer o uso abundante de tempo e/ou hardware. Essa dificuldade provém especialmente da não linearidade das funções envolvidas onde, além da hidrodinâmica, ainda temos adicionados termos que envolvendo indução magnética, escoamento de fluidos e variações de densidade devido a compressibilidade. Assim, para que se possa ganhar recursos, ou melhor utiliza-los, é comum o uso de algorítimos que reduzam essa carga computacional sem perder a generalidade do problema.

Tendo o proposto em mente, o EULAG-MHD utiliza a abordagem simulacional chamada de *aproximação anelástica* (Ogura; Phillips, 1962). Pode-se pensar na aproximação anelástica como um meio termo entre a abordagem incompressível (descrita no Apêndice A.1) e a abordagem totalmente compressível. Nela, consideramos que não há influência das ondas sonoras no meio em questão e, por isso, elas podem ser retiradas. Em Ogura & Phillips (1962) a abordagem anelástica é deduzida a partir da expansão dos parâmetros velocidade, temperatura potencial e densidade em séries de potência com um valor arbitrário e pequeno, ϵ, onde os termos de ordem zero tem magnitude próxima de uma unidade. Assim, passa a existir um perfil de densidade que é independente do tempo, mas que depende da profundidade. Na aproximação anelástica, a Eq. A.6 pode ser descrita como

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0.} \tag{A.31}$$

Observe que, neste caso, a densidade não pode sair da derivada, já que depende da posição.

A.4.1 Equação de momento modificada

Embora largamente utilizada, a Eq. A.19 ainda pode ser modificada a depender do modelo que a utiliza. Em nosso caso, existem algumas aproximações termodinâmicas a serem realizadas que facilitam a abordagem numérica. A primeira delas vem com a utilização da viscosidade implícita. Nesse caso, os coeficientes dissipativos explícitos se anulam (i.e., $\nu = 0$) e sua contribuição fica a cargo do método numérico. Realizando essa modificação na Eq. A.19 e considerando um caso apenas hidrodinâmico com a inclusão da força gravitacional (Eq. C.51) temos que

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{g}. \tag{A.32}$$

Para o caso hidrostático, onde o plasma não apresenta qualquer movimento, essa equação é reduzida à forma

$$\boldsymbol{\nabla}p = \rho\boldsymbol{g}. \tag{A.33}$$

É razoável assumirmos que a pressão possui um perfil exclusivamente radial, tal qual a gravidade($\boldsymbol{g} = -g\hat{e}_r$). Assim temos que

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g \tag{A.34}$$

Agora, assumiremos também que as grandezas termodinâmicas, ρ, p e T podem ser expressas na forma $X = X_0 + X'$, onde X_0 é um valor médio, também chamado de estado de referência, e X' são as flutuações entorno desse estado. Essa suposição implica que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g &= -\frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial}{\partial r}(p_0+p') - g \\ &= -\frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial p'}{\partial r} - g. \end{aligned} \tag{A.35}$$

Utilizamos então a Eq. A.34 para o estado de referência ($\frac{\partial p_0}{\partial r} = -\rho_0 g$) e, substituindo seu resultado na Eq. A.35 temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g &= \frac{\rho_0 g}{\rho_0+\rho'} - \frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial p'}{\partial r} - g \\ &= -\frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial p'}{\partial r} + \left(\frac{\rho_0}{\rho_0+\rho'} - 1\right) g \\ &\approx -\frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial p'}{\partial r} - \frac{\rho'}{\rho_0} g. \end{aligned} \tag{A.36}$$

Onde consideramos que as amplitudes das flutuações são muito menores que os valores médios ($\rho'/\rho_0 \ll 1$). Se expandirmos a derivada do lado direito da Eq. A.36 chegamos à

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) - \frac{p'}{\rho_0}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial r}\right) - \frac{\rho'}{\rho_0} g. \tag{A.37}$$

Devemos então encontrar relações para $\frac{\rho'}{\rho_0}$ e para $\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial r}$. Iniciaremos então expandindo a equação de estado para um gás ideal, $p = \rho RT$, em termos do valor médio e de sua perturbação para encontrarmos que

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{p_0} - \frac{T'}{T_0}. \tag{A.38}$$

Onde foram desprezados termos de segunda ordem nas perturbações.

Definimos então a grandeza chamada de temperatura potencial como sendo

$$\Theta \equiv T\left(\frac{P^*}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}. \tag{A.39}$$

onde P^* é uma pressão de referência. Novamente, expandimos as grandezas termodinâmicas da Eq. A.39, de modo que

$$\begin{aligned}\Theta_0 + \Theta' &= (T_0 + T')\left(\frac{P^*}{p_0 + p'}\right)^{\frac{R}{c_p}} \\ &= (T_0 + T')\left(\frac{P^*}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\left(\frac{1}{1+\frac{p'}{p_0}}\right)^{\frac{R}{c_p}}.\end{aligned} \tag{A.40}$$

Ao manipularmos a Eq. A.40, novamente desconsiderando termos de segunda ordem da perturbação e fazendo $\frac{1}{1+\frac{p'}{p_0}}^{R/c_p} \to 1 - \frac{R}{c_p}\frac{p'}{p_0}$ vemos que

$$\frac{T'}{T} = \frac{\Theta'}{\Theta_0} + \frac{R}{c_p}\frac{p'}{p_0}. \tag{A.41}$$

Substituindo esse resultado na Eq. A.38 encontramos $\frac{\rho'}{\rho_0}$ na forma

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \left(1 - \frac{R}{c_p}\right)\frac{p'}{p_0} - \frac{\Theta'}{\Theta_0}. \tag{A.42}$$

Agora, para encontrarmos $\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial r}$, iniciamos pela Eq. A.39 para o valor médio onde

$$\begin{aligned}\Theta_0 =& T_0\left(\frac{P^*}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}} \\ =& \frac{p_0}{R\rho_0}\left(\frac{P^*}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}} \\ =& \frac{P^{*\frac{R}{c_p}}}{R\rho_0} p_0^{1-\frac{R}{c_p}}.\end{aligned} \tag{A.43}$$

Em seguida, derivamos a equação acima com respeito a r e encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_0}{\partial r} =& \frac{P^{*\frac{R}{c_p}}}{R}\left[\frac{1}{\rho_0}\left(1 - \frac{R}{c_p}\right)p_0^{-\frac{R}{c_p}}\frac{\partial p_0}{\partial r} + p_0^{1-\frac{R}{c_p}}\left(\frac{-1}{\rho_0^2}\frac{\partial \rho_0}{\partial r}\right)\right] \\ =& \frac{1}{R}\left(\frac{P^*}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}\left[\frac{1-\frac{R}{c_p}}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{p_0}{\rho_0^2}\frac{\partial \rho_0}{\partial r}\right] \\ \frac{1}{\Theta_0}\frac{\partial \Theta_0}{\partial r} =& \frac{\rho_0}{p_0}\left[\frac{1-\frac{R}{c_p}}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{p_0}{\rho_0^2}\frac{\partial \rho_0}{\partial r}\right].\end{aligned} \tag{A.44}$$

