UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Luan Moisés Dos Santos Valadares

MENORES DE GRAFOS: LARGURA EM ÁRVORES DE GRAFOS PLANARES

Belo Horizonte
2025

Luan Moisés Dos Santos Valadares

MENORES DE GRAFOS: LARGURA EM ÁRVORES DE GRAFOS PLANARES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte

Belo Horizonte
2025

Valadares, Luan Moisés dos Santos.

V136m Menores de grafos: [recurso eletrônico] largura em árvores de grafos planares/ Luan Moisés dos Santos Valadares – 2025.
1 recurso online (65 f. il., color.) : pdf.

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 64-65.

1. Matemática – Teses. 2. Teoria dos grafos – Teses. 3. Árvores (Teoria dos grafos) – Teses. 4. Grafos planares – Teses. I. Thatte, Bhalchandra Digambar. I. Universidade Federal de Minas Gerais Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Menores de Grafos: Largura em Árvores de Grafos Planares

LUAN MOISÉS DOS SANTOS VALADARES

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Bhalchandra Digambar Thatte
Orientador - UFMG

Prof. Csaba Schneider
UFMG

Profa. Danielle Franco Nicolau
UFV

Profa. Deisiane Lopes Gonçalves
UFV

Prof. Sérgio Henrique Nogueira
UFV

Belo Horizonte, 01 de agosto de 2025.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Minha primeira e mais profunda gratidão é para minha mãe, Ormilia Maria dos Santos. Mãe, cada passo meu tem o traço da tua coragem. Com sacrifícios silenciosos você transformou impossíveis em oportunidades e fez da fé na educação o nosso guia. Tudo o que conquistei repousa sobre o alicerce que você ergueu, pedra por pedra.

Aos meus irmãos, Davi, Daniel, Deivison e Lucas, minha gratidão. A fé que depositaram em mim e o laço inquebrável do nosso companheirismo foi precioso nesta caminhada. Aos meus sobrinhos amados, Antony, Jhonatan e Kaleb, que enchem meus dias de luz e significado, obrigado por tornarem minha vida mais bela com suas presenças.

À minha amiga e irmã de jornada, Janaína Geralda, presente desde os primeiros passos da graduação: tua leveza tornou suportável os dias. Entre nossas piadas internas e aquelas longas conversas, que jamais ousarei chamar de fofoca, mas sim de análises profundas da realidade, encontrei alívio, afeto e sabedoria. Obrigado por ser refúgio em meio ao caos.

Ao meu grande amigo Felipe Fugêncio, conselheiro em todas as áreas da vida, obrigado por acreditar no meu potencial mesmo nos dias em que eu duvidava dele.

Ao Duolingo, obrigado por me ajudar a passar na prova de proficiência em inglês.

E a vocês, Maira, Anderson, Augusto, Celio, Filipe, Julian, Caio e Gabriel, minha gratidão por cada momento de leveza ao longo dessa caminhada. As conversas espontâneas, as brincadeiras, os intervalos cheios de risadas e as distrações tão necessárias me ajudaram a respirar nos dias mais intensos. Vocês fizeram do mestrado algo mais humano, mais suportável.

Ao meu orientador Professor Bhalchandra, agradeço pelos ensinamentos incansáveis, pela confiança depositada e, acima de tudo, por me encorajar a prosseguir quando o caminho parecia íngreme demais. Sua orientação combinou rigor acadêmico e humanidade, fazendo com que cada obstáculo se tornasse uma oportunidade de crescimento.

Aos membros da banca Csaba Schneider, Danielle Franco, Deisiane Lopes e Sérgio Nogueira registro meu profundo respeito e admiração. Obrigado por aceitarem o convite, oferecerem leitura atenta e contribuírem com críticas que elevaram a qualidade deste trabalho.

Agradeço, de coração, a todos os funcionários da instituição que, mesmo sem contato direto ou sequer nos conhecermos, contribuíram de forma silenciosa e essencial para que minha jornada fosse possível. Sei que cada gesto, cada trabalho realizado com dedicação, fez diferença no meu caminho.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"A persistência é o caminho do êxito".
Charles Chaplin

Resumo

A teoria dos menores de grafos, desenvolvida por Robertson e Seymour, desempenha um papel fundamental na caracterização estrutural de classes de grafos. Em particular, a largura em árvore tornou-se uma ferramenta crucial na análise de grafos planares, por permitir o desenvolvimento de algoritmos eficientes para problemas classicamente difíceis. Esta dissertação tem como objetivo investigar a relação entre a planaridade e a largura em árvores, destacando os principais conceitos, propriedades e teoremas que fundamentam a estrutura de decomposições em árvores. Também são discutidos os teoremas de Kuratowski e de Robertson-Seymour, bem como a noção de boa-quase-ordenação aplicada a árvores. Através da análise de propriedades de grafos planares e da construção de decomposições específicas, evidenciamos a importância da largura em árvores como medida de complexidade estrutural em grafos planares.

Palavras-chave: grafos menores, grafos planares, largura em árvores, boa-quase-ordenação.

Abstract

The theory of graph minors, developed by Robertson and Seymour, plays a central role in the structural characterization of graph classes. In particular, treewidth has become a key tool for analyzing planar graphs, enabling the design of efficient algorithms for classically hard problems. This dissertation aims to explore the relationship between planarity and treewidth, presenting essential concepts, properties, and theorems that underpin tree decompositions. We discuss Kuratowski's and Robertson-Seymour's theorems, as well as the notion of well-quasi-ordering for trees. Through an analysis of planar graph properties and specific tree decompositions, we highlight the importance of treewidth as a measure of structural complexity in planar graphs.
Keywords: graph minors, planar graphs, treewidth, well quase ordering

Sumário

Introdução

A teoria dos grafos, surgida no século XVIII com o célebre problema das sete pontes de Königsberg resolvido por Leonhard Euler, desenvolveu-se ao longo dos séculos como uma ferramenta na modelagem de estruturas relacionais em diversas áreas. Com o tempo, uma das abordagens da área passou a ser o estudo de classes de grafos, conjuntos de grafos que compartilham certas propriedades estruturais, permitindo identificar padrões e formular teoremas gerais sobre sua organização e comportamento.

Desde a sua origem, a teoria dos grafos tem buscado classificar e entender a estrutura dos grafos através de diferentes métodos e conceitos. À medida que os estudos avançaram, a noção de classes de grafos se tornou essencial para a análise de propriedades e comportamentos específicos. As classes de grafos permitem que pesquisadores identifiquem padrões e desenvolvam teoremas que se aplicam a classes de grafos, facilitando a resolução de problemas complexos. A caracterização de classes de grafos é uma área rica na teoria dos grafos, e várias abordagens têm sido desenvolvidas para identificar e classificar essas classes.

Além da definição por inclusão, que caracteriza uma classe de grafos com base na presença de subgrafos particulares, e a definição por propriedades, que utiliza características invariantes para descrever as classes. Outro método significativo é o da definição por equivalência, que busca relações entre grafos que podem ser transformados uns nos outros através de operações específicas, como a contração ou a adição de arestas. Cada um desses métodos oferece uma perspectiva única sobre a estrutura e o comportamento dos grafos, permitindo que pesquisadores desenvolvam teorias mais robustas e abrangentes sobre a diversidade das classes de grafos e suas relações. Nesse contexto, um método de caracterização de classes de grafos que é amplamente empregado é o da definição por proibição. Este método consiste em caracterizar uma classe de grafos pela especificação do conjunto mais simples de grafos cujos elementos não pertencem como subgrafos ou $menores$ ou na outra forma dos grafos da classe que se quer caracterizar, e tal que os elementos da classe são exatamente aqueles que não contêm nenhum elemento do conjunto especificado como subgrafo induzido, ou subgrafo, ou $menor$.

O conceito de menor de um grafo foi desenvolvido ao longo do século XX, mas ganhou destaque com o trabalho de Neil Robertson e Paul Seymour nas décadas de 1980 e 1990, que estabeleceram o famoso Teorema de Robertson-Seymour, que resolveu a conjectura de Wagner. Este teorema demonstra que, para classes fechadas por menores, há um conjunto finito de grafos que, se excluído, garante que a classe se comporte de maneira bem definida em relação à estrutura e propriedades dos grafos. Um menor de grafo é obtido a partir de um grafo original por meio de operações de contração de arestas e remoção de vértices e remoção de arestas. A importância dos menores de grafos é evidente em várias áreas da matemática e da ciência da computação, especialmente na análise de grafos planares e grafos em outros superfícies, onde se busca entender quais subestruturas estão presentes em um grafo maior.

Grafos planares são aqueles que podem ser desenhados no plano de forma que suas arestas não se cruzem, uma propriedade que remonta ao trabalho de Leonhard Euler no século XVIII, quando ele formulou o problema das sete pontes de Königsberg, estabelecendo as bases da teoria dos grafos. A partir desse contexto, a análise de grafos planares evoluiu, culminando em teoremas importantes, como o Teorema de Kuratowski [7], que fornece uma caracterização dos grafos planares. A largura de árvore, uma métrica introduzida nas décadas de 1990 por Adnan Aziz e outros, quantifica a complexidade estrutural de um grafo, indicando o quão semelhante ele é a uma árvore. Essa métrica é crucial, pois grafos com baixa largura de árvore podem ser processados de maneira mais eficiente por algoritmos que se beneficiam de estruturas hierárquicas. A relação entre grafos planares e largura de árvore é especialmente relevante, pois muitos grafos planares possuem largura de árvore limitada, permitindo a utilização de algoritmos polinomiais para resolver problemas que, em grafos gerais, seriam NP-hard. Compreender essa relação é essencial para o desenvolvimento de técnicas e algoritmos que exploram a planaridade e a largura de árvore, contribuindo para avanços na teoria dos grafos e em suas aplicações práticas. Este contexto motiva um estudo mais detalhado dos resultados de grafos planares e largura em árvore.

O objetivo dessa dissertação é entender como a largura em árvores pode ser usada para descrever e caracterizar menores de grafos planares.

Para isso, No Capítulo 1, apresentamos os conceitos fundamentais da teoria dos grafos necessários ao desenvolvimento do trabalho, incluindo definições básicas, a noção de menores, grafos planares e o teorema de Kuratowski. O Capítulo 2 aprofunda o estudo dos menores de grafos, com destaque para os resultados de Robertson e Seymour, a conjectura de Hadwiger, e a estrutura de boa-quase-ordenação. No Capítulo 3, introduzimos a noção de decomposição em árvore e a métrica de largura em árvore, discutindo suas propriedades e implicações estruturais. Por fim, o Capítulo 4 é dedicado à análise da largura em árvore no contexto de grafos planares, onde são apresentados resultados importantes sobre o raio de grafos planares e a construção de cilindros, culminando em demonstrações que conectam essas estruturas com limites superiores da largura em árvores para essa classe de grafos.

Capítulo 1

Preliminares

Durante todo o texto, pressupomos familiaridade com os princípios da teoria dos grafos e da matemática discreta. Introduzimos apenas os conceitos essenciais para o desenvolvimento contínuo desta dissertação. Para uma introdução à teoria dos grafos, recomenda-se a leitura de: [2] e [13].

1.1 Definições básicas

Definição 1.1.1. Um *grafo simples* é um par $G = (V, E)$ de conjuntos satisfazendo $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$; assim, os elementos de E são subconjuntos de dois elementos de V. Os elementos de V são chamados de *vértices* (ou *nós*, ou *pontos*) do grafo G, e os elementos de E são as suas *arestas* (ou *linhas*).

C ada aresta $e \in E$ é um subconjunto não ordenado de dois elementos distintos de V, representando uma conexão entre dois vértices. Nesse modelo, não se admitem múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices, nem *laços*: arestas que conectam um vértice a si mesmo.

Comumente, utilizam-se as notações $\{u, v\}$ e uv para denotar uma aresta entre os vértices u e v.

Embora a definição anterior seja suficiente para tratar de grande parte da teoria elementar dos grafos, grande parte dos resultados apresentados nessa dissertação requere estruturas mais gerais, como grafos com laços ou múltiplas arestas entre vértices. Para acomodar tais casos, utilizamos a noção de grafo geral, frequentemente também chamada de multigrafo, cuja definição se apresenta a seguir.

Definição 1.1.2. Um *grafo geral* ou *multigrafo* é uma tripla $G = (V, E, \psi)$, onde:

- V é um conjunto de vértices;
- E é um conjunto de arestas;
- $\psi\colon E \to V \cup \binom{V}{2}$ é uma função denominada *função de incidência*, que associa a cada aresta:
  - um vértice $u \in V$, no caso de um *laço*; ou
  - um par não ordenado $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$, com $u \neq v$, no caso de uma aresta comum.

Essa definição permite, de forma natural:

- laços, isto é, arestas que conectam um vértice a si mesmo ($\psi(e) = u$);
- múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices, uma vez que podem existir $e, f \in E$ distintos com $\psi(e) = \psi(f)$.

A partir desse ponto, salvo indicação em contrário, utilizaremos o termo grafo para nos referirmos a grafos gerais ou multigarfos.

Definição 1.1.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo.

1. Cada aresta $e \in E$ possui dois vértices associados, u e v, chamados *extremidades* de e. Em grafos simples, podemos identificar e com o par $\{u, v\}$.
2. Dois vértices $u, v \in V$ são *adjacentes* se existe uma aresta $\{u, v\} \in E$.
3. Um vértice $v \in V$ e uma aresta $e \in E$ são chamados *incidentes* se $e = \{u, v\}$ para algum $u \in V$.

Além dessas noções básicas, podemos caracterizar um grafo em termos de propriedades estruturais, como segue.

Definição 1.1.4. Seja G um grafo. Temos que:

1. G é *finito* se seu conjunto de vértices e de arestas são finitos.
2. Um *laço* é uma aresta $\{u, v\}$ onde $u = v$, e arestas que compartilham os mesmos vértices são chamadas *paralelas* entre u e v.
3. Um grafo é dito *trivial* se contém apenas um vértice.

Exemplo 1.1.5. Sejam $G = (V, E)$ o grafo onde $V(G) = \{a, b, c, d\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, ilustrado pela Figura 1.1. O grafo G é finito e possui um laço e_1 e arestas paralelas e_3 e e_4.

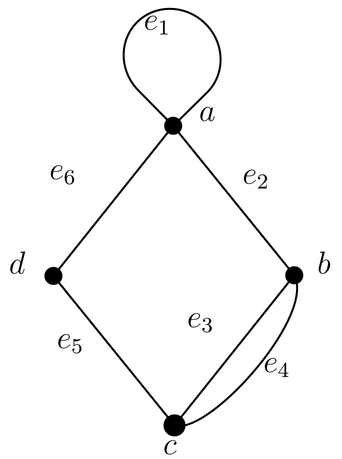


Figura 1.1: Multigrafo G

Ao longo do texto, todo grafo será finito, a menos que seja expresso o contrário.

Uma definição fundamental na teoria dos grafos é o grau dos vértices, o qual será amplamente utilizado nesta dissertação.

Definição 1.1.6. O *grau* de um vértice v em G é o número de arestas que são incidentes a v, sendo denotado por $d(v)$. Os graus mínimo e máximo de G, são denotados por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, onde

$$\begin{cases} \delta(G) = \min_{v \in V}\{d(v)\} \\ \Delta(G) = \max_{v \in V}\{d(v)\} \end{cases}$$

Por convenção, cada laço contribui com 2 para o grau do vértice, pois ele incide duas vezes em v. Por exemplo, na Figura 1.1, o grau de a é 4.

Exemplo 1.1.7. No grafo G da Figura (1.2) temos que $d(a) = 2$, $d(b) = 4$, $d(c) = 2$, $d(d) = 3$, $d(e) = 4$ e $d(f) = 3$, então $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 4$.

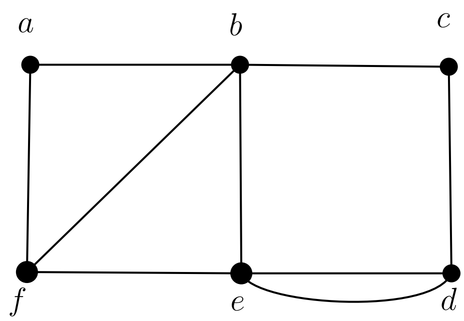


Figura 1.2: Grafo G

Definição 1.1.8. Um grafo $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ é *subgrafo* de um grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ se $V_H \subseteq V(G)$, $E_H \subseteq E(G)$ e $\psi_H = \psi_{G/E_H}$.

Definição 1.1.9. Um subgrafo H de G é um *subgrafo induzido* se contém todas as arestas de G que têm extremidades em V_H, ou seja, se $E_H = \{e \in E(G) \mid e \text{ conecta vértices em } V_H\}$.

Definição 1.1.10. Uma *trilha* em um grafo G é uma sequência alternada

$$\langle v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k \rangle$$

de vértices e arestas, onde $k \geq 1$, começando em v_1 e terminando em v_k, tal que, para cada $i < k$, e $e_i = (v_i, v_{i+1})$.

Definição 1.1.11. Um *caminho* em um grafo G é uma trilha na qual todos os vértices são distintos, e logo todas as arestas são também distintas. Um *ciclo* em G é um caminho no qual todos os vértices são distintos com exceção das extremidades.

Definição 1.1.12. Um grafo não-vazio G é dito *conexo* se quaisquer dois de seus vértices estão ligados por um caminho em G.

Definição 1.1.13. Se G é um grafo, $G \setminus F$ denota o resultado da *exclusão* de F em G, onde F pode ser uma aresta ou um conjunto de arestas.

As definições de caminhos e ciclos são importantes para entender a conectividade em grafos. A exclusão de arestas ou conjuntos de arestas em um grafo, assim como a identificação de separadores, são ferramentas para analisar e manipular a estrutura de um grafo. O conceito de separadores desempenha um papel importante em problemas de conectividade, sendo utilizado para estudar como diferentes regiões de um grafo se desconectam quando certas arestas ou vértices são removidos.

Definição 1.1.14. Sejam V o conjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$, e $S \subseteq V$ um subconjunto de vértices. Definimos:

$$V \setminus S := \{v \in V \mid v \notin S\}$$

Definição 1.1.15. Um conjunto $S \subseteq V$ é um *separador* de G se existem dois vértices $u, v \in V \setminus S$ tais que u e v são conectados em G por uma trilha e desconectados em $G[V \setminus S]$; diz-se ainda que S é um $\{u, v\}$*-separador* em G, e que S é um corte em G. Se nenhum subconjunto próprio de S é um $\{u, v\}$-separador, então S é um *separador minimal* para u e v.

O seguinte resultado, teorema de Menger [9], estabelece uma relação entre a conectividade de um grafo e o número mínimo de vértices ou arestas necessários para desconectar o grafo.

Teorema 1.1.16. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $A, B \subseteq V$. Então o número mínimo de vértices que separam A de B em G é igual ao número máximo de caminhos disjuntos entre A e B em G.

Demonstração: Veja em [2] ■

Nessa dissertação há aqueles grafos que se destacam, merecendo um estudo mais detalhado. Dentre eles estão: árvores e florestas. As árvores, como estruturas matemáticas, são objetos de estudo em áreas, como combinatória, álgebra e teoria da computação.

Definição 1.1.17. Uma *Árvore* é um grafo simples conexo e sem ciclos.

Equivalentemente, uma floresta com apenas um componente.

Definição 1.1.18. Dada uma árvore T, um vértice $v \in V(T)$ é uma *folha* se seu grau é $d_T(v) = 1$; isto é, v tem exatamente um vizinho.

Definição 1.1.19. Seja (T, o) uma árvore, onde T é uma árvore e $o \in V(T)$ é um vértice distinguido. Dizemos que o é a *raiz* de T. Todas as arestas de T são orientadas no sentido que parte de o em direção aos demais vértices, definindo assim uma estrutura hierárquica com origem em o.

Uma árvore com raiz é dita árvore enraizada.

Definição 1.1.20. Uma *Floresta* é um grafo simples sem ciclos. Cada componente conexo de uma floresta é uma árvore.

Exemplo 1.1.21. A Figura 1.3 mostra uma floresta com dois componentes conexos. Cada componente é uma árvore. No componente da esquerda, o vértice a é a raiz, e os vértices b, c e d são folhas, pois possuem grau 1.

Definição 1.1.22. Uma *grade* $k \times l$ é um grafo G, onde

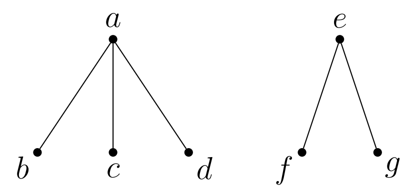


Figura 1.3: Floresta com duas árvores: uma enraizada em a, a outra em e.