Rearranjando a Eq. A.44 temos que

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1-\frac{R}{c_p}}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{\Theta_0}\frac{\partial \Theta_0}{\partial r}. \tag{A.45}$$

Substituímos então as Eqs. A.42 e A.45 na Eq. A.37 para obtermos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) + \frac{p'}{\rho_0}\left[\frac{1-\frac{R}{c_p}}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{\Theta_0}\frac{\partial \Theta_0}{\partial r}\right] + \left[\left(1-\frac{R}{c_p}\right)\frac{p'}{p_0} - \frac{\Theta'}{\Theta_0}\right] g \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) + \frac{p'}{\rho_0}\left(\frac{1}{\Theta_0}\frac{\partial \Theta_0}{\partial r}\right) + \frac{\Theta'}{\Theta_0} g. \end{aligned} \tag{A.46}$$

Onde utilizamos a Eq. A.34 para eliminar o segundo termo da equação superior.

Sendo a velocidade do fluido muito menor que a velocidade do som e supondo que Θ_0 varia lentamente ao longo do raio, podemos descartar o segundo termo da equação acima. Assim, podemos finalmente mostrar a que

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) + \frac{\Theta'}{\Theta_0} g. \tag{A.47}$$

A Eq. A.47 é a aproximação anelástica como proposta por Lipps & Hemler (1982). Se a substituirmos na Eq. A.32 veremos que

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p'}{\rho_0}\right) + \boldsymbol{g}\frac{\Theta'}{\Theta_0} + \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{f}}, \tag{A.48}$$

onde reincorporamos o termo de $\boldsymbol{f}$ para o caso geral, onde ainda existem outras forças além da gravitacional.

A.4.2 Conservação de energia

Para encontrarmos a equação responsável pela conservação da energia seguiremos os passos de Cossette et al. (2017). Devemos então partir do princípio termodinâmico $T\frac{ds}{dt} = S_Q$, onde S_Q é a fonte de calor por unidade de massa, s a entropia e T a temperatura. Utilizamos também a definição de temperatura potencial em função da entropia, $ds = c_p d\,(ln\Theta)$, e a aproximação anelástica de Lipps & Hemler (1982), $T' \equiv \Theta'$. Assim, chegamos que

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\Theta_0}{\rho_0 T_0}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa_r\rho_0\boldsymbol{\nabla}\left(\Theta\frac{T_0}{\Theta_0}\right)\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\frac{\rho_0 T_0}{\Theta_0}\boldsymbol{\nabla}\Theta\right)\right], \tag{A.49}$$

onde κ_r e κ são as constantes de condução radiativa e condução térmica, respectivamente. Definimos então o termo entre colchetes como sendo

$$\mathcal{H}(\Theta) = \frac{\Theta_0}{T_0}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa_r\rho_0\boldsymbol{\nabla}\left(\Theta\frac{T_0}{\Theta_0}\right)\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\kappa\frac{\rho_0 T_0}{\Theta_0}\boldsymbol{\nabla}\Theta\right)\right], \tag{A.50}$$

de modo que

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{1}{\rho_0}\mathcal{H}(\Theta). \tag{A.51}$$

Multiplicamos então a Eq. A.51 por ρ e abrimos a derivada material (ver Eq. C.44) para obtermos

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\rho_0\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Theta =&\mathcal{H}(\Theta)\\ \rho_0\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{u}\Theta) =&\mathcal{H}(\Theta),\end{aligned}\tag{A.52}$$

onde, na passagem, utilizamos o produto vetorial $\boldsymbol{\nabla}(\rho_0\boldsymbol{u}\Theta)=\Theta\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{u})\right)+\rho_0\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{\nabla}\Theta\right)$ e a Eq. A.31 para anular o segundo termo. Em seguida, realizamos uma média horizontal na Eq. A.52, denotado por $\langle\cdot\rangle$. Sendo nossa média longa o suficiente, de forma a atingirmos um estado estacionário, a derivada temporal se anula. E ficamos então com

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\langle\rho_0\boldsymbol{u}\Theta\rangle=\mathcal{H}(\langle\Theta\rangle).\tag{A.53}$$

Definindo então que $\langle\Theta\rangle=\Theta_a$, onde Θ_a é um estado ambiente de referência. Podemos agora descrever as variáveis $\boldsymbol{u}$ e Θ, no lado esquerdo da Eq. A.53, como sendo a soma de um valor médio e sua perturbação (i.e., $X=\langle X\rangle+X'$). Aqui, utilizamos que $\langle\langle X\rangle\rangle=\langle X\rangle$. Assim temos que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho_0\langle\boldsymbol{u}\rangle\Theta_a+\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho_0\langle\boldsymbol{u}'\Theta'\rangle+=\mathcal{H}(\Theta_a).\tag{A.54}$$

Agora, ao aplicarmos a mesma média horizontal na Eq. A.31, veremos que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho_0\langle\boldsymbol{u}\rangle=0$. Isso significa que, contanto que as fronteira sejam impermeáveis, $\langle\boldsymbol{u}\rangle=0\;\forall\,r$. Com isso temos que $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$ e que

$$0=\mathcal{H}(\Theta_a)-\rho_0\mathcal{H}^\star,\tag{A.55}$$

onde $\mathcal{H}^\star=-\rho_0^{-1}\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho_0\langle\boldsymbol{u}'\Theta'\rangle$.