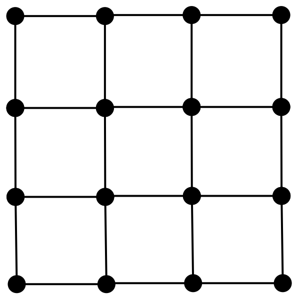


Figura 1.4: Grade 4×4

$$V(G) = \{(i,j) : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l; i,j \in \mathbb{N}\}$$
$$E(G) = \{(i,j)(i',j') : |i-i'| + |j-j'| = 1\}$$

Exemplo 1.1.23. Na Figura(1.4) temos a grade 4×4.

Definição 1.1.24. Um grafo completo com n vértices é um grafo simples $K_n = (V,E)$, onde $|V| = n$ e

$$E = \{\{u,v\} \subseteq V : u \neq v\} = \binom{V}{2}.$$

Ou seja, K_n contém exatamente uma aresta entre cada par de vértices distintos. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com n vértices.

Exemplo 1.1.25. Na Figura (1.5) temos o grafo K_4. Um grafo completo com:

$$V = \{a,b,c,d\} \quad \text{e} \quad E = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}.$$

Definição 1.1.26. Um grafo $G = (V,E)$ é dito *bipartido* se existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tal que toda aresta $e \in E$ tem uma extremidade em V_1 e a outra em V_2. Em outras palavras,

$$\forall \{u,v\} \in E, \quad \text{temos} \quad (u \in V_1 \wedge v \in V_2) \quad \text{ou} \quad (u \in V_2 \wedge v \in V_1).$$

Exemplo 1.1.27. Na Figura (1.6) temos o grafo bipartido $G = (V,E)$ com:

$$V = \{a,b,c,d,e,f\},$$

$$U = \{a,b,c\}, \quad W = \{d,e,f\},$$
$$E = \{\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,d\},\{b,f\},\{b,e\}\{c,e\},\{c,f\},\{c,d\}\}.$$

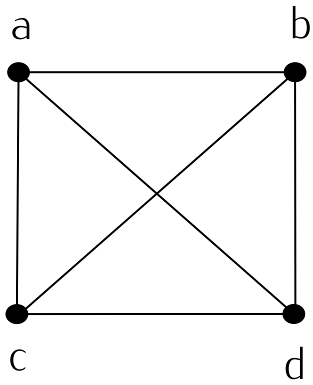


Figura 1.5: Grafo Completo

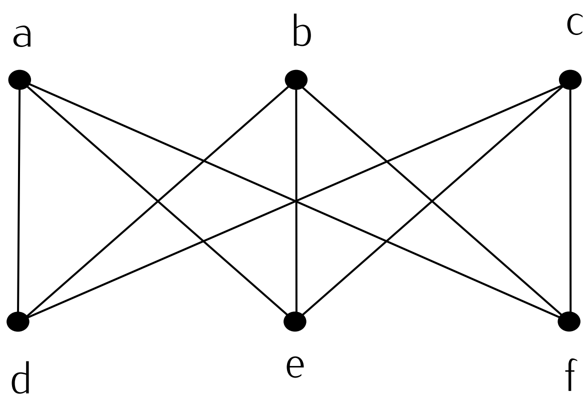


Figura 1.6: Grafo Bipartido

Definição 1.1.28. Uma *separação* de um grafo G é um par (G_1, G_2) de subgrafos induzidos tal que $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ e nenhuma aresta de G tem uma extremidade em $G_1 \setminus G_2$ e a outra em $G_2 \setminus G_1$. O *grau* de uma separação (G_1, G_2) é $|G_1 \cap G_2|$. A separação é não trivial se $G_1 \setminus G_2 \neq \emptyset$ e $G_2 \setminus G_1 \neq \emptyset$.

Exemplo 1.1.29. Seja G o grafo da Figura(1.7), uma separação para G é dada por (G_1, G_2) com $V(G_1) = \{a, b, d\}$ e $V(G_2) = \{b, c, d\}$.

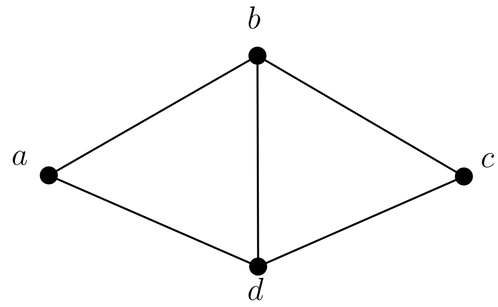


Figura 1.7: Grafo G

Definição 1.1.30. Dois caminhos em um grafo são *internamente disjuntos* se eles não compartilham nenhum vértice interno, ou seja, podem ter o mesmo vértice inicial e o mesmo vértice final, mas todos os vértices intermediários são distintos.

O Teorema a seguir é uma variante muito útil do teorema de $Menger$ [9], que estabelece uma relação entre a conectividade de um grafo e o número mínimo de vértices ou arestas necessários para desconectar o grafo.

Teorema 1.1.31. Sejam G um grafo, k um inteiro positivo, e $Q, R \subseteq V(G)$. Então exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. Existem k caminhos internamente disjuntos, cada um com uma extremidade em Q e a outra em R;

2. Não existe nenhum conjunto de separação de vértices de ordem menor que k separando Q de R.

Demonstração: Veja em [2] ■

1.2 Noção de Menores de Grafos

Nesta seção, apresentamos uma noção importante chamada de menores de grafos. Os menores de grafos são tratados com mais detalhes no Capítulo 2. Para definir essa noção, primeiro definimos algumas operações em grafos.

Definição 1.2.1. Sejam G um grafo, $w \in V(G)$ um vértice de G, e $e = \{u, v\} \in E(G)$ uma aresta. Definimos as seguintes operações:

1. A *remoção do vértice w* resulta no grafo $G \setminus w$, que é o subgrafo de G induzido pelo conjunto $V(G) \setminus \{w\}$.

2. A *remoção da aresta* e resulta no grafo $G \setminus e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$.

3. A *subdivisão* de e gera o grafo $G \cdot e$, onde

$$\begin{aligned} V(G \cdot e) &= V(G) \cup \{v_0 : v_0 \notin V(G)\} \\ E(G \cdot e) &= (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{(u, v_0), (v, v_0)\}. \end{aligned}$$

4. A *contração* de $e = \{u, v\}$ fornece o grafo $G \circ e$ com o conjunto de vértices $V(G \circ e) = V(G) \setminus \{v\}$ e arestas $E(G \circ e) = E(G) \setminus e \cup \{(u, v_0) : (v, v_0) \in E(G), v_0 \neq u\}$.

Quando H é uma subdivisão sucessivas de G, dizemos que H é um TG.

Exemplo 1.2.2. Na Figura (1.8), temos:

1. O grafo H é o grafo resultante das operações de eliminação de vértice e e a eliminação da aresta (b, f), isto é, $H = (G \setminus e) \setminus (b, f)$.

2. O grafo X é o grafo resultante da operação de subdivisão de arestas (b, c) e (c, d) de G, isto é, $X = G \cdot (c, d) \cdot (b, c)$

3. O grafo Y é o grafo resultante da operação de contração da aresta (c, d), isto é, $Y = G \circ (c, d)$

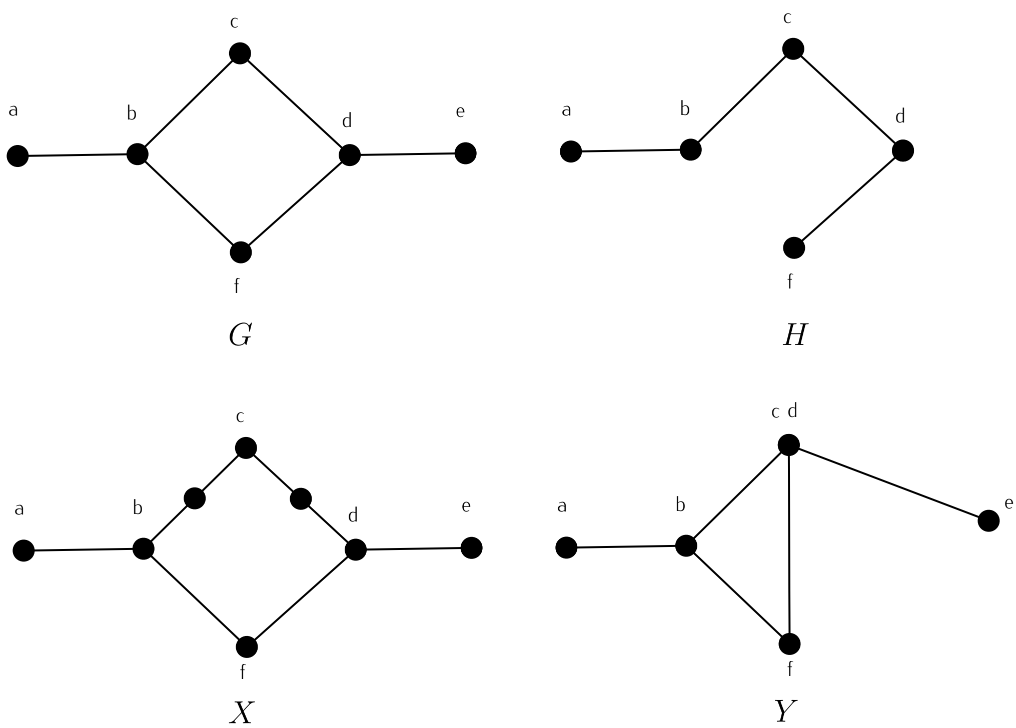


Figura 1.8: Operações em grafos

Definição 1.2.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que um grafo H é uma *inflação* de G, denotada por IG, se existe uma família de subgrafos disjuntos $\{B_v : v \in V\}$, chamados de *conjuntos de ramificação*, tal que:

i cada B_v é um subgrafo conexo de H;

ii para cada aresta $\{u, v\} \in E(G)$, existe ao menos uma aresta em H ligando algum vértice de B_u a algum vértice de B_v;

iii os conjuntos B_u e B_v são disjuntos para $u \neq v$.

Para facilitar o entendimento segue um exemplo para a definição anterior.

Exemplo 1.2.4. Considere o grafo G formado por três vértices v_1, v_2, v_3 com arestas (v_1, v_2) e (v_2, v_3), ou seja, um caminho de três vértices.

Construa o grafo H da seguinte maneira:

Substitua o vértice v_1 por um único vértice a.

Substitua o vértice v_2 por dois vértices b e c, conectados por uma aresta (b, c).

Substitua o vértice v_3 por um único vértice d.

Conecte a a b, c a d.

Assim, os conjuntos de ramificação ficam:

$$B_{v_1} = \{a\}, \quad B_{v_2} = \{b, c\}, \quad B_{v_3} = \{d\}.$$

Veja que:

- B_{v_1} e B_{v_3} são vértices conexos isolados;
- B_{v_2} é um caminho conexo de dois vértices;
- Há uma aresta de a para b (correspondendo à aresta (v_1, v_2) de G);
- Há uma aresta de c para d (correspondendo à aresta (v_2, v_3) de G);
- Os conjuntos de ramificação são disjuntos.

Portanto, H é uma inflação de G.

Definição 1.2.5. Um grafo H é um *menor topológico* de um grafo G se existe um subgrafo de G que é uma subdivisão de H. Isto é, G contém uma cópia de algum TH como subgrafo.

Vamos agora, definir um dos nossos principais objetos de estudo:

Definição 1.2.6. Um grafo H é um *menor* de um grafo G, escrevemos $H \preccurlyeq G$, se H pode ser obtido a partir de um subgrafo de G por meio de uma sequência de contrações de arestas. Se H foi derivado de um subgrafo induzido de G, chamamos H de um *menor induzido*.

Exemplo 1.2.7. Na Figura (1.9) abaixo, o grafo G é um TX, uma subdivisão de X. Como $G \subseteq Y$, isso torna X um menor topológico de Y:

Exemplo 1.2.8. Conforme ilustrado na Figura 1.10, o grafo H é um menor de G, pois pode ser obtido a partir deste mediante a aplicação sucessiva de operações de remoção de vértices, remoção de arestas e contração de arestas.

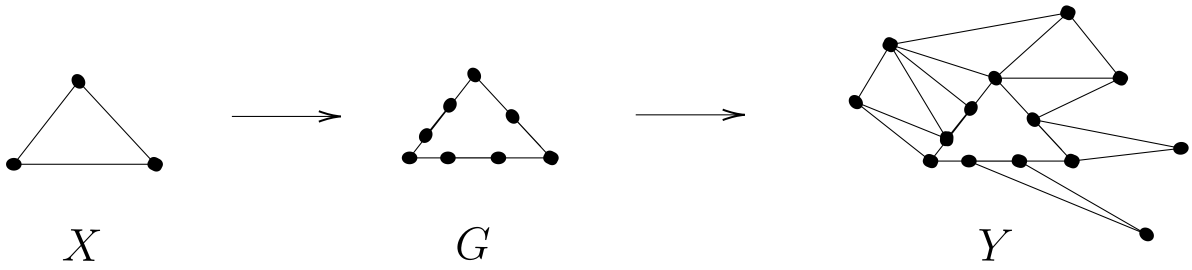


Figura 1.9: Exemplo de um menor topológico

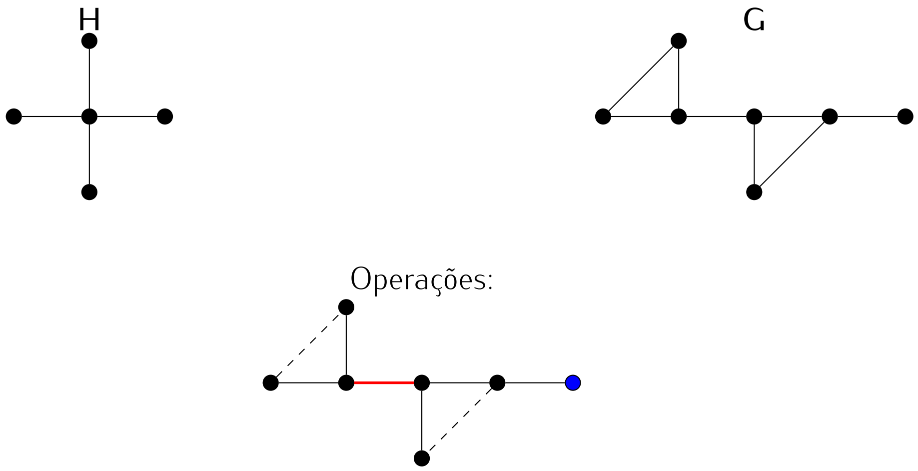


Figura 1.10: Exemplo de menor

1.3 Grafos Planares

Grafos planares constituem uma classe de grafos na Teoria dos Grafos, definida por serem representados geometricamente no plano euclidiano sem cruzamentos entre arestas, exceto nos vértices que compartilham.

O estudo de grafos planares é motivado tanto por sua relevância teórica quanto por sua aplicabilidade prática em áreas, como projeto de circuitos integrados, visualização e roteamento em redes computacionais, topologia computacional. Além disso, problemas computacionalmente difíceis ($\mathcal{NP}$-completos) em grafos gerais admitem soluções eficientes quando restritos à classe dos grafos planares.

Apresentamos no final desta seção o Teorema de Kuratowski [12], proposto em 1930, o qual afirma que um grafo é planar se, e somente se, não contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Definição 1.3.1. Um *grafo no plano* é um grafo $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito de vértices e E é um conjunto finito de arestas, que satisfaz as seguintes condições:

(1) $V \subseteq \mathbb{R}^2$.

(2) A cada aresta é atribuído um par de vértices distintos como seus pontos finais.

(3) O interior de uma aresta não contém nenhum vértice ou ponto de outra aresta.

Em resumo, o item (1) garante que cada vértice v pode ser mapeado para um ponto (x_v, y_v) no plano. No item (2) temos que uma aresta e pode ser descrita como $e = \{u, v\}$, onde u e v são vértices distintos em V. No item (3) para quaisquer duas arestas distintas $e_1 = (u_1, v_1)$ e $e_2 = (u_2, v_2)$, os segmentos de linha correspondentes não se intersectam, exceto possivelmente em seus pontos finais.

Dizemos que um grafo G é planar, se G possui um mergulho planar.

O fato do grafo possuir um mergulho planar, implica que o plano onde ele está inserido seja dividido, finitamente, em regiões. A partir disso, apresentamos o Teorema de Euler, que nos trás uma condição necessária para um grafo ser planar:

Teorema 1.3.2. Seja G um grafo planar conexo com v vértices, ϵ arestas e f o número de faces do mergulho planar escolhido. Então,

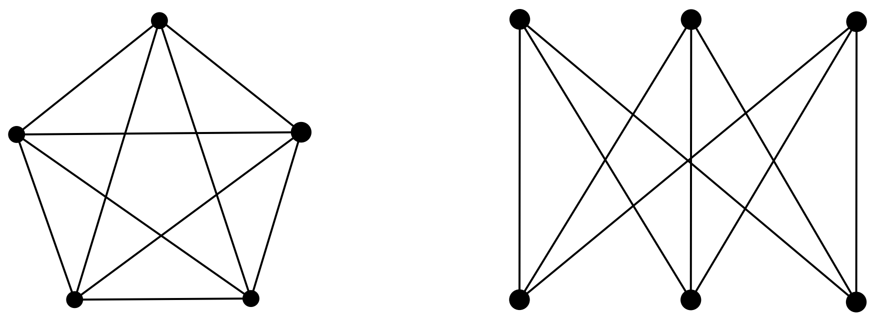
$$v - \epsilon + f = 2.$$

Lema 1.3.3. Sejam f o número de faces de um grafo conexo planar G e ϵ o número de arestas de G, onde $\epsilon \geq 2$. Então,

$$3f \leq 2\epsilon.$$

Agora dispomos de resultados suficientes para demonstrar que o grafo completo K_5 e o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ não são planares. Antes disso, contudo, vamos apresentar um exemplo de cada um desses grafos.

Exemplo 1.3.4. A Figura (1.11) mostra um grafo completo com 5 vértices e o grafo bipartido completo $K_{3,3}$.



K_5 $K_{3,3}$

Figura 1.11: Grafos K_5 e $K_{3,3}$

Teorema 1.3.5. O grafo completo K_5 não é planar.

Demonstração: Suponha que K_5 é um grafo planar. Pelo Teorema de Euler(1.3.2) temos que $f(K_5) = 7$, pois $v(K_5) = 5$ e $\epsilon(K_5) = 10$, logo:

$$f = 2 - v + \epsilon = 7$$

Assim, pelo lema(1.3.3) temos $3f = 21 \ \leq 2\epsilon = 20$, absurdo. Portanto K_5 não é planar. ■

A partir da demonstração acima, pode surgir uma questão sobre se o lema 1.3.3 utilizado seria um critério eficaz para determinar se um grafo é planar ou não.

O grafo $K_{3,3}$ não é planar, mas ele satisfaz as desigualdades do lema 1.3.3, como mostramos a seguir:

Primeiro recordamos que $v(K_{3,3}) = 6$, $\epsilon(K_{3,3}) = 9$. Pela Fórmula de Euler, supondo $K_{3,3}$ planar, $f = 5$. Assim, $3f = 15 \leq 2\varepsilon = 18$.

Lema 1.3.6. Sejam f o número de faces de um grafo conexo planar G, que não contém um subgrafo K_3, e ϵ o número de arestas de G, onde $\epsilon \geq 2$. Então,

$$4f \leq 2\epsilon.$$

Teorema 1.3.7. O grafo bipartido $K_{3,3}$ não é planar.

Demonstração: Suponha que $K_{3,3}$ é planar, pela fórmula de Euler $f(K_{3,3}) = 5$, $v(K_{3,3}) = 6$ e $\epsilon(K_{3,3}) = 9$. Logo,

$$4f = 20 \leq 2\epsilon = 18, \text{ absurdo.}$$

Portanto $K_{3,3}$ não é planar. ■

A existência de um menor topológico pode ser facilmente mostrada:

Lema 1.3.8. Se H tem grau máximo no máximo 3, então H é um menor de G se e somente se H é um menor topológico de G.

Definição 1.3.9. Seja $H \preceq G$, ou seja, H é um menor de G. Um *modelo* de H em G é uma coleção $\mathcal{X} = \{X_v \mid v \in V(H)\}$ de subconjuntos disjuntos de $V(G)$, tal que:

- Para todo $v \in V(H)$, o subgrafo $G[X_v]$ é conexo (chamado de *ramo* de v);
- Para toda aresta $\{u, v\} \in E(H)$, existe pelo menos uma aresta entre X_u e X_v em G.

Dizemos que esse modelo é *mínimo* se o conjunto $\bigcup_{v \in V(H)} X_v$ tem tamanho mínimo entre todos os modelos de H em G.

Definição 1.3.10. Seja H um menor de G. Um modelo de H em G consiste em uma coleção de subconjuntos $\{V_x \subseteq V(G) : x \in V(H)\}$, chamados ramos, tal que:

1. cada V_x induz um subgrafo conexo de G;
2. os conjuntos V_x são dois a dois disjuntos;
3. para toda aresta $xy \in E(H)$, existe pelo menos uma aresta de G com uma extremidade em V_x e a outra em V_y.

Definição 1.3.11. Um *modelo mínimo* de H em G é um modelo $\{V_x : x \in V(H)\}$ que realiza $H \preceq G$ e é mínimo com relação a uma medida natural (por exemplo, o número total de vértices usados, $\sum_{x \in V(H)} |V_x|$). Em particular, num modelo mínimo valem as seguintes propriedades:

1. cada V_x induz uma árvore em G;
2. para cada aresta $xy \in E(H)$, há exatamente uma aresta de G unindo V_x a V_y;
3. nenhum vértice ou aresta de G pode ser removido do modelo sem destruir a realização de H como menor.

Quais grafos são planares? Nosso objetivo nesta seção é apresentar o Teorema clássico de Kuratowski: qualquer grafo que não possua um menor topológico de K_5 ou $K_{3,3}$ é planar. Antes de apresentarmos o Teorema de Kuratowski, vamos expor resultados importantes sobre grafos planares.

Teorema 1.3.12. Um grafo contém K_5 ou $K_{3,3}$ como um menor se e somente se contiver K_5 ou $K_{3,3}$ como um menor topológico.

Demonstração: Para provar esse teorema, é suficiente mostrar que todo grafo G com um menor K_5 contém K_5 como um menor topológico ou $K_{3,3}$ como um menor.

Suponha, então, que $K_5 \preceq G$ e deixe K ser um modelo mínimo de K_5 em G. Nesse modelo, cada conjunto de ramos de K induz uma árvore em K, e entre quaisquer dois conjuntos de ramos, K possui exatamente uma aresta.

Se tomarmos a árvore induzida por um conjunto de ramos V_x e adicionarmos a ela as quatro arestas que a conectam a outros conjuntos de ramos, obteremos outra árvore, chamada T_x. Pela minimalidade de K, a árvore T_x tem exatamente quatro folhas, que são os quatro vizinhos de V_x em outros conjuntos de ramos.

Se cada uma das cinco árvores T_x for um $TK_{1,4}$, então K é um TK_5, e estamos concluídos.

Se alguma das T_x não for um $TK_{1,4}$, então ela terá exatamente dois vértices de grau 3. Contraindo V_x nesses dois vértices e cada outro conjunto de ramos em um único vértice, obtemos um grafo com seis vértices contendo um $K_{3,3}$.

Assim, G não pode evitar $K_{3,3}$ como menor. Portanto, todo grafo com um menorK_5 contém K_5 como menor topológico ou $K_{3,3}$ como menor. ■

Agora podemos apresentar o teorema de Kuratowski.

Teorema 1.3.13 (Kuratowski)**.** Seja G um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:

i G é planar;

ii G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menor;

iii G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menor topológico.

Demonstração: Veja em [2] ■

Essas equivalências fundamentam a caracterização dos grafos planares tanto em termos de menores quanto de menores topológicos.

Exemplo 1.3.14. Vamos mostrar, pelo Teorema de Kuratowski, que o Grafo de Petersen não é planar. Para isto, mostraremos que o grafo $K_{3,3}$ é menor do grafo de $Petersen$.

Na Figura (1.12), fazendo as seguintes operações:

1. Eliminação das arestas dc e fh;

2. Contração das arestas (d, j) e (j, h);

3. Contração das arestas (c, i) e (i, f).

Chegamos no grafo $K_{3,3}$. Portanto, o grafo de $Petersen$ não é planar.

Além da caracterização de grafos planares por meio de menores topológicos fornecida pelo Teorema de Kuratowski, existe uma formulação equivalente utilizando menores no sentido de contrações. Essa versão é conhecida como o Teorema de Wagner, o qual afirma que um grafo é planar se, e somente se, não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menores.

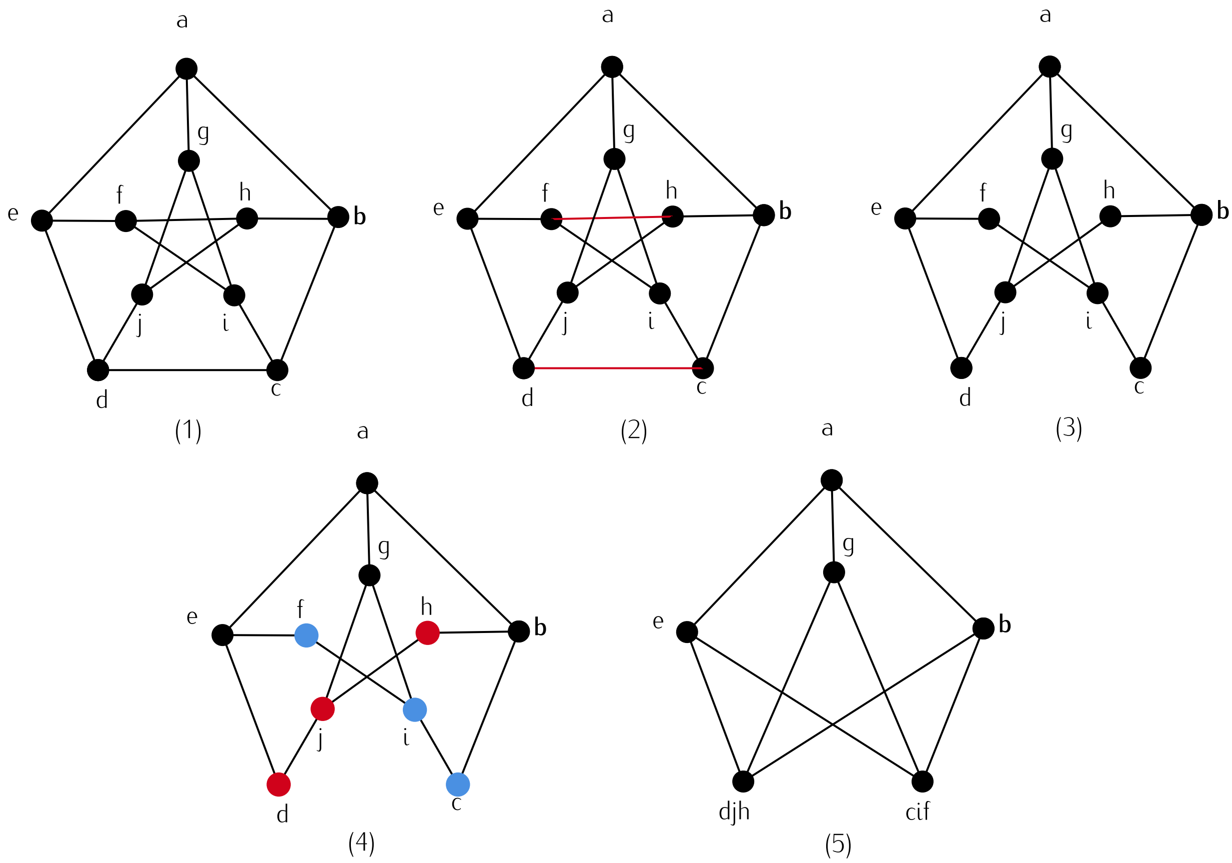


Figura 1.12: Obtendo $K_{3,3}$ como menor do grafo de $Petersen$.

A distinção principal entre os dois teoremas está nas operações permitidas: enquanto o Teorema de Kuratowski utiliza menores topológicos, o Teorema de Wagner utiliza menores no sentido mais geral, definidos por contrações.

Essa reformulação levou à proposição da chamada Conjectura de Wagner, que sugeria que qualquer classe de grafos fechada sob a operação de tomar menores poderia ser caracterizada por um número finito de menores proibidos.

Essa conjectura foi posteriormente provada por Robertson e Seymour, como parte de uma extensa série de artigos sobre a teoria dos menores, culminando no conhecido Teorema dos Menores de Robertson-Seymour, que será discutido no Capítulo 2.5.

Capítulo 2

Menores de Grafos

Este capítulo apresentamos os conceitos centrais sobre menores de grafos. Iniciamos com definições básicas e resultados preliminares sobre menores e menores topológicos. Em seguida, exploramos a Conjectura de Hadwiger, que relaciona coloração com estrutura de grafos. A terceira seção trata da noção de boa-quase-ordenação, importante na organização de classes de grafos. Depois, discutimos o Teorema dos Menores restrito a árvores. Por fim, a seção sobre a Conjectura de Wagner e o Teorema de Robertson e Seymour, com ênfase em suas implicações para caracterização. Para este capítulo, adotamos como referência [2] e [3].

2.1 Resultados Preliminares

Lema 2.1.1. Se H é menor topológico de G, então H também é menor de G.

Demonstração: Suponha que H é um menor topológico de G, logo existe uma subdivisão TH de H tal que TH é subgrafo de G. Equivalente existe uma coleção de vértices distintos $\{v_x \in V(G) : x \in V(H)\}$ (os vértices ramificados) e, para cada aresta $xy \in E(H)$, um caminho P_{xy} em G que liga v_x a v_y, tal que os caminhos $\{P_{xy} : xy \in E(H)\}$ são dois a dois internamente disjuntos. O subgrafo $TH := \bigcup_{xy \in E(H)} P_{xy}$ é então uma subdivisão de H contida em G.

Para obter H como menor de G, procedemos apenas com operações permitidas para menores dentro de G:

1. Primeiramente, deletamos todas as arestas e vértices de G que não pertencem a TH.

2. Para cada aresta $xy \in E(H)$, contraímos todas as arestas do caminho P_{xy} até transformá-lo em uma única aresta entre os vértices v_x e v_y.

Como os caminhos P_{xy} são internamente disjuntos, essas contrações podem ser realizadas sem identificar indevidamente vértices ramificados distintos. O grafo resultante é isomorfo a H. Logo, H é um menor de G. ■

Assim, temos que, todo menor topológico é um menor. No entanto, surge uma questão: Todo menor é também um menor topológico?

Ao considerarmos os menores, é interessante notar que, enquanto todos os menores topológicos são de fato menores, nem todos os menores são menores topológicos. A seguir apresentamos um exemplo:

Exemplo 2.1.2. Se X é obtido de Y por contrações de arestas, então X pode ser um menor de Y, mas não necessariamente um menor topológico.

Note, como ilustrado na Figura (2.1), que o fato de X ser um menor de Y não implica que X seja também um menor topológico de Y. A implicação contrária, no entanto, é sempre verdadeira: todo menor topológico é, necessariamente, um menor.

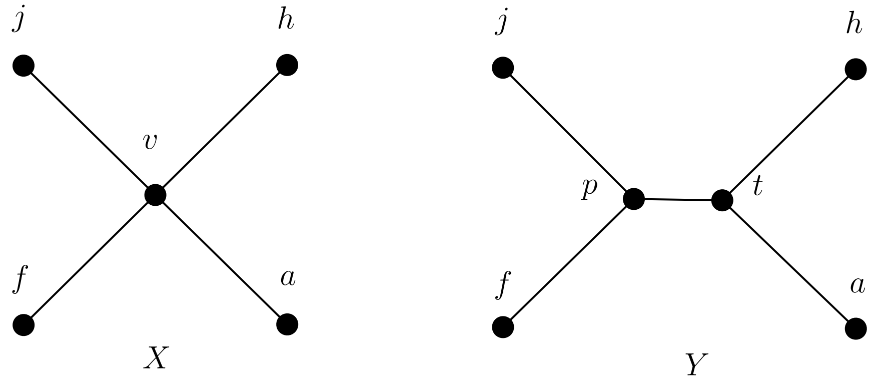


Figura 2.1: Grafos X e Y.

Definição 2.1.3. Seja $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$ dois grafos. Uma função $\varphi\colon V(H) \to V(G)$ é dita um *homomorfismo de grafos* de H em G se, para toda aresta $\{u, v\} \in E(H)$, temos $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$. Em outras palavras, φ preserva adjacência.

Lema 2.1.4. Existe um homomorfismo de grafos de um grafo H em um grafo G se, e somente se, $H \preccurlyeq G$.

Demonstração: Veja em [2] ■

Proposição 2.1.5. Se H é um grafo com $\Delta(H) \leq 3$, e um grafo G contém H como um menor, então H é também um menor topológico de G.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que nenhum subgrafo próprio de G contém H como um menor, e deixe μ ser um modelo de H em G.

Então, para cada $v \in V(H)$, o subgrafo $\mu(v)$ de G é uma árvore tal que toda folha de $\mu(v)$ está incidente a algum vizinho $u \in V(H)$ na única aresta de G que une um vértice de $\mu(v)$ a um vértice de $\mu(u)$. Denotamos tal folha por l_{vu}.

Como H tem grau $\Delta(H) \leq 3$, segue que existe um vértice $x_v \in V(\mu(v))$ e caminhos de x_v para l_{vu} para cada vizinho u de v, disjuntos exceto por x_v.

Juntando tais caminhos, obtemos uma subdivisão de H que é um subgrafo de G com os vértices $\{x_v : v \in V(H)\}$ correspondendo aos vértices de H. ■

Os lemas a seguir nos dá definições alternativas da noção de menor e menor topológico.

Lema 2.1.6. Um grafo H é menor de G se, e somente se, existe uma aplicação f do conjunto de vértices de H para o conjunto de subconjuntos de vértices de G, tal que:

(i) Para todo $u \in V_H$, o grafo $Gf(u)$ é não vazio e conexo.

(ii) Para todo $u, v \in V_H$, os conjuntos $f(u)$ e $f(v)$ são disjuntos.

(iii) Se existe uma aresta $\{u, v\}$ em H, então existe uma aresta (u_0, v_0) em G tal que $u_0 \in f(u)$ e $v_0 \in f(v)$.

Demonstração: Veja em [2] ■

Lema 2.1.7. Um grafo H é um menor topológico de G se, e somente se, existe um isomorfismo f de um menor topológico de H para um subgrafo de G que preserva a ordem do grafo de $|V(H)|$.

Demonstração: Veja em [2] ■

Uma *propriedade de grafos* ou um invariante de grafos é uma função do conjunto de grafos para um conjunto X tal que grafos isomorfos assumem o mesmo valor. Uma *classe de grafos* é o conjunto de grafos que assumem o mesmo valor da função. Por exemplo, uma função f é definida por $f(G) = 1$ se G contem um triângulo, e 0 se não. Então, a classe de grafos sem triângulos é o conjunto de grafos sem triângulos. Um outro exemplo de um invariante é o polinômio cromátio de grafos.

Seja H uma família de grafos. A classe $\mathrm{Proib}_{\preccurlyeq}(H) = \{G : H^i \nsubseteq G \ \forall \ H^i \in H\}$ é a classe dos grafos que não possui subgrafos de H como menores . Essa classe é fechada com relação a isomorfismo. A classe também pode ser caracterizada pelos grafos em H, sendo estes conhecidos como menores proibidos.

2.2 A Conjetura de Hadwiger

A Conjectura de Hadwiger propõe uma ligação entre o número cromático de um grafo e a existência de menores, oferecendo uma ideia estrutural sobre coloração. Nesta seção, exploramos os principais resultados relacionados no capitulo 1

Definição 2.2.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples.

Uma *coloração própria dos vértices* de G é uma função

$$c : V \to C,$$

onde C é um conjunto de cores, tal que

$$\forall \{u, v\} \in E, \quad c(u) \neq c(v).$$

O *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro $k \in \mathbb{N}$ tal que existe uma coloração própria com $|C| = k$.

Exemplo 2.2.2. Considere o grafo C_4, ilustrado na Figura 2.2 com:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}.$$

Este grafo forma um ciclo de quatro vértices (um C_4). Uma coloração própria dos vértices é dada por:

$$c(v_1) = \text{vermelho}, \quad c(v_2) = \text{azul}, \quad c(v_3) = \text{vermelho}, \quad c(v_4) = \text{azul}.$$

Como usamos apenas duas cores, e não é possível usar apenas uma cor, temos que $\chi(C_4) = 2$.

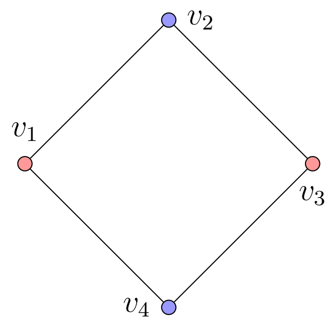


Figura 2.2: Grafo C_4

Definição 2.2.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e seja $r \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo. Uma *r-coloração própria dos vértices* de G é uma função sobrejetiva

$$c : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, r\}$$

tal que

$$\forall \{u, v\} \in E, \qquad c(u) \neq c(v).$$

Isto é, vértices adjacentes recebem cores distintas escolhidas dentre exatamente r cores disponíveis.

O grafo G é dito *r-colorível* quando admite uma r-coloração própria. Consequentemente, o *número cromático* de G satisfaz

$$\chi(G) \leq r \quad \Longleftrightarrow \quad G \text{ é } r\text{-colorível}.$$

Exemplo 2.2.4. Seja $G = K_3$, ilustrado na Figura 2.3 com

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, \qquad E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}\big\}.$$

Definimos a função de coloração

$$c(v_1) = 1, \qquad c(v_2) = 2, \qquad c(v_3) = 3.$$

Como cada aresta de G tem extremidades com cores distintas, c é uma 3-coloração própria; logo, G é 3-colorível e $\chi(G) = 3$.

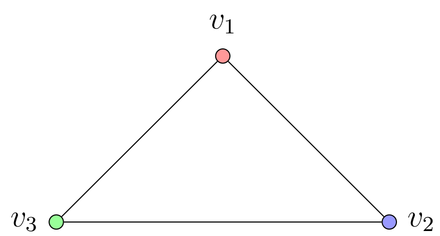


Figura 2.3: Grafo $G = K_3$ com uma 3-coloração própria.

Definição 2.2.5. Seja G um grafo simples plano, e seja $\mathcal{D}$ uma representação planar de G (ou seja, um desenho de G no plano onde as arestas não se cruzam). Dizemos que G é uma *triangulação* se toda face de $\mathcal{D}$ é delimitada por exatamente três arestas.

Exemplo 2.2.6. O grafo completo K_4, ilustrado na Figura (2.4) quando desenhado no plano sem cruzamentos, forma uma triangulação, pois todas as suas faces são delimitadas por exatamente três arestas.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad E = \big\{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i < j \leq 4\big\}.$$

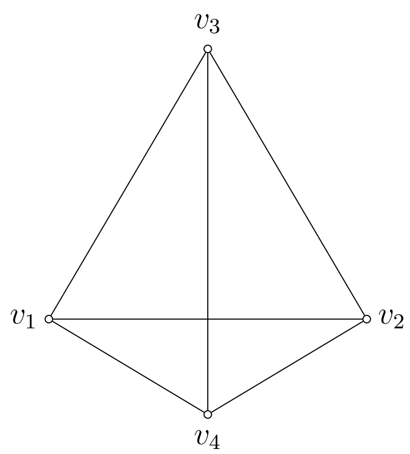


Figura 2.4: Triangulação do plano pelo grafo K_4

Definição 2.2.7. Seja G um grafo. Dizemos que um grafo H é um *menor isomorfo* de G se existe um menor de G que é isomorfo a H. Ou seja, H pode ser obtido a partir de G por meio de uma sequência finita de operações que incluem:

- remoção de vértices;
- remoção de arestas;
- contração de arestas.

Ao final dessas operações, o grafo resultante deve ser isomorfo a H, isto é, ter a mesma estrutura de adjacência de H, podendo diferir apenas na nomeação dos vértices.

A seguinte conjectura de Hadwiger sugere uma resposta positiva para menores ; a conjectura é considerada por muitos como um dos problemas em aberto mais profundos da teoria dos grafos.

Conjectura 2.2.8. Seja $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$, e seja G um grafo simples. Se o número cromático de G satisfaz $\chi(G) \geq r$, então G contém K_r como menor, ou seja,

$$\chi(G) \ \geq \ r \implies G \succeq K_r.$$

A seguir, apresentamos as provas da Conjectura de Hadwiger para os casos $r \leq 4$.
Demonstração:
Caso $r = 1$
Todo grafo não vazio possui pelo menos um vértice, e portanto contém K_1 como menor trivial.
Caso $r = 2$

Se $\chi(G) \geq 2$, então o grafo possui ao menos uma aresta. Essa aresta, por si só, constitui um menor isomorfo a K_2.