Agora, ao multiplicamos a Eq. A.55 por ρ_0^-1 e a subtraímos da Eq. A.51 teremos

$$\frac{D\Theta}{Dt}=\frac{1}{\rho_0}\left(\mathcal{H}(\Theta)-\mathcal{H}(\Theta_a)\right)+\mathcal{H}^\star.\tag{A.56}$$

Em nossas simulações, modelamos $\mathcal{H}^\star$ como um resfriamento newtoniano na forma $\mathcal{H}^\star=-\Theta'/\tau$, onde τ é a escala de tempo do resfriamento. Em seguida, escrevemos que $\Theta=\Theta_a+\Theta'$ e abrimos a derivada material para o termo com Θ_a. De tal modo que

$$\begin{aligned}\frac{D\Theta_a}{Dt}+\frac{D\Theta'}{Dt} =&\frac{1}{\rho_0}\mathcal{H}(\Theta')-\frac{\Theta'}{\tau}\\ \frac{D\Theta'}{Dt}+\frac{\partial\Theta_a}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Theta_a =&\frac{1}{\rho_0}\mathcal{H}(\Theta')-\frac{\Theta'}{\tau}\\ \frac{D\Theta'}{Dt} =&-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Theta_a-\frac{\Theta'}{\tau}+\frac{1}{\rho_0}\mathcal{H}(\Theta')\end{aligned}\tag{A.57}$$

onde utilizamos do fato de Θ_a vir de um estado estacionário para eliminarmos a derivada temporal e fizemos $(\mathcal{H}(\Theta)-\mathcal{H}(\Theta_a))=\mathcal{H}(\Theta')$. O termo de $\mathcal{H}(\Theta')$ representa difusão e

condução térmica em suas formas explícitas. Neste trabalho tais propriedades estão a cargo do modelo numérico e, portanto, o termo pode ser desconsiderado. Sendo assim, a forma final da equação de conservação da energia é

$$\boxed{\frac{D\Theta'}{Dt} = -\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Theta_a - \frac{\Theta'}{\tau}} \tag{A.58}$$

APÊNDICE B – EULAG-MHD: métodos numéricos

B.1 MPDATA

Um dos algorítimos usados para reduzir os erros de truncamento é o *multidimensional positive definite advection transport algorithm* (MPDATA). Para melhor entendermos a ideia por trás do método, traremos sua demonstração para um fluxo solenoidal em 1D. Uma demonstração mais completa, incluindo o caso 1D, pode ser encontrada em Smolarkiewicz (2006). Assim, devemos considerar a equação de advecção para um campo escalar não negativo, Ψ, como sendo

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(u\Psi\right), \tag{B.1}$$

onde $u = cte$ representa a velocidade de escoamento do fluxo. Ao avaliar numericamente uma grandeza representada pela Eq. B.1, nos interessa encontrar o valor de Ψ para o tempo seguinte, $n+1$, tendo seu valor conhecido no tempo n. Uma forma de encontrar esse valor é através da aproximação conhecida como *donor-cell*, ou célula doadora, na qual

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - \left[F\left(\Psi_i^n, \Psi_{i+1}^n, U_{i+1/2}\right) - F\left(\Psi_{i-1}^n, \Psi_i^n, U_{i-1/2}\right)\right]. \tag{B.2}$$

Aqui a posição no tempo é determinada pelos sobre-índices, enquanto que os sub-índices indicam a posição espacial. F na Eq. B.2 representa uma função fluxo dada por

$$F\left(\Psi_L, \Psi_R, U\right) \equiv \left[U\right]^+ \Psi_L + \left[U\right]^- \Psi_R \tag{B.3}$$

em termos do número de Courant local, U, definido como

$$U \equiv \frac{u\delta t}{\delta x};\ \left[U\right]^+ \equiv \frac{1}{2}\left(U + |U|\right);\ \left[U\right]^- \equiv \frac{1}{2}\left(U - |U|\right). \tag{B.4}$$

Os índices inteiros e semi-inteiros correspondem aos valores no centro e nas bordas das células, respectivamente. Enquanto que $\left[U\right]^+$ e $\left[U\right]^-$ são respectivamente as partes não-negativas e não-positivas do número de Courant. Podemos analisar o erro de truncamento da Eq. B.2 expandindo suas variáveis independentes em séries de Taylor, até a segunda ordem em δx e δt, e utilizando a Eq. B.1 para substituir as derivadas temporais por espaciais. Fazendo isso, encontramos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(u\Psi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-K\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right), \tag{B.5}$$

onde

$$K = \frac{(\delta x)^2}{2\delta t}\left(|U| - U^2\right). \tag{B.6}$$

A Eq. B.5 é uma equação de difusão-advecção e difere da Eq. B.1 apelas pelo último termo. A chave do MPDATA é reescrever esse termo, chamado de *termo de erro*, como um fluxo advectivo oposto na forma

$$u_d\Psi \equiv -K\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{B.7}$$

De onde podemos encontrar a velocidade difusiva, u_d, utilizando a Eq. B.6 e assim,

$$u_d \equiv -\frac{(\delta x)^2}{2\delta t}\left(|U| - U^2\right)\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{B.8}$$

Podemos então utilizar mais uma vez a aproximação apresentada na Eq. B.2 para compensarmos o erro de truncamento. Dessa vez, utilizamos a velocidade $-u_d$ na Eq. B.1, ao invés de u e com o valor de Ψ^{n+1} ao invés de Ψ^n. Com isso, teremos um resultado para Ψ^{n+1} livre do erro de primeira ordem.

A estabilidade do algorítimo depende apenas da garantia de que $|U| < 1$ e de uma aproximação adequada para o termo $\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ na Eq. B.8. Uma exemplo válido dessa aproximação seria

$$\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \approx \frac{2}{\delta x}\frac{\Psi_{i+1}^{n+1} - \Psi_i^{n+1}}{\Psi_{i+1}^{n+1} + \Psi_i^{n+1} + \epsilon}, \tag{B.9}$$

onde $\epsilon > 0$.

B.2 Solucionador elíptico

Para que o EULAG-MHD possa resolver um modelo através da aproximação anelástica, detalhada no Apêndice A, é preciso encontrarmos as perturbações de pressão tal que $\rho\boldsymbol{u}$ obedeçam a Eq. A.31. Em Prusa et al. (2008) vemos, através da manipulação algébrica das Eqs. A.31, A.58 e A.48, que ao resolvermos numericamente a equação

$$\left\{\frac{\Delta t}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\left[\tilde{\boldsymbol{u}} - \left(\boldsymbol{I} - 0.5\Delta t\boldsymbol{R}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\nabla}\pi'\right)\right]\right\}_i = 0, \tag{B.10}$$

podemos encontrar a evolução das perturbações de pressão. Na Eq. B.10, o termo $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{g}\frac{\Delta t}{2\Theta_0}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Theta_a$ e π' é a perturbação da pressão e a única variável, uma vez que utilizamos as demais variáveis do passo temporal anterior.