Caso $r = 3$

Qualquer grafo que não contém K_3 como menor é acíclico (isto é, uma floresta), e portanto bipartido, com $\chi(G) \leq 2$. Logo, se $\chi(G) \geq 3$, o grafo deve conter um menor K_3.

■

O caso $r = 4$ foi provado por Dirac em 1952. Demonstraremos o caso $r = 4$, mas antes vamos apresentar alguns resultados necessários.

A Conjectura de Hadwiger é equivalente ao Teorema das Quatro Cores nos casos $r = 5$ e $r = 6$. Para $r \geq 7$, a conjectura permanece um problema em aberto na teoria dos grafos.

O leitor pode ter a seguinte d {u,v}ida: qual é a estrutura típica dos grafos que não possuem um menor K^r? Espera-se que qualquer descrição estrutural suficientemente detalhada desses grafos permita determinar se eles podem ou não ser $(r-1)$-coloridos.

Exemplo 2.2.9. No caso $r = 3$, os grafos que não contêm um menor K^3 são exatamente as florestas, e estas são de fato 2−coloríveis. Para $r = 4$, também existe uma caracterização estrutural simples dos grafos que não possuem um menor K^4, o que garante sua 3−coloribilidade.

Proposição 2.2.10. Um grafo com pelo menos três vértices é maximal em arestas sem um menor K_4 se, e somente se, ele pode ser construído recursivamente a partir de triângulos, colando-os 4 a 4 ao longo de K_2.

Demonstração:

Veja em [2] ■

Uma consequência interessante da Proposição 2.2.10 é que todos os grafos maximal em arestas sem um menor K_4 possuem a mesma quantidade de arestas, independentemente da forma como foram construídos. Isso nos leva ao seguinte resultado:

Corolário 2.2.11. Todo grafo G maximal em arestas sem um menor K_4 possui exatamente $2|G| - 3$ arestas.

Demonstração: A prova é por indução no número de vértices de G.

Se $|G| = 3$, então, por ser maximal sem um menor K_4, o grafo G é um triângulo. De fato, o número de arestas é $3 = 2 \cdot 3 - 3$, como desejado.

Suponha que todo grafo maximal em arestas sem um menor K_4 com n vértices possui exatamente $2n - 3$ arestas.

Seja G um grafo maximal em arestas sem um menor K_4 com $n + 1$ vértices. Pela Proposição 8.3.1, sabemos que G pode ser obtido colando um triângulo a um grafo G' com n vértices ao longo de uma aresta (isto é, um K_2).

Como G' é maximal em arestas sem um menor K_4, pela hipótese de indução, ele possui $2n - 3$ arestas.

Ao colar o novo triângulo ao longo de uma aresta, adicionamos apenas um novo vértice e duas novas arestas (já que uma aresta é compartilhada com G'). Assim, o número total de arestas em G é:

$$(2n - 3) + 2 = 2(n + 1) - 3,$$

como queríamos demonstrar.

Portanto, por indução, todo grafo G maximal em arestas sem um menor K_4 satisfaz $|E(G)| = 2|G| - 3$. ■

Corolário 2.2.12. A conjectura de Hadwiger é válida para $r = 4$.

Demonstração: Vamos provar que todo grafo G maximal em arestas sem um menor K_4 é 3-colorível, por indução no número de vértices de G.

Se $|G| = 3$, então G é um triângulo, que é claramente 3-colorível.

Suponha que todo grafo maximal em arestas sem menor K_4 com n vértices é 3-colorível.

Seja G um grafo com $n + 1$ vértices, maximal sem menor K_4. Pela Proposição 2.2.10, G pode ser construído a partir de um grafo G' com n vértices colando-se um triângulo ao longo de uma aresta (isto é, um K_2).

Como G' é 3-colorível por hipótese de indução, os dois vértices da aresta compartilhada já têm cores distintas. O novo vértice do triângulo pode então ser colorido com a terceira cor, completando a coloração de G com 3 cores.

Portanto, todo grafo maximal em arestas sem menor K_4 é 3-colorível. Como qualquer grafo sem menor K_4 é subgrafo de um grafo maximal com essa propriedade, ele também é 3-colorível. ■

Teorema 2.2.13. Seja G um grafo maximal em arestas que não contém um menor K_5. Se $|G| \geq 4$, então G pode ser construído recursivamente, colando-se ao longo de triângulos e de cópias de K_2, a partir de triangulações planares e cópias do grafo W

2.3 Boa-Quase-Ordenação

Nesta seção, apresentamos os principais conceitos e resultados relacionados à noção de boa-quase-ordenação. Introduzimos definições básicas, exemplos e discutimos sua aplicação na teoria de menores.

Definição 2.3.1. Uma *quase-ordem* sobre um conjunto X é uma relação binária $\preceq$ em $X \times X$ que satisfaz:

1. **Reflexividade:** para todo $x \in X$, tem-se $x \preceq x$;
2. **Transitividade:** para todos $x, y, z \in X$, se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.

A relação $\preceq$ não exige antissimetria; isto é, é possível que $x \preceq y$ e $y \preceq x$ com $x \neq y$.

Definição 2.3.2. Uma quase-ordenação $\preccurlyeq$ em X é uma *boa-quase-ordenação*, e os elementos de X são quase-bem-ordenados por $\preccurlyeq$, se, para toda sequência infinita $x_0, x_1, \ldots$ em X, existirem índices $i < j$ tais que $x_i \preccurlyeq x_j$. Dizemos que (x_i, x_j) é um $par\ bom$ dessa sequência. Uma sequência contendo um par bom é uma sequência boa; assim, uma quase-ordenação em X é uma boa-quase-ordenação se, e somente se, toda sequência infinita em X é boa. Uma sequência infinita é $ruim$ se não for boa.

Exemplo 2.3.3. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com a ordem usual $\leq$. Dada qualquer sequência infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ em $\mathbb{N}$, pelo Princípio da Casa dos Pombos, sempre existem $i < j$ tais que $x_i \leq x_j$. Logo, $(\mathbb{N}, \leq)$ é quase-bem-ordenado.

Exemplo 2.3.4. Considere o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ com a ordem usual $\leq$. A sequência $0, -1, -2, -3, \ldots$ não possui nenhum par $i < j$ tal que $x_i \leq x_j$, pois é estritamente decrescente. Portanto, $(\mathbb{Z}, \leq)$ não é quase-bem-ordenado.

Proposição 2.3.5. Uma relação quase-ordenada em X é quase-bem-ordenada se e somente se X não contiver nenhum conjunto antissimétrico infinito e nenhuma sequência infinita estritamente decrescente $x_0 > x_1 > \ldots$.

Corolário 2.3.6. Se X é bem-quase-ordenado, então toda sequência infinita em X possui uma subsequência crescente infinita.

Definição 2.3.7. Seja $\preceq$ uma quase-ordem sobre um conjunto X. Para subconjuntos finitos $A, B \subseteq X$, escrevemos $A \preceq B$ se existe uma função injetora $f : A \to B$ tal que $a \preceq f(a)$ para todo $a \in A$.

Exemplo 2.3.8. Seja $X = \mathbb{N}$ com a ordem usual $\leq$. Considere os subconjuntos finitos $A = \{2, 5\}$ e $B = \{3, 6, 7\}$.

Definimos a função injetora $f : A \to B$ por:

$$f(2) = 3, \quad f(5) = 6$$

Note que:

$$2 \leq 3, \quad 5 \leq 6$$

Logo, $A \preceq B$.

Essa definição estende naturalmente a relação $\preceq$ para uma quase-ordem sobre o conjunto $[X]^{<\omega}$, o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X.

Teorema 2.3.9. Se X é bem-quase-ordenado por $\preceq$, então $[X]^{<\omega}$ também é bem-quase-ordenado por $\preceq$.

Demonstração: Suponha que $\preceq$ seja uma bem-quase-ordem em X, mas não em $[X]^{<\omega}$. Vamos construir uma sequência ruim $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[X]^{<\omega}$, como segue.

Dado $n \in \mathbb{N}$, assuma por indução que A_i foi definido para todo $i < n$, e que existe uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$ começando com $A_0, \ldots, A_{n-1}$.

(Isto é claramente verdadeiro para $n = 0$: por hipótese, $[X]^{<\omega}$ contém uma sequência ruim, e assim a sequência vazia é um segmento inicial.)

Escolha $A_n \in [X]^{<\omega}$ tal que exista uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$ começando com $A_0, \ldots, A_n$, e tal que $|A_n|$ seja o menor possível.

Em nenhum momento da construção foi introduzido um par $A_i \preceq A_j$ com $i < j$. Como essa propriedade é mantida em cada etapa do processo indutivo, a sequência completa $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também não possui pares bons, ou seja, é uma sequência ruim em $[X]^{<\omega}$.

Em particular, $A_n \neq \emptyset$ para todo n. Para cada n, escolha um elemento $a_n \in A_n$ e defina $B_n := A_n \setminus \{a_n\}$.

Pelo Corolário 2.3.6, a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência crescente infinita $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Pela escolha mínima de A_{n_0}, a sequência

$$A_0, \ldots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots$$

é boa; considere um par bom.

Como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ruim, esse par não pode ser da forma (A_i, A_j) nem (A_i, B_j), pois $B_j \preceq A_j$. Logo, ele deve ser da forma (B_i, B_j).

Estendendo a injeção $B_i \to B_j$ definindo $a_i \mapsto a_j$, deduzimos que $A_i \preceq A_j$, e portanto (A_i, A_j) é um par bom, uma contradição.

Portanto, não pode existir tal sequência ruim em $[X]^{<\omega}$, o que conclui a prova. ■

A relação *menor* de G é reflexiva e transitiva, em outras palavras, ela define uma quase-ordem na classe de grafos finitos G. Para H menor de G, escrevemos $H \preccurlyeq G$. Note que $\preccurlyeq$ é antissimétrica quando nos restringimos a grafos não isomórficos.

Exemplo 2.3.10. Seja $G = K_4$, o grafo completo com 4 vértices, e $H = K_3$, o triângulo. É possível obter H a partir de G por contração de uma aresta e remoção de vértices excedentes. Logo, $H \preccurlyeq G$.

Por outro lado, $K_4 \not\preccurlyeq K_3$, pois não é possível obter um grafo com mais vértices do que o original usando apenas remoção e contração.

2.4 O Teorema dos Menores de Grafos Restrito a Árvores

Nesta seção, apresentamos uma versão do teorema dos menores de grafos aplicada à classe das árvores, originalmente demonstrada por Kruskal [7].

Teorema 2.4.1. A classe de todas as árvores é quase-bem-ordenada pela relação menor topológico.

O Teorema 2.4.1 fornece uma perspectiva na compreensão da estrutura de grafos finitos, ao afirmar que nenhuma sequência infinita estritamente decrescente pode existir entre árvores finitas com respeito à relação de menor topológico.

Como as árvores consideradas nesta dissertação são, em sua maioria, árvores enraizadas, apresentamos a seguir um lema que trata especificamente desse caso, cuja demonstração servirá para generalizar o Teorema 2.4.1.

Lema 2.4.2. As árvores enraizadas são quase-bem-ordenadas pela relação menor topológico $\preccurlyeq$.

Demonstração: Suponha que as árvores enraizadas não sejam quase-bem-ordenadas pela relação $\preccurlyeq$. Vamos construir uma sequência ruim $(T_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recursivamente.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha indutivamente que (T_i, r_i) já foi construído para todo $i < n$, e que exista uma sequência ruim começando com $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \ldots, (T_{n-1}, r_{n-1})$.

Escolha então (T_n, r_n) com $|V(T_n)|$ mínimo, de forma que exista uma sequência ruim começando com

$$(T_0, r_0), (T_1, r_1), \ldots, (T_n, r_n).$$

(Para $n = 0$, essa sequência existe, pois $\preccurlyeq$ não é quase-bem-ordenada.)

Observe que $|V(T_n)| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n o conjunto das árvores enraizadas (T, r) tal que T é um componente conexo de $T_n - r_n$, e r é adjacente a r_n em T_n.

Seja $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Vamos provar que $\preccurlyeq$ é quase-bem-ordenado sobre A.

Seja $((U_k, s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer de árvores enraizadas do conjunto A. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolha $n = n(k)$ tal que $U_k \in A_n$, e seja

$$k^* = \operatorname{argmin}\{n(k) : k \in \mathbb{N}\},$$

ou seja, $n(k^*) < n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então a sequência

$$(W_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((T_0, r_0), \dots, (T_{n(k^*)-1}, r_{n(k^*)-1}), (U_{k^*}, s_{k^*}), (U_{k^*+1}, s_{k^*+1}), \dots\big)$$

é boa, pois $(U_{k^*}, s_{k^*}) \prec (T_{n(k^*)}, r_{n(k^*)})$. (Caso contrário, teríamos uma contradição com a minimalidade de $|V(T_{n(k^*)})|$.)

Ou seja, existem índices $i < j$ tais que $(W_i, t_i) \prec (W_j, t_j)$.

Observe que: - Não podemos ter $j < n(k^*) - 1$, pois isso implicaria $(T_i, r_i) \prec (T_j, r_j)$; - Também não podemos ter $i < n(k^*) < j$, pois então $(T_i, r_i) \prec (U_j, s_j) \prec (T_{n(j)}, r_{n(j)})$, uma contradição.
Logo, $n(k^*) < i$, e temos $(U_i, s_i) \prec (U_j, s_j)$, o que mostra que a sequência $(U_n, s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é boa.

Portanto, A é quase-bem-ordenado por $\preccurlyeq$. Pelo Teorema 2.3.9, temos que $\preccurlyeq$ é quase-bem-ordem sobre $[A]^{<\omega}$.

Em particular, existem índices $i_0 < j_0$ tais que $A_{i_0} \prec A_{j_0}$. A partir da função $f : A_{i_0} \to A_{j_0}$, das subdivisões e isomorfismos que respeitam raiz e testemunham $A_{i_0} \prec A_{j_0}$, segue que:

$$(T_{i_0}, r_{i_0}) \prec (T_{j_0}, r_{j_0}).$$

Portanto, as árvores enraizadas são quase-bem-ordenadas pela relação $\preccurlyeq$. ■

Vale destacar que, é crucial notar que essa ordenação não se estende a todas as classes de grafos. A classe de todos os grafos, por exemplo, desafia essa propriedade de quase-bem-ordenação.

Exemplo 2.4.3. A Figura (2.5) mostra uma classe de grafos que não é bem-quase-ordenada pela relação menor topológico.

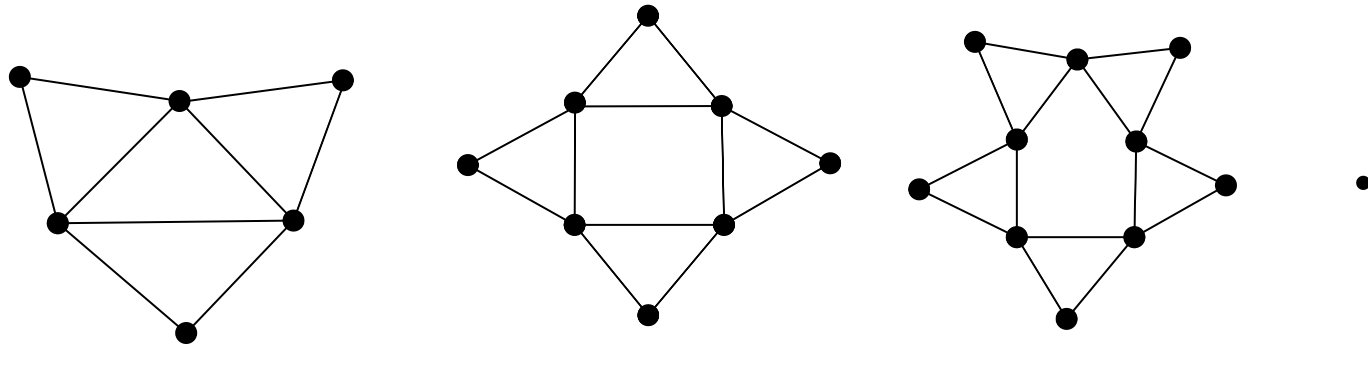


Figura 2.5: Sequência de grafos

2.5 O Teorema de Robertson e Seymour

Entre os aspectos mais relevantes na Teoria dos Grafos estão aqueles que se mantêm preservados ao considerar menores, ou seja, propriedades que, uma vez satisfeitas por um grafo, continuam válidas para todos os seus menores . Um exemplo notório é a *planaridade*.

O teorema de Kuratowski assegura que a planaridade pode ser identificada pela inexistência dos grafos K_5 e $K_{3,3}$ como menores . Portanto, a coleção dos grafos planares consiste exatamente naqueles que não apresentam K_5 nem $K_{3,3}$ como menor. De modo mais amplo, sempre que uma propriedade hereditária puder ser descrita pela inexistência de determinados menores, diz-se que ela admite uma *caracterização por menores proibidos*.

A família dos menores proibidos é invariável sob isomorfismo e definida integralmente pelo conjunto H.

Resultados que estabelecem uma caracterização de uma propriedade hereditária $\mathcal{P}$ por meio de um conjunto H de menores proibidos são especialmente valorizados em Teoria dos Grafos. Além disso, para qualquer propriedade de grafos que seja preservada ao tomar menores, existe sempre um conjunto finito e único (a menos de isomorfismo) de menores proibidos capaz de caracterizá-la. Indicando por

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} := \{H \mid H \text{ é minimal em } \overline{\mathcal{P}}\}$$

o conjunto dos grafos minimais (em relação à relação de menor) que não possuem a propriedade $\mathcal{P}$, temos:

Proposição 2.5.1. $\mathcal{P} = \mathrm{Proib}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H}_{\mathcal{P}})$, e para qualquer outro conjunto $\mathcal{H}$ com $\mathcal{P} = \mathrm{Proib}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$, verifica-se que $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{H}$.

Segundo o Teorema dos Menores de Grafos (Robertson e Seymour), todo conjunto de grafos finitos que são mutuamente incomparáveis pela relação de menor é, necessariamente, finito. Dessa forma, $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ é sempre finito:

Teorema 2.5.2 (O teorema de Robertson e Seymour (a conjetura de Wagner))**.** Os grafos finitos são bem-quase-ordenados sob a relação de menor $\preccurlyeq$.

A prova deste teorema foi estabelecida por Robertson e Seymour em sua série de vinte e cinco artigos intitulada *Graph Minors I–XXV*.

A partir desse teorema, pode-se deduzir o corolário:

Corolário 2.5.3. Qualquer propriedade de grafos preservada sob a operação de tomar menores pode ser escrita como $\mathrm{Proib}_{\preccurlyeq}(\mathcal{H})$, para algum conjunto finito $\mathcal{H}$.

Como aplicação, para cada superfície S, existe um conjunto finito de grafos $H_1, \ldots, H_n$ tal que $\mathrm{Proib}_{\preccurlyeq}(H_1, \ldots, H_n)$ descreve exatamente a classe dos grafos que não admitem uma imersão em S.

Um aspecto central da teoria dos menores de grafos está na sua aplicabilidade algorítmica. Em particular, o Teorema de Robertson-Seymour garante que a classe de todos os grafos finitos é bem-quase-ordenada pela relação de menor. Como consequência, qualquer classe de grafos fechada por menores pode ser caracterizada por um conjunto finito de menores proibidos. Essa propriedade tem implicações computacionais diretas.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos finita e fechada por menores. Suponha que $\mathcal{C}$ seja caracterizada pela exclusão de um conjunto finito de menores proibidos $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$. Então, dado um grafo G com n vértices, podemos decidir se $G \in \mathcal{C}$ em tempo polinomial em n. Isso ocorre porque, para cada grafo fixo H_i, o problema de decidir se $H_i \preceq G$ (isto é, se H_i é menor de G) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Um exemplo clássico é a classe dos grafos planares, caracterizada pela exclusão de K_5 e $K_{3,3}$. Isso implica que é possível reconhecer a planaridade de um grafo em tempo polinomial. Mais ainda, para qualquer superfície compacta e fechada S, o conjunto dos grafos que podem ser mergulhados em S também é caracterizado por um conjunto finito de menores proibidos. Logo, existe um algoritmo polinomial para decidir se um grafo G admite um mergulho em S.

Outra classe notável é a dos grafos com mergulho sem elos em $\mathbb{R}^3$. Mohar, Robertson e Seymour mostraram que essa classe é também fechada por menores e possui uma caracterização por um conjunto finito de sete menores proibidos. Assim, decidir se um grafo admite uma representação sem elos no espaço tridimensional é também uma tarefa polinomial.

Classe de Grafos	**Caracterização**	**Complexidade de Decisão**
Planaridade	$\{K_5, K_{3,3}\}$	Polinomial
Mergulho em superfície S	Finitos menores proibidos	Polinomial
imersões sem arestas	7 menores proibidos	Polinomial

Portanto, sempre que uma classe de grafos for fechada por menores e tiver sua caracterização explícita por obstruções finitas, é possível verificar a pertinência de um grafo G à classe por meio de algoritmo eficiente. Este é um triunfo da teoria dos menores, que unifica estrutura e complexidade computacional de maneira profunda.

Capítulo 3

Decomposição em Árvore

Neste capítulo, definimos decomposição em árvore e largura em árvore, apresentamos propriedades e exemplificamos algumas dessas propriedades para melhor compreensão do leitor. Usamos como referências [2], [19] e [10].

3.1 Definições

As decomposições em árvores desempenham um papel muito importante na teoria dos menores de grafos, pois elas fornecem uma maneira de decompor um grafo em partes menores, representadas por subárvores, facilitando a caracterização de classes de grafos excluindo menores, bem como o desenvolvimento de algoritmos eficientes para problemas geralmente intratáveis em grafos gerais.

Definição 3.1.1. Seja T uma árvore. Para quaisquer $t_1, t_3 \in V(T)$, denote por $P_{t_1t_3}$ o único caminho simples em T com extremidades t_1 e t_3. Definimos a notação

$$t_2 \in t_1Tt_3$$

para indicar que t_2 é um vértice de $P_{t_1t_3}$, isto é, $t_2 \in V(P_{t_1,t_3})$.

Definição 3.1.2. Seja G um grafo, T uma árvore, e $V = (V_t)_{t\in T}$ uma família de conjuntos de vértices $V_t \subseteq V(G)$ indexados pelos vértices t de T. O par (T, V) é chamado de uma decomposição em árvore de G se satisfizer as seguintes condições:

(C1) $V(G) = \bigcup_{t\in T} V_t$.

(C2) Para cada aresta $e \in G$, existe um $t \in T$ tal que ambos os extremos de e estão em V_t.

(C3) $V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2}$ sempre que $t_1, t_2, t_3 \in T$ satisfazem $t_2 \in t_1Tt_3$.

Exemplo 3.1.3. A Figura (3.1) ilustra uma decomposição em árvore de um grafo G.

A partir da definição, várias decomposições podem ser obtidas para o mesmo grafo.

Exemplo 3.1.4. A Figura (3.2) mostra algumas decomposições em árvore. estas decomposições variam de acordo com o tamanho da árvore T e dos subconjuntos V_i.

Ao se considerar decomposições adequadas, o tamanho das partes pode ter um impacto significativo quando avaliamos a similaridade entre o grafo e uma árvore: quanto menores forem os tamanhos dos subconjuntos V_t, mais o grafo se assemelhará a uma árvore, mas o tamanho da árvore pode não ser tão decisivo para julgar a estrutura em árvore do grafo.

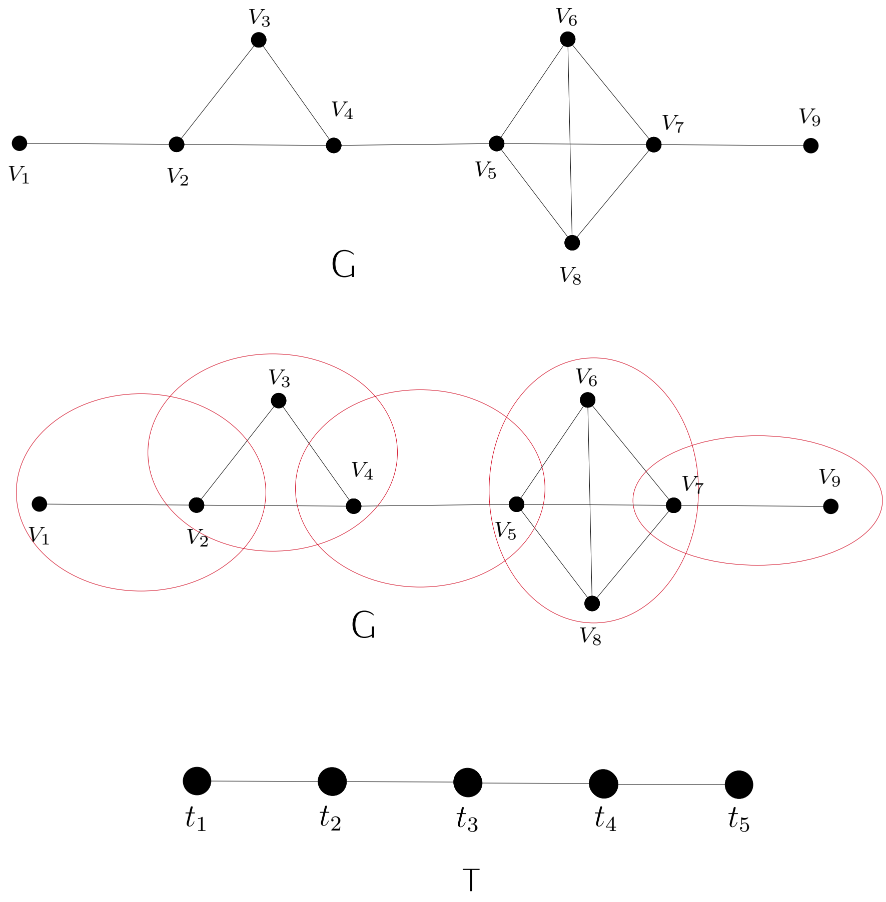


Figura 3.1: Exemplo de construção de uma decomposição em árvore de um grafo G.

Definição 3.1.5. A *largura em árvore* de uma decomposição em árvore (T, V) de um grafo G, denotada por tw, é definida como:

$$tw(T, V) = \max\{\, |V_t| - 1 \ : \ t \in V(T)\,\}$$

onde cada V_t é um subconjunto de vértices de G associado ao nó t da árvore T.

Definição 3.1.6. A largura em árvore de um grafo G é a menor largura entre todas as possíveis decomposições em árvore de G, isto é:

$$tw(G) = \min\{tw(T, V) \ : \ (T, V) \text{ é uma decomposição em árvore de } G\}$$

Definição 3.1.7. Um grafo *série-paralelo* é um grafo construído recursivamente a partir de uma única aresta entre dois vértices distintos, chamados terminais, por meio da aplicação repetida das seguintes operações:

Extensão em série: dada uma aresta $\{u, v\}$, substituí-la por duas arestas $\{u, w\}$ e $\{w, v\}$, onde w é um novo vértice (inserção de vértice no meio da aresta).

Extensão em paralelo: adicionar uma nova aresta com as mesmas extremidades de uma aresta existente.

Exemplo 3.1.8. A largura em árvore é uma medida que indica o quão próximo um grafo não direcionado está de ser uma árvore. Quanto menor esse valor, mais o grafo se assemelha a uma estrutura de árvore.

Árvores e florestas têm largura em árvore igual a 1.

Grafos mais complexos, como os série-paralelos, ainda mantêm uma largura baixa, no máximo 2.

Os chamados $k-$árvores são grafos que atingem exatamente a largura em árvore k.

Definição 3.1.9. Um grafo G é um *Buraco* se G é um ciclo induzido de tamanho pelo menos 4. Denotamos por C_k um buraco de tamanho k.

Exemplo 3.1.10. Vamos encontrar a largura de algumas decomposições possíveis de C_6.

(i) Seja $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição em árvore de C_6, onde $V(T) = \{t_1\}$, $E(T) = \emptyset$, e $V_{t_1} = V(C_6)$. Essa decomposição tem largura $|V(C_6)| - 1 = 5$.

(ii) Seja $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição em árvore de C_6, onde:

$$\begin{aligned}
&V(T) = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\},\\
&E(T) = \{t_i t_{i+1} : i \in \{1, 2, 3, 4\}\},\\
&V_{t_1} = \{a, b\},\\
&V_{t_2} = \{a, b, f\},\\
&V_{t_3} = \{a, b, c, f\},\\
&V_{t_4} = V(C_6).
\end{aligned}$$

Essa decomposição também tem largura $|V(C_6)| - 1 = 5$.

(iii) Seja $(T, \{V_t : t \in V(T)\})$ uma decomposição em árvore de C_6, onde:

$$\begin{aligned}
&V(T) = \{t_1, t_2, t_3\},\\
&E(T) = \{t_1 t_2, t_2 t_3\},\\
&V_{t_1} = \{a, b, c, f\},\\
&V_{t_2} = \{c, d, e, f\},\\
&V_{t_3} = \{c, f\}.
\end{aligned}$$

A largura dessa decomposição é $4 - 1 = 3$.

Uma decomposição em árvore de um grafo busca organizar suas partes, subconjuntos de vértices, de forma que essas partes se conectem segundo a estrutura de uma árvore, ou seja, sem ciclos e com uma organização hierárquica. O objetivo é que essa conexão seja feita de modo a minimizar o tamanho dos subconjuntos envolvidos, resultando em uma estrutura simplificada.

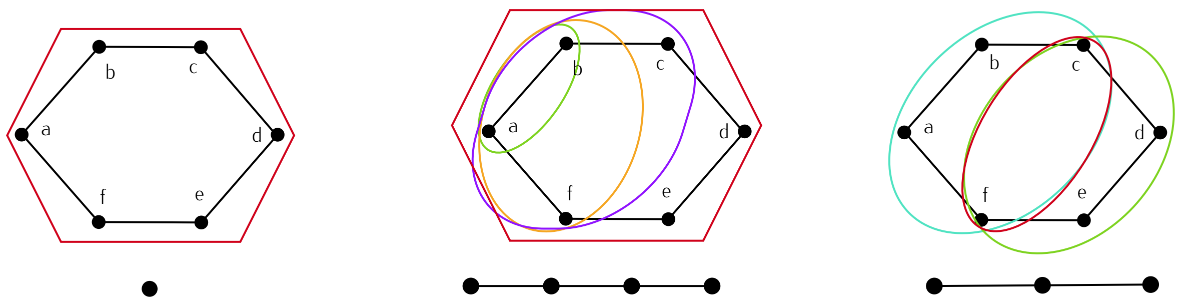


Figura 3.2: Construções de decomposições em árvore do grafo C_6.

3.2 Propriedades

Nesta seção, investigamos propriedades da decomposição em árvore de um grafo, com ênfase em como a estrutura arbórea impõe restrições e separações no grafo original. Inicialmente, demonstramos que a interseção entre os conjuntos associados aos extremos de uma aresta da árvore atua como um separador no grafo. Em seguida, provamos que a largura em árvore de um subgrafo é sempre menor ou igual à largura do grafo original, e que a largura em árvore de um grafo é determinada pela maior largura entre suas componentes conexas. Por fim, estabelecemos que a largura em árvore é preservada ou reduzida sob operações que produzem menores, como remoções e contrações. Esses resultados são importantes para a compreensão do próximo capítulo.

A decomposição em árvore transfere as propriedades de separação de sua árvore para o grafo decomposto:

Proposição 3.2.1. Seja $(T, \mathcal{V})$ uma decomposição em árvore de um grafo G, com $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t \in V(T)}$. Considere uma aresta $e = (t_1, t_2) \in E(T)$, e sejam T_1 e T_2 as componentes conexas da árvore $T - e$, contendo t_1 e t_2, respectivamente. Definimos:

$$U_1 = \bigcup_{t \in V(T_1)} V_t \quad \text{e} \quad U_2 = \bigcup_{t \in V(T_2)} V_t.$$

Então, o conjunto de interseção

$$V_{t_1} \cap V_{t_2}$$

atua como um separador entre os conjuntos U_1 e U_2 no grafo G. Não existe caminho em G entre um vértice de $U_1 \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$ e um vértice de $U_2 \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$.

Demonstração: Como (t_1, t_2) é uma aresta da árvore T, ela é uma *ponte*, ou seja, a sua remoção desconecta T. Assim, qualquer caminho na árvore que conecte um nó $t \in V(T_1)$ a um nó $t' \in V(T_2)$ obrigatoriamente passa pela aresta (t_1, t_2).

Pela definição de decomposição em árvore, um vértice do grafo G que está presente em dois conjuntos V_t e $V_{t'}$ ao longo de um caminho em T, deve necessariamente aparecer em todos os conjuntos associados aos nós desse caminho.

Logo, temos:

$$U_1 \cap U_2 \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}.$$

Para concluir, precisamos mostrar que **não existe nenhuma aresta em G** que conecte um vértice $u_1 \in U_1 \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$ a um vértice $u_2 \in U_2 \setminus (V_{t_1} \cap V_{t_2})$. Ou seja, que $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separa U_1 de U_2.

Suponha, por contradição, que exista uma aresta (u_1, u_2) com $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$. Pela definição de decomposição em árvore, existe algum nó $t \in V(T)$ tal que $u_1, u_2 \in V_t$.

Mas, como $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$, então t deve pertencer simultaneamente a T_1 e a T_2. Isso é impossível, pois T_1 e T_2 são componentes disjuntas de $T - (t_1, t_2)$.

Portanto, chegamos a uma contradição. Assim, o conjunto $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ separa U_1 de U_2 no grafo G.

A Figura 3.3 ilustra essa propriedade. ■

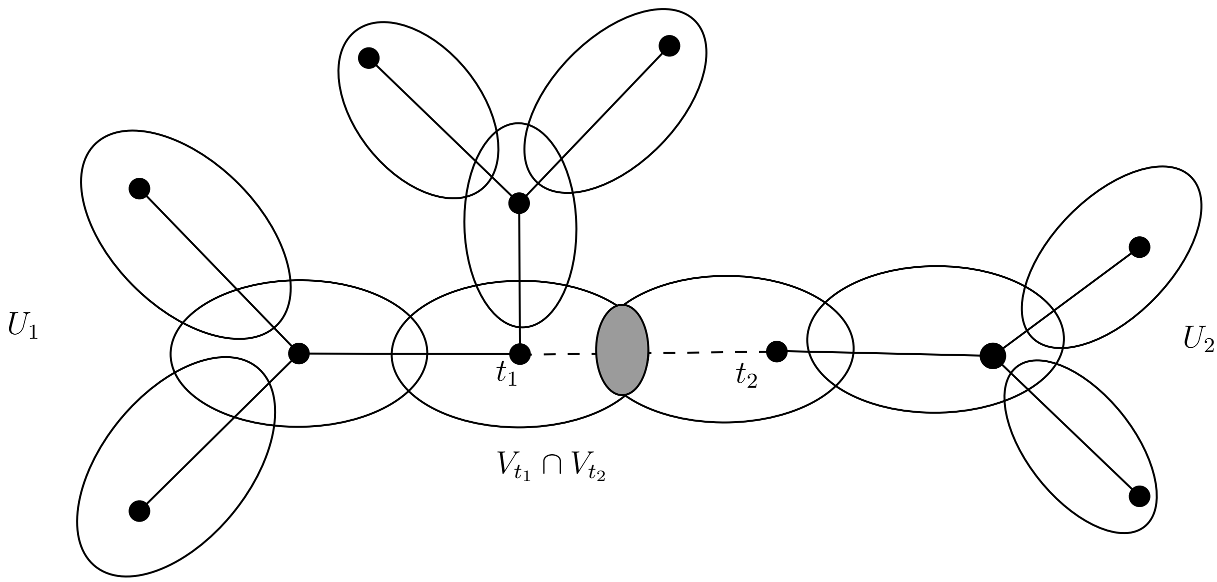


Figura 3.3: Uma aresta (t_1, t_2) de uma decomposição em árvore como um separador.

Lema 3.2.2. Seja G um grafo com componentes conexas $G_1, G_2, \ldots, G_k$.
Então, a largura em árvore de G é igual ao máximo das larguras em árvore de suas componentes. Isto é:

$$\text{tw}(G) = \max\{\text{tw}(G_i) \ : \ 1 \leq i \leq k\}.$$

O seguinte resultado reflete o fato de que a operação de remoção de vértices ou arestas, que gera subgrafos, não pode aumentar a complexidade estrutural em termos de decomposição em árvore.

Proposição 3.2.3. Seja G um grafo e seja H um menor de G. Então:

$$\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G).$$

Demonstração: Por definição, H pode ser obtido de G por uma série de contrações ou retiradas de arestas, ou eliminações de vértices.

Se apenas as duas últimas operações foram aplicadas, H é um subgrafo de G, e pela Propriedade 2, o resultado segue.

Basta então mostrar que a largura em árvore de um grafo não aumenta com a contração de arestas.

Seja então (T, V) uma decomposição em árvore de G. Considere a aresta $e = (t_1, t_2)$ a ser contraída como operação para obtenção de H, e seja w o novo vértice adicionado a G', o grafo obtido de G pela contração de e.

Uma nova decomposição em árvore (T, V') pode então ser definida, onde:

$$V' = \{V_t \setminus \{t_1, t_2\} \cup \{w\} : V_t \in V, t_1 \in V_t \text{ ou } t_2 \in V_t\} \cup \{V_t : V_t \in V, t_1 \notin V_t \text{ e } t_2 \notin V_t\}.$$

Assim, como H possui menos vértices que G, $\mathrm{tw}(H) \leq \mathrm{tw}(G)$.

Como a desigualdade se aplica a qualquer decomposição em árvore e a qualquer menor de G, em particular deve valer também para a decomposição em árvore mínima de G, e logo segue que:

$$\mathrm{tw}(H) \leq \mathrm{tw}(G),$$

com H um menor de G. ■

Exemplo 3.2.4. Considere o grafo G formado por um ciclo com 4 vértices, ou seja, $G = C_4$. Sabemos que sua largura em árvore é 2, pois qualquer ciclo C_n com $n \geq 4$ tem:

$$\mathrm{tw}(C_n) = 2.$$

Agora, considere o subgrafo H obtido de G pela remoção de uma aresta, digamos (v_1, v_4). O grafo resultante H é um caminho com 4 vértices (P_4), cuja largura em árvore é 1, já que todo caminho é uma árvore.

Portanto:

$$\mathrm{tw}(H) = 1 \leq \mathrm{tw}(G) = 2.$$

Exemplo 3.2.5. Considere o grafo $G = K_4$, o grafo completo com 4 vértices. Sabemos que a largura em árvore de K_4 é 3, pois:

$$\mathrm{tw}(K_n) = n - 1.$$

Agora, obtenha H a partir de G por contração de uma aresta, por exemplo, contraindo a aresta (v_1, v_2). O vértice resultante substituirá v_1 e v_2, conectando-se a todos os vizinhos originais de ambos. O grafo resultante H tem 3 vértices e todas as arestas possíveis, ou seja, é K_3.

Sabemos que:

$$\mathrm{tw}(K_3) = 2.$$

Portanto,

$$\mathrm{tw}(H) = 2 \leq \mathrm{tw}(G) = 3.$$

Capítulo 4

Grafos Planares e largura em árvore

Neste capítulo, abordamos a noção de largura em árvore em grafos planares, conforme desenvolvida por Robertson e Seymour. Apresentamos os conceitos fundamentais de decomposição em árvores e discutimos o resultado central de que, para qualquer grafo planar fixo H, todo grafo planar com largura em árvore suficientemente grande possui H como menor. Os resultados encontram-se em [15]

4.1 Raio de Grafos Planares

Nesta seção, Apresentamos o resultado de um teorema que estabelece que se um grafo planar G tem raio d, então a largura em árvore de G é no máximo $3d + 1$.

Definição 4.1.1. Seja G um grafo planar. Um *desenho* M de G é uma representação de G no plano, na qual as arestas são segmentos de reta ou arcos, que não se cruzam. Mais precisamente, os interiores das curvas associadas às arestas são dois a dois disjuntos, e suas extremidades são os vértices do grafo.

Definição 4.1.2. Seja G um grafo planar e seja M um desenho de G no plano. Uma *região* de M é definida como uma componente conexa do complementar da imagem do desenho no plano, ou seja, uma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus M(G)$, onde $M(G)$ representa o conjunto da imagem dos vértices e arestas de G sob o desenho M.

Definição 4.1.3. Para cada região R de M, definimos $d(R)$ como o menor k tal que existe uma sequência $R_0, R_1, R_2, ..., R_k$ de regiões de M satisfazendo as seguintes condições:

1. R_0 é uma região infinita;
2. $R_k = R$;
3. Para $1 \leq j \leq k$, existe um vértice v de G que é adjacente a regiões R_j e R_{j+1}.

Exemplo 4.1.4. Considere o desenho planar M de um grafo G no qual o plano é dividido em cinco regiões numeradas de R_0 a R_4. Suponha que:

R_0 é a região infinita;

Os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 de G estão posicionados de modo que:

v_1 é adjacente a R_0 e R_1;

v_2 é adjacente a R_1 e R_2;

v_3 é adjacente a R_2 e R_3;

v_4 é adjacente a R_3 e R_4.