Para resolver a Eq. B.10, o EULAG-MHD utiliza o algoritmo *generalized conjugate residual* (GCR), descrito em Smolarkiewicz & Margolin (2000), e que detalharemos aqui. Primeiramente, reescrevemos a Eq. B.10 na forma

$$\mathcal{L}(\phi) - R = 0, \tag{B.11}$$

onde $\phi \equiv \pi'$, $\mathcal{L} \equiv \frac{\Delta t}{\rho}\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \left(\boldsymbol{I} - 0.5\Delta t \boldsymbol{R}\right)^{-1} (\boldsymbol{\nabla}\pi')$ e $R \equiv \frac{\Delta t}{\rho}\tilde{\boldsymbol{u}}$. Uma das formas de resolvermos a Eq. B.11 é introduzirmos uma dependência de ϕ quanto ao pseudo-tempo τ, de modo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \mathcal{L}(\phi) - R. \tag{B.12}$$

Escolhemos então $\overline{\phi}$ como a solução exata para a Eq. B.11, de modo que $\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \tau} = 0$.

Assim, podemos definir o erro na solução como sendo $e \equiv \phi - \overline{\phi}$ e encontrarmos que

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \mathcal{L}(e), \tag{B.13}$$

onde utilizamos que $R = \mathcal{L}(\overline{\phi})$ e assumimos que $\mathcal{L}$ é linear. Multiplicamos então ambos os lados da Eq. B.13 por e e integramos sobre todo o domínio para encontrarmos que

$$\frac{\partial \langle e^2 \rangle}{\partial \tau} = 2\langle e\mathcal{L}(e)\rangle, \tag{B.14}$$

onde $\langle ... \rangle$ representa a integral sobre todo o domínio. A Eq. B.14 nos diz que a Eq. B.12 resultará na solução exata quando $\tau \to \infty$, dado que $\forall e \neq 0,\ \langle e\mathcal{L}(e)\rangle < 0$. Assim, definimos que o operador $\mathcal{L}$ é definido negativo ou dissipativo.

Assim, podemos discretizar a Eq. B.12 em pseudo-tempos com incrementos $\Delta\tau = \beta$ e utilizarmos o método de diferenças finitas em $\partial\phi/\partial\tau$ para encontrarmos o esquema de difusão de Richardson (Smolarkiewicz; Margolin, 2000):

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \beta(\mathcal{L}(\phi^n) - R). \tag{B.15}$$

B.2.1 Funcional de energia

Precisamos agora resolver o algoritmo apresentado na Eq. B.15 para encontrarmos ϕ. Para isso utilizaremos o funcional

$$\mathcal{J}(\phi) \equiv -\frac{1}{2}\langle \phi\mathcal{L}(\phi)\rangle + \langle \phi R\rangle, \tag{B.16}$$

conhecido como funcional de energia. Agora, ao substituirmos a definição do erro e na Eq.B.16 e utilizarmos que $R = \mathcal{L}(\overline{\phi})$ temos que

$$\mathcal{J}(\phi) = -\frac{1}{2}\langle \phi\mathcal{L}(\phi)\rangle + \mathcal{J}(\overline{\phi}) + \frac{1}{2}\left[\langle \phi\mathcal{L}(\overline{\phi})\rangle - \overline{\phi}\mathcal{L}(\phi)\right], \tag{B.17}$$

onde $\mathcal{J}(\overline{\phi})$ é definido analogamente a $\mathcal{J}(\phi)$ na Eq. B.16. Se considerarmos então que o operador $\mathcal{L}$ é autoadjunto, ou seja, que $\langle \epsilon\mathcal{L}(\overline{\phi})\rangle = \langle \phi\mathcal{L}(\epsilon)\rangle$, onde ϵ representa uma função arbitrária, então todo o terceiro termo da Eq. B.17 desaparece. Agora, como $\mathcal{L}$ é definido negativo, então $\mathcal{J}(\phi) > \mathcal{J}(\overline{\phi}) \forall \phi$ e a solução exata $\overline{\phi}$ minimizará o funcional da Eq. B.16.

B.2.2 Erro residual

Podemos notar que a Eq. B.12 só será igual a zero quando $\phi = \overline{\phi}$, caso contrário teremos o chamado erro residual que definimos como sendo

$$r \equiv \mathcal{L}(\phi) - R \implies r = \mathcal{L}(e). \tag{B.18}$$

Concluímos então, pela definição do erro e e linearidade de $\mathcal{L}$, que $r = \mathcal{L}(e)$. Reescrevemos então a Eq. B.12 na forma

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \mathcal{L}(r). \tag{B.19}$$

A partir da Eq. B.19, é possível encontrarmos uma relação como aquela encontrada para o erro e na Eq. B.14, onde vemos que

$$\frac{\partial r^2}{\partial \tau} = 2\langle r\mathcal{L}(r)\rangle. \tag{B.20}$$

De modo semelhante, concluímos também que, para a definição negativa de $\mathcal{L}$, $r \to 0$ quando $\tau \to \infty$.

B.2.3 O algoritmo

Com os mesmos argumentos que utilizamos para converter a Eq. B.12 na Eq. B.15, podemos converter as Eqs. B.13 e B.18 em

$$e^{n+1} = e^n + \beta\mathcal{L}(e^n), \tag{B.21}$$

e

$$r^{n+1} = r^n + \beta\mathcal{L}(r^n), \tag{B.22}$$

respectivamente.

Ao aplicarmos o funcional de energia, Eq. B.17, no erro e para o operador autoadjunto $\mathcal{L}$, encontramos que

$$\mathcal{J}(e) = -\frac{1}{2}\langle e\mathcal{L}(e)\rangle = -\frac{1}{2}\langle er\rangle. \tag{B.23}$$

Como vimos, a solução exata, $\overline{\phi}$, é responsável por minimizar o funcional $\mathcal{J}(e)$. Podemos assim encontrar um valor de β tal que $-\langle e^{n+1}r^{n+1}\rangle$ seja minimizado, fazendo o algoritmo convergir mais rapidamente. Fazemos então o produto entre as Eqs. B.21 e B.22, integrando sobre todo o domínio e anulando a derivada em β, temos que

$$\langle r^n r^n\rangle + \langle e^n\mathcal{L}(r^n)\rangle + 2\beta\langle r^n\mathcal{L}(r^n)\rangle = 0. \tag{B.24}$$

Contudo, não podemos calcular e durante a iteração, mas sabemos que $\langle e^n \mathcal{L}(r^n)\rangle = \langle r^n \mathcal{L}(e^n)\rangle = \langle r^n r^n\rangle$. Substituindo na Eq. B.24 temos que

$$\beta = -\frac{\langle r^n r^n\rangle}{\langle r^n \mathcal{L}(r^n)\rangle} \tag{B.25}$$

Assim, o algoritmo elementar baseado no esquema de Richardson (Smolarkiewicz; Margolin, 2000) pode ser enunciado como

- Para uma estimativa inicial de $\phi = \phi^0$, faça $r^0 = \mathcal{L}(\phi^0) - R$ e itere:
  - $\beta - \frac{\langle r^n r^n\rangle}{\langle r^n \mathcal{L}(r^n)\rangle}$
  - $\phi^{n+1} = \phi^n + \beta \mathcal{L}(r^n)$
  - $r^{n+1} = r^n + \beta \mathcal{L}(r^n)$
  - Finalize se $|r^{n+1}| \leq \epsilon$

Uma vez que $\phi \equiv \pi'$, esse algoritmo encontra o valor de π' que satisfaz a Eq. B.10.