Queremos calcular $d(R_4)$. Para isso, consideramos a seguinte sequência de regiões:

$$R_0 \to R_1 \to R_2 \to R_3 \to R_4.$$

Cada par consecutivo de regiões na sequência compartilha um vértice do grafo, conforme exigido pela definição. Como são necessários quatro passos desde a região infinita até R_4, temos:

$$d(R_4) = 4.$$

Definição 4.1.5. O *raio* $\rho(M)$ de um desenho M de G é o menor valor inteiro d tal que $d(R) \leq d$ para todas as regiões R de M.

Exemplo 4.1.6. Sejam M e M' dois desenhos possíveis para um grafo G, ilustradas na Figura(4.1). O raio do desenho M é $\rho(M) = 1$. Já o raio do desenho M' do mesmo grafo G é $\rho(M') = 2$.

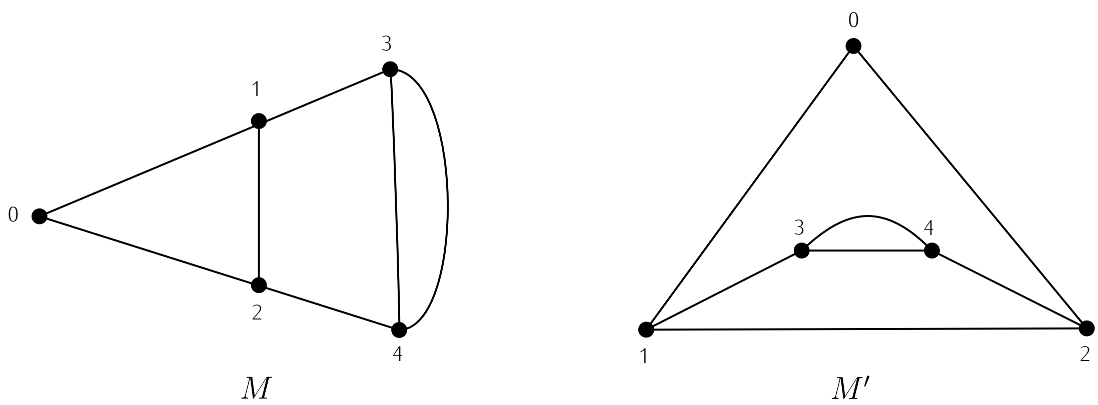


Figura 4.1: Desenhos distintos de um mesmo grafo Planar.

Observe que para um mesmo grafo G, podem existir diferentes representações com raios distintos. Para resolver essa questão, temos a seguinte definição:

A seguir definiremos o raio de G, que mede o quão próximas todas as regiões podem estar da região infinita, no melhor desenho possível do grafo no plano.

Definição 4.1.7. O *raio do grafo* G, denotado por $\rho(G)$, é definido como o menor valor possível de $\rho(M)$, tomado sobre todos os desenhos planos possíveis de G. Isto é,

$$\rho(G) = \min \{\rho(M) \ : \ M \text{ é um desenho planar de } G\}.$$

O seguinte resultado afirma que todo grafo planar com raio $\leq d$ é isomorfo a um menor de um grafo planar simples com raio $\leq d$.

Proposição 4.1.8. Seja G um grafo planar, não simples tal que $\rho(G) \leq d$. Então, existe um grafo planar simples H, com $\rho(H) \leq d$, tal que G é isomorfo a um menor de H.

Demonstração: Seja $\rho = \rho(G)$, o menor valor de $\rho(M)$ considerando todos os desenhos planos M de G.

Construímos um grafo H substituindo cada aresta de G por um caminho de três arestas, inserindo dois vértices intermediários. Essa transformação garante que:

H é planar: basta estender o desenho M de G, alongando as arestas sem introduzir cruzamentos.

H é simples: após a subdivisão, laços e arestas múltiplas deixam de existir.

G é isomorfo a um menor de H: basta contrair os dois vértices intermediários de cada subdivisão para recuperar a aresta original.

Quanto ao raio:

O desenho M' de H, construído a partir de M, tem as mesmas regiões e vizinhanças, logo $\rho(M') \leq \rho(M) = \rho$;

Suponha, por absurdo, que $\rho(H) = \rho(M') > \rho$. Como G é um menor de H, poderíamos construir um desenho de G com raio menor que ρ, contradizendo a definição de $\rho(G)$ como mínimo.

Assim, $\rho(G') = \rho(G) = \rho \leq d$, e G é isomorfo a um menor de um grafo planar simples G' com raio $\leq d$. ■

Esse resultado assegura que, mesmo que o grafo original possua laços ou arestas paralelas, ainda assim ele pode ser representado como uma contração, subgrafo ou simplificação de um grafo planar simples, mantendo o controle sobre o raio máximo em sua decomposição planar.

Exemplo 4.1.9. Considere um multigrafo planar G com raio 2. Pela Proposição (4.1.8), podemos afirmar que existe um grafo planar simples H tal que G é isomorfo a um menor de H com raio ≤ 2. A Figura (4.2) ilustra um exemplo de como esse grafo planar simples é construído, através da subdivisão de arestas.

Definição 4.1.10. Seja M um desenho de um grafo planar G. Chamamos de *sequência aninhada de circuitos* em M uma sequência

$$C_1, C_2, \ldots, C_d$$

de circuitos de G que satisfaz as seguintes condições:

Para todo par de índices $1 \leq j \leq j' \leq d$, os circuitos C_j e $C_{j'}$ não possuem vértices em comum;

Além disso, o circuito C_j está contido no interior do circuito $C_{j'}$ no desenho M.

Exemplo 4.1.11. Considere o grafo G, ilustrado na Figura(4.3), desenhado no plano como três ciclos simples C_1, C_2 e C_3.

Temos que:

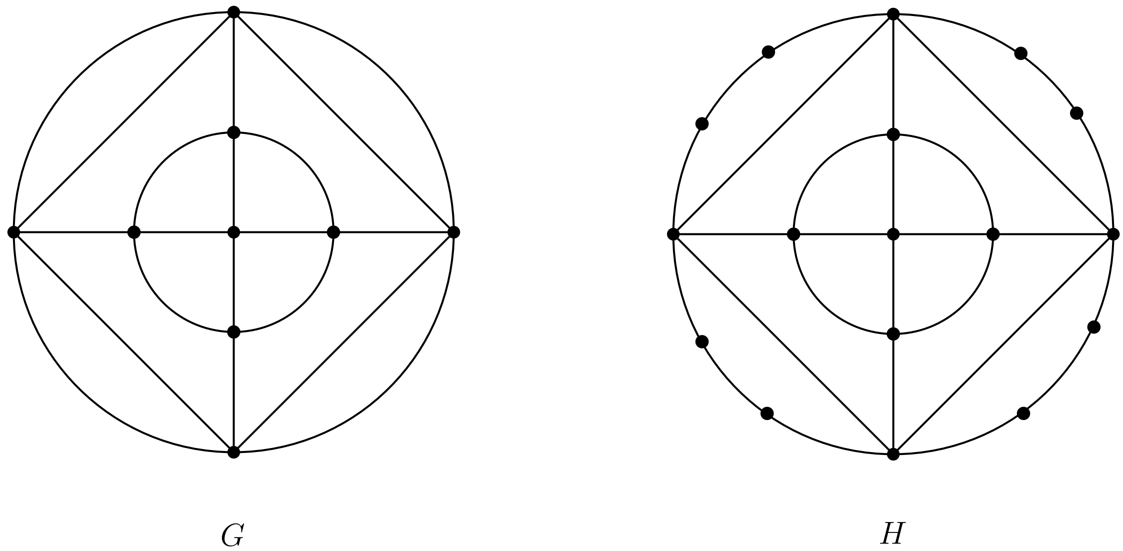


Figura 4.2: Multigrafo G e um grafo simples H

O circuito C_3 forma o ciclo mais externo;

O circuito C_2 está inteiramente contido no interior de C_3;

O circuito C_1 está inteiramente contido no interior de C_2;

Nenhum vértice é compartilhado entre dois circuitos distintos.

Nesse caso, a sequência

$$C_1, C_2, C_3$$

é uma sequência aninhada de circuitos em M, pois:

Os circuitos são disjuntos em vértices;

Cada circuito está aninhado dentro do próximo na ordem da sequência, conforme exigido pela definição.

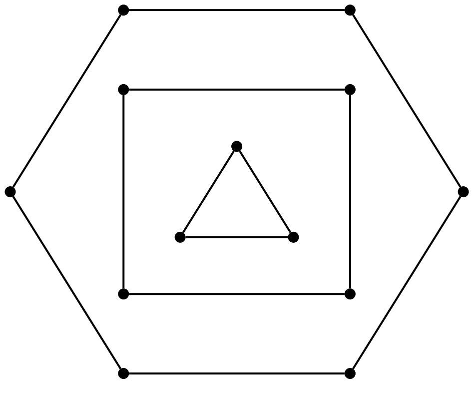


Figura 4.3: Sequência aninhada.

Definição 4.1.12. Seja d um número inteiro. Definimos uma $d-$*casca* de M como a sequência aninhada $C_1, \ldots, C_d$ de circuitos de M tal que:

(P1) Todo vértice de G está em um dos circuitos $V(C_1), \ldots, V(C_d)$ ou está completamente contido em C_d;

(P2) Para $1 \leq j \leq d$, toda aresta de G que conecta dois vértices em $V(C_j)$ está em $E(C_j)$.

Teorema 4.1.13. Seja G um grafo planar simples de raio $\leq d$, onde $d \geq 0$ é um número inteiro. Então, existe um grafo planar simples G' com um menor isomorfo a G e um desenho M' de G' tal que $\rho(M') \leq d$ e M' possui uma $d-$casca.

Demonstração: Para $d' = 0, 1, \ldots, d$, vamos provar por indução em d' que existe um grafo planar simples G' com um menor isomorfo a G e um desenho M' de G' tal que M' possui uma d'-casca e $\rho(M') \leq d$. Isso é verdadeiro quando $d' = 0$.

Agora, assuma que $0 < d' \leq d$ e assuma a hipótese indutiva de que existe um grafo planar G' com um desenho M' tal que:

(i) G' é simples, G é isomorfo a um menor de G', e $\rho(M') \leq d$.

(ii) M' possui uma $(d'-1)$-casca $C_1, \ldots, C_{d'-1}$.

Seja H o grafo obtido a partir de G' removendo os vértices em $V(C_1), \ldots, V(C_{d'-1})$ e as arestas incidentes a eles; e seja N o desenho de H obtido a partir de M' pela mesma remoção. Podemos assumir que:

(iii) Pelo menos três vértices de H estão na região infinita de N.

Se não for o caso, podemos adicionar vértices isolados a G' e a M' para tornar (iii) verdadeiro sem invalidar (i) ou (ii). Também podemos assumir que:

(iv) Cada vértice de H é adjacente a, no máximo, um vértice de $C_{d'-1}$.

Podemos substituir cada aresta de G' que conecta $V(H)$ e $V(C_{d'-1})$ por duas arestas em série, tornando assim (iv) verdadeiro sem invalidar (i), (ii) ou (iii).

Seja $|V(H)| = k$. Também podemos assumir que:

(v) $|E(H)|$ é máximo, sujeito a (i)–(iv) e a $|V(H)| = k$.

Isso é possível porque G' é obrigado a ser simples e $|V(H)|$ é fixo.

Seja $C_{d'}$ o subgrafo de H que consiste nos vértices e arestas incidentes à região infinita de N.

(1) $C_{d'}$ é conexo.

Caso contrário, segue-se de (P2) aplicado a $C_{d'-1}$ que existem vértices v_1, v_2 de $C_{d'}$ em componentes diferentes de $C_{d'}$ e, portanto, de H, mas incidentes na mesma região de M'. Adicionamos uma aresta que os une. O grafo resultante ainda satisfaz (i)–(iv), contrariando (v).

(2) $C_{d'}$ é um circuito.

Pois $C_{d'}$ tem pelo menos três vértices por (iii). Se não for um circuito, tem um vértice v tal que $C_{d'} \setminus \{v\}$ é desconexo e, portanto, $H \setminus \{v\}$ é desconexo. Seja D o conjunto de vértices de um componente de $C_{d'} \setminus \{v\}$, e seja

$$D' = V(C_{d'}) - (D \cup \{v\}).$$

Seja $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1}(= v_1)$ o caminho fechado em H que é o perímetro da região infinita de N. Existem i, j distintos com $1 \leq i, j \leq k$, tais que $v_i = v_j = v$, e $v_{i-1}, v_{j+1} \in D$, e $v_{i+1}, v_{j-1} \in D'$ (onde v_0 é v_k; similarmente e_{k+i} será e_i, e e_0 será e_k).

Agora, de acordo com (iv), há no máximo uma aresta de G' incidente a v que não está em $E(H)$; e assim, sem perda de generalidade, assumimos que existe uma região R de M' para a qual o caminho $v_{i-1}, e_{i-1}, v, e_i, v_{i+1}$ faz parte do perímetro, e para a qual:

(a) se $d' = 1$, R é a região infinita de M';

(b) se $d' > 1$, R é incidente a um vértice em $C_{d'-1}$.

Adicionamos uma nova aresta e a G' unindo v_{i-1} e v_{i+1} e fazemos a extensão correspondente em M'. Assim, R é dividida em duas regiões: uma incidente a v_{i-1}, e, v_{i+1}, sendo:

(a) a região infinita se $d' = 1$;

(b) incidente a um vértice de $C_{d'-1}$ se $d' > 1$;

e a outra é um triângulo limitado por $v_{i-1}, e_{i-1}, v, e_i, v_{i+1}, e$.

Afirmamos que esse grafo ampliado satisfaz diretamente (i)–(iv), mas contraria (v).

Substituímos cada aresta de G' que une dois vértices de $V(C_{d'})$, mas que não está em $E(C_{d'})$, por duas arestas em série. O grafo assim obtido é um grafo planar simples com um menor isomorfo a G, e o desenho obtido dele possui uma d'-casca e raio $\leq d$. ■

Definição 4.1.14. Seja $r \geq 0$ e $s > 0$ inteiros. O *cilindro* $r \times s$ é o grafo com r linhas radiais e s círculos.

Exemplo 4.1.15. O grafo mostrado na Figura (4.4) é um cilindro 8×5, 8 linhas radiais e 5 círculos.

Os circuitos circulares são ditos círculos do cilindro, e o mais interno é chamado de *círculo central*.

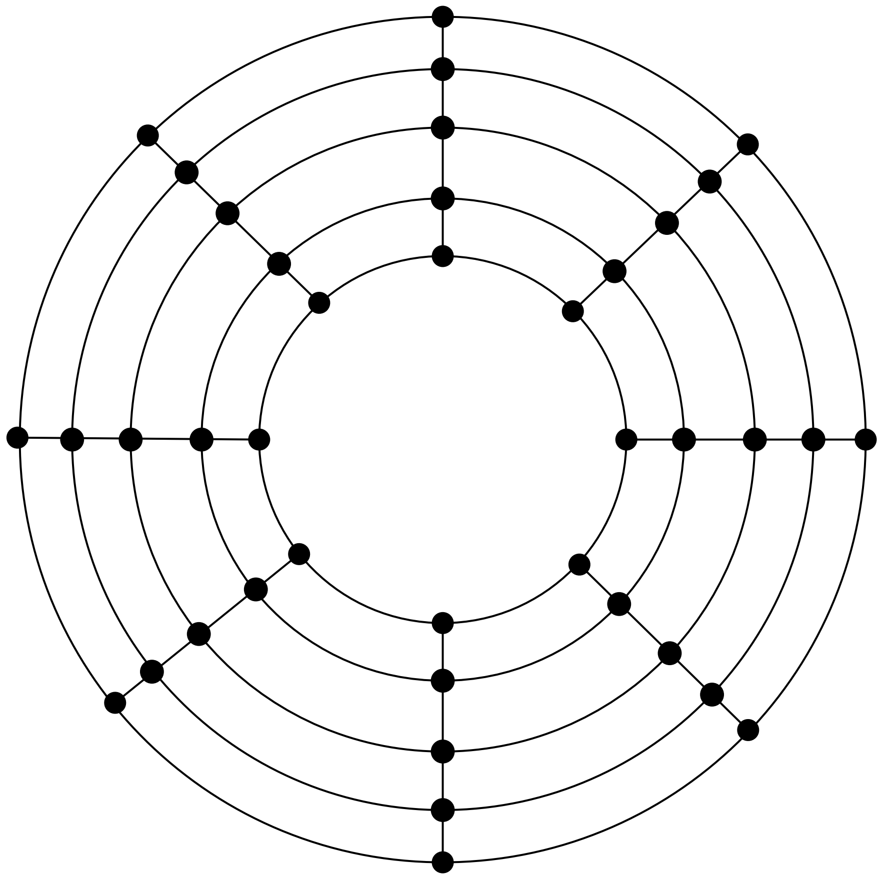


Figura 4.4:

Definição 4.1.16. Seja $\lambda \geq 1$ um número inteiro. Definimos o grafo Y_λ como uma árvore construída recursivamente, conforme ilustrado na Figura (4.5).

Essa árvore possui, ao final de sua construção, exatamente:

$$3 \cdot 2^{\lambda-1}$$

vértices finais, correspondentes ao nível λ da ramificação.

Definição 4.1.17. Sejam $d, \lambda \geq 1$ inteiros. Consideramos o cilindro $3 \cdot 2^{\lambda-1} \times d$, composto por d círculos rotulados, em ordem, como:

$$C_1, C_2, \ldots, C_d,$$

sendo C_1 o círculo central.

Identificamos os vértices do círculo C_1 com os vértices terminais da árvore Y_λ, respeitando a ordem cíclica fornecida pelo desenho na Figura (4.5).

O grafo obtido dessa construção é denominado:

$$N(d, \lambda).$$

A notação também é estendida para $d = 0$, definindo:

$$N(0, \lambda) := Y_\lambda.$$

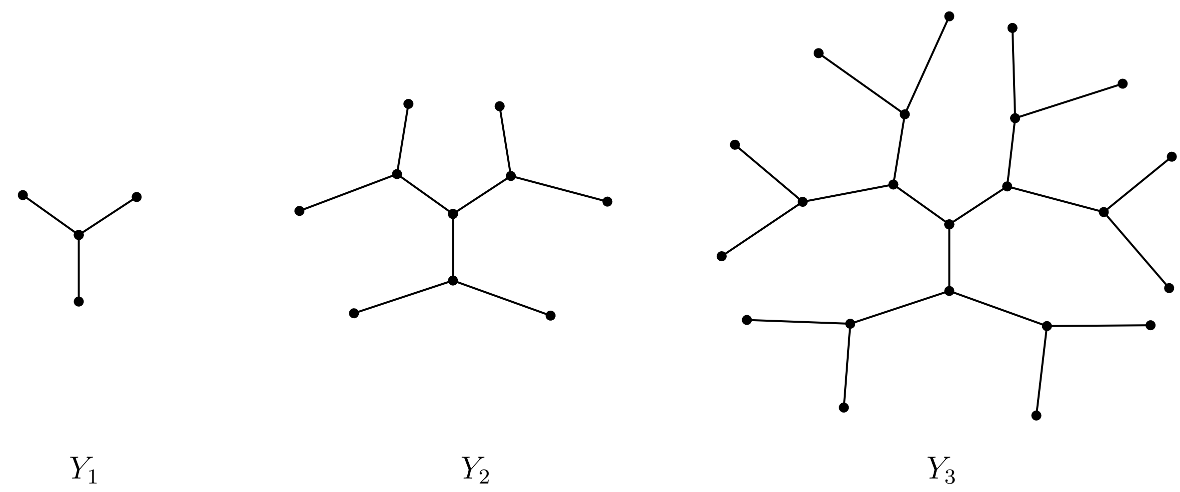


Figura 4.5:

Veja um exemplo ilustrado na Figura (4.5).

Lema 4.1.18. Toda floresta é isomorfa a um menor de algum grafo Y_λ para algum $\lambda \geq 1$.

Demonstração: Seja F uma floresta com componentes conexas $T_1, T_2, \cdots, T_n$. Note que T_i é uma árvore, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$.

Suponha que T_i possua vértices com grau > 3. Criaremos a seguinte operação de transformação:

Identificar o conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que cada vértice $v \in V'$ possui $d(v) > 3$.

Para cada vértice $v \in V'$, criar novos vértices $v_1, v_2, \cdots, v_k$, onde $k = d(v) - 2$. Esses novos vértices irão receber os vértices adjacentes a v de forma equilibrada.

Criar arestas $vv_1, vv_2, \cdots, vv_k$ para conectar os novos vértices $v_1, v_2, \cdots, v_k$ ao vértice original.

Repetindo a operação de transformação para cada T_i, ao final teremos todas as componentes conexas com o grau de seus vértices igual a 3, exceto os vértices folha.

Agora, adicione um vértice isolado x em F e crie uma aresta entre cada componente conexa e x. Caso $d(x) > 3$, basta repetir a operação de transformação para x.

Feito isso, teremos uma árvore isomorfa a um subgrafo de Y_λ. ∎

Definição 4.1.19. Seja M um desenho planar de um grafo G. Uma *d-casca* de M é uma sequência aninhada de circuitos $C_1, C_2, \ldots, C_d$ que satisfazem as seguintes condições:

(S1) Todo vértice de G está em algum dos circuitos C_i ($1 \leq i \leq d$) ou está no interior do circuito mais interno C_d;

(S2) Para todo $1 \leq j \leq d$, qualquer aresta de G cujos extremos pertencem a $V(C_j)$ está contida em $E(C_j)$.

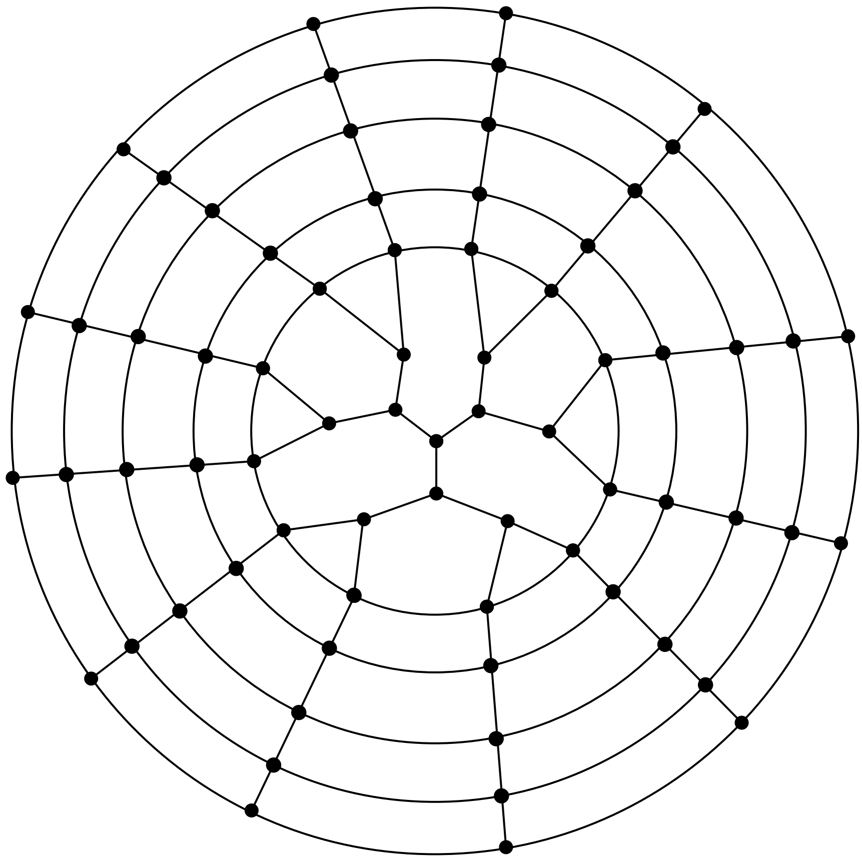


Figura 4.6:

Teorema 4.1.20. Seja G um grafo planar simples, com um desenho M tal que $\rho(M) \leq d$ e M possui um d-casca $C_1, \ldots, C_d$. Então G é isomorfo a um menor de $N(d, \lambda)$ para algum λ suficientemente grande.

Demonstração: Observamos que o grafo obtido de G ao excluir $V(C_1), \ldots, V(C_d)$ é uma floresta, uma vez que se o desenho correspondente tivesse uma região finita R, teríamos $d(R) > d$ em M, o que é impossível. Mas qualquer floresta é isomorfa a um subgrafo de Y_λ para $\lambda = 1, 2, \ldots$, pelo lema 2.1.1. ■

Corolário 4.1.21. Se G é um grafo planar com raio $\leq d$, então G é isomorfo a um menor de $N(d, \lambda)$ para algum λ suficientemente grande.

Teorema 4.1.22. Para todo $d \geq 0$ e $\lambda \geq 1$, o grafo $N(d, \lambda)$ tem largura em árvoremenor ou igual a $3d + 1$.

Demonstração: Se $d = 0$, o resultado é claro, e assumimos $d > 0$. Construímos uma decomposição em árvore de $N(d, \lambda)$ da seguinte forma:

Seja T a árvore obtida de $N(d, \lambda)$ excluindo o cilindro $3 \cdot 2^{\lambda-1} \times d$, e seja C o círculo central do cilindro.

Para cada vértice u de C, seja P_u o conjunto de todos os vértices na mesma linha radial que u. Então $|P_u| = d$.

Seja t um vértice de T. Agora, t está precisamente em três regiões R_1, R_2, R_3 (tomando um desenho M de $N(d,\lambda)$ como na Figura (4.1)).

Para $j = 1, 2, 3$, há dois vértices u_j, v_j de C em R_j que são adjacentes.

Defina

$$V_t = P_{v_1} \cup P_{v_2} \cup P_{v_3} \cup \{t, t'\},$$

onde $t' = t$ se t é o centro de T, e t' é o vizinho de t mais próximo do centro se t não é o centro de T.

Verificamos agora que $(T, \{V_t\}_{t\in V(T)})$ é uma decomposição em árvore de largura $\leq 3d+1$:

(i) Cada vértice de $N(d,\lambda)$ aparece em algum conjunto V_t, pois todo vértice está contido em uma linha radial P_u, ou pertence a T, e portanto está em algum V_t.

(ii) Para toda aresta $\{u,v\} \in E(N(d,\lambda))$, existe $t \in V(T)$ tal que $\{u,v\} \subseteq V_t$: As regiões R_1, R_2, R_3 cobrem todos os vértices, e as arestas entre linhas radiais e vértices de T são cobertas pelos conjuntos V_t adequados.

(iii) Para cada vértice $v \in V(N(d,\lambda))$, o conjunto $\{t \in V(T) : v \in V_t\}$ forma uma subárvore de T, pois os vértices de cada linha radial aparecem em conjuntos V_t consecutivos ao longo da estrutura de T.

(iv) O tamanho máximo de qualquer V_t é:

$$|V_t| \leq |P_{v_1}| + |P_{v_2}| + |P_{v_3}| + 2 = 3d + 2,$$

portanto a largura da decomposição é $(3d+2) - 1 = 3d + 1$.

Isso completa a prova. ■

Corolário 4.1.23. Se G' é isomorfo a um menor de G, então a largura em árvore de G' não é maior que a largura em árvore de G.

Teorema 4.1.24. Se G é planar e tem raio menor ou igual a d, então sua largura em árvore é no máximo $3d + 1$.

Demonstração: A demonstração segue direta dos teoremas (4.1.13), (4.1.20) e (4.1.22). ■

Teorema 4.1.25. Seja G um grafo planar com raio maior ou igual a d, e seja M um desenho de G. Então existe uma sequência aninhada $C_1, C_2, \ldots, C_d$ de circuitos de M.

Demonstração: Seja $v_0 \in V(G)$ um vértice central de G, ou seja, um vértice tal que a maior distância de v_0 até qualquer outro vértice de G é igual ao raio de G.

Como o raio de G é pelo menos d, para cada $1 \leq i \leq d$ existe pelo menos um vértice a distância i de v_0.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, d$, considere o subgrafo induzido pelos vértices a distância i de v_0. Este conjunto de vértices pode ser conectado no plano por caminhos curtos que respeitam a planaridade, formando um ciclo ou uma união de ciclos.

Como G é planar e está desenhado no plano (desenho M), podemos construir para cada camada i um circuito simples C_i que separa v_0 dos vértices a distância maior que i.

Usando a planaridade, garantimos que:

Cada circuito C_i é um ciclo fechado no desenho M;

O circuito C_{i+1} está completamente contido na região delimitada por C_i no plano.

Portanto, obtemos uma sequência aninhada de circuitos $C_1, C_2, \ldots, C_d$. ■

4.2 União de Ramos

Nosso objetivo nesta seção é introduzir a União de Ramos de dois grafos G_1 e G_2, e provar que a largura em árvore da união é o máximo das larguras das árvores de G_1 e G_2.

Definição 4.2.1. Seja (T, V) uma decomposição em árvore de G. Para cada $t \in V(T)$, as componentes conexas de $T \setminus t$ são ditas *ramos* da árvore T no nó t.

Exemplo 4.2.2. Na Figura (4.7), temos (T, V) uma decomposição em árvore de um grafo G. Note que, ao fazermos $T \setminus 4$ obtemos 4 ramos da árvore T no nó 4.

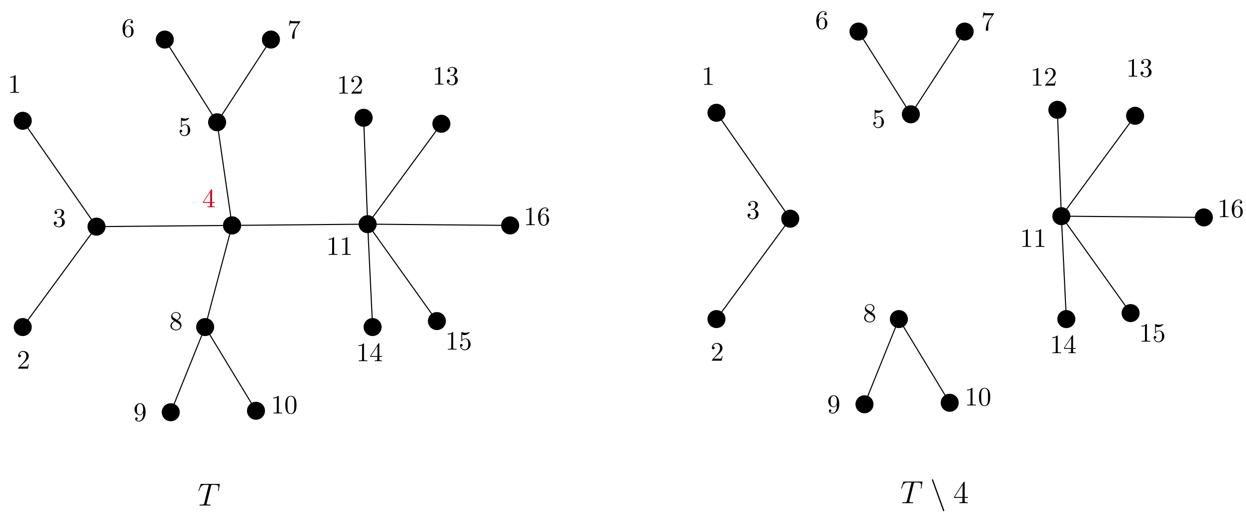


Figura 4.7: Árvore T e os ramos de $T \setminus 4$.

Lema 4.2.3. Para $t \in V(T)$ e $v \in V(G)$, ou $v \in V_t$, ou há um ramo de T em t que contém todos os $t' \in V(T)$ com $v \in V_{t'}$.

Demonstração: Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer de G. Vamos mostrar que uma das duas possibilidades deve ser verdadeira:

$v \in V_t$ para algum $t \in V(T)$:

Suponha que $v \in V_{t_1}$ e $v \in V_{t_2}$ para algum $t_1, t_2 \in V(T)$. Como T é uma árvore, existe um único caminho entre t_1 e t_2. Portanto, todo vértice t nesse caminho deve ter $v \in V_t$, pois a propriedade de árvore de decomposição garante que os conjuntos V_t formam um recobrimento dos vértices de G.

Há um único ramo de T em t que contém todos os $t' \in V(T)$ com $v \in V_{t'}$:

Suponha que $v \in V_{t_1}$ e $v \in V_{t_2}$, mas t_1 e t_2 não estão no mesmo ramo de T. Então, pela propriedade de árvore de decomposição, deve haver um vértice $t_0 \in V(T)$ que está no caminho único entre t_1 e t_2 tal que $v \in V_{t_0}$.

Portanto, existe um único ramo de T que contém todos os vértices t' com $v \in V_{t'}$. ■

Se $v \notin V_t$, denotamos esse ramo por $T_t(v)$.

Lema 4.2.4. Se $v, v' \in V_t$ e v é adjacente a v' em G, então:

$$T_t(v) = T_t(v').$$

Demonstração: Pela condição (C2) da definição 3.1.2, existe $t' \in V(T)$ tal que $v, v' \in V_{t'}$. Como $t' \neq t$, temos que t' pertence a algum ramo B da árvore T em t.

Como $v \in V_{t'}$, segue que $B = T_t(v)$. Analogamente, $v' \in V_{t'}$ implica que $B = T_t(v')$. Logo,

$$T_t(v) = T_t(v').$$

■

Lema 4.2.5. Sejam $v, v' \notin V_t$ e suponha que v e v' não são separados por V_t em G. Então:

$$T_t(v) = T_t(v').$$

Demonstração: Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ uma sequência de vértices de G, todos fora de V_t, tal que $v_1 = v$, $v_k = v'$, e cada v_i é adjacente a v_{i+1}.

Pelo lema 4.2.4, cada par adjacente da sequência satisfaz:

$$T_t(v_i) = T_t(v_{i+1}) \quad \text{para todo } 1 \leq i < k.$$

Portanto,

$$T_t(v) = T_t(v_1) = T_t(v_2) = \cdots = T_t(v_k) = T_t(v').$$

■

Teorema 4.2.6. Seja e uma aresta da árvore T com extremidades t e t'.

Sejam N e N' os conjuntos de nós dos dois componentes conexos da floresta $T \setminus e$, contendo respectivamente t e t'. Então, o conjunto de vértices:

$$V_t \cap V_{t'}$$

separa os conjuntos:

$$\bigcup_{n \in N} V_n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in N'} V_n$$

no grafo G.

Demonstração: Suponha, por contradição, que $V_t \cap V_{t'}$ não separa os conjuntos

$$\bigcup_{n \in N} V_n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in N'} V_n.$$

Então, existe um par de vértices $v \in \bigcup_{n \in N} V_n$ e $v' \in \bigcup_{n' \in N'} V_{n'}$, ambos fora de $V_t \cap V_{t'}$, tal que:

ou $v = v'$,

ou v e v' são adjacentes em G.

Pelo item (C2) da definição 3.1.2, existe um nó $t'' \in V(T)$ tal que $v, v' \in V_{t''}$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que $t'' \in N'$. Como $v \in V_n$ com $n \in N$, e $v \in V_{t''}$, segue pelo item (C3) que todos os nós entre n e t'' em T (inclusive t e t') contêm v.
Em particular, temos:

$$v \in V_t \cap V_{t'}.$$

Mas isso contradiz a suposição de que $v \notin V_t \cap V_{t'}$.
Portanto, $V_t \cap V_{t'}$ separa os conjuntos desejados. ■

Teorema 4.2.7. Seja $|V(T)| \geq 2$, e para cada $t \in V(T)$, seja G_t um subgrafo conexo de G tal que:

$$V(G_t) \cap V_t = \emptyset.$$

Então, existem vértices $t, t' \in V(T)$, adjacentes em T, tais que:

$$V_t \cap V_{t'} \quad \text{separa os conjuntos} \quad V(G_t) \quad \text{e} \quad V(G_{t'}) \quad \text{em } G.$$

Demonstração: Para cada $t \in V(T)$, seja B_t um ramo de T em t de modo que $T_t(v) = B_t$ para todo $v \in V(G_t)$.

Isso é possível pelo lema 4.2.5. Usa-se o fato de que $|V(T)| \geq 2$ para garantir que T tem um ramo em t.

Seja e_t a aresta de T ligando t a um vértice de B_t. Agora, T tem menos arestas do que vértices, e portanto existem vértices distintos $t, t' \in V(T)$ com $e_t = e_{t'}$. Então t e t' são adjacentes em T.

Sejam V e V' os conjuntos de vértices das duas componentes conexas do grafo $T \setminus e_t$, com:

$$t \in V \quad \text{e} \quad t' \in V'.$$

Então, temos as igualdades:

$$V = V(B_t) \quad \text{e} \quad V' = V(B_{t'}),$$

e as seguintes inclusões sobre os subgrafos:

$$V(G_t) \subseteq \bigcup_{n \in V'} V_n, \qquad V(G_{t'}) \subseteq \bigcup_{n \in V} V_n.$$

O resultado segue do teorema 4.2.6. ■

Definição 4.2.8. Seja $G = (V, E)$ um grafo, e seja

$$P = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$$

um conjunto de caminhos em G.

Dizemos que P é um conjunto de caminhos *vértice-disjuntos* se, para quaisquer índices $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, com $i \neq j$, os conjuntos de vértices dos caminhos P_i e P_j são disjuntos, isto é:

$$V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset.$$

Seja S o cilindro $r \times s$, onde $r < 2s$, e seja $C_1, \ldots, C_s$ seus círculos em ordem, onde C_1 é o círculo central.

Teorema 4.2.9. Seja $X \subseteq V(S)$ um subconjunto de vértices, tal que:

$$|X \cap V(C_j)| \geq 2 \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \ldots, s\}.$$

Então, existem r caminhos em S, mutuamente *vértice-disjuntos*, cada um com extremidades em X e $V(C_s)$.

Demonstração: Pelo teorema de Menger (1.1.16), basta mostrar que se $Y \subseteq V(S)$ e $|Y| < r$, existe um caminho de S entre X e $V(C_s)$ que evita Y.

Então, seja $Y \subseteq V(S)$, com $|Y| < r$. Agora, como $r < 2s$, existe j com $1 \leq j \leq s$ tal que $|V(C_j) \cap Y| \leq 1$.

Escolha $v \in V(C_j)$ tal que $V(C_j) \cap Y \subseteq \{v\}$. Então $V(C_j) - \{v\}$ não contém nenhum vértice de Y. No entanto, ele contém um vértice de X, uma vez que $|V(C_j) \cap X| \geq 2$.

Seja L o conjunto de vértices em uma linha radial de S tal que $L \cap Y = \emptyset$. Isso é possível, pois S tem r linhas radiais e $|Y| < r$.

Então, $L \cup (V(C_j) - \{v\})$ é um subconjunto de $V(S) - Y$ e induz um subgrafo de S que contém um caminho de S entre X e C, evitando Y. ∎

Teorema 4.2.10. Seja $(T, \mathcal{V})$ uma decomposição em árvore de S, onde $\mathcal{V} = (V_t : t \in V(T))$. Então existem $t_0 \in V(T)$ e r caminhos disjuntos por vértices de S, cada um entre V_{t_0} e C_s.

Demonstração: Sejam os conjuntos de vértices das linhas radiais de S: $L_1, \ldots, L_r$.

Se algum $t \in V(T)$ tem $V_t \cap L_i \neq \emptyset$ para todo i $(1 \leq i \leq r)$, o teorema é verdadeiro.

Supondo então que, para cada $t \in V(T)$, existe i com $1 \leq i \leq r$ tal que $V_t \cap L_i = \emptyset$.

Pelo teorema 4.2.7, existem $t, t' \in V(T)$, adjacentes em T, tais que $V_t \cap V_{t'}$ separa L_i e $L_{i'}$ para algum i, i' com $1 \leq i, i' \leq r$, e $V_t \cap V_{t'}$ não intersecta nem L_i, nem $L_{i'}$.

Claramente $i \neq i'$, e para $1 \leq j \leq k$, os dois caminhos em C_j de L_i para $L_{i'}$ se encontram em $V_t \cap V_{t'}$, e assim $|V_t \cap V(C_j)| > 2$ $(1 \leq j \leq s)$.

O resultado segue do teorema 4.2.9. ∎

Teorema 4.2.11. Com $S, C_1, \ldots, C_s$ como antes, seja $V(C_s) = \{u_1, \ldots, u_r\}$. Seja H outro grafo, disjunto por vértices de S, e sejam $v_1, \ldots, v_r$ vértices distintos de H. Construa G fazendo as identificações $u_1 = v_1, \ldots, u_r = v_r$. Se G tem largura em árvore $\leq w$, então H tem uma decomposição em árvore $(T, \mathcal{V})$ onde $\mathcal{V} = (V_t : t \in V(T))$, de largura $\leq$ tal que $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V_{t_0}$ para algum $t_0 \in V(T)$.