APÊNDICE C – Demonstrações adicionais

Neste apêndice, traremos algumas demonstrações de termos que são utilizados ao longo deste trabalho. No geral, são exemplos que não se encaixam em um grupo específico e, por isso, ficaram um um apêndice próprio.

C.1 Princípio da energia

O princípio da energia (Bernstein et al., 1958) se baseia na capacidade de escrever a equação de movimento para uma perturbação causada pelo deslocamento do fluido, $\boldsymbol{\xi}$, na forma

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}), \tag{C.1}$$

onde $\boldsymbol{F}$ é um operador linear auto-adjunto de força, que permite $\int \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta})d\tau = \int \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})d\tau$, onde a integral é realizada no volume e $\boldsymbol{\xi}$ se relaciona com as perturbações na velocidade $\boldsymbol{u}'$ pela equação

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}. \tag{C.2}$$

Podemos então propor uma solução para Eq. (C.1) da forma

$$\boldsymbol{\xi}(t) \propto \exp(i\omega t), \tag{C.3}$$

com ω sendo a frequência angular do deslocamento $\boldsymbol{\xi}$. Pelas propriedades do operador auto-adjunto temos que ω^2 é real, significando assim que $\omega^2 < 0$ representaria uma instabilidade cuja taxa de crescimento seria de $\lambda = |\omega|$. Também pelas propriedades do operador, podemos observar que a conservação da energia do deslocamento é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\int \rho\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}d\tau - \frac{1}{2}\int \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})d\tau\right] = 0. \tag{C.4}$$

Uma vez que a energia cinética do deslocamento do fluido (primeiro termo da Eq. (C.4)) é necessariamente positiva, a energia potencial,

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})d\tau, \tag{C.5}$$

deve ser negativa.

Critérios de estabilidade

Como estamos discutindo a evolução de um plasma magnetizado, para determinarmos os critérios de estabilidade do modelo, pelo princípio da energia, devemos encontrar o

operador força $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ (Goldstein et al., 2019). Partimos das equações MHD na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} P + \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}}{\rho c}, \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} S = 0, \tag{C.8}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}), \tag{C.9}$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}, \tag{C.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{C.11}$$

Elas representam as equações de conservação para massa, momento e entropia, junto com as Leis de Faraday-Maxwell, Ampère e Gauss para o magnetismo, respectivamente. Onde $\boldsymbol{u}$ é a velocidade, ρ a densidade, P pressão, S entropia, $\boldsymbol{g}$ é a aceleração gravitacional, $\boldsymbol{B}$ o campo magnético e $\boldsymbol{J}$ a densidade de corrente. A densidade, pressão e entropia se relacionam através da equação de estado de um gás ideal por

$$\rho = \rho(S, P) = P^{1/\gamma} e^{-S/c_P}, \tag{C.12}$$

onde c_P é o calor específico a pressão constante e γ é o coeficiente adiabático.

Assumimos então que as grandezas físicas podem ser expressas a partir de um valor médio (indicado pelo subíndice 0) mais um valor perturbado (indicado pelo $'$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}', \\ P &= P_0 + P', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \\ S &= S_0 + S', \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}', \\ \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{J}'. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Sem perda de generalidade, escolhemos um campo médio de velocidade tal que $\boldsymbol{u_0} = 0$, onde os valores médios do modelo obedecem à condição de equilíbrio magneto-hidrostático

$$\frac{\boldsymbol{\nabla} P_0}{\rho_0} = \boldsymbol{g} + \frac{\boldsymbol{J}_0 \times \boldsymbol{B}_0}{\rho_0 c}, \tag{C.14}$$

à condição de equilíbrio de corrente

$$\boldsymbol{J}_0 = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}_0, \tag{C.15}$$

e à relação entre os gradientes proveniente da Eq. (C.12)

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho_0}{\rho_0} = \frac{\boldsymbol{\nabla}P_0}{\gamma P_0} - \frac{\boldsymbol{\nabla}S_0}{c_P}. \tag{C.16}$$

Podemos agora linearizar as Eqs. C.6-C.11, substituindo nelas as Eqs. C.13, subtraindo os valores médios e descartando contribuições de ordens superiores. Obtemos então que

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{u}') = 0 \tag{C.17}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}'}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}P'}{\rho_0} + \frac{\rho'}{\rho_0}\boldsymbol{g} + \left(\frac{\boldsymbol{J}'\times\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{J}_0\times\boldsymbol{B}'}{\rho_0 c}\right) \tag{C.18}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{\nabla}S_0 = 0 \tag{C.19}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{B}_0) \tag{C.20}$$

$$\boldsymbol{J}' = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}') \tag{C.21}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}' = 0 \tag{C.22}$$

A Eq. (C.18) pode ser substituída na Eq. (C.1) para assim determinarmos $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$. Porém, é necessário ainda definirmos os termos da Eq. (C.18) em função do $\boldsymbol{\xi}$. Assim, supomos que $\rho' = \rho - \rho_0 \ll \rho_0$ (Brown et al., 2012) e podemos descrever a perturbação na densidade através da equação de estado (Eq. C.12) linearizada na forma

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma}\frac{P'}{P_0} - \frac{S'}{c_P}. \tag{C.23}$$

Se integrarmos então as Eqs. C.17, C.19 e C.20 em função do tempo encontramos que

$$\rho' = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi}), \tag{C.24}$$

$$S' = -\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}(S_0), \tag{C.25}$$

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0), \tag{C.26}$$

que expressam as perturbações da densidade ρ', entropia S', e do campo $\boldsymbol{B}'$, em função explícita do vetor deslocamento $\boldsymbol{\xi}$. Substituindo a Eq. (C.26) na Eq. (C.21), temos explicitamente também a perturbação na densidade de corrente dada por

$$\boldsymbol{J}' = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B}_0)]. \tag{C.27}$$

Agora, podemos rearranjar a Eq. (C.23) onde, substituindo sequencialmente as Eq. (C.24), (C.16) e (C.25), encontrarmos P' como sendo

$$P' = -\gamma P_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}P_0. \tag{C.28}$$