Demonstração: Seja $(T, \mathcal{V}_1)$ uma decomposição em árvore de G de largura $\leq w$, onde $\mathcal{V}_1 = (Y_t : t \in V(T))$. Defina

$$\mathcal{V}_2 = (Y_t \cap V(S) : t \in V(T)).$$

Claramente $(T, \mathcal{V}_2)$ é uma decomposição em árvore de S, e assim pelo teorema 4.2.10 existe $t_0 \in V(T)$ e caminhos disjuntos por vértices $P_1, \ldots, P_r$ de S, cada um entre $Y_{t_0} \cap V(S)$ e $\{u_1, \ldots, u_r\}$. Ordene-os de forma que para $1 \leq i \leq r$, u_i seja o vértice terminal de P_i. Para $t \in V(T)$, defina

$$V_t = (Y_t \cap V(H)) \cup \{v_i : 1 \leq i \leq r, Y_t \cap V(P_i) \neq \emptyset\}.$$

e $\mathcal{V} = (V_t : t \in V(T))$. Afirmamos que $(T, \mathcal{V})$ é uma decomposição em árvore de H. Pois suponha que $t, t', t'' \in V(T)$, e t' está no caminho de T entre t e t'', e suponha que $v \in V_t, V_{t''}$. Devemos mostrar que $v \in V_{t'}$. Agora se $v \neq v_1, \ldots, v_r$ então $v \in Y_t \cap Y_{t''} \subseteq Y_{t'}$, e assim $v \in V_{t'}$. Se $v = v_i$, então $Y_t \cap V(P_i) \neq \emptyset$ e $Y_{t''} \cap V(P_i) \neq \emptyset$. Mas $Y_{t'}$ separa Y_t e $Y_{t''}$ em G pelo teorema 4.2.5, e assim $Y_{t'} \cap V(P_i) \neq \emptyset$ e novamente $v \in X_{t'}$. Portanto $(T, \mathcal{V})$ é uma decomposição em árvore de H. E tem largura $\leq w$, e

$$\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V_{t_0}$$

. ■

Se H é um menor de G, então cada vértice u de H é formado escolhendo um subconjunto não vazio $Z_u \subset V(G)$ e identificando os vértices em Z_u por meio de contração. Se $v \in Z_u$, escrevemos $v \to u$.

Seja (H_1, H_2) uma separação de G, $r = |V(H_1) \cap V(H_2)|$ e s o menor inteiro tal que $2s > r$. Sejam S_1 e S_2 grafos, ambos isomorfos ao cilindro $r \times s$, e seja o conjunto de vértices dos círculos centrais de S_1 e S_2 $\{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\{u'_1, \ldots, u'_r\}$, respectivamente, em ordem. Suponha que S_1 é um menor próprio de H_1, onde $u_i \to u'_i$ $(1 \leq i \leq r)$, e S_2 é um menor próprio de H_2, onde $u_i \to u'_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

Definição 4.2.12. Defina G_1 como sendo o grafo obtido de H_1 e S_1 fazendo as identificações $u_i = u'_i$ $(1 \leq i \leq r)$, e G_2 o grafo obtido de H_2 e S_2 fazendo as mesmas identificações. Dizemos que G é a *união de manga* de G_1 e G_2.

O seguinte resultado é imediato da construção da definição de união de manga.

Lema 4.2.13. Se G é a união de manga de G_1 e G_2, então G_1 e G_2 são ambos isomorfos a menores próprios de G.

Teorema 4.2.14. Se G é a união de manga de G_1 e G_2, então a largura em árvore máxima de G é o máximo das larguras de árvore de G_1 e G_2.

Demonstração:
Seja w o máximo das larguras das árvores de G_1, G_2. Pelo lema 4.2.13 e pelo Corolário 4.1.23, a largura em árvore de G é pelo menos w. Devemos provar a desigualdade inversa.

Como G_1 tem largura em árvore $\leq w$, então, pelo lema 4.2.11, H_1 possui uma decomposição em árvore $(T_1, \mathcal{V}_1)$ de largura $\leq w$, onde $\mathcal{V} = (V_t : t \in V(T_1))$, de modo que

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V_{t_1} \quad \text{para algum } t_1 \in V(T_1).$$

Defina T_2, $\mathcal{V}$, t_2 de forma semelhante para H_2, arranjado de modo que T_1 e T_2 sejam disjuntos.

Seja T a árvore construída a partir de T_1 e T_2, adicionando uma aresta que une t_1 e t_2. Coloque $\mathcal{V} = (V_t : t \in V(T))$.

Construído dessa forma, $(T, \mathcal{V})$ é uma decomposição em árvore para G de largura $\leq w$.
■

4.3 Construção de Cilindros

Nesta seção mostraremos que para qualquer grafo planar H, existe um número w tal que todos os grafos planos que não contêm subgrafos isomorfos a H têm uma largura em árvore que não ultrapassa w. Este resultado se encontra no artigo "Menores de grafos. III. largura em árvore em grafos planares"de Neil Robertson e Paul Seymour [15].

Definição 4.3.1. Seja $r \geq 0$, $s \leq 1$ números inteiros, e seja M um desenho de um grafo planar G. M *domina* o cilindro $r \times s$ se ho {u,v}er uma sequência aninhada $C_1, \ldots, C_s$ de circuitos de M e caminhos $P_1, \ldots, P_r$ vértice-disjunto de G, cada um entre $V(C_1)$ e $V(C_s)$, tal que para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, $P_i \cap C_j$ é um caminho.

O seguinte teorema utiliza a definição anterior para estabelecer uma condição necessária e suficiente que garante que o desenho do grafo G domine o cilindro $r \times s$.

Teorema 4.3.2. Seja $r \geq 0$, $s \geq 1$ números inteiros, e seja M um desenho de um grafo planar G. Suponha que exista uma sequência aninhada $C_1, \ldots, C_s$ de circuitos de M tal que exista r caminhos vértice-disjunto de G, cada um entre $V(C_1)$ e $V(C_s)$. Então M domina o cilindro $r \times s$.

Demonstração: Seja G um grafo, e $C_1, C_2, \ldots, C_r$ uma sequência aninhada de circuitos em G. Seja $P_1, P_2, \ldots, P_s$ um conjunto de caminhos vértice-disjuntos entre $V(C_1)$ e $V(C_s)$.

Escolhemos $C_1, \ldots, C_r, P_1, \ldots, P_s$ de modo que

$$|E(C_1 \cup \ldots \cup C_s \cup P_1 \cup \ldots \cup P_r)|$$

seja mínimo.

Vamos mostrar que para todo $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, $P_i \cap C_j$ é um caminho.

Suponhamos que $P_i \cap C_1$ não é um caminho para algum i, digamos $i = 1$. Seja e a primeira aresta de P_i não pertencente a C_1. Então existe um subcaminho de P_1 (digamos P_1') entre C_1 e C_s que não usa a aresta e.

Mas então e não pertence a nenhum dos $C_1, \ldots, C_s, P_1', P_2, \ldots, P_r$, contradizendo a minimalidade de

$$|E(C_1 \cup \ldots \cup C_s \cup P_1 \cup \ldots \cup P_r)|.$$

Logo, $P_i \cap C_j$ é um caminho para todo i com $1 \leq i \leq r$.

Suponha que existe algum j ($1 \leq j \leq s$) tal que $P_i \cap C_j$ não é um caminho para algum i. Escolha o menor j possível com essa propriedade. Sabemos que $C_j \cap P_i$ é um caminho para cada i ($1 \leq i \leq r$).

Como $P_i \cap C_j$ não é um caminho para algum i, isso significa que j não pode ser o menor valor, que é 1. Portanto, $j > 1$.

Além disso, $j \neq s$, pois isso contradiz a hipótese de que P_i é um caminho entre $V(C_1)$ e $V(C_s)$. Assim, $2 \leq j \leq s-1$.

Suponha que, para algum i ($1 < i < r$), existam dois vértices distintos v e v' de $P_i \cap C_j$, de modo que todas as arestas e todos os vértices interiores do subcaminho de P_i entre v e v' estejam fora de C_j. Seja este subcaminho P.

Nenhum vértice interior de P está em $V(C_{j'})$ para qualquer j' com $1 < j' < s$; pois todos estão fora de C_j, e nenhum está em C_{j-1}, pela minimalidade de j. Sejam os subcaminhos de C_j entre v e v' os caminhos Q_1 e Q_2.

Então $P \cup Q_1$ e $P \cup Q_2$ são circuitos vértice-disjuntos de todos os $C_{j'}$ ($1 < j' < s$, $j' \neq j$). Agora, C_{j+1} está dentro de um deles, digamos $P \cup Q_1$. Mas então $C_1, \ldots, C_{j-1}, P \cup Q_1, C_{j+1}, \ldots, C_s$ é uma sequência aninhada de circuitos, contrariando a minimalidade de

$$|E(C_1 \cup \ldots \cup C_s \cup P_1 \cup \ldots \cup P_r)|,$$

pois alguma aresta de Q_2 não está em nenhum dos $P_1, \ldots, P_r$.

Portanto, não existe tal valor de i.

Isso implica que, para cada vértice v de C_j, se $v \in P_i$ com $1 < i < r$, então existe um subcaminho de P_i entre v e C_s que não usa nenhuma aresta fora de C_j.

Pela escolha de j, existe algum i ($1 < i < r$) tal que $P_i \cap C_j$ não é um caminho; então existem vértices distintos v e v' de $P_i \cap C_j$ tal que todas as arestas e todos os vértices interiores do subcaminho de P_i entre v e v' estão dentro de C_j.

Seja este subcaminho P, e sejam Q_1 e Q_2 os caminhos de C_j entre v e v'. Agora, $P_i \cap C_s$ é um caminho; logo, P não encontra C_s.

Não há caminho em G entre $V(Q_1)$ e $V(Q_2)$ que evite $V(P)$ e use apenas arestas dentro de C_j. A partir desses dois fatos, segue-se que, para um dos Q_1 ou Q_2, digamos Q_k:

Pelo fato de que, para cada vértice $v \in C_j$, se $v \in P_i$ com $1 < i < r$, existe um subcaminho de P_i entre v e C_s sem usar arestas fora de C_j, então nenhum vértice de Q_k está em qualquer $P_{i'}$ com $1 < i' < r$, $i' \neq i$.

Seja P' o subgrafo de G obtido de $P_i \cup Q_k$, eliminando as arestas e vértices interiores de P. Então P' contém um caminho entre C_1 e C_s, digamos P_i', e $P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i', P_{i+1}, \ldots, P_r$ são vértice-disjuntos.

Mas isso contradiz a minimalidade de (1), pois a primeira aresta de P não está em nenhum de $C_1, \ldots, C_s$. Portanto, a escolha de j é impossível. ∎

Lema 4.3.3. Sejam $r \geq 0$ e $s \geq 1$ inteiros, e seja M um desenho do grafo planar G. Sejam $C_1, \ldots, C_s$ uma sequência aninhada de circuitos em M. Então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(i) M domina o cilindro $r \times s$;

(ii) existe $X \subseteq V(G)$ com $|X| < r$ tal que X separa $V(C_1)$ e $V(C_s)$.

Teorema 4.3.4. Sejam $r \geq 0$ um inteiro, e seja $r' = r + 1$ se r é ímpar, e $r' = r$ se r é par. Seja $s > r'$ um inteiro. Seja M um desenho do grafo planar G, e suponha que M majora o cilindro $r \times s$. Então ou M majora o cilindro $(r+1) \times (s - r')$, ou G é exprimível como a união em manga de dois grafos planares.

Demonstração: Sejam $C_1, \ldots, C_s$ uma sequência aninhada de circuitos de M, e sejam $P_1, \ldots, P_r$ caminhos vertex-disjuntos de G, cada um entre $V(C_1)$ e $V(C_s)$, tais que, para $1 < i < r$ e $1 < j < s$, $P_i \cap C_j$ é um caminho.

Ponha $r' = 2d$. Agora, $C_{d+1}, \ldots, C_{s-d}$ é uma sequência aninhada de $s - r'$ circuitos de M. Por (4.2), ou M majora o cilindro $(r+1) \times (s - r')$, ou existe $X \subseteq V(G)$ com $|X| < r$ que separa $V(C_{d+1})$ e $V(C_{s-d})$.

Suponhamos o último caso. Para $1 \leq i \leq r$, seja P_i' o subcaminho de P_i entre $V(C_{d+1})$ e $V(C_{s-d})$, sem vértice interior em $V(C_{d+1})$ ou $V(C_{s-d})$.

Então $X \cap V(P_i') \neq \emptyset$; escolha $v_i \in X \cap V(P_i')$ para $1 \leq i \leq r$. Temos $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq X$ e $|X| < r$, portanto $X = \{v_1, \ldots, v_r\}$.

Seja (H_1, H_2) uma separação de G com $V(H_1) \cap V(H_2) = X$, onde $C_1, \ldots, C_{d+1}$ são circuitos de H_1, e $C_{s-d}, \ldots, C_s$ são circuitos de H_2.

Agora, H_1 tem um menor próprio isomórfico ao cilindro $r \times d$ da maneira requerida para uniões em manga, e o mesmo é verdadeiro para H_2; portanto, G é expresso como a união de manga de dois grafos planares. ■

Teorema 4.3.5. Sejam $r > 0$, $s > 1$ inteiros, e seja M um desenho do grafo planar G. Suponha que G não seja expresso como uma união manga de dois grafos planares e que M não majore o cilindro $r \times s$. Então o raio de G é $< k$, em que

$$k = s + \frac{1}{2}r^2 \quad \text{se } r \text{ é par},$$

$$k = s + \frac{1}{2}(r^2 - 1) \quad \text{se } r \text{ é ímpar}.$$

Demonstração: Procedemos por indução sobre r. Para $r = 0$, o resultado é válido pelo teorema 4.1.25. Suponha agora que $r > 0$. Se r é par, então pelo teorema 4.3.4, M não contém o cilindro $(r-1) \times (s+r)$ como menor. Aplicando a hipótese de indução, o raio de G satisfaz:

$$\text{raio}(G) < s + r + \frac{1}{2}\big((r-1)^2 - 1\big) = s + \frac{1}{2}r^2,$$

Se r é ímpar, então pelo teorema 4.3.4 o desenho M não contém o cilindro $(r-1) \times (s+r)$ como menor. Aplicando a hipótese de indução ao valor $r - 1$ (que é par), obtemos que o raio de G satisfaz

$$\text{raio}(G) \; < \; s + r \; + \; \frac{1}{2}\big((r-1)^2 - 1\big) \; = \; s + \frac{1}{2}\big(r^2 - 1\big),$$

■

Teorema 4.3.6. Sejam $r \geq 0$, $s \geq 1$ inteiros. Se G é um grafo planar que não é expresso como a união de manga de dois grafos planares, então ou G tem um menor isomorfo ao cilindro $r \times s$, ou tem largura em árvore no máximo

(r é par)

$$3(s + \frac{1}{2}r^2) - 2$$

ou

(r é ímpar)

$$3(s + \frac{1}{2}(r^2 - 1)) - 2$$

Demonstração: Tome um desenho M de G. Se M majora o cilindro $r \times s$, então G tem um menor isomorfo ao cilindro $r \times s$. Caso contrário, G tem raio $< k$, onde

$$k = s + \frac{1}{2} \cdot r^2$$

$$= s + \frac{1}{2} \cdot (r^2 - 1)$$

pelo teorema 4.3.5, e o resultado segue do teorema 4.1.24 ■

Teorema 4.3.7. Para todo grafo planar H existe um número $r > 1$ tal que o cilindro $r \times r$ tem um menor isomorfo a H.

Lema 4.3.8. Seja $r \geq 1$ um inteiro. Se G é planar e não tem menor isomorfo ao cilindro $r \times r$, então G tem largura em árvore $\leq \frac{3}{2}(r^2 + 2r) - 2$.

Demonstração: Procedemos por indução sobre o tamanho de G (isto é, $|V(G)| + |E(G)|$).

Suponha que G seja expresso como a união de manga de dois grafos planares G_1, G_2. Então G_1, G_2 são isomorfos a menores próprios de G, pelo lema 4.2.13, e portanto cada um não tem menor isomorfo ao cilindro $r \times r$.

Além disso, os tamanhos de G_1, G_2 são menores que o tamanho de G, e assim, por indução, G_1, G_2 têm largura em árvore $\leq \frac{3}{2}(r^2 + 2r) - 2$.

Portanto, pelo teorema 4.2.14, G tem largura em árvore $< \frac{3}{2}(r^2 + 2r) - 2$.

Podemos, portanto, supor que G não seja expresso como uma união manga de dois grafos planares; mas então o resultado segue do teorema 4.3.6.

Isso completa a prova. ■

O teorema a seguir, mostra que, para qualquer grafo planar H, existe um valor w tal que todo grafo planar que não contém H como menor terá largura em árvore no máximo w.

Teorema 4.3.9. Para todo grafo planar H existe um número w tal que todo grafo planar sem menor isomorfo a H tem largura em árvore $\leq w$.

Demonstração: Pelo teorema 4.3.7, existe um número $r \geq 1$ tal que o cilindro $r \times r$ tem um menor isomorfo a H.

Seja G qualquer grafo planar sem menor isomorfo a H.

Então G certamente não tem menor isomorfo ao cilindro $r \times r$ e, assim, pelo lema 4.3.8, G tem largura em árvore $\leq \frac{3}{2}(r^2 + 2r) - 2$. ■

Ao longo desta dissertação, desenvolvemos um estudo detalhado sobre a estrutura dos grafos planares no contexto da teoria das bem-quase-ordenações. O objetivo central consistiu em apresentar e discutir a caracterização da bem-quase-ordenação para essa classe específica de grafos, ressaltando tanto os fundamentos teóricos que sustentam a noção de BQO quanto as técnicas e resultados que possibilitam compreender sua aplicação em grafos planares.

A principal contribuição deste trabalho foi justamente a consolidação dessa caracterização, que evidencia como a classe dos grafos planares pode ser organizada dentro da estrutura mais ampla da teoria das bem-quase-ordenações. Tal resultado reforça a relevância desta noção na teoria dos grafos e abre espaço para novas investigações que possam explorar, por exemplo, extensões dessa caracterização para subclasses de grafos planares ou para classes mais gerais de grafos.

Referências

[1] Archdeacon, D. "A Kuratowski Theorem for the Projective Plane". Tese de dout. Ohio State University, 1980.

[2] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*, 3540261834. Springer, 2006. ISBN: 9783540261834.

[3] Fiala, Jiri. *Graph minors, decompositions and algorithms*. 2014.

[4] Glover, H., Huneke, P. e Wang, C. S. "103 graphs that are irreducible for the projective plane". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 27 (1979), pp. 332–370.

[5] Higman, G. "Ordering by divisibility in abstract algebras". Em: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2 (1952), pp. 326–336.

[6] Jenkyns, T. A. e Nash-Williams, C. St. J. A. "Counterexamples in the theory of well-quasi-ordered sets". Em: *Proof Techniques in Graph Theory*. Academic Press. 1969, pp. 87–91.

[7] Kruskal, Joseph B. "Well-quasi-ordering, the tree theorem, and Vazsonyi's conjecture". Em: *Transactions of the American mathematical society* 95.2 (1960), pp. 210–225.

[8] Mader, W. "Wohlquasiordnete Klassen endlicher Graphen". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 12 (1972), pp. 105–122.

[9] Menger, Karl. "Zur allgemeinen kurventheorie". Em: *Fundamenta Mathematicae* 10.1 (1927), pp. 96–115.

[10] MONTEIRO, MÍRIAM DE SOUZA. "Um estudo da técnica de decomposição em árvore na resolução de problemas combinatórios". Em: ().

[11] Nash-Williams, C. St. J. A. "On well-quasi-ordering finite trees". Em: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 59 (1963), pp. 833–835.

[12] Nishizeki, Takao e Chiba, Norishige. *Planar graphs: Theory and algorithms*. Vol. 32. Elsevier, 1988.

[13] Prestes, Edson. "Introdução à Teoria dos Grafos". Em: *Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Informática, Departamento de Informática Teórica, Tech. Rep* (2016).

[14] Robertson, N. e Seymour, P. D. "Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width". Em: *Journal of Algorithms* 7 (1986), pp. 309–322.

[15] Robertson, N. e Seymour, P. D. "Graph minors. III, Planar tree-width". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 36 (1984), pp. 49–64.

[16] Robertson, N. e Seymour, P. D. "Graph minors. V. Excluding a planar graph". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 41 (1986), pp. 92–114.

[17] Robertson, N. e Seymour, P. D. "Graph minors. VIII. A Kuratowski theorem for general surfaces". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 48 (1990), pp. 255–288.

[18] Robertson, Neil e Seymour, Paul D. “Graph Minors. IV. Tree-width and Well-quasi-ordering”. Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 48 (1990), pp. 227–254.

[19] Silva, Aline Alves da. “Decomposição e largura em árvore de grafos planares livres de ciclos pares induzidos”. Em: (2007).

[20] Simpson, S. G. “Non-provability of certain combinatorial properties of finite trees”. Em: *Harvey Friedman's Research of the Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1985, pp. 87–117.

[21] Thomas, R. “A Menger-like property of tree-width. The finite case”. Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* (1990). To appear.