Podemos finalmente substituir os resultados acima na Eq. (C.18) e a partir da Eq. (C.1) definimos o operador força por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) =& \boldsymbol{\nabla}\left(\gamma P_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}P_0\right) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho_0\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{g} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\left[\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}'\right)\times\boldsymbol{B}_0 + \left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_0\right)\times\boldsymbol{B}'\right].\end{aligned} \tag{C.29}$$

Ao realizarmos o produto escalar do operador força (Eq. (C.29)) com $\boldsymbol{\xi}$ temos que a energia potencial do modelo é dada por

$$\begin{aligned}\delta W =& \frac{1}{2}\int d\tau \left[\frac{\boldsymbol{B}'^2}{4\pi} - \frac{\boldsymbol{J}_0\cdot\left(\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{\xi}\right)}{c} + \gamma P_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi})^2\right. \\ &\left. + \left(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla}P_0\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\right]\end{aligned} \tag{C.30}$$

Aplicando as condições de contorno

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0, \quad \boldsymbol{B}_0\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0, \tag{C.31}$$

que correspondem a bordas rígidas e perfeitamente condutoras, e onde $\hat{n}$ é o vetor unitário de superfície, eliminamos algumas integrais de superfície. Em seguida, definimos as componentes de $\boldsymbol{\xi}$ em coordenadas cilíndricas como sendo

$$\begin{bmatrix}\xi_r\\ \xi_\phi\\ \xi_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}X\cos m\phi\\ -(Y/m)\sin m\phi\\ Z\cos m\phi\end{bmatrix}, \tag{C.32}$$

onde X,Y,Z dependem de s e z, e m é o número de onda longitudinal. Assim, podemos avaliar a componente ϕ da integral apresentada na Eq. (C.30) como sendo

$$\begin{aligned}\delta W =& \frac{1}{8}\int sdsdz\left\{\frac{m^2B_\phi^2}{s^2}\left(X^2+Z^2\right) + \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(B_\phi X\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B_\phi Z\right)\right]^2\right. \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(B_\phi X\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(B_\phi Z\right)\right]\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sB_\phi\right)X + \frac{\partial B_\phi}{\partial z}Z\right] \\ &- \frac{B_\phi}{s}Y\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sB_\phi\right)X + \frac{\partial B_\phi}{\partial z}Z\right] + 4\pi\gamma P_0\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sX) - \frac{Y}{s} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right]^2 \\ &+ 4\pi\left(g_sX + g_zZ\right)\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s}X + \frac{\partial\rho_0}{\partial z}Z\right) \\ &\left.+ 4\pi\left[X\left(\frac{\partial P_0}{\partial s} + \rho_0 g_s\right) + Z\left(\frac{\partial P_0}{\partial z} + \rho_0 g_z\right)\right]\times\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sX) - \frac{Y}{s} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right]\right\},\end{aligned} \tag{C.33}$$

onde os termos g_s e g_z são as componentes radial e axial da gravidade $\boldsymbol{g}$, e B_ϕ a componente azimutal do campo magnético $\boldsymbol{B}$. Podemos então minimizar a Eq. (C.33) em respeito a Y fazendo

$$\frac{\partial\delta W}{\partial Y} = 0, \tag{C.34}$$

e encontrando que

$$\frac{Y}{s} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sX) + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\left(g_s X + g_z Z\right). \tag{C.35}$$

Substituindo na Eq. (C.34) temos

$$\begin{aligned}\delta W_{\min} =& \frac{1}{8}\int s ds dz \left\{ B_\phi^2 \left[s\frac{d}{ds}\left(\frac{X}{s}\right) + \frac{dZ}{dz}\right]^2 \right. \\ & \left. + 4\pi\left[\mathcal{A}X^2 + \mathcal{B}XZ + \mathcal{C}Z^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{C.36}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \equiv & -\rho_0 g_s\left(\frac{\rho_0 g_s}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial s}\right) \\ & + m^2\frac{B_\phi^2}{4\pi s^2} - \frac{B_\phi}{2\pi s^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(sB_\phi\right)\end{aligned} \tag{C.37}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \equiv & -\rho_0 g_s\left(\frac{\rho_0 g_z}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) \\ & - \rho_0 g_z\left(\frac{\rho_0 g_s}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial s}\right) - \frac{B_\phi}{2\pi s}\frac{\partial B_\phi}{\partial z}\end{aligned} \tag{C.38}$$

$$\mathcal{C} \equiv -\rho_0 g_z\left(\frac{\rho_0 g_z}{\gamma P_0} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) + m^2\frac{B_\phi^2}{4\pi s^2} \tag{C.39}$$

A primeira parte do integrando da Eq. (C.36) é sempre positiva. O termo $[\mathcal{A}X^2 + \mathcal{B}XZ + \mathcal{C}Z^2]$ possui uma forma quadrática binária. Completando seu quadrado podemos reescreve-lo na forma

$$\left[\mathcal{A}X^2 + \mathcal{B}XZ + \mathcal{C}Z^2\right] = \frac{1}{4A}(2AX + BZ)^2 - DZ^2, \tag{C.40}$$

onde $D = B^2 - 4AC$ é chamado de descriminante. Caso $D < 0$ vemos que $AC > 0$, ou seja, A e C possuem necessariamente o mesmo sinal. Sendo assim, a condição suficiente para que a Eq. (C.40) seja positiva, e consequentemente $\delta W > 0$, tem de ser dada por:

$$\mathcal{A} > 0, \quad \mathcal{C} > 0, \quad 4\mathcal{A}\mathcal{C} > \mathcal{B}^2 \tag{C.41}$$

As condições expressas na Eq. (C.41) devem ser respeitadas em todo o meio para a estabilidade. Contudo, a partir da definição do vetor deslocamento de fluido (Eq. (C.32)), o esquema descrito é válido somente para modos longitudinais com $m \neq 0$. Para $m = 0$, Tayler (1973) parte da Eq. (C.30) e utiliza-se de argumentos matemáticos distintos, alcançando por fim as mesmas condições expostas na Eq. (C.41), diferindo apenas pelas definições dos coeficientes A, B e C.

C.2 Derivada material

Imagine que estamos tentando estudar a variação temporal de uma determinada propriedade física, K, em uma posição específica, $\boldsymbol{x}_0$, dentro de um escoamento, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Nesse caso, é preciso levar em consideração que K depende tanto explicita quanto implicitamente do tempo, uma vez que o elemento de volume que contém K se move com o fluido, ou seja $K = K(t, \boldsymbol{x}(t))$. Se utilizarmos então a regra da cadeia obtemos que

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{C.42}$$

Como $u_i = d\boldsymbol{x}_i/dt$, onde $i = (1, 2, 3) \equiv (x, y, z)$ temos que

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial x}u_x + \frac{\partial K}{\partial y}u_y + \frac{\partial K}{\partial z}u_z = \frac{\partial K}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})K \tag{C.43}$$

Eq. C.43 corresponde a variação temporal de K, seguindo o elemento de fluido enquanto ele é carregado pelo escoamento. Esse é um tipo especial de derivada em estudos hidrodinâmicos, chamada de derivada lagrangiana, derivada total ou derivada material e sendo representada pelo operador

$$\boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})}. \tag{C.44}$$

Em particular, note que a derivada material de $\boldsymbol{u}$ nos dá a aceleração do elemento de fluido

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}. \tag{C.45}$$

C.3 Forças externas

Aqui temos algumas das forças externas que podem ser adicionadas à equação de momento (Eq. A.19).

Força de Lorentz

Para descobrirmos como o campo magnético interfere no escoamento do fluido devemos utilizar a força de Lorentz. Para uma partícula carregada, q, e se movendo com uma determinada velocidade, $\boldsymbol{u}$, em uma região onde há tanto campo elétrico, $\boldsymbol{E}$, quanto magnético, $\boldsymbol{B}$, essa força é dada por

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{C.46}$$

Consideremos então um volume finito, ΔV, no qual muitas dessas partículas estão contidas. A força total, $\boldsymbol{F}$ atuando sobre o elemento de volume tem de ser a soma das forças que atuam em cada uma das partículas individualmente, pelo elemento de volume:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} =& \frac{1}{\Delta V}\sum_k q_k(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{B}) \\ =& \Big(\frac{1}{\Delta V}\sum_k q_k\Big)\boldsymbol{E} + \Big(\frac{1}{\Delta V}\sum_k q_k \boldsymbol{u}_k\Big) \times \boldsymbol{B} \\ =& \varrho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}, \end{aligned} \tag{C.47}$$

onde ϱ_e é densidade de cargas e $\boldsymbol{J}$ a densidade de corrente. Considerando então que em nosso modelo MHD estamos lidando com plasmas globalmente neutros, $\varrho \to 0$, podemos desprezar a contribuição do termo elétrico. Assim, temos que

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}. \tag{C.48}$$

Utilizando as Eqs. A.21 e A.24, bem como a identidade vetorial $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$ podemos reescrever essa equação na forma

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mu_0}\Big[\underbrace{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}}_{\text{Tensão magnética}} - \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}^2}_{\text{Pressão magnética}}\Big],} \tag{C.49}$$

onde $\boldsymbol{B}^2 \equiv \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}$. Eq. C.49 pode ser inserida diretamente no termo $\boldsymbol{f}$ da equação de Navier-Stokes (Eq. A.19) para representar a contribuição magnética na velocidade.

Força gravitacional

A gravidade do meio é mais uma das forças externas que atuam sobre elementos de volume presentes nele. De forma semelhante ao que fizemos para a força de Lorentz, podemos determinar como essa força contribui para a velocidade do fluido. Imaginemos então uma única partícula, m, sujeita a um campo gravitacional com aceleração $\boldsymbol{g}$. A força que atua sobre tal partícula será dada por

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{g}. \tag{C.50}$$

Agora, se considerarmos um volume finito, ΔV, no qual um número grande dessas partículas está contido, teremos que a força gravitacional que atua sobre ele será a soma das forças que atuam sobre as partículas. Sendo assim

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta V}\Big(\boldsymbol{g}\sum_k m_k\Big) = \varrho\boldsymbol{g}.} \tag{C.51}$$

Onde ρ é a densidade do fluido. Assim como foi para a força de Lorentz, a força gravitacional pode ser adicionada diretamente no termo $\boldsymbol{f}$ da equação de Navier-Stokes (Eq. A.19).

APÊNDICE D – Método de campos teste (TFM)

D.1 Demonstração do método

Para deduzirmos o Método de campos teste (TFM, sigla em inglês) devemos partir da equação de indução para o campo médio

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\overline{\boldsymbol{u}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'} \right) - \boldsymbol{\nabla} \times \eta \boldsymbol{\nabla} \times \overline{\boldsymbol{B}}, \tag{D.1}$$

onde $\overline{\boldsymbol{B}}$ e $\overline{\boldsymbol{u}}$ correspondem aos valores médios dos campos magnético e de velocidade, enquanto que $\boldsymbol{b}'$ e $\boldsymbol{u}'$ são as respectivas perturbações entorno dessa média. Assim, definimos a força eletromotriz (FEM) como sendo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \overline{\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'}. \tag{D.2}$$

Diferenciamos então as perturbações turbulentas da simulação em dois tipos: aquelas que são intrínsecas aos meio (que independem do campo magnético), i.e. $x_{(0)}$, e aquelas que são decorrentes da existência do campo médio $\overline{\boldsymbol{B}}$, i.e. $x_{\overline{\boldsymbol{B}}}$. Assim, as perturbações podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}' &= \boldsymbol{b}_{(0)} + \boldsymbol{b}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \\ \boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{u}_{(0)} + \boldsymbol{u}_{\overline{\boldsymbol{B}}}. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Substituindo as definições da Eq. D.3 na Eq. D.2 podemos reescrever a FEM como sendo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{(0)} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\overline{\boldsymbol{B}}}, \tag{D.4}$$

onde

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{(0)} = \overline{\boldsymbol{u}_{(0)} \times \boldsymbol{b}_{(0)}} \;\text{ e }\; \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{u}_{(0)} \times \boldsymbol{b}_{\overline{\boldsymbol{B}}}} + \overline{\boldsymbol{u}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \times \boldsymbol{b}_{(0)}} + \overline{\boldsymbol{u}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \times \boldsymbol{b}_{\overline{\boldsymbol{B}}}}. \tag{D.5}$$

Para que possamos encontrar os coeficientes de transporte turbulento através do TFM faremos algumas considerações que, de certa forma, representam restrições a sua

utilização. Primeiro, assumiremos que a turbulência do meio seja puramente hidrodinâmica, ou seja $\boldsymbol{b}_{(0)} = 0$ e portanto $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}_{\overline{\boldsymbol{B}}}$, logo $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{(0)} = 0$. Temos então que,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{u}_{(0)} \times \boldsymbol{b}_{\overline{\boldsymbol{B}}}} + \overline{\boldsymbol{u}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \times \boldsymbol{b}_{\overline{\boldsymbol{B}}}} = \overline{\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'}, \tag{D.6}$$

onde utilizamos a Eq. D.3 e recuperamos a forma original da FEM (Eq. D.2). Nesse caso, as perturbações $\boldsymbol{b}'$ são lineares com respeito à $\overline{\boldsymbol{B}}$ e portanto $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\overline{\boldsymbol{B}})$, também é linear com $\overline{\boldsymbol{B}}$. Nos casos MHD, onde os termos de velocidade são influenciados pelo campo magnético, $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\overline{\boldsymbol{B}})$ já não possui apenas dependência em $\overline{\boldsymbol{B}}$, como também em $\overline{\boldsymbol{U}}$ e $\boldsymbol{u}$, ou seja $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(\overline{\boldsymbol{U}}, \boldsymbol{u}', \overline{\boldsymbol{B}})$. Ainda que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ tenha outras dependências, ela se mantém linear em $\overline{\boldsymbol{B}}$, permitindo o uso do TFM para encontrar seus coeficientes turbulentos caso essas dependências sejam conhecidas.

Como vimos a FEM possui uma dependência com $\overline{\boldsymbol{B}}$. Sendo assim, podemos expandir $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ em termos de $\overline{\boldsymbol{B}}$, onde encontramos que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{B}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\nabla}^2\overline{\boldsymbol{B}}), \tag{D.7}$$

onde $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$ e $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}$ são tensores de ordens dois e três, respectivamente. Na Eq. D.7 desprezamos derivadas temporais e truncamos a expansão em termos de ordem superior. Essa abordagem retira do método a capacidade de capturar os efeitos magnéticos em pequenas escalas, relegando os coeficientes apenas a suas contribuições em escalas maiores. Do mesmo modo, acabamos apenas por considerar modelos nos quais o valor médio do campo magnético não se altera muito rapidamente (Warnecke et al., 2018). Essas limitações não representam grandes restrições, no entanto necessitam de serem pontuadas.

Agora, podemos separar os tensores $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}$ e $\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{B}}$ em componentes simétricas e antissimétricas. Desse modo, reescrevemos a Eq. D.7 como sendo

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \overline{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{\gamma} \times \overline{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{\beta} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \overline{\boldsymbol{B}}) - \boldsymbol{\delta} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \overline{\boldsymbol{B}}) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{B}})^{(s)}.} \tag{D.8}$$

A representação da FEM como na Eq. D.8 é uma das principais componentes do TFM. A partir dela, as componentes simétrica e antissimétrica da Eq. D.7 são caracterizadas por coeficientes, que são por sua vez associados a componentes físicas que contribuem para a evolução do campo magnético. Nesse caso, $\boldsymbol{\alpha}$ é a componente simétrica do tensor $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$ e representa os movimentos helicoidais geradores do plasma, conhecido como efeito-α. Já a componente antissimétrica de $\overleftrightarrow{\boldsymbol{a}}$ é representada por $\boldsymbol{\gamma}$, conhecido como *pumping* magnético (Ossendrijver et al., 2002), que afeta o campo pela velocidade de circulação do plasma. As componentes simétricas e antissimétricas de $\overleftrightarrow{\boldsymbol{b}}$ são representadas por $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$, respectivamente, onde β nada mais é que a diffusividade turbulenta, enquanto δ representa o chamado efeito Rädler (Rädler, 1969). Já o coeficiente κ aparece acompanhando a componente simétrica de $\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{B}}$ ($\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{B}}^{(s)}$), contudo a determinação de sua natureza física

ainda se faz necessária (Schrinner et al., 2007). Assim, ao calcularmos $\mathcal{E}$, encontramos quais processos físicos contribuem para evolução do campo magnético.

D.1.1 Coeficientes de transporte turbulento

Na Sec. 2.2, vimos que a equação de indução para a perturbação do campo magnético ($\boldsymbol{b}'$), é dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}'}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}' - \boldsymbol{\mathcal{E}} \right) + \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}', \tag{D.9}$$

onde encontramos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. A dependência de $\boldsymbol{b}'$ torna a solução não trivial, mesmo numericamente. Com o TFM (Schrinner et al., 2005; Schrinner et al., 2007) é possível resolver a Eq. D.9 para simulações de dínamos globais, onde a Eq. D.9 é resolvida na sua forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}'_T}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{u}' \times \overline{\boldsymbol{B}}_T + \overline{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{b}'_T + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'_T - \boldsymbol{\mathcal{E}}_T \right) + \eta_d \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{b}'_T, \tag{D.10}$$

com os valores de $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\boldsymbol{u}'$ sendo provenientes da própria simulação e $\overline{\boldsymbol{B}}_T$ sendo os *campos teste*, onde $T = 1, ..., T$. Assim, podemos calcular a FEM

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_T = \overline{\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{b}'_T}, \tag{D.11}$$

e determinarmos as componentes físicas geradoras do campo magnético a partir dos coeficientes da Eq. D.8. Essa solução é única quando os campos teste são independentes entre si e sua quantidade é suficiente. A determinação do número necessário de campos teste vem do cálculo dos coeficientes da Eq. D.11. O cálculo de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ para um dado ponto no plano (r, θ) requer o conhecimento das componentes de $\overline{\boldsymbol{B}}$ na vizinhança desse ponto. Como vimos anteriormente, assumimos que $\overline{\boldsymbol{B}}$ não apresenta grandes variações nessa vizinhança, podendo ser representado apenas por $\overline{\boldsymbol{B}}$ e suas primeiras derivadas nesse ponto. Com isso, encontramos a componente i da FEM como sendo

$$\mathcal{E}_i = a_{ij} \overline{\boldsymbol{B}}_j + b_{ijr} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}_j}{\partial r} + b_{ij\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}_j}{\partial \theta}, \tag{D.12}$$

onde $i, j = r, \theta, \phi$. A Eq. D.12 apresenta um total de 27 coeficientes entre $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_{ijr}$ e $\tilde{b}_{ij\theta}$ que dependem das velocidades ($\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\boldsymbol{u}'$), mas são independentes do campo $\overline{\boldsymbol{B}}$. Assim, considerando as componentes do campo, são necessários 9 campos teste linearmente independentes para que todos os coeficientes da Eq. D.12 sejam calculados.

Agora, ao relacionarmos a Eq. D.12 com a Eq. D.8 encontramos as componentes de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta}$ e $\boldsymbol{\kappa}$ como sendo

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \frac{1}{2} \left(a_{ij} + a_{ji} \right), \ \gamma_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} a_{jk}, \\
\beta_{ij} &= \frac{1}{4} \left(\epsilon_{ikl} b_{jkl} + \epsilon_{jkl} b_{ikl} \right), \ \delta_i = \frac{1}{4} \left(b_{jji} - b_{jij} \right), \\
\kappa_{ijk} &= -\frac{1}{2} \left(b_{ijk} + b_{ikj} \right).
\end{aligned} \tag{D.13}$$

Com isso, o TFM é capaz de determinar as propriedades físicas geradoras do campo magnético.